ритон Фрай

Элементарный курс диференциальных уравнений

ГТТИ 1933

ТОРНТОН ФРАЙ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРС ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

перевод с английского
Ю. А. РОЖАНСКОЙ
под редакцией
В. В. СТЕПАНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

ГТТИ 11—5—2

ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

by THORNTON C. FRY, Ph. D

MACMILLAN AND CO. LONDON. 1929

Редакционную работу по этой книге провел *Г. А. Вольнерт.* Издание оформила *О. Н. Персиянинова.* Корректуру держал *И. П. Загрядсков.* Наблюдал за выпуском *Н. А. Сахаров.* Рукопись сдана в производство 21—XII—31 г. Листы подписаны к печати 4 XI. Книга вышла в свет в ноябре в количестве 20 000 экз., на бумаге формата $62\times94/_{16}$. Печатных знаков в листе 51744. Листов в книге $12^{1}/_{16}$. Заказ № 4432. ГТТИ № 1. Уполн. Главлита № Б—21347

Фабрика книги «Красный пролетарий», Москва, Краснопролетарская 16.

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Появляющийся в русском переводе «Курс диференциальных уравнений» Торнтон Фрая имеет своей целью изложение этой главы математики для читателя, которому нужно научиться прилагать методы диференциальных уравнений к задачам физики и техники. Курс написан своеобразно и с большим вкусом. Теоретический материал несколько сжат и сокращен в сравнении с обычными учебниками; однако и при отсутствии строгого доказательства автор всегда отмечает принципиальную постановку вопроса и дает ясно понять, что именно в тексте осталось недоказанным. Особо следует отметить блестяще показанные приложения диференциальных уравнений к теплопроводности, сопротивлению материалов и всего более к электротехнике. Ряд умело подобранных примеров и задач должен дать учащемуся как навыки в технике математических операций, так и уменье составить уравнение из опытных данных.

У нас эту книгу нужно рекомендовать как основное пособие при углублении курса высшей математики для студентов и аспирантов высшей технической школы, для инженеров; с некоторыми теоретическими добавлениями она может быть положена в основу преподавания математики на физических и отчасти механических отделениях университетов.

В. Степанов.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга выработалась в результате нескольких литографированных изданий лекций, читанных в Bell Telephone Laboratories и предназначалась первоначально для студентов, изучающих технические и смежные с ними дисциплины.

Для такой аудитории крайне важны технические приложения и иллюстрации, они возбуждают живой интерес и углубляют понимание абстрактных математических идей, которые иначе остались бы расплывчатыми. Однако они представляют некоторую опасность, если ими пользоваться неосторожно: если студент станет полагаться на свою физическую интуицию, как на замену абстрактной логики, а не как на помощь ей, он потеряет половину пользы от изучения предмета. Действительно, он может приобрести большое искусство в пользовании механизмом математики, но у него не будет глубокого проникновения в принципы, которое отличает инженера от техника.

Во избежание этой возможной опасности, большая часть иллюстративного материала собрана в отдельные главы. Этот порядок не только дает возможность изложить математические идеи без перерывов,—он также позволяет включить значительно большее количество примеров. Свобода в выборе материала, являющаяся следствием этого изобилия, едва ли очень ценна для преподавателя, который, вероятно, предпочтет заимствовать иллюстрации из той области, которая наиболее интересует в данный момент его самого, безразлично, находится ли нужный материал в этой книге или нет; но мои лекции показали, что тут есть другое преимущество, заключающееся в том, что у наиболее сильных студентов развивается самостоятельный интерес к этим примерам, и они их проделывают по своей инициативе сверх задания. Образовательная ценность таких добровольных усилий не нуждается в особой рекомендации.

Торнтон К. Фрай.

Нью-Йорк,
1 февраля 1929 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

От редактора перевода 3
Из предисловия автора 4

Глава I

Введение

1. Предварительные определения 9
2. Замена переменных в диференциальных выражениях 11
3. Непрерывность 15
4. Диференцируемость 16
5. Огибающие 17

Задачи 22

Глава II

Смысл диференциального уравнения и его решения

6. Геометрическая интерпретация диференциального уравнения первого порядка 25
7. Число различных решений уравнения первого порядка 26
8. Геометрическая интерпретация диференциальных уравнений второго порядка 29
9. Число решений уравнений порядка выше первого 30
10. Граничные условия 31
11. Доказательство существования 34

Задачи 35

Глава III

Источники диференциальных уравнений

12. Источники диференциальных уравнений 36
13. Образование диференциального уравнения из его примитивной . . . . . —
14. Получение диференциальных уравнений из физических законов 38
15. Пример 1. Закон действия масс . . . . —
16. Пример 2. Кривая провеса гибкой нерастяжимой нити 39
17. Пример 3. Течение тока в электрической сети 41
18. Пример 4. Распространение тепла 43
19. Пример 5. Безвихревое движение идеальной жидкости 46
20. Пример 6. Уравнение распределения потенциала в пустотной трубке . . 48

Задачи 49

Глава IV

Методы решения уравнений первого порядка

21. Случай, когда не входит зависимое переменное 51
22. Случай, когда не входит независимое переменное 52
23. Разделение переменных 53
Задачи 54
24. Численное интегрирование 55
25. Интегрирование при помощи рядов 56
Задачи 59
26. Графическое интегрирование . . . . . —
27. Интеграф 61
28. Разделение переменных с помощью подстановки; однородное уравнение . 63
29. Точные диференциалы 65
Задачи 68
30. Линейные уравнения . . . . . —
31. Уравнения, приводимые к линейным 70
Задачи 71
32. Уравнения, разрешимые относительно x или относительно y . . . . . —
Задачи 74
33. Уравнения второго порядка, сводимые к уравнениям первого порядка . —
Общие задачи 76

Глава V

Особые решения

34. Определение особого решения 77
35. Геометрические места точек заострения и точек прикосновения 79
36. Нахождение особых решений . . . . . —
Задачи 81

Глава VI

Практические приложения диференциальных уравнений

37. Введение 82
38. Распространение теплоты в стержне . . . . . —
39. Поток теплоты внутри шарового слоя 84
Задачи 85
40. Кривая постоянной кривизны 86
41. Траектории 87
Задачи 89
42. Свободно падающее тело 90
43. Изгиб балки 91
44. Изгиб строительных колонн 93
Задачи 95

45. Колебание струны 95
46. Колебание мембраны 98
Задачи 100
47. Поверхность вращения наименьшей площади . . . . . —
48. Брахистохрона 103
49. Геодезические линии на кривой поверхности 106
50. Задача Дидоны 107
51. Задача на вероятности 110
Задачи 114

Глава VII

Линейные уравнения высших порядков

52. Вводные замечания 116
53. Принцип наложения 117
54. Принцип разложения 118
55. Линейные уравнения с постоянными коэфициентами; показательные функции как решения 122
56. Линейные уравнения с постоянными коэфициентами. Решения в тригонометрических функциях 127
57. Уравнения электрических цепей; «переходное» и «устойчивое» состояния в простом контуре 129
58. Уравнение для цепи; кажущееся сопротивление 135
Задачи 137
59. Метод операторов; разложение их на множители 138
60. Операторный метод; применение разложения на множители к решению линейных уравнений 141
61. Операторный метод; применения простейших дробей к решению линейных уравнений 144
Задачи 147
62. Кратные корни 148
63. Исключительный случай решения, зависящего от показательной функции 151
Задачи 152
64. Особенность формул (186) и (195) . . . . . —
65. Неинтегрируемые функции 155
Задачи 157

Глава VIII

Системы линейных уравнений

66. Общая идея метода решения систем линейных уравнений 158
67. Второй принцип наложения 160
68. Соотношение между одним линейным уравнением и системой уравнений . 162
69. Доказательство правильности общего операторного решения 163
70. Решение системы диференциальных уравнений при граничном условии, что все переменные обращаются в нуль в одной и той же точке . . . —
71. Частный случай $f(x) = e^{px}$ 168
72. Теорема Хевисайда 170
73. Переходное и установившееся состояние в электрической сети 171
74. Решение задач на установившееся состояние 173
Задачи 174

Глава IX

Другие типы уравнений высших порядков

75. Введение 175
76. Искусственный прием . . . . —
77. Решение с помощью рядов 176
78. Опасности, связанные с употреблением рядов 179
79. Уравнение Бесселя 180
80. Понижение порядка линейного уравнения 183
Решения задач 186
УКАЗАТЕЛЬ 193

Глава I
ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предварительные определения.

Всякая функция от совокупности переменных и их производных является диференциальным выражением, а уравнение, содержащее диференциальное выражение, называется диференциальным уравнением.

Если в диференциальное уравнение входят производные по одному переменному — имеем обыкновенное диференциальное уравнение, в противном случае — уравнение с частными производными.

Переменные, по которым диференцируют, называются независимыми переменными, те, от которых взяты производные — их функциями, или зависимыми переменными.

Последние два термина необходимо ввести при изложении теории диференциальных уравнений; однако такое разделение является до некоторой степени искусственным. В самом деле, всегда возможно так преобразовать диференциальное выражение, чтобы некоторые из переменных, бывшие прежде независимыми, стали зависимыми, и наоборот.

Порядком диференциального уравнения называется порядок старшей входящей в него производной. Так, порядок уравнения

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+2\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^4=0$$

равен трем.

Степенью диференциального уравнения называется показатель степени производной высшего порядка, входящей в уравнение после того как оно освобождено от радикалов и от дробей.

Таким образом степень приведенного выше уравнения равна 1, так как показатель степени $\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}$ равен 1. С другой стороны, степень уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+y^2+\frac{dy}{dx}}$$

равна 2, так как по освобождении от радикала $\frac{d^2y}{dx^2}$ входит в квадрате.

Обыкновенное т. е. содержащее только одно зависимое переменное диференциальное уравнение называется линейным, если оно первой степени относительно зависимых переменных и их производных, Если такое уравнение содержит одно зависимое переменное, то его всегда можно записать в виде:

$$f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+f_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_0(x)y=\Phi(x).$$

В частном случае, когда все функции f постоянные, уравнение называется линейным с постоянными коэфициентами.

Такие уравнения являются наиболее важным типом обыкновенных линейных диференциальных уравнений, так как они встречаются во многих проблемах физики, в частности в тех, которые имеют дело с колебаниями.

Они играют чрезвычайно важную роль в теории электрических сетей.

Другой частный класс обыкновенных линейных диференциальных уравнений — линейные диференциальные уравнения типа Коши, т. е. такие, в которых коэфициент при каждой производной равен произведению постоянного фактора на степень x, равную порядку производной.

В случае, когда зависимые переменные связаны более чем одним диференциальным уравнением, мы имеем систему диференциальных уравнений.

Так, например:

$$\left.\begin{aligned} x^2\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}&=2\\ \frac{dy}{dx}-x\frac{dz}{dx}&=e^x\end{aligned}\right\}$$

есть система двух обыкновенных линейных диференциальных уравнений первого порядка с переменными коэфициентами.

Всякое соотношение между переменными, приводящее диференциальное уравнение к тождеству, называется решением диференциального уравнения.

Так, например, диференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0 \tag{1}$$

имеет решение

$$y=e^{x^2}. \tag{2}$$

Действительно, подставляя значение y в уравнение (1), мы получаем тождество

$$2xe^{x^2}-2xe^{x^2}=0.$$

Уравнение (2) дает решение уравнения (1) в виде, разрешенном относительно y, т. е. y есть явная функция x. Кроме того, в этом случае y составлено из известных элементарных функций x.

С точки зрения теории диференциальных уравнений такая форма решения не является необходимой. Действительно,

$$\frac{\ln y}{x} - x = 0 \tag{3}$$

точно так же представляет решение уравнения (1), хотя оно не разрешено относительно y и дает y как неявную функцию x.

Кроме того, нельзя требовать, чтобы y выражалось через элементарные функции x. Последнее может быть легко выяснено на следующем примере..

Уравнение
$$x\frac{dy}{dx} - \sin x = 0 \tag{4}$$
равносильно, как легко видеть, следующему:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда, конечно, следует, что интеграл от $\frac{\sin x}{x}$ есть решение. Хотя это решение и может быть записано в виде, разрешенном относительно y:

$$y = \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{5}$$

однако оно не может быть выражено в элементарных* функциях, если не прибегать к бесконечным рядам.

Термин «решение», таким образом, употребляется в настоящей теории в более широком смысле, чем в алгебре.

Если бы мы ограничились решениями, выраженными в элементарных функциях, то мы должны были бы признать, что уравнение (4) не имеет решения, причем это заключение следовало бы из того, что существуют интегралы, невыражаемые в элементарных функциях. Так как к тому же выбор тех функций, которые мы желаем признать элементарными, более или менее произволен, то является более целесообразным расширить понятие решения и называть решением всякое функциональное соотношение между зависимыми и независимыми переменными (не содержащее только производных), которое приводит диференциальное уравнение к тождеству. Таково содержание данного нами определения решения.

§ 2. *Замена переменных в диференциальных выражениях.*

Многие диференциальные выражения могут быть упрощены заменой одного или нескольких переменных функцией новых переменных.

Нередко случается, что после такого преобразования диференциальное выражение может быть немедленно проинтегрировано либо непосредст-

* Элементарными функциями называются те, которые встречаются в алгебре и тригонометрии, включая сюда логарифм и показательную функцию

венной догадкой, либо каким-нибудь из ранее развитых методов интегрирования.

В случае, когда диференциальное выражение входит в диференциальное уравнение, этот процесс может привести к отысканию решения: фактически многие «стандартные методы решения» могут быть именно так истолкованы.

Поэтому изучение диференциальных уравнений мы и начнем с краткого обзора техники замены переменных.

Рассмотрим произвольную функцию двух переменных x и y и последовательных производных y по x. Обозначим ее:

$$F(x, y, y', y'', \ldots),$$

где $y', y'', \ldots$ краткие обозначения для $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$

Как бы сложно ни было это выражение, его можно преобразовать введением нового переменного вместо одного из старых, если только каждый из аргументов $x, y, y', y'', \ldots$, сам может быть таким образом преобразован.

Пусть мы хотим заменить y новым переменным w, связанным с y и x данным уравнением

$$(x, y, w) = 0. \tag{6}$$

Процесс замены в этом случае таков. Разрешаем уравнение (6) относительно y, т. е. получаем соотношение вида

$$y = \Phi(x, w)$$

и затем заменяем $y, y', y'', \ldots$, через Φ и через выражения, получаемые из Φ повторным диференцированием по x.

Так как Φ не содержит y, то и производные Φ по x не будут его содержать, и следовательно, после замены диференциальное выражение F не будет содержать y.

В качестве примера рассмотрим диференциальное выражение

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y. \tag{7}$$

Чтобы заменить y новым переменным w, связанным с x и y уравнением

$$x^2 y - w = 0,$$

необходимо найти y и две его первые производные в функции x и w. Но

$$y = \frac{w}{x^2}, \tag{8}$$

откуда диференцируя, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{dw}{dx}-\frac{2w}{x^3},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{4}{x^3}\frac{dw}{dx}+\frac{6}{x^4}w;$$

Подставляя эти значения в (7), мы сведем все выражение к $\frac{d^2w}{dx^2}$.

Если выражение (7) приравнять нулю, то получим диференциальное уравнение:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0. \tag{9}$$

Если бы студент встретился с необходимостью решить это уравнение, имея в своем распоряжении только методы интегрального исчисления, он бы не знал, как приступить к этой задаче; но после того как произведена подстановка (8), решение сразу становится очевидным. Действительно, для функции w уравнение (9) имеет вид:

$$\frac{d^2w}{dx^2}=0,$$

решение которого очевидно:

$$w=\alpha x+\beta, \tag{10}$$

где α и β — произвольные постоянные.

Заменяя w в уравнении (10) его значением x^2y, мы тотчас же получаем решение уравнения (9) в виде:

$$y=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}.$$

Если мы пожелаем ввести новое переменное w вместо независимого переменного x, то процесс несколько усложняется, хотя и остается вполне элементарным.

Разрешаем уравнение (6) относительно x:

$$x=\psi(y, w). \tag{11}$$

Диференцирование этого выражения по w дает:

$$\frac{dx}{dw}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dw}+\frac{\partial\psi}{\partial w}.$$

Правая часть есть функция трех аргументов y, w и $\frac{dy}{dw}$, так как $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial w}$ не содержат x. Обозначим ее для простоты через f. Тогда $dx=f\,dw$, и отсюда:

$$y'=\frac{1}{f}\frac{dy}{dw}. \tag{12}$$

Правая часть (12) не зависит явно от x, поэтому соотношение (11) и (12) достаточны для исключения x из любого диференциального соотношения, не содержащего производных от y высшего порядка. Если входят производные выше первого порядка, то нужно продолжать тот же процесс.

Так мы найдем выражение для y'', заметив, что

$$y''=\frac{d}{dx}y'=\frac{1}{f}\frac{d}{dw}y'=\frac{1}{f}\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{f}\frac{dy}{dw}\right),$$

и вообще

$$y^{(n)}=\frac{1}{f}\frac{d}{dw}\frac{1}{f}\frac{d}{dw}\cdots\frac{1}{f}\frac{dy}{dw}, \tag{13}$$

причем символ $\frac{1}{f}\frac{d}{dw}$ повторен n раз подряд. Это выражение часто записывают в сокращенной форме:

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{f}\frac{d}{dw}\right)^n y.$$

Хотя выражения (12) и (13) могут показаться несколько громоздкими, процесс, представляемый ими, часто бывает чрезвычайно прост. Как формулы они не играют большой роли, так как, если метод правильно понят, большей частью проще и скорее выполнить нужные операции, чем применять самые формулы. Рассмотрим, например, опять выражение (7), и пусть

$$x=e^{w} \tag{11'}$$

есть соотношение между x, и w, соответствующее уравнению (6) в общей теории, совершенно так же, как в прошлом примере мы рассматривали $x^2y-w=0$. Так как выражение (11') уже разрешено относительно x, оно соответствует выражению (11). Находим производную по w:

$$\frac{dx}{dw}=e^{w},$$

или

$$dx=f\,dw,$$

где

$$f=e^{w}.$$

Отсюда

$$y'=e^{-w}\frac{dy}{dw}, \tag{12'}$$

и

$$y''=e^{-w}\frac{d}{dw}e^{-w}\frac{dy}{dw}=e^{-2w}\left(\frac{d^2y}{dw^2}-\frac{dy}{dw}\right). \tag{13'}$$

Подставляя эти значения в выражение (7), получаем:

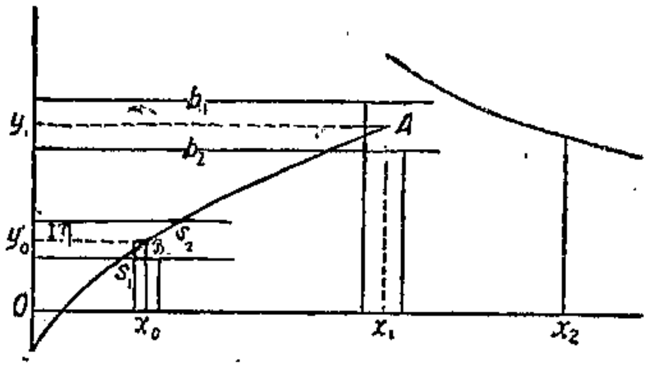
$$\frac{dy^2}{dw^2}+3\frac{dy}{dw}+2y, \tag{7'}$$

форма, отличающаяся от (7) тем, что коэфициенты при производных постоянные.

Ряд задач этой и следующих глав имеют дело с выражениями того же типа, что (7), т. е. с линейными уравнениями типа Коши. Эти задачи показывают, что такие уравнения всегда могут быть приведены к форме (7′), в которой все коэфициенты постоянные, и если последние уравнения могут быть разрешены, то и первые тоже.

§ 3. Непрерывность.

Кривая на черт. 1 называется разрывной в точке A, но она непрерывна в точке B. С точки зрения здравого смысла видно, что эти термины являются подходящими, но для того чтобы их можно было употреблять для математических целей, необходимо дать им более точные определения.



Черт. 1.

Рассмотрим прежде всего точку B с координатами x_0 и y_0 и начертим две горизонтальные прямые на высоте $y_0+\eta$ и $y_0-\eta$. Они вырезают малую дугу $s_1 s_2$ на нашей кривой.

Очевидно, что можно начертить две вертикальные прямые между x_0 и s_2 и между s_1 и x_0 таким образом, что в интервале между этими двумя прямыми кривая лежит целиком внутри полосы, образуемой горизонталями $y_0+\eta$ и $y_0-\eta$.

Если мы выберем для η новое значение, меньшее прежнего, то точки s_1 и s_2 приблизятся, и придется сдвинуть также и вертикальные линии; но наше утверждение останется в силе, а именно, существует всегда конечный интервал, заключающий точку x_0, внутри которого кривая не выходит из полосы между парой горизонтальных линий.

Это утверждение неверно для точки A, если за горизонтали выбраны b_1 и b_2; ибо как бы мал ни был интервал около точки x_1, часть кривой справа от точки A лежит вне полосы между горизонталями.

Очевидно, причина этого в том, что кривая в точке A разрывна; это приводит нас к следующему определению непрерывности кривой:

Кривая непрерывна в точке x_0, если возможно, задав значение $\eta>0$, найти интервал вокруг точки x_0, внутри которого ордината кривой отличается от ординаты в точке x_0 не более чем на η, как бы мало ни было число η.

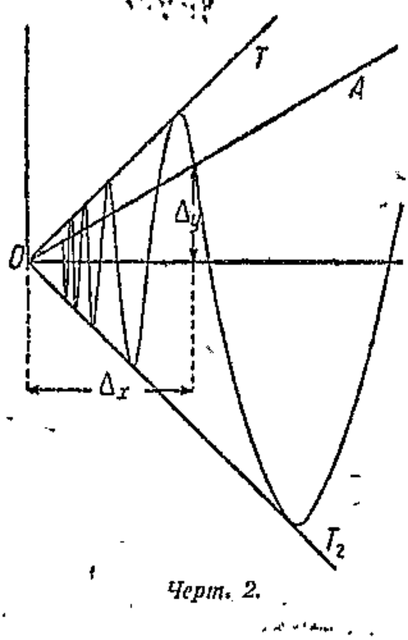
То же определение может быть сформулировано и для функции, изображаемой нашей кривой, а именно: y есть **непрерывная функция** от x **при** $x=x_0$, **если для заданного числа** η **можно найти такое** E, **что в интервале от** x_0-E до x_0+E **значение** y **заключено между пределами** $y_0-\eta$ и $y_0+\eta$, **как бы мало ни было число** η.

Если это свойство нарушается — функция разрывна.

Следует отметить, что мы определили непрерывность не для всей кривой, а в отдельной точке. Однако чрезвычайно просто расширить эту идею, сказав, что если кривая непрерывна в каждой точке интервала, лежащего между двумя заданными абсциссами x' и x'', то она непрерывна всюду в этом интервале. Точно так же функция $f(x)$, представленная этой кривой, непрерывна в интервале (x', x''). Так, например, кривая на рис. 1 непрерывна между 0 и x_1 и между x_1 и x_2. Но она не является непрерывной в $(0, x_2)$, так как в точке x_1, лежащей в этом интервале, имеется разрыв.

§ 4. *Диференцируемость.*

При изучении диференциального исчисления внимание студентов обращается главным образом на формальную сторону — на технику диференцирования, причем предполагается обычно, что производная существует и может быть найдена путем соответствующих приемов. Однако предположение, что производная существует, не всегда правильно, что можно показать на примере, где ее нет.



Черт. 2.

Функция $y=x\sin\frac{1}{x}$ изображается кривой на черт. 2. Ее значение в точке $x=0$ до некоторой степени неопределенно (так как второй множитель не определен при $x=0$), но мы можем дать ей при $x=0$ значение 0, предположение, делающее функцию непрерывной. Чтобы найти производную в этой точке, мы должны дать x приращение Δx и вычислить приращение функции Δy, соответствующее Δx. Пусть A — точка с координатами $(\Delta x, \Delta y)$. При уменьшении Δx точка A движется по направлению к началу координат, оставаясь все время на кривой и следуя ее изгибам. По определению искомая производная есть предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю. Но $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть тангенс угла наклона хорды OA, которая колеблется вверх и вниз между линиями OT_1 и OT_2 при уменьшении Δx. Как бы мало ни было Δx, это колебание продолжается; ибо как бы мало ни было расстояние до начала координат, существуют точки на кривой, в которых кривая касается OT_1, и другие, в которых она касается OT_2. Поэтому тангенс угла наклона OA переходит от $+1$ до -1 и обратно (тангенсы углов наклона OT_1 и OT_2), все время колеблясь между этими значениями, и поэтому не имееет никакого предела. Итак, не существует предела $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю, другими словами, нельзя найти значение $\frac{dy}{dx}$ в точке O.

Если искать производную в какой-нибудь другой точке кривой, то секущая уменьшает свои колебания по мере уменьшения Δx и в конце концов приближается к касательной к кривой, как к пределу. Итак, функция, изображенная на черт. 2, имеет производную для всех значений x, кроме $x=0$; для этого последнего значения, как мы видели, производной нет.

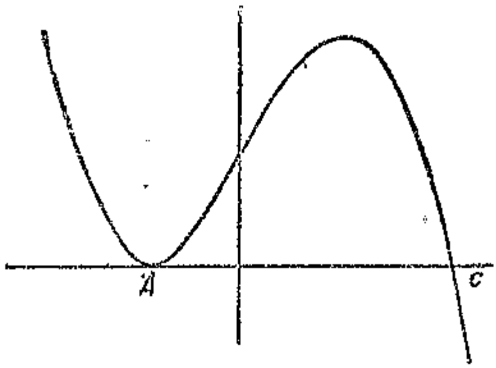
Итак, мы видим, что существуют функции, которые нельзя диференцировать. В § 11 мы увидим, что благодаря этому некоторые проблемы диференциальных уравнений не могут быть решены.

§ 5. *Огибающие.*

Рассмотрим уравнение вида $f(x, y, c)=0$, в котором c — произвольная постоянная. Для всякого значения этой постоянной (параметра) функция определяет кривую. Поэтому уравнение представляет собою семейство кривых. Некоторые свойства этого семейства кривых мы можем установить тотчас же. Например, число кривых, проходящих через любую точку (x_1, y_1) плоскости, равно числу значений параметра c, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, y_1, c)=0$. Если это уравнение алгебраическое n-ой степени относительно c, мы получим n корней (действительных или мнимых). Для простоты назовем эти значения c «соответствующими точке (x_1, y_1)». Каждому из таких c соответствует кривая, проходящая через точку (x_1, y_1). Вообще говоря, все эти корни уравнения различны. Если так, то через точку проходят n различных кривых семейства (действительных или мнимых). В исключительных случаях, однако, уравнение может иметь равные корни, и тогда одну и ту же кривую мы должны сосчитать дважды. Естественно, что эти исключительные случаи вызываются какими-то особенностями семейства кривых. Наша задача — исследовать эти исключительные случаи, так как некоторые из них являются существенными при изучении диференциальных уравнений. Прежде чем приступить к этому, мы должны дать метод отбора тех точек, в которых могут встретиться кратные значения c.

Пусть (x_1, y_1)—выбранная пара значений. Функцию $f(x_1, y_1, c)$ можем изобразить как функцию c; получим некоторую кривую (черт. 3).

В точках пересечения этой кривой с осью Oc удовлетворяется уравнение $f(x_1, y_1, c)=0$, т. е. на чертеже точки пересечения дают значения c, соответствующие (x_1, y_1). Эти корни c различны, кроме случая представляемого точкой A (черт. 3), где кривая касается оси; в такой точке появляется кратный корень. Но в точке касания будем иметь не только



Черт. 3.

$$f(x_1, y_1, c)=0,$$

но и

$$\frac{\partial}{\partial c}f(x_1, y_1, c)=0.$$

Исключая c из этих двух уравнений, мы получаем соотношение между x_1 и y_1. Пусть это соотношение $F(x_1, y_1)=0$. Уравнение $F(x, y)=0$ определяет некоторую кривую на плоскости xy. Мы можем утверждать, что кратные корни для c могут получиться только для точек этой кривой, получаемой исключением c из уравнений:

$$f(x, y, c)=0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial c}f(x, y, c)=0$$

(последнее уравнение получается диференцированием по c).

Рассмотрим, например, семейство кривых, определенных уравнением

$$(y-c)^2-(x+c)^3=0. \tag{14}$$

Так как это уравнение третьей степени относительно c, существуют вообще три различные кривые семейства, проходящие через любую точку (x_1, y_1). Для нахождения исключительных точек, в которых встречаются кратные c, диференцируем уравнение (14) по c. Получим:

$$-2(y-c)-3(x+c)^2=0, \tag{15}$$

откуда

$$(y-c)^2=\frac{9}{4}(x+c)^4. \tag{16}$$

Комбинируя (16) и (14), получаем новое уравнение:

$$\left[\frac{9}{4}(x+c)-1\right](x+c)^3=0.$$

Решения этого последнего уравнения будут:

$$c=-x \text{ и } c=\frac{4}{9}-x.$$

Подставляя их в (15) получаем *:

$$y+x=0$$

---

* Если подставить значения c в (14), получили бы дополнительное уравнение $y+x=\frac{20}{27}$. Хотя это одно из решений (14) и (16), оно не является решением (14) и (15) и, следовательно, не играет роли в нашей задаче. Оно было принесено при возведении в квадрат (15) для получения (16).

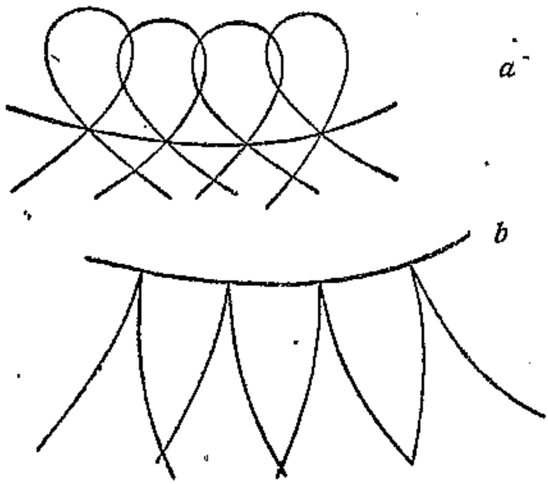
и

$$y+x=\frac{4}{27}\ ^{*}.$$

Итак, кратные корни c могут встретиться только на паре прямых, определяемых этими уравнениями.

Теперь мы нашли метод выделения точек, соответствующих кратным значениям c, и можем вернуться к нашей первоначальной задаче — определению тех особенностей нашего семейства кривых, которые приводят к такому необычному положению.

Прежде всего очевидно, что если кривая самопересекается (черт. 4*a*), мы должны ее рассматривать как **дважды** проходящую через точку ветвления. Для всех этих точек, называемых двойными или **узловыми**, c должно иметь кратный корень. Очевидно, это утверждение не зависит от величины петель. Поэтому, если мы стянем эти петли так, чтобы они совсем исчезли, то для полученных точек **заострения** (черт. 4*b*) мы должны ожидать кратные корни для c.



Черт. 4.

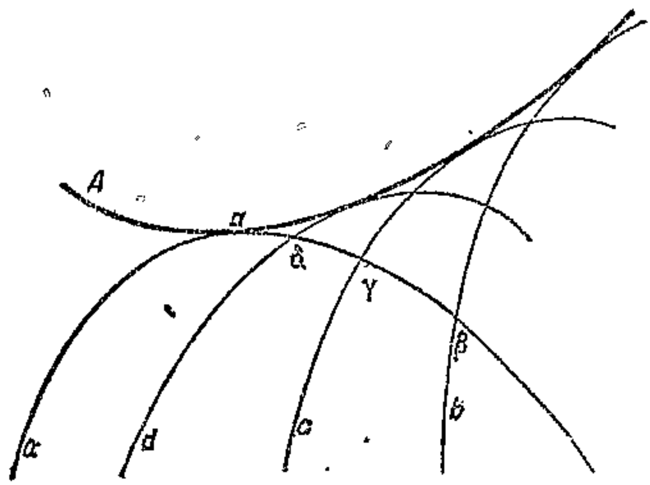
Оба эти утверждения очевидны. Существует, однако, третья возможность, приводящая к кратным корням c, которая не так очевидна. Так как именно она является наиболее существенной с точки зрения диференциальных уравнений, то нам придется остановиться на ней подробнее. Этот последний случай наступает, когда семейство кривых расположено так, как a, d c, b, на черт. 5, т. е. так, что существует кривая A, в каждой точке которой ее касается одна из кривых семейства. Такая кривая называется **огибающей** этого семейства.

Для простоты предположим, что семейство определено уравнением $f(x, y, c) = 0$ второй степени относительно c, так что через каждую точку проходят только две кривые. Остановим наше внимание на одной

* Эти два уравнения могут быть скомбинированы в одно, которое будет аналогично рассмотренному выше уравнению $F(x, y) = 0$. Ибо, если либо $y + x$, либо $y + x - \frac{4}{27}$ равны нулю, то их произведение тоже равно нулю, и обратно. Поэтому мы можем записать оба вместе в виде:

$$F(x, y) = (y + x)\left(y + x - \frac{4}{27}\right) = 0.$$

из кривых a и отметим точку касания α этой кривой и огибающей A. Выберем на a последовательность точек $\beta, \gamma, \delta, \ldots$, приближающихся к точке α. Каждой из этих точек соответствует два значения для c, определяющих две кривые, проходящие через данную точку. Как бы ни были выбраны точки $\beta, \gamma, \ldots$, одна из этих кривых есть сама кривая a. Другие кривые различны для разных точек последовательности. Начертив их, мы получим последовательность кривых $b, c, d, \ldots$, проходящих соответственно через точки $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ Очевидно, что каждая из следующих кривых расположена в более близком соседстве к кривой a, чем предыдущая, поэтому значения c, соответствующие им, приближаются к значению c для кривой a. Двигая точку пересечения по направлению к α, мы можем получить соседнюю кривую, сколь угодно близкую к a.



Черт. 5.

Поэтому в пределе, когда точка пересечения сливается с точкой α, выбранная таким процессом кривая сливается с кривой a. Две кривые, проходящие через α, совпадают, и следовательно, два значения c равны между собой. Поэтому всякой точке, огибающей A, соответствуют два равные значения c, соответствующие той кривой, которая касается в этой точке нашей огибающей.

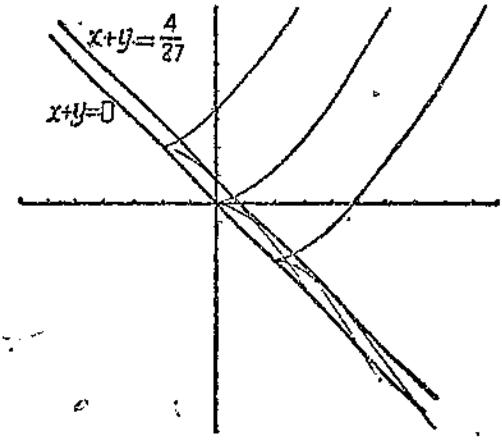
Резюмируя, мы можем сказать, что уравнение $f(x, y, c) = 0$ представляет собой семейство кривых, по одной для каждого значения c; исключая c из этого уравнения и из уравнения $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$, мы получаем геометрическое место точек, которым соответствуют равные значения c. Это геометрическое место может содержать три типа кривых:

1. Кривые, проходящие через все двойные точки семейства $f(x, y, c) = 0$; они называются узловыми линиями.

2. Кривые, проходящие через все точки заострения системы $f(x, y, c) = 0$, — геометрические места точек заострения.

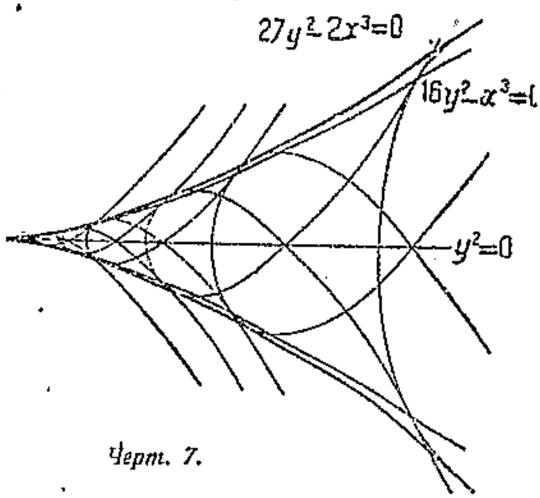
3. Кривые, касающиеся в каждой точке некоторой кривой семейства $f(x, y, c) = 0$; последние называются огибающими.

Нужно отметить еще следующее: так как не кривые суть геометрические места точек с равными c, они могут встретиться только тогда, когда, по крайней мере, две кривые системы проходят через каждую точку; число же кривых, проходящих через одну точку, равно степени относительно c уравнения, определяющего семейство кривых; поэтому семейство кривых может иметь огибающую только в том случае, когда уравнение семейства, по крайней мере, второй степени относительно c.



Черт. 6.

Рассмотрим в качестве примера семейство кривых, представляемых уравнением (14). Это, очевидно, полукубические параболы с точками заострения в $(-c, +c)$ (черт. 6). Так как все эти точки лежат на прямой $x+y=0$, эта линия является линией заострения и может быть получена вышеописанным процессом. Другая линия с равными c есть $x+y=\frac{4}{27}$, она является огибающей нижних ветвей кривых, как это видно на черт. 6.



Черт. 7.

Как второй пример рассмотрим уравнение:

$$ {}^2=(x-c)(x-2c)^2. \quad (17)$$

Диференцируя по c и решая полученное уравнение вместе с данным, найдем для c значения $\frac{1}{2}x$ и $\frac{5}{6}x$. Результаты подстановки этих значений в уравнение (17) будут $y^2=0$ и $27y^2-2x^3=0$. Первое из этих уравнений дает ось x, которая является узловой линией. Другое уравнение определяет полукубическую параболу — огибающую нашего семейства. Семейство изображено * на черт. 7.

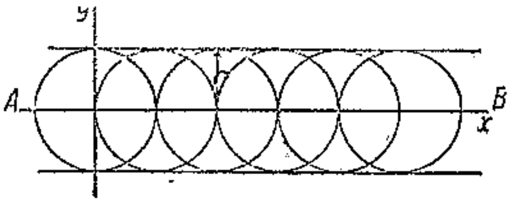
* Получаетс. еще одна кривая $16y^2-x^3=0$, но о ней будет особо упомянуто далее.

Рассмотрим, наконец, семейство кругов

$$(x-c)^2+y^2-r^2=0, \tag{18}$$

одного и того же радиуса r, с центрами на оси x (черт. 8).

Очевидно, что линии $y=r$ и $y=-r$ образуют огибающую этого семейства, и что семейство не имеет ни точек заострения, ни двойных точек. Поэтому решение уравнения (18) вместе с его производной по c должно дать нам эти две прямые и ничего более. Диференцируя по c, получаем:



Черт. 8.

$$x-c=0,$$

и, подставляя это в (18), получаем:

$$y^2-r^2=0,$$

как и следовало ожидать.

Необходимо еще одно последнее замечание: мы говорили только о тех случаях, где число различных c было конечно. Однако полученные результаты справедливы и для бесчисленного множества значений c. Рассмотрим, например, семейство кривых:

$$y-\sin cx=0.$$

Через всякую точку (x, y) проходит бесчисленное множество кривых этого семейства.

Однако процесс диференцирования по c и исключения c приводит к истинной огибающей $y=\pm 1$.

ЗАДАЧИ.

1. Заменить в диференциальном выражении

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y$$

y через $w=xy$.

2. Заменить в диференциальном уравнении:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^2}{2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4x\frac{dy}{dx}+4y=0$$

y через $w=\sqrt{y}$. Можно ли найти решение этого уравнения, сравнивая его с первым примером в тексте?

3. Заменить в уравнении

$$\frac{dy}{dx}+cy=a$$

y через $w^{cx}=ey$. Каково решение этого уравнения?

4. Заменить в уравнении Бесселя:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}+k^2\theta=0$$

r через e^t.

5. Заменить в уравнении Лежандра

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+mP\sin\theta=0$$

θ через $x=\cos\theta$.

6. Заменить в уравнении

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\sqrt{1-y^2}\arcsin y$$

y через $w=\arcsin y$.

7. Продиференцировать выражение (3) § 1 и разрешить относительно $\frac{dy}{dx}$. Показать подстановкой этого значения в (1) (§ 1), что (3) есть действительно решение (1).

8. Если

$$x=e^w \text{ и } z=e^{-nw}\frac{d^ny}{dw^n},$$

найти $\frac{dz}{dx}$ в функции w и y.

9. Доказать с помощью математической индукции, что при $x=e^w$ величина $x^n\frac{d^ny}{dx^n}$ может быть представлена в виде:

$$a_n\frac{d^ny}{dw^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dw^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dw}+a_0y,$$

где a — постоянные коэфициенты.

(Доказательство с помощью математической индукции состоит из двух шагов: 1) доказательства, что утверждение справедливо для значения $n=1$, 2) доказательства, что если оно справедливо для некоторого n, то оно справедливо и для $n+1$. Тогда следует, что утверждение справедливо для любого натурального числа n.)

10. Выражение вида

$$b_mx^m\frac{d^my}{dx^m}+b_{m-1}x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+b_1x\frac{dy}{dx}+b_0y$$

называется линейным по y и его диференциалам, однородным относительно x, dx, y, dy, $d^2y, \ldots$ диференциальным выражением. Показать, что подстановка $x=e^w$ приводит его к виду:

$$c_m\frac{d^my}{dw^m}+c_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dw^{m-1}}+\ldots+c_1\frac{dy}{dw}+c_0y.$$

11. Написать уравнения семейства кругов радиуса r, центры которых лежат на круге с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат.

12. Найти огибающую семейства кривых в задаче 11.

13. Найти огибающую семейства линий

$$y=px+2p^2.$$

14. Одна точка прямой скользит по гиперболе $xy=1$. Другая точка скользит по оси x. Какова огибающая этого семейства, если точки находятся на постоянном расстоянии, равном единице?

15. Концы бруска единицей длины скользят по двум перпендикулярным друг к другу стержням. Какую площадь описывает при этом брусок?

16. Классифицировать следующие диференциальные уравнения:

$$\text{(a)}\quad \frac{d^2v}{du^2}=\sqrt[3]{\frac{1}{v}+\left(\frac{dv}{du}\right)^4}\,;$$

$$\text{(b)}\quad \frac{dv}{du}+u^2v=\sin u;$$

$$\text{(c)}\quad \frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2v}{\partial t^2}.$$

17. Классифицировать следующие диференциальные уравнения:

$$\text{(a)}\quad \sqrt{\frac{dy}{dx}+y}=\sqrt[4]{\frac{d^2y}{dx^2}+2x}\,;$$

$$\text{(b)}\quad \frac{dy}{dx}+2\frac{d^2z}{dx^2}=f(y,z).$$

18. Заменить зависимое переменное в уравнении

$$\frac{dv}{du}+\frac{2v}{u}=3$$

через $w=ve^{3u}$.

Глава II

СМЫСЛ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО РЕШЕНИЯ.

§ 6. Геометрическая интерпретация диференциального уравнения первого порядка.

Всякое конечное* уравнение вида $y=f(x)$ может быть графически изображено при помощи кривой линии. Так как решение диференциального уравнения есть по определению функциональное соотнощение между y и x, то оно тоже может быть представлено кривою. Таким оброзом в некотором смысле как конечное, так и диференциальное уравнение определяет кривую. Однако эта единая цель выполняется в том и другом случае разными средствами, и изучение различий в этом направлении между конечными и диференциальным уравнениями дает ценную картину истинного смысла диференциального уравнения,

В случае конечного уравнения, для заданного значения x уравнение определяет одно или несколько значений y, соответствующих этому x, т. е. мы получаем одну или несколько точек на кривой. Давая x другие значения, мы получаем другие точки кривой. Другими словами, конечное уравнение определяет кривую, связывая друг с другом координаты ее точек.

Диференциальное же уравнение не связывает непосредственно y с x: процесс в этом случае совершенно другой. Рассмотрим сначала уравнение первого порядка от двух переменных x и y. Всякое уравнение такого типа может быть записано следующим образом:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{19}$$

Подстановка некоторого определенного значения x в это уравнение не приводит к значению y; зато когда x и y оба получают заданные значения, определяется значение $\frac{dy}{dx}$, т. е. для выбранной точки (x,y) уравнение (19) определяет направление, в котором должна проходить кривая, если она проходит через точку (x,y). Конечно, мы не имеем достаточных оснований утверждать, что искомая кривая действительно проходит через эту точку.

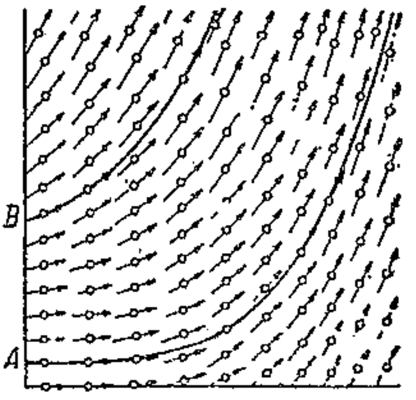
Однако мы в настоящий момент не будем обращать на это внимания и предположим, что мы определили направления, соответствующие

* В этой главе всюду «конечным» будет называться уравнение, не содержащее производных.

большому числу точек, и отметили эти направления стрелками, как на черт. 9.

При взгляде на этот чертеж мы видим, что каждая стрелка направлена к стрелке, расположенной над ней таким образом, что стрелки собираются в группы. Начиная с некоторой точки A и связывая стрелки такой группы вместе, мы получаем кривую, имеющую в точках, отмеченных стрелками, тангенс угла наклона касательной, даваемый уравнением (19).

Если число стрелок очень велико, то велико и число точек, в которых кривая удовлетворяет уравнению (19). Действительно, увеличивая неограниченно число стрелок, мы теоретически приближаемся к предельной кривой, координаты и наклон касательной которой удовлетворяют диференциальному уравнению уже в каждой точке. Эта предельная кривая, или, точнее, соотношение между y и x, которое она графически изображает, есть решение уравнения (19).



Черт. 9.

Таким образом диференциальное уравнение определяет кривую, **указывая направление, в котором эта кривая проходит в каждой ее точке.**

Эта геометрическая картина дает графический метод решения диференциального уравнения. Практически этот метод дает не очень точные результаты, но тем не менее иногда употребляется, когда более точные методы оказываются слишком сложными.

Мы видим здесь один очевидный произвол, а именно — выбор точки A, с которой начинается процесс. Если выбрать другую точку B, то получим другую кривую. Очевидно, что координаты и наклон новой кривой удовлетворяют уравнению (19), так же как и для прежней кривой; обе кривые поэтому «решения». **Итак, существует более одного решения уравнения** (19).

§ 7. *Число различных решений уравнения первого порядка.*

Из рассмотренного геометрического построения мы можем получить геометрический смысл следующей теоремы: **существует столько же решений диференциального уравнения** (19), сколько точек на прямой линии (и их естественный порядок таков же, как порядок точек прямой).

В самом деле, одно решение получается исходя из точки A, другое — начиная с точки B. Очевидно, мы можем построить новые решения, исходя из других точек прямой AB, и из чертежа можем заключить, что все эти решения будут различны.

Можно было бы посторить решения, начиная от точек, не лежащих на прямой AB, но мы тотчас же же видим, что такие кривые пересекут AB.

Итак, в случае черт. 9 теорема на взгляд справедлива; действительно, каждой точке AB соответствует некоторая кривая, и других возможностей как будто бы нет. Но мы должны остеречься, чтобы не быть введенными в заблуждение простотой нашей диаграммы; и действительно, легко найти уравнения, приводящие к картинам, резко отличным от изображенной на черт. 9, которые на первый взгляд опровергают нашу теорему.

Например, если бы наше диференциальное уравнение было:

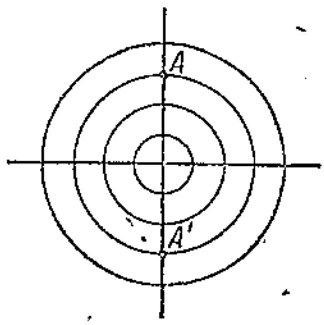
$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=0,$$

то все наши стрелки были бы вертикальными. Поэтому, если мы выйдем из точки A, то получим прямую AB как решение. То же самое решение, а не другое, получим, начиная построение из любой другой точки линии AB. Но в этом случае всякое решение есть вертикальная прямая линия, и следовательно, все они могут быть получены, исходя из точек любой горизонтальной прямой. Их число и порядок опять, такие же, как число точек и их порядок на прямой.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$$

имеет своими решениями круги, указанные на черт. 10.



Черт. 10.

Очевидно, что мы получим тождественные решения, если будем исходить из соответственных точек на верхней и нижней полуоси: мы получим поэтому столько же различных решений, и в таком же порядке, как точки на полупрямой, а не на целой прямой. Основная теорема из теории точечных множеств утверждает, что это последнее множество может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с сохранением порядка, со всеми точками некоторой другой линии, т. е. и здесь мы имеем столько же различных решений, сколько точек на этой вспомогательной прямой *. Итак, теорема все-таки справедлива.

---

* Это утверждение может показаться абсурдным. Кажется опасным утверждать, что половина равна целому; для чисел, кроме нуля, это и неверно. Трудность лежит здесь в особенности понятия бесконечности. Без сомнения, никто не будет возражать против того, что «половина бесконечности снова бесконечность».

Мы могли бы ограничиться этим, поскольку мы уже показали, что наше утверждение не вполне абсурдно. В действительности же оно имеет более глубокий смысл, который мы хотим указать на простом примере.

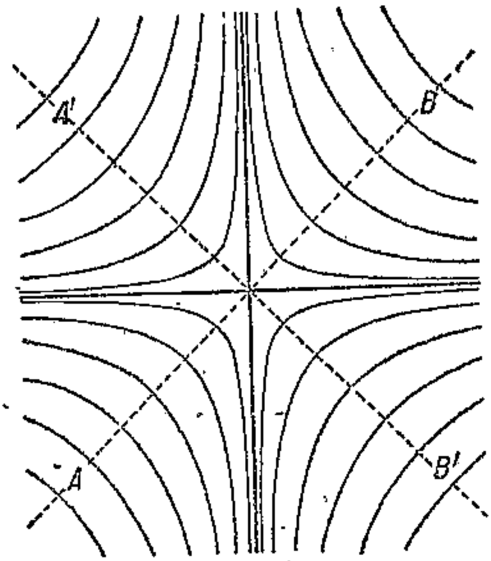
Всякое положительное число имеет логарифм, и обратно, всякому логарифму соответствует положительное число. Итак, существует ровно столько же положительных чисел, сколько есть логарифмов, причем большему числу соответствует

Наконец уравнение

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$$

удовлетворяется гиперболами, показанными на черт. 11.

Исходя из точек пунктирной прямой AB, мы получим только те ветви кривых, которые лежат в первом и третьем квадранте; те, которые лежат во втором и четвертом квадранте, будут при этом пропущены. Исходя также из пунктирной прямой $A'B'$, мы получим и вторую группу линий. На первый взгляд кажется, что число решений соответствует точкам, расположенным на двух прямых, но та же самая общая теорема из теории точечных множеств дает возможность поставить эти точки в соответствие с точками на вспомогательной линии, и теорема остается справедливой.



Черт. 11.

Действительно, доказательство теоремы может быть получено подразделением всей плоскости (xy) на счетное число областей (четыре в черт. 11), внутри каждой из которых либо $f(x,y)$ в уравнении (19), либо ее обратная величина конечна и непрерывна. Наконец, мы молчаливо предполагали, что функция $f(x,y)$ в (19) была однозначной. Мы увидим, что теми же законами управляется большое число уравнений — например все содержащие квадратные корни. Но если бы было два значения f в каждой точке, через эту точку можно было бы провести две стрелки, и можно было бы получить две кривые через эту точку в двух указанных стрелками направлениях. Легко видеть, однако, что эти две системы кривых можно поставить в соответствие с точками двух вспомогательных линий. Но опять та же самая теорема из теории множеств, на которую мы несколько раз ссылались, дает возможность сказать, что эти две линии соответствуют половинам одной и той же третьей линии, и следовательно, даже ограничение, что f должна быть однозначной, может быть откинуто.

больший логарифм. Но так как логарифмы чисел меньших единицы отрицательны, нам потребуется целая прямая, чтобы их всех уместить, тогда как их антилогарифмы уместятся на полупрямой. Итак, мы привели в попарное соответствие точки на прямой с точками на полупрямой, сохраняя их порядок, что нам и нужно было для случая, изображенного на черт. 10.

Рассуждая дальше, мы можем высказать нашу теорему в более удобной форме.

Решение (19) становилось определенным только после того, как мы устанавливали, через какую точку прямой AB оно проходит. Так как эта точка вполне определяется своим расстоянием η от оси x, то отсюда следует, что точная форма решения зависит от значения этой постоянной η. Оно должно быть, следовательно, записано в виде:

$$\Phi(x, y, \eta) = 0,$$

так как это обозначение показывает как раз, что истинная связь между x и y известна тогда и только тогда, когда задано значение η. Так как каждой точке AB соответствует значение η и обратно, то это соотношение заключает в себе всякое возможное * решение диференциального уравнения. Оно называется **общим решением** или примитивным, всякое же соотношение, получаемое из него при заданном значении η, называется **частным** решением **. Итак, мы получили теорему, являющуюся результатом наших предыдущих рассуждений:

Общее решение уравнения (19) есть соотношение между x и y, содержащее одну и только одну произвольную постоянную.

§ 8. *Геометрическая интерпретация диференциальных уравнений второго порядка.*

Уравнение (19) не содержит производных порядка выше первого. Поэтому геометрическое построение § 7 годится только для уравнений первого порядка, и теорема, разобранная в нем, неверна для уравнений высшего порядка. Предметом следующих параграфов является расширение наших рассуждений на случай уравнений второго порядка, откуда уже может быть получен результат для уравнений высших порядков.

Рассмотрим уравнение, содержащее кроме x, y и y' вторую производную y. Предположим, как прежде, что уравнение разрешено относительно высшей производной, т. е. имеет вид:

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{20}$$

где f — однозначная функция. Положение несколько сложнее, чем раньше, но геометрическая интерпретация все-таки может быть получена; она основана на понятии «радиуса кривизны» кривой, т. е. радиуса круга, наиболее тесно примыкающего к кривой в данной точке. Радиус кривизны ρ, как известно, дается выражением

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

---

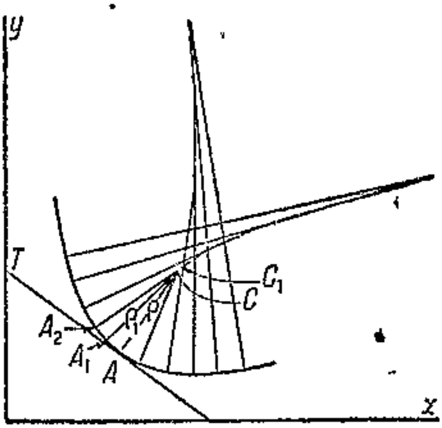
* Мы увидим в гл. V, что существуют некоторые исключения из нашего правила. А именно, существуют некоторые решения, называемые «особыми», не входящие в то же семейство, что и остальные. Сейчас мы на них не будем останавливаться.

** Отметим, что «общее» решение соответствует всему семейству кривых, определяемых диференциальным уравнением, тогда как «частное» решение относится только к одной из них.

Поэтому для всякой кривой, являющейся решением уравнения (20), радиус кривизны должен равняться:

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{f(x,\ y,\ y')}. \tag{21}$$

Выберем точку A и направление AT (черт. 12) и потребуем, чтобы решение уравнения (20) проходило через точку A в направлении AT. Радиус кривизны ρ, который кривая должна иметь в этой точке, получается тотчас же из (21), если подставить на место x и y координаты точки A, а на место y' — наклон линии AT. Если мы отложим это расстояние ρ на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно направлению AT, то получим точку C. Из точки C, как из центра, проведем дугу круга AA_1. Мы получим, таким образом, дугу, не только проходящую через A в нужном направлении, но и имеющую предписанную диференциальным уравнением кривизну.



Черт. 12.

Конечной точке A_1 этой дуги соответствуют новые координаты $(x_1,\ y_1)$ и новое направление y_1', являющееся наклоном дуги круга в этой точке. При подстановке этих новых значений в (21), мы получим новый радиус кривизны ρ_1. Откладывая его на линии A_1C, получим новый центр C_1, из которого описываем снова короткую дугу круга A_1A_2. Продолжая процесс, мы получим кривую $AA_1A_2\ldots$, обладающую тем свойством, что из каждой отмеченной точки она выходит в таком направлении и с такой кривизной, что диференциальное уравнение удовлетворяется.

Если бы все дуги были столь малыми, что кривизна не очень сильно изменялась бы от одной к другой, можно было бы ожидать, что начерченная таким образом кривая очень мало отличается от истинного решения диференциального уравнения. Действительно, с теоретической точки зрения, точное решение может быть получено со сколь угодно большой точностью при уменьшении длин дуг. Это построение дает поэтому приближенный способ решения уравнения, который, однако, не очень пригоден на практике, так как погрешности чертежа сильно уменьшают точность.

§ 9. Число решений уравнений порядка выше первого.

Важность геометрической интерпретации (20) лежит не в полезности ее, как метода решения, а в том, что с ее помощью мы получаем указание относительно семейства интегральных кривых уравнения (20). Чтобы начать построение кривой $AA_1A_2\ldots$, нужно выбрать точку A и направление AT. Если бы была выбрана другая точка, то мы получили бы другое решение, даже если бы сохранили начальное направление; точно так же при сохранении начальной точки и выборе другого направления AT, мы опять-таки получили бы другое решение. И действительно, через точку A проходит пучок кривых во всех возможных направлениях, которые все являются решениями уравнения (20). Отдельные кривые этого пучка различаются наклоном касательных в A. Поэтому, если мы обозначим этот наклон через η', весь пучок можно представить соотношением между x, y, зависящим от одной произвольной постоянной η'.

Однако этот пучок не содержит в себе всех решений уравнения (20) Мы имеем аналогичный пучок для каждой точки вертикальной прямой проходящей через A. Отсюда соотношение между x и y, заключающее все возможные решения, т. е. общее решение диференциального уравнения должно зависеть как от η', так и от ординаты η. Это приводит нас к теореме:

Общее решение диференциального уравнения второго порядка есть функциональное соотношение

$$\Phi(x, y, \eta, \eta') = 0,$$

зависящее от двух и только двух произвольных постоянных — η и η'.

Так же как и в случае диференциального уравнения первого порядка, необходимы многие уточнения для того, чтобы это рассуждение провести строго. Но так как мы ищем не столько строгого доказательства, сколько ясной картины того, что утверждает указанная теорема, то наше рассуждение достаточно хорошо.

Для общего случая уравнения n-го порядка можно доказать аналогичную теорему. Но мы воздержимся от доказательства, так как очевидно по аналогии, что эта теорема такова:

Общее решение диференциального уравнения n-го порядка есть функциональное соотношение вида:

$$\Phi(x, y, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}) = 0,$$

в котором $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ — произвольные постоянные.

§ 10. Граничные условия.

С точки зрения формальной решить диференциальное уравнение значит найти его общее решение. С этой точки зрения никакая задача не может считаться решенной до конца, пока мы не получим результата, в котором число произвольных постоянных равно порядку уравнения.

С практической точки зрения положение несколько иное. Когда диференциальное уравнение возникает в связи с научным исследованием, обычно требуется не общее, а частное решение этого уравнения, так как в физической проблеме обычно требуемое решение должно удовлетворять не только самому уравнению, но и некоторым дополнительным условиям, специально связанным с самим исследованием. Эти дополнительные условия называются «граничными условиями», или «граничными значениями».

Как пример рассмотрим движение маятника, отклоненного на угол Θ и затем отпущенного (черт. 13). Известно, что угловое ускорение $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ маятника пропорционально его угловому смещению и обратно ему по знаку*. Выразив эту связь уравнением, мы получим:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -p^2\theta, \tag{22}$$

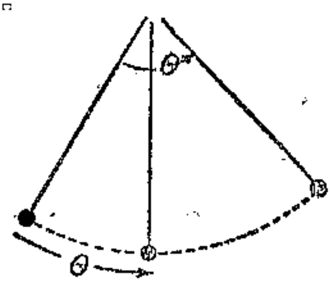
где p — положительное постоянное.

Общее решение этого уравнения может быть получено методом, который в дальнейшем будет объяснен; оно имеет вид:

$$\theta = \alpha\cos pt + \beta\sin pt, \tag{23}$$

где α и β — две произвольных постоянных.

В силу присутствия этих произвольных постоянных движение, определяемое (23), еще совершенно не определено. Это можно показать, если мы попытаемся найти, каков максимальный угол качания маятника. Легко представить уравнение (23) в форме:



Черт. 13.

$$\theta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(pt+\varepsilon);$$

где $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$; в этой форме видно, что наибольшее значение, достигаемое θ, есть $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Но так как α и β произвольны, это максимальное значение может быть всем, чем угодно.

С другой стороны, в физическом движении маятника нет ничего неопределенного. Каждый знает на опыте, что если маятник отклонен до положения Θ и затем отпущен, то его последующее поведение вполне определено. Отсюда следует, конечно, что некоторая система значений α и β дает истинное решение, другие же системы значений соответствуют другим возможным поведениям маятника, пущенного другим способом. Отсюда, с практической точки зрения, проблема только тогда разрешена полностью, когда найдены подходящие α и β. В рассматриваемом случае сделать это довольно просто. Если назвать $t=0$ момент времени, в который пущен маятник, то, во-первых, известно, что в этот момент θ было равным Θ, а во-вторых, что скорость $\frac{d\theta}{dt}$ была нуль. Эти условия выражаются следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \Theta \quad \text{при } t=0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0 \quad \text{при } t=0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

но из (23)

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \alpha \quad \text{при } t=0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= p\beta \quad \text{при } t=0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

* Это утверждение верно с высокой степенью точности, если θ мало и если нет рассеивающих сил, как трение опоры и сопротивление воздуха.

Сравнивая (24) и (25), мы, очевидно, должны положить $\alpha = \Theta$ и $\beta = 0$. Отсюда искомое решение:

$$\theta = \Theta \cos pt.$$

Если истолковать θ и t как ординату и абсциссу точки в декартовых координатах, то эти граничные условия (24) указывают, где и в каком направлении кривая пересекает вертикальную ось.

Интересно отметить, что это как раз то, что нам нужно было знать для построения геометрической картины в § 9. Существуют, однако, другие типы условий, которые можно употребить и которые также хорошо послужат для нашей цели. Например, для маятника, уже качающегося, могут быть отмечены два его положения в два момента времени, отличающихся на одну секунду. Пусть эти моменты $t=0$ и $t=1$, а соответствующие положения $\theta=\theta_0$ и $\theta=\theta_1$, тогда (23) даст нам:

$$\theta_0 = \alpha$$
$$\theta_1 = \alpha \cos p + \beta \sin p.$$

Постоянные α и β будут следующие:

$$\alpha = \theta_0,$$
$$\beta = \theta_1 \csc p - \theta_0 \operatorname{ctg} p;$$

а искомое решение:

$$\theta = \theta_0 \cos pt + (\theta_1 \csc p - \theta_0 \operatorname{ctg} p) \sin pt.$$

Оно может быть приведено к несколько более простому виду:

$$\theta = \frac{\theta_0 \sin p\,(1-t) + \theta_1 \sin pt}{\sin p}.$$

Графически эта система граничных условий фиксирует не точку и направление кривой в этой точке, а две точки кривой, предоставляя направлениям заботиться самим о себе.

Много других типов граничных условий точно так же пригодны для определения частного решения, например, угловые скорости маятника в два различные момента времени, а не его положения, или положение в один момент и скорость в другой момент и т. д. Выраженные в виде уравнений они дадут:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \theta_0' \quad \text{при } t = t_0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta_1' \quad \text{при } t = t_1, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \quad \text{при } t = t_0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta_1' \quad \text{при } t = t_1. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Графически первые дают наклоны касательной к кривой в точках пересечения ее с двумя вертикальными прямыми, не указывая ординат этих точек пересечения, тогда как вторые дадут точку, через которую проходит кривая, и наклон касательной в точке пересечения ее с другой ординатой.

Следует отметить, что в этом примере процесс решения состоял из двух частей: во-первых, в определении общего решения, затем в выборе постоянных таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Это обычный путь решения, но не единственный. Было уже сказано, что с формальной точки зрения уравнение решено, как только проделан первый шаг, и может на первый взгляд показаться, что при таком положении мы забываем об очень важной части задачи. Но нужно отметить, что как только общее решение найдено, определение произвольных постоянных требует только решения системы уравнений, не содержащих производных. Поэтому логически эта часть задачи относится к другой ветви математики—теории уравнений,— а не к изучению диференциальных уравнений.

Формальная постановка вопроса поэтому до некоторой степени оправдывается.

§ 11. *Доказательство существования.*

В § 10 были установлены граничные условия в различных видах, и в каждом случае было найдено решение уравнения (22), удовлетворяющее этим условиям. Естественно поставить вопрос: может ли всегда быть найдено решение, в какой бы форме граничные условия ни были заданы? Что на этот вопрос ответ будет отрицательный, легко показать на примере, где этого решения нет. Пусть мы ищем решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0, \quad \text{при } t = 0, \\ \theta &= 2\theta_0 \ \text{ при } t = \frac{\pi}{p}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Если мы подставим эти условия в (23), то получим:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a, \\ 2\theta_0 &= -a. \end{aligned}$$

Очевидно, a не может удовлетворять одновременно этим двум уравнениям (если $\theta_0 \neq 0$), поэтому такого решения не существует. Система заданных значений в этой задаче невозможна, и всякая попытка решить задачу безнадежна.

Есть физическое объяснение, почему эта система граничных условий не может быть удовлетворена. Качание маятника в одном направлении есть точная копия его качания в другом направлении с той разницей, что в точках, симметричных относительно вертикальной оси, скорости имеют противоположные направления. Поэтому, если в начальный момент θ равно θ_0, то по прошествии времени одного качания оно должно равняться $-\theta_0$. Потребовать, чтобы оно равнялось чему-нибудь другому, как мы это сделали в (28), физически абсурдно.

Это дает отрицательный ответ на вопрос, всякие ли граничные условия могут быть заданы; но мы не получаем способа различить заранее, является ли данная система начальных условий возможной, или нет Обычно, когда диференциальное уравнение возникает в связи с некоторой проблемой физики, заранее известно, что проблема имеет решение, и поэтому по здравому смыслу и математическая ее формулировка тоже должна иметь решение. Но такой аргумент во всяком случае не дает прямого ответа на вопрос и не дает общезначимых критериев.

Иногда же научные проблемы именно так и ставятся, что требуется определить, возможно ли заданное (физическое) состояние или нет, и тогда это рассуждение по здравому смыслу совершенно непригодно. Даже в лучшем случае оно является непрямым и всегда недостаточно, когда мы имеем дело с чисто математическими задачами. Поэтому математики обращали много внимания на «доказательства существования», т. е. на определение таких граничных условий, для которых можно утверждать существование решения.

Методы этих доказательств выходят целиком из рамок этой книги, мы не можем даже дать существенную часть результатов. Один частный результат, однако, дает столь тесную аналогию с рассмотренной нами геометрической интерпретацией, что стоит на нем кратко остановиться.

Этот результат касается случая, когда граничные условия даны в виде значений y и его производных для одного и того же значения x, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} y=\eta, \\ y'=\eta', \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}=\eta^{(n-1)}, \end{array}\right\} \text{для } x=\xi. \tag{29}$$

Как раз этот тип граничных условий рассматривался в § 6—9. Если, как в этих параграфах, диференциальное уравнение разрешено относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

то оно имеет всегда решение, удовлетворяющее граничным условиям (29), если только функция f удовлетворяет двум условиям*:

1) Она непрерывна в точке $x=\xi$, $y=\eta, \dots, y^{(n-1)}=\eta^{(n-1)}$.

2) Она имеет непрерывные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

Значение этих условий было объяснено в § 3 и 4.

ЗАДАЧИ.

1. Определить произвольные постоянные в (23) так, чтобы удовлетворить граничным условиям (26).

2. Определить произвольные постоянные (23) так, чтобы удовлетворить (27).

* Подразумевается также, что функция f однозначна. Если f многозначна, то будет существовать столько же решений, удовлетворяющих (29), сколько различных значений имеет f.

3*

Глава III.

ИСТОЧНИКИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 12. Источники диференциальных уравнений.

Прежде чем говорить о том, как диференциальные уравнения решаются, следует поговорить о том, как они возникают. В настоящей главе мы рассмотрим два различных пути.

Первый путь есть как раз обращение рассуждения гл. II и подобно этому рассуждению приводит к правилу, что число произвольных постоянных в решении диференциального уравнения равно порядку уравнения. Этот путь важен скорее с теоретической, чем с практической точки зрения, ибо диференциальные уравнения, с которыми читатель встречается на практике, редко возникают таким путем.

Напротив, они обычно возникают при математических формулировках физических законов в терминах диференциальных символов. Вторая часть главы посвящена нескольким иллюстрациям этого второго вида уравнений.

§ 13. Образование диференциального уравнения из его примитивной.

Мы видели, что общее решение диференциального уравнения представляется семейством кривых. Поэтому можно назвать уравнение диференциальным уравнением семейства. Задачей этого отдела является получение диференциального уравнения из заданного семейства кривых.

Мы знаем, что семейство кривых определяется уравнением:

$$f(x, y, c) = 0, \tag{30}$$

содержащим, кроме переменных x и y, произвольную постоянную c. Различные кривые семейства соответствуют различным значениям c. Производя диференцирование, мы получаем диференциальное уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{31}$$

Если это уравнение не содержит c, то оно и есть искомое. Если в него входит c, как это бывает в общем случае, нужно исключить c из двух уравнений (30) и (31); при этом получается новое уравнение, содержащее только x, y и $\frac{dy}{dx}$. Тогда это последнее и будет уравнением семейства кривых (30).

Пусть, например, наше семейство

$$y = \sin cx. \tag{32}$$

Диференцирование дает:

$$y' = c \cos cx. \tag{33}$$

Оба эти уравнения содержат c, поэтому ни одно из них не есть искомое. Но из (32) находим:

$$\cos cx = \sqrt{1 - y^2},$$
$$c = \frac{1}{x} \arcsin y.$$

Подстановка этих выражений в (33) дает:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1 - y^2} \arcsin y. \tag{34}$$

Так как последнее уравнение не зависит от c, то оно и есть уравнение семейства (32).

Этот процесс исключения произвольных постоянных может быть выполнен и тогда, когда число их больше одного. Чтобы показать это, рассмотрим уравнение:

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \tag{35}$$

между x и y, зависящее от n произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Это семейство тоже есть семейство кривых; перед нами стоит задача получить диференциальное уравнение, определяющее то же семейство, но без произвольных постоянных.

Если мы продиференцируем (35) n раз подряд по x, то получим систему n других уравнений. Эти уравнения вместе с уравнением (35) составляют систему $n+1$ уравнений, необходимых для исключения n постоянных c_i. Результатом этого исключения и будет искомое диференциальное уравнение. Так как ни одно из уравнений не содержит производных выше n-го порядка, то полученное диференциальное уравнение будет не выше n-го порядка. Обратно, порядок уравнения не может быть и ниже n, в противном случае n-я производная уравнения (35) не была бы необходима для решения, и в этом случае не все постоянные были бы независимы. Итак: **порядок наивысшей производной в диференциальном уравнении равен числу независимых постоянных примитивной функции.**

Это — то же самое правило, которое мы получили в гл. II для числа постоянных в решении диференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$\theta = \alpha \sin pt + \beta \cos pt, \tag{23}$$

содержащее переменные θ и t и произвольные постоянные α и β. Диференцируя его дважды, получим:

$$\theta' = \alpha p \cos pt - \beta p \sin pt,$$
$$\theta'' = -\alpha p^2 \sin pt - \beta p^2 \cos pt.$$

В этом случае исключение произвести очень просто, и мы получаем:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p^2\theta = 0. \tag{22}$$

Это — искомое диференциальное уравнение. Мы с ним только что встречались в § 10, где было указано, что (23) есть его решение.

§ 14. Получение диференциальных уравнений из физических законов.

В приложении математики к техническим и физическим наукам диференциальные уравнения встречаются постоянно, так как многие физические законы проще всего выражаются при помощи диференциальных символов. Иллюстрация была дана в § 10, где физические законы, управляющие движением математического маятника, тотчас приводят к диференциальному уравнению второго порядка. В следующих отделах мы дадим несколько других примеров.

Некоторые из этих примеров требуют применения таких физических законов, с которыми читатель может быть незнаком. Поэтому в каждом случае дается краткий обзор научных фактов, необходимых для понимания проблемы. При этом не делается попыток объяснить, каким образом удостоверились в справедливости этих фактов. Чтобы сделать это, потребовалось бы изучение тех отделов физики, из которых взяты приводимые примеры, что, конечно, выходит из рамок этой книги. При нашей установке эти законы нужны только для одного: показать, что диференциальные уравнения вытекают естественным образом и непосредственно из этих законов, настолько непосредственно, что если бы читатель был хорошо знаком с вопросами, которые здесь рассматриваются, он без затруднения вывел бы те же уравнения самостоятельно.

Так как предметом наших исследований является вывод уравнений, то читатель должен удовлетвориться, когда он уверен, что понимает содержание физических фактов, и не должен слишком много раздумывать над тем, каким образом установлена их справедливость. Другими словами, будет лучше, если он примет предварительные утверждения на веру, оставляя свой здоровый скептицизм для математических выводов, которыми они сопровождаются.

§ 15. Пример 1. Закон действия масс.

Химические реакции происходят не моментально после того, как реагенты приведены в соприкосновение. Некоторое количество соединения образуется в первую тысячную секунды, еще некоторое — в следующую тысячную долю и т. д. Скорость образования соединения, однако, не постоянна, а изменяется вместе с количеством веществ, которые способны вступить в соединение. Во многих простых процессах скорость реакции подчиняется закону, известному под названием «закона действия масс», который утверждает, что скорость, с которой простые вещества превращаются в соединение, пропорциональна произведению количеств тех веществ, которые еще не соединились.

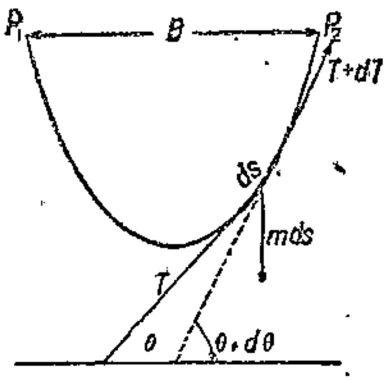
Пусть x есть число молекул соединения, образовавшихся к моменту времени t, и пусть каждая молекула соединения содержит n молекул одного вещества и m молекул другого. Допустим, наконец, что в начале процесса было N молекул первого вещества и M второго. Тогда число еще не соединившихся молекул каждого вещества равно соответственно $N-nx$ и $M-mx$.

Закон действия масс утверждает, что скорость образования новых молекул соединения, т. е. $\frac{dx}{dt}$, пропорциональна произведению этих двух последних величин. Это приводит тотчас же к диференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt}=k(N-nx)(M-mx). \tag{36}$$

§ 16. Пример 2. Кривая провеса гибкой нерастяжимой нити.

В двух точках P_1 и P_2 на одном уровне и на расстоянии друг от друга подвешена нить. Требуется найти форму, которую примет эта нить под действием силы тяжести. Пусть кривая на черт. 14 изображает эту форму, и рассмотрим какой-нибудь элемент длины ds*.



Черт. 14.

Одно из основных предложений механики состоит в том, что этот элемент должен быть в равновесии под действием сил, действующих на него. Эти силы суть:

a) его собственный вес, являющийся силой, действующей вертикально вниз;

b) натяжение нити в нижнем конце, действующее в направлении касательной в этой точке;

c) натяжение нити в верхнем конце, действующее в направлении касательной в этой точке.

Обозначим наклоны касательных в двух концах через — θ и $\theta+d\theta$, напряжения — через T и $T+dT$ и линейный вес** нити — через m. Тогда, если три силы разложены на их x- и y-компоненты, мы получим соответственно:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= -m\,ds,\\ X_2 &= -T\cos\theta, & Y_2 &= -T\sin\theta,\\ X_3 &= (T+dT)\cos(\theta+d\theta), & Y_3 &= (T+dT)\sin(\theta+d\theta). \end{aligned}$$

* На самом деле этот элемент есть приращение длины дуги и обозначается в диференциальном исчислении через Δs. Однако в физических исследованиях, если такое приращение будет стремиться к нулю, пользуются сразу символом диференциала. Это редко приводит к недоразумениям и часто оказывается полезным, давая рассуждению большую наглядность.

** Т. е. вес на единицу длины.

Если элемент нити должен быть в равновесии, под действием этих сил необходимо, чтобы сумма компонент X и сумма компонент Y были нулями, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= (T+dT)\cos(\theta+d\theta),\\ T\sin\theta &= (T+dT)\sin(\theta+d\theta) - m\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Деля почленно эти уравнения, имеем:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta+d\theta) - \frac{m\,ds}{(T+dT)\cos(\theta+d\theta)}. \tag{38}$$

Первое из уравнений (37) утверждает, что горизонтальная компонента натяжения одна и та же в двух концах элемента ds.

Так как элемент ds произвольно выбранный, то отсюда следует, что эта компонента одна и та же в каждой точке кривой*. Если обозначим ее через k, то (38) примет вид:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\theta+d\theta) - \frac{m\,ds}{k}.$$

Если мы запишем это последнее в виде

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta+d\theta)-\operatorname{tg}\theta}{d\theta} = \frac{m}{k}\frac{ds}{d\theta}$$

и будем приближать ds и $d\theta$ к нулю, то левая часть уравнения обратится в производную $\operatorname{tg}\theta$. Итак:

$$\sec^2\theta = \frac{m}{k}\frac{ds}{d\theta}. \tag{39}$$

Это и есть диференциальное уравнение искомой кривой, выраженное как говорят математики, во внутренней форме, т. е. оно выражает длину s, измеренную, начиная с некоторой точки, в функции наклона касательной. Для многих вопросов, однако, внутренняя форма не очень удобна, и поэтому лучше свести ее к обычной декартовой форме. Для этого нужно произвести замену обеих переменных s и θ на x и y, связанных с первыми соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\theta,\\ \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 &= 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Переменное s исключается, если мы заметим, что

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\dfrac{ds}{dx}}{\dfrac{d\theta}{dx}}.$$

---

* Это есть, вместе с тем, наименьшее натяжение для точек кривой, а именно — натяжение внизу, где вертикальная компонента натяжения исчезает.

Это дает

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}=\frac{m}{k}\,\frac{ds}{dx}=\frac{m}{k}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Диференцируя первое из уравнений (40) по x, мы получаем:

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Результат подстановки будет поэтому:

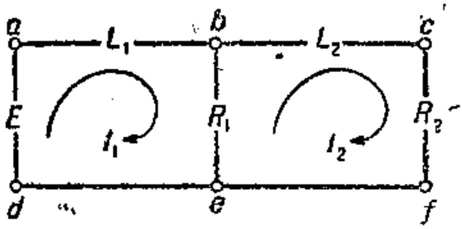
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m}{k}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (41)$$

Это и есть диференциальное уравнение кривой провеса нити, выраженное в функции декартовых координат x и y.

§ 17. Пример 3. Течение тока в электрической сети.

Течение электрического тока в сети, содержащей сопротивления самоиндукции и емкости, управляется следующими пятью законами:

I. Количество электричества, втекающего в точку ветвления сети, такую как b (черт. 15), должно равняться количеству вытекающего электричества.



Черт. 15.

II. Алгебраическая сумма всех электродвижущих сил в замкнутом цикле, как *abeda* или *bcfeb*, равна нулю.

III. Электродвижущая сила в элементе проводника с сопротивлением R равна произведению R на силу тока, проходящего через этот элемент.

IV. Электродвижущая сила в элементе самоиндукции равна произведению L на скорость изменения тока.

V. Электродвижущая сила в элементе емкости C равна заряду конденсатора, деленному на C.

Чтобы формулировать эти законы математически, обозначим через x количество электричества, прошедшего через данную точку с момента времени $t=0$; через x_0 количество электричества в конденсаторе при $t=0$; через R, L и C — величину сопротивления, самоиндукции и емкости; через I — силу тока*. Тогда I будет связано с x уравнением $I=\frac{dx}{dt}$ или $x=\int\limits_0^t I\,dt$, а электродвижущие силы E_R, E_L, E_C, выраженные

* Сила тока есть количество электричества, переносимое в единицу времени

через сопротивление, самоиндукцию и емкость соответственно, будут равны:

$$E_R = RI = R\frac{dx}{dt},$$

$$E_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$E_C = \frac{x+x_0}{C} = \frac{x_0}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt.$$

Пользуясь этими формулами и применяя законы I и II, можно написать сразу диференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины x и I.

Если мы применим закон I к цепи на черт. 15, то придем к заключению, что один и тот же ток силы I_1 проходит через ветви cd, da и ab; и один и тот же ток силы I_2 через bc, ef и fe, тогда как ток через оставшуюся ветвь bc равен $I_1 - I_2$ *. Применение законов III и IV дает следующие электродвижущие силы:

в ab: $\quad L_1\frac{dI_1}{dt}$;

в bc: $\quad L_2\frac{dI_2}{dt}$;

в cf: $\quad R_2 I_2$;

в be: $\quad R_1(I_1 - I_2)$,

тогда как в fe и ed электродвижущие силы равны нулю, так как в этих частях сети нет препятствующих элементов.

Мы предполагаем, что в da расположен генератор, производящий электродвижущую силу E, порождающую нам ток.

Применяя закон II отдельно к циклам $abeda$ и $bcfeb$, мы получаем диференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1(I_1 - I_2) + E = 0,\\ L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 - R_1(I_1 - I_2) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Единственная трудность при образовании этих уравнений лежит в определении знаков различных членов, в частности для звена be. Конечно, это дело техники, и хорошо известно электротехникам. Сейчас нам достаточно отметить, что мы всегда суммируем электродвижущие силы в циклическом порядке, начиная с некоторой точки a и возвращаясь снова в a, например, по циклу $abeda$. Если стрелка, указывающая направление тока, нарисована в направлении обхода, как в случае I_1, соответствующие электродвижущие силы имеют положительный знак. Но если эта стрелка нарисована в направлении, противоположном обходу, как в случае I_2, когда мы проходим из b к e, то электродвижущие силы входят со знаком минус.

* I_2 вычитается, так как он течет в обратном к I_1 направлении.

Этот пример отличается от предыдущих тем, что хотя независимое переменное одно — t, зависимых переменных два: I_1 и I_2. Зато мы имеем два уравнения для их определения. В последующих параграфах мы увидим, что решение этих уравнений не представляет трудностей.

§ 18. Пример 4. Распространение тепла.

Температура в каждой точке тела выражается функцией $\theta(x, y, z)$. Если температура одна и та же во всех точках, то θ постоянно, в противном случае θ изменяется вместе с изменением одной или нескольких координат.

Проведем внутри тела отрезок AB длины Δs и измерим температуры θ_A и θ_B в его концах; тогда отношение

$$\frac{\theta_B - \theta_A}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

есть средняя скорость изменения θ между A и B.

Предел этого отношения при $\Delta s \to 0$ называется **градиентом** температуры в направлении s* и обозначается диференциальным символом $\frac{\partial\theta}{\partial s}$. Градиент выражает собой скорость, с которой изменяется температура для наблюдателя, вышедшего из точки A в направлении s. Если направление s совпадает с одной из координатных осей, то градиент обращается в частную производную обычного вида.

Установив это определение, обратимся к трем основным законам, на которых основано изучение распространения тепла.

I. Количество теплоты, содержащейся в теле на единицу объема, пропорционально температуре тела.

II. Количество теплоты, проходящее в единицу времени через площадку внутри тела, пропорционально произведению этой площадки на градиент температуры, нормальный к этой площадке.

III. Тепло распространяется от более нагретых мест к менее нагретым.

Множители пропорциональности в II и III называются соответственно **теплоемкостью** и **теплопроводностью** тела и обозначаются через c и k.

Рассмотрим элементарный куб со сторонами dx, dy, dz, одна из вершин которого лежит в точке (x, y, z). Рассмотрим сначала две грани, перпендикулярные к оси x.

Количество теплоты, выходящей в единицу времени из куба через ближайшую из этих граней, равно, в силу II и III,

$$k \frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x, y, z} dy\, dz,$$

а количество теплоты, выходящей в дальнюю грань, есть

$$k \frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x+dx, y, z} dy\, dz.$$

* «Направление s» обозначает здесь направление отрезка $A B$.

Разность между ними есть чистое увеличение количества тепла, притекшего в куб в единицу времени, относящееся к этим двум граням.

Если обозначим через q_x количество тепла, притекшего в куб через эти две грани с момента времени $t=0$, то скорость прироста тепла должна быть записана в виде $\frac{dq_x}{dt}$. Отсюда

$$\frac{dq_x}{dt}=k\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x+dx,y,z}-\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x,y,z}\right)dy\,dz.$$

Если dx достаточно мало, то выражение в скобках приблизительно равно $\frac{d^2\theta}{dx^2}dx$, причем это приближенное значение делается вполне точным при $dx\to 0$. Итак, мы имеем:

$$\frac{dq_x}{\partial t}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx\,dy\,dz.$$

Такое же рассуждение можно применить к граням, перпендикулярным оси y, и оно приводит к результату, что приращение количества теплоты через эти грани происходит со скоростью:

$$\frac{dq_y}{dt}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}dx\,dy\,dz.$$

Приращение теплоты через оставшиеся две грани происходит со скорость:

$$\frac{dq_z}{dt}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}dx\,dy\,dz.$$

Общая скорость приращения теплоты $\frac{dq}{dt}$ есть сумма этих трех выражений. Так как все это происходит в объеме $dv=dx\;dy\;dz$, то скорость приращения теплоты на единицу объема равна

$$\frac{1}{dv}\frac{dq}{dt}=k\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right). \tag{43}$$

Все сказанное вытекает из применения II и III законов. Теперь мы можем применить I. Количество теплоты на единицу объема в момент времени t равно $c\theta(t)$, и равно $c\theta(t+dt)$ в момент времени $t+dt$. Чистое приращение равно поэтому:

$$c\left[\theta(t+dt)-\theta(t)\right],$$

и так как это происходит в промежуток времени dt, скорость прироста равна

$$c\frac{\theta(t+dt)-\theta(t)}{dt}=c\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{44}$$

Приобретенная таким образом теплота должна была, конечно, войти в границы элемента (иначе в самом элементе были бы источники теплоты, чего мы не принимали во внимание в нашем рассуждении), откуда следует, что (43) и (44) должны быть равны. Это приводит к диференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\frac{c}{k}\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{45}$$

Это уравнение удовлетворяется для температуры любого тела, через которое проходит теплота. Оно по форме отлично от всех встреченных нами до сих пор, так как здесь входит только одна функция четырех независимых переменных x, y, z и t. Производные, в него входящие,— частные производные, и уравнение есть уравнение с частными производными.

В качестве простого примера рассмотрим большую плоскую пластинку, на гранях которой поддерживалась температура θ_1 и θ_2 столь долго, что температура в каждой внутренней точке достигла состояния равновесия и более не меняется. Тогда $\frac{\partial\theta}{\partial t}=0$. Условия симметрии показывают, что температура будет постоянна в каждой точке любой плоскости, параллельной граням, что означает, конечно, что $\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$ равны нулю. Поэтому уравнение (45) сводится к

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}=0,$$

так как нет смысла употреблять круглые ∂ ввиду того, что осталось одно независимое переменное.

Это уравнение столь просто, что его можно немедленно решить, не ожидая развития методов интегрирования. Простая интеграция дает:

$$\theta=ax+b, \tag{46}$$

где a и b — постоянные интеграции.

Если координаты граней $x=0$ и $x=X$, то граничные условия таковы:

$$\theta_1=b,$$
$$\theta_2=aX+b.$$

Отсюда находим a и b:

$$b=\theta_1,$$
$$a=\frac{\theta_2-\theta_1}{X};$$

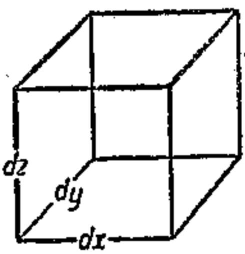
и уравнение (46) принимает вид:

$$\theta=\theta_1+\frac{x}{X}(\theta_2-\theta_1).$$

График θ есть прямая линия, имеющая ординату θ_1 при $x=0$ и ординату θ_2 при $x=X$.

§ 19. Пример 5. Безвихревое движение идеальной жидкости.

Когда жидкость находится в движении, ее различные элементы могут иметь разные скорости. Если рассматривать только компоненту движения по оси x, то очевидно, что ее значение в каждой точке есть функция координат x, y, и z и, возможно, также времени t. Обозначим эту функцию через $u(x, y, z, t)$. Аналогично обозначим компоненту движения по оси y через $v(x, y, z, t)$, а компоненту по оси z через $w(x, y, z, t)$.



Черт. 16.

Может быть показано, хотя мы этого не можем сделать здесь, что эти три функции часто* равны трем частным производным по x, y, z одной и той же функции $\Phi(x, y, z, t)$. Эта функция известна под названием п о т е н ц и а л а с к о р о с т е й. Более того, частные производные этой функции Φ по t пропорциональны конденсации в точке (x, y, z), т. е. отношению разности мгновенной и средней плотности к средней плотности жидкости. Записанные в виде уравнений эти утверждения дают:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x};$$
$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$
$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$
$$s = -c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\text{**}.$$

Предполагая, что это верно, мы можем составить диференциальное уравнение движения жидкости следующим образом.

Рассмотрим элемент объема (черт. 16).

Масса жидкости $\rho u\, dy\, dz\, dt$ втекает в этот элемент через левую грань во время dt; количество

$$\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, dt$$

вытекает из противоположной грани. Точно так же количество $\rho v\, dx\, dz\, dt$ втекает через переднюю грань, а количество $\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dx\, dz\, dt$ вытекает из задней. Наконец, через нижнюю грань втекает $\rho w\, dx\, dy\, dt$, а из верхней вытекает

$$\rho\left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dx\, dy\, dt.$$

* В частности, когда жидкость «идеальная» и движение «безвихревое».

** Постоянная пропорциональности всегда отрицательна. Это относится к форме четвертого из написанных нами уравнений. Отметим, что по определению $= (\rho - \rho_0)\, \rho_0$, где s — конденсация, а ρ — плотность. Отсюда получаем соотношение $= \rho_0 (s + 1)$, которое нам понадобится в дальнейшем.

Принимая все это во внимание, и заметив, что ρ отличается от ρ_0 на пренебрегаемо-малую величину во всем элементе объема, легко видеть, что количество вытекающей жидкости превышает количество втекающей на величину

$$\rho_0\, dx\, dy\, dz\, dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

или, что то же, количество внутри элемента увеличилось на указанную величину со знаком минус. Это количество вызывает изменение ds конденсации. А именно, первоначальная масса элемента была $\rho_0(1+s)\,dx\,dy\,dz$, конечная масса будет $\rho_0\left(1+s+\frac{\partial s}{\partial t}dt\right)dx\;dy\;dz$. Отсюда приращение равно $\rho_0\,\frac{\partial s}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$.

Приравнивая эти две величины, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \text{или}\qquad &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=c^2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(47)$$

Это и есть искомое уравнение.

Если жидкость несжимаемая, s должно равняться нулю всюду и в каждый момент. В этом случае (47) сводится к

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \qquad (48)$$

Три уравнения (45), (47) и (48) известны под названием «уравнения теплопроводности», «уравнения волнового движения» и «уравнения Лапласа».

Они являются одними из основных уравнений прикладной математики, и так как они содержат одну и ту же комбинацию производных:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

то для ее изображения вводится специальный символ ∇^2. Употребляя этот символ, называемый «набла в квадрате», мы можем переписать уравнения (45), (47) и (48) в виде

$$\nabla^2\theta=\frac{c}{k}\,\frac{\partial\theta}{\partial t}, \qquad (45)$$

$$\nabla^2\Phi=c^2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \qquad (47)$$

$$\nabla^2\Phi=0. \qquad (48)$$

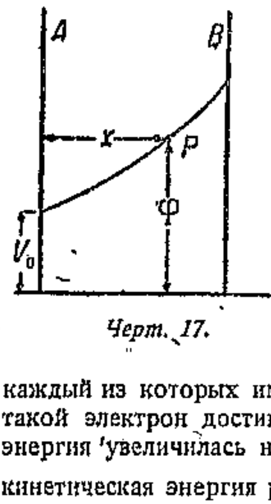
Существует еще четвертое уравнение, очень важное для прикладной математики, в которое входит та же комбинация производных, что и в уравнениях (45), (47) и (48), это:

$$\nabla^2\Phi+4\pi\rho=0, \qquad (49)$$

в котором Ф — потенциал электричества, а ρ — плотность электричества, т. е. единица количества электричества на единицу объема. Это уравнение, известное под названием уравнения Пуассона, представляет распространение потенциала в области, в которой произвольно распределены заряды электричества. Плотность ρ, конечно, есть функция от x, y, и z, указывающая каким образом распределены заряды. В случае, когда заряды отсутствуют, ρ равно нулю, и уравнение (49) сводится к уравнению Лапласа.

§ 20. Пример 6. Уравнение распределения потенциала в пустотной трубке.

Как последний пример рассмотрим распределение потенциала между парой параллельных плоских электродов в пустотной трубке, один из которых предполагаем нагретым настолько, что он излучает электроны, которые притягиваются к другому благодаря разности потенциалов, поддерживаемой на них. Согласно утверждениям предыдущего параграфа этот случай подходит под диференциальное уравнение (49), как только мы будем знать распространение электричества в пространстве между электродами. Таким образом нашей задачей является найти это распределение.



Черт. 17.

Основной физический закон состоит в том, что если перенести электрический заряд величины e из точки с потенциалом Φ_1 в точку с потенциалом Φ_2, то при этом будет произведена работа $(\Phi_2 - \Phi_1)e$, и кинетическая энергия заряда увеличится на эту работу. Предположим, что кривая на черт. 17 представляет собою искомое распределение потенциала, и допустим, что 1 $см^2$ на электроде A излучает в 1 сек. n электронов, каждый из которых имеет заряд e, начальную скорость v_0 и массу m. Если такой электрон достиг точки P с потенциалом Ф, то его кинетическая энергия увеличилась на количество $(\Phi - v_0)e$. Так как первоначальная кинетическая энергия равнялась $\frac{1}{2}mv_0^2$, то кинетическая энергия в точке P равна

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (\Phi - v_0)e.$$

Это выражение равно $\frac{1}{2}mv_0^2$, где v — скорость электрона в точке P. Отсюда:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m}(\Phi - v_0)}.$$

Зная число электронов, проходящих через P в 1 сек. и скорость их движения, легко найти пространственный заряд ρ. Для этого обратим внимание на электроны, проходящие за время dt через площадку в 1 $см^2$, нормальную к потоку электронов. Те из электронов, которые пересекли эту площадку в начале этого промежутка, за время dt пройдут расстояние $v\,dt$, те же, которые пересекают эту площадку в конце промежутка — совсем не продвинутся. Поэтому рассматриваемая группа электронов распределяется внутри параллелепипеда с сечением единица u и высотой $v\,dt$. Их число, очевидно, равно $n\,dt$, а общий заряд равен $n\,e\,dt$. Но если этот отрицательный заряд $n\,e\,dt$ распределен на объем $v\,dt$ нашего параллелепипеда, то площадь его

$$\rho = -\frac{ne}{v}.$$

Отсюда уравнение (49) обращается в

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi ne}{v}.$$

Далее, в силу симметрии задачи потенциал изменяется только в направлении x, и поэтому $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ равны нулю. Отсюда (49) обращается в

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{4\pi ne}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m}(\Phi - v_0)}}. \tag{50}$$

Это диференциальное уравнение выражает закон распределения потенциала внутри термионической пустотной трубки с плоскими электродами, в предположении, что все электроны излучают с одной и той же скоростью.

Из этого уравнения выводится так называемый «закон полуторного показателя».

ЗАДАЧИ.

1. Классифицировать все диференциальные уравнения гл. I и II по их роду (обыкновенные или с частными производными), степени, порядку и установить будут ли они линейными или нелинейными, и если линейные, то с постоянными коэфициентами или переменными.

2. В случае обыкновенных диференциальных уравнений установить число независимых постоянных в общем решении.

3. Какие из полученных решений в рассмотренных примерах были общими решениями? Написать по два частных решения в каждом примере, где было получено общее решение. Сколько еще частных решений существует?

4. С достаточно хорошим приближением можно сказать, что количество теплоты, потерянное в 1 сек. нагретым телом, пропорционально разности температур тела и окружающей среды. Приняв это правило, написать диференциальное уравнение, выражающее высоту ртутного столба в термометре как функцию времени при переносе термометра из теплой среды в холодную.

5. Кривизна некоторой кривой во всякой точке пропорциональна наклону нормали, проведенной в этой точке. Каково диференциальное уравнение кривой?

6. Найти диференциальное уравнение семейства кругов:

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2. \tag{18}$$

7. Найти диференциальное уравнение семейства кривых:

$$(y-c)^2 = (x+c)^3. \tag{14}$$

8. Найдите диференциальное уравнение семейства кривых:

$$y^3=(x-c)(x-2c)^2. \tag{17}$$

9. Человек, стоящий в углу A квадратного поля, держит в руках один конец веревки длины L. Веревка лежит всей своей длиной на стороне AB поля, к другому ее концу привязан тяжелый груз. Человек идет по стороне AC, продолжая держать свой конец веревки. Предполагая, что мгновенное движение груза всегда направлено по веревке, найти диференциальное уравнение траектории груза.

10. Точка P при движении описывает кривую, наклон касательной к которой пропорционален площади треугольника, образованного ординатой точки, осью x и прямой, соединяющей точки $(l, 0)$ и P. Найти диференциальное уравнение кривой.

11. Машина приводится постоянной силой в движение, которое замедляется силами трения в опорах, причем эти силы прямо пропорциональны скорости; фактор пропорциональности равен R. Однако благодаря нагреванию смазочного масла в опорах фактор R меняется со временем, и его можно грубо принять за величину обратную $t+1$.

Помня, что ускорение тела есть отношение силы к массе, написать диференциальное уравнение движения машины.

ГЛАВА IV

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

§ 21. *Случай, когда не входит зависимое переменное.*

Очень простые типы уравнений первого порядка — те, в которых отсутствует то или другое переменное. Предположим, что зависимое переменное v не входит явно. Уравнение имеет тогда вид:

$$f\left(\frac{dy}{dx},\ x\right)=0.$$

Разрешая это уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получаем уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(x).$$

В этой форме проблема решения диференциального уравнения свелась к простому интегрированию. Решение есть:

$$y=\int\Phi(x)\,dx+a, \tag{51}$$

где a — произвольное постоянное.

Часто бывает удобнее записать решение в виде:

$$y=\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\,dx, \tag{52}$$

где x_0 — постоянное интеграции.

Легко видеть, что эта форма решения тождественна с (51); действительно, определенный интеграл в (52) может быть вычислен подстановкой пределов в любой (т. е. неопределенный) интеграл и вычитанием результатов. Но подставляя верхний предел, мы получили неопределенный интеграл, тогда как при подстановке нижнего получим постоянное, значение которого произвольно, поскольку x_0 произвольно. Если это постоянное обозначить через $-a$, то (52) сводится к (51).

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{dy}{dx}+x=0. \tag{53}$$

Это уравнение может быть решено относительно $\frac{dy}{dx}$; в результате получаем:

$$\frac{dy}{dx}=-1\pm\sqrt{1-x},$$

уравнение, интеграл которого есть:

$$y=a-x\pm\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, (53) удовлетворяется тогда и только тогда, когда справедливо одно из соотношений:

$$\left.\begin{aligned} y+x-a+\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}=0,\\ y+x-a-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}=0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Оба эти решения могут быть записаны в виде одного уравнения, основываясь на том, что если произведениие двух величин равно нулю, то либо одна из них, либо другая должна быть нулем, и обратно.

Отсюда всякое решение (53) удовлетворяет соотношению:

$$(y+x-a)^2-\frac{4}{9}(1-x)^3=0, \tag{55}$$

полученному почленным перемножением двух уравнений (54). Обратно, если (55) удовлетворяется, то одно из уравнений (54) должно удовлетворяться, а это значит, что (53) тоже удовлетворяется.

Если дополнительно известно, что y должно исчезать при $x=0$, значение a уже не будет произвольным, а должно быть так выбрано, чтобы и это условие удовлетворялось. Полагая в (55) x и y равными нулю, находим для a значения $a=\pm\frac{2}{3}$. Отсюда частное решение *, удовлетворяющее одновременно уравнению и граничным условиям, есть:

$$\left(y+x\pm\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}(1-x)^3.$$

§ 22. *Случай, когда не входит независимое переменное.*

В случае, когда не входит независимое переменное, уравнение принимает вид:

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y\right)=0.$$

Решая его относительно $\frac{dy}{dx}$, получаем уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(y),$$

или

$$\frac{dy}{\Phi(y)}=dx,$$

* Или, вернее, частные решения, так как эти два значения a дают разные кривые.

решение которого, очевидно, есть:

$$x=\int\frac{dy}{\Phi(y)}+a.$$

Оно может быть также записано в виде:

$$x=\int^{y}\frac{dy}{\Phi(y)}.$$

Как пример рассмотрим уравнение:

$$\sin\frac{dy}{dx}=1-y.$$

Оно сводится к

$$\frac{dy}{\arcsin(1-y)}=dx,$$

или

$$x=\int\frac{dy}{\arcsin(1-y)}+a. \tag{56}$$

Поскольку дело относится к диференциальным уравнениям, это и есть решение поставленной задачи. Тот факт, что интеграл не может быть выражен в конечной форме в элементарных функциях, неприятен, но этого нельзя избежать *.

§ 23. *Разделение переменных.*

Общее уравнение первого порядка может содержать только переменные x и y и производную $\frac{dy}{dx}$. Теоретически всегда возможно поэтому разрешить его относительно $\frac{dy}{dx}$, причем уравнение принимает вид:

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(x,\ y). \tag{57}$$

Если $\Phi(x,y)$ оказывается произведением функции только одного x на функцию одного y, в каком случае оно может быть записано в виде $\Phi_1(x)\ \Phi_2(y)$, или если каким-нибудь способом мы можем привести его к этому виду, то (57) можно переписать иначе в виде:

$$\frac{dy}{\Phi_2(y)}=\Phi_1(x)\,dx.$$

Решение его, очевидно, будет:

$$\int\frac{dy}{\Phi_2(y)}=\int\Phi_1(x)\,dx+a.$$

* В § 24—26 будут даны практические методы вычисления интегралов. При их помощи возможно либо получить кривую, представляющую соотношение между y и x, либо получить таблицу значений и таким образом дополнить решение задачи.

Этот процесс известен под названием решения диференциального уравнения при помощи «разделения переменных». Методы § 21 и 22 суть частные случаи этой схемы; легко найти и другие примеры.

Например, когда мы разделим переменные в (34), то получим:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\arcsin y}=\frac{dx}{x}, \tag{58}$$

Так как $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ есть диференциал $\arcsin y$, то (58) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\arcsin y}{\arcsin y}=\frac{dx}{x}; \tag{59}$$

решение его, очевидно, есть $\ln\arcsin y=\ln x+a$. Последнее легко привести к форме (32), откуда мы и получили диференциальное уравнение (34).

Интересно отметить, что подстановка, предложенная в задаче 6, § 5, приводила это уравнение к виду:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{w}{x}, \tag{60}$$

в котором переменные легко разделяются. После того как мы произведем интеграцию, решение получится такое:

$$w=cx,$$

последнее же переходит в

$$y=\sin cx,$$

в силу соотношения, существующего между y и w.

По существу между этими двумя методами решения нет разницы. Замена переменных в задаче 6 была сделана при помощи уравнения $y=\sin w$, или $w=\arcsin y$. В (59) та же самая функция и ее диференциал были записаны в явной форме, и мы поступали с ними так же, как если бы $\arcsin y$ был переменной интеграции. Записаны ли они явно, как в (58) и (59), или заменены через w, как в (60), это, в конце концов, одно и то же.

ЗАДАЧИ.

1. Решить уравнение (39). Предполагая, что длины дуг измерены, начиная от минимальной точки кривой, определить значение постоянной интеграции.

2. Решить задачу 3, § 5. Получим ли мы то же решение, что и прежде?

3. Решить диференциальное уравнение, полученное в задаче 4, § 20. Если температура нагретой среды превышает температуру холодной на 30°, и если через 2 сек. термометр показывает на 20° больше, чем температура среды, каковы будут его показания через 20 сек. после переноса? Может ли это случиться для хорошего медицинского термометра?

4. Решить следующие уравнения:

(a) $\sin x \cos^2 y\, dx + \cos^2 x\, dy = 0$.

(b) $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$.

(c) $y - x\frac{dy}{dx} = b\left(1 + x^2\frac{dy}{dx}\right)$.

5. Решить уравнение (36).

6. Решить

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)}.$$

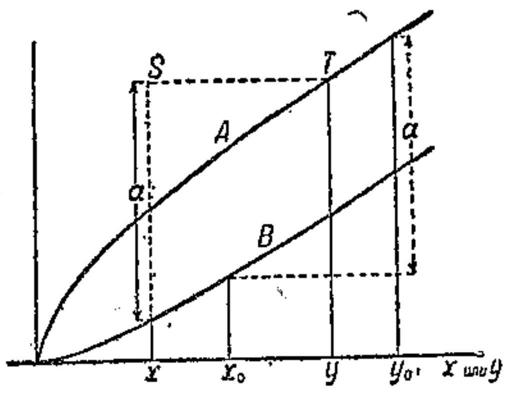
§ 24. *Численное интегрирование.*

Типы решений, разобранные в § 21 и 23, все сводятся к виду:

$$\int f_1(y)\, dy = \int f_2(x)\, dx + a. \tag{61}$$

Это — формальное решение; оно может оказаться непригодным для приложений по следующим двум причинам: либо может случиться, что нельзя вычислить интегралы, либо после их вычисления может оказаться невозможным выразить y как явную функцию от x.

Уравнение (56) является иллюстрацией к трудностям первого рода, тогда как решение задачи 6, § 23 дает прекрасный пример трудностей второго рода. Когда одна из этих трудностей возникает, необходимы какие-то дальнейшие пути.



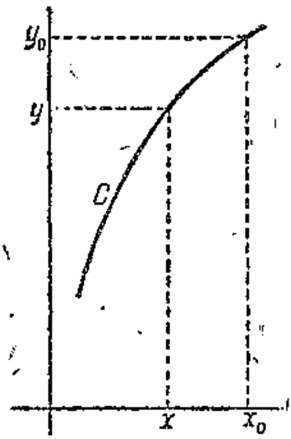
Черт. 18.

Для наших целей лучше рассмотреть эти трудности в порядке, обратном логическому, т. е. рассмотреть сначала, что нужно сделать, если функции проинтегрированы, а затем уже научиться интегрировать их.

Если обе функции проинтегрированы, — каким образом нас это в настоящий момент не интересует, — то два интеграла в (61) могут быть изображены в одной и той же системе координат (черт. 18), причем абсциссу называем x для одной кривой и y для другой. Предположим, что граничные условия таковы, что при $x = x_0$, $y = y_0$. Когда эти точки отмечены на оси абсцисс (черт. 18,) соответствующие ординаты на каждой кривой дадут те значения, которые должны принимать одновременно интегралы, входящие в уравнение (61).

Отсюда a должно иметь значение, равное разности длин этих ординат, иначе (61) не было бы верным уравнением.

Если известно значение a, легко найти другие пары значений x и y; ибо уравнение (61) показывает, что если x и y — пара соответствующих значений x и y, ордината кривой A в точке y должна превосходить ординату кривой B в точке x на количество a. Пусть теперь мы желаем знать значение y, соответствующее произвольному x. Отметив x на оси абсцисс и прибавляя a к ординате кривой B, мы найдем точку S.



Черт. 19.

После этого нужно только найти точку T на кривой A на той же высоте, что и точка S, и основание ординаты в этой точке даст нам искомое y.

Можно выбрать другие значения x и определить тем же способом соответствующие значения y. После того как мы вычислим достаточное число таких пар, они могут быть нанесены на чертеж (черт. 19), и через них проведена кривая C. Эта кривая представляет связь между x и y. Она может быть продолжена как угодно далеко.

§ 25. Интегрирование при помощи рядов.

Метод, указанный в § 24, предполагает возможность интеграции $f_1(y)$ и $f_2(x)$. Ближайшие параграфы посвящены методам, которые иногда полезны для вычисления решения.

Функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ часто могут быть разложены в ряды Тэйлора. Если эти ряды сходятся в окрестности значений y_0 и x_0, то они могут быть почленно проинтегрированы, и при помощи полученных рядов можно произвести вычисление. Как пример рассмотрим уравнение:

$$x = \int \frac{dy}{\arcsin(1-y)} + a, \tag{56}$$

с которым мы встретились в § 22. Чтобы упростить дело, заменим y через новое переменное w, определяемое уравнением:

$$w = \arcsin(1-y). \tag{62}$$

Тогда

$$x = -\int \frac{\cos w}{w} dw + a,$$

или — в другом виде:

$$x = -\int_{w_0}^{w} \frac{\cos w}{w} dw. \tag{63}$$

Проинтегрировать $\frac{\cos w}{w}$ в элементарных функциях невозможно. Если бы это было возможно, то и (56) можно было бы тотчас же проинтегрировать. Но подинтегральную функцию можно разложить в быстро сходящийся ряд. Действительно, хорошо известен ряд для $\cos w$:

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \dots;$$

отсюда тотчас же получаем:

$$\frac{\cos w}{w}=\frac{1}{w}-\frac{w}{2!}+\frac{w^3}{4!}-\frac{w^5}{6!}+\ldots;$$

почленное интегрирование этого рода дает

$$x=\alpha-\ln w+\frac{w^2}{2\cdot 2!}-\frac{w^4}{4\cdot 4!}+\frac{w^6}{6\cdot 6!}-\ldots \tag{64}$$

Пусть теперь граничные условия следующие: $y=0$ при $x=0$. Тогда по формуле (62) $w=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. Подставляя это значение в правую часть формулы (64), получаем $\alpha+0{,}1052$. Отсюда, если x равно нулю при $y=0$, то α должно иметь значение $-0{,}1052$. Соотношение между x и y теперь вполне определено при помощи уравнений (62) и (64). Так как (64) сходится для любого значения y, то возможно вычислить x для любого значения y и таким образом построить связывающую их кривую. Однако проще вычислить x для ряда значений w^2 при помощи (64) и найти затем из (62) соответствующие значения y. Действительно, поступая таким образом, мы можем выбрать значения w с небольшим числом десятичных знаков, так что их логарифмы можно будет найти без интерполяции, и в то же время степени, входящие в (64), легче вычислить.

Интеграл

$$\int_{w_0}^{w}\frac{\cos w}{w}\,dw$$

встречается часто при изучении дифракции света и звука. Его значения были табулированы. Он носит название «интегрального косинуса» и обыкновенно изображается символом* $\mathrm{Ci}\,w$. Конечно, таблицы представляют определенный, а не неопределенный интеграл, т. е. они соответствуют частному значению w_0, которое выбирается равным бесконечности. Выражая (63) через эту табличную функцию, мы получим:

$$x=\mathrm{Ci}\,w_0-\mathrm{Ci}\,w. \tag{65}$$

Нетрудно определить w_0 так, чтобы удовлетворились наши начальные условия, ибо если x должно исчезать при $w=\frac{\pi}{2}$, то очевидно, что $w_0=\frac{\pi}{2}$. Итак,

$$x=\mathrm{Ci}\,\frac{\pi}{2}-\mathrm{Ci}\,w$$

есть сокращенный вид (64) и соответствует частному значению $\alpha=-0{,}1052$.

---

* Символ аналогичен «cos w» и получается из начальных букв латинского слова интегральный косинус. Обратный порядок объясняется тем, что в латинском языке прилагательное обычно ставится после существительного.

Тот факт, что простое выражение (65) и ряд (64) представляют собой одну и ту же функцию, иллюстрирует, как мало различия между теми функциями, которые мы обычно считаем элементарными, и теми, которые считаем не элементарными. Когда мы впервые встречаемся с $\mathrm{Ci}\, w$, оно нам кажется искусственным обозначением сложных рядов (61) и совсем не входит в класс таких простых функций как $\ln w$, $\cos w$ и e^w. Однако и эти функции можно вычислить только потому, что существуют таблицы, и эти таблицы тоже первоначально были получены из рядов.

Точно так же нет никакой причины говорить, как это иногда делают в интегральном исчислении, что интеграл

$$\int \frac{dw}{w}$$

может быть вычислен, а интеграл

$$\int \frac{\cos w}{w}\, dw$$

нет. В самом деле, первый можно записать $\ln w$, а второй $\mathrm{Ci}\, w$, и каждая из этих функций вычисляется нами по таблицам и никаким другим путем.

Поэтому нет ничего таинственного в употреблении решения с помощью рядов.

Если это нужно, решению всякого интеграла с помощью ряда можно дать свое название, подобно $\mathrm{Ci}\, w$, и значения его — табулировать. Эта функция получит тогда то же самое место, что и логарифмы и тригонометрические функции. То обстоятельство, что это было сделано в одних случаях и не сделано в других, происходит благодаря различной степени необходимости этих функций, а не почему-либо другому.

Ряд Тэйлора не всегда является лучшей формой разложения функций. Так, например, в то время как (64) быстро сходится для малых значений w, для больших значений w с этим рядом трудно иметь дело, и легко найти другие ряды, более пригодные. Такие ряды мы сейчас получим, однако не для общего интеграла, а для $\mathrm{Ci}\, w$, так как мы видели, что общий интеграл легко выражается через $\mathrm{Ci}\, w$ при помощи (65).

Интегрируя по частям

$$\mathrm{Ci}\, w = \int_{\infty}^{w} \frac{\cos w}{w}\, dw,$$

получим:

$$\mathrm{Ci}\, w = \frac{\sin w}{w} + \int_{\infty}^{w} \frac{\sin w}{w^2}\, dw.$$

Интегрируя этот результат по частям вторично, получаем:

$$\mathrm{Ci}\, w = \frac{\sin w}{w} - \frac{\cos w}{w^2} - 2\int_{\infty}^{w} \frac{\cos w}{w^3}\, dw.$$

Продолжая этот процесс, мы приходим к ряду:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ci}\, w = \sin w\left[\frac{1}{w}-\frac{1\cdot 2}{w^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{w^5}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{w^7}+\ldots\right]-\\ -\cos w\left[\frac{1}{w^2}-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{w^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{w^6}-\ldots\right].\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Этот ряд не сходится, но тем не менее он полезен при вычислении для больших значений w; можно показать, что если вычислены n членов ряда, их сумма отличается от истинного значения на величину меньшую, чем $\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{w^n}$.

Для доказательства заметим, что после n интеграций по частям $\mathrm{Ci}\, w$ выражается вполне точно суммой первых n членов (66) плюс интеграл, равный либо

$$+1\cdot 2\cdot 3\ldots n\int_{\infty}^{w}\frac{\sin w}{w^{n+1}}dw,$$

либо

$$-1\cdot 2\cdot 3\ldots n\int_{\infty}^{w}\frac{\cos w}{w^{n+1}}dw.$$

Оба эти выражения дают ошибку, которую мы делаем, принимая за достаточное приближение сумму n первых членов ряда (66). Но так как ни $\sin w$, ни $\cos w$ не превышают единицы, то эти ошибки по абсолютной величине меньше

$$1\cdot 2\ldots n\int_{w}^{\infty}\frac{1}{w^{n+1}}\,dw=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\,(n-1)}{w^n}.$$

Поэтому, если члены в скобках в выражении (66) сначала у б ы в а ю т и делаются очень малыми, что и происходит в действительности при больших значениях w, а затем в о з р а с т а ю т и заставляют ряд расходиться, то можно получить хорошее приближение, если остановиться в наших вычислениях, пока члены еще малы. Чтобы получить такую же степень точности из (64), требуется произвести гораздо больше вычислительной работы.

ЗАДАЧИ.

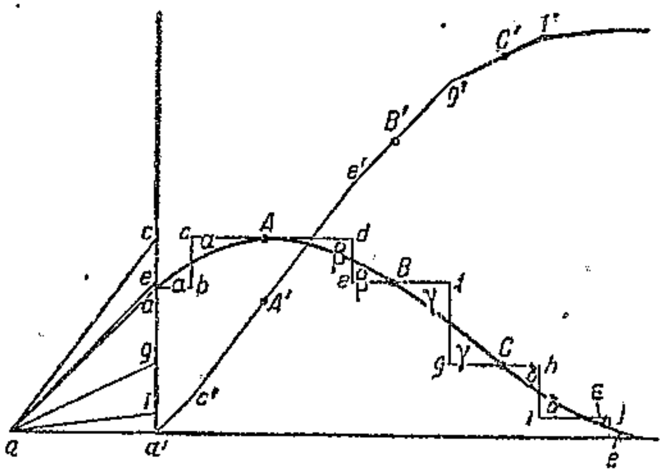
1. Найти разложение в ряд для (176), § 59, раскладывая e^{-x} в степенной ряд.
2. Найти при помощи повторной интеграции по частям разложение той же функции по убывающим степеням x.
3. Вычислить значения $\mathrm{Ci}\,1$ и $\mathrm{Ci}\,10$ с точностью до четырех десятичных знаков.

§ 26. Графическое интегрирование.

Если требуется найти решение уравнения для таких целей, где не важно иметь большую точность, то иногда может оказаться очень полезным процесс графического интегрирования, Наиболее удобный метод основан на двух следующих идеях. Первая состоит в том, что интеграл постоянной графически представляется прямой линией, наклон которой равен этой постоянной. Вторая — в том, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x и ординатами при $x=a$ и $x=b$.

Пусть нам нужно проинтегрировать функцию $y=f(x)$, представленную кривой $ABC\ldots$ (черт. 20) и пусть эта кривая заменена ломаной линией $abcd\ldots$, построенной таким образом, что два «треугольника», образующие каждую из пар α, α; β, $\beta\ldots$, равны по площади.

Интеграл от ломаной линии легко может быть получен при помощи первого сделанного замечания, т. е. черчением последовательности пря-



Черт. 20.

мых линий с соответствующими наклонами. Предположим, что это уже сделано, и привело к ломаной линии $a'c'e'\ldots$ В точках A', B',... этой ломаной ординаты равны интегралу от самой функции $f(x)$; ибо на этих ординатах площади, ограниченные кривой $ABC\ldots$ и ее приближением $abcd\ldots$, равны.

Истинная интегральная кривая проходит поэтому через точки A', B', C',... Далее, в точках A, B, C,..., которым соответствуют точки A', B', C',..., прямолинейные сегменты ed, cf,... и истинная кривая ABC имеют одинаковые ординаты. Поэтому в этих точках истинная кривая имеет тот же наклон касательной, как и ломаная $a'c'e'\ldots$ Таким образом истинная кривая не только проходит через A', B', C',..., но и касается нашей ломаной в этих точках.

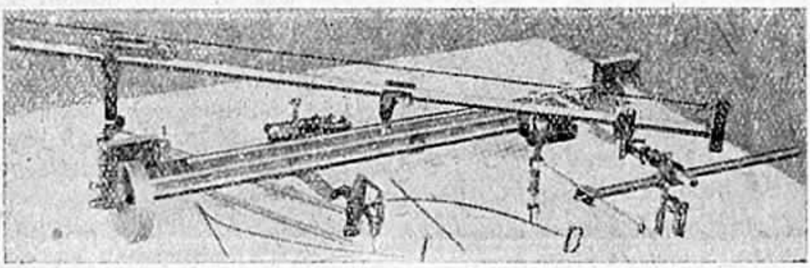
Эти факты дают возможность начертить кривую, представляющую собой $\int f(x)dx$, с большой степенью точности.

Практический способ проведения этого процесса показан на черт. 20. Ломаная строится прежде всего так, чтобы, насколько это возможно, оценить простым глазом, соответствующие треугольники каждой пары были равны. Точки a, c, $e, \ldots$ отмечены на оси y на высотах, соответствующих сегментам ab, cd, $ef, \ldots$ соответственно, и, кроме того, отмечаем на оси x точку q на расстоянии 1 влево от начала координат. Прямые qa, qc, $qe, \ldots$ имеют те же наклоны, что и сегменты $a'c'$, $c'e'$, $e'g', \ldots$ Кривая $A'B'C' \ldots$ строится путем проведения сегментов параллельно этим прямым.

§ 27. *Интеграф.*

Существует прибор, изготовляемый швейцарской фирмой *, построенный таким образом, что если штифт двигается по кривой $y=f(x)$, то связанное с ним перо автоматически чертит кривую $y=\int f(x)\,dx$. На черт. 21 изображен такой прибор, называемый интеграфом, а на черт. 22 дана схема, поясняющая его устройство.

Существенной частью прибора является треугольник ABC, имеющий три подвижные стороны. Сторона AB представляет собой тяжелую ка-



Черт. 21. Интеграф.

ретку, укрепленную параллельно оси y, но свободно двигающуюся на колесах ww. Сторона BC направлена параллельно оси x и поддерживается таким образом, что она может свободно двигаться в направлении оси y. Ее длина, — все время постоянная, — есть теоретическая единица длины для операций прибора. Третья сторона AC есть стержень, укрепленный так, что он проходит через точку A, в которой ось x пересекает каретку, и через конец C стержня BC. В точке C помещен штифт **, при помощи которого вычерчивается кривая $y=f(x)$, интеграл которой отыскивается.

Очевидно, так как BC есть единица, наклон линии AC всегда равен значению функции $y=f(x)$, соответствующему той точке C, на которой остановился конец штифта.

Кроме того, в приборе имеется параллелограм $pp'dd'$, сторона d' которого перпендикулярна к стержню AC; этот параллелограм может свободно скользить вдоль AC. В центре противоположной стороны, поме-

* G. Coradi. Zürich.

** Для удобства этот штифт прикреплен при помощи рамки (черт. 21), но это не имеет значения в теории прибора.

щенном на ординате точки C как на оси, насажен заостренный по краю диск, который касается бумаги и вращается при движении каретки AB. Так как его ось перпендикулярна к AC, то движение его параллельно AC. Поэтому, когда штифт движется, диск описывает траекторию, наклон касательной к которой постоянно равен мгновенной ординате $f(x)$ точки C. Поэтому, если C движется по кривой $y f(x)$, то диск должен двигаться по кривой, уравнение которой $y = \int f(x)\,dx$.

К диску прикреплено перо, вычерчивающее интегральную кривую. Институты и учреждения, в которых приходится часто иметь дело с диференциальными уравнениями, и, следовательно, часто встречать трудные интеграции, обыкновенно имеют в своем распоряжение интеграф.

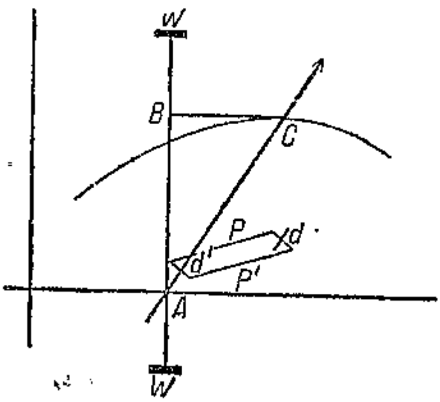


Рис. 22. Схематическая диаграмма интеграфа.

Точность этого инструмента вполне достаточна для большинства практических целей, и он, кроме того, дает очень быстрые результаты. Однако интеграф имеет один недостаток, который часто оказывается довольно существенным.

Если диференциальное уравнение имеет буквенные постоянные или параметры, вместо числовых, то необходимо бывает задать этим постоянным последовательность значений и найти решение для каждого значения отдельно. Это, конечно, требует большой работы и может оказаться затруднительным.

Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x \sin(3y^2 + 2),$$

легко решить с помощью интеграфа, но уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x \sin(ay^2 + b) \tag{67}$$

может быть решено только для частных значений постоянных a и b.

С другой стороны, такие параметры часто можно уничтожить подходящей заменой переменных. Так, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x(ay^2 + b) \tag{68}$$

на первый взгляд представляет такие же трудности, как и (67). Но вводя новые переменные

$$x = c_1\xi,$$
$$y = c_2\eta,$$

его можно привести к виду:

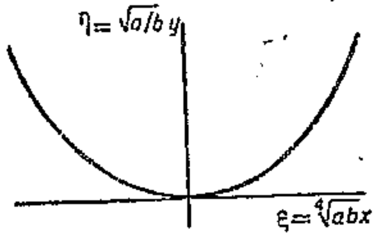
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{c_1^2}{c_2}(ac_2^2\eta^2+b)\xi.$$

Выбирая c_1 и c_2 так, чтобы $ac_1^2c_2=1$ и $\frac{bc_1^2}{c_2}=1$ $\left(\text{т. е. полагая } c_1=\frac{1}{\sqrt[4]{ab}},\right.$ $\left.c_2=\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, мы сводим это уравнение к более простому виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=(\eta^2+1)\xi. \tag{69}$$

Поэтому, решая (69), мы получим кривую, связывающую ξ и η, как это показано на черт. 23.

Так как эта кривая годится одинаково хорошо для всех значений a и b, то решение всякого уравнения типа (68) может быть получено из этой кривой простым изменением масштаба на осях. Так, например, если $b=8$, $a=2$, то x и y связаны с ξ и η по закону $x=\frac{1}{2}\xi\eta$, $y=2$. Поэтому, умножая числа на оси η на 2 и деля числа на оси ξ на 2, мы преобразовываем кривую $\xi\eta$ в кривую, связывающую x и y.



Черт. 23.

Даже уравнение (67) можно сильно упростить при помощи указанного приема, ибо при подстановках $\eta=y\sqrt{a}$ и $\xi=x\sqrt[4]{a}$ оно приводится к виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\xi\sin(\eta^2+b),$$

содержащему только один параметр вместо двух.

§ 28. Разделение переменных с помощью подстановки; однородное уравнение.

Часто случается, что уравнение, в котором переменные не разделяются непосредственно, может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными помощью подстановки.

Как пример рассмотрим уравнение:

$$x\frac{dy}{dx}+y+y^2x=0.$$

Заменяя y через $w=xy$, получаем новое уравнение:

$$\frac{dw}{dx}+\frac{w^2}{x}=0,$$

решение которого есть:

$$x=ae^{\frac{1}{w}}=ae^{\frac{1}{xy}}.$$

Читатель почувствует, вероятно, искусственность этого способа, который кажется пригодным только для задач, специально для этой цели подобранных. Действительно, здесь есть доля правды, так как даже в том случае, когда подстановка существует, она не всегда очевидна*.

Поэтому этот метод решения обычно следует применять в последнюю очередь. Однако существует тип уравнений, для которых всегда известна подходящая подстановка. Эти уравнения называются однородными. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\Phi(x, y) \tag{70}$$

называется однородным, если функция Φ не изменяется при замене x и y через kx и ky, независимо от значения величины k; т. е. уравнение однородно, если

$$\Phi(x, y)=\Phi(kx, ky)$$

для любого k. В частности, если мы заменим k через $\frac{1}{x}$, то аргументы Φ переходят в 1 и $\frac{y}{x}$. Тогда уравнение (70) принимает вид:

$$\frac{dy}{dx}=\Phi\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Это дает основание произвести подстановку $w=\frac{y}{x}$ вместо y, что приводит к уравнению

$$x\frac{dw}{dx}+w=\Phi(1, w),$$

в котором переменные разделены.

Далее процесс интегрирования следующий:

$$\frac{dw}{\Phi(1, w)-w}=\frac{dx}{x};$$

$$\ln x=\ln a+\int\frac{dw}{\Phi(1, w)-w};$$

$$x=ae^{\int\frac{dw}{\Phi(1, w)-w}}.$$

Как пример, рассмотрим уравнение

$$(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+2xy=0, \tag{71}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

---

* В данном примере эту подстановку можно угадать, заметив, что два первых члена представляют как раз $\frac{d}{dx}(xy)$. Часто случается, при рассмотрении трудных диференциальных уравнений, что успех или неуспех интеграции зависит именно от такого рода замечаний. Решение диференциальных уравнений вообще требует остроумия.

Легко видеть, что заменяя x и y через kx и ky мы не изменим правую часть уравнения. Поэтому оно однородно. Полагаем $y=wx$, тогда

$$x\frac{dw}{dx}+w=-\frac{2w}{1+w^2};$$

или

$$\frac{1+w^2}{3w+w^3}dw=-\frac{dx}{x}.$$

Интеграл этого уравнения

$$\ln x=\ln a+\frac{1}{3}\ln(3w+w^3),$$

или

$$x^2y+\frac{y^3}{3}=\frac{1}{3a^3}.$$

Следует отметить, что сведение к виду с разделяющимися переменными можно произвести и иначе, заменяя x через w. Однако большей частью проще произвести замену зависимого переменного, чем независимого, поэтому подстановка w вместо y одна из наиболее употребительных.

§ 29. *Точные диференциалы.*

Некоторые диференциальные уравнения первого порядка могут быть решены сравнением с формулой полного диференцирования:

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{72}$$

Предположим, что решаемое диференциальное уравнение имеет вид:

$$f_1(x, y)+f_2(x, y)\frac{dy}{dx}=0, \tag{73}$$

или может быть к этому виду приведено.

Очевидно, что если мы можем найти функцию $\Phi(x, y)$ такую, что $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=f_1$, а $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=f_2$, то (72) и (73) будет тождественно с уравнением $\frac{d\Phi}{dx}=0$. Отсюда тотчас же следует, что решением (73) будет $\Phi(x,y)=a$, иначе $\frac{d\Phi}{dx}$ не исчезало бы при искомом соотношении между y и x.

Конечно, это не есть метод решения таких уравнений, так как мы не знаем, каким образом найти функцию Φ. Но это может быть сделано основой метода решения, если только мы сумеем сделать две вещи: во-первых, если мы сможем найти способ определить из самого уравнения, существует ли функция Φ или нет, и во-вторых, если мы сумеем найти эту функцию, когда она существует. В действительности и то и другое может быть сделано, как мы сейчас увидим.

Прежде всего, однако, заметим, что в том случае, когда такая функция Φ существует, уравнение называется уравнением в точных диференциалах. Итак, прежде всего мы займемся критерием для определения того, является ли данное уравнение уравнением в точных диференциалах или нет.

Пусть (73) — точный диференциал. По определению:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=f_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=f_2.$$

Диференцируя первое по y, а второе по x, получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Отсюда следует *, что, если уравнение точный диференциал, то

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{74}$$

Более того, можно доказать и обратную теорему, а именно, что если (74) выполнено, то (73) — точный диференциал.

Таким образом всегда можно решить, является ли уравнение точным диференциалом или нет, **прежде чем пытаться его решать.**

Для иллюстрации рассмотрим опять пример:

$$(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+2xy=0. \tag{71}$$

Здесь $f_1=2xy$, $f_2=x^2+y^2$. Отсюда

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}=2x,$$

т. е. левая часть уравнения есть точный диференциал.

Закончив с первым вопросом, обратимся к нахождению функции Φ, что, как оказывается, также просто. Так как известно, что уравнение представляет собой точный диференциал, то:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=f_1(x, y),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=f_2(x, y).$$

---

* Существуют исключительные функции, для которых $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}$ не равно $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial x}$, но они встречаются так редко, особенно в прикладных науках, что в элементарном учебнике можно не обращать на них внимания.

Так как $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ получается из Φ обыкновенным диференцированием, в предположении, что y постоянно, то Φ может быть получено из $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ простой интеграцией, в том же предположении. Отсюда

$$\Phi = \int f_1(x, y)\,\partial x + \alpha(y), \tag{75}$$

причем элемент интеграции записан ∂x вместо dx, чтобы показать, что y считается постоянным, а «постоянная интеграция» есть $\alpha(y)$, так как, поскольку дело идет о частном диференцировании по x, производная по x любой функции от y равна нулю. Интегрируя тем же способом второе уравнение, получим:

$$\Phi = \int f_2(x, y)\,\partial y + \beta(x). \tag{76}$$

Сравнивая (75) и (76), мы имеем две возможности. Во-первых, $\int f_2(x, y)\,\partial y$ может равняться $\int f_1(x, y)\,\partial x$; в этом случае оба уравнения определяют одну и ту же функцию Φ, тогда и только тогда, когда $\alpha(y)$ и $\beta(x)$ равны между собой, а это может случиться только, если обе они постоянные. Во-вторых, $\int f_1(x, y)\,\partial x$ может содержать функцию x, например $g(x)$, которая не встречается в $\int f_2(x, y)\,dy$; или $\int f_2(x, y)\,dy$ может содержать функцию y, $h(y)$, не входящую в $\int f_1(x, y)\,dx$, или, наконец, обе эти возможности встречаются одновременно. В этом случае, для того чтобы (75) и (76) были тождественны, необходимо, чтобы $\beta(x) = g(x)$ и $\alpha(y) = h(y)$. Во всех случаях решение уравнения есть $\Phi = C$, где C константа.

Как пример рассмотрим уравнение (71), с которым мы уже имели дело выше. Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xy,$$

то

$$\Phi = \int 2xy\,\partial x + \alpha(y) = x^2y + \alpha(y).$$

Кроме того, так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

то

$$\Phi = x^2y + \frac{y^3}{3} + \beta(x).$$

Сравнивая оба выражения для Φ, мы видим, что они тождественны, если

$$\beta(x) = 0,\ \alpha(y) = \frac{y^3}{3}.$$

Отсюда

$$\Phi = x^2y + \frac{y^3}{3}$$

и решение уравнения есть

$$x^2y+\frac{y^3}{3}=C.$$

То же самое решение мы получили другим методом в § 28.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение:

$$\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx+\sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy=0.$$

Здесь

$$f_1(x,y)=\sec^2 x \operatorname{tg} y,$$
$$f_2(x,y)=\sec^2 y \operatorname{tg} x.$$

Отсюда

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}=\sec^2 x \sec^2 y.$$

Интегрируя так, как указано выше, получим:

$$\Phi=\operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y+\alpha(y),$$
$$\Phi=\operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y+\beta(x).$$

Отсюда $\alpha=\beta=C$ и решение есть*

$$\operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y+C=0.$$

ЗАДАЧИ.

1. $y^2=x(y-x)\frac{dy}{dx}$. 2. $2x^2y+y^3-x^3\frac{dy}{dx}=0$.

3. $(2ax+by)+(2cy+bx+e)\frac{dy}{dx}=g$.

4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\frac{dy}{dx}+\sec^2 y \ \operatorname{tg} x=0$. 5. $t+I\frac{dI}{dt}=mI$.

6. $2\frac{\theta}{r^3}+\left(\frac{1}{r^2}-3\frac{\theta^2}{r^4}\right)\frac{dr}{d\theta}=0$.

7. $(a\,d\alpha+b\,d\beta)\sin(a\alpha+b\beta)=(b\,d\alpha+a\,d\beta)\cos(b\alpha+a\beta)$.

8. $\left(T+\frac{1}{\sqrt{t^2-T^2}}\right)\frac{dT}{dt}=\left(\frac{T}{t\sqrt{t^2-T^2}}-t\right)$.

§ 30. Линейные уравнения.

Если уравнение первого порядка линейное, то его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx}+f_1(x)y=f_2(x). \tag{77}$$

Задача 3, § 5 была этого типа, и мы нашли, что, если $w=e^{cx}y$ подставить вместо y, то его легко решить. Это указывает, что и в общем

* По правилу мы должны положить Φ равным постоянной. Но так как уже имеется одна произвольная постоянная C, то вторая ничего не прибавит к общности решения.

случае можно найти решение, заменяя y новым переменным $w = yg(x)$, если только мы выберем подходящую функцию $g(x)$. Так как такой выбор совсем не очевиден, то мы будем продолжать исследование с неопределенной функцией, в надежде, что что-нибудь в дальнейшем подскажет нам нужный выбор.

Наша подостановка $w = gy$ переводит (77) в

$$\frac{dw}{dx} + \left(f_1 - \frac{1}{g}\frac{dg}{dx}\right)w = gf_2.$$

Если мы выберем g так, чтобы

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{dx} = f_1,$$

то второй член уравнения исчезнет, и мы получим тотчас же:

$$w = a + \int g f_2 \, dx.$$

Очевидно, что условие, которому мы подчинили g, приводит к выбору:

$$g = e^{\int f_1 dx},$$

откуда имеем:

$$w = a + \int e^{\int f_1 dx} f_2 \, dx.$$

Производя обратную замену от w к y получаем решение уравнения (77) в виде:

$$y = e^{-\int f_1 dx}\left(a + \int e^{\int f_1 dx} f_2 \, dx\right). \tag{78}$$

Эту формулу (78) следует запомнить, так как многие уравнения, которые можно решить при ее помощи, не могут быть решены никаким другим способом.

Для того чтобы последовательные шаги получения этой формулы стали совершенно ясными, проведем шаг за шагом решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + xy = x. \tag{79}$$

Здесь

$$f_1(x) = x,$$
$$f_2(x) = x.$$

Подстановка, которую нужно произвести, будет поэтому:

$$w = ye^{\int x dx} = ye^{\frac{x^2}{2}}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{2}}\frac{dw}{dx} - xy,$$

Первоначальное уравнение обращается в

$$\frac{dw}{dx}=x\,e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Его решение есть:

$$w=e^{\frac{x^2}{2}}+a$$

или

$$y=1+a\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Как другой пример рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\sin x. \tag{80}$$

Здесь

$$f_1=\frac{1}{x};\quad f_2=\sin x,$$

откуда

$$\int f_1\,dx=\ln x$$

и (78) переходит в

$$y=e^{-\ln x}\left(a+\int e^{\ln x}\sin x\,dx\right).$$

По определению логарифма

$$e^{\ln x}=x,\quad e^{-\ln x}=\frac{1}{x}.$$

Отсюда $y=\frac{1}{x}\left(a+\int x\sin x\,dx\right)$, что легко вычисляется.

§ 31. Уравнения, приводимые к линейным.

Некоторые уравнения, не являющиеся линейными, могут быть приведены к линейным подходящей заменой переменных. Наиболее важным типом является так называемое уравнение Бернулли:

$$\frac{dy}{dx}+f_1(x)\,y=f_2(x)\,y^m.$$

Если разделить это уравнение на $\frac{y^m}{1-m}$, оно примет вид:

$$\frac{1-m}{y^m}\frac{dy}{dx}+(1-m)f_1\,\frac{1}{y^{m-1}}=(1-m)f_2. \tag{81}$$

Мы видим, что первый член есть производная по x выражения $\frac{1}{y^{m-1}}$, которое встречается также и во втором члене. Обозначая это выражение через w, мы приведем (81) к виду:

$$\frac{dw}{dx}+(1-m)f_1\,w=(1-m)f_2.$$

Последнее уравнение линейное и легко решается формулой (78). Заменяя обратно w через y^{1-m}, получаем в результате:

$$y^{1-m}=e^{-\int(1-m)f_1\,dx}\left(a+\int e^{\int(1-m)f_1\,dx}(1-m)f_2\,dx\right). \tag{82}$$

Формула (82) отличается от (78) только тем, что каждое f_i заменено через $(1-m)f_i$, а y заменено через y^{1-m}.

Как пример, рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{y^3}. \tag{83}$$

Здесь $m=-3$, и следовательно, нужная подстановка есть $w=y^4$. Заменяя y этой переменной, находим:

$$\frac{dw}{dx}+\frac{4}{x}w=4\sin x,$$

линейное уравнение типа (77), в котором $f_1=\frac{4}{x}$, а $f_2=4\sin x$. Отсюда решение есть:

$$w=y^4=\frac{1}{x^4}\left(a+4\int x^4\sin x\,dx\right),$$

его легко вычислить.

ЗАДАЧИ.

1. Решить (79) разделением переменных.
2. Вычислить решение уравнения (80).
3. Вычислить решение (83).
4. $\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{\rho+a\theta^3-2\rho\theta^2}{\theta(1-\theta^2)}$.
5. $(T\ln t-1)\,T\,dt=td\,T$.
6. $\frac{dy}{dx}y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.
7. $y-\cos x\frac{dy}{dx}=y^2\cos x(1-\sin x)$.
8. $\frac{dy}{dx}+y\frac{d\Phi}{dx}=\Phi\frac{d\Phi}{dx}$.
9. Решить диференциальное уравнение, составленное в задаче 4, § 20, методом § 30.

§ 32. Уравнения, разрешимые относительно x или относительно y.

Существует еще один метод решения уравнений первого порядка, которым следует пользоваться, если ни один из предыдущих не приводит к цели. Это — разрешение уравнения относительно одного из переменных, x или y. Пусть уравнение разрешено относительно x. Тогда оно имеет вид $x=\Phi(y,y')$, где $y'=\frac{dy}{dx}$. Диференцируя его, мы получаем уравнение:

$$1=\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{dy'}{dx},$$

содержащее явно только переменные y и y' и производную $\frac{dy'}{dx}$, которую иначе можно записать $y'\frac{dy}{dy'}$. Другими словами, при вышеописанном процессе фактически заменили x новой переменной y'. Может оказаться, что это уравнение возможно решить и получить соотношение между y' и y. Если так, то алгебраическое исключение y' из этого решения и первоначального уравнения дает нужное решение. Если нет, то метод неприменим. Как пример, мы рассмотрим уравнение (53), которое мы уже решили другим способом. Оно обращается при разрешении относительно x в

$$x = -y'^2 - 2y'. \tag{84}$$

Диференцируя и заменяя $\frac{dy'}{dx}$ через $y'\frac{dy'}{dy}$, получаем новое диференциальное уравнение:

$$-dy = (2y'^2 + 2y')\,dy',$$

решение которого, очевидно, есть

$$-y = \frac{2}{3}y'^3 + y'^2 + a. \tag{85}$$

Разрешая (84) относительно y', находим, что

$$y' = -1 \pm \sqrt{1-x};$$

подставляя это значение в (85), получаем окончательное решение:

$$y + a + \left(\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{1-x}\right)\left(2 - x \pm 2\sqrt{1-x}\right) = 0. \tag{86}$$

Несмотря на сложный вид, это уравнение действительно тождественно с решением, полученным в § 21, и может быть сведено к той форме, что и (55), с точностью до разных значений произвольных постоянных a, что несущественно.

Аналогичный метод решения основан на разрешении первоначального уравнения относительно y, что приводит к уравнению $y = \Phi\,(y', x)$. Диференцируя его по x, получаем уравнение:

$$y' = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

содержащее только y', x и $\frac{dy'}{dx}$, т. е. уравнение первого порядка для y'. Может случиться, что это уравнение разрешимо и дает соотношение между y' и x; в этом случае y' можно исключить из первоначального уравнения при помощи этого соотношения.

Как пример рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x, \tag{87}$$

которое, по разрешении относительно y, дает:

$$y = 1 - \frac{y'}{x}.$$

Диференцируя, получаем:

$$y' = -\frac{1}{x}\frac{dy'}{dx} + \frac{y'}{x^2},$$

или

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{1 - x^2}{x}\,dx.$$

Решение этого уравнения есть:

$$y = a\,xe^{-\frac{x}{2}}.$$

Исключая y' из этого соотношения и первоначального уравнения, получаем решение:

$$y = 1 - a\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

То же самое решение было получено в § 30, с точностью до значения a, что несущественно, так как a произвольно.

Оба примера, приведенные в этом параграфе, легко разрешимы другими методами. Следующие примеры, наоборот, нетрудно разрешить указанным методом, и чрезвычайно трудно, если им не пользоваться.

Уравнение

$$x^2 y'^2 + y^2 = y'(1 + 2xy) \tag{88}$$

легко разрешить относительно y:

$$y = xy' \pm \sqrt{y'}.$$

Диференцирование дает:

$$y' = x\frac{dy'}{dx} + y' \pm \frac{1}{2\sqrt{y'}}\frac{dy'}{dx},$$

или *

$$\frac{dy'}{dx} = 0.$$

Решение этого уравнения есть $y' = a$; с помощью этого соотношения общее решение (88) получается в виде:

$$a^2 x^2 + y^2 = a + 2a\,xy.$$

---

* При изыскании общего решения диференциального уравнения те факторы, которые не содержат производных, могут не приниматься во внимание, точно так же, как при решении алгебраических уравнений мы пренебрегаем постоянными множителями. Поэтому фактор $x \pm \frac{1}{2\sqrt{y'}}$, на который умножается $\frac{dy'}{dx}$ может быть опущен. Присутствие таких алгебраических факторов указывает, однако, на существование «особых решений», т. е. таких решений диференциального уравнения, которые не являются частными случаями общего решения. Они будут рассмотрены в гл. V.

Рассмотрим второй пример:

$$\frac{dy}{dx}=(x+y)^2. \tag{89}$$

Разрешая относительно x, получаем:

$$x=-y+\sqrt{y'}.$$

Диференцирование дает:

$$1=-y'+\frac{1}{2\sqrt{y'}}\frac{dy'}{dx},$$

или

$$dx=\frac{dy'}{2(1+y')\sqrt{y'}}.$$

Решение этого последнего, как легко видеть, есть

$$y'=\operatorname{tg}^2(x+a).$$

Отсюда общее решение (89) есть:

$$(x+y)^2=\operatorname{tg}^2(x+a).$$

ЗАДАЧИ.

1. Свести (86) к форме (55).
2. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y+2\frac{dy}{dx}=0.$
3. $2\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^3+\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2-\Phi=0.$
4. $\frac{dy}{dz}=e^{z-\frac{dy}{dz}}.$
5. $\sqrt{t^2+T}=\frac{dT}{dt}.$
6. $y=x\frac{dy}{dx}+\Phi\left(\frac{dy}{dx}\right)$, где Φ — произвольная функция.
7. $(x^2-1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1.$
8. Решить (89), подставляя $w=x+y$ вместо y.

§ 33. Уравнения второго порядка, сводимые к уравнениям первого порядка.

Многие уравнения порядка выше первого сводятся к уравнениям первого порядка относительно y'. Так, например, уравнение, полученное в задаче 5, § 20, имеет вид $F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^3}\right)=0$. Замена $\frac{dy}{dx}$ через y' дает $F\left(y'\frac{dy'}{dx}\right)=0$, т. е. уравнение первого порядка, решение которого легко найти. В результате получаем, конечно, новое уравнение, связывающее y', y и x, тоже уравнение первого порядка.

Существует три типа диференциальных уравнений второго порядка, к которым применим этот метод. Это: а) уравнения, не содержащие y,

b) уравнения, не содержащие x; и, наконец, c) уравнения, не содержащие ни x ни y. Последний случай есть частный случай либо первого, либо второго.

Уравнение типа a) имеет вид:

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right)=0,$$

или иначе

$$F\left(\frac{dy'}{dx}, y', x\right)=0$$

уравнение первого порядка относительно y'.

Уравнение типа b) имеет вид:

$$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right)=0,$$

или

$$F\left(\frac{dy'}{dx}, y', y\right)=0,$$

откуда x совсем исчезает, если мы заменим $\frac{dy'}{dx}$ через $y'\frac{dy'}{dy}$. Оно принимает тогда вид уравнения первого порядка, в котором y' — зависимое переменное, а y — независимое.

Чтобы иллюстрировать этот последний тип, рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0, \tag{90}$$

которое можно записать:

$$y'\frac{dy'}{dy}+2y'+y=0.$$

Это — однородное уравнение, поэтому следует произвести замену y' через $w=\frac{y'}{y}$. Это дает уравнение:

$$\frac{wdw}{(w+1)^2}+\frac{dy}{y}=0,$$

решение которого

$$\ln(w+1)+\frac{1}{w+1}+\ln y=a.$$

Если заменим в этом уравнении w через $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, получим новое уравнение первого порядка, решение которого и есть искомое соотношение между x и y. К несчастью, это уравнение не того вида, к которому применимы рассмотренные методы решения. Однако, если мы достаточно внимательны и заметим, что w есть производная по x от функции $\ln y$, то стоит испробовать подстановку нового независимого переменного $v=\ln y$. Это дает

$$\ln\left(\frac{dv}{dx}+1\right)+\frac{1}{\frac{dv}{dx}+1}+v=a, \tag{91}$$

которое можно разрешить относительно v. Решая и деферницируя по образцу § 32, найдем:

$$-\frac{dv'}{dx}=(1+v')^2.$$

Решение его есть:

$$v'+1=\frac{1}{\beta+x}.$$

Подставляя в (91), получим:

$$-\ln(\beta+x)+(\beta+x)+v=\alpha,$$

или, помня, что $v=\ln y$,

$$\frac{\beta+x}{y}=e^{\beta-\alpha+x}.$$

Если заменим α и β двумя новыми постоянными $\alpha'=\beta e^{\alpha-\beta}$ и $\beta'=e^{\alpha-\beta}$, можем получить решение в более простой форме:

$$y=(\alpha'+\beta'x)e^{-x}.$$

Можно легко проверить, что мы получим решение заданного уравнения. Метод, которым мы его получили, значительно более сложен, чем это является необходимым, как мы увидим в § 62.

ОБЩИЕ ЗАДАЧИ.

1. Решить уравнение (22).
2. Решить уравнение (39).
3. Решить уравнение (41).
4. Решить уравнение (50), предполагая, что $v_0=0$, что катод находится в точке $x=0$, и что на катоде потенциал и градиент потенциала равны нулю.
5. Найти общее решение уравнения (50).
6. Звуковая волна движется в направлении оси x. Известно, что возмущения периодически зависят от времени и не меняются с изменением y и z, так что потенциал скоростей принимает вид:

$$\Phi=f(x)\sin pt.$$

Найтие форму функции $f(x)$ пример 5, § 19.

7. Решить уравнение, составленное в задаче 5, § 20.
8. Решить (68) и (69). Проверить, что подстановка, при помощи которой последнее получается из первого, делает решения этих уравнений тождественными.
9. Решить диференциальные уравнения:

a) $\frac{dv}{du}+\frac{2v}{u}=3v$. b) $\sqrt{1-u^2}\,dv=2u\sqrt{1-v^2}\,du$. c) $\sqrt{1+\frac{dv}{du}}=\frac{e^u}{2}$.

d) $\frac{dy}{xdx}=y\sin(x^2-1)-\frac{2y}{\sqrt{x}}$. e) $\frac{dy}{dx}=1+\frac{2y}{x-y}$.

10. Решить следующие диференциальные уравнения:

a) $\frac{dv}{du}+2uv=2u$. b) $(1+v^2)\,du+(1+u^2)\,v\,dv=0$. c) $u\ln u\frac{dv}{du}+\sin^2 v=1$.

11. Решить диференциальное уравнение, полученное в задаче 9, § 20.
12. Решить диференциальное уравнение, составленное в задаче 10, § 20.
13. Решить уравнение, составленное в задаче 11, § 20, предполагая, что в момент времени $t=0$ скорость равнялась нулю.

Глава V.

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ.

§ 34. Определение особого решения.

Диференциальное уравнение имеет иногда решения, не являющиеся частными случаями общего решения. Каким образом могут получиться такие решения, лучше всего объясняется при помощи геометрической интерпретации, данной в гл. II. Согласно этой интерпретации всякое частное решение соответствует интегральной кривой, а общее решение есть семейство этих кривых в целом.

Когда мы говорим, что такая кривая удовлетворяет диференциальному уравнению, мы этим самым утверждаем только то, что наклон касательной к кривой в каждой точке и координаты этой точки удовлетворяют уравнению. Если семейство кривых имеет огибающую, все эти величины — наклон касательной и координаты — совпадают как для точки огибающей, так и для кривой, которая в этой точке касается огибающей. Отсюда огибающая тоже удовлетворяет диференциальному уравнению. Так как огибающая, вообще говоря, не является кривой семейства, то она не может быть получена заданием частного значения постоянной интеграции. Поэтому она является решением, не включенным в общее решение, и называется **особым решением**.

Эти особые решения часто можно отыскать, не решая самого диференциального уравнения. Геометрически это эквивалентно тому, что огибающую семейства кривых часто можно найти прямо из диференциального уравнения этого семейства, не зная индивидуальных кривых семейства.

При рассмотрении огибающих в § 5 мы обращали внимание на тот факт, что огибающие существуют только в том случае, когда более одной кривой семейства проходит через каждую точку. Но если через некоторую точку проходит несколько кривых, например n, каждая со своим наклоном касательной, то каждой паре значений x и y соответствует n значений y_1. Другими словами, диференциальное уравнение

$$\Phi(x, y, y') = 0, \tag{92}$$

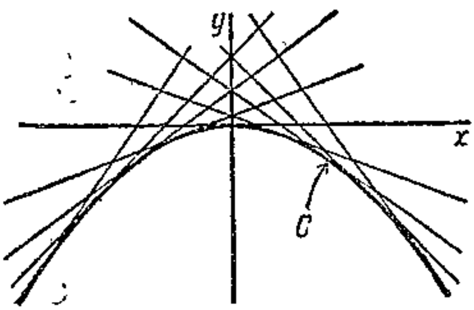
разрешенное относительно y', должно иметь n корней. Это справедливо для всякой пары значений x и y. Однако, если точка (x, y) попадает на огибающую семейства, то одна из кривых, проходящих через нее, должна быть сосчитана дважды, как это было указано в § 5. Поэтому значение y', соответствующее этой кривой, должно встретиться дважды как решение уравнения (92). Огибающая семейства кривых поэтому есть кривая, вдоль которой диференциальное уравнение семейства имеет кратные y', точно так же, как она является кривой, вдоль которой алгебраическое уравнение имеет кратные c. В § 5 было показано, что последнее геометрическое место может быть найдено исключением c из уравнений:

$$f(x, y, c) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

То же рассуждение показывает, что геометрическое место кратных y' может быть найдено исключением y' из уравнений:

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0.$$

Результат исключения есть уравнение, содержащее только x и y; это не диференциальное уравнение, а конечное, и оно получено без знания общего решения (92). Из того, что сейчас было сказано, очевидно, что график этой кривой содержит в себе огибающую семейства, определенного данным диференциальным уравнением. Но мы увидим в § 35, что эта кривая может содержать кроме огибающей и другие кривые. Прежде всего иллюстрируем уже доказанное.



Черт. 24.

Рассмотрим диференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) = y, \quad (93)$$

общее решение которого может быть найдено методом § 32 и есть

$$y = cx + c^2. \quad (94)$$

Это уравнение линейное; поэтому общее решение есть семейство прямых линий. Они изображены на черт. 24. При взгляде на этот чертеж мы увидим, что эти прямые имеют огибающую C, уравнение которой может быть получено каждым из двух следующих методов. Во-первых, мы можем применить метод § 5, т. е. продиференцировать (94) по c и исключить c. Диференцирование дает $x + 2c = 0$, что приводит после подстановки в (94) к уравнению огибающей $y = -\frac{x^2}{4}$.

Во-вторых, применим метод, изложенный в этом параграфе, т. е диференцируем (93) по y', и исключаем затем y'. Этот способ тоже приводит к результату $y = -\frac{x^2}{4}$.

Второй метод можно применять и не зная решения нашего диференциального уравнения.

§ 35. *Геометрические места точек заострения и точек прикосновения.*

Как и в § 5, геометрическое место равных y' содержит, кроме огибающей, другие кривые. Однако обычно эти кривые не являются решениями диференциального уравнения семейства.

Если кривые семейства имеют точки заострения (возврата), как на черт. 4, то две их ветви, встречающиеся в такой точке, имеют одни и те же наклоны касательных. Следовательно, если x и y суть координаты точки заострения, то этот наклон встретится дважды при решении уравнения (92) относительно y'. Геометрическое место таких точек заострения поэтому включено в геометрическое место кратных y', точно так же, как это было для геометрического места кратных c.

Из черт. 4 легко усмотреть, почему это геометрическое место точек заострения не является решением диференциального уравнения. Действительно, наклоны касательной этих геометрических мест обычно не совпадают с наклоном касательной ни одной из кривых семейства, проходящих через эту точку; поэтому оно не удовлетворяет диференциальному уравнению $\Phi(x, y, y') = 0$, как это должно было бы быть, если бы оно было решением.

Если кривые представляют такую особенность, как на черт. 8, то для всех точек линии AB, в которых кривые касаются друг друга, имеем равные значения y', по одному для каждой из кривых.

Отсюда AB тоже является частью геометрического места кратных y'. Как и для геометрического места точек заострения, такая линия обычно не является решением диференциального уравнения, так как наклон касательной к этой линии обычно отличен от наклона касательных кривых семейств. В случае окружностей, например, диференциальное уравнение дает в этих точках бесконечные значения для y', тогда как угловой коэфициент AB равен нулю.

Такая линия, на которой кривые семейства касаются друг друга, называется **линией прикосновения**.

Геометрическое место **узловых точек**, которое являлось частью геометрического места кратных c, не является частью геометрического места кратных y'; действительно, две ветви кривой, пересекающиеся в двойной точке, вообще говоря, имеют разные наклоны касательных, как на черт. 4. Это геометрическое место не является и решением диференциального уравнения, так как наклон касательной к этой кривой отличен вообще от наклона касательной для каждой из ветвей.

Резюмируя, мы можем сказать, что геометрическое место кратных c может состоять из трех типов кривых: огибающей, линии точек заострения и линии узловых точек. Геометрическое место кратных y' тоже состоит из трех типов кривых: огибающей, геометрического места точек заострения и линии прикосновения. Из них только огибающая является особым решением диференциального уравнения.

§ 36. *Нахождение особых решений.*

После предыдущих рассуждений легко найти особое решение диференциального уравнения, если это решение существует. Для этого необходимо отыскать геометрическое место кратных c (если известно общее решение), или кратных y' (если этого нет), и затем определить простой подстановкой, какие множители в уравнениях этих геометрических мест удовлетворяют диференциальному уравнению и какие нет.

Например, рассмотрим снова семейство кругов, изображенное на черт. 8, уравнение которых:

$$(x-c)^2+y-r^2=0. \tag{18}$$

В § 5 мы показали, что геометрическое место кратных c состоит из прямых линий $y=r$ и $y=-r$, составляющих огибающую. В задаче 6, § 20 мы нашли, что семейство (18) определяется также диференциальным уравнением

$$y^2(y'^2+1)-r^2=0. \tag{95}$$

Простая подстановка функций $y=r$ и $y=-r$ в это уравнение показывает, что оно удовлетворяется; поэтому они являются особыми решениями.

Допустим однако, что нам было задано уравнение (95), и что мы не знали его общего решения (18). Оказывается все-таки возможным определить особые решения непосредственно из самого диференциального уравнения. Действительно, диференцируя (95) по y', мы получим уравнение:

$$2y^2y'=0, \tag{96}$$

которое удовлетворяется либо при $y'=0$, либо при $y=0$. Подставляя $y'=0$ в (95), получаем $y=r$ и $y=-r$, т. е. наши особые решения. Другая функция $y=0$ не является особым решением, так как она не удовлетворяет диференциальному уравнению. Поэтому она должна быть либо линией точек заострения, либо линией прикосновения. И в самом деле, это есть линия AB на черт. 8, т. е. геометрическое место точек прикосновения.

Следует отметить, что $y=0$ только тогда могло бы быть решением (95), когда y' было бы бесконечным. Другими словами, если кривая является решением (95), она должна иметь касательную с бесконечным угловым коэфициентом во всех точках пересечения ее с прямой $y=0$. Мы уже отметили выше, что круги как раз имеют такую касательную. Именно потому, что прямая $y=0$ не имеет такого наклона, она и не является особым решением.

Как второй пример рассмотрим семейство кривых, изображенных на черт. 6, уравнение которых есть:

$$(y-c)^2-(x+c)^3=0.$$

В задаче 7, § 20 было показано, что диференциальное уравнение этого семейства есть:

$$\frac{8}{27}y'^3+\frac{4}{9}y'^2-y-x=0. \tag{97}$$

Диференцирование по y' дает уравнение:

$$y'(y'+1)=0,$$

корни которого суть $y'=0$ и $y'=-1$. Подставляя эти значения в (97), мы получаем соответственно следующие геометрические места:

$$y+x=0;\ y+x-\frac{4}{27}=0.$$

Простой подстановкой находим, что $y=-x$ не является решением (97). Поэтому эта прямая либо линия заострения, либо линия прикосновения. Функция же $y=-x+\frac{4}{27}$ удовлетворяет уравнению (97). Поэтому это есть особое решение, и ее график есть огибающая семейства кривых. Так как $y=-x$ было получено и в § 5, как часть геометрического места равных c, очевидно, что эта прямая есть линия заострения, как это и показано на черт. 6.

Наконец, в случае семейства кривых

$$y^2=(x-c)(x-2c)^2, \tag{17}$$

диференциальное уравнение которого было найдено в задаче 8, § 20:

$$4yy'^3-2x^2y'^2+4xyy'+x^3=16y^2, \tag{98}$$

геометрическое место кратных y' будет, как легко вычислить:

$$(27y^2-2x^3)(16y^2-x^3)^2=0.$$

Геометрическое же место кратных c было:

$$y^2(27y^2-2x^3)=0.$$

Отсюда следует, что линия $y=0$ и полукубическая парабола $16y^2=x^3$, вдоль которых оказываются кратные c или кратные y' составляют соответственно узловую линию и линию прикосновения. Полукубическая же парабола $27y^2=2x^3$, общая для обоих уравнений, есть либо огибающая, либо геометрическое место точек заострения. Подставляя, мы находим, что она удовлетворяет диференциальному уравнению. Это уравнение есть поэтому особое решение, а его график — огибающая семейства (17). Все эти геометрические места показаны на черт. 7.

ЗАДАЧИ.

1. Получить геометрическое место кратных y' для уравнения (98).
2. Уравнение

$$\rho[1-\cos(\theta-\theta_0)]=1$$

определяет семейство парабол в полярных координатах. Доказать, что метод, изложенный в § 5, годится для кривых в полярных координатах так же, как и для кривых в декартовых координатах. Найти огибающие семейства.

3. Найти диференциальное уравнение семейства кривых во второй задаче. Найти огибающую из этого диференциального уравнения.

ГЛАВА VI.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 37. Введение.

В гл. III, при изучении источников диференциальных уравнений, были упомянуты некоторые проблемы естествознания, математическая формулировка которых тотчас же приводит к диференциальным уравнениям. Однако мы не пытались там решать эти уравнения, так как методы решения еще не были получены. Мы возвращались от времени до времени к этим уравнениям в гл. IV и получали решения в тех случаях, когда они были в пределах приложимости тех методов, которые там рассматривались. Предметом настоящей главы является введение некоторого числа новых задач этого типа. Мы покажем, каким образом можно найти их решения с помощью теории диференциальных уравнений. Большая часть выбранных примеров очень проста, во-первых, потому, что для учащегося часто полезнее рассмотреть несколько простых примеров, чем решить одну трудную задачу; во-вторых, потому, что более трудные задачи, если они имеют какое-нибудь практическое значение, требуют столь больших объяснений из области геометрии, механики или теории электричества, что это отнимает много времени, которое с большей пользой можно посвятить математическим идеям. Основной нашей целью было взять возможно более разнообразные проблемы и дать, таким образом, правильную перспективу в широком поле приложений диференциальных уравнений.

§ 38. Распространение теплоты в стержне.

В § 18 были установлены три основные закона теории теплопроводности. Для настоящего примера требуется еще четвертый.

Закон IV. Нагретое тело, окруженное средой, подобной воздуху, теряет теплоту в количестве, пропорциональном разности температур тела и среды.

Законы I, II и III (§ 18) выполняются с большей степенью точности в очень широких пределах. Закон же IV, наоборот, является только грубым приближением и в некоторых условиях вовсе неприменим, а именно, когда разность температур тела и окружающей среды очень велика. Тем не менее он часто применяется в математическом изучении проблем теплоты, потому что употребление эмпирической закономерности приводит к диференциальным уравнениям чрезвычайной трудности, тогда как IV приводит к легко разрешимым задачам. Пока разность температур не превышает нескольких градусов — как это, например, имеет место в большинстве случаев термометрии, — полученные с помощью простого закона результаты достаточно точны для всех практических целей. Последующие задачи принадлежат, как мы будем предполагать, к этому типу.

Рассмотрим очень длинный стержень, на одном конце которого поддерживается постоянная температура θ_0, а остальная часть расположена в воздухе с температурой 0. Очевидно, стержень будет стремиться отдать свою теплоту в воздух и поэтому охладится. Так как он охлаждается, то теплота переходит от более теплых частей стержня к менее теплым. Поэтому, говоря, что на одном из его концов поддерживается постоянная температура, мы этим самым требуем, чтобы этот конец постоянно подогревался, чтобы уравновесить потерю теплоты в воздухе. Каково бы ни было начальное распределение температуры, при таких условиях установится некоторое постоянное состояние. Поэтому в каждой точке будет своя собственная температура, не зависящая от времени. Задача, которую мы хотим решить, есть отыскание этой «стационарной температуры» в каждой точке стержня.

Обозначим через x расстояние от произвольной точки стержня до его нагретого конца, а через θ_x — температуру в этой точке. Тогда во всем элементе от x до $x+dx$ будет приблизительно одна и та же температура θ_x. В единицу времени этот элемент потеряет количество теплоты $g\,\theta_x dA$, где dA — площадь соприкосновения с воздухом, а g — множитель пропорциональности в законе IV.

Далее, если a есть поперечное сечение стержня, то количество тепла, полученное холодным концом элемента, благодаря градиенту $\frac{d\theta}{dx}$ равно $-ka\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_x$; аналогично, количество тепла, потерянное теплым концом элемента, равно $-ka\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x+dx}$.

Так как температура стационарна, т. е. не меняется со временем, количество притекшей теплоты должно равняться количеству потерянной, и мы имеем уравнение:

$$-ka\,dt\frac{d\theta}{dx}\Big|_x = -ka\,dt\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x+dx} + g\,\theta(x)\,dA\,dt. \tag{99}$$

Так как dx бесконечно мало, то

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x+dx} = \frac{d\theta}{dx}\Big|_x + \frac{d^2\theta}{dx^2}\Big|_x dx.$$

dA равен длине окружности поперечного сечения стержня C, умноженной на длину элемента dx. Подставляя эти значения в формулу (99) и делая простые преобразования, мы приведем ее к виду:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - p^2\theta = 0, \tag{100}$$

где p^2 заменяет постоянную $\frac{gC}{ka}$.

Это уравнение легко решить методом, изложенным в § 33 *. В результате решения получаем:

$$\theta(x) = a_1 e^{+px} + a_2 e^{-px}, \tag{101}$$

где a_1 и a_2—произвольные постоянные интеграции.

Это есть общее решение уравнения (100). Ответом на нашу задачу является, однако, не общее решение, а частное; действительно, задача о физическом стержне, на одном конце которого поддерживается определенная температура, не содержит в себе ничего произвольного; поэтому и в описании этой температуры не должно быть ничего произвольного. Мы должны, следовательно, отыскать граничные условия.

Одно из граничных условий очевидно: θ должно равняться ϑ_0 при x равном нулю.

Другое условие касается состояния стержня на больших расстояниях от нагретого конца. Очевидно, что физические условия таковы, что на таком большом расстоянии стержень должен иметь почти ту же температуру, что и окружающий воздух, т. е. ϑ должно стремиться к нулю для больших значений x.

Рассматривая (101), мы видим, что член с отрицательным показателем стремится к нулю независимо от того, чему равно a_2, тогда как другой член стремится к бесконечности, если только a_1 не равно нулю. Поэтому физические условия могут быть выполнены только в том случае, если положить a_1 равным нулю. Установив это, мы легко определяем a_2, и окончательное решение имеет вид θ: $(x) = \theta_0 e^{-px}$.

§ 39. *Поток теплоты внутри шарового слоя.*

В качестве второго примера рассмотрим задачу стационарного состояния температуры внутри шарового слоя, погруженного в сосуд с постоянной температурой и имеющего в центре источник теплоты (например электрический элемент), испускающий постоянное количество теплоты в единицу времени. Из симметрии задачи очевидно, что все точки, одинаково удаленные от центра, будут иметь одинаковые температуры, т. е. θ есть функция только r. Рассмотрим элемент объема, заключенный между двумя воображаемыми концентрическими сферами радиусов r и $r + dr$. Через внутреннюю сферу втекает в элемент количество теплоты $-4\pi r^2 a \dfrac{d\theta}{dr}$. Через внешнюю будет вытекать количество теплоты, даваемое той же формулой, с той только разницей, что r^2 и $\dfrac{d\theta}{dr}$ должны иметь значения, соответствующие внешней поверхности. Очевидно, что вместо r^2 будем иметь $(r + dr)^2$, что приблизительно равно $r^2 + 2r\,dr$ при достаточно малом dr.

---

* В гл. VII даны методы, более пригодные для решения уравнения (100), чем метод § 33; но так как и это решение нетрудно, то не имеет смысла применять здесь более сильный метод.

Вместо $\frac{d\theta}{dr}$ получим:

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r+dr}=\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r}+\left.\frac{d^2\theta}{dr^2}\right|_{r}dr.$$

Так как внутри элемента объема нет источников тепла, то температура, в нем постоянна только в том случае, если количества втекающей и вытекающей теплоты уравновешивают друг друга. Приравнивая эти величины, делая очевидные преобразования и отбрасывая члены, содержащие $(dr)^2$, получаем диференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr}=0,$$

общее решение которого есть:

$$\theta=-\frac{\alpha}{r}+\beta. \tag{102}$$

Следующий шаг в этой задаче—определить α и β таким образом, чтобы удовлетворялись частные физические условия, положенные в основу задачи: во-первых, что теплота притекает в постоянном количестве, например S единиц в секунду; во-вторых, что на внешней поверхности шарового слоя поддерживается постоянная температура, например 0.

Очевидно, что если температура стационарна, то количество образующейся теплоты должно равняться количеству теплоты, вытекающей через любую сферическую поверхность. Это последнее, как мы уже видели, равно $-4\pi r^2 a\,\frac{d\theta}{dr}$. Диференцируя (102), мы находим, что оно равно $-4\pi a\alpha$. Итак, α должно удовлетворять уравнению $-4\pi a\,\alpha=S$. На внешней поверхности сферы, где $r=R$, температура равна нулю. Подставляя эти значения в (102), находим, что $\beta=\frac{\alpha}{R}$.

Отсюда окончательным решением задачи будет:

$$\theta=\frac{S}{4_x\pi a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Интересно отметить, что внутренний радиус сферического слоя не входит в решение задачи. Поэтому распределение температуры внутри тонкого слоя будет такое же, как и внутри соответствующей части толстого слоя. Это не является, однако, неожиданным, так как градиент температуры в одинаковых точках обоих слоев как раз достаточен для того, чтобы заставить вытекать теплоту наружу в таком же количестве, в каком она порождается. Поэтому, если внешняя температура одинакова для обоих слоев, то температура на данном расстоянии от центра тоже должна быть в обоих случаях одинакова.

ЗАДАЧИ.

1. Кабель, состоящий из металлического проводника диаметром в 5 *мм*, окруженного слоем изолирующего материала в 3 *мм* толщины, погружен на дно бассейна с постоянной температурой 4° С. Благодаря электрическому сопротивлению проводника в этом кабеле образуется теплота в количестве S единиц в секунду на 1 *см*. Какова температура на внутренней поверхности изолирующего слоя?

2. Через железную трубку с внешним радиусом в 10 *см* проходит пар при температуре в 105°C. Эта трубка на большом протяжении вделана внутрь бетонной стены, настолько толстой, что ее можно рассматривать как бесконечную. Температура среды, окружающей бетонную стену, равна 20°C. Какова температура в точке бетона, удаленной на 20 *см* от стенок трубки? Теплопроводность железа столь велика сравнительно с теплопроводностью бетона, что мы можем считать температуру трубки равной температуре проходящего через нее пара.

3. У двух длинных стержней, из которых один несколько толще другого, на одном конце поддерживается температура θ_0. Оба стержня сделаны из того же материала, и оба теряют теплоту в окружающий воздух по закону IV. Какой из них будет теплее на расстоянии единицы длины от нагретого конца?

4. На одном конце стержня длины l поддерживается температура θ_0, на другом температура θ_1. Стержень теряет теплоту в окружающий воздух по закону IV. Сколько теплоты теряет он в единицу времени?

5. На одном конце стержня длины l поддерживается температура θ_0. Стержень теряет теплоту по закону IV как с цилиндрической поверхности, так и с другого конца. Какова температура другого конца?

§ 40. *Кривая постоянной кривизны.*

В качестве следующей иллюстрации рассмотрим простую геометрическую задачу: определить уравнение кривой, кривизна которой постоянна в каждой точке. Напомним, что кривизна есть скорость, с которой касательная к кривой вращается, когда точка касания равномерно движется вдоль кривой. Она определяется формулой:

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{103}$$

где y' и y'' — первая и вторая производные от y по x. Задача состоит в том, чтобы решить диференциальное уравнение (103) в предположении, что k — известное постоянное. Так как $y'' = \frac{dy'}{dx}$, то (103) можно немедленно проинтегрировать, и мы получаем:

$$kx = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \alpha.$$

Решая это уравнение относительно y', находим, что

$$y' = \frac{kx-\alpha}{\sqrt{1-(kx-\alpha)^2}},$$

интеграл этого уравнения есть:

$$y = -\frac{1}{k}\sqrt{1-(kx-\alpha)^2} + \beta,$$

или

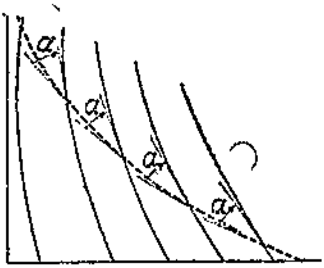
$$(ky-\beta)^2 + (kx-\alpha)^2 = 1. \tag{104}$$

Мы немедленно узнаем в уравнении (104) уравнение круга радиуса $\frac{1}{k}$, центр которого помещен в произвольной точке $\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}\right)$.

Определять значения α и β нет необходимости, так как задача такова, что требуется найти только общее решение.

§ 41. Траектории.

Следующая задача взята также из области геометрии. В гл. III мы до некоторой степени изучили семейства кривых, зависящих от одного параметра, т. е. семейства, различные кривые которых получались, если задавать различные значения одной произвольной постоянной. Сплошные кривые на черт. 25 представляют собою такое семейство. Пунктирная кривая имеет свойство пересекать всякую кривую семейства под одним и тем же углом, т. е. если мы проведем касательные к пунктирной кривой и к какой-нибудь из кривых семейства в точке их пересечения, то угол между этими касательными будет один и тот же, независимо от того, какую кривую семейства мы выбрали. Всякая кривая, обладающая этим свойством, называется **траекторией** семейства кривых. У заданного семейства не одна траектория, а бесчисленное множество; эти траектории тоже образуют семейство кривых. Задача настоящей главы — определить это семейство траекторий.



Черт. 25.

Для этого прежде всего необходимо знать диференциальное уравнение семейства кривых. Каким образом найти это уравнение, если семейство задано конечным уравнением, было объяснено в гл. III. Предположим, что диференциальное уравнение семейства кривых на черт. 25 есть

$$f(x, y, y') = 0.$$

Через точку (x, y) проходит некоторая кривая семейства. Угол наклона касательной в этой точке определяется равенством $\operatorname{tg}\theta = y'$. Если траектория проходит через ту же точку (x, y), то ее касательная должна иметь угол наклона $\theta + \alpha$, и, следовательно, тангенс угла наклона траектории должен равняться $\operatorname{tg}(\theta + \alpha)$. Чтобы избежать путаницы, мы будем обозначать величины, относящиеся к траектории, большими буквами, так что Y' будет тангенсом наклона ее касательной в точке (X, Y). В частности, в рассматриваемой точке эти величины определяются равенствами:

$$\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= y, \\ Y' &= \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\alpha} = \frac{y' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - y' \operatorname{tg}\alpha}. \end{aligned}$$

После разрешения относительно x, y, y' эти уравнения дают:

$$\left.\begin{aligned} x &= X, \\ y &= Y, \\ y' &= \frac{Y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + Y' \operatorname{tg}\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (105)$$

Эти уравнения удовлетворяются там, где траектория и кривая семейства пересекаются. Но x, y, y' для всякой такой точки удовлетворяют уравнению семейства. Поэтому:

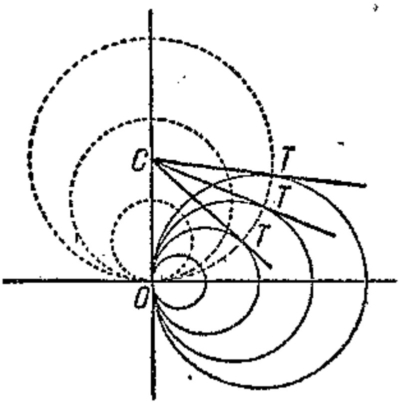
$$f\left(X, Y, \frac{Y'-\operatorname{tg}\alpha}{1+Y'\operatorname{tg}\alpha}\right)=0. \tag{106}$$

Это есть диференциальное уравнение между X, Y и Y', т. е. диференциальное уравнение траекторий.

Как простейший пример рассмотрим семейство прямых линий, параллельных оси x. Конечное уравнение семейства есть $y=c$, а его диференциальное уравнение $y'=0$. Но если $y'=0$, то y должно равняться $\operatorname{tg}\alpha$, как это видно из (105). Поэтому диференциальное уравнение траекторий есть $Y'=\operatorname{tg}\alpha$, а его решение

$$Y=X\operatorname{tg}\alpha+c.$$

Это есть уравнение семейства прямых линий, имеющих один и тот же наклон $\operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, они удовлетворяют поставленному условию.



Черт. 26.

Несколько более сложный пример — отыскать семейство кривых, пересекающих под прямым углом семейство кругов:

$$(x-c)^2+y^2=c^2,$$

изображенное на черт. 26.

Диференциальное уравнение этого семейства, как легко видеть, есть

$$y^2-x^2-2xy\,y'=0.$$

Семейство кривых, пересекающих эти круги под прямым углом должно удовлетворять диференциальному уравнению:

$$Y^2-X^2+2\frac{XY}{Y'}=0,$$

или

$$Y'=\frac{2XY}{X^2-Y^2}.$$

Это — однородное уравнение, решение которого есть

$$X^2+Y^2-2kY=0.$$

Оно представляет собою семество кругов, проходящих через начало координат, с центрами на оси Y.

Легко проверить, что всякий такой круг пересекает круги первоначального семейства под прямыми углами, Для этого достаточно воспользоваться простым геометрическим фактом, что отрезок CT касательной к произвольному кругу семейства, проведенной из точки C на оси Y, равен по длине CO. Следовательно, все эти касательные равны между собой и могут служить радиусами одного и того же круга.

Как последний пример этого типа рассмотрим пучок прямых линий, выходящих из начала координат, конечное уравнение которого есть $y=cx$, а диференциальное уравнение —

$$y'=\frac{y}{x}.$$

Диференциальное уравнение траекторий, пересекающих это семейство под углом α, есть:

$$Y'=\frac{X\operatorname{tg}\alpha+Y}{X-4\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда траектории имеют уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\ln(X^2+Y^2)+C.$$

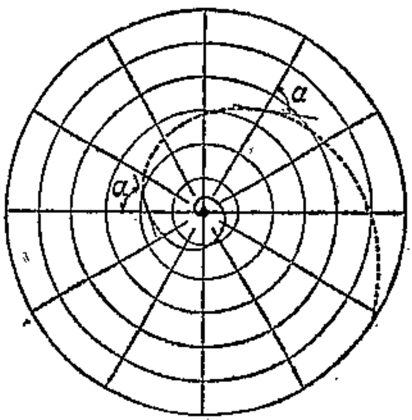
Это уравнение, записанное в декартовых координатах, имеет несколько сложный вид. Если мы воспользуемся полярными координатами, то соотношения

$$r^2=X^2+Y^2,$$
$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$$

приводят его тотчас же к виду:

$$\theta=\operatorname{tg}\alpha\ln r+C.$$

Эти кривые называются логарифмическими спиралями. Одна из них изображена на черт. 27.



Черт. 27.

Самое замечательное их свойство именно то, которое было использовано для получения уравнения: они пересекают всякий радиус-вектор полярной системы координат под одним и тем же углом α.

ЗАДАЧИ.

1. Найти уравнение траекторий, пересекающих концентрические круги $x^2+y^2=c^2$ под постоянным углом α.

2. Если угол α прямой, траектории называются «ортогональными». Найти ортогональные траектории семейства кругов $x^2+y^2=c^2$.

(Так как полярные круги и радиусы пересекают друг друга под прямыми углами, всякая траектория одного семейства будет траекторией и для другого, но углы пересечения будут дополнительными.)

3. Найти траектории семейства парабол.

4. Найти уравнение кривой, кривизна которой обратно пропорциональна квадрату ее расстояния от оси y.

5. Синусоиды $y = c \sin x$ вращаются около оси x, образуя семейство поверхностей. Найти уравнение семейства поверхностей, нормальных к данным.

§ 42. Свободно падающее тело.

Основной закон механики состоит в том, что ускорение тела пропорционально действующей силе, причем ускорением называется, по определению, скорость изменения скорости. Второй основной закон механики состоит в том, что притяжение одного тела другим обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Двух этих законов достаточно, чтобы определить движение метеора, падающего на солнце с большого расстояния.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ метеор находится в покое, что его падение не задерживается силами трения, которые имелись бы, если бы он падал через земную атмосферу, и что солнце тоже находится в покое. Пусть ось x есть линия, соединяющая центр метеора с центром солнца, причем солнце находится в точке $x = 0$, а первоначальное положение метеора в точке $x = X$. В каждый момент времени скорость метеора есть $\frac{dx}{dt}$, а ускорение $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Поэтому упомянутые выше законы приводят к диференциальному уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2}. \tag{107}$$

Так как ускорение направлено к солнцу, то оно стремится уменьшить x. Поэтому мы поставили знак минус.

Решение уравнения (107) получается методом § 33. Скорость x' определится из уравнения:

$$\frac{x'^2}{2} = C + \frac{k}{x}.$$

Так как условия задачи требуют, чтобы эта скорость была нулем при $t = 0$, когда метеор находится на расстоянии X единиц от солнца, то оказывается удобным определить произвольное постоянное первой интеграции, прежде чем производить вторую. Легко видеть, что она равна $-\frac{k}{X}$. Отсюда

$$x'^2 = 2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{X}\right).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $x = X$ при $t = 0$, есть

$$\sqrt{2kX}t = X\sqrt{xX - x^2} + X^2 \arccos \sqrt{\frac{x}{X}}. \tag{108}$$

Это уравнение прямо дает момент времени, в который метеор проходит данную точку. Его довольно трудно решить относительно x в функции t.

Закон, который обычно дается для свободно падающего тела, есть приближенное выражение для (108), основанное на предположении, что тело падает на расстоянии малом в сравнении с радиусом солнца. Чтобы получить его, предположим, что метеор падает на поверхность солнца с высоты h. Тогда x следует рассматривать как радиус солнца, а X как $x+h$.

Тогда, если h мало сравнительно с x,

$$\arccos\sqrt{\frac{x}{X}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{x}}}\approx\sqrt{\frac{h}{x}},$$

этот результат есть попросту первый значащий член в ряде Тэйлора для

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{x}}};$$

точно так же

$$\sqrt{xX-x^2}\approx\sqrt{hx}, \quad \text{а} \quad \sqrt{2kX}=\sqrt{2kx}.$$

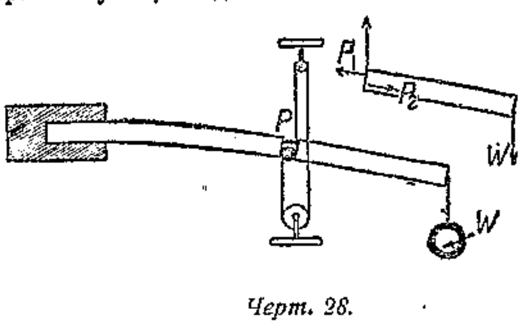
Вставляя эти выражения в (108), получаем:

$$h\approx\frac{kt^2}{2x^2},$$

или, так как k и x постоянные:

$$h=ct^2.$$

Этот закон имеет место, пока h невелико сравнительно с размерами тела, на которое падает метеор. В случае, когда тяжелые тела падают на землю под действием гравитационного поля, этот закон всегда достаточен, так как расстояние, на которое они падают, никогда не превышает малой части радиуса земли. Он может быть получен проще в предположении, что сила тяготения не меняется во время падения.



Черт. 28.

§ 43. *Изгиб балки.*

Если балка жестко заделана в одном конце, а на другом ее конце привешен груз, как показано на черт. 28, то балка будет изгибаться до тех пор, пока силы упругости, вызванные напряжением волокон балки, будут достаточны, чтобы поддержать груз W.

Простейший путь отыскания диференциального уравнения изогнутой балки следующий: предположим, что балка разрезана в некоторой точке поперек, и рассмотрим силы, которые нужно приложить, чтобы удержать ее в том же положении после разреза, как и до разреза. Очевидно, что такие же силы, или эквивалентные, должны быть вызваны напряжением отдельных волокон балки, которые мы разрезали.

Пусть такой разрез был сделан в точке P, расположенной на расстоянии x единиц длины в горизонтальном направлении от свободного конца балки *.

Чтобы поддержать отрезанную часть при помощи сил, приложенных в месте разреза,—без сомнения, разрезанные волокна не могут вызывать сил ни в каком другом месте,—нужно некоторое приспособление, вроде того, которое указано на чертеже **.

Очевидно, что:

1) Груз W действует с силой, направленной вертикально вниз.

2) Растянутые волокна верхней части балки порождают силу P_1 в направлении касательной к балке в точке P.

3) Сжатые волокна нижней части балки вызывают силу P_2, тоже параллельную касательной в точке P, но в обратном к P_1 направлении.

4) Так как эти три силы сами по себе не могут удержать отрезанную часть балки от падения, то волокна должны порождать силу в точке P, направленную вертикально вверх.

Прежде всего следует отметить, что силы 2) и 3) должны быть одинаковы. В противном случае существовала бы равнодействующая сила в направлении оси x и отрезанная часть двигалась бы вбок. Точно так же силы 1) и 4) должны быть равны, иначе отрезанная часть двигалась бы вверх или вниз. Каждая пара составляет поэтому «пару сил», стремящуюся только вращать балку. Пара 1) и 4) называется «парой приложенных сил», другая пара — «парой сил упругости». Так как отрезанная часть балки находится в равновесии под действием этих двух пар, то они должны иметь одинаковые моменты ***, — в этом состоит основной закон механики. Так как момент приложенной пары сил есть Wx, то пара сил упругости должна иметь такой же момент.

Теперь мы должны применить закон из теории изгиба балок. Он состоит в том, что момент пары P_1P_2 пропорционален кривизне балки в точке P.

Символическая форма этого закона есть уравнение:

$$\frac{qy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=Wx,$$

* Это не то же самое, что x единиц длины вдоль балки, так как в силу изгиба балка не является уже горизонтальной.

** Веревка и блок удерживают левый конец отрезанной части от падения. Однако она не удержит от падения ее правый конец. Цепь и валик завершают дело, отталкивая нижние волокна и притягивая верхние.

*** Момент силы относительно прямой (оси) определяется как произведение силы на минимум расстояния между прямой действия силы и прямой, для которой берется момент. В рассматриваемой задаче за ось можно взять прямую, перпендикулярную к плоскости чертежа и проходящую через точку P. Тогда момент силы W относительно этой линии есть Wx, а момент вертикальной силы упругости W равен нулю, так как она направлена по прямой, проходящей через точку P. Момент пары сил есть сумма моментов отдельных сил пары, т. е. просто Wx. Тот же результат получим для любой прямой, параллельной данной.

которое можем тотчас же проинтегрировать; получаем:

$$v = \int \frac{\frac{Wx^2}{2q} + C}{\sqrt{1 - \left(\frac{Wx^2}{2q} + C\right)^2}} dx + C', \tag{109}$$

где C и C' — постоянные интеграции.

С формальной точки зрения мы получили удовлетворительное решение диференциального уравнения, так как оно дает y прямо как функцию x. С практической точки зрения решение не столь хорошо, так как не может быть выражено в элементарных функциях. На практике мы обходим эту трудность путем следующих рассуждений о величинах, входящих в уравнение. Строительные балки никогда не нагружают так, чтобы они слишком сильно изогнулись. Поэтому $\frac{dy}{dx}$ очень мало, столь мало, что мы можем пренебречь членом y'^2 в знаменателе. Тогда диференциальное уравнение обращается в

$$qy'' = Wx,$$

а его решение

$$qy = \frac{Wx^3}{6} + Cx + C'.$$

Это решение очень просто и достаточно точно для многих инженерных целей. Оно дает чрезвычайно большую точность, например, в применении к частям зданий. Однако существуют другие отрасли технологии, где встречаются балки, для которых эта простая формула дает недостаточно точные результаты.

Например, пружина часов практически является изогнутой балкой, и очевидно, в этом случае нельзя пренебрегать изгибом. Чтобы найти изгиб такой пружины, нужно каким-нибудь способом вычислить сложный интеграл (109). Он принадлежит к классу функций, значения которых были табулированы, так же как для логарифмов, тригонометрических функций и функции Ci § 25.

Этот класс функций называется «эллиптическими интегралами», потому что впервые они обратили на себя внимание при попытках нахождения длины дуги эллипса.

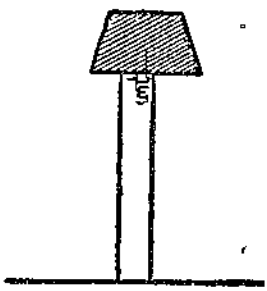
Рассмотрение этих интегралов не входит в задачу нашей книги.

§ 44. Изгиб строительных колонн.

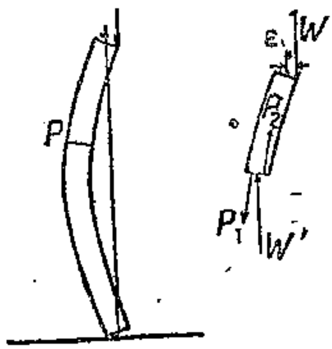
Неосведомленный человек отличает балку от колонны, говоря, что одна горизонтальна, а вторая вертикальна. Делая такое различие, он имеет в виду силу тяжести, так как для него балки и колонны служат для поддержания зданий. В технике это различие проводится в несколько другом смысле, именно, всякое твердое тело, подверженное силам, действующим параллельно его длине, называется колонной, если же силы перпендикулярны к его длине, оно называется балкой. Так, и ползун и шатун паровой машины суть колонны, хотя они часто расположены почти горизонтально, а флагшток есть балка, поскольку мы рассматриваем действие ветра на флаг.

Рассмотрим колонну, показанную на черт. 29.

Если груз расположен симметрично относительно оси колонны, то очевидно, что для колонны нет никаких причин изгибаться. При этих условиях она останется совершенно прямой, хотя и придавится несколько. Если груз настолько велик, что материал колонны недостаточно крепок и не может его поддержать, то она сломается, не изогнувшись. На практике нельзя, однако, ожидать такой идеальной симметрии. Вместо этого всегда нагрузки с одной стороны тяжелее, чем с другой, так что они эквивалентны одной силе, приложенной на некотором расстоянии от центра колонны. На рисунке это расстояние обозначено через ε. Инженеры говорят об «эксцентрической нагрузке».



Черт. 29.



Черт. 30.

Предположим, таким образом, что приложена такая эксцентрическая нагрузка и что колонна изогнулась и получила форму, изображенную на черт. 30. Если мы разрежем колонну в точке P, то увидим, что на верхнее сечение действуют четыре силы.

Это 1) груз W, 2) растяжение P_1 внешних волокон, 3) сжатие P_2 внутренних волокон и 4) вертикальная сила W', не позволяющая упасть отрезанной части. Как и в § 43, силы 1) и 4) образуют «пару приложенных сил», а силы 2) и 3) — «пару сил упругости», и к этим парам мы должны приложить те же законы, что и для балок. Они приводят к диференциальному уравнению:

$$\frac{qy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -W(y+\varepsilon), \tag{110}$$

причем здесь ось x направлена вверх, а ось y горизонтальна. Обычно изгибы малы, так что величиной y можно пренебречь. Уравнение переходит в

$$qy'' = -W(y+\varepsilon),$$

решение которого

$$y + \varepsilon = C \sin \sqrt{\frac{W}{q}}\,(x + C').$$

Это — формула, обычно принятая для изгиба колонн, но если изменения велики, необходимо решить уравнение (110) без упрощений.

ЗАДАЧИ.

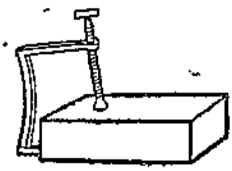
1. На балку давит груз, равномерно распределенный по всей ее длине. Найти уравнение изогнутой линии, в предположении, что изгиб очень мал.

2. Коромысло химических весов опирается в своем центре острым ребром призмы о подставку, а на его концах подвешены чашки для грузов. Найти уравнение кривой прогиба (проще вообразить, что коромысло подперто на концах и изгибается направленным вверх давлением на ребро призмы).

3. Найти общее решение уравнения (110).

4. Зажим, показанный на черт. 31, завинчен так плотно, что его вертикальное звено начинает гнуться. Каково уравнение получающегося изгиба?

Предполагается при этом, что верхнее и нижнее горизонтальные звенья абсолютно твердые.

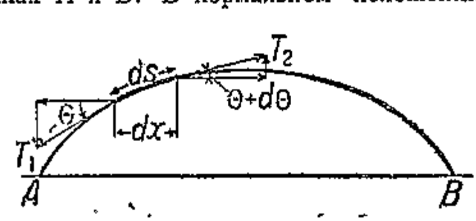


Черт. 31.

§ 45. *Колебание струны.*

Задачи двух предыдущих параграфов относились к твердым телам т. е. к телам, сопротивляющимся изгибу. Нитка или кусок тонкой кожи, очевидно, не входят в этот класс, не входят в него и тонкая проволока или кусок листового золота. Такие материалы сопротивляются деформации только в натянутом состоянии, и не потому, что они не могут изгибаться, а потому, что силы, действующие на них, выводятся из состояния равновесия лишь при деформации.

В качестве простого примера рассмотрим натянутую скрипичную струну, укрепленную в двух точках A и B. В нормальном положении струна принимает форму прямой линии, соединяющей эти точки. Если она деформирована, натяжение действует так, что струна стремиться занять первоначальное положение и при этом приходит в движение.



Черт. 32.

Пусть такая деформация произведена и вследствие ее струна находится в движении. Пусть, далее, в момент времени t ее форма изображалась кривой $y = f(x, t)$; на черт. 32 изображена эта кривая в несколько преувеличенном виде *.

Обозначим, наконец, натяжение через T. Тогда на элемент ds действуют две силы T_1 и T_2, каждая величины T, но направленные в несколько отличных направлениях, в силу кривизны элемента. Если на-

---

* Мы пишем $f(x, t)$ вместо $f(x)$ потому, что когда струна находится в движении, ее форма будет меняться со временем.

клон касательной в точке x обозначим через θ, а в точке $x+dx$ через $\theta+d\theta$, то компоненты сил T_1 и T_2 по оси x будут $-T\cos\theta$ и $T\cos(\theta+d\theta)$, а компоненты по оси y будут $-T\sin\theta$ и $T\sin(\theta+d\theta)$. Если dx очень мало, сумма первых двух сил будет приблизительно равна* $-T\sin\theta d\theta$, а последних двух $+T\cos\theta\, d\theta$. Эти силы вызывают ускорение элемента в направлениях x и y и поэтому приводят к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} m\,ds\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -T\sin\theta\, d\theta, \\ m\,ds\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= +T\cos\theta\, d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

где $m\,ds$—масса рассматриваемого элемента.

Если y очень мало, как это обыкновенно бывает, то $\cos\theta$ почти равен единице, тогда как $\sin\theta$ и θ приблизительно равны y'. Далее, ds отличается от dx бесконечно-малыми порядка выше первого. Отсюда (111) переходит в

$$\left.\begin{aligned} m\,dx\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -Ty'dy', \\ m\,dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= +T\,dy'. \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Так как y очень мало, правая часть первого уравнения приблизительно равна нулю. Итак, x-компонентой движения можно пренебречь. Существенным уравнением является только второе, которое принимает вид:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{113}$$

Получилось уравнение с частными производными, поэтому его подробное изучение лежит вне пределов этой книги. Тем не менее мы можем им воспользоваться, чтобы ответить на некоторые простые вопросы.

Прежде всего мы можем найти частоту колебаний, если предположим, что струна колеблется вверх и вниз по такому закону, что когда ее середина находится на половине максимального сдвига, то и все остальные точки тоже на половине своего максимального сдвига, если середина на одной трети максимального сдвига, то и все остальные точки на одной трети и т. д.

Может оказаться, конечно, что никакая струна таким образом, не будет колебаться. Но тогда предположение о таком законе ее колебания должно привести к абсурду. Во всяком случае, мы таким образом что-нибудь узнаем. Итак, пусть $y=f(x)$ уравнение кривой максимального сдвига. Очевидно, что f не есть функция времени. В любой момент времени t струна располагается по закону $y=k\,f(x)$, где k не зависит от x, хотя и является функцией t. Обычное диференцирование дает:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f\frac{d^2 k}{dt^2}$$

* Мы пренебрегаем бесконечно-малыми порядка выше первого.

и

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=k\frac{d^2 f}{dx^2},$$

причем в правой части ненужно употреблять круглых ∂, так как k и f — функции одного переменного. Вставляя это в уравнение (113), получаем:

$$\frac{m}{k}\frac{d^2 k}{dt^2}=\frac{T}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}. \qquad (114)$$

Так как f не зависит от t, то правая часть этого уравнения не меняется со временем, а если правая не меняется, то и левая не должна меняться. Далее, так как k не зависит от x, то левая часть уравнения не меняется с изменением x; следовательно, и правая не меняется.

Из этих результатов следует, что члены уравнения (114) не зависят ни от x ни от t. Они поэтому постоянны. Их значение неизвестно, но его можно обозначить через λ, и уравнение (114) сводится к двум уравнениям:

$$m\frac{d^2 k}{dt^2}=\lambda k \qquad (115)$$

и

$$T\frac{d^2 f}{dx^2}=\lambda f. \qquad (116)$$

Второе из этих двух уравнений особенно интересно в настоящий момент, так как ему должна удовлетворять функция $f(x)$, которую мы считали до сих пор произвольной. Это значит, что функция $f(x)$ должна быть выбрана нами именно так, чтобы удовлетворилось уравнение (116), в противном случае струна не может колебаться «как одно целое» вышеописанным путем.

Другими словами, уравнение (116) является ответом на вопрос, возможно ли движение такого типа, причем ответ заключается в том, что движение возможно тогда, когда деформация удовлетворяет уравнению (116).

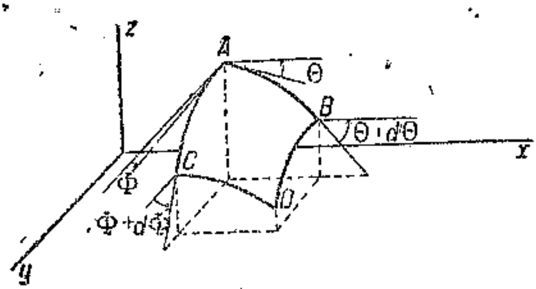
Решение этих уравнений нетрудно, но на форму решения влияет знак постоянной λ. Если бы мы испробовали обе возможности, то мы увидели бы, что важен тот случай, когда λ отрицательно. В этом случае f должна быть синусоидой, зависящей от x, а k — синусоидой, зависящей от времени. Искомая частота колебаний последней синусоиды равна

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{\lambda}{T}}.$$

В дальнейших параграфах это решение будет подробно изучено. В настоящий момент нам важен метод решения, основанный на предположении, что струна колеблется «как целое», т. е. что изменения в каждый момент можно найти из единственной кривой, умножая все ординаты на одно и то же число, меняющееся со временем. Такой тип движения называется «характеристическим колебанием» струны. Так как характеристические колебания очень важны в решении многих очень трудных задач, то следует провести второй пример, где они употребляются.

§ 46. Колебание мембраны.

Предположим, что мембрана натянута таким образом, что ее натяжение равномерно во всех направлениях и что она смещена из плоскости xy в одно из характеристических положений. Если мы ее затем опустим, то каким образом она будет себя вести? Для начала предположим, что она задержана в некотором положении, которое пока не является характеристическим, и рассмотрим силы, действующие на малый элемент dx, dy (черт. 33).



Черт. 33.

На сторону AC натяжение действует в направлении θ. Оно дает силу $T\,dy \sin\theta$, стремящуюся уменьшить* перемещение z. На противоположную сторону действует в обратном направлении сила

$$T\,dy \sin(\theta + d\theta).$$

Равнодействующей обеих сил, с точностью до диференциалов высшего порядка, будет сила:

$$T\,dy \cos\theta\, d\theta,$$

стремящаяся увеличить** z.

Аналогично, к двум другим сторонам приложены силы, равнодействующая которых равна:

$$T\,dx \cos\Phi\, d\Phi.$$

Мы имеем также силы в направлениях x и y, но если деформации достаточно малы, то этими силами можно пренебречь. Если масса элемента равна $m\,dx\,dy$, то его движение под действием этих сил удовлетворяет уравнению:

$$dmx\,dy\frac{d^2z}{dt^2} = +T(\cos\theta\, d\theta\, dy + \cos\Phi\, d\Phi\, dx). \tag{117}$$

Далее, так как θ — угол между осью x и касательной к кривой, на которой y постоянно, то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\partial z}{\partial x},$$

или, с точностью до диференциалов высшего порядка,

$$\theta = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

* На рисунке угол θ—отрицательный; поэтому сила увеличивает z.
** На рисунке $d\theta$ отрицательно.

Точно так же

$$\theta + d\theta = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx,$$

и следовательно:

$$d\theta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx.$$

Аналогично имеем:

$$\Phi = \frac{\partial z}{\partial y}$$

и

$$d\Phi = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy.$$

Подставляя эти выражения в (117) и замечая, что $\cos\theta$ и $\cos\Phi$ равны единице с той же степенью точности, получаем:

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

— уравнение, управляющее движением мембраны. Это уравнение может быть решено для характеристических типов колебаний тем же способом, как и в § 45. Написав:

$$z = k(t)\cdot f(x, y),$$

мы получаем:

$$\frac{m}{k}\frac{d^2 k}{dt^2} = \frac{T}{f}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

где в правой части входят круглые ∂, так как f — функция двух перемен ных x и y. Как и в § 45, оба члена уравнения должны быть пос тоянны что дает:

$$m\frac{d^2 k}{dt^2} = \lambda k;$$

$$T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \lambda f.$$

Второе из этих уравнений должно быть удовлетворено функцией $f(x, y)$ если мембрана колеблется как одно целое. Если оно удовлетворяется что мы предполагаем в нашей задаче, то первое уравнение снова показывает, что колебание будет изображаться синусоидой, зависящей от времени.

В теории звука ощущение, получаемое человеком, когда на его уши действует волна, изменяющаяся по закону синуса, называется «чистым тоном». В двух последних параграфах мы показали, таким образом, что характеристические колебания струны и мембраны дают чистые тона. Но на практике ни скрипка, ни мембрана барабана так не звучат. Это объясняется тем, что, когда мы играем на том или другом инструменте, мы получаем более одного характеристического тона: а так как частоты колебаний этих тонов различно связаны в этих двух случаях, то они дают разные тембры обоим инструментам.

ЗАДАЧИ.

1. Струна натянута между точками $x=0$ и $x=1$. Найти характеристические колебания.

(Точки дают граничные условия, с помощью которых можно определить две постоянных интеграции. Но мы имеем три неизвестных постоянных: λ и 2 постоянных интеграции. Убедиться в том, что граничные условия несовместимы с некоторыми значениями λ и определяют только одну постоянную интеграции, т. е. постоянные, определяемые физическими условиями, суть не обе постоянные интеграции, а только одна, вторая, есть λ.)

2. Начертить различные формы, которые может принимать колеблющаяся струна. Каково физическое значение трех произвольных постоянных? Какое объяснение можно дать тому, что нельзя зафиксировать значение той постоянной, которая остается неопределенной?

3. Найти функцию времени, связанную с каждым из этих характеристических колебаний. С какой частотой возвращается струна в любое положение?

4. Какое простое соотношение существует между частотами, соответствующими различным характеристическим колебаниям?

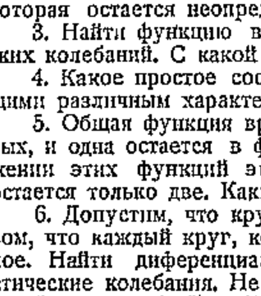
5. Общая функция времени в задаче 3 имеет две противоположных постоянных, и одна остается в функции пространства в задаче 1. Однако при перемножении этих функций эти постоянные так комбинируются, что существенных остается только две. Каким физическим условиям они соответствуют?

6. Допустим, что круглая мембрана может свободно колебаться таким образом, что каждый круг, концентрический к краю, движется вверх и вниз как целое. Найти диференциальное уравнение, которому удовлетворяют характеристические колебания. Не стоит пытаться решить его.

7. Решить (115) и (116) в предположении, что λ положительно, и показать, что решение не соответствует случаю колеблющейся струны.

§ 47. Поверхность вращения наименьшей площади*.

Если две точки A и B (черт. 34) связаны кривой $y=f(x)$ и вся эта фигура вращается около оси x, то кривая образует при этом поверхность вращения.



Черт. 34.

Площадь этой поверхности зависит от формы кривой, т. е. от формы функции $f(x)$. Существует кривая, обладающая тем свойством, что ее поверхность вращения имеет наименьшую площадь. Задача состоит в том, чтобы найти уравнение этой кривой. Так как задача похожа на те задачи анализа, где приходится отыскивать точки максимума или минимума кривой, то полезно напомнить рассуждение, при помощи которого такие задачи решаются. Оно состоит в основном из трех шагов.

1) Абсцисса минимальной точки предполагается сначала известной и обозначается, например, буквой x.

2) Отмечается, что передвижение из точки минимума в любом направлении увеличивает функцию, другими словами, что $f(x+\varepsilon)$ и $f(x-\varepsilon)$ больше $f(x)$.

---

* В этой и следующих задачах, к которым прилагаются методы вариационного исчисления, мы неявно сделаем некоторые предположения, относящиеся к характеру решения, так как попытка дать полное объяснение слишком удалила бы нас от нашей непосредственной цели.

Главное из них состоит в том, что искомая кривая непрерывна и не имеет угловых точек. Другие являются ограничениями, наложенными на вариации $\varepsilon(x)$, которыми мы пользуемся.

3) Если ε очень мало, то $f(x+\varepsilon) \simeq f(x)+\varepsilon f'(x)$, а $f(x-r) \simeq f(x)-\varepsilon f'(x)$*. Одно из этих выражений больше $f(x)$, а другое меньше, если только $f'(x)$ не обращается в нуль. Но в силу 2) этого быть не может, следовательно в точке минимума производная функция должна исчезать.

Конечно, этого одного недостаточно. Напомним, что условие 3) необходимо также для максимума, и до тех пор пока мы не рассмотрели вторую производную, нельзя узнать, что именно мы получили.

Однако это все, что нужно для наших целей.

Мы решим нашу задачу путем совершенно аналогичным.

1) Предполагаем, что искомая кривая известна и что ее уравнение есть $y=f(x)$.

2) Если будем менять форму кривой произвольно, то площадь поверхности вращения должна при этом увеличиваться. Если обозначить разность между ординатами новой и старой кривых через $\varepsilon(x)$, то новое уравнение будет:

$$y=f(x)+\varepsilon(x).$$

3) Можно показать, что если некоторое диференциальное выражение не равно нулю, то площадь, описанная кривой $f(x)+\varepsilon(x)$, будет больше площади, описанной кривой $f(x)$, а площадь, описанная кривой $f(x)-\varepsilon(x)$, будет меньше этой последней. Отсюда диференциальное выражение должно исчезать. Это приводит к диференциальному уравнению, решение которого определяет искомую кривую.

После того как мы наметили таким образом нашу задачу, приступим к детальному проведению третьего шага. Прежде всего нужно написать выражение для площади поверхности вращения. Это — простая задача анализа, ответом на которую служит выражение:

$$A=2\pi\int_{x_0}^{x_1} f\sqrt{1+f'^2}\,dx.$$

Заменим теперь $y=f(x)$ новой кривой

$$y=f(x)+\varepsilon(x).$$

При вращении этой кривой получим площадь:

$$A+dA=2\pi\int_{x_0}^{x_1}(f+\varepsilon)\sqrt{1+(f'+\varepsilon')^2}\,dx.$$

Все эти предположения необходимы для процесса, при помощи которого мы получаем из уравнения (118) уравнение (120); так, например, говоря об $\varepsilon'(x)$, мы неявно предполагаем, что $\varepsilon(x)$ имеет производную.

Поскольку это касается поставленных нами задач, все эти ограничения имеют чисто теоретический интерес, но существуют другие задачи, для которых это не так. Так например, если бы мы поставили задачу найти форму снаряда, оказывающего наименьшее сопротивление при движении в воздухе, и если бы мы не обратили внимания на указанные ограничения, мы бы не получили нужного результата; действительно, известно, что это тело вращения образуется не гладкой кривой, а кривой, имеющей угловую точку.

* Символ $\simeq$ обозначает «приблизительно равно».

Если ε есть малое изменение y, и выбрано так, что ε тоже мало, то

$$\sqrt{1+(f'+\varepsilon')^2}=\sqrt{1+f'^2}+\frac{f'\varepsilon'}{\sqrt{1+f'^2}},$$

а следовательно:

$$dA=2\pi\int_{x_0}^{x_1}\left(\varepsilon\sqrt{1+f'^2}+\frac{\varepsilon' f f'}{\sqrt{1+f'}}\right)dx. \tag{118}$$

Члены, не написанные в (118), содержат степени ε порядка выше первого и могут быть поэтому отброшены. Если dA не равно нулю, то оно меняет знак при изменении знака ε. Это означает, что площадь поверхности вращения для новой кривой меньше, чем для самой кривой, что, конечно, противоречит предположению, что она давала наименьшую площадь. Отсюда dA должно обращаться в нуль.

Уравнение (118) является в некотором смысле эквивалентным выражению $\varepsilon f(x)$ для случая анализа. Однако между ними есть существенная разница. В диференциальном исчислении ε входит только множителем, и поэтому произведение могло равняться нулю только при исчезновении второго множителя. Для уравнения (118) в этой его форме мы не можем этого утверждать. Оно должно быть так изменено, чтобы исчезло ε'. Прежде всего наш интеграл состоит из двух частей, одна из которых содержит ε, а другая ε'.

Оставляем первый интеграл без изменения, а второй интегрируем по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\varepsilon' f f'}{\sqrt{1+f^2}}\,dx=\frac{\varepsilon f f'}{\sqrt{1+f'^2}}\Bigg|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\varepsilon\frac{d}{dx}\frac{f f'}{\sqrt{1+f^2}}\,dx. \tag{119}$$

Так как условия задачи требуют, чтобы каждая интегральная кривая проходила через точки A и B, то $\varepsilon(x)$ должно исчезать для обоих пределов интеграции. Поэтому первый член правой части равенства (119) обращается в нуль. Подстановка оставшегося члена в уравнение (118) дает искомое необходимое условие минимума в виде:

$$\int_{x_0}^{x_1}\varepsilon(x)\left(\sqrt{1+f'^2}-\frac{d}{dx}\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)dx=0. \tag{120}$$

Теперь, как в случае диференциального исчисления $\varepsilon f'(x)$, подинтегральная функция состоит из двух множителей: $\varepsilon(x)$, которое произвольно, и выражения в скобках, содержащего только $f(x)$ и ее производные. Так же как и в случае задачи диференциального исчисления, последний фактор должен обратиться в нуль. Действительно, предположим обратное. Тогда в некоторых интервалах между x_0 и x_1 оно отрицательно, в других положительно. Так как $\varepsilon(x)$ произвольная функция*, то она может быть выбрана положительной там, где другой множитель

* Мы только предполагали ε и ε' очень малыми. Однако и эти ограничения и были сделаны только для упрощения рассуждения.

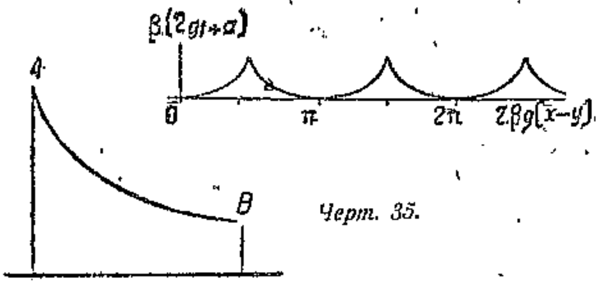
отрицателен, и отрицательной в остальных точках. Тогда (120) будет отрицательным и площадь поверхности уменьшится. Итак, мы приходим к заключению, что искомая кривая $y=f(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\sqrt{1+f'^2}-\frac{d}{dx}\,\frac{ff'}{\sqrt{1+f'^2}}=0. \qquad (121)$$

Уравнение это настолько просто, что его решение предоставляем читателю. Следует отметить, что это уравнение второго порядка и поэтому может удовлетворять двум граничным условиям. Так как в задаче даются как раз два граничных условия — точки A и B, — то наш результат вполне соответствует поставленной задаче.

§ 48. Брахистохрона.

Допустим, что точки A и B (черт. 35) соединены тонкой, абсолютно гладкой, проволокой, форма которой изображается кривой $y=f(x)$. Пусть, далее, вдоль этой кривой свободно скользит некоторый груз под действием силы тяжести. Тогда время, в которое этот груз достигнет



Черт. 35.

точки B, будет зависеть от формы кривой. Существует некоторая кривая, для которой груз достигнет точки B в кратчайшее время.

Эта кривая называется «брахистохроной». Задача состоит в том, чтобы найти форму этой кривой.

Задача эта совершенно того же типа, что и задача § 47, но для решения ее необходимо найти выражение для количества времени, затрачиваемого на скольжение груза по любой проволоке. Удобнее всего использовать для этого три закона из области механики:

1) Потенциальная энергия груза пропорциональна его высоте над поверхностью земли. Фактор пропорциональности равен массе m, умноженной на ускорение силы тяжести g.

2) Кинетическая энергия движущегося тела пропорциональна квадрату скорости. Фактор пропорциональности равен $\frac{1}{2}m$.

3) Сумма потенциальной и кинетической энергии тела постоянна, если они не сообщают энергии некоторому другому телу. Это положение носит название «принципа сохранения энергии». В нашей задаче отсутствуют силы трения, и значит груз не теряет энергии при скольже-

нии вдоль проволоки. Поэтому сумма его кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии $mg(y_0-y)$ есть величина постоянная. Получаем уравнение:

$$v^2=2gy+a, \tag{122}$$

где a — неизвестная постоянная *.

Далее, следует отметить, что груз движется все время в направлении касательной к проволоке. Следовательно, v есть скорость, с которой проходится дуга s, или $v=\frac{ds}{dt}$. Подставляя это выражение в (122), находим:

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2gy+a}}.$$

Следовательно, время пути представляется интегралом:

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2gy+a}}.$$

Выражая ds через x, получаем:

$$t=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy+a}}\,dx. \tag{123}$$

Это и есть тот интеграл, минимум которого мы должны найти. Пусть $y=f(x)$ есть уравнение искомой кривой, а $y=f(x)+\varepsilon(x)$ уравнение соседней кривой. Обозначим время движения вдоль этой последней кривой через $t+dt$, где

$$dt=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{f'\varepsilon'}{\sqrt{2gf+a}\,\sqrt{1+f'^2}}-\frac{g\varepsilon\sqrt{1+f'^2}}{(2gf+a)^{\frac{3}{2}}}\right)dx.$$

Как и в § 47, нужно проинтегрировать член, зависящий от ε' по частям, и принять во внимание, что ε исчезает в концах интервала интеграции.

После того, как это будет сделано, подынтегральное выражение сведется к произведению двух множителей. Один из них есть ε, как и ранее, и является произвольным. Так как весь интеграл должен исчезать, то обращается в нуль другой множитель, что приводит к диференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'}{\sqrt{2gf+a}\,\sqrt{1+f'^2}}\right)=-\frac{g\sqrt{1+f'^2}}{(2gf+a)^{\frac{3}{2}}}. \tag{124}$$

Возможно решить это уравнение после выполнения указанного диференцирования, но оказывается проще сделать это сразу для уравнения (124).

---

* Она зависит от y_0, высоты в точке A, которую мы можем сделать произвольной подходящим выбором начала координат.

Так как процесс интеграции, который мы сейчас применим, оказывается полезным при решении практических задач, то мы проведем его шаг за шагом.

Прежде всего заметим, что уравнение не содержит x. Поэтому согласно методу § 33 заменяем $\frac{d}{dx}$ эквивалентным ему символом $f'\frac{d}{df}$. Собирая все члены, содержащие f', в левую часть, приводим уравнение к виду:

$$\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\frac{d}{df}\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}\sqrt{2gf+\alpha}}\right)=\frac{-g}{(2gf+\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

В левой части уравнения выражение, стоящее перед знаком $\frac{d}{df}$, почти равно выражению под знаком $\frac{d}{df}$. Если бы они вполне совпадали, то левая часть была бы произведением функции на ее производную и интеграл от левой части равнялся бы квадрату этой функции. Умножаем поэтому обе части уравнения на такой фактор, чтобы указанное условие было выполнено.

Очевидно, что этот множитель есть:

$$\frac{1}{\sqrt{2gf+\alpha}}.$$

В правой части вместо показателя $\frac{1}{2}$ войдет при этом 2. Произведя эту замену, мы тотчас же можем проинтегрировать уравнение. Получим:

$$\frac{f'^2}{(1+f'^2)(2gf+\alpha)}=\frac{1}{2gf+\alpha}-\beta.$$

Это уравнение легко разрешить относительно f'; получим в результате:

$$f'=\sqrt{\frac{1-\beta(2gf+\alpha)}{\beta(2gf+\alpha)}},$$

откуда:

$$x=\int\frac{\sqrt{\beta(2gf+\alpha)}}{\sqrt{1-\beta(2gf+\alpha)}}df.$$

Вычисление этого интеграла упрощается, если произвести замену переменного:

$$\beta(2gf+\alpha)=\sin^2\theta, \tag{125}$$

при этом интеграл будет равен:

$$x=\gamma+\frac{1}{2\beta g}(\theta-\sin\theta\cos\theta). \tag{126}$$

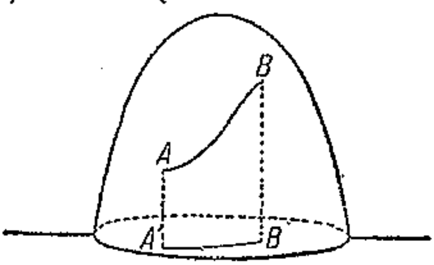
Уравнения (125) и (126) определяют вместе искомую брахистохрону в функции вспомогательной переменной, или «параметра», θ. Если дадим этому параметру частное значение, можем найти значение x из уравнения (126), а соответствующее значение $y=f(x)$ из (125). Очевидно, что давая ряд значений θ, мы получим ряд точек на брахистохроне. Кривая, которая при этом получится, есть циклоида, изображенная на черт. 35. Можем исключить θ из уравнений (125) и (126) и получить таким образом кривую в обычной форме:

$$\beta(2gf+\alpha)=\sin^2(2\beta g(x-\gamma)+\sqrt{(\beta 2gf+\alpha)[1-\beta(2gf+\alpha)]}.$$

Но удобнее пользоваться параметрическими уравнениями (125) и (126), вместо этого сложного уравнения.

§ 49. Геодезические линии на кривой поверхности.

Рассмотрим точки A и B на поверхности, изображенной на черт. 36 Среди всех кривых, которые мы можем провести на этой поверхности из точки A в точку B, существует одна кратчайшая. Она называется геодезической. Эту геодезическую линию мы и будем отыскивать. Один из способов определить эту геодезическую есть определение ее проекции на плоскость xy. Уравнение проекция $A'B'$ вместе с уравнением поверхности вполне определяют геодезическую линию. Пусть уравнение поверхности есть



Черт. 36.

$$z=\Phi(x,\ y).$$

Тогда, если x и y получат приращения dx и dy, то z получит приращение:

$$dz=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy.$$

Следовательно, для элемента длины дуги ds имеем:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dx^2+dy^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy\right)^2.$$

Предположим, что точки A и B соединены произвольной кривой, проекция которой на плоскость xy есть $y=y(x)$. Тогда длина кривой равна:

$$s=\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{dx}dx=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'\right)^2}\,dx. \tag{127}$$

Минимум этого интеграла мы ищем.

В качестве примера рассмотрим случай параболического цилиндра, изображенного на черт. 37; его

$$z=bx^2,$$

Отсюда

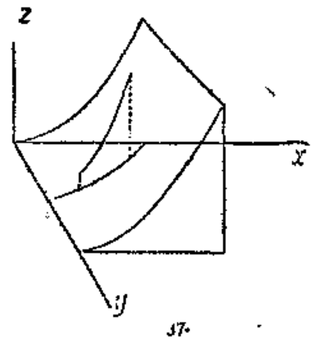
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2bx, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

т. е. (127) обращается в

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + 4b^2x^2 + y'^2}\, dx.$$

Можно получить из этого интеграла диференциальное уравнение геодезической линии обычным способом, который был уже подробно разъяснен, так что не стоит этого повторять. Это уравнение будет:

$$\frac{d}{dx}\, \frac{y'}{\sqrt{1 + 4b^2x^3 + y'^2}} = 0. \tag{128}$$



Черт. 37.

Легко решить это уравнение. Решение дает семейство кривых на поверхности, обладающих тем свойством, что если на какой-нибудь из кривых мы отметим пару точек, то расстояние по этой кривой между этими точками меньше расстояния между ними по любой другой кривой. Если мы хотим найти геодезическую линию, проходящую через две заданные точки, то, выбирая координаты этих точек в качестве граничных значений, можем определить постоянные интеграции в общем решении.

§ 50. Задача Дидоны.

Во всех задачах последних параграфов требовалось определить кривую, вдоль которой некоторый интеграл имеет минимальное или максимальное значение.

Изучение таких задач составляет область так называемого вариационного исчисления, являющегося важной ветвью математики. Задачи, рассмотренные до сих пор, относились к простейшему типу задач вариационного исчисления. А именно, относительно искомых кривых требовалось только, чтобы они давали интегралу экстремальное значение. Так, например, в § 47 единственное требование предъявленное к кривой, состояло в том, чтобы эта кривая давала поверхность вращения с наименьшей площадью. Однако иногда приходится требовать, чтобы искомая кривая удовлетворяла еще некоторым дополнительным условиям. Так, например, можно задать заранее длину кривой и решить следующую задачу: каким образом следует изогнуть проволоку заданной длины, чтобы ограничить ею наибольшую площадь. Очевидно, что эта задача имеет решение, и очевидно также, что это решение не должно совпадать с полученным ранее; действительно, если бы полученная в § 47 кривая имела бы как раз заданную длину, то это было бы просто удивительным совпадением.

Существует много задач такого типа. Они носят название **изопериметрических задач**. Особенный исторический интерес имеет так называемая задача Дидоны. По преданию, Дидона, попав в немилость своему брату Пигмалиону, собрала все деньги, какие могла, и убежала на южный берег Средиземного моря. Там она заключила сделку с царем Иарбасом на покупку такого количества земли, сколько можно было отмерить при помощи шкуры вола.

С остроумием и хитростью, которых всегда достаточно в мифологии, она разрезала кожу на тонкие ремешки, связала их друг с другом и окружила при помощи их место Карфагена. С характерной для финикиян настойчивостью в достижении поставленной цели, она не соединила концы, а поместила их на берегу моря. Задумав свой блестящий план, она встретилась с задачей, каким образом так расположить ремень, чтобы охватить им наивыгоднейшую часть земли, которая может быть максимальной или нет, в зависимости от обстоятельств.

Задача Дидоны состоит, таким образом, в следующем: задана кривая (берег моря), известна цена земли (изменяющаяся с изменением места); как провести кривую заданной длины, чтобы стоимость площади между этими двумя кривыми была максимальной?

Чтобы иллюстрировать метод изучения изопериметрических задач, решим задачу Дидоны для простейшего случая, именно предположим, что земля имеет всюду одинаковую ценность и что берег моря прямолинейный. Кроме того предположим, что концы веревки помещены в две заданные точки, расстояние между которыми равно X*. Задача сводится к определению кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь.

Следовательно, эта кривая удовлетворяет двум условиям, наложенным на ее длину и на площадь, которую она ограничивает. Выбирая берег моря за ось x и помещая один из концов веревки в начало координат, мы можем записать эти условия в виде равенств:

$$L=\int_0^X \sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad A=\int_0^X y\,dx.$$

Первый интеграл имеет заданное значение, второй должен быть сделан наибольшим, путем выбора соответствующей функции $f(x)$.

Пусть искомая кривая, удовлетворяющая поставленным требованиям, имеет уравнение $y=f(x)$, длина ее равна L_0, а ограничиваемая ею площадь равна A_0. Попытаемся применить наш прежний метод и сравним кривую $y=f(x)$ с кривыми $y=f(x)\pm\varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x)$ мало, но в остальном произвольно.

Очевидно, нельзя уже сказать, что A_0+dA — новая площадь для кривой сравнения — меньше чем A_0. Действительно, кривая сравнения может оказаться длиннее прежней и поэтому заключить большую площадь.

---

* Если точки O и X слишком близки между собой, то может случиться, что придется протягивать веревку под точками берега вне интервала (OX), и интегралы в написанной форме не верны. Мы не будем рассматривать этих случаев; мы будем считать y однозначной функции x.

Другими словами, наше прежнее рассуждение не годится, и мы должны найти новый метод исследования.

Для этой цели рассмотрим вместо кривой Дидоны длины L_0, новую кривую длины L_0+dL, где dL может быть как положительно, так и отрицательно. Предположим, что новая кривая так расположена, что ограничивает максимальную площадь, которая будет больше или меньше A_0, в зависимости от знака dL. Обозначим, наконец, вновь полученную площадь через* $A+\Delta A$, а отношение $\frac{\Delta A}{dL}$ (или предел этого отношения при dL стремящемся к нулю) через λ. Мы можем теперь утверждать, что **если мы изменим длину кривой на величину dL, то наибольшая площадь, которую она при этом может ограничивать, будет равна $A_0+\lambda dL$.**

Вернемся теперь к произвольной кривой сравнения $y=f(x)+\varepsilon(x)$, и пусть эта кривая имеет длину L_0+dL, большую, меньшую или равную L_0. Обозначим через A_0+dA площадь, ограниченную этой новой кривой. Какова бы ни была эта площадь, она не может быть больше $A_0+\lambda dL$, так как по предположению это—максимальная площадь, для кривой длины L_0+dL. Отсюда следует, что

$$dA\leqslant\lambda dL,$$

или

$$dA-\lambda dL\leqslant 0.$$

Это приводит к теореме:

Как бы мы не изменили кривую $y=f(x)$, изменяя ее длину или нет, величина $dA-\lambda dL$ никогда не является положительной. Но если $dA-\lambda dL$ не положительно, то $A-\lambda L$ не может быть больше для новой кривой, чем для прежней. Мы можем, следовательно, высказать полученную теорему в более выразительной форме:

Кривая, для которой величина A наибольшая по сравнению с кривыми той же длины, делает наибольшей величину $A-\lambda L$ по сравнению с кривыми произвольной длины.

Поэтому решить задачу максимума для A с ограничением, что длина кривых сравнения L, равна L_0,—то же самое, что решить задачу максимума для $A-\lambda L$ без всяких ограничений на кривые сравнения. Правда, правильное решение задачи получится только в том случае, если λ выбрана правильно, а так как невозможно определить λ, не зная решения задачи, то может показаться, что мы ничего не достигли нашим рассуждением.

Мы увидим, однако, что, предполагая пока λ неизвестной постоянной, мы найдем в дальнейшем способ ее определения. Итак, интеграл, максимум которого требуется найти, есть:

$$A-\lambda L=\int_0^X\left(y-\lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx.$$

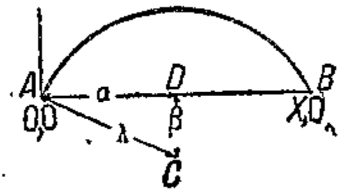
---

* Мы пишем ΔA вместо dA, так как хотим сохранить последний символ для приращения площади при переходе к произвольной кривой.

Обычные преобразования приводят к диференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{1}{\lambda}=0,$$

решение которого $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda$.
Это — уравнение круга, радиуса λ, с центром в точке (α, β). В него входят три произвольных постоянных α, β и λ, но мы имеем три условия для их определения, так как кривая должна проходить через точки $(0, 0)$, $(X, 0)$ и должна иметь длину L.



Черт. 38.

Простейший способ определения постоянных — геометрический. Известно, что центр круга, проходящего через две точки A и B, лежит на перпендикуляре, делящем хорду AB пополам. Отсюда α равняется $\frac{X}{2}$ (черт. 38). Так как гипотенуза и один из катетов треугольника ADC известны, то легко вычислить другой катет. Итак, получаем для β значение $-\sqrt{\lambda^2-\frac{X^2}{4}}$. Наконец, $\frac{L}{\lambda}$ есть величина угла ACB, измеренного в радианах. Угол ACD равен половине этого угла, и его синус равен $\frac{X}{2\lambda}$.

Это дает нам уравнение:

$$\sin\frac{L}{2\lambda}=\frac{X}{2\lambda},$$

откуда можно определить λ. Уравнение трансцендентное и его нельзя решить алгебраическим методом. Его можно решить приближенно путем догадки или с помощью рядов. Так, например, если L равно $1{,}25\,X$, λ оказывается равным $0{,}552\,X$, а следовательно, $\beta=-0{,}234X$. Это как раз тот круг, который изображен на черт. 38.

§ 51. Задача на вероятности a priori.

Управлению телефонной сети важно знать, сколько вызовов следует ожидать в некоторый заданный промежуток времени.

Условия в действительности не всегда одинаковы и иногда делают решение этой задачи очень трудным. Но следующий случай достаточно прост, чтобы его можно было изучить здесь; кроме того, он достаточно близок к действительным условиям, так что его можно рассматривать как типичный случай, с которым все остальные могут быть сравниваемы.

Предположим, что наблюдатель помещается в телефонной станции для наблюдения вызовов и считает их в течение некоторого времени, например одной минуты. Какова вероятность, что он насчитает как раз n вызовов?

Мы будем предполагать:

a) Что вероятность того, что он насчитает ровно n вызовов, не зависит от того, что случилось перед тем, как он начал считать. Например, он мог наблюдать, что перед началом счета было очень мало или очень много вызовов, но мы предполагаем, что это наблюдение не дает никакого указания на то, что ему следует ожидать во время счета.

Это предположение не бессмысленно, так как мы знаем, что абонент не знает, что делают другие абоненты, и поэтому на его вызов не может оказать влияния то, что было замечено наблюдателем.

b) Вероятность для наблюдателя насчитать как раз n вызовов не зависит от времени дня, которое он выбрал для опыта. Конечно, это предположение в общем случае неверно, так как в действительности вероятность вызовов в 3 часа утра, конечно, не так велика, как в 3 часа дня. Но если наблюдатель работает только в те часы, в продолжение которых общий уровень деловой жизни постоянный, то наше предположение недалеко от истины. Наша мысль состоит в том, что нет большой разницы, начнет ли он наблюдения в 2 ч. 35 м., или в 2 ч. 47 м., или, наконец, в 2 ч. 51 м.

Из теории вероятностей нам понадобятся три закона.

1) Вероятность достоверного события равна 1.

2) Если два события независимы, то вероятность наступления обоих равна п р о и з в е д е н и ю вероятностей наступления каждого из этих событий.

3) Если два события не могут произойти одновременно, то вероятность, что одно из них наступит, равна с у м м е вероятностей каждого из этих событий.

Теперь мы можем приступить к решению нашей задачи. Оно будет состоять из трех частей. В первой части мы получим вероятность того, что наблюдатель не услышит н и о д н о г о вызова. Во второй части мы получим диференциальное уравнение для вероятности насчитать ровно n вызовов. В третьей части мы решим это уравнение.

Ч а с т ь 1. Обозначим через t промежуток времени, в течение которого происходит наблюдение, и разделим его на большое число малых интервалов dt.

В промежуток времени t не будет ни одного вызова, если не будет ни одного вызова в частичных интервалах. Отсюда вероятность $p_0(t)$ отсутствия вызова в промежуток времени t равна произведению аналогичных вероятностей для малых интервалов. Это следует из закона 2). Таким образом:

$$p_0(t) = [p_0(dt)]^{\frac{t}{dt}}, \tag{129}$$

где $\frac{t}{dt}$ есть число интервалов.

Далее, пусть $q(dt)$ есть вероятность того, что вызов произойдет в течение малого интервала dt. Так как в этом интервале не может одновременно и произойти вызов и не быть вызова, то в силу закона 3) мы видим, что $p_0(dt) + q(dt)$ есть вероятность того, что в таком интервале встретится вызов или нет. Очевидно, что одно из этих событий должно произойти: отсюда по первому закону сумма $p_0(dt) + q(dt)$ равна единице. Отсюда (129) преобразуется в

$$p_0(t) = (1 - q)^{\frac{t}{dt}},$$

или

$$\ln p_0(t) = \frac{t}{dt} \ln(1-q).$$

Если dt очень мало, например, тысячная доля секунды, то вероятность того, что в этот интервал попадает один вызов, очень мала; а вероятность двух вызовов столь мала, что ею можно пренебречь. Но если q мало, то $\ln(1-q)$ приближенно равен $-q$, откуда:

$$\ln p_0(t) = -\frac{tq}{dt}. \tag{130}$$

Пусть теперь dt уменьшается; очевидно, что левая часть равенства (130) не может измениться от этого, так как она выражает вероятность отсутствия вызовов во всём интервале t; а если левая часть не изменяется, то и правая не может измениться. Это значит, что q содержит dt в качестве множителя. Пусть

$$q = k\,dt,$$

тогда уравнение (130) переходит в уравнение: (131)

$$p_0(t) = e^{-kt}.$$

Это и есть вероятность того, что в течение интервала наблюдения не будет ни одного вызова. Величина k, конечно, неизвестна; но она имеет некоторый физический смысл, так как (131) показывает, что $k\,dt$ есть вероятность одного вызова в течение времени dt в предположении, что dt очень мало.

Часть II. Для второй части задачи возьмем интервал произвольной длины t и за ним очень малый интервал dt. Вместе они образуют интервал $t+dt$, который мы называем «комбинированным».

Если в этот комбинированный интервал попадут n вызовов, то они будут либо все в t, и ни один не попадает в dt, либо $n-1$ попадут в t и один в dt; во всех остальных случаях в dt должно попасть более одного вызова, поэтому эти случаи так мало вероятны, что ими можно пренебречь.

Вероятность n вызовов в t и ни одного в dt есть:

$$p_n(t)\,p_0(dt) = p_n(t)(1-q) = p_n(t)(1-k\,dt).$$

Вероятность $n-1$ вызова в t и одного в dt равна:

$$p_{n-1}(t)\,p_1(dt) = p_{n-1}(t)\,k\,dt.$$

Вероятность n вызовов в комбинированном интервале равна, следовательно:

$$p_n(t+dt) = p_n(t)(1-k\,dt) + p_{n-1}(t)\,k\,dt,$$

что легко преобразовать к виду:

$$\frac{p_n(t+dt)-p_n(t)}{dt} = k\,[p_{n-1}(t) - p_n(t)]. \tag{132}$$

Это уравнение справедливо только при очень малых значениях dt, но в этом случае оно может быть рассматриваемо как очень хорошее приближение, так как вероятность более одного вызова в интервале dt хотя и мала, но не нуль. Однако это приближение становится лучше с уменьшением dt, а когда dt исчезает, уравнение (132) становится совершенно точным. Поэтому, хотя уравнение (132) только приближенное, диференциальное уравнение

$$\frac{dp_n}{dt} = k(p_{n-1} - p_n), \tag{133}$$

к которому оно приводит, совершенно точное. Для получения значения p_n необходимо это уравнение решить.

Часть III. Пусть n равно единице. Тогда уравнение (133) переходит в

$$\frac{dp_1}{dt} + kp_1 = kp_0,$$

и так как p_0 равно e^{-kt}, то полученное уравнение — обыкновенное линейное, решением которого будет:

$$p_1 = (a_1 + kt)\,e^{-kt}.$$

Определение истинного значения постоянной интеграции нетрудно, если мы припомним значения всех величин, входящих в задачу; так, вероятность одного вызова в очень малом промежутке должна быть очень мала и должна стремиться к нулю при t, стремящемся к нулю, т. е. p_1 должно равняться нулю при $t = 0$, и, значит, a_1 исчезает. Отсюда:

$$p_1 = kte^{-kt}.$$

Точно так же для $n = 2$ уравнение (133) переходит в

$$\frac{dp_2}{dt} + kp_2 = k^2te^{-kt},$$

решение которого:

$$p_2 = \left(a_2 + \frac{k^2t^2}{2}\right)e^{-kt},$$

где a_2 тоже должно обращаться в нуль. Продолжая таким же образом далее, мы можем последовательно найти $p_3, p_4, \ldots$ *.

Опять мы показали, что диференциальное уравнение является ключом к решению важной технической задачи.

---

* Интересен другой метод решения уравнения (133), основанный на следующем искусственном приеме. Прежде всего вводим вспомогательную переменную λ и определяем функцию $F(\lambda, t)$ рядом Тэйлора:

$$F(\lambda, t) = p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + \ldots \tag{a}$$

Относительно этого ряда заметим две вещи: во-первых, он сводится к $F(1, t) = 1$ при $\lambda = 1$, во-вторых, он должен сходиться при всех меньших значениях λ.

Диференцируем далее наш ряд и заменим производные p их выражениями из уравнения (133). Мы получим, таким образом:

$$\frac{dF}{dt} = k(\lambda - 1)F,$$

ЗАДАЧИ.

1. Найти кратчайшее расстояние между двумя точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1) плоскости.

2. Тело нужно сдвинуть из точки $(1, 0)$ в точку $(2, 2)$. Поверхность, по которой его нужно двигать, изменяется от точки к точке таким образом, что работа, производимая при движении тела на единицу расстояния, пропорциональна расстоянию тела от начала координат. Найти путь, требующий минимального расхода энергии.

3. Груз нужно сдвинуть в 1 сек. из точки $x=0$ в точку $x=1$. Это можно проделать многими способами: двигая груз со скоростью, равной единице в течение всего пути, или двигая его со скоростью, равной 2 от $x=0$ до $x=\frac{2}{3}$ и со скоростью $\frac{1}{2}$ остальную часть пути, или, вообще, со скоростью $\dot{x}=f(t)$. При этом необходимо преодолеть сопротивление, пропорциональное скорости. Какова должна быть скорость для того, чтобы затратить минимальное количество энергии?

(Эта задача может быть сформулирована с помощью интеграла от $x=0$ до $x=1$, причем в этом случае задача изопериметрическая, или с помощью интеграла от $t=0$ до $t=1$, в этом случае она более простого типа. Получится ли один и тот же ответ этими двумя путями? Энергия равна

$$\int F\,dx,$$

или

$$\int F\frac{dx}{dt}dt,$$

где F — сила.)

4. 1 $см^3$ латуни требуется превратить в тело вращения с осью длиною в 1 *см*. Требуется, чтобы его момент инерции относительно оси вращения был минимальным. Какова форма тела вращения?

или

$$F(\lambda, t)=\alpha(\lambda)\,e^{k(\lambda-1)t}, \tag{b}$$

где $\alpha(\lambda)$ «постоянная интеграции».

Для определения этой постоянной мы замечаем прежде всего, что все p кроме p_0 исчезают при $t=0$. Отсюда (a) сводится к

$$F(\lambda, 0)=p_0(0).$$

Точно так же (b) переходит в $F(\lambda, 0)=\alpha(\lambda)$. Следовательно, $\alpha(\lambda)=p_0(0)$ и является, таким образом, постоянной. С другой стороны, полагая λ равным 1 в (b) и вспомнив, что $F(1, t)=1$, мы находим, что значение этой постоянной $\alpha(\lambda)$ равно единице, т. е.

$$F(\lambda, t)=e^{-kt}e^{\lambda kt}.$$

Заменим теперь $e^{\lambda kt}$ через ряд Тэйлора. В результате получим:

$$F(\lambda, t)=e^{-kt}+\lambda kte^{-kt}+\lambda^2\frac{k^2t^2}{2!}e^{-kt}+\ldots \tag{c}$$

Мы опять нашли для $F(\lambda, t)$ сходящийся ряд Тэйлора. Но функция не может быть одновременно представлена двумя различными рядами Тэйлора. Следовательно, коэфициенты в (a) и (c) должны совпадать. Это дает нам:

$$p_0=e^{-kt}, p_1=kte^{-kt}, p_2=\frac{k^2t^2}{2!}e^{-kt},$$

как и раньше.

(Момент инерции массы m относительно оси на d единицах расстояния от оси равен md^2.)

5. Требуется построить «мир» из заданного количества материи. При этом нужно удовлетворить трем условиям: во-первых, чтобы это было тело вращения, во-вторых, чтобы оно было однородно и, в-третьих, чтобы оно действовало с максимальной силой притяжения на тело, помещенное в его «северном полюсе».

Составить диференциальное уравнение в полярных координатах с началом координат в северном полюсе и найти нужную форму. Начертить кривую поперечного сечения этого нового «мира».

6. Найти кривую длины 3, соединяющую точки $(-1, 1)$ и $(1, 1)$, которая при вращении около оси x даст поверхность с наименьшей площадью.

(Получив решение этой задачи, вы увидите, что одна из постоянных может иметь одно из двух значений. Очевидно, что решение задачи единственное. Какое из значений постоянных правильное, и что дает второе значение?)

7. Найти поверхность вращения, заключающую в себе максимальный объем. Получится диференциальное уравнение, содержащее только y' и y; его решение значительно облегчится, если произвести подстановку:

$$1 + y'^2 = \frac{1}{u}.$$

Последний интеграл в общем случае вычислить нельзя. Однако, если потребовать, чтобы поверхность встречала ось вращения под прямым углом, — это означает попросту, что она не должна иметь заостренных концов, — то получится нужное решение. Каково значение других решений?

8. Дидона встретилась также с задачей определить, на каком расстоянии должны быть точки A и B (черт. 38), чтобы получить наибольшую выгоду. Ответить на этот вопрос, выразив площадь в функции угла φ (т. е. ACD) и определив значение φ, для которого эта площадь наибольшая.

9. Земля береговой полосы в Карфагене, по всей вероятности, ценилась выше, чем внутри страны. Это несколько усложнило задачу Дидоны. Допустим, что цена земли изменялась по закону

$$v(\eta) = \frac{1}{1 + \eta},$$

где $v(\eta)$ есть цена единицы площади, помещенной на расстоянии η от моря. Найти формы границы при условии, что все остальные данные те же, что и в тексте. Не пытайтесь производить последнюю интеграцию.

Глава VII.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

§ 52. Вводные замечания.

Возвращаясь к примерам § 45 и 46 и к решениям задач, следующих за этими примерами, читатель заметит, что все диференциальные уравнения были линейные.

Это не является простой случайностью. Можно утверждать, что, как правило, огромное большинство задач, связанных с упругими изменениями, формулируются в виде линейных диференциальных уравнений. Это же самое справедливо и для большинства задач теплопроводности или электропроводности и для многих других проблем техники и естествознания. Действительно, преобладание линейных уравнений в наиболее обычных областях физического исследования настолько велико, что изучение диференциальных уравнений математической физики можно было бы с таким же успехом назвать теорией линейных уравнений *.

Поэтому нелишне обратить особое внимание на уравнения этого вида; соответственно с этим остальная часть книги почти исключительно посвящена их рассмотрению.

Они резко разделяются на два класса: с постоянными и с переменными коэфициентами. Второму классу обычно (и справедливо) посвящаются особые курсы. Мы остановимся поэтому, главным образом, на более простом случае уравнений с постоянными коэфициентами. Единственными исключениями из этого правила являются вводные замечания § 52 и 54, которые одинаково применимы ко всем линейным уравнениям, и некоторые типы уравнений, упомянутые в гл. IX с целью дать читателю известное представление о том направлении, в котором он мог бы с пользой продолжить изучение, если он к этому склонен.

Во всей теории мы считаем удобным краткое обозначение:

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y,$$

для диференциального выражения:

$$f_s(x)\frac{d^s y}{dx^s}+f_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}+\ldots+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_0(x)\,y.$$

---

* Причина этого преобладания линейных уравнений, конечно, в том, что для огромного большинства естественнонаучных задач достаточно принимать во внимание влияние членов первого порядка.

Это обозначение вызывается тем, что производные различных порядков записаны таким образом, как будто бы они были степени $\frac{d}{dx}$, так что все выражение имеет вид y, умноженного на функцию двух переменных x и $\frac{d}{dx}$. Если мы хотим обратить внимание на то, что наивысшая степень $\frac{d}{dx}$ есть s, то такую функцию, конечно, следует записать в виде $F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)$. В этих обозначениях наиболее общее линейное уравнение s-ного порядка есть:

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x),$$

где $f(x)$ — произвольная функция x.

§ 53. Принцип наложения.

Наиболее важная общая теорема из теории линейных уравнений есть так называемый принцип наложения.

Дело идет здесь о двух уравнениях:

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x) \tag{134}$$

и

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = g(x), \tag{135}$$

левые части которых тождественны, а в правых — разные функции от x, и о третьем уравнении:

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y = f(x) + g(x), \tag{136}$$

левая часть которого тождественна с первыми двумя, а в правой части входит сумма их правых частей. Содержание теоремы состоит в том, что сумма решений (134) и (135) есть решение уравнения (136).

Удобнее мыслить все три уравнения тождественными, в смысле их диференциальной структуры, и говорить, что их решения «зависят» от формы правой части. Формулировка теоремы такова:

Теорема I. *Сумма решений диференциального уравнения, «зависящего» от функций $f(x)$ и $g(x)$, есть решение, зависящее от $f(x) + g(x)$.*

Для доказательства этого предложения обозначим решения (134) и (135), соответственно, через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Это — решения, «зависящие» от f и g. Тогда нужно доказать, что решение, «зависящее» от $f + g$, есть $\varphi(x) + \psi(x)$.

Для доказательства справедливости теоремы достаточно подставить это решение в (136) и посмотреть, удовлетворится ли оно.

Так как всякая производная от $\varphi(x) + \psi(x)$ любого порядка есть сумма производных того же порядка от функций φ и ψ, то при подстановке $\varphi + \psi$ в (136) левая часть разбивается на две: одну, содержащую только φ, другую, содержащую ψ. Сравнивая первую из них с уравнением (134), а вторую — с уравнением (135), мы видим, что они равны, соответственно, f и g. Итак, теорема доказана.

До сих пор мы говорили о φ и ψ как о частных решениях. Однако, если φ общее решение (134), а ψ частное решение (135), то $\varphi+\psi$ должно быть общим решением уравнения (136). Действительно, если φ есть общее решение (134), то оно содержит s независимых произвольных постоянных. Следовательно, и $\varphi+\psi$ содержит s независимых произвольных постоянных, а общее решение уравнения (136) не может содержать больше постоянных*.

Переходя к частному случаю, при $g=0$, мы видим, что уравнения (134) и (136) тождественны, а уравнение (135) есть соответствующее уравнение без правой части, или, как его обычно называют, дополнительное однородное уравнение. Для этого частного случая теорема I дает следующее:

Теорема II. *Общее решение линейного диференциального уравнения есть сумма любого частного его решения и общего решения дополнительного уравнения***.

Почти все методы решения линейных уравнений основаны на принципе наложения, или на теореме II, являющейся частным случаем этого принципа. Поэтому нужно в совершенстве овладеть обеими формами этого принципа. В следующем параграфе они интерпретируются при помощи теории электрических цепей, и мы увидим, что оба они имеют простой физический смысл.

§ 54. *Принцип разложения.*

Следует отметить, что хотя мы можем получить решение (136) из решений (134) и (135), но этот процесс не всегда обратим. Т. е., если известно решение, зависящее от $f+g$, то не всегда можно выяснить, какая часть его зависит от f, а какая от g. То же положение мы имеем в элементарной арифметике. Если заданы два числа 3 и 4, то их сумма 7 единственная и вполне определенная; но, если известно, что сумма двух чисел равна 7, то мы не можем найти эти числа. Это могут быть 3 и 4 или 2 и 5 или какая-нибудь другая из бесчисленного множества пар.

Есть, однако, один частный случай, в котором арифметический процесс обратим, и сумма может быть разложена на слагаемые, а именно,

---

* Может показаться, что, складывая общие решения уравнений, зависящие от f и от g, мы получим более общее решение уравнения (136) с $2s$ произвольными постоянными. Но только s из этих постоянных будут независимы. Поэтому мы ничего не выиграем в общности, как это и следовало ожидать после сделанных замечаний.

** Общее решение дополнительного уравнения часто называется «дополнительным решением» данного уравнения. Несмотря на такое название, оно не является вовсе решением его, так как соответствует правой части, равной нулю, а не функции $f(x)$. Поэтому мы избегаем названия «дополнительное решение» и заменяем его несколько длинной фразой: «решение дополнительного уравнения». Даже и это название не вполне удовлетворительно, так как не видно, в каком смысле уравнения дополняют друг друга; но этот термин, по крайней мере, не ошибочный. Линейное уравнение, правая часть которого $f(x)$ тождественно равна нулю, мы иногда будем называть однородным уравнением.

когда сумма есть комплексное число $a+bi$ и известно, что она была получена сложением действительной и чисто мнимой частей. Тогда действительная часть равняется a, а чисто мнимая равняется bi. Во всех остальных случаях по крайней мере одно из слагаемых суммы $a+bi$ комплексно. Существует и частный случай принципа наложения, в котором решения, зависящие от f и от g, могут быть получены из решения, зависящего от их суммы. При этом оказывается, что этот случай вполне аналогичен простому арифметическому примеру, рассмотренному нами.

Предположим, что $f(x)$—действительная функция, а $g(x)$ — чисто мнимая, равная $ig_1(x)$; пусть, далее, все коэфициенты при производных в уравнении (136) действительны. Пусть нам известно решение уравнения (136). Это решение имеет действительную и чисто мнимую части и может быть записано так:

$$y=\varphi(x)+i\psi_1(x).$$

Подставляя его в (136), приводим уравнение к виду:

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\varphi+iF_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\psi_1=f(x)+ig_1(x).$$

Так как φ и ψ_1—действительные величины, то их производные по x тоже действительны. Отсюда следует, что

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\varphi=f(x)$$

и

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\psi_1=g_1(x),$$

так как две комплексные величины равны тогда и только тогда, когда их действительные и чисто мнимые части равны в отдельности.

Первое из полученных уравнений показывает, что решение, зависящее от $f(x)$, есть φ, а второе,—что ψ_1 есть решение, зависящее от $g_1(x)$.

Это может быть записано в виде следующей теоремы:

Теорема III. *Если коэфициенты при производных линейного диференциального уравнения*

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)y=f(x) \tag{134}$$

действительны, а $f(x)$ — комплексная функция, то действительная и чисто мнимая части решения, зависящего от $f(x)$, зависят, соответственно, от действительной и чисто мнимой части функции $f(x)$.

Одно условие этой теоремы нуждается в особом упоминании: если какой-нибудь коэфициент в $F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ не действительный, то в результате замены y действительной функцией от x этот член тоже даст не действительное выражение. Поэтому нельзя уже предполагать, что и $F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\varphi$ и $F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right)\psi$ в (136) будут действительны. Благодаря этому наше рассуждение падает. Второй из приведенных ниже примеров есть как раз пример такого рода и подчеркивает необходимость требования, чтобы все коэфициенты были действительны.

Точно так же, если уравнение не линейно, то теорема неприменима. Действительно, в этом случае y или одна из его производных умножается сама на себя или на другую производную.

Но если решение уравнения (134) комплексное, то и производные его будут комплексными, так что всякое такое произведение есть произведение двух комплексных величин. Так как действительная часть такого произведения не равна произведению действительных частей сомножителей, а мнимая не равна произведению мнимых частей, то наше рассуждение становится неприменимым.

В качестве первого примера возьмем уравнение:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x+ix^2. \tag{137}$$

Решение этого уравнения легко найти методом § 30, это есть:

$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{ix^3}{5}+\frac{c}{x^2}. \tag{138}$$

Аналогично получаем решение уравнений:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x \text{ и } \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=ix^2.$$

Это будут, соответственно:

$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{c_1}{x^2} \text{ и } y=\frac{ix^3}{5}+\frac{ic_2}{x^2}.$$

И в самом деле, эти решения являются действительной и чисто мнимой частями решения (138) при условии, что постоянная c комплексна и имеет c_1 и c_2 своими действительной и мнимой частями.

Если же мы заменим уравнение (137) уравнением

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y=x+ix^2, \tag{139}$$

в котором коэфициент при y мнимый, то его решением будет:

$$y=\frac{x^2}{2i+2}+i\frac{x^3}{2i+3}+\frac{c}{x^{2i}},$$

или

$$\left.\begin{aligned} y=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{13}x^3+a\cos(b-2\ln x)\right]+\\ +i\left[-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{13}x^3+a\sin(b-2\ln x)\right]^*,\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

* Отделение действительной части от чисто мнимой очень просто в первых двух членах: требуется только умножить их на величины, сопряженные знаменателям. Метод отделения в последнем члене, может быть, и неизвестен читателю. Воспользовавшись равенством $c=ae^{ib}$ и представив x^{-2i} в виде $e^{-2i\ln x}$, мы приводим этот член к виду $ae^{i(b-2\ln x)}$. Но $e^{i\Theta}=\cos\Theta+i\sin\Theta$, откуда, заменяя Θ через $b-2\ln x$, получаем:

$$a\cos(b-2\ln x)+ia\sin(b-2\ln x).$$

при условии, что произвольная постоянная c равна ae^{ib}. Действительная часть отделена здесь от мнимой, но они не будут решениями уравнений

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y=x$$

и

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y=ix^2.$$

Решения этих последних уравнений, соответственно, равны:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x^2}{2i+2}+\frac{c_1}{x^{2i}},\\ y&=\frac{ix^3}{2i+3}+\frac{ic_2}{x^{2i}},\end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

причем эти выражения не являются действительными.

Этого результата нам и следовало ожидать, ввиду того, что принцип разложения (теорема III) неприменим, если коэфициенты при производных комплексные, как это имеет место в уравнении (139).

Однако для принципа наложения таких ограничений не требовалось (теорема I). Сумма правых частей (141) должна равняться правой части (140), что верно.

Наконец, в качестве третьего примера рассмотрим уравнение

$$y\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y\right)=x+ix^2, \qquad (142)$$

решение которого, как легко видеть, есть

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{2i+1}+\frac{2ix^3}{4i+3}+\frac{c}{x^{4i}}}. \qquad (143)$$

Решениями уравнений

$$y\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y\right)=x$$

и

$$y\left(\frac{dy}{dx}+\frac{2i}{x}y\right)=ix^3$$

являются

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{2i+1}+\frac{c_1}{x^{4i}}} \qquad (144)$$

и

$$y=\sqrt{\frac{2ix^3}{4i+3}+\frac{ic_2}{x^{4i}}}. \qquad (145)$$

Но правые части (144) и (145) не только не являются действительной и чисто мнимой частью (143), но даже их сумма не равна правой части (143). Другими словами, в этом случае неверны ни принцип разложения, ни принцип наложения. Так и должно быть, ибо уравнение (142) не линейное.

§ 55. Линейные уравнения с постоянными коэфициентами; показательные функции как решения.

Принцип наложения применим ко всем линейным уравнениям независимо от природы их коэфициентов; принцип разложения применим во всех случаях, когда коэфициенты действительные. Но методы решения, к которым мы сейчас приступим, годятся, вообще говоря, только для уравнений с постоянными коэфициентами. Поэтому в оставшейся части этой главы мы будем рассматривать только уравнения линейные с постоянными коэфициентами.

Такое уравнение имеет вид:

$$a_s \frac{d^s y}{dx^s} + a_{s-1} \frac{d^{s-1} y}{dx^{s-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \tag{146}$$

или в символической форме:

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right) y = f(x). \tag{147}$$

Этот вид отличается от уравнения (134) тем, что функция F_s уже не зависит от x. Так как решение таких уравнений может быть сведено к тому случаю, когда $f(x)$ есть показательная функция вида Be^{px}, то мы и рассмотрим вначале этот частный случай.

Итак, допустим, что диференциальное уравнение имеет вид:

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right) y = Be^{px}. \tag{148}$$

Если $F_s(p) \neq 0$, то всегда можно найти частное решение этого уравнения в виде $y = Ae^{px}$. Действительно, если y дано в такой форме, то мы можем записать его последовательные производные простой заменой $\frac{d}{dx}$ через p. Так:

$$\frac{d}{dx} y = py, \quad \frac{d^2}{dx^2} y = p^2 y \text{ и т. д.}$$

Итак, уравнение (148) переходит в уравнение

$$F_s(p)\, Ae^{px} = Be^{px}. \tag{149}$$

Это уравнение конечное, а не диференциальное, так как p есть число и, следовательно, $F_s(p)$ тоже число. Единственная неопределенная величина в этом уравнении есть A, для которой находим значение:

$$A = \frac{B}{F_s(p)}.$$

Итак, частным решением уравнения (148) является:

$$y = \frac{Be^{px}}{F_s(p)}.$$

Этот результат можно формулировать в виде теоремы:

Теорема IV. *Если правая часть линейного уравнения с постоянными коэфициентами (148) есть показательная функция Be^{px} и если $F_s(p) \neq 0$, то*

$$y = \frac{Be^{px}}{F_s(p)} \tag{150}$$

есть частное решение этого уравнения.

Рассмотрим, например, уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^{-5x}. \tag{151}$$

Если предположить, что решение имеет вид

$$y = Ae^{-5x},$$

то подстановка его в (151) приводит к уравнению

$$12Ae^{-5x} = 6e^{-5x},$$

которое удовлетворяется при $A = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что

$$y = \frac{1}{2}e^{-5x} \tag{152}$$

действительно является решением. Существует исключительный случай как это и отмечено в формулировке теоремы IV, для которого этот способ получения частного решения не годится. Если p есть корень уравнения $F_s(p) = 0$, то левая часть уравнения (149) обращается в нуль независимо от того, какое значение имеет A, и уравнение нельзя разрешить относительно A. Таким образом, если p есть корень уравнения $F_s(p) = 0$, то уравнение (148) не имеет решения указанного вида. В § 63 мы дадим метод, с помощью которого можно получить правильное решение и в этом частном случае.

То свойство, которое делает этот случай исключительным, оказывается очень важным в другом отношении. Действительно, утверждение: если p есть корень уравнения $F_s(p) = 0$, то левая часть уравнения (149) обращается в нуль независимо от значения A, — эквивалентно следующему:

Если p есть корень уравнения $F_s(p) = 0$, то Ae^{px} есть решение уравнения, дополнительного к (148) (т. е. соответствующего однородного уравнения), независимо от величины A. Из этого замечания легко получить общее решение дополнительного уравнения. В самом деле, уравнение $F_s(p) = 0$ есть обыкновенное алгебраическое уравнение степени s * и имеет, следовательно, s корней. Обозначим эти корни через $p_1, p_2, \ldots, p_s$; тогда каждая из функций:

$$\begin{gathered} y = a_1 e^{p_1 x}, \\ y = a_2 e^{p_2 x}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y = a_s e^{p_s x}, \end{gathered}$$

является решением дополнительного уравнения независимо от значений $a_1, a_2, \ldots, a_s$. В силу принципа наложения сумма этих решений

$$y = a_1 e^{p_1 x} + a_2 e^{p_2 x} + \ldots + a_s e^{p_s x} = \sum_{j=1}^{s} a_j e^{p_j x} \tag{153}$$

есть тоже решение, и так как оно имеет s произвольных постоянных, то это общее решение, если только постоянные независимы.

Легко видеть, что в случае, когда какие-нибудь два корня $p_1, p_2, \ldots, p_s$ совпадают, соответствующие члены в уравнении (153) можно соединить вместе. В этих случаях число постоянных уменьшается, ибо, как мы уже раньше отметили, сумма двух произвольных постоянных есть одна произвольная постоянная. Случай кратных корней является, однако, единственным исключением **, для которого (153) не будет общим решением.

Итак, мы пришли к теореме:

Теорема V. *Если уравнение*

$$F_s(p) = 0$$

не имеет кратных корней, то общее решение линейного однородного диференциального уравнения

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

с постоянными коэфициентами есть сумма s показательных функций

$$a_1 e^{p_1 x},\ a_2 e^{p_2 x}, \ldots,\ a_s e^{p_s x},$$

где p_i — корни уравнения $F_s(p) = 0$, а a_i — произвольные постоянные.

Вернемся теперь к уравнению (147). Пусть мы знаем: a) некоторое частное решение уравнения (147), и b) пусть все корни $p_1, p_2, \ldots, p_s$ характеристического уравнения различны. Мы можем применить теорему II и получим, что общее решение уравнения (147) равно сумме

* Это уравнение часто называется характеристическим уравнением — для уравнения (147). Читатель видит, что дополнительное уравнение — диференциальное, а характеристическое уравнение — алгебраическое.

** В этом случае решение имеет другой вид; мы получим его в § 62.

частного его решения и общего решения $\sum_{j=1}^{s} a_j e^{p_j x}$ дополнительного однородного уравнения. В частности, если правая часть уравнения (147) есть показательная функция, как в уравнении (148), то частное решение дается формулой (150), при условии, что входящее туда p не есть корень характеристического уравнения $F_s(p)=0$.

Рассмотрим, например, снова уравнение (151). Его дополнительное уравнение есть

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

Предполагая, что $y=\alpha e^{px}$ есть решение этого дополнительного уравнения, мы видим, что оно удовлетворится, если p удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$p^2+3p+2=0,$$

корни которого равны -1 и -2. Итак, решение однородного уравнения есть:

$$y=a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}.$$

Далее, воспользовавшись частным решением (152), получаем общее решение (151) в виде:

$$y=a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-3x}.$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^{3ix}, \qquad (154)$$

которое совпадает с уравнением (151) с точностью до мнимого показателя. Предполагая частное решение написанным в виде $y=Ae^{3ix}$, находим:

$$y=-\frac{7+9i}{130}e^{3ix}. \qquad (155)$$

Решение дополнительного уравнения есть:

$$y=a_1e^{-x}+a_2e^{-2x},$$

как и раньше. Общее решение будет поэтому:

$$y=a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}-\frac{7+9i}{130}e^{3ix}.$$

Из этого примера можно вывести интересные следствия. Вернемся к частному решению (155). Заметим, что, так как

$$e^{3ix}=\cos 3x+i\sin 3x,$$

то это решение может быть записано иначе в виде:

$$y=\left(-\frac{7}{130}\cos 3x+\frac{9}{130}\sin 3x\right)+i\left(-\frac{9}{130}\cos 3x-\frac{7}{130}\sin 3x\right). \quad (156)$$

Так как уравнение (154) удовлетворяет всем условиям теоремы III, то действительная и чисто мнимая части функции (156) зависят от соответствующих частей e^{3ix}. Другими словами,

$$y=-\frac{7}{130}\cos 3x+\frac{9}{130}\sin 3x$$

есть частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\cos 3x,$$

а

$$y=-\frac{9}{130}\cos 3x-\frac{7}{130}\sin 3x$$

— частное решение уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\sin 3x.$$

Чтобы получить общие решения этих уравнений, остается только прибавить к этим частным решениям $a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}$ в согласии с теоремой II.

Наконец, исследуем несколько примеров исключительных уравнений, к которым наша теория в настоящей стадии развития неприменима.

Если бы, например, вместо уравнения (151) мы имели уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=6e^{-2x}, \quad (157)$$

то решение дополнительного однородного уравнения было бы прежним:

$$y=a_1e^{-x}+a_2e^{-2x},$$

и попрежнему общее решение (157) можно было бы получить, прибавляя его к частному решению (157). Но если мы попытаемся найти частное решение последнего уравнения, применяя прежний метод, т. е. предполагая, что решение имеет вид $y=Ae^{-2x}$, и подставляя его в (157), мы придем к уравнению:

$$A(4-6+2)=6,$$

или

$$0\cdot A=6,$$

из которого невозможно получить значение для A. Это происходит от того, что уравнение (157) не имеет настоящего решения такого вида

В самом деле, искомое частное решение есть $y = -6xe^{-2x}$, как легко проверить, и поэтому общее решение есть:

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-2x} - 6xe^{-2x}.$$

Вопрос о том, как получить это частное решение, пока остается открытым.

Наконец, если вместо уравнения (151) возьмем уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 6e^{-5x}, \tag{158}$$

то легко получим частное решение в виде (150). Это будет:

$$y = \frac{3}{8}e^{-5x}.$$

Но так как корни характеристического уравнения $p^2 + 2p + 1 = 0$ суть -1 и -1, то попытка воспользоваться формулой (153) для получения общего решения приводит к функции:

$$y = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{-x} = (\alpha_1 + \alpha_2)\, e_1^{-x},$$

и так как сумма $\alpha_1 + \alpha_2$ не является более общей, чем одна произвольная постоянная, то эта функция не может дать общего решения. На самом деле искомое общее решение дополнительного уравнения имеет вид $(\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{-x}$, как легко проверить. Таким образом общее решение уравнения (158) будет:

$$y = (\alpha_1 + \alpha_2 x)\, e^{-x} + \frac{3}{8}e^{-5x}.$$

§ 56. Линейные уравнения с постоянными коэфициентами. Решения в тригонометрических функциях.

Применение принципа разложения, которое мы сделали в частном случае, можно сильно расширить.

Пусть мы хотим решить уравнение*:

$$F\left(\frac{d}{dx}\right)y = B\cos(px - \varepsilon), \tag{159}$$

где B и все коэфициенты многочлена F действительны.

В силу принципа разложения решение уравнения (159) есть действительная часть решения уравнения:

$$F\left(\frac{d}{dx}\right)y = B\left[\cos(px - \varepsilon) + i\sin(px - \varepsilon)\right],$$

которое можно иначе записать в виде:

$$F\left(\frac{d}{dx}\right)y = Be^{i\varepsilon}e^{ipx}.$$

* Порядок уравнения здесь не важен. Поэтому мы пишем: $F\left(\frac{d}{dx}\right)$ вместо $F_s\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Так как мы уже знаем, каким образом решить это уравнение (кроме исключительных случаев) при помощи теорем II, IV и V, то легко получить и решение уравнения (159). Мы получим при этом одновременно в качестве побочного продукта и решение уравнения:

$$F\left(\frac{d}{dx}\right)y = B\sin(px - \varepsilon). \tag{160}$$

Хотя мы пришли к этому результату непосредственным применением теорем II, IV и V, однако он настолько важен при изучении колебаний динамических систем, что заслуживает выделения в особую шестую теорему теории линейных уравнений:

Теорема VI. *Действительная часть частного решения линейного диференциального уравнения с правой частью $Be^{ip(x-\varepsilon)}$ есть частное решение соответствующего уравнения с правой частью $B\cos p(x-\varepsilon)$, а коэфициент при i в его чисто мнимой части является частным решением уравнения с правой частью $B\sin p\ (x-\varepsilon)$.*

В теореме VI заключается простейший известный метод решения уравнения (159). Оказывается, что легче решить одновременно уравнения (159) и (160), чем отдельно решать каждое из них. Это может с первого взгляда показаться странным, но в высшей математике мы часто встречаемся с аналогичными фактами, так как часто легче иметь дело с комплексными величинами, чем с действительными.

В частности, многие определенные интегралы, трудно вычисляемые элементарными методами анализа, могут быть весьма просто вычислены с помощью функций комплексного переменного.

Важно понять, чему мы обязаны успехом этого метода. Для этого отметим два обстоятельства. Во-первых, специальное свойство показательной функции e^{px}, а именно, при операции $F\left(\frac{d}{dx}\right)$ функция умножается на $F(p)$. Благодаря этому свойству отыскание общего решения линейного уравнения с постоянными коэфициентами и с правой частью в виде показательной функции сводится к решению алгебраического уравнения. Это есть содержание теоремы IV. Во-вторых, косинус и синус суть действительная и чисто мнимая части комплексной показательной функции. Поэтому в силу принципа разложения решение, зависящее от одной из этих функций, может быть получено из решения, зависящего от показательной функции.

Итак, успех изложенного метода основан на тесной связи между тригонометрическими и показательными функциями и на простоте получения решения для последних.

Как пример рассмотрим простое уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 3x, \tag{161}$$

в котором

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx} + 2.$$

Так как $i\sin 3x$ есть мнимая часть от e^{3ix}, то решение уравнения (161) может быть получено из решения уравнения:

$$\left(\frac{d}{dx}+2\right)y=e^{3ix}.$$

Решением последнего будет:

$$v=\frac{e^{3ix}}{F(3i)}+\alpha e^{-2x}=\frac{e^{3ix}}{3i+2}+\alpha e^{-2x}=\frac{(2-3i)\,e^{3ix}}{13}+(\alpha'+i\alpha'')\,e^{-2x}.$$

Поэтому, записав e^{3ix} в виде $\cos 3x+i\sin 3x$ и отделив действительную часть от мнимой, получаем решение уравнения (161):

$$v=\frac{2\sin 3x-3\cos 3x}{13}+\alpha''e^{-2x}.$$

ЗАДАЧИ.

1. Решить уравнение (160).
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0.$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+12y=7\dfrac{dy}{dx}.$
4. $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}-a^2r=0.$
5. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-a^4y=0.$
6. $\dfrac{d^2v}{du^2}-6\dfrac{dv}{du}+13v=e^{-2u}.$
7. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}-y=\sin t.$
8. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x.$
9. $\dfrac{d^4x}{dt^4}+16x=e^{t}.$
10. $5\dfrac{dx}{dt}+x=\sin 3t.$
11. $\dfrac{d^4x}{dt^4}-6\dfrac{d^3x}{dt^3}+11\dfrac{d^2x}{dt^2}-6\dfrac{dx}{dt}=e^{-3t}.$

12. Вернуться к задаче 10, § 5 и показать, каким образом можно применить методы настоящей главы к уравнениям вида

$$a_s x^s\frac{d^sy}{dx^s}+a_{s-1}x^{s-1}\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}+\ldots+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=f(x).$$

13. Какова должна быть функция $f(x)$ в задаче 12, для того чтобы это уравнение было вполне аналогично уравнению (148)?

14. $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4}+x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-20x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+20x\dfrac{dy}{dx}=17x^6.$

15. $t^4\dfrac{d^4x}{dt^4}-2t^3\dfrac{d^3x}{dt^3}-20t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+12t^2\dfrac{dx}{dt}+16x=\cos(3\ln t).$

§ 57. Уравнения электрических цепей; «переходное» и «устойчивое» состояния в простом контуре.

Законы, изложенные в § 17 и выражающие зависимость между силой тока и электродвижущей силой в простых электрических контурах, приводят к большому числу линейных уравнений как раз того типа, который мы сейчас изучаем. Предметом настоящего параграфа является дальнейшая иллюстрация развитых до сих пор принципов и, в частности, конкретное физическое толкование двух частей нашего решения — частного решения, зависящего от $f(x)$, и общего решения однородного уравнения, так как разделение этих двух частей друг от друга пока остается таинственным.

Для этой цели мы выберем прежде всего простейшую иллюстрацию. Предположим, что мы имеем самоиндукцию, равную единице, и сопротивление, равное двум, которые соединены последовательно, и пусть на них действует в момент времени $t=0$ электродвижущая сила вида $\sin 3t$. Тогда по правилам § 17 находим диференциальное уравнение

$$\frac{dI}{dt}+2I=\sin 3t,$$

управляющее током.

Это уравнение тождественно с уравнением (161), общее решение которого мы только что нашли:

$$I=\frac{2\sin 3t-3\cos 3t}{13}+a''e^{-2t}.$$

Для определения величины постоянной a'' нам нужно одно граничное условие. Его легко найти следующим рассуждением: до момента времени $t=0$ контур был в бездействии, т. е. не было электродвижущей силы, и поэтому не было тока. Таким образом до $t=0$ значение I равнялось нулю. После того как была приложена электродвижущая сила, либо сила тока постепенно возросла от нуля, — в этом случае очевидно, какое граничное значение нужно взять, — либо произошел внезапный скачок при $t=0$. Первое из этих предположений оказывается справедливым. Действительно, скачок обозначает конечное изменение силы тока в нулевой промежуток времени, а это физически эквивалентно бесконечному значению $\frac{dI}{dt}$, а следовательно, и $\frac{dI}{dt}+2I$.

Последнее выражение должно равняться приложенной электродвижущей силе в момент времени $t=0$ и не может быть бесконечным. Отсюда следует, что конечного скачка I при $t=0$ быть не может.

Мы должны, таким образом, определить a'' из условия, что I равно нулю при $t=0$, что дает нам искомое частное решение

$$I=\frac{2\sin 3t-3\cos 3t}{13}+\frac{3}{13}e^{-2t}. \tag{162}$$

Это решение состоит из двух частей: частного решения $\frac{2}{13}\sin 3t-\frac{3}{13}\cos 3t$, зависящего от электродвижущей силы $\sin 3t$ и не имеющего произвольной постоянной и поэтому вполне независимого от граничных условий, и решения однородного уравнения $a''e^{-2t}$, зависящего от граничного условия и имеющего одну и ту же ф о р м у, независимо от величины движущей силы, хотя, конечно, величина постоянной a

при изменении этой силы может и не равняться $\frac{3}{13}$ *. На языке электротехники первый из этих членов называется «установившимся», а второй «переходным». Посмотрим, почему они так называются.

Прежде всего рассмотрим последний член выражения (162), т. е. переходный. При увеличении t этот член уменьшается и в конце концов становится столь малым, что не имеет практического значения. Поэтому он изображает переходный ток, возникающий при $t=0$ и скоро снова исчезающий. С другой стороны, первый член есть сумма синуса и косинуса и поэтому дает синусоидальную волну с тем же периодом, что и электродвижущая сила, и с амплитудой $\frac{1}{\sqrt{13}}$. Начинаясь при $t=0$, он остается до тех пор, пока действует электродвижущая сила. Поэтому, после того как ток замыкания затух и условия «Установились», остается один этот ток. Поэтому он и называется установившимся током **.

Посмотрим теперь, что произойдет после того, как электродвижущая сила действовала некоторое время, а затем оборвалась скачком. Пусть, для определенности, это произошло в момент времени $t_0=\frac{17\pi}{6}$. Ток попрежнему описывается теми же диференциальными членами $\frac{dI}{dt}+2I$. Но теперь нам нужно только решение однородного уравнения, так как электродвижущей силы нет. Другими словами, ток удовлетворяет дополнительному уравнению

$$\frac{dI}{dt}+2I=0$$

и подходяще выбранным граничным условиям. Чтобы получить эти граничные условия, мы подставляем $t=\frac{17\pi}{6}$ в уравнение (162) и находим, что в тот момент, когда электродвижущая сила перестала действовать, сила тока равнялась $\frac{2}{13}$. Применяя то же рассуждение, что и выше, получаем, что она не может измениться скачком. Поэтому, начиная с этого момента, сила тока удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\frac{dI}{dt}+2I=0$$

---

* Например, если бы электродвижущая сила равнялась $2\sin 3t$, то

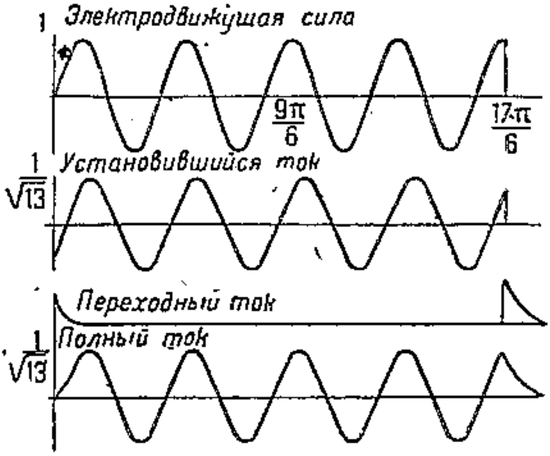
$$\alpha''=\frac{6}{13}.$$

** Термин «установившееся состояние» применяется только к частному решению, зависящему от электродвижущей силы простого гармонического типа, или к наложению решений, зависящих от нескольких таких электродвижущих сил, действующих одновременно, т. е. мы можем говорить об устойчивом токе, зависящем от силы

$$E=\sin t+3\cos 2t+6\sin\frac{1}{\pi}(t-2),$$

но не от силы $E=t$.

и граничному условию $I = \frac{2}{13}$ при $t = \frac{17\pi}{6}$. Ее уравнение есть поэтому $I = \frac{2}{13} e^{-\frac{17\pi}{3} - 2t}$. С течением времени она становится меньше и меньше и в конце концов исчезает, т. е. этот член является переходным. Установившийся член исчез. Переходные члены являются током, который может существовать и при отсутствии электродвижущей силы.



Черт. 39.

На черт. 39 изображены электродвижущая сила, установившиеся и переходные члены и, наконец, полный ток.

В качестве второго примера рассмотрим общий случай самоиндукции, сопротивления и емкости, включенных последовательно. По правилам § 17 получаем в этом случае диференциальное уравнение:

$$L\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + \frac{x + x_0}{C} = E(t);$$

заменяя в нем x через заряд конденсатора, равный $x + x_0 = q$, получаем

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t). \tag{163}$$

Общее решение этого уравнения тоже состоит из установившегося тока, зависящего от $E(t)$, и из переходного тока, определяемого граничными условиями. Чтобы найти форму последнего, требуется определить корни характеристического уравнения:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0.$$

Очевидно, они равны:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \\ p_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Наиболее общее решение однородного уравнения, т. е. наиболее общее значение q, которое может существовать при отсутствии электродвижущей силы есть:

$$q = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t}.$$

Так как I есть первая производная от x, и следовательно, от q, то общее выражение для переходного тока есть:

$$I = a_1 p_1 e^{p_1 t} + a_2 p_2 e^{p_2 t}. \tag{165}$$

Посмотрим, что можно сказать об этом переходном токе. Сначала предположим, что $R^2C < 4L$. В этом случае радикалы, входящие в p_1 и p_2, мнимые. Каждый член формулы (165) содержит фактор $e^{-\frac{R}{2L}t}$, уменьшающийся со временем и в конце концов исчезающий. Остающийся множитель можно представить в виде $a_1 p_1 e^{i\bar{n}t} + a_2 p_2 e^{-i\bar{n}t}$, где $\bar{n}$ — действительное число:

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Но так как

$$e^{i\bar{n}t} = \cos \bar{n}t + i \sin \bar{n}t \quad \text{и} \quad e^{-i\bar{n}t} = \cos \bar{n}t - i \sin \bar{n}t,$$

то этот множитель можно записать иначе:

$$(a_1 p_1 + a_2 p_2) \cos \bar{n}t + i (a_1 p_1 - a_2 p_2) \sin \bar{n}t.$$

На первый взгляд мы получили действительный член (с $\cos \bar{n}t$) с числом колебаний $\frac{\bar{n}}{2\pi}$, и мнимый член той же частоты колебаний. Но это не так, ибо как на самом деле p_1 и p_2 и, быть может, a_1 и a_2 — комплексные величины.

Благодаря присутствию произвольных постоянных a_1 и a_2, коэфициенты $a_1 p_1 + a_2 p_2$ и $i(a_1 p_1 - a_2 p_2)$ совершенно произвольны, и мы можем их обозначить через a и b. Во всякой физической задаче a и b будут действительны, так как физические величины никогда не являются комплексными, но в общей математической трактовке мнимость может иметь место. Во всяком случае, рассматриваемый множитель имеет вид:

$$a \cos \bar{n}t + b \sin \bar{n}t.$$

Итак, все переходное решение уравнения (165) состоит из произведения синусоидального члена частоты $\frac{\bar{n}}{2\pi}$ и амплитудного множителя $e^{-\frac{R}{2L}}$, т. е. ток есть синусоидальная волна с постоянно убывающей амплитудой, или как ее обычно называют, «затухающая волна». Ее частота колебаний $\frac{\bar{n}}{2\pi}$ называется собственной частотой контура, так как это та частота, с которой в нем колеблется ток при отсутствии приложенной электродвижущей силы.

Все изложенное было выведено в предположении, что $R^2C < 4L$. Для того чтобы исследовать, какие изменения произойдут при нарушении этого условия, рассмотрим изменение частоты $\bar{n}$ при возрастании R.

Так как

$$\bar{n}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}},$$

то $\bar{n}$ уменьшается при этом, и следовательно, колебание замедляется до полного исчезновения при $R^2C=4L$. Этот результат мы можем сформулировать иначе, а именно, в виде правила: при увеличении сопротивления цепи собственная частота ее колебаний уменьшается.

Если R возрастет далее, то радикалы в выражении (134) становятся действительными числами *, так что p_1 и p_2 действительны и отрицательны и не равны между собой.

При этих условиях каждый член выражения (165) есть показательная функция в отрицательной степени, исчезающая без колебаний при возрастании времени, подобно переходным токам на черт. 39. Это условие обычно описывают как «критическое затухание» тока. При дальнейшем возрастании R p_2 возрастает (по абсолютной величине), а p_1 уменьшается. Следовательно, увеличение сопротивления заставляет одну из компонент переходного тока затухать быстрее, а другую медленнее.

До сих пор мы рассуждали только о переходном токе. Но применение теорем IV и VI к уравнению (163) дает нам установившийся ток (вынужденный), зависящий от электродвижущей силы очень важного типа $E=E_0\cos nt$. Заменяя $E=E_0\cos nt$ выражением

$$E=E_0e^{int}, \tag{166}$$

для которого она является действительной частью, мы получаем вместо (163) уравнение

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E_0e^{int},$$

частное решение которого есть:

$$q=\frac{E_0e^{int}}{Rin+\frac{1}{C}-Ln^2},$$

или

$$I=\frac{E_0e^{int}}{Lin+R+\frac{1}{Cin}}. \tag{167}$$

Действительная часть этой величины в сумме с выражением (165) дает наиболее общий ток, текущий по замкнутому контуру при действии электродвижущей силы в форме косинуса. Отделение действительной части от мнимой предоставляем читателю.

Мы уже отметили, что с течением времени переходная компонента затухает. Поэтому, если электродвижущая сила действует в течение боль-

* Когда $R^2C=4L$, то p_1 и p_2 равны, и необходимо дать другую форму решения, как это уже было сказано в § 55.

шого промежутка времени, то ток, в основном, сводится к действительной части выражения (167). Таким образом это и есть установившийся ток, вынужденный силой $E_0 \cos nt$.

§ 58. Уравнение для цепи; кажущееся сопротивление.

Задачей настоящего параграфа является показать тесную связь между идеями этой главы и некоторыми общими принципами теории электричества. Для этого прежде всего необходимо напомнить эти физические принципы.

В примерах, рассмотренных в § 57, мы видели, что ток, вызванный синусоидальной электродвижущей силой, сам становится синусоидальным после исчезновения переходных членов. Это справедливо для всякого электрического тока, удовлетворяющего линейному диференциальному уравнению с постоянными коэфициентами, как это видно из теоремы IV. Всякая синусоидальная электродвижущая сила или синусоидальный ток характеризуется тремя свойствами: частотой, амплитудой и фазой. Поэтому, пока нас интересуют условия вынужденного тока, мы можем описать наш ток, указывая связь этих трех величин тока с соответствующими величинами электродвижущей силы. Все это легко найти, изучая уравнения (147) и (150).

Но так как мы хотим получить электромагнитную интерпретацию, то, заменим в этих уравнениях y через I, x через t, а $f(x)$ через $E(t)$, чтобы яснее представить себе их физическое значение.

Тогда можно утверждать: если контур таков, что его состояние адэкватно описывается линейным диференциальным уравнением $F\left(\frac{d}{dt}\right) I = E(t)$, и если электродвижущая сила $E(t)$ есть либо действительная, либо чисто мнимая часть показательной функции

$$E(t) = Be^{int}, \tag{168}$$

то вынужденный ток, вызываемый этой силой, есть действительная или мнимая часть частного решения

$$I = \frac{Be^{int}}{F(in)}. \tag{169}$$

Рассмотрим прежде всего уравнение (168) и найдем, какие множители соответствуют «частоте», «амплитуде» и «фазе». Для этого отделим мнимую часть в выражении (168). При этом мы должны помнить, что B само может быть комплексным числом; запишем его в форме:

$$B = E_0 e^{i\epsilon},$$

это окажется наиболее удобным в дальнейшем. Тогда (168) перейдет в

$$E(t) = E_0 e^{i(nt+\epsilon)},$$

где E_0, n и ε действительны *. Теперь легко отделить действительную часть от мнимой. Мнимая равна:

$$E(t)=E_0 \sin(nt\,\varepsilon).$$

Читатель знает, что амплитуда такого колебания равна E_0, частота равна $\frac{n}{2\pi}$ перемен в 1 сек. и фаза равна ε. Итак, мы видим, что если постоянная B в (168) имеет вид $B=E_0 e_{i\varepsilon}$, то колебание имеет:

a) амплитуду E_0;

d) фазу ε;

c) частоту $\frac{n}{2\pi}$.

Обратимся теперь к выражению (169) и, так как $F(in)$ может быть комплексным числом, запишем его в виде $F(in)=Z_0 e^{i\varepsilon'}$. Тогда

$$I=\frac{E_0}{Z_0} e^{i(nt+\varepsilon-\varepsilon')}.$$

Мы видим тотчас же, что

a) частота колебания тока та же, что частота электродвижущей силы;

b) амплитуда его пропорциональна амплитуде электродвижущей силы, причем фактор пропорциональности равен обратной величине модуля;

c) фаза равна $\varepsilon-\varepsilon'$, т. е. отличается от фазы электродвижущей силы на угол ε' — аргумент.

В теории электричества отношение электродвижущей силы к силе тока, т. е. $\frac{E}{J}$, называется кажущимся сопротивлением. Итак, мы имеем правило: кажущееся сопротивление равно $F(in)$.

В теории электричества употребляются еще два термина, для которых легко найти математическое выражение через ту же самую функцию $F(in)$. Чтобы их вывести простейшим путем, предположим, что время отсчитывается от того момента, когда фаза тока равна нулю. При этом $\varepsilon=\varepsilon'$. Следовательно, электродвижущая сила и ток имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} E&=E_0 \sin(nt+\varepsilon'),\\ I&=\frac{E_0}{Z_0}\sin nt. \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Первое из этих выражений легко представить в виде:

$$E=(E_0\cos\varepsilon')\sin nt+(E_0\sin\varepsilon')\cos nt. \tag{171}$$

В этой форме электродвижущая сила есть сумма двух частей: одной с амплитудой $E_0\cos\varepsilon'$ и имеющей ту же фазу, что и ток, и второй с амплитудой $E_0\sin\varepsilon'$ и с фазой, отличающейся от фазы тока на 90°.

* Если бы n было комплексным, то его мнимая часть соответствовала бы затухающему члену, как мы видели в § 57, и электродвижущая сила не была бы установившейся.

В электротехнике отношение амплитуды к компоненте, совпадающей по фазе (активной компоненте), называется «активным сопротивлением» тока, а отношение амплитуды к внефазовой (реактивной) компоненте—«реактивным сопротивлением» цепи. При этом отношения берутся, как и в случае кажущегося сопротивления, так, что электродвижущая сила стоит в числителе, а сила тока в знаменателе. Отсюда, обозначая активное и реактивное сопротивления через X и Y, мы имеем:

$$X = Z_0 \cos \varepsilon',$$
$$Y = Z_0 \sin \varepsilon',$$
$$X + iY = Z_0 e^{i\varepsilon'} = F(in).$$

Другими словами: **активное сопротивление тока есть действительная часть $F(in)$, а реактивное сопротивление есть коэфициент при i в чисто мнимой части.**

Очевидна важная роль, которую играет во всей теории функция $F(in)$. Сама она является кажущимся сопротивлением цепи, ее аргумент есть **разность фаз** электродвижущей силы и силы тока; ее действительная и мнимая части являются, соответственно, активным и реактивным сопротивлением. Она заключает в себе, таким образом, четыре физических фактора. В силу этого электротехники приходят к тому, чтобы рассматривать **комплексную величину** $F(in)$ вместо различных действительных величин, на которые она разлагается. В свете нашей теории мы можем определить эту величину следующим образом: **полное сопротивление цепи, удовлетворяющей линейному диференциальному уравнению:**

$$F\left(\frac{d}{dt}\right) I = E_0 e^{int},$$

получается заменой $\frac{d}{dt}$ через in в выражении $F\left(\frac{d}{dt}\right)$, т. е. равно $F(in)$.

ЗАДАЧИ.

1. Найти общее решение уравнения тока для сопротивления и емкости. Исследовать естественные частоты.

2. Найти общее решение уравнения тока для самоиндукции, включенной с периодической электродвижущей силой. Какова естественная частота колебаний? Разобрать типы токов, могущих течь в отсутствии электродвижущей силы.

3. Найти общее решение уравнения тока для самоиндукции и емкости с периодической электродвижущей силой. Какова естественная частота? Какой ток будет при отсутствии электродвижущей силы? Сколько времени он может течь?

4. Предположим, что в предыдущей задаче в контуре нет тока в момент времени $t = 0$, в который приложена электродвижущая сила, т. е. что при $t = 0$, $I = \frac{dI}{dt} = 0$. Каков будет ток? Когда наступит установившееся состояние?

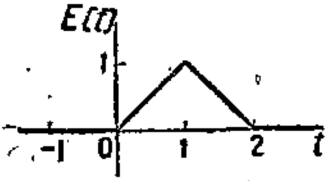
5. Резонансные частоты цепи это те частоты, при которых абсолютная величина кажущегося сопротивления (Z) есть минимум. Физическое значение этих частот в том, что при них данная сила порождает больший вынужденный ток, чем при близких частотах. Найти резонансные частоты для общей цепи, разобранной в § 57. Совпадают ли они с собственными частотами?

6. Если открытая цепь, содержащая заряженный конденсатор, самоиндукцию и сопротивление, включенные последовательно, соединена с осциллографом, за-

тем замкнута, так что получилась осциллограмма,—является ли частота колебания собственной или резонансной? Как экспериментально получить другую?

7. Постоянная электродвижущая сила приложена в момент $t=0$ к общей цепи § 57. Найти силу тока в предположении, что до этого момента ток отсутствовал. Указанную постоянную E_0 можно написать в виде E_0e^{dt}.

8. Неважно, чтобы $E(t)$ в правой части диференциального уравнения выражалась простой формулой. Например, она может быть представлена ломаной линией, как на черт. 40. Найти ток, который потечет через сопротивление и самоиндукцию, включенные последовательно, если электродвижущая сила имеет такой вид.



Черт. 40.

9. Диференциальные уравнения § 5 все были таковы, что показательные факторы затухания были отрицательны, т. е. решения всегда были вида $e^{-kt}\cos\overline{n}t$, а не $e^{+kt}\cos\overline{n}t$. Это вполне оправдывается физически, так как устойчивые динамические системы никогда не приводят к последнему типу решений. Допустим, однако, что ток все-таки удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$\frac{dI}{dt}-I=E(t).$$

Изучить ток, который был бы вызван электродвижущей силой $E=\sin t$ приложенной в момент $t=0$.

§ 59. Метод операторов. Разложение их на множители.

В математике кроме символов величин встречаются также символы операций. Так, 2, 3, x, n — числа, или величины, а $+$, $-$, $\frac{d}{dx}$, $\int\ldots ds$,—очевидно, символы операций, или операторы *.

Математические методы, преображающие символы одной операции в символы другой, называются методами операторов. Другими словами, метод операторов состоит в преобразованиях операторов, а не величин.

Оператор, играющий важнейшую роль в теории диференциальных уравнений, есть $\frac{d}{dx}$; если мы хотим обратить особое внимание на операторный характер $\frac{d}{dx}$, то обозначаем его через p **. Так как этот символ обозначает диференцирование по независимой переменной, то два таких диференцирования, взятые подряд, естественно обозначить через pp, или через p^2. В этих обозначениях вторая производная $\frac{d^2y}{dx^2}$ будет записана в виде p^2y, третья — в виде p^3y и т. д. Аналогично, всякое линейное диференциальное уравнение с постоянными коэфициентами может быть записано в виде:

$$F(p)y=f(x). \tag{172}$$

* Их можно отличить друг от друга на основании простого правила: символы величин, как, например, цифры, имеют определенный смысл, взятые отдельно, тогда как оператор получает значение только когда за ним следует величина, точно так же как переходный глагол требует дополнения. Так, 2 или x имеют полный смысл, как и «дом» или «обезьяна», тогда как $+$ и $\frac{d}{dx}$ имеют смысл только, если к ним присоединим какую-нибудь величину, например $x+2$, или $\frac{dy}{dx}$.

** В чистой математике более употребителен символ D.

Это уравнение тождественно с уравнением (147), p есть просто сокращенное обозначение для $\frac{d}{dx}$. Тем не менее, оно выглядит, как алгебраическое уравнение (149), в котором p является числом. Говоря грубо, существо метода операторов состоит именно в том, чтобы рассматривать уравнение так, как будто p есть число. Но, конечно, только в той мере, в какой мы можем доказать, что этот процесс приведет к правильным результатам.

Как бы мы решили уравнение (172), если бы p было числом? Попросту — деля уравнение на $F(p)$, т. е.

$$y = \frac{f(x)}{F(p)}. \tag{173}$$

По аналогии мы называем этот результат «операторным решением» уравнения (172). Символ $\frac{1}{F(p)}$ называется обратным оператору $F(p)$ и часто записывается в виде $F^{-1}(p)$.

Это некоторый обобщенный знак интеграла, который указывает на необходимость произвести все действия, нужные для решения (172).

Например, в простейшем случае, когда $F(p) = p$, уравнение (172) обращается в

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

и выражение (173) может быть записано либо в виде

$$y = \frac{f(x)}{p}, \tag{174}$$

либо

$$y = \int f(x)\,dx. \tag{175}$$

И то и другое обозначает одну и ту же вещь. С некоторой точки зрения оба выражают требование проинтегрировать функцию $f(x)$, причем каждое из этих требований лишено содержания, пока оно не выполнено.

Однако в случае обычных интегральных обозначений часто думают, что это требование уже выполнено, и говорят о выражении (175) как о результате интеграции, независимо от того, может ли она быть выполнена фактически или нет. Очевидно, что совершенно законно рассматривать в этом же смысле и выражение (174), так как это есть выражение (175), записанное в других обозначениях. То же самое можно сказать и о выражении (173). Для пояснения приведем пример. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{1}{x}$$

может быть записано иначе в виде:

$$(p-1)\,y = \frac{1}{x}.$$

Его решение можно выразить либо в обычной форме

$$y = ae^x + e^x \int \frac{1}{x} e^{-x} dx, \tag{176}$$

либо в форме операторной:

$$y = \frac{1}{p-1} \frac{1}{x}. \tag{177}$$

Ни то, ни другое нельзя выразить в элементарных функциях, так как $\frac{e^{-x}}{x}$ не имеет элементарного интеграла. Называть (176) решением этого диференциального уравнения есть софистика, поскольку мы не имеем возможности найти числовой результат; наоборот, если (177) поддается вычислению, то называть его решением — уже не софистика. Наши рассуждения не могут пострадать от того, что одно из этих обозначений привычное, а другое — нет. Если мы умеем ими пользоваться, то с совершенно одинаковым правом можем назвать оба выражения решением. Следующие параграфы будут посвящены как раз отысканию методов интерпретации и пользования операторными решениями. Конечно, мы имеем здесь в виду правильные пути, т. е. пути, приводящие к правильным результатам. Ибо методы, приводящие к неверным ответам, или иногда приводящие к неверным ответам, хуже, чем отсутствие всяких методов, если мы не знаем границ их применимости. Таким образом нам придется остановиться на доказательствах того, что наши действия не только правдоподобны, но и верны. Прежде всего докажем теорему:

Теорема VII. *В применении к линейным диференциальным уравнениям с постоянными коэфициентами оператор p удовлетворяет обычным правилам алгебраических действий сложения, вычитания и умножения.*

Доказательство первых двух правил тривиально. Равенство

$$\alpha \frac{dy}{dx} + \beta \frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta) \frac{dy}{dx}$$

в операторной форме имеет вид:

$$(\alpha p + \beta p) y = (\alpha + \beta) p y,$$

что доказывает ассоциативный закон для первой производной. Аналогично доказываются и законы для производных высшего порядка. Третье правило несколько сложнее. Если

$$u = \alpha \frac{dy}{dx} + \beta y,$$

то непосредственным диференцированием получаем:

$$\gamma \frac{du}{dx} + \delta u = \gamma\alpha \frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma\beta + \delta\alpha) \frac{dy}{dx} + \delta\beta y.$$

В операторной форме это записывается так:

$$u = (\alpha p + \beta) y;$$

подставляя во второе равенство выражение для u из первого, получаем:

$$(\gamma p + \delta) u = [\gamma\alpha p^2 + (\gamma\beta + \delta\alpha) p + \delta\beta] y.$$

Мы видим, что, перемножив алгебраически операторы в левой части, мы получаем правую часть. Это и есть искомое доказательство, так как оно показывает, что мы придем к верному результату, если будем обращаться с операторами по правилам алгебры. Конечно, доказанное правило применимо только к линейным множителям и только к двум. Но обобщение на произведение многочлена любой степени на линейный множитель тривиально. В частности, если перемножаются s линейных операторов, то получается операторный многочлен степени s.

Более важным является, однако, тот факт, что это процесс обратим, и что выражение степени s может быть разложено на линейные множители. Допустим, что выражение

$$F_s(p) = a_s p^s + a_{s-1} p^{s-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

было разложено на множители *:

$$a_s(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_s), \tag{178}$$

как если бы оно было алгебраическим. Известно, что можно снова соединить в одно эти множители прямым умножением; и так как этот законный процесс приводит к $F_s(p)$, то (178) эквивалентно $F_s(p)$ как в алгебраическом, так и в операторном смысле. Итак, мы приходим к теореме:

Теорема VIII. *Линейный дифференциальный оператор порядка s с постоянными коэфициентами можно заменить s линейными операторами.*

Так, например, оператор $p^2 + 1$ может быть разложен на множители $(p + i)(p - i)$; поэтому мы получим одинаковые результаты, если прибавим к функции ее вторую производную, или если образуем сначала выражение $\frac{dy}{dx} - iy$, а затем прибавим его произведение на i к его производной.

Читатель лучше уяснит себе эту идею, фактически произведя указанные операции для нескольких простых функций:

$$y = x^2,\ y = \sin nx \text{ и т. п.}$$

Следующий пункт, который нужно отметить в связи с процессом разложения на множители, тот, что порядок линейных множителей безразличен. Это следует из того, что мы доказали: (178) есть операторная форма функции $F_s(p)$, если только множители при алгебраическом перемножении дают действительно $F_s(p)$. Так как в алгебраическом смысле порядок сомножителей безразличен, то он будет несущественен и в операторном смысле. Другими словами, мы установили коммутативный закон умножения.

§ 60. Операторный метод; применение разложения на множители к решению линейных уравнений.

Чтобы лучше понять, как можно применять разложение на множители рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^x, \tag{179}$$

* Следует обратить внимание на то, что $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — не операторы, а числа, действительные или комплексные корни уравнения $F_s(p) = 0$. Только само p без индекса обозначает $\frac{d}{dx}$.

или

$$(p^2+1)y=e^x.$$

Перепишем последнее в виде:

$$(p+i)(p-i)y=e^x,$$

и введем символ y_1 вместо $(p-i)y$. Тогда уравнение (179) обращается в

$$(p+i)y_1=e^x,$$

или, вводя обычные диференциальные обозначения, в

$$\frac{dy_1}{dx}+iy_1=e^x.$$

Это — линейное уравнение, решением которого является:

$$y_1=\alpha e^{-ix}+\frac{e^x}{1+i}.$$

Но, по определению, мы имели:

$$(p-i)y=y_1,$$

или в диференциальной форме:

$$\frac{dy}{dx}-iy=\alpha e^{-ix}+\frac{e^x}{1+i}.$$

Опять получили линейное уравнение, решение которого есть:

$$y=\beta e^{ix}+\frac{\alpha}{2i}e^{-ix}+\frac{e^x}{2}.$$

Итак, уравнение (179) вполне разрешено. Тот же результат можно было бы получить методом § 55.

Переходя к общему случаю, можем записать уравнение (172) в виде:

$$a_s(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_s)y=f(x); \tag{180}$$

полагаем

$$\begin{aligned}(p-p_s)y&=y_s,\\ (p-p_{s-1})y_s&=y_{s-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (p-p_2)y_3&=y_2;\end{aligned}$$

тогда уравнение (180) переходит в

$$a_s(p-p_1)y_2=f(x).$$

В диференциальных обозначениях все полученные уравнения линейные. В частности, последнее есть:

$$\frac{dy_2}{dx}-p_1y_2=\frac{f(x)}{a_s},$$

и имеет своим общим решением

$$y_2 = e^{p_1 x}\left(a_1 + \int e^{-p_1 x}\frac{f(x)}{a_s}dx\right). \tag{181}$$

Предыдущее есть:

$$\frac{dy_3}{dx} - p_2 y_3 = y_2.$$

Поэтому

$$y_3 = e^{p_2 x}\left(a_2 + \int e^{-p_2 x} y_2\,dx\right).$$

Но так как выражение для y_2 известно из формулы (181), то можем переписать последнее решение в виде:

$$y_3 = e^{p_2 x}\left[a_2 + \int e^{(p_1 - p_2)x}\left(a_1 + \frac{1}{a_s}\int e^{-p_1 x} f(x)\,dx\right)dx.\right]$$

Продолжая этот процесс, находим в конце концов:

$$y = e^{p_s x}\left(a_s + \int e^{-p_s x} y_s\,dx\right) =$$

$$= e^{p_s x}\left\{a_s + \int e^{(p_{s-1} - p_s)x}\left[a_{s-1} + \ldots\left(a_1 + \frac{1}{a_s}\int e^{-p_1 x} f(x)\,dx\right)\ldots\right]dx\right\}. \tag{182}$$

Итак, мы нашли новый метод решения линейных уравнений. Мало того, этот метод применим к решению уравнений с произвольной правой частью $f(x)$, а не только с правой частью в виде показательной функции, как это было в случае § 55. Единственное условие, которое здесь налагается, это возможность выполнения интеграций.

Как пример уравнения, решение которого нельзя получить методами § 55 и 56, рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2. \tag{183}$$

Мы можем его переписать в виде:

$$(p+2)(p+1)y = x^2. \tag{184}$$

Вводя обозначение $(p+1)y = y_2$, приводим (184) к виду $(p+2)y_2 = x^2$. Итак, (183) в диференциальных обозначениях эквивалентно двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{dy_2}{dx} + 2y_2 = x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} + y = y_2.$$

Решение этих уравнений дает:

$$y_2 = a_1 e^{-2x} + e^{-2x}\int x^2 e^{2x}\,dx$$

и

$$y = a_2 e^{-x} + e^{-x} \int y_2 e^{x} \, dx =$$
$$= a_2 e^{-x} - a_1 e^{-2x} + e^{-x} \int e^{-x} \int x^2 e^{2x} \, dx \, dx.$$

Это выражение легко вычислить.

Можно доказать, что s произвольных постоянных a в формуле (182) независимы. Поэтому **формула (182) дает общее решение любого линейного уравнения с постоянными коэфициентами.** Если мы разобьем ее на две части, первую—содержащую члены с a, и вторую:

$$\frac{1}{a_s} e^{p_s x} \int e^{(p_{s-1} - p_s)x} \int \ldots \int e^{(p_1 - p_2)x} \int e^{-p_1 x} f(x) \, (dx)^s, \tag{185}$$

не содержащую a, то сразу становится очевидным, что (185) есть частное решение, о котором мы говорили в теореме II, а остальные члены должны в сумме давать общее решение дополнительного однородного уравнения. Мы получили еще следующий важный результат: наш новый метод решения не требует, чтобы все корни p_j были различными, как это требовалось в теореме V. Поэтому мы можем применять его и в случае кратных корней, в дополнение к теореме V.

Однако мы увидим в § 62, что для этой цели применение алгебры можно несколько уменьшить.

Следует помнить, что и (182) и (185) справедливы независимо от того, будут ли p_j различны или нет. Первая формула дает общее решение (172), вторая—его частное решение. Если p_j различны, то к нашему частному решению (185) можем прибавить члены, которые дает теорема V, и таким образом придем к новой форме общего решения, похожей несколько на (182):

$$y = \sum_{j=1}^{s} a_j e^{p_j x} + \frac{e^{p_s x}}{a_s} \int e^{(p_{s-1} - p_s)} \int \ldots \int e^{-p_1 x} f(x) (dx)^s. \tag{186}$$

Разница между формулами (182) и (186) заключается в том, что последняя справедлива при условии, что все p_j различны, тогда как первая верна всегда.

§ 61. *Операторный метод; применение простейших дробей к решению линейных уравнений.*

Существуют другие алгебраические преобразования функции $F_s(p)$, приводящие—наряду с разложением ее на множители—к решению сложных линейных уравнений. А именно, операторное решение:

$$y = \frac{1}{F_s(p)} f(x) \tag{173}$$

может быть иначе записано в виде*:

$$y=\left(\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_s}{p-p_s}\right)f(x),$$

или в сокращенных обозначениях:

$$y=\sum_{j=1}^{s}\frac{c_j}{p-p_j}f(x). \tag{187}$$

Конечно, если такое разложение справедливо вообще, оно должно быть справедливо и в простейшем случае, т. е. в случае, когда $F_s(p)$ первой степени. Но тогда в указанном разложении будет только один член:

$$y_j=\frac{c_j}{p-p_j}f(x). \tag{188}$$

Диференциальное уравнение, которому оно соответствует, есть

$$\frac{dy_j}{dx}-p_jy_j=c_jf(x), \tag{189}$$

а его решение

$$y_j=e^{p_jx}\left(a_j+c_j\int e^{-p_jx}f(x)\,dx\right). \tag{190}$$

Если мы хотим получить правильное толкование формулы (187), то мы должны заменить в ней каждый член выражением вида (190).

Допустим, что y есть сумма s членов, сходных с (190), и что эта сумма

$$y=\sum_{j=1}^{s}y_j \tag{191}$$

подставлена в левую часть формулы (179). Если (191) есть решение уравнения, то результат этой подстановки должен равняться $f(x)$. Фактически мы получаем:

$$\sum_{j=1}^{s}F_s(p)\,y_j, \tag{192}$$

и перед нами стоит задача — доказать, что это выражение действительно равно $f(x)$. Доказательство проводится без труда с помощью тех сведений, которые у нас уже имеются об операторном методе. Прежде всего мы можем разложить $F_s(p)$ в каждом члене (192) на множители и переписать эти множители в любом порядке (теорема VIII). В частности, в первом члене фактор $p-p_1$ можем поставить на последнее место (т. е.

* В этом параграфе мы предполагаем, что все корни $F_s(p)$ различны. Случай кратных корней — см. § 62.

перед y_s); фактор $p-p_3$ во втором члене — на последнем месте (т. е. перед y_2) и т. д. Пусть это уже сделано, и пусть мы заменили выражения

$$(p-p_1)y_1,\ (p-p_2)y_2, \ldots$$

равными им — согласно (188) — величинами:

$$c_1 f(x),\ c_2'(x), \ldots$$

Тогда выражение (192) обращается в

$$[c_1 a_s (p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_s)+c_2 a_s (p-p_1)(p-p_3)\cdots(p-p_s)+\ldots \\ \ldots + c_s a_s (p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_{s-1})] f(x). \tag{193}$$

Это и будет результатом подстановки (191) в (172).

Если можно показать, что он равен $f(x)$, то (191) действительно будет решением.

Мы знаем, что члены в скобках можно комбинировать так, как если бы они были алгебраическими. Итак, достаточно показать, что скобка, стоящая при $f(x)$, если ее рассматривать как алгебраический многочлен, равна единице.

Для доказательства этого вернемся к формуле (187), в которой мы имели разложение $\frac{1}{F_s(p)}$ на простые дроби.

$$\frac{1}{F_s(p)}=\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_s}{p-p_s} \tag{194}$$

есть правильное алгебраическое равенство. Умножим его почленно на

$$F_s(p)=a_s(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_s).$$

Налево получится единица, а направо—скобка в формуле (193), что и требовалось доказать. Итак, мы получили результат: **разложение $\frac{1}{F_s(p)}$ на простые дроби действительно приводит к решению уравнения (172), если каждый член вида $\frac{c_j}{p-p_j}f(x)$ заменить через y_j из (190). Более того, это решение есть общее решение уравнения (172), так как оно зависит от s произвольных независимых постоянных.**

Легко написать общее решение, к которому приводит этот процесс. Оно будет:

$$y=\sum_{j=1}^{s} a_j e^{p_j x}+\sum_{j=1} c_j e^{p_j x}\int e^{-p_j x} f(x)\,dx. \tag{195}$$

Как и в формуле (186), нужно произвести s отдельных интеграций. Но это не будут повторные интеграции, как в формуле (180). Однако в обоих случаях необходимо знать заранее корни p_j.

Приложение этой теории к частным задачам обычно гораздо проще, чем самый вывод. Рассмотрим, например, уравнение:

$$(p+2)(p+1)y=x^2, \tag{184}$$

которое мы уже решили в § 60.

Здесь

$$F_2(p)=(p+2)\ (p+1)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{F_2(p)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}.$$

Складывая решения уравнений:

$$(p+1)y_1=x^2$$

и

$$(p+2)y_2=-x^2,$$

находим тотчас же общее решение:

$$y=a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}+e^{-x}\int e^x x^2\,dx-e^{-2x}\int e^{2x}x^2\,dx. \tag{196}$$

Вычисление этих интегралов приводит к тому же результату, что и раньше.

В итоге § 60 и 61 можно установить следующую теорему:

Теорема IX. *Если линейное диференциальное уравнение записано в операторной форме $F_s(p)y=f(x)$, то можно или разлагать оператор на множители, или же разложить на простые дроби.*

Формальное решение будет: $y=\dfrac{f(x)}{F_s(p)}$, если только каждую частичную дробь интерпретировать как решение линейного диференциального уравнения, которому она соответствует.

До сих пор мы доказали эту теорему только при условии, что все корни p_j различны, но в § 62 мы избавимся и от этого ограничения.

ЗАДАЧИ.

1. Вычислить до конца решения уравнения (183), найденные в § 60 и 61. Являются ли они тождественными?

2. Вычислить операторные выражения:

$$\text{a) } y=\frac{x}{p-a};\quad \text{b) } y=\frac{x^n}{p-a};\quad \text{c) } y=\frac{\sin nx}{p-a};\quad \text{d) } y=\frac{e^{nx}}{p-a}.$$

3. Решить задачи 6 и 7 § 56 при помощи формулы (186). Получатся ли те же решения, что и раньше?

4. Решить те же задачи при помощи формулы (195). Какой из методов предпочтительнее—основанный на формуле (186), или на формуле (195)?

5. Решить задачу 7 § 58 методами § 60 и 61.

6. Мы видели, что переходный ток в задаче 5 затухает. Поэтому всякий переходный ток, удовлетворяющий граничному условию при $t=-\infty$, должен рав-

няться нулю в каждый конечный момент времени. Если мы определим функцию $f(t)$ в нашей задаче для всех значений времени уравнениями:

$$f(t)=0, \quad t<0,$$
$$f(t)=E_0, \quad t>0,$$

то нам не придется удовлетворять физическим условиям ни в какой другой момент времени, кроме $t=-\infty$.

Поэтому правильное решение задачи получится из частного решения, данного формулой (186) или (195). Найти решение этого типа и посмотреть, нельзя ли проверить результат задачи 5.

7. Решить задачу 8 § 58 при помощи (186) и (195), предполагая, что $f(x)$ определена четырьмя условиями:

$$f(x)=0, \quad x<0, \qquad f(x)=2-x, \quad 1<x<2,$$
$$f(x)=x, \quad 0<x<1, \qquad f(x)=0, \quad x>2.$$

8. Развить операторную теорию решения линейного уравнения типа Коши, проведя рассуждения, параллельные важнейшим результатам этой главы.

§ 62. *Кратные корни.*

И в теореме V и в теореме IX мы предполагали, что все корни уравнения $F_s(p)=0$ различны. Теорема V верна только в этом предположении, но теорема IX верна, как мы сейчас увидим, во всех случаях.

Для определенности предположим, что три корня совпадают, и обозначим их все через p_1. Тогда, как известно, разложение на простые дроби (187) заменится разложением вида:

$$y=\frac{f(x)}{F_s(p)}=\left(\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{(p-p_1)^2}+\frac{c_3}{(p-p_1)^3}+\cdots\right)f(x), \tag{197}$$

в котором незаписанные члены соответствуют корням $p_4, p_5, \ldots, p_s$ и имеют ту же форму, что и раньше. Весьма правдоподобно предположение, что первые три члена представляют собою решения уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(p-p_1)\,y_1&=c_1f(x),\\ (p-p_1)^2y_2&=c_2f(x),\\ (p-p_1)^3y_3&=c_3f(x),\end{aligned}\right\} \tag{198}$$

т. е. уравнений

$$\frac{dy_1}{dx}-p_1y_1=c_2f(x),$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}-2p_1\frac{dy_2}{dx}+p_1^2y_2=c_2f(x),$$

$$\frac{d^3y_3}{dx^3}-3p_1\frac{d^2y_3}{dx^2}+3p_1^2\frac{dy_3}{dx}+p_1^3y_3=c_3f(x).$$

Действительно, это утверждение легко проверить, применяя то же рассуждение, что и в § 61. Подставляя сумму этих решений в (172), получаем:

$$F(p)\,y=F(p)\,y_1+F(p)\,y_2+F(p)\,y_3+\ldots,$$

и формула (172) удовлетворяется, если правая часть этого уравнения равна $f(x)$. Когда мы разложим $F(p)$ на множители и примем во внимание соотношения (198), которым удовлетворяют y_i по определению, мы получим:

$$F(p)y = [a_s c_1(p-p_1)^2(p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_s) + \\ + a_s c_2(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_s) + \\ + a_s c_3(p-p_2)(p-p_3)\cdots(p-p_s) + \cdots] f(x).$$

Это равенство должно быть выполнено. Диференциальное выражение, к которому сводится это уравнение после алгебраического комбинирования членов в скобках, тоже будет справедливо. Но, умножая (197) на $F(p)$, мы находим, что выражение в скобках равно единице. Другими словами, $F\left(\frac{d}{dx}\right)$ действительно равно $f(x)$. Итак, теорема IX верна и в случае кратных корней.

Вычисление выражений (198) легче всего провести при помощи формулы (182), которая, как мы знаем, справедлива независимо от того, имеются кратные корни или нет. Это дает нам:

$$y_1 = a_1 e^{p_1 x} + c_1 e^{p_1 x}\int e^{-p_1 x} f(x)dx,$$

$$y_2 = (a_1 x + a_2)\, e^{p_1 x} + c_2 e^{p_1 x}\iint e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^2,$$

$$y_3 = (a_1 x + a_2 x + a_3)\, e^{p_1 x} + c_3 e^{p_1 x}\iiint e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^3.$$

Складывая эти три выражения для y_1, y_2 и y_3, мы получаем часть решения нашего диференциального уравнения, относящуюся к кратному корню:

$$y = (a_1 x^2 + a_2 x + a_3) e^{p_1 x} + c_1 e^{p_1 x}\int e^{-p_1 x}\; f(x)\; dx + \\ + c_2 e^{p_1 x}\iint e^{-p_1 x} f(x)\;(dx)^2 + c_3 e^{p_1 x}\iiint e^{-p_1 x} f(x)\,(dx)^3\,*.$$

Наибольший интерес представляет член, содержащий произвольные постоянные. Если бы мы слепо применили теорему V, то эта часть имела бы вид:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\, e^{p_1 x},$$

т. е. зависела бы существенно от одной произвольной постоянной, а не от трех.

Правильный же результат есть:

$$(a_1 x^2 + a_2 x + a_3)\, e^{p_1 x},$$

и в нем постоянные независимы.

* Во всех уравнениях a_i — разные постоянные.

В сравнении с формулой (195) члены, содержащие интегралы, тоже изменились в том отношении, что знак интеграла повторяется число раз, равное степени знаменателя простой дроби, которой этот член соответствует.

Теперь мы получили самый общий результат; действительно, решение, получающееся в случае дробей вида

$$\frac{f(x)}{(p-p_1)^r},$$

можно найти, заменяя все p_j в формуле (182) через p_1 и s — через r. При этом сокращаются показатели $p_{r-1}-p_r$, $p_{r-2}-p_{r-1}, \ldots, p_1-p_2$. Таким образом после раскрытия скобок получаем *:

$$y=e^{p_1x}\left(\alpha_r+\alpha_{r-1}\int dx+\alpha_{r-2}\iint(dx)^2+\ldots+\alpha_1\iint\ldots\int(dx)^{r-1}\right)+$$
$$+e^{p_1x}\iint\ldots\int e^{-p_1x}f(x)\,(dx)^r.$$

Последний член имеет тот же вид, что и интегральные члены в формуле (195), с той только разницей, что здесь интеграл r-кратный. Первые члены можно проинтегрировать:

$$e^{p_1x}\left(\alpha_r+\alpha_{r-1}x+\frac{\alpha_{r-2}}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha_1}{(r-1)!}x^{r-1}\right),$$

а это можно записать также в виде:

$$e^{p_1x}\,(\alpha_r+\alpha_{r-1}x+\alpha_{r-2}x^2+\ldots+\alpha_1x^{r-1}),$$

так как α произвольны. Итак, мы получили теоремы:

Теорема X. *Частное решение диференциального уравнения:*

$$(p-p_1)^ry=f(x)$$

есть

$$e^{p_1x}\iint\ldots\int e^{-p_1x}f(x)\,(dx)^r.$$

Теорема XI. *Если p_1 есть r-кратный корень уравнения $F_s(p)=0$, то общее решение соответствующего диференциального уравнения*

$$F_s\left(\frac{d}{dx}\right)y=0$$

содержит член e^{p_1x}, умноженный не на одну произвольную постоянную, а на многочлен $(\alpha_1x^{r-1}+\alpha_2x^{r-2}+\ldots+\alpha_r)$, содержащий r таких постоянных.

---

* Отметим, что α_r, т. е. коэфициент при p_r в многочлене $(p-p_1)^r$, равен единице.

Как пример рассмотрим уравнение

$$(p+1)(p+1)(p+i)y=x, \tag{199}$$

в котором корень -1 входит дважды. Разлагая $\frac{1}{F_s(p)}$ на простые дроби, имеем:

$$\frac{1}{(p+1)^2(p+i)}=\frac{(1+i)^2}{4(p+i)}-\frac{(1+i)^2}{4(p+1)}-\frac{1+i}{2(p+1)^2}.$$

Поэтому, если выражения $\frac{x}{p+1}$, $\frac{x}{(p+1)^2}$ и $\frac{x}{p+i}$ можно истолковать, мы можем найти решение уравнения (199). Но $\frac{x}{p+1}$ есть решение уравнения:

$$\frac{dy}{dx}+y=x,$$

равное:

$$ae^{-x}+e^{-x}\int e^x x\,dx=ae^{-x}+x-1.$$

Аналогично

$$\frac{x}{p+i}=\gamma e^{-ix}+1-ix.$$

Наконец, $\frac{x}{(p+1)^2}$ есть решение уравнения

$$(p+1)(p+1)y=x,$$

т. е. равно

$$(\alpha+\beta x)\,e^{-x}+e^{-x}\iint e^x x\,(dx)^2=(\alpha+\beta x)\,e^{-x}+x-2.$$

Складывая полученные результаты, получим частное решение неоднородного уравнения:

$$\frac{(1+i)^2}{4}(1-ix)-\frac{(1+i)^2}{4}(x-1)-\frac{1+i}{2}(x-2)=1+2i-ix; \tag{200}$$

общим же решением однородного уравнения будет:

$$(\alpha+\beta x)\,e^{-x}+\gamma e^{-ix}. \tag{201}$$

Сумма (200) и (201) есть общее решение нашего уравнения.

Рассматривая этот пример, мы фактически выполнили алгебраические преобразования, приводящие к формуле (201). Но в этом не было необходимости, ибо мы заранее знали в результате наших общих рассуждений, что оно должно было иметь именно такую форму.

§ 63. Исключительный случай решения, зависящего от показательной функции.

Нам остается рассмотреть еще одно исключение, так как мы видели, что теорема IV верна только при $F_s(p)\neq 0$. Но, хотя теорема IV перестает быть верной в этом случае, методы § 50 и 62 остаются применимыми, и уравнение (182) и теоремы IX и X справедливы. С их помощью мы справимся и с этой трудностью.

Как пример рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x},$$

или в операторной форме:

$$(p+1)y=e^{-x}.$$

По формулам (78), (182) или (195) получаем решение уравнения в виде

$$y=ae^{-x}+e^{-x}\int e^{x}\cdot e^{-x}\,dx=ae^{-x}+xe^{-x}.$$

Прежде чем давать разъяснения, рассмотрим еще пример:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=e^{-x},$$

или в символической форме:

$$(p+1)^3y=e^{-x}.$$

По теореме X и XI его решением является:

$$y=(a_1x^2+a_2x+a_3)\,e^{-x}+e^{-x}\iiint(dx)^3=(a_1x^2+a_2x+a)\,e^{-x}+\frac{x^3}{3!}e^{-x}.$$

Эти решения по форме отличаются от тех, которые мы получили бы, если бы p не было корнем дополнительного уравнения, только тем, что в частном решении входит степень x. Изменение — подобное тому, которое происходит в дополнительной части решения, когда корни кратные. Важно отметить, что метод операторов § 60, 61 и 62 применим и тогда, когда метод § 55 отпадает.

ЗАДАЧИ.

1. $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0.$
2. $(p^4-3p^3+3p^2-p)y=e^{2x}.$
3. $(p^3-p^2+p-1)\,r=\cos\theta.$
4. Разобрать типы переходных токов, могущих течь по контуру уравнения (163), если $R^2C=4L$. Начертить кривую, изображающую типичный случай.
5. Решить уравнение (90) § 33.
6. Какая форма функции соответствует в случае уравнения Коши показательному решению § 63?
7. Дополнить разбор задачи в § 61 для случая кратных корней уравнения Коши.
8. Решить уравнение:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x}.$$

9. Решить диференциальное уравнение (199) с помощью формулы (182).

§ 64. Особенность формул (186) и (195).

В § 21 и 25 мы обратили внимание на то, что произвольная постоянная интеграции в неопределенном интеграле, как (51) или (56), может быть записана и в виде предела интеграции, как в (52) и (63).

Этот факт не зависит от природы диференциального уравнения, в результате которого возник интеграл, а вполне общ. Например, постоянная интеграция в формуле (78) решения линейного диференциального уравнения первого порядка может быть записана в виде нижнего предела интеграции, и мы приходим при этом к формуле:

$$v = e^{-\int f_1\, dx} \int_{x_0}^{x} e^{\int f_1\, dx} f_2 dx,$$

в которой x_0 играет ту же роль, что и α в уравнении (78) *. Точно так же можем поставить пределы интеграции в формуле (182) вместо решения вспомогательного уравнения. После этого формула (182) принимает вид:

$$y = \frac{e^{p_s x}}{a_s} \int_{x_1}^{x} e^{(p_{s-1} - p_s)x} \int_{x_2}^{x} \ldots \int_{x_s}^{x} e^{-p_1 x} f(x) (dx)^s, \tag{202}$$

где произвольные постоянные суть $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Это общее решение диференциального уравнения

$$F_s(p)\; y = f(x)$$

столь же верно, как и решение (182), и любое частное решение может быть получено из него подстановкой подходящих значений вместо s произвольных нижних пределов интеграции.

Выражения этого вида обладают замечательным свойством, которое мы выделим в теорему:

Теорема XII. *Если мы дадим одно и то же значение x_0 всем нижним пределам интеграции, то решение удовлетворяет следующим граничным условиям: при $x = x_0$ исчезает не только y, но и его первые $s - 1$ производных.*

Справедливость этой теоремы тотчас же следует, если мы продиференцируем выражение (202) и заменим в каждой производной x через x_0. Но фактическое написание этих уравнений несколько сложно, поэтому мы этого делать не будем.

Вернемся опять к (195), дающему общее решение, полученное процессом разложения на простые дроби. Опять можно утверждать, что произвольные постоянные интеграции могут быть заменены произвольными нижними пределами в интегралах, и мы получим, таким образом, формулу:

$$y = \sum_{j=1}^{s} c_j e^{p_j x} \int_{x_j}^{x} e^{-p_j x} f(x)\, dx. \tag{203}$$

---

* Мы могли бы, если бы захотели, поставить пределы интеграции и в символах интегралов, входящих в показатели; хотя это не принесет вреда, но не принесет и пользы, потому что, если мы вспомним вывод (78), то увидим, что та же самая произвольная постоянная (203) прибавляется к **одному** интегралу и вычитается из **другого**, так что они сократятся.

Опять оказывается справедливой теорема:

Теорема XIII. *Если все нижние пределы интеграции в формуле (203) равны x_0, то для этого значения переменной x исчезает y и его первые $s-1$ производных.*

Проведем доказательство этой теоремы. Для этого нам понадобятся некоторые соотношения между постоянными c_j и p_j, входящими в (195), которые проще всего получить из формулы (194).

Так как степень $F_s(p)$ равна s, то ряд Тэйлора для $\frac{1}{F_s(p)}$ имеет вид:

$$\frac{1}{a_s p^s}+\frac{k}{p^{s+1}}+\frac{l}{p^{s+2}}+\ldots, \tag{204}$$

т. е. все члены с показателями меньше s равны нулю. С другой стороны, разлагая члены правой части формулы (194) по убывающим степеням p и складывая полученные таким образом ряды, мы в сумме должны получить тот же ряд, что и (204). Действительно, как известно, любая функция имеет единственный ряд Тэйлора. Пусть этот процесс уже проделан. Из первого члена получаем равенство

$$\frac{c_1}{p-p_1}=\frac{c_1}{p}+\frac{c_1 p_1}{p^2}+\frac{c_1 p_1^2}{p^3}+\ldots,$$

из второго:

$$\frac{c_2}{p-p_2}=\frac{c_2}{p}+\frac{c_2 p_2}{p^2}+\frac{c_2 p_2^2}{p^3}+\ldots$$

и т. д. Из того, что сумма их всех тождественно равна (204), мы заключаем немедленно, что коэфициенты при всех членах, в которых степень p меньше s, должны обращаться в нуль.

Это и дает искомые соотношения:

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2+\ldots+c_s&=0,\\ c_1p_1+c_2p_2+\ldots+c_sp_s&=0,\\ c_1p_1^2+c_2p_2^2+\ldots+c_sp_s^2&=0,\\ c_1p_1^{s-2}+c_2p_2^{s-2}+\ldots+c_sp_s^{s-2}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Теперь мы в состоянии доказать нашу теорему, т. е. доказать, что при $x=x_0$ исчезает

$$y=\sum y_j=\sum_{j=1}^{s} c_j e^{p_j x}\int_{x_0}^{x} e^{-p_j x} f(x)\,dx \tag{206}$$

и его первые $s-1$ производных.

Обращение в нуль самого y очевидно, так как при $x=x_0$ пределы интеграции равны, и каждый член суммы равен нулю. Для доказательства равенства нулю производных воспользуемся формулами (189) и (191). Из них находим:

$$\frac{dy}{dx}=\sum p_j y_j+f(x)\sum c_j,$$

или при помощи первого из уравнений (205):

$$\frac{dy}{dx}=\sum p_j y_j. \tag{207}$$

Но мы только что заметили, что при $x=x_0$ каждый член y_i в формуле (206) исчезает. Следовательно, и (207) равно нулю.

Продолжая наше рассуждение дальше, мы диференцируем уравнение (207) и получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum p_j\frac{dy_j}{dx}=\sum p_j^2 y_j+f(x)\sum c_j p_j.$$

Последний член опять отпадает в силу второго уравнения (205), а первый обращается в нуль при $x=x_0$, так как все y_j равны нулю.

Очевидно, что можно продолжать этот процесс далее до тех пор, пока это допускают уравнения (205); для третьей производной нам пришлось бы воспользоваться третьим уравнением (205), для четвертой — четвертым и т. д. Мы заключаем отсюда, что при $x=x_0$ обращаются в нуль столько производных, сколько уравнений в системе (205), а это число равно $s-1$. Итак, теорема XIII доказана.

Для иллюстрации рассмотрим снова уравнение (183) и его решение (196). В силу теоремы XIII мы можем добиться обращения в нуль решения и его первой производной при $x=0$, если отбросим члены, содержащие произвольные постоянные, и введем пределы интеграции 0 и x. После этого и после фактического интегрирования мы приходим к решению

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{7}{4}-2e^{-x}+\frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Читатель легко удостоверится, что при $x=0$ обращается в нуль y и его первая производная.

§ 65. Неинтегрируемые функции.

Общая идея — рассматривать диференциальные операторы как алгебраические величины — часто полезна при получении разложения в ряд интегралов, которые нельзя проинтегрировать в конечном виде. Мы иллюстрируем этот общий метод одним или двумя частными примерами. В § 59 мы обратили внимание на то, что ни (176), ни его операторная форма (177) не могут быть проинтегрированы в конечном виде. С другой стороны, в задачах 1 и 2 § 25 читатель нашел, что (176) можно разложить в ряды по восходящим и нисходящим степеням x.

Аналогичный результат можем получить прямо из формулы (177). Если бы p было алгебраической величиной, то $\frac{1}{p-1}$ можно было бы разложить в ряды:

$$\frac{1}{p-1}=-1-p-p^2-p^3-\ldots,$$

или

$$\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots$$

Если мы допустим, что тот же процесс законен и в случае операторов, то отсюда следует в первом случае для y выражение:

$$y=-\frac{1}{x}-p\frac{1}{x}-p^2\frac{1}{x}-\dots,$$

а во втором случае:

$$y=\frac{1}{p}\frac{1}{x}+\frac{1}{p^2}\frac{1}{x}+\frac{1}{p^3}\frac{1}{x}+\dots$$

Члены первого ряда суть последовательные производные от $\frac{1}{x}$, так что получим для y выражение в виде ряда:

$$y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1\cdot 2}{x^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\dots,$$

совпадающее с ответом на задачу 2 § 25 с точностью до произвольного члена ae^x.

Аналогично члены второго ряда суть:

$$\frac{1}{p}\frac{1}{x}=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln x,$$

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{x}=\int\ln\,dx=x(\ln x-1),$$

$$\frac{1}{p^3}\frac{1}{x}=\int x(\ln x-1)\,dx=\frac{x^2}{2!}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right),$$

и вообще

$$\frac{1}{p^{n+1}}\frac{1}{x}=\frac{x^n}{n!}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{n}\right).$$

Складывая их и замечая, что коэфициент при $\ln x$ тождественен с рядом для e^x, получаем в результате:

$$y=e^x\ln x-x-\frac{x^2}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{x^3}{3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\dots$$

Последний результат отличен от того, который мы получили в задаче 1 § 25, хотя оба они выражаются рядами по нисходящим степеням x.

Возможно доказать законность употребления операторных разложений в ряды в этом случае и в очень широком классе задач, но попытка провести это вывела бы нас совершенно из рамок этой книги. Мы обязаны, однако, предупредить читателя, что применение этого метода ограничено, и он может привести к неверным результатам, если его применять в непозволительных случаях. Поэтому им следует пользоваться только, либо убедившись заранее, что результат получится правильный, либо проверив его правильность после.

ЗАДАЧИ.

1. Решить задачу 4 § 58 методом § 64.

2. Решить задачу 2 § 63 при граничных условиях: y и три его первых производных равны нулю при $x=1$.

3. Диференциальное уравнение задачи 8 § 58 имеет операторное решение в форме $\frac{f(x)}{Lp+R}$. Поэтому возможно разложить этот оператор в ряд по восходящим или нисходящим степеням, как в § 64. Проделав это, читатель увидит, что, в то время как один из методов приведет к правильному решению, результат второго окажется ошибочным.

Изобразить различные кривые приближения и истинное решение, к которому они приближаются.

Глава VIII.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 66. Общая идея метода решения систем линейных уравнений.

Операторные методы § 60—65 легко можно так расширить, чтобы они стали применимы к системам линейных уравнений. Для этого мы вспомним основную идею операторного метода, состоящую в том, что символ $\frac{d}{dx}$ рассматривается как алгебраическая величина и на основании этого предположения выводится решение, а затем отыскивается способ интерпретации полученного таким образом операторного результата.

По всей вероятности, общее рассуждение покажется проще, если мы сначала иллюстрируем процесс решения на примере. Имея это в виду, рассмотрим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y_1}{dx^2}+3y_1+\frac{dy_2}{dx}-y_2=x,\\ &-\frac{dy_1}{dx}-9y_1+\frac{dy_2}{dx}+5y_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{208}$$

Если мы заменим дифференциальный символ $\frac{d}{dx}$ через p и будем с ним поступать, как с алгебраическим, то мы придем к эквивалентным операторным уравнениям:

$$\begin{aligned} &(p^2+3)y_1+(p-1)y_2=x,\\ &-(p+9)y_1+(p+5)y_2=0.\end{aligned}$$

Если бы эти уравнения были алгебраическими, и если бы мы пожелали решить их относительно y_1 и y_2, то мы воспользовались бы методом детерминантов и написали бы решения в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\frac{M_1}{\Delta}x,\\ y_2&=\frac{M_2}{\Delta}x,\end{aligned}\right\} \tag{209}$$

где M_1, M_2 и Δ — три следующих детерминанта:

$$\left.\begin{aligned} M_1&=\begin{vmatrix}1 & p-1\\ 0 & p+5\end{vmatrix}=(p+5),\\ M_2&=\begin{vmatrix}p^2+3 & 1\\ -p-9 & 0\end{vmatrix}=(p+9),\\ \Delta&=\begin{vmatrix}p^2+3 & p-1\\ -p-9 & p+5\end{vmatrix}=(p+1)(p+2)(p+3).\end{aligned}\right\} \tag{210}$$

Следующий шаг есть отыскание интерпретации этих результатов. Попробуем применить способ, оказавшийся удовлетворительным в связи с одним линейным уравнением, а именно, способ разложения операторного решения на простые дроби. Находим, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{p+5}{(p+1)(p+2)(p+3)}&=\frac{2}{p+1}+\frac{-3}{p+2}+\frac{1}{p+3},\\ \frac{p+9}{(p+1)(p+2)(p+3)}&=\frac{4}{p+1}+\frac{-7}{p+2}+\frac{3}{p+3},\end{aligned}\right\}\tag{211}$$

после чего наши операторные решения (209) преобразуются в

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\frac{2}{p+1}x-\frac{3}{p+2}x+\frac{1}{p+3}x,\\ y_2&=\frac{4}{p+1}x-\frac{7}{p+2}x+\frac{3}{p+3}x.\end{aligned}\right\}\tag{212}$$

В § 61 мы видели, что если имелось одно уравнение, то было законно интерпретировать операторное выражение вида (188) как решение соответствующего ему диференциального уравнения (189). Это привело нас к общему результату — формуле (190). Естественно испробовать ту же интерпретацию для шести членов уравнений (212). Но теперь мы встречаемся с вопросом, который не возникал у нас в случае обычного уравнения. Так как y_1 и y_2 имеют в формуле (209) тот же знаменатель Δ, то оба уравнения (212) фактически состоят из трех обыкновенных членов:

$$\frac{1}{p+1}x,\quad \frac{1}{p+2}x \quad \text{и} \quad \frac{1}{p+3}x,$$

только с разными числовыми коэфициентами. Допустим, что каждую из этих трех дробей можно истолковать как решение простого уравнения, которому она соответствует. Возникает следующий вопрос: будем ли мы требовать, чтобы $\frac{1}{p+1}x$ было тем же решением в обоих случаях, т. е. и для y_1 и для y_2, или нет? Если мы этого потребуем, то получим три произвольных постоянных — по одной для каждого из трех членов, — но те же три постоянных войдут в оба решения. Если нет, то произвольные постоянные во втором уравнении будут независимы от постоянных первого уравнения.

В первом предположении получим т р и произвольных постоянных, во втором — ш е с т ь. Очевидно, осторожнее допустить второе, так как оно приводит к более общему результату. Если бы оно оказалось неверным, то мы могли бы рассмотреть первое. Находим, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{p+1}x&=a_1e^{-x}+(x-1),\\ \frac{1}{p+2}x&=a_2e^{-2x}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{p+3}x&=a_3e^{-3x}+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right),\end{aligned}$$

где a — произвольные постоянные. Если мы сделаем второе допущение, что постоянные в различных членах совершенно независимы, то придем к решениям:

$$y_1 = 2a_1 e^{-x} - 3a_2 e^{-2x} + a_3 e^{-3x} + \frac{5}{6}x - \frac{49}{36},$$
$$y_2 = 4a_4 e^{-x} - 7a_5 e^{-2x} + 3a_6 e^{-3x} + \frac{3}{2}x - \frac{31}{12}.$$

Мы должны теперь определить, будет ли наше решение *правильным*. Это легче всего сделать прямой подстановкой решений в первоначальное диференциальное уравнение (208). Проделав это, мы увидим, что левая часть первого уравнения сводится к

$$8(a_1 - a_4)e^{-x} - 21(a_2 - a_5)e^{-2x} + 12(a_3 - a_6)e^{-3x} + x, \tag{213}$$

а не к x, а левая часть второго уравнения сводится к

$$-16(a_1 - a_4)e^{-x} + 21(a_2 - a_5)e^{-2x} - 6(a_3 - a_6)e^{-3x}, \tag{214}$$

а не к нулю. Другими словами, *наш операторный метод не приводит нас к правильному решению уравнений*, если мы следуем второй гипотезе и допускаем, что все постоянные интеграции различны. С другой стороны, если $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$ и $a_3 = a_6$, то (213) и (214) сводятся к x и 0, как и должно быть. Итак, правильным решением будет:

$$y_1 = 2a_1 e^{-x} - 3a_2 e^{-2x} + a_3 e^{-3x} + \frac{5}{6}x - \frac{49}{36},$$
$$y_2 = 4a_1 e^{-x} - 7a_2 e^{-2x} + 3a_3 e^{-3x} + \frac{3}{2}x - \frac{31}{12}.$$

Таким образом наш операторный метод дает правильный результат, если каждой простой дроби дается одно и то же толкование вместе с постоянной, где бы эта дробь ни встречалась.

До сих пор, конечно, это утверждение справедливо только для частного примера, который мы рассмотрели, и следующий шаг должен состоять в доказательстве, что оно справедливо в общем случае. Мы можем несколько упростить наши рассуждения, правда, делая довольно длинное отступление, в котором мы введем один искусственный способ, с помощью которого всякую систему уравнений можно свести к другой системе первого порядка, а также обобщим наш принцип наложения.

§ 67. *Второй принцип наложения.*

Рассмотрим две системы уравнений: систему

$$\left.\begin{array}{l}
F_{11}(p)y_1 + F_{12}(p)y_2 + \ldots + F_{1r}(p)y_r = f_1(x), \\
F_{21}(p)y_1 + F_{22}(p)y_2 + \ldots + F_{2r}(p)y_r = f_2(x), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F_{r1}(p)y_1 + F_{r2}(p)y_2 + \ldots + F_{rr}(p)y_r = f_r(x),
\end{array}\right\} \tag{215}$$

в которой F суть произвольные линейные операторы, и другую систему, совпадающую с первой с точностью до функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_r(x)$, которые заменены другой системой функции $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_r(x)$. Другими словами, мы предполагаем, что имеем дело с тождественными системами, но в одном случае ищем решения, «зависящие» от функций f_i, а в другом ищем решения, зависящие от других функций g_i. Допустим, далее, что мы знаем систему решений для каждой из этих систем:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_r = \varphi_r(x),$$

— решения, зависящие от f_i, и

$$y_1 = \psi_1(x), \quad y_2 = \psi_2(x), \ldots, y_r = \psi(x)$$

— решения, зависящие от g_i.

Тогда мы можем доказать следующую теорему:

Теорема XIV. *Решения системы уравнений, зависящие от функций $f_i + g_i$, равны суммам решений, зависящих от f_i и от g_i в отдельности.*

Чтобы доказать это, заметим, что при подстановке выражений:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 + \psi_1, \\ y_2 &= \varphi_2 + \psi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= \varphi_r + \psi_r \end{aligned}$$

в левую часть одного из уравнений (215), например первого, мы можем переставить порядок членов и получить:

$$[F_{11}(p)\varphi_1 + F_{12}(p)\varphi_2 + \ldots + F_{1r}(p)\varphi_r] + [F_{11}(p)\psi_1 + F_{12}(p)\psi_2 + \ldots + F_{1r}(p)\psi_r].$$

Первая скобка равна по определению $f_1(x)$, а вторая $g_1(x)$. Аналогично, подставляя те же выражения во второе уравнение (215), мы получили бы $f_2 + g_2$ и т. д. Это и доказывает нашу теорему.

Далее, так как теорема XIV справедлива для двух систем функций f_1 и g_1, то она справедлива и для любого числа.

В частности, она справедлива для систем

$$\begin{array}{ccccc} f_1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & f_2, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 0, & f_3, & \ldots, & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & f_r; \end{array}$$

отсюда заключаем:

Теорема XV. *Система (215) может быть решена путем сложения решений следующих r систем уравнений: 1) системы, в которой все f кроме f_1 заменены нулями, 2) системы, в которой все f кроме f_2 заменены нулями, ... r системы, в которой все f кроме f_r заменены нулями.*

Эта теорема позволяет несколько упростить нашу общую теорию, ибо все, что мы докажем для системы, в которой все f кроме одной заменены нулями, тотчас же можно применить к более общему случаю.

§ 68. Соотношение между одним линейным уравнением и системой уравнений.

Пусть в диференциальном уравнении (183) введено обозначение

$$\frac{dy}{dx}=y_1.$$

Тогда уравнение (183) тождественно системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}+3y_1+2y=x^3,\\ y_1-\frac{dy}{dx}=0,\end{aligned}\right\} \tag{216}$$

и нетрудно доказать, что если к этой системе уравнений применить метод § 66, то он приведет к тому же решению, что и решение § 60.

Аналогично, вводя обозначения

$$y_1=\frac{dy}{dx},\quad y_2=\frac{d^2y}{dx^2},$$

можно свести общее линейное уравнение (146) к системе s уравнений:

$$\left.\begin{aligned}a_s\frac{yd_s}{dx}+a_{s-1}y_{s-1}+\ldots+a_1y_1+a_0y=f(x),\\ y_{s-1}-\frac{dy_{s-2}}{dx}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_1-\frac{dy}{dx}=0.\end{aligned}\right\} \tag{217}$$

Мы увидим, применяя метод предыдущего параграфа, что эта система и исходное уравнение (146) имеют одно и то же решение.

Уравнения (216) и (217) замечательны тем, что ни одно из них не содержит производных порядка выше первого. Другими словами, обозначая производные другими символами, мы достигли того, что линейное уравнение любого порядка заменилось системой линейных уравнений первого порядка.

Таким же способом мы можем свести с и с т е м у уравнений к уравнениям первого порядка. Так, например, введение символа y_3 вместо $\frac{dy_1}{dx}$ сводит систему двух уравнений (208), одно из которых второго порядка, к эквивалентной системе трех уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_3}{dx}+\frac{dy_2}{dx}-y_2+3y_1=x,$$

$$y_3-\frac{dy_1}{dx}=0,$$

$$-y_3+\frac{dy_2}{dx}+5y_2-9y_1=0.$$

Итак, всякое линейное уравнение или система уравнений любого порядка всегда сводится к системе уравнений первого порядка.

С точки зрения практического решения диференциальных уравнений мы ничего не выиграли этим преобразованием. Обычно одинаково легко решить задачи в той и в другой форме; и даже в тех случаях, когда один метод выгоднее другого, предпочтительнее не делать указанного преобразования. Но с теоретической точки зрения этот способ очень полезен, так как благодаря ему мы можем сказать, что то, что верно для системы уравнений первого порядка, будет верно и для уравнений высшего порядка, из которых она получилась.

§ 69. Доказательство правильности общего операторного решения.

Мы установили, что если мы можем решить систему уравнений *

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}p+a'_{11})y_1+(a_{12}p+a'_{12})y_2+\ldots+(a_{1r}p+a'_{1r})y_r=f(x),\\ &(a_{21}p+a'_{21})y_1+(a_{22}p+a'_{22})y_2+\ldots+(a_{2r}p+a'_{2r})y_r=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(a_{r1}p+a'_{r1})y_1+(a_{r2}p+a'_{r2})y_2+\ldots+(a_{rr}p+a'_{rr})y_r=0 \end{aligned}\right\} \quad (218)$$

первого порядка, в которые входит только одна функция f, то можем решить и систему (215). Кроме того, у нас есть основание предполагать после рассмотрения примера § 66, что решение можно найти разложением на простые дроби, если только оператору вида $\dfrac{1}{p-p_j}f(x)$ будет всегда придаваться один и тот же смысл, где бы мы его ни встретили. Мы увидим, что это действительно верно.

Решим систему (218) алгебраически с помощью детерминантов. Мы получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\frac{M_1}{\Delta}f,\\ y_2&=\frac{M_2}{\Delta}f,\\ &\ldots\ldots\\ y_r&=\frac{M_r}{\Delta}f, \end{aligned}\right\} \quad (219)$$

где Δ есть детерминант системы (218), а $M_1, M_2, \ldots, M_r$ его миноры, соответствующие элементам первой строки. Предположим, что Δ будет степени s относительно p **, и что все его корни $p_1, p_2, \ldots, p_s$ различны ***. Наконец, допустим, что $M_1, M_2, \ldots, M_r$ все будут низшей степени, чем Δ ****.

---

* Некоторые a и a' могут быть нулями.

** Если a и a' таковы, что старшие степени p сокращаются, то $s<r$. Итак, во всяком случае, $s\leqslant r$.

*** Это предположение делается только для упрощения рассуждения. Изменения, которые произойдут в случае кратных корней, совершенно аналогичны тем, с которыми мы уже встретились в гл. VII.

**** Если Δ степени r, то это, очевидно, так и будет. Если $s<r$, то может случиться, что один или несколько из миноров M будут степени большей или равной степени Δ. В этом случае разложение на простые дроби $\dfrac{M}{\Delta}$ начнется с по-

В этих предположениях каждое отношение $\frac{M_k}{\Delta}$ может быть разложено в виде:

$$\frac{M_k}{\Delta}=\frac{c_{1k}}{p-p_1}+\frac{c_{2k}}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_{sk}}{p-p_s}, \tag{220}$$

причем следует помнить, что операторы $\frac{1}{p-p_1}, \frac{1}{p-p_2}, \ldots; \frac{1}{p-p_s}$ одни и те же в каждом таком разложении, хотя c, на которые они умножаются, могут быть различны для разных M. Подставив эти разложения в (219), получим:

$$\begin{aligned} y_1&=c_{11}\frac{f}{p-p_1}+c_{21}\frac{f}{p-p_2}+\ldots+c_{s1}\frac{f}{p-p_s},\\ y_2&=c_{12}\frac{f}{p-p_1}+c_{22}\frac{f}{p-p_2}+\ldots+c_{s2}\frac{f}{p-p_s},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_r&=c_{1r}\frac{f}{p-p_1}+c_{2r}\frac{f}{p-p_2}+\ldots+c_{sr}\frac{f}{p-p_s}. \end{aligned}$$

Дадим выражению $\sum\frac{f}{p-p_1}$ одну и ту же интерпретацию в каждом из этих уравнений, т. е. допустим, что наши решения будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\sum_{j=1}^{s}c_{j1}\psi_j(x),\\ y_2&=\sum_{j=1}^{s}c_{j2}\psi_j(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_r&=\sum_{j=1}^{s}c_{jr}\psi_j(x), \end{aligned}\right\} \tag{221}$$

где ψ_j находится решением уравнения:

$$\frac{d\psi_j}{dx}-p_j\psi_j=f(x); \tag{222}$$

оно будет равно

$$\psi_j=a_je^{p_jx}+e^{p_jx}\int_0^x e^{-p_jx}\,f(x)\,dx. \tag{223}$$

Докажем, что эти предполагаемые решения действительно удовлетворяют уравнению (218) прямой подстановкой их в эти уравнения. Для этого

стоянного члена или с положительной степени p. Мы могли бы видоизменить наше доказательство, чтобы включить и эти случаи. Но лучше сделать доказательство понятнее, даже пожертвовав некоторой общностью. Читатель найдет некоторые уравнения этого вида среди задач в конце главы. Δ в задаче 6 не содержит p.

нам понадобятся значения $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_r}{dx}$. Из формулы (221) мы видим, что все эти производные имеют одну и ту же форму:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk} \frac{d\psi_j}{dx},$$

или иначе, если заменим $\frac{d\psi_j}{dx}$ через $p_j\psi_j + f(x)$, взятое из (222):

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk} p_j \psi_j + f(x) \sum_{j=1}^{s} c_{jk}. \tag{224}$$

Наконец, из формул (221) и (224) получаем:

$$a\frac{dy_k}{dx} + a'y_k = \sum_{j=1}^{s} (ap_j + a')\, c_{jk} \psi_j + f(x) \sum_{j=1}^{s} a\, c_{jk}.$$

Вернемся теперь к первому из уравнений (218) и заметим, что всякий член его левой части имеет именно такую форму. Поэтому, при подстановке наших предполагаемых решений в это готовое уравнение получим:

$$\left.\begin{aligned} L_1 = \sum_{k=1}^{r}\left(a_{1k}\frac{dy_k}{dx} + a'_{1k}\, y_k\right) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (a_{1k}p_j + a'_{1k})\, c_{jk}\psi_j + \\ + f(x)\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{1k}c_{jk}. \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

Аналогично, подставляя предполагаемое решение в левую часть второго уравнения (218), получаем:

$$\left.\begin{aligned} L_2 = \sum_{k=1}^{r}\left(a_{2k}\frac{dy_k}{dx} + a'_{2k}y_k\right) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (a_{2k}p_j + a_{2k})\, c_{jk}\psi_j + \\ + f(x)\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{2k}c_{jk}. \end{aligned}\right\} \tag{226}$$

Остальные уравнения могут быть представлены в таком же виде. Величины $L_1, L_2, \ldots$ суть значения левых частей, получаемые при подстановке предполагаемых решений. Если эти решения правильны, то L_1 должно равняться $f(x)$, а L_2 и все остальные L должны равняться нулю. Итак, перед нами стоит задача — показать, что действительно L имеют указанные значения. Для этого обратимся к нашему детерминанту

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}p + a'_{11} & \ldots & a_{12}p + a'_{12} & \ldots & a_{1r}p + a'_{1r} \\ a_{21}p + a'_{21} & \ldots & a_{22}p + a'_{22} & \ldots & a_{2r}p + a'_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1}p + a'_{r1} & \ldots & a_{r2}p + a'_{r2} & \ldots & a_{rr}p + a'_{rr} \end{vmatrix}$$

и вспомним, что все M суть миноры элементов первой строки. Поэтому, если мы разложим Δ по элементам этой строки, то получим:

$$\Delta = (a_{11}p + a'_{11}) M_1 + (a_{12}p + a'_{12}) M_2 + \ldots,$$

или

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{M_k}{\Delta} (a_{1k}p + a'_{1k}) = 1. \qquad (227)$$

Из общей теории детерминантов известно, что, если умножить эти миноры $M_1, M_2, \ldots, M_r$ на элементы какой-нибудь другой строки, то сумма полученных произведений будет равна нулю. Итак, из элементов второй строки получаем:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{M_k}{\Delta} (a_{2k}p + a'_{2k}) = 0. \qquad (228)$$

Аналогичные уравнения могут быть написаны и для всех остальных строк. Заменим теперь $\frac{M_k}{\Delta}$ в уравнениях (227) и (228) их выражениями (220). В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{p-p_1}\sum_{k=1}^{r} c_{1k}(a_{1k}p + a'_{1k}) + \frac{1}{p-p_2}\sum_{k=1}^{r} c_{2k}(a_{1k}p + a'_{1k}) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{1}{p-p_s}\sum_{k=1}^{r} c_{sk}(a_{1k}p + a'_{1k}) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (229)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{p-p_1}\sum_{k=1}^{r} c_{1k}(a_{2k}p + a'_{2k}) + \frac{1}{p-p_2}\sum_{k=1}^{r} c_{2k}(a_{2k}p + a'_{2k}) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{1}{p-p_s}\sum_{k=1}^{r} c_{sk}(a_{2k}p + a'_{2k}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (230)$$

Конечно, для всякой другой строки получим уравнение, аналогичное уравнению (230).

Все уравнения, начиная с (220) и до (230), справедливы для всякого значения p. Умножим уравнение (229) на $p-p_1$ и затем будем стремить p к p_1. Очевидно, что все члены кроме первого исчезнут, так как они все содержат множитель $p-p_1$. Поэтому в пределе при $p=p_1$ получим:

$$\sum_{k=1} c_{1k}(a_{1k}p_1 + a'_{1k}) = 0.$$

Далее, умножаем (229) на $p-p_2$ и стремим p к p_2. Получим:

$$\sum_{k=1}^{r} c_{2k}(a_{1k}p_2 + a'_{1k}) = 0.$$

Вообще, умножая (229) на $p - p_j$, и устремляя p к p_j, получаем:

$$\sum_{k=1}^{r} c_{jk}(a_{1k}p_j + a'_{1k}) = 0.$$

Поступая таким же образом с уравнением (230), можем заключить, что

$$\sum_{k=1}^{r} c_{jk}(a_{2k}p_j + a'_{2k}) = 0.$$

Взглянув на левые части (225) и (226), мы видим, что суммирование по k в них как раз такого типа. Поэтому эти члены пропадают, а остается:

$$L_1 = f(x)\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{1k} c_{jk} \tag{231}$$

и

$$L_2 = f(x)\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{2k} c_{jk}. \tag{232}$$

Очевидно, другие L имеют тот же вид.

Вернемся теперь опять к уравнению (229) и устремим p к бесконечности. Так как каждый член имеет вид $c\,\dfrac{ap + a'}{p - p_j}$, то в пределе все они сведутся к членам вида ac. Итак, (229) переходит в

$$\sum_{k=1}^{r} a_{1k}c_{1k} + \sum_{k=1}^{r} a_{1k}c_{2k} + \ldots + \sum_{k=1}^{r} a_{1k}c_{sk} = 1,$$

или

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} a_{1k}c_{jk} = 1. \tag{233}$$

Поступая таким же образом с уравнением (230), получаем:

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} a_{2k}c_{jk} = 0, \tag{234}$$

а остальные уравнения этого типа получатся из других строк детерминанта Δ. Заметим, что суммы в правых частях (231) и (232) те же самые, что в (233) и (234). Отсюда:

$$L_1 = f(x),$$
$$L_2 = 0.$$

Другими словами, наши предполагаемые решения действительно обращаю (218) в тождество. Мы можем, таким образом, высказать следующую теорему:

Теорема XVI. *Операторное решение системы линейных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами законно разлагать на простые дроби, если только каждой простой дроби* $\frac{1}{p-p_j}f($ [illegible] $)$*ать одну и ту же интерпретацию, включая и постоянную интеграции, где бы она ни встретилась.*

Конечно, наше доказательство этой теоремы годится только при условии, что корни Δ различны и все миноры M имеют степень меньше Δ. Сама теорема, однако, верна и тогда, когда эти условия нарушаются.

§ 70. Решение системы диференциальных уравнений при граничном условии, что все переменные обращаются в нуль в одной и той же точке.

Особенный интерес представляет одна система произвольных постоянных в уравнении (223), а именно, система, в которой все a_j равны нулю. Если возьмем эту систему значений, то каждое ϕ исчезает при $x=0$, следовательно, в силу формулы (221) в этой точке равны нулю все y.

Это свойство совершенно аналогично свойству, изученному в § 64 для случая одного уравнения порядка выше первого. Действительно, результат § 64 немедленно следует из нашего теперешнего вывода, потому что, как мы уже видели в § 68, одно уравнение высшего порядка может быть сведено к системе уравнений первого порядка введением новых переменных вместо последовательных производных. Если мы это проделаем, то из формулы (221) будет следовать, что не только само y, но и все его производные до порядка $s-1$, исчезают при $x=0$.

Рассуждения этого параграфа приложимы также и к любой системе линейных уравнений любого порядка, ибо, как мы видели, такую систему можно свести к новой системе уравнений первого порядка. Для этого достаточно ввести новые буквы для обозначения всех производных **кроме производной высшего порядка**. Тогда утверждение, что в новой системе все y обращаются в нуль при $x=0$, эквивалентно утверждению, что в исходной системе при $x=0$ обращаются в нуль все переменные и все их производные до высшего порядка* (исключительно).

§ 71. Частный случай: $f(x)=Be^{px}$.

Формула (221) имеет два частных случая, получивших особые названия и часто встречающихся в технической литературе. В этом параграфе мы рассмотрим более общий из этих двух случаев, известный под названием **обобщенной теоремы Хевисайда о разложении**, а в следующем — более специальный случай, называемый **теоремой Хевисайда**.

* Этот результат верен всегда в предположениях § 69. Он верен, если даже не все корни Δ различны. Но, в противоположность теореме XV, он не всегда верен при нарушении второго условия, т. е. в случае, когда один или несколько миноров M имеют степень выше Δ. В этих случаях разложения на простые дроби могут иметь члены, не требующие интеграции и не обращающиеся в нуль при $x=0$. Среди задач в конце § 74 есть несколько примеров этого рода.

Если предположим, что функция $f(x)$ в правой части уравнений (218) есть показательная функция Be^{px}, и потребуем, чтобы наше решение удовлетворяло особой системе граничных условий § 70, то (223) можно тотчас же проинтегрировать, и мы получаем:

$$\phi_j = B\frac{e^{px} - e^{p_j x}}{p - p_j}.$$

Подставим это выражение в (221) и разобьем полученный результат на две суммы, одну — содержащую все члены, в которые входит e^{px}, и другую — с оставшимися членами. В результате получим:

$$v_k = Be^{px}\sum_{j=1}^{s}\frac{c_{jk}}{p - p_j} - B\sum_{j=1}^{s}\frac{c_{jk}e^{p_j x}}{p - p_j}. \qquad (235)$$

Вернемся теперь к формуле (220) и заметим, что сумма в первом члене (235) как раз равна $\frac{M_k(p)}{\Delta(p)}$, где p — число, входящее в показатель e^{px}. Вводя это выражение в формулу (235), получим окончательную формулу:

$$v_k = B\frac{M_k(p)}{\Delta(p)}e^{px} - B\sum_{j=1}^{s}\frac{c_{jk}e^{p_j x}}{p - p_j}. \qquad (236)$$

Этот результат чрезвычайно прост: не только член $\frac{M_k}{\Delta}$ получается простой заменой д и ф е р е н ц и а л ь н о г о с и м в о л а p в (218) ч и с л о м p и решением системы уравнений так, как будто бы она была алгебраической, а не диференциальной, но даже второй член (236) получается разложением $\frac{M_k}{\Delta}$ на ряд простых дробей и умножением каждой из этих простых дробей на показательную функцию $e^{p_j x}$.

Другими словами, если функция f в правой части уравнений (218) показательная и если все переменные в искомом решении обращаются в нуль при $x = 0$, то решение может быть получено чисто алгебраическим путем, б е з в с я к о г о п р и м е н е н и я а н а л и з а.

Предположим, например, что правая часть (208) есть $\cos x$, а не x. Так как это есть действительная часть от e^{ix}, то мы можем получить наше решение из решения для этой показательной функции, выделив его действительную часть. Для первых членов y_1 и y_2 полагаем $p = i$ в (210), так как i есть коэфициент при x в показателе для e^{px}. Это дает нам члены:

$$\frac{M_1}{\Delta}e^{ix} = \left(\frac{1}{10} - \frac{i}{2}\right)e^{ix},$$

$$\frac{M_2}{\Delta}e^{ix} = \left(\frac{1}{10} - \frac{9i}{10}\right)e^{ix}.$$

Для получения вторых членов (236) обратимся к уравнению (211), которое изменяем, вводя частное значение $p = i$ и умножая каждый член на показательный член, которому он соответствует. Это дает нам:

$$\frac{2e^{-x}}{i+1}+\frac{-3e^{-2x}}{i+2}+\frac{e^{-3x}}{i+3},$$
$$\frac{4e^{-x}}{i+1}+\frac{-7e^{-2x}}{i+2}+\frac{3e^{-3x}}{i+3}.$$

Если соберем полученные результаты и отделим действительные части, то получим искомые решения:

$$y_1=\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-e^{-x}+\frac{6}{5}e^{-2x}-\frac{3}{10}e^{-3x},$$
$$y_2=\frac{1}{10}\cos x+\frac{9}{10}\sin x-2e^{-x}+\frac{14}{5}e^{-2x}-\frac{9}{10}e^{-3x}.$$

Практическая важность формулы (236) объясняется тем, что задачи электричества часто приводят к граничным условиям § 70. Поэтому, если электродвижущая сила имеет вид $\cos pt$ или $\sin pt$, что часто случается, то мы можем получить частное решение, удовлетворяющее граничным условиям, простым выполнением некоторого числа элементарных алгебраических действий. Интеграций никаких не требуется.

§ 72. Теорема Хевисайда.

Результат, который обычно называется в учебниках электричества теоремой Хевисайда, совершенно аналогичен тому, который мы получили в § 71. Но в этом случае функция $f(x)$ есть постоянная E, а не показательная функция Be^{px}. Т. е. этот результат соответствует в теории электричества случаю постоянной электродвижущей силы, приложенной в некоторый момент, а не случаю переменной электродвижущей силы.

Постоянную E мы можем тем не менее записать в виде Ee^{0x}, как мы это уже не раз делали. Так как в рассуждении § 71 мы не предполагали p отличным от нуля, то решение нашей задачи может быть получено из формулы (236) заменой p через нуль. В результате получаем:

$$y_k=E\frac{M_k(0)}{\Delta(0)}+E\sum_{j=1}^{s}\frac{c_{jk}e^{p_jx}}{p_j}. \tag{237}$$

Если нам нужно, например, решить уравнение (208) с заменой x в правой части на 1 и при граничных условиях: y_1, y_2 и первая производная от y_1 равны нулю при $x=0$, то мы получим первые члены формулы (237) заменой p в $\frac{M_1}{\Delta}$ и $\frac{M_2}{\Delta}$ нулем. Это даст нам $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{2}$.

Для получения вторых членов (237) полагаем $p=0$ в формуле (211) и умножаем каждый член на соответствующее значение e^{p_jx}. Окончательный результат будет:

$$y_1=\frac{5}{6}-2e^{-x}+\frac{3}{2}e^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-3x},$$
$$y_2=\frac{3}{2}-4e^{-x}+\frac{7}{2}e^{-2x}-e^{-3x}$$

§ 73. Переходное и установившееся состояние в электрической сети.

Применение законов § 17 к контуру, состоящему более чем из одного звена, приводит к системе линейных диференциальных уравнений. Один пример такого рода был дан в § 17. Другой мы рассмотрим сейчас.

Черт. 41.

Диференциальные уравнения, управляющие током в сети, изображенной на черт. 41, в терминах величин будут:

$$L\frac{d^2x_1}{dt^2}+R\frac{dx_1}{dt}+\frac{1}{C}(x_1-x_2)=E(t),$$
$$\frac{1}{C}(x_2-x_1)+R'\frac{dx_2}{dt}=0.$$

В операторной форме те же уравнения будут:

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)x_1-\frac{x_2}{C}=E,$$
$$\frac{x_1}{C}+\left(R'p+\frac{1}{C}\right)x_2=0.$$

Их «операторное» решение есть:

$$x_1=\frac{\left(R'p+\frac{1}{C}\right)E}{\Delta(p)},$$
$$x_2=\frac{E}{C\Delta(p)},$$

где

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} Lp^2+Rp+\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & R'p+\frac{1}{C} \end{vmatrix}.$$

Для силы тока решения будут:

$$I_1=\frac{dx_1}{dt}=\frac{p\left(R'p+\frac{1}{C}\right)E}{\Delta(p)},$$
$$I_2=\frac{dx_2}{dt}=\frac{pR}{C\Delta(p)}.$$

Предположим теперь, что контур находится в бездействии до момента времени $t=0$, а затем к нему приложена электродвижущая сила $E(t)=E_0\cos nt$. Рассуждение, аналогичное § 57, дает нам, что при $t=0$ x_1, x_2 и $\frac{dx_1}{dt}$ обращаются в нуль. Мы получили как раз граничные условия § 70; если заменим $\cos nt$ через e^{int}, то можно воспользоваться результатами § 71. Но для этого знать корни $\Delta(p)$.

Находим без труда, что

$$\Delta(p)=LR'p^3+\left(RR'+\frac{L}{C}\right)p^2+\frac{R'+R}{C}p,$$

откуда корни равны соответственно:

$$\left.\begin{aligned} p_1&=0,\\ p_2&=\frac{-RCR'-L+\sqrt{(RCR'+L)^2-4CLR'(R'+R)}}{2CLR'},\\ p_3&=\frac{-RCR'-L-\sqrt{(RCR'+L)^2-4CLR'(R'+R)}}{2CRL'}.\end{aligned}\right\}\quad(238)$$

Теперь мы можем применить общую формулу (236), которая дает нам:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=E_0\frac{R'in+\frac{1}{C}}{\Delta(in)}e^{int}-E_0\sum_{j=1}^{3}\frac{c_{j1}}{in-p_j}e^{pjx}\\ x_2&=E_0\frac{1}{C\Delta(in)}e^{int}-E_0\sum_{j=1}^{3}\frac{c_{j2}}{in-p_j}e^{pjx}\end{aligned}\right\}\quad(239)$$

причем коэфициенты c_{j1} и c_{j2} находятся разложением

$$\frac{R'p+\frac{1}{C}}{\Delta(p)}\ \text{и}\ \frac{1}{C\Delta(p)}$$

на простые дроби.

Так как они имеют довольно сложный вид и так как нам неинтересны их точные значения, то оставим их в нераскрытом виде.

Наконец, диференцируя выражения (239), находим для силы тока *:

$$\left.\begin{aligned} I_1&=E_0\frac{in\left(R'in+\frac{1}{C}\right)}{\Delta(in)}e^{int}-E_0\frac{c_{21}p_2}{in-p_2}e^{p_2t}-E_0\frac{c_{31}p_3}{in-p_3}e^{p_3t}\\ I_2&=E_0\frac{in}{C\Delta(in)}e^{int}-E_0\frac{c_{22}p_2}{in-p_2}e^{p_2t}-E_0\frac{c_{32}p_3}{in-p_3}e^{p_3t}\end{aligned}\right\}\quad(240)$$

Вернемся теперь к формуле (238) и заметим, что p_2 и p_3, подобно эквивалентным выражениям (164), могут быть либо действительны и отрицательны, либо комплексны с отрицательной действительной частью. В обоих случаях с течением времени e^{p_2t} и e^{p_3t} в (240) уменьшаются и, наконец, совсем исчезают. Следовательно, это члены «переходные». С другой стороны, член e^{int} не исчезает с течением времени. Это — установившееся состояние, в котором остается ток. Другими словами, первый член обобщенного разложения Хевисайда дает установившееся решение задачи; остальные члены переходные.

* Члены, зависящие от p_1, исчезли, так как производная от $e^{p_1t}=e^0=1$ равна нулю.

Имея эту интерпретацию, мы тотчас же можем написать целый ряд результатов, параллельных результатам § 57 и 58, но относящихся к цепи, состоящей из любого числа звеньев, а не к простому контуру:

a) Корни уравнения $\Delta(p) = 0$ дают нам собственные частоты цепи вместе с показательными факторами, производящими затухание колебания.

b) Всякий ток имеет собственные частоты те же, что и всякий другой.

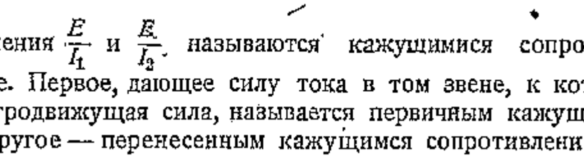
c) Отношения $\frac{E}{I_1}$ и $\frac{E}{I_2}$ называются кажущимися сопротивлениями, как и прежде. Первое, дающее силу тока в том звене, к которому приложена электродвижущая сила, называется первичным кажущимся сопротивлением, другое — перенесенным кажущимся сопротивлением.

d) Действительные части кажущихся сопротивлений называются первичным и переносным активными сопротивлениями, а мнимые части — первичным и переносным реактивными сопротивлениями.

§ 74. Решение задач на установившееся состояние.

Существует одна постоянная трудность во всей теории линейных уравнений: требуется определить корни $p_1, p_2, \ldots, p_r$ алгебраического уравнения.

Если уравнения легко разрешимы, то затруднений не возникает, но в обычных физических задачах многие уравнения далеко не просты.



Черт. 42.

В действительности этот легкий тип уравнений встречается настолько редко, что трудно отыскать достаточно задач и примеров для иллюстрации нашего текста.

Один из типов задач, однако, не страдает от этих трудностей. Это тот ряд задач, в котором нас интересует только частное решение, дающее устойчивое состояние. Мы видели, что эти задачи требуют для своего решения только знания детерминанта Δ и того минора M, который нас интересует. Действительно, в силу формулы (236) и нашей дальнейшей интерпретации § 73

$$F_0 = \frac{M(in)}{\Delta(in)}\, e^{int}$$

есть решение установившегося состояния, вынуждаемого силой $E_0 e^{int}$. Так как этот процесс не требует решения уравнения $\Delta(p) = 0$, то часто легко найти установившиеся части решений, даже если мы не в состоянии определить переходные члены. Рассмотрим, например, цепь на черт. 42.

Ее диференциальные уравнения суть:

$$\begin{aligned}(Lp+R)I_1-RI_2&=E,\\ -RI_1+(Lp+2R)I_2-RI_3&=0,\\ -RI_2+(Lp+2R)I_3-RI_4&=0,\\ -RI_3+(Lp+2R)I_4&=0.\end{aligned}$$

Пусть мы ищем ток, который будет течь в последнем звене цепи (после исчезновения переходных членов) при электродвижущей силе

$$E_0\cos nt.$$

Напишем:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} Lp+R & -R & 0 & 0\\ -R & Lp+2R & -R & 0\\ 0 & -R & Lp+2R & -R\\ 0 & 0 & -R & Lp+2R\end{vmatrix}=$$

$$=L^4p^4+7L^3Rp^3+15L^2R^2p^2+10LR^3p+R^4,$$

$$M_4(p)=-\begin{vmatrix} -R & Lp+2R & -R\\ 0 & -R & Lp+2R\\ 0 & 0 & -R\end{vmatrix}=R^3.$$

Итак, I_4 будет равняться действительной части выражения:

$$\frac{E_0R^3e^{int}}{(L^4n^4-15L^2R^2n^2+R^4)-i(7L^3Rn^3-10LR^3n)};$$

именно:

$$I_4=\frac{E_0R^3(L^4n^4-15L^2R^2n^2+R^4)}{(L^4n^4-15L^2R^2n^2+R^4)^2+(7L^3Rn^3-10LR^3n)^2}\cos nt-$$

$$-\frac{E_0R^3(7L^3Rn^3-10LR^3n)}{(L^4n^4-15L^2R^2n^2+R^4)^2+(7L^3Rn^3-10LR^3n)^2}\sin nt.$$

Это мы могли легко отыскать. Найти же переходное решение нашей задачи очень трудно, так как это требует решения кубического уравнения.

ЗАДАЧИ.

1. Решить систему уравнений:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y+4z=1,$
$\dfrac{dy}{dx}+3\dfrac{dz}{dx}-z=0;$

b) $\dfrac{d^2I_1}{dt^2}+I_1-\dfrac{dI_2}{dt}-I_2=\cos nt;$
$2\dfrac{dI_1}{dt}+\dfrac{dI_2}{dt}+I_2=0;$

c) $\dfrac{dy}{dx}+2y-3z=x,$
$y-\dfrac{d^2z}{dx^2}=0;$

d) $(p+3)y_1-(p+2)y_2=f_1(x),$
$(p+1)y_1-(p+10)y_2=f_2(x).$

2. Решить систему:

$(p^2-4)y_1+(p^2+1)y_2=f_1(x),$
$(p^3+6)y_1+(p^3+5p)y_2=f_2(x).$

(Так как Δ меньшей степени, чем M_1 и M_2, то необходимо делить наши дроби $\dfrac{M_1}{\Delta}$ и $\dfrac{M_2}{\Delta}$ до тех пор, пока остаток будет степени ниже Δ. Последний разбиваем на простые дроби.)

3. Решить:

$(p+1)y_1+(p+3)y_2=f_1(x),$
$py_1+(p+2)y_2=f_2(x).$

(Замечая, что $y_1+y_2=f_1-f_2$, и подставляя это выражение в диференциальное уравнение, можно сразу получить решение. Однако имеет смысл провести и формальный операторный процесс.)

Глава IX.

ДРУГИЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 75. Предварительное замечание.

Мы уже закончили тот материал, который можно рассматривать как законное поле для элементарного учебника диференциальных уравнений. Действительно, нелинейные уравнения высших порядков или линейные, но с переменными коэфициентами, обычно требуют специальной техники, которая составляет уже более высокую главу теории. Тем не менее, некоторые понятия так часто встречаются в технической литературе, что для читателя, вероятно, будет ценным введение к ним. Целью этой главы и является такое в в е д е н и е, а не рабочие навыки.

§ 76. Искусственный прием.

В § 33 мы рассматривали некоторые уравнения второго порядка, в которых отсутствовали либо x, либо y, и мы видели, что они тотчас же приводятся к уравнениям первого порядка, если считать за новую зависимую переменную $y' = \frac{dy}{dx}$. К ним тесно примыкает прием, относящийся к некоторым уравнениям, в которых отсутствует x и $\frac{dy}{dx}$ и который должен быть знаком читателю, так как он повсеместно употребляется в механике и физике. Такое уравнение, разрешенное относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y). \tag{241}$$

Умножая его на $2\frac{dy}{dx}$, получаем:

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 2f(y)\frac{dy}{dx}. \tag{242}$$

Очевидно, что первый член есть производная от $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, а второй член — производная по x от $2\int f(y)\,dy$. Следовательно:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)\,dy + a, \tag{243}$$

и

$$x+\beta=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+\alpha}}$$

есть решение уравнения (241).

Этот способ, если его надлежаще истолковать, совпадает с процессом решения § 33, как это легко усмотреть, проведя решение так, как в § 33.

Если обозначить $\frac{d^2y}{dx^2}=y'\frac{dy'}{dy}$, то (241) переходит в

$$y'dy'=f(y)\,dy.$$

Последнее уравнение мало отличается от уравнения (242). Действительно, умножив его на 2 и разделив на dx, получим (242). Его решение, очевидно, есть

$$y'^2=2\int f(y)\,dy+\alpha.$$

Оно тождественно с решением (243). Итак, с этой точки зрения оба метода совпадают.

Ни один из этих методов не является предпочтительным. То преимущество, которым обладает метод § 33, состоит в том, что он дает возможность решать уравнения и в том случае, когда $\frac{dy}{dx}$ не отсутствует, тогда как другой метод этого не дает.

Пример, данный в § 33, как раз представляет этот случай. Однако метод, который мы применили здесь, столь распространен, что читатель раньше или позже с ним встретится.

§ 77. Решение с помощью рядов.

В § 25 мы обратили внимание на тот факт, что диференциальные уравнения часто приводят к интегралам, которые нельзя легко вычислить, и было показано, что эти интегралы часто можно разложить в ряды того или другого вида. В § 65 мы снова видели, что применение операторного метода может привести к решениям в виде ряда. Применение рядов в действительности гораздо шире, чем это можно себе представить из приведенных примеров, так как их можно привлекать и тогда, когда решение уравнения не может быть написано в виде явного интеграла, или даже в виде операторного решения. Второй пример этого параграфа как раз такого типа. Первый же просто является иллюстрацией метода.

Ищем решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}=y^2. \tag{244}$$

Решение, очевидно, есть:

$$y=-\frac{1}{x+a}, \tag{245}$$

но мы пока предположим его неизвестным.

Ищем решение в форме ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{246}$$

где a—неизвестные коэфициенты. Если такой ряд существует и если он сходится, легко найти ряд для $\frac{dy}{dx}$ почленным диференцированием. Кроме того, можно найти ряд для y^2 почленным умножением (246) самого на себя. В результате получаем:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots, \tag{247}$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_0 a_3 x^3 + \ldots \\ + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{248}$$

Можно показать, что два ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

и

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

представляют одну и ту же функцию только тогда, когда соответствующие коэфициенты a и b равны, т. е. совпадают. Следовательно, если (246) действительно решение (244), то ряды (247) и (248) должны быть тождественны, так как оба должны равняться $\frac{dy}{dx}$. Для этого же необходимо, чтобы:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2, \\ 2a_2 &= 2a_0 a_1, \\ 3a_3 &= 2a_0 a_2 + a_1^2, \\ 4a_4 &= 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Из этих уравнений легко видеть, что

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2, \\ a_2 &= a_0^3, \\ a_3 &= a_0^4, \\ a_4 &= a_0^5, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

и следовательно, (246) должно иметь вид:

$$y = a_0(1 + a_0 x + a_0^2 x^2 + \ldots).$$

Этот ряд есть геометрическая прогрессия и имеет суммой:

$$y = \frac{a_0}{1 - a_0 x},$$

которая совпадает с решением (245) при условии, что $a_0 = -\frac{1}{\alpha}$. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$3y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y\frac{dy}{dx} + y^2 - 1 = 0, \tag{249}$$

которое получается при изучении некоторых явлений в пустотной трубке. Условия задачи таковы, что при $x = 0$ y обращается в нуль, а $\frac{dy}{dx}$ равно единице. Таким образом ищется частное решение, а не общее. Пусть

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

есть решение. Так как $y = 0$ при $x = 0$, то $a_0 = 0$; а так как

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

то $a_1 = 1$. Итак, ряд имеет вид:

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

Его производными, очевидно, являются ряды:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots,$$

так что (249) обращается в:

$$\begin{array}{r|lllll}
3y\frac{d^2y}{dx^2} & & +6a_2x & +18a_3x^2 & +36a_4x^3 & + \\
 & & & +6a_2^2x^2 & +24a_2a_3x^3 & + \ldots \\
+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 & +1 & +4a_2x & +6a_3x^2 & +8a_4x^3 & + \\
 & & & +4a_2^2x^2 & +12a_2a_3x^3 & + \ldots \\
+4y\frac{dy}{dx} & & +4x & +12a_2x^2 & +16a_3x^3 & + \\
 & & & & +8a_2^2x^3 & + \ldots \\
+y^2 & & & +x^2 & +2a_2x^3 & + \ldots \\
-1 & -1 & & & & = 0
\end{array}$$

что приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
10a_2 + 4 &= 0, \\
24a_3 + 10a_2^2 + 12a_2 + 1 &= 0, \\
44a_4 + 36a_2a_3 + 16a_3 + 8a_2^2 + 2a_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Из них находим:

$$a_2 = -\frac{2}{5},\ a_3 = \frac{11}{120},\ a_4 = -\frac{47}{3300}, \ldots$$

Полученное решение, таким образом, есть ряд:

$$y = x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{11}{120}x^3 - \frac{47}{3300}x^4 + \ldots,$$

который сходится достаточно быстро и дает удовлетворительное решение поставленной задачи. Лучшее решение неизвестно.

Существует другой способ получения решений в виде рядов, который иногда проще, чем изложенный выше. Мы можем иллюстрировать его на примере уравнения (244), которое мы только что решили при граничном условии $y = a_0$ при $x = 0$.

Мы знаем, что для всякой функции $y(x)$ ряд Тэйлора имеет вид:

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 + \ldots,$$

где y_0, y_0', ... — значения y и его производных при $x = 0$. Первое y_0 мы знаем из граничного условия. Второе y_0' можем найти тотчас же, замечая, что так как уравнение (224) верно при $x = 0$, то производная y_0' должна равняться y_0^2, т. е. a_0^2. Для нахождения y_0'' диференцируем (244) и получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx};$$

вставляя известные значения y и $\frac{dy}{dx}$ при $x = 0$, получаем:

$$y_0'' = 2a_0^3.$$

Аналогично

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2}$$

дает:

$$y_0''' = 6a_0^4$$

и т. д. Подставляя полученные выражения в общую формулу Тэйлора, получаем:

$$y(x) = a_0 + \frac{a_0^2x}{1!} + \frac{2a_0^3x^2}{2!} + \frac{6a_0^4x^3}{3!} + \ldots,$$

что сводится к

$$v = a_0(1 + a_0x + a_0^2x^2 + a_0^3x^3 + \ldots) = \frac{a_0}{1 - a_0x},$$

— получился прежний результат.

Этот способ отыскания коэфициентов ряда часто требует меньше вычислительной работы, чем первый метод. Но он не всегда применим. Читатель увидит, например, что он неприменим непосредственно к решению задачи (249).

§ 78. *Опасности, связанные с употреблением рядов.*

Не следует думать, что всегда можно найти пригодные степенные ряды. Это далеко не так. Например, уравнение

$$2xy\frac{dy}{dx} = 2x^3 + y^2$$

имеет решением

$$y=\sqrt{ax+x^2}$$

— функцию, которую нельзя разложить в ряд типа (246). Если мы попытаемся получить такой ряд, то увидим, что все его коэфициенты обращаются в нуль.

Аналогично, уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}-1$$

имеет своим решением:

$$y=a\,xe^{-\frac{1}{x}}-xe^{-\frac{1}{x}}\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\,dx.$$

Но, предполагая, что существует решение в виде ряда, и определяя коэфициенты, получаем в результате:

$$y=x^2(1+1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots).$$

Этот ряд расходится для всякого значения x и поэтому непригоден в большинстве случаев.

Другими словами, можно не получить ответа, как в первом примере, или получить непригодный ответ, как во втором. Но, что хуже всего, возможно, хотя и редко, получить неверный ответ. Это, конечно, не является достаточной причиной, чтобы избегать решений в виде ряда, и даже, чтобы требовать предварительной проверки того, что мы придем к правильным результатам, но это заставляет нас быть очень осторожными, если такой проверки не сделано.

§ 79. Уравнение Бесселя.

Уравнение Бесселя

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(1-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0, \tag{250}$$

решениями которого являются так называемые бесселевы функции, встречается во многих задачах математической физики, в которых удобно или необходимо пользоваться цилиндрическими координатами. Например, читатель встретился с ним в задаче 6 § 46. Пусть решение уравнения (250) ищется в виде ряда:

$$R=a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots+a_jr^j+\ldots \tag{251}$$

Тогда:

$$\frac{d^2R}{dr^2}=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3r+\ldots,$$

$$\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}=a_1\frac{1}{r}+2a_2+3a_3r+\ldots,$$

$$R=a_0+a_1r+\ldots,$$

$$-\frac{n^2}{r^2}R=-n^2a_0\frac{1}{r^2}-n^2a_1\frac{1}{r}-n^2a_2-n^2a_3r-\ldots$$

Если ряд (251) есть решение уравнения (250), то сумма всех членов правых частей этих уравнений должна равняться нулю. Далее, если эта сумма равна нулю для всех значений r, то сумма коэфициентов при одинаковых степенях r должна в отдельности равняться нулю. Отсюда: $n^2 a_0 = 0$, и, если n отлично от нуля, то

$$a_0 = 0.$$

Из второго столбца получаем:

$$(1 - n^2)a_1 = 0;$$

отсюда, если n не равно единице, то

$$a_1 = 0.$$

Из следующего столбца получаем:

$$(4 - n^2)a_2 = 0,$$

откуда, при $n \neq 2$:

$$a_2 = 0.$$

Продолжая этот процесс далее, заключаем, что все a обращаются в нуль до a_n. Столбец, в который впервые входит a_n, сводится к $(n^2 - n^2)a_n$ и тождественно обращается в нуль, независимо от a_n. Итак, ряд (251) начинается с члена, содержащего n-ю степень r, коэфициент при которой произвольный.

Рассмотрим j-й столбец для $j > n$. Получаем уравнение:

$$a_j(n^2 - j^2) = a_{j-2}.$$

Из этого уравнения очевидно, что, так как $a_{n-1} = 0$, то и $a_{n+1}, a_{n+3}, a_{n+5}, \ldots$ все обращаются в нуль. Кроме того:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{2(2n+2)},$$

$$a_{n+4} = \frac{a_n}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)},$$

$$a_{n+6} = -\frac{a_n}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

и т. д.

Мы определили теперь все коэфициенты ряда (251) кроме a_n, который входит общим множителем во все коэфициенты и произволен. Обычно заменяют его новой произвольной постоянной A, связанной с a_n соотношением:

$$a_n = \frac{A}{2^n n!}.$$

Легко выразить все коэфициенты через A.

Действительно, можем вывести общую формулу:

$$a_{n+2p}=\frac{(-1)^p}{2^{n+2p}}\frac{A}{(n+p)!\,p!}.$$

Решением (250) будет, следовательно:

$$R=A\left[\left(\frac{r}{2}\right)^n\frac{1}{n!}-\left(\frac{r}{2}\right)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!\,1!}+\left(\frac{r}{2}\right)^{n+4}\frac{1}{(n+2)!\,2!}-\ldots\right]. \quad (252)$$

Выражение в скобках обычно обозначают через $J_n(r)$.

Это — бесселева функция первого рода n-го порядка. Ее можно еще записать в виде:

$$J_n(r)=\left(\frac{r}{2}\right)^n\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{ir}{2}\right)^{2p}}{(n+p)!\,p!}. \quad (253)$$

Предыдущее рассуждение было основано на предположении, что n есть целое число. Метод для дробных значений n остается тот же. Если n — дробь, то ряд, удовлетворяющий уравнению (250), имеет вид:

$$R=a_nr^n+a_{n+1}r^{n+1}+\ldots$$

Так как n дробно, все степени дробные. К таким дробным значениям n иногда приводят физические задачи, но они встречаются в технической литературе гораздо реже, чем задачи, приводящие к целым значениям n. Мы не будем заниматься дальнейшим их изучением, заметим только, что скобка в выражении (252) или формула (253) и в случае дробных n попрежнему дает определение $J_n(r)$ при условии, что мы правильно истолкуем факториалы дробных выражений n, $n+1$ и т. д.

Наконец, некоторые задачи математической физики, а именно, определение эффективного сопротивления проводника, по которому течет ток высокого напряжения, приводят к уравнениям, совпадающим с уравнением (280), но только такими, где r заменено новой переменной $\sqrt{-iq}$, причем q — действительное число. И в этом случае (253) дает нужное решение. Если мы заменим r в (253) через $\sqrt{iq}$, правая часть уравнения становится комплексной. Обычно отделяют действительную часть от мнимой и обозначают их символами $\operatorname{ber}_n q$ и $\operatorname{bei}_n q$ *.

Другими словами, $\operatorname{ber}_n q$ и $\operatorname{bei}_n q$ суть действительная и мнимая части от $J_n(\sqrt{-iq})$:

$$J_n(\sqrt{-iq})=\operatorname{ber}_n q+i\operatorname{bei}_n q.$$

Уравнение (250) есть диференциальное уравнение второго порядка, и его общее решение зависит, следовательно, от двух произвольных постоянных.

---

* *be*—указывает на имя Бесселя, а r и i — соответственно на вещественность и мнимость.

Решение (252) содержит только одну произвольную постоянную и поэтому не является **общим** решением задачи. Можно показать, что, когда n — не целое число, общее решение есть:

$$R = AJ_n(r) + BJ_{-n}(r),$$

где $J_{-n}(r)$ определяется заменой n через $-n$ в формуле (252). С другой стороны, когда n есть целое число, $J_{-n}(r)$ равно либо $J_n(r)$, либо $-J_n(r)$, так что

$$R = (A \pm B) J_n(r) = CJ_n(r).$$

Так как последнее решение содержит только одну произвольную постоянную, то должно существовать еще одно решение уравнения (250) при n целом. Это решение, для которого некоторым методом может быть получено разложение в ряд, обычно обозначается через $K_n(r)$ и называется функцией Бесселя второго рода n-го порядка. Важное свойство этих функций второго рода то, что они все обращаются в бесконечность при $r = 0$. Так как граничные условия в большинстве физических задач не допускают бесконечных значений, то коэфициент B в общем решении

$$R = AJ_n(r) + BK_n(r)$$

обычно равен нулю, что означает, что бесселева функция второго рода не входит в решение задачи.

Для бесселевых функций были вычислены обширные таблицы как для первого рода, так и для второго рода, так, наконец, и для функций $\operatorname{ber} q$ и $\operatorname{bei} q$. Употребление этих таблиц — такое же, как и употребление обычных тригонометрических или логарифмических таблиц.

§ 80. Понижение порядка линейного уравнения.

Если при решении линейного уравнения порядка s мы знаем частное решение однородного уравнения, то мы можем с помощью этого решения свести рассматриваемое уравнение к уравнению порядка $s-1$. Чтобы это показать, допустим, что $y = \varphi(x)$ есть частное решение однородного уравнения, дополнительного к уравнению (134), т. е.

$$F_s\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = 0.$$

Заменим y новым переменным z, определяемым уравнением:

$$y = \varphi(x) z.$$

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{dz}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= z\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{d^2z}{dx^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (254)$$

и т. д. Все эти уравнения линейны относительно z и его производных. Поэтому, при подстановке их в формулу (134), мы получим новое линейное уравнение для z.

Более того, каждая производная $\frac{d^j y}{dx^j}$ в уравнении (254) начинается с члена $z\,\frac{d^j\varphi}{dx^j}$, который является единственным членом, в который входит само z, а не его производные. Поэтому в нашем новом диференциальном уравнении для z коэфициент при z есть:

$$f_s(x)\frac{d^s\varphi}{dx^s}+f_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}\varphi}{dx^{s-1}}+\ldots+f_0(x)\varphi,$$

или иначе:

$$F_s\left(x,\frac{d}{dx}\right)\varphi,$$

Но по определению φ это выражение равно нулю. Другими словами, новое уравнение содержит производные z до s-го порядка и не содержит z. Следовательно, это новое уравнение будет порядка $s-1$ относительно переменного

$$z'=\frac{dz}{dx}.$$

Как пример такого процесса, рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0, \tag{255}$$

одно из решений которого есть:

$$y=\sin x.$$

Если обозначим

$$y=z\sin x,$$

то получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-z\sin x+2\cos x\frac{dz}{dx}+\sin x\frac{d^2z}{dx^2},$$

откуда

$$\sin x\frac{d^2z}{dx^2}+2\cos x\frac{dz}{dx}=0,$$

или

$$\frac{dz'}{z'}+\frac{2\cos x\,dx}{\sin x}=0.$$

Решение его, очевидно, есть:

$$z'\sin^2 x=\alpha,$$

или

$$dz=\alpha\operatorname{csec}^2 x\,dx.$$

Отсюда находим:

$$z=\beta-\alpha\operatorname{ctg}x,$$

или

$$y = \beta \sin x - \alpha \cos x.$$

Это и есть в действительности общее решение уравнения (255).

В качестве второго примера применим наш процесс к уравнению Бесселя (250), одно из решений которого есть $J_n(r)$. Напишем:

$$R = zJ_n(r),$$
$$\frac{dR}{dr} = z\frac{dJ_n}{dr} + J_n\frac{dz}{dr},$$
$$\frac{d^2R}{dr^2} = z\frac{d^2J_n}{dr^2} + 2\frac{dz}{dr}\frac{dJ_n}{dr} + J_n\frac{d^2z}{dr^2}.$$

Уравнение (250) обращается в

$$J_n\frac{d^2z}{dr^2} + \left(2\frac{dJ_n}{dr} + \frac{1}{r}J_n\right)\frac{dz}{dr} + \left[\frac{d^2J_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n\right]z = 0.$$

Так как J_n есть решение уравнения (250), то коэфициент при z равен нулю. Поэтому уравнение сводится к

$$J_n\frac{dz'}{dr} + \left(2\frac{dJ_n}{dr} + \frac{1}{r}J_n\right)z' = 0,$$

или

$$\frac{dz'}{z'} + 2\frac{dJ_n}{J_n} + \frac{dr}{r} = 0.$$

Решение последнего есть:

$$z'rJ_n^2 = \alpha,$$

или

$$z = \beta + \alpha\int\frac{dr}{rJ_n^2(r)},$$

откуда

$$R = \beta J_n(r) + \alpha J_n(r)\int\frac{dr}{rJ_n^2(r)}.$$

За исключением трудностей интеграции это вполне приемлемое общее решение уравнения (250). Из него, конечно, мы могли бы найти функцию $K_n(x)$, о которой было упомянуто в § 79. Но так как это не является простейшим способом ее определения, то лучше от этого отказаться.

Важно отметить, что в случае, если известно частное решение уравнения второго порядка, то уравнение всегда может быть сведено к уравнению первого порядка, и таким образом можно найти общее решение.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Глава I, § 5, стр. 22.

1. $\frac{1}{x}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{w}{x}$.

2. $x^2\frac{d^2w}{dx^2}+4x\frac{dw}{dx}+2w=0$,

$y=\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}\right)^2$.

3. $\frac{dw}{dx}=ae^{cx}$, $y=\frac{a}{c}+\alpha e^{-cu}$.

4. $\frac{d^2\theta}{dt^2}+k^2\theta e^{2t}=0$.

5. $(1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}-2x\frac{dp}{dx}+mP=0$.

6. $\frac{dw}{w}=\frac{dx}{x}$.

7. $\frac{dy}{dx}-2xy=0$, $y=e^{x^2}$

8. $\frac{dz}{dx}=e^{-(1+n)}\left(\frac{d^{m+1}y}{dw^{m+1}}-n\,\frac{d^my}{dw^m}\right)$.

11. $(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=r^2$.

12. $x^2+y^2=(1\pm r)^2$.

13. $y=\frac{1}{8}x^2$.

14. За параметр θ берем угол наклона прямых к оси x. Уравнение огибающей $x=\sin\theta-\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta-\cos\theta$.

15. Огибающая — ветвь астроиды $x=\cos^3\theta$, $y=\sin^3\theta$. Площадь $\frac{3\pi}{32}$.

16. a) Обыкновенное, 2-го порядка, 3-й степени, нелинейное.

b) Обыкновенное, 1-го порядка, 1-й степени, линейное с переменными коэфициентами.

c) С частными производными, 2-го порядка, 1-й степени, линейное с постоянными коэфициентами.

17. a) Обыкновенное, 1-го порядка, 1-й степени, нелинейное.

b) Обыкновенное, 2-го порядка, 1-й степени, нелинейное, кроме случая, когда $f(y, z)$ постоянно.

18. $\frac{dw}{du}+2\left(\frac{1}{u}-1\right)w=3e^{2u}$.

Глава II, § 11, стр. 35.

1. $\alpha=\frac{\theta_0'\cos pt_1-\theta_1'\cos pt_0}{p\sin p\,(t_1-t_0)}$, $\beta=\frac{\theta_0'\sin pt_1-\theta_1'\sin pt_0}{p\sin p\,t_1-t_0)}$.

2. $\alpha=\frac{\theta_0\,p\cos pt_1-\theta_1'\sin pt_0}{p\cos p\,(t_0-t_1)}$, $\beta=\frac{\theta_0\,p\sin pt_1+\theta_1'\cos pt_0}{p\cos p(t_0-t_1)}$.

Глава III, § 20, стр. 49.

4. $\frac{d\theta}{dt} = k(\theta_0 - \theta)$,

где k — постоянная, θ_0 — температура холодной среды, θ — показание термометра.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = k\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$.

6. $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2$.

7. $\frac{8}{27}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{4}{9}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x + y$.

8. $4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^3 = 16y^2$.

9. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} = 0$.

10. $\frac{dy}{dx} = ky(x - 2)$.

11. $m\frac{dv}{dt} = F - \frac{v}{t+1}$.

Глава IV, § 23, стр. 59.

1. $\operatorname{tg}\theta = a + \frac{ms}{k}$; $a = 0$.

2. $y = ae^{-cx} + \frac{a}{c}$.

3. $\theta = \theta_0 + ae^{-kt}$; на 0,520° выше, чем температура окружающей среды.

4. a) $\sec x = a - \operatorname{tg} y$.

b) $y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = a$.

c) $y = bx + \frac{ax}{bx+1}$.

5. $x = \frac{Me^{(Nm-Mn)(a+kt)} - N}{me^{(Nm-Mn)(a+kt)} - n}$.

6. $y + \operatorname{arc\,tg} y = a + x + \ln x$.

Глава IV, § 25, стр. 59.

1. $y = e^x\left(a + \ln x - x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \ldots\right)$.

2. $y = ae^x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} - \frac{4!}{x^5} + \ldots$

3. $\mathrm{Ci}\,1 = 0{,}3371$; $\mathrm{Ci}\,10 = 0{,}0455$.

Глава IV, § 29, стр. 68.

1. $y = ae^{\frac{y}{x}}$.

2. $y = ax\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. $ax^2 + byx + cy^2 - gx + ey = a$.

4. $\sin^2 x + \sin^2 y = a$.

5. $2t = mI + I\sqrt{4 - m^2}\,\operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt{4-m^2}}{m}\left(\ln a\sqrt{y^2 - mtI + t^2}\right)\right]$.

6. $r^2 - \theta^2 = ar^3$.

7. $\cos(a\alpha + b\beta) + \sin(b\alpha + a\beta) = \gamma$.

8. $T^2 + t^2 + 2\arcsin\left(\frac{T}{t}\right) = \alpha$.

Глава I, § 31, стр. 71.

1. $y = 1 + \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. $xy = \alpha - x\cos x + \sin x$.

3. $x^4y^4 = \alpha - 4x^4\cos x + 16x^3\sin x + 48x^2\cos x - 96x\sin x - 96\cos x$.

4. $\rho = a\theta + \alpha\theta\sqrt{1-\theta^2}$.

5. $T = \frac{1}{1 + \alpha t + \ln t}$.

6. $y = \alpha e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

7. $y = \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sin x + \alpha}$. *Указание:* преобразуйте $e^{-\int\frac{dx}{\cos x}}$ к виду $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

8. $y = \alpha e^{-\varphi} + \varphi - 1$.

9. $\theta = \theta_0 + \alpha e^{-kt}$.

Глава IV, § 32, стр. 74.

2. $x + y + 2 \pm 2\sqrt{1+xy} = \alpha + 2\ln(-1 \pm \sqrt{1+xy}) - 2\ln x$.

3. $\Phi = \frac{1}{27} - \frac{1}{9}(\alpha + 3r) \pm \frac{2}{27}(\alpha + 3r)^{\frac{3}{2}}$.

4. $z + 1 = \ln(-1 \pm \sqrt{\alpha + 2y}) \pm \sqrt{\alpha + 2y}$.

5. $\alpha(2T - t\sqrt{t^2+T})^{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{t^2+T} - t(1-\sqrt{17})}{4\sqrt{t^2+T} - t(1+\sqrt{17})}$.

6. $y = \alpha x + \Phi(\alpha)$.

7. $e^y = \alpha(x + \sqrt{x^2-1})$.

Глава IV, § 33, стр. 76.

1. $\theta = \alpha\sin(pt + \beta)$.

2. $\operatorname{tg}\theta + \alpha = \frac{ms}{k}$.

3. $2m(\beta + y) = k\left(e^{\frac{m(x+\alpha)}{k}} + e^{-\frac{m(x+\alpha)}{k}}\right)$.

4. $ne = \frac{\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\varphi^{\frac{3}{2}}}{9\pi x^2}$.

5. $12\pi nex + \alpha =$

$$= \sqrt{\beta + 8\pi mn\sqrt{v_0^2 + \frac{2e(\varphi - v_0)}{m}}}\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2e(\varphi - V_0)}{m}} - \frac{\beta}{4\pi mn}\right).$$

6. $cp\,f(v) = \alpha\sin(cp\,x + \beta)$.

7. $\beta + ky = \sqrt{1-(kx+\alpha)^2} + \ln(kx+\alpha) - \ln\left[1 + \sqrt{1-(kx+\alpha)^2}\right]$.

9. a) $v = \frac{\alpha e^{3u}}{u^3}$.

b) $\arcsin v = \alpha - 2\sqrt{1-u^2}$.

c) $v = \alpha - u + \frac{e^{2u}}{8}$.

d) $\ln y = \alpha - \frac{1}{2}\cos(x^2 - 1) - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

e) $\alpha\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

10. a) $v = 1 + \alpha e^{-u^2}$.
 b) $\ln(1 + v^2) + 2\operatorname{arc\,tg} u = \alpha$.
 c) $\operatorname{tg} v = \alpha + \ln\ln u$.

11. $x = \alpha + L\ln y - L\ln(L - \sqrt{L^2 - y^2}) - \sqrt{L^2 - y^2}$.

12. $2\ln y = \alpha + k(x - 2)^2$.

13. $(m + 1)v = F\left[t + 1 - \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{m}}}\right]$.

Глава V, § 36, стр. 81.

1. $(27y^2 - 2x^3)(16^2 y^4 - 32x^3y^2 + x^6) = 0$.
2. $\rho = \frac{1}{2}$.
3. $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \rho^3(2\rho - 1)$, $\rho = \frac{1}{2}$.

Глава VI, § 39, стр. 85.

1. $\theta = 4°\,C + 0{,}126\,\frac{\rho}{a}$.
2. $\theta = 52{,}9°\,C$.
3. Более толстый стержень.
4. $H = 2\pi rg\int_0^l \theta(x)\,dx = \frac{2\pi rg}{p}\frac{(\theta_0 + \theta_1)(e^{pl} + e^{-pl})}{e^{pl} - e^{-pl}} = \frac{2\pi rg}{p}(\theta_0 + \theta_1)\operatorname{th}\frac{pl}{2}$.
5. $\theta_l = \frac{kp\,\theta_0}{kp\operatorname{ch} pl + g\operatorname{sh} pl}$.

Глава VI, § 41, стр. 89.

1. $\ln\beta(x^2 + y^2)\,2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.
2. $x = \beta y$.
3. $\sqrt{8\operatorname{tg}^2\alpha - 1}\,\lg\beta(y^2\operatorname{tg}\alpha + 2x^2\operatorname{tg}\alpha - xy) = 6\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2y\operatorname{tg}\alpha - x}{x\sqrt{8\operatorname{tg}^2\alpha - 1}}\right)$.
4. $(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}(y + \gamma) = \beta\sqrt{1 - \beta^2}\,\sqrt{x^2(1 - \beta^2) + 2\alpha\beta x - \alpha^2} -$
 $- \alpha\ln\left(\sqrt{x^2(1 - \beta^2) + 2\alpha\beta x - \alpha^2} + x\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$.
5. $y^2 + z^2 = \alpha + 2\ln\cos x$.

Глава VI, § 44, стр. 95.

1. $24qy = w(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$,

где w — груз на единицу длины, причем при $x = 0$ балка горизонтальна.

2. $12qy = W(3lx^2 - 2|x|^3)$, x отмеряется от острого ребра.
3. $x = \beta + \int\frac{[W(y + \varepsilon)^2 - \alpha]\,dy}{4q^2 - [W(y + \varepsilon)^2 - \alpha]^2}$.

4. $\frac{y+\varepsilon}{y_0+\varepsilon}=\sin\left[\frac{2x}{l}\left(\arcsin\frac{\varepsilon}{y_0+\varepsilon}\right)+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\right]$,
где ε — длина верхней и нижней планки, а y_0 — прогиб середины вертикальной балки.

Глава VI, § 46, стр. 100.

1. $f(x)=A\sin n\pi x$, где n — целое число.
3. $k(t)=B\sin\left(n\pi t\sqrt{\frac{T}{m}}-C\right)$; $\frac{n}{2}\sqrt{\frac{T}{m}}$.
4. Они пропорциональны целым числам 1, 2, 3,...
5. Амплитуда и фаза колебания.
6. $c^2\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial r}$.

Глава VI, § 51, стр. 114.

1. $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$.
2. $\mathrm{sh}^{-1}(1{,}007y)=\mathrm{ch}^{-1}(1{,}007x)-0{,}125$.
3. $x=t$.
4. Цилиндр.
5. $r=\sqrt[3]{15\frac{V}{4\pi}}\sqrt{\cos\theta}$.
6. $y=1+\alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\alpha\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, где α — корень уравнения $2\alpha\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=3$.
Это уравнение имеет два корня: $\alpha=\pm 0{,}6165$. Отрицательный дает поверхность максимальной площади.
7. Сфера.
8. $\varphi=\frac{\pi}{2}$.
9. $x=\beta+\int\frac{\lambda dy}{[\alpha-\ln(1+y)]^2-\lambda^2}$.

Глава VII, § 56, стр. 109.

1. $\theta=\alpha_1 e^{px}+\alpha_2 e^{-px}$.
2. $y=\alpha_1 e^{ix}+\alpha_2 e^{-ix}$.
3. $y=\alpha_1 e^{3x}+\alpha_2 e^{5x}$.
4. $r=\alpha_1 e^{a\theta}+\alpha_2 e^{-a\theta}$.
5. $y=\alpha_1 e^{ax}+\alpha_2 e^{-ax}+\alpha_3 e^{iax}+\alpha_4 e^{-iax}$.
6. $v=\frac{1}{29}e^{-2u}+\alpha_1 e^{(3+2i)u}+\alpha_2 e^{(3-2i)u}$.
7. $y=\alpha_1 e^{(-2-\sqrt{5})t}+\alpha_2 e^{(-2-\sqrt{5})t}\,\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{5}\cos t$.
8. $y=\alpha_1 e^{\sqrt{3}ix}+\alpha_2 e^{-\sqrt{3}ix}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{18}\sin 3x$.
9. $x=\alpha_1 e^{\sqrt{2}(1-i)t}+\alpha_2 e^{-\sqrt{2}(1-i)t}+\alpha_3 e^{\sqrt{2}(1+i)t}+\alpha_4 e^{-\sqrt{2}(1+i)t}+\frac{1}{17}e^{it}$.
10. $x=\alpha_1 e^{-\frac{t}{5}}+\frac{1}{226}\sin 3t-\frac{15}{226}\cos 3t$.

11. $x = a_0 + a_1 e^t + a_2 e^{2t} + a_3 e^{3t} + \frac{1}{360} e^{-3t}$.

14. $y = a_1 x^6 + a_2 x^2 + a_3 + a_4 x^{-3} + \frac{17}{216} x^6 \ln x$.

15. $x = \frac{a_1 + a_2 \ln t}{t} + a_3 t^3 + a_4 t^3 + \frac{1}{47\,450} [62 \cos (3 \ln t) + 141 \sin (3 \ln t)]$.

Глава VII, § 58, стр. 137.

1. $I = \frac{a}{RC} e^{-\frac{t}{CR}} + E_0 \frac{R \cos nt - \frac{1}{Cn} \sin nt}{\frac{1}{C^2 n^2} + R^2}$.

2. $I = \frac{aR}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} + E_0 \frac{R \sin nt - Ln \cos nt}{R^2 + L^2 n^2}$; нуль.

3. $I = a_1 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + a_2 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{E_0 Cn \cos nt}{1 - LCn^2}$; $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$; переменный ток с частотой $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$; неопределенно.

4. $I = -\frac{E_0 C_n}{1 - LCn^2} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{E_0 C_n}{1 - LCn^2} \cos nt$. Установившегося состояния нельзя достигнуть.

5. $\frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$; нет.

6. Собственная частота.

7. $I = \frac{E_0}{Ln} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin nt$.

8. $R^2 I = 0, \qquad t < 0;$

$R^2 I = Rt - \left(L 1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right), \qquad 0 < t < t;$

$R^2 I = -R(t-2) + L\left(1 - 2e^{-\frac{R(t-1)}{L}} + e^{-\frac{Rt}{L}}\right), \qquad 1 < t < 2;$

$R^2 I = L\left(e^{-\frac{R(t-2)}{L}} - 2e^{-\frac{R(t-1)}{L}} + e^{-\frac{Rt}{L}}\right). \qquad 2 < t.$

Глава VII, § 61, стр. 147.

1. $y = a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}$; да.

2. a) $a^2 y = ae^{ax} - ax - 1$.

b) $a^{n+1} y = ae^{ax} - [(ax)^n + n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} + \ldots + n!]$.

c) $(a^2 + n^2) y = ae^{ax} - a \sin nx - n \cos nx$.

d) $(n - a) y = ae^{ax} + e^{nx}$.

Глава VII, § 63, стр. 152.

1. $y = (a_1 + a_2 x) e^x + a_3 e^{-x}$.

2. $y = a_1 + (a_2 + a_3 x + a_4 x^2) e^x + \frac{1}{2} e^{2x}$.

3. $r = a_1 e^{\theta} + a_2 \cos \theta + a_3 \sin \theta - \frac{1}{4} (\cos \theta + \theta \cos \theta + \theta \sin \theta)$.

8. $xy = a_1 + a_2 \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

Глава VIII, § 74, стр. 174.

1. a) $y = 1 - 2\alpha_1 e^x - (4 - i\sqrt{2})\alpha_2 e^{-(1+i\sqrt{2})\frac{x}{3}}(4 + i\sqrt{2})\alpha_3 e^{-(1-i\sqrt{2})\frac{x}{3}}$,

$z = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-(1+i\sqrt{2})\frac{x}{3}} + \alpha_3 e^{-(1-i\sqrt{2})\frac{x}{3}}$.

b) $I_1 = \left(\frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 t\right)e^{-t} + \frac{(\cos nt - n^2\cos nt + 2n\sin nt)}{(1+n^2)^2}$,

$I_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2)e^{-t} + \frac{2n(\sin nt - 3n^2\sin nt - 3n\cos nt + n^2\cos nt)}{(1+n^2)^3}$.

c) $y = \alpha_1 e^x + 6\alpha_2 e^{(-3-i\sqrt{3})\frac{x}{2}} + 6\alpha_3 e^{(-3+i\sqrt{3})\frac{x}{2}}$,

$z = \alpha_1 e^x + \alpha_2(1 - i\sqrt{3})e^{(-3-i\sqrt{3})\frac{x}{2}} + \alpha_3(1 + i\sqrt{3})e^{(-3+i\sqrt{3})\frac{x}{2}} - \frac{x}{3}$.

d) $2y_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 x)e^{-4x} + e^{-4x}\int e^{4x}[f_1(x) + f_2(x)]\,dx +$

$+ e^{-4x}\int dx\int e^{4x}[6f_1(x) - 2f_2(x)]\,dx$;

$2y_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 x)e^{-4x} + e^{-4x}\int e^{4x}[-f_1(x) + f_2(x)]\,dx +$

$+ e^{-4x}\int dx\int e^{4x}[3f_1(x) - f_2(x)]\,dx$.

2. $6y_1 = \alpha e^{-\frac{x}{3}} + \alpha_2 e^{-3x} - \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{10}{3}f_1(x) + f_2(x) +$

$+ \frac{1}{36}e^{-\frac{x}{3}}\int e^{\frac{x}{3}}[23f_1(x) + 15f_2(x)]\,dx -$

$- \frac{3}{4}e^{-3x}\int e^{3x}[21f_1(x) + 5f_2(x)]\,dx$,

$6y_2 = \frac{7}{2}\alpha_1 e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}\alpha_2 e^{-3x}\frac{df_1(x)}{dx} - \frac{10}{3}f_1(x) - f_2(x) +$

$+ \frac{1}{72}e^{-\frac{x}{3}}\int e^{\frac{x}{3}}161f_1(x) + 105f_2(x)]\,dx +$

$+ \frac{1}{8}e^{-3x}\int e^{3x}[63f_1(x) + 15f_2(x)]\,dx$.

3. $2y_1 = 2f_1(x) - 3f_2(x) + \frac{df_1(x)}{dx} - \frac{df_2(x)}{dx}$,

$2y_2 = f_2(x) - \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx}$.

УКАЗАТЕЛЬ.

(Цифры означают номера страниц.)

Активное сопротивление 136, первичное и переносное 173.
Амплитуда синусоидального тока 135, 136.
Балка, изгиб б. 91—93, закон изгиба б. 92, пружина часов как изогнутая б. 93, изгиб равномерно нагруженной б. 95.
Безвихревое движение идеальной жидкости 46—48.
Бернулли, уравнение Б. 70—71.
Бессель, уравнение Б. 22, 180—183, 185, бесселевы функции 180, 182, первого и второго рода n-го порядка 183, $\mathrm{ber}_n q$ и $\mathrm{bei}_n d$ 182.
Бетон, распределение температуры в б., через который проходит железная трубка с нагретым паром 86.
Брахистохрона 103—106.

Вариационное исчисление 100, 107.
Вариация 100.
Вероятность вызовов в телефонной станции 110—113, законы теории в. 111.
Внутренняя форма уравнения кривой 40.
Волна затухающая 133.
Волновое уравнение 47.
Второго порядка уравнение, геометрическая интерпретация 29—30, число решений 31, уравнения в. п., сводимые к уравнению первого порядка 74—76, уравнения в. п., в которых отсутствует x и $\frac{dy}{dx}$ 175—176.
Второй принцип наложения 160—162.
Высшего порядка уравнения, число решений 30—31, линейные 116—156, 158—174, 175—185, 183—184, система линейных уравнений в. п. 158—174, сведение уравнения в. п. к системе линейных уравнений первого порядка 162—163, решение уравнения в. п. в виде ряда 176—182.

Геодезические линии 106—107.
Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка 25—26, второго порядка 29—30.
Геометрическое место кратных с 17—22, 78, 79, 80, y' 77—81.
Градиенты температуры 43.
Граничные условия 31—34, 35.
Графический метод решения диференциальных уравнений 26.
Графическое интегрирование 59—61.
Груз, траектория г. 50.

Двойная точка, см. узловая точка.
Дидона, задача Д. 107—110, 115.
Диференциалы, уравнение в точных д. 65—68.
Диференциальное выражение 9, замена переменных в д. в. 11—15, однородное линейное д. в. 23.
Диференцируемость 16—17.
Доказательства существования решений диференциальных урав-ний 35.
Дополнительное решение 118.
Дополнительное уравнение 118, решение д. у. 118.

Жидкость, безвихревое движение идеальной ж. 46—48, конденсация ж. 46.

Задача Дидоны 107—110, 115.
Задачи изоериметрические 108, 114.
Зажим, изгиб плотно завинченного з. 95.
Закон действия масс 38—39, полуторного показателя 49, изгиба балок 92.
Законы механики 39, 90, 103—104, течения тока в электрической сети 41, распространения тепла 43, теории вероятностей 111.
Замена переменных 11—15, 22—23, 24, 62—63. 63—65, 69, 70, 71, 76.
Заострение, точка з. 19, место точек з. 20, 79.
Затухающая волна 133.
Звук 99.

Идеальная жидкость, безвихревое движение и. ж. 46—48.
Изгиб балки 91—93, закон и. балка 92, и. равномерно нагруженной балки 95, строительных колонн 93—95, плотно завинченного зажима 95.

Изменение высоты ртутного столба термометра при переносе из теплой среды в холодную 49, 54.
Изотермические задачи 108, 114.
Индукция математическая 23.
Интеграл 61—63.
Интеграл эллиптический 93.
Интегральный косинус 57.
Интегрирование численное 55—56, при помощи рядов 56—59, 155—156, 157, 176—179, 180—182, графическое 59—61.
Исключение параметра из уравнения семейства кривых и его производной по c 17—22, произвольных постоянных из уравнения семейства 36—38.

Кабель, температура изолирующего слоя к., погруженного на дно бассейна 85—86.
Кажущееся сопротивление 136, 137, первичное и переносное 173.
Колебание струны 93—97, 100, мембраны 98—99, характеристические к. 97, 99, 100.
Колонна, изгиб строительной колонны 93—95.
Конденсация жидкости 46.
Конечное уравнение 25.
Коши, линейное уравнение типа К. 10, 15, 148, 152.
Крайные c, геометрическое место к. c 17—22, 78, 79, 80, y', геометрическое место к. y' 77—81.
Кривая провеса гибкой нерастяжимой нити 39—41.
Кривая прогиба коромысла химических весов 95.
Кривизна 30, 49, радиус к. 29, 30.
Критическое затухание тока 143.

Лаплас, уравнение Л. 47, 48.
Лежандр уравнение Л. 23.
Линейное диференциальное выражение однородное 23.
Линейное уравнение 10, первого порядка 68—71, высших порядков 116—156, 158—174, л. у. с постоянными коэфициентами 10, 116, 122—129, 129—137, 138, 140, 141—155, 158—174, с переменными коэфициентами 116, 117—118, 118—122, 180—183, 183—185, системы л. у. с постоянными коэфициентами 158—174, однородные л. у. 118, л. у. типа Коши 10, 15, 148, 152, л у. первого порядка не интегрируемые с помощью рядов, 179—180, понижение порядка л. у. 183—185.

Линейный вес 39.
Линейный диференциальный оператор с постоянными коэфициентами 141.
Линия прикосновения 79.

Математическая индукция 23.
Машина, диференциальное уравнение движения м. 50, 76.
Маятник 32—33, 34.
Мембрана, колебание м. 98—99.
Метод, графической 26, операторов 138—147, 148—151, 152. 154, 155—156, 158—160, 163—164, 171—172, 173—174.
Механика, законы м. 39, 90, 103—104.
Момент силы относительно прямой 92.
Момент инерции относительно оси 115.

Набла в квадрате 47.
Нагрузка эксцентрическая 94.
Наложение, принцип н. 117—118, 119, 122, второй принцип н. 160—162.
Непрерывность 15—16.
Нить, кривая провеса гибкой нерастяжимой н. 39—41.

Обобщенная теорема Хевисайда 168—169.
Общее решение уравнения первого порядка 29, n-го порядка 31.
Огибающая 19—20, 23, 77, 79.
Однородное линейное диференциальное выражение 23.
Однородное уравнение первого порядка 64—65, линейное 118.
Операторы, метод о. 138—147, 148—151, 152, 154, 155—156, 158—160, 163—168, 171—172, 173—174, линейный диференциальный о. с постоянными коэфициентами 141, умножение о. 140—141, разложение о. на множители 141—144, 145—147, на простые дроби 145—147, 148, 159, 163—164, 167—168, в ряд 155—156, 157.
Ортогональные траектории 89.
Основная теорема теории точечных множеств 27, 28.
Особые решения 29, 73, 77—81.

Пара сил приложенных 92, упругости 92.
Параметр, исключение п. из уравнения семейства кривых и его производной по c 17—22.
Первичное сопротивление кажущееся, активное и реактивное 173.

Первого порядка уравнения 25—29, 51—76, геометрическая интерпретация уравнений п. п. 25—26, число решений 26—29, уравнения п. п., в которых отсутствует зависимая переменная 51—52, независимая переменная 52—53, однородные уравнения п. п. 64—65, линейные 68—71, разрешимые относительно x или y 71—74, неинтегрируемые с помощью рядов 179—181.
Переменные коэфициенты, линейные уравнения с п. к. 116, 117—118, 118—122, 180—183, 183—185.
Переносное сопротивление, кажущееся, активное и рективное 173.
Переходный ток, 131, 132, 133, 134, 147, 152, 172.
Плотность электричества 48.
Поверхность вращения наименьшей площади 100—103.
Понижение порядка уравнения 74—76, 183—185, линейного уравнения 183—185.
Порядок уравнения 9, п. уравнения равен числу независимых постоянных, содержащихся в примитивной 37, понижение п. уравнения 74—76.
Постоянные коэфициенты, линейные уравнения с п. к. 10, 122—129, 129—137, 138, 140, 141—155, 158—174, системы линейных уравнений с п. к. 158—174, линейный диференциальный оператор с п. к. 141.

Потенциал, распределение п. в области, в которой произвольно распределены заряды электричества 47, 48, распределение п. в термионической пустотной трубке 48—49.
Потенциал скоростей 46, 76.
Пределы интегрирования, произвольные постоянные могут быть записаны в виде п. и. 51, 152, 153.
Прикосновение, линия п. 79.
Примитивная 29, образование диференциального уравнения из п. 36—38.
Принцип наложения 117—118, 119, 122, второй п. н. 160—162; *п. разложения* 118—122, 127, 128; *п. сохранения энергии* 103—104.
Произвольные постоянные, число п. п. в общем решении уравнения первого порядка 29, n-го порядка 31, исключение п. п. из уравнения семейства 36—38, п. п. могут быть записаны в виде пределов интеграции 51, 152, 153, число п. п. в решении системы уравнений 159, 160.
Простые дроби, разложение оператора на п. д. 145—147, 148, 159, 163—164, 167—168.
Пружина часов как изогнутая балка 93.
Пуассон, уравнение П. 47—48.
Пустотная трубка термионическая, распределение потенциалов в ней 48—49, 76, уравнения, встречающиеся при изучении некоторых явлений в п. т. 178—179.
Радиус кривизны 29, 30.
Разделение переменных 53—54.
Разложение, принцип р. 118—122, 127, 128; *р. оператора* на множители 141—144, 145, 147, на простые дроби, 145—147, 148, 159, 163—164, 167—168, в ряд 155—156, 157.
Распределение потенциала в области, в которой произвольно распределены заряды электричества 47, 48, в термионической пустотной трубке 48—49; *р. температуры* внутри шарового слоя 84—85, в бетоне, через который проходит железная трубка с нагретым паром 86, в длинных стержнях в зависимости от их толщины 86.
Распространение тепла 43—45, законы р. т. 43, р. т. в стержне 82—84.
Реактивное сопротивление 136, первичное и переносное 173.
Резонансные частоты 137.
Решение уравнения 10—11, число р. уравнения первого порядка 26—29, порядка выше первого 30—31, общее р. 29, общее р. уравнения первого порядка 29, n-го порядка 31, частотное р. 29, особое р. 29, 73, 77—81, существование р. 35, р. дополнительного уравнения 118, дополнительное р. 118.
Ряды, интегерирование при помощи р. 56—59, 155—156, 157, 176, 179, 180—182, уравнения, не интегрируемые с помощью р. 179—180.

Сведение линейного уравнения высшего порядка к системе линейных уравнений первого порядка 162—163.
Свободно падающее тело 90—91.
Сила тока 41.
Синусоидальный ток, его чистота, амплитуда и фаза 135—136.
Система уравнений 10, операторное решение с. у. 158—170, число произвольных постоянных в решении с. у. 159—160, сведение линейного

уравнения высшего порядка к с. у первого порядке 162—163.
Скорость химической реакции 38—39.
Собственная частота 133, 173.
Сопротивление тока, кажущееся 136, 137, активное 136, реактивное 136, первичное и переносное 173.
Сохранение энергии, принцип с. э. 103—104.
Стационарная температура 83.
Степень уравнения 9.
Стержень, распространение тепла в с. 82—84, 86, распределение температуры в с. 86.
Строительная колонна, изгиб с. к. 93—95.
Струна, колебание с. 95—97, 100.
Существование, доказательства с. решения диференциального уравнения 35.
Температура, градиент т. 43, стационарная т. 83, распределение т. внутри шарового слоя *84—85, в бетоне*, через который проходит железная трубка с нагретым паром 86, в длинных стержнях в зависимости от их толщины 86, т. изолирующего слоя кабеля, погруженного на дно бассейна 85—86.
Теорема Хевисайда 168, 170, обобщенная т. Х. 168—169.
Теория вероятностей, законы т. в. 111; *точечных множеств*, основная теорема т. т. м. 27, 28.
Теплоемкость 43.
Теплопроводность 43, уравнение т. 45—47.
Теплота, см. распространение тепла и температуры.
Термионическая пустотная трубка, распределение потенциалов в ней 48—49, 76, уравнение, встречающееся при изучении некоторых явлений в т. п. т. 178—179.
Термометр, изменение высоты ртутного столба т. *при переносе из теплой среды в холодную* 49, 54.
Течение тока в электрической сети 41—43, 129—137, 152, 171—174, его законы 41.
Ток, сила т. 41, течение т. в электрической сети 41—43, 129—137, 152, 171—174, законы течения т. 41, переходный т. 131, 132, 133, 134, 147, 152, 172, установившийся т. 131, 132, 134, 135, [illegible] ение т. [illegible] критическое затухание т. 134, частота, амплитуда и фаза синусоидального т. *135—138*, сопротивление т., кажущееся 136, 137, активное 170, реактивное 136, первичное и переносное 171.
Тон чистый или характеристический 99.
Точка, узловая 19, заострения 19, место т. заострения 20, 79.
Точные диференциалы, уравнение в т. д. 6[illegible]—68.
Траектория 87—89, ортогональные т. 89.

Узловая линия 20, 79.
Точка 19.
Умножение операторов 140—141.
Уравнение Бернулли 70—71, Бесселя 22, 180—183, 185, Лапласа 47, 48, Лежандра 23, Пуассона 47—48, у. кривой во внутренней форме 41, у. теплопроводности 45, 47, волновое у. 47, у. тока 132, 134, 137, 152, 171.
Установившийся ток 131, 132, 134, 135, 172, 173—174.

Фаза синусоидального тока 135, 136.
Функции бесселевы 180, 182—183.
Характеристические колебания, струны 97, 100, мембраны 99, 100.
Характеристический тон 99.
Характеристическое уравнение 124, случай кратных корней х. у. 148—151.
Хевисайд, теорема Х. 168, 170, обобщенная теорема Х. 168—169.
Химическая реакция, скорость х. р. 38—39.
Химические весы, кривая прогиба коромысла х. в. 95.

Частное решение 29.
Частота синусоидального тока 135, *136, собственная 133,173, резонансная* 137.
Численное интегрирование 55—58.
Число произвольных постоянных в общем решении уравнения первого порядка 29, *n*-го порядка 31, в системе уравнений 159—160; ч. *решений* уравнения первого порядка 26—29, порядка выше первого 30—31.
Чистый тон 99.

Шаровой слой, распределение температуры внутри ш. с. 84—85.

Эксцентрическая нагрузка 94.
Электрические сети, течение тока в э. с. 41—43, 129—137, 152, 171—174.
Электричество, партность э. 48, см. также потенциал и ток.
Эллиптические интегралы 93.