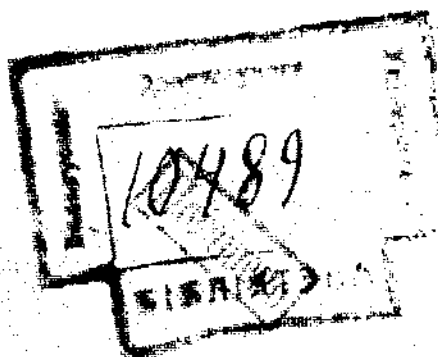


ИНЖ. С. Ю. КАЛЕЦКИЙ

ЧЕРЧЕНИЕ

С ЭЛЕМЕНТАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**УЧЕБНИК
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ**



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА • 1934**

Инж. С. Ю. КАЛЕЦКИЙ

Депозитарий

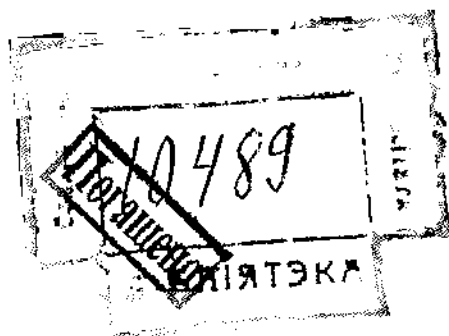
ЧЕРЧЕНИЕ

С ЭЛЕМЕНТАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Допущен Наркомпросом РСФСР

11409342



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Ответств. редактор *В. Т. Сизирев*.
Техн. редактор *И. И. Кутин*.

Сдано в набор 16/VIII 1934 г. Подписано к печати 15/X 1934 г.
Формат бумаги 62 X 94₁₆. Бумага № 2 фабрики им. Менжинского. Тираж 7 000 экз.
Изд. листов 16. Бум. листов 8. Авт. лист. 19,2. В 1 бум. листе 109 000 печ. зн.

У-91, Учпедгиз № 6314. Заказ № 3551.
Уполн. Главлита Б-40400.

1-я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфиништа“. Москва, Воровая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

При составлении предлагаемого курса черчения с элементами начертательной геометрии автор стремился создать учебник, согласованный с программой курса этой дисциплины на математических и физических отделениях педвузов. Имея в виду, что будущий преподаватель математики и физики должен уметь не только читать и составлять изображения пространственных фигур на плоскости, но и давать учащимся четкие объяснения принятых ими приемов построения, автор счел необходимым, в отличие от большинства существующих курсов по черчению, связать принятые приемы геометрических построений на плоскости, представляющих обычно частные случаи общей задачи, с решением геометрической задачи в ее общей форме. Благодаря такому подходу учащийся получает представление о значении задач на построение в практике исполнения чертежей.

Дальнейшей особенностью предлагаемого курса является характер изложения основ начертательной геометрии. Здесь автор, исходя из методических соображений, отклоняется от принятой в большинстве русских учебников системы трактовки проекций на одну плоскость с высотными отметками в качестве дополнительной главы после изложения всего курса ортогональных проекций на две и на три плоскости.

В согласии с новейшими иностранными курсами по начертательной геометрии автор начал изложение основ ортогонального проектирования с решения основных задач при помощи ортогонального проектирования на одну плоскость, и только после этого дается решение тех же задач методами проектирования на две и три плоскости. Автору представляется, что проектирование на одну плоскость составляет менее сложное отвлечение от реально изображаемого тела и на первое время легче дает понятие о реконструкции пространственной формы по чертежу на плоскости, чем изображение в двух проекциях. Время, затраченное на предварительное прохождение этой главы, окупается более быстрым усвоением решения этих же задач при помощи ортогональных проекций на две плоскости.

Кроме того такое построение изложения дает возможность дать теоретическое обоснование приемов аксонометрических изображений уже в самом начале проекционного черчения.

Развитие пространственного воображения, необходимого для умения читать чертеж, значительно облегчается, если наряду с ортогональной проекцией на одну или на две плоскости давать наглядный чертеж, приближающийся к перспективному. Такие наглядные изображения достигаются в так называемых аксонометрических проекциях. Умение

переходить от эюра к аксонометрическому изображению и наоборот представляет наиболее точную проверку правильности чтения чертежа. Ввиду этого автор считает необходимым проводить усвоение приемов составления аксонометрических изображений на всем протяжении курса проекционного черчения, давая для всех задач наряду с эюром аксонометрическое изображение.

При этом в целях упрощения техники изображения автор рекомендует для всех случаев, за исключением некоторых тел вращения, делать наглядные изображения в так называемой кабинетной проекции, а для тел вращения — в изометрии. Автор считает необходимым совершенно отказаться от ортогональной диметрии, которая по наглядности не имеет никаких преимуществ перед кабинетной проекцией при огромном преимуществе последней в смысле простоты построения.

Курс черчения состоит из следующих частей:

1. Геометрические построения плоских фигур, где наряду с решениями геометрических задач на построение даны примеры технических применений этих построений.

2. Проекционное черчение, где даются способы изображения пространственных фигур при помощи проекции на одну плоскость (с числовыми отметками) и проекций на две и три плоскости. В этом разделе даны все элементы построения и чтения технических чертежей.

3. Третий раздел включает все установленные практические приемы выполнения технических чертежей, которые частично применялись уже при выполнении чертежей в первых двух разделах. Этот раздел по существу является справочным, и на него имеются ссылки в соответствующих местах первых двух разделов.

ЧЕРТЕЖНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Обычными принадлежностями для черчения служат: 1) готовальня, 2) чертежная доска, 3) рейсшина, 4) угольники, 5) линейка, 6) масштабная линейка, 7) транспортир, 8) лекала, 9) карандаши, 10) бумага для черчения, 11) резинка, 12) кнопки, 13) тушь.

§ 1. Готовальня.

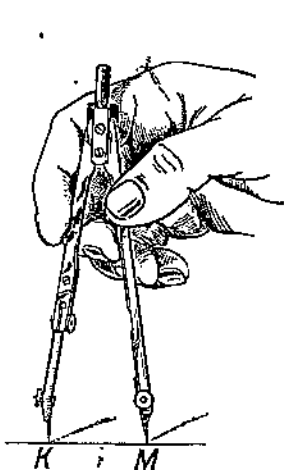
Готовальня представляет собой набор чертежных инструментов в футляре. Качество готовальни определяется не количеством имеющихся в ней инструментов, а качеством основных инструментов, каковыми являются измерительный циркуль, чертежный циркуль, рейсфедер и кронциркуль.

Уход за готовальней требует особого внимания, так как при неправильном уходе готовальня легко приходит в негодность. При правильном же уходе готовальня может служить неопределенно долгое время. После каждого хотя и непродолжительного употребления надлежит все инструменты протереть чистой замшей и тщательно уложить в футляр.

Чистку инструментов можно производить мягкой тряпкой.

Измерительный циркуль служит для измерений длин отрезков на чертеже, но отнюдь не на изделиях и для нанесения размеров на бумагу. При откладывании размеров необходимо обра-

тить внимание на то, чтобы расстояние между ножками циркуля не изменялось вследствие ослабления шарнира. Держать циркуль надо четырьмя пальцами правой руки, как показано на чертеже 1. Ножки циркуля должны быть хорошо заострены. Очень удобны измерительные циркули с одной пружинящей ножкой, передвигаемой микрометрическим винтом. При снятии размера производится правой рукой приблизительная установка ножек на размер, несколько больший данного размера, а окончательное доведение до требуемого размера производится левой рукой поворотом гаечки микрометрического винта (черт. 2).



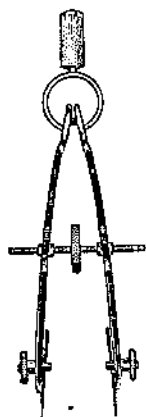
Черт. 1.



Черт. 2.

Для получения точных размеров нужно измерительным циркулем снимать размеры при угле раскрытия ножек, меньшем 60° . При большем угле раскрытия острый циркуль дает неправильный укол.

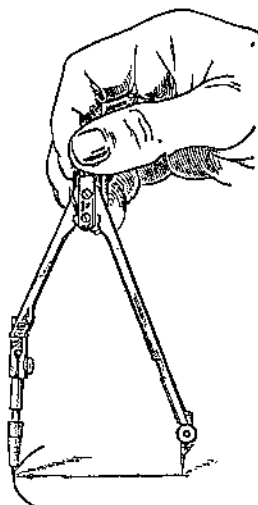
Для измерения и переноса малых расстояний удобно пользоваться малым пружинным циркулем с микрометрическим винтом (черт. 3).



Черт. 3.

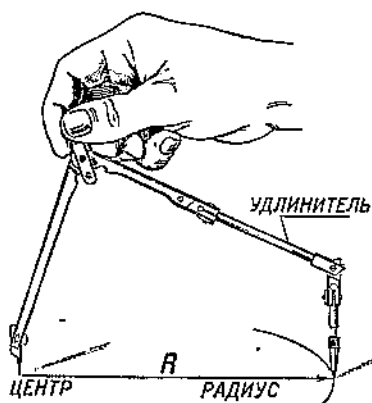


Черт. 4.

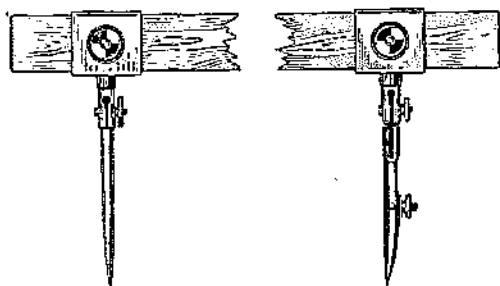


Черт. 5.

Для вычерчивания окружностей употребляют *чертежный циркуль* (черт. 4). Одна ножка циркуля делается вставной. Карандаш, закрепляемый во вставной ножке, должен быть тщательно зачищен тонким острием. Необходимо также обратить внимание на то, чтобы длина обеих ножек циркуля была одинаковой и чтобы иголка опорной ножки циркуля при работе была перпендикулярна к плоскости чертежа. Точно так же и ножка с карандашом должна быть,



Черт. 6.

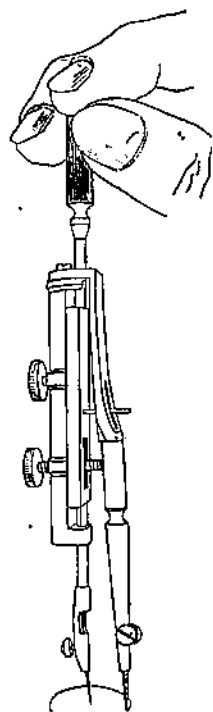


Черт. 7.

по возможности, перпендикулярна к плоскости чертежа. Это достигается сгибанием ножек в шарнирных сочленениях (черт. 5).

При черчении окружностей большого диаметра пользуются удлинительной вставкой (черт. 6) или штангенциркулем (черт. 7).

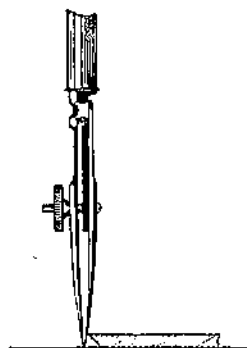
Для проведения окружностей малого диаметра пользуются *кронциркулем*, ножки которого разводятся с помощью винта (черт. 8).



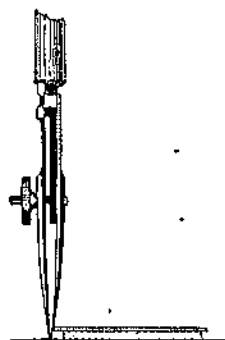
Черт. 8.



Черт. 9.



Черт. 10.



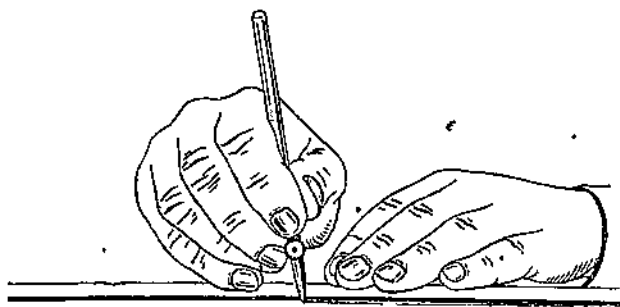
Черт. 10а.

сохраняется постоянная толщина линии. Ввиду этого при обводке длинных линий значительной толщины проводят две тонкие линии и промежуток заливают тушью. Кроме того важно, чтобы при вычерчивании линии тушью перо передвигалось равномерно, без задержек. Если количество туши, заключенное между щечками, значительно уменьшается, то тушь легко засыхает, что ведет к отказу чертежного пера от работы и требует кропотливой чистки.

С другой стороны, излишне большое количество туши ведет к выпадению ее на бумагу при возможном сотрясении пера.

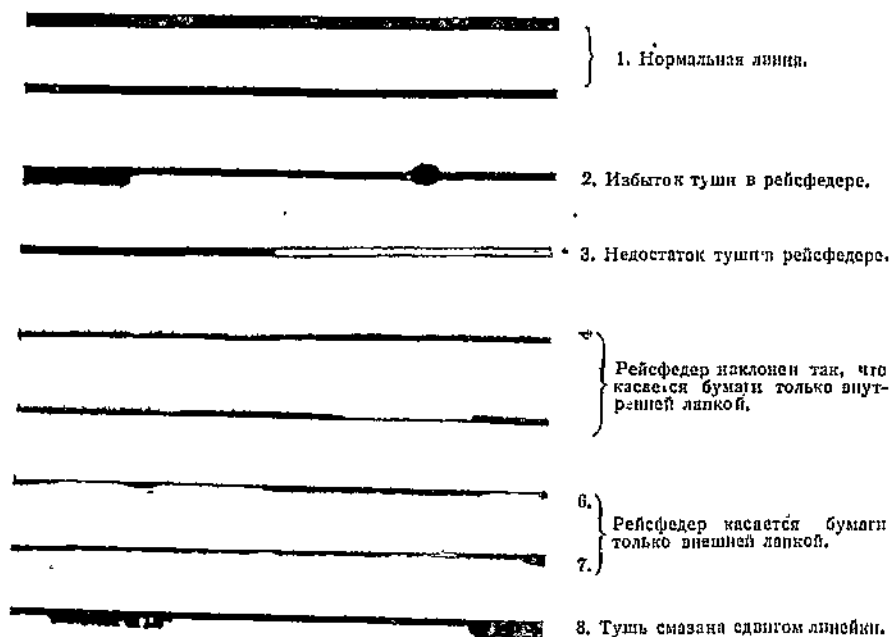
При проведении линии тушью необходимо, чтобы обе щечки чертежного пера касались бумаги. Отсюда вытекает, что рейсфедер должен быть установлен перпендикулярно к плоскости бумаги, при этом рейсфедер скользит вдоль верхнего ребра линейки и линия проводится на некотором расстоянии от линейки. Если рейсфедер недостаточно выпуклый и линейка тонкая, то во избежание затечки туши под линейку применяют скошенную линейку (черт. 10) или подкладывают, несколько отступая от края вовнутрь, другую линейку (черт. 10а). При проведении

рейсфедером линии по линейке ни в коем случае нельзя опираться на чертеж правой рукой, которая должна оставаться совершенно свободной. Передвижение рейсфедера должно производиться всей правой рукой, а не только кистью руки (черт. 11).



Черт. 11.

Если держать рейсфедер не перпендикулярно, то легко получаются дефектные линии, которые тем резче выявляются, чем толще сама линия. На чертеже 12 показаны дефектные линии с указанием причины их образования.



Черт. 12.

Для наполнения чертежного пера тушью следует набирать тушь из флакона гусиным пером или лопаточкой, вделанной в пробку. Не рекомендуется набирать тушь полоской бумаги или кистью, так как при этом возможно попадание между щечками рейсфедера волокон бумаги или волоска кисти. Не следует

касаться створок рейсфедера руками, хотя бы и чистыми, так как попадание жира на щечки рейсфедера затрудняет стекание туши и приводит к получению дефектной линии.

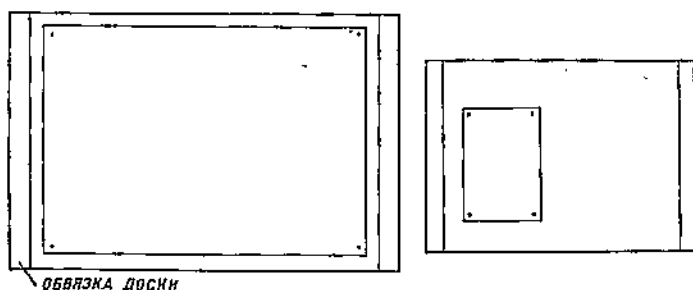
§ 2. Чертежная доска.

К чертежной доске предъявляются следующие требования: рабочая поверхность доски должна быть совершенно плоской и одна боковая грань (левая) — совершенно ровной. Взаимная перпендикулярность смежных боковых граней хотя и желательна, но не является необходимым условием, так как в работе для проведения взаимно перпендикулярных прямых пользуются более точным инструментом — угольником.

Доска требует внимательного ухода: на рабочей стороне доски нельзя делать никаких углублений и надписей. Перед наклеиванием бумаги необходимо очистить доску от пыли и соринок.

Размеры досок соответствуют форматам бумаги; ходовые размеры досок: $1000\text{ мм} \times 700\text{ мм}$ и $700\text{ мм} \times 500\text{ мм}$ (доска на целый ватман, доска на половину ватманского листа).

На чертеже 13 представлена чертежная доска с обвязкой по бокам.



Черт. 13.

§ 3. Рейсшина, линейка и угольник.

Для проведения линий параллельно верхнему краю чертежа (горизонтальных линий) служит *рейсшина*, представляющая собой линейку с крестообразно укрепленной неподвижной головкой. Часто на неподвижной головке наложена вращающаяся подвижная головка, которая может быть закреплена под любым углом к линейке с помощью закрепляющего винта.

Рейсшиной с неподвижной головкой пользуются при проведении линий, параллельных верхнему краю чертежного листа (горизонтальных линий). Устанавливая подвижную головку под тем или иным углом, можно проводить параллельные прямые в любом направлении.

Линейка служит для проведения прямых линий через любые две точки. Она должна быть совершенно плоской, без сучков, зазубрин и выступов. Линейки часто изготавливаются с нанесением на них миллиметровых делений. Такие линейки удобны при выполнении чертежей, не требующих большой точности.

Угольники. Для проведения взаимно перпендикулярных и параллельных прямых на чертеже применяют прямоугольные треугольники (угольники), изготовляемые из различных материалов: грушевого дерева, каучука, целлулоида и др. Обычно употребляются прямоугольные треугольники двух видов: треугольник с острыми углами в 60° и 30° и равнобедренный прямоугольный треугольник (чертеж 14). К чертежным угольникам предъявляют следующие требования: ребра должны быть прямолинейные без зазубрин, прямой угол —

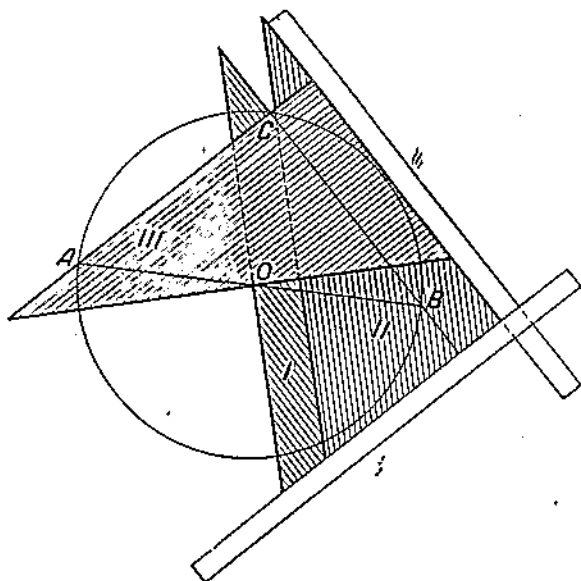
правильный. На чертеже 15 показан способ проверки угольника, дающий возможность выверить прямолинейность гипотенузы и правильность прямого угла.

Проверка производится следующим образом. Проводим прямую по гипотенузе треугольника. Прикладывая линейку вдоль большего катета треугольника, придерживаем линейку левой рукой, поворачиваем угольник вокруг вершины прямого угла так, чтобы к линейке прилегал меньший катет, и чертим вдоль гипотенузы прямую CD , перпендикулярную к AB . Придерживая левой рукой треугольник, перемещаем линейку, прикладываем ее к большому катету и, удерживая линейку в новом положении, вновь поворачиваем треугольник вокруг вершины прямого угла, прикладываем меньшим катетом к линейке, передвигаем его вдоль последней до совпадения с какой-нибудь точкой прямой AB . Если при этом вся гипотенуза совпадает с прямой AB , то треугольник имеет точный прямой угол, и ребро гипотенузы прямолинейное.

Черт. 15.

Второй способ проверки угольника основан на свойстве вписанного угла, опирающегося на концы диаметра, и состоит в следующем.

Произвольным радиусом проводим окружность и через центр O — диаметр AB (черт. 16). К точке B прикладываем больший катет проверяемого угольника и проводим (в произвольном направлении) хорду BC . Придерживая угольник левой рукой, прикладываем к меньшему катету линейку и, удерживая последнюю неподвижно, передвигаем вдоль линейки угольник в положение II. В этом положении придерживаем угольник



Черт. 16.

левой рукой и правой рукой прикладываем линейку к большему катету. Затем удерживаем линейку, прикладываем угольник к линейке меньшим катетом и передвигаем его вдоль линейки до тех пор, пока больший катет не пройдет через точку C . В этом положении проводим прямую вдоль катета через точку C . Если прямая угол угольника правильный, то прямая пройдет через точку A .

§ 4. Масштабная линейка.

Масштабная линейка представляет собою обычно трехугольную призму с острыми ребрами. Вдоль последних наносятся деления в миллиметрах или других единицах измерения.

Следует предостеречь от применения масштабной линейки для проведения прямых. Этим притупляются ребра и снижается точность производимых измерений.

Измерение производится или непосредственным отсчетом по линейке, приложенной к измеряемому отрезку, или при посредстве измерительного циркуля. В последнем случае измеряемый отрезок берется в циркуль, и расстояние между ножками циркуля изме-



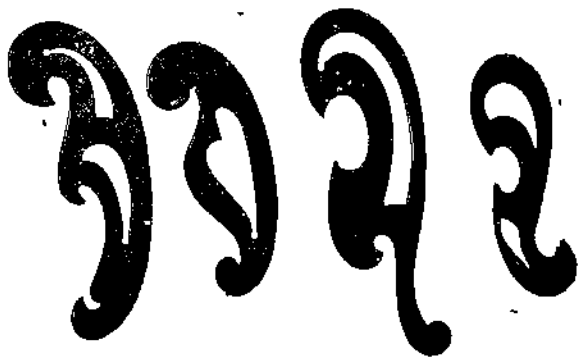
РАЗНОВИДНОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО
СЕЧЕНИЯ МАСШТАБНЫХ ЛИНЕЕК

Черт. 17.

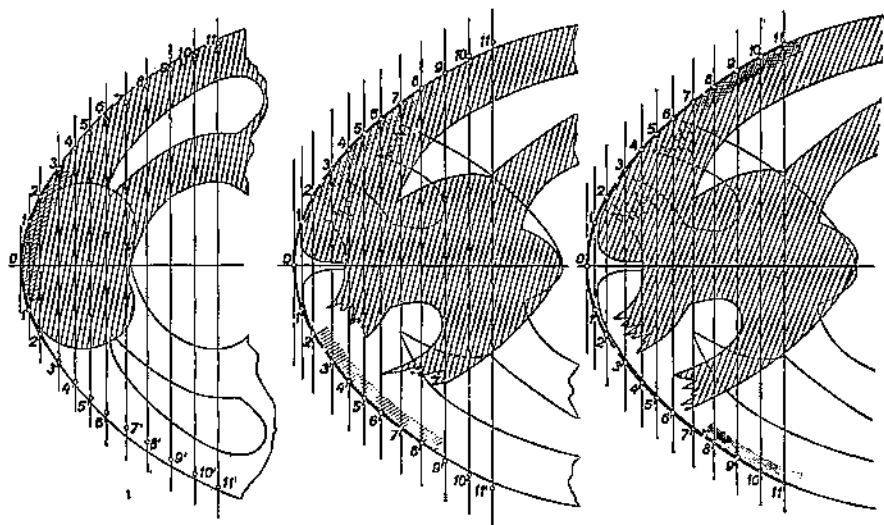
ряется по масштабной линейке. При таком измерении, равно как и при взятии с масштабной линейки заданного размера, острия циркуля должны лишь слегка касаться масштабной линейки. На чертеже 17 представлены разновидности сечения масштабной линейки.

§ 5. Лекала.

При исполнении чертежей часто приходится проводить кривые линии, которые не могут быть составлены из частей окружностей. В этом случае пользуются так называемыми *лекалами*, изображенными на чертеже 18. Лекала очерчены разными кривыми, и задача сводится к тому, чтобы соответствующим образом подобрать отдельные части кривых для получения непрерывной кривой, проходящей через все заданные точки.



Черт. 18.



Черт. 19.

Вычерчивание кривых по лекалу требует известного навыка. Способ проведения кривой по лекалу показан на чертеже 19. При пользовании лекалом следует подбирать участки лекала таким образом, чтобы выбранным участком можно было проводить часть кривой, проходящую не менее чем через три первые отмеченные точки. В дальнейшем подбирают лекало так, чтобы кривая проходила через две последние точки первой части и по крайней

мере через одну следующую точку. При обводке первой части доводят кривую до предпоследней точки. Таким образом, второе положение лекала частично перекрывает кривую, проведенную при предшествующем положении лекала, и этим обеспечивается достаточно плавный переход от одной части кривой к следующей.

На чертеже 19 кривая состоит из двух симметричных половин, и каждая половина кривой проведена в 3 приема.

I. Выбран участок лекала, перекрывающий точки 0, 1, 2 и 3, причем кривая не доведена до точки 3.

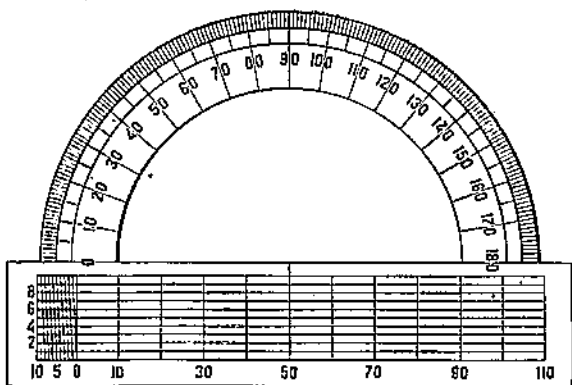
II. Рабочий участок лекала перекрывает точки 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9; кривая проведена с небольшим разрывом, начиная с конца первого участка и не доходя до точки 8.

III. Рабочий участок лекала перекрывает точки 7, 8, 9, 10, 11; кривая проведена с небольшим разрывом, начиная с конца второго участка. Разрывы заполняются при помощи рейсфедера по линейке или чертежным перышком.

После проведения каждого участка проводится соответствующий симметричный участок (точки 0, 1', 2', 3'; 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8'; 7', 8', 9', 10', 11').

§ 6. Транспортир.

Для измерения и построения углов пользуются *транспортиром* — полукольцом из картона, металла или целлулоида с нанесенными на нем делениями в 1° каждое (черт. 20). Заканчивается полукруг линейкой с параллельными краями. Один край линейки совпадает с диаметром, и на нем имеется метка, совпадающая с центром полукольца.



Черт. 20.

§ 7. Прочие принадлежности для черчения.

Карандаши. Для придания чертежу четкости и для ускорения работы требуется выбрать карандаш подходящей твердости. Слишком мягкие карандаши загрязняют чертеж и дают расплывчатые линии. Слишком твердые карандаши дают бледную линию и часто оставляют следы после стирания резинкой. Твердость карандаша обозначена буквами или цифрами.

BB — №1 — очень черный и мягкий,

B — мягкий и черный,

HB — № 2 — твердый и черный,

F — № 3 — средний,

H — довольно твердый,

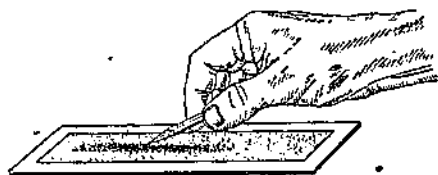
HH — № 4 — твердый,

HHH — очень твердый,

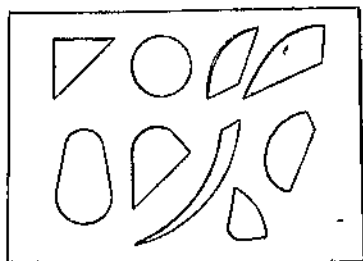
HHHH — № 5 — весьма твердый.

Наиболее употребительные карандаши: HB — № 2, F — № 3, HH — № 4.

Затачивать концы карандашей нужно, срезая дерево отлогим конусом, и заостряя графит на конце. Применяется также заточка конца графита лопаточкой. Последний способ применяется только при обводке, так как он дает возможность проводить линии желательной толщины. Заточка графита карандаша производится на полоске наждачной бумаги (черт. 21).



Черт. 21.



Черт. 22.

При черчении линий карандашом не следует нажимать последним на бумагу. При проведении линий карандаш следует слегка наклонять в направлении его движения.

Бумага. По стандарту (ОСТ 3022) изготавливаются три сорта чертежной бумаги: 1) чертежная высшая весом 200 г в 1 м², 2) чертежная обыкновенная а (весом 200 г) и 3) чертежная обыкновенная б (весом 160 г). Все чертежные бумаги имеют водяные знаки, обозначающие: ОСТ 3022, сорт бумаги и наименование производителя. Для чертежей, выполняемых в карандаше, может применяться хорошо проклеенная писчая бумага плотностью 130 г в 1 м².

Для эскизных работ употребляется обыкновенная клетчатая писчая бумага или миллиметровая бумага. Для снятия копий чертежей употребляется восковка (бумажная калька) или полотняная калька.

Чертежи должны выполняться на листах следующих размеров (ОСТ 5115):

№ формата	0	1	2	3	4	5	6
Размер листа после обрезки в миллиметрах.	814×1152	576×814	407×576	288×407	203×288	141×203	101×144

На всех чертежах, подлежащих брошюровке, следует оставлять незаполненную полоску от левого края листа шириною 25 мм. От других краев листа рамка поля чертежа должна отстоять не свыше 10 мм.

Резинка. При стирании карандашных линий надо пользоваться мягкой резинкой, с которой перед употреблением срезается острым ножом тонкий слой с рабочей стороны, без чего даже лучшая резинка будет портить бумагу. Следует стирать всегда в одну

сторону при очень легком нажиме. Для стирания линий, проведенных тушью, пользуются резинками „радоль“. Вытирание одного определенного места на чертеже производится через так называемые щитки (черт. 22).

Тушь. В практике черчения в настоящее время пользуются почти исключительно разведенной готовой тушью, продаваемой в флаконах. После каждого забора туши необходимо флакон плотно закрывать. В случае загустения туши ее можно разводить винным спиртом, но не водой, как это часто делают неопытные чертежники.

§ 8. Исполнение чертежей на классной доске.

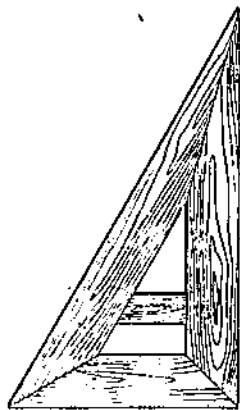
При исполнении чертежей на классной доске пользуются, как и при черчении на бумаге, циркулем, линейкой и угольником. Вместо карандаша пользуются мелом.

Мел для черчения на доске должен быть мягкий, лучше всего — палочный, зачищенный отлогим конусом. Для увеличения наглядности чертежа весьма полезно применять цветные мелки (желтый, зеленый, оранжевый, синий). Если этих цветных мелков не имеется в продаже, то их нетрудно изготовить самому. Для этого необходимо погрузить белый мел в небольших кусках (не слишком плотно спрессованный) в раствор анилиновой краски и держать в этом растворе 2—3 дня, после чего краска проникает насквозь во все поры мела, и мы получаем цветной мелок.

Проведение линий при помощи линейки и угольника производится мелом на доске теми же приемами, как при черчении на бумаге: линейка или угольник удерживаются левой рукой, а линия проводится правой рукой слева направо вдоль освещенной грани линейки или сверху вниз. В последнем случае часто приходится отказаться от проведения линии вдоль освещенной грани и для удобства ведения линии проводить ее вдоль теневой стороны.

Линейка снабжена планкой для удобства удерживания линейки одной рукой.

Классный угольник также часто снабжается планкой, но здесь эта планка является помехой для маневрирования угольником при проведении параллельных и перпендикулярных прямых. Поэтому удобнее пользоваться угольником с поперечной планкой, заделанной заподлицо со сторонами угольника (черт. 23), так как такой угольник может быть приложен к доске любой стороной.

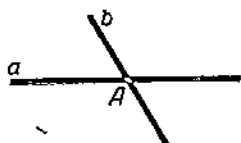


Черт. 23.

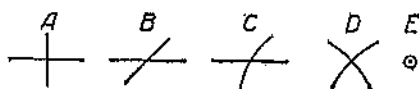
I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ.

§ 9. Геометрические образы на плоскости и их изображение на чертеже. Условия точности.

При построениях чертежа на плоскости мы имеем дело с геометрическими образами — точкой, не имеющей измерения, и линией, имеющей одно измерение; точка определяется местом пересечения двух линий. То, что мы проводим на чертеже, как изображение прямой линии, в действительности имеет более или менее значительную толщину (от 0,1 до 1,2 мм), и изображаемый геометрический образ мыслится нами как ось симметрии двух параллельных прямых, ограничивающих начерченное изображение от плоскости чертежа. Провести эту ось в действительности мы не можем, так как любой инструмент наметит и след определенной ширины. Отсюда вытекает, что геометрическая точка, получаемая в результате пересечения двух прямых одинаковой толщины, изобразится фигурой ромба, который получается в пересечении изображений двух прямых линий (черт. 24).



Черт. 24.



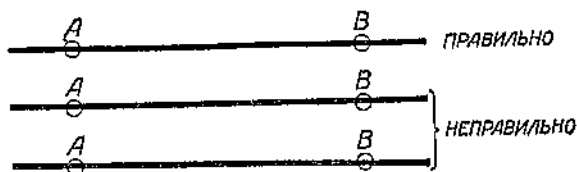
Черт. 25.

Область, внутри которой лежит геометрическая точка *A*, тем ограниченной, чем тоньше изображения линий *a* и *b*. Отсюда вытекает первое основное условие для увеличения точности построений: *чем тоньше линии, проводимые карандашом на чертеже, тем точнее может быть выполнено построение*. Однако для удобочитаемости чертежа в конечном итоге необходимо обводить его более или менее толстыми линиями. Поэтому и рекомендуется разбить процесс исполнения чертежа, независимо от степени сложности, на две стадии: 1) выполнение необходимых построений, которое производится в карандаше твердым, остро очиненным графитом, оставляющим возможно тонкий, но достаточно видимый след, и 2) обводка чертежа карандашом или тушью, при которой отдельные линии проводятся той или иной толщины, в зависимости от их назначения.

Точка на чертеже отмечается пересечением двух линий, безразлично, будут ли линии прямыми или дугами окружностей, например точки A, B, C и D (черт. 25). Точку также отмечают уколом острого карандаша или иглой циркуля (точка E). В последнем случае вокруг точки проводят кронциркулем небольшую окружность, которую необходимо оставить на все время производства построений, так как она облегчает контроль точности построения: каждая прямая, проведенная через данную точку, должна отсекал равные дуги по обе стороны окружности. Во многих случаях эти окружности оставляются и при обводке чертежа карандашом или тушью. На чертеже 26 показаны образцы правильного и неправильного проведения прямых через точку.



Черт. 26.

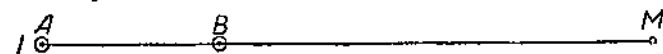


Черт. 27.

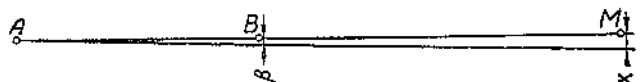
Проведение прямой через две точки. Когда говорим, что прямая проведена через две точки, то подразумеваем, что ось начерченной прямой (прямая может иметь различную толщину) проходит через центр кружка, отмечающего каждую точку. На чертеже 27 показаны правильный и неправильный способы проведения прямой через две точки.

При проведении прямых с помощью линейки необходимо придерживаться следующих правил.

1. Если положение прямой на всем ее протяжении должно быть определено возможно более точно, то точки A и B , через ко-



Черт. 28.



Черт. 29.

торые проводится прямая, следует брать возможно более отдаленными друг от друга (черт. 28). Из чертежа усматриваем, что в первом случае прямая AB определена менее точно на участке, лежащем вне отрезка AB , чем во втором. Так, если возьмем на прямой AB точку M в обоих случаях на одинаковом расстоянии от начальной точки A и допустим, что в обоих случаях при проведении прямых мы отклонились от истинного положения точки B на одинаковую величину β , то отклонение точки M от истинного положения составляет $x = \beta \frac{AM}{AB}$ (черт. 29).

т. е. это отклонение обратно пропорционально расстоянию между точками A и B .

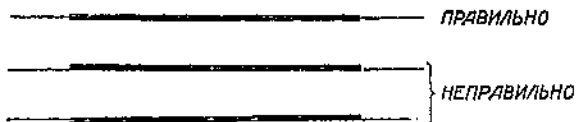
Из последнего равенства видно, что отклонение от истинного положения прямой увеличивается по мере удаления от точки, которая служит для определения прямой. Отсюда второе правило.

2. Если точка M пересечения двух прямых a и b должна быть найдена возможно более точно, то следует эти прямые определять при помощи точек, которые лежат по возможности более близко к искомой точке M .

3. Если точка M пересечения двух прямых a и b должна служить для точного определения положения последующих прямых, то прямые a и b должны пересекаться под углом, мало отличающимся от прямого, так как в этом случае указанный на чертеже 24 ромб приближается к форме квадрата, и область нахождения геометрической точки становится более ограниченной.

4. Точка пересечения двух прямых, пересекающихся под острым углом, может служить для точного проведения последующих прямых только в том случае, если вновь проводимые прямые лежат внутри острого угла или образуют с данными прямыми небольшие углы. Это видно из рассмотрения чертежа 24. При прохождении прямой внутри острого угла область расположения геометрической точки пересечения ограничивается малой диагональю ромба, мало отличающейся от толщины линии. При проведении прямой внутри тупого угла область расположения геометрической точки определяется большой диагональю ромба.

При проведении прямой карандашом необходимо тонко очищенный карандаш прижимать к линейке и проводить линию возможно ближе к нижнему ребру линейки. Это дает более точную линию, чем в том случае, когда прямая проводится на более далеком расстоянии от линейки.



• Черт. 30.

При обводке тушью, наоборот, необходимо держать внутренний край рейсфедера на некотором расстоянии от

нижнего ребра линейки во избежание заливки тушью. Обводку тушью следует вести по карандашной наметке. При этом тушь должна перекрывать карандашный след одинаково с обеих сторон (черт. 30).

§ 10. Задачи на построение; геометрографическая оценка решения.

Выполнение задач на построение основывается на теоремах, доказанных в геометрии. Геометрическими построениями занимаются уже в течение длинного ряда столетий, однако столь важный практически вопрос относительно вероятной погрешности построения, выполненного в действительности, начал разрабатываться только в самое последнее время.

Причиной этого главным образом служило то обстоятельство, что постоянно считали построение выполненным, как только было показано, каким образом оно может быть сведено к рассмотренным раньше задачам; само же построение во многих случаях вовсе не выполнялось. Поэтому простота и точность графического решения задачи не играли никакой роли.

Яков Штейнер¹⁾ был первым, кто определенно указал на то, что выполнение построений с инструментами в руках есть нечто совсем отличное от выполнения их лишь на словах.

Он говорит: „Легко сказать: я делаю это и это, а затем то; но затруднительность или даже, как можно сказать в иных случаях, невозможность действительного выполнения очень сложных построений требует, чтобы для каждой предложенной задачи было тщательно взвешено, какой из различных способов полного ее решения является простейшим, какие из операций, которые несколько легкомысленно выполняются на словах, могут быть обойдены, коль скоро дело касается устранения излишних трудностей и достижения наибольшей точности. Одним словом, речь идет о разыскании способов, при помощи которых геометрические задачи могут быть разрешены теоретически и практически наиболее просто и точно“.

Простота построения определяется по числу элементарных операций, из которых состоит построение.

Лемуан²⁾ принимает, что каждое произведенное с помощью циркуля и линейки построение составляется из четырех элементарных операций. Этими элементарными операциями являются:

- 1) прикладывание линейки к данной точке,
- 2) помещение ножки циркуля в данную точку или в произвольную точку данной прямой,
- 3) проведение прямой линии по линейке,
- 4) описывание окружности или дуги окружности.

Лемуан пытается определить степень простоты и точности каждой из этих операций. Однако, как правильно замечает Адлер („Теория и практика геометрических построений“, пер. с немецкого, 1924 г.), опыт не оправдывает сложных разделений Лемуана, а потому правильнее считать все операции одинаково простыми, и из двух конструктивных решений одной и той же задачи простейшим следует считать то, которому отвечает наименьшее число элементарных операций.

Если два конструктивных решения требуют одинакового числа операций, то при выборе того или другого способа построения следует учитывать условия точности, рассмотренные в § 9.

В практической работе чертежника получил всеобщее применение угольник, и, как мы дальше увидим, легко учесть, что проведение параллельных и перпендикулярных прямых при помощи линейки и угольника является более простым конструктивным решением задачи, чем построение тех же линий при помощи

¹⁾ Jakob Steiner. Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (1833 г.).

²⁾ E. Lemoine. „Géométrie ou art des constructions géométriques“.

циркуля и линейки. Поэтому во всех случаях, где это возможно, следует ввести в построение эти инструменты.

Способ решения задачи, требующий применения наименьшего числа элементарных операций, называется *геометрографическим*.

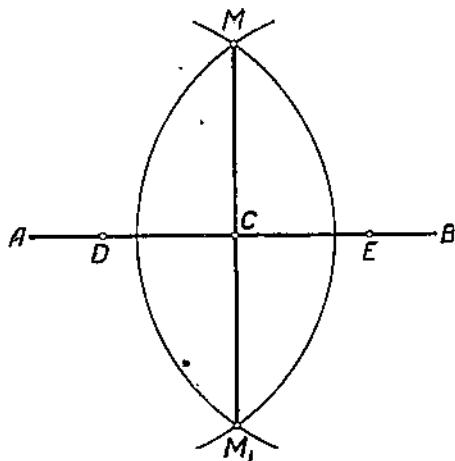
II. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 11. Проведение перпендикулярных линий.

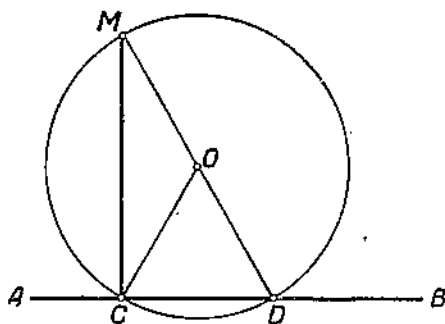
Задача 1. Построить перпендикуляр к прямой AB в данной на ней точке C .

Решение I. От точки C откладываем по обе стороны на прямой AB произвольные, но равные отрезки $CD=CE$; произвольным радиусом, большим отложенного отрезка, проводим окружности с центрами D и E до взаимного пересечения в точках M и M_1 (для построения достаточно одной точки, вторая служит для контроля точности построения). Прямая MC перпендикулярна к AB (черт. 31). (Число элементарных операций — 9.)

Доказательство. Соединив D и E с точкой M , получим два равных треугольника DCM и ECM , следовательно $\angle DCM = \angle ECM = d$.



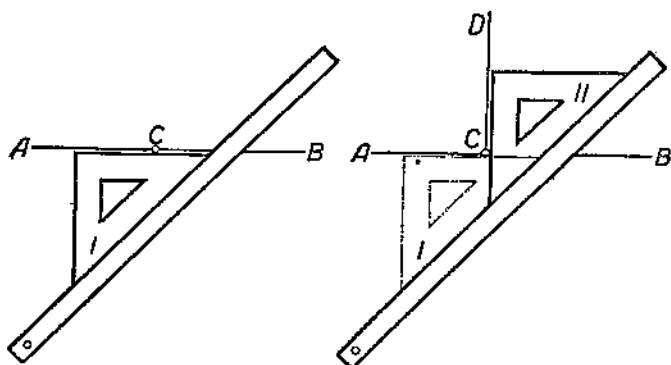
Черт. 31.



Черт. 32.

Решение II. Если точка C расположена так, что откладывать отрезок можно только в одном направлении, то для построения перпендикуляра намечаем произвольную точку O , не лежащую на перпендикуляре (удобно выбрать точку O так, чтобы $\angle OCB$ был в пределах от 45° до 60°). Из центра O радиусом OC проводим окружность, которая пересечет AB еще в одной точке D . Через точки D и O проводим диаметр DOM и точку M соединяем с C . Получим $MC \perp AB$ (черт. 32). $\angle MCD = d$ как вписанный угол, опирающийся на концы диаметра. (Число элементарных операций — 9.)

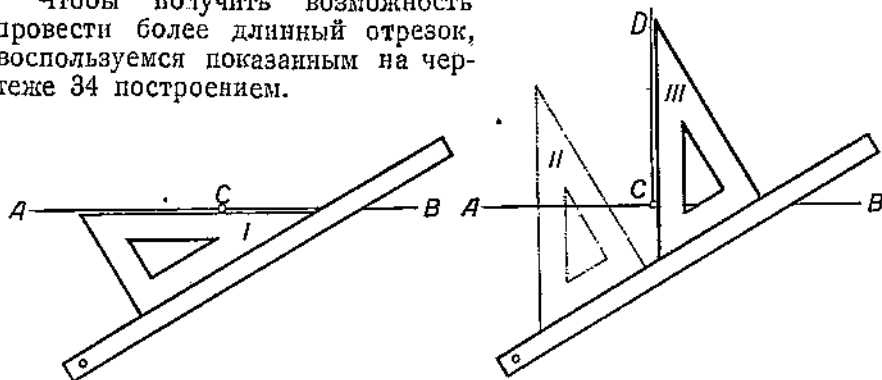
Решение III. При помощи угольника и линейки построение проводится следующим образом: при наличии равнобедренного угольника прикладываем угольник катетом к прямой AB так, чтобы данная точка C приходилась на катете и вершина прямого угла была с левой стороны (если смотреть с левой стороны). Удерживая угольник левой рукой, придвигаем к гипотенузе линейку или другой угольник. Затем удерживаем левой рукой неподвижно линейку и передвигаем угольник вдоль линейки до тех пор, пока левый катет не пройдет через данную точку C , после чего проводим вдоль этого катета искомый перпендикуляр CD (черт. 33).



Черт. 33.

Как видно из чертежа, длина проводимого подобным построением перпендикуляра ограничена и составляет часть катета.

Чтобы получить возможность провести более длинный отрезок, воспользуемся показанным на чертеже 34 построением.

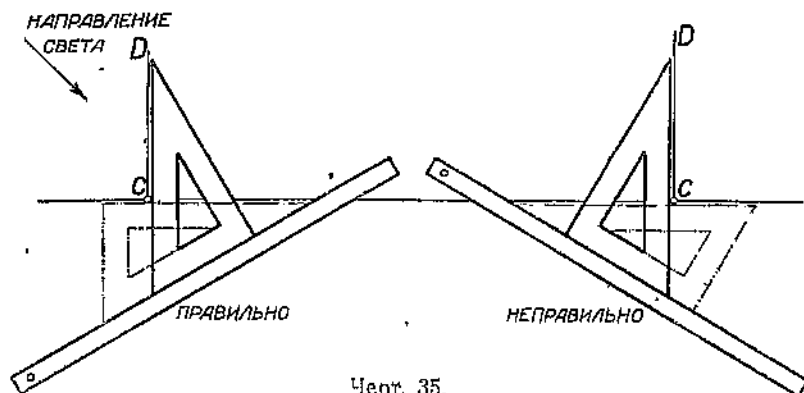


Черт. 34.

К прямой прикладываем угольник гипотенузой так (положение I), чтобы точка C приходилась на гипотенузе, а вершина большего острого угла — слева (со стороны света). Удерживая угольник левой рукой, прикладываем правой рукой линейку к большому катету (положение II). Затем удерживаем левой рукой линейку неподвижно и правой рукой поворачиваем угольник

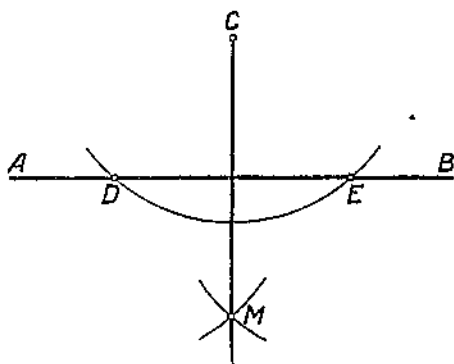
вокруг вершины прямого угла и ставим его меньшим катетом на линейку (положение II). В этом положении направление гипотенузы перпендикулярно AB . Передвигаем угольник вдоль линейки до того положения, при котором точка C совпадает с гипотенузой (положение III), и проводим искомый перпендикуляр CD .

Легко убедиться, что число элементарных операций, из которых составляется это построение, значительно меньше, чем в решениях I и II. Поэтому при пользовании проверенным угольником (способ проверки указан на стр. 10) практически получаем более точное построение, чем при пользовании циркулем.



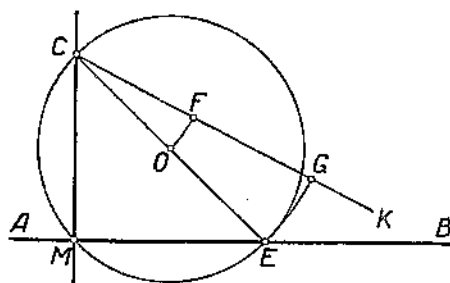
Черт. 35.

При построении надо придерживаться правила проводить линию вдоль освещенного ребра угольника, а не вдоль затененного (черт. 35).



Черт. 36.

Задача 2. Из точки, лежащей вне прямой, провести перпендикуляр к этой прямой.



Черт. 37.

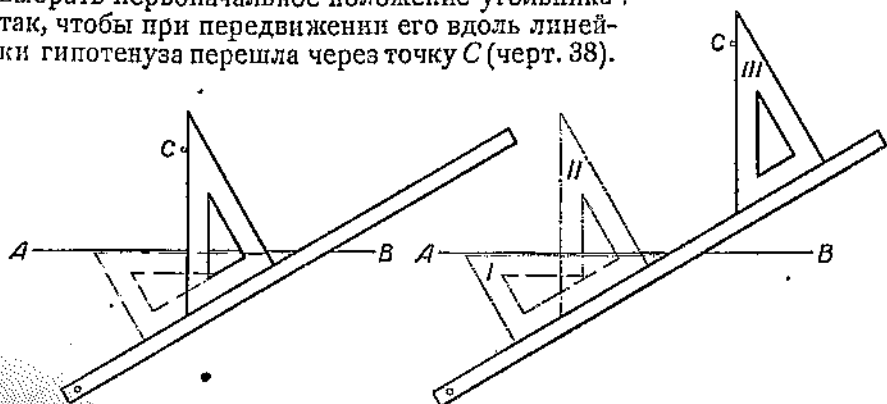
Решение I. Приняв точку C за центр (черт. 36), проводим окружность произвольным радиусом, выбранным так, чтобы она пересекала прямую AB в двух точках D и E (необходимо, чтобы точки пересечения дуги и прямой получились достаточно четко). Приняв точки D и E за центры, проводим равными радиусами окружности, которые определяют точку M , лежащую на искомом перпендикуляре CM . (Число элементарных операций — 9.)

Доказательство. Точки C и M лежат на геометрическом месте точек, равно отстоящих от концов D и E хорды DE , т. е. на перпендикуляре CM , делящем отрезок DE пополам.

Решение II. Если точка C расположена сбоку так, что одна из точек D или E не получается на чертеже, то применяется второй способ построения: через точку C проводим произвольную наклонную CK , откладываем произвольные отрезки $CF=FG$ так, что окружность, проведенная из центра C радиусом CG , пересекает прямую AB в некоторой точке E . Проводим радиус EC и откладываем на нем $CO=CF$. Из центра O радиусом $OC=CF$ проводим окружность, которая пересечет AB в основании M перпендикуляра CM (черт. 37). (Число элементарных операций — 18.)

Доказательство. $\angle CME$ — прямой как вписанный угол, опирающийся на концы диаметра CE .

Решение III. При помощи угольника и линейки эта задача решается совершенно так же, как и задача I. Нужно только выбрать первоначальное положение угольника так, чтобы при передвижении его вдоль линейки гипотенуза перешла через точку C (черт. 38).

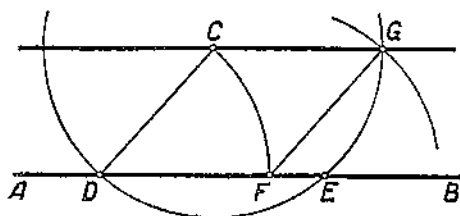


Черт. 38.

§ 12. Построение параллельных прямых.

Задача 3. Через данную точку C , лежащую вне прямой AB , провести параллель к этой прямой.

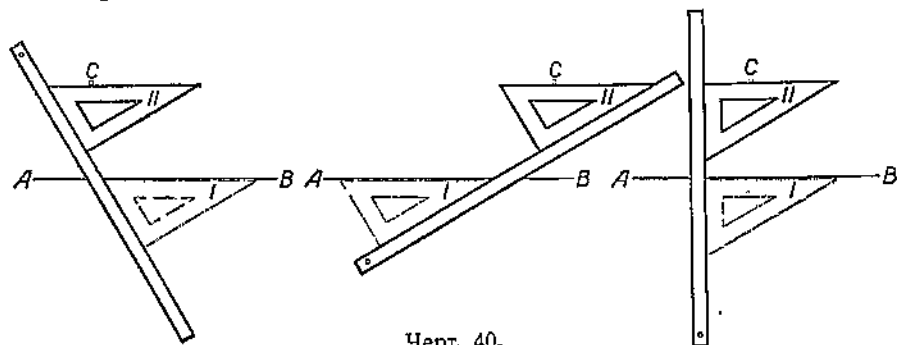
Решение I. Проведем окружность с центром C (черт. 39), пересекающую прямую AB в точках D и E , и на AB отложим $DF=DC$. Радиусом, равным DC , проведем дугу с центром F , которая пересечет



Черт. 39.

окружность, с центром C , в точке G . Прямая CG параллельна AB , так как фигура $CDFG$ — ромб. (Число элементарных операций — 10.)

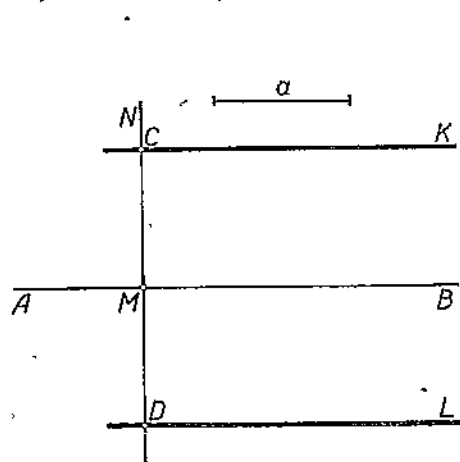
Решение II. К прямой AB (черт. 40) прикладываем угольник (большим катетом или гипотенузой). Придерживая угольник рукой, прикладываем к одной из свободных сторон угольника линейку. Затем, придерживая левой рукой линейку, ведем вдоль нее угольник до встречи с данной точкой. Прямая, проведенная через данную точку вдоль того же ребра угольника, которое было приложено к прямой AB , параллельна этой прямой.



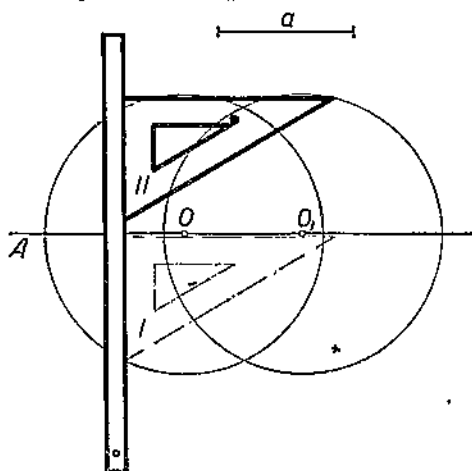
Черт. 40.

Задача 4. На расстоянии a от данной прямой AB провести параллельную прямую.

Решение I. В произвольной точке M прямой AB (черт. 41) проводим (с помощью угольника и линейки) прямую $MN \perp AB$, откладываем $MC = MD = a$ и через точки C и D проводим (с помощью угольника и линейки) прямые $CK \parallel AB$ и $DL \parallel AB$.



Черт. 41.



Черт. 42.

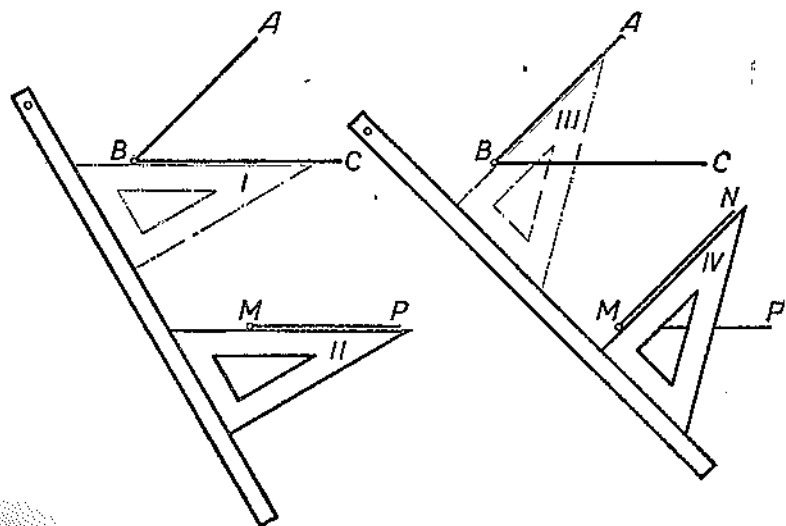
Если заданное расстояние превышает длину гипотенузы угольника, то проведенный при помощи угольника перпендикуляр требуется продолжить, что увеличивает неточность построения. В этом случае удобнее вести построение следующим образом: на прямой AB берем две произвольные точки O и O_1 , удаленные одна от другой на расстояние, меньшее большего катета угольника,

и приняв эти точки за центры, описываем окружности радиусом, равным отрезку a . При помощи угольника и линейки проводим параллели, касающиеся обеих окружностей (черт. 42).

§ 13. Построение углов.

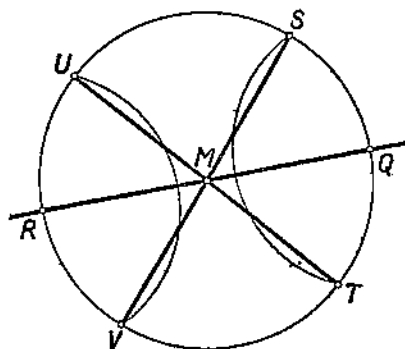
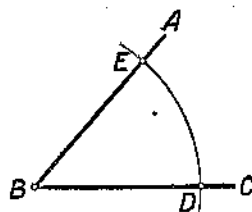
Задача 5. Построить угол, равный данному углу.

I. Если задана только вершина M нового угла (черт. 43), а направление сторон может быть выбрано произвольно, то построение удобнее всего провести путем проведения через точку M прямых, параллельных сторонам AB и BC данного угла ABC ; получим $\angle NMP = \angle ABC$.



Черт. 43.

II. Если направление одной стороны задано, то построение выполняем следующим образом (черт. 44): произвольным радиусом проводим дугу с центром B , пересекающую стороны BA и BC в точках E и D . Не изменяя раздвига ножек циркуля, проводим окружность с центром M , пересекающую данную прямую в точках Q и R . Затем, поставив острый циркуль в точку D , измеряем расстояние DE и полученным раствором циркуля проводим из центров Q или R окружность, пересекающую окружность, M

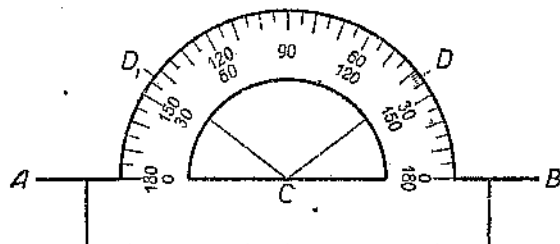


Черт. 44.

в точках S , T или U , V . Проводя прямую через одну из точек S , T , U или V и центр M , получим искомый угол $\angle SMQ = \angle ABC$, или $\angle TMQ = \angle ABC$, или $\angle UMR = \angle ABC$, или $\angle VMR = \angle ABC$. (Число элементарных операций — 10.)

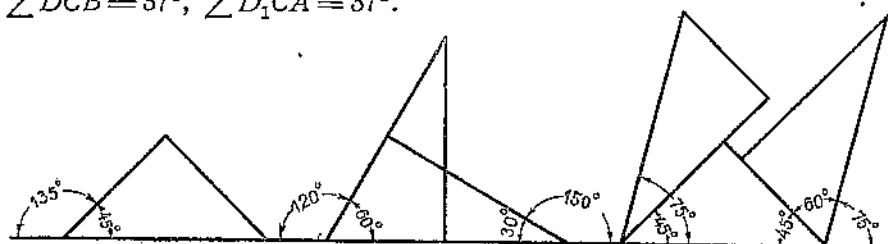
Если угол задан числом градусов, то построение можно провести при помощи транспортира.

Задача 6. Через данную на прямой AB точку C провести прямую под углом в 37° к прямой AB .



Черт. 45.

Прикладываем к прямой AB (черт. 45) диаметр транспортира так, чтобы центр его совпал с точкой C , и по отметкам транспортира намечаем точку D или D_1 против соответствующего деления транспортира. Отняв транспортир, проводим искомую прямую DC или D_1C и получаем $\angle DCB = 37^\circ$, $\angle D_1CA = 37^\circ$.



Черт. 46.

При помощи чертежных угольников можно построить с большой точностью углы в 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , 105° , 120° , 135° , 150° и т. д. (черт. 46).

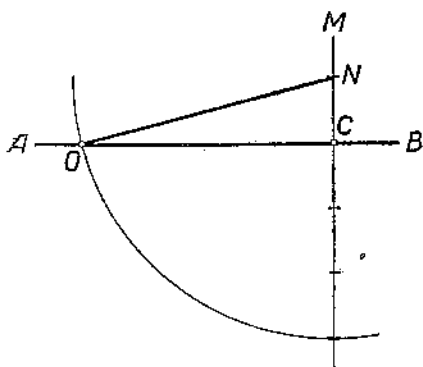
Задача 7. Построить:

- 1) $\arcsin x = \frac{1}{4}$; 2) $\arccos x = \frac{2}{3}$;
- 3) $\arctg x = \frac{3}{5}$; 4) $\operatorname{arctg} x = \frac{7}{3}$.

1) На прямой AB в произвольной точке C проводим при помощи угольника и линейки $CM \perp AB$; откладываем произвольный отрезок CN , и из центра N радиусом, равным $4CN$, проводим окружность до пересечения с AB в точке O . Соединяя

N с O прямой, получим искомый $\angle NOC = x$ (черт. 47).

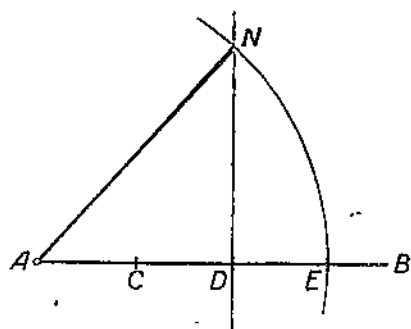
Действительно, $\sin \angle NOC = \frac{NC}{NO} = \frac{NC}{NA} = \frac{1}{4}$.



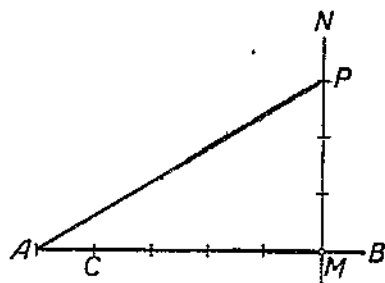
Черт. 47.

2) На прямой AB (черт. 48) откладываем последовательно три равных отрезка: $AC=CD=DE$. Проводим радиусом AE окружность с центром A ; при помощи угольника и линейки проводим $DN \perp AB$ и точку N пересечения DN с окружностью соединяем с A , получим искомый $\angle NAE$. Действительно

$$\cos \angle NAE = \frac{AD}{AN} = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}.$$



Черт. 48.



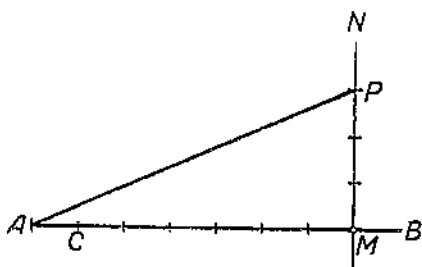
Черт. 49.

3) На прямой AB (черт. 49) откладываем $AM=5AC$; в точке M проводим $MN \perp AB$ и откладываем $MP=3AC$. Точку P соединяем с A прямой и получаем искомый $\angle PAM$, так как

$$\operatorname{tg} \angle PAM = \frac{3}{5}.$$

4) Решение этой задачи станет понятным из чертежа 50, если принять во внимание, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Построение углов по данным значениям тригонометрических функций находит практическое применение в топографии, где по измеренному расстоянию между двумя точками A и P на местности и по превышению PM точки P над A требуется начертить план, т. е. определить заложение AM , или, наоборот, по плану, на котором заданы заложение AM и высота PM , требуется построить профиль и определить крутизну, т. е. угол уклона или расстояние AP на местности.



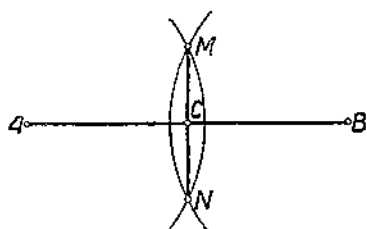
Черт. 50.

§ 14. Деление отрезка на равные части.

Задача 8. Разделить данный отрезок пополам.

Приняв концы A и B отрезка AB (черт. 51) за центры, проводим окружности равными радиусами, большими половины AB . Прямая MN , соединяющая точки M и N пересечения этих окружностей, пересекает AB в точке C — середине отрезка AB .

Для получения наиболее точного результата следует выбрать радиус окружностей, возможно мало отличающийся от половины отрезка AB . Хотя при этом окружности пересекаются под небольшим острым углом, но прямая, соединяющая обе точки пересечения, проходит внутри угла и может быть проведена с достаточной точностью. Кроме того точки пересечения расположены при этом возможно ближе к искомой точке пересечения, а потому хотя положение перпендикуляра может оказаться и недостаточно точным на всем его протяжении (п. 1, стр. 17), но сама точка пересечения будет при этом определена с наибольшей точностью (пп. 3 и 4).



Черт. 51.

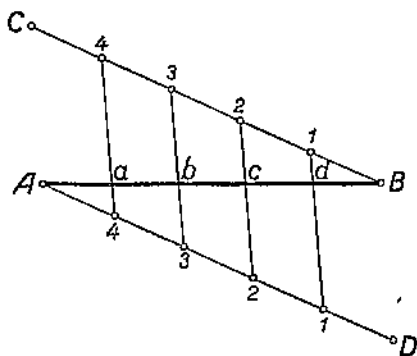
Деля последовательно половину отрезка пополам и т. д., можем разделить отрезок на 2^n равных частей.

Деля последовательно половину отрезка пополам и т. д., можем разделить отрезок на 2^n равных частей.

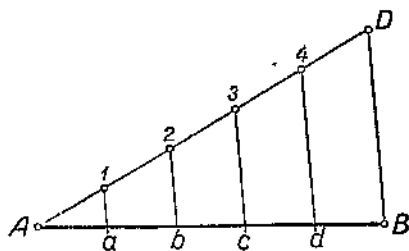
Задача 9. Разделить данный отрезок на произвольное число n равных частей.

1) В концах A и B данного отрезка (черт. 52) проведем под произвольным (лучше всего острым) углом по разные стороны AB параллельные лучи BC и AD ; отложим на них от точек B и A равные отрезки, по $(n-1)$ отрезков на каждом луче. Пронумеруем точки деления на обоих лучах в обратном порядке, как показано на чертеже. Соединяя одноименные точки прямыми, отсечем на данном отрезке n равных частей. На чертеже 52 сделано построение при $n=5$. Длину отрезков необходимо выбрать так, чтобы прямые 1-1, 2-2 и т. д. пересекали AB под углом, близким к прямому.

Доказательство. Прямые 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 параллельны как противолежащие стороны параллелограммов и отсекают от стороны AB угла CBA равные отрезки: $ab=bc=cd=dB$; рассматривая $\angle BAD$, найдем: $Aa=ab$, следовательно $Aa=ab=bc=cd=dB$.



Черт. 52.



Черт. 53.

2) На произвольном луче, проведенном в точке A под произвольным острым углом к AB (черт. 53), откладываем n равных отрезков, соединяем конечную точку D последнего отрезка с B

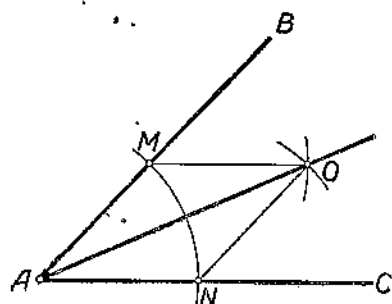
и через точки 1, 2, 3... проводим параллели к прямой BD . Эти параллели на отрезке AB отсекут n равных отрезков. И здесь длину отрезков $A-1$, $1-2$ и т. д. следует выбрать таким образом, чтобы прямая DB пересекла AB под углом, близким к прямому.

3) В практической работе деление отрезка на произвольное число равных частей можно с достаточной степенью точности произвести при помощи мерительного циркуля. Для этого берут на-глаз или по измерительной линейке раствор циркуля, равный n -й части данного отрезка, и откладывают n раз от начальной точки данного отрезка. Если конечная точка не попадет в точку B , то полученную разность делят на-глаз на n частей и на одну такую часть изменяют величину раствора циркуля. После двух-трех проб можно получить практически очень точное деление отрезка на любое число равных частей.

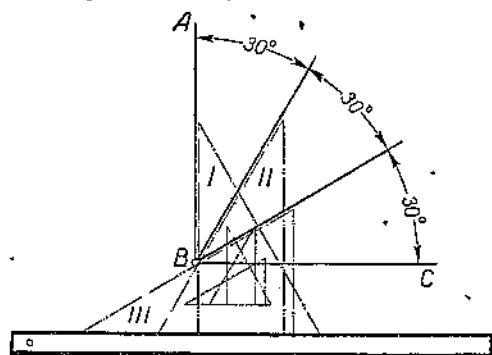
§ 15. Деление угла на равные части.

Задача 10. Разделить данный угол пополам.

Произвольным радиусом из вершины A данного угла BAC (черт. 54) проводим дугу, пересекающую стороны угла в точках M и N ; из центров M и N равными радиусами проводим дуги, которые пересекаются в точке O . Прямая AO делит угол BAC пополам. (Число элементарных операций — 9.)



Черт. 54.



Черт. 55.

Доказательство. Соединив O с точками M и N , получим два равных треугольника AMO и ANO , а потому $\angle MAO = \angle NAO$.

Путем последовательного деления пополам каждой половины можно разделить угол на 4, 8, 16, ..., 2^n равных частей.

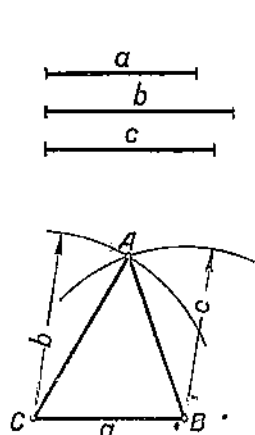
Задача 11. Разделить угол на произвольное число равных частей.

Эта задача при помощи циркуля и линейки не может быть разрешена. В практической чертежной работе деление угла на произвольное число равных частей можно произвести при помощи транспортира. Для этого измеряют величину заданного угла и строят угол, равный требуемой части измеренного угла.

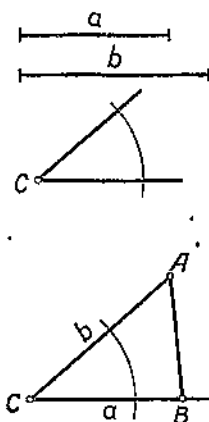
Этот способ деления угла на части дает весьма неточные результаты. Более точные результаты мы можем получить, если с помощью измерительного циркуля разделим дугу, проведенную

из вершины угла между его сторонами, на требуемое число частей. Деление это проводится теми же приемами, как и деление отрезка. При некотором навыке можно достигнуть требуемой точности деления после двух-трех проб.

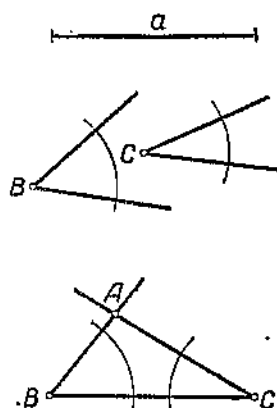
В частных случаях, когда данный угол представляет кратное углов, которые легко построить при помощи линейки и угольников, можно воспользоваться этими инструментами для деления угла на части. На чертеже 55 показано деление прямого угла на 3 части при помощи угольника.



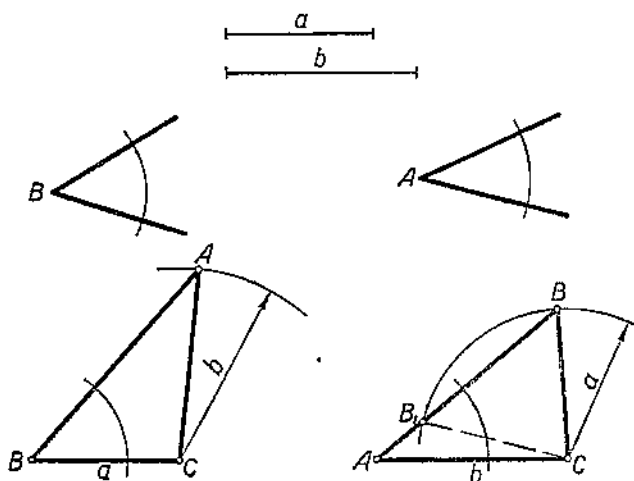
Черт. 56.



Черт. 57.



Черт. 58.



Черт. 59.

§ 16. Построение треугольников.

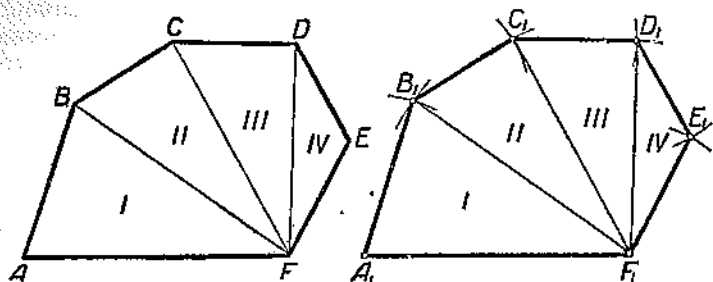
Задача 12. Построить треугольник: 1) по трем сторонам, 2) по двум сторонам и углу между ними, 3) по стороне и двум прилежащим углам, 4) по двум сторонам и углу, прилежащему к одной из них.

Решение показано на чертежах 56, 57, 58 и 59. Из всех задач на построение треугольников наименьшее число элементарных операций получается при построении треугольника по трем его сторонам.

§ 17. Построение многоугольника, равного данному.

Задача 13. Построить многоугольник, равный данному.

Построение многоугольника приводим к построению последовательного ряда треугольников, для чего разбиваем многоугольник на ряд треугольников. Наименьшее число треугольников, а именно $n-2$, получится, если мы из одной вершины проведем диагонали. В данном (на черт. 60) случае получаем 4 треугольника, которые и можно построить наиболее простым образом, если диагонали проведены из вершины F . Ход построения ясен из чертежа. Сперва строим треугольник I и находим положение сторон A_1F_1 и A_1B_1 . На B_1F_1 строим $\triangle B_1F_1C_1 = \triangle BFC$, на C_1F_1 строим $\triangle C_1F_1D_1 = \triangle CFD$ и на F_1D_1 строим $\triangle F_1D_1E_1 = \triangle FDE$.

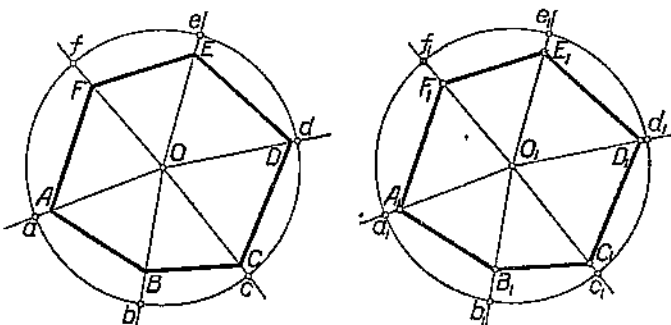


Черт. 60.

Выбор исходной вершины для диагоналей не безразличен для точности построения. Так, если мы проведем диагонали из вершины A , то результат может получиться менее точным, ибо при определении положения вершины C точка пересечения дуг была бы недостаточ- но отчетлива.

Если триангуляция при помощи диагоналей приводит к треугольникам с очень малыми острыми углами, построение которых не может быть проведено с достаточной точностью,

то можно выбрать произвольную точку O внутри (или вне) контура фигуры, и из этой точки провести лучи к вершинам многоугольника (черт. 61).



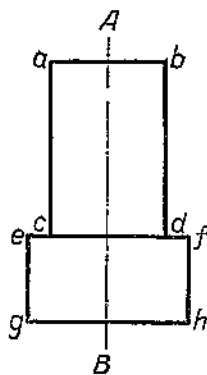
Черт. 61.

Таким образом многоугольник $ABCDEF$ разбивается на 6 треугольников, которые легко построить по углам, расположенным вокруг точки O , и сторонам, исходящим из вершины O . Построение углов, расположенных вокруг точки O , можно произвести либо проведением через выбранную точку O_1 лучей $O_1A_1 \parallel OA$, $O_1B_1 \parallel OB$, $O_1C_1 \parallel OC$ и т. д. (при помощи линейки и угольника), либо при помощи вспомогательных окружностей с центрами O и O_1 одинаковыми радиусами. Откладывая дуги $a_1b_1=ab$, $b_1c_1=bc$, $c_1d_1=cd$, $d_1e_1=de$, $e_1f_1=ef$, проводим радиусы в полученные точки и на этих радиусах откладываем $O_1A_1=OA$, $O_1B_1=OB$, $O_1C_1=OC$ и т. д. и получаем искомые вершины многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, равного данному многоугольнику $ABCDEF$.

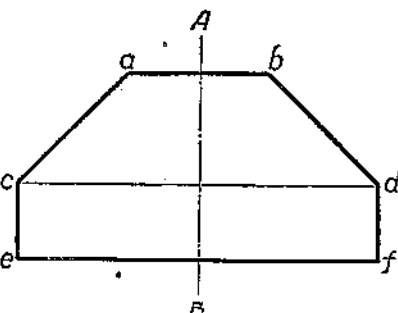
§ 18. Построение фигур, имеющих оси симметрии.

Если какую-нибудь фигуру можно разделить прямой на две части так, что при перегибе фигуры по этой прямой обе части фигуры совпадают, то такая фигура называется симметрично расположенной относительно данной прямой; данная прямая называется осью симметрии. Примеры симметричных фигур даны на чертежах 62, 63, 64, 65.

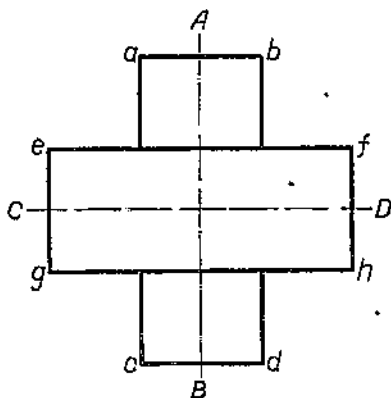
На чертежах 62 и 63 показаны фигуры, имеющие одну ось симметрии AB ; каждой точке на левой части фигуры соответствует симметричная ей точка на правой части фигуры. Взаимно симметричные точки расположены на одном



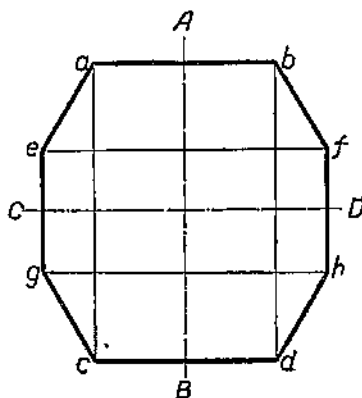
Черт. 62.



Черт. 63.



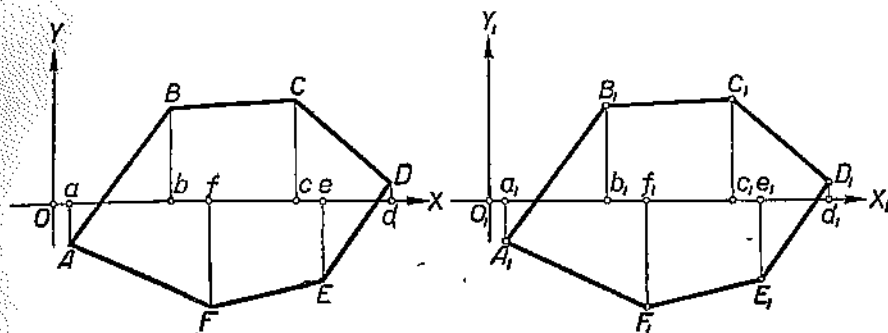
Черт. 64.



Черт. 65.

перпендикуляре к оси симметрии по обе стороны оси и на равных от нее расстояниях (точки a и b , c и d , e и f). На чертежах 64 и 65 даны фигуры с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии (симметричные точки a и b , a и c , c и d , b и d и т. д.).

При построении симметричных фигур прежде всего проводят оси симметрии¹⁾, строят часть фигуры по одну сторону оси и ей симметричную часть, проводя перпендикуляры к оси симметрии.

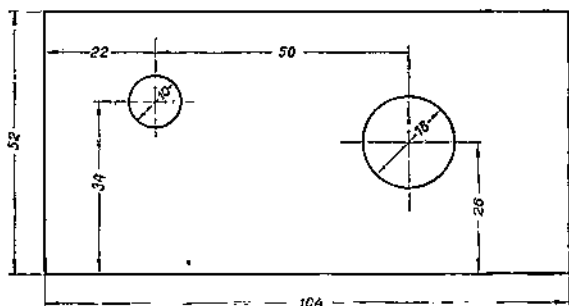


Черт. 66.

§ 19. Построение фигур при помощи координат.

Положение каждой точки на плоскости можно определить при помощи координат этой точки относительно двух взаимно перпендикулярных осей, произвольно выбранных. Пользуясь этим, можно решить задачу 13, как показано на чертеже 66. Для этого проведем произвольную ось OX (которая может пересекать контур фигуры или совпадать с одной из сторон или лежать вне фигуры) и ось OY и спроектируем вершины данного многоугольника на ось OX , проводя $Aa \parallel Bb \parallel Cc \dots \parallel OY$,

получим для каждой вершины две координаты (Oa и aA для точки A , Ob и Bb для точки B и т. д.), при помощи которых построим точки A_1 , B_1 и т. д. по координатам относительно взятой системы осей O_1X_1 и O_1Y_1 .



Черт. 67.

На чертеже 67¹⁾ показана разметка центров отверстий в прямоугольной плитке по методу координат. Способ проведения размерных линий и постановки размеров см. § 83 и 85.

¹⁾ Способ очертания осей симметрии см. § 83 — Линии чертежа и их обводка.

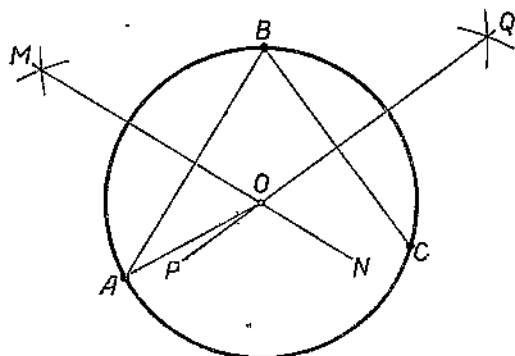
§ 20. Построение окружности, проходящей через две, через три данные точки.

Задача 14. Через две данные точки A и B провести окружность.

Задача допускает бесчисленное множество решений. Центры окружностей лежат на перпендикуляре, проведенном к прямой AB в середине отрезка AB . Чтобы получить однозначное решение или ограниченное число решений, нужно дать еще одно дополнительное условие, например задать радиус окружности или указать, что центр искомой окружности должен лежать на заданной прямой или окружности, и пр.

Задача 15. Через три данные точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, провести окружность.

Проведем прямую MN (черт. 68), перпендикулярную к отрезку AB в его середине, и прямую PQ , перпендикулярную к отрезку BC в его середине. Прямые MN и PQ пересекаются в точке O — центре искомой окружности. Соединив O с одной из точек, например A , проведем радиус OA окружности, которая проходит через остальные две заданные точки. В зависимости от формы треугольника, образуемого отрезками AB , BC и AC , центр O окружности, проходящей через точки A , B и C , лежит внутри треуголь-



Черт. 68.

ника ABC (если треугольник остроугольный), на гипотенузе (если треугольник прямоугольный) или вне треугольника (если один из углов треугольника тупой).

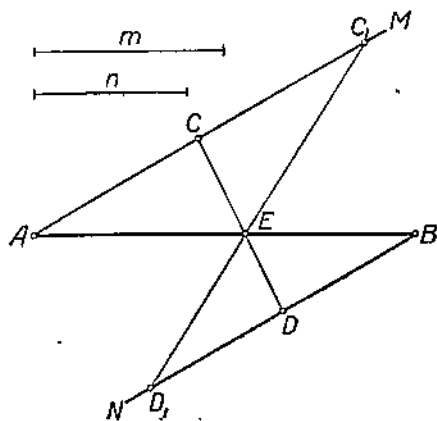
§ 21. Деление отрезка на пропорциональные части.

Задача 16. Разделить отрезок AB на две части, находящиеся в отношении $m:n$.

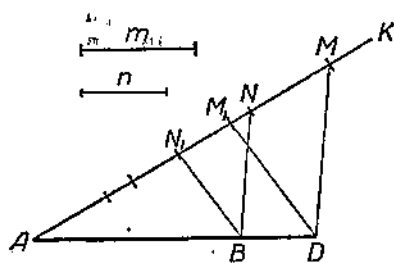
Под произвольным острым углом проводим в концах A и B отрезка AB (черт. 69) параллельные лучи AM и BN по разные стороны AB ; откладываем на AM отрезок AC (или AC_1), равный (или кратный) отрезку m , а на BN — отрезок BD (или BD_1), равный (или кратный) отрезку n . Прямая CD (или C_1D_1) пересекает AB в искомой точке E , так что $AE:EB = AC:BD = m:n$. Это равенство вытекает из подобия $\triangle AEC$ и $\triangle BED$ (или AEC_1 и BED_1). Длину отрезков AC и BD следует выбирать таким образом, чтобы угол AEC был не меньше 60° и приближался к прямому.

Задача 17. Данный отрезок AB продолжить до такой точки D , чтобы $AD:AB = m:n$.

Из точки A (черт. 70) под произвольным углом (лучше всего острым) проводим луч AK , на котором откладываем отрезок AM , равный (или кратный) отрезку m , и AN , равный (или кратный) отрезку n . Соединяем N с B и через M проводим $MD \parallel NB$. Точка D — искомая¹⁾.



Черт. 69.

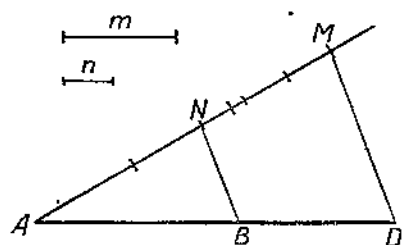


Черт. 70.

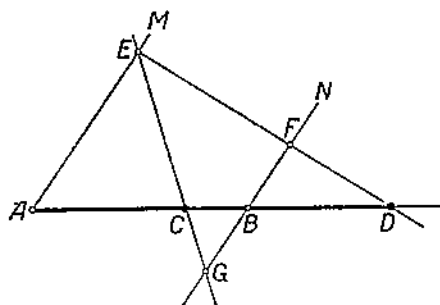
Действительно, из подобия треугольников ADM и ABN следует: $AD:AB = AM:AN = km:kn = m:n$.

Задача 18. Данный отрезок AB продолжить до такой точки D , чтобы $AD:BD = m:n$ (черт. 71).

$AM = k \cdot m$, $MN = k \cdot n$, $MD \parallel NB$; $AD:BD = AM:MN = km:kn = m:n$ ²⁾.



Черт. 71.



Черт. 72.

Задача 19. Дан отрезок AB . На прямой AB найти точку C на отрезке AB и точку D (за точкой B), удовлетворяющие условию $AC:CB = AD:DB = m:n$.

Из точки A (черт. 72) проведем произвольный луч AM , через точку B — прямую $BN \parallel AM$; на AM отложим отрезок $AE = k \cdot m$

¹⁾ На чертеже показаны 2 варианта: 1) $AM = 3m$, $AN = 3n$ и 2) $AM_1 = 2m$, $AN_1 = 2n$. В обоих случаях получается одна и та же точка D .

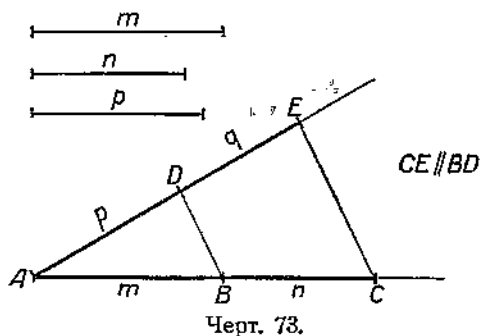
²⁾ На чертеже построение проведено при $k = 3$.

(где k — произвольное число) и на BN по обе стороны от B — отрезки $BF = BG = k \cdot n$. Проведем прямые GE и EF , которые отметят на прямой AB искомые точки C и D .

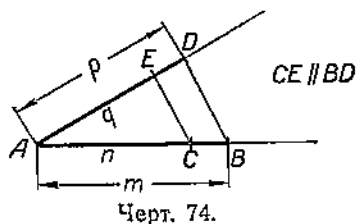
Доказательство. Из подобия треугольников AEC и BGC следует: $AC:CB = AE:BG = m:n$ (1). Из подобия треугольников ADE и BDF имеем: $AD:BD = AE:BF = m:n$ (2). Из равенств (1) и (2) получим: $AC:CB = AD:BD = m:n$.

Задача 20. К трем отрезкам m , n и p построить четвертый пропорциональный отрезок q ($m:n = p:q$).

Построение показано на чертежах 73 и 74.



Черт. 73.



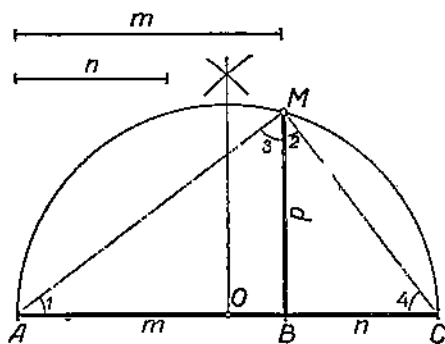
Черт. 74.

$AB=m$, $BC=n$, $AD=p$, $CE \parallel BD$, $DE=q$ (черт. 73);

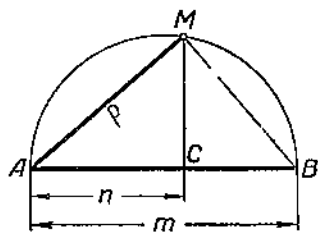
$AB=m$, $AC=n$, $AD=p$, $CE \parallel BD$, $AE=q$ (черт. 74).

Задача 21. По двум данным отрезкам m и n построить средний пропорциональный отрезок p ; $m:p = p:n$ или $p^2 = m \cdot n$.

1) На произвольной прямой MN отложим $AB=m$, $BC=n$, разделим отрезок AC в точке O пополам и, приняв O за центр, опишем полуокружность радиусом $OA=OC$. Проведем $BM \perp AC$ до пересечения с полуокружностью в точке M и получим искомый отрезок $p = BM$ (черт. 75).



Черт. 75.



Черт. 76.

Доказательство. $\triangle ABM \sim \triangle MBC$ ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $AB:BM = BM:BC$, $BM^2 = AB \cdot BC$.

2) Если $m > n$, то откладываем $AB=m$, $AC=n$, опишем полуокружность на диаметре AB , в точке C проведем $CM \perp AB$ до пересечения с полуокружностью в точке M . Соединив M с A , получим искомый отрезок $p = MA$ (черт. 76).

$\triangle ACM \sim \triangle AMB$, следовательно, $AM:AB = AC:AM$, откуда $AM^2 = AB \cdot AC$.

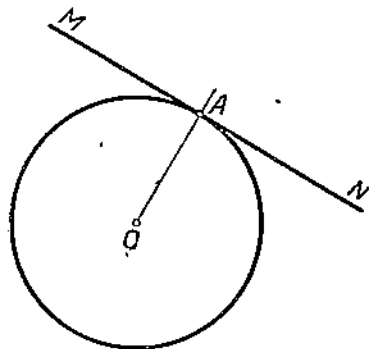
§ 22. Сопряжения прямой и дуги окружности.

Сопряжение прямой и окружности должно происходить таким образом, чтобы дуга окружности плавно переходила в прямую, а это достигается в том случае, когда в точке перехода прямая касается окружности.

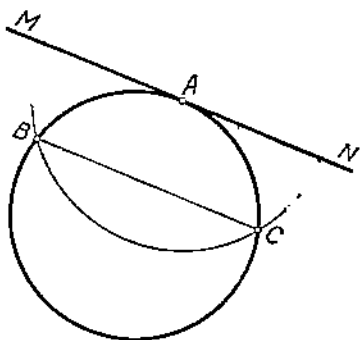
В зависимости от частных случаев сопряжения приходится решать следующие геометрические задачи на построение.

Задача 22. К данной окружности в данной на ней точке A провести касательную прямую.

1) Проведем радиус OA в точку A (черт. 77) и в данной точке A построим перпендикуляр к OA , получим искомую касательную MAN . При наличии правильного угольника построение перпендикуляра следует производить при помощи линейки и угольника.



Черт. 77.



Черт. 78.

2) Если центр окружности не отмечен достаточно ясно, то построение касательной можно провести следующим образом: из точки A произвольным радиусом проведем дугу, пересекающую данную окружность в точках B и C (черт. 78); соединим точки B и C хордой BC и через точку A проведем $MN \parallel BC$ (при помощи линейки и угольника).

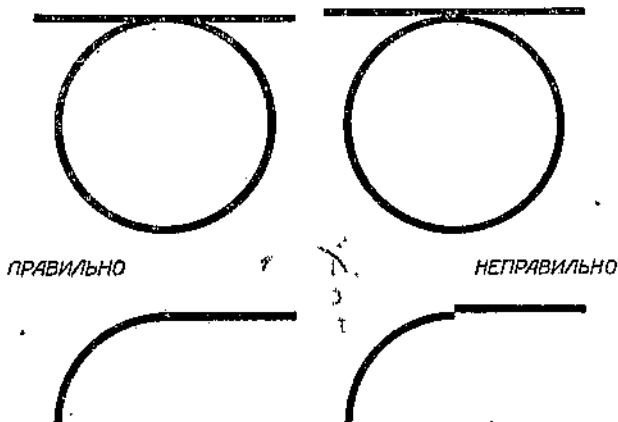
Доказательство. Радиус, проведенный в точку A , перпендикулярен к хорде BC , а следовательно, и к прямой MN .

В практической работе мы часто встречаемся с ошибочным решением вопроса о „касании“ прямой к окружности; эта ошибка особенно резко бросается в глаза, когда чертеж обводится тушью довольно толстыми линиями. На чертеже 79 показано правильное проведение касательной прямой в отличие от неправильного выполнения той же задачи.

Неправильность приема II делается особенно наглядной, когда мы от целой окружности переходим к техническому сопряжению дуги и прямой. В первом случае мы получаем действительный плавный переход (при условии, что дуга и прямая проведены одинаковой толщиной), во втором — получаем разрыв.

Здесь, как и во всех последующих случаях, необходимо иметь в виду, что, проводя прямую или окружность чертежным

инструментом, мы фактически проводим две геометрические линии на одинаковом расстоянии от той геометрической линии, которую мы должны построить.

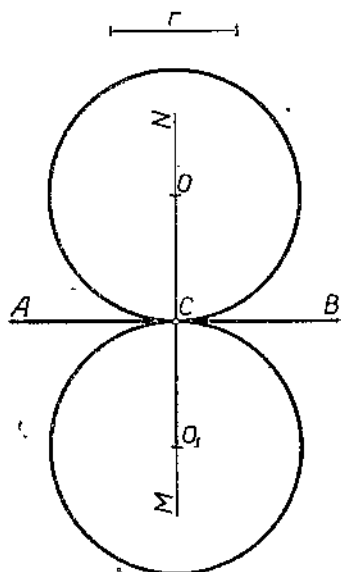


Черт. 79.

При обводке сопряжения тушью следует соблюдать следующий порядок: сперва обводят тушью дуги окружности, ни в коем случае не переходя за точку касания, а затем прямые линии. В этом случае легче получить правильное сопряжение, чем при обратном порядке обводки.

Задача 23. Провести окружность данного радиуса r , касательную к данной прямой AB в данной на ней точке C (черт. 80).

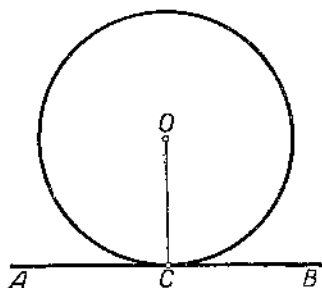
Через точку C проведем прямую $MN \perp AB$, отложим на ней отрезки $CO = CO_1 = r$ и из центров O и O_1 проведем искомые окружности (O, C) и (O_1, C) . И здесь необходимо при построении иметь в виду практическое правило проведения линий через данную точку.



Черт. 80.

Задача 24. Точка O лежит вне данной прямой AB . Провести окружность с центром O , касательную к прямой AB (черт. 81).

Из точки O проведем прямую OC , перпендикулярную к AB , до пересечения с AB в точке C и радиусом OC проведем искомую окружность O .

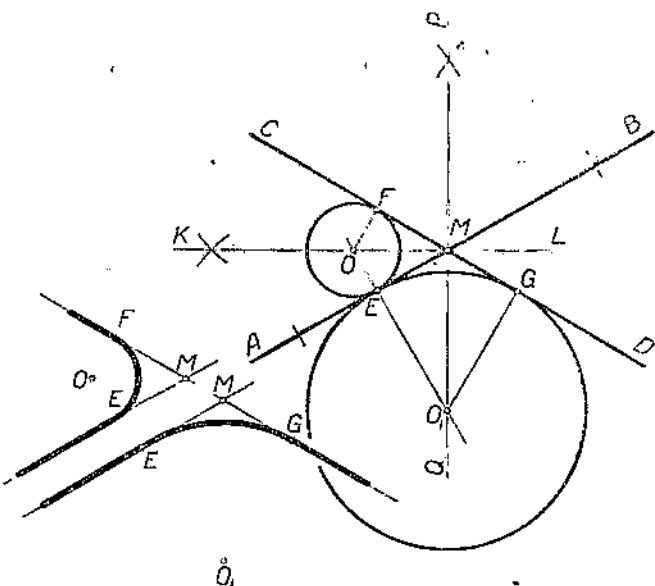


Черт. 81.

Задача 25. Провести окружность, касающуюся двух данных прямых AB и CD , притом одной из них, AB , — в данной точке E .

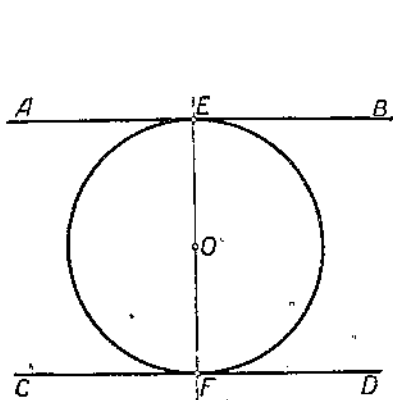
1-й случай. Прямые AB и CD пересекаются в точке M (черт. 82).

Построим биссектрисы KL и PQ (геометрическое место точек, равноотстоящих от прямых AB и CD) смежных углов AMC и SMB , образуемых пересекающимися прямыми AB и CD . Через точку E прямой AB проведем перпендикуляр к AB , который пересекает биссектрису KL в точке O и биссектрису PQ в точке O_1 — центрах искомых окружностей. Отрезки OE и O_1E определяют радиусы окружностей. Чтобы найти точку касания этих окружностей к прямой CD , проведем из O прямую $OF \perp CD$ и из O_1 — прямую $O_1G \perp CD$.

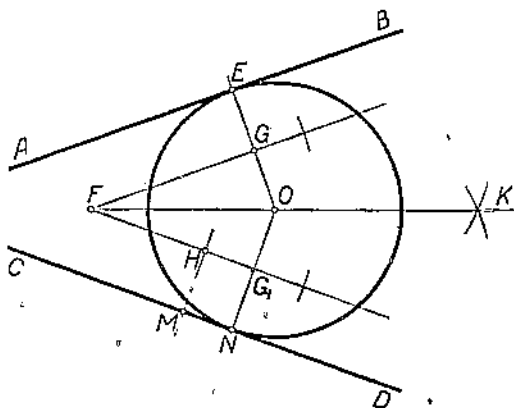


Черт. 82.

2-й случай. Прямые AB и CD параллельны (черт. 83). Проведем $EF \perp AB$ (прямая EF будет также перпендикулярна к CD). Разделим отрезок EF в точке O пополам и проведем радиусом $OE = OF$ окружность O , которая касается прямых AB и CD в точках E и F .



Черт. 83.



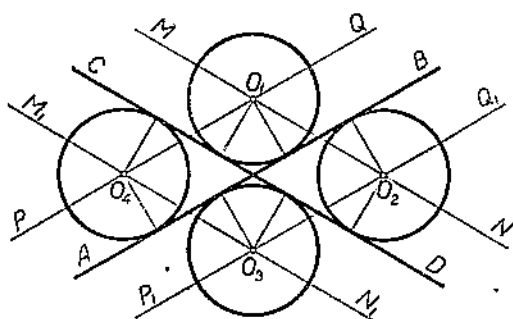
Черт. 84.

3-й случай. Прямые AB и CD не пересекаются в рамках чертежа (черт. 84).

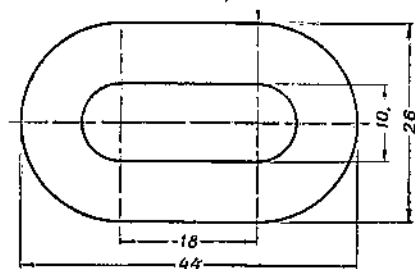
Задача сводится к построению биссектрисы угла между прямыми AB и CD , точка пересечения которых лежит вне рамок чертежа. Для этого проведем на произвольно выбранном, но одинаковом расстоянии от прямых AB и CD параллели $FG \parallel AB$ и $FG_1 \parallel CD$ ($EG \perp AB$, $MH \perp CD$, $EG = MH$), построим биссектрису FK угла GFH и в точке пересечения этой биссектрисы с перпендикуляром EG найдем центр O искомой окружности. Для определения точки N касания окружности (O, E) с CD проведем $ON \perp CD$.

Задача 26. Данным радиусом r провести окружность, касательную к двум данным прямым AB и CD .

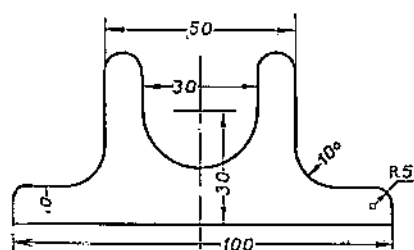
1-й случай. Прямые AB и CD пересекаются (черт. 85).



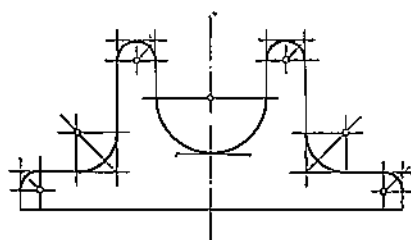
Черт. 85.



Черт. 86.



Черт. 87.



Черт. 88.

На расстоянии, равном r , проведем две прямые $MN \parallel M_1N_1 \parallel CD$ (геометрическое место точек, отстоящих от прямой CD на расстоянии r) и две прямые $PQ \parallel P_1Q_1 \parallel AB$ (геометрическое место точек, отстоящих от прямой AB на расстоянии r); эти геометрические места пересекаются в точках O_1, O_2, O_3 и O_4 — центрах искомых окружностей. Точки касания окружностей с прямыми AB и CD получаются в пересечении перпендикуляров, проведенных из центров O_1, O_2, O_3 и O_4 к прямым AB и CD .

2-й случай. Прямые AB и CD не пересекаются в рамках чертежа.

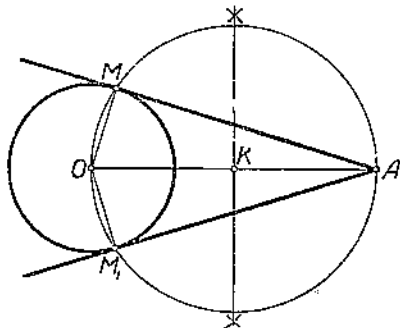
В этом случае проведем только одну прямую, параллельную AB , и другую параллельную CD , и в точке пересечения этих параллелей найдем центр искомой окружности.

Если прямые AB и CD параллельны, то радиус не может быть задан произвольно, он равен половине расстояния между параллельными прямыми.

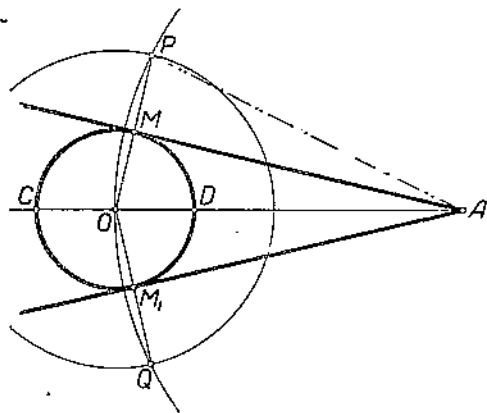
На чертежах 86 и 87 показаны примеры технических деталей, где применены сопряжения, рассмотренные в задачах 25 и 26. Способ проведения размерных линий и простановки размеров см. § 83 и 85. На чертеже 88 показано, в какой последовательности следует производить обводку чертежа.

Задача 27. Из точки A , лежащей вне данной окружности O , провести к ней касательную.

1) На отрезке AO (черт. 89) как на диаметре строим окружность радиусом $KO = KA$. Точки M и M_1 пересечения этой окружности с данной окружностью являются точками касания искомых касательных AM и AM_1 с окружностью O . Действительно, угол AMO — прямой как вписанный, опирающийся на концы диаметра AO . (Число элементарных операций — 16 для одной касательной.)



Черт. 89.

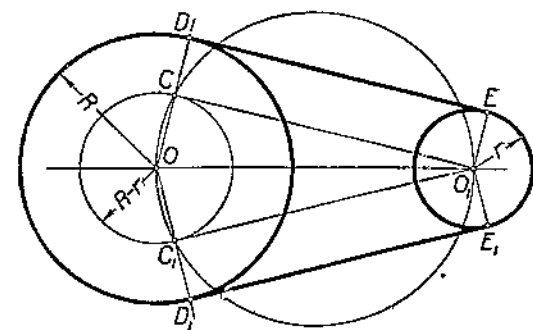


Черт. 90.

2) Из центра A (черт. 90) радиусом AO проведем окружность и из центра O проведем окружность радиусом, равным диаметру данной окружности O . Точки P и Q пересечения окружностей $(O, 2r)$ и (A, O) соединяем с центром O прямыми PO и QO , которые пересекают данную окружность в точках M и M_1 касания искомых касательных AM и AM_1 с окружностью O . В самом деле, прямая AM есть медиана основания равнобедренного треугольника OPA , следовательно, она перпендикулярна к основанию OP в точке M . (Число элементарных операций для проведения одной касательной — 15.)

Задача 28. К двум окружностям радиусов R и r провести общую касательную.

1) Пусть $R > r$. Из центра O (черт. 91) проведем окружность радиусом, равным $R - r$, а из O_1 касательные O_1C и O_1C_1 к этой окружности. Радиусы OC и OC_1 продолжим до пересечения с данной окружностью O в точках D и D_1 .



Черт. 91.

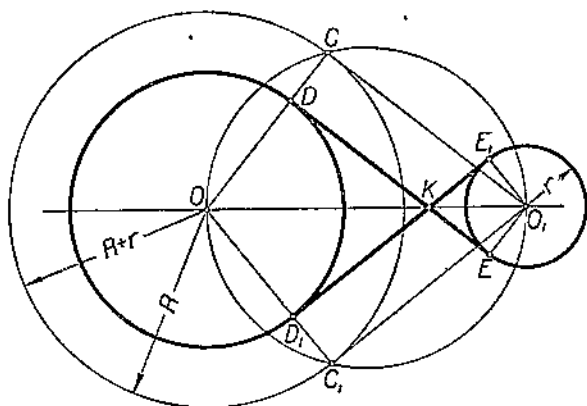
Из центра O_1 проведем радиусы $O_1E \parallel OD$ и $O_1E_1 \parallel OD_1$. Соединяя D с E и D_1 с E_1 , получим искомые внешние касательные DE и D_1E_1 . Проверка: $DE \parallel O_1C$ и $D_1E_1 \parallel O_1C_1$.

Доказательство. $\angle OCO_1 = d$, $CD \perp O_1E$, следовательно, $DE \parallel CO_1$ и $DE \perp OD$, $D_1E_1 \perp O_1E$.

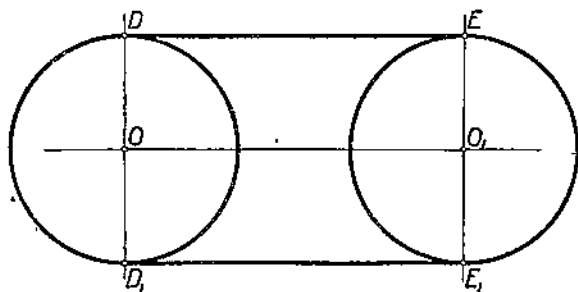
2) Другую пару касательных

получим, если из центра O проведем окружность радиусом, равным сумме радиусов данных окружностей и в остальном проведем то же построение, как в предыдущем случае (черт. 92); получим две касательные DE и D_1E_1 , пересекающиеся на линии центров. И в первом случае продолжения касательных пересекаются на линии центров.

3) Если $R = r$, то построение внешних касательных упрощается, как показано на чертеже 93. Проведем $DD_1 \perp OO_1$ и $EO_1E_1 \perp OO_1$ и получим искомые точки касания D и E и D_1 и E_1 . Проверка: $DE \parallel D_1E_1 \parallel OO_1$.



Черт. 92.

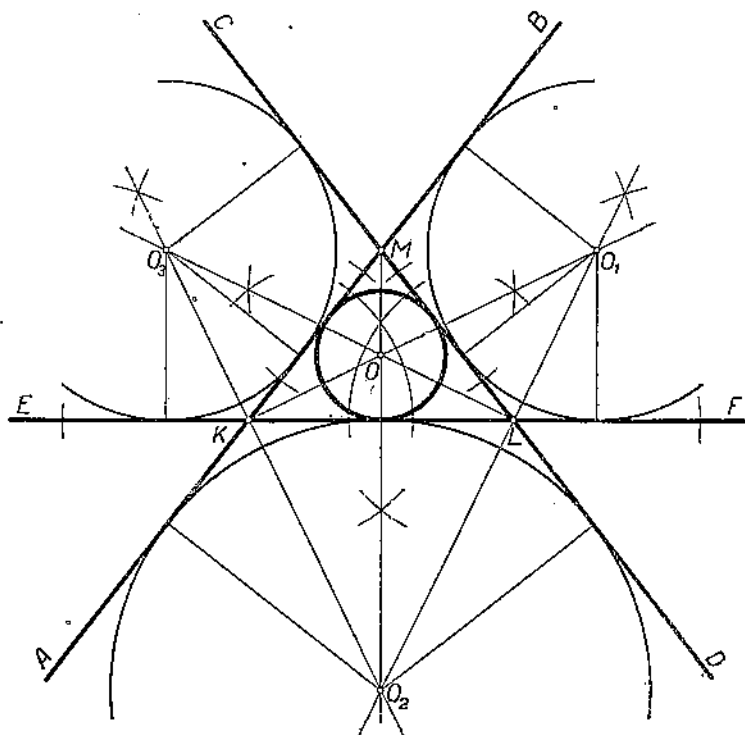


Черт. 93.

Задача 29. Провести окружность, касательную к трем данным прямым AB , CD и EF , пересекающимся в точках K , L и M (черт. 94).

1) Построим биссектрисы углов (внутреннего и внешнего) при вершинах K , L и M треугольника KLM , найдем в пересечении

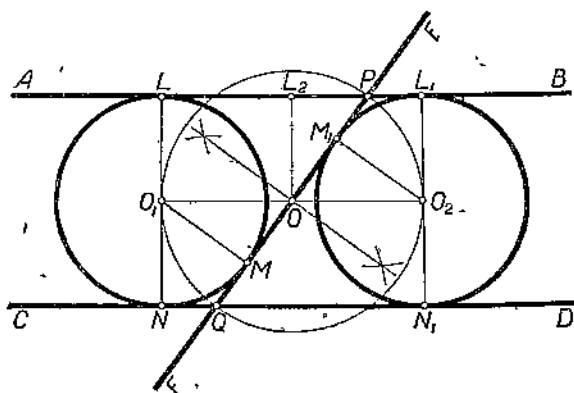
этих биссектрис центр O окружности, касающейся сторон треугольника KLM , и еще три центра O_1 , O_2 и O_3 окружностей, касающихся одной из сторон треугольника KLM и продолжения двух других сторон. Чтобы получить точки касания, проектируем найденные центры на каждую из данных прямых.



Черт. 94.

2) Если две из трех данных прямых параллельны, например $AB \parallel CD$, то вместо четырех центров получим только два центра, лежащие на прямой, параллельной AB и CD , и на одинаковом расстоянии от них. В данном случае известен радиус окружности, и искомые центры могут быть построены следующим образом (черт. 95).

На отрезке PQ как на диаметре построим окружность, через центр O этой окружности проведем параллель к AB и CD , и



Черт. 95.

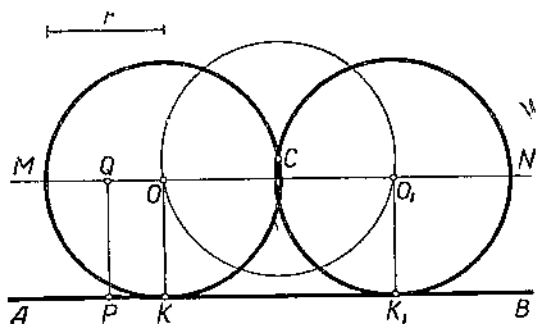
в пересечении этой параллели с окружностью O получаем центры O_1 и O_2 искоемых окружностей. Проектируя эти центры на данные прямые, получим точки касания.

Доказательство. Проведем $OL_2 \perp AB$, получим прямоугольный треугольник OL_2P , равный треугольнику O_2M_1O ($OP = OO_2$, $\angle L_2PO = \angle O_2OM_1$), а потому $O_2M_1 = OL_2 = O_2L_1$.

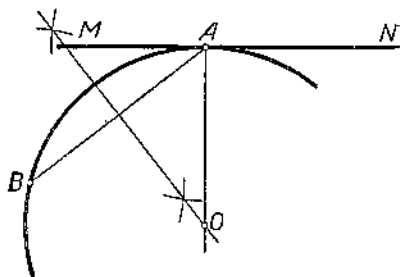
Задача 30. Данным радиусом провести окружность, касательную к данной прямой AB и проходящую через данную точку C , лежащую вне прямой (черт. 96).

Проведем $MN \parallel AB$ на расстоянии $PQ = r$ и из точки C как из центра — данным радиусом r окружность, которая пересечет прямую MN в точках O и O_1 — центрах искоемых окружностей. Проведем $OK \perp AB$ и $O_1K_1 \perp AB$, получим точки касания K и K_1 .

Действительно, $OK = r$ и $OC = r$.



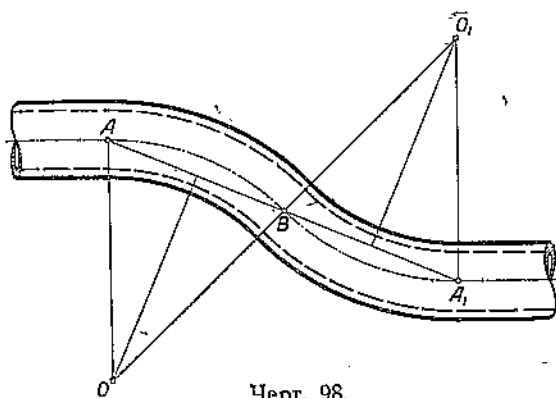
Черт. 96.



Черт. 97.

Задача 31. Провести окружность, касательную к данной прямой в данной на ней точке A и проходящую через данную точку B , лежащую вне прямой (черт. 97).

Центр O искомой окружности должен лежать на перпендикуляре к прямой MN в данной точке касания A и на перпендикуляре к отрезку AB , проведенном через его середину.



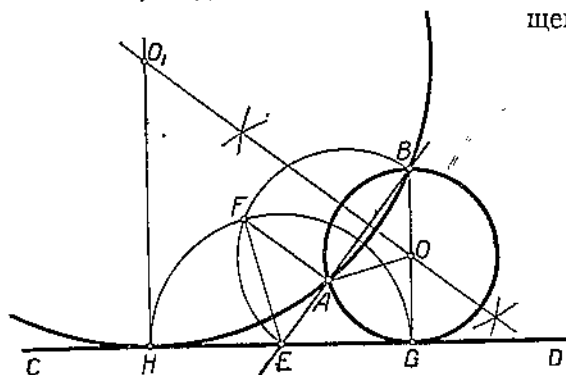
Черт. 98.

Техническое применение указанного в задаче 31 построения встречается при прокладке труб, когда требуется построить плавный переход между двумя параллельными трубпроводами, как показано на чертеже 98.

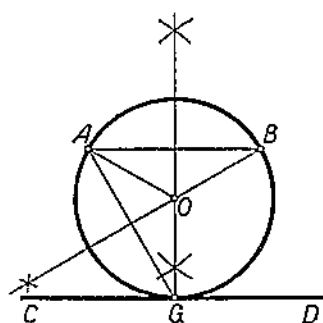
Задача 32. Через данные точки A и B провести окружность, касательную к данной прямой CD (черт. 99).

Проведем прямую AB и продолжим ее до пересечения с CD в точке E . На отрезке EB как на диаметре опишем полуокружность и через точку A проведем $AF \perp AB$ до пересечения с полуокружностью в точке F . Соединив точки F и E , отложим от точки E по прямой CD отрезки $EG = EH = EF$ и получим точки G и H касания искомых окружностей и прямой CD . Затем проведем перпендикуляр к AB , делящий отрезок AB пополам, и в точках O и O_1 пересечения этого перпендикуляра с прямыми GO и HO_1 , проведенными в точках G и H перпендикулярно к CD , найдем центры O и O_1 искомых окружностей. Радиусы окружностей определяются отрезками OG и O_1H .

Доказательство. По построению $EG^2 = EH^2 = EF^2 = EA \cdot EB$, следовательно EG — касательная к окружности, проходящей через точки A , B и G .



Черт. 99.



Черт. 100.

Если точки A и B расположены на прямой, параллельной CD (черт. 100), то точка E является бесконечно удаленной точкой; в этом случае прямая $AB \parallel CD$ и радиус GO , проведенный в точку касания, перпендикулярен к AB ; задача имеет одно решение. Проведем перпендикуляр к AB через середину отрезка и в пересечении с прямой CD найдем точку G касания окружности. Остается провести окружность через точки A , B и G .

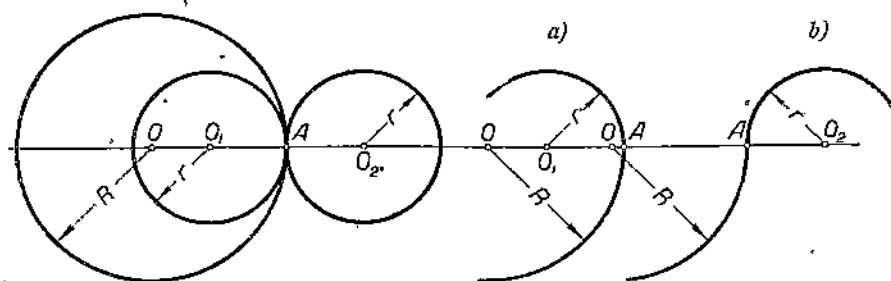
§ 23. Сопряжение окружностей и прямых дугами окружности.

Сопряжение двух окружностей должно происходить таким образом, чтобы в точке перехода одной дуги в другую окружности касались друг друга, в результате чего получается непрерывная кривая. В зависимости от частных случаев сопряжения приходится решать следующие геометрические задачи на построение.

Задача 33. Данным радиусом r провести окружность, касательную к данной окружности O в данной на ней точке A (черт. 101).

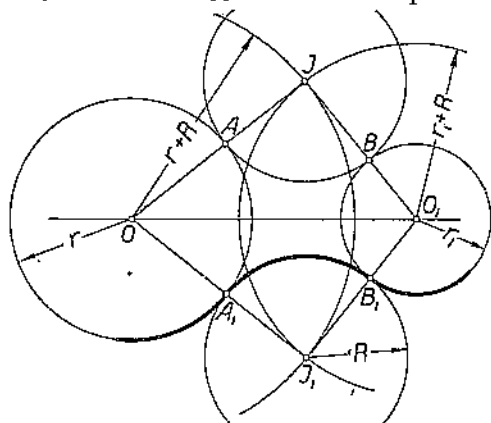
Проведем прямую OA и от точки A отложим на ней отрезки $AO_1 = AO_2 = r$, получим центры O_1 и O_2 окружностей радиуса r , касательных к данной окружности в точке A . Это построение применяется при построении кривых a и b , состоящих из дуг окружностей различных радиусов или имеющих точку перегиба в данной точке A (кривая b).

По условию касания двух окружностей общая точка лежит на линии центров, и расстояние между центрами равняется сумме радиусов (внешнее касание) или разности радиусов (внутреннее касание).



Черт. 101.

Задача 34. Провести окружность данного радиуса R , касательную к двум данным окружностям O и O_1 .



Черт. 102.

1) Из центра O проведем окружность радиусом $r+R$, а из центра O_1 — окружность радиусом r_1+R . Проведенные окружности взаимно пересекаются в точках J и J_1 — центрах окружностей радиуса R , имеющих внешнее касание к данным окружностям O и O_1 . Точки касания A и B , A_1 и B_1 получаются в пересечении линий центров JO , JO_1 , J_1O и J_1O_1 с данными окружностями (черт. 102).

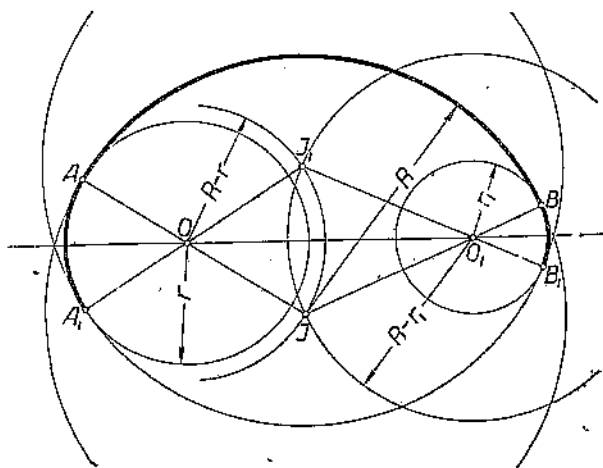
2) Если из центра O проведем окружность радиусом $R-r$, а из центра O_1 — радиусом, равным $R+r_1$, то в пересечении проведенных окружностей получим центры J и J_1 двух окружностей радиуса R , имеющих внешнее касание к данной окружности O_1 и внутреннее касание к данной окружности O (чертеж 103).

3) Если из центра O проведем окружность радиусом $R-r$, а из центра O_1 — окружность радиусом $R-r_1$, то в пересечении

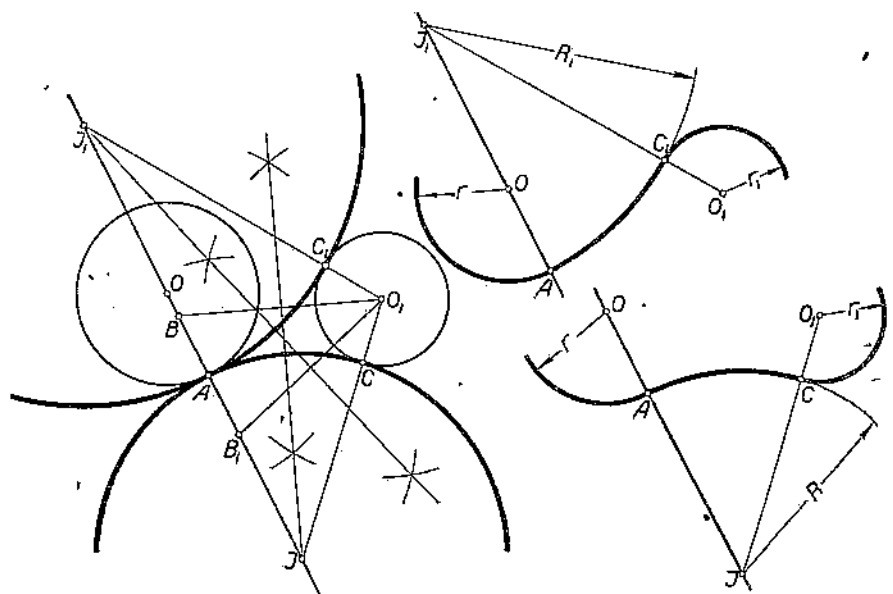
этих окружностей получим центры J и J_1 двух окружностей радиуса R , имеющих внутреннее касание к данным окружностям O и O_1 (черт. 104).

Задача 35. Провести окружность, касательную к двум данным окружностям O и O_1 , притом к одной из них — в данной точке A (черт. 105).

На прямой AO от точки A отложим отрезки $AB = AB_1 = r_1$. Точки B и B_1 соединим с центром O_1 второй окружности и проведем перпендикуляр к O_1B в середине отрезка O_1B . В пересечении этого перпендикуляра с прямой OA получим центр J окружности, имеющей внешнее касание к данным окружностям O и O_1 . Точка касания C к окружности O_1 лежит на прямой JO_1 .



Черт. 104.



Черт. 105.

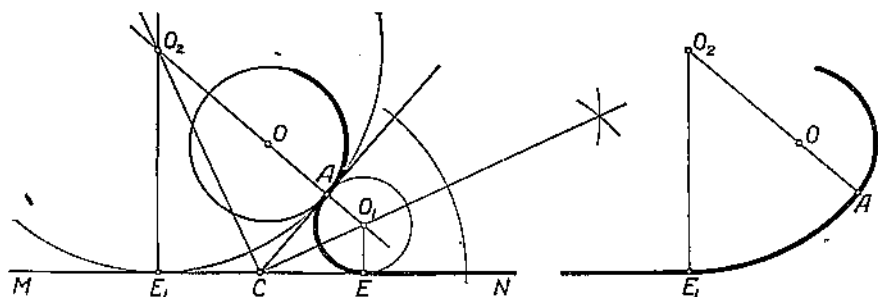
Точно так же перпендикуляр, проведенный в середине отрезка O_1B_1 , определяет на прямой OA центр J_1 второй окружности, имеющей внутреннее касание к окружности O и внешнее касание к окружности O_1 , притом к последней — в точке C .

Доказательство. Треугольник JBO_1 — равнобедренный: $JB = JA + AB = JO_1 = JC + CO_1$, а так как $AB = CO_1$, то следовательно, $JA = JC$. Кроме того, точка A лежит на линии центров JO и точка C — на линии центров JO_1 , а потому окружность J радиуса JA касается окружности O в точке A и окружности O_1 в точке B .

Точно так же $J_1B_1 = J_1A + AB_1 = J_1O_1 = J_1C_1 + C_1O_1$, а так как $C_1O_1 = AB_1$, следовательно, $J_1A = J_1C_1$.

Задача 36. Провести окружность, касательную к данной окружности O в данной на ней точке A и к данной прямой MN (черт. 106).

В точке A проведем касательную AC к окружности ($AC \perp OA$) до пересечения с MN в точке C . Прямая AC является общей касательной к данной окружности O и к искомой окружности, а потому задача сводится к задаче 25. Построим биссектрису CO_1 угла ACN и в пересечении с продолжением радиуса OA найдем центр O_1 искомой окружности. Радиусом O_1A проведем окружность, касательную к данной окружности в точке A (внешнее касание) и к прямой MN в точке E ($O_1E \perp MN$).



Черт. 106.

Если построим биссектрису смежного угла ($\angle ACM$), то получим центр O_2 окружности, имеющей с данной окружностью внутреннее касание в точке A и касающейся прямой MN в точке E_1 ($O_2E_1 \perp MN$).

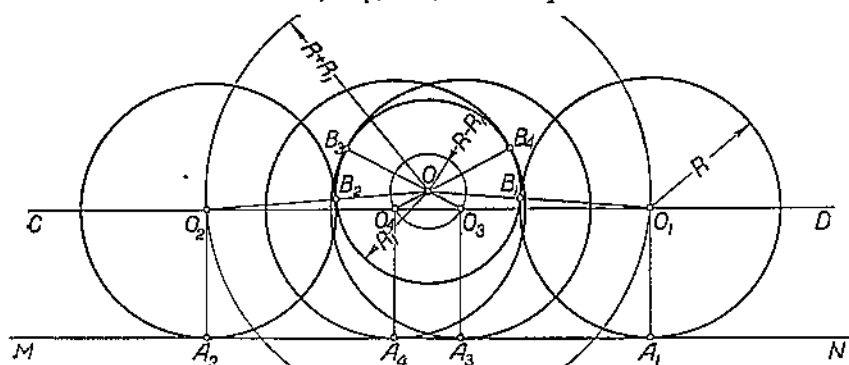
Задача 37. Данным радиусом R провести окружность, касающуюся данной окружности O радиуса R_1 и данной прямой MN (черт. 107).

Проведем на расстоянии R от прямой MN прямую $CD \parallel MN$ и из центра O радиусом $R + R_1$ — окружность, которая пересекает CD в точках O_1 и O_2 — центрах искомых окружностей. Соединив O_1 и O_2 с O , получим точки B_1 и B_2 касания искомых окружностей с данной окружностью. Проведя $O_1A_1 \perp MN$ и $O_2A_2 \perp MN$, получим точки касания искомых окружностей с прямой MN .

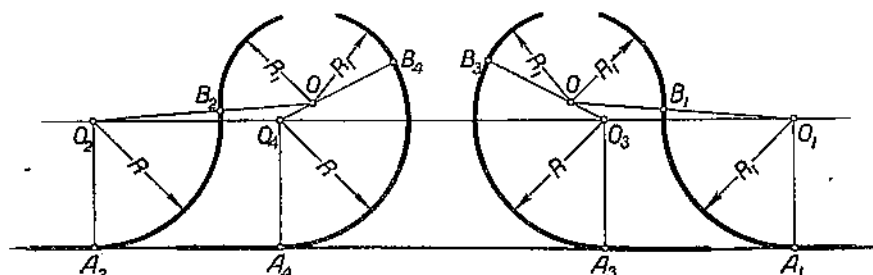
Еще два решения той же задачи получим, если из центра O проведем окружность радиусом $R - R_1$ (если $R > R_1$), или радиусом $R_1 - R$ (если $R < R_1$), пересекающую прямую CD в точках O_3 и O_4 — центрах окружностей радиуса R , имеющих с данной окружностью внутреннее касание. Указанные сопряжения (4 случая) показаны отдельно на чертеже 108.

Если обозначить расстояние центра O от прямой MN через h , то условие возможности 4 решений определяется формулой:

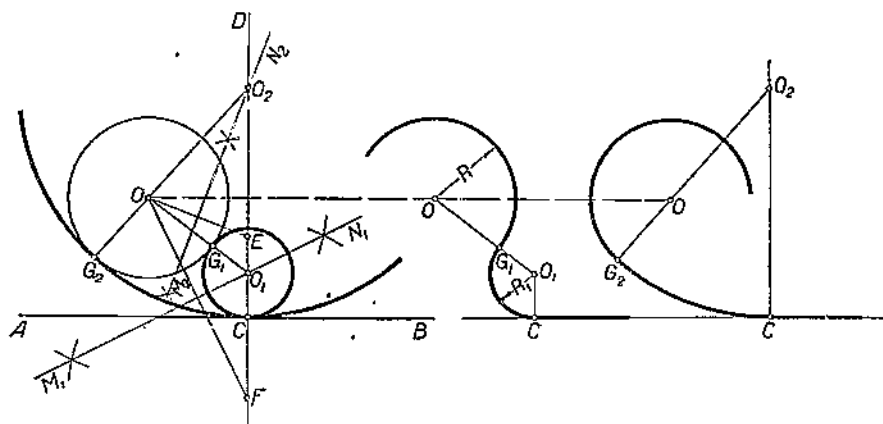
$$R + R_1 > h > R - R_1.$$



Черт. 107.



Черт. 108.



Черт. 109.

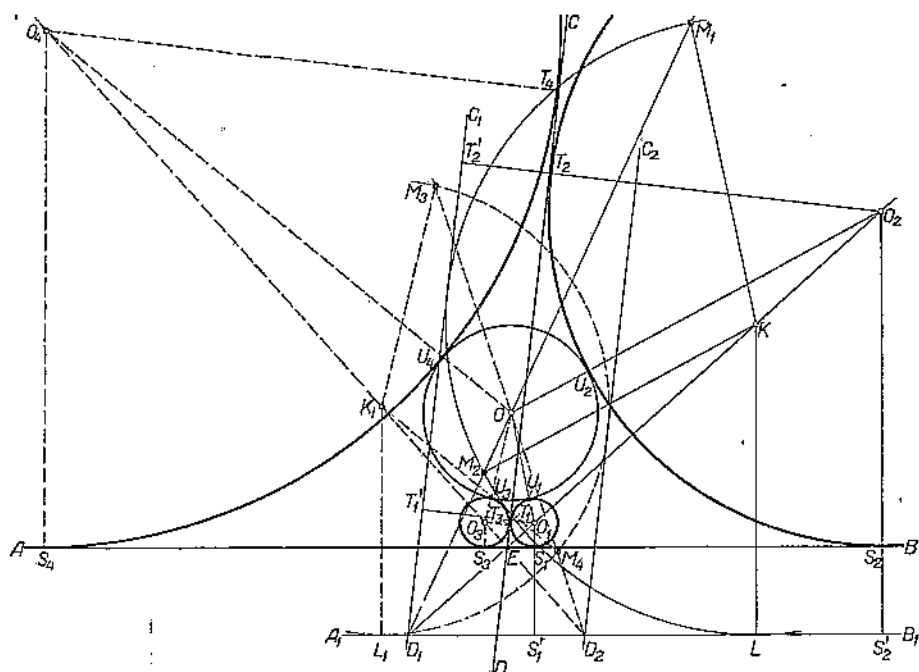
Задача 38. Провести окружность, касательную к данной прямой AB в данной на ней точке C и к данной окружности O (черт. 109).

Через точку C проведем прямую $CD \perp AB$ и от точки C отложим в обе стороны отрезки $CF = CE$, равные радиусу данной окружности. Соединив F и E с центром O окружности, проведем

серединные перпендикуляры M_1N_1 и M_2N_2 к отрезкам OF и OE . В пересечении этих перпендикуляров с прямой CD получим центры O_1 и O_2 искомым окружностей. Соединив O_1 с центром O , получим точку G_1 внешнего касания искомой окружности O_1 с данной окружностью O . На пересечении прямой O_2O с окружностью найдем точку G_2 касания второй искомой окружности с данной. Оба случая сопряжения показаны отдельно на том же чертеже.

Доказательство. $O_1F = O_1C + CF = O_1O = O_1G_1 + OG_1$, а так как $CF = OG_1$ по построению, следовательно, $O_1C = O_1G_1$, т. е. окружность с центром O_1 и радиусом O_1C , касается данной прямой в точке C и данной окружности в точке G_1 .

Точно так же $O_2O = O_2G_2 - OG_2 = O_2E = O_2C - CE$, а так как по построению $CE = OG_2$, следовательно, $O_2G_2 = O_2C$, и C и G_2 — точки касания окружности с центром O_2 и радиусом O_2C .



Черт. 110.

Задача 39. Построить окружность, касательную к данной окружности O и к данным прямым AB и CD (черт. 110).

На расстоянии радиуса данной окружности проведем прямые $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$. Через точку D_1 пересечения этих параллелей и точку E пересечения данных прямых AB и CD проведем прямую (биссектрису угла CEB), на которой должен лежать искомый центр. Из произвольной точки K этой биссектрисы проведем $KL \perp A_1B_1$ и радиусом KL проведем из центра K окружность, пересекающую прямую D_1O в точках M_1 и M_2 . Соединив M_1

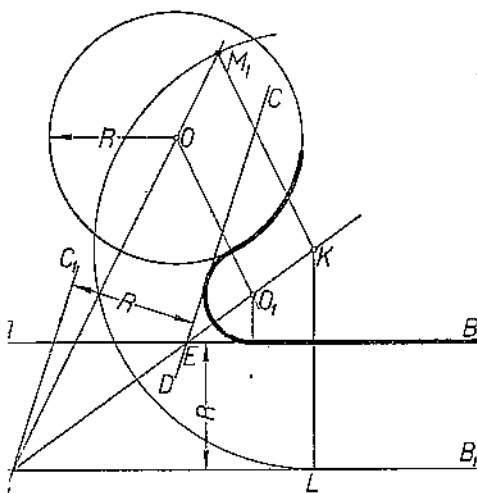
с K , проведем через центр O прямую $OO_1 \parallel M_1K$ и в пересечении с биссектрисой D_1E получим центр O_1 искомой окружности, касающейся прямой AB в точке S_1 ($O_1S_1 \perp AB$), прямой CD в точке T_1 ($O_1T_1 \perp CD$) и окружности O в точке U_1 . Если проведем прямую, параллельную KM_2 , то получим центр O_2 второй окружности, удовлетворяющей условию.

Доказательство. Рассматривая пучок лучей, проведенных из точки D_1 , замечаем, что $O_1O:KM_1 = D_1O_1:D_1K = O_1S'_1:KL$; так как $KL = KM_1$ по построению, следовательно, $O_1O = O_1S'_1$. Но $O_1O = O_1U_1 + U_1O = O_1U_1 + r$, $O_1S'_1 = O_1S_1 + S_1S'_1 = O_1S_1 + r$ и $O_1S'_1 = O_1T'_1 = O_1T_1 + T_1T'_1 = O_1T_1 + r$, а потому $O_1U_1 = O_1S_1$, т. е. окружность O_1 радиуса O_1S_1 , касается прямой AB в точке S_1 , прямой CD в точке T_1 и окружности O в точке U_1 (внешнее касание).

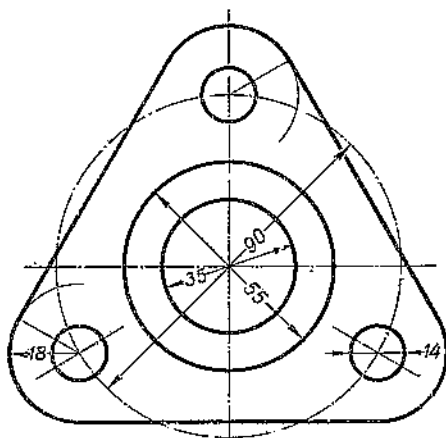
Точно так же $OO_2:M_2K = D_1O_2:D_1K = O_2S'_2:KL$, откуда $OO_2 = OU_2 + U_2O = r + U_2O = O_2T'_2 = O_2T_2 + r = O_2S'_2 = O_2S_2 + r$ и $O_2U_2 = O_2S_2$.

Если провести прямую $C_2D_2 \parallel CD$ по другую сторону от CD , то получим еще два решения той же задачи (центры O_3 и O_4).

Предлагается читателю самостоятельно рассмотреть случай, когда окружность O не пересекает прямой CD .



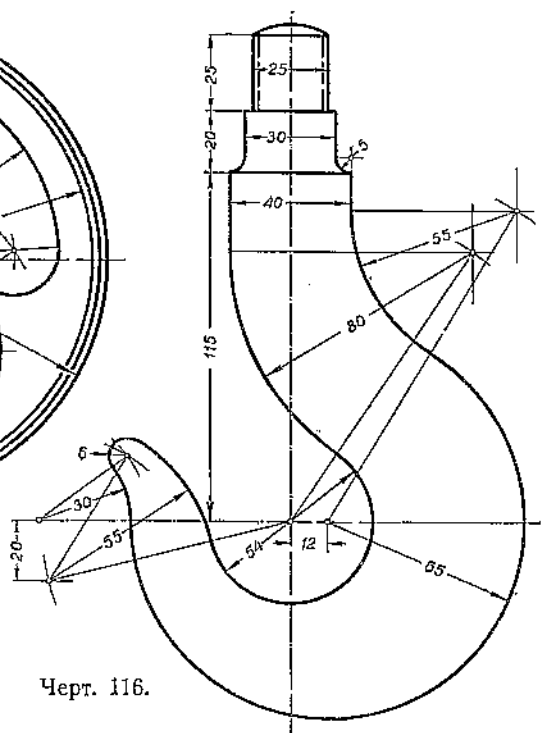
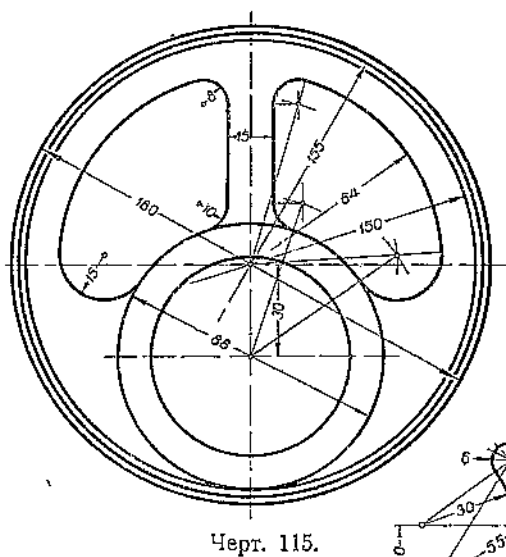
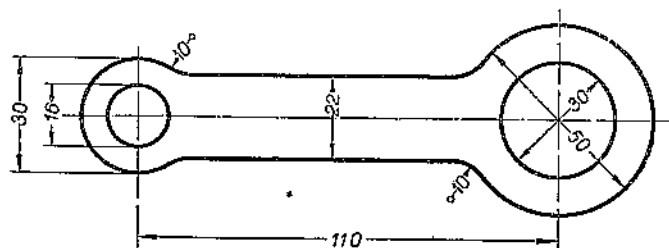
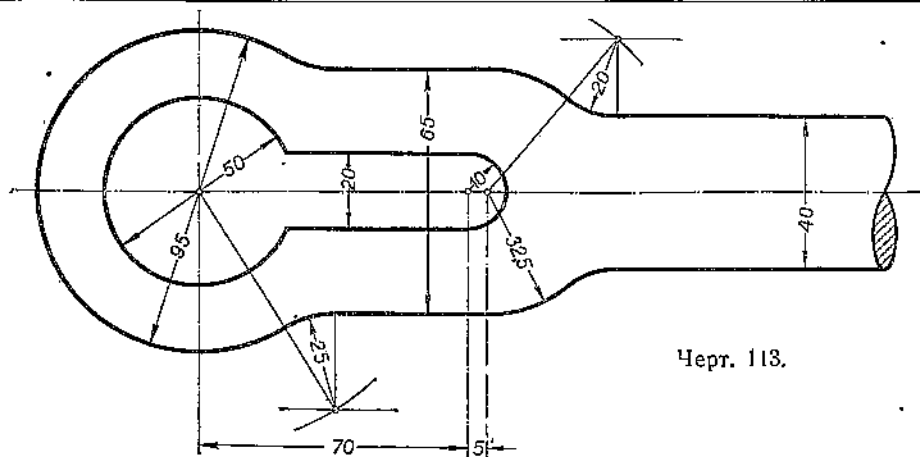
Черт. 111.



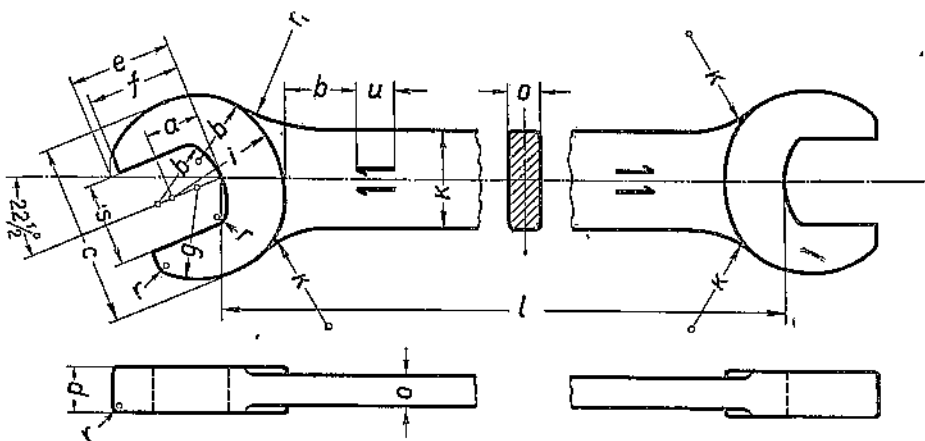
Черт. 112.

На чертеже 111 показан частный случай задачи 39 построения плавного перехода от дуги данного радиуса к данной прямой так, чтобы дуга сопряжения касалась второй данной прямой.

На чертеже 112 показано применение сопряжения прямых дуг окружности данного радиуса к очертанию треугольного фланца. На этом же чертеже показана разметка центров отверстий для болтов. Осьевые линии и вспомогательная окружность проведены штрих-пунктирными линиями (см. § 83). Разметочные линии поставлены согласно установленным стандартам (см. § 85).



Случаи сопряжения прямых и окружностей показаны на технических деталях, изображенных на чертежах 113, 114, 115 и 116. Все эти фигуры могут быть построены по указанным размерам. Построение всех фигур следует начать с проведения осевых линий (на чертеже они проведены штрих-пунктирными линиями). Дальнейшая последовательность построения ясна из чертежа. При обводке тушью следует раньше провести дуги окружности и затем прямые, как это было показано на чертеже 88, стр. 40.



Черт. 117.

Примером практического применения сопряжений служит гаечный ключ, показанный на чертеже 117. На этом чертеже размеры отмечены буквами; численные величины для различных размеров ключей даны в нижеследующей таблице.

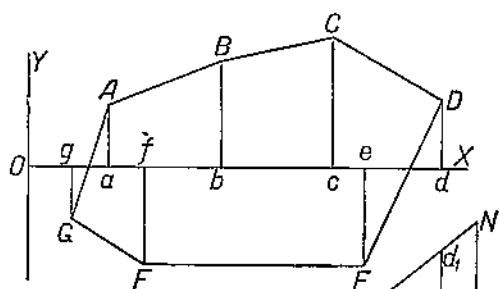
Таблица размеров двустороннего гаечного ключа.

Номинальное	Отверстие ключа S		a	b	c	e	f	g	l	k	l	o	p	r	r ₁	u	Для винтов	
	Наибольший размер	Наименьший размер															Резьба винта в дюймах	Метрическая резьба
11	11,2	11,1	7	9	24	13,5	12	12	15	13	100	4	6	1	26	5	1/4	6 и 7
14	14,8	14,1	8	11	30	16	15	15	18	15	112	4	7	1	30	6	3/8	8
17	17,3	17,1	9,5	13	35	18,5	17	17,5	21	17	125	5	8	1	34	6	7/8	9 и 10
19	19,4	19,2	11	14	40	21	19	20	24	18	132	5	9	1	36	6	7/8	11
22	22,4	22,2	13	15	46	22	21	23	28	20	150	6	10	1	40	6	1 1/2	12 и 14
27	27,4	27,2	16	18	56	27	26	28	33	24	190	7	12	2	48	8	1 3/8	16
32	32,5	32,2	19	20	66	32	30	33	39	23	210	8	14	2	56	8	1 3/4	18 и 20
36	36,5	36,2	21	23	74	35	33	37	44	32	235	8	15	2	64	8	1 3/4	22 и 24
41	41,5	41,2	24	26	84	40	37	42	49	35	265	9	17	2	70	10	1 3/4	27

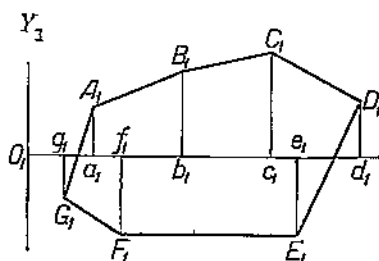
§ 24. Построение подобных фигур.

В § 17 и 19 были указаны приемы построения многоугольника, равного данному. В практической работе приходится часто изменять масштаб чертежа, т. е. строить фигуру, подобную данной, с заданным коэффициентом подобия.

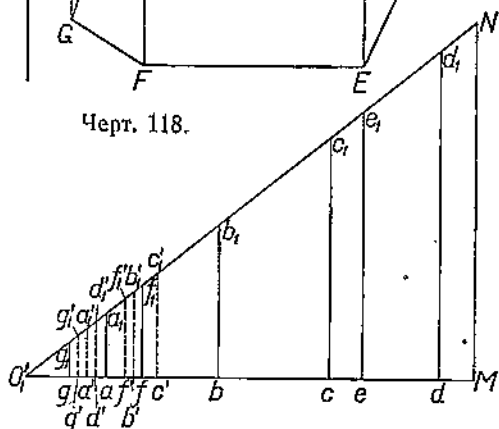
Это построение может быть проведено теми же приемами, которые указаны в § 17 и 19, если при откладывании линейных отрезков пользоваться переводным масштабом.



Черт. 118.



Черт. 120.



Черт. 119.

Задача 40. Многоугольный участок $ABCDEFGG$, начерченный в масштабе $1:20$, перерисовать в масштабе $1:25$, определяя положение вершин методом координат (черт. 118—120).

Решение I. Выбрав оси координат OX и OY , построим координаты всех вершин многоугольника. Чтобы построить многоугольник в новом масштабе, воспользуемся так называемым косым масштабом (черт. 119). На миллиметровой бумаге отложим произвольный отрезок O_1M и на нем построим как на катете прямоугольный треугольник O_1MN с отношением катетов, равным отношению масштабов, т. е. $O_1M:MN = \frac{1}{20}:\frac{1}{25}$. Тогда произ-

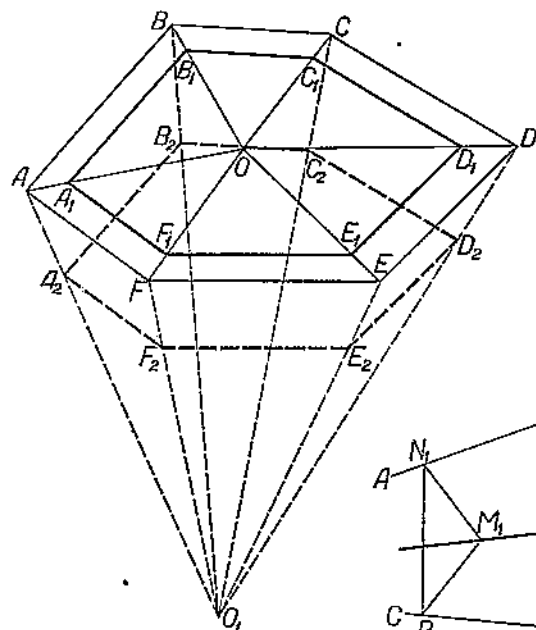
вольному отрезку O_1a , взятому в масштабе $1:20$, соответствует отрезок aa_1 в масштабе $1:25$. Таким образом, откладывая на горизонтальном катете O_1M отрезки, равные координатам вершин данного многоугольника, найдем на вертикальных отрезках координаты данных вершин в новом масштабе; так, например, если $O_1a' = Aa$, то $a'a_1 = A_1a_1$; $O_1f = Of$ и $ff_1 = O_1f_1$; $O_1f' = Ff$ и $f'f_1' = F_1f_1$ и т. д.

Решение II. Другой способ решения той же задачи основан на свойстве центра подобия. Если из произвольной точки O (или O_1), взятой на плоскости чертежа, проведем лучи к вершинам данного многоугольника, то, выбрав на одном из лучей, например OA (или O_1A) (черт. 121), точку A_1 или A_2 так, что отношение отрезков OA и OA_1 (или O_1A и O_1A_2) равно коэффициенту подобия заданной и искомой фигуры, можно построить искомую фигуру, как показано на чертеже.

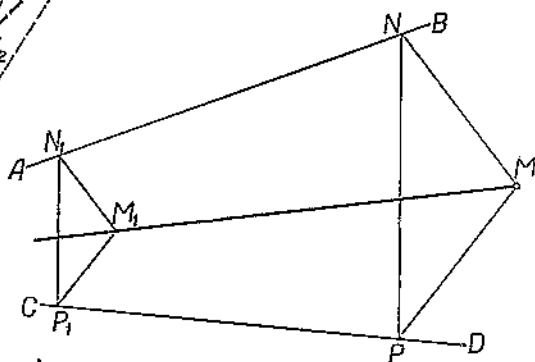
$OA:OA_1 = O_1A:O_1A_2 = k$,
 $A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, C_1D_1 \parallel CD, D_1E_1 \parallel DE, E_1F_1 \parallel EF, F_1A_1 \parallel FA$;
 $A_2B_2 \parallel AB, B_2C_2 \parallel BC, C_2D_2 \parallel CD, D_2E_2 \parallel DE, E_2F_2 \parallel EF, F_2A_2 \parallel FA$.

Полученные многоугольники $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ подобны данному многоугольнику $ABCDEF$, и отношение их сходственных сторон равно коэффициенту подобия k .

Пользуясь свойством центра подобия, можно решить следующую задачу, имеющую применение в практике черчения.



Черт. 121.



Черт. 122.

Задача 41. Даны две прямые AB и CD , не пересекающиеся в рамках чертежа. Через данную точку M провести прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых AB и CD (черт. 122).

На прямой AB отметим произвольную точку N , на прямой CD — такую же точку P и соединим эти точки между собой и с данной точкой M . По возможности ближе к месту схождения прямых AB и CD проведем прямую $N_1P_1 \parallel NP$, пересекающую AB в точке N_1 и CD в точке P_1 . Затем проведем $N_1M_1 \parallel NM$ и $P_1M_1 \parallel PM$ и получим точку M_1 , лежащую на искомой прямой MM_1 .

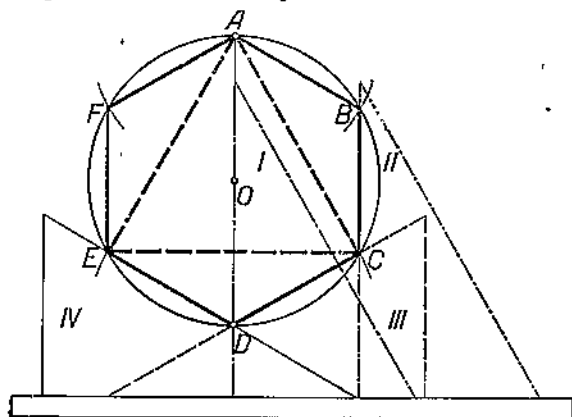
Треугольники $M_1N_1P_1$ и MNP подобны и подобно расположены, а потому AB , M_1M и CD проходят через общую точку — центр подобия.

§ 25. Построение правильных вписанных и описанных многоугольников.

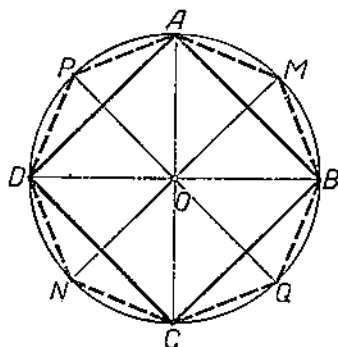
Задача 42. В круг данного радиуса вписать: 1) правильный шестиугольник, 2) правильный треугольник, 3) квадрат, 4) правильный восьмиугольник.

1) Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу. Построение сводится к последовательному откладыванию шести равных хорд длиной в радиус круга (черт. 123).

Из точки A откладываем хорды $AB=BC=CD=DE=EF=FA=r$. Соединив последовательно полученные точки, получим правильный шестиугольник $ABCDEF$.



Черт. 123.



Черт. 124.

Проверка. Диагональ AD —диаметр окружности, $BC \parallel FE \parallel AD$ (положения I и II угольника с острым углом в 60°), $FA \parallel CD$. Установив больший катет угольника вдоль диаметра AD , приложим к меньшему катету линейку и, удерживая линейку левой рукой, повернем угольник из положения I в положение II для проведения стороны BC и затем в положения III и IV для проведения сторон CD и DE ; таким образом проверим правильность построения трех сторон шестиугольника; каждой из этих трех сторон соответствует параллельная сторона.

2) Соединив точки деления через одну, получим правильный вписанный треугольник ACE .

3) Концы двух взаимно перпендикулярных диаметров служат вершинами вписанного квадрата $ABCD$ (черт. 124).

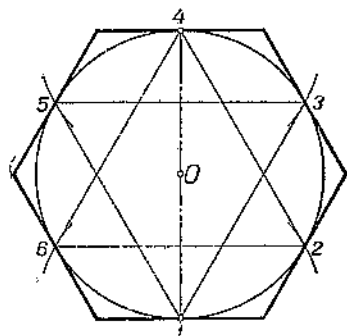
4) Проведя диаметры MN и PQ параллельно сторонам AD и AB квадрата, получим на окружности еще 4 точки: M, N, P и Q и построим правильный вписанный восьмиугольник.

Задача 43. Построить правильный описанный шестиугольник, треугольник, квадрат, восьмиугольник.

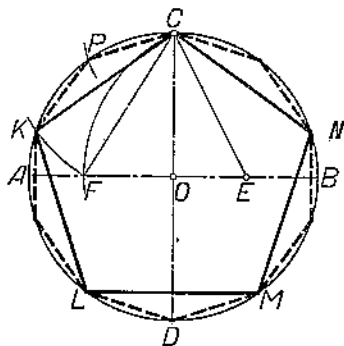
Построение сводится к проведению касательных к окружности в точках деления ее на 6, 3, 4, 8 равных частей. При этом следует иметь в виду, что сторона описанного многоугольника

параллельна хорде, соединяющей две вершины, смежные с данной (черт. 125) (см. задачу 22, случай 2). Так, касательная к вершине 1 параллельна хорде 6-2, касательная к вершине 2 параллельна хорде 1-3 и т. д.

Этот прием можно применить при построении правильного описанного многоугольника с любым числом сторон.



Черт. 125.



Черт. 126.

Задача 44. В данный круг вписать: 1) правильный пятиугольник, 2) правильный десятиугольник.

Проведем (черт. 126) два взаимно перпендикулярных диаметра AOB и COD , разделим радиус OB в точке E пополам и из центра E радиусом EC проведем дугу до пересечения с диаметром AB в точке F . Хорда CF определяет длину стороны пятиугольника $CKLMN$, а отрезок OF — длину стороны десятиугольника.

Доказательство. Из треугольника COE имеем:

$$CE = \sqrt{CO^2 + OE^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{5}.$$

$$\text{В треугольнике } COF \text{ катет } FO = FE - OE = \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

$$CF = \sqrt{CO^2 + OF^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4} (\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{r}{2} \sqrt{4 + 5 + 1 - 2\sqrt{5}} = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

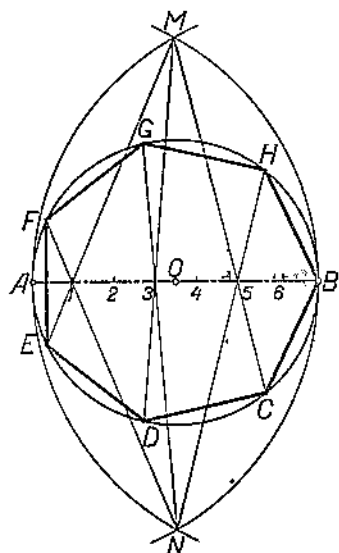
Из геометрии известно, что стороны вписанного правильного пятиугольника и десятиугольника выражаются формулами:

$$a_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ и } a_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

следовательно, $CF = a_5$ и $OF = a_{10}$.

Задача 45. Разделить окружность на произвольное число равных частей.

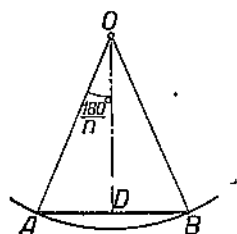
1. На чертеже 127 дан способ приближенного деления окружности на произвольное число равных частей. Произвольный диаметр AB разделим на столько равных частей, на сколько хотим разделить окружность, например на 7 частей. Точки деления отмечены цифрами 1, 2, 3, 4... Из концов A и B диаметра как из центров проведем радиусом AB окружности, взаимно пересекающиеся в точках M и N . Проведем из этих точек секущие через точки 1, 3, 5, 7 (или через 0, 2, 4, 6), получим на окружности точки C, D, E, A, F, G, H , делящие окружность на заданное число равных частей с практически достаточной степенью точности.



Черт. 127.

нобедренного треугольника AOB (черт. 128):

2. Обозначив число сторон правильного вписанного многоугольника через n , радиус описанной окружности через R и длину стороны через a , получим из рав-



Черт. 128.

$$AD = \frac{AB}{2} = AO \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, \text{ откуда } AB = a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Эта формула дает возможность вычислить с любой степенью точности приближенное значение длины стороны правильного вписанного многоугольника. В нижеследующей таблице, заимствованной из Технического справочника, даны величины $2 \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Число сторон правильного вписанного многоугольника	3	4	5	6	7	8
Длина стороны	1,732 R	1,414 R	1,176 R	1,000 R	0,868 R	0,705 R
Длина стороны	9	10	11	12	13	14
Число сторон правильного вписанного многоугольника	0,684 R	0,618 R	0,533 R	0,518 R	0,479 R	0,445 R
Длина стороны	15	16	17	18	19	20
Число сторон правильного вписанного многоугольника	0,416 R	0,390 R	0,358 R	0,347 R	0,329 R	0,313 R

Задача 46. В данный круг радиуса $R=50$ мм вписать правильный пятнадцатигульник, пользуясь формулой:

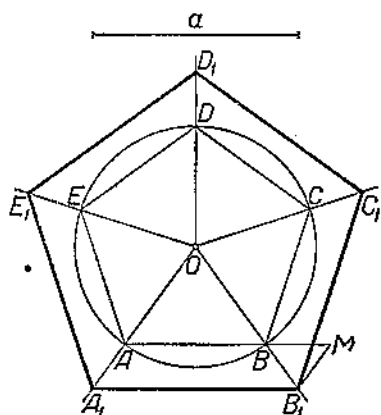
$$a_{15} = 2R \sin \frac{180^\circ}{15} = 2R \sin 12^\circ.$$

По формуле или из таблицы определим $a_{15} = 0,416 R = 20,8$ мм. Откладывая последовательно 15 раз хорду $a_{15} = 20,8$ мм, получим искомый многоугольник.

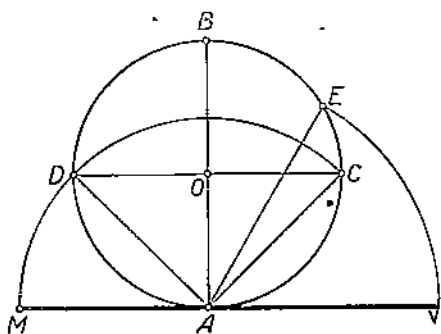
Если требуется построить правильный многоугольник по заданному числу сторон и данной длине стороны, то нужно предварительно вписать в произвольную окружность правильный многоугольник с заданным числом сторон и затем, приняв центр окружности за центр подобия, построить правильный многоугольник с заданной длиной стороны, как показано на чертеже 129.

Задача 47. Построить правильный пятиугольник с заданной стороной a .

В произвольную окружность впишем правильный пятиугольник $ABCDE$. Из центра O проведем лучи $OA, OB, \dots$ через все вершины, на стороне AB отложим $AM = a$, через полученную точку M проведем $MB_1 \parallel OA$ и в пересечении с лучом OB получим вершину B_1 искомого пятиугольника. Проведя $B_1A_1 \parallel BA$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$, $D_1E_1 \parallel DE$ и $E_1A_1 \parallel EA$, получим искомый пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, сторона которого $A_1B_1 = AM = a$.



Черт. 129.



Черт. 130.

§ 26. Выпрямление дуги окружности.

Как известно, длина окружности C радиуса r равна $2\pi r$. Точное построение длины окружности невозможно при помощи циркуля и линейки. Однако существует простой способ приближенного построения длины окружности. Если в данную окружность вписать квадрат и правильный треугольник, то сумма стороны правильного треугольника и стороны квадрата равна длине полуокружности с точностью до 0,01.

Действительно, $a_1 = r\sqrt{2}$, $a_3 = r\sqrt{3}$, $a_1 + a_3 = r(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx r(1,41 + 1,73) = 3,14 \cdot r \approx \pi r$, где $\pi \approx 3,14$.

Задача 48. Построить отрезок, равный длине данной полуокружности (черт. 130).

1. Проведем два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD . В точке A проведем касательную $MN \parallel CD$ и отложим $AM = AD$ и $AN = AE$, где AD — сторона вписанного квадрата, а AE — сторона вписанного правильного треугольника. Отрезок $MN = AM + AN \approx \pi R$.

2. В конце диаметра AB проведем касательную. Из центра O проведем под углом в 30° к диаметру AB прямую OC , пересекающую касательную в точке C (черт. 131). От точки C отложим по касательной отрезок CD , равный утроенному радиусу r окружности. Соединив точку D с концом B диаметра, получим отрезок BD , приближенно равный длине полуокружности. Действительно, из прямоугольного треугольника CAO находим:

$$CA = \frac{1}{2} CO = \frac{OA}{3} \sqrt{3} = \frac{r}{3} \sqrt{3}.$$

Так как $CD = 3r$, то

$$AD = 3r - \frac{r}{3} \sqrt{3} = r \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

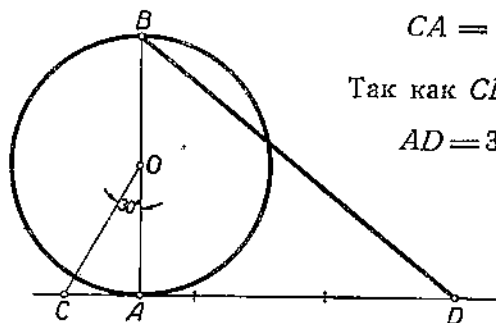
а потому

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} =$$

$$= \sqrt{4r^2 + r^2 \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} =$$

$$= r \sqrt{4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}} = r \sqrt{13 \frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \approx r \cdot 3,14153 \approx \pi r$$

(с точностью до 0,0001).



Черт. 131.

§ 27. Построение коробовых и овоидальных кривых.

Овоидальная кривая по форме напоминает контур куриного яйца. Она имеет одну ось симметрии и состоит из двух дуг окружностей различных радиусов, сопряженных двумя внутренне касательными окружностями одинакового радиуса. На чертеже 132 показана овоидальная кривая:

$AB \perp CD$, $DC = DE = CD = CF$, $BE = BG = BF$;
 O — центр дуги DAC , C — центр дуги DF , D — центр дуги CE ,
 B — центр дуги EGF .

Если из обоих центров, расположенных на оси симметрии, проведем дуги одинаковых радиусов, то получим обыкновенный овал, построение которого показано на чертеже 133.

$$AO = OO_1 = O_1B, \quad C_1D_1 = C_1E_1 = CD = CE;$$

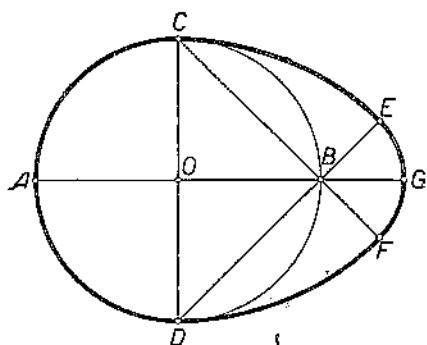
O — центр дуги DAD_1 ,

C_1 — центр дуги D_1ME_1 ,

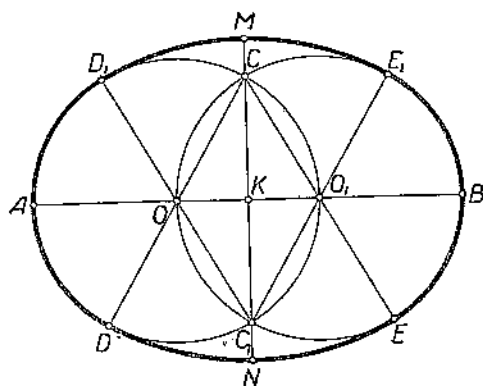
O_1 — центр дуги E_1BE ,

C — центр дуги DNE ,

AB и MN — оси овала.

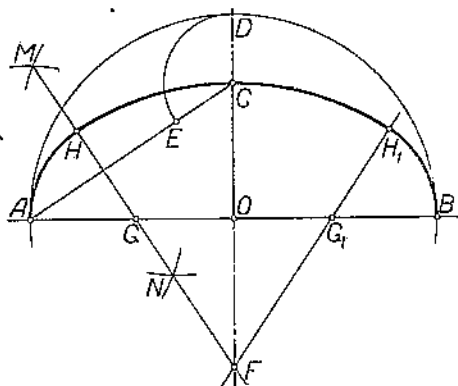


Черт. 132.



Черт. 133.

Овальные кривые носят название коробовых кривых и служат для очертания сводов. Обычно задается пролет, т. е. длина большой оси, и высота кривой, равная половине малой оси. Кривая может быть очерчена дугами окружностей из трех центров, и тогда коробовая кривая носит название трехцентровой. Построение трехцентровой коробовой кривой показано на чертеже 134.



Черт. 134.

Задача 48. Построить трехцентровую коробовую кривую по данному пролету и данной высоте.

AB — пролет кривой, OC — высота, $OC \perp AB$, $AO = OB$, $OD = OA$, $CD = AO - OC = CE$, $AE = CA - DC$; MN перпендикулярен к отрезку AE и делит его пополам, F — центр дуги HCH_1 , G — центр дуги AH , G_1 — центр дуги H_1B .

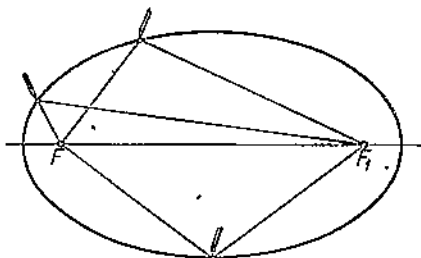
28. Кривые, вычерчиваемые по точкам при помощи лекал.

До сих пор мы рассматривали построение кривых, состоящих из сопряженных дуг окружностей. Такие кривые вычерчиваются циркулем и линейкой. В дальнейшем мы рассмотрим кривые, которые не могут быть составлены из дуг окружностей и вычерчиваются по найденным точкам при помощи лекал. Эти кривые могут иметь весьма разнообразную форму. Мы остановимся только на некоторых кривых, с которыми учащимся придется иметь дело.

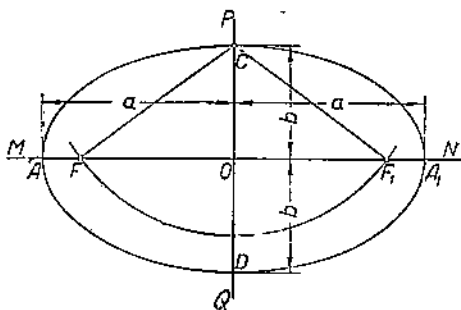
В первой группе кривых рассмотрим кривые, которые получаются при пересечении конической поверхности плоскостями, разномысленными к оси конуса, а именно: эллипс, параболу и гиперболу.

§ 29. Эллипс.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная, равная большой оси эллипса. Данные постоянные точки называются *фокусами*, а расстояние между ними — *фокусным расстоянием*. Отрезки, соединяющие какую-нибудь точку эллипса с фокусами, называются *радиусами-векторами*. Постоянная сумма радиусов-векторов обозначается через $2a$, фокусное расстояние — через $2c$. Если концы нити закрепить в фокусах и натянуть нить острием карандаша, то при движении карандаша опишется кривая — эллипс (черт. 135). Этим приемом вычерчивания эллипса удобно пользоваться при черчении эллипса на классной доске.



Черт. 135.



Черт. 136.

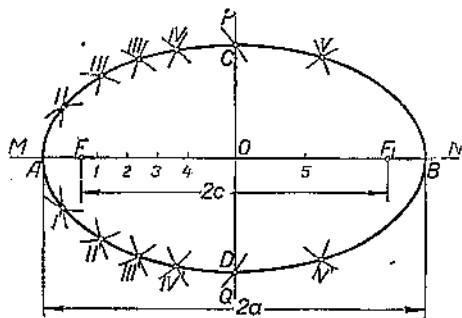
Задача 49. Начертить на классной доске эллипс по заданным большой оси $2a$ и малой оси $2b$ (черт. 136).

Проведем две взаимно перпендикулярные прямые MN и PQ , пересекающиеся в точке O . Отложим на прямой MN отрезки $OA = OA_1 = a$ и на прямой PQ — отрезки $OC = OD = b$ ($b < a$). Из центра C радиусом, равным a , проведем окружность, которая пересечет большую ось в точках F и F_1 — фокусах эллипса. Взяв нитку длиною, равной большой оси $2a$, закрепляем концы ее в точках F и F_1 (гвоздиками или кнопками) и, натянув нить хорошо заточенным мелком, вычерчиваем эллипс. При вычерчивании необходимо наблюдать за тем, чтобы нить шарнирно

вращалась в точках закрепления на фокусах.

Задача 50. Построить эллипс по заданной большой оси его $2a$ и фокусному расстоянию $2c$.

На произвольной прямой MN (черт. 137) отложим отрезок $AB = 2a$ и от середины его O — отрезки $OF = OF_1 = c$. Через точку O проведем прямую $PQ \perp AB$ и из центра F радиусом, равным $AO = a$, засекаем прямую PQ в точках C

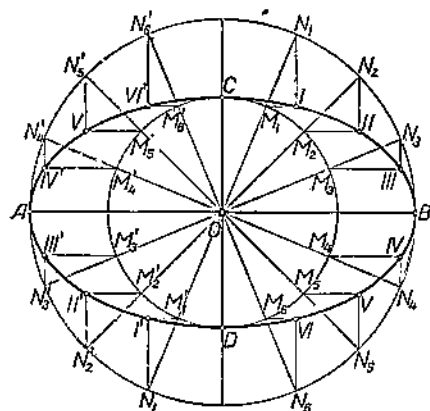


Черт. 137.

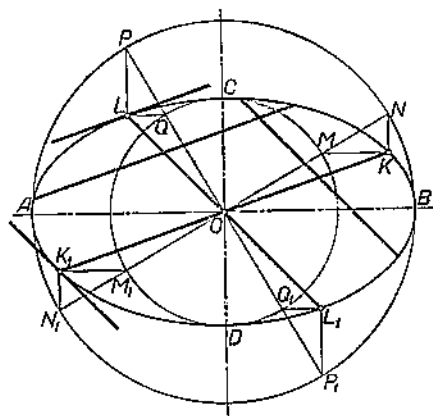
и D и этим определяем концы малой оси. Отметим на оси AB ряд точек $1, 2, 3, 4, \dots$ между точками F и F_1 и проведем дугу с центром в точке F радиусом $A-1$, а с центром в точке F_1 — дугу радиусом $1-B$. Эти дуги пересекаются в двух точках I и II эллипса. Затем проведем дуги радиусами $A-2$ и $2-B$, $A-3$ и $3-B$ и таким образом определим любое число точек $II, III, \dots$ искомой кривой. Остается при помощи лекал провести кривую AC и симметричные ей кривые CB и AD , а затем — кривую BD , симметричную AC или AD .

Задача 51. Построить эллипс по его осям $2a$ и $2b$ (черт. 138).

Проведем две концентрические окружности радиусами, равными a и b . В первой окружности проведем диаметр $AB=a$, а во второй — перпендикулярно к AB диаметр $CD=2b$. Проведем в большой окружности произвольный радиус ON_1 , пересекающий малую окружность в точке M_1 . Если теперь из точки N_1 проведем параллель к CD , а из точки M_1 — параллель к AB , то в пересечении этих параллелей получим точку I эллипса. Сделав то же построение для точек N_2, N_3 и т. д., получим точки II, III и т. д.



Черт. 138.



Черт. 139.

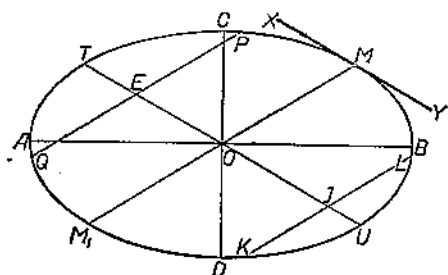
Если мы в концентрических окружностях, построенных на осях эллипса как на диаметре, проведем произвольную пару взаимно перпендикулярных диаметров, например NN_1 (MM_1) и PP_1 (QQ_1) (черт. 139), то, построив по точкам (N, M) , (N_1, M_1) , (P, Q) и (P_1, Q_1) точки K, K_1, L, L_1 эллипса, получим два сопряженных диаметра эллипса — KK_1 и LL_1 . Сопряженные диаметры обладают следующими свойствами:

Каждый из двух взаимно сопряженных диаметров эллипса делит пополам все хорды, параллельные другому диаметру.

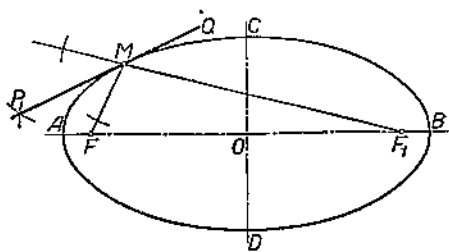
Касательная, проведенная в конце диаметра эллипса, параллельна сопряженному диаметру.

Задача 52. Через точку M , данную на эллипсе, провести касательную к эллипсу (черт. 140).

Проведем диаметр MM_1 и две произвольные хорды $LK \parallel MM_1$ и $PQ \parallel MM_1$. Проведем прямую через середины J и E хорд LK и PQ (прямая пройдет через центр O эллипса), получим сопряженный диаметр TU . Через точку M проведем искомую касательную $XY \parallel TU$.



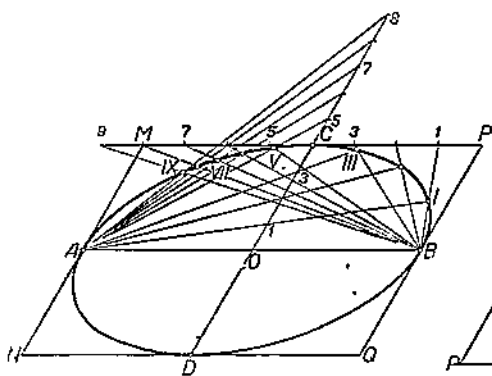
Черт. 140.



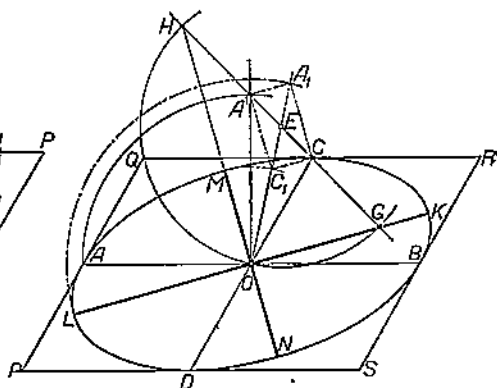
Черт. 141.

Другой способ проведения касательной к эллипсу в данной на нем точке основан на свойстве касательной, которая делит пополам внешний угол между радиусами-векторами, проведенными в точку касания. Построение показано на чертеже 141.

Задача 53. В данный параллелограм $MNPQ$ вписать эллипс (черт. 142).



Черт. 142.



Черт. 143.

Проведем в параллелограме средние линии AB и CD , которые являются сопряженными диаметрами эллипса, имеющего точки касания A, B, C и D . Разделим отрезок OC и отрезок CP на одинаковое число равных частей и пронумеруем точки деления $1, 2, 3, \dots$ по OC от точки O и по CP от точки P . Эти деления продолжим и за точку C . Проведем лучи от точки B к делениям на CP и от точки A к делениям на OC , мы в пересечении лучей, проведенных к одноименным делениям, получим точки эллипса.

Задача 54. Построить оси эллипса, вписанного в данный параллелограм $PQRS$ (черт. 143).

Средние линии AB и CD параллелограмма $PQRS$ представляют пару сопряженных диаметров эллипса с центром O . Повернем радиус AO на 90° в положение $A'O$, через A' и C проведем прямую и середину E отрезка $A'C$ соединим с центром O . Из центра E радиусом EO проведем окружность, пересекающую прямую $A'C$ в точках G и H . Прямые GO и HO определяют направления осей эллипса. Отрезок HC определяет величину большой полуоси, отрезок CG — величину малой полуоси эллипса. LK — большая ось, MN — малая ось.

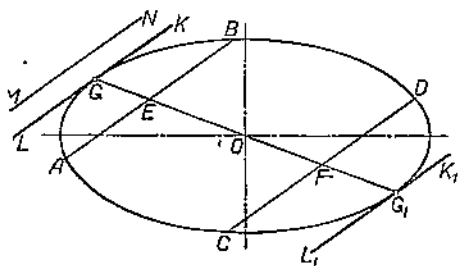
Если представить себе, что отрезок GH скользит концами G и H по взаимно перпендикулярным прямым KL и MN , то точка C опишет эллипс $CKBNDLAM$.

Доказательство. Проведем $CC_1 \parallel OK$, найдем, что $\triangle ECC_1$ — равнобедренный и $OC_1 = CG = OM$.

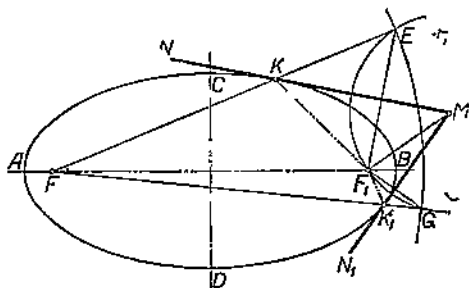
Соединив C_1 с A' , найдем, что $\triangle EA'C_1$ — равнобедренный и $\angle A'C_1C = d$. Дополнив прямоугольный треугольник $A'C_1C$ до прямоугольника $A'C_1CA_1$, заметим, что $OA_1 = HC = OL$. Таким образом точка C эллипса получается как точка, соответствующая точке A_1 родственной окружности (см. черт. 138).

Задача 55. Провести касательную к эллипсу параллельно данной прямой MN (черт. 144).

Проведем две произвольные хорды AB и CD , параллельные данной прямой MN . Разделим эти хорды в точках E и F пополам. Прямая EF есть диаметр, сопряженный диаметру, параллельному MN , точки G и G_1 пересечения этого диаметра с эллипсом определяют точки касания искомой касательной. Проведем $KGL \parallel MN \parallel K_1G_1L_1$, получим искомые касательные.



Черт. 144.



Черт. 145.

Задача 56. Из внешней точки M провести касательную к данному эллипсу (черт. 145).

Пусть дан эллипс с осями AB и CD и фокусами F_1 и F и точка M . Из фокуса F , радиусом, равным большой оси AB эллипса, опишем окружность (направляющая окружность эллипса). Соединим данную точку M с фокусом F_1 и радиусом MF_1 опишем из центра M окружность, пересекающую направляющую окружность в точках E и G . Искомые касательные MN и MN_1 перпендикулярны к хордам EF_1 и GF_1 , а радиусы EF и GF

проходят через точки касания K и K_1 (ср. задачу 27, способ 2, проведение касательной из внешней точки окружности).

Доказательство. $K_1G = K_1F_1$, следовательно, MK_1 — биссектриса внешнего угла F_1K_1G между радиусами-векторами F_1K_1 и FK_1 . Точно так же $EK = F_1K$, и MN делит пополам угол EKF_1 .

Задача 57. По данной большой оси $2a$ и малой оси $2b = 0,57 \cdot 2a$ построить приближенную форму эллипса дугами окружности.

Эллипс с отношением $b:a = 0,57$ приходится часто вычерчивать при построении изометрических проекций круга (§ 54). А. Виноградовым предложен нижеследующий способ построения приближенной формы такого эллипса четырьмя дугами окружностей. Проведем в окружности два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (черт. 146). Из точки C проведем две хорды CG и CE под углом в 30° к CD . Через точки K и L пересечения этих хорд с AB и точку D проведем хорды DG_1 и DE_1 . Из центров K и L проведем дуги радиусами KA и LB до пересечения с хордами CG и CE в точках N и M , а с хордами DG_1 и DE_1 — в точках N_1 и M_1 . Из центра C проведем дугу радиусом $CN = CM$, а из точки D — радиусом $DM_1 = DN_1$. Эти дуги сопрягаются с дугами, проведенными из центра K радиусом $KN = KA = KN_1$ и из центра L радиусом $LM = LB = LM_1$. Полученная коробовая кривая весьма близко подходит к эллипсу. Легко

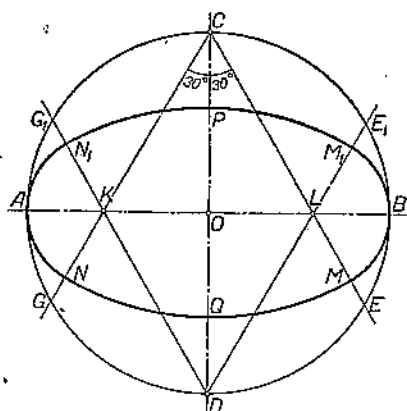
доказать, что малая ось $PQ \approx \approx 0,57 AB$. Действительно, обозначив большую полуось $OA = OB$ через a , получим из треугольника COK :

$$OK = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad CK = \frac{2a\sqrt{3}}{3};$$

$$KA = a - \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad CQ = \frac{2a\sqrt{3}}{3} +$$

$$+ a - \frac{a\sqrt{3}}{3} = a + \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$OQ = OP = \frac{a\sqrt{3}}{3} \approx 0,57a.$$



Черт. 146.

§ 30. Парабола.

Пара́бола есть геометрическое место точек, равно удаленных от данной прямой, называемой направляющей или директрисой, и данной точки вне прямой — фокуса параболы.

Отрезок, соединяющий точку кривой с фокусом, называется радиусом-вектором¹. Расстояние фокуса от направляющей называется параметром параболы.

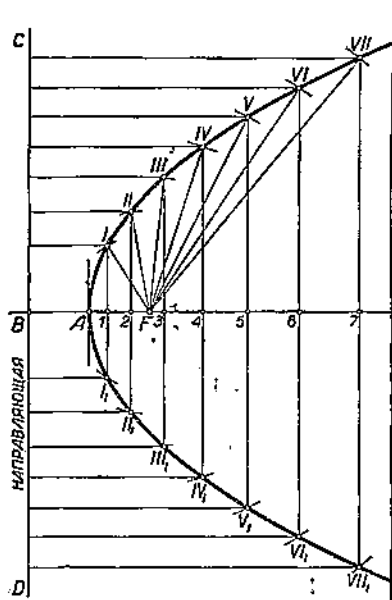
¹ Параболу можно рассматривать как эллипс, второй фокус которого представляет бесконечно удаленную точку. Ввиду этого второй радиус-вектор к точке параболы представляет прямую, параллельную оси параболы.

Задача 58. Построить точки параболы по заданной направляющей CD и заданному фокусу F .

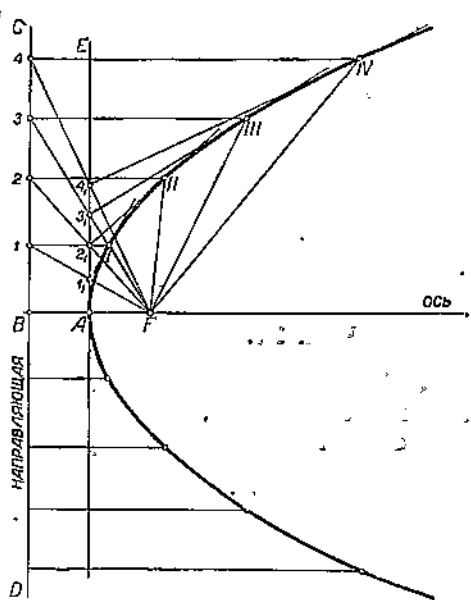
1-й способ. Проведем прямую $FB \perp CD$ (черт. 147) и разделим отрезок FB в точке A пополам, получим вершину A параболы. Прямая BF — ось параболы.

Возьмем на оси параболы произвольно выбранные точки $I, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ и через них проведем прямые, параллельные CD , т. е. перпендикулярные к оси. Из точки F как из центра радиусом, равным отрезку $B-I$, проведем дугу до пересечения с перпендикуляром, проведенным через точку I , в точках I и I_1 , радиусом $B-2$ — до пересечения с перпендикуляром 2 в точках II и II_1 и т. д. Все эти точки одинаково отстоят от направляющей CD и от фокуса F , т. е. принадлежат параболе.

Проведение кривой делается по лекалу.



Черт. 147.



Черт. 148.

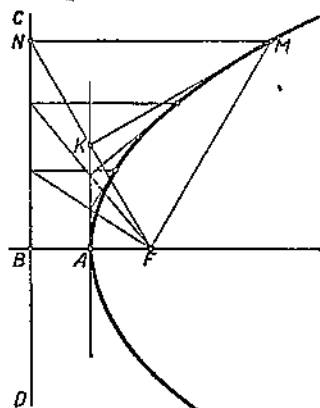
2-й способ. Проведем прямую $FB \perp CD$ — ось параболы (черт. 148), разделим отрезок FB в точке A пополам и в вершине A проведем $AE \parallel CD$.

Взяв на направляющей CD произвольные точки $1, 2, 3, 4, \dots$, соединим их с фокусом F и в точках пересечения $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, \dots$ прямых $1-F, 2-F, 3-F, 4-F, \dots$ с AE проведем перпендикуляры к отрезкам $1-F, 2-F, 3-F, 4-F, \dots$. Эти перпендикуляры являются касательными к параболе в точках $I, II, III, IV, \dots$ их пересечения с прямыми, параллельными оси, проведенными через точки $1, 2, 3, 4, \dots$

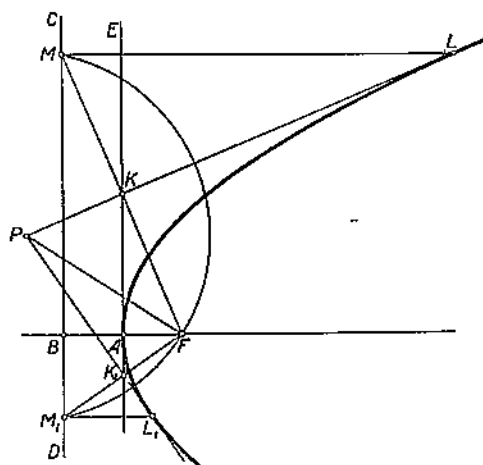
Задача 59. К параболы, заданной своей вершиной A и фокусом F , провести касательную в точке, взятой на параболы (черт. 149).

Отложив на прямой AF от точки A отрезок $AB = AF$, проведем направляющую $CD \perp BF$ и построим параболу по точкам (черт. 147 и 148).

Чтобы провести касательную в точке M параболы, проведем $MN \parallel BF$, соединим N с фокусом F и в пересечении прямой NF с параллелью AK получим точку K искомой касательной KM . Из чертежа видно, что касательная KM есть биссектриса угла NMF , т. е. внешнего угла между направлениями MM_∞ и MF .



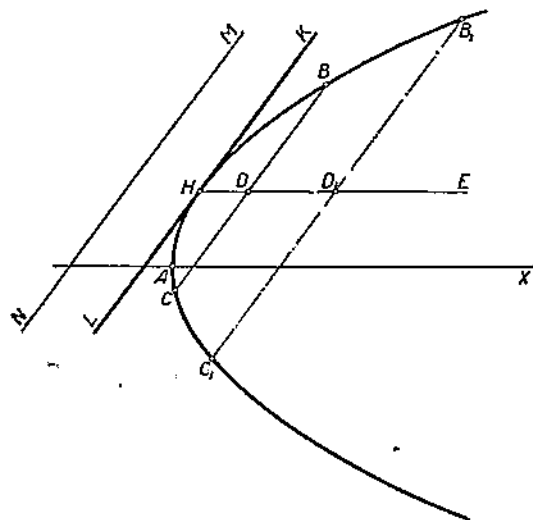
Черт. 149.



Черт. 150.

Задача 60. Провести касательную к параболы из точки, лежащей вне параболы (черт. 150).

Соединив данную точку P с фокусом F , проведем радиусом PF из центра P окружность, пересекающую направляющую CD в точках M и M_1 . Прямые MF и M_1F пересекают прямую AE в точках K и K_1 . Проведя прямые PK и PK_1 , получим искомые касательные, которые касаются параболы в точках L и L_1 пересечения прямой $ML \parallel BF$ с PK и прямой $M_1L_1 \parallel BF$ с PK_1 .



Черт. 151.

Задача 61. Провести касательную к параболы параллельно данной прямой MN (черт. 151).

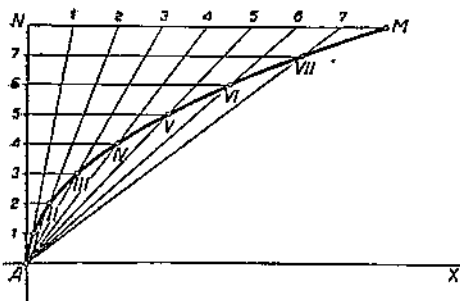
Если в параболы дана ось AX , то проведем

произвольную хорду $BC \parallel MN$; через середину D этой хорды проведем прямую $DE \parallel AX$, пересекающую параболу в точке касания H . Прямая $KHL \parallel MN$ — искомая касательная.

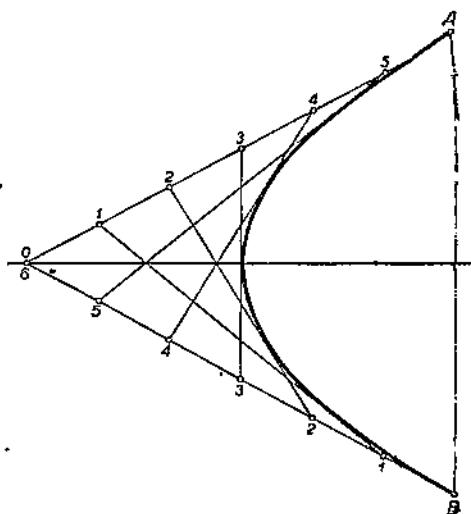
Если направление оси не задано, то следует провести вторую хорду $B_1C_1 \parallel BC \parallel MN$ и найти ее середину D_1 . Прямая DD_1 определяет направление оси параболы.

Задача 62. Построить параболу по заданной вершине A , направлению оси и точке M , через которую проходит параболa (черт. 152).

Из данной точки M проводим прямую, параллельную оси AX , до пересечения с прямой $AN \perp AX$ в точке N . Разделим отрезок AN и MN на одинаковое число равных частей. Через точки $I, 2, 3, 4 \dots$ деления отрезка AN проведем параллели к оси AX , а точки $1, 2, 3, 4 \dots$ отрезка NM соединим с вершиной A . В пересечении прямых, проведенных через одноименные точки, получим точки $I, II, III \dots$ искомой параболы.



Черт. 152.



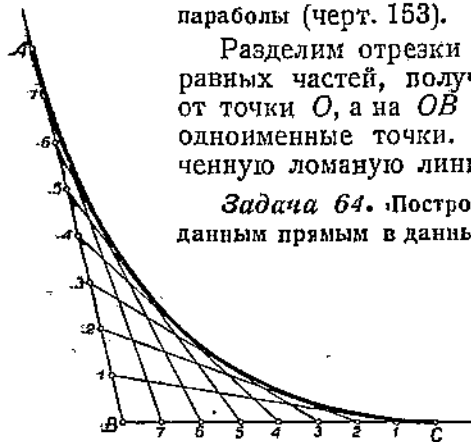
Черт. 153.

Задача 63. Построить параболу по заданным касательным, проведенным к симметричным точкам A и B и образующим углы α с осью параболы (черт. 153).

Разделим отрезки AO и OB на одинаковое число равных частей, полученные точки нумеруем на OA от точки O , а на OB от точки B ; соединим прямыми одноименные точки. Парабола вписывается в полученную ломаную линию.

Задача 64. Построить параболу, касательную к двум данным прямым в данных на них точках A и C (черт. 154).

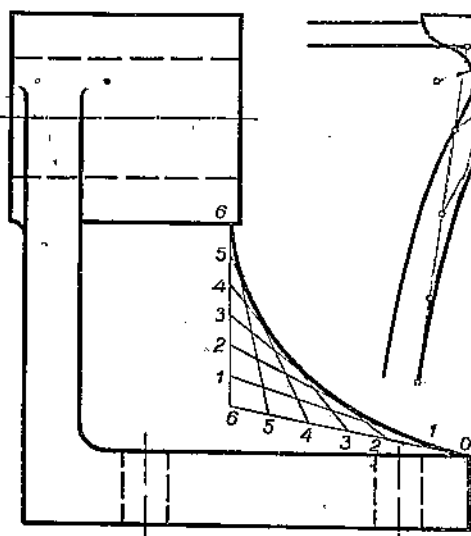
Пусть даны прямые AB и BC и следует их соединить параболой, касающейся AB в точке A и BC в точке C . Разделим отрезки CB и BA на одинаковое число равных частей и полученные точки пронумеруем от C к B и от B к A .



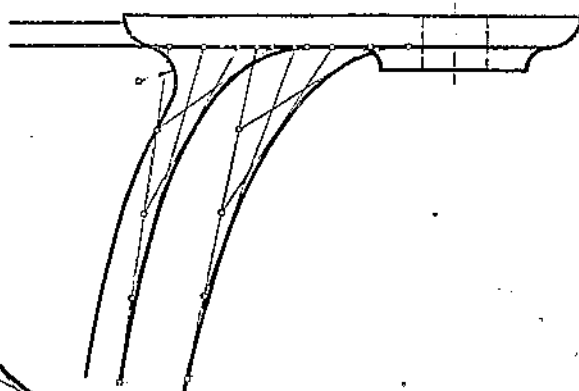
Черт. 154.

Соединив одноименные точки прямыми, получим касательные к параболе.

Это построение применяется для вычерчивания параболических изгибов контурных линий в машиностроении (черт. 155 и 156).



Черт. 155.

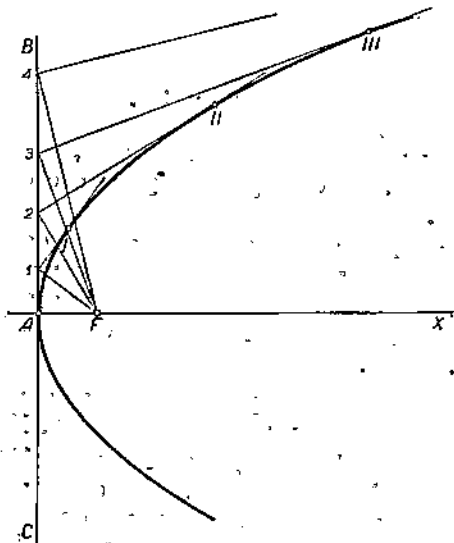


Черт. 156.

Задача 65. Построить параболу, если дано положение вершины A и фокуса F (черт. 157).

Через точки A и F проведем ось AX параболы. Через вершину A проведем касательную к параболе $BAC \perp AF$.

Выбрав на AB произвольные точки $I, 2, 3, \dots$ и соединив эти точки с фокусом F , проведем прямые $I-I \perp I-F$, $2-II \perp 2-F$, $3-III \perp 3-F, \dots$; эти прямые являются касательными к параболе, которая вписывается в эти касательные.



Черт. 157.

§ 31. Гипербола.

Гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная.

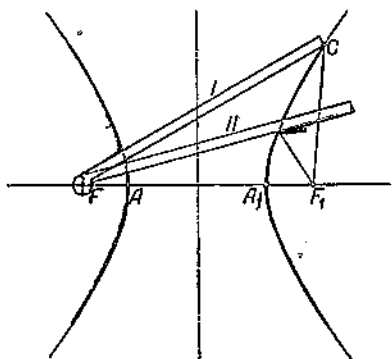
Постоянные точки называются фокусами, расстояние между ними — фокусным расстоянием. Отрезки, соединяющие

какую-либо точку кривой с фокусами, называются радиусами-векторами гиперболы. Постоянную разность обозначим через $2a$ и постоянное расстояние между фокусами — через $2c$, причем

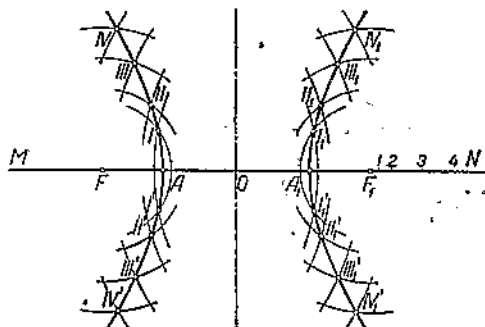
$c > a$. Окружность, описанная радиусом, равным $2a$ с центром в фокусе, называется направляющей окружностью. Гипербола имеет две направляющие окружности.

Задача 66. Начертить гиперболу на классной доске по данным фокусам F и F_1 и данной разности $2a$. 1.

Для этого возьмем линейку длиною больше чем $2a$ и нить, длина которой меньше длины линейки на $2a$. Один конец линейки шарнирно закрепим в фокусе F , к другому концу линейки прикрепим один конец нити, а второй конец нити закрепим в фокусе F_1 , как показано на чертеже 158. Повернем линейку так, чтобы нить оказалась вытянутой (положение I). Затем держалкой с заостренным мелом натягиваем нить вдоль линейки, тогда последняя будет вращаться вокруг фокуса F , а мел опишет верхнюю половину правой ветви гиперболы. Перевернув затем линейку лицевой стороной к доске, можно вычертить нижнюю половину правой ветви. Закрепив затем линейку в фокусе F_1 , а нить — в фокусе F , начертим левую ветвь гиперболы.



Черт. 158.



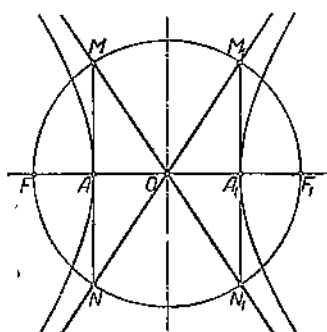
Черт. 159.

Задача 67. Построить по точкам гиперболу с заданными $2a$ и $2c$ (черт. 159).

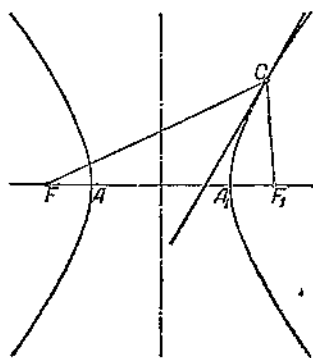
На произвольной прямой MN — оси симметрии гиперболы — откладываем отрезок $FF_1 = 2c$. Разделим отрезок FF_1 в точке O пополам и от этой точки в обе стороны отложим $OA_1 = OA = a$ и получим вершины гиперболы.

Наметим вдоль оси MN вправо от фокуса F_1 произвольные точки $1, 2, 3, 4, \dots$, по каждой из этих точек найдем по две точки для каждой ветви гиперболы следующим образом. Из центра F проведем окружность радиусом $A_1 - 1$, а из центра F_1 — окружность радиусом $A - 1$; в пересечении этих окружностей получим точки I и I' левой ветви гиперболы. Чтобы получить соответствующие точки I_1 и I'_1 правой ветви, проведем из фокуса F окружность радиусом $A_1 - 1$, а из фокуса F_1 — окружность радиусом $A - 1$. Поступая таким же образом с точками $2, 3, 4, \dots$, получим точки $II, III, IV, \dots$ гиперболы.

Если принять за центр точку O — центр гиперболы (черт. 159а), описать окружность радиусом $OF \equiv c$ и из вершин A и A_1 провести хорды, перпендикулярные к оси FF_1 , пересекающие окружность в точках M, N, M_1, N_1 , то, проведя прямые через M и N_1 и через M_1 и N , получим две прямые, проходящие через центр O и называемые асимптотами гиперболы. Асимптоты гиперболы касаются кривой в бесконечно удаленной точке.



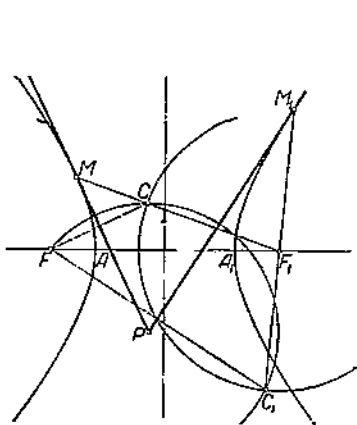
Черт. 159а.



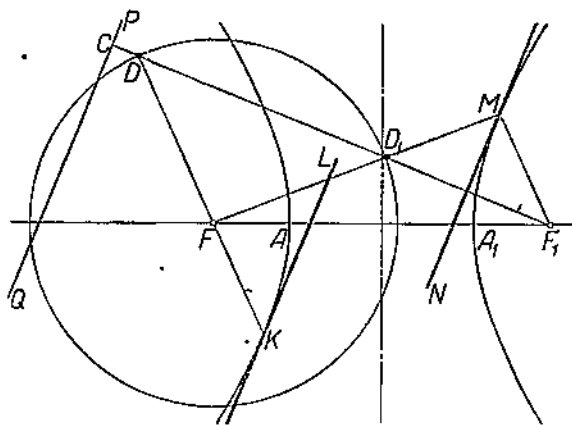
Черт. 160.

Задача 68. Провести касательную к гиперболе в данной на ней точке C (черт. 160).

Соединим точку C с фокусами F и F_1 и построим биссектрису угла C полученного треугольника FCF_1 . Биссектриса — касательная к гиперболе в данной точке C .



Черт. 161.



Черт. 162.

Задача 69. Провести касательную к гиперболе через точку P , данную вне кривой (черт. 161).

Проведем направляющую окружность с центром в фокусе F_1 и радиусом, равным A_1A , и окружность с центром в P и радиусом, равным PF . Полученные точки пересечения этих окружностей C_1

А С соединим с F и из точки P проведем перпендикуляры хордам C_1F и CF . Построенные перпендикуляры касаются гиперболы в точках M и M_1 , лежащих на пересечении прямых F_2C и F_1C_1 с гиперболой.

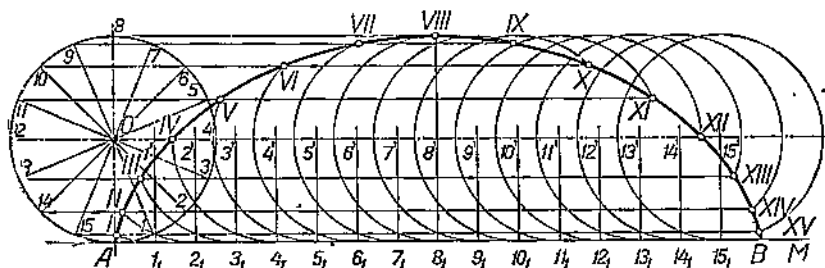
Задача 70. Провести к гиперболе касательную, параллельную данной прямой PQ (черт. 162).

Приняв фокус F за центр, проведем направляющую окружность, а из второго фокуса F_1 проведем прямую $F_1C \perp PQ$, которая пересекает направляющую окружность в точках D и D_1 . Проведя прямую DF , получим в пересечении с гиперболой точку касания K . Прямая $KL \parallel PQ$ есть искомая касательная. Вторую точку касания M мы получим в пересечении прямой FD_1 с гиперболой. Прямая $MN \parallel PQ$ есть вторая касательная.

§ 32. Циклоиды.

Эти кривые применяются в технике при конструировании разных деталей.

1. Обыкновенной *циклоидой* называется кривая линия, описанная одной из точек окружности круга, когда этот последний без скольжения катится по прямой.



Черт. 163.

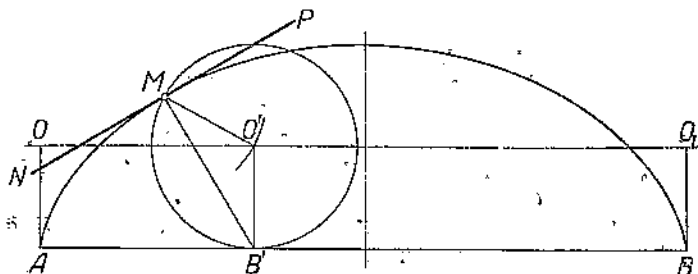
Задача 71. Построить циклоиду для круга радиуса r (черт. 163).

Проведем окружность O данного радиуса r , разделим ее на произвольное число (например на 16) равных частей, отмеченных точками деления $A, 1, 2, 3, \dots, 15$. В начальной точке A проведем касательную AM , на которой отложим 16 равных отрезков $A-1_1, 1_1-2_1, \dots$, равных $\frac{1}{16}$ окружности, и построим положение катящегося круга во всех этих точках (центры $1', 2', 3', \dots$). Перенесем деления $1, 2, 3, \dots$ на соответствующие положения окружности, получим точки $I, II, III, \dots$ циклоиды.

Задача 72. Через данную на циклоиде точку M провести касательную к циклоиде (черт. 164).

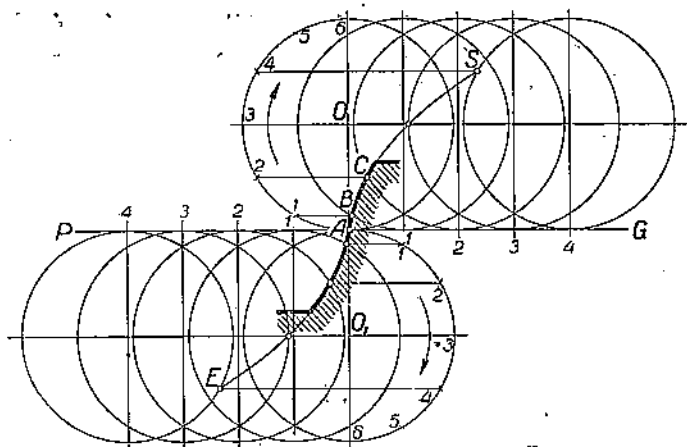
Чтобы построить касательную к циклоиде, следует иметь в виду, что нормаль к циклоиде всегда проходит через точку касания соответствующего положения катящегося круга к основанию. Для определения положения круга, соответствующего

данной точке M , проводим из M как из центра окружность радиуса r до пересечения с $OO_1 \parallel AB$ в точке O' . Из центра O' проводим $O'B' \perp AB$ и точку B' соединяем с M . Проведя $NMP \perp MB'$, получим искомую касательную.



Черт. 164.

На чертеже 165 показано применение циклоиды для вычерчивания профиля зубца зубчатой рейки.



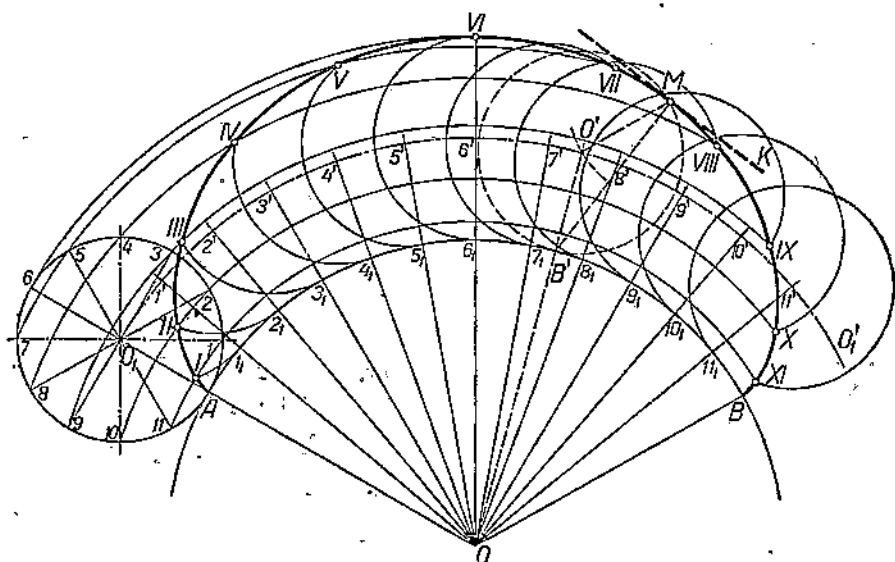
Черт. 165.

2. Эпициклоида описывается точкой окружности круга, когда последний катится без скольжения по основной окружности по наружной стороне ее.

Задача 73. По данной основной окружности радиуса R и производящей окружности радиуса r построить эпициклоиду (черт. 166).

На основной окружности откладываем дугу AB , равную длине производящей окружности. Для этого делим производящую окружность на равные части (например, на 12 частей) и по дуге AB откладываем 12 таких частей. Получим точки $1_1, 2_1, 3_1, \dots, 11_1, 12_1$. Радиусы $O-1_1, O-2_1, O-3_1$, продолжим до пересечения с дугой O_1Q_1 , проведенной concentрично с основной окружностью. Получим центры $1', 2', 3', \dots$ образующей окружности, соответствующие тому положению, когда образующая окружность касается основной в точках $1_1, 2_1, 3_1$. Приняв за центры точки $1', 2', 3'$, проведем

вспомогательные окружности, отложим на них дуги: $\sphericalangle 1 - I = \frac{1}{12}$ окружности, $\sphericalangle 2 - II = \frac{2}{12}$... Получим точки I, II, III, ... эпициклоиды.



Черт. 166.

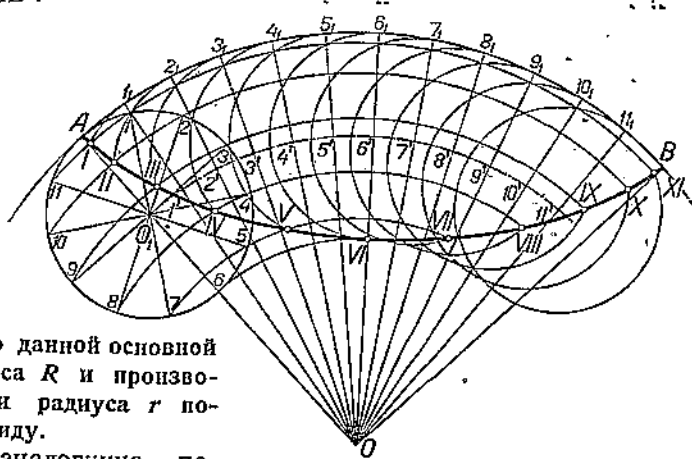
Задача 74. Через точку *М* эпициклоиды провести касательную к этой кривой (черт. 166).

Как и в циклоиде, нормаль в точке *М* проходит через точку касания *В'* образующей окружности к основной в положении, соответствующем данной точке *М*. Построение этой окружности показано на чертеже 166. Проведя нормаль *МВ'*, построим касательную *МК* $\perp$ *МВ'*.

3. **Гипоциклоида** описывается точкой окружности круга, когда последний катится без скольжения по основной окружности на внутренней стороне ее.

Задача 75. По данной основной окружности радиуса *R* и производящей окружности радиуса *r* построить гипоциклоиду.

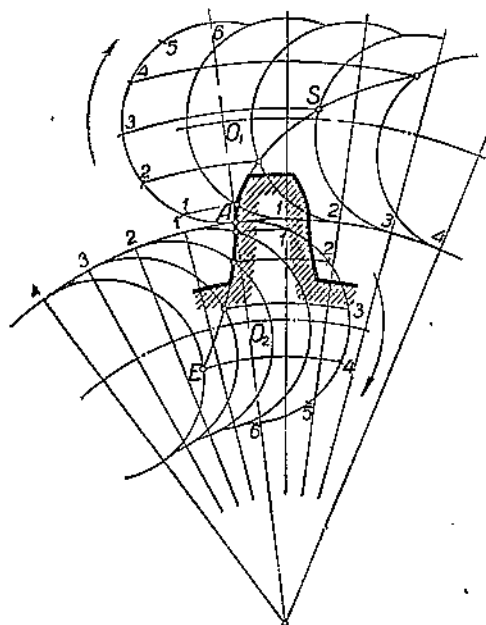
Построение аналогично построению циклоиды и показано на чертеже 167.



Черт. 167.

В частном случае, когда радиус $r = \frac{R}{2}$, гипоциклоида превращается в прямую, проходящую через центр основной окружности.

На чертеже 168 показано применение эпициклоиды и гипоциклоиды для очертания профиля зубца цилиндрического зубчатого колеса. Так называемая начальная окружность зубчатого колеса является направляющей окружности O снаружи катится образующий круг O_1 от точки A направо, а внутри окружности образующий круг O_2 того же радиуса катится влево. Небольшой отрезок эпициклоиды от начальной точки A принимается за профиль головки зубца, а начальная часть гипоциклоиды — за профиль ножки зубца.



Черт. 168.

4. *Эвольвента круга.* Если радиус r производящей окружности эпициклоиды бесконечно увеличивает-ся, то производящая окружность превращается в прямую, которая катится по окружности. Прямая при этом в каждой точке окру-

жности перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку, и является касательной к окружности.

Задача 76. Построить на классной доске эвольвенту круга при помощи нити, накрученной на цилиндр.

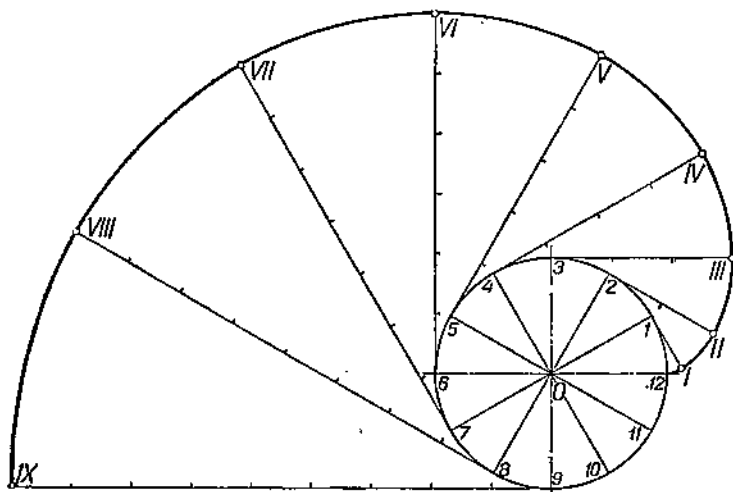
К классной доске прижимают основанием цилиндр, на поверхность которого накручена нитка. Удерживая цилиндр левой рукой и привязав к свободному концу нитки мел, сматывают нитку с цилиндра, удерживая ее в натянутом положении. При этом мел начертит на доске эвольвенту круга.

Задача 77. Построить эвольвенту круга по точкам (черт. 169).

Основную окружность с центром O разделим на произвольное число равных частей (например на 12) и в полученных точках деления $1, 2, 3, \dots$ проведем касательные $1-I, 2-II, 3-III, \dots$. На первой касательной отложим отрезок $1-I$, равный $\frac{1}{12}$ окружности, на второй касательной — отрезок $2-II$, равный $\frac{2}{12}$ окружности, и т. д., получим точки $I, II, III, IV, \dots$ эвольвенты круга.

Касательные к эвольвенте в точках *I, II, III,...* параллельны радиусам *O-I, O-2, O-3,...*

Эвольвента находит применение в тех же случаях, что и эписклоида (для очертания профиля зубьев и. пр.).



Черт. 169.

§ 33. Построение кривой по ее уравнению.

Если уравнение с двумя переменными x и y решено относительно одной из них, т. е. имеет вид $y=f(x)$ или $x=f(y)$, где $f(x)$ есть выражение, зависящее только от одной переменной x , а $f(y)$ — выражение, зависящее только от одной переменной y , то функциональная зависимость между переменными x и y может быть выражена графически.

Рассмотрим несколько примеров графиков функций.

1. Тригонометрические кривые.

Задача 78. Построить кривую, изображающую ход изменения тригонометрических функций в зависимости от изменения угла.

1) $y = \sin x$ (черт. 170), 2) $y = \cos x$ (черт. 170), 3) $y = \operatorname{tg} x$ (черт. 171), 4) $y = \operatorname{ctg} x$ (черт. 171).

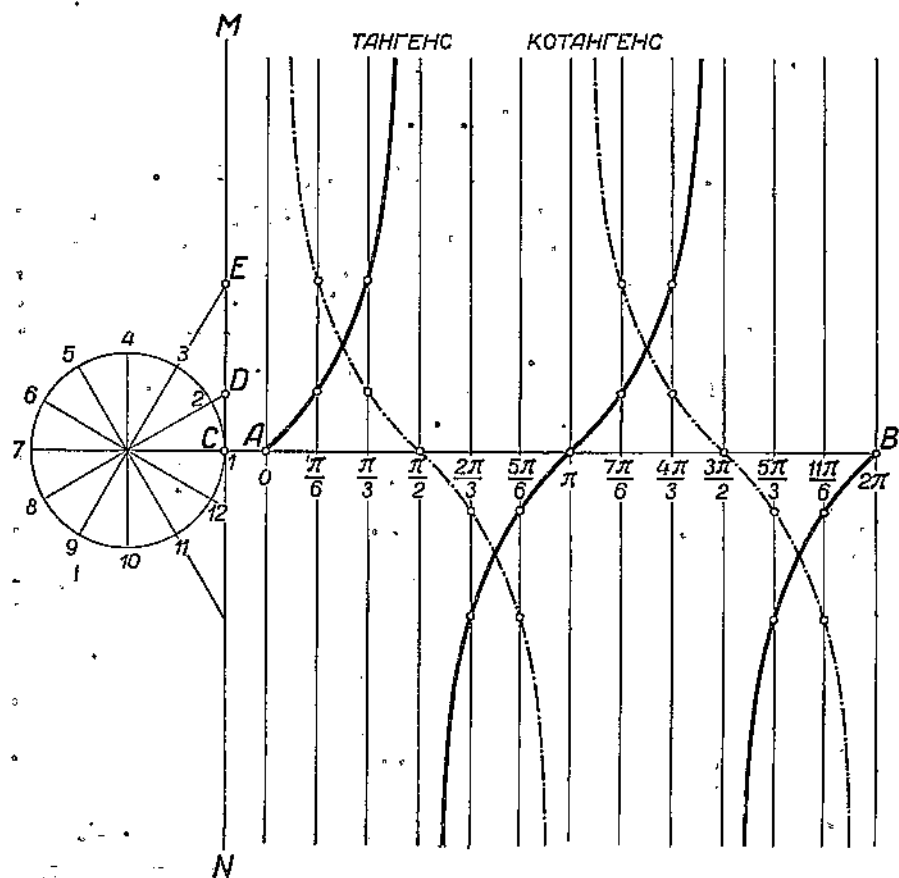
1) Для построения синусоиды делим окружность на произвольное число (в нашем примере — на 12) равных частей и на столько же частей делим отрезок AB , равный длине окружности и отложенный на продолжении диаметра окружности O . Проектируя точки деления $1, 2, 3, \dots$ окружности на перпендикуляры, проведенные к AB в соответствующих точках выпрямленной окружности, получим точки $I, II, III, \dots XII$, I искомой синусоиды.

2) Для построения косинусоиды следует иметь в виду, что $\cos 0^\circ = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и вообще $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$. Кривая косинусов построена на том же чертеже 170 штрих-пунктирной линией.

3) Чтобы построить кривую тангенсов, проведем линию тангенсов при круге O и на перпендикулярах в точках выпрямленной окружности отложим длины линии тангенсов соответствующих углов. Из чертежа 171 видно, что кривая тангенсов имеет разрывы при $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$ и $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \pm \infty$.



Черт. 170.



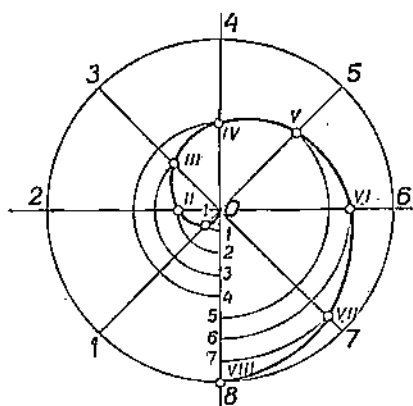
Черт. 171.

4) Построение кривой котангенсов ведется таким же образом, как и кривой тангенсов, с той разницей, что разрывы имеют место при углах 0° и π . Построение этой кривой дано на чертеже 171 штрих-пунктирной линией.

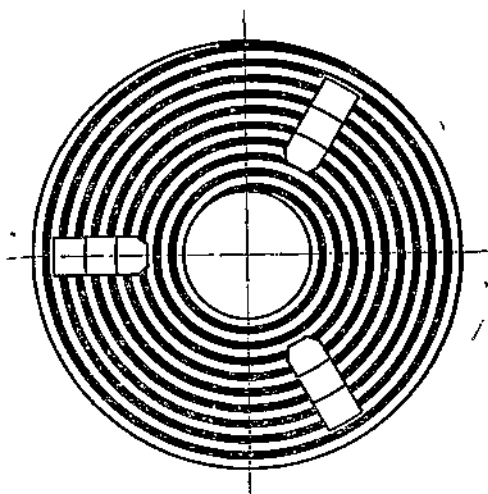
2. *Архимедова спираль*. Архимедова спираль есть геометрическое место точек P , радиус-вектор которых $OP=r$ изменяется пропорционально углу вращения φ , измеряемому от определенного начального луча (черт 172). Ее уравнение в полярной системе координат:

$$r=a\varphi.$$

Эта спираль представляет путь точки, имеющей равномерно поступательное движение по радиусу равномерно вращающегося круга. Построение точек этой кривой показано на чертеже 172.



Черт. 172.



Черт. 173.

Задача 79. Построить архимедову спираль по заданному пути a , проходимому точкой вдоль радиуса при одном обороте круга.

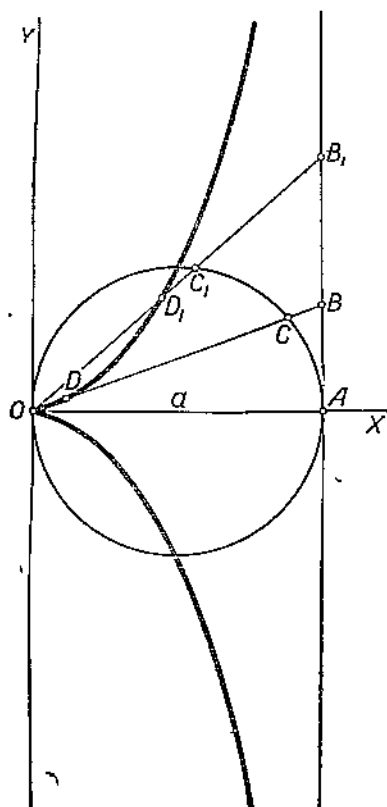
Из центра O радиусом равным a чертим окружность, которую делим на произвольное число (например на 8) равных частей. На столько же равных частей делим радиус $O-8$. Из центра O проводим дугу радиусом $O-I$ до первого радиуса вспомогательной окружности, радиусом $O-2$ — до второго радиуса и т. д. Полученные точки $I, II, III, \dots$ соединяем плавной кривой, изображающей архимедову спираль.

Архимедова спираль находит применение при очертании канавок самоцентрирующего патрона на токарном станке (черт. 173). В этом патроне при повороте диска на один оборот кулачки перемещаются вдоль радиуса на величину радиального расстояния между серединами смежных канавок.

3. *Циссида*. Уравнение этой кривой в полярных координатах выражается через

$$r=a \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Задача 80. Построить циссоиду по заданному параметру a (черт. 174).



Черт. 174.

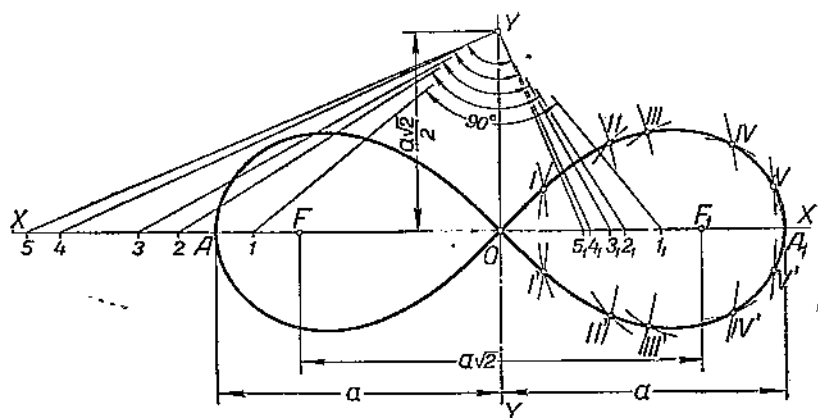
Проведем круг диаметра a ; из одного конца A неподвижного диаметра, принимаемого за ось X , проведем касательную AB ; из другого конца O этого диаметра, принимаемого за начало координат, проведем произвольные секущие OB , пересекающие касательную в точке B и окружность в точке C . Если теперь откладывать $BD = OC$ или $OD = BC$, то получим точки циссоиды.

4. *Лемниската*. Лемниската есть геометрическое место точек P , для которых произведение расстояний r и r_1 от двух неподвижных точек F и F_1 имеет постоянное значение e^2 , где $2e = FF_1 = a\sqrt{2}$.

Задача 81. Построить лемнискату при заданном значении $FF_1 = 2e$ (черт. 175).

Построим две взаимно перпендикулярные оси XX и YY , пересекающиеся в точке O . Отложим $OA = OA_1 = a = e\sqrt{2}$ и $OF = OF_1 = e = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Возьмем на прямой

XX влево от точки F ряд точек $1, 2, 3, 4, 5$ на расстоянии от точки O , не превышающем $2a$; соединим эти точки с точкой Y , построим $Y-1_1 \perp Y-1$, $Y-2_1 \perp Y-2$,



Черт. 175.

$Y-3, \perp Y-3, \dots$, получим на оси OX точки $1, 2, 3, \dots$. Рассматривая прямоугольные треугольники $1-Y-1_1, 2-Y-2_1, 3-Y-3_1$, заметим, что $1 \cdot O \cdot O-1_1 = 2 \cdot O \cdot O-2_1 = 3 \cdot O \cdot O-3_1 = OY^2, \dots$, т. е. отрезки представляют радиусы-векторы точек лемнискаты. Проведя из точки F окружность радиусом $r = 1 \cdot O$, а из точки F_1 радиусом $r_1 = O-1_1$, получим в пересечении этих окружностей точки I и I' правой ветви лемнискаты. Принимая $r = 2 \cdot O$ и $r_1 = O-2_1$, построим точки II и II' и т. д. Кривая симметрична относительно осей XX и YY и относительно начала координат O .

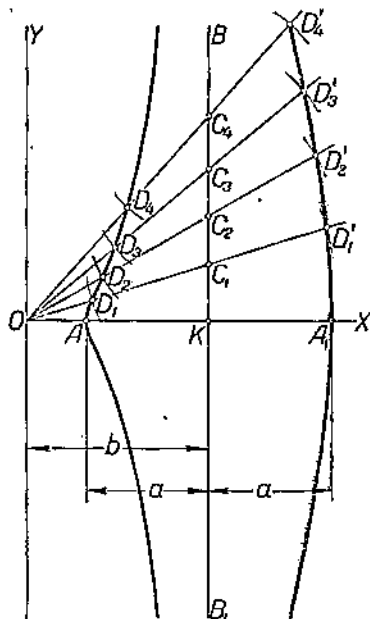
5. Конхоида. Конхоида есть геометрическое место конечных точек D и D' на пучке лучей OD , проведенном от некоторой точки O к прямой BB_1 , удаленной от точки O на расстояние b , если на этих лучах откладывать от прямой BB_1 в обе стороны постоянный отрезок a . Уравнение конхоиды:

$$r = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a.$$

Задача 82. Построить конхоиду по заданным b и a при $b > a$ (черт. 176).

Проведем оси OX и OY и на расстоянии b от оси OY — прямую $BB_1 \parallel OY$.

Отложив на оси X от точки K отрезки $KA = KA_1 = a$, получим точки A и A_1 конхоиды, лежащие на оси X . Затем проведем произвольный луч OC_1 , пересекающий BB_1 в точке C_1 , от которой отложим на этом луче отрезки $CD_1 = CD'_1 = a$, и получим точки D_1 и D'_1 искомой конхоиды. Построив ряд таких точек, проведем лекалом непрерывную кривую через точки $D_1, D_2, \dots$ и другую кривую — через точки $D'_1, D'_2, \dots$



Черт. 176.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ. ПРОЕКЦИОННОЕ ЧЕРЧЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 34. Способы отображения трехмерных фигур на плоскости.

Всякая плоская фигура, т. е. фигура, совмещающаяся всеми своими точками с плоскостью, может быть совершенно точно изображена на бумаге чертежом либо в натуральную величину, либо как фигура, подобная натуре, с тем или иным заданным коэффициентом подобия. Такой чертеж может быть назван точным, так как он дает ориентировку во всех элементах фигуры. Поэтому чертежу фигура может быть воспроизведена в натуре.

Не так обстоит дело с трехмерными фигурами. Вопрос о получении точного чертежа трехмерной фигуры осложняется необходимостью разрешения двойной задачи: дать одновременно удобоизмеримый и наглядный чертеж, т. е. такое изображение предмета, по которому можно было бы получить ориентировку во всех элементах как в размерах, так и в форме фигуры, не укладывающейся в плоскости.

Точное впечатление о натуральной форме трехмерной фигуры создается только перспективным рисунком, отражающим наши зрительные впечатления от рассматриваемой фигуры.

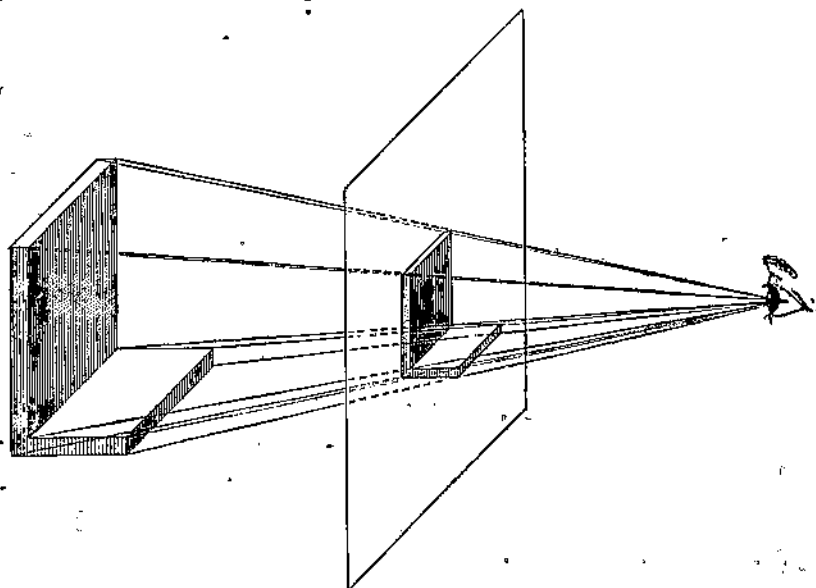
Перспективное изображение на плоскости получится, если мы перед рассматриваемой фигурой вообразим плоскость (картинная плоскость) и из различных точек фигуры проведем лучи к глазу наблюдателя. В пересечении этих лучей с плоскостью получатся изображения соответствующих точек фигуры (черт. 177).

Такое изображение дает наиболее яркое впечатление о форме пространственной фигуры при одном условии, что мы будем рассматривать это изображение из той точки, которая соответствует положению глаза наблюдателя, принятому при построении изображения.

Однако такой перспективный чертеж, давая при указанных выше условиях ясное впечатление о пространственных формах фигуры, все же непосредственно не может служить для точного определения всех элементов фигуры (линейных размеров, углов и пр.). Так, например, параллельные прямые, не лежащие в картинной плоскости, изображаются сходящимися линиями, равные в натуре отрезки делаются неравными в изображении и пр.

Если вообразим себе, что глаз наблюдателя удален на бесконечно большое расстояние от картинной плоскости и лучи направлены наклонно к картинной плоскости, то вместо лучей, сходящихся в одной конечной точке, будем иметь лучи, сходящиеся

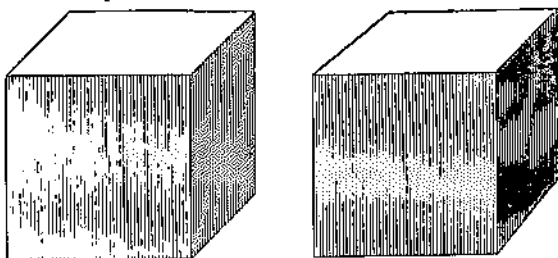
в бесконечно-удаленной точке, т. е. параллельные лучи, в результате чего прямые, параллельные в натуре, будут оставаться параллельными и в изображении.



Черт. 177.

Если, кроме того, ориентировать предмет относительно трех взаимно перпендикулярных осей координат, выбранных так, что две из этих осей параллельны плоскости картины, а третья перпендикулярна к этой плоскости, то все отрезки, параллельные первым двум осям, будут изображаться в натуральную величину, а отрезки, направленные вдоль третьей оси, будут направлены под определенным углом к первым двум осям и изображаться в определенном сокращении.

Для простоты построений мы выберем картинную плоскость вертикальной и осям координат дадим направление: оси X — горизонтальное, оси Z — вертикальное и оси Y — под углом в 45° к оси X , а сокращение вдоль этой оси примем равным $\frac{1}{2}$.



Черт. 178.

На чертеже 178 дано изображение куба в принятой системе, а рядом с ним — изображение того же куба, в перспективе (центральной). Из сравнения этих изображений легко видеть, что принятый нами способ изображения (так называемая кабинетная

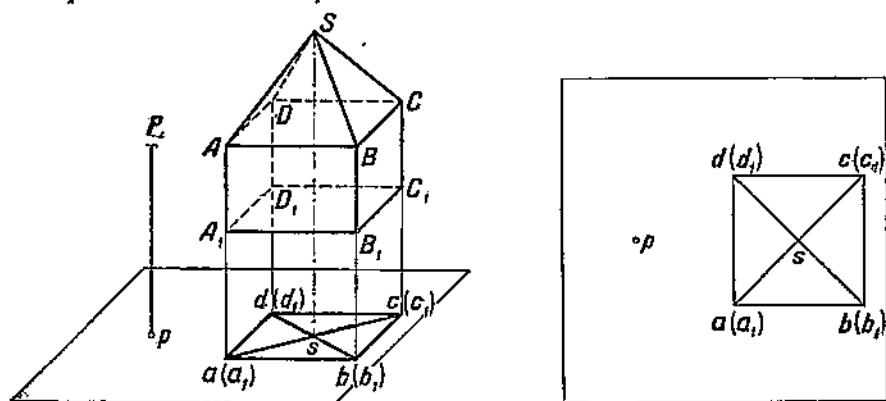
параллельная перспектива) дает довольно наглядное представление о форме тела и выгодно отличается от центрально-перспективного изображения тем, что по этому изображению можно легко измерить и размеры тела в направлениях принятых осей координат.

Прием изображения пространственных форм в кабинетно-перспективе по существу является очень простым и доступным. Однако практическое овладение этим приемом достигается только в результате длительных упражнений, в особенности в случае сложной формы изображаемых тел.

Овладение этим методом изображения особенно важно для преподавателя математики, так как все преподавание стереометрии и решение геометрических задач, основанных на свойствах пространственных фигур, могут быть проведены только при помощи чертежа, дающего правильное представление как о форме, так и о размерах изучаемых фигур. Однако этот способ изображения пространственных фигур является слишком затруднительным при наличии сложной натуры.

В практической работе, при постройке всякого рода сооружений и машин, мы нуждаемся в чертеже, по которому легко можно реконструировать изображаемую им натуру.

Наиболее простой способ отображения пространственных фигур дает метод ортогональных проекций, составляющий основу начертательной геометрии.



Черт. 179.

ГЛАВА I.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ НА ОДНУ ПЛОСКОСТЬ.

§ 35. План.

Наиболее простой прием отображения пространственной фигуры на плоскости получается, если из каждой точки пространственной фигуры (например точки P , черт. 179) проведем перпендикуляр на плоскость изображения и основание этого перпендикуляра (точку p) примем как изображение точки P в пространстве. Если, как это обычно и делается, за плоскость изображения

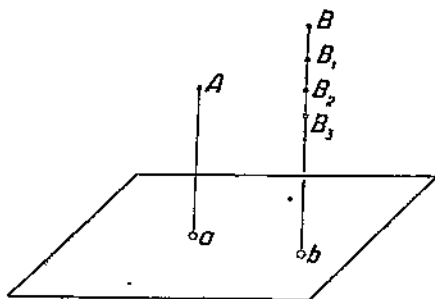
взять горизонтальную плоскость, то получаемая при этом изображении фигура носит название *плана* или *горизонтальной проекции* пространственной фигуры.

Такой способ отображения пространственных фигур был известен в глубокой древности. Изображение отображает в натуральную величину длину и ширину изображаемого предмета, но совершенно не дает высот.

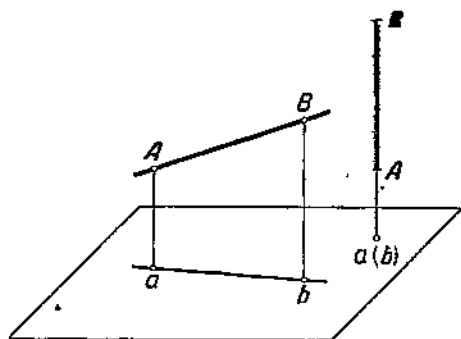
§ 36. Проекция точки, прямой и плоскости.

Точка A в пространстве изображается на горизонтальной плоскости точкой a (черт. 180) пересечения вертикальной прямой Aa с плоскостью. Каждой точке (A) в пространстве отвечает на плоскости изображений одна единственная точка (a). Но каждой точке плоскости изображений (например точке b) соответствует бесчисленное множество точек в пространстве: все эти точки расположены на перпендикуляре Bb , проведенном в точке b плоскости изображения.

Полученное таким способом отображение b точки B называется ортогональной горизонтальной проекцией точки B . Перпендикуляр Bb называется проектирующей линией. Все проектирующие линии взаимно параллельны как перпендикуляры к одной и той же плоскости проекций.



Черт. 180.



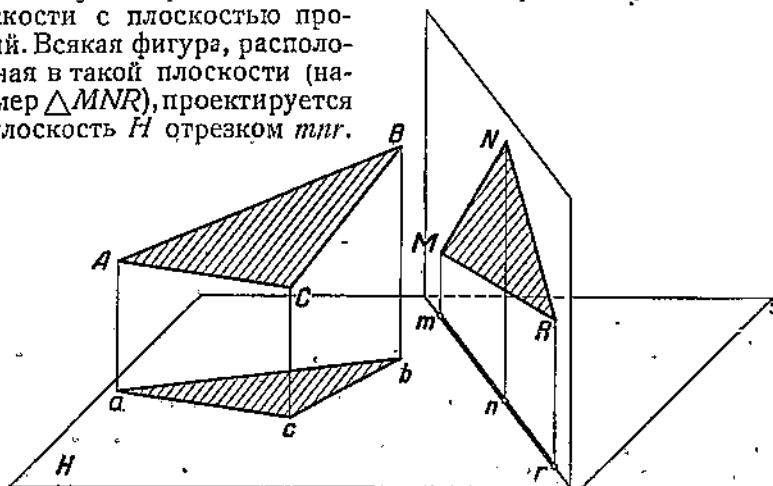
Черт. 181.

Чтобы получить проекцию прямой AB (черт. 181), надо из всех точек этой прямой провести перпендикуляры к плоскости проекций и найти точки пересечения этих перпендикуляров с плоскостью. Все проектирующие линии лежат в одной вертикальной плоскости, проведенной через AB . Эта плоскость (проектирующая плоскость) пересекает плоскость проекций по прямой ab . Проекции точек A и B лежат на этой прямой ab .

В общем случае *проекция прямой есть прямая*. Если же изображаемая прямая AB перпендикулярна к плоскости проекций, то все проектирующие линии из отдельных точек этой прямой совпадают с самой прямой и проектируются на плоскость проекций в одну точку (a, b).

Плоская фигура в пространстве (например $\triangle ABC$, черт. 182) проектируется на плоскость проекций плоской фигурой ($\triangle abc$).

Проекции точек неограниченной плоскости ABC покрывают всю плоскость проекций, за исключением того случая, когда изображаемая плоскость перпендикулярна к плоскости проекций. В этом случае проекция плоскости есть прямая пересечения этой плоскости с плоскостью проекций. Всякая фигура, расположенная в такой плоскости (например $\triangle MNR$), проектируется на плоскость H отрезком mnr .



Черт. 182.

§ 37. Высота точки над плоскостью проекций.

Одна горизонтальная проекция, как уже сказано, не дает еще однозначного решения вопроса о положении точки в пространстве. Положение точки в пространстве определится только в том случае, если кроме горизонтальной проекции будет дано расстояние этой точки от плоскости проекций или высота ее над плоскостью проекций. Это может быть сделано двояким образом:

1. Отмеряют высоту каждой точки над ее проекцией и при горизонтальной проекции точки ставят число, определяющее в выбранных единицах измерения положение точки в пространстве над проекцией (проекция с высотными отметками).

2. Рядом с горизонтальной проекцией помещают масштаб высоты, на котором отмечают высоты главнейших точек фигуры в избранном масштабе высот.

Третий способ изображения пространственных фигур состоит в том, что наряду с проекцией фигуры на горизонтальную плоскость (план) вводится проекция этой фигуры на вертикальную плоскость (фасад). Особенности этой проекции легко понять после того, как изучены общие законы проектирования на одну плоскость.

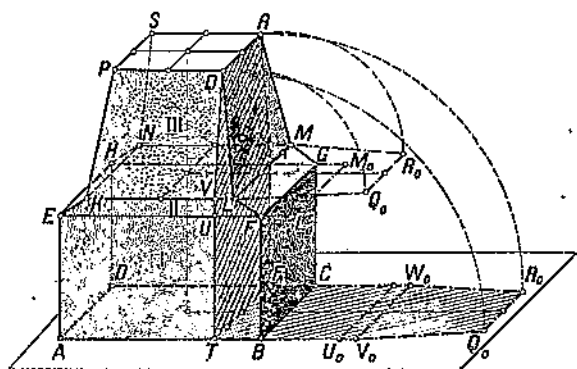
§ 38. Пример.

Изобразить в горизонтальной проекции каменный фундамент сооружения, эскиз которого в кабинетной перспективе показан на чертеже 183.

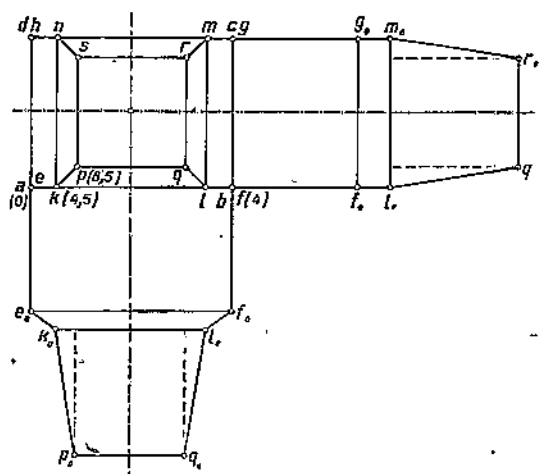
Фундамент поставлен на горизонтальную плоскость. Основание (высотная отметка 0) представляет прямоугольник $ABCD$,

изображенный на чертеже 184 в натуральную величину $abcd$. Тем же прямоугольником изображается и верхнее основание $EFGH$ параллелепипеда I (высотная отметка 4) и нижнее основание скошенной с боков плиты II . Верхнее основание $KLMN$ этой плиты и нижнее основание усеченной пирамиды с квадратным основанием (высотная отметка 4,5) изображаются в плане квадратом $klmn$. Верхнее основание $PQRS$ усеченной пирамиды изображается вторым квадратом $pqrs$ (высотная отметка 8,5).

Чтобы изобразить на плане натуральную форму всех граней фундамента, замечаем, что передняя и задняя грани части I представляют собой прямоугольники, основания которых AB и CD изображаются на горизонтальной проекции в натуральную величину, а высота этих прямоугольников определяется высотной отметкой (4). Если совместить эти грани с горизонтальной плоскостью проекций, то на последней получим прямоугольники, изображающие в выбранном масштабе в натуральную величину переднюю и заднюю грань. На чертеже показано совмещение передней грани (прямоугольник abf_0e_0). Так же по данной высотной



Черт. 183.



Черт. 184.

отметке легко построить совмещенное положение боковых граней параллелепипеда I (прямоугольник bcg_0f_0).

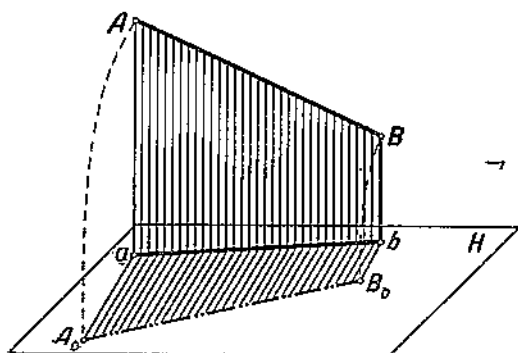
По высотной отметке (4,5) верхнего основания призмы II можно построить совмещенное положение трапеции $EFLK$ — передней грани плиты II (трапеция $e_0f_0l_0k_0$).

Натуральную величину боковой скошенной грани плиты II можно построить, совместив эту грань с горизонтальной плоскостью верхней грани параллелепипеда I , причем натуральная величина стороны FL получается на совмещенном изображении трапеции $EFLK$ (сторона f_0l_0).

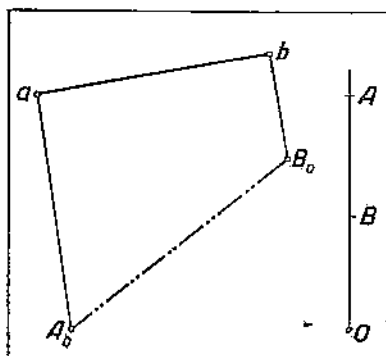
Наконец, натуральную величину боковых граней усеченной пирамиды III, заданной горизонтальной проекцией квадратных оснований и высотой (разностью высотных отметок 8,5 и 4,5), можно опять-таки построить путем совмещения боковых граней с горизонтальной плоскостью нижнего основания ($LMR_0\hat{Q}_0$ на чертеже 183 и $l_0m_0r_0g_0$ на чертеже 184).

§ 39. Построение истинной величины отрезка.

Во всех случаях, когда требуется определить истинную величину отрезка по его горизонтальной проекции, это можно сделать путем совмещения проектирующей прямоугольной трапеции с горизонтальной плоскостью.



Черт. 185.



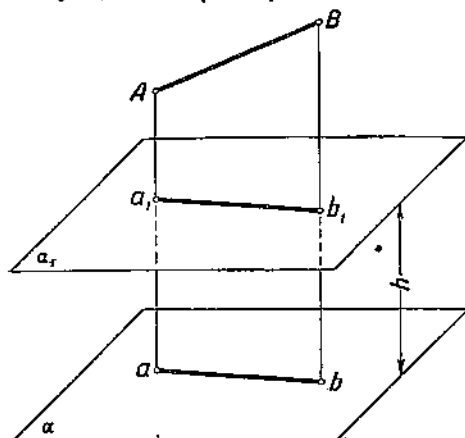
Черт. 186.

Пусть отрезок AB в пространстве (черт. 185) изображается его проекцией ab на горизонтальной плоскости. Чтобы построить истинную величину отрезка AB , совместим проектирующую трапецию $ABba$ с горизонтальной плоскостью (черт. 186), что легко сделать, если заданы высотные отметки точек A и B . Построение показано на том же чертеже, где заданы горизонтальная проекция и высотный масштаб. ab — горизонтальная проекция отрезка AB , отрезки $aA_0 = aA$ и $bB_0 = bB$ перпендикулярны к ab и изображают расстояния от точек A и B до плоскости проекций (высотные отметки); A_0B_0 — истинная величина отрезка AB .

Если отрезок AB параллелен плоскости проекций, то проектирующая трапеция превращается в прямоугольник $ABba$ и $AB = ab$. Таким образом, *отрезок, параллельный плоскости проекций, проектируется на эту плоскость в натуральную величину.*

В совмещенном положении проектирующей трапеции высоты точек A и B изображены в натуральную величину; точно так же в натуральную величину изображается высота любой точки прямой AB . Поэтому по заданной горизонтальной проекции и высотным отметкам двух точек прямой легко определить проекцию точки этой прямой с заданной высотной отметкой.

линий на величину перемещения плоскости проекций. Отсюда следует, что проекции одной и той же фигуры на двух параллельных плоскостях конгруэнтны.



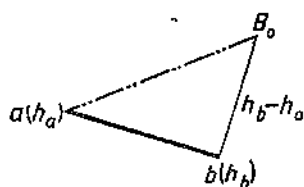
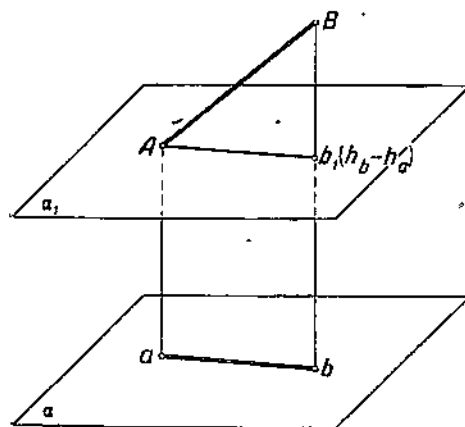
Черт. 189.

При переходе от одной плоскости проекций (α) на параллельную ей (α_1) (черт. 189) высотные отметки всех точек изображения изменяются на одну и ту же величину h , равную высоте перемещения плоскости проекций.

Таким образом, параллельное перемещение плоскости проекций не изменяет положения горизонтальной проекции изображаемой фигуры и сводится к перемещению нулевой отметки на масштабе высот.

Этим свойством можно воспользоваться для упрощения построения истинной величины отрезка по его горизонтальной проекции и высотным отметкам. Путем параллельного перемещения плоскости проекций можно построение прямоугольной трапеции по трем сторонам заменить построением прямоугольного треугольника по двум катетам: один

из них равен горизонтальной проекции отрезка, а второй — разности высотных отметок концов отрезка (черт. 190).

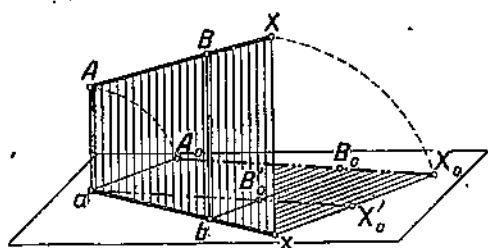


Черт. 190.

Истинная величина отрезка есть гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого образованы горизонтальной проекцией отрезка и разностью высотных отметок концов отрезка.

Задача. От данной точки a отложить на проекции отрезка AB отрезок ax , истинная величина которого равна AX (черт. 191).

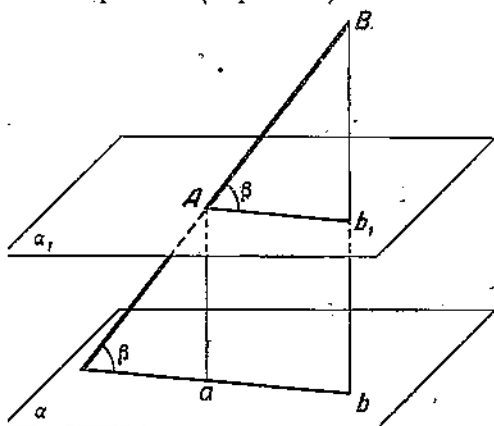
Решение. Построив прямоугольный треугольник abB'_0 (ab — проекция отрезка AB , $bB'_0 = h_b - h_a$), отложим $aX'_0 = AX$ и проведем $X'_0 \parallel bB'_0$, получим искомый отрезок ax .



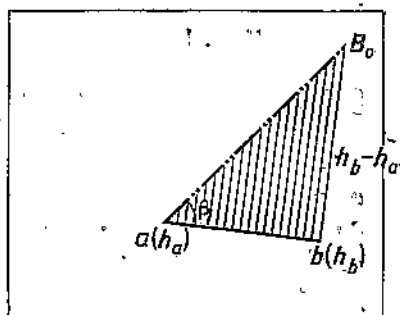
Черт. 191.

§ 41. Угол наклона прямой к плоскости. Крутизна.

Под углом, образуемым прямой с плоскостью, подразумевают угол, образованный прямой с ее проекцией на эту плоскость. Если плоскость проекций горизонтальна, то угол наклона прямой к этой плоскости определяет крутизну. С параллельными плоскостями прямая образует одинаковые углы, так как проектирующая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым (черт. 192).



Черт. 192.



Между крутизной β , проекцией ab и истинной величиной отрезка AB существует следующее соотношение: $AB = \frac{ab}{\cos \beta}$.

Из этого следует, что ортогональная проекция отрезка никогда не может быть больше натуральной величины отрезка.

§ 42. Параллельные прямые и их проекции.

Проекции параллельных прямых параллельны, так как проектирующие плоскости параллельны и потому пересекают плоскость проекций по параллельным прямым (черт. 193). Параллельные прямые образуют одинаковые углы с плоскостью проекций, следовательно: $ab = AB \cos \beta$, $cd = CD \cos \beta$, откуда $ab:cd = AB:CD$.

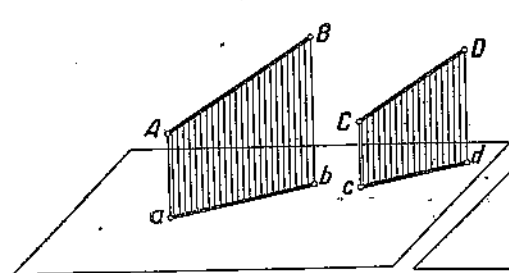
Проекции параллельных отрезков параллельны и пропорциональны истинным величинам этих отрезков.

Если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то отношение отрезков $AB:BC$ сохранится и в проекции этой прямой: $AB:BC = ab:bc$.

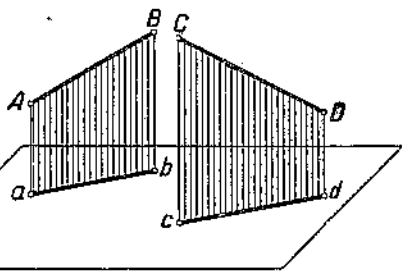
Отношение отрезков, определяемых положением трех точек прямой, не изменяется в ортогональной проекции прямой.

В частности, проекция середины отрезка лежит в середине проекции отрезка.

Если два отрезка в проекции изображаются параллельными отрезками, то из этого еще не следует, что прямые в натуре параллельны (черт. 194).



Черт. 193.



Черт. 194.

§ 43. Плоскость и ее отображение на плоскости проекций. Высотные линии (горизонтالي, изогипсы).

1 Если плоскость параллельна плоскости проекций, то проекции всех фигур, лежащих на данной плоскости, конгруэнтны с самими фигурами. Путем параллельного перемещения плоскости проекций можно привести к совпадению фигуру с ее проекцией.

2. Если плоскость перпендикулярна к плоскости проекций, то она превращается в проектирующую плоскость, и всякая изображенная на ней фигура отображается на плоскости проекций отрезком прямой, совпадающей с линией пересечения изображаемой плоскости с плоскостью проекций.

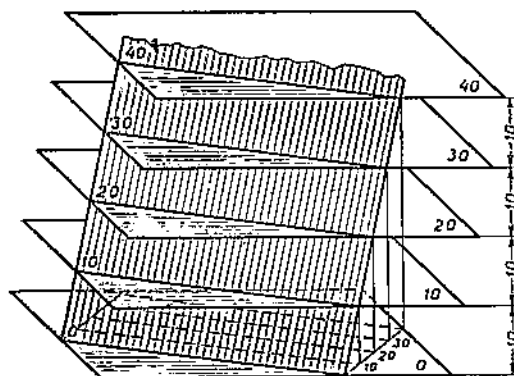
При отображении наклонной плоскости на плоскости проекций следует иметь в виду, что проекция неограниченной наклонной плоскости на плоскость проекций совпадает с этой плоскостью; поэтому, наглядное отображение плоскости можно получить только путем отображения фигуры, лежащей на этой плоскости.

Хотя плоскость определяется вполне двумя прямыми (пересекающимися или параллельными), тем не менее для получения наглядного отображения плоскости редко можно ограничиться двумя прямыми.

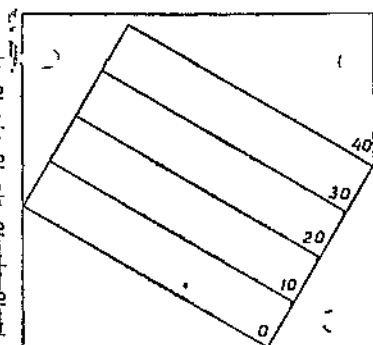
Во всякой наклонной плоскости, пересекающей плоскость проекций, одной из определяющих ее прямых является след плоскости, т. е. прямая пересечения данной плоскости с плоскостью проекций. Так как параллельное перемещение плоскости проекций не вызывает изменений в горизонтальной проекции

фигур, расположенных на наклонной плоскости, то параллельные следы наклонной плоскости на всех параллельных плоскостях проекций одинаково отображают наклонную плоскость. Все точки каждой параллели имеют одинаковые высотные отметки, а поэтому эти параллели носят название высотных линий плоскости.

Наклонная плоскость поэтому часто изображается пучком параллельных высотных линий с высотными отметками, выраженными обычно целыми числами (черт. 195—196).



Черт. 195.

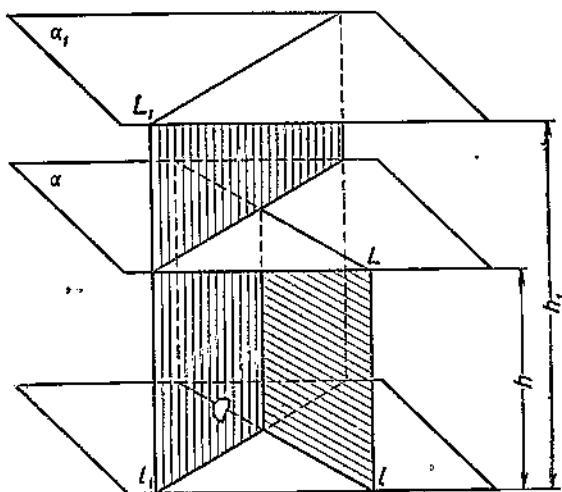


Черт. 196.

Такой способ изображения получил широкое применение в картографии. В гипсометрических картах¹⁾ высоты отображаются горизонталями, представляющими сечение земной поверхности параллельными плоскостями. Эти горизонтالي (изогипсы) дают наглядное представление о высотах отдельных точек земной поверхности и направлениях склонов.

§ 44. Линия сечения двух плоскостей, изображенных горизонталями.

Две горизонтали с различными высотными отметками h и h_1 (черт. 197) не могут иметь общей точки, так как они лежат в двух параллельных плоскостях α и α_1 . Горизонталь

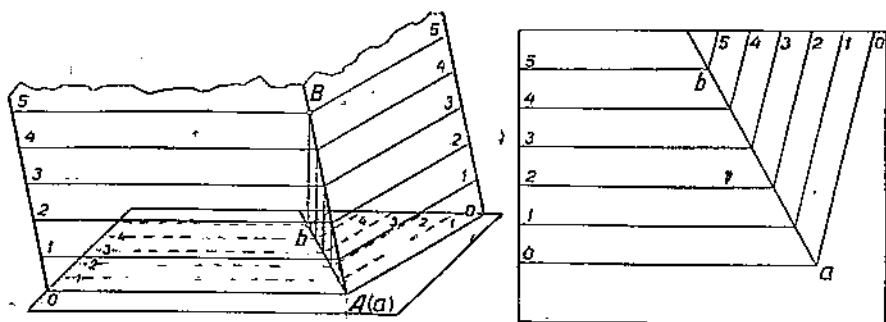


Черт. 197.

же с одинаковыми высотными отметками (если они не параллельны) пересекаются.

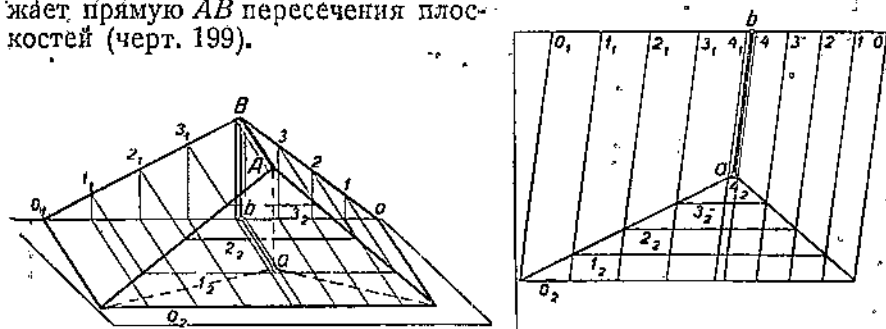
¹⁾ Картах с изображением рельефа местности при помощи горизонталей.

На чертеже 198 изображены две плоскости параллельными с высотными отметками 0, 1, 2, 3, ... Одновысотные параллели пересекаются и определяют точки пересечения двух плоскостей. Все эти точки лежат на одной прямой.



Черт. 198.

Указанный способ изображения пересечения двух плоскостей неприменим в случае, если следы двух пересекающихся плоскостей параллельны (черт. 199). В этом случае для изображения линии пересечения двух плоскостей проводим третью плоскость, пересекающую обе плоскости, находим точку A пересечения трех плоскостей и через эту точку проводим горизонталь параллельно следам заданных двух плоскостей. Эта горизонталь ab и отображает прямую AB пересечения плоскостей (черт. 199).



Черт. 199.

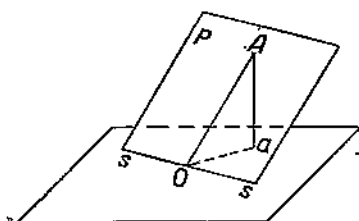
Три взаимно пересекающиеся плоскости пересекаются попарно по прямым линиям, которые либо параллельны между собой (либо совпадают), либо пересекаются в одной точке.

§ 45. Линия ската (направление наибольшей крутизны).

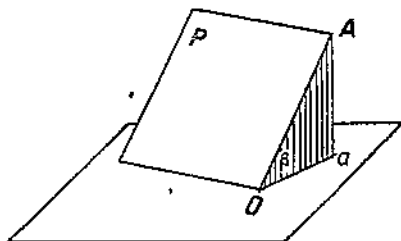
Кроме высотных линий (горизонталей) в каждой плоскости нужно выделить еще одно направление — направление наибольшей крутизны, направление стока воды. Это направление перпендикулярно к следу наклонной плоскости на горизонтальной плоскости проекций. Направление ската определяет кратчайшее расстояние по наклонной плоскости до горизонтальной.

Проектирующая плоскость линии ската AO перпендикулярна к следу ss плоскости P на плоскости проекций (черт. 200), а потому и проекция Oa этой линии перпендикулярна к следу ss (теорема о трех перпендикулярах).

Проекция линии ската перпендикулярна к горизонталям.



Черт. 200.



Черт. 201.

§ 46. Крутизна наклонной плоскости.

Угол между двумя плоскостями измеряется линейным углом, т. е. углом, образуемым перпендикулярами к прямой пересечения плоскостей, проведенными через одну точку в каждой из этих плоскостей.

Крутизна β наклонной плоскости (P) определяется углом ($\angle A O a$) наклона этой плоскости к горизонтальной плоскости, т. е. углом между линией ската (AO) и горизонтальной проекцией (aO) этой линии (заложением) (черт. 201).

Прямоугольный треугольник AOa называется опорным треугольником наклонной плоскости P .

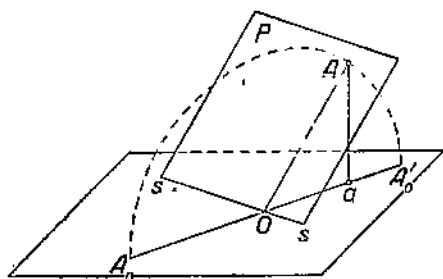
§ 47. Определение истинной величины плоской фигуры путем совмещения с горизонтальной плоскостью проекций.

На чертежах 183 и 184 было показано, что для определения истинной величины боковой грани необходимо эту грань совместить с горизонтальной плоскостью. Из рассмотрения этих чертежей мы видели, что плоская фигура проектируется на горизонтальную плоскость в натуральную величину только в том случае, если эта фигура расположена в плоскости, параллельной плоскости проекций, т. е. если фигура и ее изображение представляют параллельные сечения проектирующей призмы.

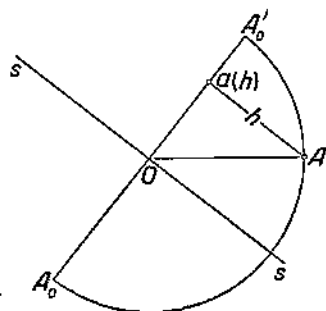
Если же фигура расположена на наклонной плоскости, то проекция этой фигуры не конгруэнтна самой фигуре. Одни только горизонтальные отрезки фигуры проектируются в истинную величину, все же остальные стороны при проектировании сокращаются в большей или меньшей степени. Чтобы найти истинную величину фигуры, необходимо путем вращения привести плоскость фигуры в положение горизонтальной плоскости. Такое вращение можно произвести вокруг какой-нибудь горизонтальной линии, проведенной в данной плоскости.

Совмещение наклонной плоскости с горизонтальной возможно путем вращения вокруг произвольной горизонтали, проведенной в этой плоскости.

При вращении плоскости вокруг горизонтали каждая точка плоскости описывает окружность в вертикальной плоскости, перпендикулярной к горизонтали; радиус этой окружности равен длине перпендикуляра, проведенного из данной точки на ось вращения. Вращение точки происходит в проектирующей плоскости линии ската, и радиус равен длине ската (черт. 202).



Черт. 202.

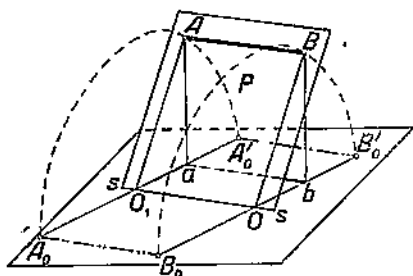


Черт. 203.

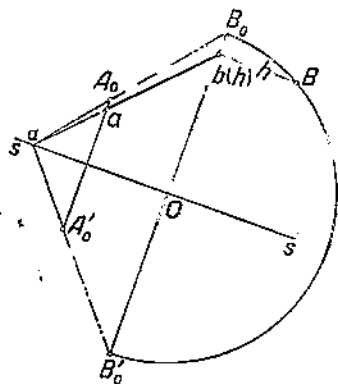
§ 48. Примеры.

Наклонная плоскость P задана горизонтальным следом ss . Построить совмещенное положение точки A , лежащей в этой плоскости и заданной горизонтальной проекцией a и высотной отметкой h (черт. 203).

Решение. Проведем $aO \perp ss$, построим прямоугольный треугольник AaO по катетам aO и $aA = h$. Гипотенуза AO определяет длину ската и радиус окружности, описываемой точкой A при совмещении. В зависимости от направления вращения получим на прямой aO две точки — A_0 или A'_0 , изображающие совмещенные положения точки A .



Черт. 204.



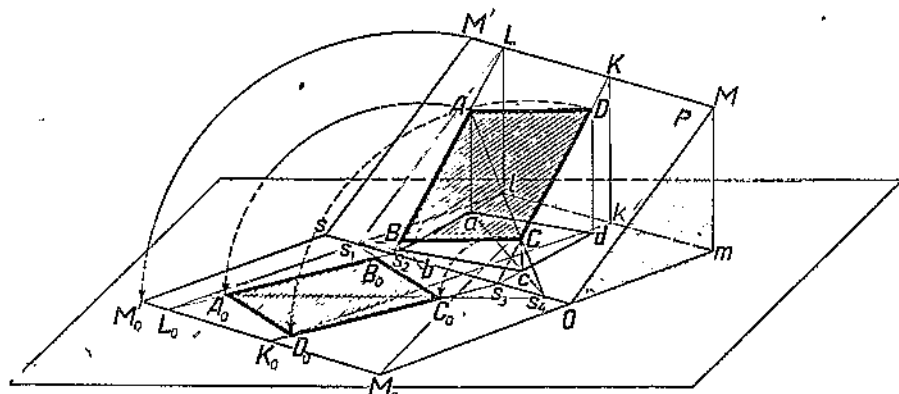
Черт. 205.

Если такое построение провести для всех точек фигуры, лежащей в данной наклонной плоскости, то получим совмещенное положение всей фигуры. В частности, совмещенное положение прямой определяется совмещенными положениями двух ее точек.

Прямая, лежащая на наклонной плоскости, либо параллельна горизонтальному следу этой плоскости, либо пересекает этот след в какой-нибудь точке.

В первом случае совмещенное положение прямой параллельно следу плоскости, и для построения этой прямой достаточно построить совмещенное положение одной точки прямой (черт. 204).

Во втором случае точка a пересечения прямой AB (и ее проекции ab) со следом ss при вращении плоскости остается на месте, а потому совмещенное положение A_0B_0 и $A'_0B'_0$ прямой AB также проходит через точку a (черт. 205).

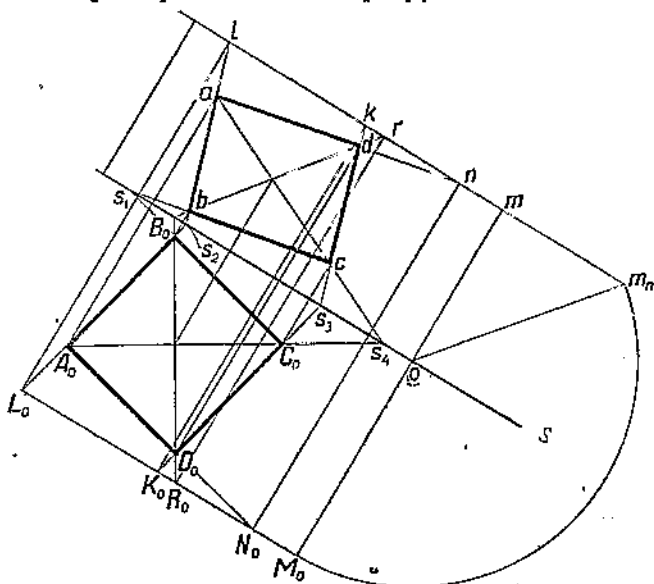


Черт. 206.

Метод совмещения может быть использован и для решения обратной задачи: по данному совмещенному положению фигуры построить горизонтальную проекцию этой фигуры, лежащей на наклонной плоскости, заданной следом и высотной отметкой одной горизонтали.

Задача. Квадрат $A_0B_0C_0D_0$, изображенный в совмещенном положении плоскости P , поместить на наклонную плоскость (черт. 206 и 206а).

Наклонная плоскость P , изображенная на черт. 206 в кабинетной перспективе, изображается в горизонтальной проекции следом s и



Черт. 206а.

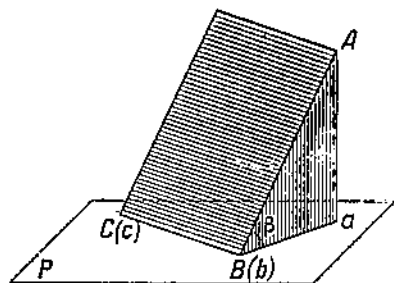
горизонталью lm с высотной отметкой Mm . На горизонтальной плоскости дан в совмещенном положении квадрат $A_0B_0C_0D_0$. Построить горизонтальную проекцию $abcd$ квадрата $ABCD$, лежащего на наклонной плоскости.

Совмещенное положение L_0M_0 горизонтали lm получится, если мы из m проведем $mM_0 \perp ss$, построим прямоугольный треугольник mOM (mot_0) с катетами mO и mM (высотной отметкой горизонтали m) и отложим $OM_0 = OM$ ($oM_0 = om_0$). Прямая L_0M_0 , параллельная ss , изображает совмещенное положение параллели lm . Продолжив стороны квадрата и его диагонали до пересечения со следом ss и параллелью L_0M_0 , замечаем, что при вращении плоскости P вокруг следа ss точки s_1, s_2, s_3, s_4 остаются на месте, точки L_0, K_0, R_0, N_0 переходят в соответствующие точки L, K, R, N на параллели LM плоскости P , а горизонтальные проекции этих точек переходят в точки l, k, r, n горизонтали lm . Дальнейшее построение проекции $abcd$ квадрата ясно из чертежа 206а. То же построение проведено на чертеже 206 в кабинетной перспективе, где, кроме проекции, изображен и сам квадрат на плоскости P .

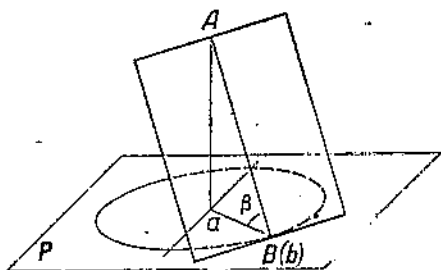
§ 49. Конус крутизны.

Через данную точку A можно провести бесчисленное множество плоскостей, наклоненных к горизонтальной плоскости под данным углом β .

Проведя из точки A (черт. 207) перпендикуляр Aa на плоскость и построив в произвольной плоскости, проходящей через Aa , прямоугольный треугольник AaB с углом B , равным β , проведем на плоскости проекций $BC \perp Ba$. Получим след BC плоскости, проходящей через точку A и образующей с горизонтальной плоскостью угол β .



Черт. 207.

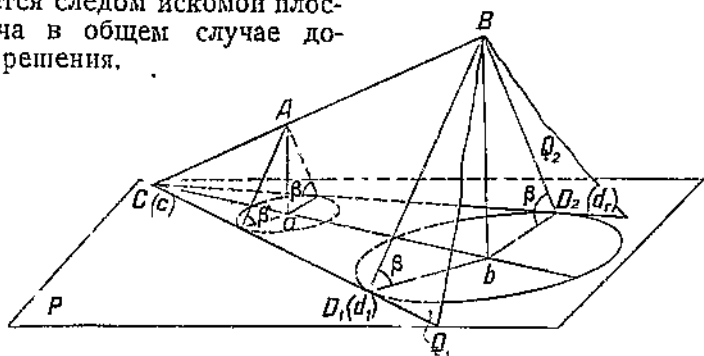


Черт. 208.

Вращая треугольник AaB вокруг оси Aa , получим бесчисленное множество положений этого треугольника. При вращении точка B описывает окружность на плоскости проекций (черт. 208). Любая касательная к этой окружности может служить следом плоскости, проходящей через точку A и образующей с плоскостью проекций данный угол β .

Задача. Через данную прямую AB провести плоскость под углом β к горизонтальной плоскости (черт. 209 и 210).

Искомая плоскость должна касаться двух конусов крутизны, вершинами которых являются точки A и B и образующие которых наклонены под данным углом β к плоскости проекций. След этой плоскости является общей внешней касательной к основаниям конусов. Обозначая высотные отметки проекций a и b данных точек через h_a и h_b , определяем радиусы окружностей оснований $r_A = h_a \operatorname{ctg} \beta$ и $r_B = h_b \operatorname{ctg} \beta$. Внешняя касательная к этим окружностям является следом искомой плоскости. Задача в общем случае допускает два решения.

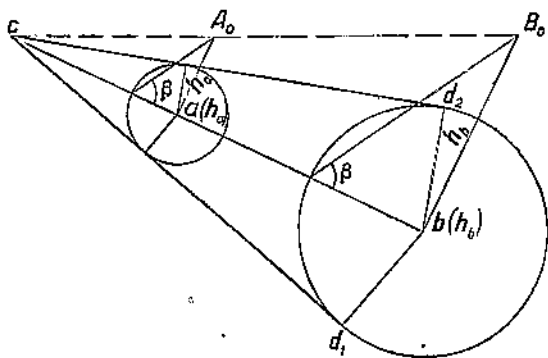


Черт. 209.

Если данные точки A и B расположены по разные стороны плоскости, то след искомой плоскости является внутренней касательной к основаниям конуса.

Если прямая AB наклонена к плоскости под углом α , равным β , то задача допускает одно решение, и, наконец, когда $90^\circ + \beta > \alpha > \beta$, то решение невозможно.

Если через прямую CB (черт. 209) проведем две плоскости, одинаково наклоненные к плоскости проекций, то следы этих плоскостей изображаются касательными Cd_1 и Cd_2 к окружности, центром которой служит проекция одной из точек прямой, например точки B (черт. 210). Отсюда следует, что проекция Sb прямой пересечения двух плоскостей, одинаково наклоненных к плоскости проекций, есть биссектриса угла между следами этих плоскостей.

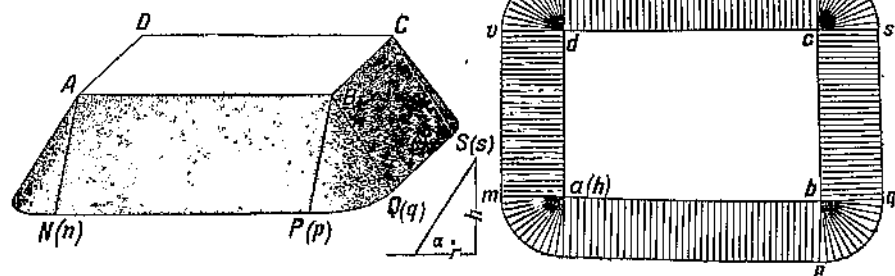


Черт. 210.

Задача. Изобразить в горизонтальной проекции земляную насыпь вы-

сотой 80 см при естественном угле уклона в 50° , если известно, что верхняя грань насыпи представляет прямоугольную площадку длиной 120 см и шириной 40 см.

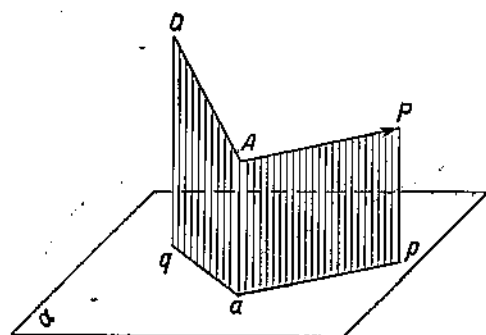
Принимаем 4 вершины прямоугольной площадки за вершины конусов уклона и по данной высоте и углу падения строим радиус основания конуса. Полученным радиусом r проводим окружности из центров a, b, c и d (черт. 211); наружные общие касательные к окружностям a и b, b и c, c и d и d и a , сопряженные с этими окружностями, определяют след поверхности уклона на горизонтальной плоскости.



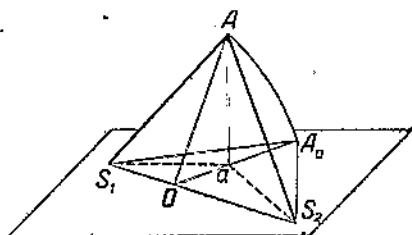
Черт. 211.

§ 50. Прямой угол и его горизонтальная проекция.

При ортогональном проектировании угол между двумя пересекающимися прямыми в общем случае проектируется не в натуральную величину. Прямой угол при проектировании на плоскость изображается углом, отличным от прямого. Только в том случае, когда одна сторона AP прямого угла QAP (черт. 212) параллельна плоскости проекций, вторая сторона QA этого угла проектируется прямой qa , перпендикулярной к ap . Действительно, проектирующая плоскость $QAaq$ перпендикулярна к AP (так как по условию $PA \perp AQ$ и $PA \perp Aa$), а потому эта плоскость перпендикулярна и к ap , а отсюда следует, что $aq \perp ap$.



Черт. 212.



Черт. 213.

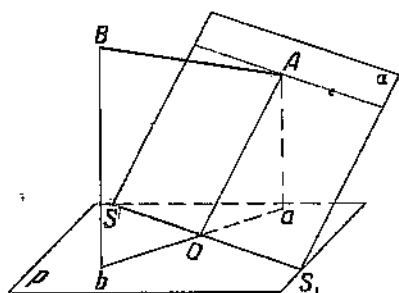
При всех других положениях обе стороны прямого угла пересекают плоскость проекций. Пусть стороны прямого угла S_1AS_2 (черт. 213) пересекают плоскость проекций в точках S_1 и S_2 . Построив проектирующий треугольник AOa ($AO \perp S_1S_2$) и совмещая прямоугольный треугольник S_1AS_2 с плоскостью проекций, заметим, что точка A займет место на продолжении стороны Oa

в точке A_0 . Соединяя точки A_0 и a с S_1 и S_2 , получим, что $\angle S_1 A_0 S_2 = d$, а $\angle S_1 a S_2 > \angle S_1 A_0 S_2$. Отсюда следует:

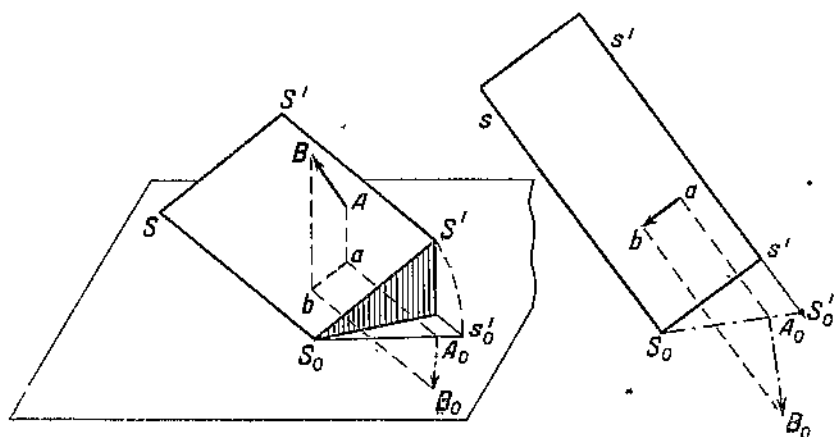
Проекция прямого угла изображается прямым углом только в том случае, когда одна сторона прямого угла (либо обе его стороны) параллельна плоскости проекций.

Если прямая перпендикулярна к некоторой плоскости α (наклонной к плоскости проекций) в данной точке A , то она перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной через точку A в данной плоскости, а следовательно, она перпендикулярна и к прямой, параллельной следу данной плоскости на плоскости проекций. Отсюда вытекает, что *проекция прямой, перпендикулярной к плоскости P , перпендикулярна к следу SS этой плоскости на плоскости проекций* (черт. 214).

Но если дано, что проекция прямой перпендикулярна к следу плоскости P , то из этого еще нельзя сделать заключение, что прямая перпендикулярна к плоскости, так как одна проекция еще не определяет однозначного положения прямой. Из данного условия мы можем сделать только один вывод; прямая лежит в плоскости, перпендикулярной к следу SS , а потому и перпендикулярной к наклонной плоскости α .



Черт. 214.



Черт. 215.

Задача. Через точку A данной плоскости провести к этой плоскости перпендикуляр заданной длины m (черт. 215).

Плоскость задана двумя горизонталями и совмещенным положением $S_0 S'_0$ линии ската $S_0 S'$.

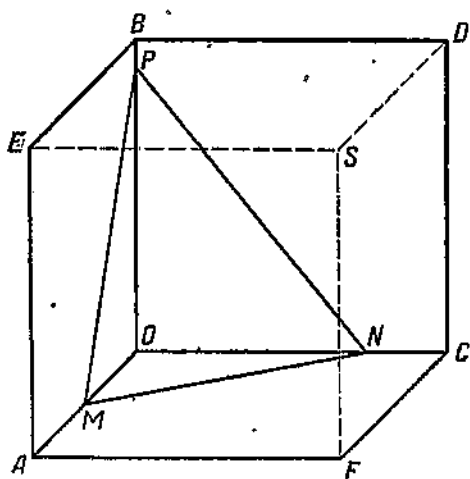
Проекция перпендикуляра к плоскости в точке A перпендикулярна к горизонталям плоскости.

Перенесем точку a в точку A_0 совмещенного положения линии ската и проведем перпендикулярно к $S_0S'_0$ отрезок $A_0B_0 = m$. Проведя $B_0b \parallel A_0a$, получим горизонтальную проекцию ab искомого перпендикуляра AB , истинная длина которого равна m .

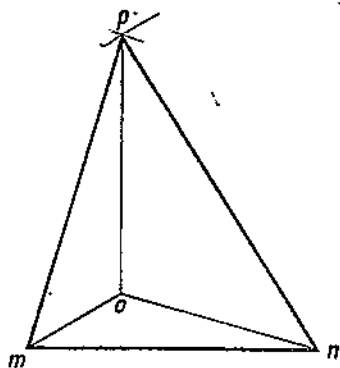
§ 51. Проекция прямоугольной системы осей координат на плоскость.

В вершине куба или прямоугольного параллелепипеда сходятся три взаимно перпендикулярные ребра и три взаимно перпендикулярные грани. Так, в вершине O куба (черт. 216) сходятся три взаимно перпендикулярные ребра OA , OB и OC и три взаимно перпендикулярные грани $OBEA$, $OAFC$ и $OBDC$. Отметим на этих ребрах произвольные точки M , N и P и проведем через эти три точки плоскость сечения, которая вырежет из куба треугольную пирамиду с вершиной в O и основанием — треугольником MNP .

Прямые OM , ON и OP представляют собою прямоугольную систему координат в пространстве. Посмотрим, как эта система осей координат спроектируется на горизонтальную плоскость проекций, если за плоскость проекций принять плоскость треугольника MNP .



Черт. 216.



Черт. 217.

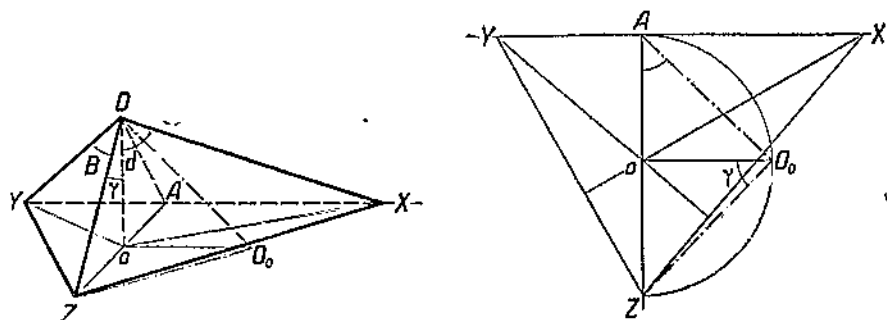
Пусть треугольник mnp (черт. 217) представляет собою следы плоскостей боковых граней MOP , NOP и MON и точка o — проекцию вершины O на плоскость проекций. Легко доказать, что точка o является ортоцентром треугольника mnp , т. е. точкой пересечения высот треугольника. Действительно, прямая MO в пространстве перпендикулярна к OP и ON , следовательно, перпендикулярна к плоскости грани PON , а потому ее проекция mo перпендикулярна к следу плоскости PON на плоскости

проекций, т. е. $то \perp рп$. Точно так же можно доказать, что $ро \perp тп$ и $по \perp тр$.

Отсюда можно сделать следующий вывод:

Проекции трех взаимно перпендикулярных осей координат на плоскость совпадают с высотами треугольника следов трех взаимно перпендикулярных плоскостей координат на плоскости проекций. Проекция вершины координат совпадает с ортоцентром треугольника следов.

Следы трех координатных плоскостей на плоскости проекций образуют всегда остроугольный треугольник, и ортоцентр лежит внутри контура треугольника.



Черт. 218.

Задача. Треугольник XYZ (черт. 218) изображает следы трех взаимно перпендикулярных плоскостей координат на плоскости проекций. Построить истинную величину высоты вершины координат O над плоскостью проекций.

Проектирующая плоскость оси OZ перпендикулярна к плоскости проекций и пересекает ее по высоте ZA треугольника ZXY . Совмещая прямоугольный треугольник ZOA с горизонтальной плоскостью, получим треугольник ZO_0A и искомую высоту $oO_0 = Oo$.

ГЛАВА II.

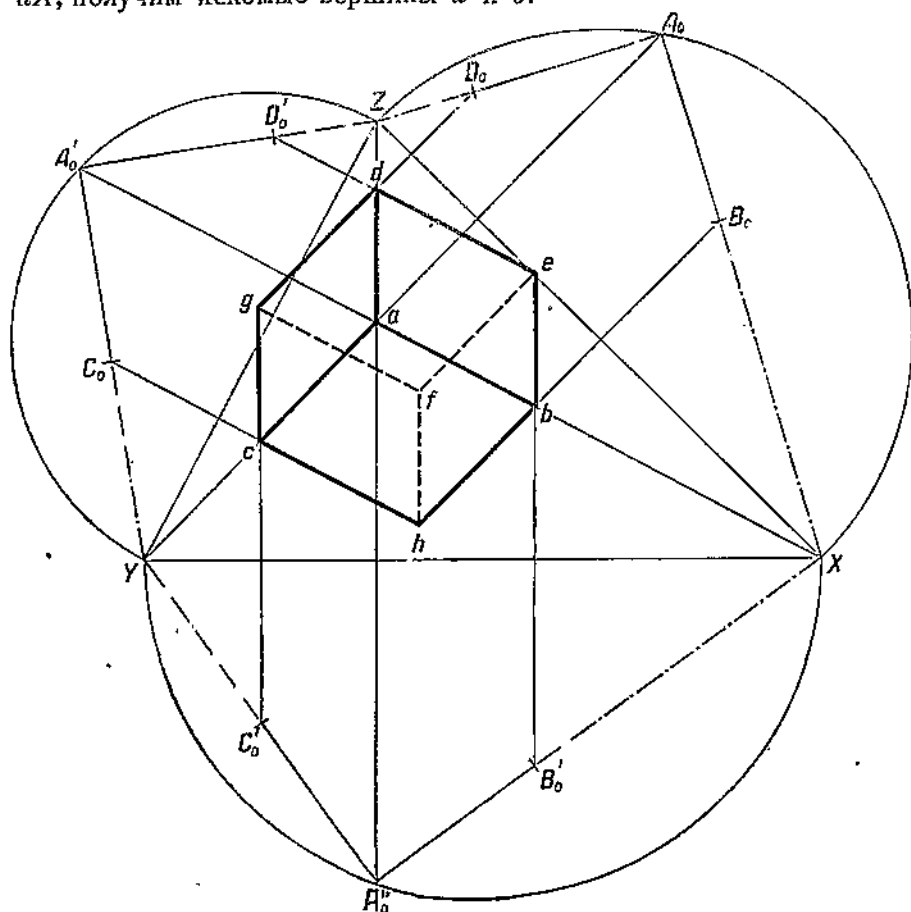
ОСНОВЫ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

§ 52. Построение ортогональной аксонометрической проекции куба.

Задача. Построить проекцию куба с ребром в 3 см, приняв одну из его вершин за начало прямоугольной системы координат.

Построим произвольный остроугольный треугольник XYZ , (черт. 219), который примем за треугольник следов трех взаимно перпендикулярных граней куба, сходящихся в вершине A , и построим ортоцентр a этого треугольника. Оси aX , aY и aZ представляют направления проекций ребер AB , AC и AD куба, сходящихся в вершине A . Чтобы определить проекции вершин B , C и D , необходимо отложить от точки a отрезки ab , ac и ad , истинная

величина которых равна 3 см. Для этого совместим прямоугольный треугольник XaZ с горизонтальной плоскостью проекций, получим треугольник XA_0Z и на катетах A_0Z и A_0X отложим отрезки $A_0D_0=A_0B_0=3$ см. Перенесем точки D_0 и B_0 на aZ и aX , получим искомые вершины d и b .



Черт. 219.

Совмещая дальше треугольник ZaY с плоскостью проекций в положение ZA'_0Y и отложив $A'_0C'_0=A'_0D'_0=3$ см, найдем по совмещенным положениям C'_0 и D'_0 проекции c и d (последнее построение служит для проверки точности построения). Наконец, вершины c и b можно получить также путем совмещения треугольника XaY .

Построив вершины b , c и d , дополним изображение до куба, как показано на чертеже: $ch \parallel ab \parallel de$; $bh \parallel ac \parallel dg$; $be \parallel ad \parallel cg$; $gf \parallel de$; $ef \parallel dg$; $hf \parallel be$.

Таким образом мы получим наглядное изображение куба в проекции на одну плоскость. Это изображение, называемое аксонометрическим, дает возможность не только выявить форму

изображаемого тела, но также взять размеры в направлении осей координат. Отрезки ab , ac и ad изображают равные отрезки $AB=A_0B_0$, $AC=A_0C_0$ и $AD=A_0D_0$ и являются масштабами для измерения отрезков в направлениях осей координат, так как при параллельном проектировании отношение параллельных отрезков равно отношению проекций этих отрезков.

Рассматривая отрезки A_0B_0 и ab , отсекаемые в треугольнике XaA_0 прямой B_0b , параллельной стороне A_0a , находим:

$$ab:A_0B_0=aX:A_0X=aX:AX;$$

точно так же находим:

$$ac:A_0C_0=aY:A_0Y=aY:AY;$$

$$ad:A_0D_0=aZ:A_0Z=aZ:AZ.$$

Отношения

$$aX:AX=p, \quad aY:AY=q \quad \text{и} \quad aZ:AZ=r$$

называются коэффициентами сокращения вдоль осей aX , aY и aZ . Эти сокращения зависят от формы треугольника следов, а следовательно, от углов между высотами этого треугольника.

Так как

$$A_0B_0=A_0C_0=A_0D_0,$$

следовательно,

$$\frac{ab}{p} = \frac{ac}{q} = \frac{ad}{r}.$$

Обозначив углы, образуемые направлениями осей OX , OY и OZ с направлением проектирования Oo (черт. 218), через α , β и γ , найдем:

$$\frac{OX}{Oo} = p = \sin \alpha,$$

$$\frac{OY}{Oo} = q = \sin \beta,$$

$$\frac{OZ}{Oo} = r = \sin \gamma.$$

Проектирующая плоскость, проходящая через OZ , пересекает грань OYX по прямой $OA \perp YX$. Из прямоугольного треугольника YOX следует: $OA^2 = OY \cdot AX$. Из прямоугольных треугольников OAX и OAY находим:

$$AY = \sqrt{OY^2 - OA^2}, \quad AX = \sqrt{OX^2 - OA^2}.$$

Подставляя в предыдущее выражение, получим:

$$\begin{aligned} OA^2 &= \sqrt{OY^2 - OA^2} \cdot \sqrt{OX^2 - OA^2}; \\ OA^4 &= (OY^2 - OA^2)(OX^2 - OA^2) = \\ &= OY^2 \cdot OX^2 - OA^2 \cdot OX^2 - OA^2 \cdot OY^2 + OA^4, \end{aligned}$$

откуда

$$OA^2 = \frac{OY^2 \cdot OX^2}{OY^2 + OX^2}. \quad (a)$$

Здесь

$$OA = \frac{Oo}{\sin \gamma}, \quad OY = \frac{Oo}{\cos \beta}, \quad OX = \frac{Oo}{\cos \alpha}.$$

Подставляя в (а) и сокращая, получим:

$$\sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$

или

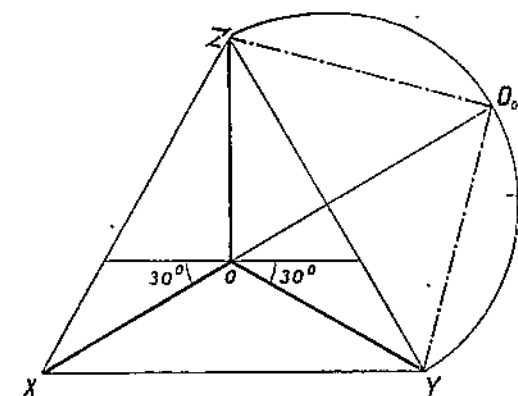
$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta &= 2, \\ p^2 + q^2 + r^2 &= 2, \end{aligned} \quad (b)$$

т. е. в прямоугольных аксонометрических проекциях сумма квадратов коэффициентов сокращений вдоль осей равна 2.

Если за треугольник следов примем равносторонний треугольник, то ортоцентр совпадет с геометрическим центром треугольника, $p = q = r$, сокращение по всем трем осям одинаковое. Оси образуют между собою углы в 120° . Построенное по этой системе изображение называется *изометрическим*.

Если направить ось Z вертикально, то оси X и Y будут направлены под углом в 30° к горизонтальному направлению (черт. 220).

Коэффициент сокращения $k = oZ : O_0Z$, где oZ составляет $\frac{2}{3}$ высоты равностороннего треугольника, O_0Z — катет равнобокого прямоугольного треугольника, построенного на стороне треугольника



Черт. 220.

следов как на гипотенузе. Обозначив сторону ZY треугольника через a , получим:

$$ZO_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad Zo = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

откуда

$$k = Zo : ZO_0 = \sqrt{2} : \sqrt{3} \approx 0,82.$$

Если принять $p = r \neq q$, то треугольник следов представляет равнобедренный треугольник, сокращение вдоль осей X и Z одинаково, но отлично от сокращения вдоль оси Y , и мы получаем диметрическую ортогональную проекцию. В частном случае, если принять, что коэффициент сокращения вдоль оси Y составляет половину коэффициента сокращения вдоль осей X и Z , то получим:

$$p^2 + p^2 + \frac{p^2}{4} = 2,$$

откуда

$$\frac{9}{4}p^2 = 2, \quad p = r = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0,94, \quad q = 0,47.$$

Этим коэффициентам соответствуют углы между осями OX , OY и OZ :

$$\angle(OZ, OX) \approx 97^\circ 11', \quad \angle(OZ, OY) = \angle(OX, OY) \approx 131^\circ 24 \frac{1}{2}'.$$

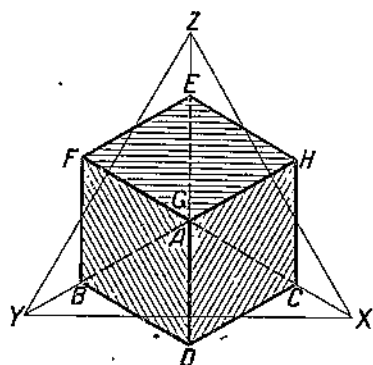
Сложность построения этих углов делает прямоугольную диметрию мало пригодной системой построения наглядных изображений.

§ 53. Изометрическая проекция куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы и правильной пирамиды.

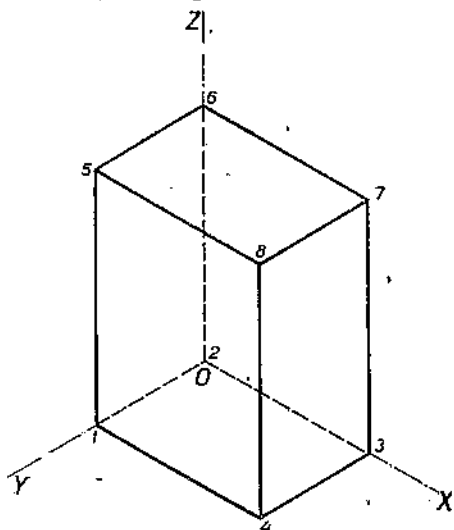
Задача 1. Построить изометрическую проекцию куба с ребром $a = 4$ см.

Так как коэффициент сокращения по всем трем осям координат одинаковый и равен $k \approx 0,82$, то размеры всех ребер изометрической проекции куба равны $0,82 \cdot 4 = 32,8 \approx 33$ мм. Построив равносторонний треугольник XYZ и его геометрический центр A , примем его за заднюю вершину нижнего основания $ABCD$ и построим проекцию куба, как показано на чертеже 221.

Как видно из чертежа, ребра куба изображаются сторонами и диагоналями правильного шестиугольника. Это изображение менее наглядно, чем изображение куба на чертеже 219.



Черт. 221.

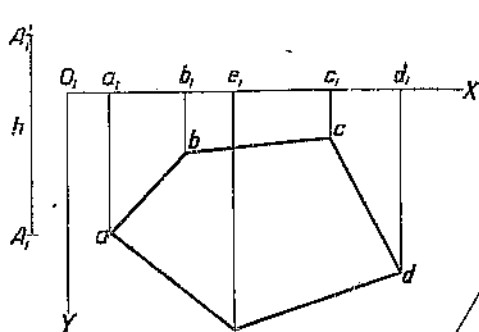


Черт. 222.

Задача 2. Построить изометрическое изображение прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см.

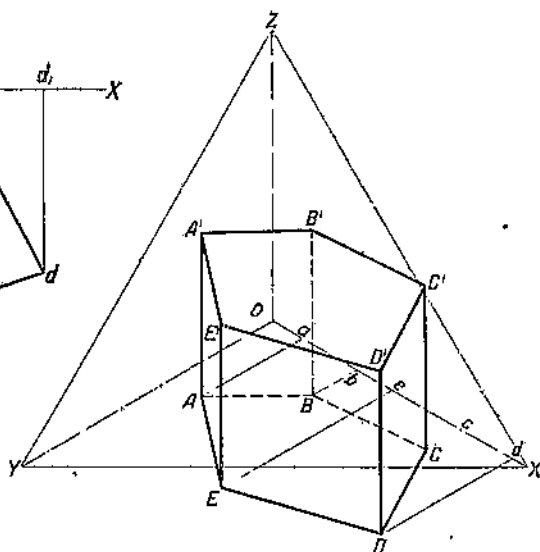
Каждый из размеров в направлении осей OX , OY и OZ сокращен и составляет $0,82$ натурального размера ребер параллелепипеда (черт. 222).

Задача 3. Построить изометрическую проекцию прямой пятиугольной призмы, изображенной в горизонтальной проекции на чертеже 223.



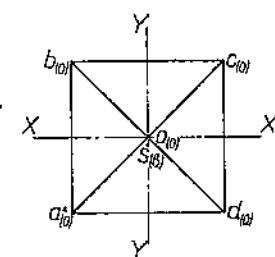
Черт. 223.

Построение изометрической проекции показано на чертеже 223а.

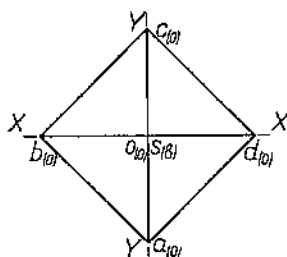


Черт. 223а.

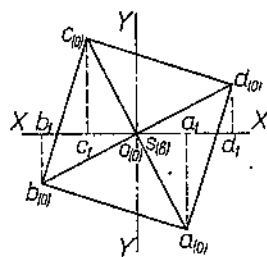
Задача 4. Построить изометрическую проекцию пирамиды с квадратным основанием; сторона основания $a = 3 \text{ см}$; высота $h = 6 \text{ см}$ (черт. 224).



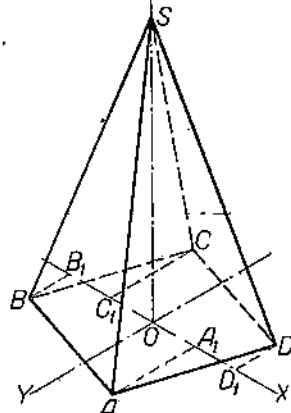
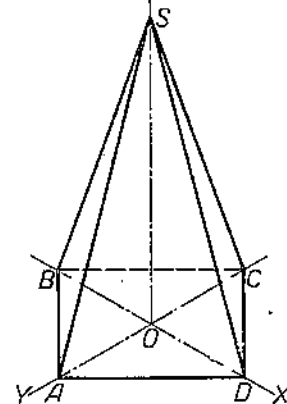
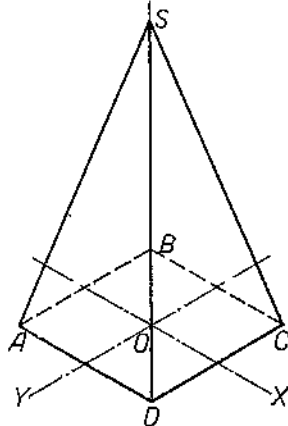
I.



II.



III.



Черт. 224

Построение дано для трех положений основания пирамиды. В первом положении, когда две стороны квадрата основания параллельны оси XX , а другие две параллельны оси YY , диагонали основания изображаются в изометрической проекции двумя взаимно перпендикулярными диагоналями ромба. Боковое ребро SD покрывает ребро SB и высоту OS . Стороны основания и высота изображены в натуральную величину.

Во втором случае, когда диагонали квадрата совпадают с осями XX и YY , основание изображается в форме прямоугольника, диагонали которого сохранили натуральную величину. Высота ясно выделяется, все четыре боковых ребра пирамиды видны, невидимой остается только одна сторона основания.

В третьем положении вершины основания определяются координатами относительно осей XX и YY , и эти координаты сохраняют свои величины и в изометрическом изображении. При третьем положении получается наиболее наглядное изображение пирамиды, при котором все элементы пространственной фигуры выступают вполне отчетливо.

§ 54. Изометрическая проекция прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса.

Задача 1. Построить изометрическую проекцию прямого кругового цилиндра с диаметром основания $d=4$ см и высотой $h=7$ см (черт. 225).

Горизонтальная проекция цилиндра — круг o с диаметром d . Проведем через центр o взаимно перпендикулярные оси XX и YY и опишем вокруг круга квадрат $abcd$ со сторонами $ad \parallel bc \parallel XX$ и $ab \parallel cd \parallel YY$ и второй квадрат $a_1b_1c_1d_1$, диагонали которого совпадают с осями XX и YY . Окружность касается этих квадратов в серединах сторон в точках $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1$. Построим изометрическую проекцию этих квадратов и найдем точки $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ эллипса, изображающего изометрическую проекцию круга основания. Построение проведено на чертеже 225. Первый квадрат изображается ромбом $ABCD$ (как и в случае I чертежа 224), и в пересечении осей OX и OY со сторонами ромба получим точки $1, 3, 5$ и 7 искомого эллипса. Вторым квадрат изображается прямоугольником $A_1B_1C_1D_1$ (случай II, черт. 224), причем диагонали ромба $ABCD$ являются средними линиями прямоугольника и отмечают точки $2, 4, 6, 8$ эллипса. По этим восьми точкам можно провести эллипс. Проведя через точки $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и центр O отрезки, равные высоте h цилиндра и параллельные оси OZ , получим центр и 8 точек эллипса верхнего основания.

Вычислим длину осей 8-4 и 2-6 эллипса основания. Сторона BC ромба $ABCD$ равна диаметру d круга основания, диагонали A_1C_1 и B_1D_1 прямоугольника равны диагонали квадрата $abcd$, т. е.

$$A_1C_1 = ac = d\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $B_1C_1D_1$ находим:

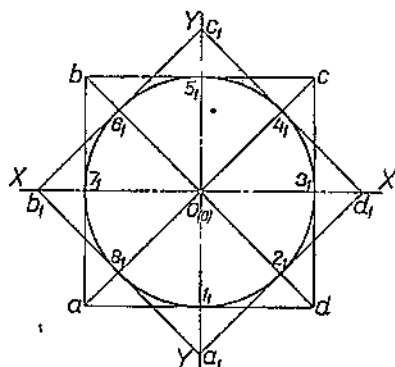
$$B_1C_1 = \sqrt{B_1D_1^2 - C_1D_1^2} = \sqrt{2d^2 - \frac{d^2}{2}} = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1,21d.$$

$$C_1D_1 = \frac{B_1D_1}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2} \approx 0,71d.$$

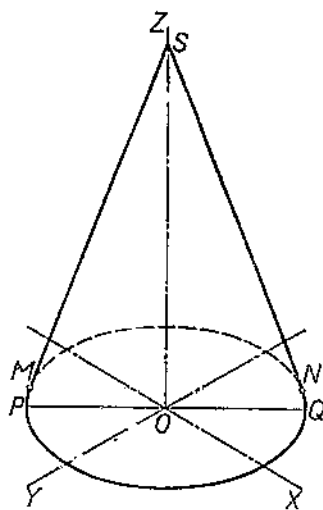
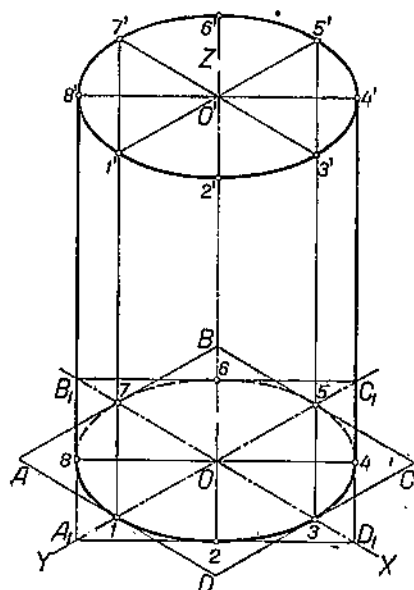
Если соблюсти масштаб и принять во внимание коэффициент сокращения $k=0,82$, то вдоль осей координат следует откладывать $0,82d$, и тогда большая ось эллипса основания $2a \approx 0,82 \cdot 1,21d \approx d$, а малая ось $2b \approx 0,57d$.

Построив оси эллипса, можно найти любое число точек эллипса (см. задачу 51, отдел I, черт. 138) или построить приближенное очертание с помощью дуг окружностей, как показано в задаче 57 (черт. 146).

Задача 2. Построить изометрическую проекцию конуса с диаметром основания $d=4$ см и высотой $h=6$ см (черт. 226).



Черт. 225.



Черт. 226.

Построив изометрическую проекцию круга основания и отложив вдоль оси OZ высоту $OS=h$ (или $OS=0,82h$), получим положение вершины S , из которой необходимо провести крайние образующие, касательные к эллипсу основания. Задача сводится к проведению из внешней точки S касательной к эллипсу

(см. задачу 56, отдел I, черт. 145). Как видно из чертежа, точки касания M и N не совпадают с концами P и Q большой оси эллипса.

§ 55. Косоугольная аксонометрическая проекция. Кабинетная проекция.

В предыдущих построениях мы для получения наглядного изображения пространственных фигур на плоскости ставили фигуру в такое положение к плоскости проекций, чтобы путем прямоугольного проектирования получить наглядное отображение этой фигуры на плоскости. В введении к отделу проекционного черчения (§ 34) было показано, что наглядное отображение пространственной фигуры на вертикальной плоскости чертежа можно получить путем проведения пучка параллельных лучей, наклонных к плоскости проекций. Полученная при таком способе построения проекция, когда все проектирующие лучи взаимно параллельны и наклонены к плоскости проекций под определенным углом, называется косоугольной проекцией, в отличие от прямоугольной проекции, рассмотренной в предыдущих параграфах.

Задача 1. Построить косоугольную проекцию точки M на плоскость P .

Проведем через точку M проектирующий луч MM_1 (черт. 227). Проектирующий луч MM_1 в пересечении с плоскостью P определяет проекцию M_1 точки M . Проведем $Mt \perp P$ и построим ортогональную проекцию t этой же точки M . Соединив t с M_1 , получим отрезок tM_1 — ортогональную проекцию проектирующего луча косоугольной проекции. Положение точки M_1 на плоскости проекций P можно определить, зная:

1) ортогональную проекцию t точки M ,

2) направление tM_1 ,

3) длину отрезка tM_1 .

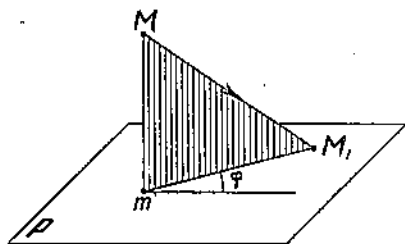
Направление tM_1 зависит от направления проектирующих лучей косоугольной проекции. Это направление определяется углом φ наклона tM_1 к нижнему ребру чертежного листа, к горизонтальному направлению. Угол φ называется *углом отклонения*.

Длина проекции луча MM_1 зависит от угла MM_1t между проектирующим лучом и его ортогональной проекцией:

$$tM_1 = Mm \operatorname{ctg} MM_1t.$$

Угол MM_1t зависит исключительно от направления проектирующих лучей. Обозначим $\operatorname{ctg} MM_1t$ через k и назовем его коэффициентом сокращения $k = tM_1 : Mm$.

Таким образом, мы можем найти положение косоугольной проекции точки M , если известны t , Mt , $\angle \varphi$ и k .

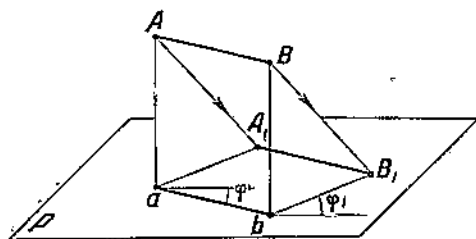


Черт. 227.

Для всех точек чертежа величины φ и k должны быть одинаковы.

Задача 2. Построить косоугольную проекцию отрезка AB , параллельного плоскости проекций (черт. 228).

Построение сводится к определению положения концов A_1 и B_1 косоугольной проекции отрезка AB в пространстве, заданного ортогональной проекцией ab . Для этого проведем aA_1 и bB_1 под углом φ к горизонтальному направлению и отложим $aA_1 = k \cdot Aa$.



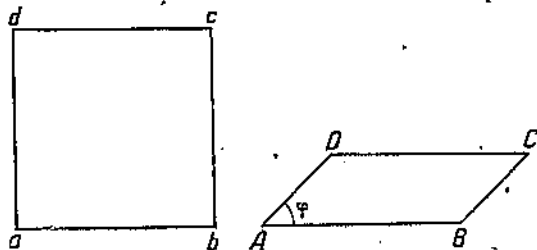
Черт. 228.

В косоугольных [проектированиях] сохраняется отношение отрезков, определяемых тремя точками прямой, как это имело место при ортогональном проектировании (§ 42).

Точно так же для косоугольного параллельного проектирования справедливо доказанное для ортогонального проектирования положение:

Проекция параллельных отрезков параллельны и пропорциональны истинным величинам этих отрезков.

Задача 3. Изобразить в косоугольной параллельной проекции квадрат (черт. 229), плоскость которого перпендикулярна к плоскости изображения, причем передняя сторона параллельна горизонтальному краю чертежного листа. Квадрат задан горизонтальной проекцией $abcd$. Угол отклонения $\varphi = 45^\circ$, коэффициент сокращения $k = \frac{1}{2}$.

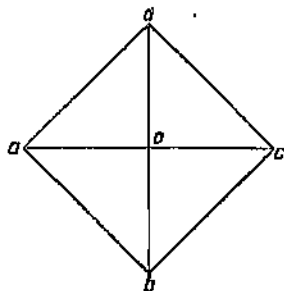


Черт. 229.

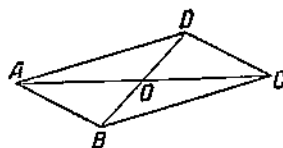
Проведем горизонтальный отрезок $AB = ab$ (черт. 229). Под углом $\varphi = 45^\circ$ проведем прямые $AD \parallel BC$ и отложим на них отрезки $AD = k \cdot ad = \frac{1}{2} ad$, $BC = k \cdot bc = \frac{1}{2} BC$. Соединив C с D , получим $DC \parallel AB \parallel ab$.

Задача 4. Построить косоугольную проекцию квадрата $ABCD$ (см. задачу 2), если его диагональ AC имеет горизонтальное направление (черт. 230).

Построение показано на чертеже 230а: $AC \parallel ac$, $AO = oc$, $\angle DOC = \varphi = 45^\circ$, $OD = OB_1 = k \cdot ob = \frac{1}{2} ob = \frac{1}{2} OC$.



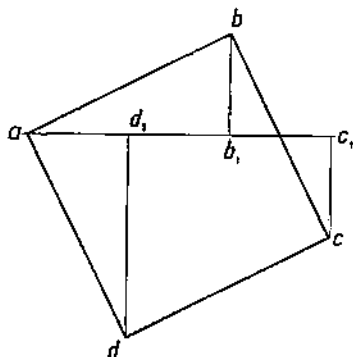
Черт. 230.



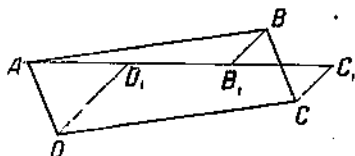
Черт. 230а.

Задача 5. Построить косоугольную проекцию квадрата $ABCD$ (см. задачу 2), стороны которого расположены, как показано на чертеже 231.

Проведем через вершину a горизонтальную ось ac_1 и спроектируем на эту ось вершины квадрата. Построение косоугольной проекции этого квадрата показано на чертеже 231а: $AD_1 = ad_1$, $AC_1 = ac_1$, $AB_1 = ab_1$, $\angle DD_1A = \angle CC_1B_1 = \angle BB_1C_1 = \varphi = 45^\circ$, $DD_1 = \frac{1}{2} dd_1$, $CC_1 = \frac{1}{2} cc_1$, $BB_1 = \frac{1}{2} bb_1$.



Черт. 231.

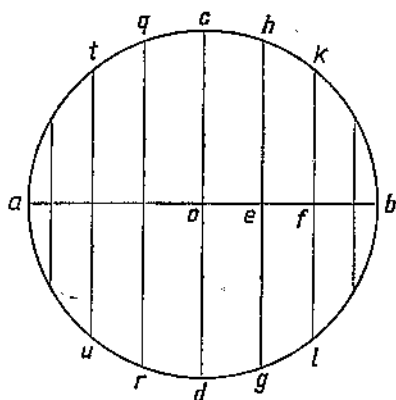


Черт. 231а.

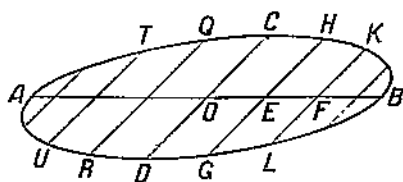
Задача 6. Построить косоугольную параллельную проекцию круга, плоскость которого перпендикулярна к плоскости чертежа; $\angle \varphi = 45^\circ$, $k = 0,5$ (черт. 232).

Проведем в круге горизонтальный диаметр ab , перпендикулярный диаметр cd и ряд хорд, параллельных cd . Построение косоугольной проекции показано на чертеже 232а: $AB = ab$, $\angle COB = \varphi = 45^\circ$, $OC = OD = k \cdot oc = \frac{1}{2} oc = \frac{1}{2} OB$. Остальное построение ясно из чертежа. Полученная кривая — эллипс. Для более правильного построения эллипса целесообразно описать вокруг

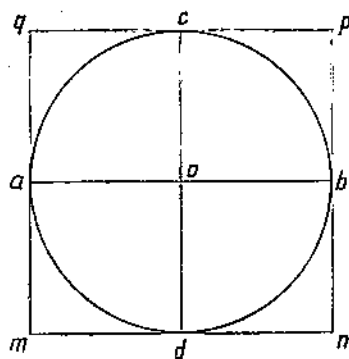
круга квадрат mpq (черт. 233), построить его косоугольную проекцию и в параллелограмм $MNPQ$ (черт. 233а) вписать эллипс (см. задачу 54, отдел I, черт. 143).



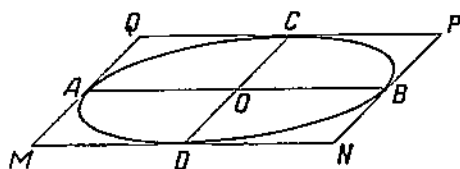
Черт. 232.



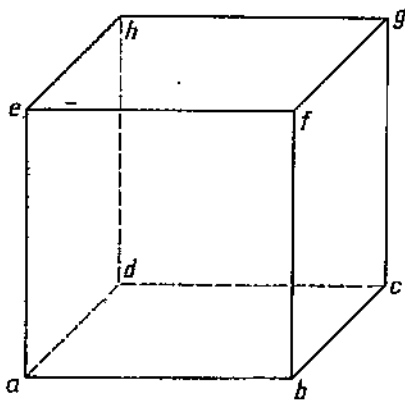
Черт. 232а.



Черт. 233.



Черт. 233а.



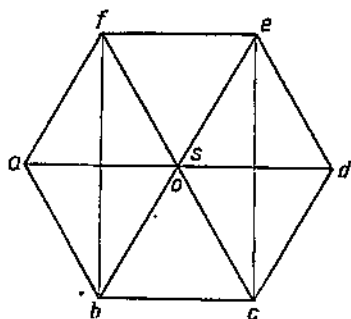
Черт. 234.

Задача 7. Построить косоугольную проекцию куба с ребром m , поставленного на горизонтальную плоскость так, что передняя грань его параллельна вертикальной плоскости изображения (черт. 234); $\angle \varphi = 45^\circ$; $k = 0,5$.

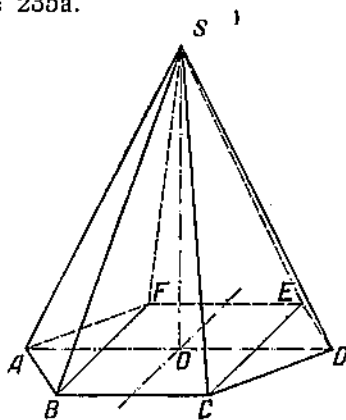
Построение показано на чертеже 234: $ab = m$, $\angle dab = \varphi = 45^\circ$, $ad = k \cdot ab = 0,5 ab$, $ae \perp ab$, $ae = ab = m$; $abcd$, $efgh$, $bcgf$, $adhe$ — параллелограммы, $abfe$ и $dcgh$ — квадраты.

Задача 8. Построить косоугольную проекцию правильной шестиугольной пирамиды, поставленной на горизонтальную плоскость, по заданной ортогональной проекции на горизонтальную плоскость и высоте h пирамиды (черт. 235).

Построение показано на чертеже 235а.

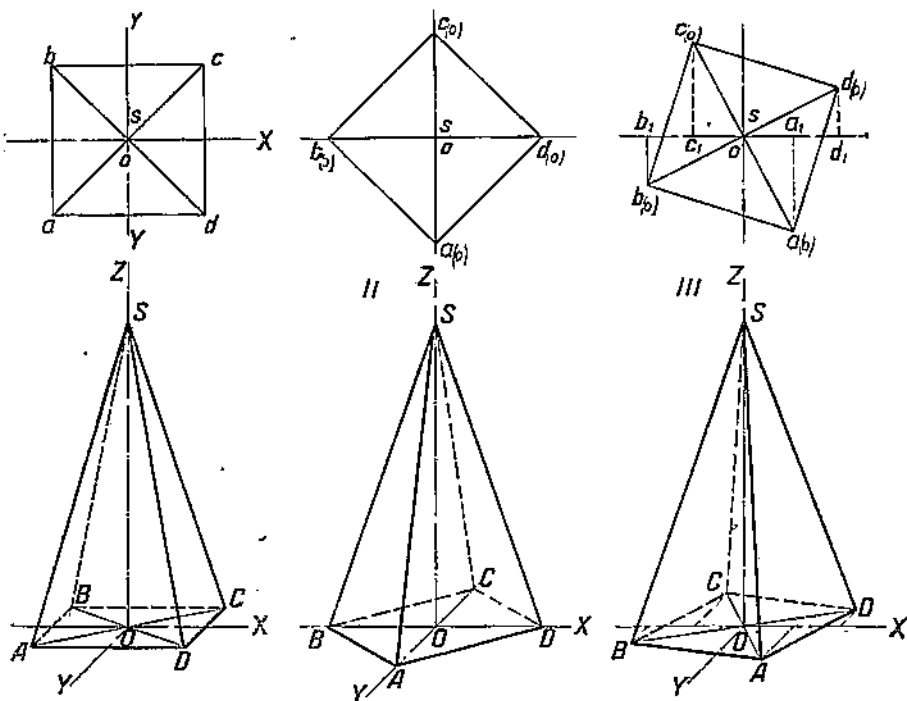


Черт. 235.



Черт. 235а.

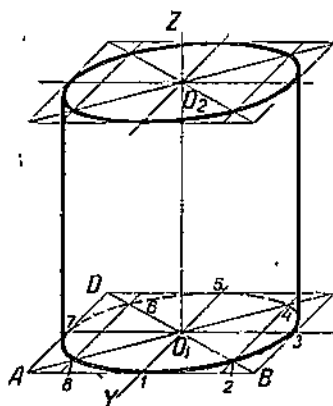
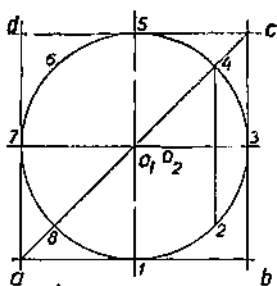
На чертежах 236, 237 и 238 построены косоугольные параллельные проекции пирамиды, цилиндра и конуса, которые даны на чертежах 224, 225 и 226 в изометрической проекции.



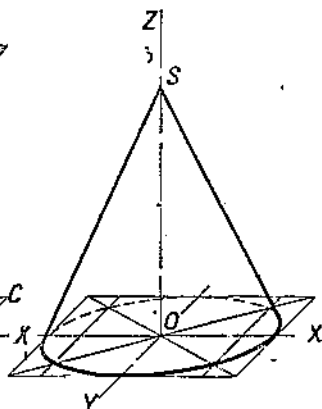
Черт. 236.

Из сравнения этих чертежей легко усмотреть, что многогранники в косоугольной (так называемой кабинетной) проекции дают при фронтальном расположении граней более наглядное отображение натуры, чем в изометрической проекции.

Что касается тел вращения (цилиндра, конуса), то косоугольная проекция дает непривычное искажение окружностей, ввиду чего удобнее для построения наглядного изображения этих тел пользоваться изометрической проекцией.



Черт. 237.



Черт. 238.

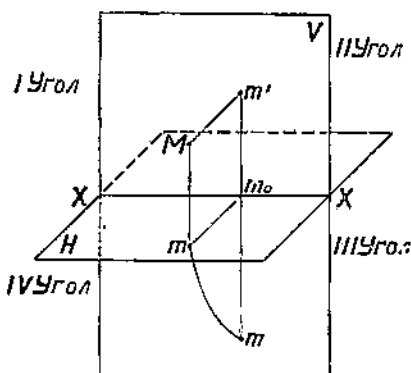
Г Л А В А Ш.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ НА ДВЕ И НА ТРИ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ.

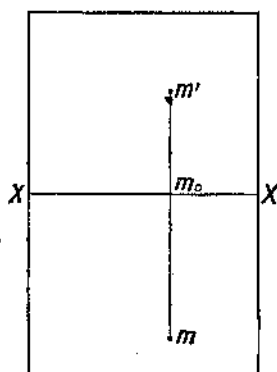
§ 56. Основные понятия. Проекция точки.

При отображении точки проекцией на горизонтальную плоскость требовалось для определения положения точки в пространстве задать, кроме горизонтальной проекции, еще высотную отметку. Положение точки в пространстве можно определить и другим способом, спроектировав точку на две взаимно перпендикулярные плоскости. Целесообразно выбрать положение этих плоскостей проекций так, чтобы одна из них была горизонтальной, а вторая — вертикальной и притом фасадной плоскостью. Горизонтальную плоскость проекций мы будем обозначать буквой H , а проекцию точки A на эту плоскость — буквой a , вертикальную фасадную плоскость будем обозначать буквой V , а проекцию точки A на эту плоскость — буквой a' .

Если представим себе горизонтальную и вертикальную плоскости проекций неограниченно продолженными, то прямая пересечения плоскостей разделит горизонтальную плоскость на две области — переднюю и заднюю, а вертикальную плоскость — на верхнюю и нижнюю. Обе плоскости образуют 4 двугранных угла, а именно: первый угол образуется передней областью H и верхней областью V , второй угол — верхней областью V и задней областью H , третий угол — задней областью H и нижней областью V и, наконец, четвертый угол — нижней областью V и передней областью H (черт. 239).



Черт. 239.



Черт. 239а.

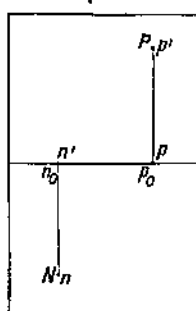
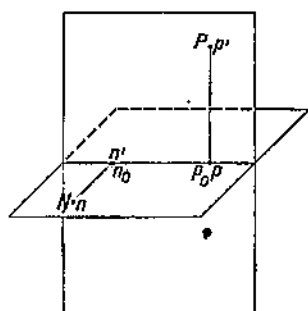
Проекция точки M на горизонтальную плоскость называется горизонтальной проекцией m , проекция на вертикальную плоскость проекций называется вертикальной проекцией m' . Если спроектируем точку M на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций и проведем плоскость через проектирующие лучи Mm и Mm' , то эта плоскость, перпендикулярная к H и V , перпендикулярна и к оси проекций XX . Обозначив точку пересечения этой плоскости с осью XX через m_0 , найдем, что $Mm' = m_0m$, и $Mm = m'm_0$. Таким образом, расстояние точки M от горизонтальной плоскости проекций равно расстоянию вертикальной проекции m' этой точки от оси проекций, а расстояние точки M от фасадной плоскости равно расстоянию горизонтальной ее проекции m от оси проекций. Основания перпендикуляров, проведенных на ось проекций из горизонтальной и вертикальной проекций одной точки, совпадают. Если точка M задана своими проекциями m и m' на горизонтальную и фасадную плоскости, то положение точки в пространстве вполне определено.

Для того чтобы выполнить чертеж в одной плоскости, вращают горизонтальную плоскость H вокруг оси XX до совмещения передней области H с нижней областью V (черт. 239а) и выбирают плоскость V за плоскость чертежа. При таком совмещении горизонтальная и вертикальная проекции одной и той же точки расположены на одном перпендикуляре к оси проекций. Чертеж,

полученный после совмещения плоскостей проекций, называется *эпюром*.

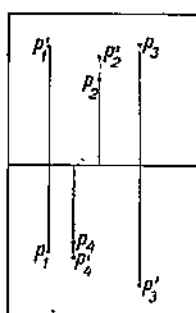
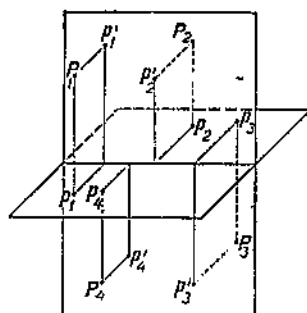
Этот способ отображения точки в пространстве на плоскости предложил французский математик Г а с п а р М о н ж (1746—1818).

Если точка N расположена на горизонтальной плоскости H ,



Черт. 240.

то ее горизонтальная проекция n совпадает с самой точкой, а вертикальная проекция n' лежит на оси проекций (черт. 240). Если же точка P расположена на фронтальной плоскости, то ее вертикальная проекция p' совпадает с точкой, а горизонтальная проекция p лежит на оси проекций (черт. 240).



Черт. 241.

На чертеже 241 показаны положения горизонтальной и вертикальной проекций точек P_1, P_2, P_3 и P_4 при различном положении этих точек в пространстве.

1. Точка P_1 расположена в первом угле, ее горизонтальная проекция p_1 расположена под осью проекций, вертикальная проекция p'_1 — над осью.

2. Точка P_2 расположена во втором угле, ее горизонтальная проекция p'_2 — над осью проекций, вертикальная проекция p'_2 — над осью.

3. Точка P_3 расположена в третьем угле, ее горизонтальная проекция p_3 — над осью проекций, вертикальная проекция p'_3 — под осью.

4. Точка P_4 расположена в четвертом угле, ее горизонтальная проекция p_4 — под осью проекций, вертикальная проекция p'_4 — под осью.

По положению проекций точки можно определить положение точки в пространстве.

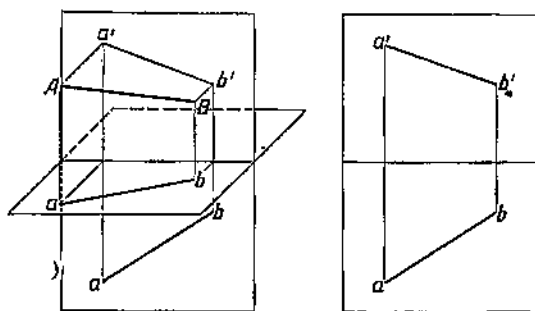
Обычно располагают изображаемые фигуры в первом угле. Поэтому горизонтальная проекция располагается под осью проекций, вертикальная проекция — над осью.

Задача. Найти положение точки A в пространстве, если горизонтальная проекция a точки совпадает с ее вертикальной проекцией a' .

Так как обе проекции расположены по одну сторону от оси проекций, то искомая точка лежит во втором или четвертом угле на плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями H и V .

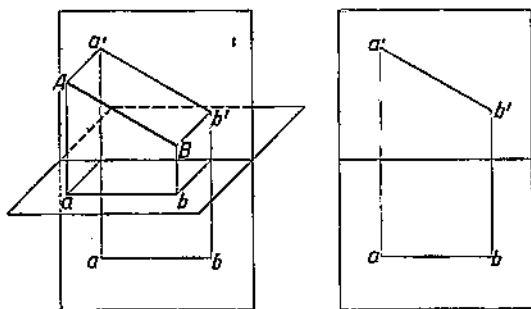
§ 57. Изображение отрезка в ортогональных проекциях на горизонтальную и вертикальную плоскости.

Проекции отрезка AB изображаются отрезками, соединяющими проекции концов отрезка (черт. 242).



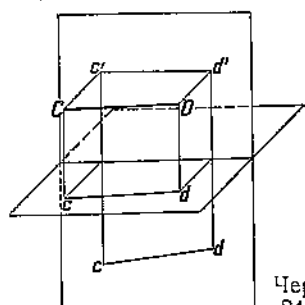
Черт. 242.

В зависимости от положения прямой относительно плоскостей проекций ее проекции занимают различное положение относительно оси проекций.

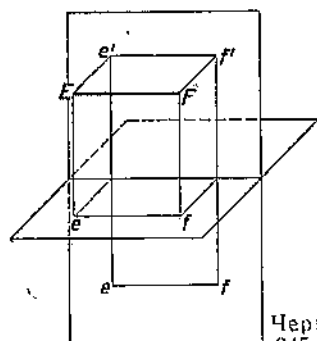
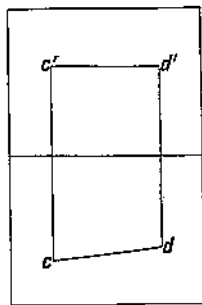


Черт. 243.

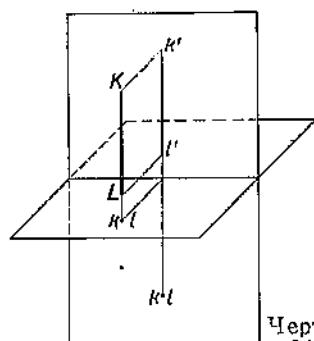
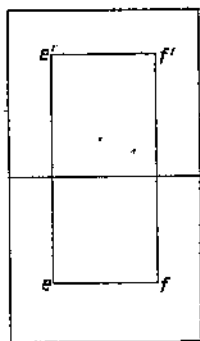
1. Отрезок AB параллелен вертикальной плоскости проекций. Это значит, что точки A и B отстоят на одинаковом расстоянии от вертикальной плоскости. На эюре расстояние точки от вертикальной плоскости проекций определяется расстоянием горизонтальной проекции от оси, следовательно, горизонтальная проекция ab отрезка, параллельного вертикальной плоскости, параллельна оси (черт. 243); вертикальная проекция $a'b'$ равна отрезку AB .



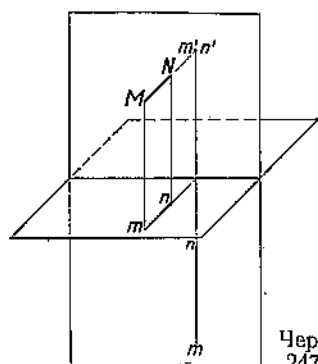
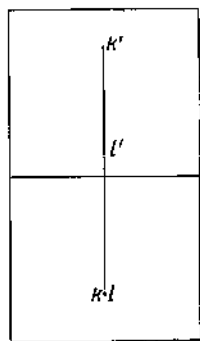
Черт.
244.



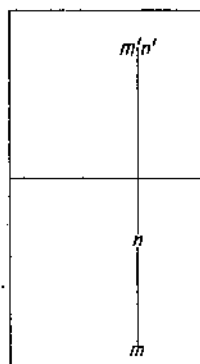
Черт
245..



Черт.
246



Черт.
247.



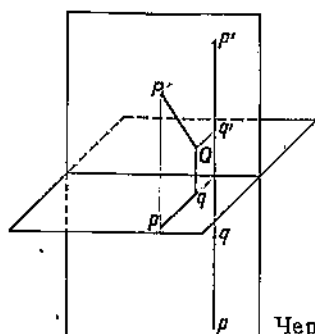
2. Отрезок CD параллелен горизонтальной плоскости проекций, т. е. точки C и D одинаково отстоят от горизонтальной плоскости; следовательно, вертикальная проекция $c'd'$ параллельна оси (черт. 244); горизонтальная проекция cd равна отрезку CD .

3. Отрезок EF параллелен горизонтальной и вертикальной плоскостям проекций, т. е. параллелен оси. Обе проекции ef и $e'f'$ параллельны оси и равны отрезку EF (черт. 245).

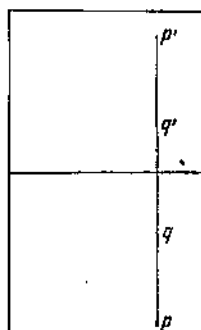
4. Отрезок KL перпендикулярен к горизонтальной плоскости проекций и проектируется на горизонтальную плоскость в одну точку. Вертикальная проекция $k'l'$ перпендикулярна к оси и равна отрезку KL (черт. 246).

5. Отрезок MN перпендикулярен к вертикальной плоскости проекций и проектируется на вертикальную плоскость в одну точку $m'n'$. Горизонтальная проекция mn перпендикулярна к оси и равна отрезку MN (черт. 247).

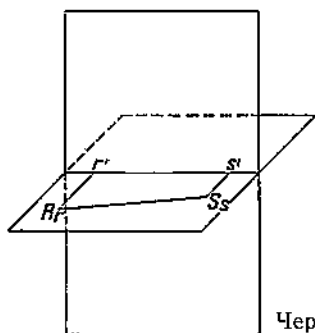
6. Отрезок PQ лежит в плоскости, перпендикулярной к вертикальной и горизонтальной плоскостям проекций, т. е. перпендикулярной к оси проекций (профильная плоскость). Его вертикальная и горизонтальная проекции перпендикулярны к оси проекций (черт. 248).



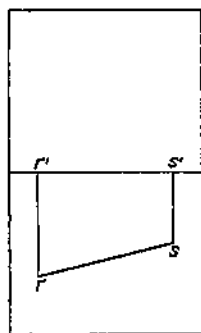
Черт. 248.



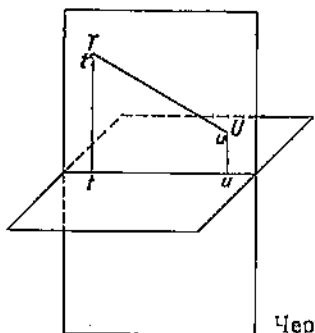
7. Отрезок RS лежит в горизонтальной плоскости проекций. В этом случае его горизонтальная проекция совпадает с отрезком RS , а вертикальная — с осью проекций (черт. 249).



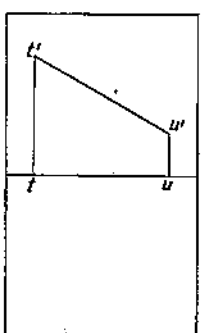
Черт. 249.



8. Отрезок TU лежит в вертикальной плоскости проекций. В этом случае вертикальная проекция совпадает с отрезком, а горизонтальная — с осью проекций (черт. 250).



Черт. 250.



§ 58. Определение истинной величины отрезка, заданного проекциями на горизонтальную и вертикальную плоскости.

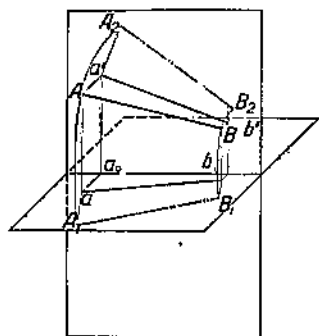
Из § 39 известно, что для определения истинной величины отрезка нужно совместить с плоскостью проекций проектирующую трапецию (черт. 185—186, стр. 88). Такое совмещение с горизонтальной и с вертикальной плоскостями проекций показано на чертеже 251.

При совмещении проектирующей трапеции $ABba$ с горизонтальной плоскостью следует иметь в виду, что $bB_1 \perp ab$ и $aA_1 \perp ab$.

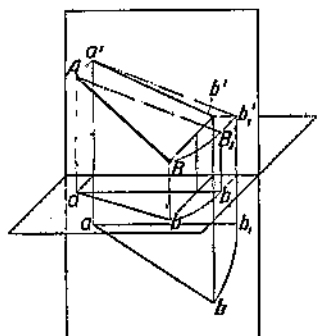
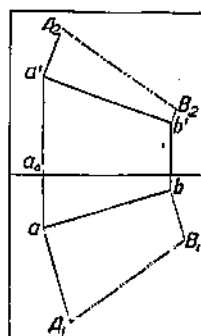
Кроме того, $bB_1 = b'b_0$ и $aA_1 = a'a_0$. Истинная величина отрезка AB равна A_1B_1 .

При совмещении проектирующей трапеции $ABb'a'$ с вертикальной плоскостью получаем $b'B_2 \perp a'b'$, $a'A_2 \perp a'b'$, $b'B_2 = Bb' = bb_0$, $a'A_2 = Aa' = aa_0$. Истинная величина отрезка AB равна A_2B_2 . Проверкой правильности и точности построения служит равенство отрезков A_1B_1 и A_2B_2 .

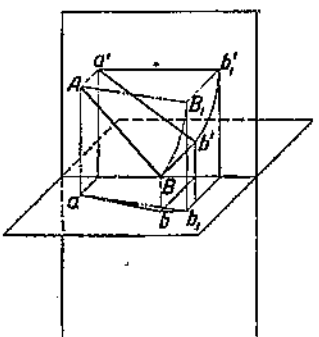
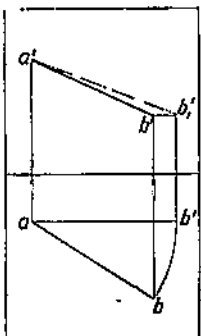
Второй способ определения истинной величины отрезка основной на способе вращения проектирующей трапеции вокруг одного из проектирующих лучей с целью привести плоскость трапеции в положение, параллельное одной из плоскостей проекций. Если (черт. 252) вращать проектирующую трапецию $ABba$ вокруг проектирующего луча Aa до положения, параллельного вертикальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция ba займет положение b_1a , параллельное оси проекций, вертикальная проекция b' точки B будет перемещаться параллельно оси проекций (расстояние точки B от горизонтальной плоскости проекций остается неизменным), точка b переместится по дуге окружности ($b_1a = ba$). Истинная величина отрезка AB выражается вертикальной проекцией $b_1'a'$ повернутого отрезка AB_1 .



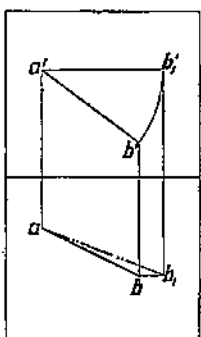
Черт. 251.



Черт. 252.



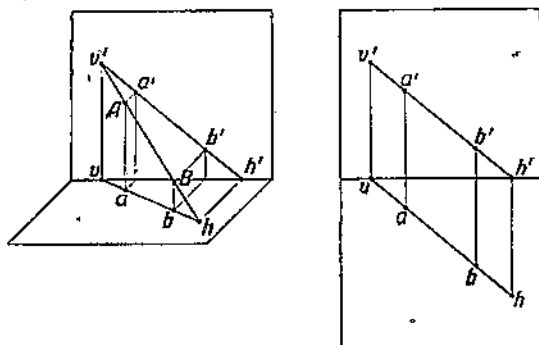
Черт. 253.



Точно так же можно повернуть проектирующую трапецию $ABb'a'$ вокруг проектирующего луча Aa' (черт. 253) и привести проектирующую плоскость в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. При этом вертикальная проекция $a'b'$ займет положение $a'b_1'$, параллельное оси проекций, горизонтальная проекция b переместится параллельно оси проекций в положение b_1 , и отрезок ab_1 выразит истинную величину отрезка AB .

§ 59. Следы прямой на плоскостях проекций. Угол прямой с плоскостями проекций.

Проекция прямой, как мы видели в § 58, в общем случае изображается прямою. Всякая прямая определяется двумя точками, а потому проекция прямой определяется проекциями двух точек. Прямая, не параллельная плоскостям проекций, пересекает эти плоскости. Точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций носит название горизонтального следа прямой, точка пересечения прямой с вертикальной плоскостью проекций называется вертикальным следом.



Черт. 254.

Двумя точками, определяющими прямую, могут быть следы этой прямой на горизонтальной и вертикальной плоскостях проекций. Горизонтальный след h прямой AB есть точка, лежащая на горизонтальной плоскости, следовательно, ее горизонтальная проекция совпадает с точкой h , а вертикальная проекция h' лежит на оси проекций. Точно так же вертикальный след v' прямой лежит в вертикальной плоскости и совпадает с вертикальной проекцией v' , горизонтальная же проекция этого следа (v) лежит на оси проекций (черт. 254).

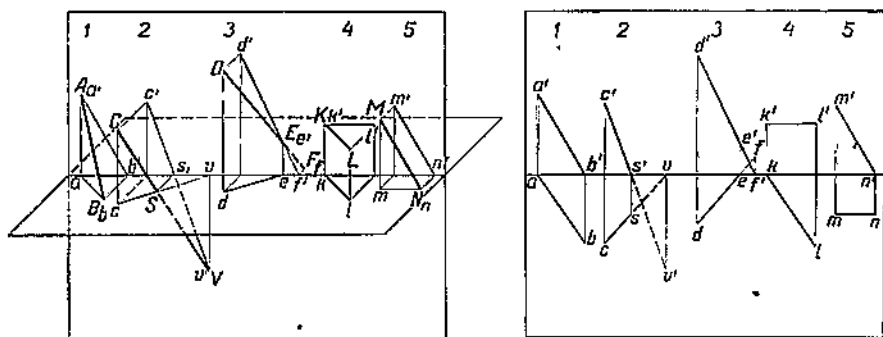
Задача 1. Построить проекции прямой, заданной горизонтальным следом h и вертикальным следом v' .

Точка h определяет горизонтальную проекцию точки, лежащей на горизонтальной плоскости. Вертикальная проекция точки h лежит в точке пересечения перпендикуляра, проведенного из h на ось проекций, с этой осью. Проведя этот перпендикуляр, получим вертикальную проекцию h' горизонтального следа искомой прямой. Проведя из точки v' перпендикуляр на ось проекций, получим горизонтальную проекцию v вертикального следа.

Отрезок vh изображает горизонтальную проекцию искомой прямой, а $v'h'$ — вертикальную ее проекцию (черт. 254).

Если заданы проекции ab и $a'b'$ прямой AB , то для построения ее следов продолжим вертикальную проекцию до пересечения с осью в точке h' вертикальной проекции горизонтального следа. Горизонтальная проекция h этого следа лежит в пересечении перпендикуляра к оси проекций в точке h' с горизонтальной проекцией ab прямой. Продолжив эту проекцию до пересечения с осью, получим горизонтальную проекцию v вертикального следа. Проведя в этой точке перпендикуляр к оси, найдем в пересечении этого перпендикуляра с $a'b'$ вертикальную проекцию v' , или вертикальный след.

Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, то вертикальная проекция параллельна оси, горизонтальный след превращается в бесконечно удаленную точку. Если же прямая параллельна вертикальной плоскости проекций, то вертикальный след превращается в бесконечно удаленную точку.



Черт. 255.

На чертеже 255 показано пять различных положений прямой в пространстве и положения ее следов.

1. Прямая AB пересекает вертикальную плоскость в точке A и горизонтальную плоскость в точке B , причем отрезок AB расположен в первом угле.

2. Прямая CV пересекает горизонтальную плоскость в точке S и вертикальную плоскость в точке V , отрезок CS лежит в первом угле, отрезок SV — в четвертом.

3. Прямая DF пересекает вертикальную плоскость в точке E и горизонтальную плоскость в точке F ; отрезок DE лежит в первом угле, отрезок EF — во втором.

4. Прямая KL параллельна горизонтальной плоскости и пересекает вертикальную плоскость в точке K .

5. Прямая MN параллельна вертикальной плоскости и пересекает горизонтальную плоскость в точке N .

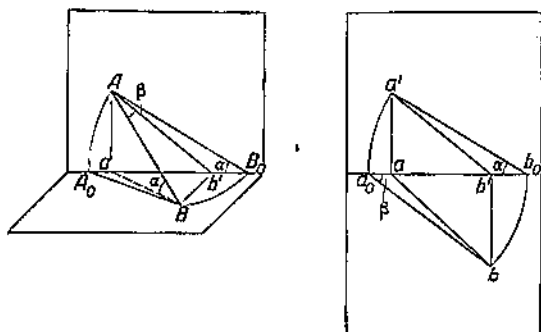
Если прямая параллельна и горизонтальной и вертикальной плоскостям, то она параллельна оси проекций, и оба следа этой прямой представляют бесконечно удаленные точки.

Задача 2. По заданным проекциям прямой построить углы наклона прямой к плоскостям проекций.

Угол наклона прямой AB (черт. 256) к горизонтальной плоскости проекций есть угол между прямой AB и ее горизонтальной проекцией aB , т. е. $\angle A\alpha a$ прямоугольного треугольника AaB . Катет Aa дан в натуральную величину на эпюре ($a'a'$), катет aB на эпюре дан отрезком ab . Отложив на оси проекций отрезок $a'b_0 = ab$, построим прямоугольный треугольник $a'a'b_0$ и получим истинную величину угла $\alpha = \angle a'b_0a$.

Угол наклона прямой AB к вертикальной плоскости проекций определяется углом $B\alpha b'$ между прямой AB и ее вертикальной проекцией Ab' , т. е.

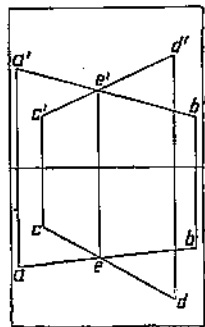
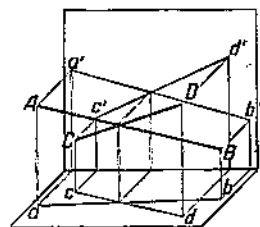
углом $B\alpha b'$ прямоугольного треугольника $Bb'A$. На эпюре даны в натуральную величину катеты $Bb' = bb'$ и $AB' = a'b'$. Отложив на оси проекций $a_0b = a'b$, построим прямоугольный треугольник $a_0b'b$ и получим искомый угол $\beta = \angle ba_0b'$.



Черт. 256.

§ 60. Пересекающиеся и скрещивающиеся прямые.

Если две прямые взаимно пересекаются, то проекция точки пересечения должна лежать на проекциях каждой из прямых. А так как вертикальная и горизонтальная проекции одной и той же точки лежат на одном перпендикуляре к оси проекций, то

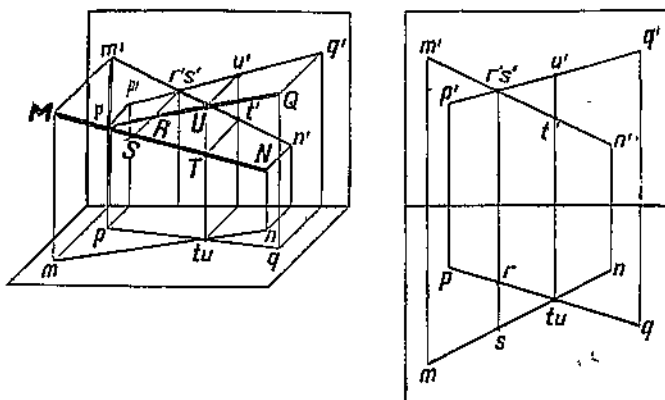


Черт. 257.

по заданным проекциям прямых можно определить, имеют ли обе прямые общую точку или прямые взаимно скрещиваются. Так, прямые AB и CD , заданные проекциями $ab, a'b'$ и $cd, c'd'$ (черт. 257), взаимно пересекаются, так как имеют общую точку $E(e, e')$.

Прямые $MN(mn, m'n')$ и $PQ(pq, p'q')$ не имеют общей точки (черт. 258), так как точка пересечения вертикальных проекций $m'n'$ и $p'q'$ не лежит на одном перпендикуляре к оси с точкой пересечения горизонтальных проекций mn и pq .

Из аксонометрического изображения видно, что по отношению к вертикальной плоскости проекций прямая MN перекрывает прямую PQ ; точке пересечения вертикальных проекций $m'n'$ и $p'q'$ соответствует на горизонтальной проекции mn точка s , а на проекции pq точка r , причем точка s дальше отстоит от оси проекций, чем точка r . По отношению к горизонтальной плоскости прямая PQ перекрывает прямую MN ; на эпюре точке пересечения горизонтальных проекций mn и pq (точка tu) соответствует на $p'q'$ точка u' , а на $m'n'$ точка t' , причем u' дальше отстоит от оси проекций, чем t' .



Черт. 258.

Если прямые параллельны, то проекции их также параллельны.

Обратно: если вертикальные проекции двух прямых взаимно параллельны и горизонтальные проекции этих прямых также параллельны, то прямые параллельны.

§ 61. Проекция плоских фигур.

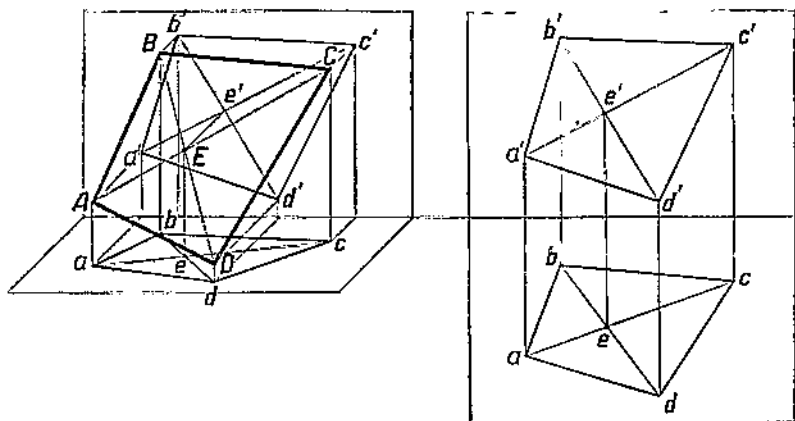
Положение плоскости определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой, т. е. треугольник определяет положение плоскости, проходящей через его вершины.

Задача 1. Даны горизонтальная проекция четырехугольника $ABCD$ и вертикальная проекция трех его вершин. Определить вертикальную проекцию четвертой вершины (черт. 259).

Четыре вершины четырехугольника лежат в одной плоскости только в том случае, если диагонали его взаимно пересекаются, т. е. точки e и e' лежат на одном перпендикуляре к оси проекций. Отсюда вытекает построение. На горизонтальной проекции проводим диагонали ac и bd , а на вертикальной — диагональ $a'c'$.

По точке e пересечения ac и bd определяем на $a'c'$ точку e' , проводим диагональ $b'e'$ и по точке d определяем четвертую вершину d' вертикальной проекции $a'b'c'd'$ плоского четырехугольника.

Построение проекций $abcd$ и $a'b'c'd'$ четырехугольника показано на эюре и в аксонометрической проекции, на которой кроме проекции изображен также четырехугольник $ABCD$ в пространстве.



Черт. 259.

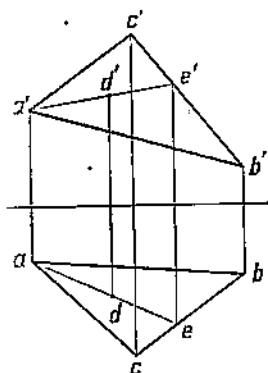
Задача 2. Треугольник ABC изображен своими ортогональными проекциями. По данной горизонтальной проекции m точки M , лежащей внутри контура треугольника, построить вертикальную проекцию этой точки (черт. 260).

На горизонтальной проекции соединяем точку d с одной из вершин треугольника abc , например с вершиной a , определяем точку e пересечения прямой ad со стороной bc и строим вертикальную проекцию прямой $a'e'$, на которой определяем вертикальную проекцию d' искомой точки D .

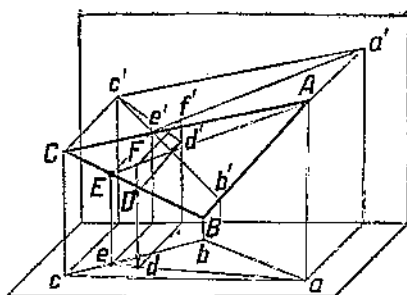
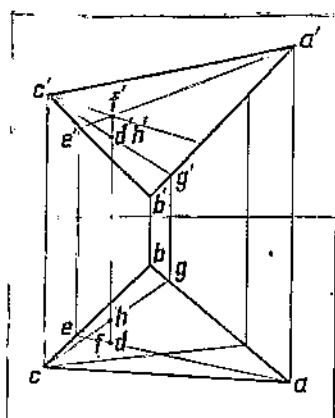
Задача 3. По заданным проекциям треугольника ABC и проекциям точки D определить, перекрывается ли точка D треугольником на горизонтальной проекции и на вертикальной проекции (черт. 261).

На горизонтальной проекции проведем ade и построим соответствующую вертикальную проекцию $a'e'$. Прямая dd' пересекает $a'e'$ в точке f' , лежащей выше над осью проекций, чем точка d' , поэтому на горизонтальной плоскости треугольник перекрывает точку D .

Проведя на вертикальной проекции прямую $c'd'g'$ и соответствующую ей на горизонтальной проекции прямую cg , найдем, что точке d' соответствует на горизонтальной проекции cg точка h , которая лежит к оси проекций ближе точки d , следовательно, точка d перекрывает треугольник $a'b'c'$.



Черт. 260.



Черт. 261.

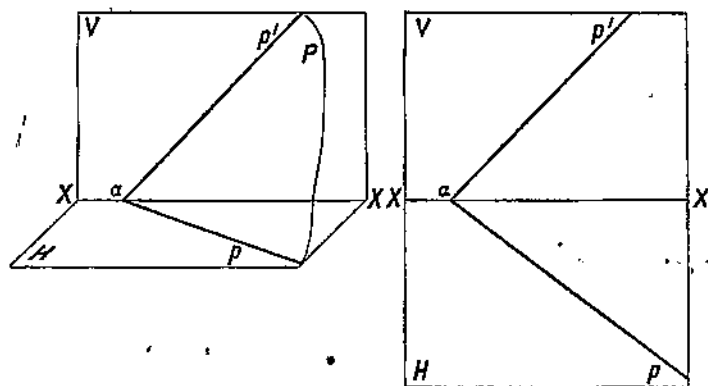
§ 62. Отображение плоскости ее следами.

Положение плоскости определяется:

- а) прямой и точкой, вне ее лежащей,
- б) двумя пересекающимися прямыми (угол),
- в) двумя параллельными прямыми.

В общем случае плоскость пересекает горизонтальную плоскость проекций по прямой, которая называется горизонтальным следом плоскости. Вертикальную плоскость проекций эта плоскость пересекает по прямой, называемой вертикальным следом плоскости.

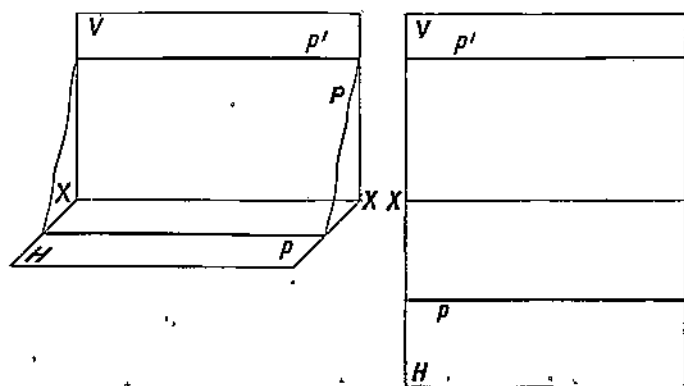
Вертикальный и горизонтальный следы плоскости взаимно пересекаются на оси проекций.



Черт. 262.

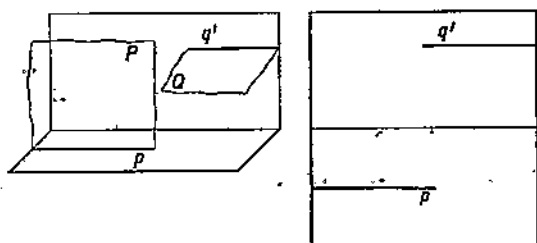
Действительно, точка a пересечения вертикального следа данной плоскости с осью проекций (черт. 262) лежит на данной плоскости и на горизонтальной плоскости проекций, т. е. на прямой их пересечения — на горизонтальном следе плоскости.

Если точка пересечения следов плоскости с осью проекций является бесконечно удаленной точкой, то вертикальный и горизонтальный следы параллельны оси проекций, и плоскость параллельна оси проекций (черт. 263).



Черт. 263.

Если плоскость P параллельна вертикальной плоскости проекций, то ее вертикальный след представляет бесконечно удаленную прямую, и на чертеже мы имеем один горизонтальный след p , параллельный оси проекций (черт. 264).



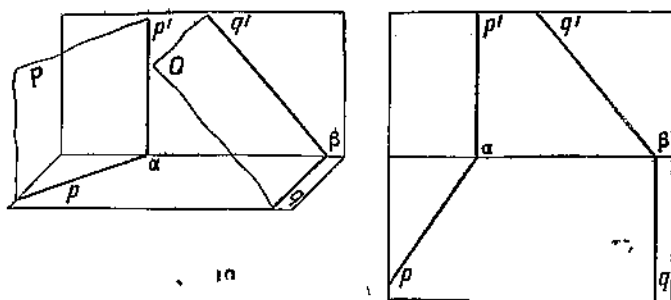
Черт. 264.

Если плоскость Q параллельна горизонтальной плоскости проекций, то ее горизонтальный след представляет бесконечно удаленную прямую, а вертикальный след (q') параллелен оси проекций (черт. 264).

Если плоскость P перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, то она пересекается с вертикальной плоскостью проекций по прямой, перпендикулярной и к горизонтальной плоскости и к оси проекций (черт. 265), т. е. вертикальный след этой плоскости p' перпендикулярен к оси проекций.

Если плоскость Q перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций, то она пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой, перпендикулярной и к вертикальной плоскости и к

оси XX (черт. 267). Горизонтальный след q этой плоскости перпендикулярен к оси проекций.



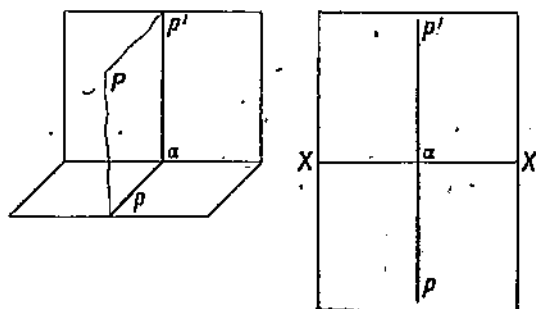
Черт. 265.

Наконец, если плоскость перпендикулярна и к вертикальной и к горизонтальной плоскости проекций, т. е. перпендикулярна к оси проекций, то ее горизонтальный и вертикальный следы перпендикулярны к оси проекций (черт. 266).

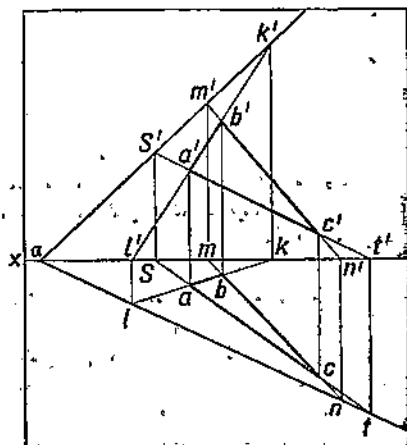
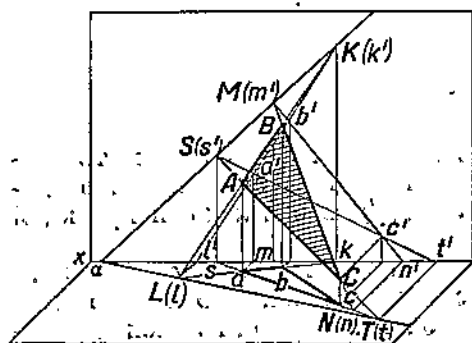
Задача 1. Построить следы плоскости, определяемой треугольником ABC (черт. 267).

Следы прямых AB , BC и AC должны лежать на следах плоскости, определяемой треугольником. Для определения следов плоскости достаточно найти следы двух прямых,

следы третьей прямой служат для проверки точности построения.



Черт. 266.



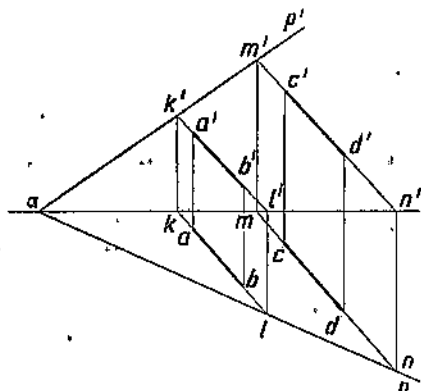
Черт. 267.

Следы прямой AB (вертикальный след K на аксонометрическом изображении и k' на эпюре и горизонтальный след L на аксонометрическом изображении и l на эпюре) и прямой BC (вертикальный след M на аксонометрическом изображении и m' на эпюре, горизонтальный след N на аксонометрическом изображении и n на эпюре) определяют следы NL и KM' с общей точкой a на оси проекций.

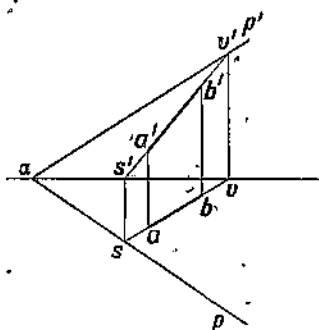
Задача 2. Построить следы плоскости, определяемой прямой и точкой, лежащей вне прямой.

Через данную точку и произвольную точку данной прямой проводим вторую прямую, и задача сводится к предыдущей.

Задача 3. Построить следы плоскости, определяемой двумя параллельными прямыми AB ($ab, a'b'$) и CD ($cd, c'd'$) (черт. 268).



Черт. 268.



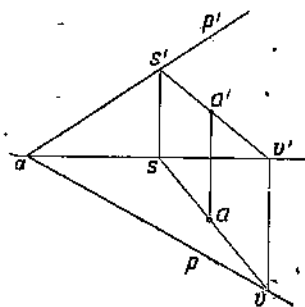
Черт. 269.

Задача 4. На плоскости P , заданной ее следами, лежит прямая AB , горизонтальная проекция ab которой известна. Построить вертикальную проекцию этой прямой (черт. 269).

Продолжив ab до пересечения с осью проекций в точке v и с горизонтальным следом pa в точке s , найдем горизонтальный след s прямой и горизонтальную проекцию v вертикального следа этой прямой. По точкам v и s определяем точки v' и s' и вертикальную проекцию $v's'$ прямой, на которой находим точки a' и b' — вертикальные проекции концов отрезка AB .

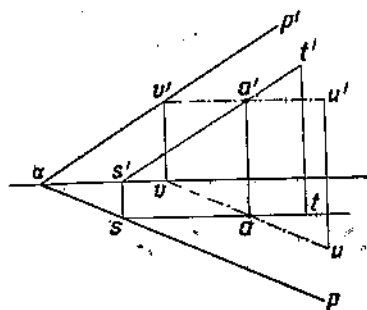
Задача 5. На плоскости P , заданной следами pa и $p'a'$, отметить вертикальную проекцию a' точки A по заданной ее горизонтальной проекции a .

1. Проведя через a произвольную прямую, которую примем за горизонтальную проекцию прямой, лежащей на плоскости P , построим вертикальную проекцию этой прямой (черт. 270). На этой вертикальной проекции отметим точку a' , соответствующую точке a .



Черт. 270.

2. Через точку A вообразим на плоскости P прямую, параллельную вертикальной плоскости, т. е. параллельную вертикальному следу $p'a$. Горизонтальная проекция этой прямой параллельна оси проекций, вертикальная проекция параллельна $p'a$ (черт. 271). Построение ясно из чертежа.



Черт. 271.

3. То же построение можно сделать, если через точку A вообразим на плоскости P прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций, т. е. параллельную горизонтальному следу этой плоскости. Горизонтальная проекция u и v этой прямой параллельна pa , вертикальная — параллельна оси проекций. Построение приведено на чертеже 271 штрих-пунктирными линиями.

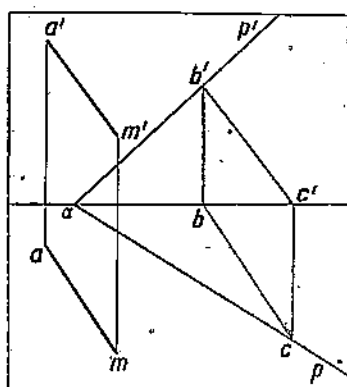
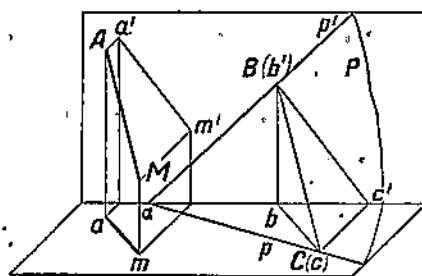
§ 63. Взаимное положение прямой и плоскости.

Прямая, не лежащая всеми своими точками на плоскости, может пересекать плоскость или быть параллельной плоскости.

Прямая в пространстве, параллельная какой-нибудь прямой, лежащей на данной плоскости, параллельна этой плоскости.

Задача 1. Через точку A , заданную ортогональными проекциями a и a' , провести прямую, параллельную плоскости P , заданной следами (черт. 272).

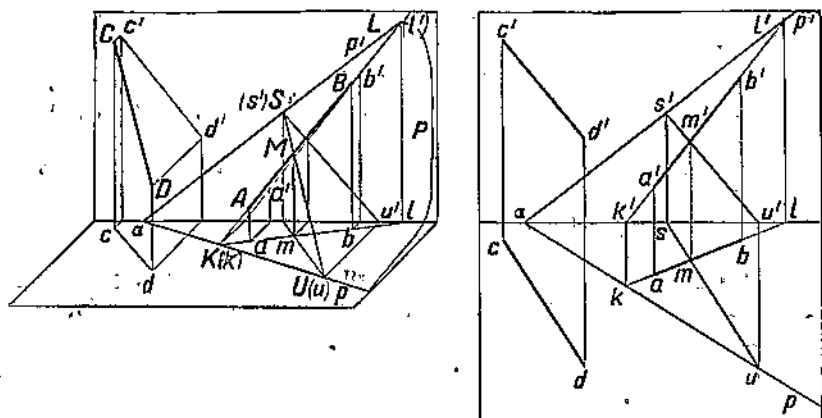
Проведем прямую через произвольную точку B на вертикальном следе плоскости (на эюре $b'b$) и точку C (на эюре c, c') горизонтального следа, и через точку A проведем прямую $MA \parallel BC$. Проекция этой прямой параллельны соответствующим проекциям прямой BC .



Черт. 272.

Задача 2. Через данную прямую AB , заданную проекциями ab и $a'b'$, провести плоскость, параллельную прямой CD , заданной проекциями cd и $c'd'$ (черт. 273).

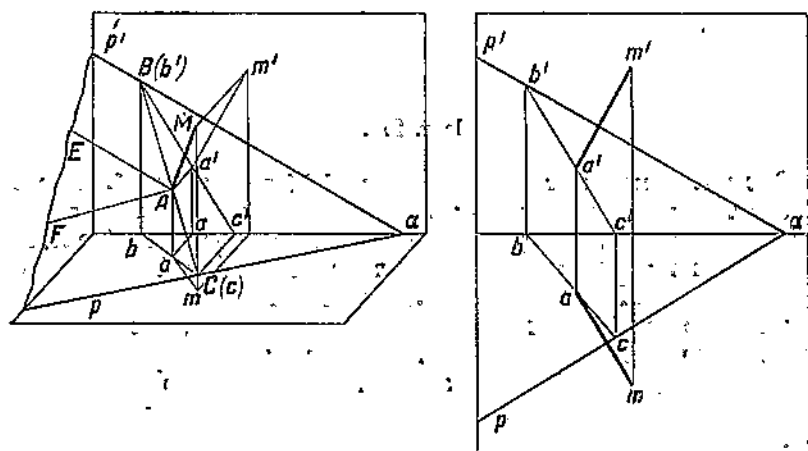
Через произвольную точку $M(m, m')$ прямой AB проведем прямую $MS \parallel CD$. Плоскость, проходящая через прямые AB и MS , параллельна прямой CD . Построение показано на чертеже 273.



Черт. 273.

Задача 3. Через точку A , взятую на плоскости P , провести прямую $AM \perp P$ (черт. 274).

Пусть прямая AM перпендикулярна к плоскости P со следами ra и $p'a$ на плоскостях проекций. Проведем через точку A на плоскости P прямую $AF \parallel ra$ и прямую $AE \parallel p'a$. Прямая AM перпендикулярна к AF и к AE . В § 50 было доказано, что проекция прямой, перпендикулярной к плоскости, перпендикулярна к следу этой плоскости на плоскости проекций. Таким образом, $am \perp ra$ и $a'm' \perp p'a$. Отсюда вытекает построение, проведенное на эмпоре.

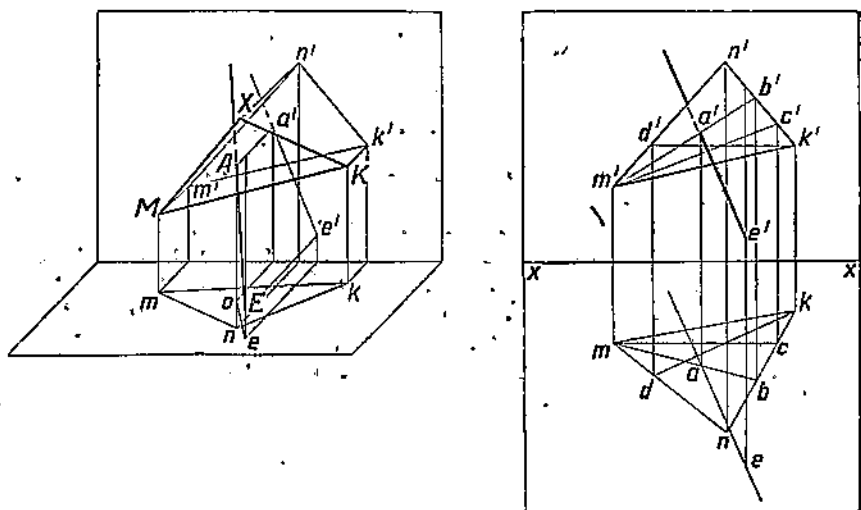


Черт. 274.

Из точки a — горизонтальной проекции данной на плоскости P точки A — проведем прямую $am \perp ra$ и из точки a' — вертикальной проекции точки A — прямую $a'm' \perp p'a$; получим проекции

искомого перпендикуляра к плоскости P . Действительно, прямая AM получается в пространстве в пересечении проектирующей трапеции $amMA$, перпендикулярной к горизонтальной плоскости, и проектирующей трапеции $a'm'MA$, плоскость которой перпендикулярна к вертикальной плоскости. Горизонтальный след pa перпендикулярен к am , а следовательно, к плоскости трапеции $amMA$, следовательно, плоскость трапеции $amMA$ перпендикулярна к плоскости P . Точно так же можно доказать, что и плоскость проектирующей трапеции $a'm'MA$ перпендикулярна к плоскости P . Но если две плоскости, перпендикулярные к третьей, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна к этой плоскости, т. е. $AM \perp P$.

Если плоскость задана не следами, а проекциями плоской фигуры, то построение перпендикуляра может быть проведено без определения следов, как это показано на чертеже 275.



Черт. 275.

Задача 4. В плоскости треугольника MNK дана точка A . Провести через эту точку перпендикуляр к плоскости треугольника и отметить часть перпендикуляра, перекрываемую площадью треугольника (черт. 275).

Проекция искомого перпендикуляра перпендикулярна к следам плоскости. Проведем на плоскости треугольника прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций, а следовательно, и горизонтальному следу плоскости треугольника. Вертикальная проекция этой прямой параллельна оси проекций, горизонтальная проекция параллельна горизонтальному следу плоскости. Отсюда вытекает следующее построение.

На вертикальной проекции проведем $k'd' \parallel xx$, перенесем точку d' на горизонтальную проекцию mn и получим прямую kd , параллельную горизонтальному следу плоскости треугольника. Проведем $ae \perp kd$, получим горизонтальную проекцию искомого перпендикуляра.

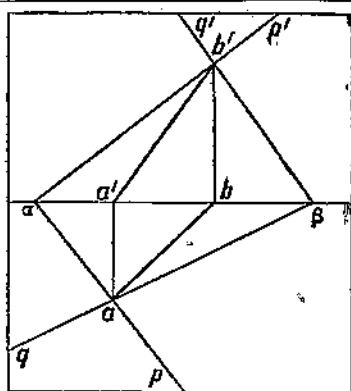
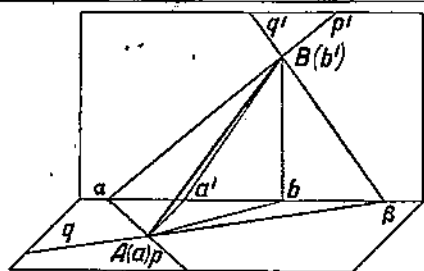
Точно так же, проведя на горизонтальной проекции $mc \parallel xx$, построим соответствующую вертикальную проекцию $m'c'$, параллельную, вертикальному следу плоскости треугольника. Прямая $a'e'$, перпендикулярная к $m'c'$, изображает вертикальную проекцию искомого перпендикуляра AE .

§ 64. Взаимное положение двух плоскостей.

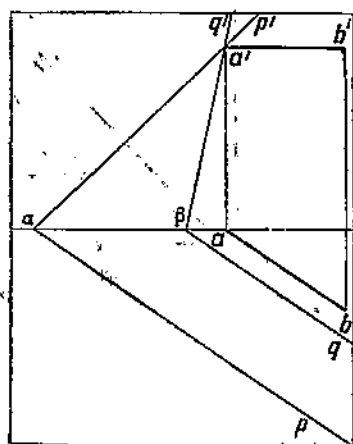
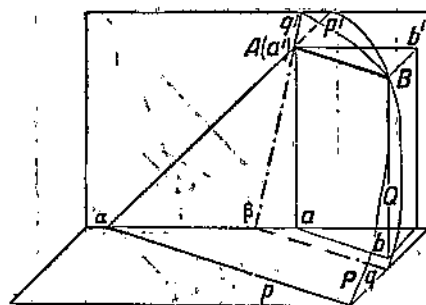
Две плоскости могут быть взаимно параллельны или пересекаться по прямой.

Задача 1. Найти прямую пересечения двух плоскостей, заданных следами p, p' и q, q' .

Прямая пересечения двух плоскостей есть геометрическое место всех точек, расположенных одновременно на каждой из заданных плоскостей. Таким образом, точка пересечения горизонтальных следов и точка пересечения вертикальных следов являются точками искомой прямой пересечения. Отсюда вытекают следующие приемы построения.



Черт. 276.



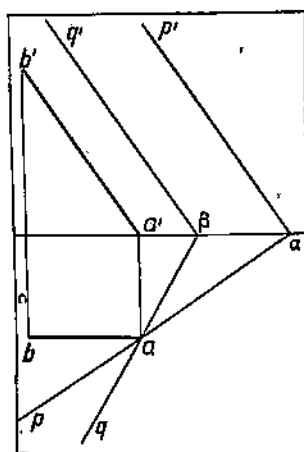
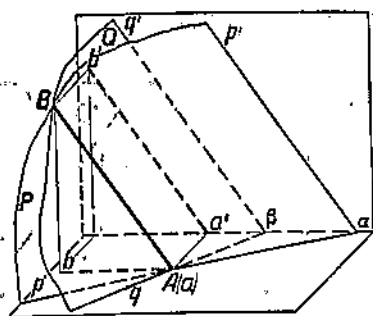
Черт. 277.

1. Следы p и q пересекаются в точке a , следы p' и q' — в точке b' (черт. 276). Прямая пересечения проходит через точки A и B , изображаемые на эюре проекциями a, a' и b, b' .

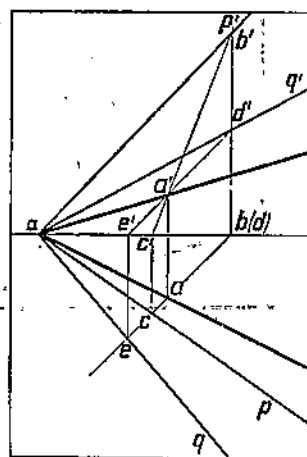
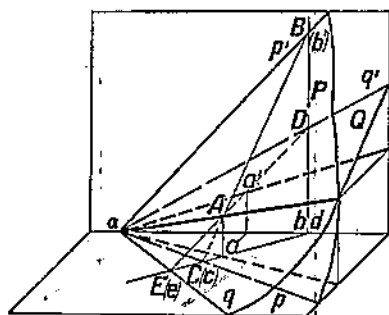
2. Следы p' и q' пересекаются в точке a' , следы p и q взаимно параллельны (черт. 277). В этом случае прямая пересечения параллельна горизонтальным следам, т. е. параллельна горизонтальной плоскости. Зная проекции a' и a одной точки этой прямой, построим эту прямую, проведя $a'b' \parallel xx$ и $ab \parallel p \parallel q$.

3. Следы p и q пересекаются в точке a , следы p' и q' взаимно параллельны (черт. 278). Прямая пересечения параллельна вертикальной плоскости; горизонтальная проекция прямой пересечения $ab \parallel xx$, вертикальная $a'b' \parallel p' \parallel q'$.

4. Следы p и q, p' и q' пересекаются в общей точке a на оси проекций (черт. 279). В этом случае прямая пересечения проходит

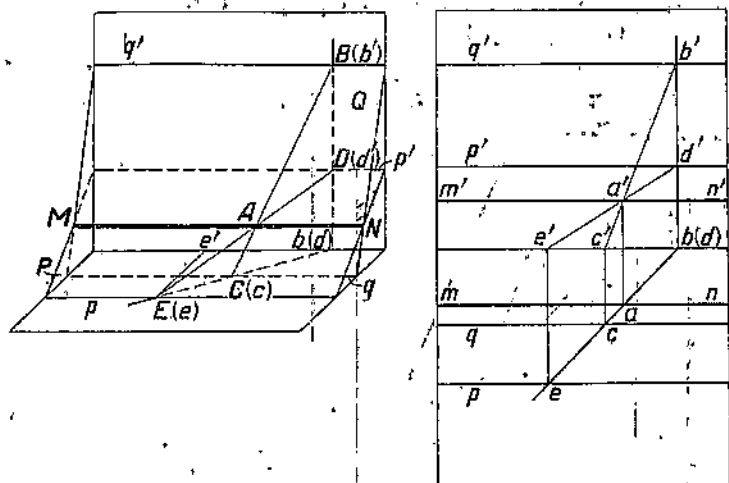


Черт. 278.



Черт. 279.

через точку a . Для нахождения второй точки проведем вспомогательную плоскость, пересекающую обе данные плоскости, например вертикальную плоскость со следами e и b' , и построим прямые пересечения этой плоскости с каждой из заданных плоскостей. Вертикальные проекции $b'c'$ и $d'e'$ прямых пересечения пересекаются в точке a' — вертикальной проекции общей точки всех трех плоскостей. Построив горизонтальную проекцию a этой точки, проведем вертикальную проекцию aa' и горизонтальную проекцию aa прямой пересечения плоскостей p, p' и q, q' .

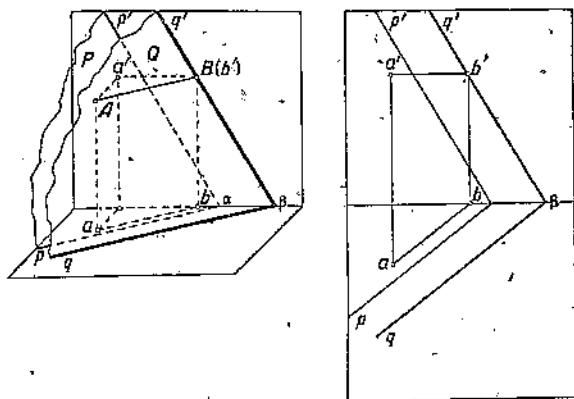


Черт. 280.

5. Следы каждой из двух плоскостей параллельны оси проекций (черт. 280). При помощи вспомогательной плоскости, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций, построим проекции a' и a общей точки всех трех плоскостей. Проведя через эти точки прямые $m'n' \parallel xx \parallel mn$, получим проекции прямой пересечения, параллельной оси проекций.

Две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по прямым параллельным.

Если даны две плоскости, пересекающие ось проекций, и одноименные следы этих плоскостей взаимно параллельны, то такие две плоскости параллельны.

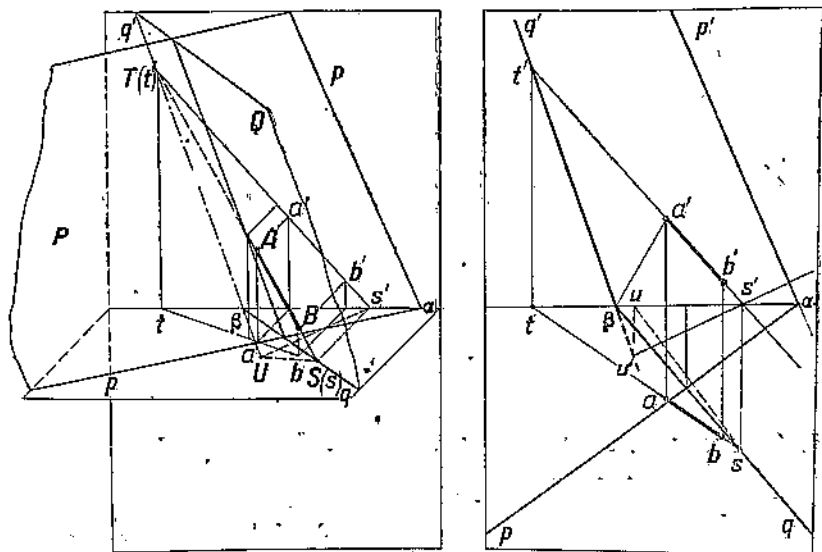


Черт. 281.

Задача 2: Через данную точку A провести плоскость, параллельную плоскости P (черт. 281).

Проведем через данную точку A прямую, параллельную горизонтальному следу p данной плоскости p, p' , а следовательно, горизонтальной плоскости проекций, и найдем вертикальный след этой прямой. Горизонтальная проекция прямой, параллельной горизонтальному следу плоскости, параллельна этому следу, а вертикальная проекция параллельна оси проекций. Построив вертикальный след b' этой прямой, проведем через него вертикальный след искомой плоскости $q'\beta \parallel p'a$, а через точку β — горизонтальный след $\beta q \parallel pa$.

Задача 3. Через данную прямую AB , заданную проекциями $ab, a'b'$, провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, заданной следами p, p' (черт. 282).



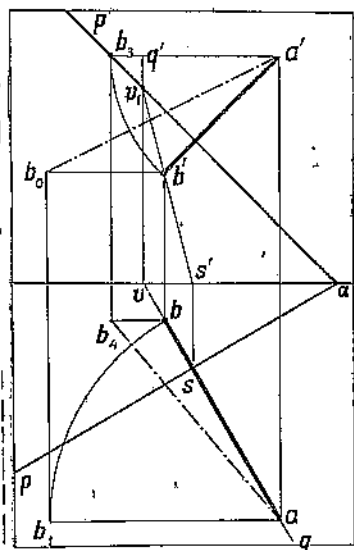
Черт. 282.

Следы искомой плоскости проходят через следы данной прямой. Из произвольной точки данной прямой, например из горизонтальной и вертикальной проекций горизонтального следа S (s, s'), проведем перпендикуляры к соответствующим следам p и p' данной плоскости и получим проекции прямой, перпендикулярной к плоскости pp' . Эта прямая имеет вертикальный след u' (в нижней области вертикальной плоскости) и горизонтальный след s . Проведя прямую через u' и t' , получим вертикальный след $q'\beta$ искомой плоскости, а прямая βs изображает горизонтальный след $q\beta$ плоскости, перпендикулярной к данной плоскости и проходящей через прямую AB .

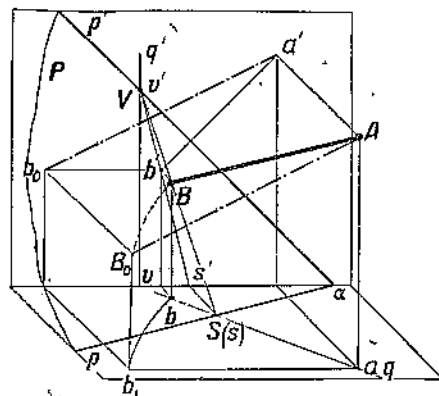
Задача 4. Найти построением расстояние данной точки A (проекции a и a') от данной плоскости P .

1. Данная плоскость задана следами p, p' (черт. 283).

Из данной точки A проведем перпендикуляр к данной плоскости и определим основание этого перпендикуляра на плоскости. Проекции искомого перпендикуляра проходят через проекции a и a' данной точки и перпендикулярны к соответствующим следам плоскости: $ab \perp pa$, $a'b' \perp p'a$. Для определения положения точки пересечения перпендикуляра с плоскостью проведем проектирующую плоскость перпендикулярно к горизонтальной плоскости. Горизонтальный след этой плоскости совпадает с горизонтальной проекцией ab перпендикуляра, а вертикальный след перпендикулярен к оси проекций. Построив прямую VS (на эюре — vs , $v's'$) пересечения проектирующей плоскости с данной, определим в пересечении этой прямой с перпендикуляром точку B (b и b' на эюре) — основание этого перпендикуляра. Истинная величина этого перпендикуляра определяется методом вращений в положение, параллельное вертикальной или горизонтальной плоскости проекций.



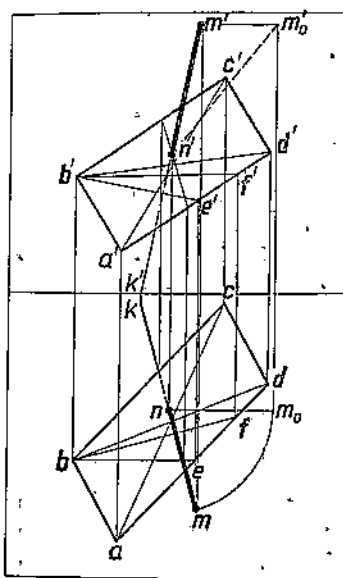
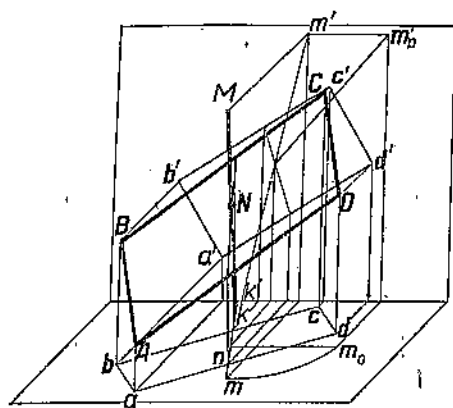
Черт. 283.



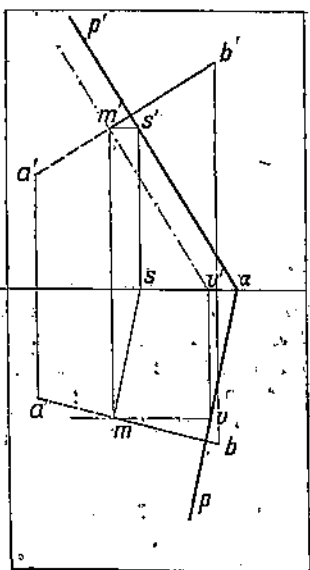
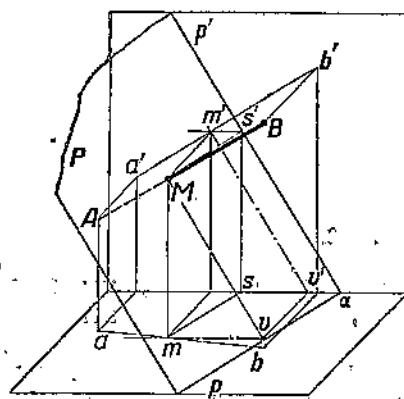
2. Плоскость определяется плоской фигурой, например параллелограммом $ABCD$ (черт. 284), заданным горизонтальной и вертикальной проекциями.

В этом случае для определения направления перпендикуляра построим на плоскости данной фигуры две прямые: одну — параллельную горизонтальной плоскости проекций, а другую — параллельную вертикальной плоскости проекций. С этой целью через b' проведем прямую $b'f' \parallel xh$ и определим горизонтальную проекцию bf прямой, параллельной горизонтальной плоскости, а следовательно, и горизонтальному следу данной плоскости. Прямая $mn \perp bf$ изображает горизонтальную проекцию искомого перпендикуляра. Точно так же построим прямую be , $b'e'$, параллельную вертикальной плоскости проекций, и вертикальную

проекцию перпендикуляра $m'n' \perp b'e'$. Дальнейшее построение точки пересечения перпендикуляра с плоскостью параллелограмма ясно из чертежа.



Черт. 284.

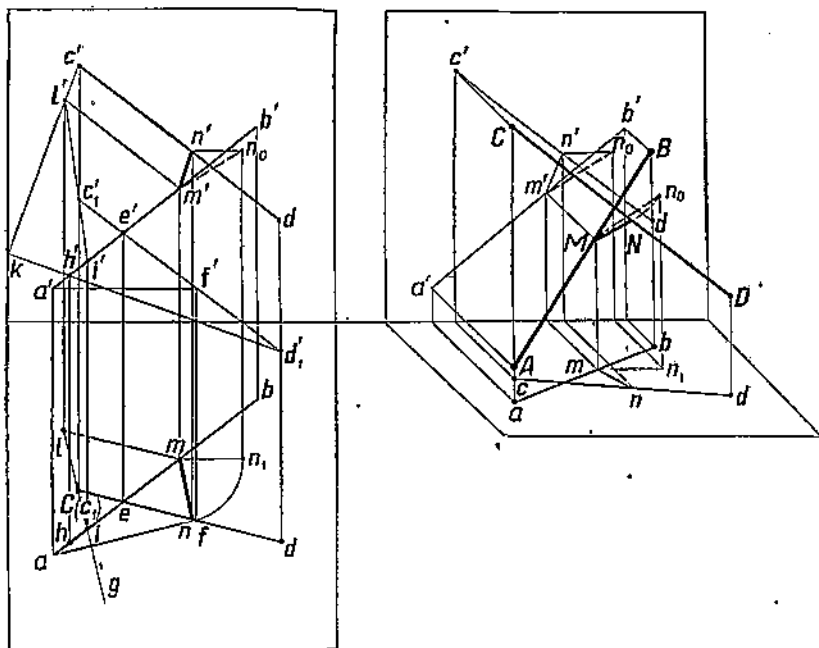


Черт. 285.

Задача 5. Через точку M прямой AB провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой (черт. 285).

Следы искомой плоскости должны быть перпендикулярны к соответствующим проекциям ab и $a'b'$ данной прямой. Задача сводится к определению положения одной точки вертикального или горизонтального следа. Для этого проведем через точку M (m, m' на эмпоре) прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций и лежащую в искомой плоскости, т. е. прямую, параллельную горизонтальному следу. Вертикальная проекция этой прямой параллельна оси xx , горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции ab данной прямой. Построив вертикальный след s' этой прямой, проведем через s' вертикальный след $p'a \perp a'b'$ и затем горизонтальный след $pa \perp ab$.

Вместо прямой, параллельной горизонтальному следу, можно провести через m, m' прямую, параллельную вертикальному следу, и определить горизонтальный след v этой прямой. Это построение проведено на чертеже штрих-пунктирными линиями.



Черт. 286.

Задача 6. Найти кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми AB и CD , заданными проекциями (черт. 286).

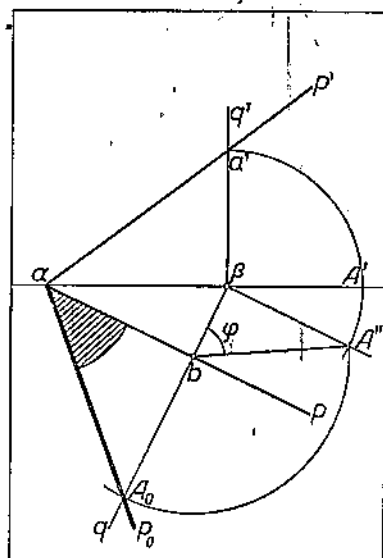
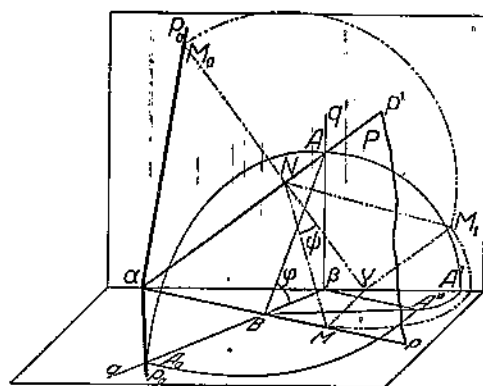
Через произвольную точку E прямой AB (например точку, горизонтальная проекция e которой совпадает с точкой пересечения горизонтальных проекций ab и cd) проведем прямую $C_1D_1 \parallel CD$ и из какой-нибудь точки прямой CD , например из точки C , проведем перпендикуляр CL на плоскость, определяемую прямыми AB и C_1D_1 . Способ построения соответствует

задаче 4 (случай II, черт. 284). Найдя точку L пересечения этого перпендикуляра с плоскостью, определим кратчайшее расстояние CL между прямыми. Перенеся точку L параллельно CD в точку M , построим отрезок MN , являющийся общим перпендикуляром к прямым AB и CD .

На эпюре показано построение истинной величины $m'n_0$ этого перпендикуляра путем вращения в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций.

§ 65. Нахождение истинной величины плоской фигуры путем совмещения ее с одной из плоскостей проекций.

В § 47 было показано, что для нахождения истинной величины плоской фигуры ее необходимо совместить с плоскостью проекций путем вращения вокруг следа плоскости, на которой расположена данная фигура. Само построение показано в § 48 на чертежах 206 и 206а. При проектировании на две плоскости совмещение фигуры, заданной двумя проекциями, с одной из плоскостей проекций совершается путем вращения плоскости вокруг одного из ее следов. При вращении вокруг горизонтального следа каждая точка плоскости описывает дугу окружности в плоскости, перпендикулярной горизонтальному следу.



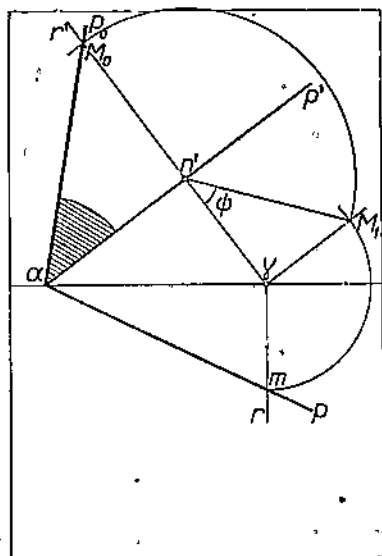
Черт. 287.

Задача 1. Данную плоскость, заданную следами p, p' , совместить: 1) с горизонтальной плоскостью проекций, 2) с вертикальной плоскостью проекций (черт. 287, 288).

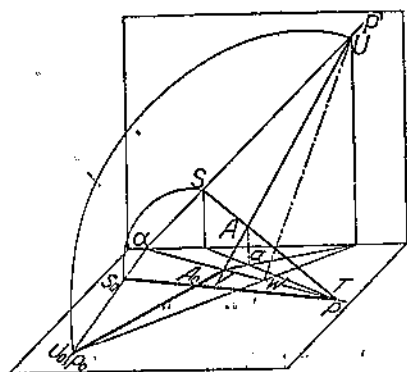
1. При совмещении с горизонтальной плоскостью точка a пересечения следов остается на месте, точка A , взятая на вертикальном следе, описывает в плоскости $q'\beta q$, перпендикулярной к горизонтальному следу, дугу окружности радиуса BA , где центр B есть основание линии ската, проведенной из точки A .

На эпилоре центр окружности определяется горизонтально проекцией b точки пересечения горизонтального следа $q\beta \perp pa$ плоскости $q\beta q'$, перпендикулярной к следу pa ; радиус BA есть истинная величина BA'' отрезка BA и равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $b\beta$ и $\beta A'' = \beta a'$. Совмещенное положение точки A (a') определяется точкой A_0 пересечения проведенной дуги окружности со следом $q\beta$. Соединяя A_0 с a , получим совмещенное положение p_0a вертикального следа.

Означенное построение позволяет определить угол наклона плоскости pap' к горизонтальной плоскости проекций. Этот двугранный угол измеряется линейным углом $AB\beta$ (на эпилоре этот угол $\varphi = \angle A''b\beta$).



Черт. 288.



Черт. 289.

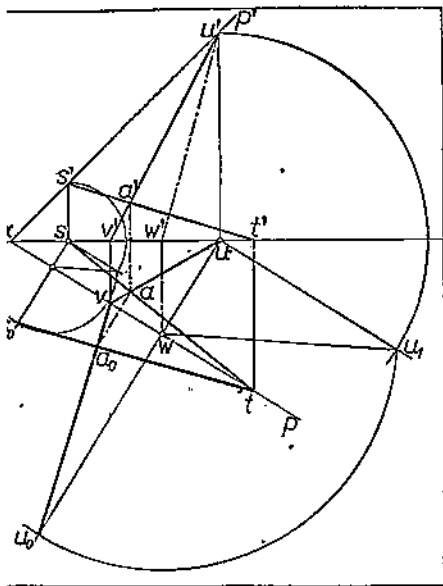
2. На чертеже 288 показано на эпилоре совмещение данной плоскости с вертикальной плоскостью проекций. В данном случае вращение происходит вокруг вертикального следа $p'a$, точка M горизонтального следа описывает дугу окружности радиуса MN из центра N , где N — основание перпендикуляра, проведенного из точки M на вертикальный след $p'a$. Вращение точки M происходит в плоскости $\gamma\gamma'$, перпендикулярной к вертикальному следу $p'a$ данной плоскости. Угол ϕ между данной плоскостью и вертикальной плоскостью проекций равен углу $M_1n'\gamma$, где $\gamma M_1 = \gamma m$.

Задача 2. Найти истинную величину угла между двумя пересекающимися в точке A прямыми VU и ST , заданными проекциями (черт. 289).

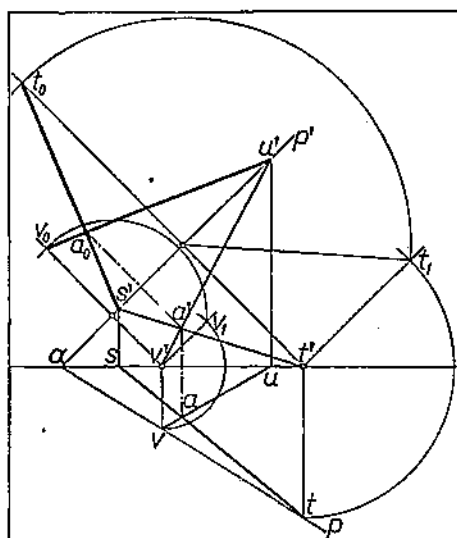
Две пересекающиеся прямые определяют плоскость. Построив следы плоскости, проходящей через данные прямые, совмещаем эту плоскость с горизонтальной плоскостью проекций и находим совмещенное положение s_0t и u_0v отрезков ST и UV и истинную величину угла между ними.

Построение проведено на эюре чертежа 289а. Совмещенное положение a_0 точки A лежит на одном перпендикуляре к следу pa с горизонтальной проекцией a точки пересечения данных прямых.

На чертеже 289б та же задача решена путем совмещения с вертикальной плоскостью проекций. Как и следовало ожидать, истинная величина отрезков ST и UV и угла между ними получается на обоих эюрах (черт. 289а и 289б) одинаковой.



Черт. 289а.



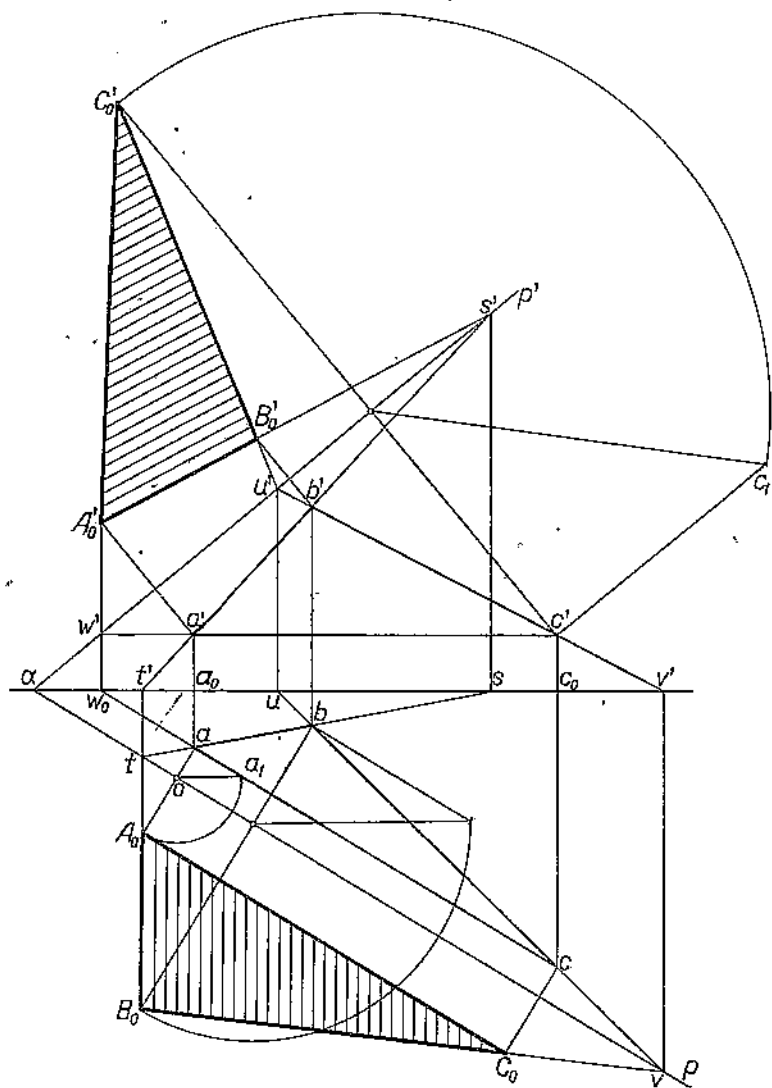
Черт. 289б.

Задача 3. Построить истинную величину треугольника ABC , заданного на эюре проекциями, путем совмещения плоскости треугольника: 1) с горизонтальной плоскостью проекций и 2) с вертикальной плоскостью проекций (черт. 290).

Продолжаем стороны треугольника до пересечения с плоскостями проекций и определяем вертикальные следы s' , u' и w' сторон AB , BC и AC треугольника и горизонтальные следы t и v сторон AB и BC ; третья сторона AC параллельна горизонтальной плоскости проекций. По полученным следам сторон треугольника строим следы $p'a$ и pa плоскости, определяемой треугольником. Правильность и точность построения проверяется тем, что точки a , w' , u' и s' лежат на одной прямой $p'a$, а точки t , v и a — на одной прямой, параллельной стороне ac — горизонтальной проекции треугольника.

Построив совмещенное положение A_0 одной вершины A треугольника ($aa_1 = a'a_0$, $oa_1 = oA_0$), строим совмещенное положение всего треугольника, основываясь на том, что точки t и v являются общими для горизонтальных проекций и совмещенных положений одноименных отрезков и что отрезки B_0b и C_0c перпендикулярны к pa .

На том же чертеже построено совмещенное положение $A'_0B'_0C'_0$ того же треугольника ABC с вертикальной плоскостью проекций. Как и следовало ожидать, треугольники $A_0B_0C_0$ и $A'_0B'_0C'_0$ конгруэнтны.

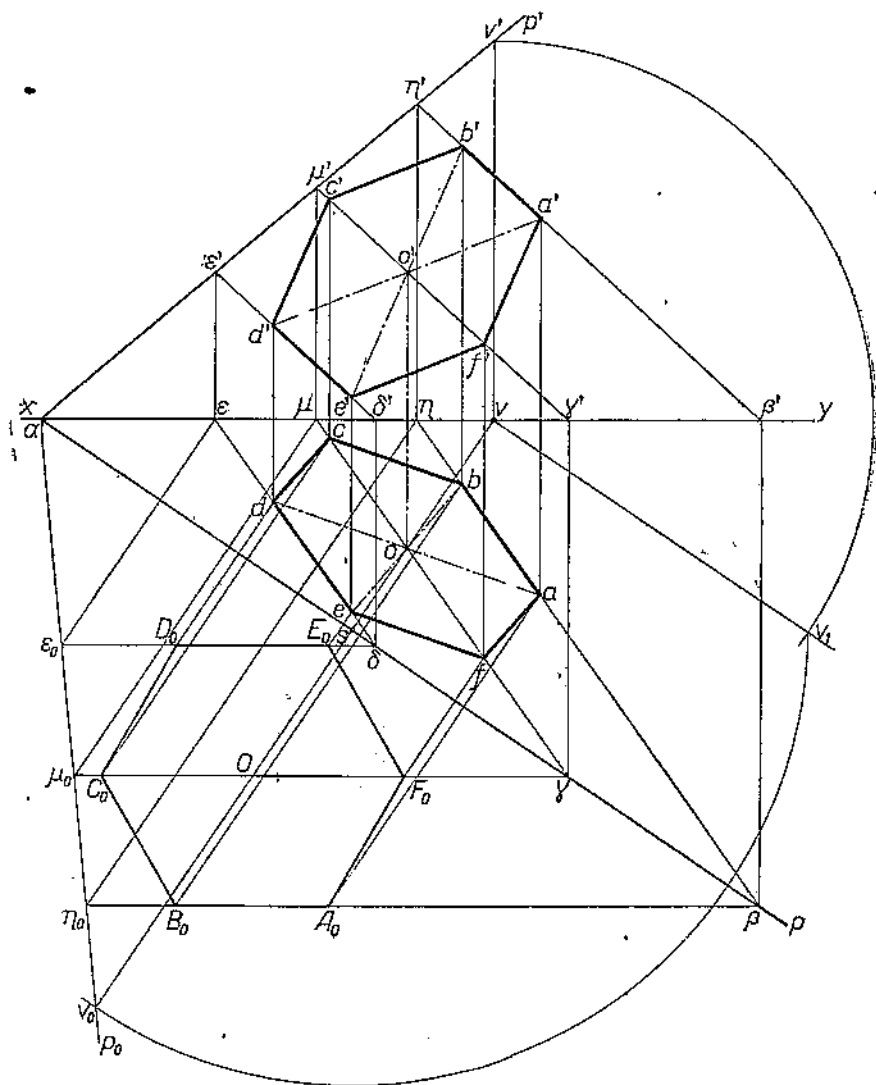


Черт. 290.

Предлагается читателю самостоятельно построить аксонометрическое изображение этого построения по данному эюру.

Как и в проекциях с высотными отметками (§ 48, черт. 206 и 206а), можно решить обратную задачу.

Задача 4. На данную плоскость p, p' поместить правильный шестиугольник, совмещенное положение которого с горизонтальной плоскостью проекций задано на чертеже (черт. 291).



Черт. 291.

Построим совмещенное положение p_0a вертикального следа $p'a$ данной плоскости ($vv_0 \perp pa$, $vv' \perp xy$, $vv_1 \parallel pa$, $vv_1 = vv'$; $sv_1 = sv_0$) и продолжим стороны E_0D_0 и A_0B_0 и параллельную им диагональ C_0F_0 до пересечения со следами pa и p_0a совмещенного положения плоскости.

Проведя $e_0e \perp pa$, $\mu_0\mu \perp pa$ и $\eta_0\eta \perp pa$, определим горизонтальные проекции δe , $\gamma \mu$ и $\beta \eta$ совмещенных отрезков δe_0 , $\gamma \mu_0$ и $\beta \eta_0$, а

затем вертикальные проекции $\delta'e'$, $\gamma'\mu'$ и $\beta'\eta'$ тех же отрезков. Проведя из совмещенных положений вершин $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0$ шестиугольника перпендикуляры к горизонтальному следу pa , получим на соответствующих отрезках $\beta\eta$, $\gamma\mu$ и $\delta\varepsilon$ горизонтальные проекции a, b, c, d, e и f шестиугольника, а по ним и вертикальные проекции a', b', c', d', e' и f' .

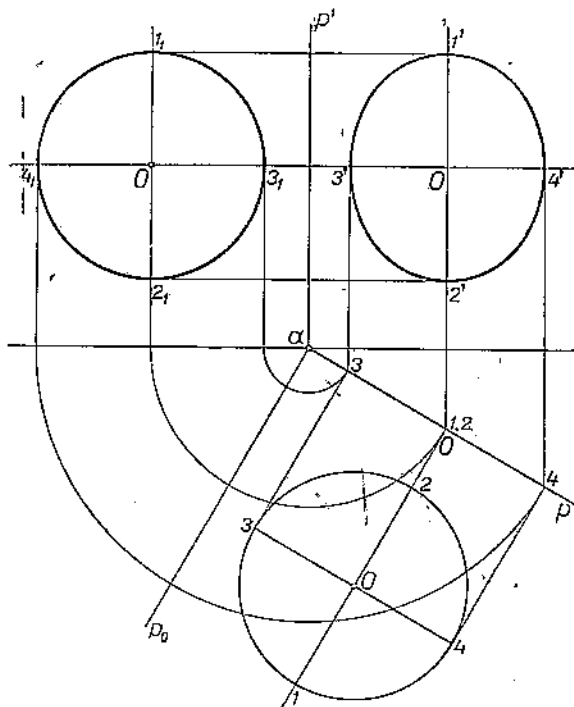
Для проверки точности построения на чертеже показано построение проекций центра O шестиугольника. При точном построении получим, что противоположные стороны шестиугольника на горизонтальной проекции (а также и на вертикальной) взаимно параллельны и равны и диагонали, соединяющие противоположные вершины, проходят через центр многоугольника и делятся в этой точке пополам.

Задача 5. На вертикальную плоскость, изображенную следами p и p' (черт. 292), поместить круг, центр которого в совмещенном положении с горизонтальной плоскостью проекций находится в данной точке O .

Так как плоскость перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, горизонтальная проекция круга изображается отрезком прямой, равным диаметру круга, а вертикальная проекция круга — эллипс.

Совмещенное положение вертикального следа $p'a$ изобразится прямой $p_0a \perp pa$. Диаметр 1-2, параллельный совмещенному положению вертикального следа, проектируется на вертикальную плоскость проекций в натуральную величину. Перпендикулярный к нему диаметр 3-4 проектируется в натуральную величину на горизонтальной проекции. Вертикальная проекция этого диаметра перпендикулярна к проекции диаметра 1'-2'. Два взаимно перпендикулярных диаметра эллипса являются его осями. По заданным осям эллипса легко построить очертания эллипса (см. задачу 51, отдел I, Геометрические построения на плоскости).

На том же чертеже показано совмещение круга с вертикальной плоскостью проекций.

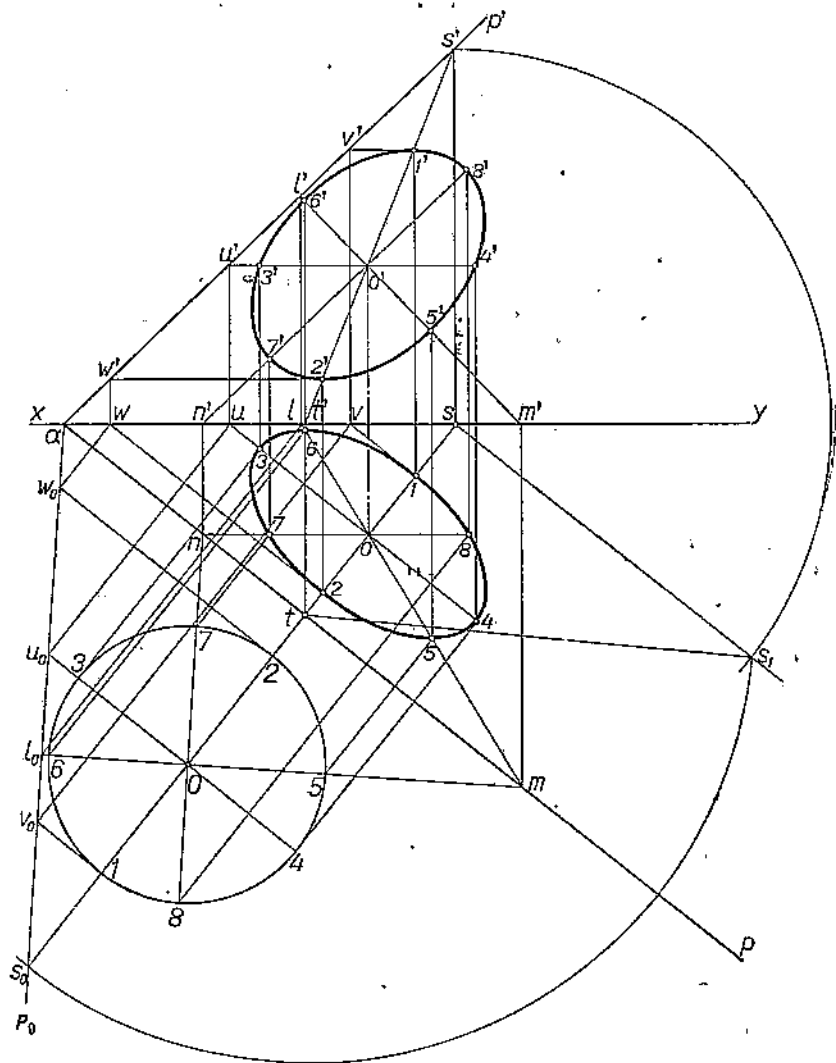


Черт. 292.

Задача 6. По данному совмещенному с горизонтальной плоскостью проекций кругу O (черт. 293) построить проекции круга, лежащего на плоскости, заданной следами p и p' .

Построив совмещенное положение p_0a вертикального следа $p'a$, проведем в круге O диаметр 1-2, перпендикулярный следу pa , и 3-4, параллельный этому следу. Перенесем эти диаметры на горизонтальную проекцию и получим оси эллипса, изображающего горизонтальную проекцию круга. На вертикальной проекции получим два сопряженных диаметра 1'-2' и 3'-4'. По этим данным можно уже построить проекцию круга.

Для более точного построения проведем еще пару диаметров, из них диаметр 5-6, перпендикулярный совмещенному положению

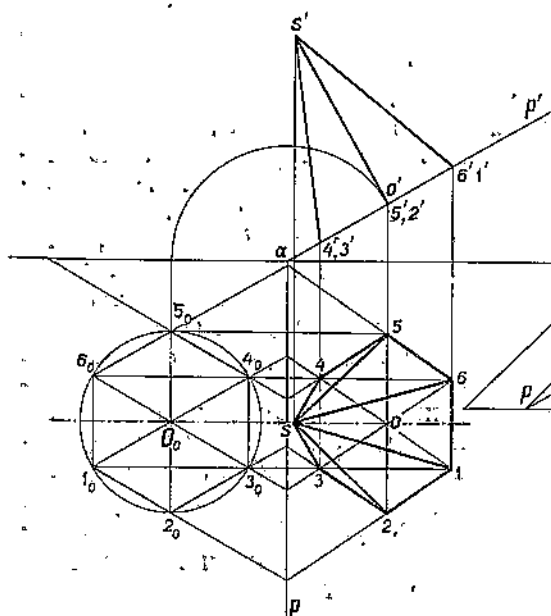


Черт. 293.

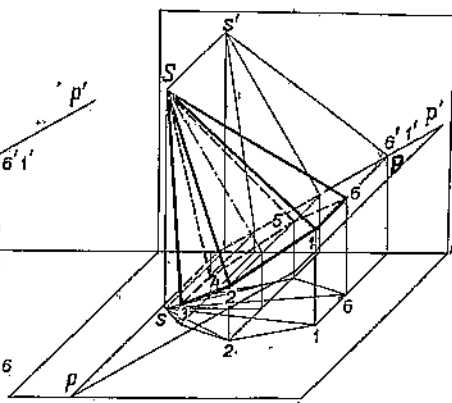
$p_0\alpha$ вертикального следа, и другой 7-8, параллельный $p_0\alpha$. Перенеся эти диаметры на проекции круга, получим на вертикальной проекции две оси эллипса: $7'-8'$ и $5'-6'$, а на горизонтальной проекции два сопряженных диаметра: 7-8 и 5-6. По полученным восьми точкам строим очертание эллипса.

При желании можно построить еще любое число промежуточных точек, пользуясь свойством сопряженных диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные второму диаметру.

Задача 7. На плоскость, перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций и образующую с горизонтальной плоскостью проекций угол в 30° , поставлена правильная шестиугольная пирамида. Совмещенное с горизонтальной плоскостью положение основания пирамиды дано на чертеже 294. Построить проекции основания и всей пирамиды.



Черт. 294.



Черт. 295.

Вертикальный след данной плоскости образует с осью проекций угол в 30° , горизонтальный след перпендикулярен к оси проекций. Совмещенное положение вертикального следа совпадает с осью проекций. Проекция шестиугольника $1_02_03_04_05_06_0$ на вертикальной плоскости изобразится отрезком прямой, а на горизонтальной плоскости — шестиугольником 123456 с центром o .

Высота пирамиды перпендикулярна к плоскости основания, следовательно, проекции высоты перпендикулярны к следам плоскости. Вертикальная проекция высоты равна истинной величине высоты. Отложив $o's' = h$ и построив горизонтальную проекцию s вершины, соединим вершину пирамиды с вершинами основания и получим изображение проекций пирамиды.

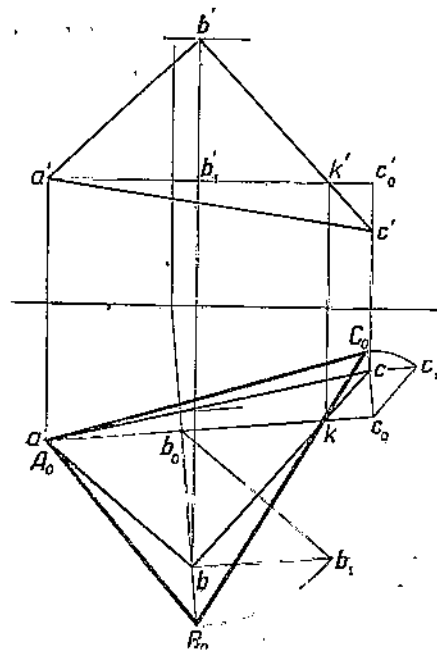
То же построение показано в аксонометрическом изображении на чертеже 295.

§ 66. Определение истинной величины плоской фигуры путем вращения вокруг горизонтальной или фронтальной линии.

В тех случаях, когда плоскость задана не следами, а плоской фигурой (углом, треугольником, плоским многоугольником и пр.), нет надобности совмещать заданную фигуру с одной из плоскостей проекций. Взамен этого можно повернуть фигуру в положение, параллельное одной из плоскостей проекций — горизонтальной или вертикальной. Для этого необходимо провести на фигуре прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций (или вертикальной плоскости проекций), и повернуть фигуру вокруг этой оси в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций (или вертикальной плоскости проекций). В этом положении фигура проектируется в истинную величину.

Задача 1. Определить построением истинную величину треугольника ABC , заданного проекциями abc и $a'b'c'$.

1-й способ. *Вращение в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций.* Через вершину a, a' (черт. 296) проведем горизонталь. Вертикальная проекция этой горизонтали параллельна оси проекций и пересекает $b'c'$ в точке k' , которой соответствует горизонтальная проекция k на горизонтальной проекции bc . Прямая ak изображает горизонтальную проекцию горизонтали и параллельна горизонтальному следу плоскости. Проведем из вершины b перпендикуляр bb_0 на ak , получим горизонтальную проекцию линии ската. Перпендикуляр $b'b'_1$ к вертикальной проекции горизонтали определяет превышение вершины B треугольника над горизонтальной плоскостью, проведенной через горизонталь $ak, a'k'$. Построив прямоугольный треугольник b_0bb_1 по катетам b_0b и $bb_1 = b'b'_1$, получим гипотенузу b_0b_1 , изображающую истинную величину линии ската bb_0 , и радиус дуги, описываемой вершиной B треуголь-

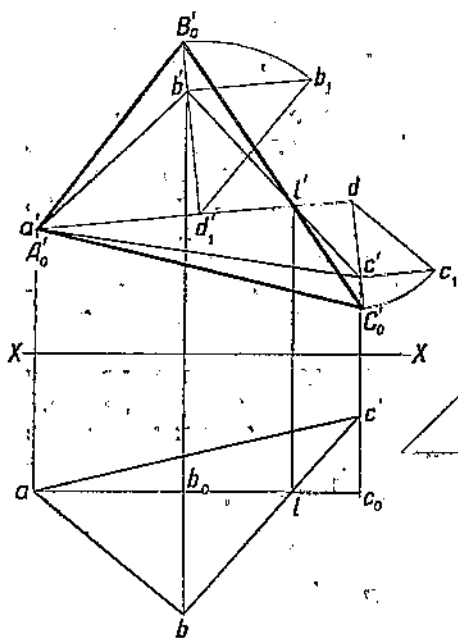


Черт. 296.

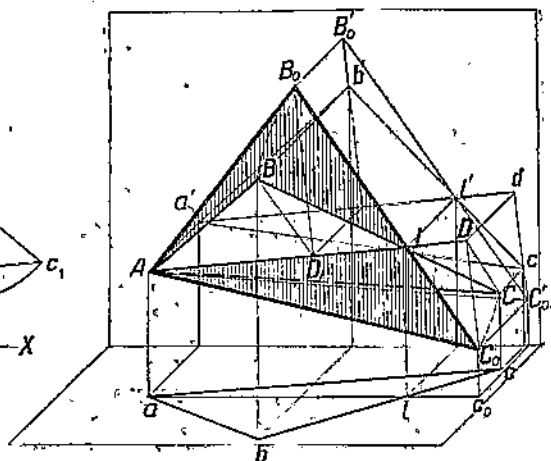
ника при повороте вокруг оси ak . Отложив на прямой b_0b отрезок $b_0B_0 = b_0b_1$, получим вершину B_0 треугольника, плоскость которого параллельна горизонтальной плоскости проекций. Таким же образом построим положение C_0 вершины C треугольника. Вершина A_0 совпадает с вершиной a , так как эта вершина лежит на оси вращения.

Полученный треугольник $A_0B_0C_0$ изображает истинную величину треугольника ABC .

2-й способ. Вращение в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций.



Черт. 297.



Черт. 298.

Для того чтобы повернуть треугольник $abc, a'b'c'$ (черт. 297) в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций, проведем на плоскости треугольника какую-нибудь фронтальную линию, т. е. прямую, параллельную вертикальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси проекций. Проведем $al \parallel xx$ и по точке l построим вертикальную проекцию l' и вертикальную проекцию $a'l'$ фронтали. Далее проводим $b'd'_1 \perp a'l', b'b_1 \parallel a'l'$, откладываем $b'b_1 = bb_0$ и радиусом d_1b_1 проводим дугу до пересечения с d'_1b' в точке B'_0 , определяющей совмещенное положение вершины B треугольника ABC , повернутого в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций.

Подобным же образом построим положение C'_0 третьей вершины.

Как и следовало ожидать, треугольник $A'_0B'_0C'_0$ (черт. 297) и треугольник $A_0B_0C_0$ (черт. 296) конгруэнтны.

На чертеже 298 то же построение проведено в аксонометрической проекции.

Полученный при этом треугольник $A_0B_0C_0$ и треугольник $A'_0B'_0C'_0$ (черт. 297) конгруэнтны.

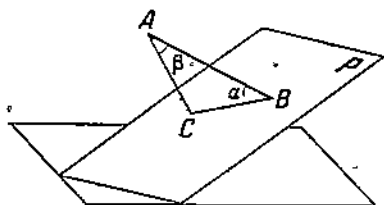
§ 67. Построение угла между прямой и плоскостью и угла между двумя плоскостями.

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол¹⁾, образуемый данной прямой с ее ортогональной проекцией на данную плоскость. Так, например, прямая AB , пересекающая плоскость P в точке B (черт. 299), образует с этой плоскостью угол $\alpha = \angle ABC$, где C — основание перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость P .

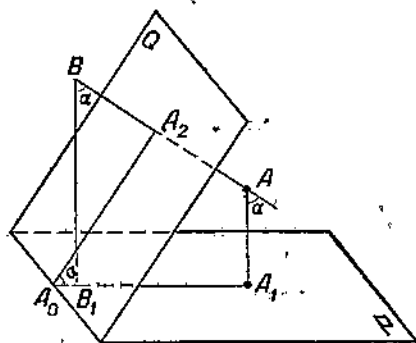
Таким образом, для построения угла α следовало бы найти точки B и C пересечения прямых AB и AC с данной плоскостью P и определить построением истинную величину этого угла.

Построение угла α можно значительно упростить, если принять во внимание, что $\angle \alpha = 90^\circ - \angle BAC$. Для построения дополнительного угла BAC достаточно из какой-нибудь точки данной прямой провести $BC \perp P$ и, определив истинную величину дополнительного угла, дополнить его до прямого и таким образом построить искомый угол α .

Чтобы построить угол между двумя заданными плоскостями P и Q (черт. 300), достаточно из произвольной точки A , взятой внутри двугранного угла, провести перпендикуляры к каждой из данных плоскостей. Угол между этими перпендикулярами дополняет линейный угол двугранного угла до 180° .



Черт. 299.



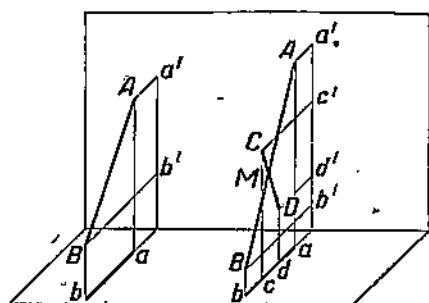
Черт. 300.

§ 68. Проектирование на три взаимно перпендикулярные плоскости.

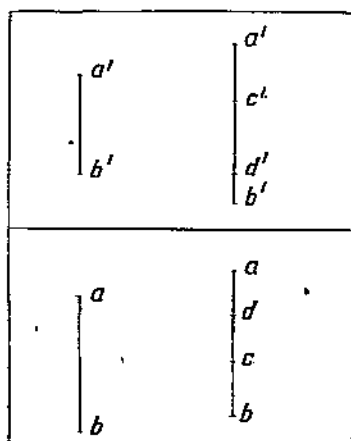
Как известно, положение фигуры в пространстве вполне определяется проекциями этой фигуры на две взаимно перпендикулярные плоскости. Тем не менее во многих случаях для полного ориентирования бывает необходимо построить еще одну дополнительную проекцию на третью плоскость. Так, например, по двум проекциям отрезка AB , лежащего в плоскости, перпендикулярной

¹⁾ В частном случае, когда прямая перпендикулярна к плоскости, угол — прямой.

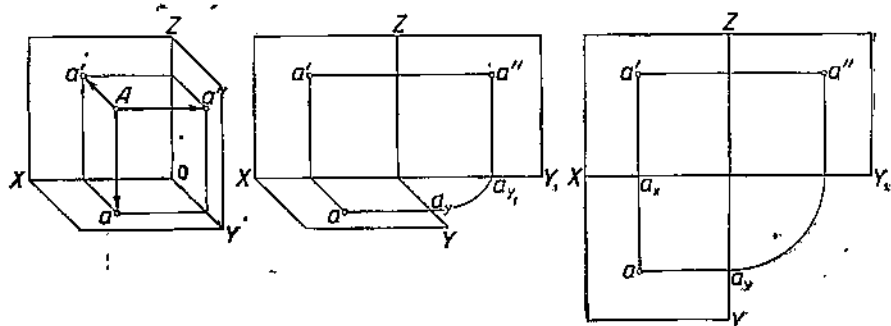
к оси проекций (черт. 301), непосредственно нельзя определить следы прямой, проходящей через точки A и B . Точно так же по заданным проекциям двух отрезков CD и AB , лежащих в этой плоскости (черт. 301), нельзя непосредственно определить проекции точки M пересечения прямых CD и AB .



Черт. 301.

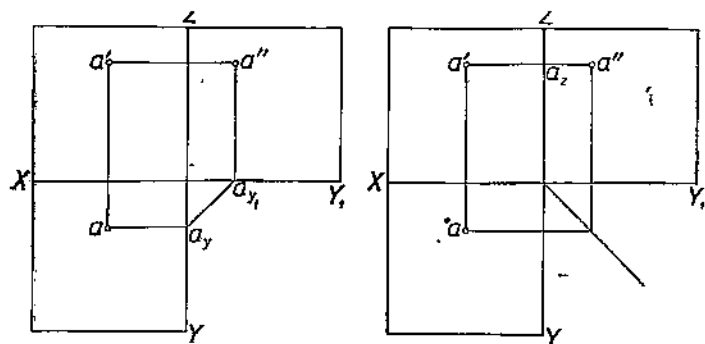


Чтобы получить возможность непосредственно решать на эюре ряд вопросов об элементах фигуры, заданной проекциями, строят проекцию этой фигуры на третью плоскость, перпендикулярную оси проекций (черт. 302). Эта плоскость называется профильной, пересекает вертикальную плоскость проекций по прямой OZ , перпендикулярной к OX , и горизонтальную плоскость проекций по оси OY , перпендикулярной к OX и OZ .



Черт. 302.

Для получения эюра развернем плоскости и совместим горизонтальную и профильную плоскости с вертикальной, как показано на чертеже 302. При этом проекция a'' на профильной плоскости будет находиться на одинаковом с вертикальной проекцией a' расстоянии от оси X и Y , и на расстоянии от Z , равном расстоянию горизонтальной проекции a от оси X . Построение профильной проекции a'' по заданным двум проекциям a и a' ясно из чертежа. Вместо переноса точки при помощи дуги окружности

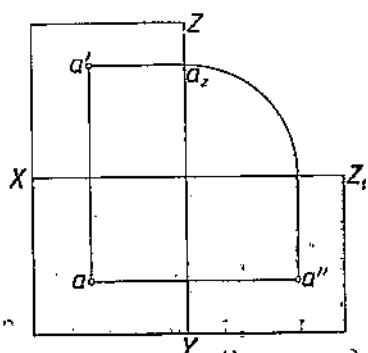


Черт. 303.

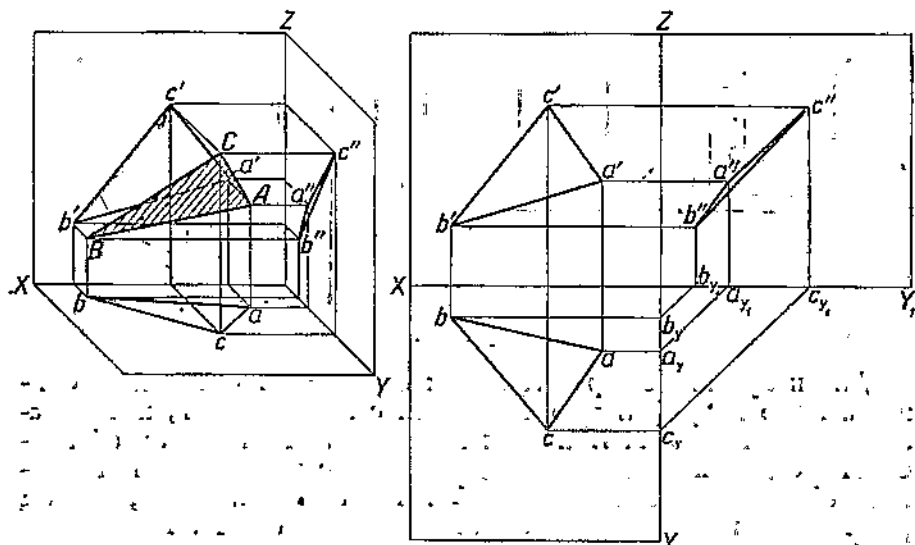
можно для этого переноса воспользоваться прямой под углом в 45° к оси X или биссектрисой угла между осями Y и Y_1 (черт. 303). В некоторых случаях профильную плоскость совмещают сначала с горизонтальной плоскостью и затем, обе эти плоскости — с вертикальной, и тогда получится расположение профильной проекции a'' точки A , показанное на чертеже 304.

Задача 1. Построить проекцию треугольника ABC на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Построение показано на чертеже 305 в аксонометрическом изображении и на эюре.



Черт. 304.



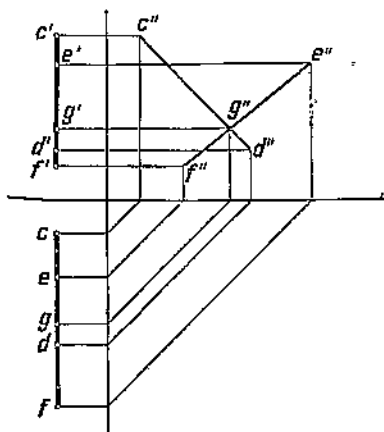
Черт. 305.

Задача 2. Построить проекции точки G пересечения прямых CD и EF , лежащих в профильной плоскости (черт. 306).

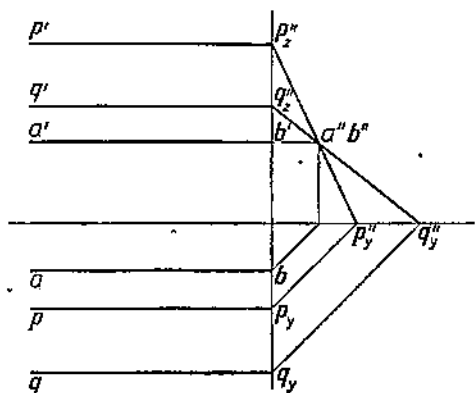
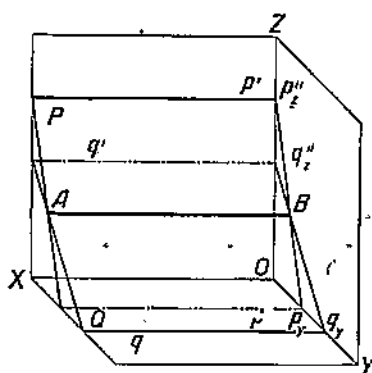
Проекции $cd, c'd'$ и $ef, e'f'$ перпендикулярны к оси X и частично перекрывают одна другую. Построив профильные проекции c'', d'', e'', f'' , получим на профильной проекции точку g'' пересечения отрезков $c'd''$ и $e''f''$, которую перенесем в точки g' и g на вертикальной и горизонтальной проекциях.

Задача 3. Построить прямую пересечения плоскостей P и Q , параллельных оси пересечения горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций (черт. 307).

Вертикальный след p' пересекает ось OZ в точке p''_z , а горизонтальный след p пересекает ось OY в точке p_y . Перенесем точку p_y на ось OY_1 , построим след p'' плоскости P на профильной плоскости, так как этот след проходит через точки p''_z и p''_y . Точно так же построим след q'' плоскости Q , проходящий через точки q''_z и q''_y . Точка пересечения следов p'' и q'' определяет профильную проекцию $a''b''$ прямой AB пересечения плоскостей P и Q . Эта прямая параллельна оси OX .



Черт. 306.



Черт. 307.

ГЛАВА IV.

МНОГОГРАННИКИ.

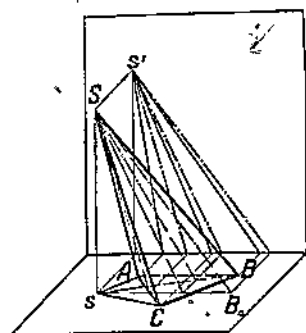
§ 69. Изображение многогранников и их сечений плоскостями.

В проекциях многогранники изображаются проекциями своих ребер. Поверхности многогранников предполагают непрозрачными. Поэтому ребра, расположенные на части поверхности, обращенной

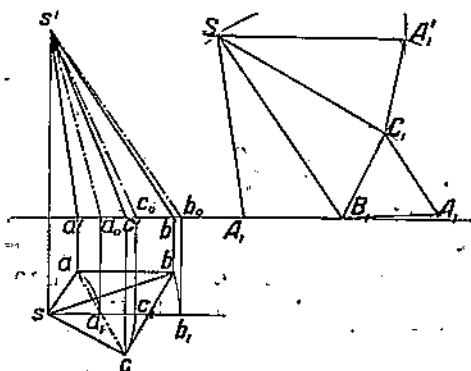
к наблюдателю и видимые им, изображаются сплошными линиями, невидимые ребра изображаются штриховыми линиями.

Проекции ребер, образующие внешний контур изображения многогранника, составляют так называемый видимый контур изображения.

При изображении фигур мы будем предполагать, что фигура расположена в первом угле, поэтому фасадная проекция располагается над осью проекций, горизонтальная проекция — под осью.



Черт. 308.



Черт. 309.

На чертежах 308 и 309 изображена треугольная пирамида $SABC$, поставленная на горизонтальную плоскость проекций. Основание пирамиды — равносторонний треугольник ABC — совпадает с горизонтальной проекцией abc , вертикальная проекция основания совпадает с осью проекций и изображается отрезком $a'b'c'$. Вершина S изображается проекциями s и s' . Соединив проекции вершины пирамиды с одноименными проекциями вершин основания, получим проекции боковых ребер: sa и $s'a'$, sb и $s'b'$, sc и $s'c'$. Из чертежа видно, что на горизонтальной проекции видны грани sab и sbc , они закрывают грань sac , а потому отрезок ac изображается штриховой линией. На вертикальной проекции видны все три боковых ребра.

Задача 1. Построить развертку поверхности треугольной пирамиды, изображенной на чертежах 308 и 309.

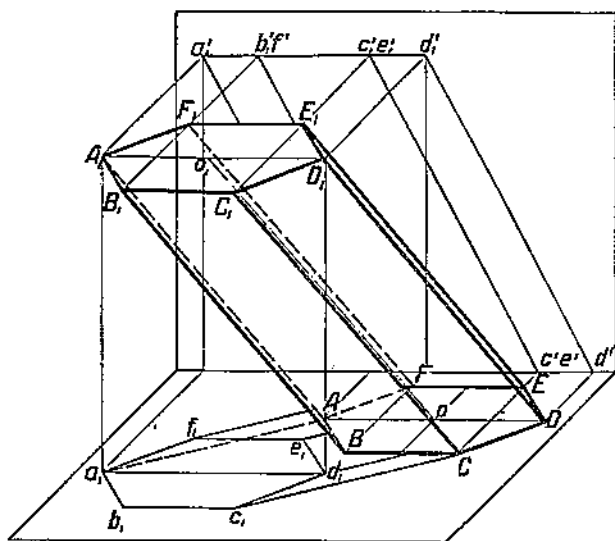
На эмпоре дан в натуральную величину только треугольник основания пирамиды. Боковые ребра проектируются с сокращением. Истинная величина ребер SA , SB и SC получается наиболее просто вращением их вокруг вертикальной проектирующей вершины S приведением их в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций (§ 58, черт. 252). Затем строим треугольники SA_1B_1 , SB_1C_1 и SC_1A_1 по трем сторонам и треугольник основания $A_1B_1C_1$.

Задача 2. Наклонная шестиугольная призма, основания которой составляют правильный шестиугольник, поставлена на горизонтальную плос-

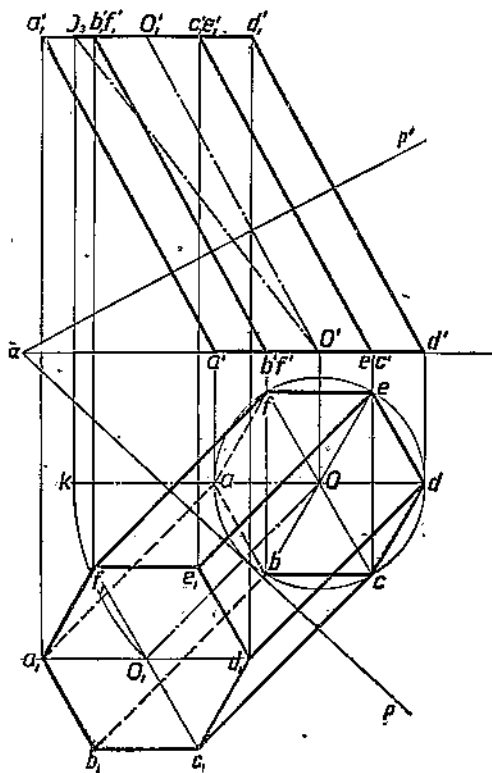
кость. Построить раз-
вертку поверхности
этой призмы (черт.
310—311).

Показанная на
чертеже 310 призма
 $ABCDEF, A_1B_1C_1D_1E_1F_1$
изображена в аксоно-
метрической проек-
ции, а на чертеже 311
в ортогональных про-
екциях — горизон-
тальной и фасадной.
Чтобы построить раз-
вертку этой призмы,
необходимо: 1) опре-
делить истинную ве-
личину боковых ре-
бер, 2) построить
перпендикулярное
сечение боковой поверх-
ности и определить истинную ве-
личину сторон шестиуголь-
ного сечения. Далее по-
строить следы плоскости
перпендикулярного сечения;
они перпендикулярны к од-
ноименным проекциям боко-
вых ребер. После этого на-
до найти точки пересечения
боковых ребер с плоскостью
сечения и, наконец, истин-
ную величину сторон много-
угольника сечения и одного
бокового ребра.

Для упрощения приве-
дем призму в такое положе-
ние, когда боковые ребра ее
параллельны фасадной пло-
скости и, следовательно,
проектируются на эту пло-
скость в натуральную ве-
личину. Новое положение
призмы показано на черте-
же 312 в аксонометрическом
изображении и на черте-
же 313 в ортогональных про-
екциях. В этом положении
плоскость перпендикуляр-
ного сечения перпендику-



Черт. 310.

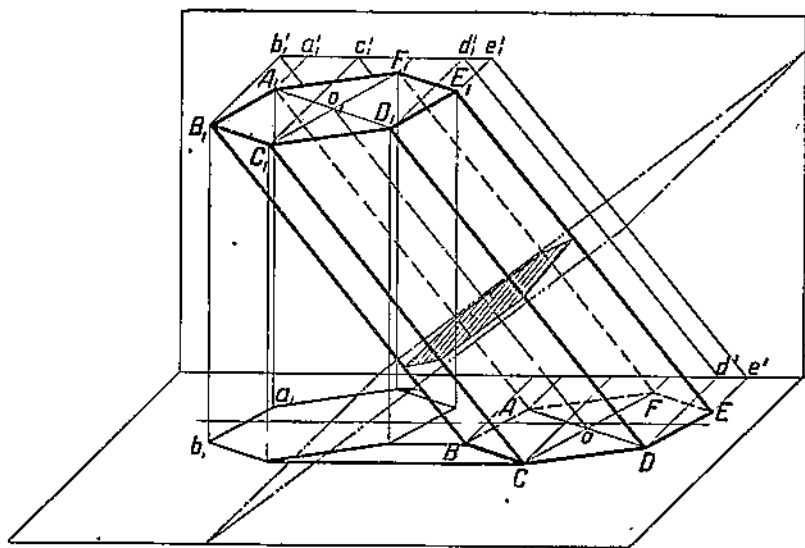


Черт. 311.

лярна к фасадной плоскости, точки пересечения боковых ребер с этой плоскостью получаются непосредственно на эюре (вертикальные проекции этих точек лежат на вертикальном следе секущей плоскости).

Ход построения следующий: ось oo_1 призмы (черт. 311) поворачиваем в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций. Вертикальная проекция $o'o_0$ повернутого положения оси изображает натуральную величину оси и всех боковых ребер и определяет также угол $o_0o'x$ наклона боковых ребер призмы к плоскости основания.

Повернув горизонтальную проекцию основания призмы вокруг центра o на угол ko_0 , построим новое положение горизонтальной проекции $a_2b_2c_2d_2e_2f_2a_3b_3c_3d_3e_3f_3$ призмы (черт. 313), а по ней и вертикальную проекцию.



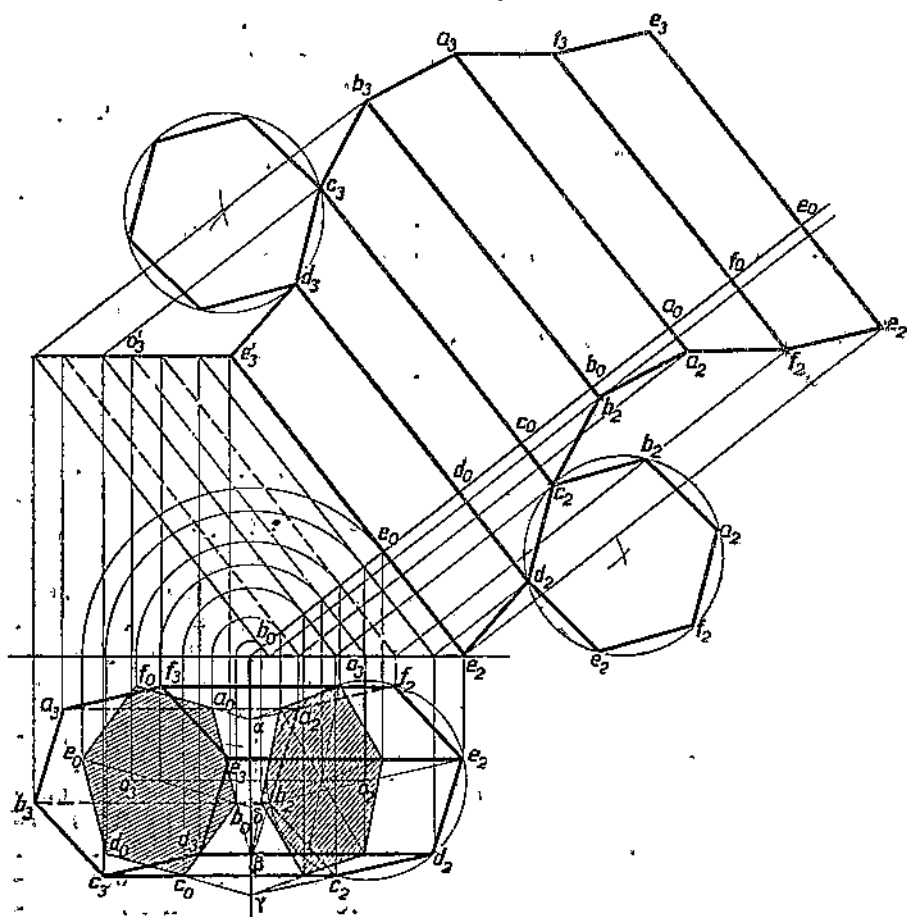
Черт. 312.

Плоскость перпендикулярного сечения изображается на эюре вертикальным следом, перпендикулярным вертикальной проекции боковых ребер призмы, и горизонтальным следом, перпендикулярным к оси проекций (черт. 313).

В пересечении вертикального следа с вертикальными проекциями боковых ребер получим вертикальные проекции вершин многоугольника сечения, а на горизонтальной проекции ребер — соответствующие горизонтальные проекции вершин, соединив которые получим изображение шестиугольника перпендикулярного сечения.

Остается определить истинную величину сторон этого шестиугольника, что проще всего выполнить путем совмещения этого шестиугольника с горизонтальной плоскостью проекций (шести-

угольник $a_0b_0c_0d_0e_0f_0$ на чертеже 313). Предполагая, что боковая поверхность призмы разрезана вдоль ребра $e'_2e'_3$, построим ее развертку, откладывая вдоль вертикального следа от точки e_0 последовательно все стороны перпендикулярного сечения и проводя через полученные точки боковые ребра, на которых отложим по обе стороны от следа соответствующие отрезки, взятые с вертикальных проекций этих ребер.



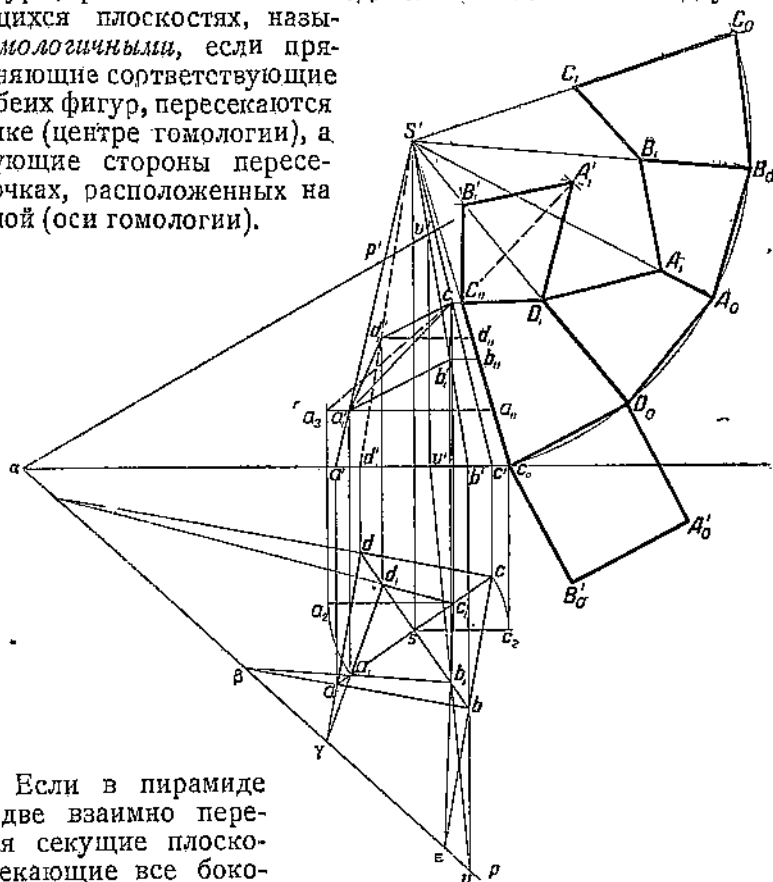
Черт. 313.

При правильном построении ломаные линии, представляющие развертку сторон оснований призмы, состоят из равных звеньев (так как стороны основания равны между собой). Построив при одной грани шестиугольники оснований, получим развертку полной поверхности призмы.

При построении горизонтальной проекции шестиугольника основания, перпендикулярного сечения и совмещенного положения этого сечения следует обратить внимание на одно свойство

способом точки пересечения только одного бокового ребра, например SB , с секущей плоскостью. Найдя горизонтальную проекцию f точки пересечения SB с плоскостью, проведем через точку β пересечения стороны bc и следа p прямую, проходящую через f , и получим сторону fg сечения грани SCB с плоскостью. Через точку γ и f проведем сторону fe , через α и e — сторону eh и, наконец, через h и g — сторону gh , которая должна проходить через точку δ следа p .

Две фигуры, расположенные на одной плоскости или на двух пересекающихся плоскостях, называются *гомологичными*, если прямые, соединяющие соответствующие вершины обеих фигур, пересекаются в одной точке (центре гомологии), а соответствующие стороны пересекаются в точках, расположенных на одной прямой (оси гомологии).



Черт. 315.

Пример. Если в пирамиде проведем две взаимно пересекающиеся секущие плоскости, пересекающие все боковые ребра пирамиды, то фигуры сечения гомологичны.

Точно так же гомологичны между собой горизонтальные проекции обоих сечений, а также и вертикальные проекции. Гомологичность не нарушается при совмещении фигуры с одной из плоскостей проекций.

Задача 4. Правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ рассечена наклонной плоскостью P . Построить развертку полной поверхности усеченной пирамиды (черт. 315).

На чертеже пирамида задана проекциями $sabcd$ и $s'a'b'c'd'$, а плоскость — следами p и p' .

Построим фигуру сечения $a_1b_1c_1d_1$, — $a'_1b'_1c'_1d'_1$ способом, указанным в задаче 3.

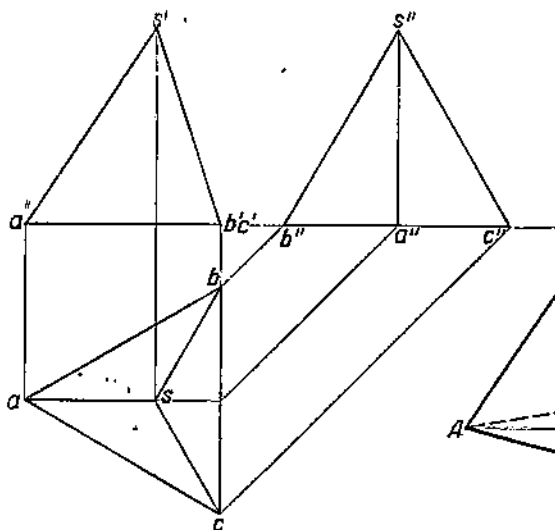
Так как пирамида правильная, то все боковые ребра равны, и для построения развертки полной пирамиды достаточно определить истинную величину одного ребра, например SC . По сторонам основания и боковым ребрам построим развертку боковой поверхности пирамиды. Остается определить совмещенные положения вершин C_1, D_1, A_1 и B_1 сечения путем перенесения точек c'_1, d'_1, a'_1 , и b'_1 на s'_c и затем на соответствующие ребра развертки. Получим фигуру $C_1D_1A_1B_1C_1C_0B_0A_0D_0C_0$.

Для построения четырехугольника сечения надо, кроме полученных на развертке четырех сторон C_1D_1, D_1A_1, A_1B_1 и B_1C_1 , найти истинную величину диагонали C_1A_1 путем вращения в положение, параллельное фасадной плоскости. По полученному отрезку $c'_1a'_1$ и сторонам C_1D_1 и D_1A_1 строим $\triangle C_1D_1A_1$, а затем на диагонали C_1A_1 — $\triangle C'_1A'_1B'_1$.

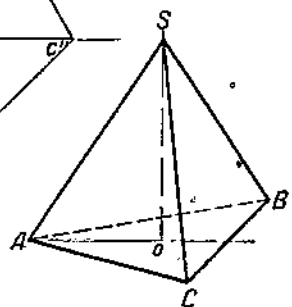
§ 70. Изображение правильных многогранников.

Из курса элементарной геометрии известно, что существуют пять правильных многогранников: 1) правильный тетраэдр — 4-гранник, 2) правильный гексаэдр, или куб, — 6-гранник, 3) правильный октаэдр — 8-гранник, 4) правильный додекаэдр — 12-гранник, 5) правильный икосаэдр — 20-гранник.

Покажем, как изображать эти многогранники в ортогональных проекциях на две или три плоскости проекций и в аксонометрии.



Черт. 316.



Черт. 317.

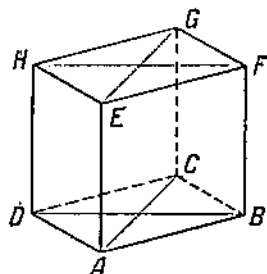
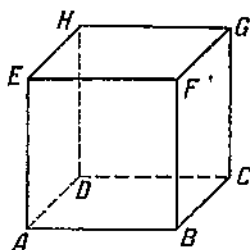
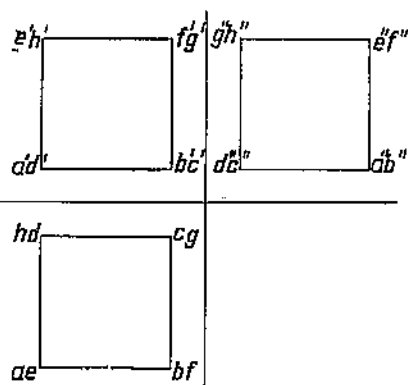
1. *Правильный тетраэдр* (черт. 316). Правильный тетраэдр имеет поверхность, ограниченную четырьмя равносторонними треугольниками. Если принять один из треугольников за основание,

то вершина расположена на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном в центре треугольника. Если поставить на горизонтальной плоскости треугольник так, что одна сторона перпендикулярна к оси проекций, то горизонтальная проекция тетраэдра изображается треугольником abc и тремя боковыми гранями sa , sb , sc , проведенными из центра s треугольника.

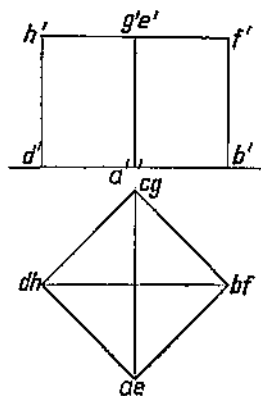
На вертикальной проекции получаем равнобедренный треугольник ($a'b' = b's'$).

На профильной проекции тетраэдр изображается равнобедренным треугольником ($b''s'' = c''s''$).

На чертеже 317 показан тетраэдр в аксонометрической проекции.



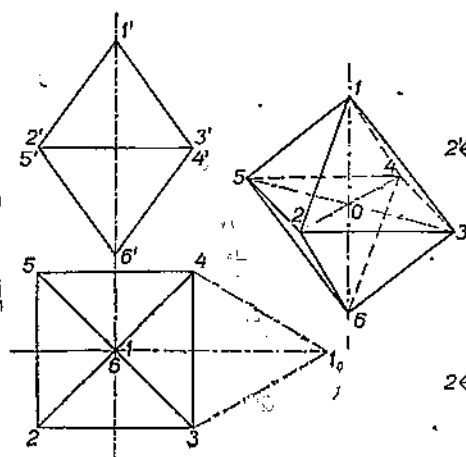
Черт. 318.



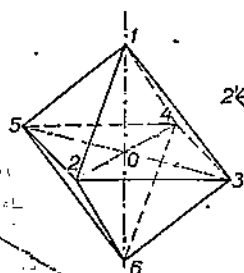
2. **Правильный гексаэдр (куб).** На чертеже 318 представлен (в двух положениях) куб в ортогональной проекции и аксонометрии.

3. **Правильный октаэдр.** Поверхность правильного октаэдра ограничена восемью равносторонними треугольниками. Горизонтальная проекция изображается квадратом (черт. 319) с двумя диагоналями. На чертеже 320 дано аксонометрическое изображение октаэдра.

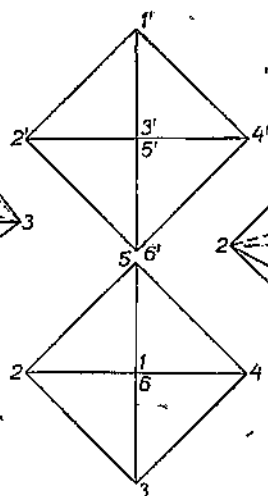
Если расположим горизонтальную проекцию так, что диагональ параллельна оси проекций, то вертикальная проекция изобразится таким же квадратом (черт. 321). Аксонометрическое изображение октаэдра во втором положении показано на чертеже 321а.



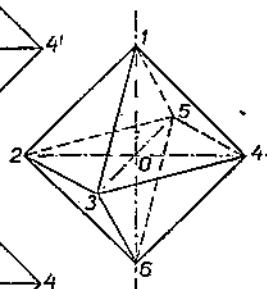
Черт. 319.



Черт. 320.

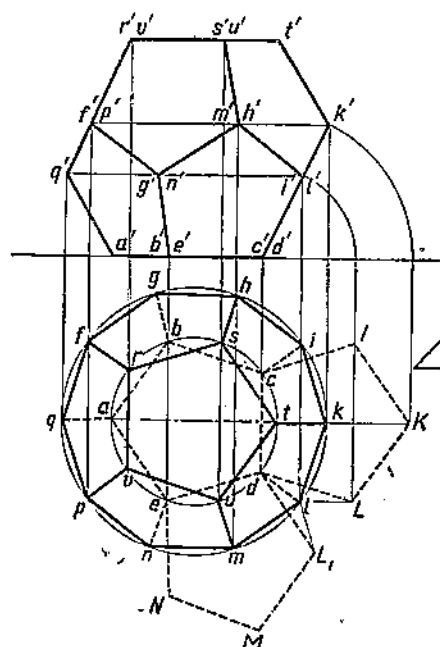


Черт. 321.

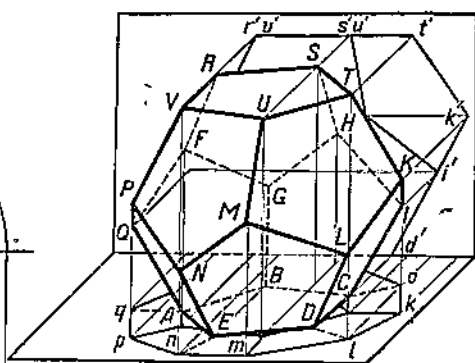


Черт. 321a.

4. **Правильный додекаэдр.** Поверхность правильного додекаэдра состоит из 12 правильных пятиугольников. Если поставим додекаэдр на горизонтальную плоскость проекций так, чтобы одна сторона cd (черт. 322) пятиугольника основания была перпендикулярна к оси проекций, то горизонтальная проекция основания изобразится пятиугольником $abcde$.



Черт. 322.

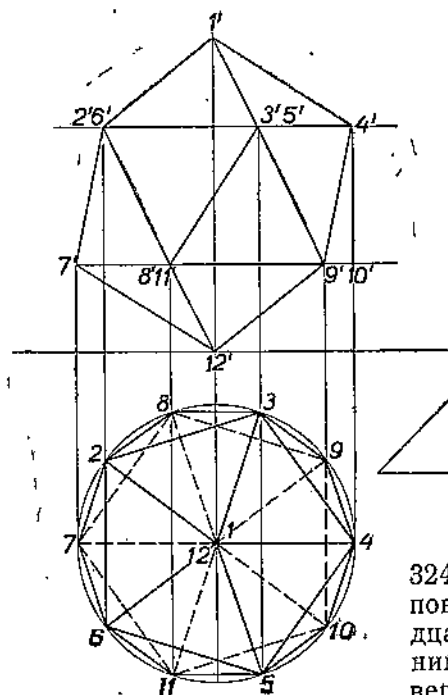


Черт. 323.

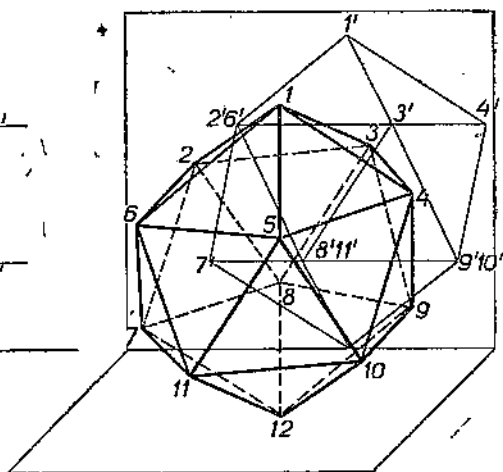
Пристроим к сторонам cd и ed правильные пятиугольники $cdLKI$ и $edLMN$, которые представляют совмещенные положения двух граней, сходящихся в вершине d трехгранного угла. При вращении пятиугольника $cdLKI$ вокруг cd

вершина L описывает дугу в плоскости, перпендикулярной к оси вращения cd , при этом горизонтальная проекция перемещается по прямой lL , перпендикулярной cd . Точно так же при вращении пятиугольника edL_1MN вокруг ed вершина L_1 описывает дугу в плоскости, перпендикулярной ed , и на горизонтальной проекции точка L_1 перемещается по прямой L_1l , перпендикулярной de . Точка l является горизонтальной проекцией вершины L . Вертикальная проекция l' лежит в точке пересечения дуги перемещения точки L с перпендикуляром к оси проекций. Прямая $c'l'$ изображает вертикальную проекцию грани $cdIKL$ додекаэдра. По точкам k и l строим на горизонтальной проекции окружность, concentрическую с окружностью, описанной вокруг пятиугольника $abcde$, и находим на этой окружности горизонтальные проекции десяти вершин додекаэдра, а на окружности, описанной вокруг $abcde$, определяем вершины горизонтальной проекции $rstuv$ пятиугольника верхнего основания. Построение вертикальной проекции ясно из чертежа, если принять во внимание, что противолежащие грани додекаэдра взаимно параллельны, а потому на вертикальной проекции $c'k' \parallel q'l'$.

По ортогональным проекциям построено аксонометрическое изображение додекаэдра на чертеже 323.



Черт. 324.



Черт. 325.

5. *Правильный икосаэдр* (черт. 324). Правильный икосаэдр имеет поверхность, ограниченную двадцатью равносторонними треугольниками, и 12 вершин; в каждой вершине сходятся по 5 треугольников. Каждые пять граней многоугольного угла образуют боковую

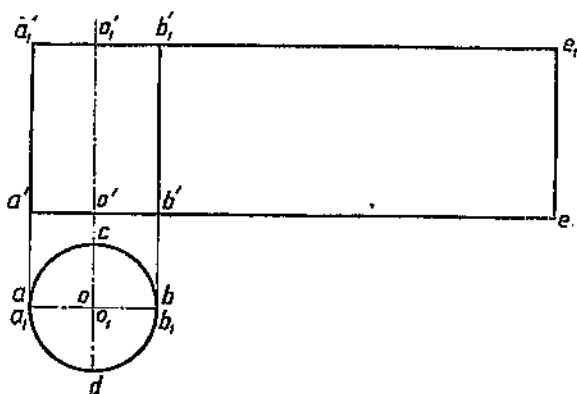
поверхность правильной пятигранной пирамиды, сторонами основания которой служат стороны треугольника. Отсюда вытекает способ построения проекций икосаэдра.

На горизонтальной проекции проводим окружность, в которую вписываем два равных правильных пятиугольника 2-3-4-5-6 и 7-8-9-10-11. В первом пятиугольнике сторона 2-6 перпендикулярна к оси проекций, во втором — сторона 9-10. Центр 12 изображает горизонтальную проекцию нижней вершины, в которой сходятся пять треугольников 7-12-11, 7-12-8, 8-12-9, 9-12-10 и 10-12-11, изображающих горизонтальные проекции равносторонних треугольников, истинная величина сторон которых равна стороне вписанного пятиугольника.

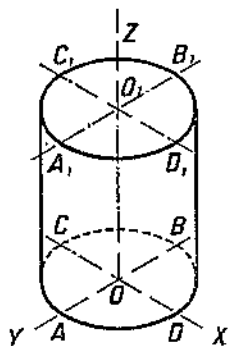
Чтобы найти вертикальную проекцию вершин 7, 8, 9, 10 и 11 икосаэдра, заметим, что грань 9-10-12 на вертикальной проекции изображается отрезком, равным высоте равностороннего треугольника грани. Поэтому точку 9' (10') найдем в пересечении дуги, проведенной из центра 12' радиусом, равным апофеме пятиугольника, с продолжением прямой 9-10 $\perp$ $\pi\pi$. Проведя через 9' прямую, параллельную оси проекций, отметим на ней вертикальные проекции 7', 8' (11'), соответствующие горизонтальным проекциям 7, 8, 11.

Вертикальную проекцию пятиугольника 2-3-4-5-6, образуемого гранями, сходящимися в верхней вершине I икосаэдра, построим, заметив, что отрезок 4'-9' равен высоте треугольника, т. е. $9'-4' = 9'-12'$, а точка 4' лежит на одном перпендикуляре к оси проекций с точкой 4. Дальнейшее построение ясно из чертежа.

На чертеже 325 построено аксонометрическое изображение икосаэдра по данным его ортогональным проекциям.



Черт. 326.



Черт. 327.

ГЛАВА V. ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР.

§ 71. Изображение цилиндра и его развертки.

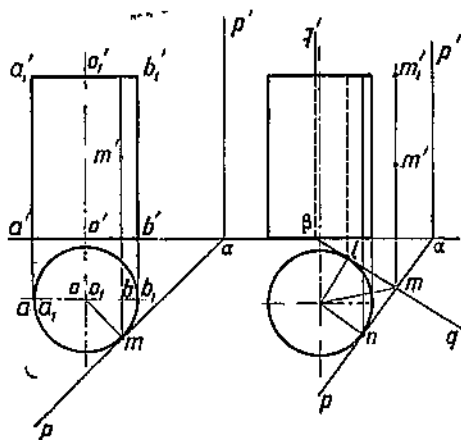
Прямой цилиндр с круговым основанием, поставленный на горизонтальную плоскость проекций, изображается в горизонтальной проекции кругом, в вертикальной проекции — прямоугольником (черт. 326).

Развертка боковой поверхности цилиндра представляет прямоугольник с основанием $b'e$, равным длине окружности, и высотой, равной высоте цилиндра. Выпрямление окружности производится способом, указанным в § 27 (черт. 130 и 131).

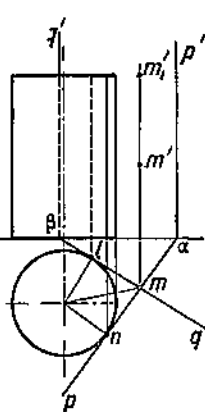
На чертеже 327 дано изображение цилиндра в изометрической проекции, причем размеры вдоль осей X , Y и Z взяты без сокращения, вследствие чего изображение получилось в масштабе 1:0,82 против изображения в ортогональных проекциях.

Задача 1. Через точку M , данную на боковой поверхности цилиндра, провести плоскость, касательную к цилиндрической поверхности (черт. 328).

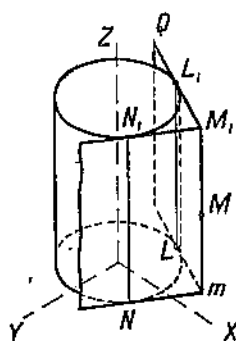
Плоскость, касательная к цилиндрической поверхности в данной точке, имеет с этой поверхностью общую прямую — образующую, проходящую через данную точку. Отсюда вытекает построение. Через вертикальную проекцию m' проведем образующую. Так как образующая перпендикулярна к горизонтальной плоскости, то проходящая через эту образующую плоскость — вертикальная, и горизонтальный след ее касается окружности основания в точке m , а вертикальный след перпендикулярен к оси проекций.



Черт. 328.



Черт. 329.



Черт. 330.

Задача 2. Через данную точку M , лежащую вне цилиндра, провести к этому цилиндру касательную плоскость (черт. 329 и 330).

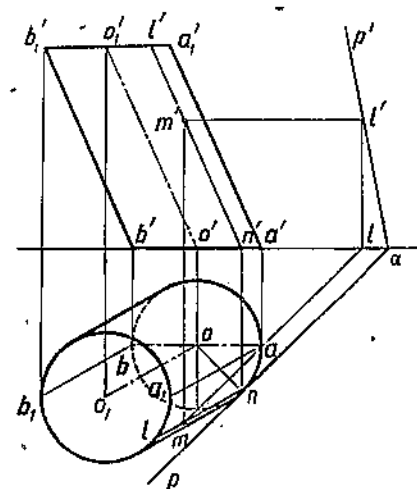
Из горизонтальной проекции m данной точки проведем касательные ml и mn к проекции окружности основания. Эти касательные определяют горизонтальные следы двух плоскостей, касающихся цилиндрической поверхности по образующим LL_1 и NN_1 . Вертикальные следы этих плоскостей перпендикулярны к оси проекций.

Обе касательные плоскости пересекаются по прямой, параллельной образующим цилиндра.

На чертеже 330 построение дано в изометрической проекции.

Задача 3. На боковой поверхности наклонного цилиндра с круговым основанием, поставленного на горизонтальную плоскость проекций, дана точка $M(m, m')$. Провести через эту точку плоскость, касательную к цилиндрической поверхности.

Плоскость касательная к цилиндру, касается боковой поверхности по образующей, проходящей через данную точку. Кроме того, горизонтальный след касательной плоскости касается окружности основания.



Черт. 331.

Пусть задана вертикальная проекция m' точки, лежащей на боковой поверхности цилиндра (черт. 331). Проведем через m' вертикальную проекцию образующей ($m'l' \parallel o'o_1'$) и через горизонтальную проекцию n точки пересечения образующей с окружностью основания проведем горизонтальную проекцию образующей ($nl \parallel oo_1$), на которой отметим горизонтальную проекцию m данной точки M . Горизонтальный след n образующей ($nl, n'l'$) принадлежит горизонтальному следу искомой касательной плоскости.

Проведя в точке n касательную к окружности основания, получим горизонтальный след pa касательной плоскости.

Для построения вертикального следа проведем через точку $M(m, m')$ прямую, параллельную горизонтальному следу касательной плоскости. Вертикальная проекция этой прямой параллельна оси проекций, горизонтальная — параллельна следу pa . Вертикальный след l' этой прямой определяет положение вертикального следа $p'a$ касательной плоскости.

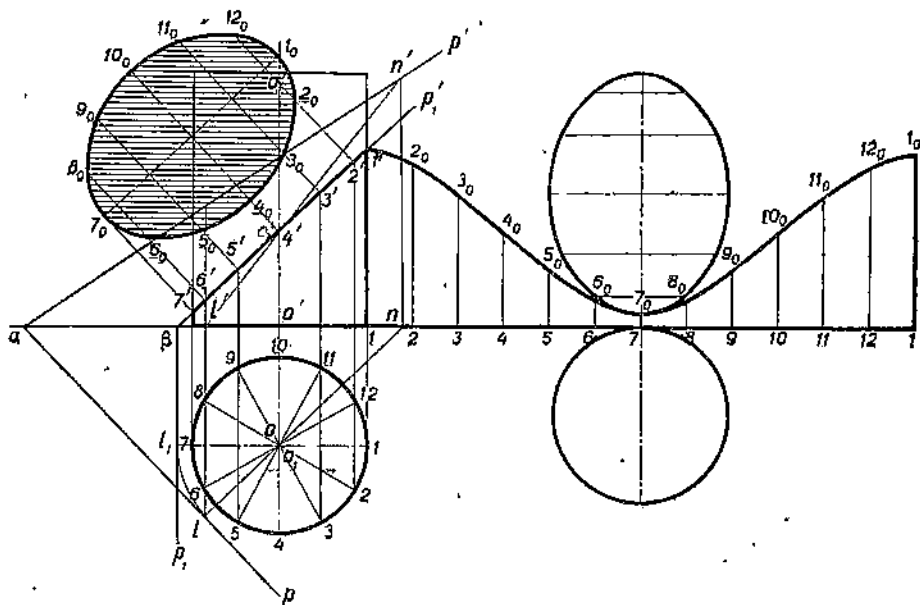
Задача 4. Прямой круговой цилиндр рассечен наклонной плоскостью, заданной следами p, p' . Построить кривую сечения и развертку усеченного цилиндра (черт. 332).

Фигура сечения боковой поверхности кругового цилиндра представляет собой эллипс, для построения которого мы можем найти произвольное число точек, проведя на боковой поверхности цилиндра образующие и определив точки пересечения этих образующих с данной секущей плоскостью.

Чтобы упростить построение, повернем цилиндр вокруг его оси OO_1 так, чтобы секущая плоскость заняла положение, перпендикулярное к вертикальной плоскости проекций. Проведем через ось цилиндра плоскость, перпендикулярную к горизонтальному следу pa , и построим прямую пересечения этой плоскости с плоскостью сечения. Горизонтальная проекция этой прямой совпадает со следом ln вертикальной плоскости, вертикальная проекция $l'n'$ пересекает вертикальную проекцию оси цилиндра

в точке o_2' . Через эту точку проходит вертикальный след секущей плоскости, когда она повернута в положение, перпендикулярное к вертикальной плоскости проекций. При этом горизонтальный след pa перейдет в положение $p_1\beta$, перпендикулярное к оси проекций.

Фигура сечения проектируется на вертикальную плоскость отрезком $7'-1'$, совпадающим со следом плоскости сечения, горизонтальная проекция совпадает с кругом основания цилиндра. Для построения истинной величины фигуры сечения и развертки разделим окружность основания на произвольное число (например 12) равных частей, точки деления $1, 2, 3 \dots 12$ перенесем на вертикальную проекцию и построим образующие цилиндра, которые определяют соответствующие точки $1', 2' \dots 12'$ вертикальной проекции фигуры сечения.



Черт. 332.

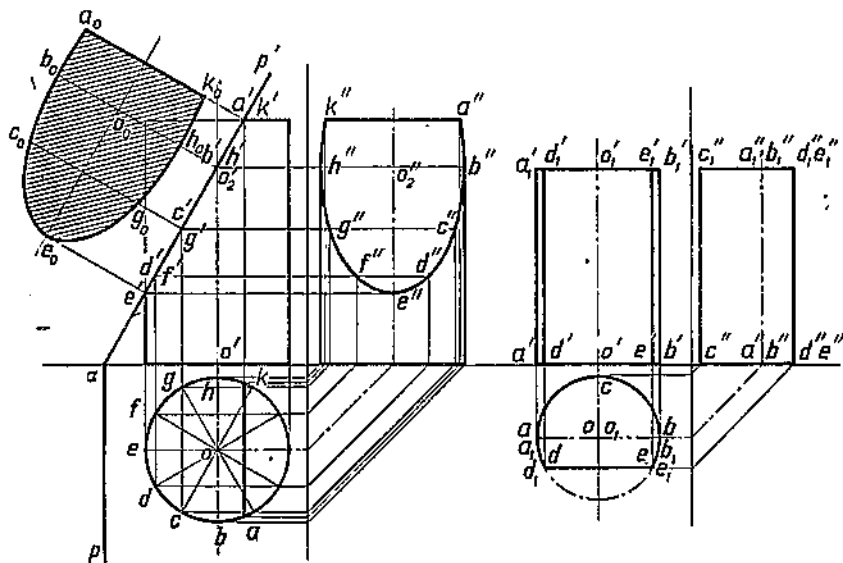
Фигура сечения представляет собой эллипс с большой осью, равной $7'-1'$, и малой осью, равной диаметру окружности основания цилиндра. Хорды, параллельные малой оси, равны соответствующим хордам окружности основания, параллельным диаметру $4-10$; так, $11_0-3_0=11-3$, $12_0-2_0=12-2$.

Для построения развертки боковой поверхности усеченного цилиндра выпрямляем окружность основания и через точки $1, 2, 3 \dots$ проводим образующие, на которых откладываем отрезки, равные отрезкам соответствующих образующих на вертикальной проекции цилиндра. Через верхние концы отрезков [образующих] проводим непрерывную кривую, представляющую развернутый контур верхнего сечения. Пристроив эллипс верхнего сечения и круг основания, получим развертку полной поверхности.

Если плоскость сечения пересекает только часть образующих, то фигура сечения представляет часть эллипса, ограниченную хордой пересечения плоскости с основанием цилиндра (черт. 333).

Секущая плоскость p, p' перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций и пересекает верхнее основание по хорде AK , перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций.

Горизонтальная проекция сечения представляет часть круга $abcdefghk$, отсекаемую хордой ak , вертикальная проекция изображается отрезком $e'a'$, совпадающим со следом p' секущей плоскости; профильная проекция изображается частью эллипса $k''h''g''f''e''d''c''b''a''$, ограниченной хордой $k''a''$, параллельной малой оси $h''b''$ эллипса, равной диаметру круга основания. Большая полуось этого эллипса — $e''o_2''$.



Черт. 333.

Черт. 334.

Истинная величина сечения построена путем вращения сечения в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций, и изображается эллипсом с большей полуосью $o_0e_0 = o_2'e_1'$ и малой полуосью $o_0b_0 = ob$. Эллипс срезан хордой $a_0k_0 = ak = a''k''$, параллельной малой оси.

На чертеже 334 показаны проекции цилиндра, рассеченного плоскостью, параллельной оси цилиндра. Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра по двум образующим ($dd_1, d'd'_1$ и $ee_1, e'e'_1$) и оба основания цилиндра по хордам ($de, d'e'$ и $d_1e_1, d'_1e'_1$), параллельным оси проекций. Для получения более наглядного представления о форме полученного тела дана профильная проекция.

§ 72. Изображение конуса и его развертки.

Прямой круговой конус, поставленный на горизонтальную плоскость проекций, изображается в вертикальной проекции равнобедренным треугольником, основание которого равно диаметру круга основания, а высота равна высоте конуса. Боковые стороны треугольника изображают в натуральную величину образующую. Горизонтальная проекция конуса — круг.

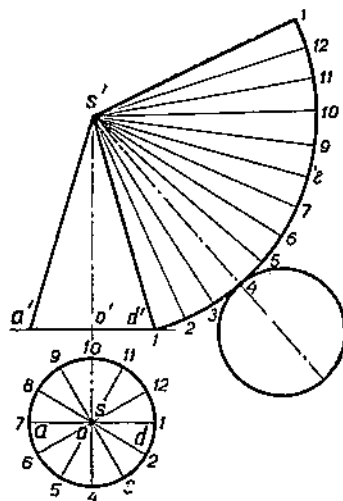
Развертка боковой поверхности конуса образует сектор, радиус которого равен образующей, а длина дуги равна длине окружности основания.

Задача 1. Построить развертку поверхности конуса, заданного ортогональными проекциями (черт. 335).

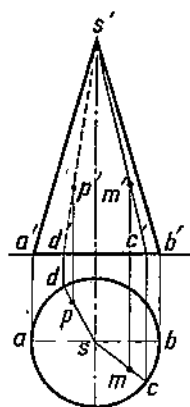
Из вершины s' проведем радиусом $s'd'$ дугу, на которой отложим дугу $d'1 = 2\pi r$, где r — радиус круга основания конуса. Построение проведено путем деления окружности основания на такое число равных частей (в данном случае 12), чтобы длина каждой части весьма мало отличалась от длины хорды, и затем на дуге $d'1$ отложено 12 частей, равных каждой $\frac{1}{12}$ части окружности.

Полученную точку 1 соединим с s' и к одной из точек дуги пристроим окружность основания.

Построение сектора можно произвести путем вычисления величины α центрального угла $1s'd'$ из равенства $\alpha:360^\circ = 2\pi r:2\pi l$, где l — длина образующей, откуда



Черт. 335.



Черт. 336.

$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$.

Задача 2. По заданной горизонтальной проекции m точки, лежащей на боковой поверхности конуса (черт. 336), построить вертикальную проекцию этой точки.

Через каждую точку боковой поверхности конуса можно провести образующую, проходящую через вершину конуса. Горизонтальная проекция образующей определяется радиусом sc , проходящим через точку m . Построив вертикальную проекцию $s'c'$ этой образующей, отметим на ней точку m' — вертикальную проекцию искомой точки M .

Точно так же, если задана вертикальная проекция p' точки P , то, проведя вертикальную проекцию $s'd'$ образующей, построим горизонтальную проекцию sd , на которой отметим горизонтальную проекцию p заданной точки P .

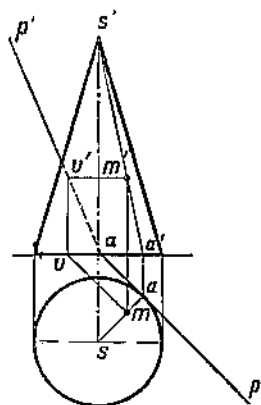
Задача 3. Через точку M боковой поверхности конуса (черт. 337) провести плоскость, касательную к конусу.

Искомая плоскость касается конуса по образующей, проходящей через точку M , и горизонтальный след касается окружности основания в точке пересечения этой окружности с образующей.

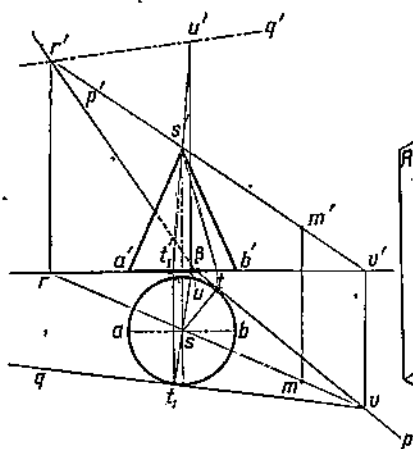
Построив $pa \perp sa$, найдем горизонтальный след касательной плоскости. Для построения вертикального следа проведем через точку M (m, m') прямую, параллельную горизонтальному следу. Вертикальный след v' этой прямой определит положение вертикального следа $p'a$ искомой плоскости.

Задача 4. Через точку M (m, m'), лежащую вне поверхности конуса, провести плоскость, касательную к конусу (черт. 338 и 339).

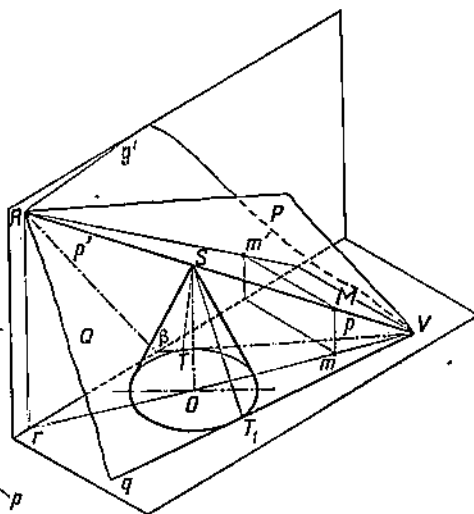
Искомая плоскость должна касаться конуса по образующей, т. е. проходить через вершину S конуса. Проведя прямую SM ($s'm'$, sm), построим горизонтальный след v этой прямой и вертикальный след r' . Из точки v проведем касательные к окружности основания и определим горизонтальные следы p и q (vt и vt_1) двух плоскостей, касательных к конусу. Вертикальный след первой плоскости может быть построен непосредственно, путем соединения вертикального следа r' с точкой



Черт. 337.]



Черт. 338.



Черт. 339.

§ пересечения горизонтального следа с осью проекций. Так как горизонтальный след q второй плоскости не пересекается с осью проекций в пределах чертежа, то проведем образующую st_1 , $s't'_1$ и определим вертикальный след u' этой образующей. Вертикальный след q' второй касательной плоскости проходит через точки r' и u' .

На чертеже 339 показано то же построение в изометрической проекции.

§ 73. Шар и его изображение.

Шаровая поверхность получается вращением полуокружности (образующей) вокруг своего диаметра (оси вращения).

Окружности, описываемые в пространстве каждой точкой образующей, называются параллелями. Параллель, плоскость которой проходит через центр образующей, называется экватором. Концы диаметра, образующего ось вращения, называются полюсами.

Сечения, проходящие через ось вращения, тождественны и называются меридианальными.

Из курса элементарной геометрии известно, что шар обладает следующими свойствами:

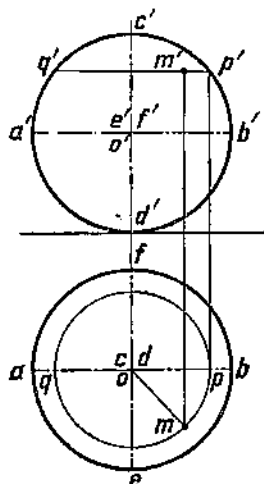
1. Сечение шара плоскостью есть круг.
 2. Сечения шара плоскостями, равно отстоящими от центра, представляют равные круги, и, наоборот, равные круги сечения шара равно отстоят от центра.
 3. Из двух сечений шара то больше, которое ближе к его центру.
 4. Большой круг шара, т. е. круг, плоскость которого проходит через центр шара, делит шар на две симметричные части.
 5. Два больших круга шара пересекаются по диаметру и взаимно делятся пополам.
 6. Через две точки поверхности шара, не лежащие на концах диаметра, можно провести только один большой круг.
 7. Все касательные, проведенные из внешней точки к шаровой поверхности, равны между собой. Точки касания лежат на одной окружности — основании так называемого конуса касания.
- Наглядное изображение шара возможно получить только в ортогональном проектировании, так как при косоугольном проектировании шар изображается эллипсом, что находится в резком противоречии с нашими зрительными впечатлениями о шаре. Поэтому мы наряду с ортогональными проекциями на две плоскости будем изображать шар только в изометрической проекции.

Задача I. Шар радиуса R изобразить в ортогональных проекциях и наметить на поверхности шара точку M (m , m').

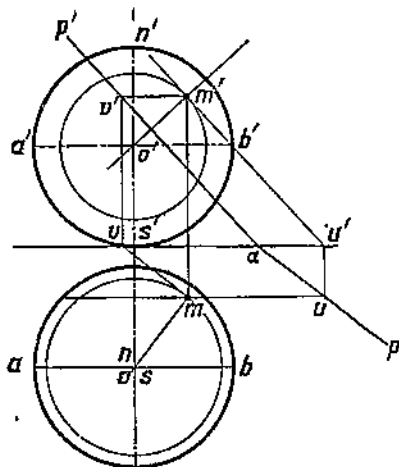
Поставим шар на горизонтальную плоскость проекций и примем вертикальный диаметр CD за ось вращения (черт. 340). Шар изобразится на вертикальной проекции кругом с диаметром $c'd'$, а на горизонтальной проекции — кругом радиуса R , проведенным из центра o (cd). Параллельные круги проектируются на горизонтальную плоскость в натуральную величину концентрическими

кругами из центра O , а на вертикальную — хордами, параллельными оси проекций.

Если задана горизонтальная проекция m точки M , лежащей на поверхности шара, то проведем через эту точку параллель (окружность радиуса om) и на вертикальной проекции $q'p'$ этой параллели найдем вертикальную проекцию m' искомой точки. Следует помнить, что заданная точка m одинаково изображает проекции двух точек поверхности шара (одна — на верхнем полушарии, другая — на нижнем полушарии), и соответственно этому на вертикальной проекции можно получить две равные хорды, параллельные оси проекций (на чертеже изображено сечение верхнего полушария).



Черт. 340.



Черт. 341.

Задача 2. Через точку M поверхности шара провести плоскость, касательную к шаровой поверхности (черт. 341).

Искомая плоскость перпендикулярна к радиусу OM в точке M (задача 5, § 64). Следы плоскости перпендикулярны к проекциям om и $o'm'$ радиуса OM . Построив проекции прямой, проходящей через M и параллельной горизонтальному следу искомой плоскости ($mv \perp om$, $m'v' \parallel xx$), найдем вертикальный след v' этой параллели, через который проведем вертикальный след касательной плоскости $p'a' \perp o'm'$, а затем и горизонтальный след $ap \perp om$.

То же построение можно провести, если определить горизонтальный след u прямой, параллельной вертикальному следу касательной плоскости ($m'u' \perp o'm'$, $mu \parallel xx$).

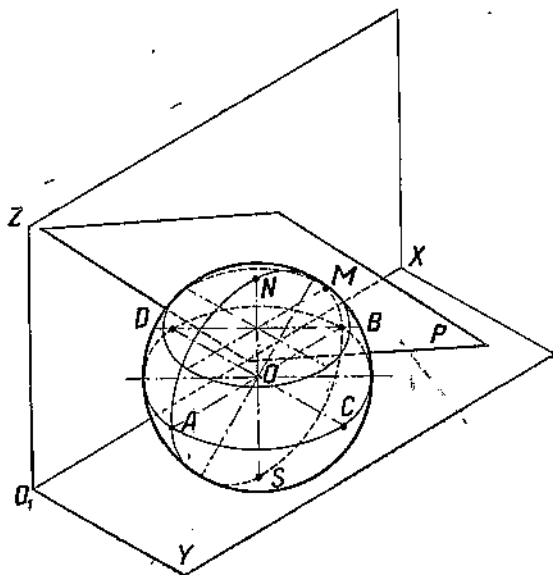
Задача 3. Построить изометрическое изображение шара, по данным задачи 2; построить экваториальное сечение, полюсы, меридианальное сечение и через точку M — касательную плоскость (черт. 342).

Отметив на горизонтальной плоскости положение точки S касания шаровой поверхности с горизонтальной плоскостью проекций, проведем $SO \parallel O_1Z$ и отложим $SO = 0,82R$, получим

положение центра шара. Проведем $AO \parallel O_1X$ и $CO \parallel O_1Y$, отложим $AO = OB = SO$, $OC = OD = SO$ и построим эллипс, изображающий экваториальное сечение. Большая ось этого эллипса равна диаметру шара, и окружность, касательная к этому эллипсу, проведенная из центра O радиусом R , изображает видимый контур шара. Как видно из чертежа, полюсы N и S лежат внутри этого контура.

Меридианальное сечение, проходящее через точки A , B , N и S , изобразится эллипсом, в котором NS и AB являются сопряженными диаметрами. По сопряженным диаметрам построим оси эллипса (см. задачу 54, § 29), причем большая ось равна диаметру шара. Эллипс касается видимого контура шара.

Перенесем с ортогональной проекции (черт. 341) на изометрическую точку M с проходящей через нее параллелью и следы касательной плоскости P и получим изометрическое изображение касательной плоскости P .



Черт. 342.

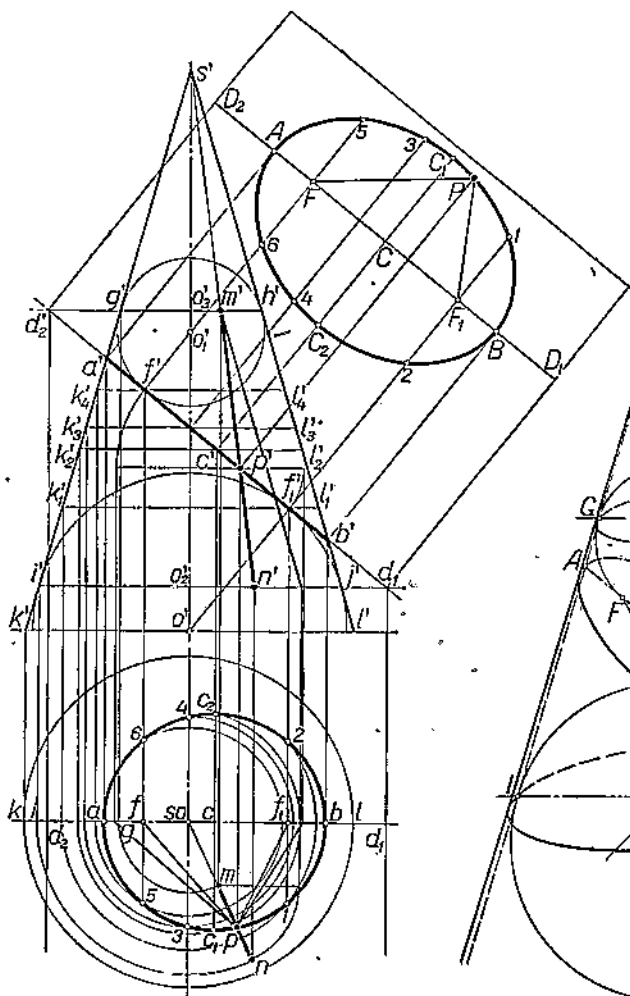
§ 74. Сечение конуса и шара плоскостями.

Секущая плоскость, которая встречает все образующие конуса вращения, лежащие по одну сторону от его вершины, пересекает поверхность конуса по эллипсу.

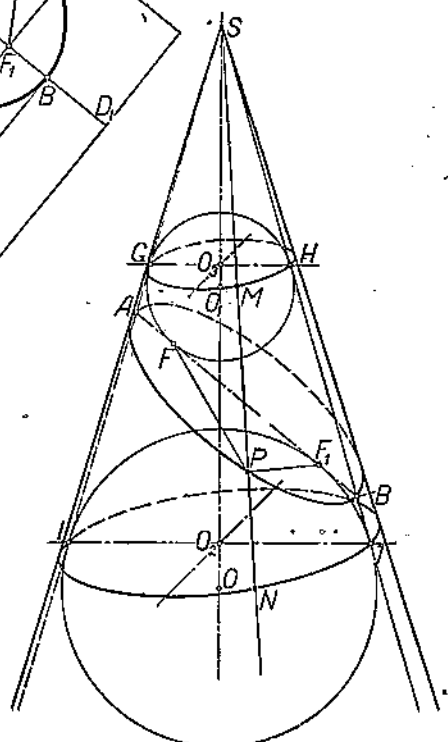
Пусть коническая поверхность, изображаемая на эпиле (черт. 343) и в аксонометрии (черт. 344), пересекается плоскостью, перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций. Чтобы построить фигуру сечения, проведем ряд горизонтальных сечений, которые на вертикальной проекции изображаются отрезками $k'_1l'_1$, $k'_2l'_2$..., а на горизонтальной проекции — концентрическими окружностями. Вертикальная проекция фигуры сечения изображается отрезком $a'b'$. В пересечении вертикальной проекции $k'_1l'_1$ с $a'b'$ находим вертикальную проекцию c' точки кривой сечения, по которой на горизонтальной проекции определим две точки c_1 и c_2 горизонтальной проекции искомой фигуры сечения.

Чтобы доказать, что получающаяся фигура сечения есть эллипс, рассмотрим равнобедренный треугольник $s'h'l'$ (черт. 343), вращением которого вокруг высоты $s'o'$ может быть образован конус. Построим окружность, касающуюся боковых сторон треугольника и стороны $a'b'$ — вертикальной проекции фигуры сечения. Таких окружностей можно построить две: первая, из центра o'_1 , касается отрезка $a'b'$ в точке f' , а вторая, из центра o' , касается того же отрезка в точке f'_1 . При вращении треугольника окружности o'_1 и o' образуют шаровые поверхности, касающиеся конической поверхности по окружностям O_3 и O_2 (черт. 344) и плоскости фигуры сечения в точках F и F_1 .

Соединим произвольно выбранную точку P фигуры сечения с точками F и F_1 ; полученные отрезки представляют касательные



Черт. 343.

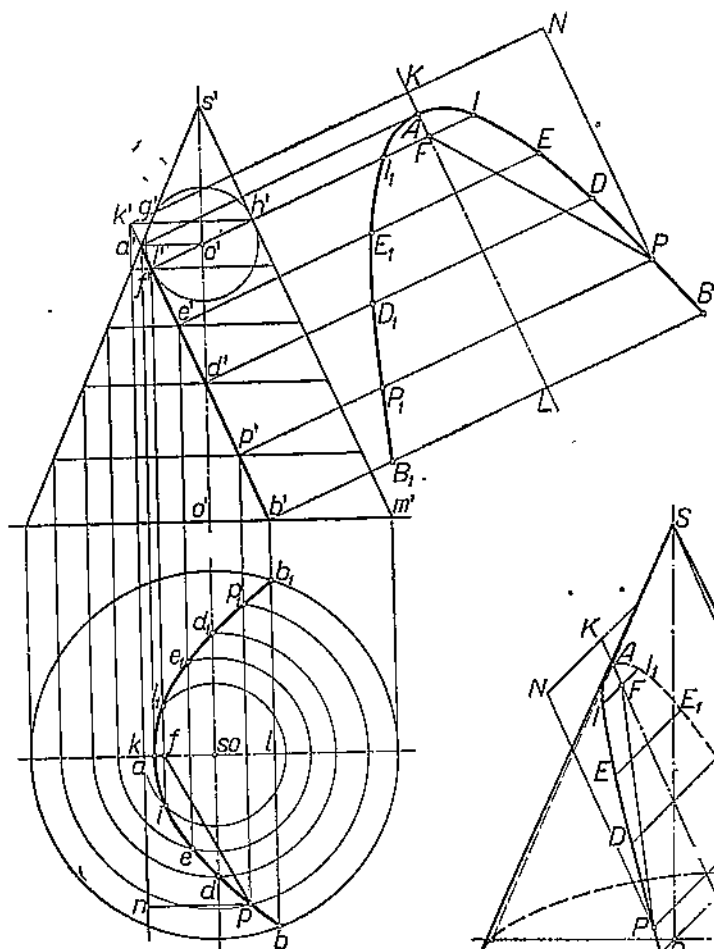


Черт. 344.

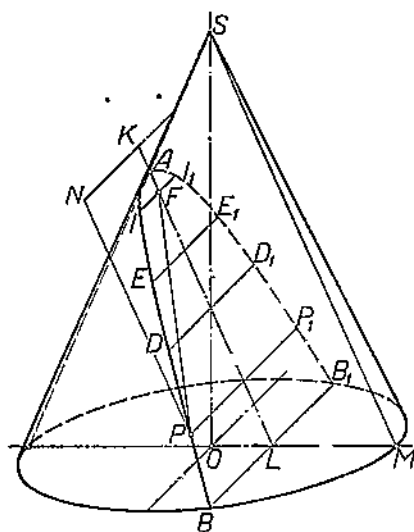
к шарам O_3 и O_2 . Если через точку P и вершину S конуса проведем образующую, пересекающую окружности касания шаров в точках M и N , то отрезок MN есть величина постоянная для данного конуса. Но $PF = PM$ как касательные к шару O_3 , проведенные из одной точки P ; точно так же $PF_1 = PN$, следовательно, $PF + PF_1 = PM + PN = MN = \text{const.}$

Этим доказано, что фигура сечения есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F и F_1 есть величина постоянная, т. е. фигура сечения есть эллипс с фокусами в точках F и F_1 и длиной большой оси $AB = MN$.

На чертеже 343 показано построение истинной величины эллипса сечения путем совмещения с фасадной плоскостью. На эюре показано, что истинная величина суммы радиусов-векторов PF и PF_1 равна оси AB .

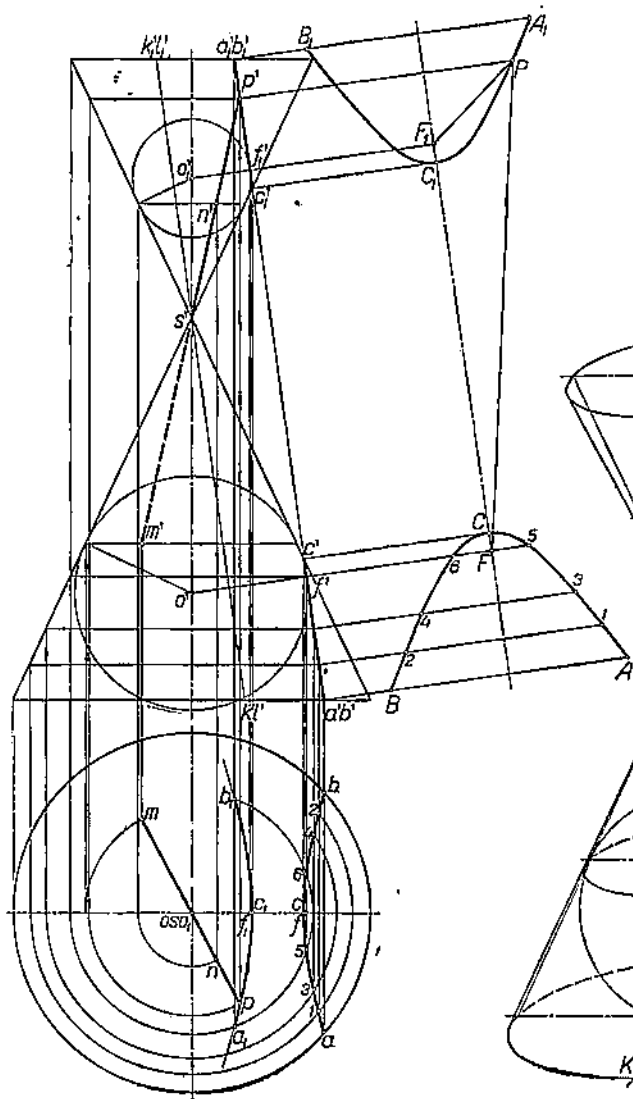


Черт. 345.

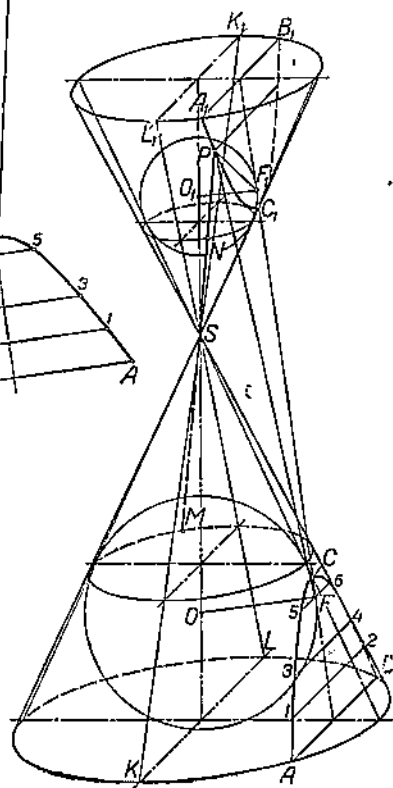


Черт. 346.

Если плоскость сечения параллельна одной образующей конуса, то кривая сечения боковой поверхности конуса вращения не представляет собою замкнутой фигуры (точка пересечения с образующей удаляется в бесконечность). Шар, вписанный в коническую поверхность и касающийся плоскости сечения по окружности, вертикальная проекция которой определяется параллелью $g'h'$ (черт. 345), отмечает на секущей плоскости точку F —фокус кривой сечения. Продолжив $g'h'$ до пересечения со следом секущей плоскости, отметим точку K' , через которую проходит направляющая KN кривой сечения. Нетрудно доказать, что расстояния любой точки P кривой сечения от точки F и от направляющей



Черт. 347.



Черт. 348.

KV равны между собой. Это означает, что кривая сечения — парабола. На эюре построена истинная форма параболы путем совмещения кривой сечения с фасадной плоскостью.

На чертеже 346 дано аксонометрическое изображение сечения конуса плоскостью, параллельной образующей SM .

Если, наконец, плоскость сечения параллельна двум образующим, т. е. какой-нибудь плоскости, проходящей через две образующие (например SK и SL , черт. 347 и 348), то плоскость сечения пересекает и вторую ветвь конической поверхности, образуемую продолжениями образующих. Вписанные шары, касающиеся плоскости сечения, отмечают на этой плоскости точки F и F_1 — фокусы кривой сечения, имеющей две ветви с вершинами в точках C и C_1 .

Возьмем на кривой сечения произвольную точку P и докажем, что разность расстояний этой точки от фокусов F и F_1 есть величина постоянная, равная отрезку MN образующей между окружностями касания шаров с конической поверхностью. Действительно, $PF = PM$ как касательные к шару, вписанному в нижнюю ветвь конической поверхности, а $PF_1 = PN$, как касательные к шару, вписанному в верхнюю ветвь конической поверхности, следовательно, $PF - PF_1 = PM - PN = MN$.

Этим доказано, что фигура сечения есть гипербола с вершинами в C и C_1 и фокусами F и F_1 .

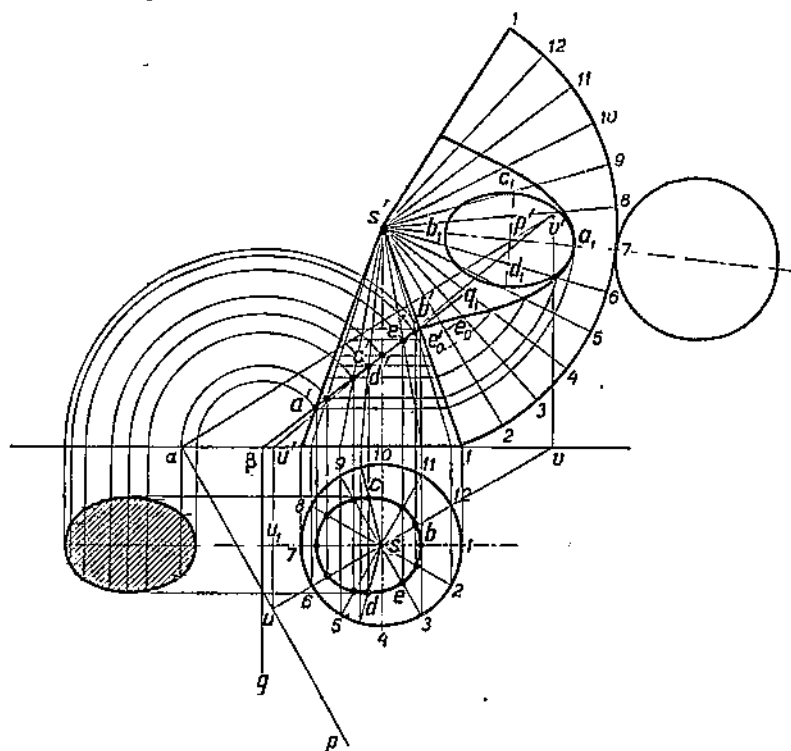
На эюре показано построение проекций и истинной величины фигуры сечения.

Задача 1. Прямой круговой конус пересекается плоскостью pp' . Построить кривую сечения и развертку полной поверхности усеченного конуса (черт. 349).

Чтобы упростить построение фигуры сечения, повернем конус вокруг его оси так, чтобы плоскость сечения заняла положение, перпендикулярное к вертикальной плоскости проекций. Для этого определим точку пересечения оси конуса с секущей плоскостью. Вертикальная плоскость, проходящая через ось конуса и перпендикулярная к следу pa , пересекает плоскость p, p' по прямой $uv, u'v'$. В пересечении вертикальной проекции этой прямой с вертикальной проекцией оси получим вертикальную проекцию d' точки пересечения оси конуса с секущей плоскостью. Если повернуть отрезок si в положение si_1 , параллельное оси проекций, то плоскость сечения займет положение, перпендикулярное к вертикальной плоскости проекций. При этом горизонтальный след плоскости займет положение $q\beta$, перпендикулярное к оси проекций, а вертикальный след $q'\beta'$ пройдет через точку d' .

Так как $q'\beta'$ пересекает все образующие конуса, то фигура сечения представляет эллипс, вертикальная проекция которого определяется отрезком $a'b'$. Для построения горизонтальной проекции эллипса проведем ряд образующих через точки, делящие окружность основания на произвольное число равных частей (например 12), и по точкам пересечения вертикальных проекций этих образующих с отрезком $a'b'$ найдем соответствующие точки на горизонтальных проекциях этих образующих. Отрезок $a'b'$

определяет истинную величину большой оси эллипса сечения. Для определения истинной величины малой оси проведем вертикальную проекцию образующей через середину большой оси $a'b'$ и на горизонтальных проекциях sc и sd отметим точки c и d , определяющие малую ось cd .



Черт. 349.

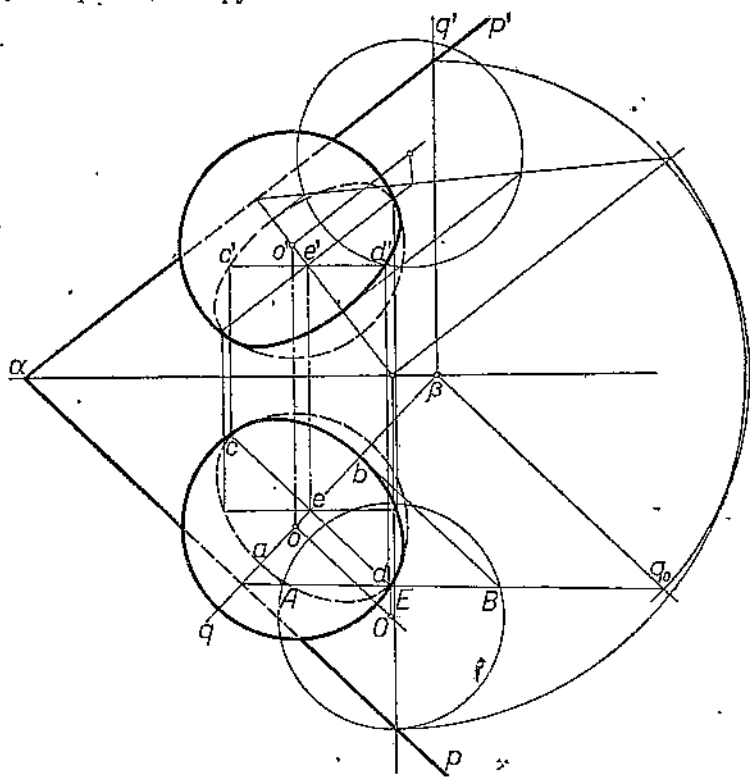
Определение истинной величины сечения может быть произведено построением эллипса по его осям $a'b'$ и cd или путем совмещения плоскости сечения $q\beta q'$ с одной из плоскостей проекций.

Построив развертку полного конуса, отложим на образующих $s'1$, $s'2$, $s'3$, $s'4$... истинные величины отрезков этих образующих от вершины s' до секущей плоскости. Так, например, на образующей $s'3$ отложим $s'e_0 = s'e'_0$, где $e'e'_0$ — горизонталь, проходящая через e' . Соединив полученные точки непрерывной кривой, получим изображение развертки кривой сечения на боковой поверхности конуса. Пристроив круг основания и эллипс сечения, получим развертку полной поверхности усеченного конуса.

Задача 2. Построить проекции кривой пересечения шара плоскостью.

Сечение шара плоскостью есть круг, центр которого совпадает с основанием перпендикуляра, проведенного из центра данного шара на секущую плоскость. Радиус круга сечения равен катету прямоугольного треугольника, другой катет которого равен длине перпендикуляра, а гипотенуза равна радиусу шара.

Пусть o, o' — проекции центра шара, p и p' — следы секущей плоскости (черт. 350). Проведем перпендикуляр из точки O на плоскость P ($og \perp pa$, $o'e' \perp p'a$) и проектирующую плоскость $q\beta q'$, перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций. Совместим эту плоскость с горизонтальной плоскостью проекций и построим совмещенное положение O центра шара и прямой пересечения проектирующей плоскости с секущей плоскостью p, p' . Проведем из центра O окружность радиусом, равным радиусу шара, получим на прямой две точки — A и B , определяющие диаметр AB круга сечения шара плоскостью p, p' . Из центра O проведем $OE \perp AB$ и получим совмещенное положение E центра круга сечения, а затем и проекции e и e' этого центра. Перенеся A и B на $q\beta$, получим малую ось ab эллипса, изображающего горизонтальную проекцию круга сечения. Большая ось cd этого эллипса параллельна горизонтальному следу плоскости p, p' и равна хорде AB . Эллипс касается видимого контура шара. Подобным же образом построим эллипс, изображающий вертикальную проекцию круга.

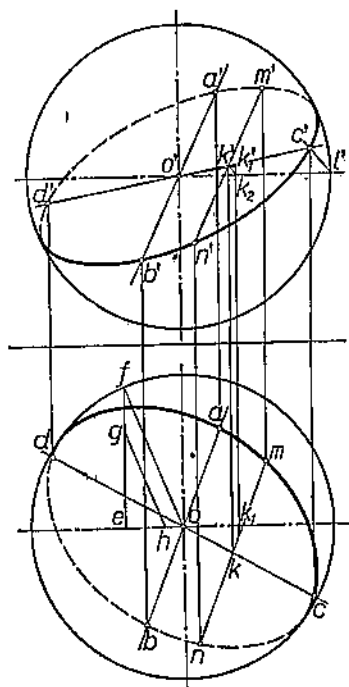


Черт. 350.

Задача 3. Через точки M и N , данные на поверхности шара, провести большой круг (черт. 351).

Задача сводится к проведению плоскости через данные точки M (m, m') и N (n, n') и центр O (o, o') шара и к построению

сечения шара этой плоскостью (задача 2). Однако построение может быть значительно упрощено, если использовать известные нам свойства сечений шара. Сечение шара есть круг и проектируется на каждую из плоскостей проекций в общем случае эллипсом. Отрезок MN есть хорда большого круга, и радиус, проведенный через середину $K(k, k')$ этой хорды, перпендикулярен к MN .



Черт. 351.

Проведем на вертикальной проекции через точку o' прямую $a'b' \parallel m'n'$ и через o' и k' прямую $c'd'$, получим направления двух сопряженных диаметров эллипса, изображающего вертикальную проекцию сечения. То же построение на горизонтальной проекции определит направления двух сопряженных диаметров горизонтальной проекции круга сечения. Определим теперь истинную величину $o'k_1$ расстояния OK хорды MN от центра путем вращения в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций. Отложив на горизонтальном радиусе $o'l'$ большого круга отрезок $o'k_2 = o'k_1$, проведем $l'c' \parallel k_2k'$ и получим проекцию c' конца одного из сопряженных диаметров ($o'k' : o'c' = o'k_2 : o'l'$).

На горизонтальной проекции отложим $oe = o'k_1$ и проведем $ef \perp oe$, получим истинную величину ef полухорды KM . Если теперь отложим $eg = km$ и проведем $gh \parallel of$, то получим длину горизонтальной проекции полудиаметра $oa = gh$, параллельного хорде MK . Определив таким образом на горизонтальной и вертикальной проекциях концы пары сопряженных диаметров, построим эллипсы, которые концами большой оси должны касаться контура шара как на горизонтальной, так и на вертикальной проекции.

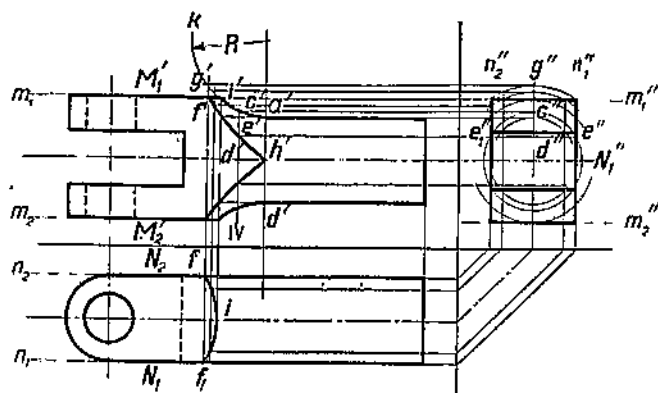
§ 75. Примеры сечений тел вращения плоскостями.

Пример 1. Цилиндрическая тяга с вилкой.

На чертежах 352 и 353 изображена в ортогональных проекциях на три плоскости и в аксонометрии тяга. Она заканчивается телом вращения, срезанным вертикальными плоскостями N_1 и N_2 и горизонтальными плоскостями M_1 и M_2 и имеющим плавный переход с закруглением радиуса R к призматической части тяги. Ширина вилки (в плане) равна диаметру тяги. Вертикальные плоскости сечения N_1 и N_2 дают в плане и профиле проекции линий сечений в виде прямых, совпадающих со следами плоскостей сечения на горизонтальной и профильной плоскостях проекций. Горизонтальные плоскости сечения M_1 и M_2 дают на

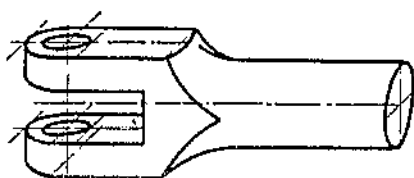
фасаде и профиле линии сечения, совпадающие со следами плоскостей сечения на фасадной и профильной плоскостях проекций.

Для определения точек кривой сечения вертикальной плоскости N_1 или N_2 с телом вращения проведем вспомогательные плоскости, параллельные профильной. Эти плоскости пересекают тело вращения по кругам, радиусы которых равны расстоянию точки пересечения



Черт. 352.

вертикального следа секущей плоскости с кривой $a'k$ от оси вращения. Так, для плоскости IV радиус круга сечения равен $d'c'$. Проведя на профильной проекции из центра окружность радиусом $d''c'' = d'c'$, получим в пересечении этой окружности со следом n_1'' вертикальной плоскости N_1 профильную проекцию e'' кривой пересечения плоскости N_1 с телом вращения, а затем — соответствующую вертикальную проекцию e' этой точки. Предельную точку f' на прямой пересечения вертикальной и горизонтальной секущих плоскостей найдем на секущей плоскости, которая определяет окружность сечения, проходящую через точку пересечения следов n_1'' и m_1'' . Точке g'' этой окружности соответствует на дуге $a'k$ точка g' , через которую проходит секущая плоскость, определяющая точку f' . Через точку a' касания кривой $a'k$ к образующей цилиндрической части тяги проходит секущая плоскость, определяющая точку h' кривой сечения.



Черт. 353.

Кривая сечения горизонтальной плоскости определяется точками f и f_1 , соответствующими точке f' , и точкой i , соответствующей точке i' .

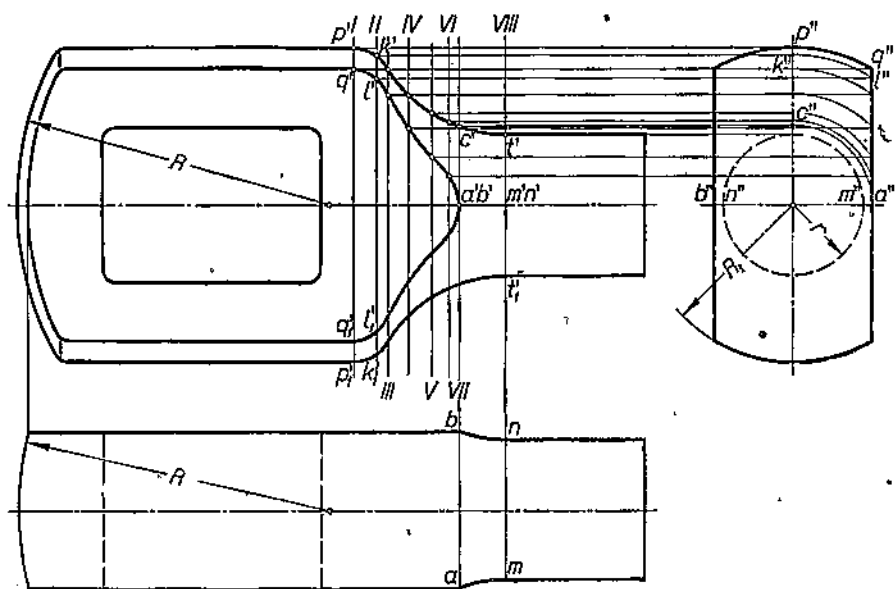
На чертеже 353 дано изображение тяги в кабинетной проекции.

Пример 2. Головка шатуна паровой машины (черт. 354).

Головка изображена в ортогональных проекциях на три плоскости.

Как видно из чертежа, цилиндрическая часть с радиусом основания r на линии сечения $VIII$ переходит в тело вращения, образуемое вращением кривой $t'p'$ вокруг оси цилиндра. Часть

головки от сечения I представляет цилиндр радиуса R_1 , заканчивающийся шаровой поверхностью радиуса R . Цилиндр и шаровая поверхность рассечены двумя плоскостями, параллельными между собою и оси цилиндра. Для построения кривой сечения параллельными плоскостями проведем секущие плоскости II, III, IV, V, VI, VII , перпендикулярные к оси цилиндра. В пересечении вертикального следа плоскости II с кривыми перехода $p't'$ и $p'_1t'_1$ получим точки k' и k'_1 , определяющие диаметр $k'h'_1$ тела вращения в данном сечении. Проведя на профильной проекции окружность диаметра $k'h'_1$, пересекающую следы параллельных секущих плоскостей в точках l'' , получим на следе II соответствующую точку l' кривой перехода. Предельную точку a' , соответствующую точке a'' на профильной проекции, найдем, если проведем на профильной проекции касательную окружность и точку c'' перенесем на кривую $p't'$ в точку c' . Через эту точку проходит след сечения VII , который определяет положение точки a' .

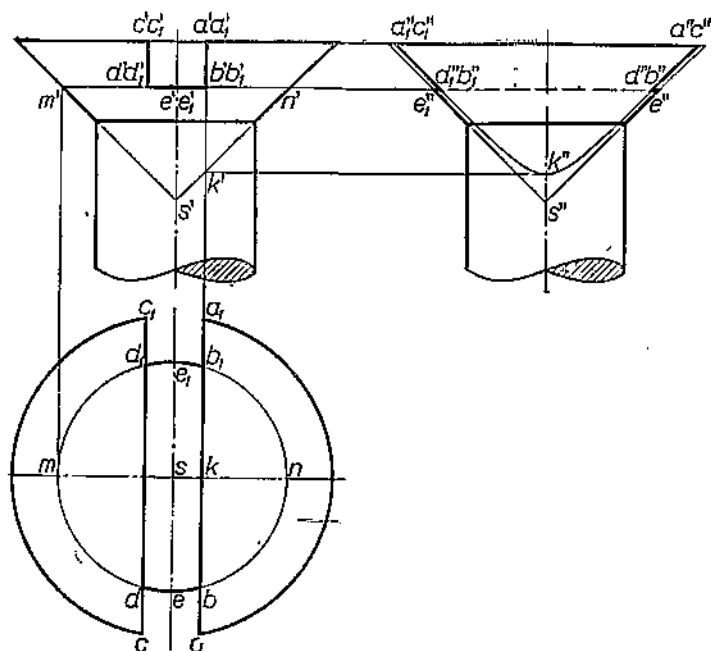


Черт. 354.

Пример 3. Построить проекции конической головки шурупа с прорезом для отвертки (черт. 355).

При построении горизонтальной проекции следует иметь в виду, что дно канавки представляет часть кругового сечения конуса; диаметр этого круга $mn = m'n'$.

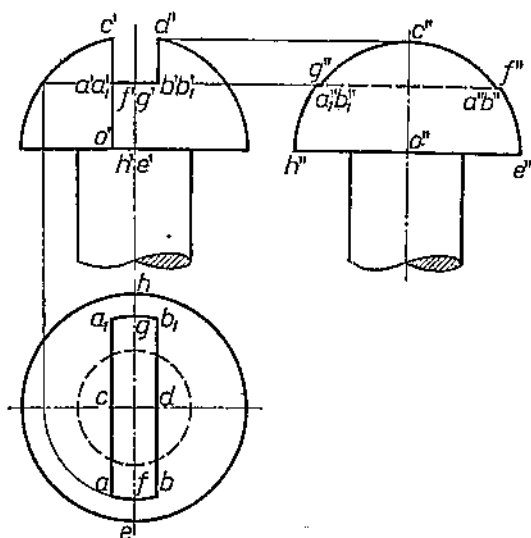
Вертикальные грани канавки представляют плоскости, параллельные оси конуса, а потому пересекающие боковую поверхность по гиперболе. Натуральная величина этой гиперболы показана на профильной проекции. Исходя из этого, легко разбратся в изображении профильной проекции головки шурупа.



Черт. 355.

Пример 4. Построить проекции головки шурупа, имеющей форму полушара, с канавкой для отвертки.

Легко разобьется в способе вычерчивания горизонтальной и профильной проекций. На фасадной проекции (черт. 356) вертикальные грани канавки изображаются отрезками $d'b'$ и $c'a'$, равными высоте сегмента $a''c''a''$, изображаемого в натуральную величину на профильной проекции. Радиус сечения равен отрезку $c'o'$ и меньше



Черт. 356.

радиуса полушара, поэтому на профильной проекции очертание головки в части $h''g''$ и $f''e''$ представляет дуги окружности, очерченной радиусом полушара, а в верхней части дугу окружности с центром o'' и радиусом $o'c'$, вследствие чего получаются уступы на уровне дна канавки.

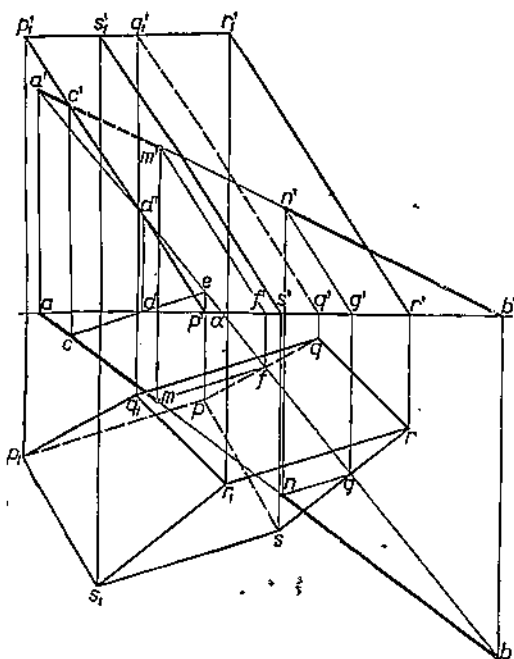
ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТЕЛ.

§ 76. Точка пересечения прямой с поверхностью многогранника и тел вращения.

При построении линии пересечения тел приходится решать задачу о нахождении точек пересечения ребер одного тела с гранями другого. Определение этих точек сводится к определению точек пересечения прямой с поверхностью тела. Для этого через данную прямую проводят вспомогательную плоскость, которая при пересечении тела дает плоскую фигуру, определяющую точки пересечения прямой с поверхностью тела.

Задача 1. Построить точки пересечения прямой с призмой (черт. 357).

Наиболее простая фигура сечения получается, если пересечь призму плоскостью, параллельной боковым ребрам. Такая плоскость пересекает призму по двум прямым, параллельным боковым ребрам. Поэтому, если задана призма $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (черт. 357 и 358), поставленная на горизонтальную плоскость, и прямая AB , заданная следами, то через произвольную точку $C(c, c')$ прямой AB проведем прямую $CD(c'd, c'd')$, параллельную боковому ребру PP_1 призмы, и через горизонтальные следы b и e прямых AB и CD проведем горизонтальный след плоскости, параллель-

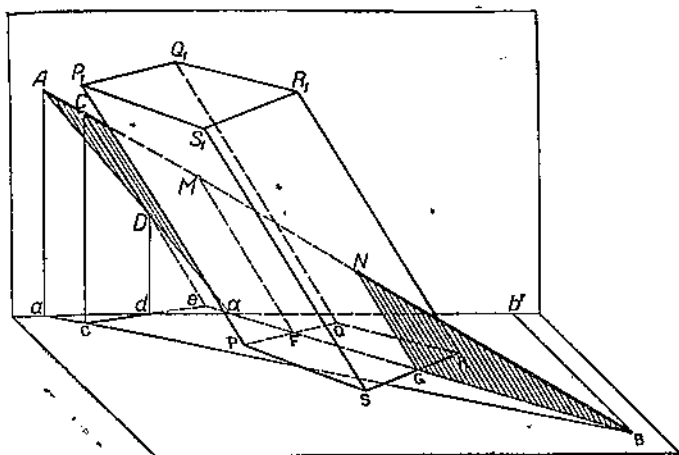


Черт. 357.

ной боковым ребрам призмы. Горизонтальный след построенной плоскости пересекает контур горизонтальной проекции основания призмы в точках g и f . Проведя через эти точки прямые $gn \parallel rr_1$ и $fm \parallel rr_1$, найдем горизонтальные проекции m и n , а затем и вертикальные проекции m' и n' точек M и N пересечения прямой AB с поверхностью призмы.

Кабинетная проекция прямой AB и призмы показана на чертеже 358.

Задача 2. Определить точки пересечения прямой $AB(ab, a'b')$ с боковой поверхностью прямого кругового цилиндра (черт. 359).



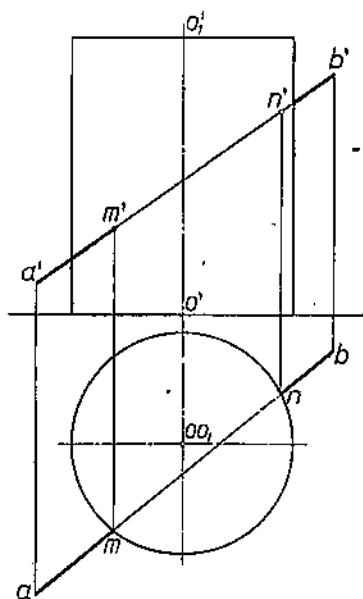
Черт. 358.

Проведем горизонтально-проектирующую плоскость; горизонтальный след ее совпадает с ab и пересекает окружность основания в точках m и n — горизонтальных проекциях образующих по которым эта плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра. По точкам m и n определим на $a'b'$ точки m' и n' — вертикальные проекции точек пересечения прямой с поверхностью цилиндра.

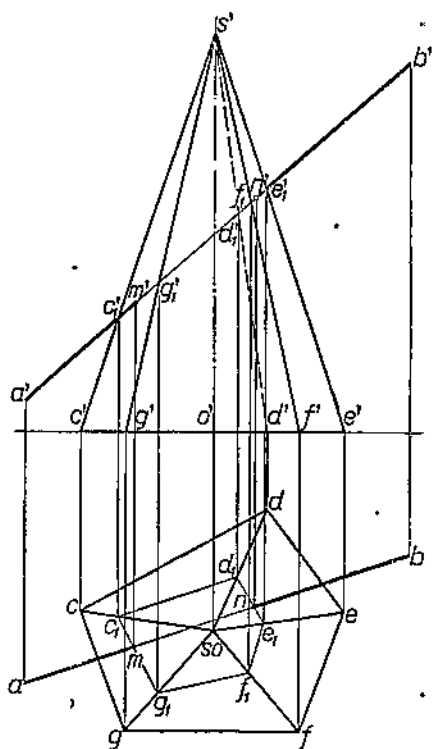
Так как точка m находится на передней половине окружности основания, а n — на задней, то $a'm'$ перекрывает боковую поверхность цилиндра.

Задача 3. Определить точки пересечения прямой AB , заданной проекциями ab и $a'b'$, с боковой поверхностью пирамиды $SCDEFG$ (черт. 360).

Построим фигуру сечения вертикально-проектирующей плоскости с боковой поверхностью пирамиды. Вертикальная проекция фигуры сечения совпадает с $a'b'$. На вертикальной проекции определим вертикальные проекции $c'_1, d'_1, e'_1, f'_1, g'_1$ вершин пятиугольника сечения, а на горизонтальной проекции определим соответствующие горизонтальные проекции и построим пятиугольник $c_1d_1e_1f_1g_1$, который пересекает прямую ab в точках m и n — горизонтальных проекциях точек пересечения прямой AB с поверхностью пирамиды.



Черт. 359.



Черт. 360.

Построив вертикальные проекции m' и n' этих точек, заметим, что m' находится на видимой грани пирамиды, а n' — на невидимой.

Задача 4. Определить точки пересечения прямой AB с боковой поверхностью прямого кругового конуса (черт. 361).

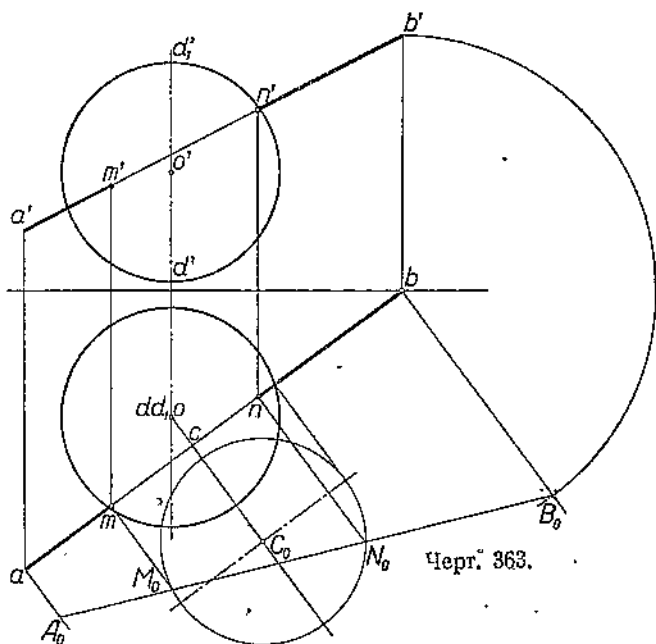
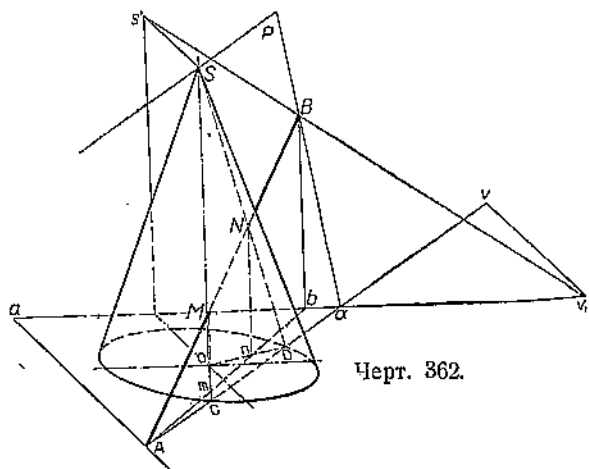
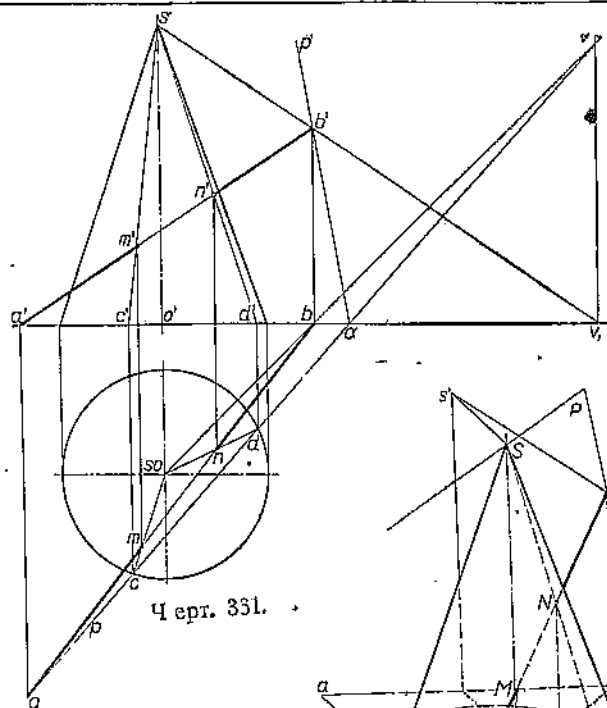
Наиболее простая фигура сечения получается, если пересечь конус плоскостью, проходящей через вершину конуса. Такая плоскость пересекает поверхность конуса по образующим. Поэтому для нахождения искомых точек пересечения прямой с поверхностью конуса проведем плоскость через AB и вершину S конуса и построим горизонтальный след этой плоскости. Через произвольную точку прямой AB (например вертикальный след B) и вершину S проведем прямую, определим ее горизонтальный след v и,

соединив его с горизонтальным следом прямой AB , построим горизонтальный след aaa' плоскости сечения, пересекающий окружность основания конуса в точках c и d — горизонтальных проекциях оснований образующих SC и SD . Построив проекции sc , $s'c'$ и sd , $s'd'$ этих образующих, определим проекции m , m' и n , n' точек пересечения прямой AB с поверхностью конуса. Точка m лежит на видимой части проекции боковой грани, а n — на невидимой.

На чертеже 362 показано то же построение на аксонометрическом изображении конуса (кабинетная проекция).

Задача 5. Определить точки пересечения прямой AB (ab , $a'b'$) с поверхностью шара с центром O (o , o').

Построение показано на чертеже 363. Проведем горизонтально-проектирующую плоскость, пересекающую шаровую поверхность по окружности. Совместим эту плоскость вместе с окружностью сечения и данной прямой с горизонтальной плоскостью проекций и найдем совмещенное положение M_0 и N_0 искомых точек пересечения совмещенного положения A_0B_0 данной прямой с совмещенным положением окружности сечения. По совмещенному положению построим горизонтальные проекции m и n и



вертикальные проекции m' и n' точек M и N . Как видно из чертежа, вертикальная проекция m' находится на видимом полушарии, а n' — на невидимом, а на горизонтальной проекции точка m лежит на невидимом полушарии, n — на видимом.

§ 77. Взаимное пересечение тел.

Части сооружений и деталей машин представляют собой сочетания различных геометрических тел, и для получения правильного изображения необходимо точно вычертить линии взаимного пересечения поверхностей этих тел. В технике линия взаимного пересечения тел носит название линии перехода.

Общий метод построения линий пересечения тел между собою состоит в том, что проводят вспомогательную плоскость или поверхность и находят контур фигуры пересечения этой вспомогательной плоскости с каждым из данных тел. Если полученные контуры взаимно пересекаются, то точки пересечения принадлежат как одному, так и другому телу, т. е. представляют точки линии пересечения поверхностей данных тел. Повторяя построение вспомогательных плоскостей сечения, получим ряд точек, по которым можно построить искомую линию сечения.

Для того чтобы произвести построение линии сечения наиболее простым способом, следует выбирать вспомогательные плоскости таким образом, чтобы фигура сечения этих плоскостей с данными телами получилась наиболее простой. Направление вспомогательных плоскостей выбирается в зависимости от формы и взаимного положения тел.

Задача 1. Построить линии перехода двух взаимно пересекающихся призм — прямой шестиугольной призмы, поставленной на горизонтальную плоскость проекций, и прямой четырехугольной призмы, боковые ребра которой направлены параллельно оси проекций (черт. 364).

В данном случае для построения линии сечения определим точки пересечения ребер призмы $GHK_GH_1K_1$ (которую обозначим буквой M) с гранями призмы $ABCDEFAB_1C_1D_1E_1F_1$ (обозначим ее буквой N) и ребер второй призмы с гранями первой.

Рассматривая горизонтальную проекцию, замечаем, что ребро GG_1 призмы M не пересекает призмы N . Ребро KK_1 призмы M пересекает боковую грань EDD_1E_1 призмы N в точке 1 (проекции 1 и 1') и боковую грань AFF_1A_1 в точке 4 (проекции 4, 4').

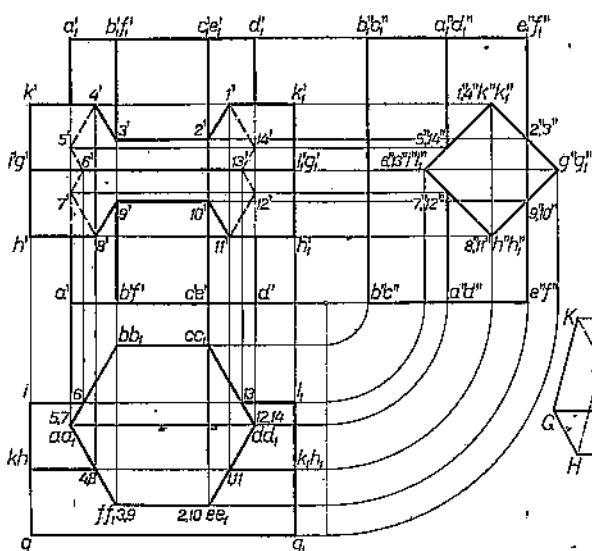
Те же боковые грани пересекают ребро HH_1 в точках 11 (11, 11') и 8 (8, 8'). Четвертое ребро II_1 призмы M пересекает боковую грань CDD_1C_1 призмы N в точке 13 (13, 13') и боковую грань ABB_1A_1 в точке 6 (6, 6').

Из той же горизонтальной проекции и еще более наглядно из боковой проекции мы видим, что из шести боковых ребер призмы N два ребра BB и CC_1 не пересекают граней призмы M . Ребро AA_1 пересекает боковые грани IKK_1I_1 и IIH_1I_1 в точках 5 (5', 5'') и 7 (7', 7'').

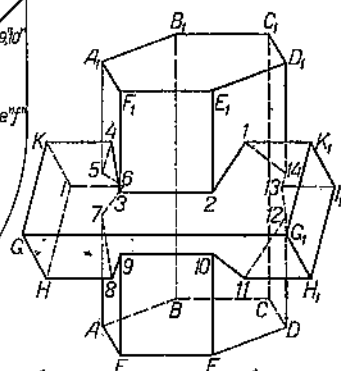
Ребро DD_1 призмы N пересекает грани KII_1K_1 и IIH_1I_1 призмы M в точках 14 (14', 14'') и 12 (12', 12''), и, наконец, ребро EE_1

и FF_1 пересекают грань GKK_1G_1 в точках 2 ($2'$, $2''$) и 3 ($3'$, $3''$) и грань GHH_1G_1 в точках 10 ($10'$, $10''$) и 9 ($9'$, $9''$).

Соединив последовательно вертикальные проекции полученных 14 точек, построим вертикальную проекцию линии перехода. На горизонтальной и боковой проекциях линии перехода совпадают с проекциями сторон оснований призм.



Черт. 364.



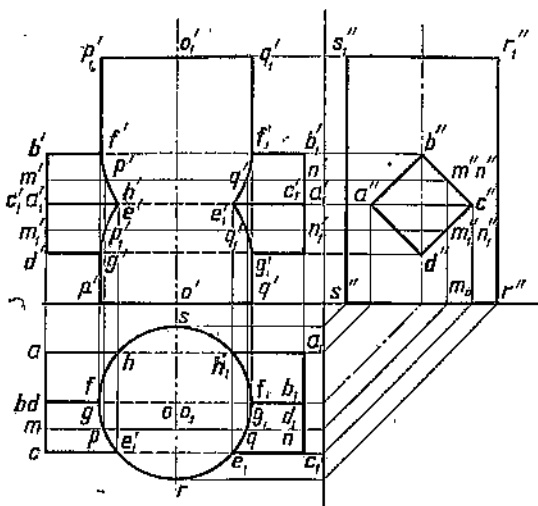
Черт. 365.

На чертеже 365 построено аксонометрическое изображение тех же призм M и N и линий перехода.

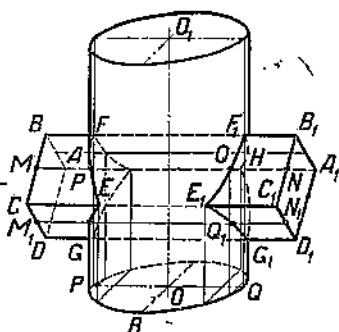
Задача 2. Построить линию пересечения прямого кругового цилиндра с прямой четырехугольной призмой. Оси цилиндра и призмы взаимно пересекаются под прямым углом (черт. 366 и 367).

На эюре даны проекции цилиндра и призмы, причем боковые ребра последней параллельны оси проекций. Четыре боковых ребра призмы пересекают боковую поверхность цилиндра в точках E и E_1 , F и F_1 , G и G_1 , H и H_1 . Горизонтальные проекции этих точек получаются в пересечении горизонтальных проекций боковых ребер с окружностью основания цилиндра. Вертикальные проекции этих точек находим на вертикальных проекциях этих ребер. Чтобы найти промежуточные точки кривых между найденными точками, проводим на гранях призмы прямые, параллельные ребрам, и находим точки пересечения этих прямых с цилиндром. Так, например, проведя на горизонтальной проекции отрезок $mn \parallel cc_1$, переносим его на боковую проекцию в точки $m''n''$ и $m_1''n_1''$, а от последней — на фасадную проекцию, получаем вертикальные проекции $m'n'$ и $m_1'n_1'$ и определяем проекции p , p' и q , q' промежуточных точек P и Q .

На чертеже 367 дано изображение того же сечения в кабинетной проекции.



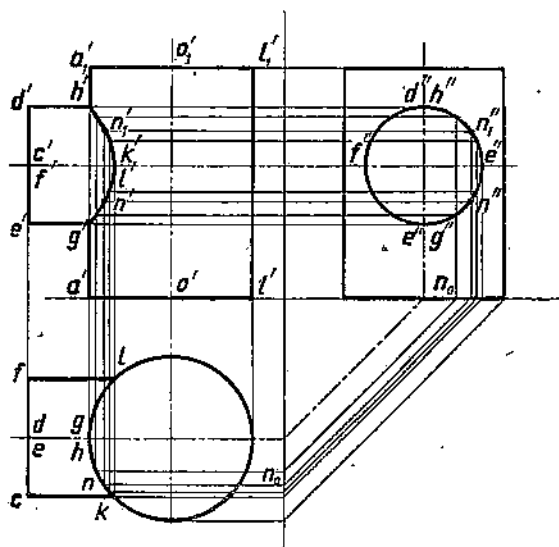
Черт. 366.



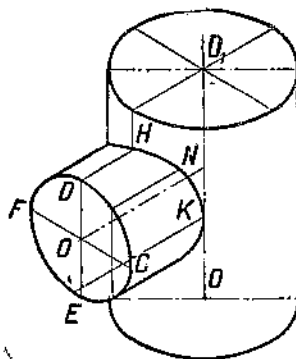
Черт. 367.

Задача 3. Построить кривую взаимного пересечения двух прямых цилиндров M и N с взаимно перпендикулярными осями (черт. 368), из которых ось цилиндра M перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, а ось цилиндра N параллельна оси проекций.

Проведем на горизонтальной проекции цилиндра N образующие и при помощи боковой проекции найдем соответствующие вертикальные проекции этих образующих. В дальнейшем построение точек пересечения этих образующих с поверхностью цилиндра



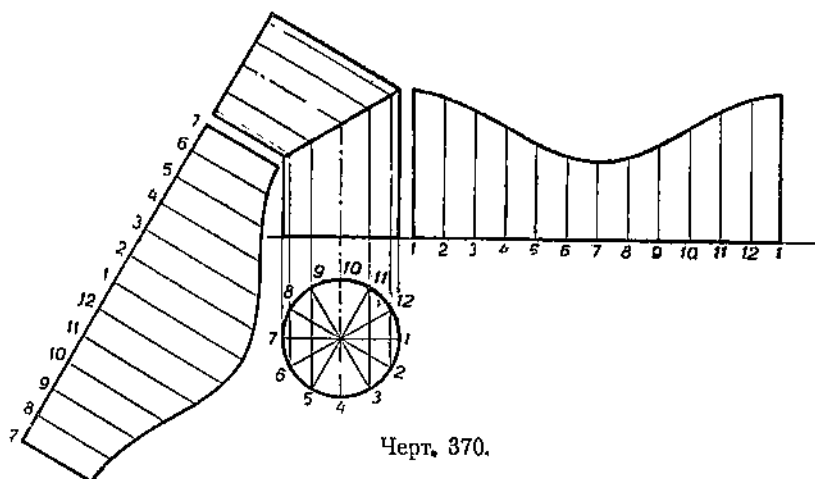
Черт. 368.



Черт. 369.

М производится, как в задаче 2. На чертеже 369 дано изображение сечения в изометрической проекции.

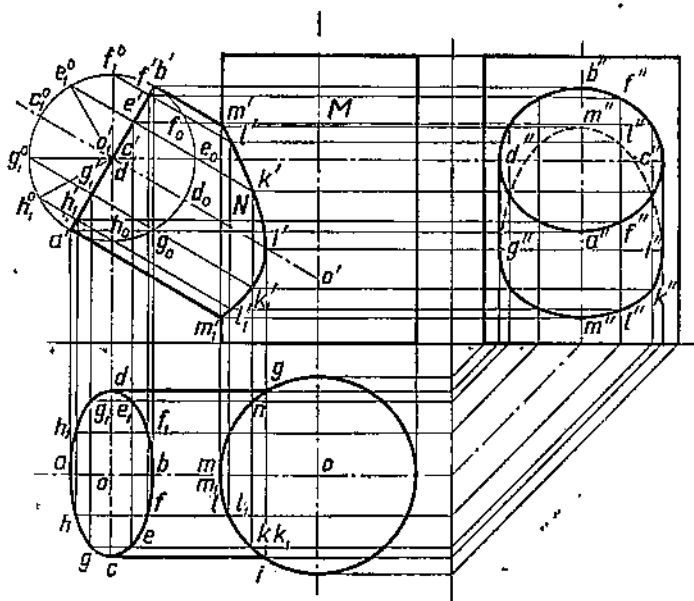
Задача 4. Построить кривую пересечения колена трубы, оси которой пересекаются под тупым углом (черт. 370).



Черт. 370.

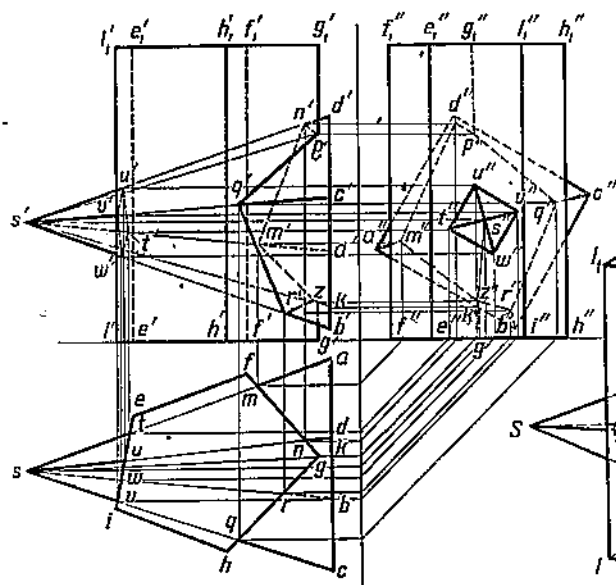
Диаметры обеих ветвей колена равны, и кривая сечения представляет собой плоскую фигуру. На чертеже 370 построены развертки обеих ветвей колена.

Задача 5. Построить кривую пересечения двух цилиндров, оси которых пересекаются под острым углом (черт. 371).

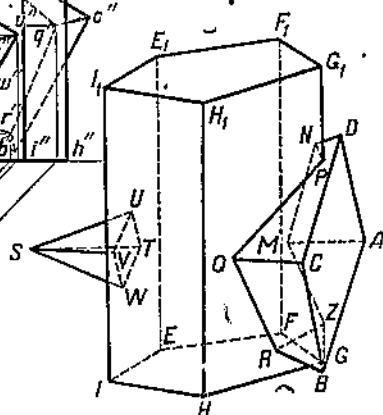


Черт. 371.

Вертикальная проекция обреза малого цилиндра изображается отрезком $a'b'$, равным истинной величине диаметра круга обреза. На горизонтальной и боковой проекциях этот круг изображается эллипсами. Проведем в этом цилиндре ряд образующих, для чего повернем круг $a'b'$ вокруг диаметра $a'b'$ в положение, параллельное вертикальной плоскости проекций, и проведем ряд хорд, перпендикулярных диаметру $a'b'$. Эти хорды $f_1^0 f_0$, $e_1^0 e_0$, $c_1^0 d_0$, $g_1^0 g_0$, $h_1^0 h_0$ определяют величину хорд ff_1 , ee_1 , cd , gg_1 , hh_1 в горизонтальной проекции круга обреза. Проведем через точки a , b , c , d , e , e_1 , f и f_1 горизонтальные проекции образующих, а через вертикальные проекции этих точек — образующие, параллельные вертикальной проекции оси цилиндра. По горизонтальным проекциям точек пересечения образующих с окружностью основания большого цилиндра отметим на вертикальных проекциях образующих вертикальные проекции точек кривой пересечения поверхностей цилиндров M и N . Полученные точки перенесем на боковую проекцию и определим боковую проекцию искомой кривой перехода.



Черт. 372.



Черт. 373.

Задача 6. Построить линию взаимного пересечения прямой пятиугольной призмы $EFGHIE_1F_1G_1H_1I_1$ и четырехугольной пирамиды $SABCD$ (черт. 372 и 373).

Боковые ребра пирамиды пересекают боковую грань EII_1E_1 призмы, образуя плоский четырехугольник $TUVW$. Кроме того, ребра SA и SD пересекают боковую грань GFF_1G_1 в точках M и N , а ребра SB и SC — боковую грань GHH_1G_1 в точках R и Q . Горизонтальные проекции этих точек непосредственно полу-

чаются на горизонтальной проекции основания призмы, а вертикальные и боковые проекции получаются на соответствующих проекциях боковых ребер пирамиды. Далее мы из горизонтальной проекции видим, что боковое ребро GG_1 призмы пересекает боковые грани SAB и SCD пирамиды. Для определения точек пересечения проведем через ребро GG_1 призмы и вершину S пирамиды плоскость, которая пересечет грань SAB пирамиды по прямой, горизонтальная проекция которой определяется отрезком sgk . Перенесем точку k на боковую проекцию $a''b''$ ребра AB в точку k'' и на фасадную проекцию в точку k' , проведем боковую и фасадную проекции отрезка SK , пересекающего ребро GG_1 в точке $Z_1(z', z'')$. Точно так же найдем и вторую точку P пересечения ребра GG_1 с гранью SCD .

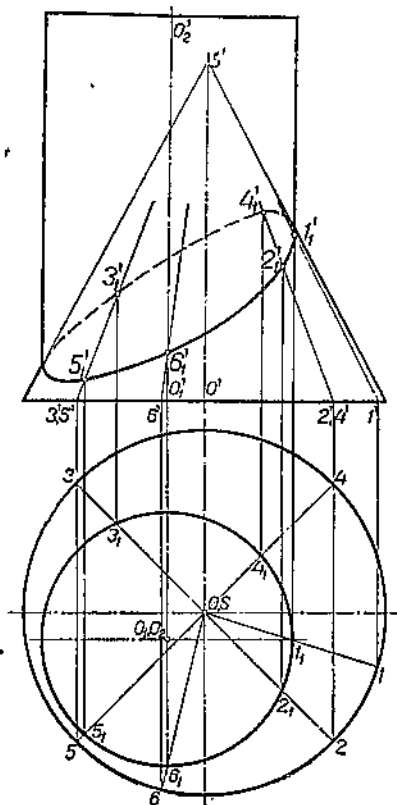
На чертеже 373 дана кабинетная проекция, соответствующая эскиру чертежа 372.

Задача 7. Построить кривую пересечения боковой поверхности конуса, поставленного на горизонтальную плоскость проекций, и цилиндра, ось которого параллельна оси конуса (черт. 374).

Проведем ряд образующих на поверхности конуса и построим точки пересечения этих образующих с поверхностью цилиндра. На горизонтальной проекции образующих, изображаемых радиусами окружности основания конуса, получаем непосредственно горизонтальные проекции точек пересечения (точки пересечения радиусов с окружностью основания цилиндра) и переносим эти точки на вертикальные проекции образующих.

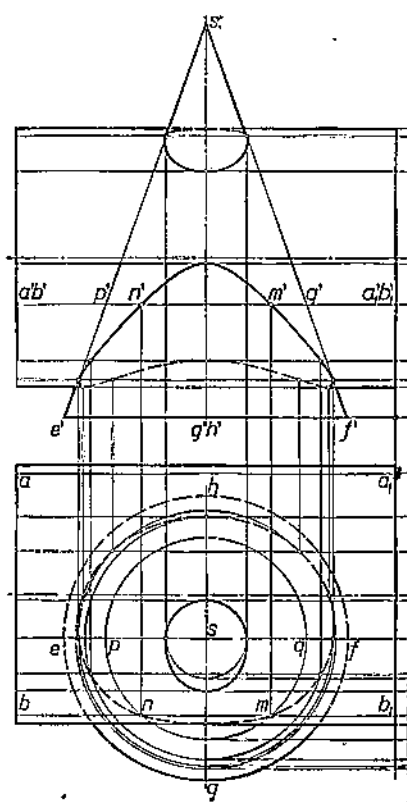
Задача 8. Круговой цилиндр, ось которого параллельна оси x проекций, пересекается круговым конусом, ось которого перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Построить линию пересечения (черт. 375 и 376).

Для определения точек пересечения поверхности конуса с поверхностью цилиндра проведем ряд горизонтальных секущих плоскостей, пересекающих боковую поверхность цилиндра по двум образующим, а боковую поверхность конуса по окружности, и найдем точки взаимного пересечения окружности и образующих цилиндра. Эти точки будут принадлежать искомой кривой

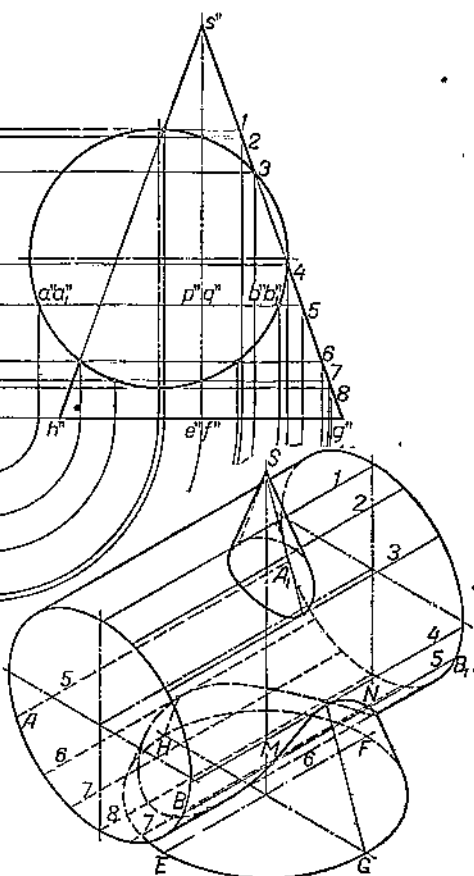


Черт. 374.

сечения. Так, например, сечение δ пересекает боковую поверхность цилиндра по образующим AA_1 ($aa_1, a'a'_1$) и BB_1 ($bb_1, b'b'_1$), а поверхность конуса — по окружности с диаметром PQ ($pq, p'q'$). Эта окружность пересекает только образующую BB_1 в точках M (m, m') и N (n, n'), принадлежащих кривой сечения. Как видно из эюпра, фигура сечения состоит из двух замкнутых кривых. Характерные точки кривых получаются в пересечении SG и SH с боковой поверхностью цилиндра.



Черт. 375.



Черт. 376.

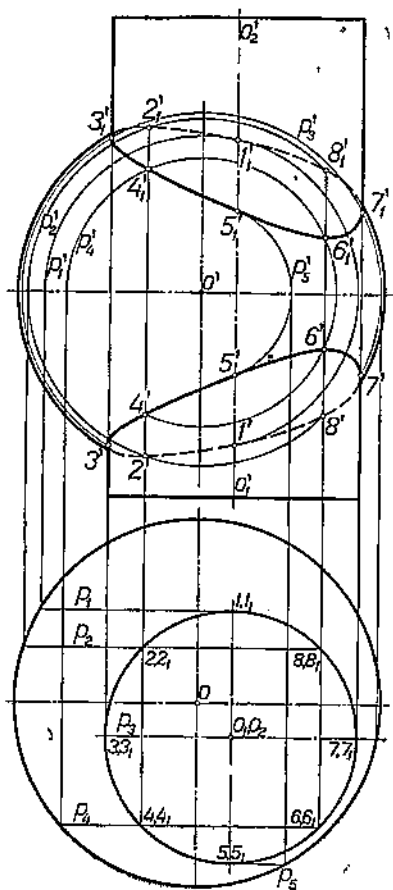
Определение видимой и невидимой частей кривой сечения можно произвести из сопоставления боковой проекции с горизонтальной и фасадной проекциями. На фасадной проекции видна та часть кривой, которая на боковой проекции приходится между образующими $s'e'f'$ и $s''g''$, а на горизонтальной проекции видна вся часть кривой, приходящаяся на верхней половине цилиндра.

На чертеже 376 дано изометрическое изображение пересечения цилиндра с конусом.

Задача 9. Построить пересечение поверхности кругового цилиндра, поставленного на горизонтальную плоскость проекций, с поверхностью шара (черт. 377).

Проведем ряд секущих плоскостей $P_1, P_2, P_3, \dots$, параллельных вертикальной плоскости проекций. Эти плоскости пересекают поверхность цилиндра по образующим, а поверхность шара — по окружностям, диаметры которых определяются хордами, отсекаемыми горизонтальными следами секущих плоскостей на горизонтальной проекции шара. Эти же следы в пересечении с горизонтальной проекцией боковой поверхности цилиндра определяют горизонтальные проекции $(1, 1_1; 2, 2_1; 8, 8_1; 3, 3_1; 7, 7_1; 4, 4_1; 6, 6_1; 5, 5_1)$ образующих. Перенеся образующие и окружности сечений шара на вертикальную проекцию, определим вертикальные проекции точек искомой кривой сечения.

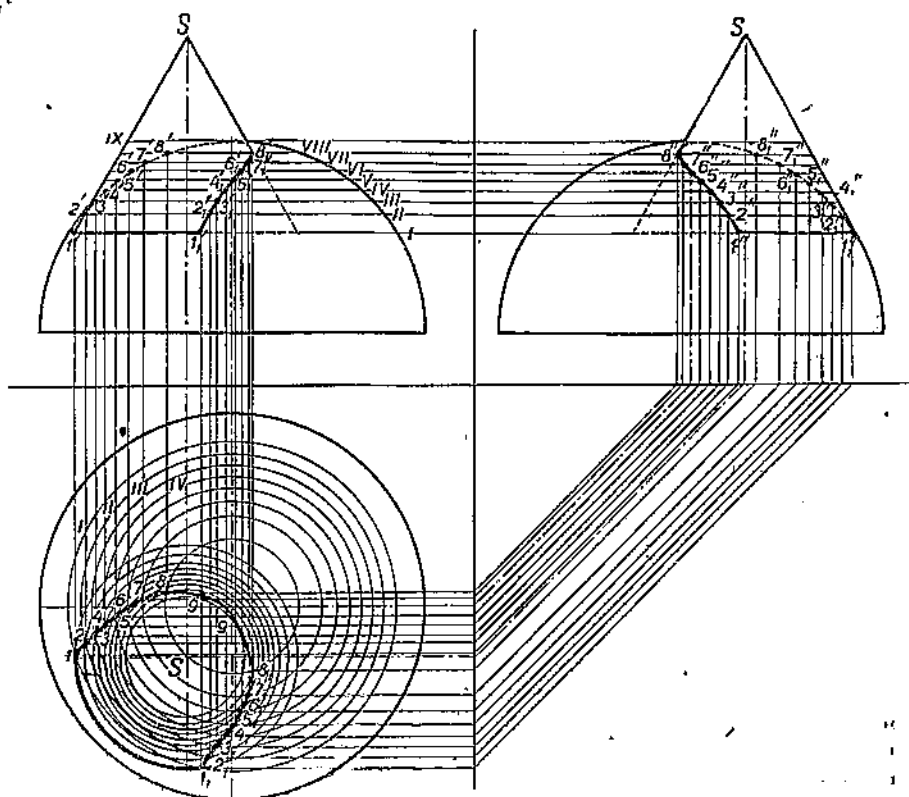
Ту же задачу можно решить иначе, если плоскости сечения проводить параллельно горизонтальной плоскости проекций; получим на вертикальной проекции хорды, параллельные оси проекций, а на горизонтальной проекции — concentric окружности, пересекающие окружность основания цилиндра в горизонтальных проекциях кривой сечения. Перенеся эти точки на вертикальные проекции окружностей сечения, получим [искомые точки.



—Черт. 377.

Задача 10. Построить кривую пересечения шаровой поверхности с боковой поверхностью кругового конуса (черт. 378).

Если проведем горизонтальные плоскости сечения, то эти плоскости пересекут боковую поверхность конуса по окружностям, проектирующимся на горизонтальную плоскость в натуральную величину, а поверхность шара по окружностям, также проектирующимся на горизонтальную плоскость в натуральную величину. Точки пересечения соответствующих окружностей определяют горизонтальные проекции искомой кривой сечения поверхностей конуса и шара. По горизонтальным проекциям точек кривой пересечения построены вертикальные и профильные проекции этих точек. Построение проведено на эюре чертежа 378, где кривая вычерчена в трех проекциях.



Черт. 378.

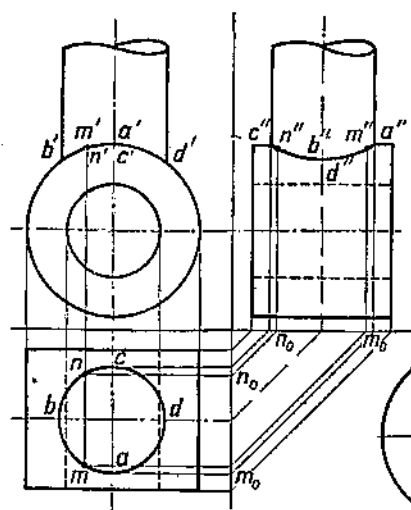
§ 78. Примеры применения кривой перехода в изображениях деталей машин.

Пример 1. Ушко болта, состоящее из двух цилиндров, оси которых пересекаются под прямым углом (черт. 379).

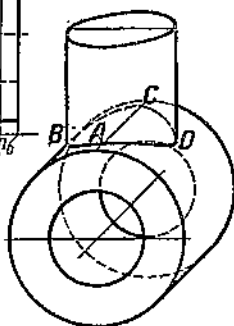
Горизонтальная и фасадная проекции кривой перехода выявлены: первая представляет окружность $abcd$, а вторая — часть контурной окружности ушка. По двум проекциям построим третью; так, для произвольно взятой точки $M(m, m')$ построена третья проекция m'' . Характерными точками кривой являются точки b'' (d''), a'' и c'' . На чертежах 380 и 381 даны аксонометрические изображения ушка в кабинетной и изометрической проекциях.

Пример 2. Крышка подшипника. Крышка шарообразная (изображена половина), бобышки для двух болтов конические, имеется вверху конический выступ. Ни одна из проекций линий перехода от конуса к шару не выявлена (черт. 382).

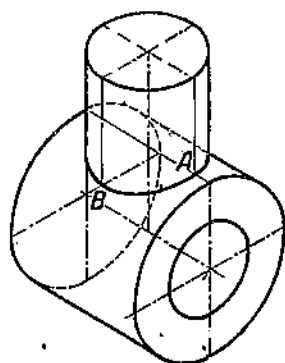
Проведем вспомогательные горизонтальные плоскости сечения, которые пересекают конические приливы по окружности из центра o_1 — горизонтальной проекции оси отверстия для болта — и из центра o — горизонтальной проекции центра шара.



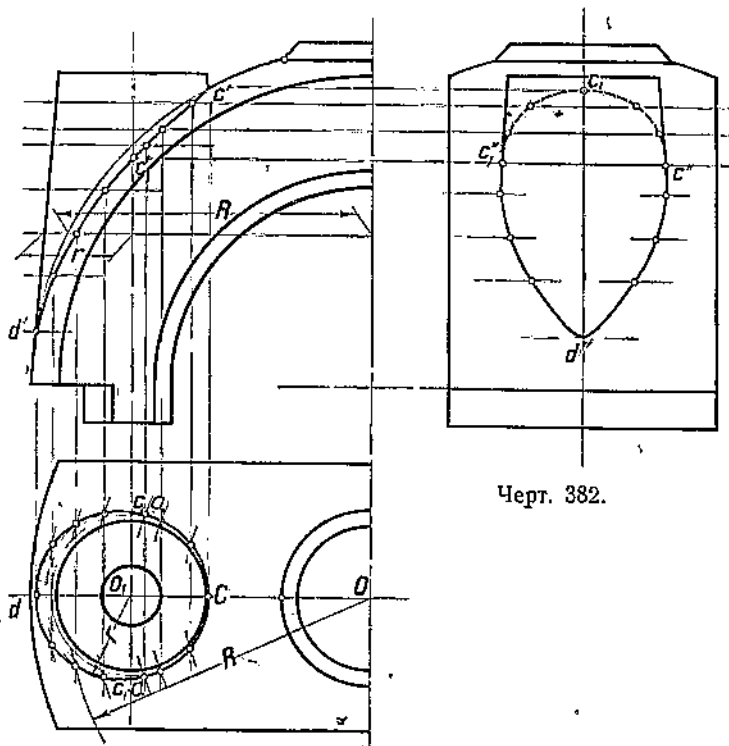
Черт. 379.



Черт. 380.



Черт. 381.



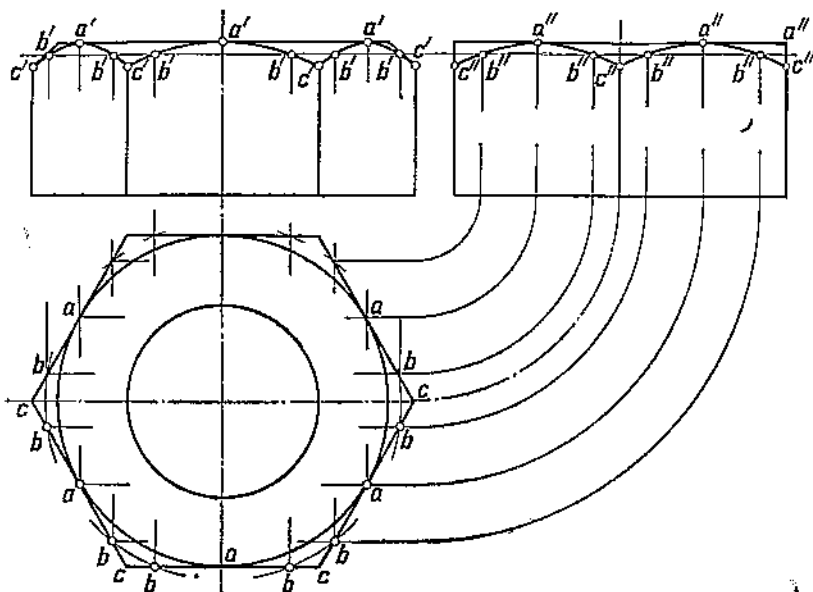
Черт. 382.

В пересечении этих окружностей найдем горизонтальные проекции a и a_1 — двух точек линии перехода. Низшую точку кривой получаем непосредственно на фасаде в точке $D(d', d'')$. Характерные точки лежат на контурных образующих конуса в боковой проекции и фасадной. Конический выступ посередине, ось которого проходит через центр шара, пересекает шаровую поверхность по окружности, которая на фасадной и боковой проекциях изображается прямыми, параллельными оси проекций.

Пример 3. Шестигранная гайка со снятой конической фаской (черт. 383).

Боковые грани этой гайки ограничены кривой пересечения плоскости, параллельной оси конуса, с боковой поверхностью конуса. Кривая эта, как известно, есть гипербола, и построение ее по точкам при помощи горизонтальных секущих плоскостей не представляет затруднений.

Черт. 383.

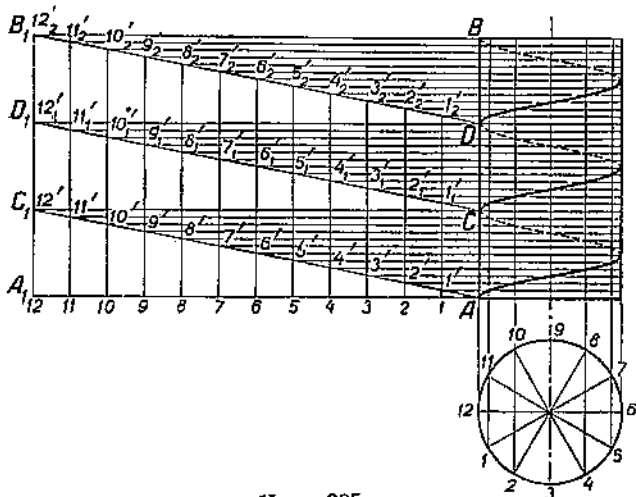


Черт. 384.

Построение показано на чертеже 384. Коническая поверхность пересекает верхнее основание шестигранной гайки по окружности, вписанной в шестиугольник основания. На чертеже показано построение пяти точек A, B, B и C, C для каждой грани.

§ 79. Построение проекций винтовой линии.

Цилиндрической винтовой линией называется линия, описанная точкой, равномерно движущейся по окружности круга, который, в свою очередь, равномерно перемещается в направлении, перпендикулярном к его плоскости, т. е. описывает прямой круговой цилиндр.



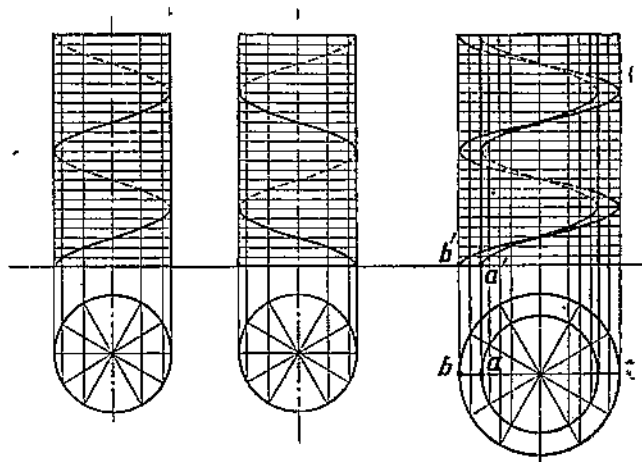
Черт. 385.

Если мы на развертке боковой поверхности прямого кругового цилиндра (черт. 385) отложим по высоте последовательно равные отрезки $AC = A_1C_1 = CD = C_1D_1 = DB = D_1B_1$, проведем отрезки AC_1 , CD_1 и DB_1 и навернем развертку обратно на боковую поверхность цилиндра, то наклонные AC_1 , CD_1 и DB_1 образуют на боковой поверхности цилиндра винтовую линию. При этом каждый из отрезков AC_1 , CD_1 и DB_1 образует один виток винтовой линии. Расстояние AC между началом и концом витка, измеренное по образующей цилиндра, называется шагом винтовой линии.

Отсюда вытекает способ изображения винтовой линии в ортогональных проекциях. Разделим окружность основания на горизонтальной проекции на произвольное число равных частей и через полученные точки проведем образующие на фасадной проекции и на развертке. Перенеся точки пересечения наклонных AC_1 , CD_1 и DB_1 с образующими на развертке на соответствующие образующие на фасадной проекции, получим точки $1', 2', 3' \dots 12', 1'_1 \dots 5'_1 \dots 12'_2, 1'_2 \dots 12'_2$ фасадной проекции винтовой линии. Соединив эти точки последовательно непрерывной кривой, получим

изображение винтовой линии, состоящей из трех витков. В каждом витке половина винтовой линии располагается на передней половине цилиндрической поверхности и начерчена сплошной линией, а вторая половина — на задней половине цилиндра (невидимой), и потому она начерчена штриховой линией.

Винтовая линия, которая на видимой части цилиндрической поверхности поднимается слева направо, а на невидимой — справа налево, называется правой винтовой линией (черт. 386) в отличие от левой винтовой линии, которая на видимой части цилиндрической поверхности поднимается справа налево (черт. 387).



Черт. 386.

Черт. 387.

Черт. 388.

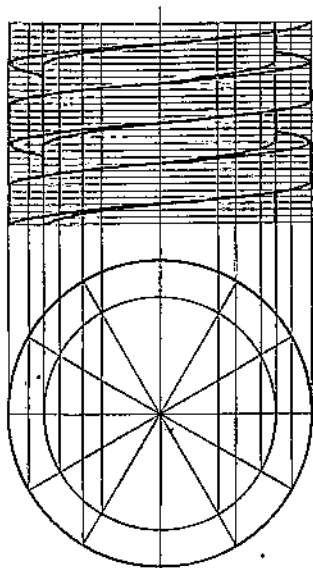
Если отрезок AB , продолжение которого пересекает ось цилиндра под неизменным углом, перемещается таким образом, что точка A движется по винтовой линии и прямая AB все время пересекает ось цилиндра под неизменным углом, то отрезок AB описывает винтовую поверхность. Винтовая поверхность, описываемая отрезком AB , ограничена двумя винтовыми линиями, описываемыми концами A и B отрезка AB .

Построение проекций винтовой поверхности показано на чертеже 388 для случая, когда прямая AB пересекает ось под прямым углом.

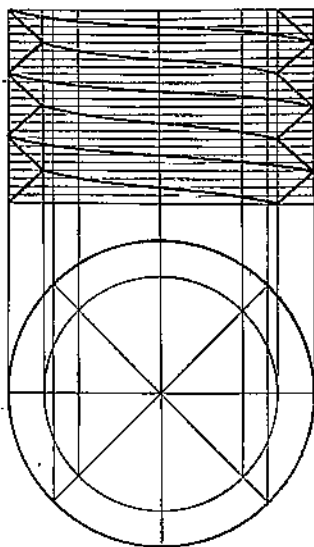
Наконец, если в плоскости, проходящей через ось цилиндра, поместим квадрат, трапецию, треугольник или полукруг так, что одна сторона (или диаметр полукруга) будет направлена по образующей цилиндра и все точки фигуры будут описывать винтовые линии одинакового шага, то получим винт с квадратным, трапециoidalным, треугольным или полукруглым сечением. В зависимости от того, будут ли точки фигуры описывать правые или левые винтовые линии, получим винт с правой резьбой или винт с левой резьбой.

На чертеже 389 показано изображение правого винта с квадратной резьбой, где сторона образующего квадрата равна половине шага винтовой линии.

На чертеже 390 показано изображение левого винта с треугольной резьбой, где образующая представляет равнобедренный треугольник со стороной, равной шагу резьбы.



Черт. 389.



Черт. 390.

Такую же форму винтовой резьбы получает и гайка. Однако при рассмотрении изображения этой резьбы в гайке, разрезанной плоскостью, проходящей через ось, мы заметим, что на чертеже остается видимой та часть резьбы, которая соответствует резьбе на невидимой части поверхности винта. Поэтому при изображении гайки для винта с правой резьбой подъем винтовой линии идет справа налево, а для левой резьбы — слева направо.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ВЫПОЛНЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ

§ 80. Типы технических чертежей. Масштабы.

Технический чертеж выполняется с применением правил, изложенных в отделах I и II. Эти правила дают возможность изобразить всякую пространственную фигуру на плоскости чертежа в натуральную величину или в определенном масштабе. Однако в зависимости от характера объектов, изображаемых на чертеже, и самого назначения чертежа при выполнении последнего применяется ряд специальных правил. В дальнейшем изложении мы будем рассматривать главным образом основную группу так называемых машиностроительных чертежей и покажем принятые у нас правила выполнения этих чертежей.

В настоящее время в СССР утверждены стандарты машиностроительных чертежей, и все указываемые ниже правила взяты либо из утвержденных стандартов, либо из проектов, находящихся в стадии утверждения.

Установленным стандартом (ОСТ 350) предусматривается разделение чертежей на следующие основные группы:

- 1) чертежи для предложений,
- 2) чертежи конструктивно-вспомогательные (расчетные схемы и т. п.),
- 3) спецификационные таблицы (перечень деталей, входящих в данное изделие),
- 4) рабочие чертежи: а) установочные, б) сборочные чертежи (общие виды, чертежи частей изделия и сборочных единиц),
- в) чертежи деталей,
- б) чертежи полуфабрикатов (поковок, отливок),
- 6) чертежи операционные (для производства данной технологической операции),
- 7) чертежи приемочно-контрольные,
- 8) чертежи специального инструментария и приспособлений,
- 9) чертежи производственного оборудования,
- 10) чертежи по строительству,
- 11) чертежи прочие.

Нашему рассмотрению подлежат главным образом рабочие чертежи (группа 4).

В § 7 уже было указано, что чертежи должны выполняться на бумаге стандартного формата.

Чертежи рекомендуется выполнять, по возможности, в натуральную величину. Если же необходимо по каким-либо причи-

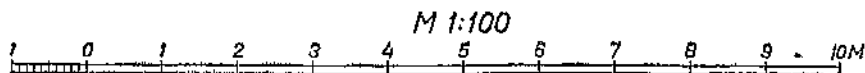
нам применять масштаб, то его следует выбрать из следующих рядов нормальных масштабов (ОСТ 351):

для уменьшения: 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:10ⁿ, 1:(10)²ⁿ и 1:(5·10ⁿ);

для увеличения: 2:1, 5:1, 10:1.

Масштабы, дающие большое уменьшение, применяются для планов, геодезических работ, карт и т. п. В этом случае масштаб прилагается к чертежу.

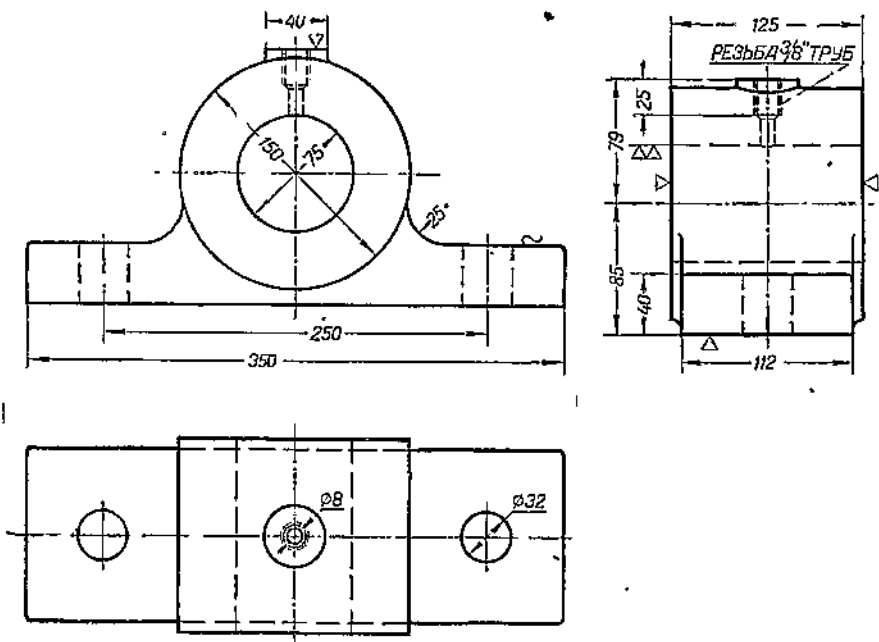
На чертеже 391 показан линейный масштаб, соответствующий численному масштабу 1:100, следовательно, 1 мм на чертеже соответствует 100 мм = 10 см в натуре. Построение масштаба ясно из чертежа.



Черт. 391.

В машиностроительных чертежах линейный масштаб не чертится, так как с чертежа непосредственно размеры не снимаются. Все необходимые для построения изделия размеры указываются на самом чертеже. Вне зависимости от масштаба на чертеже всегда указываются натуральные размеры.

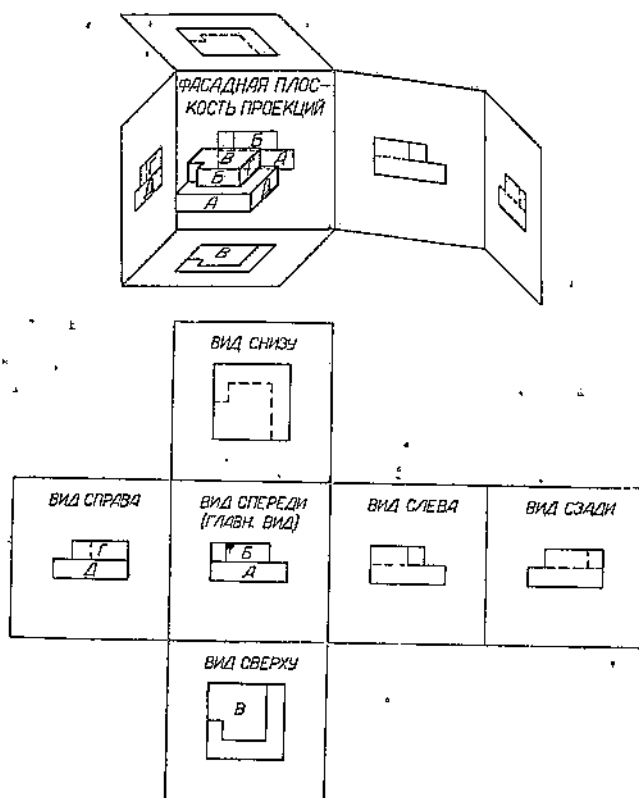
Масштабы на чертеже должны обозначаться в следующей форме: М 1:1, М 1:2, М 1:5 и т. п.



Черт. 392.

§ 81. Расположение видов (проекций) на чертеже (ОСТ 352).

На чертеже 392 изображена часть механизма (глухой подшипник) в трех видах (главный вид, вид сверху и вид слева). Вид сверху расположен под главным видом, вид слева — с правой стороны от главного вида на одном с ним уровне. Это расположение соответствует рассмотренному в отделе II взаимному расположению ортогональных проекций при проектировании на три плоскости.



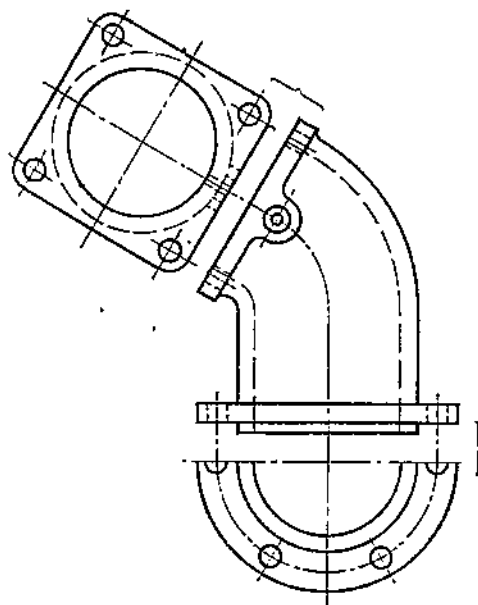
Черт. 393.

Проекция на фасадную плоскость именуется главным видом. Для изображаемого на чертеже предмета выбирают такое положение относительно плоскостей проекций, чтобы главный вид (вид спереди) давал, по возможности, наиболее ясное представление о форме предмета и его размерах. Остальные виды располагают, как показано на чертеже 393. При этом надпись делается только на виде спереди: „главный вид“ и на виде сзади: „вид сзади“.

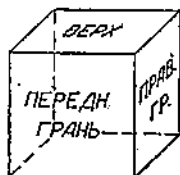
При построении частичного вида, т. е. проекции на добавочную плоскость, перпендикулярную к одной из основных плоскостей проекций, причем проектируется какое-нибудь определенное место на одной из граней или вся данная грань предмета, проекцию

располагают по правилу: „откуда смотришь, туда и кладешь изображение“ (черт. 394). При этом дополнительная проекция соединяется скобкой с основным видом.

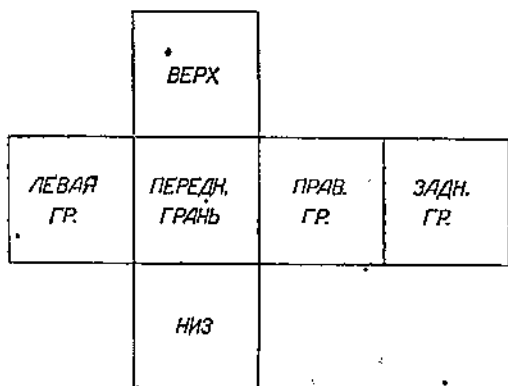
Если какой-либо вид располагается вне проекционной связи с другими видами, то необходимо сделать соответствующее указание надписью: „вид по стрелке“.



Черт. 394.



Примечание. В отличие от принятого в СССР способа расположения проекций, известного под названием европейского, или немецкого, существует так называемый американский способ, соответствующий проектированию предмета, расположенного в третьей четверти; в этом случае при совмещении плоскостей с фасадной получится расположение проекций, указанное на чертеже 395.



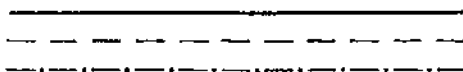
Черт. 395.

При вычерчивании и обводке чертежей применяются три основных типа линий:

сплошные

штриховые

штрих-пунктирные



Линии видимых контуров вычерчиваются сплошными толстыми линиями (толщина $S = 0,4 \sim 1,2$ мм). Невидимые линии

контуров вычерчиваются штриховыми линиями толщиной $\frac{S}{2}$; осевые и центровые линии — штрих-пунктирными линиями толщиной $\frac{S}{4}$ и менее,

Подробные указания относительно линий чертежа и обводки даны в § 84.

§ 82. Разрезы и сечения.

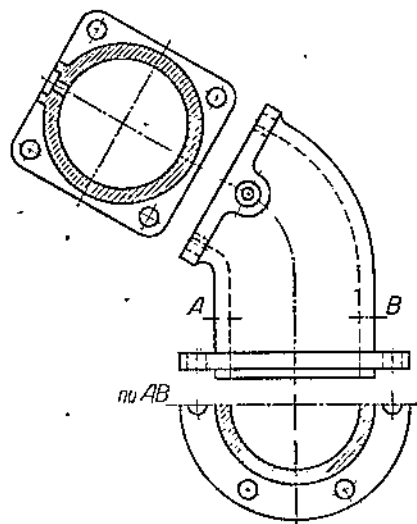
Выявление всех подробностей устройства изображаемых предметов только в редких случаях достигается вычерчиванием невидимых контуров штриховыми линиями, как это имело место на чертеже 392. Проведение штриховых линий в большом числе только затемняет чертеж.

Для показа внутренних очертаний и формы той или иной части изображаемого предмета следует применять разрезы и сечения.

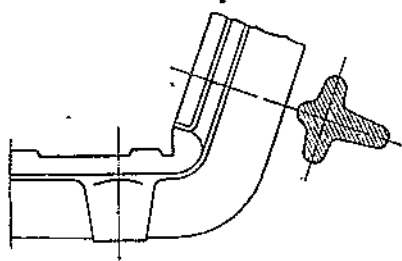
Разрезом называется такое условное изображение предмета, когда находящаяся между глазом наблюдателя и секущей плоскостью часть этого предмета как будто бы удалена, а оставшаяся часть предмета проектируется полностью, т. е. вычерчивается все то, что расположено в секущей плоскости и за нею.

Сечением называется изображение того, что расположено в самой секущей плоскости.

Различие между разрезом и сечением показано на чертежах 396 и 397. В разрезах, данных на чертеже 396, изображено все, что лежит в секущих плоскостях (заштрихованные части) и расположено за ними (фланцы). На чертеже 397 заштрихованная фигура представляет собою лишь то, что остается в секущей плоскости от пересеченной ею части предмета. Если, однако, в сечение попадает цилиндрическое, коническое, шаровое и т. п. круглое отверстие или углубление, то как исключение контур должен был проведен полностью, как это показано на чертеже 398:



Черт. 396.



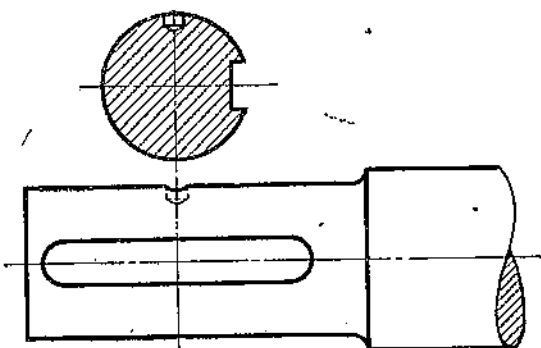
Черт. 397.

в верхней части сечения прочерчен весь контур отверстия, хотя в секущей плоскости расположена лишь часть этого контура.

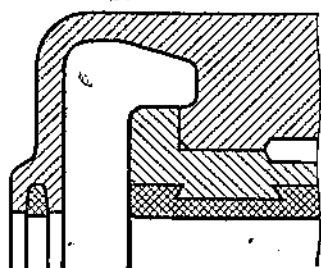
Поверхность рассеченного материала в разрезах и сечениях выделяется штриховкой.

Таблица штриховок (стр. 210) установлена ОСТ 354. Штриховка должна производиться тонкими линиями толщиной $\frac{S}{4}$ и меньше.

Линии штриховки проводятся под углом в 45° по отношению к основной осевой линии или к одной из основных линий контура. Наклон линий может быть как влево, так и вправо, но для всех проекций одной и той же детали следует выполнять штриховку с наклоном линий в одну и ту же сторону.



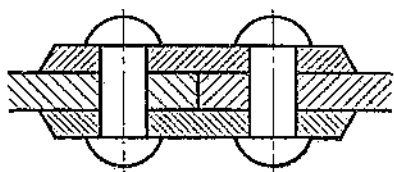
Черт. 398.



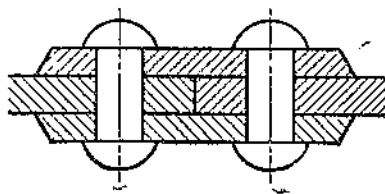
Черт. 399.

Величина расстояний между линиями штриховки берется для металла, кожи и др. от 1 мм до 3 мм, для кирпича и железобетона от 2 мм до 5 мм.

В тех случаях, когда в разрезе имеется стык двух поверхностей, для достижения наилучшей изобразительности чертежа наносится встречная штриховка (черт. 399).



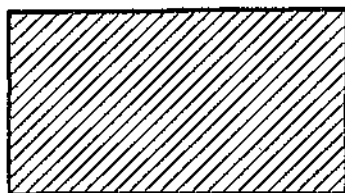
Черт. 400.



Черт. 401.

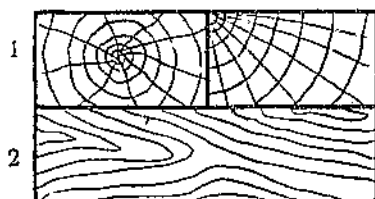
В случае, если две соприкасающиеся поверхности являются в то же время смежными еще с третьей поверхностью (черт. 400 и 401), следует разнообразить штриховку изменением расстояния между линиями штриховки (черт. 400) или сдвигом линий штриховки при одинаковом расстоянии между ними (черт. 401).

Металлы



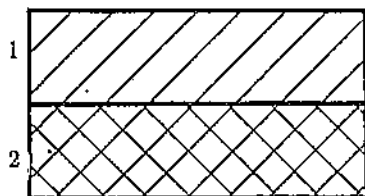
Дерево

- 1) в поперечном разрезе
- 2) в продольном разрезе



Кирпич

- 1) обыкновенный
- 2) огнеупорный



Бетон

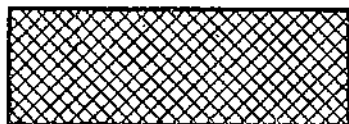
- 1) в монолите
- 2) железобетон



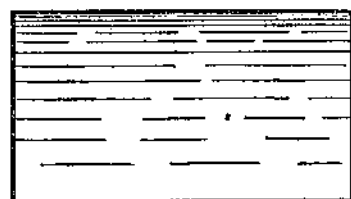
- 1) Земля в штриховке у контуров
- 2) Земля и изоляционные материалы в засыпке



Кожа, резина, стекло, прокладки (листовая медь, свинец, фибра, картон, бумага, пробка, толь и т. п.), набивки (асбест, пенька, войлок, лен и т. п.), заливки (баббиты, литая резина, воск, сера, смола)



Жидкости



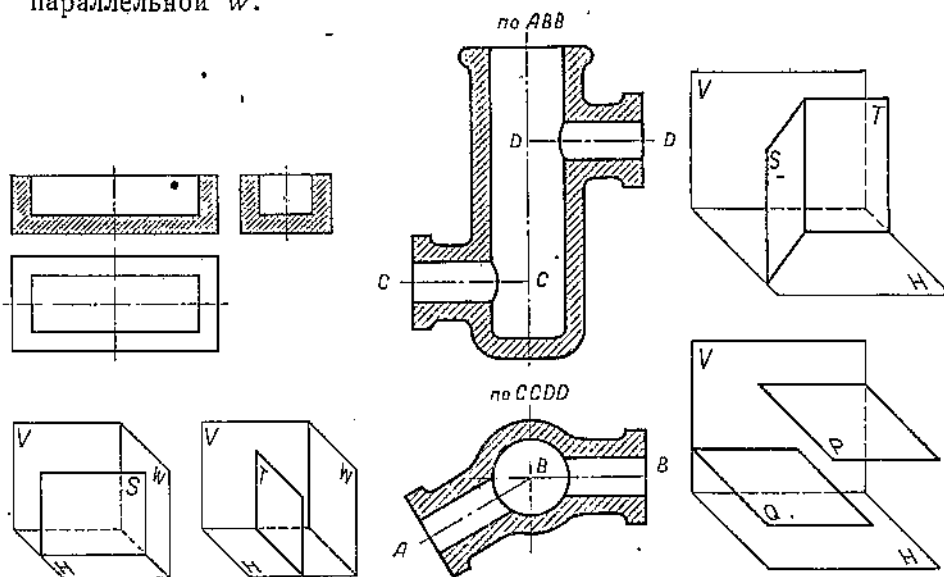
Узкие площади в разрезах при ширине на чертеже, равной или меньшей 2 мм



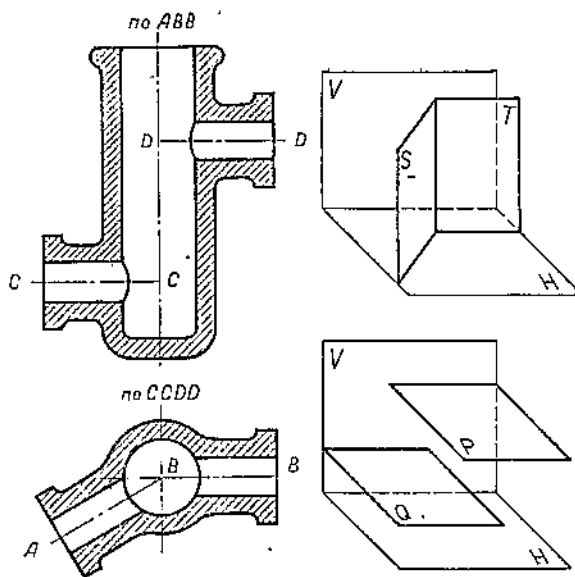
Разрезы. В зависимости от направления плоскости сечения по отношению к горизонтальной плоскости проекций разрезы делятся на вертикальные, горизонтальные и наклонные.

В зависимости от количества секущих плоскостей различают: простые разрезы (одна секущая плоскость) и сложные (две или несколько секущих плоскостей, совмещаемых в плоскости чертежа).

На чертеже 402 показаны два вертикальных разреза, из которых один разрез выполнен при помощи секущей плоскости S , параллельной V ; второй разрез выполнен при помощи плоскости T , параллельной W .

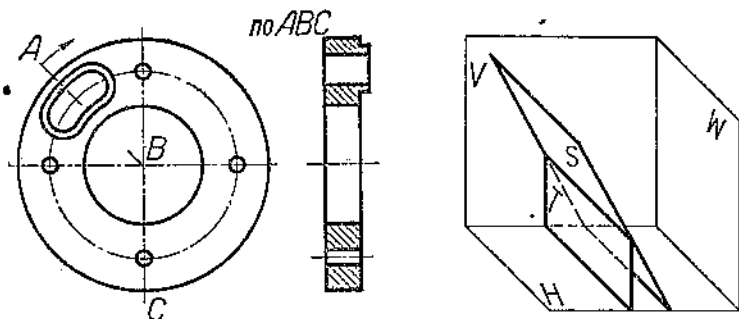


Черт. 402.



Черт. 403.

На чертеже 403 показаны два сложных разреза, из которых вертикальный разрез по ABB выполнен при помощи плоскостей S и T , а горизонтальный — ступенчатый по $CCDD$ — выполнен при помощи горизонтальных плоскостей P и Q .



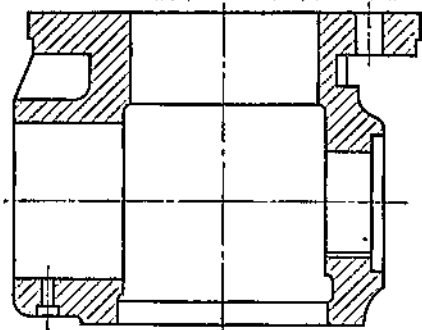
Черт. 404.

На чертеже 404 показан сложный разрез по *ABC*, выполненный при помощи наклонной плоскости *S* и вертикальной плоскости *T*, перпендикулярных к *V*.

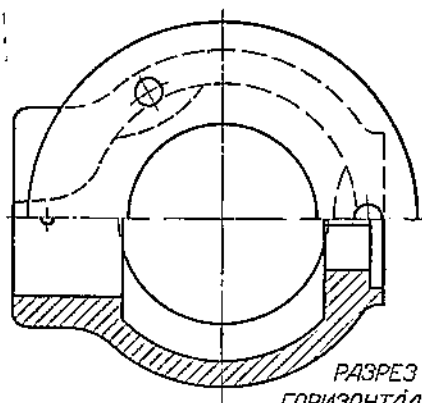
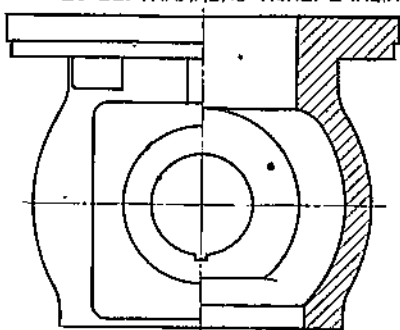
В зависимости от содержания различают разрезы: полный и частичный (вырыв).

Полный разрез характеризует все внутреннее устройство изображаемого предмета (черт. 405). В частичном разрезе выделяется лишь отдельный участок, обычно ограничиваемый волнистой линией, проведенной от руки (черт. 406).

РАЗРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНО-ПРОДОЛЬНЫЙ

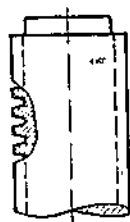


РАЗРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ



РАЗРЕЗ
ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ

Черт. 405.



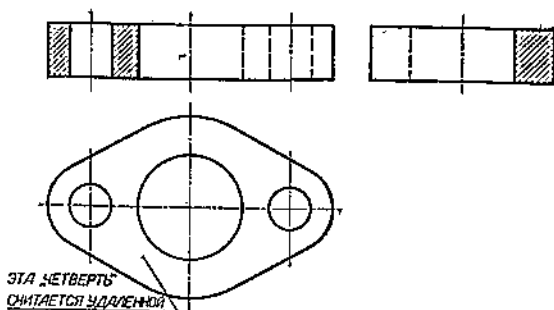
Черт. 406.

Если изображаемый предмет проектируется в форме симметричной фигуры на одну или на все плоскости проекций, то можно соединить половину наружного изображения и половину разреза, как это показано на чертеже 405 для горизонтальной и боковой проекций. Следует обратить внимание на то, что в этих случаях разрез отделяется от внешнего вида только осевой линией, а не сплошной, так как разрез является только воображаемым, а не существующим в натуре; между тем осевая линия может быть перекрыта только действительно существующей линией контура.

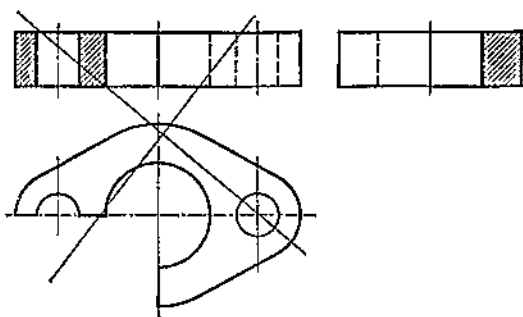
На чертежах 407 и 408, показан пример часто встречающегося неправильного толкования понятия „разрез“, который рассматривается как действительно проведенный в натуре вырез части предмета. Правильное изображение разреза показано на чертеже 407 в отличие от неправильного изображения на чертеже 408.

В случае сложных разрезов или когда линия разреза не совпадает с основными осевыми линиями, следует проводить особую линию разреза для указания направления, по которому произведен разрез. Плоскости разреза обозначаются буквами либо различными, либо одинаковыми для каждой отдельной плоскости (черт. 403 и 404).

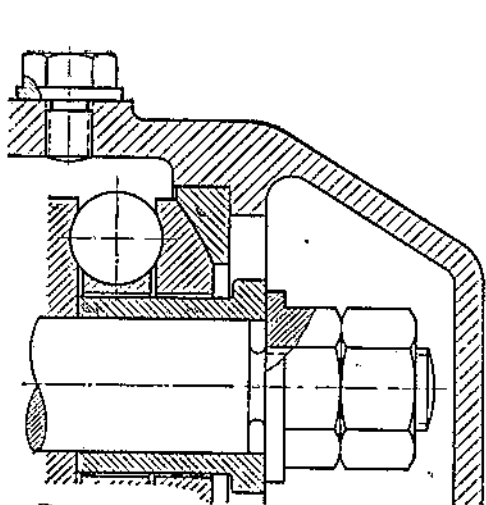
Если на чертеже изображается только часть всего разреза, остальное же не вычерчивается, то нет необходимости проводить линию, замыкающую выделяемую часть разреза (черт. 409).



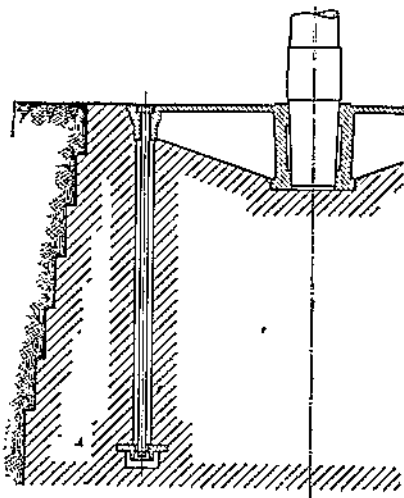
Черт. 407.



Черт. 408.

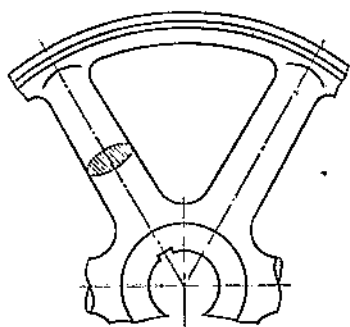


Черт. 409.

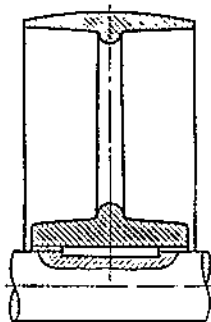


Черт. 410.

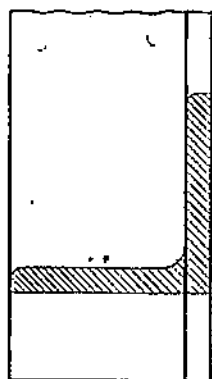
Некоторые детали или их части показываются непересеченными, хотя бы они и попали в плоскость разреза. Эта условность применяется для болтов, винтов, заклепок, шпонок, клиньев, шпилек, штифтов, сплошных валов и шпинделей, тяг, рукояток, шатунов, дышел, балок, крюков, цепей, шариков, зубцов, спиц, дисков, ребер; тонких стенок в том случае, если секущая плоскость направлена по их основной оси или вдоль длинного ребра (черт. 409 и 410). Каменная кладка или бетонный массив обычно показываются рассеченными целиком (черт. 410), но штриховка наносится только по границам контура.



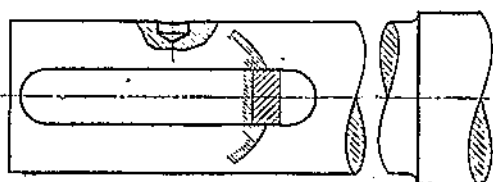
Черт. 411.



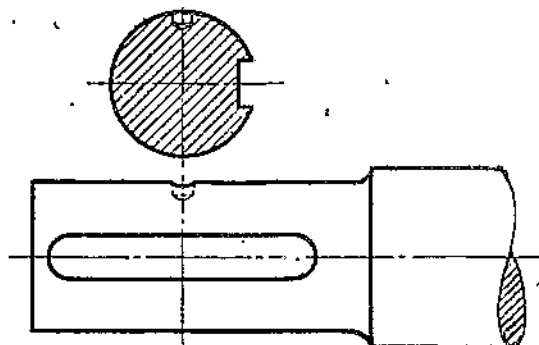
дисков, ребер; тонких стенок в том случае, если секущая плоскость направлена по их основной оси или вдоль длинного ребра (черт. 409 и 410). Каменная кладка или бетонный массив обычно показываются рассеченными целиком (черт. 410), но штриховка наносится только по границам контура.



Черт. 412.



Черт. 413.



Черт. 414.

Сечения. Сечения могут быть наложены на данный вид (черт. 411, 412 и 413) или вынесены на свободное место чертежа—лучше всего вдоль линии сечения (черт. 414). Сечения наложенные совмещаются с соответствующим видом, обводятся тонкими сплошными линиями, причем линии контура, проходящие через сечение, не прерываются (черт. 412).

Если наложенное сечение требуется для выяснения формы лишь определенного участка, то можно ограничиваться частью сечения с отштриховкой по его контуру (черт. 413).

§ 83. Линии чертежа и их обводка (ОСТ 355).

Стандарт устанавливает три типа линий, применяемых при обводке технических чертежей. Примерные толщины всех линий обводки выражены в зависимости от величины S , которая выбирается от 0,4 до 1,2 мм.

Изображаемые линии		Тип линий обводки	Толщина
Классификация	Назначение		
Линия видимого контура	Для внешнего и внутреннего очертания предмета в целом и всех его частей		S
Линия невидимого контура			$\frac{S}{2}$
Линии перехода видимые	Для очертания плавных переходов при пересечении поверхностей		S
Линии перехода невидимые			$\frac{S}{2}$
Линии излома (обрыва, вырыва) проводятся от руки	Для определения в месте излома (обрыва, вырыва) границ предметов, изображенных не целиком		$\frac{S}{2}$
Линии осевые и центровые	Для выявления геометрических осей, следов плоскостей симметрии и центров		$\frac{S}{4}$
Линии размерные	Для указания направления и границ измерения		$\frac{S}{4}$
Линии выносные	Для проведения между ними размерных линий вне контура		и меньше $\frac{S}{4}$
Линии разреза, не совпадающие с осевыми и центровыми линиями	Для обозначения следов секущих плоскостей		и меньше $\frac{S}{2}$
Линии вспомогательного назначения:			
1. Контурные пограничных деталей	Для уяснения связи между деталями		$\frac{S}{4}$
2. Контурные наложенных сечений	Сечения спиц, ребер и т. д.		$\frac{S}{4}$
3. Контурные наложенных проекций	Для частей, отпадающих при разрезах или находящихся перед вычерчиваемой деталью		$\frac{S}{2}$
4. Крайние положения механизма и очертания габарита	Для определения размеров или указания вариантов расположения		$\frac{S}{4}$
5. Линии начальных окружностей	Для черчения зубчатых колес		$\frac{S}{2}^1)$
6. Линии, соответствующие внутреннему диаметру резьбы	Для черчения резьбовых изделий		$\frac{S}{2}$
7. Штриховка	Для показания материала в местах разрезов и сечений		$\frac{S}{4}$
8. Рамки и т. п.	Для выделения поля чертежа, гранок, для графления таблиц и т. п.		$\frac{S}{2}$
9. Оси проекций, следы плоскостей	Для случаев сложных построений		$\frac{S}{4}$
10. Линии построения характерных точек			$\frac{S}{4}$

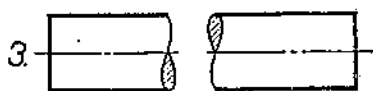
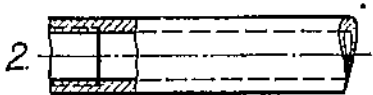
¹⁾ В проекте нового стандарта устанавливается толщина $\frac{S}{4}$.

При черчении штриховых и штрих-пунктирных линий следует проводить штрихи равной длины. В штриховых линиях, применяемых при вычерчивании линий невидимого контура, не следует брать штрихи длиной ниже 4 мм. Расстояния между штрихами примерно в 4 раза короче самих штрихов.

ДЕРЕВО



МЕТАЛЛ

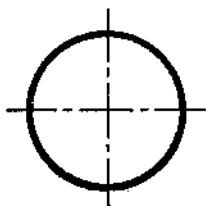


Черт. 415.

Линии разъема (место соприкосновения двух деталей) проводятся, как контурные, без удвоения (черт. 409).

Линии перехода во всех случаях проводятся той же толщины, как и контурные. При ярко выраженных округлениях линии перехода не доводят до линий контура (черт. 411).

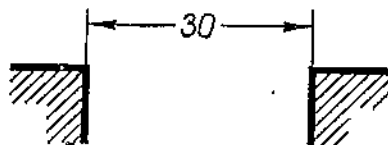
Линии излома, обрыва, вырыва должны быть для дерева зигзагообразными, а для металла слегка волнистыми (черт. 415).



Черт. 416.

Линии осевые и центровые вычерчиваются при помощи штрих-пунктирных линий с длиной штрихов примерно в 20 мм (или короче). Линии должны заканчиваться штрихами, а не точками. Центр окружности должен отмечаться пересечением штрихов (черт. 416).

Размерные и выносные линии проводятся обычно тоньше всех остальных линий чертежа. Стрелки должны иметь вид весьма острых углов, почти целиком залитых. Выносные линии должны выходить за концы стрелок размерных линий примерно на 2 мм (черт. 417).



Черт. 417.

Линии разреза выделяются только тогда, когда они совсем не совпадают или только частично совпадают с основными осевыми линиями. Так, на чертеже 405 нет

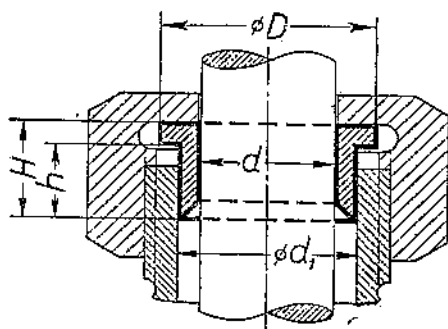
надобности в линиях разреза. В случаях же, подобных чертежу 404, проведение особых линий необходимо, причем в случае, если линия разреза ломаная, вершины углов в изломах должны образовываться пересечением штрихов.

Контурные пограничные деталей, вычерчиваемых лишь для определения положения основного изображаемого на данном

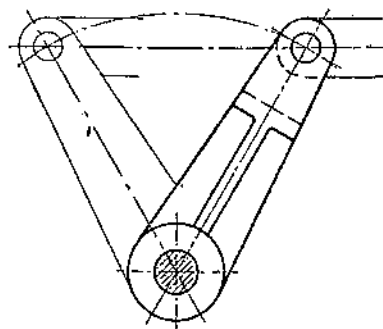
чертеже предмета, обводятся тонкими сплошными линиями (черт. 418).

Контуры наложенных сечений обводятся тонкой сплошной линией (черт. 412).

Крайние или сдвинутые положения механизма вычерчиваются тонкими сплошными линиями (черт. 419).

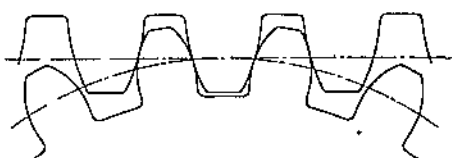


Черт. 418.



Черт. 419.

На чертеже 420 дан пример вычерчивания начальных окружностей, а на чертеже 421—линий, соответствующих дну впадин резьбы.



Черт. 420.



Черт. 421.

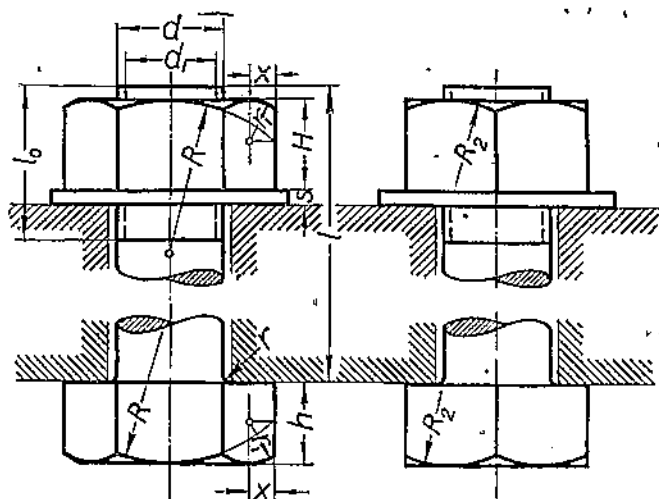
§ 84. Вычерчивание резьбовых изделий (ОСТ 356).

Для изображения резьбы, вне зависимости от ее профиля, величины диаметра, шага и т. д., по стандарту должна применяться штриховая линия, проводимая условно дну впадин профиля резьбы (черт. 421). Этот способ условного изображения резьбы применяется во всех видах болтов, гаек, шпилек и при изображении резьбы на различных деталях.

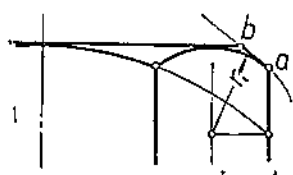
При вычерчивании шестигранных гаек кривые пересечения боковых граней с конусом (гиперболы) заменяются дугами окружностей, которые строятся по трем точкам.

Если для выполнения чертежа болта и гайки не требуется вполне точных размеров, то ОСТ 356 рекомендует вычерчивать болты, гайки и шайбы по следующим размерам, в зависимости от наружного диаметра d болта (черт. 422):

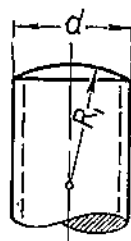
$$\begin{aligned} D &= 2d, & d_1 &= 0,85d, \\ H &= 0,8d, & D_{\text{ш}} &= 2,2d, \\ h &= 0,7d, & S &= 1,5d. \end{aligned}$$



Черт. 422.



Черт. 423.



Черт. 424.

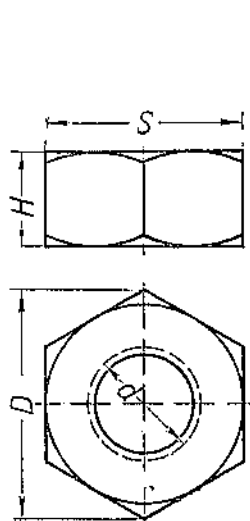
Из центра, лежащего на осевой линии, проводят радиусом $R = 0,75D = 1,5d$ дугу, продолжаемую до пересечения со всеми видимыми проекциями ребер шестигранника. Центр дуги радиуса r_1 находится так, как показано на чертеже 423; размер $x = \frac{D}{8}$.

Дуга, очерчиваемая радиусом r_1 , пересекает крайнее ребро в точке a (черт. 423); если чертеж достаточно крупный, то следует через точку a провести отрезок ab под углом примерно 30° к верхней торцевой поверхности. Этот отрезок будет служить изображением образующей конической заточки.

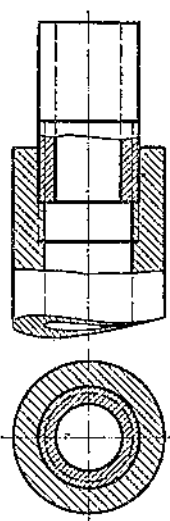
На боковой проекции видны только две грани гайки, и она вычерчивается, как показано на чертеже, причем $R_2 = d$ и центр лежит на расстоянии $\frac{S}{4}$ от осевой линии.

Если конец болта вычерчивается в виде сферы (черт. 424), то $R_1 = d$.

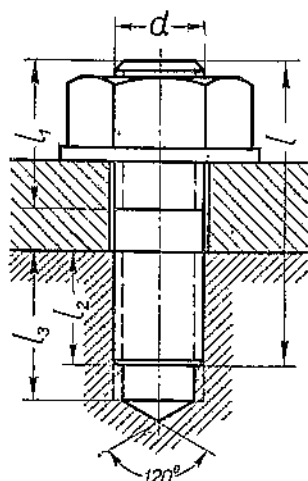
Если гайка вычерчивается отдельно от болта, то для упрощения работы она может изображаться двумя гранями, как показано на чертеже 425, если же гайка чертится на сборочном чертеже, то для определения правильности размещения ее необходимо поворачивать тремя гранями.



Черт. 425.



Черт. 426.



Черт. 427.

При вычерчивании в разрезе деталей, имеющих резьбу (черт. 426 и 427):

- 1) следует штриховку доводить до контурных линий;
- 2) штриховые линии, соответствующие дну впадин профиля резьбы в отверстии, следует условно доводить до конца отверстия;
- 3) угол при вершине треугольника (осевое сечение конического сверла) следует брать в 120° ;
- 4) основание треугольника равно внутреннему диаметру резьбы в отверстии (d_1);
- 5) сплошные линии, соответствующие наружному диаметру резьбы на болте, должны переходить в штриховые линии внутреннего диаметра резьбы на гайке, и, наоборот, сплошные линии внутреннего диаметра гайки переходят в штриховые линии внутреннего диаметра резьбы болта.

§ 85. Простановка размеров на чертежах.

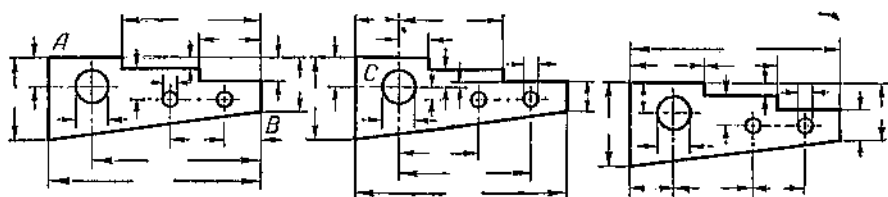
На чертеже должны быть поставлены в минимальном и достаточном количестве все те размеры, которые берут с чертежа при изготовлении изделия; при этом производитель должен быть освобожден от необходимости обмеров по чертежу

или определения нужных размеров путем соответствующих перерасчетов.

Размеры на чертеже наносят окончательные, т. е. те, которые относятся к готовому изделию.

Основные размеры детали указывают от обработанной поверхности.

Простановка размеров должна соответствовать требуемому способу изготовления изделия с учетом обусловленной при сборке точности и взаимной связи между размерами. Так, например, на чертеже 428 показаны 3 способа простановки размеров:



Черт. 428.

1) когда положение кромок и центров отверстий должно быть выдержано относительно верхнего края *А* и правого края *В* детали,

2) когда все размеры выдержаны по отношению к центру *С* отверстия,

3) когда условия работы и монтажа не требуют соблюдения размеров по отношению к определенным геометрическим элементам.

Проект стандарта устанавливает следующие положения:

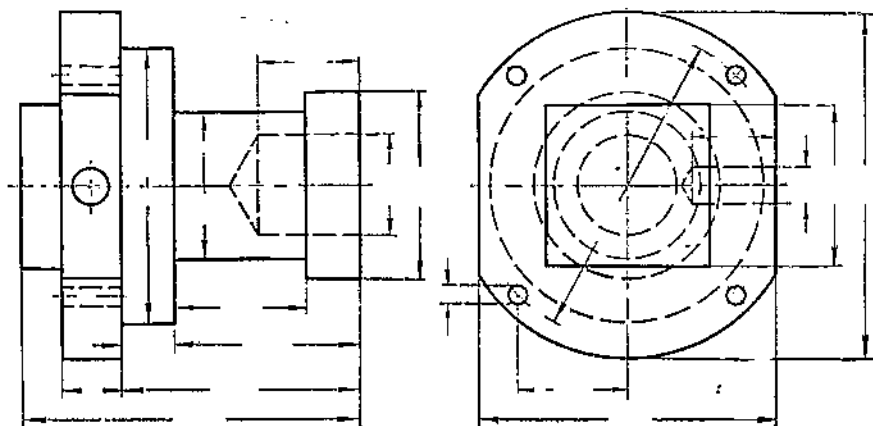
1. Основанием для суждения о действительных размерах служат только цифровые размеры, проставляемые на чертеже, независимо от масштаба последнего.

2. Размеры в машиностроительных чертежах проставляют, как правило, в миллиметрах без особых оговорок или указания при размерных числах единицы измерения (*мм*). Во всех случаях, когда приходится отступать от указанного правила, к соответствующим размерным числам следует присоединять обозначение единицы измерения.

3. Каждый размер, как правило, следует указать на чертеже только один раз. Исключение допускается в тех случаях, когда повторение размера облегчает чтение чертежа.

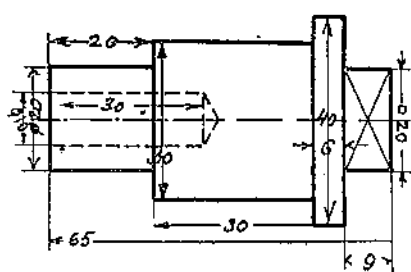
4. Для равномерного распределения размерных чисел по полю чертежа и для удобства чтения можно проставлять размерные числа как внутри контура проекций, так и вне его.

5. Размерные числа следует проставлять на размерных линиях в разрыве последних, по возможности ближе к их середине; размерные линии следует ограничивать стрелками. Размерные линии можно проводить между линиями контура, осевыми, центровыми и выносными (черт. 429).

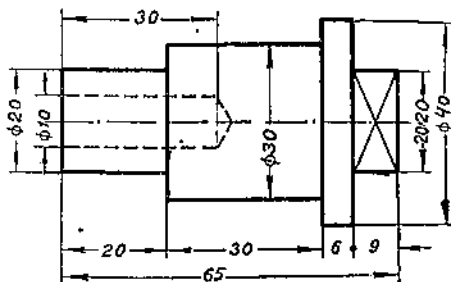


Черт. 429.

6. Выносные линии применяют только в том случае, когда размерные линии проводят непосредственно между линиями контура. Выносные линии можно проводить как вне, так и внутри контура.



НЕПРАВИЛЬНО



ПРАВИЛЬНО

Черт. 430.

7. Не допускается использовать линии контура, осевые, центровые и выносные в качестве размерных (черт. 430). Исключение допускается лишь при координировании точек криволинейного контура, когда размерные линии могут быть выносными (черт. 431).

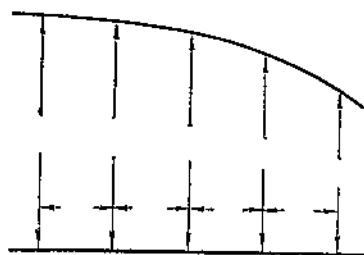
8. Размерные линии не должны служить продолжением линий контура, осевых, центровых и выносных (черт. 430).

9. Размерные и выносные линии проводят тонкими, сплошными с разрывом для простановки чисел.

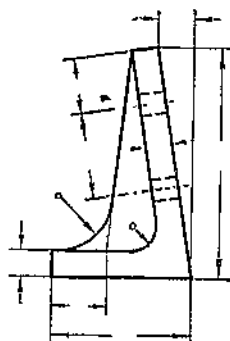
10. Размерные линии следует проводить параллельно тем отрезкам, размер которых указывается (черт. 432).

11. Выносные линии должны быть перпендикулярны к размерной линии. Проведение выносных линий не под прямым углом к размерной (черт. 433) допускается как исключение, равно

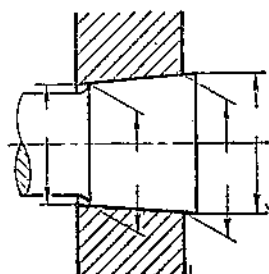
как в виде исключения допускается указание размеров по образцу чертежа 434 для мелких деталей, изображенных без достаточного увеличения.



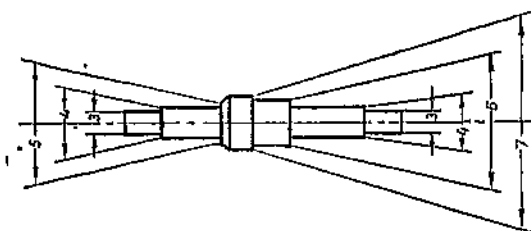
Черт. 431.



Черт. 432.

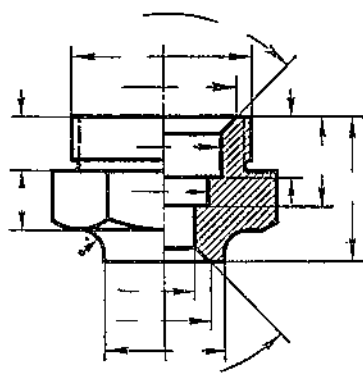


Черт. 433.



Черт. 434.

12. На проекциях и разрезах, вычерчиваемых только до оси симметрии, размерные линии обрывают, переходя несколько за ось (черт. 435 и 436).



Черт. 435.



Черт. 436.

13. Когда размерная линия проходит по заштрихованной поверхности, штриховку следует прервать только для простановки размерного числа (черт. 437).



Черт. 437.

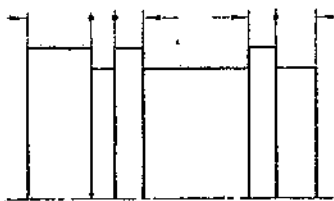


Черт. 438.

14. Стрелки, ограничивающие размерные линии, должны иметь вид весьма острых углов, почти целиком заливаемых при обводке тушью; тип стрелки указан на чертеже 438. Стрелки должны упираться острием в соответствующие линии контура, осевые, выносные и т. п. Величина стрелки выбирается в зависимости от толщины линий видимого контура и должна быть выдержана одинаково для всего данного чертежа.

15. Если при простановке размерного числа нет места для стрелок, то их ставят снаружи, обращая острие к соответствующим линиям контура, к выносным линиям и т. п. (черт. 432).

16. При наличии нескольких последовательно расположенных мелких размеров, при указании их в виде размерной цепочки, вынесенной за пределы контура, некоторые стрелки следует заменять точками на выносных линиях (черт. 439). Если такие размеры проставляют между линиями контура, размерную цепочку следует разрывать (черт. 440).



Черт. 439.

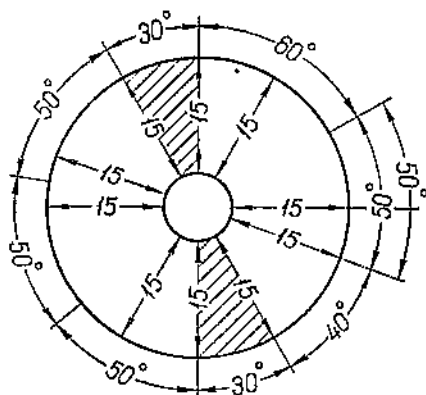


Черт. 440.

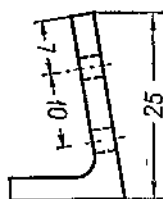
17. При указании размера радиуса дуги окружности стрелки следует ставить только у дуги, центр же дуги, если он не находится на пересечении осевых или центровых линий, следует выделять маленьким кружком (черт. 432).

18. Цифры размерных чисел следует наносить всегда вдоль размерных линий так, чтобы высота цифр располагалась перпендикулярно к этим линиям. Для определения расположения цифр при различных наклонах размерных линий следует руководствоваться размерной звездой (черт. 441). Следует, по возможности, избегать проведения размерных линий в пределах заштрихованных углов, как показано на чертеже 441; если этого нельзя избежать, то цифры следует располагать по общему правилу (черт. 442).

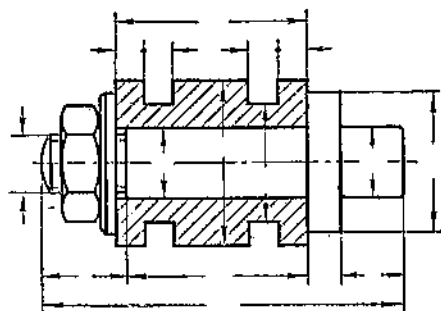
19. При простановке размеров углов в различных чертежах следует располагать цифры согласно чертежу 441.



Черт. 441.



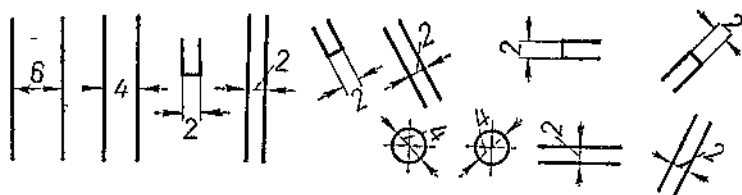
Черт. 442.



Черт. 443.

20. Цифры размерных чисел нельзя разделять или пересекать какими-либо линиями. Не допускается проставлять размерные числа в месте пересечения двух размерных линий. При необходимости следует прерывать осевую линию для простановки размерного числа (черт. 443).

21. При малых размерах измеряемых расстояний размерные числа следует проставлять согласно примерам, указанным на чертеже 444, причем цифры следует надписывать в соответствии с п. 18.

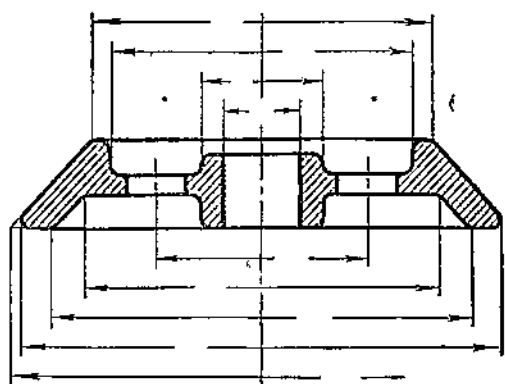


Черт. 444.

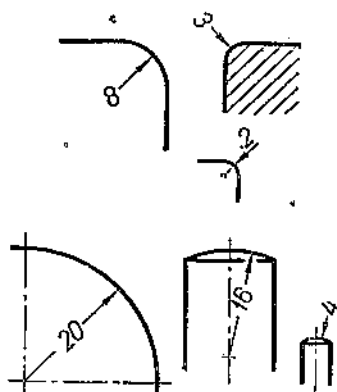
22. При нескольких размерных линиях, расположенных параллельно, размерные числа должны быть размещены в шахматном порядке (черт. 445).

23. При указании размеров смежных деталей в сборочных чертежах вынесенные цепочкой размеры должны быть отнесены к одной и той же детали (черт. 443). Исключение допускается для размеров, являющихся общими (черт. 448).

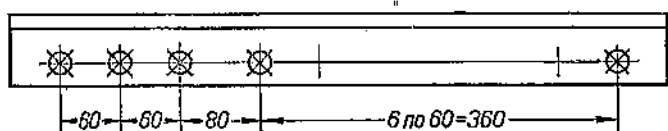
24. Внутренние и внешние размеры детали следует указывать раздельно (черт. 435).



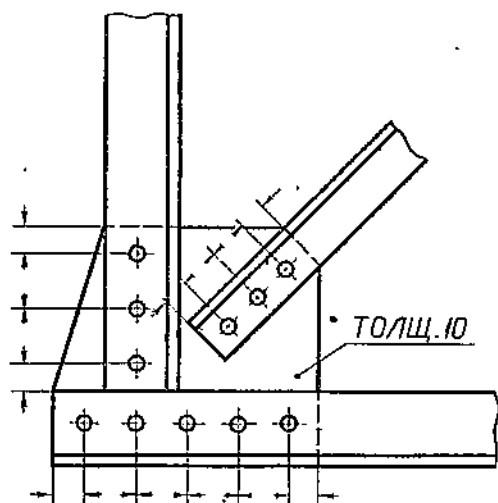
Черт. 445.



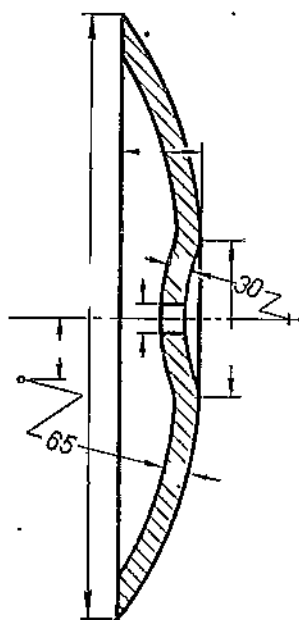
Черт. 446.



Черт. 447.



Черт. 448.

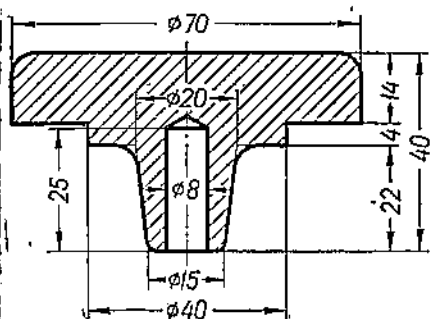


Черт. 449.

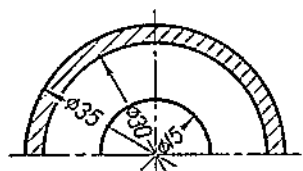
25. При расположении ряда одинаковых элементов (например отверстий) на равных расстояниях один от другого предпочтительно заменять длинные размерные цепочки числовыми указаниями (черт. 447) или соответствующей надписью.

26. Проставлять размеры радиусов следует согласно чертежу 446; располагать стрелку с внешней стороны следует при радиусе (на чертеже), меньшем 5 мм.

27. Когда центр дуги окружности из-за отсутствия места или при большой величине радиуса не может быть указан в пределах чертежа без нарушения масштаба, но показать центр необходимо для его координирования, размерную линию для простановки размера радиуса следует изображать согласно чертежу 449.

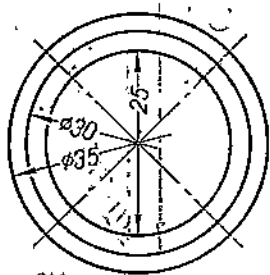


Черт. 450.

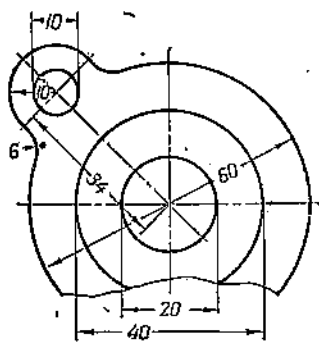


Черт. 451.

28. При простановке размера диаметра перед соответствующими размерными числами следует ставить условный знак диаметра ϕ , если не дается вид, на котором данное тело проектируется в виде окружностей (черт. 450). Этот знак следует давать также при указании диаметра окружности, которая хотя и проектируется в неискаженном виде, но изображена неполностью и размерная линия для диаметра проведена с обрывом (черт. 451). Необходимо ставить знак диаметра и в том случае, когда окружность изображена полностью, но размерная линия для диаметра проведена не полностью (черт. 452).

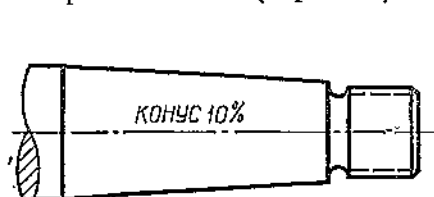


Черт. 452.

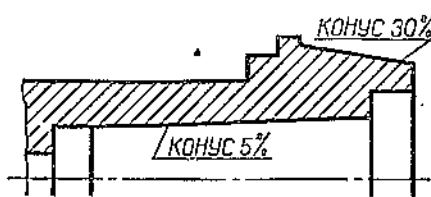


Черт. 453.

33. Конусность следует указывать надписью, располагаемой вдоль осевой линии (черт. 459), а в случае двух и более конических поверхностей, имеющих общую ось, — у соответствующей образующей, но параллельно оси (черт. 460). Надпись для указания уклона следует располагать рядом с соответствующей линией и параллельно ей (черт. 461).

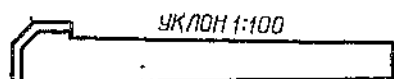


Черт. 459.

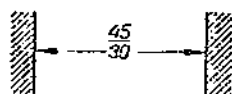


Черт. 460.

34. При изменении размера на чертеже следует первоначальное размерное число перечеркнуть так, чтобы его можно было легко прочесть, а новое размерное число надписать над прежним (черт. 462).



Черт. 461.



Черт. 462.

§ 86. Условные обозначения обработки поверхности.

Кроме размеров на каждом рабочем чертеже даются указания относительно обработки поверхности изделия. На прилагаемой (стр. 229) таблице (ОСТ 358) даны установленные обозначения указания обработки поверхностей.

Если все поверхности данной детали подвергаются обработке одного и того же характера, то делается общая надпись „обработка кругом“ и ставится один из указанных в таблице условных знаков, соответствующий поверхности, получаемой в результате обработки.

При наличии специальной отделки таковая указывается надписью, наносимой параллельно отмечаемой поверхности, при соответствующем условном знаке:



При наличии предусмотренной проверки на станке таковая также указывается надписью, наносимой параллельно отмечаемой поверхности при соответствующем условном знаке, предусмотренном таблицей.

Таблица условных обозначений обработки поверхности изделий.

	Обозначение поверхности на чертеже	Поверхность	Примерный перечень поверхностей, обозначаемых данным знаком
1		Черная	Поверхности частей машин, аппаратов и сооружений, обычно не соприкасающиеся с другими им подобными поверхностями
2		Черная, но чистая и ровная	Поверхности частей машин, аппаратов и сооружений, соприкасающиеся с другими, и ориентировочные; поверхности литых зубчатых колес; поверхности каналов в цилиндрах; поверхности чисто кованных и штампованных изделий
3		Чистая, грубые следы обработки	Все отверстия из-под сверла на проход и под нарезку; привалочные поверхности станин, кронштейнов, поверхности фланцев арматуры, чистых гаек и шайб и т. п.
4		Чистая, мало заметные следы обработки	Наружные поверхности шкивов; все расточки из-под резца шкивов, втулок и т. п.; рабочие поверхности цилиндров машин-двигателей; точно и неподвижно прилегающие поверхности; опорные поверхности клапанов и их седел; штоки машин
5		Высшая степень чистоты и ровности	Вращающиеся и скользящие (преимущественно цилиндрические) поверхности машин-двигателей; шейки валов, скалки насосов, рабочие поверхности калибров и других измерительных инструментов

§ 87. Сборочные чертежи, нумерация деталей и детализовка.

Сборочный чертеж представляет изображение совокупности деталей, соединенных первичной сборочной операцией в одно целое. На чертеже 463 дан пример простого сборочного чертежа, состоящего из пяти отдельных деталей.

Каждая деталь обозначается номером, который отмечается на чертеже в кружках на выносках вне контура проекции. Номер каждой детали указывают на сборочном чертеже один раз, по возможности — на главном виде.

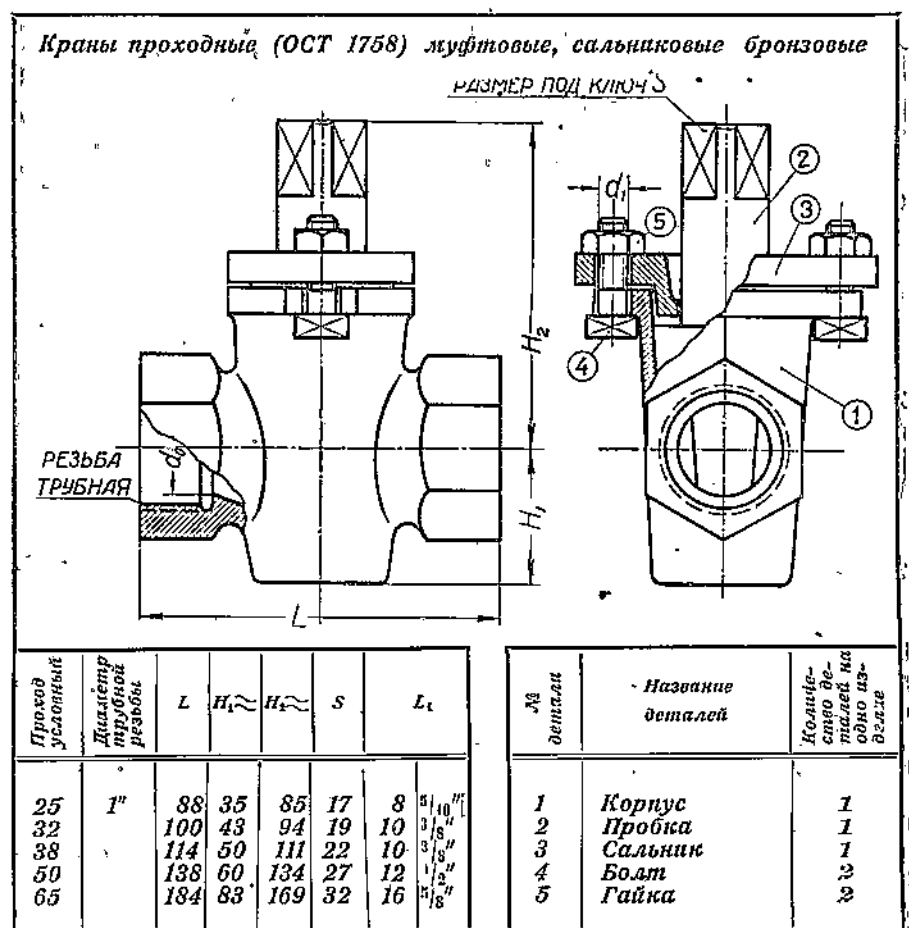
Как правило, выносить номер детали следует с того вида, где данная деталь спроектирована как видимая.

Кружки с номерами следует располагать по направлению, параллельному и перпендикулярному по отношению к направлению основной надписи на чертеже. Кружки, располагаемые по

направлению, параллельному направлению основной надписи, размещают по одной линии сверху или снизу проекции; кружки, располагаемые по направлению, перпендикулярному к направлению основной надписи, размещают по одной линии справа или слева от проекции. Располагать кружки в шахматном порядке допускается лишь в случае стесненности в размещении.

Для данного сборочного чертежа все кружки должны быть одного диаметра. Диаметр кружка должен быть не менее 8 мм. Кружки следует располагать по возможности равномерно. Расстояние между центрами двух смежных кружков должно быть не менее $2r + 2$ мм, где r — радиус кружка. Кружки следует обводить сплошной линией толщиной $\frac{S}{2}$ (ОСТ 355).

Для указания номеров следует брать размер шрифта ближайший больший, чем размер шрифта, выбранный для цифр размеров на том же чертеже.



Черт. 463.

На черт. 464 и 464а показаны образцы заводского чертежа ¹⁾ детали прибора для приближенного определения твердости металлов в единицах Брюнелля. Особенность этих чертежей, выполненных по итальянскому методу, состоит в том, что на одном чертеже показаны изменения габаритных размеров в последовательных процессах обработки, начиная с размеров заготовки. Все размеры показаны с допусками, т. е. с теми отклонениями от номинального размера, какие могут быть допущены при обработке. Такой способ исполнения рабочих чертежей применяется на ряде наших новых заводов, например на заводе Шарикоподшипник и др.

На чертеже 465 приведен пример сборочного чертежа предохранительного клапана со спецификационными данными и на отдельных форматках даны 13 деталей этого клапана.

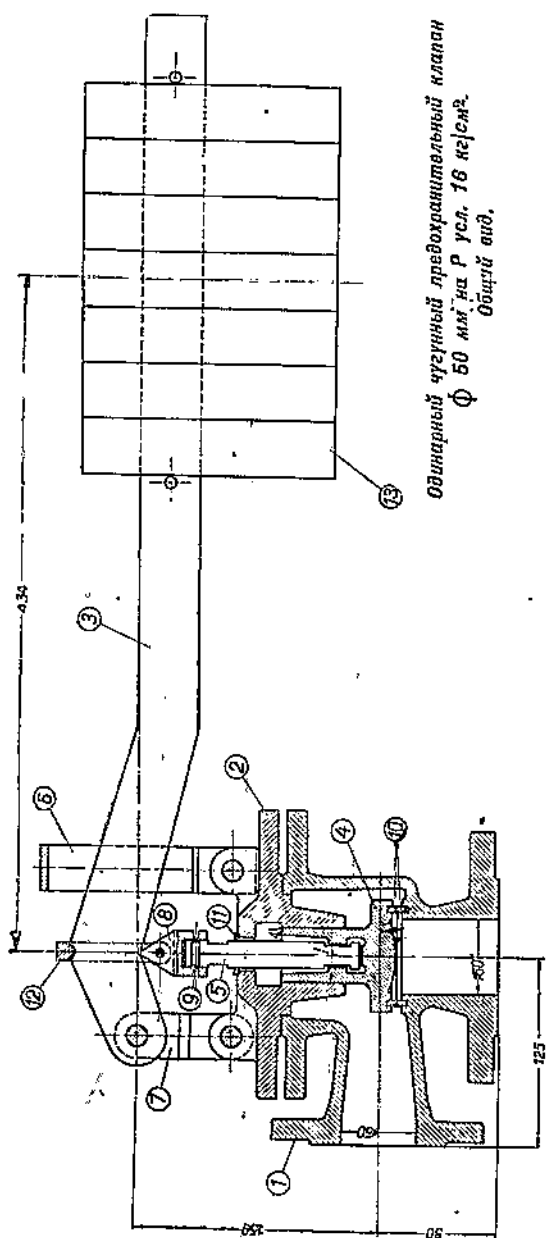
СПЕЦИФИКАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

к конструктивным чертежам одинарного чугунного предохранительного клапана ϕ 50 мм на P усл. 16 кг/см²

№ детали	Наименование деталей	Масштаб	Количество деталей на 1 изделие	Наименование материала
—	Общий вид . . .	1:5	—	—
1	Корпус . . .	1:5	1	Чугун
2	Крышка . . .	1:5	1	"
3	Рычаг . . .	1:5	1	Железо
4	Клапан . . .	1:2	1	Чугун
5	Опора . . .	1:2	1	Железо
6	Направляющая . . .	1:2	1	"
7	Серьга . . .	1:2	2	"
8	Ниж. оп. нож . . .	1:2	1	Подел. сталь
9	Скоба . . .	1:2	1	Железо
10	Кольцо . . .	1:2	2	Бронза
11	Сальник . . .	1:2	1	"
12	Верх. оп. нож . . .	1:2	1	Ковкий чуг.
13	Груз . . .	1:5	7	Чугун

к основным деталям за №6	Наименование нормализованных деталей	Количество на 1 изделие	Ост.
2,7	Болт чистый	1	1 716
	Шайба чистая	1	1 052
	Шплинт железный	1	150
3,7	Болт чистый	1	1 716
	Шайбы чистые	1	1 052
	Шплинт железный	1	150
2,6	Болт чистый	1	1 716
	Гайка чистая	1	1 038
8,12	Шплинт железн.	1	150

¹⁾ Эти чертежи любезно предоставлены для воспроизведения Государственным заводом испытательных приборов.

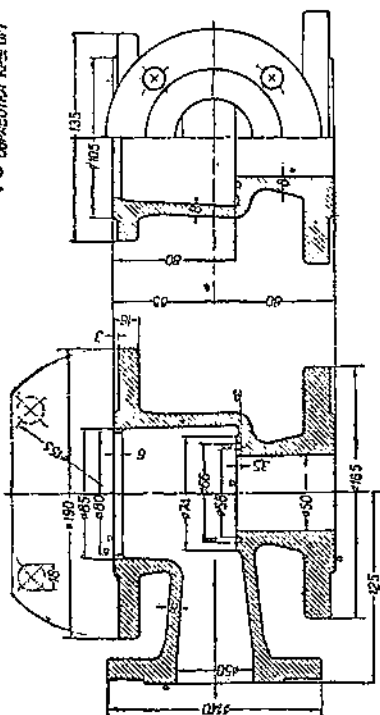


Однородный чугунный предохранительный клапан
 Φ 50 мм на Р усл. 16 кг/см².
 Общий вид.

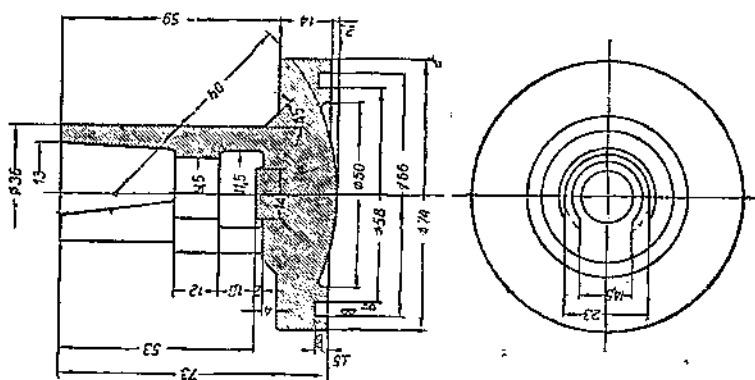
Черт. 465.

①

ОБРАБОТКА НЕИЗДА

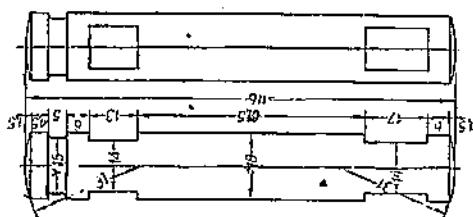


④ ОБРАБОТКА КРУГЛОМ

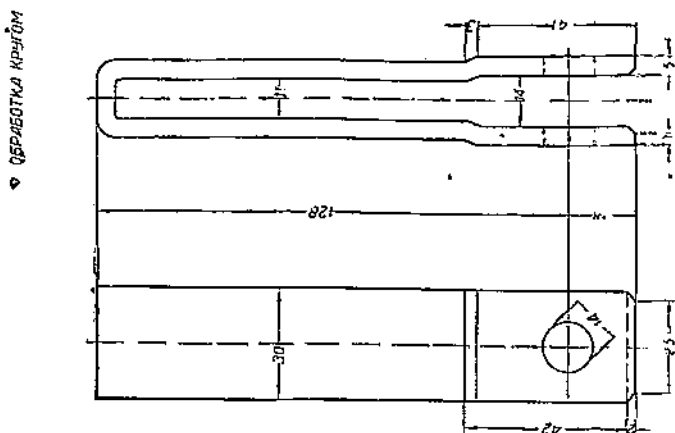


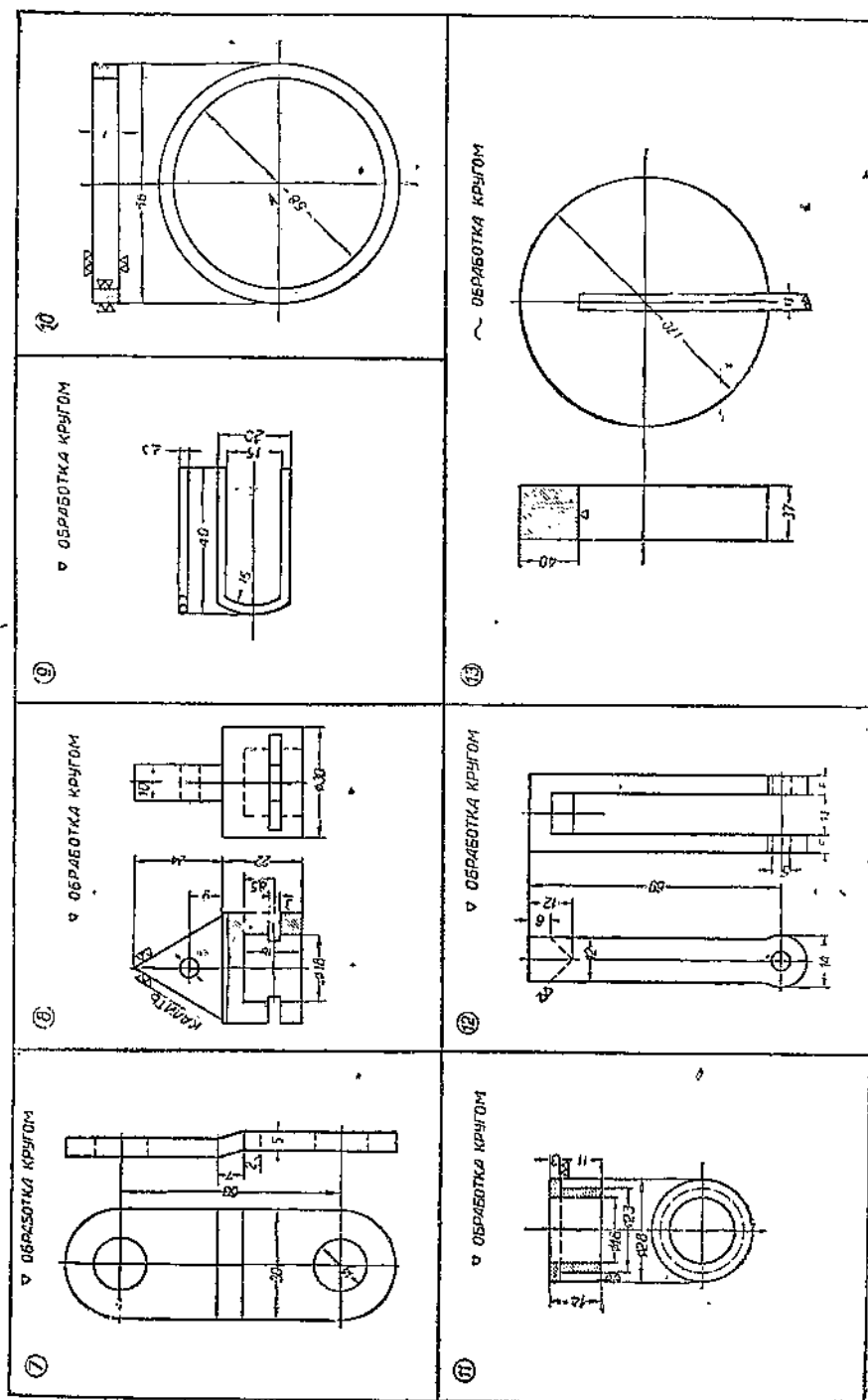
⑤

▽ ОБРАБОТКА КРУГЛОМ



⑥





§ 88. Условные изображения зубчатых соединений.

С целью облегчения процесса вычерчивания зубчатых соединений и их элементов на чертежах вводится система условных обозначений и приемов.

По аналогии с приемом вычерчивания резьбовых изделий в зубчатых колесах контур вершин зубцов вычерчивается сплошной линией, одинаковой по толщине с линией видимого контура. Линия дна впадин вычерчивается штриховой линией по типу линий невидимого контура. Начальные и делительные окружности обводят штрих-пунктирной линией по типу осевых и центровых линий. В этом пункте проект нового стандарта отменяет ОСТ 355, где для линий начальной окружности указана утолщенная штрих-пунктирная линия¹⁾.

В проекте стандарта условного изображения зубчатых соединений указываются три случая изображения зубчатых соединений:

1) изображения конструктивные — на рабочих чертежах деталей и сборочных чертежах, когда по чертежу должна быть понята во всех подробностях форма тела, его размеры и расположение;

2) изображения полусхематические — на общих видах, выполняемых в масштабе, и установочных чертежах, когда подробности конструкций могут быть опущены, но требуется ясное представление об основном габарите изображаемых деталей;

3) изображения схематические, в которых точное воспроизведение и размеры тела теряют свое значение и остается необходимость сохранить представление лишь о назначении детали.

На таблицах (черт. 466, стр. 238—240) даны изображения 4 групп зубчатых соединений:

Группа первая — зубчатые соединения между валами, оси которых параллельны, — цилиндрические передачи (№ 1—17);

вторая группа — зубчатые соединения между валами, оси которых пересекаются, — конические передачи (№ 18—29);

третья группа — разнovidности зубчатых зацеплений — цепная передача (№ 30—33) и храповой механизм (№ 34—36).

четвертая группа — зубчатые соединения между валами, оси которых перекрещиваются, — червячные передачи (№ 37—42);

Все передачи даны в трех изображениях: конструктивном, полусхематическом и схематическом.

В конструктивных изображениях цилиндрических и конических колес при выполнении разреза плоскостью, проходящей через оси обоих колес, конструкцию показывают во всех подробностях (черт. 1 и 18).

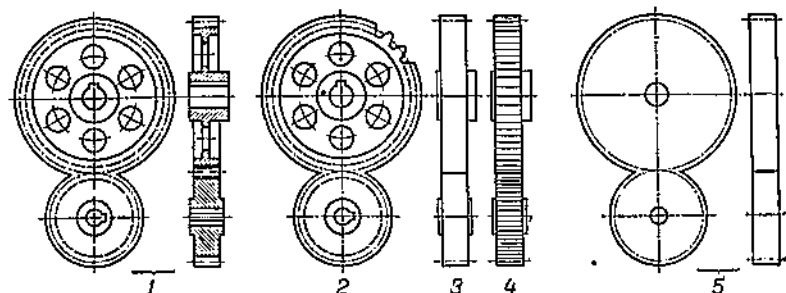
Если необходимо дать представление о размерах зуба, то это делают путем вырыва с частичным показом двух-трех зубов (черт. № 2 и 37).

¹⁾ В утвержденный во время печатания книги проект стандарта внесены незначительные изменения: во всех зубчатых передачах окружности вершин зубцов вычерчиваются полностью, причем часть дуги, соответствующая зубцам, находящимся во взаимном сцеплении, вычерчивается штрихпунктирной линией (фиг. 1, 2, 5, 6, 14, 16, 37, 38, 40). То же относится к рейкам и червякам.

ПЕРЕДАЧИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ

Конструктивное изображение

Полусхематическое изображение



Полусхематическое изображение

Схематическое изображение

Схематическое изображение механизмов

Внутреннее зацепление

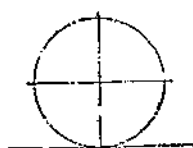
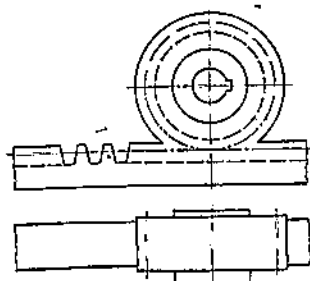
Черт. 466.

238

ЗАЦЕПЛЕНИЕ РВЕЧНОЕ

Конструктивное изображение

Схематическое изображение



16

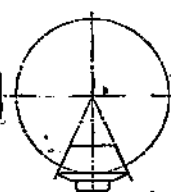
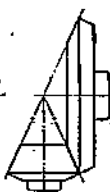
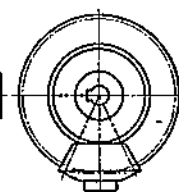
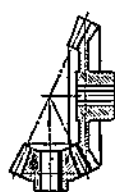
17

КОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ

1. Пересечение осей под прямым углом

Конструктивное изображение

Полусхематическое изображение



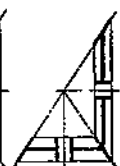
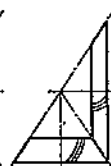
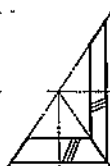
18

19

20

21

Схематическое изображение



22

23

24

25

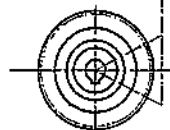
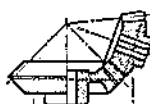
26

27

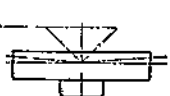
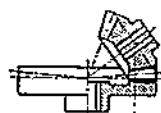
2. Пересечение осей под любым углом

Нормальное зацепление

Плоско-коническое зацепление



28

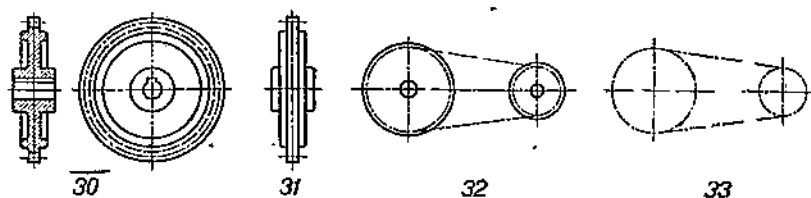


29

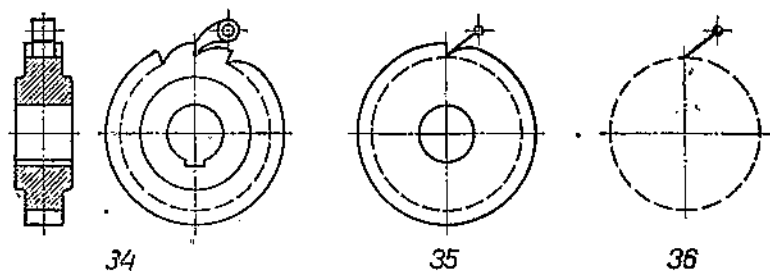
Черт. 466.

РАЗНОВИДНОСТИ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Цепная передача

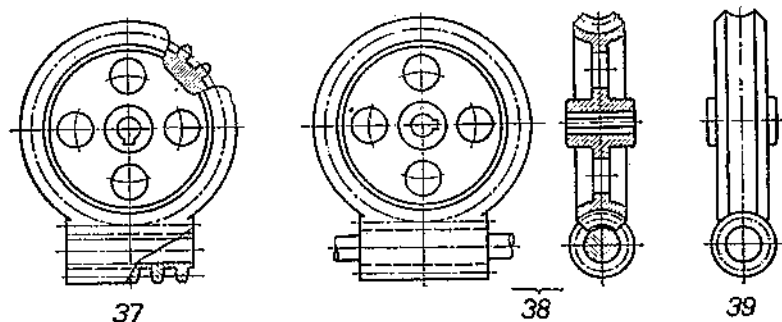


Храповой механизм



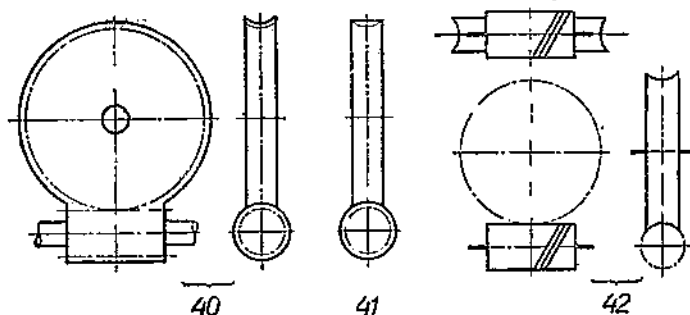
ЧЕРВЯЧНАЯ ПЕРЕДАЧА

Конструктивное изображение



Полусхематическое изображение

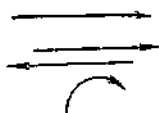
Схематическое изображение



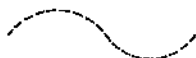
Черт. 466.

§ 89. Условные обозначения для кинематических схем.

1. Направление движения:
а) в одну сторону
б) возвратно-поступательное
в) вращательное



2. Траектория (путь) точки



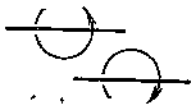
3. Геометрическая ось элемента



4. Вал, валик, ось, стержень, шатун, кривошип



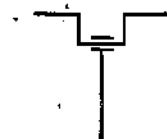
5. Вращение вала:
а) против часовой стрелки
б) по часовой стрелке



6. Вал коленчатый:
а) с одним коленом
б) больше чем с одним коленом



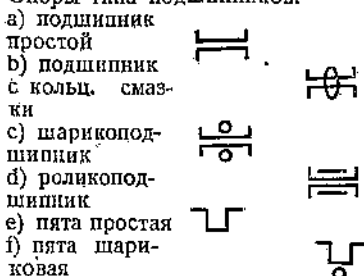
7. Преобразование движения вращательного в поступательное помощью коленчатого вала и шатуна



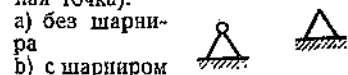
8. Стержень, валик, палец — с концом, закрепленным неподвижно



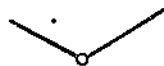
9. Опоры типа подшипников:



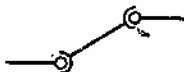
10. Опора неподвижная (закрепленная точка):



11. Шарнирное соединение двух стержней



12. Соединение стержней помощью шаровых шарниров

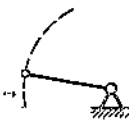


13. Стержень, движущийся в сквозной неподвижной опоре

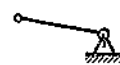


14. Шарнирное соединение, допускающее движение стержня по кругу:

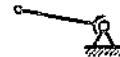
- а) в плоскости чертежа



- б) в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа



- в) в любом направлении



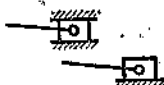
15. Жесткий угол



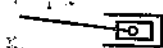
16. Жесткое соединение стержней, шарнирно-соединенных с третьим



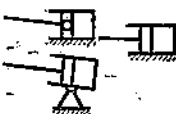
17. Ползун,двигающийся по неподвижным направляющим



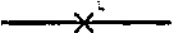
18. Ползун,двигающийся между подвижными направляющими



19. Кулиса

20. Цилиндр с поршнем и штоком:
а) неподвижный
б) качающийся

21. Шпонка глухая на валу



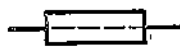
22. Шпонка, направляющая (скользящая) на валу



23. Шпонка подвижная на валу



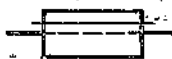
24. Втулка, свободно сидящая на валу



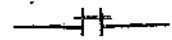
25. Втулка, сидящая на валу на глухой шпонке



26. Втулка, соединенная с валом направляющей (скользящей) шпонкой



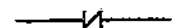
27. Соединение двух валов глухое



28. Муфта фрикционная



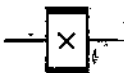
29. Соединение двух валов эластичное

30. Муфта сцепления кулачковая:
а) односторонняя
б) двухсторонняя31. Шкив на валу:
а) рабочий
б) холостой

32. Ступенчатый шкив на валу на глухой шпонке

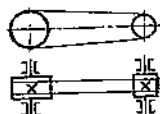


33. Маховик

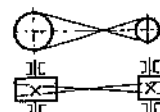


34. Передача ремнем:

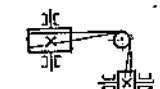
а) прямая



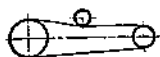
б) перекрестная



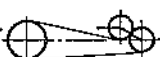
в) угловая



д) с натяжным роликом



е) лентикс



40. Гайка на винте, передающем движение:

а) разъемная



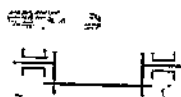
б) цельная



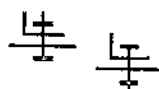
41. Эксцентрик



42. Валик, сидящий на эксцентрических втулках



43. Соединение заклепочное

44. Соединение болтами:
а) гайка сверху
б) гайка снизу

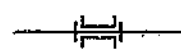
45. Соединение винтом



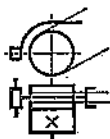
46. Соединение на шпильке



47. Установочное кольцо на валу



48. Отводка



49. Вал трансмиссионный на подвеске



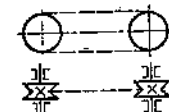
50. Вал трансмиссионный на кронштейне



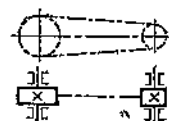
51. Вал трансмиссионный в подшипнике на козлах



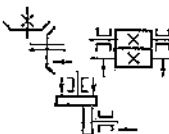
35. Передача шнуром



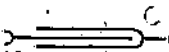
36. Передача цепью



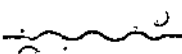
37. Передача фрикционная



38. Телескопическое соединение



39. Винт, передающий движение



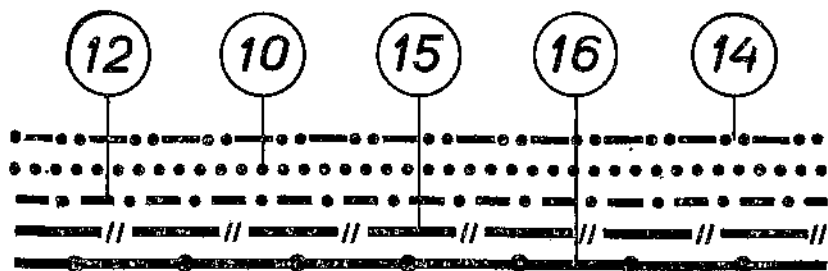
§ 90. Условные обозначения трубопроводов, несущих жидкости и газы.

Для изображения трубопроводов в схематических чертежах пользуются черными или цветными линиями, изображающими оси трубопроводов.

№ по порядку	Содержимое трубопроводов	Условное обозначение	Цветные обозначения	
			Цвет	Краски
1	Жидкость или газ, преимущественные в данном проекте или установке		Черный	Тушь черная
2	Вода		Зеленый	Гуммигут с лазурью или любая зеленая
3	Пар		Красный	Киноварь, или сурик, или кармин
4	Воздух		Голубой	Лазурь или кобальт
5	Газ		Желтый	Гуммигут, или охра, или любая желтая
6	Нефть		Фиолетовый	Кармин с лазурью или любая фиолетовая
7	Масло		Коричневый	Сиенна желтая
8	Кислота		Розовый	Любая красная, слабо разведенная
9	Щелочь		Серо-коричневый	Сепия
10	Вакуум		Светлосерый	Черная тушь, слабо разведенная

Для более детальных подразделений трубопроводов по их содержанию (например вода чистая, вода теплая и т. п.) обозначают линии цифрами, поставленными в кружках (черт. 467).

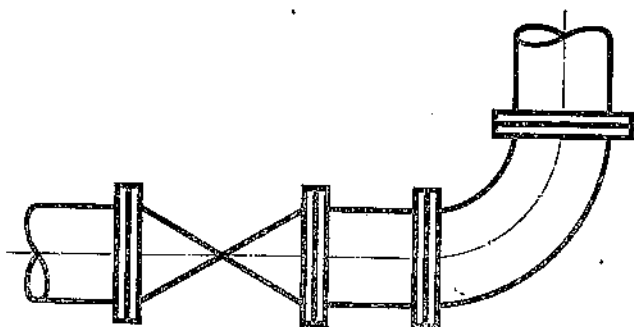
Если по условиям масштаба трубопровод показывают не в одну линию, а двумя параллельными линиями, то крайние образующие цилиндра трубы можно проводить в виде сплошных черных линий карандашом или тушью с закраской поля между ними



Черт. 467.

соответствующей краской, причем арматура и фасонные части могут быть также закрашены сплошь (черт. 468).

Условные обозначения трубопроводов на данном чертеже должны быть одной толщины.



Черт. 468.

§ 91. Условные обозначения допусков на чертежах.

При изготовлении изделий по чертежу принимаются во внимание номинальные размеры, указанные на чертеже, с теми отклонениями, которые допускаются в зависимости от характера и назначения изделия.

Предельные отклонения от номинального размера указываются двумя величинами отклонения от номинального размера, между которыми заключается действительный размер детали.

Допуски обозначаются рядом с номинальным размером числовой величиной или условными обозначениями, если отклонения назначаются по общесоюзным стандартам системы допусков и посадок.

Верхнее и нижнее отклонения указываются одно над другим, верхнее — выше размерной линии, нижнее — под размерной линией.

Примеры:

$$\begin{array}{l}
 \leftarrow \text{---} \phi \ 100 \begin{array}{c} +0,3 \\ +0,1 \end{array} \text{---} \rightarrow \\
 \leftarrow \text{---} \phi \ 100 \begin{array}{c} +0,1 \\ -0,3 \end{array} \text{---} \rightarrow \\
 \leftarrow \text{---} \phi \ 100 \begin{array}{c} -0,02 \\ -0,05 \end{array} \text{---} \rightarrow
 \end{array}$$

Первое обозначение показывает, что действительный размер лежит в пределах от 100,3 мм до 100,1 мм. Второе обозначение показывает, что диаметр имеет действительный размер между 99,7 мм и 100,1 мм, и, наконец, третье обозначение указывает, что действительный размер не меньше 99,95 мм, и не больше 99,98 мм.

Отклонение, равное нулю, на чертеже не проставляется.

Примеры:

$$\begin{array}{r} \text{—} 100 \begin{array}{l} +0,2 \\ -0,2 \end{array} \text{—} \\ \text{—} 160 \text{—} \end{array}$$

Первое обозначение показывает, что верхняя граница действительного размера равна 100,2 мм, а нижняя граница 100 мм; второе обозначение показывает, что верхняя граница равна 150,0 мм, а нижняя 99,8 мм.

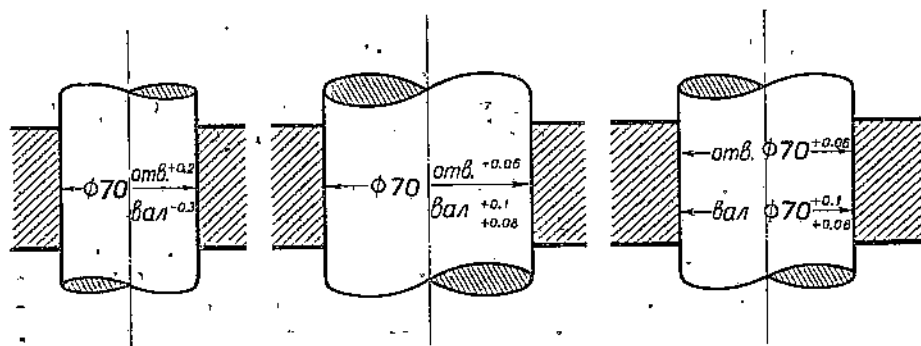
При одинаковых абсолютных величинах верхнего и нижнего отклонения ставится общая абсолютная величина со знаком $\pm$, например,

$$\text{—} 100 \pm 0,5 \text{—}$$

означает, что верхняя граница действительного размера составляет 100,5 мм, а нижняя граница 99,5 мм.

Отклонения размеров деталей, изображаемых на чертеже в собранном виде, обозначаются в виде дроби: в числителе (рекомендуется над размерной линией) даются отклонения отверстия, а в знаменателе (рекомендуется под размерной линией) — отклонения вала. При этом впереди цифр отклонений рекомендуется делать надписи, поясняющие, к какой детали относятся отклонения.

Примеры (черт. 469).



Черт. 469.

В случае, когда для деталей, показанных в собранном виде, должны быть указаны 3 или 4 величины отклонений (т. е. не более чем одно отклонение равно нулю), допускается проводить две размерные линии и отдельно указывать отклонения охватывающей и охватываемой деталей с надписями, к какой из деталей относятся отклонения.

§ 92. Снятие эскизов с натуры.

Эскизы являются первоначальными чертежами и служат материалом для составления рабочего исполнительного чертежа, поэтому эскиз должен содержать все необходимые данные для составления чертежа. От чертежа эскиз отличается простотой приемов исполнения при наличии аккуратной разработки всех элементов.

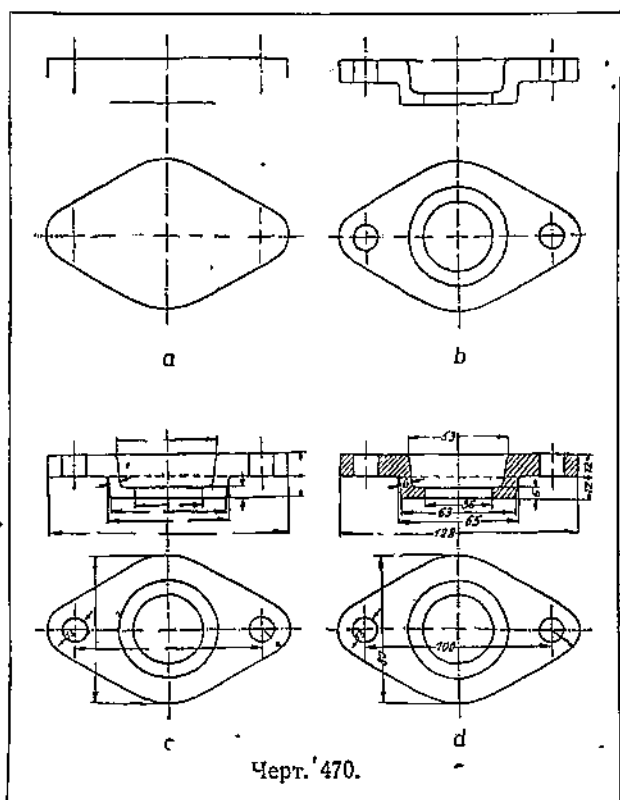
Эскизы удобнее всего делать на клетчатой бумаге, которая облегчает проведение линий и правильное взаимное расположение проекций.

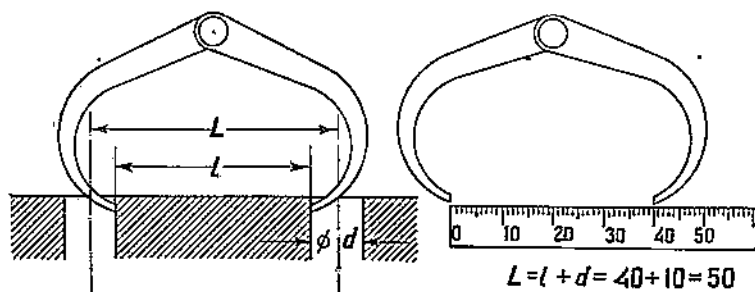
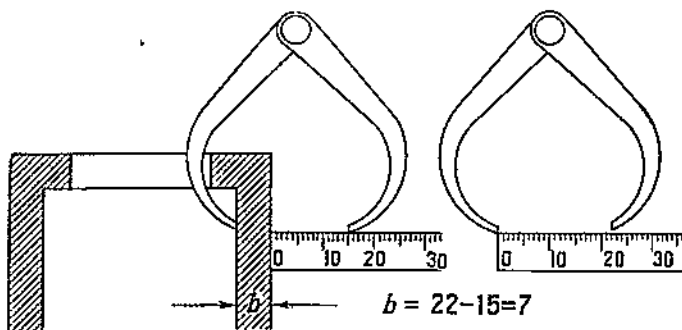
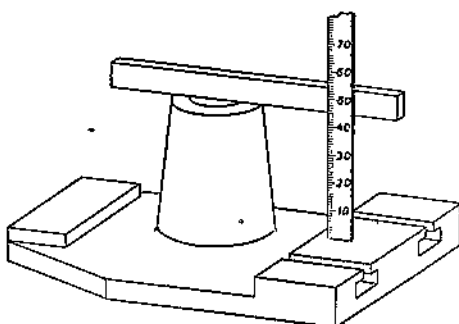
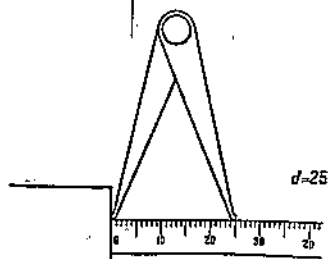
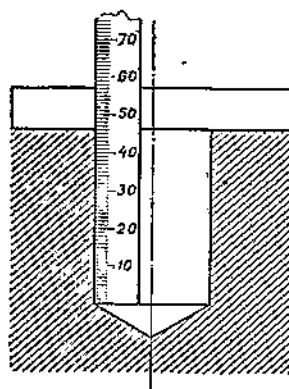
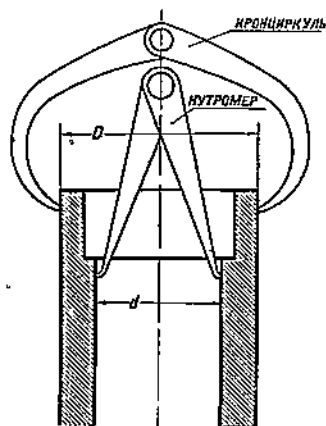
При составлении эскизов с натуры следует прежде всего установить модель в рабочем положении, выбрать направление главного вида, выяснить число необходимых проекций, установить направление основных осей и центровых линий.

Определив затем на-глаз габаритные размеры каждой проекции, намечают место каждой проекции, проводят осевые, центровые линии и основные контурные линии от руки в пределах глазомерной точности на клетчатой бумаге.

Затем постепенно вырисовывают все видимые контурные линии и выявляют разрезы.

В дальнейшей стадии работы окончательно наносят все видимые и невидимые контурные линии со всеми линиями:





перехода и всеми размерными линиями, соблюдая при этом все-указанные в § 85 правила простановки размеров.

После проведения размерных линий устанавливают действительные размеры путем обмера натуре, вписывают числовые размеры на размерные линии и штрихуют разрезы.

Последовательный ход выполнения эскиза с натуре показан на примере чертежа 470, а, б, в, г.

При обмерах детали пользуются измерительными приборами: кронциркулем, нутромером, штангенциркулем и др. На чертеже 471, показаны приемы, применяемые при обмерах.

§ 93. Шрифт для надписей.

На стр. 250—253 даны установленные стандартные образцы шрифтов для надписей. Буквы пишут наклонно по отношению к строке, угол наклона 75° .

В русском алфавите выделено 8 размеров шрифтов: № 20, № 14, № 10, № 7, № 5, № 3,5, № 2,5, № 1,5. Размер шрифта представляет высоту заглавных букв в миллиметрах. Высота строчных букв составляет $\frac{2}{3}$ вышины заглавных или достигает вместе с отрезками высоты заглавных. Из 8 размеров русского алфавита два размера (20 и 1,5) рекомендуется по возможности не применять.

В латинском алфавите даны размеры: № 7, № 5 и № 3,5.

Толщину обводки букв надо брать равной приблизительно $\frac{1}{8}$ высоты шрифта. Расстояние между строками в надписи составляет 5 мм для шрифтов № 5 и выше и равно высоте шрифта для № 3,5 и № 2,5.

Если надпись составлена из одних заглавных букв, то расстояния между буквами следует брать приблизительно такими, как показано в образцах шрифтов. При сочетании некоторых букв, например Г и А, Г и Д, Р и А, Т и А и т. п., получается кажущееся увеличение расстояния между буквами; в этих случаях следует уменьшать обычное расстояние между буквами (см. слова „кран“, „станок“, „гайка“ на стр. 252).

А Б В Г Д Е Ж

З И К Л М Н О

П Р С Т У Ф Х

Ц Ч Ш Щ Ъ Ы

Э Ю Я 1 2 3 4

5 6 7 8 9 0 №

а б в г д е ж з и к л

м н о п р с т у ф х

ц ч ш щ ъ ы ь э ю я

№10

**АБВГДЕЖЗИКЛ
МНОПРСТУФХ
ЦЧШЩЫЬЭЮЯ
1234567890 №
абвгдежзиклмно
прстуфхцчшщыв
эюя**

№7

**АБВГДЕЖЗИКЛМНОП
РСТУФХЦЧШЩЫЬЭЮ
Я 1234567890 №
абвгдежзиклмнопрст
уфхцчшщывэюя**

№5

АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУ
ФХЦЧШЩЫЬЭЮЯ

1234567890 №

абвгдежзиклмнопрстуфхцчшщ
ыьэюя

№3,5

АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЫ
ЬЭЮЯ 1234567890 №

абвгдежзиклмнопрстуфхцчшщыьэюя

№2,5

АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЫ
ЬЭЮЯ 1234567890 №

абвгдежзиклмнопрстуфхцчшщыьэюя

КРАН СТАНОК

ГАЙКА 41 712

№7

ABCDEFGHIJKLMNO

PQRSTUVWXYZ

VII XV XIII

abcdefghijklmnopqrstu

vwxyz

№5

ABCDEFGHIJKLMNOPS

TUVWXYZ VII XV XIII

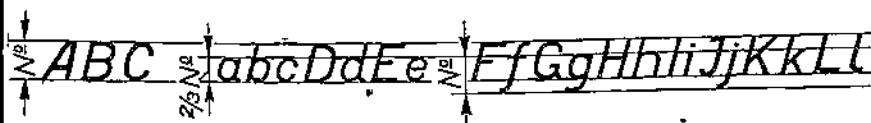
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz.

№3,5

ABCDEFGHIJKLMNOPS

TUVWXYZ VII XV XIII

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz



ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

Стр.

ЧЕРТЕЖНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ.

1. Готовальня	5
2. Чертежная доска	9
3. Рейсшина, линейки и угольник	—
4. Масштабная линейка	11
5. Лекала	12
6. Транспортёр	13
7. Прочие принадлежности для черчения	—
8. Исполнение чертежей на классной доске	15

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЧЕРЧЕНИЕ.

I. Геометрические построения.

§ 9. Геометрические образы на плоскости и их изображение на чертеже. Условия точности	16
§ 10. Задачи на построение, геометрическая оценка решения	18

II. Примеры задач на построение.

11. Проведение перпендикулярных линий	20
12. Построение параллельных прямых	23
13. Построение углов	25
14. Деление отрезка на равные части	27
15. Деление угла на равные части	29
16. Построение треугольников	30
17. Построение многоугольника, равного данному	31
18. Построение фигур, имеющих оси симметрии	32
19. Построение фигур при помощи координат	33
20. Построение окружности, проходящей через две, через три данные точки	34
21. Деление отрезка на пропорциональные части	—
22. Сопряжения прямой и дуги окружности	37
23. Сопряжение окружностей и прямых дугами окружности	45
24. Построение подобных фигур	54
25. Построение правильных вписанных и описанных многоугольников	56
26. Выпрямление дуги окружности	59
27. Построение коробовых и овоидальных кривых	60
28. Кривые, вычерчиваемые по точкам при помощи лекал	61
29. Эллипс	62
30. Парабола	66
31. Гипербола	70
32. Циклоиды	73
33. Построение кривой по ее уравнению	77

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ПРОЕКЦИОННОЕ ЧЕРЧЕНИЕ.

Стр.

Введение.

§ 34.	Способы отображений трёхмерных фигур на плоскости	82
-------	---	----

Глава I. Ортогональная проекция на одну плоскость.

§ 35.	План	84
§ 36.	Проекция точки, прямой и плоскости	85
§ 37.	Высота точки над плоскостью проекций	86
§ 38.	Пример	—
§ 39.	Построение истинной величины отрезка:	88
§ 40.	Параллельное перемещение плоскости проекций	89
§ 41.	Угол наклона прямой к плоскости. Крутизна	91
§ 42.	Параллельные прямые и их проекции	—
§ 43.	Плоскость и ее отображение на плоскости проекций. Высотные линии (горизонтали, изогипсы)	92
§ 44.	Линия сечения двух плоскостей, изображенных горизонталями	93
§ 45.	Линия ската (направленные наибольшей крутизны)	94
§ 46.	Крутизна наклонной плоскости	95
§ 47.	Определение истинной величины плоской фигуры путем совмещения с горизонтальной плоскостью проекций	—
§ 48.	Примеры	96
§ 49.	Конус крутизны	98
§ 50.	Прямой угол и его горизонтальная проекция	100
§ 51.	Проекция прямоугольной системы осей координат на плоскость	102

Глава II. Основы [аксонометрических] проекций.

§ 52.	Построение прямоугольной аксонометрической проекции куба	103
§ 53.	Изометрическая проекция куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы и правильной пирамиды	107
§ 54.	Изометрическая проекция прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса	109
§ 55.	Косоугольная аксонометрическая проекция. Кабинетная проекция	111

Глава III. Ортогональная проекция на две и на три взаимно перпендикулярные плоскости.

§ 56.	Основные понятия. Проекция точки	116
§ 57.	Изображение отрезка в ортогональных проекциях на горизонтальную и вертикальную плоскости	119
§ 58.	Определение истинной величины отрезка, заданного проекциями на горизонтальную и вертикальную плоскости	121
§ 59.	Следы прямой на плоскостях проекций. Угол между прямой и плоскостями проекций	123
§ 60.	Пересекающиеся и скрещивающиеся прямые	125
§ 61.	Проекция плоских фигур	126
§ 62.	Отображение плоскости ее следами	128
§ 63.	Взаимное положение прямой и плоскости	132
§ 64.	Взаимное положение двух плоскостей	135
§ 65.	Определение истинной величины плоской фигуры путем совмещения ее с одной из плоскостей проекций	142
§ 66.	Определение истинной величины плоской фигуры путем вращения ее вокруг горизонтальной или фронтальной линии	150
§ 67.	Построение угла между прямой и плоскостью и угла между двумя плоскостями	152
§ 68.	Проектирование на три взаимно перпендикулярные плоскости	—

Глава IV. Многогранники.

§ 69.	Изображение многогранников и их сечений плоскостями	156
§ 70.	Изображение правильных многогранников	162

Глава V. Цилиндр, конус, шар.

§ 71. Изображение цилиндра и его развертки	166
§ 72. Изображение конуса и его развертки	171
§ 73. Шар и его изображение	173
§ 74. Сечение конуса и шара плоскостями	175
§ 75. Примеры сечений тел вращения плоскостями	182

Глава VI. Взаимное пересечение тел.

§ 76. Точка пересечения прямой с поверхностью многогранника и тел вращения	186
§ 77. Взаимное пересечение тел	190
§ 78. Примеры применения кривых перехода в изображениях деталей машин	198
§ 79. Построение проекций винтовой линии	201

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

ВЫПОЛНЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ.

§ 80. Типы технических чертежей. Масштабы	204
§ 81. Расположение видов (проекций) на чертеже	206
§ 82. Разрезы и сечения	208
§ 83. Линии чертежа и их обводка	215
§ 84. Вычерчивание резьбовых изделий	217
§ 85. Проставка размеров на чертежах	219
§ 86. Условные обозначения обработки поверхности	228
§ 87. Сборочные чертежи, нумерация деталей и деталировка	229
§ 88. Условные изображения зубчатых соединений	237
§ 89. Условные обозначения для кинематических схем	241
§ 90. Условные обозначения трубопроводов, несущих жидкости и газы	244
§ 91. Условные обозначения допусков на чертежах	245
§ 92. Снятие эскизов с натуры	247
§ 93. Шрифт для надписей	249