

a
183.908

О С Н О В Ы
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

71409335
Вн 1853 Р 44908



19 32

НКТП — СССР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СТРОИТЕЛЬНОЙ ИНДУСТРИИ И СУДОСТРОЕНИЯ

ГОССТРОЙИЗДАТ

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ПОДАШЕНС

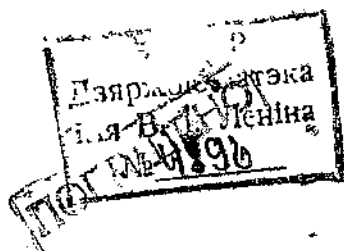
Редактор К. А. Драгалинов.

Технический редактор: Цингелский, Остриров, Сахарова.

С-10-5-2.

1964 г.

2009



Сдано в набор 21/III-32 г.
Подписано к печати 3/IX-32 г.

Уполномоченный Главлита № В-28947. Госстройиздат № 79. Тираж 10 000. Заказ № 937.
Формат 72×10./16. 10 1/2 печ. л. по 64 000 зн. в печ. листе.

Отпечатано в 1-й Образцовой типографии Отгиз РСФСР. Москва, Воровая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	5
Введение	7

Глава I.

1. Теория напряжений	9
2. Дифференциальные условия равновесия	11
3—4. Напряжения по косым площадкам	15
5. Главные напряжения	19

Глава II.

6. Геометрическая теория деформаций	20
7—8. Уравнения неразрывности деформаций	22

Глава III.

9. Обобщенный закон Гука	28
10. Нормальные напряжения	29
11. Касательные напряжения	30
12. Более общий вывод уравнений	31
13. Работа упругих сил в твердом теле	—
14. Потенциал упругих сил	32
15. Форма зависимостей между напряжениями и деформациями	33
— Начальные напряжения; гипотеза о естественном состоянии тела	34
16. Упругие постоянные	35
17. Изотропное тело	36

Глава IV.

18—20. Решение задачи теории упругости в перемещениях	40
21—26. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде	44

Глава V.

27—29. Кручение призматических стержней	53
30—32. Стержень эллиптического сечения	57
33—34. Стержень треугольного сечения	60

Глава VI.

35. Решение задачи теории упругости в напряжениях	63
36. Кручение круглого стержня	64
37. Принцип Сен-Венана	65
38—39. Окончание задачи о кручении круглого стержня	67
40—42. Чистый изгиб прямого стержня	69
43. Растяжение цилиндра под действием собственного веса	74
44. Однозначность решения уравнений теории упругости	78

Глава VII.

45—51. Плоская задача в декартовых координатах	80
52. Решение плоской задачи в полиномах	87
53. Чистый изгиб	88
54—56. Случай поперечного изгиба	—

57. Другой случай поперечного изгиба	Отр. 94
58--59. Треугольная подпорная стенка	98

Глава VIII.

60--63. Плоская задача в полярных координатах	102
64. Задчи, в которых напряжения не зависят от полярного угла	107
65. Задача Ламе	108
66. Чистый изгиб части круглого кольца	109
67--68. Действие с сосредоточенной силы	110
69.. Сплошная нагрузка	112
70. Обобщение задачи § 67	116
71. Сосредоточенная сила внутри неограниченной пластинки	118
72. Сжатие круглой пластинки двумя сосредоточенными силами (задача Герца)	120
73. Общее решение для задач главы VIII	120

Глава IX.

74. Общее решение задачи теории упругости в напряжениях	124
75--76. Кручение	127
77. Случай поперечного изгиба	131
78. Пример. Изгиб круглого бруска	134

Глава X.

79. Изгиб плоской пластинки	136
80. Цилиндрический изгиб пластинки	137
81. Чистый изгиб пластинки	139
82--84. Кручение пластинки	142
85. Общий случай изгиба пластинки	146
86--87. Общее уравнение искривленной срединной плоскости пластинки	148
88. Эллиптическая пластинка	151
89--91. Прямоугольная пластинка	152
92. Круглая пластинка	158
93. Аналогия с мембраной. Метод Маркуса	161
Добавление. Задача Сен-Венана	163

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уровень требований, предъявляемых строительством к теории расчета прочности и устойчивости сооружений, весьма быстро растет; это объясняется усложнением самих сооружений, ростом размеров их и увеличением объема строительства. Эти условия, с одной стороны, создают стимул для научно-исследовательской работы в направлении углубления методов расчета, а с другой — возбуждают среди инженеров все растущее стремление к ознакомлению с тем более углубленным учением об упругом теле, которое носит название математической теории упругости. Некоторые строительные вузы¹ уже давно признали необходимым включить основы теории упругости в свои учебные планы по отдельным специальностям, предпосылая ей небольшие дополнительные сведения из математики.

В литературе, предназначенной для инженеров, все чаще начинают встречаться работы, основанные на методах теории упругости. Между тем на русском языке уже много лет не издавалось ни одного пособия, которое позволяло бы инженеру ознакомиться с основами учения теории упругости и дать ему базу для освоения интересующих его работ в этой области². Эти соображения заставили автора спешно подготовить к печати настоящее небольшое пособие, не являющееся курсом, но содержащее лишь крайне необходимые сведения, которые касаются построения основных систем уравнений теории упругости и применения их на практике к наиболее простым случаям, не требующим особо сложных математических методов. Вследствие этого общая теоретическая часть предмета в настоящей книге сжата до минимальных размеров и ограничена объемом первых трех глав и небольшими добавлениями в дальнейшем, касающимися вывода нужных основных уравнений.

При выборе задач преследовалась цель дать применение метода теории упругости в наиболее простой обстановке (с точки зрения математических трудностей); вместе с тем взят ряд задач, уже известных из сопротивления материалов, для того, чтобы на них читатель мог составить себе понятие как о различии между приближенными приемами сопротивления материалов и более полным и точным методом теории упругости, так и о существующей связи между ними. Последнее соображение имеет большое значение для инженеров, преподающих сопротивление материалов, так как поможет им глубже овладеть методологией предмета и подтвердить целесообразность некоторых основных допущений, делающихся в нем; с этой целью например в конце книги добавлена так называемая задача С.-Венана.

Желание дать книгу небольшого объема, в связи с указанным ее назначением, вызвало некоторые особенности построения и самого изложения вопросов. Процесс решения отдельных задач по возможности доведен до конца со стороны математической техники; при решении плоской задачи в полиномах несколько развиты способы подыскания функции

¹ Например бывшие: Ленинградский институт инженеров путей сообщения, Ленинградский политехнический институт, Московский институт инженеров транспорта, Московское высшее техническое училище.

² Единственный курс теории упругости С. П. Тимошенко был издан в 1914—1916 гг. и уже давно исчез с рынка.

напряжений на основе элементарного решения (§§ 54 и 57) или по заданному условию о напряжениях (§§ 67 и 70).

При решении простейших задач (§§ 38—43) принят несколько окольный путь определения перемещений, дающий предварительно общий вид искомых функций при помощи дифференциальных уравнений более высокого порядка.

С целью помощи читателю при выработке им навыков в оперировании с обозначениями и основными уравнениями теории упругости, в конце I и II глав дано небольшое число упражнений в этой области. Инициатива введения таких упражнений принадлежит доценту ВИСУ Б. Н. Веденисову, много поработавшему над постановкой курса теории упругости в С. МВТУ и в ВИСУ. Небольшой объем книги не позволил включить в нее учение об упругой энергии и основные теоремы, вытекающие из этого учения; по этой же причине не затронут чрезвычайно важный и плодотворный метод Ритца, давший множество важных решений.

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости представляет собой весьма важную часть большого цикла дисциплин, называемого математической физикой. Она рассматривает действие сил на упругие тела с точки зрения возникающих в них напряжений и деформаций, как в состоянии равновесия, так и в движении.

Теми же вопросами, как известно, занимается и сопротивление материалов, и разницы между этими двумя дисциплинами в смысле их общих целей нет. Однако в сопротивлении материалов мы путем некоторых упрощений в постановке задач и в методе их решения стараемся получить возможно более простые результаты, удобно применяемые в расчетной практике.

Теория упругости старается подойти к решению задач более общим и более точным методом. Целью этого метода являются, прежде всего, проверка упрощенных решений сопротивления материалов и определение размеров получающихся неточностей; вместе с тем имеется ряд задач, самый подход к которым методами сопротивления материалов невозможен; это главным образом задачи, в которых упругое тело не имеет типичной для сопротивления материалов формы стержня и бруска; сюда же следует отнести задачи о местных напряжениях, возникающих в местах приложения к упругому телу нагрузок. Решения подобных задач, даваемые теорией упругости, имеют непосредственный практический интерес.

Следует заметить, что к теории упругости относят также много задач, решаемых с той же степенью приближения, как и в сопротивлении материалов, но требующих более сложных методов математического анализа (стержни двойной кривизны, пластинки, оболочки, теории колебаний упругих тел, устойчивость упругих форм равновесия). Вообще можно сказать, что теория упругости в отличие от сопротивления материалов рассматривает все те задачи, где математическая сторона является более сложной. Точной границы между обеими этими дисциплинами провести нельзя, и многие задачи фигурируют и тут и там.

Следует заметить, что основной, более точный и более общий метод теории упругости требует и значительно более сложного математического анализа; решение задач значительно усложняется, и до настоящего времени многие задачи, играющие большую роль в практике, не имеют решения, хотя к настоящему времени теория упругости развилась уже в мощную дисциплину, широко использующую аппарат математического анализа и имеющую собственную богатую литературу.

Настоящая книга является первым концентром в изучении теории упругости. Она знакомит читателя с основными уравнениями теории упругости и дает приложение их к небольшому количеству задач, не требующих сложного математического анализа. Некоторые из этих задач показывают применение метода теории упругости к вопросам, уже знакомым из сопротивления материалов (изгиб прямого бруска, кручение круглого стержня), другие же дают новые решения, не получающиеся в сопротивлении материалов. Более сложные задачи, требующие и более сложного

математического анализа, в эту книгу не входят; для них необходима теория интегрирования дифференциальных уравнений в бесконечных рядах, связанная с применением эллиптических, Бесселевых и других высших трансцендентных функций.

Это должно составлять последующие концентры изучения предмета для читателя, желающего углубить свои знания в области упругих явлений.

Все основные общие положения теории упругости даны в гл. I, II, III, IV и VI. Здесь выведены основные системы уравнений, на которых может быть построено решение всех частных задач. Следует обратить внимание на подготовительные гл. I, II и III, обрисовывающие всю структуру предмета.

Гл. I (теория напряжений) освещает статическую сторону вопроса, обобщая метод разреза и уравнивания внутренних сил, применяемый в сопротивлении материалов. Гл. II (теория деформаций) дает геометрическую сторону вопроса, изучая деформацию как геометрический фактор. Именно в этой части задачи теории упругости подымают нас на значительно высшую ступень по сравнению с элементарным методом сопротивления материалов. Гл. III устанавливает связь между статическими характеристиками (напряжениями) и геометрическими характеристиками (деформациями) явления. Это есть физическая сторона вопроса, или так называемый обобщенный закон Гука. Так как теория упругости сама есть физическая дисциплина, то значение этой стороны в ее структуре несомненно.

Указанная трехсторонность структуры является общей для сопротивления материалов и теории упругости; однако, в первом из них она несколько затупевана элементарным методом изложения и построением теории на ряде частных случаев. В теории упругости, структура четко выявлена, и основные системы уравнений ясно разделяются на статические (гл. I, уравнения I и II), геометрические (гл. II, уравнения III и IV) и физические (гл. III, уравнения V, V_a , V' , V'_a). Все они могут быть синтезированы в форме знаменитых общих уравнений Ламе (уравнения VI, гл. IV).

Указанные вводные главы I, II и III в этой книге кратки, так как из соответствующих им теорий здесь удержано лишь существенно необходимое в соответствии с назначением книги как первого концентратора.

ГЛАВА I

Теория напряжений

§ 1. Понятие о напряжениях и способы обращения с ними в более простых случаях известны из сопротивления материалов. Здесь нам прежде всего придется ввести такие обозначения напряжений, которые были бы удобны в пространственной задаче и позволяли бы легко различать напряжения по различным площадкам, проведенным через данную точку тела.

Существует несколько систем обозначений; здесь мы пользуемся английской системой, принятой также в курсе теории упругости С. П. Тимошенко.

Представим себе (фиг. 1) твердое тело, рассеченное плоскостью на две части A и B . Часть B после разреза отбросим; в плоскости сечения выделим элементарную площадку $d\omega$; направление этой площадки будем характеризовать внешней нормалью к ней (внешней по отношению к оставшейся части A).

При помощи внешней нормали мы кратко и ясно указываем, не только направление площадки, но и ту часть тела (B или A), которая отбрасывается после разреза и действие которой мы далее заменяем силами.

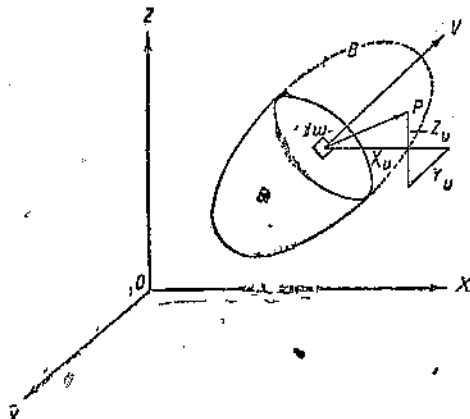
Пусть p — полное напряжение по данной площадке: $p = \frac{dF}{d\omega}$, где dF — равнодействующая сил, приходящихся на площадку $d\omega$.

Нам тим где-либо в пространстве произвольную систему прямоугольных координат $OXYZ$, при помощи которой будем определять положение точек рассматриваемого тела. Напряжения будем определять их проекциями на оси этой системы; ею же далее воспользуемся при исследовании деформаций.

Проекция на оси координат полного напряжения p по площадке $d\omega$ обозначим через X_v, Y_v, Z_v . В этих обозначениях основная буква X , или Y , или Z указывает, на какую ось берется проекция; значок v при ней указывает на направление внешней нормали к той площадке, напряжение по которой рассматривается; поэтому, например, обозначение X_v должно быть высказано так: „проекция на ось OX полного напряжения по площадке с внешней нормалью V “.

Если мы после разреза отбросим часть A , то внешняя нормаль к той же площадке $d\omega$ будет иметь обратное направление. Проекция полного напряжения по ней придется обозначить так: X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v} ; при этом очевидно, что

$$X_{-v} = -X_v; Y_{-v} = -Y_v; Z_{-v} = -Z_v.$$



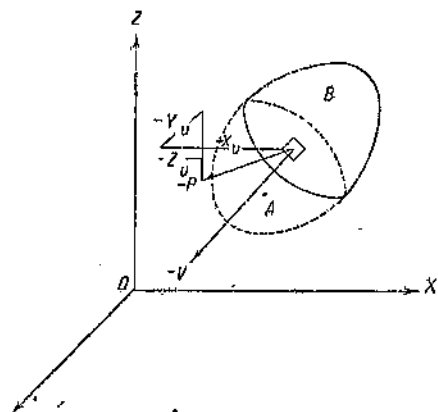
Фиг. 1.

N 4896.

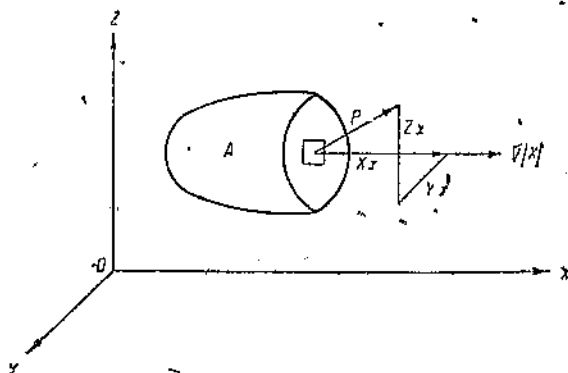
так как напряжения X_v, Y_v, Z_v выражают действие части B на часть A ; а напряжения X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v} выражают действие части A на часть B , действия эти равны по величине, но противоположны по направлению.

В сопротивлении материалов мы обычно полное напряжение разлагаем на нормальную и касательную составляющие; введенные нами теперь проекции напряжения

$$X_v, Y_v, Z_v$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

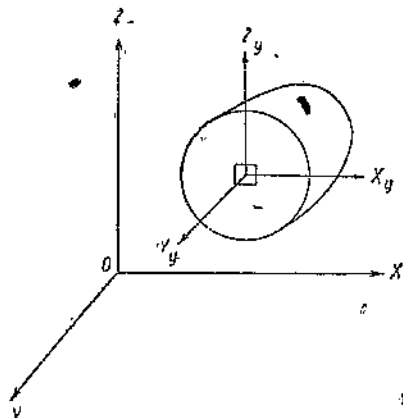
на случайно выбранные оси координат OX, OY, OZ , вообще говоря, не будут ни нормальными, ни касательными.

Однако в последующем мы чаще всего будем делать разрез перпендикулярно к какой-либо оси координат. Например делаем разрез перпендикулярно к оси OX ; тогда получаем следующие проекции полного напряжения (фиг. 3):

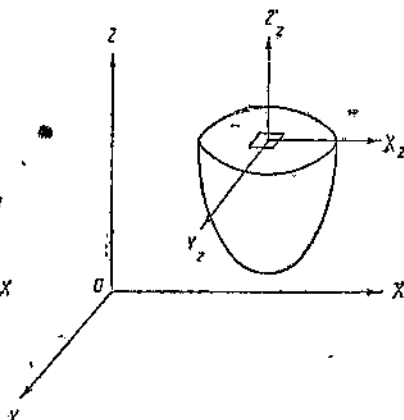
$$X_w; Y_w; Z_w$$

В этом случае:

X_w — будет нормальное напряжение,
 Y_w, Z_w — касательные напряжения.



Фиг. 4а.



Фиг. 4б.

На фиг. 4а и 4б показаны обозначения напряжений по площадкам, нормальным к остальным двум осям. Собирая эти результаты, получаем такую систему напряжений по площадкам, параллельным координатным плоскостям:

$$X_w, Y_w, Z_w; X_y, Y_y, Z_y; X_z, Y_z, Z_z$$

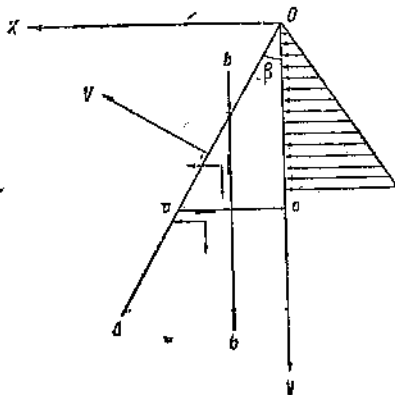
Легко видеть, что напряжения

$$X_w, Y_w, Z_w$$

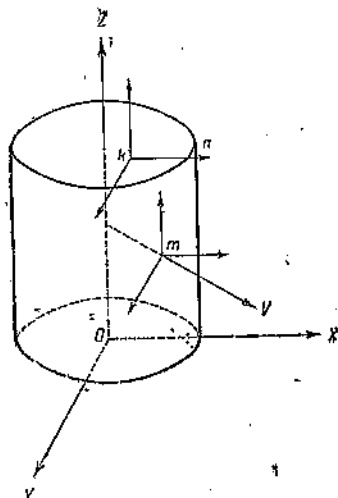
в обозначении которых обе буквы одинаковы, — есть нормальные напряжения. Остальные шесть являются касательными.

Для лучшей ориентировки в этих новых обозначениях предлагаем читателю сделать следующие упражнения.

1. На фиг. 5 изображено поперечное сечение YOA стенки плотины, которая по грани OY нагружена давлением воды; грань OA не несет нагрузки.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Обозначить нормальное и касательное напряжения по грани OY и написать, чему они равны (обращать внимание на направление давления, направление оси OX и знак проекции). Обозначить также составляющие напряжения по косой грани OA (внешняя нормаль V) и записать отсюда условия того, что грань OA свободна от нагрузки. Обозначить напряжения по сечениям aa и bb при условии отбрасывания той или иной части (левой или правой; верхней или нижней) стенки после разреза.

2. Цилиндрическое тело (фиг. 6) скручивается силами, приложенными по концевым поперечным сечениям. Обозначить напряжения в любой точке k поперечного сечения ln и записать условие, что нормальное напряжение отсутствует. Обозначить напряжение в любой точке m боковой поверхности и записать условия, что эта поверхность ничем не нагружена.

3. Цилиндрический брусок (фиг. 7) изгибается силами, приложенными в концевом поперечном сечении pq . Записать условия того, что боковая поверхность свободна от нагрузки (см. предыдущее упражнение), обозначить те напряжения по сечению mn (нормальные и касательные), которые определяются в сопротивлении материалов.

Дифференциальные условия равновесия

§ 2. Из твердого тела выделим бесконечно-малый элемент в форме параллелепипеда тремя плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Ребра этого параллелепипеда пусть будут dx , dy , dz (фиг. 8).

Объем его: $dv = dx \cdot dy \cdot dz$. После разреза действие отброшенных частей заменим силами.

Напряжение по каждой грани разложим на 3 составляющих.

Итого по всем граням будет действовать: $6 \times 3 = 18$ составляющих напряжений. Это будут внешние силы, действующие на наш параллелепипед. Кроме того будем предполагать, что в данном теле существуют внутренние, так называемые объемные силы. Будем считать, что эти силы приложены к массе тела; такова например сила тяжести, с которой мы далее и будем иметь дело.

Пусть к единице массы тела приложены некоторые объемные силы, которые мы также разлагаем на 3 составляющих X, Y, Z . Тогда объемные силы, приходящиеся на массу параллелепипеда ρdv (ρ — плотность тела в данной точке), будут:

$$X\rho dv = X\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz; \quad Y\rho dv = Y\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz; \quad Z\rho dv = Z\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Напряжения, вызываемые внешними силами в твердом теле, различны в разных точках его и потому они, вообще говоря, должны выражаться функциями от координат точек:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= F_1(x, y, z) \\ Y_y &= F_2(x, y, z) \\ Z_z &= F_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и т. д.

Если на площадку $abcd$ элемента (фиг. 8) действует напряжение $X_x = -X_x$, то на площадку $a'b'c'd'$ действует напряжение: $X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx$,

так как, переходя к площадке $a'b'c'd'$, мы в первом уравнении (1) изменяем лишь одну из координат x . Таким образом легко обозначим напряжения по всем площадкам, ограничивающим параллелепипед.

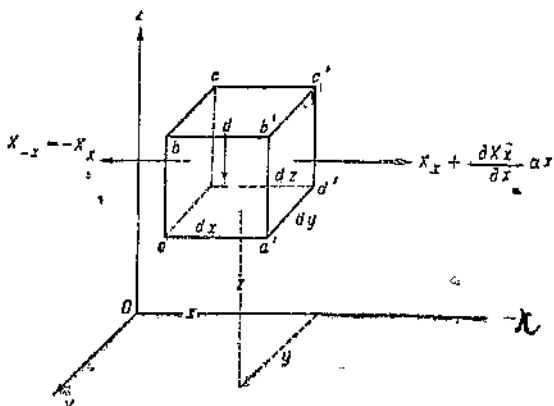
Предполагаем, что данное твердое тело находится в равновесии; тогда для каждого отдельного элемента должны удовлетворяться 6 условий равновесия статики:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

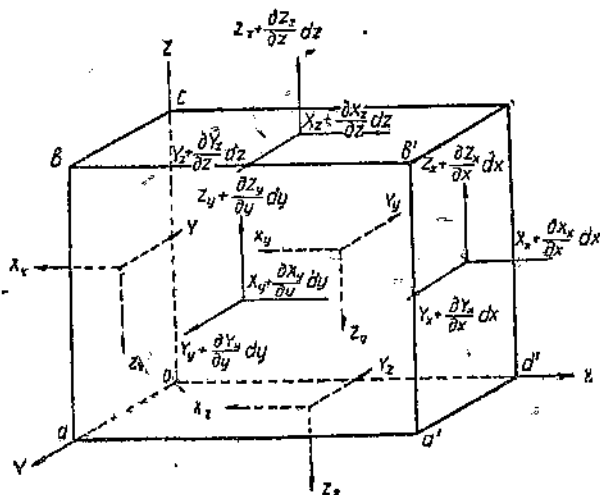
Займемся сначала первой группой этих условий и, в частности, остановимся на первом уравнении:

$$\sum X = 0; \quad (3)$$

поэтому пока придется принять во внимание только те силы, которые дают проекции на ось OX ; это будут нормальные напряжения по бокам



Фиг. 8.



Фиг. 9.

вым граням (фиг. 9) и касательные напряжения, параллельные оси OX по остальным граням.

Раскрывая условие равновесия (3), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) dy dz - X_x \cdot dy dz + \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz - X_y \cdot dx \cdot dz + \\ & + \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \right) dy \cdot dx - X_z \cdot dy \cdot dx + X \rho dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left(= \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).$$

Если мы рассматриваем случай движения частиц упругого тела (упругие колебания), то $\sum X$ не обращается в нуль, но, согласно второму закону Ньютона, будет равна произведению массы элемента на проекцию его ускорения на ось OX если проекции пути (перемещения), проходящего данной точкой на оси координат, обозначим через u , v и w , то ускорение вдоль оси OX будет $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; поэтому в правой части ур-ния (4) будет стоять выражение:

$$\rho dv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

как это показано в скобках.

По сокращении ур-ния (4) и разделении на $dx \cdot dy \cdot dz = dv$, получим его в окончательном виде:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X \rho = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).$$

Таким же путем раскрываем остальные 2 условия:

$$\sum Y = 0, \sum Z = 0.$$

В правой части, в случае движения, вместо нуля будут произведения массы элемента на ускорения вдоль соответственных осей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y \rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z \rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Переходим теперь к раскрытию последних трех условий равновесия (2).

Возьмем например условие $\sum M_y = 0$. На чертеже поэтому сохраним только силы, могущие дать моменты вокруг оси OY , т. е. нормальные к ней. Начало координат для упрощения выкладок поместим в одной из вершин параллелепипеда (фиг. 10).

Обратим внимание на то, что моменты одних из показанных на чертеже сил будут бесконечно-малыми величинами 3-го порядка, другие же — 4-го порядка. Например для нормальных сил по левой и правой граням мы имеем момент:

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - X_x dy dz \cdot \frac{dz}{2},$$

этот момент в итоге оказывается величиной 4-го порядка; такой же порядок будут иметь моменты объемных сил:

$$+X_p dx dy dz \cdot \frac{dz}{2}; -Z_p dx dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2}.$$

Рассматривая фиг. 10, найдем только две силы, дающие момент 3-го порядка; на чертеже они показаны жирнее. Приравняв нулю сумму моментов этих сил вокруг оси OY , получим:

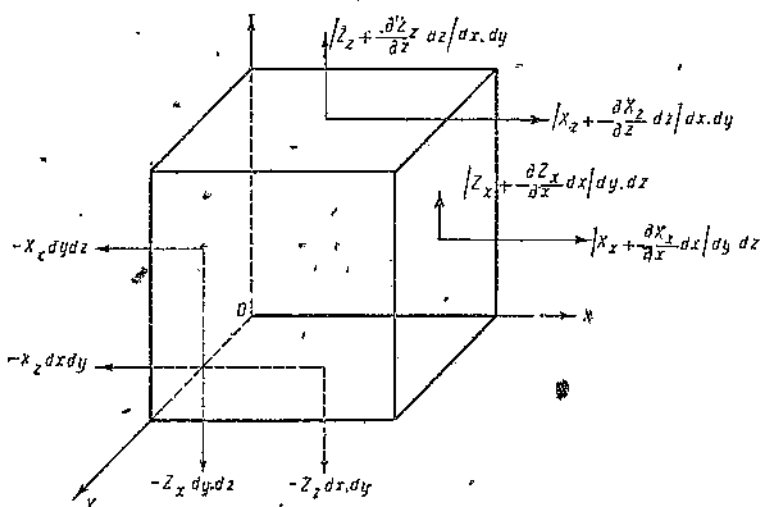
$$\left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz\right) dx \cdot dy \cdot dz - \left(Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x} dx\right) dx \cdot dy \cdot dz = 0;$$

отбрасывая здесь бесконечно малые величины 4-го порядка, получим:

$$X_z dx \cdot dy \cdot dz - Z_x dy \cdot dz \cdot dx = 0,$$

или, сокращая, имеем:

$$X_z = Z_x$$



фиг. 10.

Это есть закон сопряженности касательных напряжений уже знакомый нам из сопротивления материалов. Соответственно этому два другие уравнения дают:

$$Y_x = X_y; \quad Z_y = Y_z;$$

таким образом условия равновесия статики привели нас к трем дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (I)$$

содержащим 9 функций от координат рассматриваемой точки: $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$; однако закон сопряженности касательных напряжений

$$\left. \begin{aligned} Y_x &= X_y \\ Z_x &= X_z \\ X_y &= Y_x \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

показывает, что 3 из этих 9 функций попарно равны трем другим. Следовательно мы получим 3 дифференциальные уравнения (I), содержащие 6 неизвестных функций:

$$\left. \begin{aligned} X_w &= F_1(X, Y, Z) \\ Y_w &= F_2(X, Y, Z) \\ Z_w &= F_3(X, Y, Z) \\ X_v &= F_4(X, Y, Z) \\ Y_v &= F_5(X, Y, Z) \\ Z_v &= F_6(X, Y, Z) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Так как число неизвестных (5) превышает число уравнений (I), то заключаем, что задача теории упругости оказывается статически неопределимой. Недостающие уравнения мы можем получить, лишь изучая условия деформации и учитывая физические свойства данного упругого тела.

Уравнения (I) обеспечивают равновесие одного бесконечно-малого элемента, выделенного из тела. Однако, если мы напряжения (5) выразим в виде таких функций, что уравнения (I) будут удовлетворены во всех точках рассматриваемого тела, то этим будет обеспечено равновесие всех элементов, составляющих его; значит и все тело в целом будет в равновесии.

Метод, при помощи которого мы вывели уравнения (I), применяется, и в сопротивлении материалов, например, для получения зависимостей между моментом, поперечной силой и нагрузкой при изгибе:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

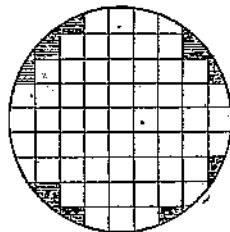
или для вывода касательных напряжений при изгибе.

Для этих целей мы там выделяем из бруска бесконечно тонкий слой между двумя поперечными сечениями, т. е. элемент, бесконечно-малый в одном направлении; здесь же переходим к более глубокому анализу и выделяем элемент бесконечно-малый по всем трем измерениям.

Напряжения по косым площадкам

§ 3. Уравнения равновесия (I) связывают между собой напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям.

Однако нам иногда требуется знать напряжения по площадкам, наклоненным иначе; с другой стороны, если мы все упругое тело будем разбивать на элементы плоскостями, параллельными координатным, то у поверхности тела, вообще говоря, не будем в состоянии выделить элементы в форме параллелепипеда (фиг. 11). По полученным на поверхности наклонным граням, очевидно, будут действовать внешние силы (нагрузки), приложенные к данному телу. Приведенные соображения заставляют нас вывести еще соотношение между напряжениями по 3 площадкам, параллельным координатным плоскостям, и напряжениями по площадке, как угодно наклоненной к этим плоскостям.



Фиг. 11.

Для получения этих соотношений рассмотрим (фиг. 12) бесконечно-малый элемент, выделенный из данного твердого тела, тремя плоскостями, параллельными координатным, и четвертой плоскостью, пересекающей все три оси, т. е. рассмотрим элемент $Oabc$ в форме тетраэдра или треугольной пирамиды.

Назовем площадь его грани abc через $d\omega$ и пусть внешняя нормаль к ней будет V ; тогда площади остальных граней найдем, как проекции

грани abc на координатные плоскости.

$$\begin{aligned} \text{Пл. } abc &= d\omega; \text{ пл. } oab = d\omega \cos(VZ); \\ \text{пл. } abc &= d\omega \cos(VX); \\ \text{пл. } oac &= d\omega \cos(VY). \end{aligned}$$

Пусть X_v, Y_v, Z_v — проекции на оси координат полного напряжения p по площадке abc .

Тогда условие равновесия выделенного тетраэдра $\sum X = 0$ дает:

$$\begin{aligned} \sum X &= X_v \cdot d\omega - X_x \cdot d\omega \cos(VX) - \\ &\quad - X_y \cdot d\omega \cos(VY) - \\ &\quad - X_z \cdot d\omega \cos(VZ) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Фиг. 12.

Сокращая на $d\omega$, имеем:

$$X_v = X_x \cdot \cos(VX) + X_y \cdot \cos(VY) + X_z \cdot \cos(VZ).$$

Аналогично, другие два условия равновесия дают:

$$\begin{aligned} Y_v &= Y_x \cdot \cos(VX) + Y_y \cdot \cos(VY) + Y_z \cdot \cos(VZ); \\ Z_v &= Z_x \cdot \cos(VX) + Z_y \cdot \cos(VY) + Z_z \cdot \cos(VZ). \end{aligned} \quad (\Pi)$$

В эти ур-ния не вошли объемные силы, так как они будут малыми 3-го порядка, например: $\rho X dv = \rho X \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{6}$, между тем как все члены ур-ния (6) — 2-го порядка.

Предполагаем, что в пределе площадь грани abc стремится к нулю; тогда ур-ния (II) дают связь между напряжениями в точке O по косо́й площадке с внешней нормалью V и по трем площадкам, параллельным координатным плоскостям. Если мы вырезаем тетраэдр $Oabc$ у поверхности и грань abc принадлежит поверхности, то X_v, Y_v, Z_v являются составляющими напряжения от внешних сил (нагрузок данного тела), приложенных на поверхности. Тогда ур-ния (II) дают связь между внешней нагрузкой и внутренними силами. В этом случае они называются условиями на поверхности тела. Если элемент $Oabc$ вырезан внутри упругого тела, то X_v, Y_v, Z_v являются проекциями полного напряжения p по косо́й площадке на оси случайной системы координат $OXYZ$. Зная проекции полного напряжения (X_x, Y_x, Z_x), без труда найдем нормальные и касательные напряжения по площадке abc .

Для этой цели примем нормаль V за новую ось координат. Другие две оси U, W выберем в плоскости abc (фиг. 13). Обозначим косинусы углов между старыми и новыми осями по схеме:

	X	Y	Z
U	l_1	m_1	n_1
V	l_2	m_2	n_2
W	l_3	m_3	n_3

Тогда ур-ния (II) перепишем короче:

$$\begin{aligned} X_v &= X_x \cdot l_2 + X_y \cdot m_2 + X_z \cdot n_2 \cdot l_2 \\ Y_v &= Y_x \cdot l_2 + Y_y \cdot m_2 + Y_z \cdot n_2 \cdot m_2 \\ Z_v &= Z_x \cdot l_2 + Z_y \cdot m_2 + Z_z \cdot n_2 \cdot n_2 \end{aligned} \quad (IV)$$

Очевидно (фиг. 13), нормальное напряжение по пл. abc получим как сумму проекций напряжений X_v, Y_v, Z_v на нормаль V .

Обозначая нормальное напряжение по принятой нами системе через V_v , получим:

$$\begin{aligned} V_v &= X_v \cdot l_2 + Y_v \cdot m_2 + Z_v \cdot n_2 = X_x \cdot l_2^2 + \\ &+ Y_y \cdot m_2^2 + Z_z \cdot n_2^2 + 2Y_x \cdot m_2 \cdot n_2 + \\ &+ 2Z_x \cdot n_2 \cdot l_2 + 2X_y \cdot l_2 \cdot m_2. \end{aligned} \quad (A)$$

Аналогично получим касательные напряжения, проектируя X_v, Y_v, Z_v на ось U :

$$\begin{aligned} U_v &= X_v \cdot l_1 + Y_v \cdot m_1 + Z_v \cdot n_1 = X_x \cdot l_1 \cdot l_2 + Y_y \cdot m_1 \cdot m_2 + Z_z \cdot n_1 \cdot n_2 + \\ &+ Y_x \cdot (m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1) + Z_x \cdot (n_1 \cdot l_2 + n_2 \cdot l_1) + X_y \cdot (l_1 \cdot m_2 + l_2 \cdot m_1). \end{aligned} \quad (B)$$

Предлагается для упражнения написать таким же путем другую составляющую касательного напряжения W_v .

§ 4. Легко видеть, что формулы (A) и (B) являются обобщением на пространственный случай известных из сопротивления материалов формул для напряжений по косым площадкам.

Действительно, если все силы расположены в плоскости OXY , то вместо тетраэдра $Oabc$ можно выделять треугольную призму Oab (фиг. 14).

В формулах (A) и (B) исчезают Z_v, Y_v, X_z и они получают вид:

$$\left. \begin{aligned} V_v &= X_x \cdot l_2^2 + Y_y \cdot m_2^2 + 2X_y \cdot l_2 \cdot m_2 \\ U_v &= X_x \cdot l_1 \cdot l_2 + Y_y \cdot m_1 \cdot m_2 + X_y \cdot (l_1 \cdot m_2 + l_2 \cdot m_1) \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Углы $(U, X), (U, Y), (V, X), (V, Y)$ указаны в схеме a , а соответственные косинусы в схеме b :

	X	Y
U	a	$\frac{\pi}{2} + a$
V	$\frac{\pi}{2} - a$	a

(a)

	X	Y
U	$l_1 = \cos a$	$m_1 = -\sin a$
V	$l_2 = \sin a$	$m_2 = \cos a$

(b)

На основании схемы b ур-ния (C) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} V_v &= X_x \cdot \sin^2 a + Y_y \cdot \cos^2 a + 2X_y \cdot \sin a \cos a \\ U_v &= (X_x - Y_y) \sin a \cos a + X_y (\cos^2 a - \sin^2 a) \end{aligned} \right\} \quad (C')$$

известный из сопротивления материалов. Ур-ния (C') проще всего вывести из фиг. 14.

Главные напряжения

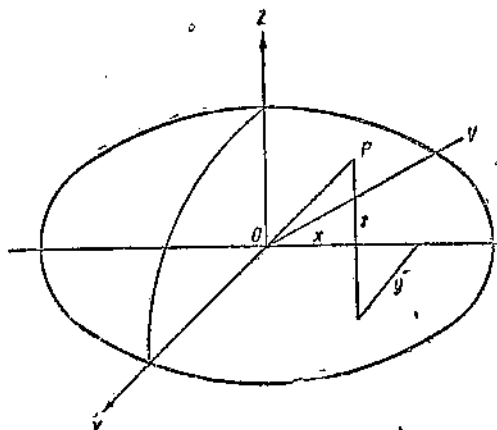
§ 5. В любой точке напряженного упругого тела существует три взаимно-перпендикулярных площадки типа abc , по которым нет касательных напряжений. Такие площадки называются главными. Нормальные напряжения по этим площадкам называются главными напряжениями.

Предположим, что плоскости координат OXY , OYZ и OZX совпадают с главными площадками в данной точке. Тогда по этим площадкам: $Y_x = Z_y = 0$; $Z_x = X_z = 0$; $X_y = Y_x = 0$; при этих условиях ур-ния II упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cdot l_2 \\ Y_v &= Y_y \cdot m_2 \\ Z_v &= Z_z \cdot n_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Соотношения (7) можно изобразить геометрически. Для этого из данной точки O (фиг. 15) будем откладывать вектор OP , равный полному напряжению по выбранной площадке с внешней нормалью V ; координаты конца этого вектора будут:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_v \\ y &= Y_v \\ z &= Z_v \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



Фиг. 15.

При изменении наклона площадки точка P будет описывать некоторую поверхность, которая называется эллипсоидом; дей-

ствительно, на основании (8) и (7) получается:

$$x = X_x \cdot l_2; \quad y = Y_y \cdot m_2; \quad z = Z_z \cdot n_2;$$

отсюда:

$$\frac{x^2}{X_x^2} + \frac{y^2}{Y_y^2} + \frac{z^2}{Z_z^2} = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1;$$

а это есть ур-ние эллипсоида, отнесенного к главным осям. Эллипсоид этот называется эллипсоидом напряжений. Из трех его полуосей одна будет наибольшей, другая наименьшей, третья будет средней между ними; следовательно, из трех главных напряжений одно будет наибольшее, другое наименьшее, а третье среднее между ними.

Отсюда следует, что в пространственной задаче главные напряжения не могут определяться как наибольшее и наименьшее из всех нормальных напряжений в данной точке.

На дальнейших деталях теории напряжений мы здесь не останавливаемся; читателю, желающему детально ознакомиться с ними, следует обратиться к полным курсам теории упругости.

Упражнения к п. п. 2—4.

1. В стенке плотины, изображенной на фиг. 5, найдены следующие напряжения:

$$X_x = -\gamma y; \quad Y_y = \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} + p \right) y;$$

$$Y_x = X_y = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x; \quad Y_z = Z_y = X_z = Z_x = Z_z = 0.$$

Подставить эти выражения в ур-ния (I) и проверить, при каких условиях они будут удовлетворены. Найти нагрузку, действующую по грани OY (т. е. при $x=0$); пользуясь условиями (II), найти также нагрузку по грани OA (при $x=y \tan \beta$).

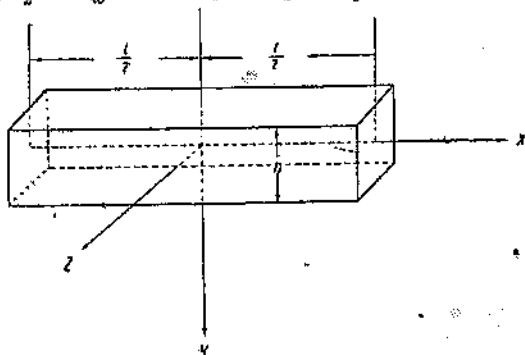
2. В круглом стержне диаметра $2r$ (фиг. 6) возникают следующие напряжения:

$$X_x = Y_y = Z_z = X_y = Y_x = 0; \quad X_z = Z_x = -G\tau y; \quad Y_z = Z_y = G\tau x.$$

Проверить, удовлетворяют ли они ур-ниям (I) и при каких условиях. Доказать при помощи ур-ний (II), что боковая поверхность свободна от нагрузки (т. е. что $X_x = Y_y = Z_z = 0$).

Указание: для точки на боковой поверхности:

$$\cos(VX) = \frac{x}{r}; \quad \cos(VY) = \frac{y}{r}.$$



Фиг. 16.

3. При чистом изгибе прямого стержня (фиг. 7) возникают напряжения:

$$X_x = -\frac{Ez}{\rho}; \quad Y_y = Z_z = X_y = Y_z = Z_x = 0.$$

Выполнить то же, что в предыдущем упражнении.

4. В бруске прямоугольного сечения имеются напряжения (фиг. 16):

$$X_x = \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qy^2}{20} \right) y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3;$$

$$Y_y = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right); \quad X_y = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x; \quad Y_z = Z_x = Z_z = 0.$$

Проверить, удовлетворяют ли эти напряжения ур-ниям (I); найти нагрузки, действующие по граням бруска; какой случай работы бруска здесь имеется с точки зрения сопротивления материалов?



ГЛАВА II

Геометрическая теория деформаций

§ 6. Возьмем какое-либо упругое твердое тело и закрепим его так, чтобы оно не могло перемещаться, как тело абсолютно твердое. Тогда перемещения всякой точки его будут вызываться только деформациями.

Рассмотрим какую-либо точку $M(x, y, z)$ закрепленного таким образом твердого тела (фиг. 17).

Благодаря происшедшей деформации, точка M переместится в новое положение M' . Назовем проекции перемещения MM' на оси координат через

$$u, v, w; \quad (9)$$

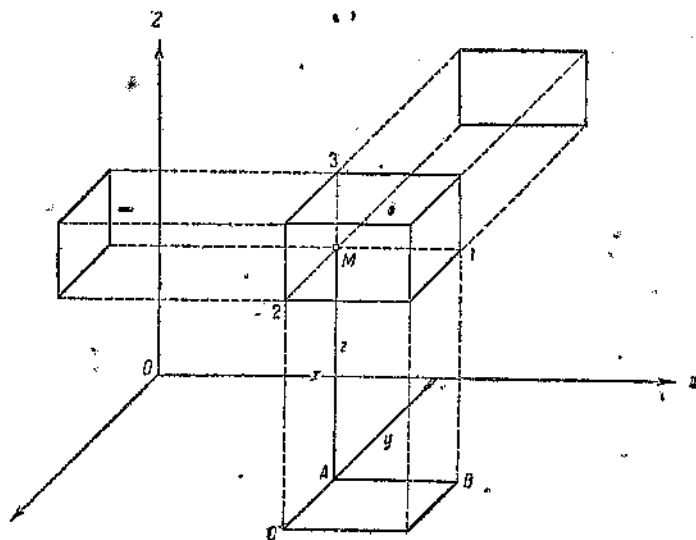
так как перемещения различных точек будут различны, то проекции перемещений (9) будут функциями от координат точки:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z) \\ v &= f_2(x, y, z) \\ w &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

От перемещений переходим к деформациям. Выделим в упругом теле бесконечно-малый параллелепипед (фиг. 18) с ребрами dx, dy, dz .

При деформации тела он переместится и сам деформируется; причем изменятся длины его ребер и первоначально прямые углы между гранями искажутся.

Для изучения деформаций упругого тела в данной точке M следует изучить удлинения ребер выделенного параллелепипеда $M-1, M-2, M-3$ (линейные деформации) и измененные углы $1M2, 1M3, 2M3$ (сдвиг или угловые деформации). С этой целью рассмотрим проекции параллелепипеда



Фиг. 18.

да на координатные плоскости и исследуем деформации этих проекций. Очевидно, что по деформациям трех проекций можно судить и о деформации самого параллелепипеда.

В дальнейшем ограничимся только случаем весьма малых деформаций, позволяющим сильно упростить по ходу дела выводы.

Возьмем например проекцию элемента $M(1,2,3)$ на плоскость OXY . Пусть до деформации длины ребер были (фиг. 19): $AB=dx$; $AC=dy$

После деформации они перешли в положение $A'B'$ и $A'C'$. Займемся проекцией AB . Если перемещение точки A вдоль оси OX равно u , то соответствующее перемещение точки B будет $u + du =$

$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, где du — приращение; так как точка B отличается от точки A только координатой x , то в последней формуле малое приращение du с точностью до бесконечно-малых 2-го порядка мы заменим частным дифференциалом функции u по переменной x . Аналогично: если перемещение точки A вдоль оси

OY будет v , то перемещение точки B вдоль той же оси выразим так: $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$. Абсолютное удлинение проекции отрезка AB на ось OX будет

$\delta(dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$; относительное удлинение этого ребра $e_{xx} = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Рассуждая аналогично, для относительного удлинения ребра AC , направленного вдоль оси OY , получим: $e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; таким же путем для

ребра AD (т. е. ребра MZ на фиг. 18) будем иметь: $e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$; мы получили формулы линейных деформаций (удлинений) в данной точке M тела по направлению трех осей координат. Легко найдем угол α поворота ребра $AB=dx$ в плоскости OXY :

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Так как мы ограничились случаем весьма малых деформаций, то в знаменателе последнего выражения отбросим величину $\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}$, которая весьма мала по сравнению с единицей; получаем:

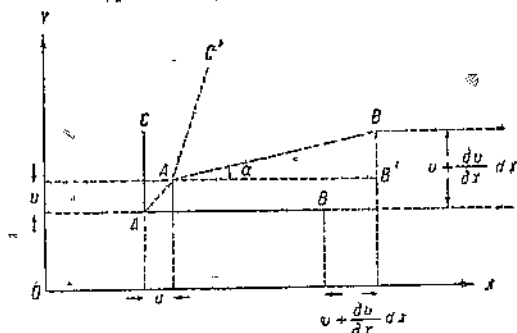
$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (11)$$

Аналогично получим угол поворота ребра $AC=dy$ в плоскости OXY :

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (12)$$

После этого легко найдем относительный сдвиг, т. е. искажение прямого угла BAC :

$$e_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (13)$$



Фиг. 19.

Формула (13) дает выражение сдвига, происходящего в плоскости OXY . Аналогично получим выражения сдвигов в двух других координатных плоскостях при помощи круговой подстановки букв по схеме:



Фиг. 20.

Собирая достигнутые результаты, получаем следующую таблицу деформаций.

Относительные удлинения:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Относительные сдвиги:

$$\left. \begin{aligned} e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

(III)

Относительно знаков деформаций e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{yz} , e_{zx} , e_{xy} заметим следующее.

Если функция u возрастает с возрастанием x , т. е. $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} > 0$, то мы, очевидно, имеем дело с увеличением длины dx (перемещение вправо точки B на фиг. 19 более перемещения точки A).

Значит, если $e_{xx} > 0$, то получается удлинение (растяжение); если $e_{xx} < 0$, то получается укорочение (сжатие); то же правило справедливо для e_{yy} и e_{zz} . Далее, если функция v возрастает с возрастанием x , то (формула 11) $\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} > 0$; при этом (фиг. 19) отрезок AB поворачивается от

оси $+X$ к оси $+Y$; точно так же при $\beta = \frac{\partial u}{\partial y} > 0$ отрезок AC поворачивается от оси $+Y$ к оси $+X$. А отсюда, согласно уравнению (13), следует, что сдвиг $e_{xy} > 0$, если прямой угол между осями $+X$ и $+Y$ уменьшается. Такое же правило получается и для сдвигов в двух других плоскостях. Резюмируя сказанное, получаем следующее правило знаков деформаций:

1. Положительным линейным деформациям:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$$

соответствуют удлинения вдоль осей координат; отрицательным — укорочения.

2. Положительным угловым деформациям (сдвигам)

$$e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$$

соответствует уменьшение углов между положительными направлениями осей; отрицательным — увеличение тех же углов.

Уравнения неразрывности деформаций

§ 7. Резюмируя предыдущие выводы, мы видим, что перемещение данной точки упругого тела определяется тремя функциями

$$u, v, w; \quad (10)$$

деформация — в данной точке определяется шестью функциями:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}. \quad (14)$$

Однако ур-ния (III) показывают, что если заданы три функции (10), то этим самым будут определены все шесть составляющих деформаций (14), выражающихся через первые производные функций (10); отсюда уже наперед можно предвидеть, что шесть составляющих деформаций (14) нельзя задать произвольно: между ними должны существовать какие-то зависимости, к выводу которых мы и переходим. Число этих зависимостей равно шести и делятся они на две группы.

I группа.

Продифференцируем первые два из ур-ний (III) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x^2};$$

складывая эти ур-ния почленно, получаем:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Это одно из нужных нам соотношений между деформациями. Делая в нем круговую подстановку букв, получим два другие равенства. Это приводит нас к первой группе зависимостей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \cdot \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \cdot \partial x}. \end{aligned}$$

II группа.

Последние три из ур-ний (III) дифференцируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \cdot \partial x} & + \\ \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} & + \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial z} & - \end{aligned} \quad (15)$$

Изменим знаки последнего из полученных ур-ний и затем их все почленно сложим:

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Это ур-ние еще раз дифференцируем по z и, замечая, что:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \cdot \partial y},$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (16)$$

Это одна из искоемых зависимостей второй группы. Делая в ур-нии (16) круговую подстановку букв, получим еще два ур-ния такого же вида.

Присоединяя эти зависимости к зависимостям (15), получаем следующую систему ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \cdot \partial z} \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \cdot \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \cdot \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \cdot \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

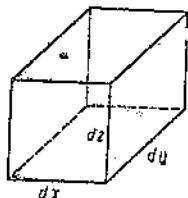
Необходимость существования этих зависимостей мы обосновали аналитическим путем, сопоставляя число функций (10) с числом функций (14) и принимая во внимание зависимости между ними (III); той же цели можно достичь геометрическим путем.

Для этого представим себе упругое тело разрезанным на малые параллелепипеды и дадим каждому из них деформацию, определяемую 6-ю числами (14); легко сообразим, что, если составляющие деформации (14) не связаны между собою определенными зависимостями, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное (деформированное) твердое тело.

Ур-ния (IV) и доставляют нам эти зависимости; если мы при задании деформаций (14) не примем их во внимание, то после деформации тела во всех точках его окажутся бесконечно-малые разрывы. Эти соображения придают новый смысл ур-ниям (IV), и с этой новой точки зрения ур-ния (IV) называются ур-ьями неразрывности или совместности деформаций. Выведены они Сен-Венаном и часто называются уравнениями Сен-Венана. Сделаем еще следующее важное замечание.

Если нам удастся по заданным нагрузкам тела найти непосредственно перемещения его точек u, v, w (ср. п. 1, стр. 39), то после этого деформации (14) можно вычислить по ур-ниям (III); при этом условия неразрывности будут сами по себе удовлетворены, так как они выведены из ур-ний (III) и являются их следствием.

Если же мы по заданным нагрузкам найдем напряжения и затем деформации (14) (п. 2, стр. 39), то при этом необходимо будет одновременно удовлетворить и ур-ниям неразрывности (IV); в противном случае деформации будут несовместимы и мы не будем в состоянии найти перемещения (10) из ур-ний (III), так как в них будут взаимные противоречия.



Фиг. 21.

§ 8. В дополнение к выражениям деформаций (14) найдем еще объемную деформацию. Рассмотрим бесконечно-малый элемент тела объема $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ (фиг. 21). Легко сообразить, что если в данном элементе произошли только сдвиги без удлинений его ребер, то относительное изменение объема элемента будет малой величиной высшего порядка по сравнению с деформацией сдвига. Следовательно, с точностью до малых высшего порядка можем считать, что изменение объема dv будет зависеть только от удлинения ребер (dx, dy, dz).

Новый объем элемента после деформации будет:

$$dv + \delta(dv) = dx(1 + e_{xx}) \cdot dy(1 + e_{yy}) \cdot dz(1 + e_{zz}).$$

Раскрывая скобки правой части, получим:

$$dv + \delta(dv) = dx \cdot dy \cdot dz (1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} + e_{xx} \cdot e_{yy} + e_{xx} \cdot e_{zz} + e_{yy} \cdot e_{zz} + e_{xx} \cdot e_{yz} + e_{xx} \cdot e_{zx} + e_{yy} \cdot e_{xz}).$$

Последние четыре члена в скобках, являющиеся малыми 2-го и 3-го порядков, отбрасываем; тогда, принимая во внимание, что $dx \cdot dy \cdot dz = dv$, имеем:

$$\delta(dv) = dv(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}).$$

Получаем выражение относительной объемной деформации:

$$\frac{\delta(dv)}{dv} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

Величину эту часто обозначают через θ ; тогда в дополнение к ур-ниям (III) получим объемную деформацию:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \quad (III')$$

или

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (III'')$$

Если мы имеем деформацию, при которой удлинения вдоль осей координат отсутствуют: $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0$, то согласно (III'): $\theta = 0$ и во всех точках тела удовлетворяются ур-ния:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегрируя их, имеем:

$$\begin{aligned} u &= f(y, z), \\ v &= \varphi(x, z), \\ w &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

где f , φ , ψ — произвольные функции; это есть деформация чистого сдвига в плоскостях, параллельных координатным.

Рассмотрим еще более общий случай, когда объемные деформации (III') отсутствуют; тогда согласно (III'') во всех точках тела удовлетворяется дифференциальное ур-ние:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Такое ур-ние будет, например, иметь место для несжимаемых жидкостей.

Ур-ния (III) имеют громадное значение в теории упругости, и далее мы часто будем ими пользоваться. Здесь покажем, что при помощи их можно легко уточнить известное из сопротивления материалов дифференциальное уравнение изогнутой оси бруска, приняв во внимание влияние поперечной силы на изгиб. Если расположение координатных осей примем по фиг. 7, то кривизна оси бруска (при изгибе в плоскости OXY) приближенно выразится так:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Путем дифференцирования первого и четвертого из ур-ний (III) найдем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial x}.$$

Вычитая почленно, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}. \quad (17)$$

Но из теории изгиба имеем:

$$e_{xx} = \frac{M}{EJ} y; \quad e_{xy} = \frac{Q}{G\alpha F},$$

где сдвиг e_{xy} взят для точки на оси стержня; F — площадь поперечного сечения; α — коэффициент, характеризующий форму сечения.

После подстановки в (17) находим:

$$\frac{\partial e_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{G\alpha F} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{G\alpha F} \frac{d^2 M}{dx^2}; \quad \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} = \frac{M}{EJ}$$

и получаем такое дифференциальное уравнение изогнутой оси:

$$v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{1}{G\alpha F} \frac{d^2 M}{dx^2}.$$

В главе I мы вывели две основных группы уравнений теории упругости (I) и (II); это были уравнения статического характера. В настоящей главе нами получены новые основные группы уравнений геометрического характера (III), (IV) и (IIIa). Необходимо заметить, что эти уравнения являются приближенными, так как при выводе основных соотношений

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

мы отбросили малые, но конечные величины. С этим надо считаться при оценке всех последующих выводов; они будут достаточно точны в случае малых деформаций (когда все деформации e_{xx} , e_{yy} , ..., e_{xx} , e_{xy} весьма малы по сравнению с единицей); при этом ошибки, вообще говоря, будут нарастать по мере удаления от начала координат; это обстоятельство мы далее покажем на некоторых примерах.

Деформации в общем случае выражаются через перемещения в виде следующих сложных уравнений:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

и т. д.

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

и т. д.

Пользование подобного рода уравнениями для построения общей теории весьма затруднительно и потому членами второго порядка малости пренебрегают, как это и было сделано выше.

Упражнения к §§ 6 и 7.

1. Дан брусок, изгибаемый в плоскости OXZ .

Требуется:

а) Написать уравнение его оси (т. е. оси OX) до изгиба и выразить прогиб любой точки, пользуясь уравнениями (10) § 6.

б) Полагая, что брусок заделан в начале координат и пользуясь уравнениями (11) и (12), записать условия, что элемент dx оси бруска в начале координат закреплен (не поворачивается в плоскости OXZ); то же для элемента dz — в плоскости поперечного сечения.

Предварительно написать по типу формул (11) и (12) формулы углов поворота:

отрезка dx в плоскостях XOY , XOZ ;

отрезка dy в плоскостях YOX , YOZ ;

отрезка dz в плоскостях ZOX , ZOY .

Из этих углов, очевидно, составлены все сдвиги в формулах (III).

2. При чистом изгибе бруска, указанного в предыдущем упражнении, перемещения (10) § 6 выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\omega z}{\rho} \\ v &= \frac{\omega y z}{\rho} \\ w &= \frac{x^2 + a(z^2 - y^2)}{2\rho} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Требуется:

а) Найти общие выражения деформаций по ур-ниям (III) и (IIIa) и проверить, удовлетворяют ли они ур-ниям неразрывности (IV).

б) Написать ур-ние изогнутой оси бруска; для этого в выражения (18) подставить координаты точки оси до изгиба (п. а предыдущего упражнения).

в) Проверить, удовлетворяются ли условия заделки левого конца (п. б предыдущего упражнения)

3. При исследовании кручения круглого стержня (фиг. 6) получают перемещения:

$$u = -\tau y z + ay + bz + c; \quad v = \tau a z - ax + ez + f; \quad w = -bx + cy + k.$$

Требуется:

а) Подобрать коэффициенты a, b, c, e, f, k при условии, чтобы концевое сечение $z=0$ было закреплено следующим образом: точка O не должна иметь перемещений; элемент оси dz не поворачивается в плоскости XOZ и в плоскости YOZ ; элемент сечения dy не поворачивается в плоскости XOY .

б) Найти величины деформаций (III) и (IIIa)

в) Проверить, удовлетворены ли ур-ния (IV).

ГЛАВА III

Обобщенный закон Гука

§ 9. В предыдущих главах нами рассмотрены: теория напряжений, освещающая статическую сторону задачи, а также теория перемещений и деформаций с геометрической стороны. Эти две теории являются только подготовительным материалом для теории упругости и сами по себе не могут служить для решения физических задач о деформациях, которые происходят в упругом теле под действием на него внешних сил, — до тех пор, пока напряжения и деформации мы не свяжем каким-либо физическим законом. Физический характер этого закона диктуется тем, что он должен связать разнородные признаки изучаемого явления, силы и деформации.

Вопрос об этом законе теория упругости ставит в самом общем виде. Здесь прежде всего выясняется аналитическая форма его, т. е. выбирается общий вид функций, связывающих напряжения с деформациями:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= f_1(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}) \\ Y_y &= f_2(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}) \\ Z_z &= f_3(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}) \\ X_y &= f_6(e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и при этом устанавливается, что наиболее рациональной формой зависимостей (19) является линейная форма. После этого выясняется значение коэффициентов функций:

$$X_x = a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz} + a_{14}e_{yz} + a_{15}e_{zx} + a_{16}e_{xy} \quad (19')$$

для различных случаев строения упругого тела.

В результате этого исследования оказывается, что для изотропного упругого тела, т. е. для тела, физические свойства которого одинаковы во всех направлениях, зависимости (19') получают ту форму, которую мы уже знаем из сопротивления материалов и, значит, связь между напряжениями и деформациями определяется тремя коэффициентами — модулями упругости:

$$E, G, \sigma^1,$$

между которыми, как это известно из теории сдвига, существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (20)$$

Поэтому в дальнейшем мы примем нужные нам зависимости в том виде, как они получены в сопротивлении материалов для взаимно-перпендикулярных нормальных и касательных напряжений по трем взаимно-перпендикулярным направлениям. Примем без доказательства положение, что в однородном упругом теле нормальные напряжения не вызывают сдвигов и, на-

¹ Через σ обозначено Пуассоновское отношение поперечного укорочения к продольному удлинению при растяжении.

оборот, — касательные напряжения не вызывают удлинений по направлению их действия. На этом основании можем рассматривать отдельно: случай нормальных напряжений и случай касательных напряжений.

Нормальные напряжения

§ 10. Рассмотрим (фиг. 22) параллелепипед с ребрами, равными 1, подверженный действию нормальных сил. Если бы действовало только напряжение X_x , то относительное удлинение e'_{xx} по закону Гука было бы:

$$e'_{xx} = \frac{X_x}{E}.$$

При действии только напряжения Y_y , удлинение вдоль оси OX :

$$e''_{xx} = -\sigma \frac{Y_y}{E},$$

где σ — коэффициент Пуассона

Аналогично, под действием напряжения Z_z имеем:

$$e'''_{xx} = -\sigma \frac{Z_z}{E}.$$

Принимая без доказательства закон независимости действия сил, получим полное удлинение вдоль оси OX :

$$e_{xx} = e'_{xx} + e''_{xx} + e'''_{xx} = \frac{X_x}{E} - \sigma \frac{Y_y}{E} - \sigma \frac{Z_z}{E},$$

или

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)]$$

Аналогично, для удлинений по двум другим осям

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]; \quad e_{zz} = \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]$$

(21)

Формулы (21) выражают обобщенный закон Гука для нормальных сил, их можно представить в другом виде, прибавляя в правой части:

$$\left. \begin{aligned} &\sigma X_x - \sigma X_x; \quad \sigma Y_y - \sigma Y_y; \quad \sigma Z_z - \sigma Z_z \\ &e_{xx} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma)X_x - \sigma\theta] \\ &e_{yy} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma)Y_y - \sigma\theta] \\ &e_{zz} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma)Z_z - \sigma\theta] \end{aligned} \right\},$$

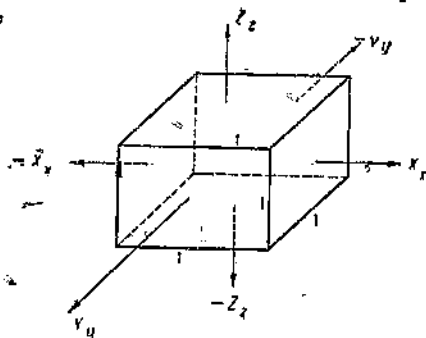
(22)

где

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z.$$

(23)

В этой форме закон Гука более удобен для некоторых выкладок



Фиг. 22.

Касательные напряжения

Соотношения между сдвигами и касательными напряжениями получаем непосредственно из сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Формулы (21) или (22) совместно с формулами (24) и дают нам обобщенный закон Гука для однородного (изотропного) упругого твердого тела, т. е. тела, упругие свойства которого совершенно одинаковы по всем направлениям.

Это приводит нас к новой основной группе уравнений теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]; \\ e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z = \frac{2(1+\sigma)}{E} \cdot Y_z; \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x = \frac{2(1+\sigma)}{E} \cdot Z_x; \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

§ 11. Обратимся опять к равенствам (22) и сложим их почленно:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1}{E} [(1+\sigma)(X_x + Y_y + Z_z) - 3\sigma\theta];$$

но так как на основании уравнений (23) и (III).

$$X_x + Y_y + Z_z = \theta; \quad e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \theta,$$

последнее уравнение можем окончательно написать так:

$$\theta = \frac{1-2\sigma}{E} \theta, \quad (Va)$$

т. е. единичная объемная деформация θ пропорциональна сумме трех нормальных напряжений θ . Это есть закон Гука в объемной форме.

Из равенства (Va) мы можем сделать следующий вывод: объемная деформация θ по существу своему не должна зависеть от направления координатных осей. Следовательно при повороте системы координат она не будет меняться, а значит, согласно (Va), сумма нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке есть величина постоянная и не зависит от наклона этих площадок.

Иначе можно сказать, что величина

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z$$

есть инвариант преобразования координат.

§ 12. Равенства (V) и (Va) дают закон Гука в форме, решенной относительно деформаций. Часто бывает необходимо иметь те же зависимости в обратной форме — решенные относительно напряжений.

Для этой цели возьмем первое из ур-ний (22) и внесем в него значение $\theta = \frac{E}{1-2\sigma} \theta$ из ур-ния (Va); получим:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[(1 + \sigma) X_x - \frac{E\sigma}{1-2\sigma} \theta \right],$$

отсюда находим:

$$X_x = \frac{E \cdot \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \theta + \frac{E}{1 + \sigma} \cdot e_{xx}$$

или же:

$$X_x = \lambda \theta + 2\mu \cdot e_{xx}, \quad (25)$$

где

$$\lambda = \frac{E \cdot \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \quad (26)$$

λ и μ называются коэффициентами Ламе. Они так же, как и модули упругости E и G , характеризуют упругие свойства твердого тела и связаны с модулями упругости формулами (26).

Легко заметить, что коэффициент μ совпадает с модулем сдвига $\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} = G$; если $\sigma = \frac{1}{3}$, то из ур-ний (26) найдем $\lambda = \frac{8}{4} E$.

Из уравнения (25) круговой подстановкой имеем два другие ур-ния; присоединяя к ним последние три уравнения из группы (V), получим закон Гука в нужной нам форме, решенной относительно напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \theta + 2\mu \cdot e_{xx} \\ Y_y &= \lambda \theta + 2\mu \cdot e_{yy} \\ Z_z &= \lambda \theta + 2\mu \cdot e_{zz} \\ Y_z &= \mu \cdot e_{yz} \\ Z_x &= \mu \cdot e_{zx} \\ X_y &= \mu \cdot e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (V')$$

Складывая почленно первые три ур-ния (V'), снова получим объемный закон Гука, но выраженный через коэффициенты Ламе:

$$X_x + Y_y + Z_z = 3\lambda \theta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}),$$

или

$$\theta = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (V'a)$$

Полученные в этой главе зависимости (V) и (V') являются последней группой основных уравнений теории упругости, завершающей все необходимые предпосылки, на которых строится общее решение задачи теории упругости.

БОЛЕЕ ОБЩИЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ (V')

Ур-ния обобщенного закона Гука мы приняли без доказательства, в том виде, как они даются в сопротивлении материалов. Ниже приводятся соображения, доказывающие, что эти ур-ния дают самую общую зависимость между напряжениями и деформациями в изотропном упругом теле.

Работа упругих сил в твердом теле

§ 13. Выделим из тела бесконечно-малый параллелепипед размерами dx, dy, dz и подсчитаем работу, совершаемую упругими силами, приложенными к нему, если точкам данного тела дадим какие-либо возможные перемещения.

Рассмотрим сначала случай растяжения-сжатия элемента по направлению оси OX . Пусть напряжения по граням, нормальным к OX , будут:

$$X_x \text{ и } X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \quad (27)$$

и при этом получилось относительное удлинение e_{xx} и, следовательно, абсолютное $e_{xx} dx$. После сообщения телу каких-либо возможных перемещений удлинение это изменится на некоторую величину

$$\delta e_{xx} \cdot dx.$$

Отбрасывая в (27) бесконечно-малую $\frac{\partial X_x}{\partial x} dx$, по сравнению с конечной величиной X_x , найдем, что две равные и противоположные нормальные силы

$$X_x dy dz,$$

приложенные к граням параллелепипеда, произведут работу

$$- X_x \delta e_{xx} dx dy dz.$$

Таким же путем получим работу, совершаемую отгальными нормальными силами по граням параллелепипеда:

$$Y_y \delta e_{yy} dy dx dz; \quad Z_z \delta e_{zz} dz dx dy.$$

Переходим к касательным составляющим. К верхней и нижней граням параллелепипеда (фиг. 9) приложены касательные силы $X_z dx dy$ (бесконечно-малую разницу между ними снова отбрасываем), образующие пару с моментом

$$X_z dx dy dz;$$

для получения работы этой пары следует ее момент умножить на угол поворота; таким углом поворота явится, очевидно, приращение

$$\delta e_{xz},$$

полученное углом сдвига e_{yz} на сообщенном телу возможном перемещении. На этом основании получим работу трех пар касательных сил, приложенных к параллелепипеду:

$$X_z \delta e_{xz} dx dy dz; \quad Y_z \delta e_{yz} dz dx dy; \quad X_y \delta e_{xy} dy dx dz.$$

Собирая полученные результаты, найдем работу всех сил, приложенных к параллелепипеду на возможном перемещении:

$$\delta(dT) = (X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{xz} + X_y \delta e_{xy}) dx dy dz.$$

Работа, отнесенная к единице объема тела в той точке, где выделен параллелепипед, будет:

$$\delta \tau = \frac{\delta(dT)}{dv} = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{xz} + X_y \delta e_{xy}. \quad (28)$$

Потенциал упругих сил

§ 14. Введем теперь чрезвычайно важную в теории упругости гипотезу о том, что внутренние упругие силы имеют потенциал, т. е. что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную упругую энергию, на-

им соразмерно в виде работы сил при исчезновении деформаций¹.

Потенциальная упругая энергия есть следствие деформаций и вызывается ими одними; поэтому, если мы через V назовем энергию, отнесенную к единице объема тела в данной точке, то она должна быть функцией деформаций:

$$V = F(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}). \quad (29)$$

Если мы даем телу упругие возможные перемещения, то, согласно введенной гипотезе, работа (28), совершаемая внутренними силами на этих перемещениях, должна полностью перейти в упругую энергию и дать приращение ее δV :

$$\delta \tau = \delta V. \quad (30)$$

Приращение δV функции (29) с точностью до малых 2-го порядка заменяем первым полным ее дифференциалом:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial V}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \dots + \frac{\partial V}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy}. \quad (31)$$

Выражения (28) и (31) согласно ур-нию (30) должны совпадать при любых значениях возможных деформаций

$$\delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \delta e_{zz}, \dots, \delta e_{xy} \quad (32)$$

Благодаря этому коэффициенты при величинах (32) в ур-ниях (28) и (31) должны быть тождественно равны:

$$X_x = \frac{\partial V}{\partial e_{xx}}; \quad Y_y = \frac{\partial V}{\partial e_{yy}}; \quad Z_z = \frac{\partial V}{\partial e_{zz}}; \quad Y_z = \frac{\partial V}{\partial e_{yz}}; \dots X_y = \frac{\partial V}{\partial e_{xy}}. \quad (33)$$

Значит, если внутренние упругие силы имеют потенциал, то проекции напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$$

выражаются в виде частных производных потенциальной функции (29) по соответствующим деформациям. Равенства (33) совместно с (29) являются аналитическим выражением предположения о существовании потенциала упругих сил.

Форма зависимостей между напряжениями и деформациями

§ 15. Так как мы ищем зависимость физического характера, то внешняя математическая форма функций $f_1, f_2, \dots, f_6$ в ур-ниях (19) (§ 9) выражающих эту зависимость, наперед ничем не обусловлена и мы вправе выбрать ее как угодно, лишь бы она соответствовала физическим условиям задачи, т. е. могла бы правильно отражать исследуемое физическое явление. Пользуясь этим, мы выбираем наиболее простую форму зависимостей (19) — линейную:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz} + a_{14}e_{yz} + a_{15}e_{zx} + a_{16}e_{xy} \\ Y_y &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{zx} + a_{26}e_{xy} \\ Z_z &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz} + a_{34}e_{yz} + a_{35}e_{zx} + a_{36}e_{xy} \\ Y_z &= a_{41}e_{xx} + a_{42}e_{yy} + a_{43}e_{zz} + a_{44}e_{yz} + a_{45}e_{zx} + a_{46}e_{xy} \\ Z_x &= a_{51}e_{xx} + a_{52}e_{yy} + a_{53}e_{zz} + a_{54}e_{yz} + a_{55}e_{zx} + a_{56}e_{xy} \\ X_y &= a_{61}e_{xx} + a_{62}e_{yy} + a_{63}e_{zz} + a_{64}e_{yz} + a_{65}e_{zx} + a_{66}e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

¹ Гипотеза эта верна лишь приблизительно, так как часть работы упругих сил переходит в другие виды энергии (тепловую и электромагнитную), теряемые телом и не возвращаемые в виде работы упругих сил; однако эти дополнительные количества энергии невелики и практически ими можно пренебречь.

Соображения, подтверждающие правильность нашего выбора, следующие.

1. Линейная форма зависимостей хорошо согласуется с опытом для многих материалов при простом растяжении или сжатии, где она проявляется в виде пропорциональности (закон Гука).

2. Заданным деформациям:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} \quad (35)$$

в данной точке должна соответствовать одна единственная система напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y \quad (36)$$

и обратно — при заданных напряжениях (36) должна получаться одна единственная система деформаций (35).

Этим условиям линейная форма зависимостей удовлетворяет¹.

3. Ограничиваясь, как и ранее, случаем весьма малых деформаций, можно показать, что при любой аналитической форме зависимостей (34) они приближенно могут быть заменены линейными функциями; действительно, разлагая правые части ур-ний (19) в ряд Маклорена, получим с точностью до малых 2-го порядка:

$$X_x = (f_1)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xx}} \right)_0 e_{xx} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{yy}} \right)_0 e_{yy} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xy}} \right)_0 e_{xy} \quad (37)$$

где значок 0 при функции f_1 и производных показывает, что следует положить:

$$e_{xx} = e_{yy} = \dots = e_{xy} = 0.$$

Кoeffициенты при деформациях в (37) — постоянные числа и потому функция (37) является линейной относительно деформаций (35)².

Начальные напряжения; гипотеза о естественном состоянии тела

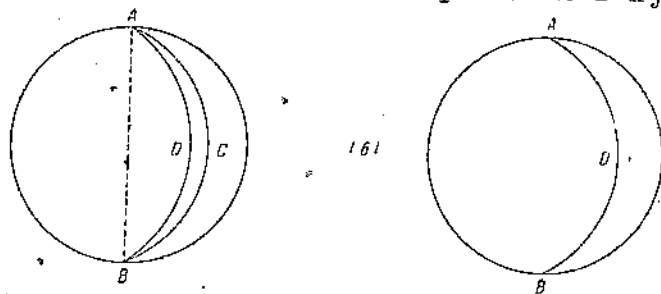
Заметим еще, что в правых частях ур-ний (34) нами опущены свободные члены, не зависящие от деформаций. Если бы мы их сохранили, то, положив все деформации (35) равными нулю, нашли бы, что напряжения (36) отличны от нуля (напряжения не вызывают деформаций); обратное, положив все напряжения (36) равными нулю, мы ур-ния (34) обратим в систему 6-ти линейных ур-ний с 6-ю неизвестными (35), для которых отсюда найдем значения, отличные от нуля (деформации не сопровождаются напряжениями).

Оба эти обстоятельства могут иметь место, так как, изучая деформации тела от внешних сил, иногда можем ожидать, что тело уже получило деформации до приложения к нему сил. Возьмем кусок железа в форме например шара (фиг. 23, а) и, сделав в нем узкий секторный вырез $ACBD$, снова сведем вместе плоскости разрезов ACB и ADB и сварим их. Получим сплошное тело (фиг. 23, б); после произведенной операции, в нем, несомненно, будут напряжения, хотя бы внешние силы на него и не действовали; такие напряжения называются начальными; они существуют например в чугуновых и стальных отливках вследствие неравномерной

¹ Если мы ур-ния (34) решим относительно деформаций, то получим для них также линейные выражения через напряжения.

² Это рассуждение справедливо, если не обратятся в нуль все коэффициенты при деформациях в ур-нии (37), в противном случае придется принять во внимание члены второго порядка малости в ряде Маклорена; однако этого нельзя ожидать, так как в случае простого растяжения существование членов первого порядка ясно обнаруживается (закон Гука).

усадки при остывании. Будем принимать состояние тела $\bar{b}$ за начальное при измерении деформаций под действием каких-либо сил; тогда мы скажем, что в этом состоянии деформации отсутствуют, но напряжения не равны нулю. Если теперь снова разрежем тело по плоскости ACB , то оно вернется в прежнее состояние a ; при этом произойдут деформации, но напряжения обратятся в нуль.



Фиг. 23.

Характер и величина начальных напряжений обычно нам неизвестны, так как они зависят от истории возникновения тела¹; в дальнейшем мы исключаем их из рассмотрения, вводя гипотезу о естественном состоянии тела, т. е. принимая, что, при отсутствии деформаций в теле, напряжения в нем равны нулю. Из сказанного ясно, что в этом случае свободных членов в ур-ниях (34) не должно быть, т. е. они должны быть однородными, как это и принято сначала.

Другие постоянные; сокращение числа их при существовании потенциалов упругих сил

§ 16. Уравнения (34) содержат 36 постоянных коэффициентов a_{mn} , называемых упругими постоянными. Они характеризуют упругие свойства тела по своему измерению вполне аналогичны модулям упругости E и G .

Число упругих постоянных тела в общем случае, как видим, весьма велико; однако оно значительно сокращается, если существует потенциал упругих сил.

Действительно, возьмем частную производную потенциальной энергии от какой угодно деформации, например по e_{yy} ; на основании ур-ний (34) имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial e_{yy}} = Y_y = a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{zx} + a_{26}e_{xy};$$

яв от обеих частей еще раз частную производную, например по e_{xx} , получим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial e_{yy} \partial e_{xx}} = a_{21}. \quad (38)$$

Найдем теперь ту же вторую производную, но дифференцируя в обратном порядке:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial e_{xx} \partial e_{yy}} = \frac{\partial Z_x}{\partial e_{yy}} = a_{52}. \quad (39)$$

¹ Например в разобранным случае величина напряжений зависит от размера сделанного секторального выреза $ACBD$.

Так как величина производной не зависит от порядка дифференцирования, то, сопоставляя ур-ния (36) и (39), находим: $a_{25} = a_{52}$; то же конечно можно доказать для любых двух коэффициентов a_{mn} и a_{nm} с одинаковыми значками:

$$a_{mn} = a_{nm}. \quad (40)$$

Зависимость (40), являющаяся следствием существования потенциала упругих сил (закона сохранения энергии в упругом теле), показывает, что в ур-ниях (34) коэффициенты, симметричные относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, попарно равны между собой. Следовательно, из 36-ти упругих постоянных в самом общем случае будут различными: 6 постоянных

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66},$$

расположенных по диагонали, и $\frac{36-6}{2} = 15$ из остальных постоянных, а всего $6 + 15 = 21$ постоянная.

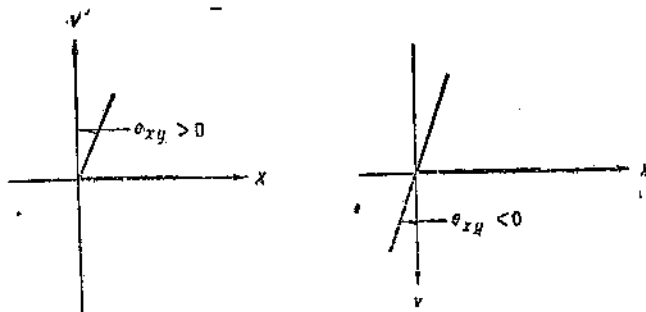
Таким количеством упругих постоянных может обладать только тело совершенно неоднородного строения, обладающее совершенно различными упругими свойствами в разных направлениях:

Изотропное тело

§ 17. В физических изотропных телах (кристаллы) наблюдается обычно большая или меньшая симметрия строения, благодаря которой число упругих постоянных значительно сокращается; мы здесь рассмотрим только случай изотропного тела, упругие свойства которого одинаковы во всех направлениях. Для такого тела ур-ния (34) не должны меняться при каких бы то ни было преобразованиях координат. Исходя из этого, легко сократим число упругих постоянных до 9, если примем во внимание правило о знаке сдвига (§ 6); из этого правила следует, что блвиг

(например e_{xy}) сохраняет свою величину, но меняет знак, если мы направлением одной из осей, в плоскости которых происходит сдвиг, возьмем обратное (фиг. 24).

Возьмем например первое из ур-ний (34) и изменим направление оси OY на обратное. На левой части ур-ния это, очевидно, никак не от-



Фиг. 24.

разится; в правой части первые три члена (содержащие удлинения) останутся без изменения; равным образом не изменится пятый член; 4-й и 6-й члены, сохраняя величину, изменят знак; благодаря этому равенство между левой и правой частью нарушится; этого не будет лишь в случае $a_{14} = 0$; $a_{16} = 0$, т. е. эти два коэффициента должны отсутствовать. Если бы мы изменили направление оси OZ на обратное, то таким же путем нашли бы, что $a_{14} = a_{16} = 0$; значит, делаем общее заключение, что $a_{14} = a_{16} = a_{18} = 0$, т. е. нормальное напряжение X_x не связано со сдвигами. Благодаря полной равноправности осей координат в изотропном теле, это заключение относится и к двум другим нормальным напряжениям Y_y и Z_z , т. е. $a_{24} = a_{26} = a_{28} = 0$; $a_{34} = a_{36} = a_{38} = 0$. После этого, на основании ур-ния (40) замечаем, что сим-

метричные коэффициенты последних трех из уравнений (34) обращаются в нуль:

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0, \quad a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0, \quad a_{61} = a_{62} = a_{63} = 0,$$

т. е. касательные напряжения не связаны с удлинениями.

Число упругих постоянных сократилось до 12, и уравнения (34) разбились на две независимые группы:

$$\begin{aligned} X_x &= a_{11} e_{xx} + a_{12} e_{yy} + a_{13} e_{zz} \\ Y_y &= a_{21} e_{xx} + a_{22} e_{yy} + a_{23} e_{zz} \\ Z_z &= a_{31} e_{xx} + a_{32} e_{yy} + a_{33} e_{zz} \\ Y_z &= a_{44} e_{yz} + a_{45} e_{zx} + a_{46} e_{xy} \\ Z_x &= a_{54} e_{yz} + a_{55} e_{zx} + a_{56} e_{xy} \\ X_y &= a_{64} e_{yz} + a_{65} e_{zx} + a_{66} e_{xy} \end{aligned}$$

Обратимся к последним трем уравнениям. Если направление оси OX изменим на обратное, то в 4-м уравнении изменится знак у двух последних членов; левая часть уравнения при этом не изменится, а потому, как и ранее, заключаем, что

$$a_{45} = a_{46} = 0$$

и далее:

$$a_{54} = a_{56} = 0; \quad a_{64} = a_{65} = 0.$$

Число упругих постоянных сократилось до $12 - 3 = 9$, как и было указано выше.

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11} e_{xx} + a_{12} e_{yy} + a_{13} e_{zz} \\ Y_y &= a_{21} e_{xx} + a_{22} e_{yy} + a_{23} e_{zz} \\ Z_z &= a_{31} e_{xx} + a_{32} e_{yy} + a_{33} e_{zz} \\ Y_z &= a_{44} e_{yz} \\ Z_x &= a_{55} e_{zx} \\ X_y &= a_{66} e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Преобразования координат, которые мы до сих пор применяли, сводились к повороту отдельных осей на 180° ; теперь применим поворот осей на 90° , в форме замены OY на OZ ; OZ на OX , OX на OY и т. д.

Возьмем первое из уравнений (41) и оси OY и OZ взаимно переместим. На левой части уравнения ввиду изотропности тела это не отразится; в правой же части удлинения e_{yy} и e_{zz} поменяются местами; следовательно равенство не нарушится лишь при условии: $a_{12} = a_{13}$; аналогично во 2-м и 3-м уравнениях должно быть $a_{21} = a_{23}$, $a_{31} = a_{32}$, а на основании уравнения (40) окончательное: $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{21} = a_{32}$.

Заменяя теперь последовательно одну ось другою и имея в виду, что при этом вид уравнений (41) не должен меняться, придем к выводу, что

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}; \quad a_{44} = a_{55} = a_{66};$$

после этого уравнения (41) получают вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11} e_{xx} + a_{12} (e_{yy} + e_{zz}) \\ Y_y &= a_{11} e_{yy} + a_{12} (e_{xx} + e_{zz}) \\ Z_z &= a_{11} e_{zz} + a_{12} (e_{xx} + e_{yy}) \\ Y_z &= a_{44} e_{yz} \\ Z_x &= a_{44} e_{zx} \\ X_y &= a_{44} e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Таким образом число упругих постоянных сократилось до трех:

$$a_{11}, a_{12}, a_{44}.$$

Этого результата мы достигли, выполнив требование, чтобы вид соотношений не менялся при повороте осей координат на 90° и 180° ; однако такого условия недостаточно для обеспечения изотропности тела, т. е. полной однородности его во всех направлениях. Поэтому применим еще одно преобразование координат, связанное с поворотом осей на угол, меньший 90° . Воспользуемся для этой цели теми рассуждениями, какие применяются в сопротивлении материалов при установлении связи между модулями E и G .

Для простоты берем случай плоской деформации, когда

$$e_{xz} = e_{yz} = e_{zx} = 0.$$

Тогда из ур-ний (42) имеем:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11} e_{xx} + a_{12} e_{yy} \\ Y_y &= a_{12} e_{yy} + a_{11} e_{xx} \\ X_y &= a_{44} e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

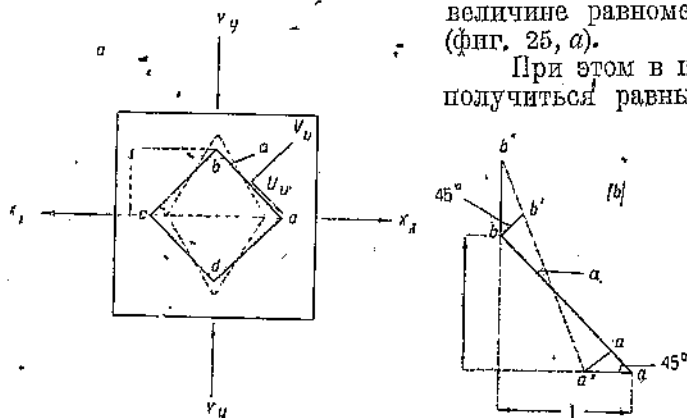
Рассмотрим напряженное состояние тела, при котором вдоль оси OX действует равномерное растяжение X_x , а вдоль оси OY — равное ему по величине равномерное сжатие $Y_y = -X_x$ (фиг. 25, а).

При этом в изотропном теле должны получиться равные по величине, но противоположные по знаку удлинения:

$$e_{xx} = -e_{yy} = e_0, \quad (44)$$

где e_0 — абсолютная величина удлинения.

Применим поворот осей координат на 45° и для этого выделим квадратный элемент $abcd$ с вертикальной и горизонтальной диагоналями, равными 2.



Фиг. 25.

Пользуясь формулами (C) (§ 4), найдем напряжения по косой площадке ab : нормальное $V_v = 0$; касательное

$$U_v = \frac{X_x - Y_y}{2};$$

или, пользуясь уравнениями (43) и (44):

$$U_v = \frac{(a_{11} - a_{12})(e_{xx} - e_{yy})}{2} = (a_{11} - a_{12})e_0.$$

Но, с другой стороны, по 3-му из ур-ний (43) имеем:

$$U_v = a_{44} e_{uv}.$$

Поэтому

$$(a_{11} - a_{12})e_0 = a_{44} e_{uv}. \quad (45)$$

Остается установить связь между e_0 и e_{uv} и тогда (45) даст зависимость между постоянными a_{11} , a_{12} , a_{44} . Легко найти угол поворота α стороны ab квадрата; пренебрегая малыми высшего порядков, имеем (фиг. 25, б):

$$\alpha \approx \frac{a'a'' + bb'}{ab} = \frac{aa'' \frac{\sqrt{2}}{2} + bb'' \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}};$$

по $aa'' = bb'' = e_0$, и потому получим $\alpha = e_0$.

Изменение какого-нибудь угла квадрата $abcd$, иначе говоря, угол сдвига e_{xy} будет: $e_{xy} = 2\alpha = 2e_0$. Внося это в ур-ние (45), получим:

$$a_{11} - a_{12} = 2a_{44}. \quad (46)$$

Это и есть искомая зависимость между тремя упругими постоянными, показывающая, что среди них лишь две независимы; третья выразится через них по ур-нию (46). Принимая за независимые a_{12} и a_{44} , из ур-ния (46) найдем: $a_{11} = a_{12} + 2a_{44}$.

Значит, изотропное упругое тело характеризуется всего двумя упругими постоянными a_{12} и a_{44} .

Это и есть те коэффициенты Ламе, которые мы в § 12 обозначили через λ и μ . Возвращаясь к этим обозначениям, $a_{12} = \lambda$; $a_{44} = \mu$; $a_{11} = \lambda + 2\mu$, и подставляя это в ур-ния (42), мы их сейчас же приведем все к виду (V') (§ 12).

Значит, ур-ния (V') непосредственно получаются из самых общих ур-ний (34), если принять гипотезу о существовании потенциала упругих сил и предположить, что данное тело изотропно. От ур-ний (V') можно перейти обратно к ур-ниям (V); для этого конечно достаточно найти зависимости, обратные зависимостям (26), т. е. выразить E , G и σ через коэффициенты Ламе λ и μ .

Мы уже знаем, что $G = \mu$. Остается получить выражения E и σ ; для этого достаточно рассмотреть случай простого растяжения, например по направлению оси OX ; первые три из ур-ний (V') в этом случае напишем так:

$$X_x = \lambda \theta + 2\mu e_{xx} \quad (47)$$

$$0 = \lambda \theta + 2\mu e_{yy} \quad (48)$$

$$0 = \lambda \theta + 2\mu e_{zz}.$$

Складывая их почленно, получим¹:

$$X_x = (3\lambda + 2\mu) \theta.$$

Отсюда находим θ и, подставляя его значение в ур-ние (47), получим:

$$e_{xx} = \frac{1}{2\mu} \left(X_x - \lambda \frac{X_x}{3\lambda + 2\mu} \right) = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} X_x \quad (49)$$

Пользуясь модулем E , это же соотношение пишем так:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} X_x.$$

Отсюда:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}. \quad (50)$$

Далее из второго ур-ния (48) имеем:

$$e_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu} \theta = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} X_x$$

и при помощи ур-ния (49) получаем:

$$\sigma = -\frac{e_{yy}}{e_{xx}} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (51)$$

Очевидно, выражения (50) и (51) можно получить, решая ур-ния (26) относительно E и σ .

¹ Ср. формулу (V'a).

ГЛАВА IV

Решение задачи теории упругости в перемещениях

§ 18. Обобщенным законом Гука мы закончили вывод всех основных групп уравнений теории упругости; дадим их еще раз в общей сводке.

А. Статические уравнения:

1. Дифференциальные условия равновесия (уравнения Навье):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

2. Условия на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_y &= X_x \cos(vx) + X_y \cos(vy) + X_z \cos(vz) \\ Y_y &= Y_x \cos(vx) + Y_y \cos(vy) + Y_z \cos(vz) \\ Z_y &= Z_x \cos(vx) + Z_y \cos(vy) + Z_z \cos(vz) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

В. Геометрические уравнения

3. Связь между перемещениями и деформациями (уравнения Коши):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

4. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

5. Обобщенный закон Гука:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)] & e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)] & e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)] & e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \theta + 2\mu e_{xx} & Y_z &= \mu e_{yz} \\ Y_y &= \lambda \theta + 2\mu e_{yy} & Z_x &= \mu e_{zx} \\ Z_z &= \lambda \theta + 2\mu e_{zz} & X_y &= \mu e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (V')$$

На основе этих групп ур-ний можно уже приступить непосредственно к решению общей задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в изотропном упругом теле под действием сил. При этом необходимо предварительно выбрать те величины, которые мы примем за основные неизвестные, подлежащие разысканию в первую очередь и по которым далее можно уже находить все остальные факторы, характеризующие напряженное состояние и деформации тела.

История развития теории упругости показывает, что здесь можно идти двумя различными путями.

1) Принять за основные неизвестные перемещения точек упругого тела; тогда в каждой точке (x, y, z) тела мы имеем 3 неизвестных:

$$u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z), \quad (52)$$

и задача приведет к разысканию 3 функций (52), причем надо будет удовлетворить трем условиям равновесия (I); одновременно на поверхности должны удовлетворяться условия (II), содержащие внешние силы (нагрузку)

$$X_n, Y_n, Z_n.$$

2) Принять за неизвестные напряжения; тогда в каждой точке тела мы будем иметь 6 неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} X_x(x, y, z), \quad Y_y(x, y, z), \quad Z_z(x, y, z) \\ Y_z(x, y, z), \quad Z_x(x, y, z), \quad X_y(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Задача сведется к разысканию 6 функций (53); они должны удовлетворять трем ур-ниям равновесия (I); однако этих ур-ний недостаточно и придется привлечь еще 3 условий неразрывности деформаций (IV). Одновременно на поверхности, как и при первом способе, должны удовлетворяться условия (II).

Из этих рассуждений видно, что первый способ („решение задачи в перемещениях“) проще с математической стороны, так как при нем имеется меньшее число неизвестных и приходится иметь дело с меньшим числом ур-ний. Разыскав перемещения (52), мы далее по уравнениям (III) без труда найдем деформации $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$ и наконец, подставляя их в ур-ния закона Гука (V'), определим напряжения:

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y.$$

¹ Интересно отметить, что в настоящее время строительная механика также дает два аналогичные пути для решения статик системы неопределенных систем; это метод сил и метод деформаций, причем здесь так же, как и в методе деформаций, количество основных неизвестных значительно меньше, чем в методе сил.

В настоящей главе мы рассмотрим способ решения задачи теории упругости в перемещениях и применим его к нескольким частным случаям.

§ 19. Выпишем дифференциальные уравнения равновесия (I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X\rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y\rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z\rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

и условия на поверхности (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ) \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ) \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Все эти уравнения нам придется преобразовать, выразив в них напряжения через перемещения (52), принимаемые нами за неизвестные.

С этой целью мы выразим напряжения через деформации по закону Гука (V'), деформации же выразим через перемещения по (III).

Выбирая в (V') напряжения, входящие в первое из уравнений (I), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ X_y &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ X_z &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Дифференцируя их, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X_y}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Внося это в первое из уравнений (I), получаем:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ + X\rho = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

и введем краткое обозначение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u.$$

Это выражение называется Лапласовым оператором 2-го порядка над функцией $u(x, y, z)$.

После этого ур-ние (55) получит вид:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X\rho = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \quad (55')$$

Аналогично преобразуем остальные два из ур-ний (I); мы их получим непосредственно из (55'), делая в нем круговую подстановку букв (x, y, z) и (u, v, w) ; приходим к следующей системе основных ур-ний теории упругости для разыскания перемещений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Это так называемые уравнения Ламе (Lamé).

Таким же путем преобразуем условия на поверхности (II); подставляя в первое из них вместо напряжений их выражения (54), будем иметь:

$$\begin{aligned} X_v = \lambda \theta \cos(VX) + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(VZ) \right] + \\ + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(VZ) \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Правую часть этого ур-ния можем написать проще, если примем во внимание, что выражение в первых квадратных скобках представляет собою так называемую производную функции $u(x, y, z)$ по нормали к поверхности тела:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dV} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dV} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dV} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dV} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(VX) + \\ + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(VZ). \end{aligned}$$

Применяя такие же рассуждения к двум остальным ур-ниям (II), получим окончательный вид условий на поверхности:

$$\begin{aligned} X_v &= \lambda \theta \cos(VX) + \mu \frac{du}{dV} + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(VZ) \right], \\ Y_v &= \lambda \theta \cos(VY) + \mu \frac{dv}{dV} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(VX) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(VZ) \right], \\ Z_v &= \lambda \theta \cos(VZ) + \mu \frac{dw}{dV} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(VY) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(VZ) \right]. \end{aligned} \quad (VIa)$$

§ 20. Уравнения Ламе (VI), совместно с условиями на поверхности (VIa), позволяют уже перейти непосредственно к решению задач теории упругости.

Если нам удастся проинтегрировать ур-ния (VI) и найти функции u , v и w , удовлетворяющие условиям на поверхности (VIa), то, внося их

в ур-ния (III), найдем деформации $\epsilon_{xx}, \dots, \epsilon_{xy}$; внося же эти последние в ур-ния закона Гука (V'), найдем напряжения

$$X_x, Y_y, \dots, X_y$$

Интегрирование ур-ний (VI) в общем виде представляет большие трудности. Однако, при решении многих задач, имеющих практическое значение, оказывается удобным применять обратный метод, задавая перемещения, как функции координат точки (x, y, z) и разыскивая на основании условий (VIa) внешние силы на поверхности тела (нагрузку), которым соответствуют заданные перемещения. Оказался весьма плодотворным также „полу-обратный“ способ Сен-Венана, согласно которому задают часть внешних сил и часть перемещений и разыскивают остальные факторы из условий, чтобы были удовлетворены основные ур-ния (VI) и (VIa).

Оба эти способа мы сейчас рассмотрим на частных задачах, имеющих практическое приложение.

Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде

§ 21. Применим к этой задаче обратный метод, т. е. зададимся перемещениями и проверим, возможны ли они в однородной упругой среде, другими словами, удовлетворяют ли они ур-ниям Ламе (VI). Так как мы рассматриваем случай движения, то перемещения (52) (§ 18) должны зависеть не только от координат точки, но и от времени t .

А. Выберем такие выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, t); \\ v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

и предположим кроме того, что объемные силы отсутствуют, т. е. что

$$X = Y = Z = 0.$$

Так как $v = w = 0$, то перемещения всех точек происходят параллельно оси OX ; кроме того перемещение u не зависит от y, z ; следовательно, если мы (фиг. 26) будем рассматривать точки, которые при отсутствии движения расположены в плоскости P , нормальной к оси OX , то все эти точки будут перемещаться одинаково и одновременно; другими словами, плоскость P будет перемещаться в направлении оси OX , не деформируясь.

Действительно, ур-ние плоскости P в состоянии покоя будет $x = x_0$.

В любой момент во время движения оно будет иметь вид: $x = x_0 + u$ или: $x = x_0 + u(x_0, t)$. Это попрежнему плоскость, параллельная YOZ , но расположенная от YOZ

на переменном расстоянии, зависящем от времени.

Если мы выберем в нашей упругой среде ряд таких плоскостей: $P, P_1, P_2, \dots$, то все они будут перемещаться нормально к OX , взаимно сближаясь или удаляясь¹; дальше мы будем иметь в виду лишь периоди-

¹ Так как расстояние d между двумя любыми плоскостями $x = x_0$ и $x = x_1$ во время движения зависит от времени t :

$$d = x_1 + u(x_1, t) - [x_0 + u(x_0, t)] = x_1 - x_0 + u(x_1, t) - u(x_0, t)$$

ческие колебания. В этом случае движение, выражаемое ур-ниями (57), называется однородным продольным колебанием вдоль оси OX .

Условием на поверхности (VIa) нам удовлетворять не надо, так как среда предположена неограниченной.

Для проверки возможности колебаний, выражаемых ур-ниями (57), подставим их в ур-ния (VI).

Предварительно вычисляем:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0;$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \nabla^2 v = 0; \quad \nabla^2 w = 0;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

После этого замечаем, что второе и третье из ур-ний (VI) удовлетворяются тождественно; первое же преобразуется так:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (58)$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (59)$$

Отсюда делаем основной вывод: заданное нами продольное колебательное движение, согласно уравнениям (57), возможно, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (58).

В. Выберем теперь такие выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \\ w &= w(x, t) \end{aligned} \right\}. \quad (60)$$

Пусть объемные силы также отсутствуют:

$$X = Y = Z = 0.$$

В этом случае все перемещения происходят параллельно оси OZ . Рассуждая подобно предыдущему, легко убедимся, что все точки любой плоскости P (фиг. 26) перемещаются одинаково и одновременно. Если будем рассматривать несколько таких параллельных плоскостей, то они будут перемещаться вертикально, не выходя из своего начального положения относительно оси OX . В случае периодического движения мы будем иметь дело с однородным поперечным колебанием вдоль оси OZ . Проверим возможность таких колебаний; на основании ур-ний (60) имеем:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

значит объемных деформаций нет. Далее:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0; \quad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0; \quad \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

При этих условиях первое и второе из ур-ний (V) удовлетворяются тождественно; третье получает вид:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (61)$$

где

$$l^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (62)$$

Значит, колебание (60) возможно, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (61).

Замечаем, что ур-ния (58) и (61) имеют совершенно одинаковый вид и разнятся только величиной постоянного коэффициента (ср. формулы 59 и 62).

§ 22. Рассмотрим частный случай гармонических колебаний. Для продольного колебания зададим функцию $u(x, t)$ (ср. уравнения 57) так:

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right). \quad (63)$$

Внося это выражение в ур-ние (58) и производя сокращение, получаем:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{a^2}{l^2},$$

или

$$\frac{l}{T} = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (64)$$

Следовательно, колебание (63) возможно в неограниченной упругой среде, если параметры l и T удовлетворяют соотношению (64).

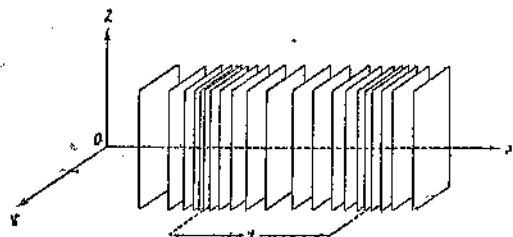
Параметр A (амплитуда колебания) остается произвольным. Параметр T есть период колебания; действительно если мы оставим x постоянным (т. е. все время будем рассматривать одну и ту же плоскость P на фиг. 26), а времени t дадим приращение T , то отклонение u согласно ур-ния (63) не изменится.

Параметр l есть длина волны. Геометрический смысл его проще всего уяснить, рассматривая относительное удлинение:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = A \frac{2\pi}{l} \cos 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right). \quad (65)$$

Оставим время t постоянным, т. е. будем рассматривать всевозможные плоскости P (фиг. 26) в некоторый определенный момент. Так как e_{xx} вы-

разилось в виде периодической функции от x , то формула (65) показывает, что если абсциссе x дадим приращение l , то получим новую плоскость P , в точках которой e_{xx} имеет ту же величину; будем например рассматривать $\min e_{xx}$; это будет в тех местах, где в данный момент t имеется наибольшее сгущение плоскостей P (фиг. 27); расстояние между этими точками, как



Фиг. 27

чина наибольшего сжатия (расширения) согласно ур-нию (65) получится, если положим

$$\cos 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right) = \pm 1;$$

или

$$\frac{x}{l} - \frac{t}{T} = \frac{m}{2} \quad (66)$$

Из ур-ния (66) видим, что абсцисса x этой точки равномерно перемещается с течением времени t ; скорость этого движения равна:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{T}.$$

Это есть скорость распространения волны. На основании ур-ния (64) имеем:

$$V = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (67)$$

Делаем вывод из предыдущего исследования: заданное гармоническое колебание (63) возможно в однородной упругой среде. Амплитуда A произвольна; длина волны l и период колебания T могут быть также различны, но скорость распространения продольной волны $V = \frac{l}{T}$ согласно ур-нию (67) есть величина постоянная, зависящая от коэффициентов упругости λ и μ и плотности ρ среды.

Рассматриваемые нами продольные колебания есть так называемые звуковые колебания, так как при

$$\frac{1}{16} \text{ сек} > T > \frac{1}{50000} \text{ сек}$$

эти колебания улавливаются ухом, как звук. Формула (67) важна тем, что она дает скорость распространения звука в твердом теле неограниченных размеров.

§ 23. Мы рассмотрели лишь случай гармонического продольного колебания по закону (63); однако в упругом теле возможны колебания самого разнообразного вида. Действительно, самое общее решение ур-ния (58) будет:

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (68)$$

где φ и ψ — произвольные функции; подставляя это выражение в ур-ние (58), убедимся, что оно тождественно удовлетворяется. Легко видеть, что правая часть ур-ния (68) выражает два колебания, распространяющиеся в стороны положительной и отрицательной осей OX со скоростью a .

Возьмем например частное решение

$$u = \varphi(x - at). \quad (69)$$

Если независимые переменные x и t свяжем условием:

$$x - at = c \quad (70)$$

(ср. равенство 66), то получим:

$$u = \varphi(c) = \text{постоянная.}$$

Значит ур-ние (70) указывает, что точка с данной постоянной величиной отклонения u перемещается равномерно со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = V = a.$$

Вообще можно заметить, что ур-ние (63) есть частный случай ур-ния (69); действительно, его можно переписать так:

$$u = A \sin \frac{2\pi}{l} (x - at), \quad \text{где } a = \frac{l}{T}.$$

Аналогично, частное решение $u = \phi(x + at)$ соответствует колебанию, распространяющемуся по направлению отрицательной оси OX с той же скоростью.

Окончательное заключение: скорость распространения продольного колебания в однородном упругом теле постоянна и выражается формулой (67). Закон колебания может быть произвольным, благодаря произвольности функций φ и ψ в общем решении (68) ур-ния (58).

§ 24. Соображения предыдущего параграфа справедливы конечно и в отношении ур-ния (61) поперечных колебаний.

Общее решение его:

$$w = \varphi(x - bt) + \psi(x + bt).$$

Здесь b — есть скорость распространения поперечных колебаний. Рассмотрим частный случай гармонического поперечного колебания:

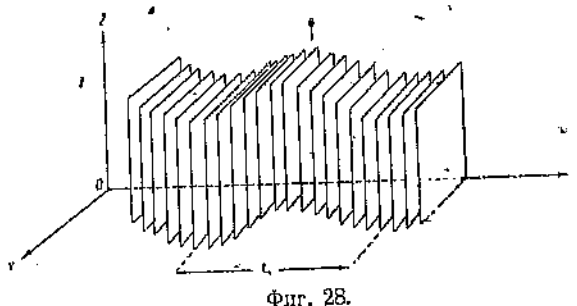
$$w = B \sin 2\pi \left(\frac{x}{l_1} - \frac{t}{T_1} \right) = B \sin \frac{2\pi}{l_1} (x - bt),$$

где

$$b = \frac{l_1}{T_1}. \quad (71)$$

Здесь l_1 — длина поперечной волны (фиг. 28); T_1 — период колебания.

Как и в случае продольных колебаний найдем, что скорость распространения колебания (ср. формулы 71 и 62)



Фиг. 28.

$$V_1 = \frac{l_1}{T_1} = b = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Сравнивая ур-ния (67) и (71), видим, что

$$|V_1| < |V|,$$

т. е. скорость распространения поперечных колебаний менее скорости распространения продольных.

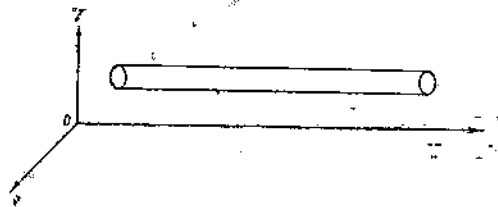
Отношение их будет

$$\left| \frac{V_1}{V} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}, \quad (72)$$

и зависит только от упругих постоянных среды.

§ 25. Рассуждения предыдущих параграфов относились к неограниченной упругой среде, т. е. к среде, распространяющей бесконечно в направлении всех трех осей координат. Если мы будем рассматривать ци-

цилиндрический стержень (фиг. 29), то колебания его будут протекать несколько иначе, чем для неограниченной среды; например при продольных колебаниях поперечные размеры его будут изменяться, вследствие продольных удлинений e_{xx} ; следовательно, кроме основных перемещений u вдоль оси OX появятся побочные поперечные перемещения v и w и явление значительно усложняется. Однако в случае тонкого стержня можно без особой ошибки пренебречь поперечными деформациями и тогда легко вывести дифференциальное уравнение продольных колебаний такого стержня.



Фиг. 29.

Выделим (фиг. 30) из стержня элемент длиной dx и действие отброшенных частей заменим силами

$$-X_x \omega \quad \text{и} \quad \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) \omega,$$

где ω — площадь сечения стержня.

Масса выделенного элемента равна $\rho \cdot \omega \cdot dx$ и ур-ние движения его будет:

$$-X_x \omega \leftarrow \text{---} \rightarrow \left[X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right] \omega$$

Фиг. 30.

$$\rho \omega dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \cdot \omega. \quad (73)$$

Так как мы предполагаем в стержне лишь простое растяжение или сжатие, то по закону Гука имеем:

$$X_x = E e_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x};$$

а следовательно:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Внося это выражение в ур-ние (73), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (74)$$

где

$$a_1^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (75)$$

Ур-ние (74) отличается от ур-ния (58) для неограниченной среды лишь постоянным коэффициентом (ср. формулы 59 и 75); различие обусловлено тем, что в случае неограниченной среды мы предполагали отсутствие поперечных перемещений v и w и соответственных деформаций, а это в свою очередь вызывает явление поперечных напряжений Y_x и Z_x , в случае же стержня этих напряжений нет.

Ур-ние (75) дает возможность вычислить модуль упругости стержня E , зная его плотность ρ и скорость распространения звука в нем a_1 .

§ 26. Общий интеграл дифференциального ур-ния (74) имеет прежнюю формулу (63)¹; однако при решении частных задач чаще всего пользуются

¹ Он найден Д'Аламбером для струны, ур-ние поперечного колебания которой имеет тот же вид (58).

интегрированием ур-ния (74) в рядах Фурье; для этой цели напишем ур-ние в общей форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (76)$$

где $a = a, b, a_1$ в зависимости от характера решаемой задачи. Постараемся найти частный интеграл ур-ния (76) в форме:

$$u = X \cdot T, \quad (77)$$

где X — функция одной переменной x ,

T — функция одной переменной t .

Подставляя это в ур-ние (76), найдем:

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

или, разделяя переменные:

$$\frac{1}{a^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (78)$$

Левая часть этого ур-ния зависит только от t , а правая только от x ; но так как обе эти переменные независимы, то ур-ние (78) может быть удовлетворено тождественно только тогда, если левая и правая части его в отдельности равны одному и тому же постоянному числу; назовем его через $-\lambda^2$; тогда ур-ние (78) разлагается на два обыкновенных дифференциальных ур-ния:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 a^2 T; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X.$$

Общие интегралы их:

$$T = A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t; \quad X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

Подставляя это в ур-ние (77), получим частное решение ур-ния (76)

$$u = (A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t) (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x). \quad (79)$$

Меняя здесь A, B, C, D, λ , получим сколько угодно частных решений. Так как ур-ние (76) линейное, то сумма всех таких частных решений также будет удовлетворять ур-нию (76) и мы получим решение его в виде ряда:

$$u = \sum (A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t) (C \cos \lambda x + D \sin \lambda x), \quad (80)$$

в каждом члене этой суммы A, B, C, D, λ могут иметь свои особые значения; число членов ряда неограничено.

Входящие сюда неопределенные постоянные, следует искать из граничных условий стержня. Ход рассуждений поясним на простом примере. Пусть мы имеем стержень длиной l , заделанный нижним концом и совершающий продольные колебания. Заделка нижнего конца дает условие: при любом t и при $x=0$, $u=0$.

Для удовлетворения его, в ур-нии (80) следует, очевидно, положить

$$C=0;$$

тогда

$$u = \sum (A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t) \sin \lambda x. \quad (81)$$

¹ Постоянную D , очевидно, можем опустить без вреда для общности решения, так как внося ее в скобки, получим в них опять лишь две постоянные AD и BD .

Предположим, что верхний конец стержня свободен и потому, при $x=l$, удлинение

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в любой момент времени t . Имея это в виду, из ур-ния (81) получим:

$$\cos \lambda l = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{i\pi}{2}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{i\pi}{2l},$$

где $i=1, 2, 3, \dots, \infty$ и потому

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_i \cos \frac{i\pi}{2l} at + B_i \sin \frac{i\pi}{2l} at \right) \sin \frac{i\pi}{2l} x. \quad (82)$$

Для последующего удобно удвоить длину стержня (от $-l$ до $+l$), но потребовать, чтобы колебания были симметричны относительно начала координат; тогда в ур-нии (82) указателю i надо давать только нечетные значения: $i=1, 3, 5, \dots$

Для определения произвольных постоянных A_i и B_i необходимо задать состояние стержня в начальный момент, например при $t=0$, т. е. указать перемещения u и скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ всех точек стержня в этот момент; пусть

$$\left. \begin{aligned} u_{t=0} &= f(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} &= \varphi(x) \end{aligned} \right\}. \quad (83)$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi a}{2l} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(-A_i i \sin \frac{i\pi}{2l} at + B_i i \cos \frac{i\pi}{2l} at \right) \sin \frac{i\pi}{2l} x. \quad (84)$$

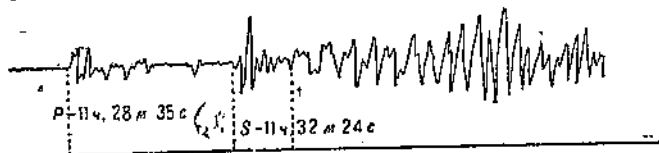
На основании ур-ний (82) и (84), условия (83) дают:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{2l} \\ \varphi(x) &= \frac{\pi a}{2l} \sum_{i=1}^{\infty} B_i i \sin \frac{i\pi x}{2l} \end{aligned} \right\}. \quad (85)$$

Задача свелась к разложению функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье, стоящие в правых частях ур-ний (85), т. е. к разысканию коэффициентов A_i и B_i этих рядов. Коэффициенты эти, как известно, выражаются формулами Эйлера, и в данном случае имеют такие значения:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{i\pi}{2l} x dx \\ B_i &= \frac{2}{i\pi a} \int_{-l}^{+l} \varphi(x) \sin \frac{i\pi}{2l} x dx \end{aligned} \right\}. \quad (86)$$

Изложенный здесь способ легко приводит к цели в случае свободных колебаний стержней. При исследовании вынужденных колебаний, а также поперечных колебаний стержней под периодически меняющейся или под движущейся нагрузкой задача значительно усложняется. Ряд важных случаев разобран в курсе теории упругости С. П. Тимошенко (ч. 2). Общая теория колебаний упругого тела находит большие приложения в сейсмологии при изучении колебаний земной коры; не углубляясь в этот вопрос,



Фиг. 31.

отметим только, что обнаруженное нами постоянство скоростей продольных и поперечных колебаний позволяет по записи колебаний на сейсмической станции (сейсмограмма) определить расстояние центра землетрясения от станции; поперечные колебания, как мы видели, распространяются медленнее продольных и доходят до станции позднее; на фиг. 31 показана часть сейсмограммы землетрясения в Малой Азии 9 февраля 1909 г., записанная на Пулковской обсерватории¹; здесь точки P и S показывают моменты прихода первых продольных и первых поперечных волн. Зная промежуток времени PS и скорости обоих видов волн, можно найти искомое расстояние.

¹ Чертеж заимствован из курса геологии проф. Иностранцева.

ГЛАВА V

Кручение призматических стержней

§ 27. Рассмотрим задачу о кручении призматического или цилиндрического стержня (с любой формой поперечного сечения) двумя парами сил, лежащими в плоскостях его крайних сечений. Влиянием собственного веса стержня пренебрегаем, т. е. принимаем в уравнениях (VI) (§ 18)

$$X = Y = Z = 0.$$

При решении задачи воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана, т. е. зададим часть перемещений, а остальные найдем из уравнений Ламе (VI) и из условий на поверхности (II) или (VIa).

Предположим, что в поперечных сечениях призмы существуют только касательные напряжения X_z и Y_z ; прочие же составляющие напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям, равны нулю:

$$X_x = Y_y = Z_z = 0 \quad (89)$$

и

$$X_y = 0. \quad (90)$$

Как следствие из уравнений (89) имеем:

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z = 0;$$

а потому по уравнению (VIa) (§ 18) находим:

$$\theta = 0, \quad (91)$$

т. е. объемная деформация отсутствует.

Осюда на основании закона Гука (V') (§ 18) делаем выводы о деформациях:

$$e_{xx} = 0; \quad e_{yy} = 0; \quad e_{zz} = 0; \quad e_{xy} = 0,$$

или, выражая деформации через перемещения по уравнениям (III) (§ 18):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (92)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (93)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (94)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (95)$$

Примем уравнения (92—95) за исходные предположения о перемещениях и заметим, что уравнения (92), (93) и (95) будут удовлетворены, если для u

и v примем те же выражения, как и при кручении круглых стержней (см. далее формулы (148), § 39):

$$u = -\tau y z; \quad v = \tau x z. \quad (96)$$

Остается удовлетворить ур-нию (94) и основным ур-ниям равновесия (VI):

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (97)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0;$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0;$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = 0.$$

Но по ур-нию (91) $\theta = 0$, а из ур-ния (96) замечаем, что

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

и последняя группа ур-ний сводится к одному:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Далее, по ур-нию (97) замечаем, что функция w не зависит от z и следовательно:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0;$$

поэтому результат всего предыдущего исследования можем формулировать так: требуется найти функцию от двух переменных:

$$w(x, y),$$

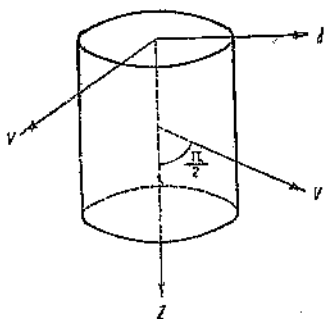
удовлетворяющую ур-нию

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (98)$$

§ 28. Дополнительное условие, ограничивающее функцию w , получим, рассматривая условия на поверхности.

При наличии предположений (89) и (90) ур-ния (II) получают вид

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_z \cos(VZ); \\ Y_v &= Y_z \cos(VZ); \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + z_y \cos(Vy) \end{aligned} \right\} \quad (99)$$



Фиг. 32.

Ограничимся пока рассмотрением боковой поверхности призмы; по условию она должна быть свободна от усилий; кроме того для всех точек ее (фиг. 32)

$$\cos(VZ) = 0.$$

Поэтому первые два из ур-ний (99) удовлетворяются тождественно, а последнее дает:

$$Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) = 0. \quad (100)$$

На основании закона Гука и ур-ний (96)

$$\left. \begin{aligned} Z_x = X_z = \mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \tau y \right) \\ Z_y = Y_z = \mu e_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \tau x \right) \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Кроме того, если ур-ние контура сечения (фиг. 33) есть

$$f(x, y) = 0, \quad (102)$$

то получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx};$$

$$\cos(VX) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha;$$

$$\cos(VY) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Поэтому из ур-ния (100)

$$\frac{Z_y}{Z_x} = -\frac{\cos(VX)}{\cos(VY)} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

или

$$Z_x dy - Z_y dx = 0$$

или, подставляя сюда из ур-ния (101)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \tau y \right) dy - \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \tau x \right) dx = 0, \quad (103)$$

иначе

$$\frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx - \tau(y dy + x dx) = 0. \quad (103')$$

Легко видеть, что левая часть ур-ния (103) представляет собою полный дифференциал, так как¹

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \tau y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[- \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \tau x \right) \right] = \nabla^2 w,$$

а это по ур-нию (98) равно нулю.

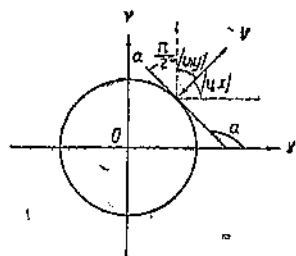
Ур-ние (103) или (103') должно удовлетворяться для всех точек контура сечения; следовательно оно есть дифференциальное ур-ние всех форм контура, при которых возможны и предположенные нами перемещения. Из ур-ня (103) следует еще исключить функцию w , являющуюся искомой. Во всяком случае заключаем, что принятые нами предположения о перемещениях возможны не при всяких контурах, а лишь при контурах, удовлетворяющих ур-нию (103).

Одним из ур-ния (102) можно получить другое дифференциальное ур-ние того же контура:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \quad (102')$$

¹ Известно, что выражение $Mdx + Ndy$ есть полный дифференциал при условии:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$



Фиг. 33.

Сравнивая ур-ния (103) и (102'), приходим к тождествам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -k \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \tau x \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \tau y \right) \end{aligned} \right\}, \quad (104)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tau \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \tau \right).$$

Складывая эти два тождества, имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2k\tau; \quad (105)$$

или

$$\nabla^2 f = -2k\tau = c,$$

где c — произвольная постоянная.

Это и есть дифференциальное ур-ние, которому должен удовлетворять контур поперечного сечения, причем в него уже не входит искомая функция w . Ур-ние (105) есть дифференциальное ур-ние в частных производных 2-го порядка. В общий интеграл его войдут две произвольные функции и потому налагаемое им ограничение на форму контура не является чрезмерно тесным.

§ 29. План дальнейшего решения представится в следующем виде.

Задаем единичный угол закручивания τ и коэффициент k ; вставляем их в ур-ние (105) и выбираем контур сечения (102), удовлетворяющий этому ур-нию.

Далее находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y};$$

внеся их в ур-ния (104), получим из них выражения производных от $w(x, y)$:

$$M = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial y} + \tau y;$$

$$N = \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} - \tau x,$$

по которым найдем самую функцию $w(x, y)$.

Однако весьма удобно и здесь продолжить обратный метод Сен-Венана, т. е. задать функцию $w(x, y)$ и искать соответствующий ей контур $f(x, y) = 0$ из ур-ния (103).

При этом решение упрощается и получает очень изящный вид, если воспользоваться функциями комплексного переменного.

Действительно, возьмем какую-нибудь аналитическую функцию:

$$U(x, y) + i V(x, y). \quad (106)$$

Она, как известно, должна удовлетворять условиям Коши:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (107)$$

Зададим функцию w так:

$$w = U.$$

Тогда ур-ние (103) на основании (107) получит вид:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \tau y\right) dy - \left(-\frac{\partial V}{\partial x} + \tau x\right) dx = 0,$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy - \tau(ydy + xdx) = 0.$$

Интегрируя его, получаем ур-ние контура:

$$V - \frac{1}{2} \tau (x^2 + y^2) = c. \quad (108)$$

Значит, если перемещение w представляет собою вещественную часть аналитической функции (106), то контур сечения выразится через мнимую часть ее по ур-нию (108).

Можно поступить обратно, т. е. принять

$$w = V(x, y).$$

Тогда ур-ние (103) на основании ур-ний (107), перепишем так:

$$\left(-\frac{\partial U}{\partial y} - \tau y\right) dy - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau x\right) dx = 0,$$

или

$$-\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \tau(xdx + ydy) = 0.$$

Интегрируя, получаем ур-ние контура:

$$-U - \frac{1}{2} \tau (x^2 + y^2) = -c_1,$$

или

$$U + \frac{1}{2} \tau (x^2 + y^2) = c_1. \quad (109)$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Стержень эллиптического сечения

§ 30. Возьмем аналитическую функцию

$$C_2 z^2 = c_2 (x + iy)^2 = C_2 (x^2 - y^2) + i2C_2 xy.$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} U &= C_2 (x^2 - y^2) \\ V &= 2C_2 xy \end{aligned} \right\}, \quad (110)$$

Положим

$$w = 2C_2 xy = 2D_2 \tau xy,$$

где

$$D_2 = \frac{C_2}{\tau}.$$

Тогда по ур-ниям (109) и (110) получим ур-ние контура, заменив c_1 на $D_1 \tau$:

$$D_2 \tau (x^2 - y^2) + \frac{\tau}{2} (x^2 + y^2) = D_1 \tau,$$

или

$$\left(D_2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - D_2\right)y^2 = D_1,$$

или наконец:

$$\frac{\frac{x^2}{\left(\frac{D_1}{D_2 + \frac{1}{2}}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{D_1}{\frac{1}{2} - D_2}\right)}}{1} = 1.$$

Положив здесь

$$\frac{D_1}{D_2 + \frac{1}{2}} = a^2; \quad \frac{D_1}{\frac{1}{2} - D_2} = b^2, \quad (111)$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (112)$$

т. е. будем иметь брусок эллиптического сечения.

Из (111) находим постоянные D_1 и D_2 , выражая их через полуоси a и b эллипса поперечного сечения:

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}; \quad D_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Отсюда:

$$w = 2 D_2 \tau xy = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau xy. \quad (113)$$

§ 31. Далее (ср. § 20) находим касательные напряжения по сечению:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau y - \tau y \right) = -G \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \tau y \\ Y_z &= G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \tau x \end{aligned} \right\}. \quad (114)$$

Наконец связываем напряжения по сечению с крутящим моментом M_z :

$$M_z = - \iint (X_z y - Y_z x) d\omega = -G \frac{2\tau}{a^2 + b^2} \iint (-a^2 y^2 - b^2 x^2) d\omega. \quad (115)$$

Но

$$\iint y^2 d\omega = J_w; \quad \iint x^2 d\omega = J_u,$$

где J_w и J_u — моменты инерции эллипса около его осей:

$$J_w = \frac{\pi a b^3}{4}; \quad J_u = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Поэтому из ур-ния (115) получаем:

$$M_z = G \frac{2\tau}{a^2 + b^2} \frac{\pi a^3 b^3}{2} = G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tau.$$

Отсюда выражаем угол закручивания τ через крутящий момент:

$$\tau = \frac{M_z}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}.$$

Вспоминаем из сопротивления материалов, что при круглом стержне, получается:

$$\tau = + \frac{M_p}{G J_p};$$

где J_p — полярный момент инерции сечения.

Для сравнения этих выражений свяжем величину

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^3 + b^3}$$

с полярным моментом инерции эллипса:

$$\begin{aligned} J_p = J_x + J_y &= \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi a b (a^2 + b^2)}{4} = \frac{\pi a^4 b^4 (a^2 + b^2)}{4 a^3 b^3} = \\ &= \frac{\pi a^4 b^4}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} = \frac{\pi^3}{4 \pi^2} \cdot \frac{\omega^4}{\pi a^3 b^3}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^3 + b^3} = \frac{\omega^4}{4 \pi J_p^2} \approx \frac{\omega^4}{39,4 J_p};$$

и следовательно:

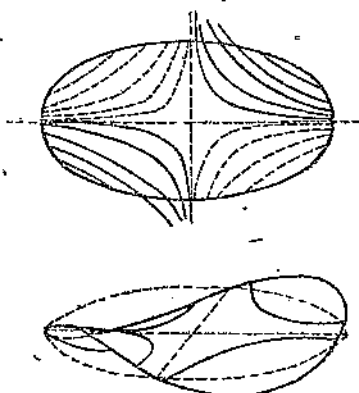
$$\tau = \frac{M_z}{G \omega^4} 39,4 J_p. \quad (116)$$

Заменив в ур-нии (116) ω на z , получим ур-ние искривленной поверхности поперечного сечения: $z = mxy$, где

$$m = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau;$$

поверхность эта есть гиперболический параболоид; в пересечении с системой горизонтальных плоскостей: $z = z_n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, она дает гиперболы:

$$xy = \frac{z_n}{m},$$



Фиг. 34.

отнесенные к асимптотам (фиг. 34).

§ 32. По ур-ниям (114) можем найти наибольшие касательные напряжения. Действительно, полное касательное напряжение будет по величине:

$$t = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} = \frac{2G\tau}{a^2 + b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = 2G\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}. \quad (117)$$

Отсюда видно, что напряжение t , как функция x и y , сохраняет постоянное значение:

$$t = 2G\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \quad (118)$$

во всех точках кривой

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = C^2, \quad (119)$$

где C — какое-нибудь постоянное число. При различных значениях C (119) дает семейство кривых [линий уровня функции $t(x, y)$]; каждая из кривых (119) представляет собою эллипс с полуосями

$$a_1 = a^2 C; \quad b_1 = b^2 C. \quad (120)$$

Если положим, что $b < a$, то

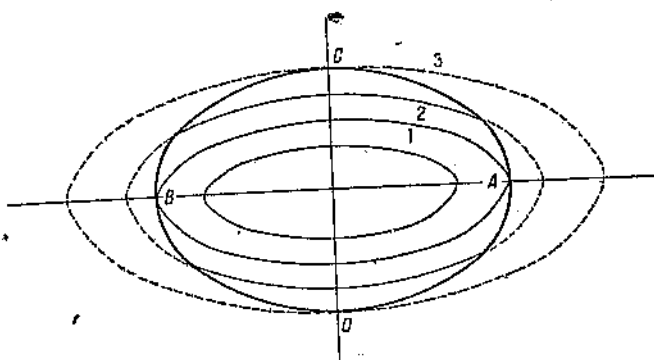
$$\frac{b_1}{a_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \frac{b}{a}$$

и эллипс (119) будет более вытянут, чем эллипс (112) контура сечения.
Ур-ние (119) на основании ур-ния (120) дает семейство подобных и подобно-расположенных эллипсов (отношение $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b^2}{a^2}$ постоянно),

причем по мере увеличения размеров эллипса возрастает и напряжение (118), постоянное для всех его точек (фиг. 35).

Отсюда ясно, что наибольшая величина напряжения (соответствующая эллипсу „3“, получается в крайних точках C и D малой оси сечения. Для этих точек из (120) имеем:

$$b_1 = b = b^2 C,$$



Фиг. 35.

или

$$C = \frac{1}{b}.$$

А потому по ур-нию (118)

$$t_1 = \max t = 2 G \tau \frac{a^2 b}{a^3 + b^3}.$$

В точках A и B напряжение (одинаковое во всех точках соответствующего эллипса „1“) будет меньше; для них имеем:

$$a_1 = a = a^2 C; \quad C = \frac{1}{a};$$

$$t_2 = 2 G \tau \frac{a b^2}{a^3 + b^3} < t_1.$$

Стержень треугольного сечения

§ 33. Возьмем аналитическую функцию

$$C_3 z^3 = C_3 (x + iy)^3 = C_3 (x^3 - 3xy^2) + i C_3 (3x^2y - y^3)$$

и примем

$$w = C_3 (3x^2y - y^3). \quad (121)$$

Тогда, по (109) получим ур-ние контура

$$C_3 (x^3 - 3xy^2) + \frac{\tau}{2} (x^2 + y^2) = c_1,$$

или, полагая:

$$C_3 = D_3 \frac{\tau}{2}; \quad c_1 = D_1 \frac{\tau}{2}, \quad (122)$$

будем иметь:

$$D_3 (x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 = D_1. \quad (123)$$

Это уравнение выражает полную гиперболу 3-го порядка с 3 асимптотами, направление конх получим по общему правилу, приравняв нулю совокупность членов 3-го порядка:

$$x^3 - 3xy^2 = x(x + y\sqrt{3})(x - y\sqrt{3}) = 0;$$

отсюда уравнения 3 прямых, параллельных асимптотам будут:

$$x = 0; \quad x + y\sqrt{3} = 0; \quad x - y\sqrt{3} = 0.$$

Возьмем три прямые, параллельные этим:

$$x = a; \quad x + y\sqrt{3} = b; \quad x - y\sqrt{3} = b. \quad (124)$$

Можно показать, что при надлежащем выборе постоянных D_1 и D_3 кривая (123) распадется на эти три прямые, т. е. уравнение ее примет вид:

$$D_3(x - a)(x - b + y\sqrt{3})(x - b - y\sqrt{3}) = 0;$$

или

$$D_3(x - a)[(x - b)^2 - 3y^2] = 0. \quad (125)$$

Раскрывая уравнения (123) и (125), имеем:

$$D_3x^3 - 3D_3xy^2 + x^3 + y^3 - D_1 = 0. \quad (125')$$

$$D_3x^3 - 3D_3xy^2 - D_3(a + 2b)x^3 + 3D_3ay^2 + D_3b(2a + b)x - D_3ab^2 = 0. \quad (126)$$

Сравнивая коэффициенты этих уравнений, получим условия для определения D_1 , D_3 и b :

$$\begin{aligned} -D_3(a + 2b) &= 1 & D_3b(2a + b) &= 0 \\ 3D_3a &= 1 & D_3ab^2 &= D_1. \end{aligned}$$

Отсюда найдем:

$$b = -2a; \quad D_3 = \frac{1}{3a}; \quad D_1 = \frac{4}{3}a^3 \quad (127)$$

и уравнение (126) примет вид:

$$(x - a)[(x + 2a)^2 - 3y^2] = 0,$$

или

$$(x - a)(x + 2a + y\sqrt{3})(x + 2a - y\sqrt{3}) = 0,$$

т. е. кривая (126) распадается на три прямых:

$$x = a; \quad x + 2a + y\sqrt{3} = 0; \quad x + 2a - y\sqrt{3} = 0,$$

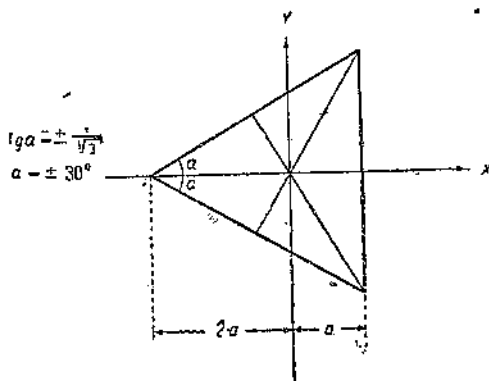
образующих (фиг. 36) равносторонний треугольник с центром тяжести в начале координат. Таким образом мы приходим к задаче о кручении стержня треугольного сечения.

Уравнение (121) на основании (122) и (127) дает:

$$w = \frac{\tau}{6a}(3x^2y - y^3), \quad (128)$$

т. е. поперечное сечение искривляется по поверхности

$$z = \frac{\tau}{6a}(3x^2y - y^3),$$



Фиг. 36.

или

$$z = \frac{\tau}{6a} y (x \sqrt{3} + y) (x \sqrt{3} - y).$$

Отсюда видно, что прямые

$$y=0; \quad y=-x\sqrt{3}; \quad y=x\sqrt{3},$$

являющиеся тремя высотами треугольника сечения, остаются в первоначальной плоскости сечения, так как для всех точек этих прямых $w=0$.

На фиг. 37 показан вид искривленного поперечного сечения. Имея функцию (128) по ур-ниям (96) и аналогично (114), найдем составляющие напряжения X_z и Y_z .



Фиг. 37.

Далее, аналогично ур-нию (115) получим связь между крутящим моментом M_z и углом закручивания τ .

§ 34. Не касаясь других частных случаев, отметим, что Сен-Венаном, а затем и другими исследователями рассмотрен ряд разнообразных форм поперечного сечения. Сен-Венан показал, что для самых разнообразных форм поперечного сечения достаточно точно удовлетворяется ур-ние (116), выведенное нами для стержня эллиптического сечения:

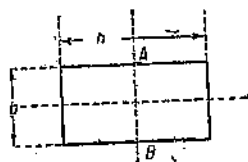
$$\tau \approx 40 \frac{M_z J_p}{G \omega^4}.$$

Величину наибольших касательных напряжений не удастся выразить одной формулой для различных форм поперечного сечения.

Для важного в строительном деле случая прямоугольного поперечного сечения получается

$$\tau = K \frac{M_z J_p}{G \omega^4}$$

$$\max t \text{ (в точках } A \text{ и } B, \text{ фиг. 38)} = \gamma \frac{M_z}{b^2 h}.$$



Фиг. 38.

$\frac{h}{b} =$	1	2	4	8
$K =$	42,68	42,00	40,20	38,50

$\frac{h}{b} =$	1	2	3	4	5	10	20
$\gamma =$	4,80	4,16	3,77	3,57	3,41	3,20	3,09

ГЛАВА VI

Решение задачи теории упругости в напряжениях

Простейшие задачи

§ 35. В § 18 уже было отмечено, что если мы по заданным внешним силам хотим непосредственно найти в упругом теле напряжения

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_x, Z_x, X_y, \quad (129)$$

то условий равновесия (I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

для этой цели будет недостаточно, так как число неизвестных (12) превышает число ур-ний (I); поэтому придется привлечь еще условия неразрывности деформаций (IV) (§ 18); в том, что именно этими условиями и до воспользоваться, можно убедиться еще и таким путем: зададим некоторые из функций (129) (ср. формулы 1 § 2) по произволу, а остальные подберем так, чтобы были удовлетворены условия (I); тогда ур-ния (V) (§ 18) дадут нам вполне определенные величины деформаций

$$e_{xx}, e_{yy}, \dots e_{xz} \quad (130)$$

в каждой точке тела; однако при таком способе разыскания деформаций условия неразрывности (IV), вообще говоря, не будут соблюдены¹; отсюда и следует, что, определяя напряжения непосредственно по заданным внешним силам, надб одновременно удовлетворить ур-ниям (I) и (IV). В дальнейшем для этой цели мы ур-ния (IV) преобразуем, подставив в них вместо деформаций напряжения (по ур-ниям V, § 18)².

Теперь же мы рассмотрим тот частный случай, когда напряжения (129) выражаются функциями первой степени (линейными) от координат точки или оказываются постоянными числами. На основании ур-ний (V) легко видеть, что вторые производные от деформаций выражаются всегда линейными функциями от вторых производных напряжений (129); например:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma \left(\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} \right) \right]; \quad \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{E} \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x \partial z} \text{ и т. д.}$$

Так как в нашем случае напряжения являются линейными функциями от x, y, z , то из только что сказанного ясно, что все вторые про-

¹ См. замечание в конце § 7.

² См. глава IX § 74

производные от деформаций (130) обратятся в нуль; значит все условия неразрывности (IV) будут удовлетворены. Остается лишь удовлетворить условиям (I) и условиям на поверхности тела (II):

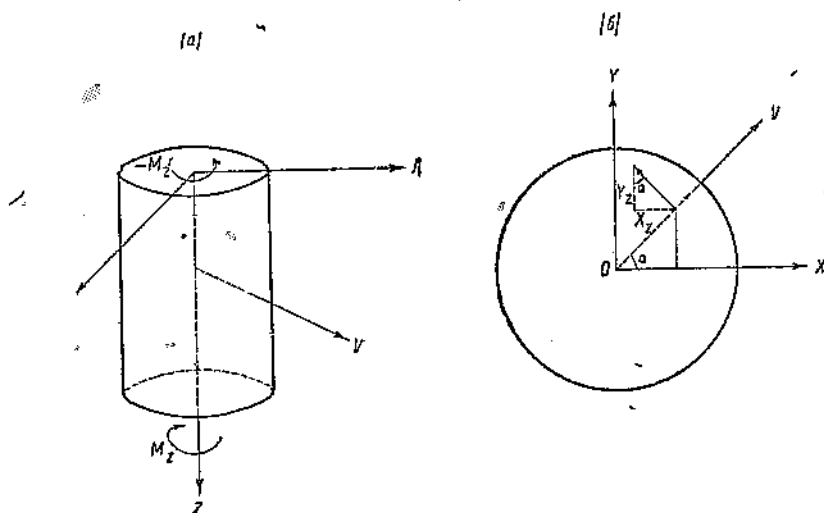
$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_w \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ) \\ Y_v &= Y_w \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ) \\ Z_v &= Z_w \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Задачи рассматриваемого рода называются простейшими задачами теории упругости. Мы сейчас рассмотрим три таких задачи.

Кручение круглого стержня

§ 36. При решении этой задачи в сопротивлении материалов исходят из гипотезы, что плоские поперечные сечения стержня остаются плоскими и отсюда находят, что во всех точках этих сечений возникают только касательные напряжения

$$t = \frac{M_z}{J_p} r, \quad (131)$$



Фиг. 39.

направленные нормально к радиусу r данной точки. Разлагая напряжение (131) на составляющие, параллельные осям OX и OY , находим (фиг. 39):

$$X_z = -t \sin \alpha; \quad Y_z = t \cos \alpha \quad (132)$$

Но

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

Далее, угол закручивания стержня на единицу длины выражается так:

$$\tau = \frac{M_z}{GJ_p}. \quad (133)$$

Отсюда легко найдем, что $t = G\tau r$.

Внося все это в формулы (132) и предполагая, что остальные из составляющих напряжений (129) обращаются в нуль, приходим к такой системе напряжений:

$$X_w = 0; \quad Y_w = 0; \quad Z_w = 0; \quad Y_z = G\tau x; \quad X_z = -G\tau y; \quad X_y = 0. \quad (134)$$

Проверим, возможна ли эта система напряжений с точки зрения теории упругости. Так как напряжения (134) являются функциями не выше 1-й степени от координат точки, то данная задача относится к простейшим; поэтому придется только удовлетворить уравнениям (I) и проверить по условиям на поверхности (II), соответствуют ли напряжения (134) условиям задачи о кручении. Подставляя из уравнений (134) в уравнения (I), найдем:

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z=0;$$

следовательно напряжения (134) возможны при условии отсутствия объемных сил (например собственного веса стержня).

Далее переходим к условиям, на поверхности стержня. Легко видеть (фиг. 39), что на боковой поверхности всюду $\cos(VZ)=0$;

$$\cos(V, X)=\cos \alpha=\frac{x}{r}; \quad \cos(V, Y)=\sin \alpha=\frac{y}{r}.$$

Подставляя отсюда и из уравнений (134) в уравнения (II), найдем, что

$$X_v=0; \quad Y_v=0; \quad Z_v=0,$$

т. е. боковая поверхность свободна от нагрузки.

На концевом поперечном сечении имеем:

$$\cos(VX)=\cos(VY)=0 \quad \cos(VZ)=1.$$

Внося отсюда и из (134) в (II), имеем:

$$X_v=X_z=-G\tau y; \quad Y_v=Y_z=G\tau x; \quad Z_v=0. \quad (135)$$

Следовательно здесь приложены (как и во всяком другом поперечном сечении) только касательные силы.

Равнодействующая их имеет следующие проекции на оси OX и OY :

$$\begin{aligned} \iint X_z d\omega &= - \iint G\tau y d\omega = -G\tau \iint y d\omega = 0; \\ \iint Y_z d\omega &= G\tau \iint x d\omega = 0, \end{aligned}$$

так как начало координат помещено в центре тяжести сечения. Следовательно силы, приложенные к концевому сечению, приводятся к паре. Значит мы действительно имеем задачу о кручении стержня.

Момент крутящей пары вокруг оси OZ равен:

$$M_z = \iint (X_v \cdot y - Y_v \cdot x) d\omega = -G\tau \iint (x^2 + y^2) d\omega = -G\tau J_z.$$

Принцип Сен-Венана

§ 37. Сделаем одно важное замечание. Мы показали, что система напряжений (134) соответствует кручению круглого стержня; однако мы не вправе сделать обратное заключение, что при кручении круглого стержня всегда получается система напряжений (134).

Действительно, формулируя задачу о кручении, мы лишь указываем, что к концевому поперечному сечению приложена пара сил; однако такого указания недостаточно, так как эта пара может быть осуществлена самыми разнообразными способами, т. е. напряжения, приводящиеся к паре, могут быть различно распределены по точкам сечения. Система напряжений (134) получается при вполне определенном способе осуществления крутящей пары, указанном формулами (135); при другом способе приложения крутящей пары получится и другая система напряжений в стержне.

Однако эти уравновешенные системы, согласно высказанному выше принципу, не вызовут почти никаких напряжений вне малой области A ; следовательно вне этой области случай ϵ даст для напряжений весьма малое отличие от случаев a и b ; значит случаи a и b между собой также почти не будут различаться в смысле напряжений вне области A , а это и надо было доказать.

Окончание задачи о кручении круглого стержня

§ 38. Закончим задачу о кручении круглого стержня и найдем перемещения его точек.

Внося напряжения (134) в закон Гука (V) (§ 18), получим деформации; затем заменяем деформации их выражениями через перемещения по ур-ниям (III) (§ 18) и получаем такую систему ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau x \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= -\tau y \end{aligned} \right\} \quad (136')$$

Интегрируя ур-ния (136), имеем:

$$u = f(y, z); \quad v = \varphi(x, z); \quad w = \phi(x, y), \quad (137)$$

где f , φ , ϕ — произвольные функции; вид их определим из ур-ний (136'); на основании (137) они получают вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (138_1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \tau x \quad (138_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\tau y \quad (138_3)$$

Постараемся путем дифференцирования исключить из этих ур-ний функции f , φ , ϕ поочередно; например дифференцируя ур-ния (138₁), (138₂), (138₃), имеем:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (139)$$

Продифференцируем ур-ния (138₂) и (138₃) еще так:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\tau.$$

Складывая эти ур-ния и принимая во внимание (138₁), имеем:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (140)$$

Вычитая же эти ур-ния, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2\tau, \quad (141)$$

и так как на основании (138₁)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial f}{\partial y},$$

то из ур-ния (141) имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau. \quad (142)$$

Собирая результаты (139), (140) и (142) попарного исключения функций f , φ и ψ , получаем следующую таблицу вторых производных этих функций

$$\left. \begin{array}{lll} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \tau; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (143)$$

Предыдущие выкладки имели целью получение именно этой, более простой системы ур-ний; на основании ее легко установить теперь общий вид функций f , φ и ψ ; действительно, последние три уравнения показывают, что функция ψ будет первой степени от x и y ; первая и вторая строки показывают, что f и φ должны быть 2-й степени (соответственно от y, z и от x, z), но не должны содержать квадратов переменных; поэтому на основании ур-ний (143) и (137) легко напишем:

$$\begin{aligned} f &= -\tau yz + ay + bz + c \\ \varphi &= \tau xz + dx + ez + f \\ \psi &= gx + hy + k. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в ур-ния (138₁), (138₂) и (138₃), установим еще следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tau z + d - \tau z + a &= 0, \\ h + \tau x + e &= \tau x, \\ \tau y + b + g &= -\tau y, \end{aligned}$$

или

$$d = -a; \quad h = -e; \quad g = -b,$$

и затем имеем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} u &= f = -\tau yz + ay + bz + c \\ v &= \varphi = \tau xz - ax + ez + f \\ w &= \psi = -bx - cy + k \end{aligned} \right\}. \quad (144)$$

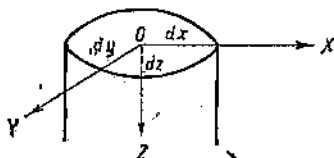
§ 39. В полученные выражения перемещений (144) вошло 6 произвольных постоянных; наличие их здесь легко объяснить. Действительно, в § 6 мы условились закрепить исследуемое упругое тело, чтобы исключить его движение, изучаемое в механике абсолютно твердого тела; однако в настоящей задаче мы еще не осуществили этого закрепления.

В сопротивлении материалов мы (как уже было указано относительно нагрузки) задаем условия закрепления лишь схематически, говоря на-

пример, что „закреплено крайнее сечение“; здесь же зададим это условие точнее: закрепим центр сечения $z=0$, поставив требование, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=y=z=0 \\ u=0; v=0; w=0 \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Однако это условие недостаточно, так как несмотря на него стержень может вращаться вокруг начала координат (фиг. 42); чтобы устранить возможность этих вращений, потребуем еще, чтобы два из трёх элементов dx , dy и dz у начала координат O оставались неподвижными. В § 6 (см. формулы 11 и 12) мы уже получили выражения углов поворота элементарных отрезков; пользуясь ими, выражаем нужные нам условия:



Фиг. 42.

а. Отрезок dz неподвижен:

$$\text{при } x=y=z=0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0. \quad (146)$$

б. Отрезок dy неподвижен в плоскости OXY :

$$\text{при } x=y=z=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0. \quad (147)$$

Легко сообразить, что поставленных условий (145), (146) и (147) достаточно для закрепления стержня против смещения его, как абсолютно твердого тела.

Применяя эти условия к ур-ниям (144), получим:

$$a=b=c=e=f=k=0$$

и потому:

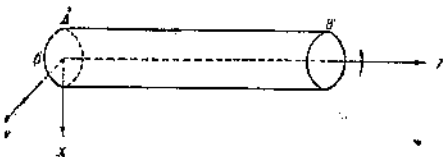
$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau y z \\ v &= \tau x z \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Последнее уравнение подтверждает гипотезу о том, что плоские поперечные сечения круглого стержня при кручении остаются плоскими.

Чистый изгиб прямого призматического стержня

§ 40. При решении этой задачи (фиг. 43) в сопротивлении материалов мы приходим к таким выражениям напряжений:

$$\left. \begin{aligned} Z_x &= -\frac{E x}{\rho} \\ Y_y &= X_x = 0; \quad Y_z = Z_x = X_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (149)$$



Фиг. 43.

Проверим, возможна ли система напряжений (149) с точки зрения теории упругости и соответствуют ли эти напряжения чистому изгибу.

Подстановкой функций (149) в ур-ния равновесия (I) убедимся, что они удовлетворяются. Ур-ния неразрывности (IV) будут удовлетворены (§ 18).

Для условий на боковой поверхности стержня имеем всюду:

$$\cos(VZ)=0.$$

Подставляя это и (149) в ур-ния (II), найдем, что боковая поверхность свободна от напряжений.

Усилия на концевом сечении B приводятся к паре сил¹ с моментом

$$M_y = \int \int Z_z x d\omega = -\frac{E}{\rho} \int \int x^2 d\omega = -\frac{EJ}{\rho}.$$

Значит напряжения (149) возможны и соответствуют чистому изгибу.

§ 41. Переходим к определению перемещений.

Подставляя напряжения (149)' в закон Гука (V) и полученные отсюда деформации в ур-ния (III), приходим к системе ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\sigma x}{\rho} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\sigma x}{\rho} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{x}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (150')$$

Интегрирование их ведем тем же порядком, как в предыдущем параграфе. Из равенств (150) находим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sigma x^2}{2\rho} + f(y, z) \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} + \varphi(x, z) \\ w &= -\frac{xz}{\rho} + \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Вид функций f , φ и ψ находим при помощи ур-ний (150')

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (152_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{\rho}. \quad (152_2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sigma y}{\rho} \quad (152_3)$$

Дифференцируя эти ур-ния, находим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\sigma}{\rho}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

¹ Предлагаем читателю убедиться, что равнодействующая сила $Z_z d\omega$ равна нулю.

Далее дифференцируем равенства (152₂) и (152₃) так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Складывая эти уравнения, имеем:

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Вычитая те же уравнения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0;$$

но из уравнения (152₁) имеем:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

а потому:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0.$$

Собирая эти результаты, имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \frac{\sigma}{\rho}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Отсюда легко устанавливаем вид функций f , φ и ϕ :

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{\sigma y^2}{2\rho} + \frac{z^2}{2\rho} + ay + bz + c \\ \varphi &= dx + ez + f' \\ \phi &= gx + hy + k; \end{aligned} \right\}; \quad (153)'$$

подставляя эти значения в уравнения (152), имеем:

$$h + e = 0, \text{ т. е. } h = -e;$$

$$\frac{z}{\rho} + b + g = \frac{z}{\rho}, \text{ т. е. } g = -b;$$

$$d - \frac{\sigma y}{\rho} + a = -\frac{\sigma y}{\rho}, \text{ т. е. } d = -a.$$

Принимая это во внимание и внося из уравнений (153) в уравнения (151), получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{z^2}{2\rho} + \frac{\sigma(x^2 - y^2)}{2\rho} + ay + bz + c \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} - ax + ez + f' \\ w &= -\frac{xz}{\rho} - bx - ey + k \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Для определения оставшихся произвольных постоянных остается осуществить закрепление стержня в левом его конце (фиг. 43).

Закрепим прежде всего центр сечения, поставив условие, что при

$$x=y=z=0; \quad u=0; \quad v=0; \quad w=0;$$

на этом основании из ур-ний (154) находим:

$$c=f'=k=0.$$

Далее закрепляем элемент оси стержня dz , устранив его повороты в плоскостях OXZ и OYZ , т. е. поставив условия, что при

$$x=y=z=0; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

Наконец остается устранить вращение стержня вокруг его оси; для этого закрепим например элемент dx оси OX против поворота в плоскости OXY , т. е. потребуем, чтобы при

$$x=y=z=0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Из всех этих условий находим, что $a=b=c=0$ и получаем окончательные выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{z^2 + \sigma(x^2 - y^2)}{2\rho} \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} \\ w &= -\frac{xz}{\rho} \end{aligned} \right\}, \quad (155)$$

Всякая точка стержня (x_1, y_1, z_1) после деформации переходит в новое положение:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u = x_1 + \frac{z_1^2 + \sigma(x_1^2 - y_1^2)}{2\rho}; \\ y &= y_1 + v = y_1 + \frac{\sigma x_1 y_1}{\rho}; \\ z &= z_1 + w = z_1 - \frac{x_1 z_1}{\rho}. \end{aligned}$$

Для точек оси стержня $(x=y=0)$ получаем:

$$\begin{aligned} v &= w = 0; \\ u &= \frac{z^2}{2\rho}, \end{aligned} \quad (156)$$

это есть ур-ние изогнутой оси стержня.

Возьмем какое-либо плоское сечение стержня $z=z_0$. Новая координата z любой его точки после деформации будет:

$$z = z_0 + w_0;$$

но по уравнениям (155) имеем:

$$w_0 = -\frac{xz_0}{\rho}.$$

Следовательно

$$z = z_0 \left(1 - \frac{x}{\rho} \right). \quad (157)$$

Это уравнение плоскости, параллельной оси OY (фиг. 44); ему удовлетворяют все точки сечения $z = z_0$ после деформации. Следовательно плоское поперечное сечение остается плоским после деформации.

Уравнение (157) перепишем так:

$$x = -\frac{\rho}{z_0} z + \rho. \quad (158)$$

Тангенс угла наклона касательной к оси (156) в точке $z = z_0$ равен:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{z=z_0} = \frac{z_0}{\rho}. \quad (159)$$

Сравнивая это уравнение с (159), имеем (фиг. 44):

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -1.$$

Следовательно плоское сечение (157) после изгиба остается нормальным к оси, и гипотеза плоских сечений в случае чистого изгиба оправдывается полностью.

§ 43. Рассмотрим еще частный случай стержня прямоугольного сечения (фиг. 45, а) и исследуем искажение контура его поперечного сечения. Вопрос этот представляет интерес для дальнейшего.

Боковая сторона его до изгиба определяется уравнениями:

$$z = z_0; \quad y = \pm \frac{b}{2};$$

после деформации эти уравнения перейдут в такие:

$$y = \pm \frac{b}{2} + v = \pm \frac{b}{2} \pm \frac{\sigma x b}{2\rho} = \pm \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\sigma x}{\rho} \right);$$

$$z = z_0 + w = z_0 - \frac{x z_0}{\rho} = z_0 \left(1 - \frac{x}{\rho} \right).$$

Получились 2 уравнения 1-й степени относительно x , y , z ; следовательно боковые стороны после изгиба остаются прямыми.

Из уравнения

$$y = \pm \frac{\sigma b}{2\rho} x \pm \frac{b}{2},$$

видно, что (фиг. 45, б)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma b}{2\rho} \quad (159)$$

где γ — угол между проекциями начального и деформированного положений боковой стороны на плоскость OXY .

Переходим к верхней и нижней сторонам, имеющим уравнения

$$z = z_0; \quad x = \pm \frac{h}{2}.$$

После изгиба их уравнения будут:

$$x = \pm \frac{h}{2} + u = \pm \frac{h}{2} + \frac{z_0^2 + \sigma \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2\rho};$$

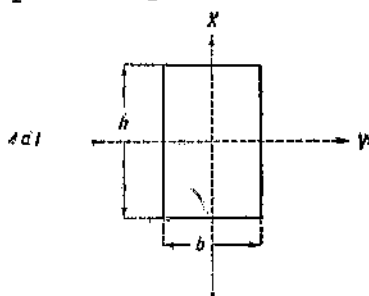
$$z = z_0 \left(1 - \frac{x}{\rho} \right).$$



Фиг. 44.

Первое из этих ур-ний — 2-й степени, а второе — 1-й степени относительно x, y, z .

Следовательно верхняя и нижняя стороны обращаются в плоские кривые. Первое ур-ние дает нам проекцию этих кривых на плоскость OXY :

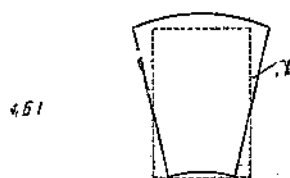


$$x = \pm \frac{h}{2} + \frac{z_0^2}{2\rho} + \frac{\sigma h^2}{8\rho} - \frac{\sigma}{2\rho} y^2. \quad (160)$$

Это есть ур-ние двух парабол (верхняя и нижняя стороны).

Радиус кривизны изогнутой оси (156) и радиус кривизны парабол (160) приблизительно равны соответственно,

$$\rho \text{ и } \frac{\rho}{\sigma}.$$



Фиг. 45.

Ур-ния (156) и (160) приближены, так как в выражениях деформаций нами были отброшены конечные малые величины высших порядков (ср. § 6 формулы 11 и 12).

При более точном решении кривые (156) и (160) будут окружностями с радиусами

$$\rho \text{ и } \frac{\rho}{\sigma}.$$

Искаженная форма контура сечения показана на фиг. 45 б. Верхняя уширенная часть соответствует сжатым продольным волокнам, а нижняя — растянутым.

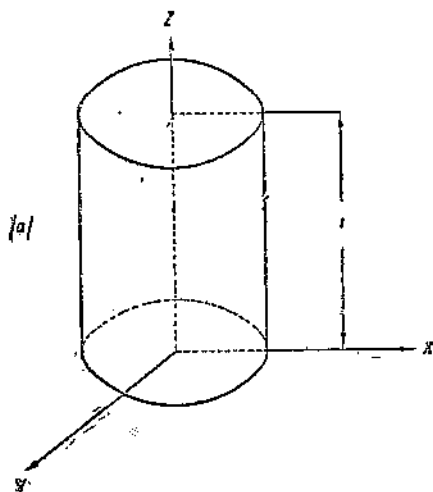
Растяжение цилиндра под действием собственного веса

§ 43. Пусть мы имеем (фиг. 46) цилиндр, подвешенный верхним основанием и растягиваемый собственным весом. Легко убедиться, что данной задаче соответствует такая система напряжений:

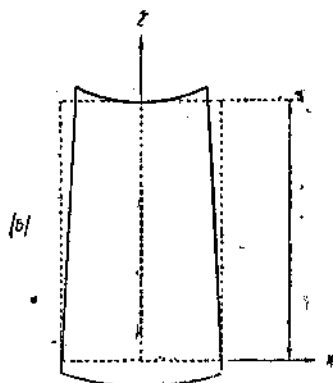
$$X_x = Y_y = 0; \quad Z_z = \rho g z; \quad Y_z = Z_x = X_y = 0. \quad (161)$$

Подставив в ур-ния (I) эти выражения, найдем, что

$$X = Y = 0; \quad Z = -g,$$



Фиг. 46 а.



Фиг. 46 б.

т. е. мы имеем дело с собственным весом. Далее при $z=0$ имеем:

$$Z_z = 0,$$

т. е. нижнее основание свободно от нагрузки: внося из (161) в ур-ния (II) убедимся, что боковая поверхность цилиндра также свободна от нагрузки. Перемещения разыскиваем совершенно так же, как и в двух предыдущих задачах.

На основании (III) и (V) получаем систему дифференциальных ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\sigma \rho g}{E} z \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\sigma \rho g}{E} z \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\rho g}{E} z \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (162')$$

Интегрируя ур-ния (162), получаем:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sigma \rho g}{E} xz + f(y, z) \\ v &= -\frac{\sigma \rho g}{E} zy + \varphi(x, z) \\ w &= \frac{\rho g}{E} \frac{z^2}{2} + \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Внося это в ур-ния (162), получаем ур-ния для отыскания f , φ и ψ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad (164_1)$$

$$-\frac{\sigma \rho g}{E} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad (164_2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\sigma \rho g}{E} x + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (164_3)$$

Отсюда дифференцированием легко найдем следующие ур-ния:
из ур-ния (164₁):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

из ур-ния (164₂):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\sigma \rho g}{E} \quad (165)$$

из ур-ния (164₃):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\sigma \rho g}{E}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Далее таким же путем найдем:

из ур-ния (164₁):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0$$

из ур-ния (164₂):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

из ур-ния (164₃):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

(166)

Вычитая эти ур-ния попарно, получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Сопоставляя эти ур-ния с ур-ниями (166), сразу найдем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (165a)$$

Ур-ния (165) и (165a) определяют вид функций f , φ , ψ : $f = ay + bz + c$,
 $\varphi = dx + ez + m$; $\psi = \frac{\sigma g}{2E} (x^2 + y^2) + nx + hy + k$.

Эти выражения следует внести в ур-ния (163) и значения перемещений u , v , w отсюда подставить в ур-ния (162); это приведет к таким зависимостям между произвольными постоянными:

$$d = -a; \quad h = -e; \quad n = -b.$$

И выражения перемещений получают вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sigma g}{E} zx + ay + bxz + c \\ v &= -\frac{\sigma g}{E} zy - ax + ez + m \\ w &= \frac{\rho g}{2E} [z^2 + \sigma (x^2 + y^2)] - bx - ey + k \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Условия закрепления цилиндра осуществляем, как и в двух предыдущих задачах, но по условиям этой задачи закрепляем не начало координат, а центр верхнего сечения; поэтому ставим следующие требования:

$$\text{при } x=0, \quad y=0, \quad z=l$$

должно быть:

$$u=0; \quad v=0; \quad w=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0^{1.1}$$

¹ Вместо этого можно потребовать, чтобы было $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Отсюда легко найдем, что $a=b=c=e=m=0$;

$$k = -\frac{\rho g}{2E} l^2,$$

и перемещения (167) окончательно получат вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sigma \rho g}{E} xz \\ v &= -\frac{\sigma \rho g}{E} yz \\ w &= \frac{\rho g}{2E} [z^2 - l^2 + \sigma (x^2 + y^2)] \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Точки на оси стержня (ур-ния ее $x=0$; $y=0$) перемещаются вертикально ($u=0$; $v=0$); у всех прочих точек имеются также и горизонтальные перемещения. Если возьмем в стержне или на его поверхности прямую, параллельную оси OZ (на поверхности это есть образующая цилиндра):

$$x=x_0; \quad y=y_0, \quad (169)$$

то ур-ния ее после деформации будут $x=x_0+u$; $y=y_0+v$ или:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \left(1 - \frac{\sigma \rho g}{2E} z \right) \\ y &= y_0 \left(1 - \frac{\sigma \rho g}{2E} z \right) \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Эти уравнения также определяют прямую.

Если исключим отсюда z путем почленного деления ур-ний, то получим ур-ние проекции прямой (170) на плоскость XOY . $y_0 x = x_0 y$. Она проходит через начало координат; значит прямая (170) и ось цилиндра OZ лежат в одной плоскости. Найдем точку их пересечения; для этого решим совместно ур-ния прямой (170) и ур-ния оси цилиндра OZ :

$$x=0; \quad y=0;$$

получим:

$$1 - \frac{\sigma \rho g}{2E} z = 0,$$

или:

$$z = \frac{2E}{\sigma \rho g}. \quad (171)$$

Эта величина не зависит от координат x_0 , y_0 , определявших положение взятой прямой (169).

Отсюда делаем вывод: если внутри стержня выделим любой цилиндр с осью OZ , то после деформации он превратится в конус с вершиной на оси OZ в постоянной точке (171); это заключение относится конечно и к боковой цилиндрической поверхности стержня.

Интересно отметить, что в данной простейшей задаче плоские поперечные сечения стержня не остаются плоскими после деформации; действительно, плоское сечение $z=z_0$ после деформации будет иметь ур-ние: $z=z_0+w$, или, согласно (168):

$$z = z_0 + \frac{\rho g}{2E} [z_0^2 - l^2 + \sigma (x^2 + y^2)]. \quad (172)$$

Это параболоид вращения.

На фиг. 466 показано сечение цилиндра плоскостью XOZ после деформации.

Однозначность решения уравнений теории упругости

§ 44. При решении всех предыдущих задач мы шли обратным методом, задаваясь напряжениями или перемещениями и выясняя, при каких силах, действующих на поверхности, получается выбранная система напряжений; при этом каждый раз может возникнуть вопрос, нельзя ли при какой-либо другой системе напряжений получить такие же силы на поверхности. Если это окажется возможным, то решение ур-ний теории упругости окажется многозначным: заданным силам на поверхности будут соответствовать несколько систем напряжений и необходимо выяснить, какие из этих систем имеют место в действительности. В этом случае при обратном или полуобратном способе решения мы не будем уверены, что выбрали именно ту систему напряжений, которая соответствует действительности. Благодаря этому вопрос об однозначности решения ур-ний теории упругости приобретает большое значение.

Заметим, что если в теле возможны начальные напряжения, то при действии внешних сил на это тело полные напряжения в нем могут быть весьма разнообразными; действительно, возьмем например тот железный шар с начальными напряжениями, о котором мы говорили (§ 15). Если мы его подвергнем действию сил, то окончательные, суммарные напряжения в нем будут зависеть от размера секториального выреза, который был предварительно сделан. В подобных случаях ур-ния теории упругости должны иметь многозначное решение.

Если мы отбросим случай начальных напряжений, т. е. примем гипотезу о естественном состоянии тела, то легко доказать, что решение будет однозначным и потому единственным, если справедлив закон независимости действий сил.

Действительно, предположим обратное, именно, что под действием заданных поверхностных сил

$$X_v, Y_v, Z_v \quad (173)$$

и объемных

$$X, Y, Z \quad (174)$$

возможны две различные системы напряжений:

$$X'_x, Y'_y, Z'_z, Y'_z, Z'_x, X'_y \quad (175')$$

и

$$X''_x, Y''_y, Z''_z, Y''_z, Z''_x, X''_y. \quad (175'')$$

Обе эти системы должны удовлетворять основным ур-ниям (I) и (II):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (176')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X'_x \cos(Vx) + X'_y \cos(Vy) + X'_z \cos(Vz) \\ Y_v &= Y'_x \cos(Vx) + Y'_y \cos(Vy) + Y'_z \cos(Vz) \\ Z_v &= Z'_x \cos(Vx) + Z'_y \cos(Vy) + Z'_z \cos(Vz) \end{aligned} \right\} \quad (177')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X''_x}{\partial x} + \frac{\partial X''_y}{\partial y} + \frac{\partial X''_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y''_x}{\partial x} + \frac{\partial Y''_y}{\partial y} + \dots + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z''_x}{\partial x} + \dots + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (176'')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X''_x \cos(VX) + X''_y \cos(VY) + X''_z \cos(VZ) \\ Y_v &= Y''_x \cos(VX) + Y''_y \cos(VY) + \dots \\ Z_v &= Z''_x \cos(VX) \dots \end{aligned} \right\} \quad (177'')$$

Почленным вычитанием соответственных ур-ний систем (176) и (177) получим такую новую систему ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (X'_x - X''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (X'_y - X''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (X'_z - X''_z)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial (Y'_x - Y''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Y'_y - Y''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Y'_z - Y''_z)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial (Z'_x - Z''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Z'_y - Z''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Z'_z - Z''_z)}{\partial z} &= 0 \\ 0 &= (X'_x - X''_x) \cos(Vx) + (X'_y - X''_y) \cos(Vy) + (X'_z - X''_z) \cos(Vz) \\ 0 &= (Y'_x - Y''_x) \cos(Vx) + (Y'_y - Y''_y) \cos(Vy) + (Y'_z - Y''_z) \cos(Vz) \\ 0 &= (Z'_x - Z''_x) \cos(Vx) + (Z'_y - Z''_y) \cos(Vy) + (Z'_z - Z''_z) \cos(Vz) \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

На основании закона независимости действий сил, разности напряжений, входящие в ур-ния (178), можем принять за некоторую новую систему напряжений.

Однако ур-ния (178) показывают, что эти напряжения существуют при отсутствии поверхностных и объемных сил и потому все они, на основании гипотезы о естественном состоянии тела, должны быть равны нулю, т. е.

$$X'_x = X''_x; \quad X'_y = X''_y \text{ и т. д.}$$

Значит обе системы напряжений (175') и (175'') совпадают, что и требовалось доказать.

Если в данной задаче закон независимости действий несправедлив, то мы снова встречаемся с многозначностью решения. Иллюстрацию этого можно видеть на Эйлеровой задаче о продольном изгибе стержня. Действительно, возьмем два груза, P_1 и P_2 , каждый из которых немногим меньше критического $P_{кр}$. При действии каждого из грузов P_1 и P_2 в отдельности получается простое сжатие стержня. При действии же суммы грузов $P_1 + P_2$ к суммарному сжимающему напряжению добавятся колоссальные напряжения от изгиба; поэтому здесь закон независимости действий отсутствует и действие суммы сил не равно сумме их действий порознь.

Одновременно здесь имеется в наличии многозначность решения, так как возможно несколько форм равновесия, каждой из которых соответствует своя система напряжений. Если мы исключим из рассмотрения случаи неустойчивого упругого равновесия, то во всех остальных случаях закон независимости действий справедлив и мы можем быть уверены, что всякое полученное нами решение задачи есть единственное решение для данного распределения внешних (поверхностных) и объемных сил.

ГЛАВА VII

Плоская задача в декартовых координатах

§ 45. Мы переходим к большой категории задач теории упругости, важных в смысле практических приложений и вместе с тем допускающих значительное упрощение математической стороны решения.

Упрощение заключается в том, что в этих задачах одну из координатных осей, например OZ , можно отбросить и все явление рассматривать, как бы происходящим в одной плоскости OXY . На практике такой случай в чистом виде осуществить весьма трудно, но с некоторым приближением мы его встречаем во многих задачах. Задачи эти можно разделить на две группы, в некотором отношении взаимно противоположные, но объединяемые одной общей математической формой решения.

Первая из этих групп соответствует случаю, когда одно из перемещений, например w , всюду равно нулю, другие же два u и v не зависят от координаты z , соответствующей перемещению w ; значит, случай этот характеризуется следующими условиями, справедливыми во всех точках тела:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y) \\ v &= f_2(x, y) \\ w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

При этих условиях уравнения (III) дают:

$$\epsilon_{zz} = 0; \quad \epsilon_{yz} = 0; \quad \epsilon_{xz} = 0; \quad (180)$$

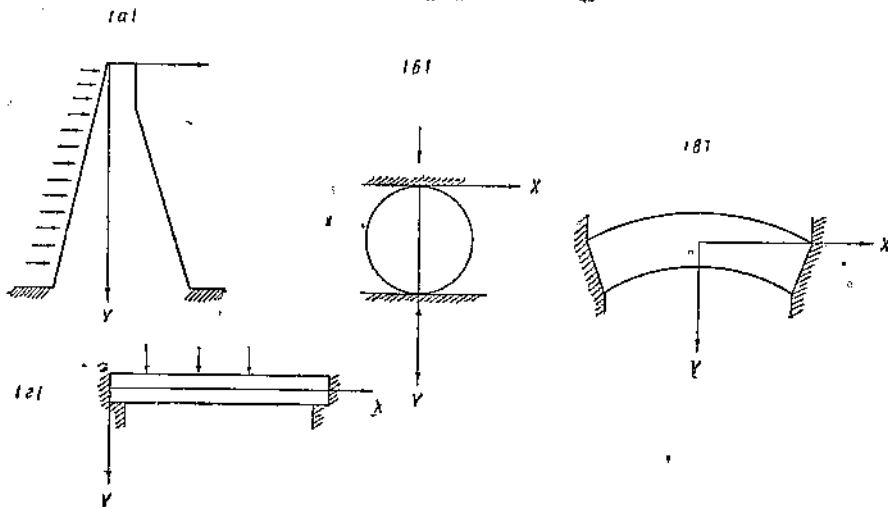
$$\epsilon_{xx} = \varphi_1(x, y); \quad \epsilon_{yy} = \varphi_2(x, y); \quad \epsilon_{xy} = \varphi_3(x, y). \quad (180')$$

Уравнения (179) и (180) показывают, что все перемещения и деформации происходят исключительно в направлениях, параллельных плоскости OXY и притом во всех сечениях тела, параллельных плоскости OXY ($z = z_0$, где z_0 — любое число), картина перемещений и деформаций одинакова. Деформация этого рода называется плоской деформацией.

§ 46. С близким к этому случаю мы встречаемся в задачах, где рассматривается длинное призматическое или цилиндрическое тело с осью, параллельной оси OZ , нагруженное по боковой поверхности нагрузкой, нормальной к оси OZ и постоянной вдоль оси (хотя бы и меняющейся в направлениях, нормальных к оси). Таковы например задачи о длинной плотине (фиг. 47а), длинном катке (фиг. 47б), длинном своде (фиг. 47в), длинной пластинке (фиг. 47г) с осью, параллельной оси OZ ; предполагаем во всех этих случаях, что нагрузка не меняется вдоль оси OZ .

Если мы из такого длинного призматического тела двумя близкими сечениями, параллельными плоскости OXY , выделим вдали от его концов тонкий элемент с приходящейся на него нагрузкой и представим себе, что он работает, как отдельное упругое тело, то заметим, что в нем должны появиться удлинения вдоль оси OZ ; удлинения эти являются результатом поперечного действия нагрузки, параллельной плоскости OXY (начало § 10).

На самом же деле этот элемент находится в соседстве с другими двумя элементами, имеющими такие же удлинения, но в обратном направлении; в результате взаимодействия этих элементов, удлинений и перемещений вдоль оси OZ не будет, но между соседними элементами появятся силы взаимодействия, выражающиеся в нормальных напряжениях Z_x , появляющихся вследствие уничтожения деформации e_{xx} .



Фиг. 47.

Действительно, возьмем 3-е из уравнений закона Гука (V); уничтожение деформации e_{xx} приведет нас к уравнению:

$$Z_x - \sigma(X_x + Y_y) = 0,$$

или:

$$Z_x = \sigma(X_x + Y_y). \quad (181)$$

Значит, $Z_x \neq 0$, но оно есть функция основных напряжений X_x и Y_y , вызванных нагрузкой.

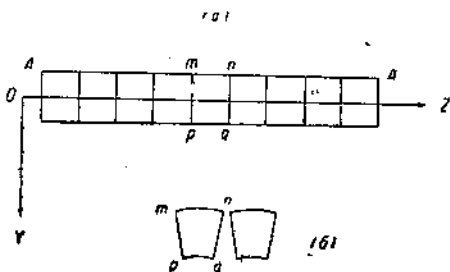
Поясним эти рассуждения на примере.

Пусть мы имеем сплошной изгибаемый настил из ряда прямоугольных балок (фиг. 48a); направим ось OX вдоль пролета их.

При изгибе поперечные сечения балок искажаются (фиг. 48б), как это было показано (§ 42), и при этом появятся удлинения и укорочения e_{xx} . Если же, вместо настила из балок, мы имеем сплошную широкую плиту шириной AA' , то, при прогибе ее, искажение отдельных элементов $mnpq$, выделенных вдали от концов A и A' , не может произойти; зато появятся напряжения Z_x так как в верхних точках n (фиг. 48б) элементы нажмут друг на друга, а в нижних точках q между ними появится растяжение. Эти напряжения Z_x и выражаются ф-лой (181).

Далее, так как соседние элементы рассматриваемого призматического тела (фиг. 47 и 48) работают в совершенно одинаковых условиях, то нет основания ожидать каких-либо сдвигов между ними; отсюда легко сообразим, что всюду

$$e_{yz} = 0; \quad e_{zx} = 0.$$



Фиг. 48.

§ 47. Таким образом для элементов рассматриваемого длинного призматического тела, удаленных от его концов, приблизительно соблюдаются условия (179), (180), (180'), (181) плоской деформации. Легко видеть, что при этих условиях все наши основные группы ур-ний значительно упрощаются. Начнем с закона Гука в форме (V); первое из этих ур-ний на основании (181) получает вид:

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma Y_y - \sigma^2 (X_x + Y_y)] = \frac{1+\sigma}{E} [(1-\sigma) X_x - \sigma Y_y], \quad (182)$$

второе получает вид:

$$e_{yy} = \frac{1+\sigma}{E} [(1-\sigma) Y_y - \sigma X_x]. \quad (182')$$

Ур-ния четвертое и пятое на основании (180) дают:

$$Y_z = 0; \quad Z_x = 0. \quad (183)$$

Далее на основании (180') ур-ния (182) и (182') показывают, что:

$$X_x = \phi_1(x, y); \quad Y_y = \phi_2(x, y); \quad X_y = Y_x = \phi_3(x, y), \quad (184)$$

на этом основании, по ур-нию (181)

$$Z_z = \phi_4(x, y), \quad (184')$$

т. е. все неравные нулю напряжения не зависят от координаты z , что конечно ясно и наперед.

Отсюда вытекают нижеследующие выводы.

Из группы ур-ний равновесия (I) остаются лишь первые два и они переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (I_n)$$

Условия на поверхности (II) упрощаются так:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) \end{aligned} \right\}. \quad (II_n)$$

Зависимости (III) сводятся к следующим трем:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (III_n)$$

Из шести условий неразрывности деформаций (IV), как легко видеть, остается одно первое:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (IV_n)$$

Закон Гука (V) на основании (183) получает вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1+\sigma}{E} [(1-\sigma) X_x - \sigma Y_y] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1+\sigma}{E} [(1-\sigma) Y_y - \sigma X_x] \\ \epsilon_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y \end{aligned} \right\} \quad (V_n)$$

Ур-ния $(I_n - V_n)$ позволяют уже приступить к решению задачи о плоской деформации.

§ 43. Обратимся теперь к другому случаю, аналогичному предыдущему, но противоположному в смысле протяжения вдоль оси OZ , т. е. опять рассмотрим задачи, показанные на фиг. 47. Предположим однако, что длина призматического тела вдоль оси OZ весьма мала; значит, мы будем иметь тонкую пластинку, нагруженную по боковой поверхности (ребру) силами, параллельными ее основаниям. Пока нагрузка не превосходит некоторого предела, пластинка не будет прогибаться в направлении оси OZ .

Основания пластинки (параллельные плоскости OXY) по предположению свободны от нагрузки, т. е. на них всюду

$$Z_z = 0; \quad X_z = 0; \quad Y_z = 0.$$

Но так как расстояние между этими основаниями (толщина пластинки) весьма мало, то внутри пластинки эти напряжения очевидно будут весьма малы. Остальные составляющие напряжения X_x, Y_y, X_y по той же причине (малость толщины вдоль оси OZ) весьма мало будут меняться вдоль оси OZ , вследствие чего мы их приемем не зависящими от координаты Z .

Таким образом в рассматриваемой задаче для напряжений получаются приблизительно такие условия:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \phi_1(x, y); \quad Y_y = \phi_2(x, y); \quad X_y = \phi_3(x, y) \\ Y_z &= Z_y = 0; \quad X_z = X_z = 0; \quad Z_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

От соответственных условий (183), (184) и (184') § 47 для плоской деформации они отличаются только условием (ср. ф-лу 184'): $Z_z = 0$.

В отношении деформаций, от задачи о плоской деформации данная задача отличается тем, что здесь ϵ_{zz} не равно нулю (ср. ф-лу 180, § 45). Она будет представлять собою поперечную деформацию (ср. начало, § 10) вдоль оси OZ , вызываемую основными напряжениями: X_x, Y_y , лежащими в плоскостях, параллельных OXY .

Деформация ϵ_{zz} повлечет за собой некоторое искривление плоских оснований пластинки. Однако, вследствие малой толщины пластинки, искривление это будет весьма малым. Например, возьмем случай чистого изгиба прямоугольной балки, рассмотренный в § 40—42. Свободные от нагрузки боковые ребра поперечного сечения наклоняются на угол γ (фиг. 45б); однако из ф-лы (159) § 42 видно, что угол этот пропорционален ширине балки b ; значит, если b мало, т. е. если балка имеет форму тонкой пластинки, то углы γ будут также весьма малы и искривление боковых поверхностей ее будет ничтожно.

На основании ур-ний (185) делаем следующие заключения: основные группы ур-ний (I) и (II) в рассматриваемом случае имеют тот же вид (I_n) и (II_n) , как и для случая плоской деформации. Из группы (III) также достаточно сохранить лишь ур-ния (III_n) . Равным образом в группе (IV) можно ограничиться одним ур-нием (IV_n) . В законе же Гука (V), на основании последнего из условий (185), получим довольно существенное отличие от

ур-ний (V_n) задачи о плоской деформации; действительно, в нашем случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y) \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x) \\ e_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y \end{aligned} \right\} \quad (V'_n)$$

Рассматриваемую нами задачу назовем обобщенным плоским напряженным состоянием.

§ 49. Резюмируя предыдущие рассуждения (§§ 45—48), скажем, что при решении задач как на плоскую деформацию, так и на обобщенное плоское напряженное состояние, можно пользоваться основными группами ур-ний: (I_n), (II_n), (III_n) и (IV_n). Закон же Гука выражается для этих задач различно: для плоской деформации — ур-ниями (V_n), а для плоского напряженного состояния — ур-ниями (V'_n).

В дальнейшем за неизвестные мы выбираем напряжения X_x , Y_y , $X_y = Y_x$; поэтому ур-ние неразрывности деформаций (IV_n) необходимо преобразовать, внося в него, вместо деформаций, их выражения из ур-ний (V_n) или (V'_n), в зависимости от того, имеем ли мы плоскую деформацию или плоское напряженное состояние. Результат преобразования в обоих случаях будет одинаков; мы его сделаем, пользуясь ур-ниями (V_n); читателю же предлагаем проделать для упражнения те же выкладки, исходя из ур-ний (V'_n).

Выполняем над ур-ниями (V_n) дифференцирование, как того требует ур-ние (IV_n):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1+\sigma}{E} \left[(1-\sigma) \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1+\sigma}{E} \left[(1-\sigma) \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} \quad (186')$$

Правую часть ур-ния (186') преобразуем, выразив касательное напряжение X_y через нормальные X_x и Y_y из ур-ний (I_n); дифференцируя их и перенося некоторые члены в правые части, имеем:

$$\frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial X}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Складывая почленно, получаем:

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (187)$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда объемные силы постоянны по всему объему тела; тогда

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

В частности мы будем иметь дело с силой тяжести и ось OY будем направлять вниз; это даст:

$$\begin{aligned} X &= 0; \quad Y = g, \\ \rho Y &= \rho g = p, \end{aligned} \quad (188)$$

где p — вес единицы объема тела (удельный вес); теперь ур-ние (187) получит вид:

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right),$$

и ур-ния (186) и (186') переписываются так:

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y^2} = \frac{1 + \sigma}{E} \left[(1 - \sigma) \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right];$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{1 + \sigma}{E} \left[(1 - \sigma) \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} \right];$$

$$- \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1 + \sigma}{E} \left[\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right].$$

Складывая их почленно, получим левую часть (IV_n) в форме, преобразованной к напряжениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1 + \sigma}{E} (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right] = \\ &= \frac{1 + \sigma}{E} \left[\frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь выражение в квадратных скобках представляет собой Лапласов оператор второго порядка над функцией $(X_x + Y_y)$:

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial y^2}.$$

Внося это в ур-ние неразрывности деформаций (IV_n) , получим его в окончательной, преобразованной к напряжениям форме:

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = 0.$$

Это есть так называемое условие Мориса Леви (M. Lévy).

§ 50. Таким образом решение плоской задачи приводится к интегрированию трех дифференциальных ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I_n)$$

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = 0, \quad (IV_n)$$

и удовлетворению условий на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) \end{aligned} \right\} \quad (II_n)$$

Если нам удастся таким путем найти напряжения

$$X_x, Y_y, X_y, \quad (189)$$

то, внося их для плоской деформации в (V_n) или для плоского напряженного состояния в (V'_n) , найдем деформации: e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} , как функции от x и y ; внося их далее в ур-ния (III_n) , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e_{xx} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= e_{yy} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= e_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad (III_n)$$

и интегрируя последние, получим перемещения u , v , w .

Этим решение задачи будет закончено.

§ 51. Эри (Airy) указал на возможность дальнейшего упрощения в решении задачи, благодаря которому мы избегаем интегрирования ур-ний (I_n) , удовлетворив им наперед, но сохранив при этом большой простор в смысле общности получаемого решения. Для этой цели возьмем произвольную функцию $\varphi(x, y)$ и зададим напряжения так

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ X_y = Y_x &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \end{aligned} \right\}. \quad (VII)$$

Подставляя эти выражения в ур-ния (I_n) , легко убедиться, что последние будут тождественно удовлетворены и далее с ними не придется иметь дела. Остается одно ур-ние (IV'_n) , которое легко выражается через функцию φ ; действительно, на основании (VII) :

$$X_x + Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi.$$

и ур-ние (IV'_n) символически изобразится так:

$$\nabla^2(\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (VIII')$$

Раскрывая символ Лапласова оператора, получим:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (VIII)$$

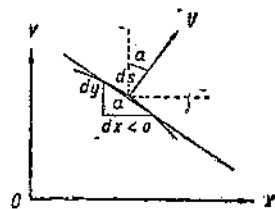
Условия на поверхности (II_n) при помощи функции φ выразятся так

$$\left. \begin{aligned} X_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(VX) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right) \cos(VY) \\ Y_y &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right) \cos(VX) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(VY) \end{aligned} \right\}. \quad (IX)$$

Функция φ называется функцией Эри или функцией напряжений; при помощи ее решение плоской задачи представляется так: следует найти функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую во всех точках поперечного сечения исследуемого тела (фиг. 47) ур-нию $(VIII)$ а на контуре этого сечения — ур-ниям (IX) , где X_y и Y_x — проекции внешней нагрузки на оси

координат. Найдя функцию φ , по ур-ниям (VII) определим напряжения; дальнейшее разыскание деформаций и перемещений выполняется по ур-ниям (V_n) или (V_n') и (III_n), как указано в § 50.

Замечание. Если объемных сил нет (т. е. если $p=0$), то условия на поверхности (IX) можно написать короче, вводя понятие о производной функции по дуге контура поперечного сечения (фиг. 47). Действительно, имеем (фиг. 49):



Фиг. 49.

$$\cos(VX) = \sin \alpha = \frac{dy}{ds};$$

$$\cos(VY) = \cos \alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

Внося это в ур-ния (IX), имеем:

$$X_s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right);$$

$$Y_s = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Решение плоской задачи в полиномах

§ 52. Во многих задачах оказывается удобным или полуобратным методом, задавая наперед аналитическую форму функции напряжений $\varphi(x, y)$ и подбирая ее параметры (например коэффициенты) так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности (IX) и основное ур-ние (VIII). Рассмотрим несколько задач, в которых $\varphi(x, y)$ можно задать в виде целой функции (полинома). Если функция φ представляет собой полином 2-й степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2, \quad (190)$$

то ур-ние (VIII), очевидно, будет всюду удовлетворено, при любых значениях a , b и c .

Напряжения, согласно ур-ниям (VII), выразятся так¹:

$$X_x = c; \quad Y_y = a; \quad X_y = -b - px. \quad (191)$$

Если $p=0$, то напряжения постоянны; получаем случай однородного напряженного состояния.

Если φ есть полином 3-й степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{d}{6} x^3 + \frac{e}{2} x^2 y + \frac{f}{2} xy^2 + \frac{k}{6} y^3 + \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2, \quad (192)$$

то ур-ние (VIII) попрежнему будет удовлетворено при произвольных значениях коэффициентов; напряжения по ур-ниям (VII) выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= fx + ky + c \\ Y_y &= dx + ey + a \\ X_y &= -ex - fy - b - p \end{aligned} \right\}, \quad (193)$$

т. е. они будут линейными функциями от координат.

¹ Из ур-ний (191) видно, что членов 1-й степени в функции (190) задавать не надо, так как они не отразятся на величине напряжений.

Если φ зададим, как функцию 4-й степени или выше, то производные ее, входящие в ур-ние (VIII), вообще говоря, будут отличны от нуля; поэтому коэффициенты придется подобрать так, чтобы условие неразрывности (VIII) было удовлетворено при произвольных значениях x и y . Напряжения при этом будут функциями 2-й степени или выше.

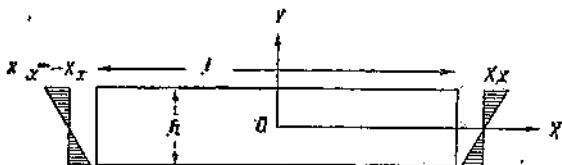
Чистый изгиб

53. Рассмотрим частный случай функции напряжений (192):

$$\varphi = \frac{k}{6} y^3.$$

Пренебрегая влиянием собственного веса, из ур-ний (193) получим напряжения:

$$X_x = ky; Y_y = 0; X_y = Y_x = 0. \quad (194)$$



Фиг. 50.

Если возьмем пластинку толщиной h (фиг. 50) и предположим, что в ней осуществляются напряжения (194), то на поверхности ее будут действовать следующие напряжения.

На верхней и нижней гранях (при $y = \pm \frac{h}{2}$):

$$Y_y = Y_{-y} = X_x = X_{-x} = 0;$$

на боковых гранях (при $x = \pm \frac{l}{2}$):

$$X_x = ky; X_{-x} = -X_x = -ky;$$

$$Y_x = Y_{-x} = 0.$$

Опоры напряжений X_x показаны на чертеже; очевидно мы имеем дело со случаем чистого изгиба, обследованным в общем виде (§§ 40—42).

Случай поперечного изгиба

§ 54. Рассмотрим пластинку, заделанную левым концом и нагруженную грузом Q , распределенным по правому концевому сечению. В сопротивлении материалов, пользуясь гипотезой плоских сечений, получаем для этого случая такие напряжения¹:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{M}{J} y = -\frac{Q(l-x)}{J} y \\ Y_y &= 0 \\ X_y &= Y_x = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2J} \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

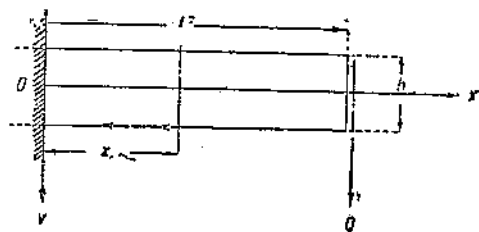
Проверим, возможны ли напряжения (195) с точки зрения плоской задачи и соответствуют ли они случаю изгиба, показанному на фиг. 51. Для ответа на первый вопрос достаточно рассмотреть, могут ли напря-

¹ Для расчета выделяем вдоль оси OZ полоску шириной, равной единице.

жения (195) быть получены из какой-либо функции напряжений $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей ур-нию (VIII).

Общий вид функций (195), выражающих напряжения, такой:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bxy = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ Y_y &= 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ X_y &= C + Dy^2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (196)$$



Фиг. 51.

Интегрируя дважды первое из этих ур-ний, имеем:

$$\varphi(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + \phi(x) \cdot y + \omega(x). \quad (197)$$

Дифференцируя эту функцию и подставляя в последние два из ур-ний (196), получаем:

$$\phi''(x)y + \omega''(x) = 0. \quad (198)$$

$$-\frac{By^2}{2} - \phi'(x) = C + Dy^2. \quad (199)$$

Оба эти условия должны удовлетворяться при любых значениях x и y ; поэтому делаем выводы:

$$\phi''(x) = 0; \quad \omega''(x) = 0;$$

$$\phi(x) = Ex + F;$$

$$\omega(x) = Hx + K;$$

подставляя это значение в ур-ние (199), имеем:

$$-\frac{By^2}{2} - E = C + Dy^2.$$

Отсюда:

$$E = -C; \quad D = -\frac{B}{2}.$$

Функция напряжений (197) получает вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + Exy + Fy + Hx + K. \quad (197')$$

Члены 1-й степени $Hx + Fy + K$ можно отбросить, так как на напряжения они очевидно не влияют. Легко убедиться, что функция (197') удовлетворяет ур-нию (VIII) (§ 51) при любых значениях коэффициентов. Напряжения выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Ay + Bxy \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{B}{2}y^2 - E \end{aligned} \right\} \quad (195')$$

Это показывает, что напряжения вида (195) или в более общей форме (196) удовлетворяют уравнениям теории упругости. Теперь следует попытаться подобрать неопределенные коэффициенты A , B , E так, чтобы удовлетворились условия на поверхности (фиг. 51):

1. На верхней и нижней гранях:

$$\text{при } y = \frac{h}{2}, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0;$$

$$\text{при } y = -\frac{h}{2}, \quad Y_{-y} = -Y_y = 0, \quad X_{-y} = -X_y = 0.$$

2. На правом концевом сечении:

$$\text{при } x = l \quad X_x = 0.$$

И так как закон распределения касательных напряжений по сечению $x = l$ в условии задачи ничем не обусловлен, то остается лишь условие: при $x = l$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy = Q,$$

требуемое, чтобы усилия на концевом поперечном сечении приводились к заданному грузу Q .

Предлагаем читателю в качестве упражнения проделать нужные выкладки и убедиться, что при этом для напряжений получатся выражения (195).

Значит, в данной задаче выражения напряжений (195), получаемые на основании гипотезы плоских сечений, подтверждаются и с точки зрения теории упругости при условии, если груз Q по концевому сечению распределен по закону, указываемому последней из ф-л (195). При другом способе приложения груза Q выражения напряжений также будут иными, но значительная численная разница на основании принципа Сен-Венана (§ 37, фиг. 41) будет лишь вблизи нагруженного правого конца пластинки.

§ 55. В этой задаче представляется интересным исследовать деформаций и перемещения и сравнить результат с тем, что дает гипотеза плоских сечений в сопротивлении материалов.

Так как теперь нам придется воспользоваться законом Гука, то согласно сказанному в начале § 49 выберем сначала, на каком из двух случаев плоской деформации или плоского напряженного состояния, — мы остановимся; для получения полного соответствия с аналогичной задачей сопротивления материалов остановимся на плоском напряженном состоянии и потому воспользуемся законом Гука в форме (V_n^*) (§ 48).

Тогда из (Π_n) (V_n^*) и (195) получаем такую систему уравнений для определения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{Q}{EJ} (ly - xy) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\sigma Q}{EJ} (ly - xy) \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(1 + \sigma)Q}{EJ} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (201)$$

Интегрируя ур-ния (200), получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Q}{EJ} \left(l y x - \frac{x^3 y}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_1(y) \\ v &= \frac{\sigma Q}{EJ} \left(\frac{l y^2}{2} - \frac{x y^2}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_2(x) \end{aligned} \right\}, \quad (202)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции; для удобства дальнейших выкладок мы им дали коэффициент $\frac{Q}{EJ}$. Для определения вида этих функций вносим выражения (202) в ур-ние (201); предварительно находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\sigma Q}{EJ} \frac{y^2}{2} + \frac{Q}{EJ} f_2'(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{Q}{EJ} \left(l x - \frac{x^3}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_1'(y) \end{aligned} \right\}. \quad (203)$$

Подставляя это в ур-ние (201) и сокращая на $\frac{Q}{EJ}$, получаем:

$$-\frac{\sigma y^2}{2} + f_2'(x) - \left(l x - \frac{x^3}{2} \right) + f_1'(y) = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4} - (1 + \sigma) y^2,$$

или, после перестановки членов:

$$\left[f_2'(x) - \left(l x - \frac{x^3}{2} \right) \right] + \left[f_1'(y) - \frac{\sigma y^2}{2} + (1 + \sigma) y^2 \right] = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4}. \quad (204)$$

В квадратных скобках стоят функции, зависящие: первая только от x , вторая только от y ; но так как x и y произвольны и между собой независимы, то равенство (204) может существовать только при условии, если выражения в квадратных скобках равны постоянным числам m и n , причем:

$$m + n = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4}. \quad (205)$$

На этом основании из ур-ния (204) получаем:

$$f_2'(x) = l x - \frac{x^3}{2} + m; \quad f_1'(y) = \frac{\sigma y^2}{2} - (1 + \sigma) y^2 + n = -\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) y^2 + n.$$

Интегрируя эти ур-ния, имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + m x + \alpha \\ f_1(y) &= -\frac{2 + \sigma}{6} y^3 + n y + \beta \end{aligned} \right\}. \quad (d)$$

Вносим это в ур-ния (202):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Q}{EJ} \left[-l x y + \frac{x^3 y}{2} - \frac{2 + \sigma}{6} y^3 + n y + \beta \right] \\ v &= \frac{Q}{EJ} \left[\frac{\sigma l y^2}{2} - \frac{\sigma x y^2}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + m x + \alpha \right] \end{aligned} \right\}. \quad (206)$$

Для определения произвольных постоянных m , n , α и β осуществим закрепление левого конца; в сопротивлении материалов мы все рассужде-

ния относили к оси бруска; поэтому и здесь прежде всего закрепим начальную точку оси, т. е. поставим условия:

$$\text{при } x=y=0; u=0; v=0.$$

Тогда из ур-ний (206) сразу имеем $\alpha=\beta=0$.

Следует закрепить теперь (фиг. 51) опорное сечение (против вращения вокруг точки O); мы привыкли с этой целью ставить условие горизонтальности начальной касательной:

$$\text{при } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 0^1;$$

при этом условии из ур-ний (206) находим:

из ур-ния (205):

$$\begin{aligned} m &= 0; \\ n &= \frac{(1+\sigma)h^2}{4}. \end{aligned}$$

Ур-ния (206) дают:

$$u = \frac{Q}{EJ} \left[- \left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{(2+\sigma)y^3}{6} + \frac{(1+\sigma)h^2y}{4} \right], \quad (207)$$

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{\alpha(l-x)y^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]. \quad (207')$$

Из ур-ния (207') положив $y=0$, найдем ур-ние изогнутой оси бруска:

$$v = \frac{Q}{EJ} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (208)$$

что совпадает с решением, получаемым в сопротивлении материалов. Исследуем теперь деформацию плоских поперечных сечений; пусть ур-ние такого сечения до деформации будет:

$$x = x_0,$$

после деформации его ур-ние будет:

$$x = x_0 + u_0,$$

или:

$$x = x_0 + \frac{Q}{EJ} \left[- \left(l - \frac{x_0}{2} \right) x_0 y - \frac{(2+\sigma)}{6} y^3 + \frac{(1+\sigma)h^2}{4} y \right]. \quad (209)$$

Значит сечение не остается плоским, но искривляется по параболе 3-го порядка (209). При осуществленном нами способе закрепления левого конца, левое крайнее сечение ($x=0$) также искривляется по кривой

$$x = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{(1+\sigma)h^2}{4} y - \frac{(2+\sigma)}{6} y^3 \right].$$

Если возьмем линейный элемент dy на оси бруска в точке закрепления (при $x=0$, $y=0$), то угол поворота его (ф-ла 12 § 6) будет:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\substack{\alpha=0 \\ y=0}} = \frac{(1+\sigma)Qh^2}{4EJ} = \frac{3Q}{2Gh} > 0.$$

¹ Ср. это с ф-лой (11) § 6.

Следовательно элемент поворачивается (§ 6) по направлению от положительной оси OY к положительной оси OX ; значит плоские поперечные сечения после деформации искривляются и не остаются нормальными к оси¹.

Это показывает, что в нашей задаче формула нормального напряжения

$$X_x = -\frac{M}{J} y,$$

выведенная из гипотезы плоских сечений, остается верной и при искривлении сечений.

§ 56. В § 37 мы отмечали схематичность формулировки задач в сопротивлении материалов относительно нагрузки; здесь полезно отметить такую же схематичность формулировки в смысле „закрепления на опоре“. Действительно, закрепление это можно осуществить бесчисленным множеством способов.

В предыдущем параграфе мы осуществили закрепление левого конца, поставив условие, чтобы элемент оси dx у опорного конца оставался горизонтальным ($\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ при $x = y = 0$).

Осуществим теперь то же закрепление другим способом, поставив условие:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=y=0} = 0,$$

требующее (ф-ла 12, 6), чтобы элемент dy опорного сечения оставался вертикальным.

При этом первое из ур-ний (206) дает: $n = 0$,
а из ур-ния (205)

$$m = \frac{(1 + \sigma)h^2}{4},$$

и из ур-ний (206) получим вместо (207) и (207') такие ур-ния:

$$u = \frac{Q}{EJ} \left[-\left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{(2 + \sigma)y^3}{6} \right];$$

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{\sigma(l - x)y^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1 + \sigma)h^2x}{4} \right].$$

Значит все перемещения изменились.

Ур-ние изогнутой оси будет (ср. с ф-лой 208):

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1 + \sigma)h^2x}{4} \right]. \quad (210)$$

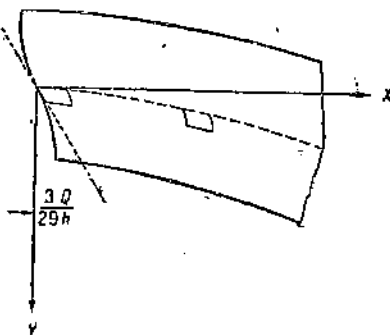
Прогиб правого конца в первом случае (по ф-ле 208):

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ};$$

¹ Легко найти общую формулу наклона сечения относительно оси во всех точках ее; наклон этот, очевидно, равен (фиг. 52) сдвигу

$$(e_{xy})_{y=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Проще всего вычислить его по (201).

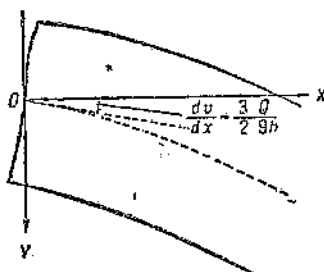


Фиг. 52.

при втором же способе закрепления (фиг. 52) он равен:

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{(1+\sigma)Qh^2l}{4EJ} = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{3Ql}{2Gh}. \quad (211)$$

Последний член $\frac{3}{2} \frac{Ql}{Gh}$ учитывает влияние сдвигов (другими словами — влияние поперечной силы) на прогиб.



Фиг. 53.

Из предыдущих рассуждений видно, что прогиб правого конца в данной задаче есть понятие само по себе неопределенное; он может быть различным в зависимости от способа „заделки“ левого конца.

Кроме двух рассмотренных способов заделки, можно представить себе бесчисленное количество других способов; каждому из них будут соответствовать свои перемещения и свой прогиб. Принцип Сен-Венана говорит, что при этом напряжения будут существенно меняться только вблизи закрепленного сечения; перемещения же будут различными на всем протяжении бруска.

Другой случай поперечного изгиба

§ 57. Рассмотрим изгиб балки на двух опорах под сплошной равномерной нагрузкой q . Опорные реакции предположим в форме касательных сил, распределенных по концевым сечениям.

При расположении осей координат по фиг. 54 элементарное решение задачи приводит к таким напряжениям:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) y = Ay + Bx^2y \\ X_y = Y_x &= -\frac{qx}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = Cx + Dxy^2 \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

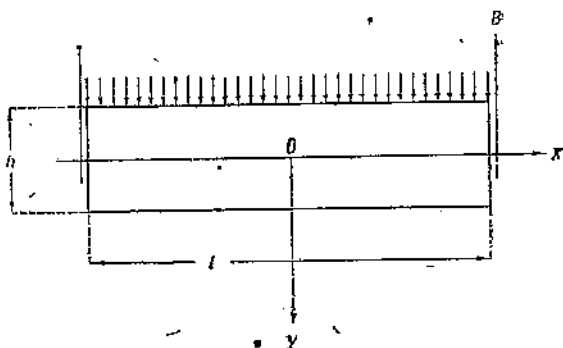
Напряжениями Y_y обычно пренебрегают; это обстоятельство позволяет наперед утверждать, что система напряжений (212) совместно с допущением $Y_y = 0$ наверное не удовлетворит уравнениям теории упругости, так как на верхней поверхности при $y = \frac{h}{2}$ имеем равенство:

$$Y_{-y} = -Y_y = q \neq 0.$$

Поэтому постараемся удовлетворить уравнениям теории упругости, задавшись напряжениями (212), но отбросив условие $Y_y = 0$.

Подберем пока общий вид функции напряжений, при напряжениях (212); по уравнениям (VII) (§ 51) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= Ay + Bx^2y \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -Cx - Dxy^2 \end{aligned} \right\} \quad (213)$$



Фиг. 54.

Интегрируя первое из этих ур-ний, имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{A}{2} y^2 + \frac{B}{2} x^2 y^2 + f_1(x); \quad (214)$$

$$\varphi = \frac{A y^3}{6} + \frac{B}{6} x^2 y^3 + f_1(x) y + f_2(x), \quad (215)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции от x .

Дифференцируя ур-ние (214) по x и подставляя полученное значение во второе ур-ние (213), имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = Bxy^2 + f_1'(x) = -Cx - Dxy^2;$$

отсюда получаем:

$$D = -Bf_1(x) = -\frac{C}{2}x^2 + E.$$

Внося это значение в ур-ние (215), имеем:

$$\varphi = \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{6} x^2 y^3 - \frac{C}{2} x^2 y + Ey + f_2(x).$$

Подставляя это выражение в ур-ние (VII) (§ 51), видим, что оно не удовлетворяется¹; значит φ не может быть принята за функцию напряжений; поэтому добавим к ней произвольную пока функцию $\phi(x, y)$ ² и получим:

$$\varphi = \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{6} x^2 y^3 - \frac{C}{2} x^2 y + f_2(x) + \phi(x, y). \quad (216)$$

Функцию $\phi(x, y)$ подберем так, чтобы условие неразрывности деформаций (VIII) было удовлетворено. Из ур-ний (216) имеем:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}; \quad 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4By + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4};$$

и ур-ние (VIII) получает вид:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -4By. \quad (217)$$

Рассматривая это ур-ние, легко сообразим, что наиболее простое решение его выразится целой функцией 5-й степени:

$$\phi(x, y) = \frac{F}{24} x^4 y + \frac{H}{120} y^5 + \frac{K}{12} x^2 y^3.$$

Внося это в ур-ние (217), имеем:

$$\begin{aligned} & Fy + 2Ky + Hy = -4By, \\ \text{т. е.} \quad & F + 2K + H = -4B. \end{aligned} \quad (218)$$

В функции ϕ член $\frac{K}{12} x^2 y^3$ можем отбросить, так как в ур-нии (216) член подобного вида $\frac{B}{6} x^2 y^3$ уже имеется; тогда из ур-ния (218) имеем:

$$H = -4B - F.$$

¹ Оно получит вид: $4By = 0$.

² Член Ey , не влияющий на напряжения, отбрасываем.

После этого функция напряжений (216) получает окончательный вид:

$$\varphi = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bx^2y^3}{6} - \frac{C}{2}x^2y + f_2(x) + \frac{F}{24}x^2y - \frac{(4B+F)}{120}y^5, \quad (219)$$

удовлетворяющий условию (VIII). Отсюда получаем напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y - \frac{4B+F}{6}y^3 \\ Y_y &= \frac{B}{3}y^3 - Cy + f_2''(x) + \frac{F}{2}x^2y \\ X_y = Y_x &= -Bxy^2 + Cx - \frac{F}{6}x^3 \end{aligned} \right\}, \quad (220)$$

Для окончания решения остается удовлетворить условиям на поверхности; сначала займемся условиями на верхней и нижней гранях.

1. На верхней грани, при $y = -\frac{h}{2}$:

$$Y_{-y} = -Y_y = q; \quad X_y = -X_{-y} = 0. \quad (221)$$

2. На нижней грани, при $y = +\frac{h}{2}$:

$$Y_y = 0; \quad X_y = 0. \quad (222)$$

Первое из условий (222) дает:

$$\frac{Bh^3}{24} - \frac{Ch}{2} + f_2''(x) + \frac{Fh}{4}x^2 = 0.$$

Отсюда получаем:

$$F = 0; \quad f_2''(x) = L;$$

и напряжения (220) будут:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y - \frac{2}{3}By^3 \\ Y_y &= \frac{B}{3}y^3 - Cy + L \\ X_y = Y_x &= -Bxy^2 + Cx \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Из условий (221) и (222) для нормальных напряжений получаем:

$$-\frac{Bh^3}{24} + \frac{Ch}{2} + L = -q; \quad \frac{Bh^3}{24} - \frac{Ch}{2} + L = 0.$$

Складывая эти уравнения, найдем:

$$L = -\frac{q}{2}; \quad (224)$$

вычитая, получим:

$$\frac{Bh^3}{12} - Ch = q. \quad (225)$$

Условия (221) и (222) для касательных напряжений дают:

$$-\frac{Bh^2}{4} + C = 0; \quad (226)$$

решая совместно уравнения (225) и (226), найдем:

$$B = -\frac{6q}{h^3}; \quad C = -\frac{3}{2}\frac{q}{h}. \quad (227)$$

Подставляя значения L , B и C из ур-ний (224) и (227) в ур-ния (223), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay - \frac{6q}{h^3} x^2 y + 4 \frac{q}{h^3} y^3 \\ Y_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right) \\ X_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Переходим к условиям на концевых сечениях бруска: при

$$x = \pm \frac{l}{2}, X_x = 0; \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy = -\frac{ql}{2}. \quad (229)$$

Последнее условие требует, чтобы касательные напряжения на концевом сечении приводились к опорной реакции $\left(-\frac{ql}{2}\right)$; легко убедиться, что оно уже удовлетворено, так как последнее из ур-ний (228) в точности совпадает с заданным нами выражением касательного напряжения (ф-лы 212). Вместе с тем замечаем, что первое из условий ур-ний (229) не может быть удовлетворено; действительно, при $x = \pm \frac{l}{2}$

$$X_x = \left[\left(A - \frac{6ql^2}{4h^3} \right) y + 4 \frac{q}{h^3} y^3 \right], \quad (230)$$

и следовательно, X_x не обращается в нуль; но так как правая часть ур-ния (230) есть нечетная функция от y , то отсюда следует, что:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x dy = 0, \quad (231)$$

т. е. нормальные напряжения по концевому сечению приводятся к паре с моментом:

$$M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x y dy = A \frac{h^3}{12} - \frac{ql^2}{8} + \frac{qh^3}{20}. \quad (232)$$

Таким образом решение (228) соответствует изгибу пластинки под действием сплошной равномерной нагрузки q и моментов $\pm M_0$ на опорах (фиг. 55).

Распоряжаясь коэффициентом A , можем опорным моментам (232) дать любую величину. Выражая коэффициент A через опорный момент M_0 по ур-нию (232), имеем:

$$A = \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^3}{20} \right),$$



Фиг. 55.

и ур-ния напряжений (228) перепишем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3 \\ Y_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right) \\ X_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

Если здесь положим:

$$M_0 = 0, \quad (234)$$

то уничтожим опорные моменты и вернемся к изгибу пластинки под действием одной сплошной нагрузки, но с наличием нормальных напряжений (230) на опорных сечениях; однако на основании ур-ний (231), (232) и (234) эти напряжения приводятся к уравновешенной системе сил, и потому влияние их на основании принципа Сен-Венана (§ 37) будет заметно только вблизи концов балки.

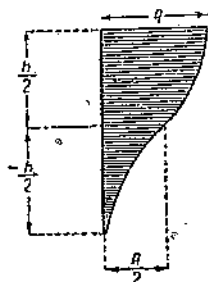
При $M_0 = 0$ первое из ур-ний (233) можно написать так:

$$X_x = \frac{12q}{h^3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) y - \frac{h^2}{20} y + \frac{y^3}{3} \right].$$

Сравнивая это с первым из ур-ний (212), замечаем, что разница в выражениях напряжения

$$\frac{12q}{h^3} \left(\frac{h^2}{20} y - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{q}{J} \left(\frac{h^2}{20} y - \frac{y^3}{3} \right)$$

при малой высоте сечения h по сравнению с пролетом l окажет лишь небольшое влияние на величину напряжений в средней части балки (при малом x).



Фиг. 56.

Резюмируя все предыдущие выводы, можем сказать, что:

1. Выражение касательных напряжений, даваемое элементарным решением, подтверждается настоящим более точным решением (233).

2. Для нормального напряжения X_x элементарное решение дает значения, близкие к действительности вдали от концов плиты или пластинки (в случае если высота h мала по сравнению с пролетом), где эти напряжения играют главную роль.

3. Второе из ур-ний (233) дает выражение нормального напряжения Y_y , которым в элементарном решении пренебрегают. Эпюра распределения этих напряжений по высоте сечения (кубическая парабола) показана на фиг. 56.

Пользуясь ур-ниями (233), можно очевидно решать задачу о балке, заделанной концами в стенки; для этого величину опорных моментов M_0 следует подобрать так, чтобы на концах оси балки удовлетворялись условия вида $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ или $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ср. § 55 и 56).

Предварительно конечно надо найти перемещения балки, как это сделано в § 55.

Треугольная подпорная стенка (клин)

§ 58. Рассмотрим задачу о стенке плотины или подпорной стенке, подверженной давлению воды или сыпучего тела по гидростатическому закону, пропорционально глубине данной площадки (фиг. 57). Условия на поверхности выразятся очевидно так:

1. На грани OY :

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=0, Y_x &= -Y_x = 0 \\ X_x &= -X_x = \gamma y \end{aligned} \right\}. \quad (235)$$

2. На грани OA :

$$\text{при } x=y \operatorname{tg} \beta, X_y=0; Y_v=0. \quad (236)$$

Так как число условий на поверхности равно четырем, то для решения задачи достаточно взять функцию напряжений с четырьмя неопределенными коэффициентами. Воспользуемся функцией третьей степени (192), (с § 53) сохранив в ней первые четыре члена, т. е. положив:

$$a=b=c=0.$$

Согласно ур-ниям (193) (§ 52) напряжения будут линейными функциями и выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= fx + ky \\ Y_y &= dx + ey \\ Y_x &= X_y = -ex - fy - pgx \end{aligned} \right\}. \quad (237)$$

Здесь pg — вес объемной единицы стёнки; для краткости назовем его через p ; тогда:

$$pg = p.$$

Применяя условия (235), имеем:

$$fy = 0; ky = -\gamma y.$$

Отсюда:

$$f = 0; k = -\gamma$$

и напряжения (237) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y \\ Y_y &= dx + ey \\ Y_x &= X_y = -(e+p)x \end{aligned} \right\}. \quad (237')$$

Условия (236) раскрываем по ур-ниям (II_n) (§ 47) и вносим в них значения косинусов углов внешней нормали V с осями (фиг. 57):

$$X_x \cos \beta - X_y \sin \beta = 0;$$

$$Y_x \cos \beta - Y_y \sin \beta = 0.$$

Сюда вносим значения напряжений (237'), положив в них согласно условиям (236) $x = y \operatorname{tg} \beta$:

$$-\gamma y \cos \beta + (e+p)y \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 0;$$

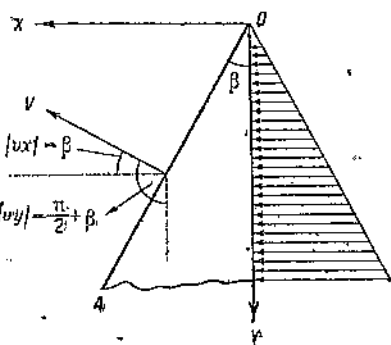
$$-(e+p)y \operatorname{tg} \beta \cos \beta - (dy \operatorname{tg} \beta + ey) \sin \beta = 0.$$

Сокращая оба уравнения на y и деля на $\cos \beta$, получаем:

$$(e+p) \operatorname{tg}^2 \beta = \gamma; \quad (d \operatorname{tg} \beta + e) \operatorname{tg} \beta = -(e+p) \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда легко найдем:

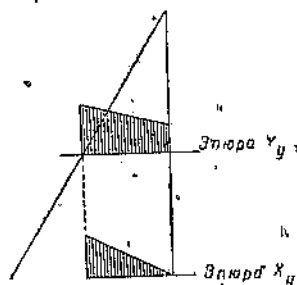
$$e = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p; \quad d = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta}$$



Фиг. 57.

и напряжения (237) получают окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y \\ Y_y &= \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p \right) y \\ Y_x = X_y &= -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x \end{aligned} \right\} \quad (238)$$



Фиг. 58.

Эпюры напряжений Y_y и X_y по горизонтальному сечению $y=y_0$ показаны на фиг. 58. Сравнивая это с результатом элементарного расчета по флам:

$$Y_y = \frac{N}{\omega} + \frac{M}{J_z} \left(x - \frac{a}{2} \right); \quad X_y = \frac{QS}{Jb},$$

найдем, что значения нормальных напряжений Y_y в обоих решениях совпадают; распределение же касательных напряжений X_y получается существенно различным.

§ 59. До сих пор мы выбирали функцию напряжений $\varphi(x, y)$ в виде полинома не выше 5-й степени (ср. ф-лу 219, § 57).

Повышая степень полинома, можно достичь решения более сложных задач. Например, задавая φ , как полином 6-й степени, можно получить решение, данное Морисом Леви (M. Lévy) для случая прямоугольной плотины или подпорной стенки. Решение это имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x}{a} \right) \\ Y_y &= -\gamma y - \frac{\gamma y^3}{a^2} \left(2 \frac{x}{a} + 1 \right) + \gamma y \left(4 \frac{x^3}{a^3} - 6 \frac{x^2}{a^2} + \frac{12x}{5a} - \frac{1}{5} \right) \\ Y_x = X_y &= -\frac{\gamma x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left[3 \frac{y^2}{a} - \frac{a}{5} + x \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

Читатель легко убедится, что эти напряжения удовлетворяют следующим условиям на поверхности (фиг. 59):

1. При $x=0$

$$X_{-x} = \gamma y; \quad Y_{-x} = 0.$$

2. При $x=a$

$$X_x = 0; \quad Y_x = 0.$$

3. При $y=0$

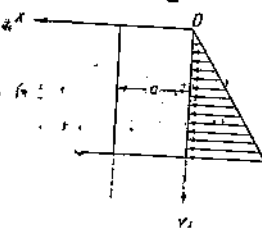
$$Y_{-y} = 0.$$

Последнее необходимое условие:

$$\text{при } y=0; \quad X_{-y} = 0$$

не удовлетворяется полностью, и на верхней грани стенки остаются касательные напряжения:

$$X_{-y} = -X_y = \frac{\gamma x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left[x \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{a}{5} \right]. \quad (240)$$



Фиг. 59.

Однако эти напряжения приводятся к уравновешенной системе сил, так как равнодействующая их равна нулю:

$$\int_0^a X_y dx = 0.$$

Поэтому напряжения (240) имеют лишь местное значение и область влияния их, согласно принципу Сен-Венана, невелика, тем более, что они действуют в верхней, мало напряженной части стенки, которая обычно не нуждается в проверке на напряжения.

Решая данную задачу элементарным путем, мы для напряжений Y_y получили бы такое выражение:

$$\begin{aligned} Y_y &= \frac{N}{\omega} + \frac{M}{J} \left(x - \frac{a}{2} \right) = -py - \frac{\frac{Yy^2}{2} \frac{y}{3}}{\left(\frac{a^3}{12} \right)} \frac{a}{2} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right) = \\ &= -py - \frac{Yy^3}{a^2} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right), \end{aligned}$$

что соответствует первым двум членам второго из ур-ний (239).

Предлагаем читателю таким же путем сравнить выражения напряжений $X_y = Y_x$ в элементарном решении и по ур-ниям (239).

ГЛАВА VIII

Плоская задача в полярных координатах

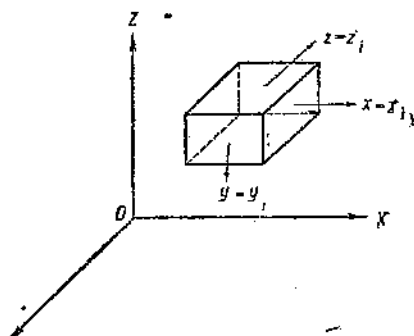
§ 60. До сих пор при решении задач теории упругости мы пользовались декартовыми координатами, в которых точка $M(x_0, y_0, z_0)$ определялась пересечением трех плоскостей:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0.$$

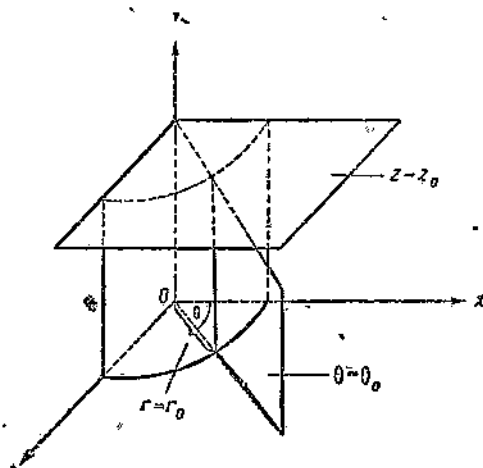
Применяя эти координаты, мы разделяли исследуемое тело на бесконечно-малые элементы тремя системами плоскостей:

$$\begin{aligned} x &= x_1; & x &= x_2; & \dots & x &= x_i; \\ y &= y_1; & y &= y_2; & \dots & y &= y_i; \\ z &= z_1; & z &= z_2; & \dots & z &= z_i. \end{aligned}$$

Такого рода поверхности, на которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называются координатными поверхностями; в данном случае эти поверхности оказываются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и при этом получаются элементы в форме параллелепипеда (фиг. 60).



Фиг. 60.



Фиг. 61.

Однако во многих задачах оказывается более удобным выбирать другие системы координат. В частности, рассмотрим цилиндрические координаты, в которых точка (фиг. 61) определяется тремя числами:

$$r, \theta, z.$$

Иначе можем сказать, что точка определяется пересечением следующих координатных поверхностей: круглого цилиндра $r=r_0$, плоскости $\theta=\theta_0$, проходящей через ось OZ , и плоскости $z=z_0$, параллельной OXY .

Соответственно этому, в данном случае разделение исследуемого тела на бесконечно-малые элементы мы будем осуществлять тремя следующими системами поверхностей: системой концентрических цилиндров: $r=r_1; r=r_2; \dots; r=r_i$;

$=r_2 \dots r=r$; затем пучком плоскостей $\theta=\theta_1, \theta=\theta_2 \dots \theta=\theta_2$, проходящих через ось OZ , и системой плоскостей $z=z_1, z=z_2 \dots z=z_2$, параллельных OXY .

Форма получающегося при этом бесконечно-малого элемента показана на фиг. 62.

Применим цилиндрические координаты к плоской задаче, причем ось исследуемого призматического тела направим параллельно оси OZ . Внешняя нагрузка согласно нашим предположениям будет параллельной плоскости OXY . В этом случае, как мы видели, и для плоской деформации и для плоского напряженного состояния можно отбросить формально ось OZ , и, следовательно, вся задача будет решаться как бы на плоскости, в полярных координатах r, θ .

§ 61. Выведем теперь основные уравнения теории упругости для плоской задачи в полярных координатах. Займемся сначала дифференциальными уравнениями равновесия (I).

Выделим из тела элемент $abcd$ с центральным углом $d\theta$ и наименьшим радиусом r . Стороны его будут (фиг. 63):

Фиг. 62.

$$\left. \begin{aligned} ab &= cd = dr \\ ad &= r \cdot d\theta \\ bc &= (r + dr)d\theta \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Наметим две оси rR и $r\theta$ и, пользуясь ими, будем обозначать напряжения, действующие по граням элемента согласно правилу, принятому вначале; обозначения эти показаны на чертеже. Составим условия равновесия элемента $abcd$, проектируя приложенные к нему силы на оси R и θ . Толщину элемента вдоль оси OZ примем равной 1. При проектировании сил, ввиду бесконечной малости угла $d\theta$, будем принимать

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = 1.$$

Перемножая напряжения, показанные на чертеже, на соответствующие площадки (1) и проектируя полученные силы на оси R и θ , найдем:

$$\begin{aligned} & \left(R + \frac{\partial R_r}{\partial r} dr \right) (r + dr)d\theta - R_r \cdot r \cdot d\theta + \\ & + \left(R_\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot R_\theta \cdot dr - \left(\theta_r + \frac{\partial \theta_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot \frac{d\theta}{2} - \theta_\theta \cdot dr \cdot \frac{d\theta}{2} = 0, \\ & \left(\theta_\theta + \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \theta_\theta dr + \left(R_\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + R_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\theta_r + \frac{\partial \theta_r}{\partial r} dr \right) (r + dr)d\theta - \theta_r \cdot r \cdot d\theta = 0. \end{aligned}$$

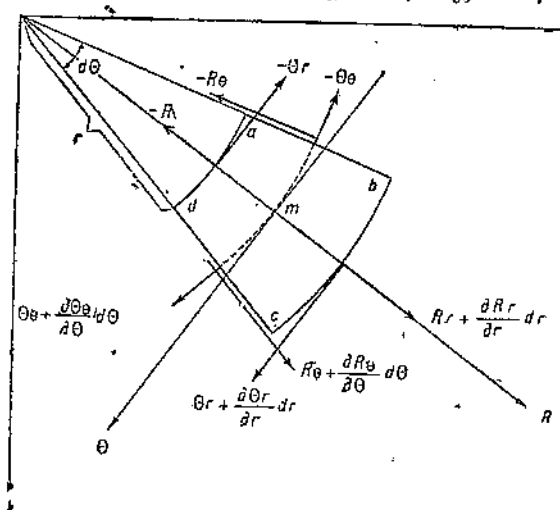
Сокращая полученные ур-ния и отбрасывая бесконечно-малые величины третьего порядка, получим:

$$R_r \cdot dr \cdot d\theta + \frac{\partial R_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \cdot dr - 2R_\theta \frac{dr \cdot d\theta}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \theta} d\theta dr + 2R_\theta \cdot \frac{dr \cdot d\theta}{2} + \theta_r \cdot dr \cdot d\theta + \frac{d\theta_r}{dr} \cdot dr \cdot r \cdot d\theta = 0.$$

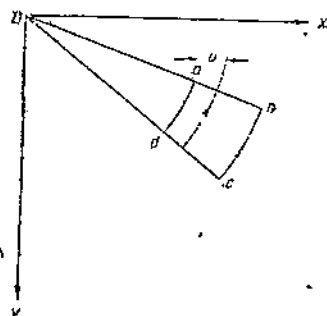
Далее, разделяя эти ур-ния на $dr d\theta$; а также имея в виду, что $\theta_r = R_\theta$, будем иметь окончательно дифференциальные ур-ния равновесия в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} + \frac{R_r - R_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta_r}{\partial \theta} + \frac{2R_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (III)$$



Фиг. 63.

§ 62. Займемся теперь деформациями и перемещениями. Будем обозначать перемещения точек вдоль оси R через u , а вдоль оси θ через v . Удлине-



Фиг. 64.

ние вдоль оси R — через e_{rr} ; вдоль оси θ — $e_{\theta\theta}$ и сдвиг, т. е. искажение прямого угла bad , — через $e_{r\theta}$.

При помощи таких же рассуждений, как и ранее (§ 6), мы получим $e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$. Переходим к удлинению $e_{\theta\theta}$.

Это удлинение может получиться от двух причин: во-первых, если произошли только радиальные перемещения u , то относительное удлинение линейного элемента $ad = r d\theta$ выразится так:

$$\frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r \cdot d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Вследствие перемещений v вдоль оси θ , также получится относительное удлинение $\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{r \partial \theta}$; полное удлинение будет:

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}.$$

Теперь займемся сдвигом.

Из чертежа (фиг. 65) видно, что сдвиг выразится так:

$$e_{r\theta} = (\beta - \alpha) + \gamma; \quad (242)$$

далее замечаем, что

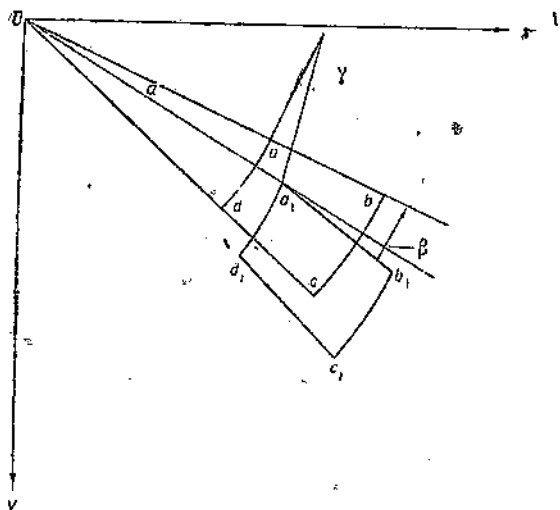
$$\beta = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \alpha = \frac{v}{r}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{r \partial \theta}.$$

Подставляя эти значения в формулу (242), получаем:

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Вместо ур-ний (Шн') для плоской задачи мы теперь получаем следующую систему ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Шнн})$$



Фиг. 65.

§ 63. Что касается группы ур-ний (IV) неразрывности деформаций, то в плоской задаче она свелась к единственному ур-нию:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Это ур-ние мы преобразовали, пользуясь функцией $\varphi(x, y)$ к такому виду:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (\text{VIII})$$

Теперь преобразуем это ур-ние в полярные координаты. Выразим в этих координатах как самую функцию напряжений $\varphi(x, y)$, так и ее последовательные производные. Для этого следует воспользоваться ур-ниями преобразования декартовых координат в полярные:

$$x = r \cdot \cos \theta; \quad y = r \cdot \sin \theta.$$

Выполняя преобразование по правилам дифференциального исчисления, мы получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} - \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin \theta \cdot \cos \theta + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Пользуясь этими уравнениями, мы легко найдем, что:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2};$$

поэтому уравнение (VIII) можем символически написать:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (VIII_n)$$

Теперь, пользуясь функцией напряжений, мы можем при помощи уравнений (243) получить значения напряжений:

$$R_r, \theta_\theta \text{ и } R_\theta = \theta_r.$$

Действительно, направляя ось X вдоль оси R , а ось Y вдоль оси θ , будем иметь;

$$\left. \begin{aligned} R_r &= (X_x)_{\theta=0}; & R_\theta &= (X_\theta)_{\theta=0} \\ \theta_\theta &= (Y_\theta)_{\theta=0} \end{aligned} \right\} \quad (244)$$

Пользуясь функцией напряжений, мы нашли:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ Y_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ X_\theta &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (245)$$

Фиг. 66.

Поэтому, на основании уравнений (244), (245) и (243) получаем:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \theta_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ R_\theta = \theta_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \cdot \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (VII_n)$$

Предлагаем читателю для упражнения проверить, удовлетворяют ли эти напряжения условиям равновесия (I_{nn}).

Закон Гука (V) для случая плоской задачи в полярных координатах сохраняет прежний вид, лишь меняются обозначения напряжений:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E} [R_r - \sigma(\theta_\theta + Z_\theta)] \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\theta_\theta - \sigma(Z_r + R_r)] \\ e_{r\theta} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} R_\theta \end{aligned} \right\} \quad (VII n)$$

Задачи, в которых напряжения не зависят от полярного угла

§ 64. Применим выведенные ур-ния к решению некоторых задач. Наиболее просто задача решается в тех случаях, когда напряжения (VII n) не зависят от угла θ , т. е. когда во всех точках любой окружности с центром в полюсе O , R_r , θ_θ и R_θ одинаковы. С таким случаем мы встречаемся при рассмотрении круглой пластинки или круглого кольца под действием симметричной нагрузки.

Функцию напряжений φ , очевидно, можем взять в этом случае независимой от θ ; тогда ур-ние (VII n) упрощается:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получим:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad (VIII n')$$

выражения напряжений (VII n) переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \theta_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ R_\theta &= \theta_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad (VII n')$$

Ур-ние (VIII n') можно привести к линейному однородному ур-нию с постоянными коэффициентами путем подстановки $r = e^t$ или $t = \ln r$; поэтому оно легко интегрируется¹; общий его интеграл имеет вид:

$$\varphi(r) = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (246)$$

¹ Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Таким же путем получим далее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} - 3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} &= \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - 6 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + 11 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 6 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Подставляя все это в ур-ние (VIII n'), приведем его к виду:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - 4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (a)$$

Отсюда по (VII α) находим напряжения:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C \\ \theta_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C \\ R_\theta &= \theta_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

Задача Ламе

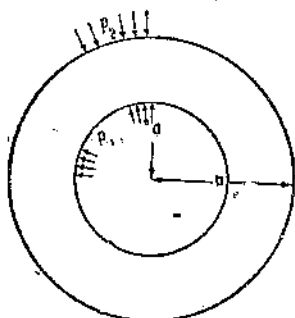
§ 65. Воспользуемся ур-ниями (247) для решения задачи Ламе о равномерном внешнем и внутреннем сжатии круглой трубы. Пусть внешнее давление равно p_2 , а внутреннее — p_1 .

Тогда мы, очевидно, получаем следующие условия на поверхности (фиг. 67):

$$\left. \begin{aligned} \text{При } r=a \quad R_r &= -p_1 \text{ или } R_r = -p_1 \\ \text{„ } r=b \quad R_r &= -p_2 \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

Для получения решения Ламе в этих условиях произвольную постоянную B положим равной нулю; тогда ур-ния (247) дают:

$$R_r = \frac{A}{r^2} + 2C; \quad \theta_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C.$$



Фиг. 67.

Постоянные A и C легко найти из условий (248); выполнив это, получим:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} \\ \theta_\theta &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

При решении этой задачи мы сделали допущение, положив заранее:

$$B=0;$$

имея три произвольных постоянных

$$A, B \text{ и } C$$

и два условия (248), мы могли бы решить задачу и при других допущениях; однако можно доказать, что действительному распределению напряжений соответствует решение Ламе (249). Особенность этой задачи заключается в том, что мы здесь встречаемся с двухсвязным контуром, так как сечение трубы ограничено двумя кривыми, не пересекающимися между собою; при наличии двухсвязного или многосвязного контура решение задачи, вообще говоря, осложняется и возможна многозначность

Характеристическое ур-ние:

$$k^4 - 4k^2 + 4k^2 = k^2 k - 2^2 = 0;$$

его двум (двукратным) корням $k=0$ и $k=2$ соответствуют 4 частных интеграла ур-ния (а):

$$e^{0t} = 1; \quad t e^{0t} = t; \quad e^{2t}; \quad t e^{2t}.$$

Поэтому общий интеграл ур-ния (а) будет:

$$\varphi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t};$$

отсюда надо подставить

$$t = \ln r.$$

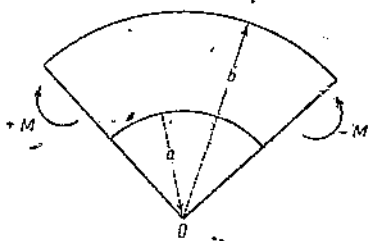
решения; в данной задаче это затруднение можно обойти, выбрав за неизвестные перемещения; такой метод решения задачи Ламе приводится в курсах сопротивления материалов.

Чистый изгиб части круглого кольца

§ 66. Рассмотрим часть круглого кольца, изгибаемую силами, приложенными к конечным сечениям и приводящимися к парам (фиг. 68). Условия на поверхности выразятся так:

$$\begin{aligned} \text{При } r=a \quad R_r &= 0 \\ \text{„ } r=b \quad R_r &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_a^b \theta_0 dr = 0; \quad \int_a^b \theta_0 r dr = M.$$



Фиг. 68.

Раскрывая эти условия, получим:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a^2} + 2B \ln a + B + 2C &= 0; \quad \frac{A}{b^2} + 2B \ln b + B + 2C = 0; \\ b \left(\frac{A}{b^2} + 2B \ln b + B + 2C \right) - a \left(\frac{A}{a^2} + 2B \ln a + B + 2C \right) &= 0; \\ -A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + (B + C)(b^2 - a^2) &= M. \end{aligned}$$

Мы получили 4 ур-ния для определения трех постоянных A , B и C ; однако замечаем, что третье ур-ние является следствием первых двух. Решая эти ур-ния, найдем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}; \quad B = \frac{2M}{N} (b^2 - a^2); \\ C &= -\frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)], \end{aligned}$$

где

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Внося эти значения в ур-ния (247), получаем такие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} \right) \\ \theta_0 &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 + b^2 \right) \\ \theta_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Сравнивая результат вычисления напряжения θ_0 по формулам (250) с тем, что дает элементарная теория бруса большой кривизны (гипотеза плоских сечений), можно убедиться в том, что получаемая разницa невелика; ее следует отнести за счет того, что элементарная теория не учитывает напряжений R_r , обуславливаемых нажимом отдельных криволинейных продольных волокон друг на друга; эти напряжения создают дополнительную деформацию бруса¹.

¹ Читатель заметит, что в аналогичном случае чистого изгиба прямого бруска напряжения Y_r , соответствующие напряжениям R_r данного случая, отсутствовали (формула 194, § 53); следовательно в прямом бруске при чистом изгибе нет взаимного нажима отдельных волокон.

Рассмотрим еще в данной задаче изменение центрального угла $d\theta$ бесконечно-малого элемента $abcd$ (фиг. 69). Так как в данном случае сдвиги отсутствуют ($\Theta_r = 0$), то изменение угла $\delta(d\theta)$ зависит от двух удлинений:

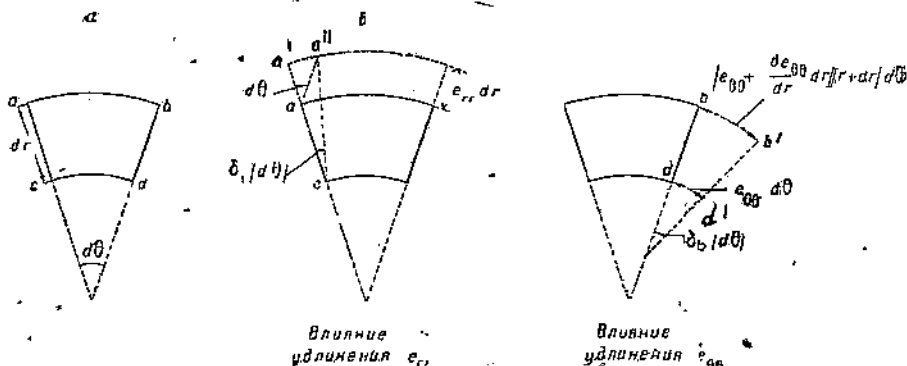
$$e_{rr} \text{ и } e_{\theta\theta}.$$

Фиг. 69 б и в ясно показывают влияние обоих этих факторов; из них получаем: влияние радиального удлинения e_{rr} (фиг. 69 б):

$$\delta_1(d\theta) = -\frac{a'a''}{ca'} = -\frac{e_{rr} dr d\theta}{dr + e_{rr} dr} \approx -e_{rr} d\theta;$$

влияние осевого удлинения $e_{\theta\theta}$ (фиг. 69 в)

$$\delta_2(d\theta) = \frac{bb' - dd'}{bd};$$



Фиг. 69.

но

$$bb' - dd' = \left(e_{\theta\theta} + \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - e_{\theta\theta} r d\theta \approx e_{\theta\theta} dr d\theta + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} dr d\theta;$$

$$bd = dr;$$

поэтому

$$\delta_2(d\theta) \approx \left(e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} \right) d\theta.$$

Значит, полное изменение угла $d\theta$ будет:

$$\delta(d\theta) = \delta_1(d\theta) + \delta_2(d\theta) = \left(e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - e_{rr} \right) d\theta;$$

относительное изменение:

$$e_\theta = \frac{\delta(d\theta)}{d\theta} = e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - e_{rr}.$$

Если сюда, вместо деформаций, подставим их выражения через напряжения из (Viii) § 63 и воспользуемся ур-ниями (250), то легко убедимся, что e_θ не зависит от радиуса r . Это, очевидно, покажет, что плоские поперечные сечения, в случае чистого изгиба, остаются плоскими; этим подтверждается гипотеза плоских сечений, принимаемая обычно в элементарной теории кривого бруска.

Действие сосредоточенной силы

§ 67. Рассмотрим (фиг. 70) однородную упругую среду, ограниченную плоскостью AB и распространяющуюся беспредельно вниз от этой плоскости. Пусть в точке O среды приложена сила P ; в отношении проти-

жения среды нормально к плоскости чертежа, как и всегда в плоской задаче, могут быть два случая: или это протяжение весьма мало (обобщенное плоское напряженное состояние), или оно беспречно (плоская деформация); в последнем случае силу P придется предполагать не сосредоточенной, но равномерно распределенной по прямой, нормальной к плоскости чертежа и проходящей через точку C .

Очевидно, что вблизи точки O напряжения будут весьма велики и превзойдут предел упругости; поэтому мы будем рассматривать лишь точки, расположенные вне небольшой области, ограниченной кругом mn радиуса ρ ; ввиду этого, пользуясь принципом Сен-Венана, груз P заменим нагрузкой, распределенной по полуокружности mn и эквивалентной грузу P ; это мало отразится на напряжениях в точках, удаленных от круга mn .

Попробуем удовлетворить условиям задачи такими простыми предположениями:

1) в любой точке M по площадке, нормальной к радиусу $CM=r$, нет касательных напряжений;

2) сжимающее нормальное напряжение R_r по этой площадке обратно пропорционально радиусу r и прямо пропорционально $\cos \theta$;

3) нормальные напряжения θ_θ по площадкам радиального направления отсутствуют.

Сделанные предположения приводят к такой системе напряжений:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -k \frac{\cos \theta}{r} \\ \theta_\theta &= 0 \\ R_\theta &= \theta_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Эти напряжения удовлетворяют условиям задачи на поверхности AB ; действительно, ограничивающая плоскость AB ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$) свободна от напряжений, кроме точки C , где R_r принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$; однако точку C и даже малый отрезок mn мы исключили из нашего анализа. Далее, коэффициент k в ур-нии (251) легко подобрать так, чтобы нормальные напряжения R_r по полуокружности mn были эквивалентны заданному грузу P , т. е. чтобы сумма проекций усилий

$$R_r \rho d\theta$$

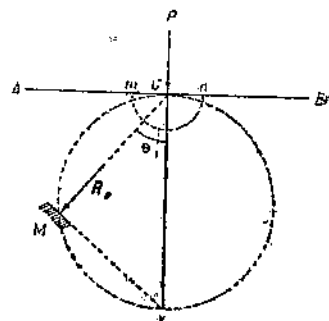
по полуокружности $r=\rho$ на ось OX была равна P :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R_r \rho \cos \theta d\theta = P. \quad (252)$$

Подставляя сюда значение R_r из (251) и выполняя интегрирование, легко получим:

$$k = \frac{2P}{\pi}. \quad (252')$$

Теперь нам остается установить, удовлетворяют ли напряжения (251) ур-ниям теории упругости, т. е. возможны ли они в однородной упругой



Фиг. 70.

среде. Для этого, во-первых, постараемся для напряжений (251) подобрать функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$, а во-вторых, убедимся, удовлетворит ли эта функция основному ур-нию (VIII_n)¹.

Для подыскания функции напряжения воспользуемся ур-ниями (VII_n); подставляя в них напряжения (251), получим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -k \frac{\cos \theta}{r}, \quad (253)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0. \quad (254)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (255)$$

Последнее ур-ние дает:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \psi(\theta) \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = r\psi(\theta), \quad (256)$$

где $\psi(\theta)$ пока произвольная функция.

Из ур-ния (254) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \omega(\theta), \quad (257)$$

где ω — новая произвольная функция.

Ур-ния (256), (257) позволяют установить связь между функциями ψ и ω :

$$\frac{\partial}{\partial r} [r\psi(\theta)] = \frac{\partial}{\partial \theta} \omega(\theta),$$

или

$$\psi(\theta) = \omega'(\theta). \quad (258)$$

Далее из ур-ния (256) имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = r\psi'(\theta),$$

а на основании ур-ния (258) получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = r\omega''(\theta). \quad (259)$$

Подставляя значения из ур-ний (257) и (259) в ур-ние (253), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\omega + \omega'' = -k \cos \theta^2. \quad (260)$$

Общий его интеграл составит из общего интеграла ур-ния без последнего члена:

$$\omega'' + \omega = 0$$

и частного интеграла ур-ния (260). Общий интеграл ур-ния (260'), как известно, будет:

$$\omega = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (261)$$

¹ Если существует функция напряжений, то, значит, удовлетворены условия равновесия (III) (§ 61) (ср. § 51); ур-ние же (VIII_n) обеспечит неразрывность деформаций.

² Наши выкладки имели целью исключить из ур-ния (253) — (257) переменную r ; предлагаем читателю для упражнения сделать это иначе: умножить ур-ние (253) на r и продифференцировать по r ; далее сюда вместо $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$ подставить его выражение из ур-ния (254).

Частный интеграл ур-ния (260) можно получить в форме (261), почитая A и B функциями от θ , он имеет вид:

$$\omega = -\frac{k}{2} \theta \sin \theta.$$

Поэтому общий интеграл ур-ния (260) будет:

$$\omega = -\frac{k}{2} \theta \sin \theta + A \cos \theta + B \sin \theta.$$

Внося это в ур-ние (257) и интегрируя, получим:

$$\varphi = -\frac{k}{2} r \theta \sin \theta + Ar \cos \theta + Br \sin \theta + f(\theta).$$

Ограничиваясь первым членом этого выражения, получим нужную нам функцию напряжений:

$$\varphi = -\frac{k}{2} r \theta \sin \theta. \quad (262)$$

Предлагаем самому читателю убедиться в том, что функция (262) удовлетворяет ур-ниям (253), (254), (255), а также ур-нию неразрывности (VIII) (§ 63).

§ 68. Мы доказали, что напряжения (251) удовлетворяют всем ур-ниям теории упругости; на основании ур-ния (252') они напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \\ \theta_r &= 0 \\ R_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

Исследуя их, придем к следующим выводам:

- 1) площадь в любой точке M (фиг. 70), нормальная к радиусу r , является главной (§ 5), так как по ней нет касательных напряжений;
- 2) построим окружность CMX (фиг. 70), проходящую через данную точку M , и пусть диаметр ее $CX = d$; тогда

$$CM = CX \cos \theta;$$

Дифференцируя ур-ние (261) в этом предположении, получим:

$$\omega' = -A \sin \theta + B \cos \theta + A' \cos \theta + B' \sin \theta.$$

Подберем A и B на условия

$$A' \cos \theta + B' \sin \theta = 0; \quad (a)$$

тогда

$$\omega' = -A \sin \theta + B \cos \theta \quad (b)$$

и далее

$$\omega'' = -A \cos \theta - B \sin \theta - A' \sin \theta + B' \cos \theta. \quad (b')$$

Подставим значения из ур-ний (261) и (b) в ур-ние (260); присоединяя сюда ур-ние (a) найдем 2 условия для определения A' и B' :

$$\text{Отсюда} \quad A' \sin \theta - B' \cos \theta = k \cos \theta; \quad A' \cos \theta + B' \sin \theta = 0.$$

$$A' = k \sin \theta \cos \theta; \quad B' = -k \cos^2 \theta.$$

Интегрируя эти ур-ния, получим:

$$A = \frac{k}{2} \sin \theta; \quad B = -\frac{k}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta);$$

внося это в ур-ние (261), найдем:

$$\omega = -\frac{k}{2} \theta \sin \theta.$$

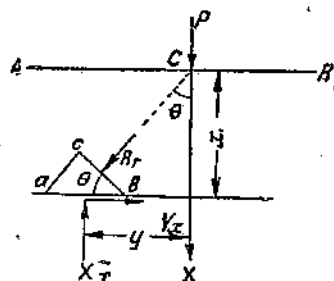
Но

$$CM=r; \quad CX=d;$$

поэтому:

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d};$$

подставляя это (263), найдем:



Фиг. 71.

$$R_r = \frac{2P}{\pi d} = \text{const.} \quad (264)$$

Значит, во всех точках построенной окружности напряжение R_r одинаково. Отсюда — всякая окружность с центром под грузом P и проходящая через точку его приложения O — есть траектория равных напряжений R_r .

Найдем теперь напряжения в пластинке по горизонтальной площадке на расстоянии x от поверхности. Из условий равновесия элементарной призмы abc (§ 4), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= R_r \cos^2 \theta \\ Y_x &= R_r \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

Внося сюда значение R_r из (263) и принимая во внимание, что

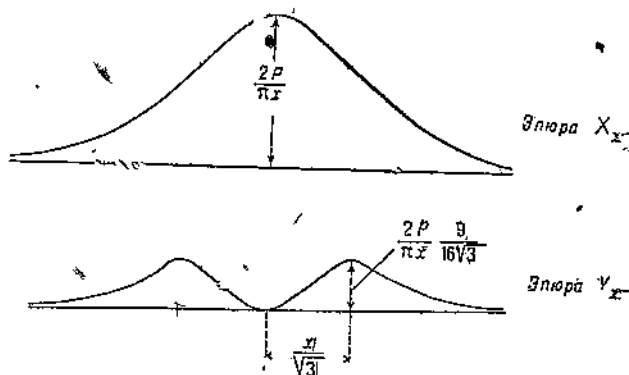
$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (266)$$

будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ Y_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (267)$$

На фиг. 72 показан вид эюр этих напряжений. В практических расчетах принято действие груза P на заданной глубине x распределять под некоторым углом; в условиях данной задачи имеем:

$$\max X_x = -\frac{P}{\pi x} = -\frac{P}{1,57x}.$$



Фиг. 72.

Значит, для расчета можно принять, что груз P распределяется на площадку длиной около $1,6x$, что соответствует углу $\theta \approx 38^\circ$ (фиг. 73).

Сплошная нагрузка

§ 69. Если имеется несколько грузов, приложенных в различных точках прямой AB (фиг. 71), то мы без труда найдем напряжения (265) в любой

¹ Напоминаем, что при этом исключаются точки внутри полуокружности mn .

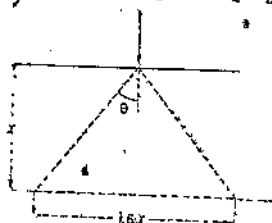
точке, суммируя действия отдельных грузов. Далее задачу легко распространить на случай любой сплошной нагрузки (фиг. 74).

Если интенсивность нагрузки в данной точке равна p , то нагрузка, приходящаяся на бесконечно-малый элемент dy прямой AB , будет $p dy$. Но из чертежа видим, что

$$dy = \frac{rd\theta}{\cos \theta}$$

и элементарная нагрузка равна

$$\frac{pr d\theta}{\cos \theta} \quad (268)$$



Фиг. 73.

Эту величину вносим вместо груза в первое из ур-ний (263) и получаем:

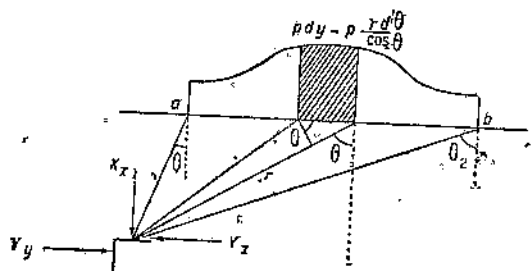
$$R_x = -\frac{2p}{\pi} d\theta.$$

Подставляя это значение R_x в ур-ния (265), получим напряжения, вызываемые одним элементом нагрузки (268):

$$X_x = -\frac{2p}{\pi} \cos^2 \theta d\theta; \quad X_y = -\frac{2p}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

и аналогично:

$$Y_y = -\frac{2p}{\pi} \sin^2 \theta d\theta.$$



Фиг. 74.

Значение угла θ ясно из чертежа (фиг. 74). Если нагрузка распространяется от точки a ($\theta = \theta_1$) до b ($\theta = \theta_2$), то, суммируя напряжения от отдельных элементов ее, получим окончательные выражения напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cos^2 \theta d\theta \\ X_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin^2 \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (269)$$

Здесь нагрузку p следует предварительно выразить в функции угла θ . Если нагрузка равномерная, то p постоянно; вынося его за знаки интегралов в ур-ниях (269), можем последние легко взять, и получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2p}{\pi} [2\theta + \sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ X_y &= -\frac{2p}{\pi} [2\theta - \sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ X_y &= Y_x = -\frac{2p}{\pi} \cos 2\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

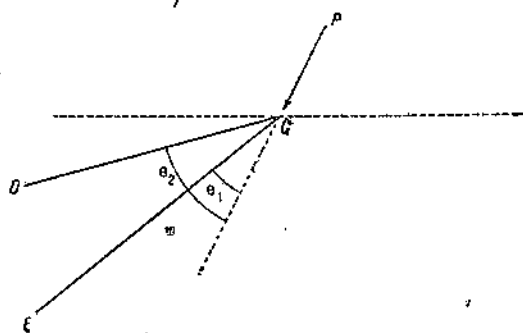
Эти формулы можно преобразовать к декартовым координатам x и y , приняв во внимание ур-ние (266) и добавив к ним

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Задачи о напряжениях в среде, ограниченной плоскостью, в настоящее время приобретают значение в теории оснований и фундаментов для тех видов грунта, которые при не очень больших давлениях сохраняют свойства, близкие к свойствам однородного упругого тела.

Обобщение задачи (§ 67)

§ 70. Решение (263) непосредственно пригодно для случая, когда груз P (фиг. 70) приложен не нормально к плоскости AB , а под любым углом; следует лишь помнить, что полярный угол θ всегда отсчитывается от направления груза P . Следовательно, это решение можно применить к случаю груза, приложенного по направлению AB ; аналогично предыдущему решению (§ 69) можно решить задачу о сплошной тангенциальной нагрузке по плоскости AB . Комбинируя случаи нормальной и тангенциальной нагрузок, можем решать задачу о любой наклонной сплошной нагрузке¹.



Фиг. 75.

Возвращаясь к решению (251), мы можем использовать его для более общего случая, когда груз P приложен к среде, ограниченной двумя плоскостями CD и CE (фиг. 75), т. е. к клину; угол θ , как и всегда, отсчитывается от направления груза.

Постоянную k найдем так же, как и в § 67, но интеграл в формуле (252) придется брать в пределах, соответствующих заданному клину; в результате решения получаем:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} R_{-r} \rho d\theta = k \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta = P.$$

Отсюда

$$k = \frac{P}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta} = \frac{4P}{(2\theta + \sin 2\theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}}. \quad (271)$$

В качестве примеров возьмем два случая: сжатие клина (фиг. 76, а) и изгиб клина силой, приложенной на конце (фиг. 76, б). В первом случае:

$$\theta_1 = -\alpha; \quad \theta_2 = \alpha,$$

и из ур-ния (271) имеем:

$$k = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha}.$$

¹ Следует отметить несколько иной и весьма интересный способ решения подобных задач, найденный проф. Н. М. Герсевановым на основании общего интеграла ур-ний плоской задачи (Iⁿ) и IV₂ 343), выраженного им в функциях комплексной переменной (см. „Труды МИИТ“, Москва 1932).

Это значение k надо внести в ур-ние (251).

Аналогично ур-нию (265) можно найти напряжения по сечению клина mn (фиг. 76, а) на глубине x_0 ; нормальное напряжение

$$X_{x_0} = -\frac{kx_0^2}{(x_0^2 + y^2)^2} \quad (272)$$

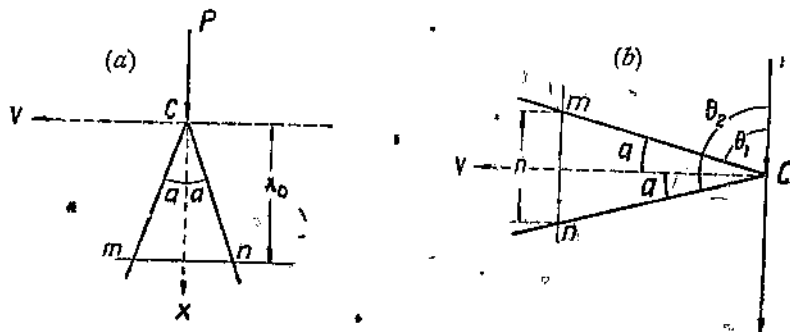
распределено по сечению весьма неравномерно.

В случае изгиба (фиг. 76, б) имеем:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

и из ур-ния (271):

$$k = \frac{2P}{2a - \sin 2\alpha}.$$



Фиг. 76 а и б.

Напряжения по поперечному сечению mn в этом случае выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} Y_u &= -\frac{2Mx \sin^4 \theta}{(2a - \sin 2\alpha) y^3} \\ X_u &= -\frac{2Px^2 \sin^4 \theta}{(2a - \sin 2\alpha) y^3} \end{aligned} \right\} \quad (273)$$

где $M = P_\eta$ — величина изгибающего момента в сечении.

Если угол клина 2α мал, то разлагая $\sin 2\alpha$ в ряд, получим приближенно:

$$2a - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}.$$

При этом, после некоторых преобразований, формулы напряжений могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} Y_u &= -\frac{Mx}{J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{a} \right)^3 \sin^4 \theta \\ X_u &= -\frac{12Px^2}{h^3} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{a} \right)^3 \sin^4 \theta \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

где h — высота сечения mn ; J — его момент инерции.

Но при малом α величина

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{a}$$

близка к единице; кроме того, так как

$$-\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

то при малом α угол θ близок всюду к $\frac{\pi}{2}$ и $\sin \theta \approx 1$.

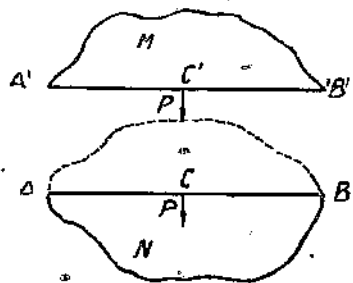
Поэтому легко усмотреть, что величина нормального напряжения Y_y в ур-ний (274) близка к тому, что нам дает элементарное решение. Распределение касательных напряжений существенно отличается от элементарного результата по формуле

$$X_y = \frac{QS}{Jb};$$

из ур-ний (274) видно, что они обращаются в нуль на оси клина (при $x=0$) и достигают наибольшей величины на краях сечения.

Сосредоточенная сила внутри неограниченной пластинки

§ 71. Возьмем теперь две пластинки M и N (фиг. 77), ограниченных каждая одной плоскостью и, приложив к ним сосредоточенные силы, как показано на фиг. 64, сложим вместе.



Фиг. 77.

Перемещения u и v по линиям AB и $A'B'$ будут одинаковы по величине и по направлению; поэтому пластинки, после сложения, плотно во всех точках примкнут одна к другой и мы получим задачу о действии сосредоточенной силы $P+P=2P$, приложенной в точке C неограниченной пластинки. От сложения полу-пластинок M и N напряжения в них конечно не изменятся по сравнению с первоначальными, значит, в каждой из них (а следовательно и во всей неограниченной пластинке) напряжения выразятся прежними формулами (263):

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \\ \theta_r &= 0 \\ R_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

В задаче § 67. полярный угол θ изменялся от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Здесь мы его можем изменять в пределах всей окружности (от 0 до 2π) и исследовать напряжения во всех точках пластинки, исключая, как и ранее, небольшую область радиуса ρ вокруг точки приложения силы $2P$, где можно ожидать перехода напряжений за предел упругости.

Сжатие круглой пластинки двумя сосредоточенными силами (задача Герца)

§ 72. Рассмотрим неограниченную среду (фиг. 78), в точках C и C' которой приложены две равных, противоположных силы $2P$. Пользуясь законом независимости действия сил, мы можем найти напряжение по любой площадке dF , суммируя действие на нее обеих сил $2P$ в точках C и C' .

Пусть $CC'=d$; построим окружность CDC' ; возьмем любую точку E на ней и выделим элементарную призму abc , образованную элементом

Дуги bc и двумя площадками ab и ac , соответственно нормальными к радиусам $CE=r$ и $C'E=r$.

На основании предыдущих решений (§§ 67 и 71) заключаем, что по площадке ab будет действовать только нормальное напряжение

$$R_r = -\frac{2P\pi}{d},$$

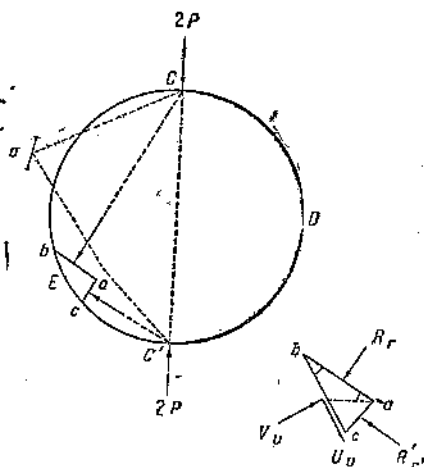
вызванное силой P в точке O ; по площадке ac будет действовать только нормальное напряжение

$$R'_r = -\frac{2P\pi}{d},$$

вызванное силой P в точке C' . На этом основании из условий равновесия призмы abc находим напряжения по площадке bc :

$$V_v = R_r \cos^2 \alpha + R'_r \sin^2 \alpha = -\frac{2P}{\pi d};$$

$$U_v = (R'_r - R_r) \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$



Фиг. 78.

Значит, по окружности CDE действуют равномерные сжимающие напряжения

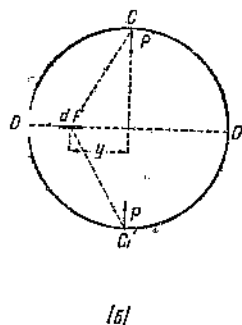
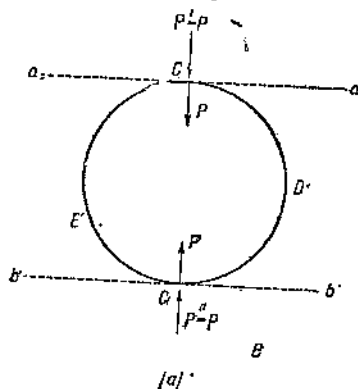
$$V_v = -\frac{2P}{\pi d}$$

и кроме того в точках C и C' приложены сосредоточенные силы, равные каждой $2P$.

Если на всю неограниченную среду наложим (в двух взаимно-перпендикулярных направлениях) равномерное растяжение с напряжением

$$+\frac{2P}{\pi d},$$

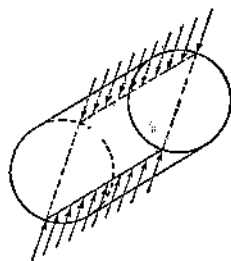
то указанное выше равномерное сжатие по окружности CDE исчезнет и она останется под действием двух равных и противоположных сил $2P$ каждая, в точках C и C' .



Фиг. 79.

Произведем теперь (фиг. 79, а) разрезы по плоскостям aa' , bb' и окружности CDE ; после этого части пластинки A , B , D' и E' отбросим; легко сообразить, что, отбрасывая часть A , мы одновременно с ней должны

удалить одну из двух сил P , приложенных в точке C^1 ; равным образом в точке C' следует одновременно с отбрасыванием части B также удалить одну из сил P . После этого мы получим круглую пластинку, сжатую двумя сосредоточенными силами P (фиг. 79, б). Это случай обобщенного плоского напряженного состояния.



Фиг. 80.

То же распределение напряжений получим и в случае длинного цилиндра (фиг. 80), сжатого силами, распределенными по двум его противоположным образующим. Напряжения по любой площадке можно найти, исходя из формул (275), сохраняющих и здесь свою силу; надо только суммировать действие сил P в точках C и C' (фиг. 79, б), и также наложенного растяжения $+\frac{2P}{\pi d}$, на эту площадку.

Легче всего это сделать для площадки dF , совпадающей с диаметром DD' . Воспользуемся первой из формул (267) (§ 68), дающей действие одной силы P' на площадку dF , положив в ней $x = \frac{d}{2}$.

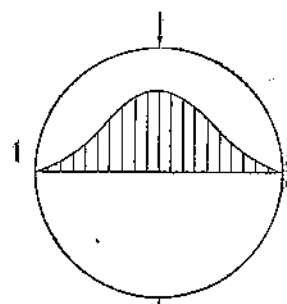
Удваивая это действие² и присоединяя растягивающее напряжение $+\frac{2P}{\pi d}$, получим:

$$X_x = \frac{2P}{\pi d} - \frac{2 \cdot 4P}{\pi} \frac{\frac{d^2}{4}}{(d^2 + 4y^2)^2} = -\frac{2P}{\pi d} \left(\frac{4d^4}{(d^2 + 4y^2)^2} - 1 \right). \quad (276)$$

Вид эпюры этих напряжений показан на фиг. 81.

На концах диаметра (при $y = \pm \frac{d}{2}$) они равны нулю; посередине

$$\max X_x = -\frac{6P}{\pi d} = -1,91 \frac{P}{d}.$$



Фиг. 81.

В заключение следует еще раз напомнить, что все это исследование не касается точек, близких к точкам приложения сил P . Если эти силы являются результатом сжатия цилиндра двумя плоскими (или кривыми) плитами в точках C и C' , то для исследования напряжений вблизи точек соприкосновения цилиндра с плитами необходимо избрать другие методы. Задача эта в весьма общей форме решена Герцем, так же как и настоящая задача.

Общее решение для задач, рассмотренных в настоящей главе

§ 73. Все рассмотренные нами случаи плоской задачи в полярных координатах обладают тем общим свойством, что в них касательные напряжения $R_\theta = 0$, равны нулю.

Рассмотрим в общем виде случай напряженного состояния, когда эти напряжения отсутствуют. Согласно (VII n) это нас приводит к ур-нию в частных производных 2-го порядка

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (277)$$

¹ Ср. фиг. 77, на которой каждая из сил P действует на свою подупластинку и не влияет на другую подупластинку.

² Так как площадка dF на одинаковых расстояниях от точек C и C' .

Интегрируется оно следующим способом. Из ур-ния (277) непосредственно имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \Psi(\theta),$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = r \Psi(\theta), \quad (278)$$

где $\Psi(\theta)$ — произвольная функция. Интегрируя ур-ние (278), получаем

$$\varphi(r, \theta) = r \int \Psi(\theta) d\theta + F(r),$$

или

$$\varphi(r, \theta) = r \Psi(\theta) + F(r), \quad (279)$$

где $\Psi(\theta)$ и $F(r)$ — произвольные функции.

Подставляя из ур-ния (279) в ур-ния (VII n), получим выражения напряжений; для этого предварительно вычисляем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \Psi(\theta) + \frac{1}{r} F'(r); \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = F''(r); \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \Psi''(\theta).$$

Ур-ния (VII n) дают:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \Psi(\theta) + \frac{1}{r} F''(r) + \frac{1}{r} \Psi''(\theta); \\ \Theta_\theta &= F''(r) \end{aligned} \right\} \quad (280)$$

Здесь следует функции $\Psi(\theta)$ и $F(r)$ подобрать так, чтобы соблюдалось условие неразрывности деформаций (VIII n).

Предварительно заметим, что так как в выражения напряжений (280) входят только производные функции $F(r)$, то удобно обозначить:

$$\frac{1}{r} F''(r) = \omega(r);$$

откуда

$$F'(r) = r\omega(r); \quad F''(r) = \omega(r) + r\omega'(r);$$

подставляя это в ур-ния (280), имеем:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} [\Psi(\theta) + \Psi''(\theta)] + \omega(r); \\ \Theta_\theta &= \omega(r) + r\omega'(r) \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

Теперь получаем:

$$\nabla^2 \varphi = R_r + \Theta_\theta = \frac{1}{r} [\Psi(\theta) + \Psi''(\theta)] + 2\omega(r) + r\omega'(r).$$

Для подстановки в ур-ние (VIII n) вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (R_r + \Theta_\theta)}{\partial r} &= -\frac{\Psi + \Psi''}{r^3} + \frac{3\omega'}{r} + \omega''; \\ \frac{\partial^2 (R_r + \Theta_\theta)}{\partial r^2} &= 2 \frac{\Psi + \Psi''}{r^3} + 4\omega'' + r\omega'''; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (R_r + \Theta_\theta)}{\partial \theta^2} &= \frac{\Psi'' + \Psi''''}{r^3}. \end{aligned}$$

и тогда ур-ние (VIII) дает:

$$\frac{\Psi + 2\P'' + \Psi^{IV}}{r^3} + \frac{3\omega'}{r} + 5\omega'' + r\omega''' = 0,$$

или

$$(\Psi + 2\P'' + \Psi^{IV}) + (3r^2\omega' + 5r^3\omega'' + r^4\omega''') = 0. \quad (282)$$

Выражение в первых скобках этого ур-ния зависит только от θ , а во вторых — только от r ; вследствие этого и благодаря независимости r и θ ур-ние (282) разбивается на два:

$$\Psi^{IV} + 2\P'' + \Psi = A, \quad (283)$$

$$r^4\omega''' + 5r^3\omega'' + 3r^2\omega' = -A, \quad (284)$$

где A — произвольная постоянная.

Ур-ние (283) интегрируется без труда. Находим сначала общий интеграл соответственного ур-ния без последнего члена; имеем характеристическое ур-ние:

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0, \text{ или } (k^2 + 1)^2 = 0;$$

его корни

$$k_1 = +i; \quad k_2 = +i; \quad k_3 = -i; \quad k_4 = -i$$

дают 4 частных интеграла:

$$\cos \theta; \quad \sin \theta; \quad \theta \cos \theta; \quad \theta \sin \theta.$$

Поэтому общий интеграл его:

$$\Psi = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + C_3 \theta \cos \theta + C_4 \theta \sin \theta.$$

Сюда надо добавить еще частный интеграл полного ур-ния (283); его очевидно можно взять в форме $\Psi = A$, и тогда общий интеграл ур-ния (283) будет

$$\Psi = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + C_3 \theta \cos \theta + C_4 \theta \sin \theta + A. \quad (285)$$

Для интегрирования ур-ния (284) введем вместо r новую переменную t по формуле $r = e^t$ или $t = \ln r$.

Тогда

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2\omega}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\omega}{dt^2} - \frac{d\omega}{dt} \right),$$

таким же путем получим далее:

$$\frac{d^3\omega}{dr^3} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3\omega}{dt^3} - 3 \frac{d^2\omega}{dt^2} + 2 \frac{d\omega}{dt} \right).$$

Подставляя это в ур-ние (284) и помня, что $r = e^t$, найдем:

$$r \left(\frac{d^3\omega}{dt^3} + 2 \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) = -A,$$

или

$$\frac{d^3\omega}{dt^3} + 2 \frac{d^2\omega}{dt^2} = -Ae^{-t}. \quad (286)$$

Получилось линейное ур-ние с постоянными коэффициентами; для соответствующего ур-ния без последнего члена получаем характеристическое ур-ние:

$$k^3 + 2k^2 = 0,$$

или

его трем корням

$$k^2(k+2)=0;$$

$$k=0; \quad k=0; \quad k=-2$$

соответствуют 3 частных интеграла:

$$e^{0 \cdot t} = 1; \quad te^{0 \cdot t} = t; \quad e^{-2t}.$$

Отсюда общий интеграл его:

$$\omega = D_1 e^{-2t} + D_2 t + D_3 = D_1 \frac{1}{r^2} + D_2 \ln r + D_3. \quad (287)$$

Разыскание частного интеграла полного ур-ния (286) выполним способом варьирования постоянных в интеграле (287), т. е. будем считать D_1 , D_2 и D_3 функциями от t ; интеграл этот имеет вид:

$$\omega = -Ae^{-t} = -\frac{A}{r}, \quad (288)$$

в чем можно убедиться, подставляя его в ур-ние (286).

Полный интеграл ур-ния (286) составит из (287) и (288):

$$\omega = -\frac{A}{r} + \frac{D_1}{r^2} + D_2 \ln r + D_3. \quad (289)$$

Подставляя теперь из (285) и (289) в (281), получим окончательные выражения напряжений. Имеем:

$$\Psi + \Psi'' = -2C_3 \sin \theta + 2C_4 \cos \theta + A,$$

и ур-ния (281) дают:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -\frac{2C_3 \sin \theta}{r} + \frac{2C_4 \cos \theta}{r} + \frac{D_1}{r^2} + D_2 \ln r + D_3 \\ \theta_0 &= -\frac{D_1}{r^2} + D_2 \ln r + D_3 + D_2 \end{aligned} \right\} \quad (290)$$

Ур-ния (290) дают самое общее решение плоской задачи при условии, что касательные напряжения:

$$R_\theta = \theta_r$$

отсутствуют.

Читатель может заметить, что все отдельные слагаемые выражений (290) уже были нами использованы в настоящей главе. Действительно, полагая

$$C_3 = C_4 = 0,$$

мы будем иметь напряжения, не зависящие от полярного угла θ и совпадающие с напряжениями (247). Приняв же

$$C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$

получим напряжения (251).

Случай

$$C_4 = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

дает

$$R_r = -\frac{2C_3 \sin \theta}{r}; \quad \theta_0 = R_\theta = 0;$$

это решение непосредственно перейдет в (251), если введем новую переменную θ_1 по формуле

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1,$$

т. е. повернем полярную ось на 90° .

ГЛАВА IX

Общее решение задачи теории упругости в напряжениях

§ 74. Ранее указывалось (§§ 18 и 35), что если мы за основные неизвестные выбираем напряжения, то число этих неизвестных будет равно шести:

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_y, X_y \quad (291)$$

Вследствие этого трех условий равновесия (I)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

оказывается недостаточно, и для решения задачи придется привлечь также условия неразрывности деформаций (IV). Кроме того, конечно, на поверхности должны удовлетворяться условия (II):

$$\begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ), \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ), \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned}$$

Таким образом задача приведет к интегрированию 9 уравнений (I) и (IV) с шестью неизвестными функциями.

Входящие в общее решение этих уравнений произвольные функции надо будет определять из условий на поверхности (II).

Так как условия неразрывности (IV) связывают между собой деформации:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$$

нам придется эти условия преобразовать, выразив деформации через напряжения (291) при помощи закона Гука (V). Выполняя эту подстановку и пользуясь одновременно уравнениями равновесия (I), мы уравнения (IV) преобразуем к следующему виду, при отсутствии объемных сил или если эти силы постоянны¹.

¹ Вывод этот здесь опущен; найти его можно в курсе „Теории упругости“ О. П. Тимошенко, ч. I. Соответствующие ему выкладки совершенно аналогичны приведенным ранее (§ 49) для плоской задачи.

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma) \nabla^2 X_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0 \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0 \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \cdot \partial z} &= 0 \\ (1 + \sigma) \nabla^2 \dot{Z}_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \cdot \partial z} &= 0 \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \cdot \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (IX)$$

Таким образом для решения задачи придется проинтегрировать 9 ур-ний (I) и (IX) и удовлетворить условиям на поверхности (II).

Бельтрами нашел ур-ния (IX) несколько иным путем, исходя из ур-ний Ламе (VI). При этом ход рассуждений получается следующий.

Предполагаем, как и выше, что объемных сил нет или они постоянны во всех точках тела, т. е. что

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = \dots = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (a)$$

Прежде всего доказываем вспомогательное положение о том, что знаки Лапласова оператора и частной производной можно переставлять между собою; например:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Таким образом, если через t обозначим любую из переменных x, y, z ,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 f) = \nabla^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (b)$$

Далее доказываем, что при условиях (a) объемная деформация θ удовлетворяет ур-нию Лапласа

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (c)$$

Для этого дифференцируем первое из ур-ний (VI) по x , второе по y и третье по z ; складывая полученные результаты и пользуясь (a) и (b), получим:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = 0,$$

откуда и приходим к уравнению (c).

Теперь из ур-ний Ламе (VI) путем дифференцирования мы выведем 6 дифференциальных зависимостей между деформациями.

Дифференцируя по x первое из ур-ний (VI) и пользуясь ур-ниями (a) и (b), получаем:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \nabla^2 e_{xx} = 0. \quad (d_1)$$

Отсюда круговой подстановкой получим еще две аналогичные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \mu \nabla^2 e_{yy} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 e_{zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d_2)$$

Дифференцируем теперь второе из ур-ний (VI) по z , а третье по y и, складывая результаты, получим:

$$2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0,$$

или

$$2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \mu \nabla^2 e_{xy} = 0. \quad (c_1)$$

Круговая подстановка дает еще две зависимости:

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} + \mu \nabla^2 e_{zx} &= 0 \\ 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \mu \nabla^2 e_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Шесть ур-ний (d) и (e), связывающие вторые производные деформаций, в нашем случае (когда объемных сил нет или они постоянны) эквивалентны шести уравнениям С.-Венана (IV) и могут их заменить. Теперь остается ур-ния (d) и (e) преобразовать к напряжениям на основании закона Гука (V') и (Va').

Из (Va') имеем

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Theta. \quad (f)$$

Из (V')

$$e_{xx} = \frac{X_x - \lambda \theta}{2\mu}$$

и далее, пользуясь (c):

$$\nabla^2 e_{xx} = -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 X_x. \quad (g)$$

Подставляя из (f) и (g) в (d₁), найдем, что

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \nabla^2 X_x = 0. \quad (h)$$

Но на основании (51) § 17

$$1 + \sigma = 1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}. \quad (i)$$

Имея это в виду, заметим, что (h) совпадает с первым из ур-ний (IX). Второе и третье из ур-ний (IX) получим отсюда круговой подстановкой.

Обращаемся к ур-ниям (e): так как согласно (V')

$$e_{yz} = \frac{1}{\mu} Y_z,$$

то, подставляя отсюда и из (f) в (e), получим:

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \nabla^2 Y_z = 0,$$

что на основании (I) совпадает с четвертым из ур-ний (IX); остальные два получим отсюда путем круговой подстановки.

Мичелли вывел ур-ния (IX) для общего случая, когда объемные силы не постоянны. Тогда зависимости получаются сложнее, и например первое из ур-ний (IX) заменяется таким:

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2\rho \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Кручение

§ 75. Применим предыдущие рассуждения к задаче о кручении призматического бруска, уже рассмотренной нами ранее (глава V). Пойдем здесь также полуобратным методом и исходя из тех же предпосылок, как и в гл. V, т. е. предположим, что всюду

$$X_x = Y_y = Z_z = 0; \quad (292)$$

$$X_y = Y_x = 0; \quad (293)$$

отличными же от нуля предполагаем только касательные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= Z_x \\ Y_z &= Z_y \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

и предположим что они одинаковы во всех сечениях, т. е. не зависят от z :

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0. \quad (295)$$

Попробуем при этих условиях удовлетворить основным ур-ниям (I) и (IX), а также условиям на поверхности (II). Будем предполагать, как и ранее, что объемные силы отсутствуют:

$$X = Y = Z = 0.$$

Легко видеть, что первые два из ур-ний (I) обращаются в тождества, третье же получит вид:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = 0. \quad (296)$$

Обращаясь к ур-ниям (IX), заметим, что при наших предположениях

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z = 0;$$

отсюда легко видеть, что из ур-ний (IX) сохраняются только ур-ния 4-е и 5-е, и они получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 Y_z &= 0 \\ \nabla^2 Z_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

Условия на боковой поверхности призмы (II) приведутся к одному, имея в виду, что здесь $\cos(VZ) = 0$:

$$Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) = 0. \quad (298)$$

Таким образом задача сводится к интегрированию трех ур-ний (296), (297) и удовлетворению условиям на поверхности (298). Решение упрощается и приобретает изящный вид, если мы, как и в плоской задаче, воспользуемся функцией напряжений: $\varphi(x, y)$.

Принимаем ее зависящей только от двух координат x, y , ибо иско-
мые неизвестные Z_x и Z_y не зависят от координаты z .

Как и в плоской задаче функцию φ подберем так, чтобы удовлетво-
рялось условие равновесия (296). С этой целью зададим напряжения Z_x и
 Z_y следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Z_x &= X_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z_y &= Y_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (299)$$

Легко убедиться, что при таких напряжениях ур-ние (296) будет тож-
дественно удовлетворено.

Займемся преобразованием ур-ний (297).

Внося в них значения напряжений (299), получим:

$$\nabla^2 Y_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \cdot \partial y^2} = 0;$$

$$\nabla^2 Z_x = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \cdot \partial x^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 0;$$

или иначе:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Отсюда делаем вывод, что Лапласов оператор функции φ остается по-
стоянным во всех точках бруска, т. е. ур-ния (297) с помощью функции
напряжений приводятся к одному ур-нию:

$$\nabla^2 \varphi = C. \quad (300)$$

Обратимся теперь к условию на поверхно-
сти (298).

Из чертежа (фиг. 82, б) видно, что

$$\left. \begin{aligned} \cos(VX) &= \sin \alpha = \frac{dy}{ds} \\ \cos(VY) &= \cos \alpha = -\frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

Подставляя отсюда и из ур-ний (299) в
условие на боковой поверхности (298), получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = 0;$$

или проще:

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (302)$$

Отсюда заключаем, что функция φ сохраняет постоянное значение на
всем контуре сечения.

Таким образом для решения задачи о кручении следует найти функ-
цию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую ур-нию (300) на всей площади поперечного

сечения и сохраняющую постоянное значение на контуре этого сечения. Очевидно, что это постоянное значение можем принять равным нулю, так как это не отразится на величине напряжений (299).

Остается теперь раскрыть значение постоянной C в ур-нии (300). Для этой цели свяжем постоянную C с углом закручивания τ .

Так как по предположению $X_y = 0$, то из закона Гука (V) заключаем, что:

$$-\frac{X_y}{G} = e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (302)$$

Следовательно, в плоскости поперечного сечения бруска OXY смещения отсутствуют, и всякая фигура на поперечном сечении не изменяет своей формы при кручении. Всякий отрезок dx или dy на поперечном сечении будет лишь поворачиваться на один и тот же угол:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \alpha.$$

Полученная величина выражает, очевидно, абсолютный угол закручивания стержня. Относительный угол закручивания на единицу длины будет равен:

$$\tau = \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (304)$$

На основании ур-ний (III) и (V) мы получим:

$$Z_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

$$Z_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

отсюда имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \right).$$

Складывая эти равенства почленно, имеем:

$$\nabla^2 \varphi = -G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

На основании ур-ния (304) последнее ур-ние получает вид:

$$\nabla^2 \varphi = -2G \cdot \tau. \quad (305)$$

Ур-ние (305) раскрывает нам значение постоянной C в ур-нии (300) и выражает его через неизвестный пока угол закручивания τ .

Мы до сих пор не касались условий на крайних сечениях призмы, где действуют крутящие моменты M .

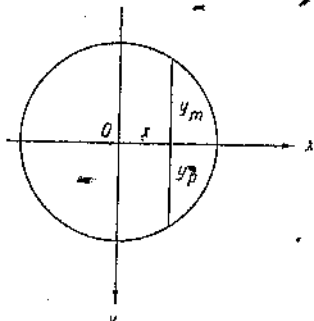
Эти условия требуют, чтобы напряжения X_z и Y_z в поперечных сечениях приводились к паре сил с заданным моментом M . Мы их напишем, очевидно, следующим образом:

$$\iint X_z \cdot dy dx = 0; \quad \iint Y_z \cdot dy dx = 0;$$

$$\iint (Y_z \cdot x - X_z \cdot y) dx \cdot dy = M.$$

Выражая эти условия через функцию напряжений φ , легко убедимся, что первые два из них будут тождественно удовлетворены. Действительно, например первое условие дает (фиг. 83):

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \cdot dy = \int_{y_m}^{y_p} dx \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int dx [\varphi(y_p) - \varphi(y_m)] = 0,$$



Фиг. 83.

так как $\varphi(x, y)$ на контуре сечения равна нулю.

Подставляя значения напряжений (299) в третье условие и применяя интегрирование по частям, мы найдем, что

$$2 \iint \varphi(x, y) dx dy = M. \quad (306)$$

Решение задачи окончательно представляется в следующей форме: найдем такое решение $\varphi(x, y)$ уравнения (305), которое остается постоянным на контуре заданного поперечного сечения; тогда по формулам (299) найдем касательные напряжения. Найденное решение $\varphi(x, y)$, очевидно, выразится через угол закручивания τ . Подставляя это значение φ в уравнение (306) и выполняя интегрирование, мы получим связь между крутящим моментом M и углом закручивания τ . Этим задача будет решена. Если нас интересуют перемещения, то следует напряжения (299) внести в закон Гука (V) и найти отсюда деформации:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{xz}, e_{xy}.$$

Подставляя их в уравнения (III) и интегрируя последние, найдем перемещения u, v и w .

§ 76. Возьмем функцию напряжений:

$$\varphi = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (307)$$

Соответственным подбором коэффициента c можем достигнуть того, чтобы она удовлетворяла уравнению (305); действительно:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c \frac{2}{a^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c \frac{2}{b^2}; \quad \nabla^2 \varphi = 2c \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

Подставляя это в уравнение (305), получим:

$$c = -G \tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

и потому

$$\varphi(x, y) = -G \tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (308)$$

Функция эта сохраняет постоянное (ср. формулу 302) значение (равное нулю) на эллиптическом контуре

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно функция (308) дает решение задачи о кручении стержня эллиптического сечения, рассмотренной в §§ 30—32. Внося значение $\varphi(x, y)$ из (308) в уравнение (299), получим напряжения; далее, подставляя из (308)

в ур-ние (306) и выполняя интегрирование, получим величину угла закручивания τ в зависимости от заданного крутящего момента M .

Предлагаем читателю сделать эти выкладки и проверить результаты, полученные в §§ 31 и 32.

Для стержня треугольного сечения следует взять функцию напряжений в форме:

$$\varphi(x, y) = -\tau \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) + c \right], \quad (309)$$

обращающуюся в нуль на контуре (ср. формулу 123 § 33):

$$\frac{1}{2}(x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - c = 0. \quad (310)$$

Распорядясь постоянной c , можем, как и в § 33, добиться, чтобы контур (309) разбился на 3 прямых, образующих равносторонний треугольник; для этого надо положить

$$c = -\frac{2a^2}{27}.$$

Случай поперечного изгиба

§ 77. Рассмотрим случай изгиба прямого бруска произвольного поперечного сечения, длиной l , заделанного левым концом и нагруженного на правом конце силой Q . Эту силу предполагаем осуществленной в форме касательных напряжений, распределенных по концевому поперечному сечению. При решении аналогичной задачи, в случае плоской деформации или плоского напряженного состояния (§ 54), мы сделали следующие предположения:

$$Z_x = \frac{M}{J}x = -\frac{Q(l-x)}{J}x; \quad X_z = 0; \quad Y_z = Y_y = X_x = X_y = 0.$$

Попробуем решить настоящую задачу также полуобратным методом, несколько изменив предположения в том смысле, что положим отличным от нуля также напряжение Y_z .

Следовательно мы делаем такие предположения:

$$\left. \begin{aligned} Z_x &= -\frac{Q(l-x)}{J}x; \\ X_x &= Y_y = X_y = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (311)$$

Остальные напряжения $X_z = Z_x$ и $Y_z = Z_y$ найдем из условий на поверхности и так, чтобы были удовлетворены ур-ния теории упругости.

Посмотрим, какой вид примут основные ур-ния при наших предположениях (311).

Ур-ния равновесия (I) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Y_z}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (312)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = \frac{Qx}{J}. \quad (313)$$

Ур-ния (312) - показывают, что касательные напряжения X_z и Y_z не зависят от z , т. е. во всех поперечных сечениях они должны распределяться одинаково и конечно по тому же самому закону они должны быть распределены на концевом поперечном сечении B . Это налагает ограничение на способ приложения силы Q в сечении B . При других способах приложения силы Q будут получаться другие напряжения; однако, согласно принципу Сен-Венана, разница в распределении напряжений будет существенной только вблизи нагруженного конца B .

Переходим теперь к ур-ниям (IX), заметив предварительно, что в нашем случае

$$\theta = Z_z = -\frac{Q(1-\sigma)}{J}x.$$

Легко видеть, что из ур-ний (IX), 1-е, 2-е, 3-е и 6-е удовлетворяются тождественно предположениями (11).

Ур-ния же 4-е и 5-е напишутся так:

$$(1+\sigma)\nabla^2 Y_z = 0; \quad (1+\sigma)\nabla^2 X_z + \frac{Q}{J} = 0.$$

или

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 Y_z &= 0 \\ \nabla^2 X_z &= -\frac{Q}{(1+\sigma)J} \end{aligned} \right\} \quad (314)$$

Напишем еще условия на боковой поверхности бруска. Первые два из них удовлетворяются тождественно, так как на боковой поверхности $\cos(VZ) = 0$.

Остается только одно последнее:

$$Z_x \cdot \cos(VX) + Z_y \cdot \cos(VY) = 0. \quad (315)$$

Таким образом задача сводится к разысканию двух напряжений X_z и Y_z , являющихся функциями x и y из того условия, чтобы они всюду в бруске удовлетворяли ур-ниям (313) и (314), а на боковой поверхности — условию (315).

В дальнейшем надо еще постараться, чтобы эти касательные напряжения на концевом сечении приводились бы к заданному грузу Q , приложенному в центре тяжести сечения. Как и ранее, мы можем упростить решение задачи, вводя функции напряжений; здесь оказывается удобным ввести две функции; зададим напряжения так:

$$\left. \begin{aligned} Z_x = X_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y) \\ Z_y = Y_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (316)$$

Здесь $\varphi(x, y)$ и $f(y)$ — произвольные пока функции напряжений.

Подставляя эти выражения в ур-ние (313), видим, что оно будет тождественно удовлетворено. Остается удовлетворить ур-ниям (314) и условию на боковой поверхности (315).

Подставляя напряжения (316) в ур-ния (314), напишем их так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi - \frac{Q}{J} + f''(y) = -\frac{Q}{J(1+\sigma)}.$$

или же

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi = \frac{\sigma Q}{J(1+\sigma)} - f''(y).$$

Из этих ур-ний легко находим:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{Qxy}{J(1+\sigma)} - f'(y) + C. \quad (317)$$

Переходим к условию на боковой поверхности (315). Как и в задаче о кручении, получим:

$$\cos(VX) = \frac{dy}{ds}; \quad \cos(VY) = -\frac{dx}{ds}.$$

Подставляя выражения отсюда и из (316) в условие (315), будем иметь:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y) \right] \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = 0;$$

или, имея в виду, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\varphi}{ds},$$

получим:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left[\frac{Qx^2}{2J} - f(y) \right] \frac{dy}{ds}. \quad (318)$$

Вопрос сводится к интегрированию ур-ния (317) и удовлетворению условия на боковой поверхности (318) введенной нами произвольной функцией $f(y)$ постараемся распорядиться так, чтобы выражение в квадратной скобке ур-ния (318) на контуре поперечного сечения обращалось в нуль, т. е. на контуре должно соблюдаться условие:

$$f(y) - \frac{Qx^2}{2J} = 0; \quad (319)$$

т. е. ур-ние (318) сведется

условию: $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, требую-

ем, чтобы функция напряжений φ сохраняла бы на контуре сечения постоянное значение.

Остается рассмотреть условие на конечном поперечном сечении.

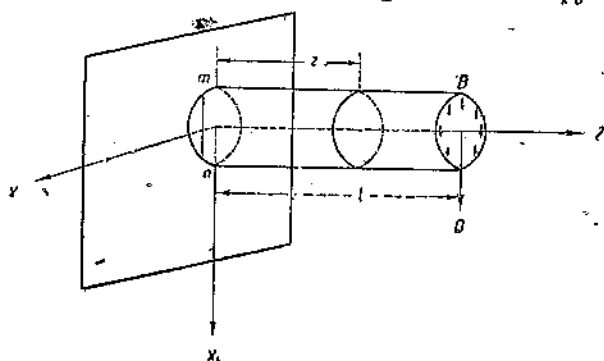
Проектируя силы, приложенные к этому сечению на ось OY , имеем:

$$\iint Y_x dx \cdot dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx = 0,$$

т. е. сумма касательных сил Q направлена вертикально (фиг. 84).

Далее (ср. фиг. 83)

$$\begin{aligned} \iint X_y dx dy &= \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy - \frac{Q}{2J} \iint x^2 dx dy + \iint f(y) dx dy = -\frac{Q}{2} + \\ &+ \int dy \int f(y) dx = -\frac{Q}{2} + \int dy [f(y_p) x_p - f(y_m) x_m] = -\frac{Q}{2} + \\ &+ \int dy \left[\frac{Q \cdot x_p^3}{2J} - \frac{Q x_m^3}{2J} \right] = -\frac{Q}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{J} \int \frac{(x_p^3 - x_m^3) dy}{3} = -\frac{Q}{2} + \frac{3}{2} \frac{Q}{J} \cdot J = Q. \end{aligned}$$



Фиг. 84.

Таким образом касательные напряжения по концевому сечению действительно приводятся к заданному грузу Q , направленному вниз.

У нас еще осталась одна произвольная постоянная C в ур-нии (317). Не придется подобрать так, чтобы момент касательных сил по концевому сечению вокруг центра тяжести сечения обращался в нуль; в противном случае, помимо изгиба, появится еще кручение; однако это последнее исследовано в предыдущей задаче и здесь оно нас не интересует. Можно убедиться, что при сечении, симметричном относительно плоскости XOZ , следует принять $C=0$.

Окончательно, для решения задачи нужно подобрать $f(y)$ так, чтобы на контуре соблюдалось ур-ние (319). Это выражение $f(y)$ вносим в ур-ние (317) и интегрируем его. Получив отсюда $\varphi(x, y)$, вносим ее в ур-ние (316) и находим касательные напряжения. Далее вставляем их в ур-ние

$$\iint (X_z y - Y_z x) dx dy = 0,$$

откуда находим постоянную C .

Этим решение задачи заканчивается.

Пример. Изгиб круглого бруска

§ 78. Пусть контур сечения будет круг:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (320)$$

Для удовлетворения ур-ния (319) на контуре, функцию $f(y)$, очевидно, можно задать так:

$$f(y) = \frac{Q}{2J} (r^2 - y^2). \quad (321)$$

После этого ур-ние (317) получает такой вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\sigma Q y}{J(1+\sigma)} + \frac{Q \cdot y}{J} + C = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{Q}{J} \cdot y + C. \quad (322)$$

Постараемся удовлетворить этому ур-нию, задав функцию φ в следующем виде:

$$\varphi = m (r^2 - x^2 - y^2) y.$$

Для подстановки в ур-ние (322) имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -2my; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -6my.$$

и ур-ние (322) дает:

$$-8my = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{Q}{J} y + C.$$

Отсюда, очевидно, $C=0$

$$m = -\frac{1}{8} \cdot \frac{(1+2\sigma) Q}{(1+\sigma) J}.$$

Функция напряжений окончательно получается такой:

$$\varphi = \frac{1}{8} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{Q}{J} (x^2 + y^2 - r^2) J.$$

Подставляя это выражение функции φ , а также $f(y)$ из ур-ния (321) в ур-ния (316), находим касательные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{Q}{2J} \cdot \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left(r^2 - x^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right) \\ Y_z &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{Q}{J} xy \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

Замечаем, что касательные напряжения зависят от Пуассонова отношения σ ; полагая например $\sigma = \frac{1}{3}$, найдем:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{11}{32} \frac{Q}{J} \left(r^2 - x^2 - \frac{1}{11} y^2 \right) \\ Y_z &= -\frac{5}{16} \frac{Q}{J} xy \end{aligned} \right\} \quad (324)$$

Так как, вообще говоря, $Y_z \neq 0$, то полное касательное напряжение

$$t = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2}$$

направлено не вертикально. В точках сечения, расположенных на осях координат ($x=0$, $y=0$), составляющая Y_z отсутствует, и здесь t вертикально.

На нейтральной оси ($x=0$) имеем:

$$X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left(r^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right).$$

Отсюда видно, что по нейтральной оси напряжения X_z распределяются неравномерно. Наибольшее их значение (в центре сечения при $y=0$) равно

$$X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} r^2;$$

при $\sigma = \frac{1}{3}$ из ур-ний (324) найдем:

$$\max X_z = \frac{11}{32} \frac{Q}{J} r^2 = \frac{11}{32} \frac{Q 4r^2}{\pi r^4} = \frac{11}{8} \frac{Q}{F} = 1,375 \frac{Q}{F}, \quad (325)$$

где $F = \pi r^2$ — площадь сечения бруска.

Элементарный подсчет по формуле

$$X_z = t = \frac{QS}{Jb}$$

дает:

$$\max X_z = \frac{4Q}{8\pi r^2} = 1,33 \frac{Q}{F}.$$

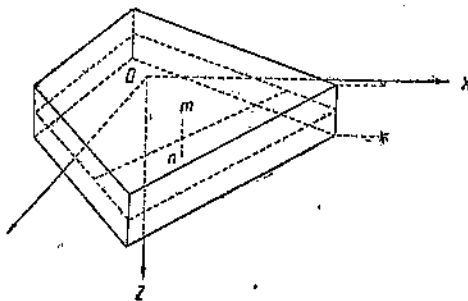
Ошибка по сравнению с точным значением ур-ния (325) составляет около 3,4%. Напряжениями Y_z в элементарном расчете обычно пренебрегают.

ГЛАВА X

Изгиб плоской пластинки

§ 79. Плоской пластинкой мы называем тело призматической или цилиндрической формы, у которого высота h мала по сравнению с размерами оснований (фиг. 85).

Отметим срединную плоскость пластинки, делящую пополам ее высоту. Эта плоскость в теории пластинок играет такую же роль, как ось и нейтральная плоскость в теории изгиба брусков.

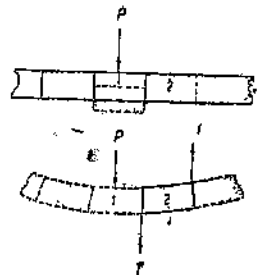


Фиг. 85.

Наметим систему координат, располагая оси OX и OY в срединной плоскости; ось OZ направим вниз.

В главах VII и VIII мы рассматривали задачи о напряжениях и деформациях такой пластинки в том случае, если внешняя нагрузка и соответствующие ей реакции действуют в срединной плоскости (обобщенное плоское напряженное состояние). Если при этом нагрузка не превосходит некоторого предела, то срединная плоскость не искривляется.

Теперь мы обратимся к другому случаю, когда нагрузка и опорные реакции нормальны к срединной плоскости; в этом случае срединная плоскость пластинки искривляется и мы имеем дело с изгибом плоской пластинки. Следует отметить, что, вообще говоря, мы здесь встречаемся не с одним изгибом (как он понимается в сопротивлении материалов), так как в громадном большинстве случаев изгиб сопровождается кручением пластинки. Это обстоятельство легко объяснить себе, если поперечное сечение пластинки (фиг. 86), лежащей на двух опорах, мысленно разрежем на балки-полоски и нагрузим например одну из них. Если бы разрезы были осуществлены в действительности, прогиб получила бы одна нагруженная балка-полоска; благодаря же связи между отдельными балками-полосками, на каждую из них (например см. полосу „2“) две соседние действуют, вызывая касательные напряжения t и t' по боковым граням (вдоль пролета пластинки); эти напряжения вызовут, очевидно, поворот поперечных сечений балок-полосок, т. е. их скручивание.



Фиг. 86.

В дальнейшем мы рассматриваем приближенную теорию изгиба пластинок, пользуясь теми же методами, как и в приближенной теории изгиба брусков; однако в данном случае теория изгиба значительно усложняется, как отмеченным выше явлением скручивания, так и тем, что приходится относить распределение напряжений и деформаций не к одной линии (ось бруска), но к целой плоскости (срединная плоскость). Это приводит к замене обыкновенных дифференциальных уравнений изгиба —

ур-ниями в частных производных, интегрирования которых значительно сложнее.

В дальнейшем, для упрощения теории, мы будем принимать следующие допущения.

1. Будем (как и в элементарной теории изгиба брусков) пренебрегать напряжениями Z_x , возникающими вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоев пластинки, а также деформациями e_{zz} пластинки по направлению ее толщины; благодаря этому обобщенный закон Гука (V) для пластинки примем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y) \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x) \end{aligned} \right\} \quad (326)$$

2. Введем гипотезу, аналогичную гипотезе плоских сечений в бруске. При этом, если пластинка изгибается по цилиндрической поверхности, то ука данную гипотезу можем принять в том же виде, как она формулируется для бруска: плоские поперечные сечения пластинки при изгибе остаются плоскими и нормальными к искривленной срединной плоскости. Если же пластинка изгибается не по цилиндрической поверхности, то нашу гипотезу будем формулировать так: прямолинейный элемент mn (фиг. 85) внутри пластинки, нормальный к срединной плоскости, при изгибе остается прямым и нормальным к этой плоскости после ее искривления.

После этих общих замечаний перейдем к изучению самого изгиба плоской пластинки, подразделив исследование, в порядке возрастающей сложности, на следующие части:

- 1) цилиндрический изгиб пластинки;
- 2) чистый изгиб пластинки;
- 3) кручение пластинки;
- 4) общий случай изгиба пластинки.

Цилиндрический изгиб пластинки

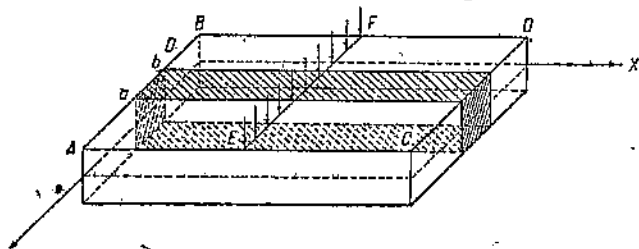
§ 80. Рассмотрим прямоугольную пластинку $ABDC$, опертую (или заделанную) по двум граням AB и CD и работающую на изгиб, как балка, пролетом $AC=BD$ (фиг. 87). Где-либо вдаль от боковых граней AC и BD выделим балку-полоску шириною $ab=1$. Нагрузка в направлении пролета AC может быть какой угодно; однако предположим, что вдоль любой образующей EF поперек пролета нагрузка неизменна. Очевидно, что тогда срединная плоскость пластинки изогнется по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OY . Выделенная балка-полоска будет изгибаться в условиях плоской деформации, подробно рассмотренных в § 46 (фиг. 47).

Кручение, указанное § 79, здесь отсутствует. Удлинение e_{yy} будет равно нулю и второе из ур-ний закона Гука (326) дает:

$$Y_y = \sigma X_x.$$

Подставляя это в первое из ур-ний (326), найдем:

$$X_x = \frac{E}{1 - \sigma^2} e_{xx}$$



Фиг. 87.

или

$$X_{\alpha} = E_1 e_{\alpha\alpha} \quad (327)$$

где

$$E_1 = \frac{E}{1 - \sigma^2} > E. \quad (328)$$

Ур-ние (327) приводит нас к закону Гука в первичной его форме (пропорциональность между напряжением и удлинением), но с повышенным модулем упругости (328). Это повышение модуля упругости обуславливает разницу в работе пластинки по сравнению с узкой балкой; во всем остальном мы можем не делать различия между пластинкой и балкой и всю теорию изгиба последней применить к цилиндрическому изгибу пластинки. Для основного нормального напряжения получаем прежнюю формулу:

$$X_{\alpha} = \frac{M_1}{J} z = \frac{M_1}{\left(\frac{1 \cdot h^3}{12}\right)} z, \quad (329)$$

где M_1 — изгибающий момент, приходящийся на единицу ширины пластинки.

$$J = \frac{1 \cdot h^3}{12} \quad (330)$$

— момент инерции поперечного сечения пластинки также на единицу ширины.

Если, согласно нашим обозначениям, назовем через w прогиб пластинки, то легко напишем дифференциальное ур-ние изогнутой срединной плоскости пластинки:

$$E_1 J \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_1. \quad (331)$$

Здесь на основании ур-ний (328) и (330) имеем:

$$E_1 J = \frac{E h^3}{12(1 - \sigma^2)}.$$

Величину

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \sigma^2)} \quad (332)$$

называют цилиндрической жесткостью пластинки. Она в нашей задаче заменяет собою жесткость балки EJ и постоянно встречается в дальнейшей теории изгиба пластинок.

Дифференциальное уравнение (331) напишем так:

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_1. \quad (333)$$

Формула (329) показывает, что напряжения в пластинке получаются такие же, как и в прямоугольной балке той же высоты и под той же нагрузкой; прогиб пластинки согласно ур-нию (333) будет менее прогиба соответственной балки, так как цилиндрическая жесткость (332) более жесткости балки шириною = 1:

$$D = E_1 J > EJ.$$

Пользуясь формулами (329) и (333), мы можем вести расчет пластинок в случае цилиндрического изгиба тем же методом, каким мы рассчи-

тиваем балки статически определимые и статически неопределимые (неразрезные, с заделкой концов и т. д.)

Поэтому на деталях подобных расчетов мы здесь не останавливаемся.

Чистый изгиб пластинки

§ 81. Пусть мы имеем прямоугольную пластинку (фиг. 88, а) по боковым граням которой приложены непрерывно распределенные изгибающие пары с моментом, величина коих на единицу длины равна соответственно:

M_1 — по граням AB и CD ,

M_2 — по граням BC и AD .

Иначе можем сказать, что момент M_1 вращает вокруг оси OY , а момент M_2 — вокруг оси OX . Мы будем говорить, что в данном случае пластинка находится в состоянии чистого изгиба. Если из такой пластинки четырьмя вертикальными плоскостями выделим элемент (фиг. 88, б) размерами dx , dy и h (где h — толщина пластинки), то действие на него отброшенных частей пластинки, очевидно, придется заменить: по левой и правой граням парами с моментами $\pm M_1 dy$, по задней и передней граням парами с моментами $\pm M_2 dx$.

Пары эти осуществляются в форме сплошных нормальных сил:

$$X_x dy dz; Y_y dx dz,$$

Фиг. 88.

где X_x и Y_y — нормальные напряжения по граням элемента; поэтому имеем:

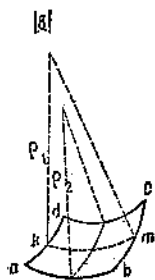
$$M_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x \cdot dy dz \cdot z = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dz; \quad M_2 dx = dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z dz,$$

или, сокращая на dx и dy , получим соотношения на единицу длины граней:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dz \\ M_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z dz \end{aligned} \right\} \quad (834)$$

Переходим теперь к геометрическим свойствам явления. На фиг. 88в представлена срединная плоскость $abcd$ выделенного элемента после изгиба; пусть ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны двух кривых, получающихся при

пересечении искривленной срединной плоскости плоскостями, параллельными OXZ и OYZ . Если введем теперь гипотезу, указанную во второй формулировке п. 2 § 79, то при помощи таких же рассуждений, как при изгибе прямого бруса, найдем следующие соотношения между относительными удлинениями, радиусами кривизны и расстоянием волокон z от срединной плоскости:



Фиг. 88в.

$$e_{xx} = -\frac{z}{\rho_1}; \quad e_{yy} = -\frac{z}{\rho_2}. \quad (335)$$

Действительно (фиг. 89):

$$\frac{pq}{km} = \frac{mq}{Om} \quad \text{или} \quad |e_{xx}| = \frac{|z|}{|\rho_1|}. \quad (336)$$

Будем считать, что кривизна положительна, если центр кривизны расположен в сторону положительной оси OZ ; ось же OZ мы направляем вниз (§ 79), тогда например для случая, показанного на фиг. 89, имеем:

$$\frac{1}{\rho} < 0; \quad z > 0; \quad e_{xx} > 0$$

(растяжение) и потому (336) напомним так:

$$e_{xx} = -\frac{z}{\rho_1}.$$

Для того чтобы связать деформации (335) с напряжениями, входящими в ур-ние (334), воспользуемся законом Гука (326), решая эти ур-ния относительно X_x и Y_y , найдем:

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}); \quad Y_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}),$$

или, подставляя сюда из ур-ний (335) получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sigma}{\rho_2} \right) z \\ Y_y &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\sigma}{\rho_1} \right) z \end{aligned} \right\} \quad (337)$$

Подставляя это в ур-н.я (334), найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sigma}{\rho_2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz \\ M_2 &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\sigma}{\rho_1} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (338)$$

Но очевидно, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1 \cdot h^3}{12},$$

так как этот интеграл выражает момент инерции прямоугольного сечения шириною единица; подставляя это в ур-ния (338) и на основании (332) получим:

$$\left. \begin{aligned} -D \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sigma}{\rho_2} \right) &= M_1 \\ -D \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\sigma}{\rho_1} \right) &= M_2 \end{aligned} \right\}, \quad (339)$$

где D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Ур-ния (339) представляют собою распространение на пластинку известного соотношения

$$-\frac{EJ}{\rho} = M$$

для прямого бруска.

Если во всех точках пластинки $M_1 = M_2 = \text{const}$, то из (339) легко найдем, что $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$, т. е. пластинка изгибается по шаровой поверхности. Из ур-ний (339) легко получим дифференциальные ур-ния изогнутой срединной плоскости; для этого следует кривизны $\frac{1}{\rho_1}$ и $\frac{1}{\rho_2}$ выразить через прогиб $w(x, y)$, являющийся в нашем случае функцией двух переменных; как и при изгибе прямого бруска, примем приближенное выражение кривизны, полагая, что прогибы весьма малы:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Подставляя это в ур-ния (339), получим два совокупных дифференциальных ур-ния в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= M_1 \\ -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= M_2 \end{aligned} \right\}. \quad (340)$$

Это есть дальнейшее распространение ур-ния (333) § 80 соответствующего случаю цилиндрического изгиба.

С явлением чистого изгиба, не осложненным поперечными силами и крутящими моментами, в практике приходится встречаться крайне редко; однако чистый изгиб является одной из составляющих общего случая, рассматриваемого нами далее; там мы воспользуемся ур-ниями (340), дающими необходимую нам связь между изгибающими моментами и прогибом. Заметим, что из ур-ний (340) можно получить одно дифференциальное ур-ние изогнутой срединной поверхности; складывая их, имеем:

$$-D(1 + \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_1 + M_2.$$

Вводя обозначение

$$\frac{M_1 + M_2}{1 + \sigma} = M; \quad (341)$$

последнее ур-ние напомним так:

$$-D \nabla^2 w = M. \quad (342)$$

Сопоставляя это с дифференциальным ур-нием изогнутой оси стержня:

$$-EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M,$$

замечаем, что при переходе от стержня к пластинке линейная жесткость EJ замещается цилиндрической; вторая производная прогиба переходит в Лапласов оператор; изгибающий момент M заменяется приведенной суммой моментов (341).

Кручение пластинки

§ 82. Рассмотрим случай (фиг. 90), когда к какой-либо грани пластинки, например к грани, нормальной к оси OX , приложены распределенные крутящие пары. Распределение их предположим, вообще говоря, неравномерным и обозначим через H_1 величину момента этих пар, приходящуюся на единицу длины грани в данной точке. Количество момента на длину dy грани равно, очевидно, $H_1 dy$.

Заметим, что с точки зрения статики распределенные крутящие пары равносильны некоторой поперечной силе. Действительно, пару с моментом $H_1 dy$ мы можем осуществить (фиг. 91) в виде двух равных противоположных сил H_1 , приложенных по краям площадки dy .

По соседней площадке dy пару $(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy) dy$ также осуществим в виде двух противоположных сил $H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy$ с плечом dy . Выполнив

это для всех площадок рассматриваемой грани, видим, что силы, приложенные в точках m и n на границе двух площадок, сводятся к одной силе $\frac{\partial H_1}{\partial y} dy$, приходящейся на длину dy . Заметим однако, что на краях A и B грани при этом останутся две не уничтоженные конечные сосредоточенные силы H_1^A и H_1^B .

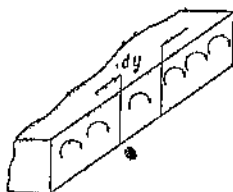
Отсюда мы и заключаем, что распределенные крутящие пары интенсивности H_1 статически эквивалентны распределенной поперечной силе:

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} \quad (343)$$

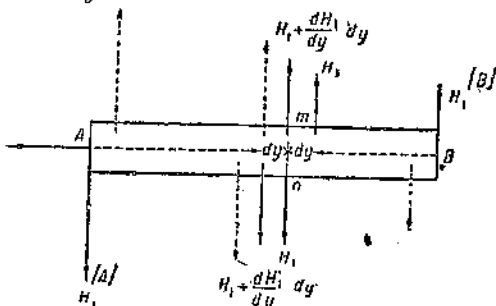
и двум сосредоточенным поперечным силам H_1^A и H_1^B по концам. В частном случае, если момент H_1 распределен равномерно, то $H_1 = \text{const}$; поперечная сила (343) всюду равна нулю и крутящие пары по грани AB эквивалентны паре, состоящей из двух сил H_1 в точках A и B .

§ 83. Крутящие моменты, возникающие в поперечном сечении пластинки, фактически осуществляются в форме касательных напряжений; например (фиг. 92) по сечению, нормальному к оси OX , это будут напряжения Y_x и Z_x ; исследование кручения стержней с поперечным сечением в форме весьма узкого прямоугольника показывает, что напряжения Z_x (в общем случае напряжения, нормальные к большой оси сечения) весьма малы по сравнению с напряжениями Y_x (параллельными большой оси). Поэтому для упрощения примем, что при кручении пластинки крутящие моменты осуществляются в форме касательных напряжений, параллельных срединной плоскости.

Выделим из пластинки четырьмя вертикальными плоскостями бесконечно-малый элемент (фиг. 93) и предположим, что действие на него от-



Фиг. 90.



Фиг. 91.



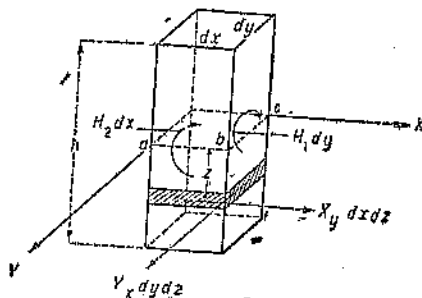
Фиг. 92.

брошенных частей пластинки по граням bc и ab должно быть заменено только крутящими моментами $H_1 dy$ и $H_2 dx$, положительные направления которых примем так, как показано на фиг. 93 (вращение по часовой стрелке вокруг внешней нормали); в этом случае мы имеем дело с чистым кручением пластинки вокруг двух осей OX и OY .

Аналогично ур-ниям (334) (§ 81) при чистом изгибе, налпшем следующие условия эквивалентности крутящих моментов и соответственных касательных усилий¹:

$$H_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy dz \cdot z;$$

$$H_2 dx = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y dx dz \cdot z.$$



Фиг. 93.

Выведем постоянные dx и dy за знаки интегралов и сокращая на них, получим:

$$H_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x z dz; \quad (344)$$

$$H_2 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y z dz. \quad (344')$$

Но так как по закону взаимности касательных напряжений $Y_x = X_y$, то из ур-ний (344) и (344'), получаем:

$$H_2 = - H_1; \quad (345)$$

это есть закон взаимности крутящих моментов по двум взаимно-перпендикулярным сечениям пластинки: моменты H_1 и H_2 одинаковы по величине, но противоположны по знаку.

Постараемся теперь получить связь между крутящими моментами и прогибом w пластинки, другими словами, найдем дифференциальное ур-ние искривленной срединной плоскости при кручении.

Касательные напряжения, входящие в ур-ние (344), связываем с перемещениями при помощи закона Гука и основных ур-ний (III) (§ 18):

$$Y_x = \frac{E}{2(1+\sigma)} e_{xy} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (346)$$

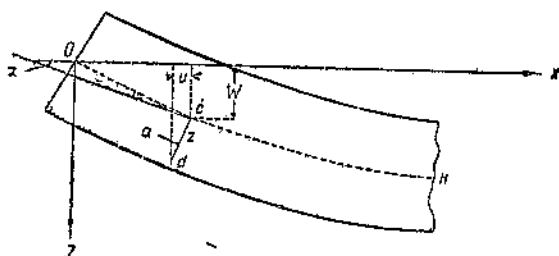
Теперь остается перемещения u и v связать с прогибом w срединной плоскости.

На фиг. 94 показан разрез пластинки какой-либо плоскостью, параллельной OXZ . Пусть OK — след срединной плоскости разреза после искривления.

¹ Согласно сделанному выше предположению, принимаем во внимание только напряжения X_y и Y_x параллельные срединной плоскости.

Возьмем какую-либо точку d на расстоянии $cd = z$ от срединной плоскости.

Для упрощения сделаем предположение, что все точки с срединной плоскости перемещаются вертикально; предположение это близко к действительности, если прогибы w малы по сравнению с толщиной пластинки h и если в срединной плоскости нет деформаций (натяжений или сжатий).¹ В этих условиях мы по фиг. 94 легко установим связь между перемещением u точки d и прогибом w срединной плоскости, делая некоторые допущения вследствие малости деформаций:



Фиг. 94.

$u = -z \sin \alpha \approx -z \operatorname{tg} \alpha$, где α есть угол наклона касательной к следу OK срединной плоскости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x};$$

поэтому

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (347)$$

Делая разрез пластинки плоскостью, параллельной OYZ , найдем путем таких же рассуждений:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (348)$$

Из ур-ний (347) и (348) для подстановки в (346) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

тогда ур-ние (346) дает:

$$Y_x = -\frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \quad (349)$$

Подставляя это в ур-ние (344), получаем:

$$H_1 = -\frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1+\sigma)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

или, умножая числитель и знаменатель на $(1-\sigma)$, на основании ур-ния (332) (§ 80), имеем:

$$H_1 = -D(1-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (350)$$

¹ Знак — обусловлен тем, что например в случае, показанном на фиг. 94

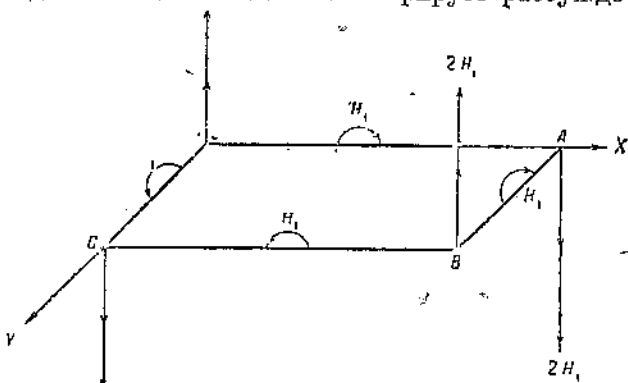
$z > 0$; $\operatorname{tg} \alpha > 0$; $u < 0$.

² Заметим что $D(1-\sigma) = \frac{Eh^3}{12(1+\sigma)}$.

Это уравнение по своей сущности аналогично уравнению (340) (§ 81) и представляет собою дифференциальное уравнение искривленной срединной плоскости пластинки при кручении. Как видно из самого вывода, применимость уравнения (350) ограничена случаем весьма малых прогибов w по сравнению с толщиной пластинки h .

§ 84. Уравнением (350) мы воспользуемся далее для общих выводов; здесь мы на основании его сделаем некоторые замечания о чистом кручении прямоугольной пластинки. Задача эта несколько иллюстрирует рассуждения §§ 82 и 83.

Пусть по всем четырем боковым граням пластинки (фиг. 95) приложены равномерно распределенные крутящие пары с моментом $H_1 = -H_2 = M = \text{const}$ на единицу длины. Заменяя эти пары эквивалентными поперечными силами, заметим, что распределенные поперечные силы $\frac{\partial H_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial H_2}{\partial x}$ (ср. формулу 348)



Фиг. 95.

(§ 82) всюду равны нулю;

отсюда легко сообразить, что пластинка окажется под действием только четырех сосредоточенных сил, по $2H_1 = 2M$ каждая, приложенных по углам¹. Уравнение искривленной срединной поверхности (350) получит вид:

$$D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M = \text{const}. \quad (351)$$

Интеграл его возьмем в форме: $w = Cxy$.

Подставляя это в уравнение (351), видим, что оно удовлетворяется, если

$$C = -\frac{M}{D(1 - \sigma)}.$$

Поэтому окончательно:

$$w = -\frac{M}{D(1 - \sigma)} xy.$$

Срединная плоскость искривляется по поверхности гиперболического параболоида. Угол закручивания пластинки в сечении, параллельном OYZ и характеризуемом абсциссой x , будет (ср. формулы 11 и 12, § 6):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{M}{D(1 - \sigma)} x.$$

Единичный угол закручивания:

$$\tau = -\frac{M}{D(1 - \sigma)} = -\frac{12(1 + \sigma)}{Eh^3} M = -\frac{8}{Gh^3} M,$$

где G — модуль упругости при сдвиге.

¹ Следует заметить, что эти силы только статически равносильны приложенным распределенным моментам; в упругой пластинке такую замену нельзя делать, не заменив распределения деформаций и напряжений.

От действия этих сил вблизи точек их приложения возникают значительные местные напряжения; анализом их мы здесь не занимаемся.

Последнее соотношение перепишем так:

$$M = -G\tau \frac{h^3}{6} = -0,333 G \frac{\tau}{2} h^3. \quad (352)$$

По условиям нашей задачи пластинка скручивается двумя парами моментов в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Если одну пару моментов устраним, то получим вдвое меньший угол закручивания:

$$\tau' = \frac{\tau}{2}.$$

На этом основании уравнение (352) напишем так:

$$M = -0,333 G\tau' h^3. \quad (353)$$

Точное решение, данное Сен-Венаном для случая весьма узкого прямоугольника со сторонами a и h , где $h < a$, имеет вид:

$$M' = kG\tau h^3 a \quad \text{или} \quad \frac{M'}{a} = kG\tau h^3,$$

где $\frac{M'}{a} = M$ — крутящий момент на единицу длинной стороны поперечного сечения; поэтому

$$M = kG\tau h^3. \quad (354)$$

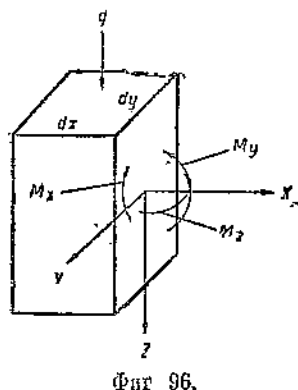
Сен-Венан нашел¹ следующие значения коэффициента k для больших значений $\frac{a}{h}$

$\frac{a}{h} =$	4	5	10	∞
$k =$	0,2808	0,2914	0,3123	0,3333

Отсюда мы видим, что полученное нами соотношение (353) достаточно близко к точному (354) при $\frac{a}{h} > 10$, а при $\frac{a}{h} = \infty$ в точности с ним совпадает.

Общий случай изгиба пластинки

§ 85. Рассмотрим теперь общий случай изгиба пластинки, как-либо опертой или закрепленной по контуру и нагруженной сплошной нагрузкой q на единицу площади. Если мы, как и ранее, вырежем элемент (фиг. 96), то действие отброшенных частей по каждой грани придется заменить, в самом общем случае, тремя составляющими силами X , Y , Z и тремя парами с моментами M_x , M_y и M_z . Однако, как мы уже отмечали в § 79, силы X и Y и пара M_z , лежащие в срединной плоскости, соответствуют случаю обобщенного плоского напряженного состояния; они не вызывают искривления срединной плоскости; поэтому в настоящей задаче, касающейся изгиба пластинки, мы их не рассматриваем. Остальные составляющие Z , M_x и M_y вызовут искривление срединной плоскости; из них влияние M_x и M_y по отдельности на изгиб пластинки нами уже рассмотрено выше;



Фиг. 96.

¹ См. С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, ч. I, стр. 172 (СПБ, 1914).

$M_y = M_1$ — изгибающий момент; $M_x = H_1$ — крутящий момент; Z есть поперечная сила в пластинке.

Для моментов примем уже введенные ранее обозначения:

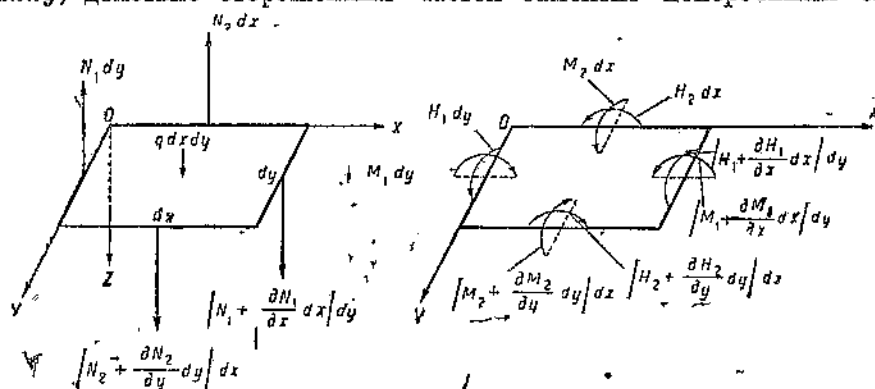
по грани $\perp$ к оси OX — M_1 и H_1
 " " $\perp$ " " OY — M_2 и $H_2 = -H_1$.

Поперечные силы будем обозначать так:

по грани $\perp$ к OX — через N_1
 " " $\perp$ " " OY — " N_2 .

Положительные направления моментов примем, как и ранее, по фиг. 88 и 93. Поперечные силы N_1 и N_2 по правой и передней граням (внешние нормали $+X$ и $+Y$) будем считать положительными вниз, т. е. для них знаки будут совпадать со знаками напряжений Z_x и Z_y .

На фиг. 97, а и б, показана срединная плоскость выделенного элемента размерами dx и dy , с нагрузкой $q dx dy$, приходящейся на площадь его $dx dy$; действие отброшенных частей заменено поперечными силами



Фиг. 97 а и б.

(фиг. 97, а) и моментами (фиг. б); при этом учтено, что силы и моменты по передней и правой граням получили приращения по сравнению с соответственными им факторами по задней и левой граням; приращения, как и всегда, мы заменили частными дифференциалами, отбросив бесконечно малые высших порядков.

Составим условия равновесия выделенного элемента под действием сил, показанных на фиг. 97, а и б.

Так как мы отбросили силы и пары, действующие в срединной плоскости, то условия $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_x = 0$ удовлетворяются тождественно; остается удовлетворить следующим условиям:

$$\sum Z = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \quad (355)$$

Приняв оси координат, как на фиг. 97, раскроем первые два из этих условий так:

$$\begin{aligned} & -N_1 dy + \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right) dy - N_2 dx + \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0 \\ & -H_1 dy + \left(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x} dx \right) dy - M_2 dx + \\ & + \left(M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial y} dy \right) dx - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \right) dx dy + \\ & + N_1 dy \cdot \frac{dy}{2} - \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \cdot \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned}$$

Замечаем, что бесконечно малые величины 1-го порядка взаимно сокращаются; имеющиеся во втором ур-нии бесконечно-малые 3-го порядка отбрасываем; после этого оба ур-ния сокращаем на $dx dy$.

Совершенно таким же образом раскроем и третье ур-ние (355); в результате все они примут такой вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = -q \quad (356')$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = N_2 \quad (356'')$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} = N_1 \quad (356''')$$

В случае прямого бруска мы имели аналогичные, но более простые зависимости:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

В пластинке, как мы указывали ранее, явление осложняется вследствие распространения его на плоскость и наличия крутящих моментов.

Ур-ний (356) оказывается недостаточно для определения составляющих:

$$N_1, N_2, M_1, M_2 \text{ и } H_1 = -H_2. \quad (357)$$

Поэтому мы к ним добавим ур-ния (340) и (350), полученные из рассмотрения упругих свойств пластинки:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

$$H_1 = -D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (350)$$

Теперь число ур-ний (356), (340) и (350) соответствует количеству неизвестных $N_1, N_2, M_1, M_2, H_1 = -H_2$ и $w(x, y)$, и задача может быть решена.

Общее дифференциальное уравнение искривленной срединной поверхности пластинки

§ 86. Прежде всего выведем основную зависимость между прогибом w и нагрузкой q пластинки, исключив из ур-ний (356), (340) и (350) составляющие усилия (357). Для этого исключаем из ур-ний (356) поперечные силы N_1 и N_2 и в получившиеся ур-ния внесем выражения моментов (340) и (350).

Дифференцируя ур-ния (356') и (356'''), имеем:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}.$$

Внося это в ур-ние (356') и помня, что $H_2 = -H_1$, найдем:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q. \quad (358)$$

Для прямого бруска мы имели аналогичное, но более простое соотношение:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Из ур-ний (340) и (350) найдем производные, необходимые для ур-ния (358):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} &= -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} &= -2D (1 - \sigma) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} &= -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Подставляя это в ур-ние (358) и производя сокращения, получим:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (359)$$

или (ср. ур-ния VIII' и VIII, § 51)

$$D \nabla^2 (\nabla^2 w) = q. \quad (359')$$

Это есть основное ур-ние теории изгиба плоской пластинки или уравнение Софи Жермен (Sophie Germain); оно служит для нахождения искривленной срединной плоскости пластинки; в случае бруска мы имели более простую зависимость:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q.$$

Если нам удастся в условиях какой-либо задачи проинтегрировать ур-ние (359), то по найденному конечному ур-нию искривленной срединной плоскости $w = f(x, y)$ получим из ур-ний (340) и (350) моменты и затем из ур-ний (356'') и (356''') поперечные силы в любой точке пластинки. Подставляя значения моментов из ур-ний (340) и (350) в ур-ния (356'') и (356'''), выразим поперечные силы непосредственно через прогиб w :

$$N_1 = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right],$$

или

$$N_1 = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right);$$

аналогично:

$$N_2 = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$

(360)

По найденным усилиям можно уже вычислить напряжения. Для определения нормальных напряжений воспользуемся формулами (337) § 81, из них при помощи ур-ний (339) получим:

$$X_x = \frac{12M_1}{h^3} z; \quad Y_y = \frac{12M_2}{h^3} z,$$

что совпадает с известными формулами для бруска. Касательные напряжения $X_y = Y_x$ получим таким же путем из ур-ния (349) § 83, подставляя сюда значение $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ из ур-ния (350):

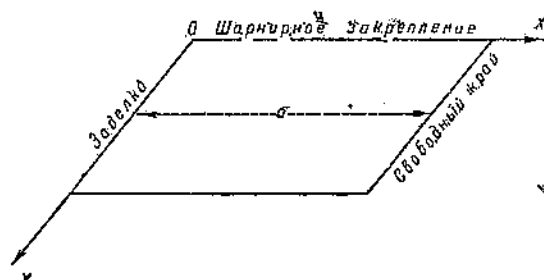
$$Y_x = X_y = \frac{12H_1}{h^3} z.$$

Для составляющих касательного напряжения, параллельных оси OZ , остается известная формула:

$$Z_x = X_z = \frac{N_1 S}{Jb} = \frac{6N_1}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right);$$

$$Z_y = Y_z = \frac{N_2 S}{Jb} = \frac{6N_2}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

§ 87. Посмотрим теперь, как составляются условия на контуре (гранях) пластинки. Возьмем например прямоугольную пластинку с закреплениями по фиг. 98.



Фиг. 98.

Для левого заделанного края имеем, очевидно, условия:

$$\text{при } x=0; w=0; \frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

указывающие на отсутствие прогиба и угла наклона срединной плоскости на опоре.

Для заднего, шарнирно опертого края, следует потребовать отсутствия прогиба и изгибаю-

щего момента M_2 (ср. формулы 340, § 85):

$$\text{при } y=0; w=0; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

в обоих рассмотренных случаях мы получили по два условия; некоторое осложнение получим на правом, свободном краю, где должны отсутствовать все усилия:

$$\text{при } x=a; N_1=0; M_1=0; H_1=0,$$

т. е. получаем три условия вместо двух; однако это противоречие лишь кажущееся, так как в § 82 мы показали, что распределенный крутящий момент H_1 статически равносителен поперечной силе $\frac{\partial H_1}{\partial y}$; добавляя ее к основной поперечной силе N_1 , получим, как и в предыдущих случаях, два условия:

$$\text{при } x=a; N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0; M_1 = 0,$$

или подставляя сюда выражения усилий из ур-ний (340), (350) и (360), будем иметь:

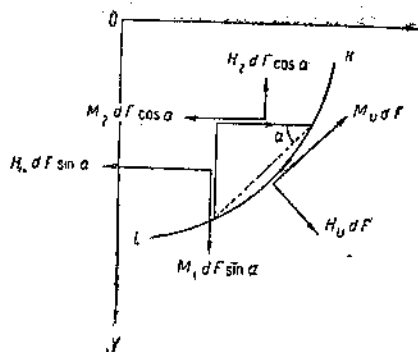
$$\text{при } x=a; \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Кроме трех рассмотренных основных случаев, могут встретиться и другие способы закрепления, например упругая опора (опора на балке), упругая заделка и т. д. Составление условий на контуре для этих случаев не представляет затруднений.

Для пластинок, имеющих криволинейный контур, необходимо бывает определить моменты, действующие по контуру (точнее—по криволинейной грани контура). Вырезая из контура KL (фиг. 99) трехгранную элементарную призму, мы действие отброшенных частей пластинки заменим интересующими нас моментами, причем через M_n и H_n обозначим изгибающий и крутящий моменты по криво-плоской площадке контура. Моменты, согласно общему приему механики, отложим в виде векторов, перпенди-

кулярно к плоскостям соответствующих пар. вту с оро у, смот, я с которой будем иметь вращение п рь по часам й стрелке.

Принимая поочередные направления моментов M_1 , M_2 , H_1 и H_2 по фиг. 97 б, а также в соответствии с этим выбирая положительные направления для M_v и H_v , получим схему в торов-моментов, показанную на фиг. 99; проектируя все эти векторы на направления M_v и H_v , легко напишем условия равновесия выделенного элемента; сокращая их на dF , получим следующие зависимости:



Фиг. 99.

$$\left. \begin{aligned} M_v &= M_1 \sin^2 \alpha + M_2 \cos^2 \alpha + 2H_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ H_v &= (M_2 - M_1) \sin \alpha \cos \alpha - H_1 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (361)$$

Найдя по ур-ниям (340) и (350) моменты M_1 , M_2 и H_1 и внося их в ур-ня (361), получим изгибающий момент M_v и крутящий момент H_v по площадке контура пластинки. Ур-ниями (361) можно пользоваться, очевидно, и для вычисления моментов по косым сечениям внутри пластинки.

Эллиптическая пластинка

§ 88. Зададимся выражением прогиба в форме:

$$w = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (362)$$

и, обозначая для краткости

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = U, \quad (363)$$

будем иметь:

$$w = c U^2. \quad (362')$$

Замечаем, что прогиб обращается в нуль на эллиптическом контуре:

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (364)$$

Значит получим решение задачи об изгибе эллиптической пластинки, если функция (362) удовлетворяет основному уравнению (359).

Взяв первые производные от прогиба (362')

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2cU \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2cU \frac{\partial U}{\partial y},$$

видим, что они обращаются в нуль всюду на контуре (364); отсюда легко заключить, что на контуре срединная плоскость остается горизонтальной; значит, мы имеем пластинку с заделанными краями.

В ур-ние (359) входят 4 производные прогиба; из выражения (362) видно, что все они будут постоянными числами; отсюда очевидно, что ур-нию (359) можно удовлетворить, если $q = \text{const}$, т. е. если нагрузка сплошная, равномерная.

каждая строка ее является рядом по индексу n , а каждый столбец—рядом по индексу m .

Дифференцируя выражение (368) и подставляя его производные вместо w в левую часть ур-ния (359), получим:

$$D A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

поэтому ур-ние (359) напишется так:

$$D \pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y), \quad (370)$$

или короче:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y) \quad (370')$$

где

$$C_{mn} = D \pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (371)$$

Остается так подобрать коэффициенты ряда C_{mn} , чтобы ур-ние (370') было удовлетворено тождественно по всей площади пластинки; иначе говоря, согласно (370) наша задача заключается в разложении функции $q(x, y)$ в тригонометрический ряд по двум переменным x и y ; выполняем это при помощи обычного приема Эйлера для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда; так как мы имеем двойной ряд, то и прием надо повторить дважды. Сначала умножим обе части равенства (370) на

$$\sin \frac{k\pi y}{b} dy,$$

где k —какое-нибудь целое число, и проинтегрируем в пределах от 0 до b :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \int_0^b q(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \quad (372)$$

Состав этой двойной суммы конечно такой же, как и в ур-нии (369); однако известно, что если $n \neq k$, то

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = 0.$$

Если же $n = k$, то

$$\int_0^b \sin^2 \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}. \quad (373)$$

Отсюда легко понять, что в сумме левой части (372) исчезнут все члены, кроме членов, соответствующих k -му столбцу (369), в котором m имеет все значения 1, 2, 3 ..., ∞ , и на основании (373) равенство (372) получит вид:

$$\frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mk} \sin \frac{m\pi x}{a} = \int_0^b q(x, y) \frac{\sin k\pi y}{b} dy. \quad (374)$$

Обе части этого равенства являются функциями одного x .
 Над равенством (374) повторяем сделанный прием: обе части мно-
 жим на

$$\sin \frac{i\pi x}{a} dx$$

и интегрируем в пределах от 0 до a ; в левой части исчезнут все члены
 кроме члена, имеющего индекс $m=i$; по аналогии с (373) имеем:

$$\int_0^a \sin^2 \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2};$$

тогда из равенства (374) получаем:

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} C_{ik} = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Отсюда находим коэффициент C_{ik} :

$$C_{ik} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy,$$

и далее на основании (371) напишем:

$$A_{ik} = \frac{4}{D\pi^4 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Это есть общее выражение любого коэффициента ряда (367); заменяя
 обозначения i и k снова через m и n , получим:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (375)$$

По заданному распределению нагрузки $q(x, y)$ входящие сюда инте-
 гралы можно вычислить и, подставив найденные значения коэффициен-
 тов A_{mn} в ур-ние (367), найти ур-ние искривленной срединной плоскости.
 Рассмотрим два основных случая, необходимых в расчетной практике.

§ 90. Пусть нагрузка q сплошная, равномерная по всей площади пла-
 стинки. Тогда для вычисления коэффициента A_{mn} по ур-нию (375) имеем:

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = q \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (376)$$

Следовательно двойной интеграл разбился на два простых; вы-
 числяем их:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{m\pi} \left[-\cos \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{m\pi} (1 - \cos m\pi);$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{b}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

При нечетных m и n эти интегралы равны соответственно:

$$\frac{2a}{m\pi}; \quad \frac{2b}{n\pi};$$

при четных m и n они обращаются в нуль.

На этом основании интеграл (376) отличен от нуля только при нечетных m и n и тогда он равен:

$$\frac{4gab}{\pi^2 mn}.$$

Подставляя это значение в (375), получим:

$$A_{mn} = \frac{16g}{D\pi^2 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2};$$

где $m=1, 3, 5, \dots, \infty$; $n=1, 3, 5, \dots, \infty$.

Замечаем, что при возрастании m и n величина коэффициента A_{mn} быстро убывает и ряд (367) быстро сходится; получаем окончательно:

$$w = \frac{16g}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (377)$$

где $m=1, 3, 5, \dots, \infty$; $n=1, 3, 5, \dots, \infty$.

Для разыскания наибольшего прогиба в центре пластинки полагаем

$$x = \frac{a}{2}; \quad y = \frac{b}{2};$$

тогда:

$$f = \max w = \frac{16g}{\pi^6 D} \sum \sum \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} - 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} = \frac{16g}{\pi^6 D} \beta. \quad (378)$$

Сюда вместо D следует вставить его выражение из (332), § 80.

Для вычислений удобно положить $\frac{b}{a} = \mu$ и последнюю формулу выразить так:

$$f = a \frac{ga^4}{Eh^3}.$$

Коэффициент α выражается в виде двойного ряда (ср. формулу 378) и зависит от отношения сторон μ (см. таблицу III, 156).

Имея выражение прогиба (377), можем по уравнениям (340), (350) и (360) найти усилия в любой точке пластинки; например

$$M_1 = \frac{16ga^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{m^2 + \sigma \frac{n^2}{\mu^2}}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$M_2 = \frac{16ga^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Благодаря шарнирному закреплению краев наибольший момент получается в центре пластинки при

$$x = \frac{a}{2}; \quad y = \frac{b}{2};$$

$$\max M_1 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{m^2 + \sigma \frac{n^2}{\mu^2}}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = \beta_1 qa^2;$$

$$\max M_2 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = \beta_2 qa^2.$$

Таким же путем вычисляются поперечные силы и опорные реакции пластинки по контуру.

Результаты показаны в таблице III, данной проф. Б. Г. Галеркиным.

Таблица III

$\mu = \frac{b}{a}$	$\max w = a \frac{qa^3}{Eh^3}$	$\max M_1 = \beta_1 qa^2$	$\max M_2 = \beta_2 qa^2$	$\max N_1 = \gamma_1 qa$	$\max N_2 = \gamma_2 qb$	$\max \left(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \delta_1 qa$	$\max \left(N_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \delta_2 qb$	$R = m qa b$
μ	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	m
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,0530	0,0553	0,0494	0,360	0,315	0,440	0,400	0,064
1,2	0,0616	0,0626	0,0501	0,380	0,294	0,455	0,377	0,062
1,3	0,0697	0,0693	0,0504	0,397	0,275	0,468	0,357	0,061
1,4	0,0770	0,0753	0,0506	0,411	0,258	0,478	0,337	0,059
1,5	0,0843	0,0812	0,0500	0,424	0,242	0,486	0,323	0,057
1,6	0,0906	0,086	0,0493	0,435	0,229	0,491	0,303	0,054
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,216	0,496	0,287	0,052
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,205	0,499	0,273	0,050
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,194	0,502	0,260	0,048
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,185	0,503	0,248	0,046
3,0	0,1336	0,1189	0,0404	0,493	0,124	0,505	0,166	0,031
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,093	0,502	0,125	0,024
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,074	0,500	0,100	0,019
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	—	0,500	—	—

Величины:

$$\max \left(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \delta_1 qa; \quad \max \left(N_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \delta_2 qb$$

выражают наибольшие единичные опорные реакции в серединах сторон контура.

$R = mabq$ — сосредоточенные реакции в углах пластинки (ср. § 82); при вычислениях принято $\sigma = 0,3$.

§ 91. Коэффициенты A_{mn} в уравнении (375) вычисляются крайне просто в случае, если пластинка изгибается сосредоточенной силой P , приложенной в любой точке $x=c$; $y=d$. Силу P заменим сплошной нагрузкой q на бесконечно-малой площадке $dx dy$:

$$P = q dx dy \quad \text{или} \quad q = \frac{P}{dx dy}. \quad (379)$$

Тогда в ф-ле (375) функция $q(x, y)$ равна нулю всюду, кроме точки $x=c$, $y=d$, где она равна величине (379). В интеграле правой части уравнения (375) сохраняется лишь один элемент, соответствующий точке (c, d) :

$$\begin{aligned} \iint q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \frac{P}{dx dy} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} dx dy = \\ &= P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}; \end{aligned}$$

тогда по ур-нию (375):

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Из (377) получаем ф-ле искривленной срединной плоскости:

$$w = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (380)$$

Помимо рассмотренного случая имеются аналогичные решения для прямоугольной пластинки с заделанными краями и для пластинки, у которой две противоположные грани шарнирно закреплены, а две другие закреплены как уголно¹.

В табл. IV приведены основные результаты для пластинки, заделанной по контуру.

Таблица IV

$\frac{b}{a}$	$\max w = \frac{q a^4}{E b^3}$	$\max M_x = \beta q a^3$	$\max \left(N_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \gamma q a$	$R_1 = \gamma_1 q a b$	$R_2 = \gamma_2 q a^3$
μ	α	β	δ	γ	γ_1
1,00	0,0138	0,0513	0,44	0,250	0,250
1,25	0,0199	0,0665	0,50	0,298	0,253
1,50	0,0240	0,0757	0,52	0,332	0,252
1,75	0,0264	0,0817	0,52	0,356	0,252
2,00	0,0277	0,0829	0,52	0,375	0,251
∞	0,0284	0,0833	0,50	0,500	—

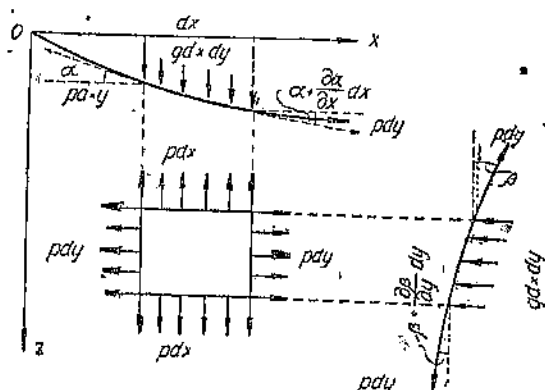
¹ См. С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, ч. II, § 55 и 56. Изд., 1916.

Наибольший отрицательный момент $\max |M_1| = \beta q a^2$ получается на контуре посредине длинной стороны пластинки. R_1 и R_2 — опорные давления на половину длины сторон контура:

$$\frac{a}{2} \text{ и } \frac{b}{2}.$$

Круглая пластинка

§ 92. При исследовании круглой пластинки весьма удобно пользоваться



Фиг. 100.

полярными координатами r и θ (фиг. 100); поэтому все основные уравнения изгиба пластинки преобразуем к полярным координатам по формулам:

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta.$$

Так как левая часть основного уравнения (359) по своему составу совершенно сходна с левой частью уравнения VIII, § 51 плоской задачи, то для нужных нам преобразований мы можем использовать выкладки § 63, заменив в них функцию φ на w .

Таким образом непосредственно получаем:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

и основное уравнение (359') (§ 86) получит вид:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (381)$$

Мы здесь коснемся только случая, когда нагрузка не зависит от θ , т. е. когда она по всем направлениям от центра пластинки распределена одинаково. В этом случае искривленная срединная поверхность, очевидно, должна быть поверхностью вращения, прогиб w не будет зависеть от θ и уравнение (381) упрощается (ср. уравнение VIII, § 64):

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = q. \quad (382)$$

Общий интеграл этого уравнения составит из общего интеграла w уравнения без последнего члена:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (383)$$

и какого-либо частного интеграла полного уравнения (382); однако общий интеграл уравнения (383) мы уже знаем (уравнение 246, § 64):

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2, \quad (384)$$

поэтому общий интеграл уравнения (382) напишем так:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \bar{w}. \quad (385)$$

Частный интеграл $\bar{w}$ весьма просто разыскивается, если нагрузка q постоянна (сплошная, равномерная нагрузка по всей площади пластинки); самый вид ур-ния (382) показывает, что можно положить $w = cr^4$, где c — неопределенное пока число; подставляя это значение в ур-ние (382), легко найдем, что:

$$c = \frac{q}{64D}$$

и потому

$$\bar{w} = \frac{qr^4}{64D}.$$

Подставляя это в ур-ние (385), получим общее решение для круглой пластинки под сплошной равномерной нагрузкой:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (386)$$

Для вычисления моментов воспользуемся уравнениями (340) и (350) (§ 85), преобразовав их к полярным координатам. Направляя ось OX вдоль радиуса r данной точки, аналогично (243), (§ 63), найдем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Внося это в ур-ния (340) и (350), найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ M_2 &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (387)$$

$$H_1 = H_2 = 0.$$

Здесь M_1 — изгибающий момент по площадке, нормальной к радиусу. M_2 — момент по радиальному сечению; крутящие моменты по рассматриваемым основным сечениям, как и следовало ожидать, ввиду симметрии пластинки и нагрузки отсутствуют.

Рассмотрим несколько частных случаев закрепления пластинки на контуре. Если мы возьмем полную пластинку без круглого выреза вокруг центра, то в общем решении (386) придется отбросить два первые члена; в противном случае в центре пластинки w , $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ обращаются в бесконечность, т. е. будут равны ∞ прогиб и кривизна пластинки. Следовательно получим:

$$w = C_3 + C_4 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (388)$$

Оставшиеся две произвольные постоянные можно определить из условий закрепления.

а. Если пластинка радиуса a заделана по контуру, то получим следующие условия на контуре:

$$\text{при } r = a; \quad w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Находя из этих условий C_3 и C_4 и подставляя их значения в ур-ние (388), получим:

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (389)$$

Далее по ур-ниям (387) найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q}{16} [a^2(1+\sigma) - r^2(3+\sigma)] \\ M_2 &= \frac{q}{16} [a^2(1+\sigma) - r^2(1+3\sigma)] \end{aligned} \right\} \quad (390)$$

Предлагаем читателю проверить эти формулы и найти $\max M$ на контуре пластинки и в центре ее; равным образом найти прогиб в центре. Все эти результаты предлагаем сверить с результатами § 8 в случае $b = a$.

б. Если пластинка шарнирно оперта по контуру, то условия на контуре имеют вид:

$$\text{при } r=a, \quad w=0; \quad M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0;$$

определяя отсюда C_3 и C_4 , получим из ур-ния (388):

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1+\sigma} \right]. \quad (391)$$

Далее найдем по ур-ниям (387):

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q}{16} [a^2(3+\sigma) - r^2(3+\sigma)] \\ M_2 &= \frac{q}{16} [a^2(3+\sigma) - r^2(1+3\sigma)] \end{aligned} \right\} \quad (392)$$

Предлагаем читателю вычислить $\max M$ и прогиб в центре пластинки в. Рассмотрим еще случай пластинки с шарнирно опертым краем при отсутствии нагрузки ($q=0$) но под действием равномерно распределенного момента $M_1 = M$ по контуру. В этом случае из ур-ния (388):

$$w = C_3 + C_4 r^2.$$

Постоянные придется определить из условий:

$$\text{при } r=a; \quad w=0; \quad -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = M.$$

Без труда получим тогда:

$$w = \frac{M}{2D(1+\sigma)} (a^2 - r^2). \quad (393)$$

Это решение оказывается необходимым при расчете днищ круглых цилиндрических резервуаров.

Здесь мы имеем дело со случаем чистого изгиба пластинки (§ 81).

В заключение приведем результаты, получающиеся в случае нагрузки пластинки сосредоточенной силой P , приложенной в центре пластинки.

Если пластинка заделана по контуру, то

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (394)$$

Если пластинка оперта шарнирно, то

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} \frac{3+\sigma}{1+\sigma} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (395)$$

Вычисление моментов по ур-ниям (387) не представит затруднений.

Комбинируя эти решения с предыдущими и приравнявая нулю прогиб в центре, можно решить задачу о пластинке, подпертой по контуру и в центре и нагруженной сплошной, равномерной нагрузкой.

Аналогия с мембраной. Метод Маркуса

§ 93. Продолжим несколько рассуждения § 81 и покажем новую форму, принимаемую основными ур-ниями пластинки при введении Лапласова оператора от прогиба:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

и приведенной суммы моментов:

$$\mathfrak{M} = \frac{M_1 + M_2}{1 + \sigma}. \quad (396)$$

В § 81 мы вывели ур-ние (342):

$$D \nabla^2 w = -\mathfrak{M}. \quad (397)$$

Выражения поперечных сил (360) (§ 86) можем написать так:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \\ N_2 &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (398)$$

Эти соотношения аналогичны известной зависимости для прямого бруса:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

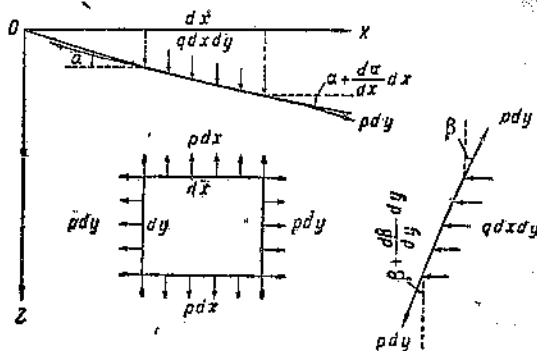
Далее ур-ние (359') (§ 86) на основании (397) перепишем так:

$$D \nabla^2 \left(-\frac{\mathfrak{M}}{D} \right) = q, \text{ или } \nabla^2 \mathfrak{M} = -q. \quad (399)$$

Для прямого бруса мы имели:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Выведем еще дифференциальное ур-ние равновесия гибкой, нерастяжимой мембраны (пленки), закрепленной на таком же контуре, как и рассматриваемая пластинка, и нагруженной такой же нагрузкой $q(x, y)$; это нам даст представление о веревочной кривой и ее дифференциальном ур-нии; натяжение мембраны по контуру (аналогичное натяжению веревочной кривой или ее полюсному расстройению) примем постоянным и равным p на единицу длины контура. При малых провисаниях мембраны z это натяжение можно принять постоянным во всех точках мембраны.



Фиг. 101.

Из фиг. 101 без труда напишем условие равновесия $\sum Z=0$ элемента размерами dx и dy , выделенного из мембраны; заменяя синусы малых углов самими углами, получаем:

$$pdy \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) - pdy \alpha + pdx \left(\beta + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy \right) - pdy \beta + qdxdy = 0,$$

или

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = -\frac{q}{p}. \quad (400)$$

Заменяя теперь углы тангенсами, получим приближенно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} &\approx \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

где z — ордината провисания мембраны. Подставляя это в ур-ние (400), получим дифференциальное ур-ние поверхности мембраны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{p}, \quad (401)$$

или короче:

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{p}. \quad (401')$$

Для веревочной кривой имеем аналогичное ур-ние:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{H},$$

где H — полюсное расстояние.

Сопоставим теперь ур-ния (397), (399) и (401'):

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D}. \quad (397)$$

$$\nabla^2 M = -\frac{q}{1}. \quad (399)$$

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{p}. \quad (401')$$

Из них сделаем следующие выводы, подобные выводам, основанным на аналогии между упругой линией и веревочной кривой.

1. Если положим $p=1$, то $z=M$; значит, при натяжении мембраны, равном единице, поверхность ее провисания под нагрузкой q дает эпюру приведенной суммы моментов M от этой нагрузки (ср. эпюра M , как веревочная кривая или веревочный многоугольник для данной нагрузки).

2. Если положим $p=D$; $q=M$, то $z=w$; следовательно, при натяжении мембраны, равном жесткости D , поверхность провисания мембраны под нагрузкой эпюры M дает искривленную поверхность пластинки. (Ср. — упругая линия, как веревочная кривая от нагрузки эпюрой M).

На этой аналогии между пластинкой и мембраной Г. Маркус построил свой способ расчета пластинки; мембрану он заменяет сеткой (ср. — приближенная замена веревочной кривой веревочным многоугольником) и этим дифференциальное ур-ние ее (401') превращает в ур-ние в конечных разностях; идя таким путем, он заменяет интегрирование дифференциального ур-ния (401') решением системы ур-ний первой степени¹.

¹ См. H. Marcus. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin, 1924.

Задача Сен-Венана

При элементарной трактовке изгиба прямого бруса вводится несколько допущений, облегчающих и упрощающих решение задачи. В частности (фиг. 84) принимаются во внимание лишь основные нормальные напряжения

$$Z_x = \frac{M}{J} x,$$

и касательные

$$X_x = Z_x = \frac{QS}{Jb};$$

при более точном подходе считают, что касательные напряжения в поперечном сечении не параллельны плоскости действия нагрузки и потому вводят еще составляющую Y_x . Прочими составляющими пренебрегают, полагая ¹

$$X_x = Y_y = X_y = 0. \quad (a)$$

Здесь условия

$$X_x = Y_y = 0, \quad (b)$$

очевидно, выражают предположение, что продольные волокна бруса не оказывают давления друг на друга. Условие

$$X_y = Ge_{xy} = 0$$

предполагает, что поперечные сечения продольных волокон не искажаются. Однако и при этих предположениях задача остается статически неопределимой; поэтому далее вводится, или геометрическая гипотеза Бернулли (закон плоских сечений), или статическая гипотеза Навье (гипотеза плоскости напряжений):

$$Z_x = A_1 x + B_1 y + C_1. \quad (c)$$

Но при условиях (b) третье из уравнений (V) § 18 дает

$$Z_x = Ee_{xx}, \quad (c')$$

внося это в (c), получим

$$e_{xx} = Ax + By + C, \quad (d)$$

т. е. гипотезу о том, что основное удлинение e_{xx} в любом поперечном сечении следует линейному закону.

Теперь нам представляется возможным посмотреть, возможны ли сделанные предположения (a) и (d) с точки зрения уравнений теории упругости и нет ли между ними каких-либо взаимных противоречий. Для этой цели мы зададимся условиями (a) и посмотрим, возможно ли при этом из основных уравнений теории упругости вывести зависимость (d).

¹ Ср. исходные предположения (311), § 77.

Заметим теперь же, что отсутствие нормальных напряжений X_x и Y_y возможно лишь в том случае, если боковая поверхность бруска свободна от нагрузки, которая приложена лишь на концевых поперечных сечениях¹. Имея это в виду, заметим, что поставленные условия (а) и (д) могут характеризовать не только изгиб, но и кручение бруска силами, действующими по концевым сечениям² (ср. например условия (89) и (90), § 27). Предпринимаемое нами исследование является начальной частью так называемой задачи Сен-Венана об общем случае косоугольного изгиба бруска, сопровождаемого кручением.

Поставим себе целью найти зависимость (д) из основных уравнений Ламе (VI) § 19, вычислив все вторые производные функции ζ_{xx}

$$\frac{\partial^2 \zeta_{xx}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta_{xx}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta_{xx}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_{xx}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \zeta_{xx}}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \zeta_{xx}}{\partial x \partial y}.$$

Условия (а) выразим поэтому в перемещениях при помощи закона Гука (V) и уравнений (III) (ср. ур-ния 54 § 19); кроме того воспользуемся зависимостями Сен-Венана (IV), что значительно упростит выкладки; введение этих зависимостей не является необходимым, так как к деформациям мы перейдем от перемещений; при этом ур-ния (IV) будут сами по себе удовлетворены (см. конец § 7).

Итак, пользуясь (V) и (III), выражаем условия (а):

$$X_x = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (e)$$

$$Y_y = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (f)$$

$$X_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (g)$$

Путем простых выкладок делаем отсюда ряд важных выводов. Складывая почленно (e) и (f), находим:

$$2\lambda \theta + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

сокращая на 2 и добавляя к обеим частям $\mu \frac{\partial w}{\partial z}$, получаем:

$$(\lambda + \mu) \theta = \mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

или

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \zeta_{zz}. \quad (h)$$

Вычитая теперь (f) из (e) почленно, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (i)$$

или

$$\zeta_{xx} = \zeta_{yy}. \quad (i_1)$$

¹ Если нагрузка имеется на боковой поверхности, то в местах ее действия нельзя избежать взаимного надавливания продольных волокон, а следовательно напряжений X_x и Y_y .
² Если искривление поперечных сечений (ср. глава V) одинаково на всем протяжении стержней, то $\zeta_{zz} = 0$, что дает частный случай уравнения (д).

На этом основании из (h):

$$2e_{xx} + e_{zz} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{xz},$$

или

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{zz} = -\sigma e_{zz}^1, \quad (i_2)$$

где σ — Пуассонов коэффициент.

Из (g):

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (k)$$

или

$$e_{xy} = 0. \quad (k')$$

Дифференцируя (i) по x и (k) по y и складывая результаты почленно, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ или } \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (l)$$

Дифференцируя же (i) по y и (k) по x и вычитая почленно, найдем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \text{ или } \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (m)$$

Возьмем теперь уравнения Ламе (VI) и, пользуясь полученными результатами (h), (l) и (m), напомним их так (при отсутствии объемных сил X, Y, Z):

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \nabla^2 w = 0,$$

или, сокращая на μ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 0, \text{ т. е. } \frac{\partial e_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0, \text{ т. е. } \frac{\partial e_{yz}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

$$\nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (o)$$

Целью предшествовавших преобразований над данными условиями (e), (f), (g) и уравнениями Ламе было получение выводов (i₁), (i₂), (k') и (n), которые все выражены нами через деформации $e_{xx}, e_{yy}, \dots$, так как конечной целью нашего исследования является деформация e_{zz} (ф-ла d) и так как уравнения Сен-Венана (IV), которые мы сейчас используем, также выражены через деформации.

¹ Это можно написать непосредственно, так как на основании (b) продольные волокна подвергаются лишь простому продольному растяжению.

Уравнения (IV) после сделанных выводов (i_1), (i_2), (k') и (n) упрощаются:

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} = 0, \quad (p_1)$$

$$-\sigma \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 0, \quad (p_2)$$

$$\frac{\partial e_{zz}}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z^2} = 0, \quad (p_3)$$

$$0 = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}, \quad (p_4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}.$$

Замечаем, что уравнение (p_4) дает нужное нам значение одной из вторых производных функции e_{zz} :

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (q)$$

Из уравнений (p_1), (p_2), (p_3) легко найдем, что

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z^2} = 0. \quad (r)$$

Таким образом, согласно намеченному плану, найдены 4 производные (q) и (r); остается найти

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y \partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z \partial x}.$$

Дифференцируя их по x , y и z , убедимся, что все получаемые результаты на основании (q) и (r) обратятся в нуль; например

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = 0,$$

на основании (q);

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2},$$

на основании (r) и т. д.

Поэтому, очевидно:

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y \partial z} = \text{const}, \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z \partial x} = \text{const}. \quad (s)$$

По найденным значениям производных (q), (r) и (s) легко установить вид функции e_{zz} . Заключаем, что она будет целой алгебраической функцией второй степени, но, согласно (r), в ней нет членов, содержащих квадраты неизвестных x , y и z ; согласно (q) отсутствует также член, содержащий произведение xy . Поэтому вид функции e_{zz} будет такой¹:

$$e_{zz} = ayz + bzx + cx + dy + ez + f \quad (t)$$

¹ Этот результат легко получить, интегрируя обычным способом систему уравнений (q) и (r); уравнения (s), являющиеся следствием предыдущих, можно не принимать во внимание.

Так как нас интересует закон, связывающий перемещения точек выбранного сечения

$$z = z_0,$$

то из (б) получаем для этого случая:

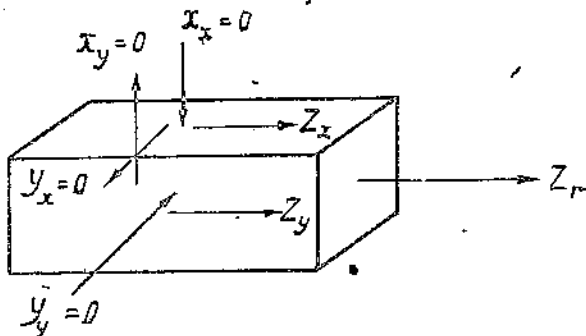
$$e_{zz} = (bz_0 + c)x + (az_0 + d)y + ez_0 + f,$$

или

$$e_{zz} = Ax + By + C,$$

что совпадает с (д).

Значит закон плоскости нормальных напряжений (с) есть следствие предположений (а). Резюмируя эти условия, а равно и сделанные нами выводы из них, приходим к таким заключениям о работе отдельного продольного волокна AB бруска (фиг. 102).



Фиг. 102.

А. Напряжения.

1. Нормальное давление между соседними волокнами отсутствует ($X_x = Y_y = 0$) и каждое волокно работает на растяжение или сжатие, как отдельный брусок; это возможно лишь тогда, если боковая поверхность бруска свободна от нагрузки.

2. Вдоль выбранного волокна

$$x = x_0$$

$$y = y_0$$

нормальное напряжение Z_z меняется по линейному закону (ф-лы б и с):

$$Z_z = E e_{zz} = E [(ay_0 + bx_0 + e)z + cx_0 + dy_0 + f] = Cz + D. \quad (u)$$

3. Касательные напряжения $X_y = Y_x$, нормальные к длине волокна, отсутствуют.

4. Касательные напряжения вдоль данного волокна

$$Z_x = \mu e_{zx},$$

$$Z_y = \mu e_{zy},$$

остаются постоянными, так как на основании (n):

$$\frac{\partial Z_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_y}{\partial z} = 0.$$

В. Деформации

1. Продольное удлинение волокон e_{zz} , в соответствии с (u), меняется по линейному закону вдоль бруска и в соответствии с (д) по линейному закону в данном сечении.

2. Изменения поперечных размеров волокна e_{xx} и e_{yy} на основании (i₁) равны между собой; вызваны они лишь продольным сжатием или растяжением волокна (у-ние i₂).

3. Искривление поперечного сечения волокна (поперечные сдвиги) отсутствует, так как $e_{xy} = 0$.

4. Продольные сдвиги e_{yz} и e_{zx} согласно (n) постоянны вдоль волокна.

Рассмотренное нами напряженное состояние содержит в себе между прочим следующие частные случаи:

а. Чистый косой изгиб со сжатием или растяжением, если дополнительно к условиям (а) имеем $X_z = Y_z = 0$.

б. Кручение, если кроме условий (а) имеем $Z_x = 0$.

Замечаем, что сделанные нами выводы о напряжениях и деформациях подтверждают те предположения, которые мы делаем, приступая в сопротивлении материалов к элементарному изучению чистого изгиба; подтверждаются они и для случая поперечного изгиба, если внешние силы (нагрузка и реакции опор) приложены лишь к концевым поперечным сечениям бруска (например для бруска, закрепленного одним концом и нагруженного силой на другом конце).

В заключение заметим следующее. Равенство (d) получается, как следствие гипотезы плоских сечений Бернулли; но нельзя сделать обратного заключения, что равенство (d) приводит обязательно к гипотезе плоских сечений; характеризуя относительную деформацию e_{xz} , оно оставляет открытым вопрос о форме поперечного сечения и сохраняет силу при искривлении поперечных сечений, если это искривление для всех поперечных сечений одинаково¹. В конце § 55 мы отметили уже это обстоятельство для случая поперечного изгиба пластинки; то же справедливо и для задачи § 77. Исходя из гипотезы плоских сечений, мы получаем соотношение типа (336) (§ 81); однако ясно, что это соотношение, являющееся основным в элементарной теории изгиба, сохранится, если оба концевые сечения элемента на фиг. 89 искривятся одинаково и в одном и том же направлении; отсюда понятно, почему в § 55 и 77 для основного нормального напряжения оказалась справедливой формула, данная элементарной теорией, несмотря на искривление поперечных сечений.

¹ Такое условие одинакового искривления сечений в задаче Сен-Венана соблюдено, ибо вызывающие его сдвиги e_{xz} и e_{yz} согласно (и) постоянны по длине бруска.

