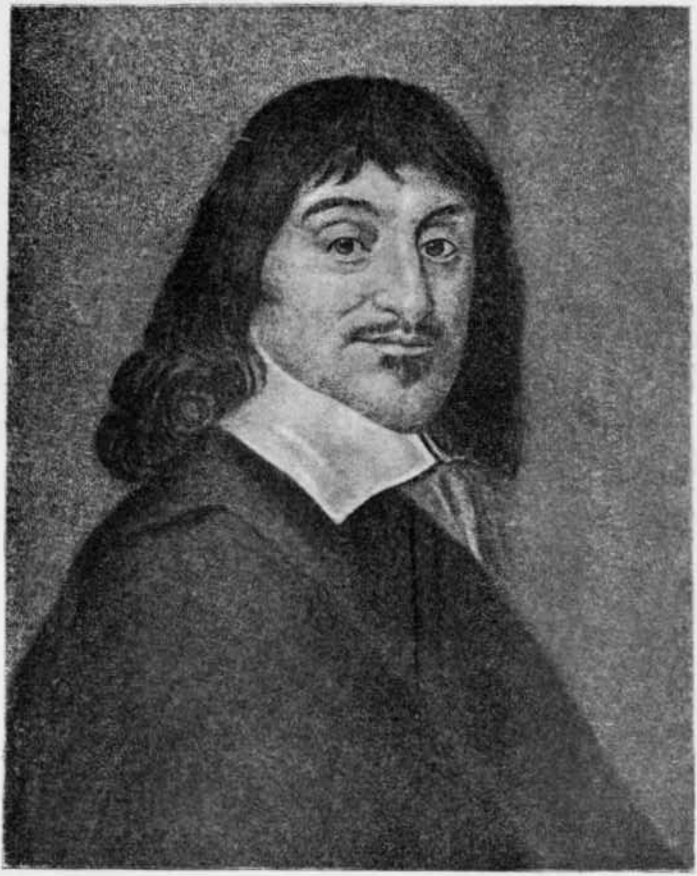
ДЕКАРТ

ГЕОМЕТРИЯ

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
22	5 снизу	ни описать,	ни описать его,
198	2 „	первого	второго
214	10 сверху	$2x-1$	$2k-1$
262	20 снизу	82§	820

Зак. № 106. Декарт, Геометрия



РЕНЭ ДЕКАРТ (1596—1650).

С портрета Фр. Гальса (Париж, Лувр).

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ФИЗИКА
МЕХАНИКА
МАТЕМАТИКА
АСТРОНОМИЯ

DISCOURS

DE LA METHODE

Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.

PLUS

LA DIOPTRIQUE.

LES METEORES.

ET

LA GEOMETRIE.

Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE

De l'Imprimerie de IAN MAIRE.

CIↃ IↃ C XXXVII.

Avec Privilege.

Титульный лист „Рассуждения о методе", в приложении к которому впервые была опубликована „Геометрия" Декарта.

РЕНЭ ДЕКАРТ

ГЕОМЕТРИЯ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ
ИЗБРАННЫХ РАБОТ П. ФЕРМА
И ПЕРЕПИСКИ ДЕКАРТА

ПЕРЕВОД, ПРИМЕЧАНИЯ И СТАТЬЯ
А. П. ЮШКЕВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1938 Ленинград

Т 10-5-4
ТКК № 48

Редактор *Г. Ф. Рыбкин* Технич. редактор *Е. Г. Шпак*

Сдано в производство 1/II 1938 г.
Подписано в печать 29/IX 1938 г.
Формат $82 \times 110^1/_{32}$
Печ. л. $18^1/_2$. Бум. л. $9^1/_4$ + 1 вкл.
Учетно-авторских листов 17,3
Тираж 6.000 экз.

Учетный № 4024/а.
Издат. № 89.
Уполном. Главлита № Б-46479
Колич. тип. зн. в 1 б. л. 44.000
Заказ № 106
Бумага Камской ф-ки

2-я тип. ГОНТИ им Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ.

В 1937 году исполнилось триста лет со дня первого издания „Геометрии" Р. Декарта, — и первый русский перевод ее оказывается, таким образом, юбилейным. Но несмотря на свой почтенный возраст, „Геометрия" представляет и ныне интерес не только для историка науки. Блестящий образец глубокого влияния философских идей на развитие математики в XVII веке, она привлечет внимание и философов, и историков, и математиков. Вместе с тем она особенно ценна для педагога. Знание происхождения и развития основных понятий и методов, которыми мы пользуемся, позволяет с полнотой уяснить их достоинства и недостатки, проявлявшиеся в различные времена по-разному. В этом отношении педагогу будет полезно знакомство с классическим трудом Декарта, от которого начинаются новая алгебра и новая геометрия.

Вместе с „Геометрией", в качестве приложений, издаются некоторые другие работы, а также письма. К ним относятся в первую очередь составленное под руководством Декарта „Исчисление господина Декарта", излагающее его чисто алгебраический алгорифм. Далее приложено небольшое „Введение в изучение плоских и телесных мест" П. Ферма, пришедшего к открытию аналитической геометрии независимо от Декарта и почти одновременно с ним.

Математическое творчество Декарта было бы охарактеризовано неполно, если бы читателю дана была только „Геометрия". Многие выдающиеся результаты рассыпаны в его колоссальной переписке. Дать перевод всех математических писем было бы громоздко и, пожалуй, излишне. Но не привести ничего — значило бы обрисовать Декарта-математика и его связи со всей тогдашней математической проблематикой крайне односторонне. Я выбрал поэтому наиболее интересные письма. В них вошли: часть знаменитой полемики Декарта, Ферма и других ученых об определении экстремумов и проведении касательных, а также ряд писем, содержащих крупнейшие открытия Декарта в области инфинитезимальных вычислений. В связи с переводом переписки между Ферма и Декартом я привел небольшой отрывок из соответствующего сочинения Ферма. Целиком опущенными оказались менее важные работы Декарта по теории чисел. Публикация писем имеет тем более оснований, что в XVII веке они заменяли журналы, осведомляя о новых открытиях и задачах довольно широкий круг лиц.

Перевод „Геометрии" сделан с издания сочинений Декарта, выпущенного Ш. Адамом и П. Таннери. Я сравнил его, кроме того, с латинским переводом „Геометрии", данным Ф. ван-Скаутеном. Правда, Декарт отзывался о переводе Скаутена дурно, он даже не заглянул в него. Латынь своего последователя Декарт считал неуклюжей и заранее ожидал в переводе неясностей. Однако латинский текст весьма точен и кое в чем исправил ошибки французского оригинала, также не отличающегося ни простотой, ни изяществом слога. Расхождения этих двух основных изданий отмечены в примечаниях.

„Геометрия" состоит из трех книг, каждая из которых в настоящем издании содержит ряд подзаголовков, выделенных курсивом; в оригинальном издании (и в издании Адама-Таннери) они напечатаны на полях. Для удобства в переводе чертежи занумерованы. Цифрами в квадратных скобках [ ] отмечены места, к которым в конце книги я приложил примечания. Цель их — ориентировать читателя во времени, показать развитие у Декарта отдельных вопросов, связь его идей с работами других ученых и их последующую историю, объяснить, где я мог, некоторые темные места, отметить наиболее важные ошибки. Несколько примечаний взято у П. Таннери. В других случаях его примечания помогли мне при составлении собственных. Все это указано, где следует. В заключительной статье я постарался изложить общее значение математической деятельности Декарта в историческом аспекте и выявить переплетение его математических идей с философскими устремлениями самого мыслителя и его эпохи.

А. ЮШКЕВИЧ.

РЕНЭ ДЕКАРТ

ГЕОМЕТРИЯ

ПРЕДУВЕДОМЛЕНИЕ.

До сих пор я старался быть понятным для всех [1]. Однако я опасаюсь, что этот трактат сможет быть прочитан лишь теми, кому уже известно содержание книг по геометрии, ибо, поскольку в последних содержится ряд вполне доказанных истин, я счел излишним их повторять, хотя и пользовался ими.

КНИГА ПЕРВАЯ.

О ЗАДАЧАХ, КОТОРЫЕ МОЖНО ПОСТРОИТЬ, ПОЛЬЗУЯСЬ ТОЛЬКО КРУГАМИ И ПРЯМЫМИ ЛИНИЯМИ [2].

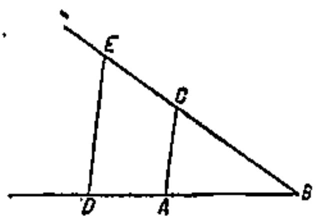
Все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий [3].

Как исчисление арифметики относится к построениям геометрии?

Подобно тому как вся арифметика состоит только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением [4], подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии, — найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как другая к единице, а это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-либо другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т. д. корень. С целью быть более понятным, я без опасений введу эти арифметические термины в геометрию.

Умножение.

Пусть, например (черт. 1), AB является единицей и требуется умножить BD на BC; для этого я должен только соединить точки A и C, затем провести DE параллельно CA, и BE будет результатом этого умножения.



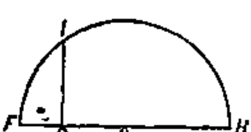
Черт. 1.

Деление.

Или же, если BE нужно разделить на BD, то, соединив точки E и D, я провожу AC параллельно DE, и BC будет результатом этого деления.

Извлечение квадратного корня.

Или, если нужно извлечь квадратный корень из GH, то я прибавляю (черт. 2) к GH, по продолжению, прямую FG, являющуюся единицей, и, разделив FH в точке K на две равные части, описываю из центра K окружность FIH[5]; если затем провести от точки G к точке I прямую, перпендикулярную к FH, то GI будет искомым корнем. Я здесь ничего не говорю ни о кубическом, ни о других корнях, так как мне будет удобнее рассмотреть их дальше.



Черт. 2.

Как можно употреблять буквенные обозначения (les chiffres) в геометрии?

Но часто нет нужды проводить эти линии на бумаге, а достаточно их обозначить какими-нибудь буквами, каждую линию одной буквой [6]. Так, чтобы прибавить линию BD к GH, я называю одну из них a, а другую b и пишу $a+b$; и я пишу $a-b$ при вычитании b из a; и ab при их перемножении; и $\frac{a}{b}$ при делении a на b; и aa или a^2 при умножении a самоё на себя; и a^3 при умножении ее еще раз на a и так до бесконечности; и $\sqrt{a^2+b^2}$ при извлечении квадратного корня из a^2+b^2; и $\sqrt{C\cdot a^3-b^3+abb}$ при извлечении кубического корня из a^3-b^3+abb и так далее [7].

При этом следует заметить, что под a^2 или b^3, или тому подобным я обыкновенно понимаю лишь сами простые линии, хотя, чтобы пользоваться наименованиями, употребительными в алгебре, я их называю квадратами или кубами и т. д.

Следует также заметить, что если единица в рассматриваемом вопросе не определена, то все части одной и той же линии должны всегда [8] выражаться одним и тем же числом измерений [9]: так, например, здесь a^3 имеет столько же измерений, как и abb или b^3, из которых я составил линию, названную мной $\sqrt{C\cdot a^3-b^3+abb}$; но если единица определена, то дело обстоит иначе, ибо тогда повсюду, где имеется слишком много или слишком мало измерений, можно подразумевать единицу; так, если нужно извлечь кубический корень из $aabb-b$, то следует представлять себе, что величина [10] $aabb$ поделена один раз на единицу, а другая величина b два раза умножена на нее.

Между прочим, чтобы легче было вспомнить названия этих линий, всегда следует по мере их установления или же изменения составлять их отдельный список, записывая, например, так:

$AB \propto 1$, то есть AB равна 1,
$GH \propto a$,
$BD \propto b$ и т. д. [11].

Как следует получать уравнения, служащие для решения задач?

Итак, желая решить какую-нибудь задачу, следует сперва ее рассматривать как уже решенную и дать названия всем линиям, которые представляются необходимыми для ее построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из этих двух способов, равны членам, полученным другим [12]. И следует найти столько подобных уравнений, сколько было предположено неизвестных линий. Либо же, если не удастся найти их столько и если, тем не менее, ничто не опущено из требуемого в вопросе, то это свидетельствует о том, что вопрос не вполне определен; в этом случае для всех неизвестных линий, которым не соответствуют никакие уравнения, можно взять произвольные известные линии. Если после этого их останется еще несколько, то, чтобы выразить каждую из этих неизвестных линий, нужно по порядку воспользоваться каждым из оставшихся также уравнений, либо рассматривая его отдельно, либо же сравнивая его с другими, и поступать так, приводя [13] их до тех пор, пока не останется только одна из них, которая равна какой-нибудь другой известной, либо же у которой квадрат или куб, или квадрат квадрата, или сверхтело, или квадрат куба и так далее не окажется равным тому, что получится при сложении или вычитании двух или нескольких других величин, из которых одна является известной, а другие состоят из каких-либо средних пропорциональных между единицей и этим квадратом или кубом, или квадратом квадрата и т. д., умноженных на другие известные величины [14]. Я это записываю так:

$$z \propto b,$$

или

$$z^2 \propto -az + bb,$$

или

$$z^3 \propto +az^2 + bbz - c^3,$$

или

$$z^4 \propto az^3 - c^3z + d^4$$

и т. д.

То есть: z, которую я считаю неизвестной величиной, равна b; или же квадрат z равен квадрату b минус a, умноженная на z; или же куб z равен a, умноженной на квадрат z плюс квадрат b, умноженный на z, минус куб c; и так далее.

Если задача может быть построена при помощи кругов и прямых линий, или же конических сечений, или даже с помощью какой-нибудь другой линии, не более чем одной или двумя степенями [15] более сложной, то все неизвестные величины всегда могут быть таким путем сведены только к одной. Я, однако, не стану задерживаться и излагать это подробнее, ибо тогда я лишил бы вас удовольствия разобрать это самостоятельно, а также пользы, которую приобрел бы при этом упражнении ваш ум и которая, на мой взгляд, составляет основную выгоду, извлекаемую из этой науки. Кроме того, я не нахожу в этом вопросе таких затруднений, которых бы не мог преодолеть тот, кто хоть несколько сведущ в обычной геометрии и алгебре и кто внимательно познакомится со всем тем, что есть в этом сочинении.

Поэтому я ограничусь здесь предупреждением, что если только, приводя эти уравнения, вы не упустите случая воспользоваться всеми делениями, которые окажется возможным выполнить [16], то неизбежно получите наиболее простые выражения, к которым может быть приведен вопрос.

Каковы плоские задачи [17]?

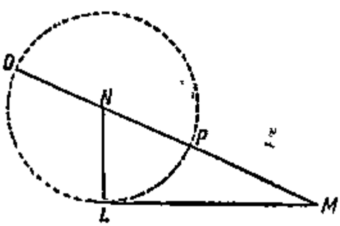
Если вопрос может быть решен средствами обыкновенной геометрии, то есть при употреблении только прямых линий и окружностей, начерченных на плоской поверхности, то, когда будет вполне приведено последнее уравнение, в нем будет содержаться самое большее один неизвестный квадрат, приравненный к результату сложения или вычитания его корня, умноженного на какую-нибудь известную величину, и какой-нибудь другой также известной величины.

Как они решаются?

И тогда этот корень или неизвестную линию найти легко. Так, например, если я имею

$$z^2 \infty az + bb,$$

то я строю (черт. 3) прямоугольный треугольник NLM, одна сторона которого LM равна b, квадратному корню из известной величины bb, а другая LN равна $\frac{1}{2}a$, половине другой известной величины, которая умножалась на z, линию, принятую мной за неизвестную. Если затем продолжить MN, основание [18] этого треугольника до O так, чтобы NO было равно NL, то вся линия OM и будет искомой линией z. Выражается эта линия так:



Черт. 3.

$$z \infty + \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} \text{ [19]}.$$

Если же я имею

$$yy \infty - ay + bb$$

и искомой величиной является y, то я строю тот же прямоугольный треугольник NLM и от его основания MN отнимаю NP, равную NL; остаток PM и будет искомым корнем y. Таким образом, я имею

$$y \infty -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}.$$

И точно так же, если бы я имел

$$x^4 \infty -ax^2+b^2,$$

то PM было бы x^2, и я получил бы

$$x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$$

и так далее.

Наконец, если я имею

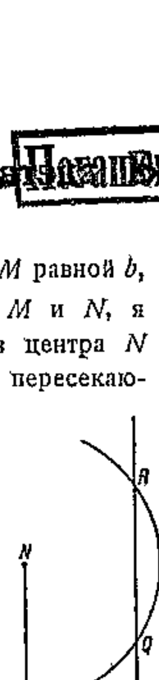
$$z^2 \infty az-bb,$$

то я полагаю, как и раньше, NL равной $\frac{1}{2}a$, LM равной b, а затем, вместо того чтобы соединять точки M и N, я провожу (черт. 4) MQR параллельно LN и из центра N описываю окружность, проходящую через L и пересекающую MQR в точках Q и R. Искомой линией z будет MQ или же MR, так как в этом случае она выражается двояким образом, а именно

$$z \infty \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb},$$

и

$$z \infty \frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}.$$



Черт. 4.

Если же окружность, имеющая центр в точке N и проходящая через точку L, не пересекает и не касается прямой MQR, то уравнение не имеет ни одного корня, так что можно утверждать, что построение предложенной задачи невозможно [20].

Впрочем, те же корни можно найти бесчисленным множеством других способов, и я хотел привести эти способы лишь ради их крайней простоты и с целью показать, что все задачи обыкновенной геометрии можно построить, не прибегая ни к чему сверх того немногого, что содержится в разъясненных мной четырех фигурах. Я полагаю, что древние не заметили этого, ибо в противном случае они не написали бы столько толстых книг, в которых уже одна только последовательность предложений показывает нам, что они не обладали истинным методом, который позволил бы найти их все, а лишь собрали им встретившиеся.

Пример из Паппа.

Только что сказанное отчетливо подтверждается тем, что пишет в начале своей седьмой книги Папп [21]. Остановившись сперва несколько на перечислении всего того, что было написано по геометрии его предшественниками, Папп переходит под конец к одному вопросу, который, по его словам, не могли полностью решить ни Эвклид [22], ни Аполлоний [23], ни кто-либо другой. Вот его собственные слова*):

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis; sed neque paululum quid addere iis quae Euclides scripsit, per ea tantum conica quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt, etc.

„Однако, вопрос о геометрическом месте к трем или четырем линиям, который, по словам Аполлония в его III книге [24], не был разрешен с достаточной полнотой Эвклидом, не смог быть разрешен до конца ни им самим, ни кем-либо другим. Не было даже ничего добавлено к тому, что написал об этом Эвклид, — по крайней мере, если говорить лишь об уже исследованных во времена Эвклида конических сечениях и т. д.“

И несколько дальше он поясняет, в чем состоит этот вопрос:

*) Я привожу латинский перевод, а не греческий текст, чтобы каждый мог легче его понять.

At locus ad tres et quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se jactat et ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est huiusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis, ab uno et eodem puncto ad tres lineas in datis angulis rectae lineae ducantur, et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquae: punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineae ducantur; et rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit: similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Siquidem igitur ad duas tantum, locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat; earum unam, neque primam, et quae manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hae sunt:

Si ab aliquo puncto, ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus et data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, et data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum quod tribus reliquis continetur; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.

„Вот каково то место к трем или четырем линиям, по поводу которого Аполлоний расточает себе великие похвалы, не обнаруживая никакой благодарности к своему предшественнику. Если даны по положению три прямые и из одной и той же точки проведены под данными углами к этим трем прямым другие три прямые и если дано отношение прямоугольника, построенного на двух из проведенных прямых к квадрату третьей, то точка будет находиться на данном по положению телесном месте [25], т. е. на одном из трех конических сечений. Далее, если провести к четырем данным по положению прямым под данными углами четыре других прямых и если дано отношение прямоугольника на двух проведенных прямых к прямоугольнику на двух других, то точка также будет находиться на данном по положению коническом сечении. С другой стороны, если прямых будет только две, то установлено, что место будет плоским. В случае, же когда прямых больше четырех, то точка будет находиться на месте, принадлежащем к числу до сих пор неизвестных, которые называют просто линиями и о природе или свойствах которых ничего неизвестно. Одну из этих линий, не первую, но которая представлялась наиболее очевидной, они построили и показали, что она приносит пользу [26]. Вот предложения, относящиеся к этим местам:

Если к пяти данным по положению прямым из какой-нибудь точки провести под данными углами другие прямые и если дано отношение прямоугольного параллелепипеда, построенного на трех проведенных прямых, к прямоугольному параллелепипеду, построенному на двух других и какой-либо данной, то точка будет находиться на данной по положению линии. Если данных прямых будет шесть и если будет дано отношение тела, построенного на трех проведенных прямых, к телу, построенному на трех других, то точка также будет находиться на данной по положению линии. Если же прямых больше шести, то уже нельзя говорить о данном отношении какого-нибудь предмета, построенного на четырех прямых, к предмету, построенному на других, потому что не существует ничего, что заключало бы больше чем три измерения".

Прошу вас попутно заметить, что боязнь древних употреблять в геометрии арифметические термины, которая могла быть вызвана лишь тем, что они не понимали достаточно ясно связи между этими науками, породила много неясностей и неудобств в их способе изъясняться. Так, Папп продолжает следующим образом:

Acquiescunt autem his qui paulo ante talia interpretati sunt; neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones haec, et dicere, et demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto, ad positione datas rectas lineas, ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem; si vero octo, et reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter, quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum haec, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, etc.

„Однако, незадолго до нас стали позволять себе выражаться подобным образом, не указывая впрочем при этом на что-либо сколько-нибудь вразумительное [27]. Но эти предложения можно и высказать и доказать общим образом посредством сложных отношений [28] следующим путем. Если к данным по положению прямым провести из какой-нибудь точки под данными углами другие прямые и если дано отношение, составленное из отношения одной проведенной прямой к другой, отношения другой пары проведенных прямых, отношения третьей пары и, наконец, отношения последней проведенной прямой к данной прямой — если прямых всего семь — или же отношения двух последних прямых — если их восемь, — то точка будет находиться на данных по положению линиях. То же самое можно сказать при любом, четном или нечетном числе прямых. Но, как я говорил, ни одно из мест, следующих за местом к четырем прямым, еще не было установлено так, чтобы линия стала известной, и т. д."

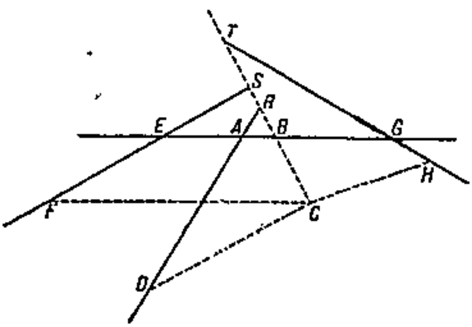
Таким образом вопрос, начало решению которого положил Эвклид, продолжение дал Аполлоний, но который не был решен до конца никем, заключался в следующем. Если имеются три, четыре или большее количество данных по положению прямых, то, во-первых, требуется найти такую точку, из которой можно провести к каждой из этих прямых по одной прямой, образующей с нею заданный угол, так как, если прямых лишь три, то прямоугольник, построенный на двух проведенных из одной точки прямых, должен находиться в данном отношении к квадрату третьей, а если их четыре, то он должен находиться в данном отношении к прямоугольнику на двух других. Или же, если прямых пять, то параллелепипед, составленный из трех прямых, должен находиться в данном отношении к параллелепипеду, составленному из двух других прямых и некоторой данной линии. Или же, если их шесть, то параллелепипед, составленный из трех прямых, должен находиться в данном отношении к параллелепипеду из трех других. Или же, если их семь, то произведение четырех из них друг на друга [29] должно находиться в данном отношении к произведению трех других и еще некоторой данной линии. Или же, если их восемь, то произведение четырех должно находиться в данном отношении к произведению четырех других. Таким образом задача может быть распространена и на любое иное число линий. Затем, так как поставленным здесь условиям всегда может удовлетворять бесчисленное количество различных точек, то требуется еще узнать и провести линию, на которой все они должны находиться. И Папп говорит, что если даны только три или четыре прямые, то такой линией является одно из трех конических сечений; но он отнюдь не пытается ни определить, ни описать, ни просто выяснить, где должны находиться все эти точки, когда вопрос предложен в большем числе линий. Он только добавляет, что древние придумали одну такую линию, полезность которой при этом они показали, но ту, которая казалась наиболее очевидной и все же не была первой. Это побудило меня испытать, нельзя ли посредством метода, которым я пользуюсь, пойти столь же далеко, как и древние [30].

Ответ на вопрос Паппа.

В первую очередь я выяснил, что если вопрос предложен только в трех, четырех или пяти линиях, то искомые точки всегда можно найти при помощи простой геометрии, то есть пользуясь только линейкой и циркулем и не делая ничего, кроме того, о чем уже говорилось; исключением является лишь случай с пятью данными линиями, когда все они параллельны. В этом случае, а также если вопрос предложен в шести, или семи, или восьми, или девяти линиях, искомые точки всегда можно найти при помощи геометрии тел, то есть посредством какого-нибудь из трех конических сечений; исключением является лишь случай с девятью данными линиями, когда все они параллельны. В этом случае опять, как и в случае десяти, одиннадцати, двенадцати или тринадцати линий, искомые точки можно найти при помощи некоторой кривой, одним порядком более сложной, чем конические сечения; исключением является лишь случай с тринадцатью линиями, когда все они параллельны. В этом случае, а также в случае четырнадцати, пятнадцати, шестнадцати и семнадцати линий нужно применить кривую, еще одним порядком более сложную, чем предыдущая, и т. д. до бесконечности.

Затем я установил также, что если имеются лишь три или четыре данные линии, то все искомые точки находятся иногда не только на каком-либо коническом сечении, но и на окружности круга или же на прямой. Далее, если данных линий пять или шесть, или семь, или восемь, то все эти точки находятся на какой-либо из линий, одним порядком более сложной, чем конические сечения, и невозможно вообразить себе среди них такую, которая не могла бы принести пользу в этом вопросе; но опять-таки эти точки могут находиться и на коническом сечении или на окружности или на прямой. Если же прямых девять, десять, одиннадцать или двенадцать, то эти точки находятся на линии, которая может быть лишь одним порядком более сложной, чем предыдущие; и все эти, одним порядком более сложные, линии могут при этом пригодиться [31], и т. д. до бесконечности.

Наконец, первая и наиболее простая из всех после конических сечений линия, это линия, которая может быть описана пересечением параболы и прямой по способу, который скоро будет разъяснен. Таким образом я полагаю, что полностью удовлетворил тому, чего, по словам Паппа, искали здесь древние; и я попытаюсь изложить доказательство в немногих словах, ибо мне уже наскучило так много об этом писать.



Черт. 5.

Допустим (черт. 5), что AB, AD, EF, GH и т. д. суть несколько данных по положению линий; требуется найти некоторую точку, например C, такую, что если провести от нее к данным прямым другие прямые, например CB, CD, CF и CH, образующие с ними данные углы CBA, CDA, CFE, CHG и т. д., то произведение одной части этих линий будет равно произведению других, или же они будут находиться между собой в каком-нибудь другом данном отношении: это отнюдь не затрудняет вопроса [32].

Как нужно в этом примере установить члены, чтобы притти к уравнению?

В первую очередь я предполагаю, что дело уже сделано, и, чтобы избежать смешения всех этих линий, принимаю одну из данных и одну из искомых линий, например AB и CB, за главные, к которым я постараюсь также отнести все остальные. Обозначим отрезок линии AB, находящийся между точками A и B, через x, а BC через y. Затем продолжим все данные линии до пересечения с этими двумя, также продолженными, если это нужно и если они к ним не параллельны. Пусть, как вы здесь видите, они пересекают линию AB в точках A, E, G и BC в точках R, S, T. Далее, так как все углы треугольника ARB даны, то дано также отношение между сторонами AB и BR, которое я полагаю равным отношению z к b. Так как AB есть x, то RB будет $\frac{bx}{z}$ и вся CR будет $y+\frac{bx}{z}$, ибо точка B находится между C и R; если же R находилось бы между C и B, то CR была бы $y-\frac{bx}{z}$, и если бы C находилась между B и R, то CR была бы $-y+\frac{bx}{z}$. Углы треугольника DRC также даны и, значит, дано также отношение между сторонами CR и CD, которое я полагаю равным отношению z к c; и так как CR есть $y+\frac{bx}{z}$, то CD будет $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$. Далее, так как линии AB, AD и EF даны по положению, то дано также и расстояние между точками A и E. Если назвать это расстояние k, то EB будет равно $k+x$, но оно было бы $k-x$, если бы точка B находилась между E и A, и $-k+x$, если бы точка E лежала между A и B. Затем, так как даны все углы треугольника ESB, то дано также отношение BE к BS, которое я полагаю равным отношению z к d; так что BS есть $\frac{dk+dx}{z}$, и вся линия CS будет $\frac{zy+dk+dx}{z}$; но она была бы $\frac{zy-dk-dx}{z}$, если бы точка S лежала между B и C, и $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, если бы точка C лежала между B и S. Далее, даны три угла треугольника FSC и, следовательно, отношение CS к CF, которое положим равным отношению z к c; тогда вся линия CF будет $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Точно так же (черт. 5, стр. 24) дана AG, которую я называю l; значит BG будет $l-x$. Затем из треугольника BGT известно отношение BG к BT, которое положим равным отношению z к f; значит BT будет $\frac{fl-fx}{z}$ и $CT \propto \frac{zy+fl-fx}{z}$. Затем, опять-таки благодаря треугольнику TCH, дано отношение TC к CH; положив его равным отношению z к g, мы получим, что $CH \propto \frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Итак, вы видите, что каково бы ни было число данных по положению линий, каждая из линий, проведенных выше под данными углами из точки C, согласно условиям вопроса всегда может быть выражена при помощи трех членов. Один из них представляет собой неизвестную величину y, умноженную или деленную на какую-нибудь другую известную величину; другой — неизвестную величину x, также умноженную или деленную на какую-нибудь другую известную величину, а третий — вполне известную величину. Исключение встретится только тогда, когда прямые параллельны либо линии AB, причем исчезает член, содержащий величину x, либо же линии CB, причем исчезает член, содержащий величину y. Это обстоятельство слишком очевидно для того, чтобы стоило задерживаться на его объяснении. Что касается знаков $+$ и $-$, присоединяющихся к этим членам, то они могут варьировать всеми мыслимыми способами.

Далее вы видите также, что если перемножить некоторые из этих линий друг с другом, то встречающиеся в произведении величины x и y могут каждая обладать лишь таким числом измерений, сколько перемножалось линий, для выражения которых они служат. Таким образом в произведении только двух линий они никогда не имеют больше двух измерений, в произведении трех линий — больше трех, и так далее до бесконечности.

Как находят, что задача плоская, если она предложена не более, чем в пяти линиях?

Далее, так как для определения точки C требуется выполнение лишь одного условия, а именно того, что произведение некоторого числа этих линий должно быть равно или же (что отнюдь не сложнее) должно находиться в данном отношении к произведению других, то одну из неизвестных величин x или y можно выбрать произвольно, а другую найти из этого уравнения. При этом видно, что если вопрос предложен не более, чем в пяти линиях, то величина x, вовсе не служащая для выражения первой линии, всегда может иметь в уравнении не более чем два измерения. Так что, если взять для y какую-нибудь известную величину, то останется только

$$xx \propto + \text{ или } -ax + \text{ или } -bb,$$

и, значит, величину x можно будет найти описанным выше образом при помощи циркуля и линейки. Придавая линии y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и, таким образом, получим бесконечное количество различных точек, вроде той, которая обозначена C: они опишут требуемую кривую линию.

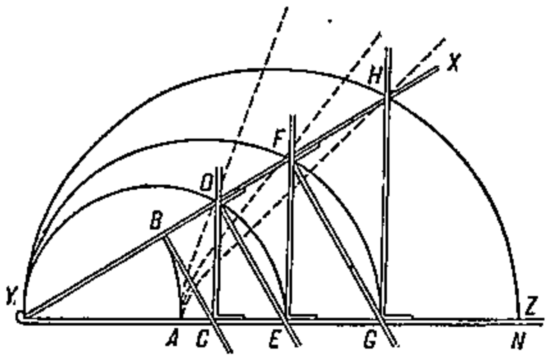
Если вопрос предложен в шести или большем числе линий и если между данными имеются линии, параллельные BA или BC, то также может оказаться, что одна из двух величин x или y имеет в уравнении лишь два [33] измерения и, значит, точку C можно найти при помощи линейки и циркуля. Но наоборот, если все прямые параллельны, то, даже когда вопрос предложен только в пяти линиях, найти таким образом точку C нельзя; вследствие того, что в этом случае величина x совсем не содержится в уравнении, уже нельзя вместо величины, названной y, взять известную величину, а нужно найти ее самое. И поскольку она в этом случае будет иметь три измерения, то найти ее можно лишь извлекши корень кубического уравнения, что, вообще говоря, не прибегая к помощи по меньшей мере одного конического сечения, выполнить невозможно. Далее, если дано до девяти линий, которые не все параллельны между собой, то всегда можно сделать так, чтобы уравнение восходило не выше квадрата квадрата. В этом случае его также всегда можно решить по способу, который я объясню в дальнейшем, при помощи конических сечений. Далее, если дано до тринадцати линий, то можно добиться того, чтобы уравнение восходило не выше квадрата куба, благодаря чему уравнение можно будет решить по способу, который я также изложу в дальнейшем, при помощи некоторой линии, лишь одним порядком более сложной, чем конические сечения. Вышеизложенное составляет первую часть того, что мне нужно здесь доказать. Прежде чем перейти ко второй части, я должен высказать некоторые общие соображения о природе кривых линий.

КНИГА ВТОРАЯ.

О ПРИРОДЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ.

Какие кривые линии могут быть допущены в геометрии?

Древние очень хорошо заметили, что среди задач геометрии одни плоски, другие телесны и третьи линейны; это значит, что одни из них можно построить, проводя лишь прямые линии и круги, тогда как другие требуют применения по меньшей мере какого-нибудь конического сечения и, наконец, третьи — какой-нибудь другой, более сложной, линии. Однако меня удивляет, что вместе с тем древние не различали разных порядков этих более сложных линий, и я не могу понять, почему они называли их механическими, а не геометрическими. Действительно, если считать, что это было вызвано необходимостью употреблять при их проведении какие-нибудь машины, то в силу тех же соображений пришлось бы исключить круги и прямые, так как и их начертить на бумаге можно лишь при помощи циркуля и линейки, которые тоже можно назвать машинами. Точно так же это различие не могло быть вызвано и тем, что необходимые для их проведения инструменты более сложны, чем линейка и циркуль, и не могут быть столь же точными: на этом основании следовало бы скорее исключить их уже из механики, стремящейся к точности выполняемых рукою работ, чем из геометрии, преследующей лишь точность рассуждений, которая может быть, несомненно, столь же совершенна в случае этих линий, как и в случае других. Я бы не сказал также, что это вызывалось желанием древних не увеличивать число своих постулатов и что они удовлетворились признанием своего права соединить две данные точки прямой линией и описать из данного центра окружность, проходящую через данную точку: ведь не постеснялись же они при изучении конических сечений допустить еще, кроме того, что всякий данный конус можно пересечь данной плоскостью. Чтобы провести все кривые, которые я здесь намерен ввести, нужно только то предположение, что две или несколько линий можно перемещать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другие линии; это предположение мне представляется ничуть не более трудным. Правда, древние не включали полностью в свою геометрию и конических сечений, и я не собираюсь изменять узаконенные обычаем названия; но мне кажется совершенно ясным, что если — как это и делают — почитать геометрическим то, что определенно (precis) и точно (exact), а механическим то, что не таково, и если рассматривать геометрию как науку, которая учит вообще познанию мер всех тел, то из нее так же мало следует исключать самые сложные, как и самые простые линии, если только можно представить себе, что эти линии описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, — ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру [34]. Возможно, что допустить линии, более сложные, чем конические сечения, древним геометрам помешало то обстоятельство, что из этих кривых они в первую очередь случайно познакомились со спиралью [35], квадратрисой [36] и им подобными. Эти кривые действительно принадлежат только механике и не относятся к тем, которые должны, на мой взгляд, быть здесь допущены, так как их представляют себе описанными двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить. И хотя они потом изучали конхонду [37], циссоиду [38] и еще некоторые другие кривые, относящиеся к геометрии, но они не приняли их во внимание в большей мере, чем предыдущие, быть может потому, что недостаточно полно исследовали их свойства. Возможно также, заметив, что они еще недостаточно знают о конических сечениях и что осталось еще много неизвестного даже из того,



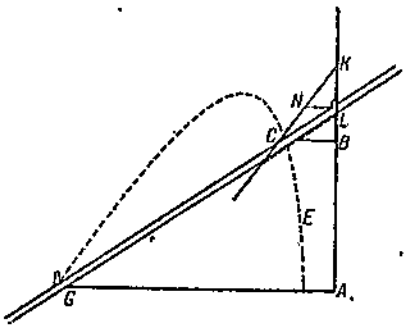
Черт. 6.

что можно получить при помощи линейки и циркуля, они решили, что им не следует приступать к более трудному делу. Но, так как я надеюсь, что впредь те, кто сумеют пользоваться предлагаемым здесь геометрическим исчислением, не найдут уже достаточно того, на чем можно было бы остановиться в области плоских и телесных задач, то считаю своевременным предложить им обратиться к другим изысканиям, которые всегда дадут им материал для упражнения.

Взгляните (черт. 6) на линии AB, AD, AF и им подобные, которые я предполагаю описанными при помощи инструмента YZ [39], который составлен из нескольких линеек, соединенных таким образом, что, закрепив неподвижно на линии AN линейку, обозначенную YZ, можно растворять и складывать угол XYZ; при этом когда угол сложен, точки B, C, D, F, G, H[40] — все собираются в точке A, но по мере того, как угол растворяется, линейка BC, соединенная под прямым углом с XY в точке B, толкает по направлению к Z линейку CD, передвигающуюся вдоль YZ, образуя всегда с нею прямые углы; а CD толкает DE, передвигающуюся таким же образом вдоль YX и всегда параллельную BC; DE толкает EF; EF толкает FG; последняя толкает GH, и можно вообразить себе бесчисленное количество других линеек, последовательно толкающих друг друга аналогичным образом, причем одни образуют всегда одинаковые углы с YX, а другие с YZ. По мере того как растворяется таким образом угол XYZ, точка B описывает линию AB, представляющую собой окружность, а другие точки D, F, H, в которых пересекаются другие линейки, описывают другие кривые линии, AD, AF, AH, из которых последние по порядку сложнее первой из них, а эта первая сложнее окружности. Но я не вижу ничего, что мешало бы составить столь же ясное и отчетливое понятие о способе описания первой кривой, как и о способе описания круга или, по крайней мере, конических сечений, а также ничего, что могло бы помешать понять вторую, третью и все остальные кривые, которые можно описать столь же хорошо, как и первую. Поэтому я не вижу, почему ими всеми нельзя было бы в равной мере пользоваться в геометрических рассуждениях [41].

Способ, при помощи которого можно распределить все кривые линии по определенным родам и узнать отношение, существующее между всеми их точками и точками прямых.

Я мог бы привести здесь и другие способы вычерчивания и представления кривых линий, все более и более возрастающих по порядку сложности до бесконечности. Но чтобы охватить совокупность всех встречающихся в природе кривых и распределить их по порядку по определенным родам, я считаю наиболее подходящим указать на то обстоятельство, что все точки линий, которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии. И если уравнение будет восходить лишь до прямоугольника двух неопределенных величин или же до квадрата одной из них, то кривая будет первого и самого простого рода, к которому принадлежат только круг, парабола, гипербола и эллипс. Но если уравнение будет восходить до трех или четырех измерений обеих или одной из двух неопределенных величин — ибо здесь для обнаружения отношения одной точки к другой необходимы две такие величины — то кривая будет второго рода. И если уравнение будет восходить до пяти или шести измерений, то она будет третьего рода, и так далее до бесконечности для других кривых [42].



Черт. 7.

Например, я хочу узнать (черт. 7), какого рода линия EC, которую я представляю себе описанной пересечением линейки GL и прямолинейной плоской фигуры $CNKL$, сторона KN которой неопределенно продолжена по направлению к C и которая, передвигаясь по лежащей под ней плоскости вдоль прямой, то есть так, что ее диаметр KL всегда оказывается приложенным к какому-либо участку линии BA, продолженной в обоих направлениях, заставляет вращаться эту линейку GL вокруг точки G, в силу того, что линейка соединена с фигурой таким образом, что постоянно проходит через точку L [40]. Я выбираю некоторую прямую, например AB, чтобы к различным ее точкам отнести все точки этой кривой EC, и выбираю на ней некоторую точку, допустим A, чтобы начать с нее вычисление. Я говорю, что выбираю и ту и другую, потому что их можно брать произвольным образом. Действительно, хотя для получения более короткого и удобного уравнения и нужен весьма тщательный выбор, но все же, какими бы прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, чтобы линия оказалась того же самого рода; это легко доказать [41]. Выбрав затем на кривой произвольную точку, например C, к которой я предполагаю приложенным описывающий кривую инструмент, я провожу из точки C прямую CB, параллельную GA; и так как CB и BA суть две неопределенные и неизвестные величины, я называю одну из них y, а другую x. Но чтобы найти отношение одной из них к другой, я рассматриваю также известные величины, определяющие построение этой кривой, а именно GA, которую называю a, KL, которую называю b, и NL, параллельную GA, которую называю c. Затем я говорю, что как NL относится к LK или c к b, так CB или y относится к BK, которая, следовательно, есть $\frac{b}{c}y$; а BL будет $\frac{b}{c}y - b$; и AL будет $x + \frac{b}{c}y - b$. Кроме того, как CB относится к LB или y к $\frac{b}{c}y - b$, так a или GA относится к LA или к $x + \frac{b}{c}y - b$. Таким образом, если перемножить вторую линию с третьей, то получится $\frac{ab}{c}y - ab$, что равно $xy + \frac{b}{c}yy - by$, получающемуся от перемножения первой линии с последней. Следовательно искомое уравнение будет

$$yy \propto cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

и из него видно, что линия *EC* — первого рода, и, действительно, она не что иное как гипербола [45].

Если в описывающем кривую инструменте (черт. 7, стр. 33) заменить прямую линию *CNK* этой гиперболой или какой-нибудь другой кривой первого рода, ограничивающей фигуру *CNKL*, то пересечение этой линии и линейки *GL* опишет вместо гиперболы *EC* другую кривую, которая будет второго рода. Так, если *CNK* будет кругом с центром *L*, то будет описана первая конхоида древних, а если это будет парабола с диаметром *KB*, то будет описана кривая, которая, как я говорил, является первой и простейшей в вопросе Паппа, когда имеется всего лишь пять данных по положению прямых. Но если вместо одной из этих кривых первого рода, ограничивающая фигуру *CNKL* кривая будет второго рода, то при ее помощи будет описана кривая третьего рода, а если это будет кривая третьего рода, то будет описана кривая четвертого рода и так далее до бесконечности, как это легко показать при помощи вычисления [46]. И если только кривая принадлежит к числу линий, называемых мною геометрическими, то каким бы другим способом ни вообразить себе ее описание, всегда можно будет найти уравнение, определяющее таким образом все ее точки.

Кроме того, кривые линии, для которых это уравнение восходит до квадрата квадрата, я отношу к тому же роду, что и линии, для которых оно восходит только до куба, а линии, уравнение которых восходит до квадрата куба, — к тому же роду, что и линии, для которых оно восходит только до сверхтела и т. д. Причиной этого является то обстоятельство, что существует общее правило, позволяющее все затруднения, связанные с квадратом квадрата, приводить к кубу, а все затруднения, связанные с квадратом куба, к сверхтелу, так что эти первые не следует считать более сложными, чем последние.

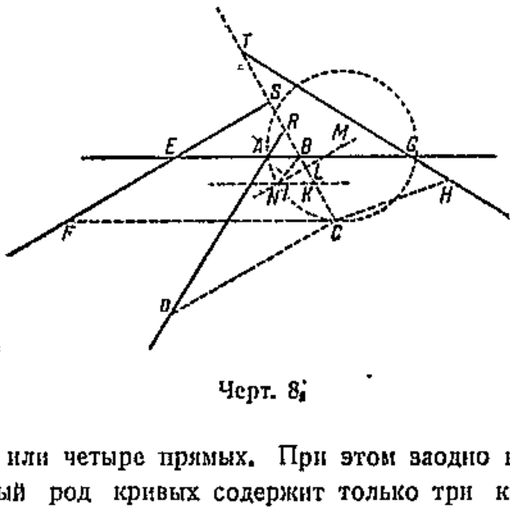
Нужно, однако, заметить, что хотя линии каждого рода в большинстве своем одинаково сложны, так что они могут служить для определения одних и тех же точек и построения одних и тех же задач, но среди них все же имеются некоторые более простые линии, действие которых более ограничено. Так, например, к первому роду, помимо одинаково сложных эллипса, гиперболы и параболы, принадлежит и явно более простой круг. Среди кривых второго рода имеется обыкновенная конхоида, происходящая из круга, и еще некоторые другие кривые, которые хотя и не обладают такой силой, как большинство кривых их рода, но все же не могут быть отнесены к первому роду.

Продолжение выяснения приведенного в предыдущей книге вопроса Паппа.

Сведя таким образом все кривые линии к определенным родам, я теперь легко могу продолжить доказательство данного выше ответа на вопрос Паппа. Действительно, во-первых, я раньше показал, что, в случае лишь трех или четырех данных прямых, служащее для определения искомых точек уравнение восходит лишь до квадрата, а отсюда ясно, что кривая, на которой лежат эти точки, необходимо будет одной из кривых первого рода, ибо это самое уравнение выражает отношение всех точек линий первого рода к точкам прямой. И если дано не более восьми прямых, то уравнение восходит не выше квадрата квадрата и, следовательно, искомая линия будет только второго или более низкого рода. И если дано не более двенадцати линий, то уравнение восходит лишь до квадрата куба и, следовательно, искомая линия будет только третьего или более низкого рода и так далее. Затем, так как положение данных прямых может варьировать произвольным образом, вследствие чего в уравнении будут меняться всеми мыслимыми способами как известные величины, так и знаки $+$ и $-$, то ясно, что нет такой кривой первого рода, которая не была бы полезна для этого вопроса, когда он предложен в четырех прямых; ни такой кривой второго рода, которая не была бы полезна, когда он предложен в восьми; ни третьего рода, когда он предложен в двенадцати и т. д. Поэтому нет такой кривой, которая подпала бы под исчисление и могла быть допущена в геометрию и которая не оказалась бы полезной для случая некоторого числа линий.

Решение этого вопроса, когда он предложен лишь в трех или четырех линиях.

Однако здесь мне необходимо заняться более частным образом определением и изложением способа отыскания искомой линии, служащей для любого из случаев, когда дано



Черт. 8.

лишь три или четыре прямых. При этом заодно выяснится, что первый род кривых содержит только три конических сечения и круг.

Обратимся снова (черт. 8) к приведенным выше четырем линиям AB, AD, EF и GH, и пусть требуется найти другую линию, на которой находится бесчисленное количество точек, подобных точке C, такой, что если провести из нее к данным прямым под данными углами четыре линии CB, CD, CF и CH, то CB, умноженная на CF, даст выражение, равное CD, умноженной на CH, то есть, если положить

$$CB \infty y, \quad CD \infty \frac{czy + bcx}{zz},$$

$$CF \infty \frac{ezy + dek + dex}{zz} \quad \text{и} \quad CH \infty \frac{gzy + fgl - fgx}{zz},$$

то уравнение будет

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} -dczzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} y \quad \left.\begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}\right\}}{ezzz - cgzz} \text{ [47]},$$

по крайней мере, если предположить, что ez больше cg, ибо если бы оно было меньше, то нужно было бы переменить все знаки $+$ и $-$. Если бы величина y в этом уравнении оказалась ничем или меньшей, чем ничто [48], при допущении, что точка C находится в углу DAG, то нужно было бы допустить еще, что точка C находится в углу DAE, или EAR, или RAG, и изменить в уравнении знаки $+$ и $-$, как необходимо для этой цели. Если бы значение y оказалось нулем во всех этих четырех положениях, то в предложенном случае вопрос был бы невозможен. Мы здесь однако допустим, что он возможен. Вместо величины $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$, будем для краткости писать $2m$, а вместо $\frac{dczz + cfgz - lcgz}{ez^3 - cgzz}$ будем писать $\frac{2n}{z}$ [49]. Тогда мы получим уравнение

$$yy \infty 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz},$$

корень которого есть

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - egzz}}.$$

Будем, опять ради краткости,

$$\text{вместо} - \frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} \text{ писать } o$$

$$\text{и вместо } \frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz} \text{ писать } [-] \frac{p}{m} \text{ [50]}.$$

Ибо, так как все эти величины даны, мы вправе называть их как угодно. Таким образом мы получим

$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$

и это должно представлять собой длину линии BC при неопределенной AB или x. Очевидно, что если вопрос предложен только в трех или четырех линиях, то всегда можно получить такие члены, за исключением того, что некоторые из них могут отсутствовать и что знаки $+$ и $-$ могут варьировать по-разному.

Затем (черт. 8, стр. 37) я провожу KI, равную и параллельную BA, так, чтобы она отсекала от BC часть BK, равную m, потому что у нас здесь имеется $+m$; я бы ее прибавил, проведя IK с другой стороны, если бы мы имели $-m$; и я совсем не проводил бы ее, если бы величина m была нулем. Затем я провожу еще IL так, чтобы линия IK относилась к KL, как z к n; и так как IK есть x, то KL будет $\frac{n}{z}x$. Тем самым я знаю также отношение KL к IL, которое полагаю равным отношению n к a; и так как KL есть $\frac{n}{z}x$, то IL будет $\frac{a}{z}x$. И я помещаю точку K между L и C, так как здесь у нас имеется $-\frac{n}{z}x$, но я поместил бы L между K и C, если бы имел $+\frac{n}{z}x$, и совсем не провел бы эту линию IL, если бы $\frac{n}{z}x$ было нулем.

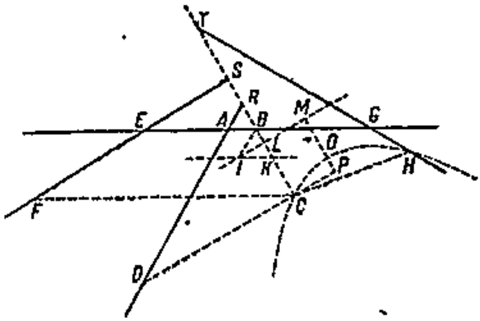
Теперь в выражении для линии LC у меня остаются лишь следующие члены:

$$LC \propto \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx} \text{ [51]};$$

отсюда я вижу, что если бы они отсутствовали, то точка C лежала бы на прямой IL; далее, если бы эти члены были таковы, что корень извлекался, т. е. если бы mm и $\frac{p}{m}xx$

отмечены были одним и тем же знаком $+$ [или $-$] [52] и oo было равно $4\,pm$ или же если бы члены mm и ox или ox и $\frac{p}{m}xx$ были нулями, то точка C находилась бы на другой прямой, найти которую не труднее, чем IL [53]. Но если это не так, то точка C будет всегда лежать на одном из трех конических сечений или же на окружности; при этом один из диаметров лежит на линии IL, а линия LC является одной из ординат, сопряженных с этим диаметром, или же наоборот, линия LC параллельна диаметру, относительно которого IL будет сопряженной ординатой [54]. Притом, если член $\frac{p}{m}xx$ отсутствует, то это коническое сечение представляет собой параболу; если он отмечен знаком $+$, то гиперболу, и, наконец, если он отмечен знаком $-$, то эллипс. Исключением будет лишь тот случай, когда величина aam равна pzz и угол ILC прямой: тогда вместо эллипса получится круг. Если сечение окажется параболой, то ее прямая сторона [55] будет равна $\frac{oz}{a}$, а диаметр всегда будет лежать на линии IL. Чтобы найти точку N, являющуюся ее вершиной, нужно положить IN равным $\frac{amm}{oz}$ и поместить точку I между L и N, если члены будут $+mm+ox$, или же поместить точку L между I и N, если члены будут $+mm-ox$, или же N между I и L, если бы члены были $-mm+ox$; но $-mm$ никак не может получиться при нашем способе подбора членов. И, наконец, точка N совпала бы с точкой I, если бы величина mm была нулем. Теперь легко отыскать эту параболу на основании первой задачи первой книги Аполлония [56].

Если искомая линия есть окружность или эллипс или же гипербола, то в первую очередь нужно найти точку M, которая является ее центром и которая всегда лежит на прямой IL. Ее можно найти на этой прямой (черт. 9), положив IM равным $\frac{aom}{2pz}$; так что, если величина o отсутствует, то центр находится как раз в точке I. Далее, если искомая линия есть окружность или эллипс и если мы будем иметь $+ox$, то точку M нужно брать с той стороны от точки I, с которой лежит точка L; если же мы будем иметь $-ox$, то ее нужно брать с другой стороны. Наоборот, в случае гиперболы, если мы будем иметь $-ox$, то центр M должен быть расположен со стороны точки L, а если $+ox$, то он должен быть расположен с другой стороны. Далее,



Черт. 9.

прямая сторона фигуры должна быть $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, если мы имеем $+mm$ и искомая линия есть круг или эллипс, или же, если мы имеем $-mm$ и искомая линия есть гипербола. И она должна быть $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, если, в случае, когда искомая линия есть круг или эллипс, мы имеем $-mm$, или же, в случае, когда она есть гипербола и величина oo больше $4\,mp$, мы имеем $+mm$. Затем, если величина mm есть нуль, то прямая сторона есть $\frac{oz}{a}$, а если ox есть нуль, то она есть $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Для определения поперечной стороны [67] нужно найти линию, относящуюся к прямой стороне как aam к pzz, так что, если прямая сторона есть

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}},$$

то поперечная сторона есть

$$\sqrt{\frac{anoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Во всех этих случаях диаметр сечения будет находиться на линии IM, а LC есть одна из сопряженных с ним ординат. И если положить MN равной половине поперечной стороны и взять ее с той же стороны от точки M, что и точка L, то точка N будет вершиной этого диаметра. В результате будет легко отыскать это сечение на основании второй и третьей задач первой книги Аполлония.

Но если сечение есть гипербола и вместе с тем мы имеем $+mm$, а величина oo есть нуль или меньше $4pm$, то из центра M нужно провести линию MOP, параллельную LC, и линию CP, параллельную LM, и положить MO равной $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$ или же, если величина ox есть нуль, — равной m. Точку O нужно рассматривать как вершину этой гиперболы, в которой OP будет диаметром, а CP сопряженной с ним ординатой; ее прямая сторона есть $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, а поперечная сторона $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$, — за исключением случая, когда ox есть нуль, ибо в этом случае прямая сторона есть $\frac{2aamm}{pzz}$, а поперечная $2m$. Теперь ее легко отыскать на основании третьей задачи первой книги Аполлония [68].

Доказательство всего только что изложенного.

Доказательства всего этого очевидны. Действительно, составив площадь по величинам, найденным для прямой и поперечной сторон и для отрезка диаметра NL или OP, согласно теоремам 11, 12 и 13 первой книги Аполлония [69], мы найдем все те самые члены, которые составляют квадрат линии CP или CL — сопряженной с этим диаметром ординатой. Так, например, в данном случае, отняв IM, равную $\frac{aom}{2pz}$, от NM, равной $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$, я получу IN; прибавив к последней IL, равную $\frac{a}{z}x$, я получу NL, равную $\frac{a}{z}x-\frac{aom}{2pz}+\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$; если умножить это на $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, т. е. на прямую сторону фигуры, то в прямоугольнике получится

$$x\sqrt{oo+4mp}-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp}+\frac{moo}{2p}+2mm;$$

от этого нужно отнять площадь, относящуюся к квадрату NI, как прямая сторона к поперечной; квадрат же NL равен

$$\frac{aa}{zz}xx-\frac{aaom}{pzz}x+\frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp}+\frac{aaoomm}{2ppzz}+$$
$$+\frac{aam^3}{pzz}-\frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}.$$

Это выражение нужно еще разделить на aam и умножить на pzz, ибо эти члены выражают отношение между поперечной стороной и прямой стороной, и тогда получится

$$\frac{p}{m}xx-ox+x\sqrt{oo+4mp}+\frac{oom}{2p}-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp}+mm,$$

что и нужно отнять от предшествующего прямоугольника. В результате для квадрата CL мы найдем $mm+ox-\frac{p}{m}xx$, и, значит, CL будет ординатой, сопряженной в эллипсе или в круге с отрезком диаметра NL.

Если желательно выразить все данные величины числовым образом (черт. 8, стр. 37), то мы положим, например, что

$$EA \propto 3,\quad AG \propto 5,\quad AB \propto BR,\quad BS \propto \frac{1}{2}BE,$$

$$GB \propto BT,\quad CD \propto \frac{3}{2}CR,\quad CF \propto 2CS,\quad CH \propto \frac{2}{3}CT$$

и что угол ABR имеет 60 радиусов и, наконец, что прямоугольник из двух линий CB и CF равен прямоугольнику из двух других CD и CH; ибо все эти вещи необходимы для полной определенности вопроса. Положив вместе с тем $AB \propto x$ и $CB \propto y$, мы вышеописанным способом найдем:

$$yy \propto 2y - xy + 5x - xx$$

и

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}\ [11].$$

Поэтому BK должна быть 1, а KL половиной KI, и так как угол IKL или ABR имеет 60 градусов, а KIL, являющийся половиной KIB или IKL, 30 градусов, то угол ILK будет прямой. И так как IK или AB названа x, то KL будет $\frac{1}{2}x$; IL есть $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; величина, названная раньше z, будет 1; величина, названная a, будет $\sqrt{\frac{3}{4}}$; величина m будет 1, o будет 4 и величина p будет $\frac{3}{4}$. Следовательно, мы получим $\sqrt{\frac{16}{3}}$ для IM и $\sqrt{\frac{19}{3}}$ для NM; и так как aam, равная $\frac{3}{4}$, равна здесь pzz, а угол ILC прямой, то мы найдем, что кривая линия NC есть круг. Таким же образом легко исследовать все прочие случаи.

Каковы плоские и телесные места и способ их нахождения?

Так как все уравнения, восходящие не выше квадрата, содержатся в только что изложенном, то тем самым здесь полностью решена не только поставленная древними задача о месте к трем и четырем линиям, но и все, что относится к так называвшемуся древними построению (composition) телесных мест и, следовательно, также плоских мест, ибо они заключаются в телесных. Эти места получаются, когда требуется найти точку, для полного определения которой недостает одного условия, и когда, как в разобранном примере, в качестве искомой точки могут быть взяты все точки некоторой определенной линии. Если эта линия —

прямая или окружность, то ее называют плоским местом; если же это парабола, гипербола или эллипс, то ее называют телесным местом. При этом всегда и при любых обстоятельствах можно притти к уравнению, содержащему две неизвестных величины и аналогичному какому-нибудь из только что мною решенных. Если линия, определяющая таким образом искомую точку, одним порядком сложнее, чем конические сечения, то ее можно по аналогии назвать сверхтелесным местом, и так далее. Если же для определения точки недостает двух условий, то место, на котором она находится, будет поверхностью; эта поверхность может быть плоской, или шаровой, или же более сложной [60]. Но высшей целью древних в этом вопросе было получить построение телесных мест, и очевидно, что все, что написал Аполлоний о конических сечениях, было написано с намерением найти эти построения.

Кроме того, теперь видно, что к принятому мною за первый род кривых линий не могут принадлежать никакие линии, кроме круга, параболы, гиперболы и эллипса, — только это я и собирался доказать.

Какова первая и простейшая из всех кривых, служащих для решения вопроса древних, когда он предложен в пяти линиях?

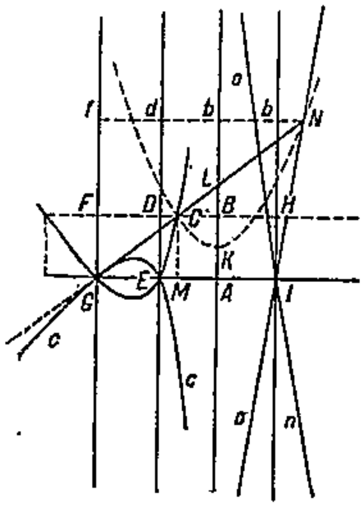
Если вопрос древних предложен в пяти параллельных линиях, то, очевидно, искомая точка будет всегда находиться на прямой. Но если он предложен в пяти линиях, из которых четыре параллельны, а пятая пересекает их под прямыми углами, равно как и все линии, проведенные из искомой точки, также пересекают их под прямыми углами, и, наконец, если параллелепипед, составленный из трех линий, проведенных к трем параллельным линиям, равен параллелепипеду, составленному из двух линий, проведенных одна к четвертой параллельной, а другая к прямой, пересекающей параллельные линии под прямыми углами, и из третьей данной линии, — случай, на мой взгляд, простейший, какой только можно вообразить, после предыдущего, — то искомая точка находится на кривой, описываемой при движении параболы по вышеизложенному способу.

Положим, например, что данными линиями [61] будут AB, IH, ED, GF и GA и что требуется найти точку C, обладающую тем свойством, что если провести из нее под прямыми углами к данным линиям прямые CB, CF, CD, CH и CM, то параллелепипед из трех прямых CF, CD и CH будет равен параллелепипеду из двух других CB и CM и еще третьей, допустим, AI. Я полагаю

$$CB \propto y,\quad CM \propto x,\quad AI \text{ или } AE \text{ или } GE \propto a,$$

так что, если точка C лежит между линиями AB и DE, то я получаю:

$$CF \propto 2a - y,\quad CD \propto a - y \text{ и } CH \propto y + a.$$



Черт. 10.

Перемножив эти три выражения, я получаю $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, что равно произведению трех других линий, т. е. axy. Рассмотрим теперь (черт. 10) кривую CEG, которую я представляю себе описанной пересечением параболы CKN, перемещаемой так, что ее диаметр KL постоянно находится на прямой AB, и линейки GL, вращающейся тем временем вокруг точки G так, что она постоянно проходит — в плоскости этой параболы — через точку L. Положим $KL \propto a$, а главную прямую сторону, т. е. ту, которая отнесена к оси этой параболы, также равной a,

$GA \propto 2a$, CB или $MA \propto y$, CM или $AB \propto x$. Затем, в силу подобия треугольников GMC и CBL, GM, т. е. $2a-y$, относится к MC, т. е. x, как CB, т. е. y, к BL, которая, следовательно, будет $\frac{xy}{2a-y}$. И так как LK есть a, то BK будет $a-\frac{xy}{2a-y}$ или же $\frac{2aa-ay-xy}{2a-y}$. Наконец, так как тот же BK, будучи отрезком диаметра параболы, относится к сопряженной с ним ординате BC, как BC к прямой стороне, т. е. a, то вычисление показывает, что

$$y^3-2ayy-aay+2a^3 \text{ равно } axy$$

и что, следовательно, точка C и есть искомая. Эта точка может быть взята (черт. 10, стр. 46) в произвольном месте линии CEG или же на сопряженной с ней $cEGc$, описываемой таким же путем, причем только вершина параболы обращена в другую сторону, или же она может лежать на противоположных им линиях NIo и nIO, описанных пересечением линии GL по другую сторону параболы KN.

Но и в случае, если данные параллельные прямые AB, IH, ED и GF не находятся на одинаковых расстояниях друг от друга и прямая GA, а также проведенные к ним из точки C линии, пересекает их уже не под прямыми углами, эта точка C будет все же находиться на кривой той же природы. Даже когда среди данных линий нет параллельных, точка C может все-таки иногда находиться на такой кривой. Но если даны четыре параллельных и пятая пересекающая их прямая и если параллелепипед из трех линий, проведенных из искомой точки, — одна к этой пятой линии, а две других к двум параллельным, — равен параллелепипеду из двух линий, проведенных к двум другим параллельным, и из третьей данной линии, — то искомая точка будет находиться на кривой иной природы. Именно, эта кривая такова, что все прямые линии — ординаты, сопряженные с ее диаметром, равны ординатам какого-нибудь конического сечения, а отрезки этого диаметра между вершиной и ординатами находятся в том же отношении к некоторой данной линии, в каком эта данная линия находится к отрезкам диаметра конического сечения, в котором такие линии служат сопряженными ординатами. По правде говоря, я не могу сказать, что эта линия менее проста, чем предшествующая, но я все же нахожу, что предшествующую линию следует считать первой, так как ее описание и вычисление в некотором смысле легче [62].

Я не стану задерживаться на распределении линий, применимых в других случаях, по родам, ибо я не собирался изложить здесь все; и показав способ нахождения бесконечного количества точек, через которые проходят линии, я, полагаю, что вместе с тем дал средства, достаточные для их описания.

Какие из кривых, которые строят, находя ряд их точек, могут быть допущены в геометрии?

Следует, кстати, заметить, что существует большое различие между этим способом нахождения ряда точек для проведения кривой и тем способом, которым пользуются в случае спирали и подобных ей кривых. При помощи последнего способа находят не все без различия точки искомой кривой, а только те, которые могут быть определены какой-либо более простой мерой, чем та, которая требуется для получения всей линии; при этом, собственно говоря, не находят ни одной из точек линии, т. е. ни одной из точек, настолько для нее специфических, что их нельзя найти иначе как через нее. Между тем линии, применяемые в предложенном вопросе, не имеют ни одной такой точки, которая не могла бы быть определена по только что изложенному способу. И хотя этот способ нахождения искомой кривой линии посредством отыскания нескольких, безразлично каких ее точек, распространяется только на те линии, которые могут быть описаны также правильным и непрерывным движением, его все же не следует целиком исключить из геометрии.

Какие из кривых, которые описывают с помощью веревки, могут быть допущены в геометрии?

Из геометрии не следует исключать и тот способ, при котором пользуются нитью или изогнутой веревкой для определения равенства или разности [63] двух или нескольких прямых, которые можно провести под какими-нибудь углами из любой точки искомой кривой к каким-нибудь другим точкам или линиям, как мы это сделали в „Диоптрике“ для объяснения эллипса и гиперболы. Правда, в геометрии нельзя принять никаких линий, подобных веревкам, т. е. становящихся то прямыми, то кривыми, ибо отношение между прямыми и кривыми неизвестно и, даже, думаю, не может быть познано людьми, и поэтому отсюда нельзя было бы вывести ничего точного и надежного [64]. Но так как в этих построениях веревкой пользуются только для определения прямых, длины которых вполне известны, это не должно вести к их исключению.

Для разыскания всех свойств кривых достаточно знать отношение всех их точек к точкам прямых и способ проведения других линий, пересекающих кривые во всех этих точках под прямыми углами.

Из одного того, что на основании изложенного выше способа известно отношение всех точек кривой линии ко всем точкам некоторой прямой, легко также найти их отношение ко всем другим данным точкам и линиям и, следовательно, определить диаметры, оси, центры и другие линии и точки, к которым каждая кривая находится в более своеобразном или более простом отношении, чем к другим линиям и точкам; и таким образом придумать различные способы их описания и выбрать среди них наиболее легкие.

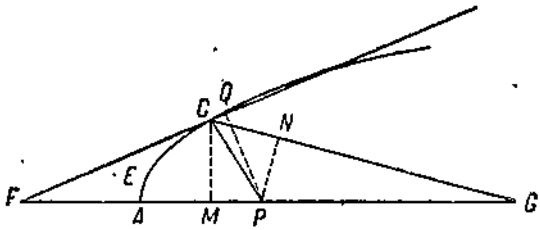
Основываясь только на этом, можно даже найти почти все из того, что может быть определено относительно величины заключенного ими пространства; мне нет надобности пояснять это более подробно [95]. Наконец, все прочие свойства, какие только могут быть приписаны кривым линиям, зависят лишь от величины углов, образуемых ими с некоторыми другими линиями. Но если можно провести прямые, пересекающие их под прямыми углами, или — что для меня здесь одно и то же — прямые, пересекающие касательные (les contingentes) к ним в точках их встречи с другими кривыми, с которыми они образуют подлежащие измерению углы, то величину этих углов не труднее отыскать, чем в случае, если бы эти углы заключались между двумя прямыми. Поэтому я думаю, что приведу здесь все, что требуется из начал учения о кривых, когда дам общий способ проведения прямых, пересекающих под прямыми углами кривые линии в любых точках. И я смею сказать, что эта задача является наиболее полезной и общей не только среди известных мне, но также среди всех тех задач, которые я когда-либо желал знать в геометрии.

Общий способ нахождения прямых линий, пересекающих данные кривые или же их касательные под прямыми углами.

Допустим (черт. 11), что CE — кривая линия и что требуется через точку C провести прямую, образующую с ней прямые углы [96]. Я предполагаю, что это уже сделано и что искомая линия есть CP. Я продолжаю ее до точки P, где она встречает прямую GA, которую я считаю той прямой, к точкам которой относят все точки линии CE; так что, положив MA или $CB \propto y$ и CM или $BA \propto x$ (черт. 12), я имею некоторое уравнение, выражающее отношение между x и y. Далее я полагаю $PC \propto s$ и $PA \propto v$ и, значит, $PM \propto v - y$; затем из прямоугольного треугольника PMC я имею, что ss, квадрат основания, равен $xx+vv-2vy+yy$, квадратам двух сторон, т. е. я имею, что

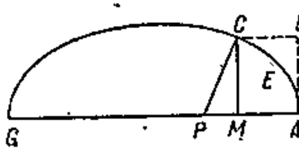
$$x \infty \sqrt{ss-vv+2vy-yy} \quad \text{или же} \quad y \infty v+\sqrt{ss-xx}.$$

Пользуясь этим уравнением, я удаляю из уравнения, выражающего для меня отношение всех точек кривой CE к точ-



Черт. 11.

кам прямой GA, одну из двух неопределенных величин x или y. Это легко сделать, если я желаю удалить x, поставив повсюду $\sqrt{ss-vv+2vy-yy}$ вместо x, квадрат этого выражения вместо xx, его куб вместо x^3 и так далее, а если, я желаю удалить y, то поставив вместо него $v+\sqrt{ss-xx}$. и квадрат или куб этого выражения вместо yy или y^3 и т. д. Таким образом всегда получается уравнение, в котором имеется только одна неопределенная величина x или y.



Черт. 12.

Например (черт. 12), если CE есть эллипс, MA — отрезок его диаметра, для которого CM является сопряженной ординатой, r — его прямая сторона и q поперечная, то, согласно теореме 13 первой книги Аполлония, имеем:

$$xx \infty ry-\frac{r}{q}yy.$$

Если отсюда удалить x, то останется:

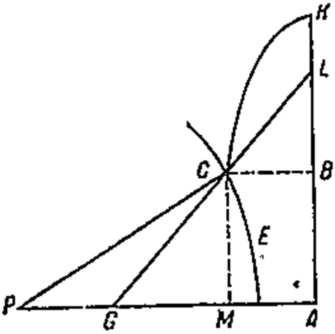
$$ss-vv+2vy-yy \infty ry-\frac{r}{q}yy,$$

или же

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} \text{ равно ничему:}$$

ибо здесь лучше рассматривать все выражение вместе, чем приравнивать одну его часть другой.

Точно так же (черт. 13), если CE есть кривая, описываемая при движении параболы по вышеизложенному способу, и если положить b вместо GA, c вместо KL и d вместо прямой стороны, соответствующей диаметру параболы KL, то уравнение, выражающее отношение между x и y, будет:



Черт. 13.

$$y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0.$$

Удаляя отсюда x, мы получим:

$$y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy},$$

и располагая по порядку эти члены посредством умножения:

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix}-2cd\\+bb\\+dd\end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix}+4bcd\\ \\-2ddv\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}-2bbcd\\+ccdd\\ \\-ddss\\+ddvv\end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0$$

и так далее.

Даже тогда, когда точки кривой линии относятся к точкам некоторой прямой не по способу, указанному мною, но по любому другому способу, какой только можно вообразить, можно, тем не менее, всегда получить подобное уравнение. Допустим, например (черт. 11, стр. 51), что CE представляет собой линию, отношение (rapport) которой к трем точкам F, G и A таково, что прямые, проведенные из каждой ее точки, вроде C, к точке F, превосходят линию FA на величину, находящуюся в некотором данном отношении (proportion) к другой величине, на которую GA превосходит линии, проведенные из тех же точек до G [67]. Возьмем $GA \propto b$, $AF \propto c$ и, выбрав на кривой произвольную точку C, допустим, что величина, на которую CF превосходит FA, относится к величине, на которую GA превосходит GC, как d к e. Тогда, если эта неопределенная величина названа z, FC будет $c+z$, а GC будет $b-\frac{e}{d}z$. Далее, если положить $MA \propto y$, то GM будет $b-y$, а FM будет $c+y$. Так как треугольник CMG прямоугольный, то, отнимая квадрат GM от квадрата GC, мы получим квадрат CM, который будет

$$\frac{ee}{dd}zz-\frac{2be}{d}z+2by-yy.$$

Затем, отнимая квадрат FM от квадрата FC; мы получим еще другие члены квадрата CM, именно

$$zz+2cz-2cy-yy;$$

и так как эти члены равны предыдущим, то они позволят узнать

y или MA, которая будет $\dfrac{ddzz+2cddz-eezz+2bdez}{2bdd+2cdd}$.

Подставляя это выражение вместо y в квадрат CM, мы найдем, что он выражается через следующие члены:

$$\frac{bddzz+ceezz+2bcddz-2bcdez}{bdd+cdd}-yy.$$

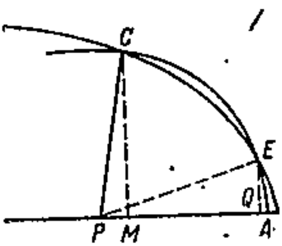
Далее, если допустить, что прямая PC пересекает кривую в точке C под прямым углом, и взять, как и ранее, $PC \propto s$ и $PA \propto v$, то PM будет $v-y$; и так как треугольник PCM прямоугольный, то мы будем иметь

$$ss-vv+2vy-yy \text{ для квадрата } CM.$$

Отсюда, вновь подставляя вместо y равное ему выражение, мы получим в качестве искомого уравнения:

$$zz+\frac{2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-cddss+cddvv}{bdd+cee+eev-ddv}\propto 0.$$

Найдя такое уравнение, мы вместо того, чтобы воспользоваться им для нахождения величин x или y или z, уже известных нам, поскольку известна точка C, применим его к отысканию v или s, определяющих искомую точку P. Для этого нужно принять во внимание, что если точка P такова, как этого желают, то окружность, для которой она является центром и которая проходит через точку C, касается в ней кривой CE, не пересекая ее; но если эта точка P будет хоть немного ближе или же дальше от точки A, чем следует, то эта окружность пересечет кривую не только в точке C, но обязательно еще в какой-нибудь другой. Далее нужно также иметь в виду, что когда эта окружность (черт. 14) пересекает кривую CE, уравнение, с помощью которого ищут величину x или y, или другую, им подобную, допуская, что PA и PC известны, обязательно имеет два неравных корня.



Черт. 14.

Так, например, если эта окружность пересекает кривую в точках C и E и если провести EQ параллельно CM, то названия неопределенных величин x и y будут столь же пригодны для линий EQ и QA, как и для CM и MA. Далее, в силу свойств круга, PE равно PC, так что, если мы будем искать линии EQ и QA через PE и PA, которые предположим данными, то получим то же уравнение, какое получили бы, если бы искали CM и MA через PC и PA. Из этого, очевидно, вытекает, что значение x или y или другой подобной величины, принятой нами, будет в этом уравнении двояким, то есть, что будут иметься два неравных между собой корня, из которых один будет CM, а другой EQ, если мы ищем x, или же один будет MA, а другой QA, если мы ищем y, и т. д. Правда, если точка E расположена не на той же стороне кривой, что и C, то из двух корней лишь один будет истинным, другой же будет обратным [68] или меньшим, чем ничто; но чем ближе эти две точки C и E друг к другу, тем меньше разность между этими двумя корнями и они, наконец, совершенно равны, если обе точки совпадают в одну, т. е. если круг, проходящий через точку C, касается в ней кривой CE, не пересекая ее.

Кроме того, следует принять во внимание, что когда в уравнении есть два равных корня, оно обязательно имеет такой же вид, как если бы была умножена сама на себя величина, предполагаемая неизвестной, минус равная ей известная величина. Если при этом последнее выражение не будет иметь того же числа измерений, как предыдущее, то его умножают на другое выражение, имеющее недостающее ему число измерений; так что между каждым из членов одного выражения и каждым из членов другого можно будет получить свое особое уравнение.

Например, я утверждаю, что первое найденное выше уравнение,

$$\text{именно } yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r},$$

должно иметь тот же вид, какой получается, если принять e равным y и умножить $y - e$ на самое себя, что дает

$$yy - 2ey + ee.$$

Вследствие этого теперь можно сравнить между собой каждый из их членов в отдельности и сказать, что так как первый из них, yy, одинаков и в том и в другом уравнении, то

второй, который в одном из них есть $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$,

равен второму в другом, который есть $-2ey$.

Если ищут величину v, представляющую собой величину линии PA (черт. 12, стр. 51), то отсюда имеют

$$v \infty e - \frac{r}{q} e - \frac{1}{2} r$$

или же, поскольку мы приняли, что e равно y,

$$v \infty y - \frac{r}{q} y + \frac{1}{2} r.$$

И таким же образом можно было бы найти s при помощи третьего члена

$$ee \infty \frac{qvv - qss}{q - r},$$

но так как величина v достаточно определяет точку P, которую мы только и ищем, то нет нужды итти дальше [60].

Точно так же второе найденное выше уравнение, именно

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{array}{l} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +4bcd \\ +2ddv \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{array}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd,$$

должно иметь тот же вид, что и выражение, получающееся при умножении

$$yy - 2ey + ee$$

на

$$y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4;$$

т. е.

$$y^6 \begin{array}{l} +f \\ -2e \end{array}\left.\right\} y^5 \left.\begin{array}{l} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{array}\right\} y + eek^4.$$

Из этих двух уравнений я получаю, таким образом, шесть других, служащих для нахождения шести величин, f, g, h, k, v, и s. Из этого легко усмотреть, что какого бы рода ни была предложенная кривая, по указанному способу всегда получается столько уравнений, сколько должны мы принять неизвестных величин. Но для того чтобы распутать по порядку эти уравнения и, наконец, найти величину v, которая только и нужна и в связи с которой ищутся другие величины, необходимо в первую очередь, при помощи второго члена, найти f, первую из неизвестных величин последнего выражения. Мы найдем, что

$$f \infty 2e - 2b.$$

Затем, при помощи последнего члена, следует найти k, последнюю из неизвестных величин того же выражения. Мы найдем, что

$$k^4 \infty \frac{bbccdd}{ee}.$$

Затем, при помощи третьего члена, следует найти вторую величину g, причем получится, что

$$gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd.$$

Затем, при помощи предпоследнего члена, следует найти предпоследнюю величину h, которая такова, что

$$h^3 \infty \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}.$$

Если бы в этом выражении имелись еще такие величины, то нужно было бы, следуя тому же порядку, также продолжать вплоть до последней; ибо это всегда можно сделать тем же самым образом.

Далее, при помощи следующего в том же порядке члена, в данном случае являющегося четвертым, нужно найти величину v, причем получится

$$v \infty \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}.$$

Заменяя здесь e через равную ей величину y, мы получим для линии AP, что

$$v \infty \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}.$$

Подобным же образом, третье уравнение

$$zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdcvz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv},$$

если принять f равной z, имеет такой же вид, как и уравнение

$$zz - 2fz + ff.$$

Поэтому опять-таки получится уравнение между

$$-2f \text{ или } -2z \text{ и } \frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv},$$

откуда мы найдём, что величина

$$v \text{ есть } \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}.$$

Поэтому, если составить (черт. 11 стр. 51) линию AP по этому выражению, которое равно v и все величины которого известны, и провести из найденной таким образом точки P прямую к точке C, то эта прямая пересечет в ней кривую CE под прямыми углами, а это и требовалось сделать. И я не вижу ничего, что могло бы помешать распространить таким же образом эту задачу на все кривые линии, которые подпадают под какое-нибудь геометрическое исчисление.

Следует даже заметить относительно последнего выражения, произвольно выбираемого для дополнения числа измерений другого выражения, когда число его измерений недостаточно, например, относительно взятого выше:

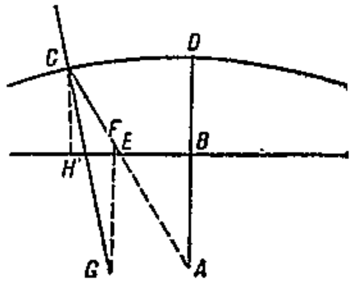
$$y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4,$$

что знаки $+$ и $-$ в нем можно брать произвольно, причем линия v, или AP, от этого не изменится: в этом вы можете легко убедиться на опыте сами; я же был бы принужден написать значительно больший том, чем желаю, если бы стал останавливаться на доказательстве всех упомянутых мною теорем. Мне все же хочется попутно сообщить вам, что идея введения двух одинакового вида уравнений, с целью сравнить все члены одного с соответствующими членами другого, и таким образом породить несколько уравнений из одного, пример чего вы здесь видели, — может пригодиться в бесчисленном множестве других задач и не из последних в применяемом мною методе.

Я не стану проводить построений, позволяющих на основе изложенных вычислений провести искомые касательные или перпендикуляры. Ибо их всегда нетрудно найти, хотя нередко требуется известное искусство, чтобы сделать эти построения короткими и простыми.

Пример построения этой задачи для конхоиды.

Так, например (черт. 15), если DC — первая конхоида древних, A — ее полюс, а BH — линейка, так что все прямые, направленные к A и заключающиеся между кривой CD и прямой BH, вроде DB и CE, равны, и если требуется найти линию CG, пересекающую кривую в точке C под прямыми углами, то для нахождения, по изложенному здесь методу, той точки линии BH, через которую должна пройти линия CG, пришлось бы заняться вычислениями столь же или даже более длинными, чем все предшествующие. А между тем построение, которое затем следовало бы извлечь из этих вычислений, очень просто. Нужно лишь на прямой CA взять CF равной CH — перпендикуляру к HB, затем через точку F провести FG, параллельную BA и равную EA; таким образом получится точка G, через которую должна проходить искомая линия CG [70].

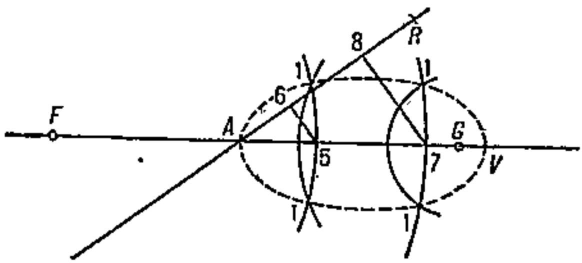


Черт. 15.

Исследование четырех новых родов овалов, употребляющихся в оптике.

В заключение, для того чтобы вы знали, что предложенное здесь рассмотрение кривых линий небесполезно и что эти линии обладают рядом свойств, ничуть не уступающих свойствам конических сечений, я прибавлю еще здесь исследование определенных овалов, которые, как вы увидите, очень полезны в теории катоптрики и диоптрики [71]. Вот способы, которыми я их описываю.

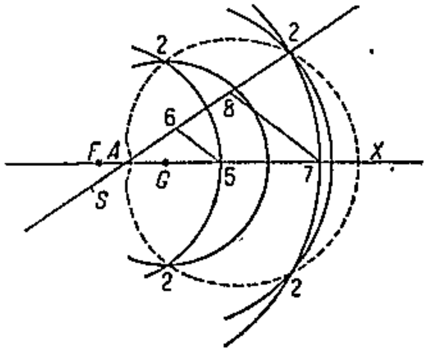
В первую очередь (черт. 16), проведя прямые FA и AR, пересекающиеся в точке A безразлично под какими углами, я на одной из них беру произвольную точку F; при этом я возьму ее дальше от точки A или ближе к ней, в зависимости от того, хочу ли я получить эти овалы бо́льшими или меньшими. Из точки F, как из центра, я описываю окружность, проходящую несколько дальше точки A, например через точку 5. Затем из точки 5 я провожу прямую 5 6, пересекающую другую прямую в точке 6 так, чтобы $A6$ была меньше $A5$ в некотором любом данном отношении, — и если желательно пользоваться этими кривыми в диоптрике, то именно в том отношении, которое измеряет преломления. Затем на линии FA, с той стороны, где находится точка 5,



Черт. 16.

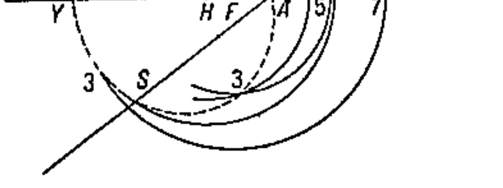
я беру произвольным образом еще точку G, т. е. так, чтобы линии AF и GA находились в любом данном отношении. Затем на линии $A6$ я беру RA, равную GA, и из центра G описываю окружность радиусом, равным $R6$; эта окружность пересекает другую окружность с обеих сторон в точке 1, являющейся одной из тех точек, через которые должен проходить первый из искомых овалов. Далее, я снова описываю из центра F окружность, проходящую вблизи точки 5 по ту или другую ее сторону, например через точку 7, и, проведя прямую 7 8 параллельно 5 6, из центра G описываю другую окружность радиусом, равным $R8$. Эта окружность пересекает окружность, проходящую через точку 7, в точке 1, опять-таки принадлежащей к числу точек того же овала. И так можно найти сколько угодно других точек, снова проводя другие параллельные 7 8 линии и другие окружности с центрами F и G [72].

Второй овал отличается лишь тем (черт. 17), что вместо AR нужно, по другую сторону от точки A, взять AS, равную AG, и что радиус окружности, описываемой из центра G, для пересечения окружности, описываемой из центра F и проходящей через точку 5, берется равным линии $S6$ или же — в случае пересечения окружности, проходящей через току 7, — равным $S8$ и так далее. В результате эти окружности будут пересекаться в точках, помеченных 2,2 и принадлежащих второму овалу $A2X$.



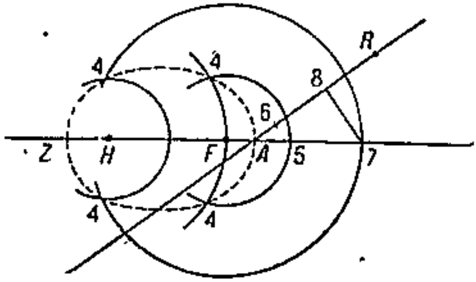
Черт. 17.

Для третьего и четвертого овалов вместо линии AG следует взять (черт. 18) линию AH, находящуюся по другую сторону от точки A, именно по ту сторону, на которой находится точка F. Кроме того, следует заметить, что при описании всех этих овалов эта линия AH должна быть больше, чем линия AF. Линия же AF может быть даже равна нулю, так что точка F окажется там, где находится



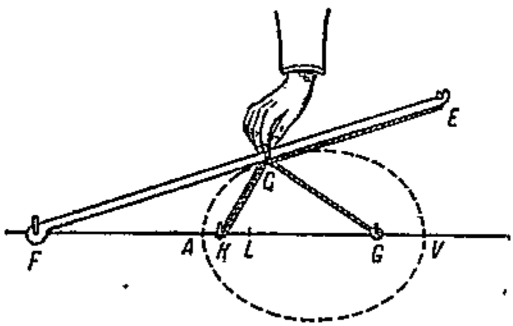
Черт. 18.

точка A. Чтобы описать третий овал $A3Y$, я, положив линии AR и AS равными AH, описываю из центра H окружность радиусом, равным $S6$. Эта окружность пересекает окружность, имеющую центр F и проходящую через точку 5, в точке 3. Затем я описываю из центра H другую окружность радиусом, равным $S8$. Эта окружность пересекает окружность, проходящую через точку 7, в точке, помеченной также 3; и т. д. Наконец,



Черт. 19.

для последнего овала (черт. 19) я описываю из центра H окружности радиусами, равными линиям $R6$, $R8$ и им подобным; эти окружности пересекают другие окружности в точках, помеченных 4.



Черт. 20.

Можно было бы найти еще бесчисленное множество других способов описания этих овалов. Так, например, первый овал AV, в случае, когда линии FA и AG равны, можно вычертить следующим образом: разделим линию (черт. 20) FG в точке L так, чтобы FL относилась к LG, как $A5$ к $A6$, т. е. так, чтобы они находились в отношении, измеряющем преломления. Затем, разделив AL в точке K на две равные части, заставим некоторую линейку, например, FE, вращаться вокруг точки F, придерживая пальцем в C веревку EC. Веревка, будучи привязана в одном из концов E этой линейки, сгибается в точке C по направлению к точке K, затем в K она снова сгибается по направлению к C и в $\dot{C}$ — по направлению к G, где привязан ее другой конец; длина веревки, таким образом, складывается из длин линий GA плюс AL плюс FE минус AF. При движении точка C опишет этот овал, наподобие того, что говорилось в „Диоптрике“ об эллипсе и гиперболе. Но я не хочу дольше задерживаться на этом.

Хотя кажется, что все эти овалы имеют почти одинаковую природу, но тем не менее они принадлежат к четырем различным родам. Каждый из этих родов содержит в себе бесчисленное множество других, каждый из которых в свою очередь содержит в себе столько же различных видов кривых, сколько и род эллипсов или же род гипербол. Действительно, в зависимости от различия отношений между линиями $A5$ и $A6$ или им подобными, различным окажется подчиненный род (genre subalterne) этих овалов. Далее, при изменении отношения между линиями AF и AG или AH будет меняться вид овалов в каждом подчиненном роде. А в зависимости от того, больше или меньше AG или AH, овалы различаются по величине. Если линии $A5$ и $A6$ равны, то вместо овалов первого или третьего рода описываются прямые линии, вместо овалов второго рода — все возможные гиперболы и вместо овалов последнего рода — все эллипсы.

Свойства этих овалов, связанные с отражениями и преломлениями.

Кроме того, в каждом из этих овалов следует различать две части, обладающие различными свойствами. Именно, часть первого овала (черт. 16, стр. 60), расположенная близ A, направляет все находящиеся в воздухе и исходящие из F лучи в точку G, если они на своем пути встречают выпуклое стекло, поверхность которого есть $1A1$ и в котором все преломления, согласно сказанному в „Диоптрике“, могут быть измерены отношением линий $A5$ и $A6$ или им подобных, с помощью которых описан этот овал.

Та же часть, которая находится близ V, отражает все исходящие из точки G лучи в точку F, если они там встречают вогнутую поверхность зеркала, форма которого есть $1V1$ и которое сделано из такого вещества, что ослабляет силу этих лучей в отношении, равном отношению линий $A5$ и $A6$. Действительно из доказанного в „Диоптрике“ ясно, что в этом случае углы отражения будут неравными, так же как и углы преломления, и отношение их можно будет измерить таким же образом.

Во втором овале часть $2A2$ также годится для отражений, углы которых принимаются неравными. Действительно, если бы она была поверхностью зеркала, составленного из того же вещества, что и предыдущее, она бы отражала все лучи, исходящие из точки G, так, что они после отражения казались бы исходящими из точки F. Следует заметить, что если взять линию AG значительно бо́льшей, чем AF, то зеркало будет выпуклым в середине близ A и вогнутым у краев: действительно, именно такова форма линии, которая в этом случае представляет скорее сердце, чем овал.

Но другая часть овала $2X2$ годится для преломлений и такова, что когда лучи, которые, будучи в воздухе, направляются к точке F, проходят сквозь поверхность стекла, имеющего такую форму, то они направляются к точке G.

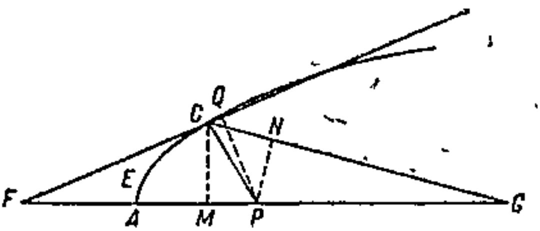
Третий овал полностью годится для преломлений. Лучи, которые, будучи в воздухе, направляются к точке F, пройдя сквозь поверхность формы $A3Y3$, направятся в стекле к точке H. Эта поверхность повсюду выпуклая, и лишь около точки A она слегка вогнутая, так что она, подобно предшествующей, имеет форму сердца. Разница между обеими частями этого овала состоит в том, что точка F ближе, чем точка H, к одной из них и дальше, чем та же точка H, от другой.

Таким же образом последний овал полностью годится для отражений. Если лучи, исходящие из точки H, встречают вогнутую поверхность зеркала, состоящего из того же вещества, что и предшествующие, и имеющего форму $A4Z4$, то все они отражаются в точку F.

Таким образом, точки F и G, или H, можно назвать фокусами [70] этих овалов, по примеру фокусов эллипсов и гипербол, получивших такое название в „Диоптрике".

Доказательство тех свойств этих овалов, которые связаны с отражениями и преломлениями.

Я не буду останавливаться на ряде других преломлений и отражений, даваемых этими овалами, так как, будучи лишь обратными или противоположными приведенным, они легко могут быть выведены из них. Но я должен дать доказательство всего сказанного мной. С этой целью выберем, например, в первой части первого из этих овалов (черт. 21) произвольную точку C; затем



Черт. 21.

проведем прямую CP, пересекающую кривую в точке C под прямыми углами, что легко сделать согласно предшествующей задаче. Действительно, принимая b за AG, c за AF, $c+z$ за FC, допустим, что отношение d к e, которое я здесь всегда буду считать измеряющим преломления предложенного стекла, является также отношением линий $A5$ и $A6$ или же им подобных, применявшихся при описании овала. Для GC это даст $b-\frac{e}{d}z$, и мы найдем, что линия AP есть, как и было показано выше,

$$\frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}.$$

Затем, опустив из точки P перпендикуляр PQ на прямую FC и перпендикуляр PN на GC, мы увидим, что если PQ относится к PN, как d к e, то-есть, как линии, измеряющие преломления выпуклого стекла AC, то луч, идущий из точки F в точку C, преломится, попавши в это стекло, так, что затем направится в G. Это вполне очевидно из того, что говорилось в „Диоптрике". Проверим теперь посредством вычислений, что PQ относится к PN, как d к e. Прямоугольные треугольники (черт. 21, стр. 65) PQF и CMF подобны, из чего следует, что CF относится к CM, как FP к PQ; следовательно, FP, умноженная на CM и деленная на CF, равна PQ. Точно так же подобны прямоугольные треугольники PNG и CMG, из чего следует, что GP, умноженная на CM и деленная на CG, равна PN. Далее, отношение двух величин не изменяется от умножения или деления их обеих на одну и ту же величину. Значит, если FP, умноженная на CM и деленная на CF, относится к GP, также умноженной на CM и деленной на CG, как d к e, то, разделив каждое из обоих выражений на CM, затем умножив оба их на CF и еще на CG, мы получим, что FP, умноженная на CG, относится к GP, умноженной на CF, как d к e. Но, по построению,

$$FP \text{ есть } c+\frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez},$$

$$\text{или же } FP \infty \frac{bcdd+ccdd+bddz+cddz}{bde+cdd+ddz-eez},$$

и CG есть $b-\frac{e}{d}z$.

Значит, умножая FP на CG, мы получим:

$$\frac{bbcdd+bccdd+bbddz+bcddz-bcdez-ccdez-bdezz-cdezz}{bde+cdd+ddz-eez}.$$

Далее

$$GP \text{ есть } b\frac{-bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez} \text{ [74]},$$

$$\text{или же } GP \infty \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez},$$

и CF есть $c + z$.

Значит, умножая GP на CF, мы получим

$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

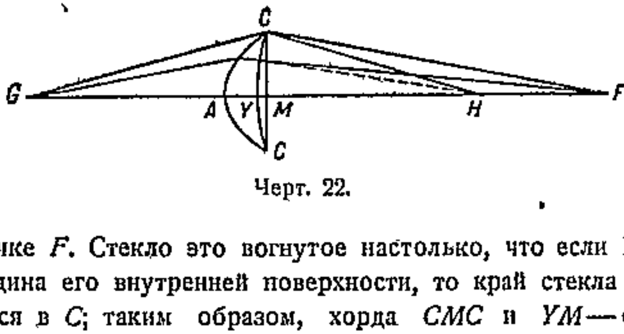
Так как первое из этих выражений, деленное на d, таково же, что и второе, деленное на e, то очевидно, что FP, умноженная на CG, относится к GP, умноженной на CF, то-есть, что PQ относится к PN, как d к e. А это только и требовалось доказать.

Знайте, что это же доказательство распространяется на все сказанное о других преломлениях или отражениях в предложенных овалах; для этого нужно лишь изменить в процессе вычислений знаки $+$ и $-$. Поэтому мне нет необходимости задерживаться на этом; каждый сумеет разобрать другие случаи самостоятельно.

Однако, теперь я должен восполнить то, что мной было выпущено в „Диоптрике“. Указав там, что стекла, которые в равной мере собирают все проходящие через них и исходящие из одной точки предмета лучи в некоторой другой точке, могут быть разной формы и отметив, что те из этих стекол, которые весьма выпуклы с одной стороны и вогнуты с другой, обладают бо́льшей зажигательной силой, чем стекла, равновыпуклые с обеих сторон, которые, наоборот, лучше для очков, я, учитывая трудности, представляемые для мастеров их шлифовкой, ограничился в „Диоптрике“ рассмотрением лишь тех стекол, которые считал наилучшими с практической точки зрения. Поэтому, чтобы в теоретической части этой науки больше не оставалось ничего пожелать, я должен еще выяснить форму тех стекол, которые имеют одну их поверхностей сколь угодно выпуклой или вогнутой и тем не менее собирают все исходящие из одной точки или параллельные лучи в другой точке [75]. Я должен буду также выяснить форму стекол, дающих то же самое, но либо одинаково выпуклых с обеих сторон, либо же таких, что выпуклость одной из их поверхностей находится в данном отношении к выпуклости другой.

Как можно изготовить стекло, одна из поверхностей которого имеет любую выпуклость или вогнутость и которое собирает в данной точке все лучи, исходящие из другой данной точки?

В первом случае мы примем, что точки G, Y, C и F даны (черт. 22) и что лучи, исходящие из точки G, или же лучи, параллельные GA, должны, пройдя стекло, собираться



Черт. 22.

в точке F. Стекло это вогнутое настолько, что если Y есть середина его внутренней поверхности, то край стекла помещается в C; таким образом, хорда CMC и YM — стрела дуги CYC — даны. Вопрос сводится к тому, что, во-первых, нужно установить, какой из ранее рассмотренных овалов должен служить формой поверхности стекла YC для того, чтобы все лучи, которые, находясь в нем, направлялись к одной и той же неизвестной еще точке, скажем H, выйдя из него, направлялись к другой точке, именно к F. Ибо нет ни одного явления, связанного с изменением отношений этих лучей при отражении или преломлении от одной точки к другой [76], которого нельзя было бы произвести с помощью какого-нибудь из этих овалов. Легко видеть, что требуемое в данном случае может быть достигнуто или частью третьего овала, немного ранее обозначенной $3A3$, или частью его, обозначенной $3Y3$, или же, наконец, частью второго, обозначенной $2X2$. И так как здесь все эти три поверхности попадают под одинаковый расчет, то для каждой из них Y должна быть вершиной, C — одной из точек контура и F — одним из фокусов; после этого остается найти лишь точку H, которая должна быть другим фокусом. И мы находим ее, заметив, что разность линий FY и FC должна относиться к разности линий HY и HC, как d к e, то-есть как наибольшая из линий, измеряющих преломления предложенного стекла, к наименьшей, что очевидно из описания этих овалов. И так как линии FY и FC даны, то дана также их разность, и, значит, дана и разность HY и HC, поскольку дано отношение между этими двумя разностями. Далее, так как YM дана, то дана и разность между MH и HC; наконец, так как дана CM, то остается лишь найти MH — сторону прямоугольного треугольника CMH, у которого дана другая сторона CM, а также разность основания CH и искомой стороны MH. Из этого легко определить MH. Действительно, если принять k за избыток CH над MH и n за длину линии CM, то MH будет $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$. Если найденная таким образом точка H отстоит от точки Y дальше, чем точка F, то линия CY должна быть первой частью овала третьего рода, обозначенной немного ранее $3A3$. Если же HY меньше FY или же HY превосходит HF настолько, что отношение их разности ко всей FY больше, чем отношение меньшей из измеряющих преломления линий e к большей d, то-есть, положив $HF \propto c$, $HY \propto c + h$, если dh больше, чем $2ce + eh$, то CY должна быть второй частью того же овала третьего рода, обозначенной немного ранее $3Y3$. Если же dh равно или меньше, нежели $2ce + eh$, то CY должна быть второй частью овала второго рода, обозначенной выше $2X2$. И, наконец, если точка H совпадает с точкой F, что происходит лишь когда FY и FC равны, то линия YC будет окружностью.

После этого требуется найти другую поверхность этого стекла CAC. Если принять, что падающие на нее лучи параллельны, эта поверхность должна быть эллипсом с фокусом H и тогда ее легко найти. Если же допустить, что лучи исходят из точки G, то поверхность должна быть первой частью овала первого рода, два фокуса которого будут G и H и который проходит через точку C. Отсюда мы найдем вершину овала C, заметив, что GC превосходит GA на величину, относящуюся к величине, на которую HA превосходит HC, как d к e. Действительно, если принять k за разность CH и HM, и AM обозначить x, то для разности AH и CH получится $x-k$; далее, если принять g за разность данных величин GC и GM, то для разности GC и GA получится $g+x$; и так как последняя, $g+x$, относится к другой разности, $x-k$, как d к e, то

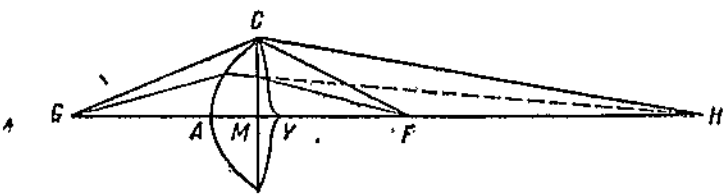
$$ge+ex \propto dx-dk;$$

значит, линия x или AM, определяющая искомую точку A, есть $\frac{ge+dk}{d-e}$.

Как изготовить стекло, которое давало бы тот же эффект, что предшествующее, и выпуклость одной поверхности которого находилась бы в данном отношении к выпуклости другой?

Во втором случае мы примем, что даны лишь точки G, C и F, отношение линий AM и YM и что требуется найти форму стекла ACY, собирающего в точке F все лучи, исходящие из точки G.

Мы снова здесь можем воспользоваться двумя овалами (черт. 23), один из которых AC имеет фокусы G и H, а другой CY — фокусы F и H. Чтобы найти их, я, в первую очередь, допущу, что общая их точка H известна и я буду искать AM по трем точкам G, C, H с помощью только что изложенного способа: именно, я приму k за разность CH и HM, g за разность GC и GM и, поскольку AC — первая часть овала первого рода, я найду для AM величину $\frac{ge+dk}{d-e}$. Затем по трем точкам F, C, H, я также ищу MY так, чтобы CY была первой частью овала третьего рода. Приняв y за MY, f за разность CF и FM, для разности CF и FY я получу $f+y$. Затем, имея уже k, разность CH и HM, я получу, что разность CH и HY есть $k+y$. И я знаю, что эта разность должна относиться к $f+y$, как e к d, ибо



Черт. 23.

мы имеем дело с овалом третьего рода. Отсюда я нахожу, что y или MY есть $\frac{fe-dk}{d-e}$. Затем, сложив обе найденные для AM и MY величины, я для всей AY найду $\frac{ge+fe}{d-e}$. Из этого следует, что, с какой бы стороны ни взять точку H, эта линия AY всегда образуется из величины, относящейся к той величине, на которую GC и CF обе вместе превосходят всю GF, как e, меньшая из двух линий, служащих для измерения преломлений предложенного стекла, к разности этих двух линий $d-e$. Это — довольно красивая теорема. Найдя таким образом всю линию AY, ее следует разделить в отношении, в котором должны находиться ее части AM и MY. На основании этого, так как точка M уже известна, мы тогда найдем также точки A и Y и затем, согласно предшествующей задаче, точку H. Но прежде нужно посмотреть, будет ли найденная таким образом линия AM больше, меньше или равна $\frac{ge}{d-e}$. Если она больше, то мы из этого видим, что кривая AC должна быть первой частью овала первого рода, а CY — первой частью овала третьего рода, какими мы их здесь и предположили. Но если она меньше, то это показывает, что CK должна быть первой частью овала первого рода, а AC — первой частью овала третьего рода. Наконец, если AM равна $\frac{ge}{d-e}$, то две кривые AC и CY должны быть двумя гиперболами.

Обе эти задачи можно было бы распространить на бесчисленное множество других случаев, на выводе которых я не останавливаюсь, так как они совершенно не применяются в „Диоптрике".

Можно было бы также пойти еще дальше и указать, какой следует сделать поверхность стекла, чтобы оно собирало все исходящие из данной точки лучи в другой данной точке, если дана другая поверхность, либо плоская, либо составленная из конических сечений или кругов. Это отнюдь не труднее изложенного мною выше, или, вернее, это значительно легче, так как путь к решению уже открыт. Но я предпочитаю предоставить эти поиски другим, для того чтобы некоторые трудности, которые, быть может, им при этом встретятся, заставили их лучше оценить открытие доказанных здесь вещей.

Как можно применить то, что здесь говорилось о кривых, описанных на плоской поверхности (superficie plate) к кривым, описываемым в пространстве трех измерений?

Наконец, я здесь повсюду говорил лишь о тех кривых, которые можно описать на плоской поверхности. Однако сказанное о них можно легко перенести на все кривые, какие только можно представить образованными правильным движением точек какого-нибудь тела в пространстве трех измерений. Именно, этого можно достигнуть, проведя из каждой точки рассматриваемой кривой по два перпендикуляра к двум пересекающимся под прямым углом плоскостям, — один к одной, и другой — к другой. В самом деле, концы этих перпендикуляров описывают две другие кривые — по одной в каждой из этих плоскостей. Все точки последних кривых можно определить и отнести к точкам прямой, общей этим двум плоскостям, по вышеизложенному способу, а благодаря этому будут вполне определены и точки кривой, имеющей три измерения (la courbe qui a trois dimensions). Точно так же, если желательно провести прямую, пересекающую эту кривую в данной точке под прямыми углами, нужно лишь провести в обеих плоскостях две другие прямые, по одной в каждой из них, пересекающие под прямыми углами расположенные в них кривые в тех двух точках, на которые падают перпендикуляры, проведенные из данной точки. Действительно, восставив две другие плоскости, каждая из которых проходит через одну из этих прямых и перпендикулярна к плоскости, в которой расположена соответствующая прямая, мы в пересечении этих двух плоскостей получим искомую прямую. Я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий [77].

КНИГА ТРЕТЬЯ

О ПОСТРОЕНИИ ТЕЛЕСНЫХ ИЛИ ПРЕВОСХОДЯЩИХ ТЕЛЕСНЫЕ ЗАДАЧ.

Какими кривыми можно пользоваться при построении любой задачи?

Хотя в геометрию должны быть допущены все кривые линии, которые можно описать посредством какого-либо правильного движения, но это вовсе не значит, что для построения всякой задачи дозволительно без различия воспользоваться любой первой попавшейся кривой. Необходимо всегда стараться выбрать наиболее простую кривую, позволяющую решить эту задачу. Нужно так же заметить, что под наиболее простыми кривыми не следует понимать только те, которые проще всего описать, или те, которые дают наиболее легкое построение или доказательство предложенной задачи, но в особенности те, которые принадлежат к простейшему роду, позволяющему определить искомую величину.

Пример: нахождение нескольких средних пропорциональных.

Так, например, я не думаю, чтобы существовал более простой и более очевидно доказываемый способ нахождения произвольного числа средних пропорциональных, чем применение кривых, описываемых рассмотренным выше инструментом XYZ (черт. 6, стр. 31). Действительно, для нахождения двух средних пропорциональных между YA и YE нужно лишь описать окружность диаметра YE; если эта окружность пересекает кривую AD в точке D, то YD является одной из искомых средних пропорциональных. Доказательство этого непосредственно ясно при приложении инструмента к линии YD; ибо как YA, или равная ей YB, относится к YC, так YC относится к YD и YD к YE.

Точно так же, для нахождения четырех средних пропорциональных между YA и YG, или же шести между YA и YN, нужно лишь провести окружность YFG, которая, пересекая AF в точке F, определяет одну из этих четырех средних пропорциональных — прямую YF, или же, соответственно, окружность YHN, которая, пересекая AH в точке H, определяет одну из шести средних пропорциональных — YH; и так далее.

Однако, так как кривая AD — второго рода, а две средние пропорциональные можно найти при помощи конических сечений, принадлежащих к первому роду, и так как четыре или шесть средних пропорциональных можно найти при помощи линий менее сложного рода, чем AF и AH, то геометрия допустила бы ошибку, употребляя их здесь. С другой стороны было бы ошибкой бесполезно тратить усилия в поисках построения задачи с помощью более простого рода линий, чем допускает ее природа.

О природе уравнений.

Чтобы иметь здесь возможность дать некоторые правила для избежания обеих этих ошибок, я должен предварительно привести некоторые общие сведения о природе уравнений, то-есть о выражениях [78], составленных из нескольких членов, которые частью известны, а частью неизвестны и из которых одни равны другим или же, лучше, которые, рассматриваемые все вместе, равны ничему [79]; ибо уравнения часто удобнее рассматривать именно последним образом,

Сколько корней может иметь любое уравнение?

Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений; ибо, если, например, принять x равным 2, или же $x - 2$ равным ничему, а также $x \infty 3$ или же $x - 3 \infty 0$, то, перемножив оба эти уравнения

$$x - 2 \infty 0 \quad \text{и} \quad x - 3 \infty 0,$$

мы получим

$$xx - 5x + 6 \infty 0 \quad \text{или же} \quad xx \infty 5x - 6,$$

уравнение, в котором величина x имеет значение 2, и вместе с тем значение 3. Если принять еще, что $x - 4 \infty 0$ и умножить это выражение на $xx - 5x + 6 \infty 0$, то мы получим:

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0,$$

другое уравнение, в котором x, обладая тремя измерениями, имеет вместе с тем три значения, а именно 2, 3 и 4 [80].

Каковы ложные корни?

Однако часто случается, что некоторые из этих корней ложны, или же меньше, чем ничто [81]. Например, если допустить, что x выражает собой также недостаток какой-нибудь величины, скажем 5, то мы получим $x + 5 \infty 0$, и если это умножить на $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, то получится

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0,$$

уравнение, у которого четыре корня, именно три истинных (vraies), 2, 3, 4, и один ложный (fausse), 5.

Как можно уменьшить число измерений уравнения, если известен какой-нибудь из его корней?

Отсюда очевидно, что выражение уравнения, обладающего несколькими корнями, всегда можно разделить на двучлен, составленный из неизвестной величины минус значение любого из истинных корней, либо плюс значение какого-либо из ложных корней [82]. Таким способом можно на столько же уменьшить измерения уравнения.

Как проверить, является ли какая-либо данная величина значением какого-либо корня?

И обратно, если выражение уравнения нельзя разделить на двучлен, составленный из неизвестной + или — какая-нибудь другая величина, то это показывает, что эта другая величина не есть значение какого-либо из корней уравнения. Например, вышеприведенное уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$$

может быть разделено на $x-2$, и на $x-3$, и на $x-4$, и на $x+5$, но не на $x+$ или — какая бы то ни была другая величина. Это показывает, что оно может иметь лишь четыре корня: 2, 3, 4, и 5.

Сколько может иметься у всякого уравнения истинных корней?

Отсюда также видно, сколько может иметься у всякого уравнения истинных корней и сколько ложных. Именно, истинных корней может быть столько, сколько раз в нем изменяются знаки + и —, а ложных — сколько раз встречаются подряд два знака + или дважды знаки —. Например, из того, что в последнем уравнении после $+x^4$ имеется $-4x^3$, что представляет собой перемену знака + на —, после $-19xx$ имеется $+106x$, после $+106x$ имеется -120, что дает еще две перемены знака, мы узнаем, что существуют три истинных корня. Имеется также один ложный корень, ибо встречаются подряд два знака минуса у $4x^3$ и $19xx$ [83].

Как делают, чтобы ложные корни уравнения стали истинными, а истинные ложными?

Легко далее сделать так, чтобы все корни одного и того же уравнения, бывшие ложными, стали истинными, и вместе с тем все бывшие истинными стали ложными; именно, это можно сделать, изменив на обратные все знаки $+$ или $-$, стоящие на втором, четвертом, шестом и других, обозначаемых четными числами местах, не изменяя знаки первого, третьего, пятого и им подобных, обозначаемых нечетными числами, мест. Например, если вместо

$$+x^4-4x^3-19xx+106x-120\propto 0$$

написать

$$+x^4+4x^3-19xx-106x-120\propto 0,$$

то получится уравнение, обладающее только одним истинным корнем, 5, и тремя ложными, 2, 3 и 4.

Как можно, не зная корней уравнения, увеличить их или уменьшить?

Если угодно, не зная значения корней уравнения, увеличить или уменьшить их на какую-нибудь известную величину, то нужно лишь взять вместо неизвестного термина (terme inconnu) другой больший или меньший, чем первый, на эту самую величину, и подставить его везде вместо первого [84]. Например, если корень уравнения

$$x^4+4x^3-19xx-106x-120\propto 0$$

желательно увеличить на 3, то вместо x нужно взять y и представить себе, что эта величина y больше x на 3, так что $y-3$ равно x. Затем вместо xx нужно будет поставить квадрат величины $y-3$, то-есть $yy-6y+9$, вместо x^3 — ее куб, то есть $y^3-9yy+27y-27$, и, наконец, вместо x^4 квадрат квадрата ее, то-есть $y^4-12y^3+54yy-108y+81$. Таким образом, выписав предшествующее выражение и подставив в нем везде y вместо x, мы получим:

$$\begin{array}{r}
y^4-12y^3+54yy-108y+81 \\
+\ 4y^3-36yy+108y-108 \\
-19yy+114y-171 \\
-106y+318 \\
-120 \\
\hline
y^4-8y^3-1yy+8y\ \star\ \infty\ 0
\end{array}$$ [85]

или же

$$y^3-8yy-1y+8\infty 0,$$

где истинный корень, бывший раньше 5, теперь есть 8, так как к нему прибавлено число три.

Наоборот, если корень того же уравнения желательно уменьшить на три, то следует положить

$$y+3\infty x \quad \text{и} \quad yy+6y+9\infty xx$$

и так далее. В результате вместо

$$x^4+4x^3-19xx-106x-120\infty 0$$

получится

$$\begin{array}{r}
y^4+12y^3+54yy+108y+81 \\
+\ 4y^3+36yy+108y+108 \\
-19yy-114y-171 \\
-106y-318 \\
-120 \\
\hline
y^4+16y^3+71yy-4y-420\ \infty\ 0.
\end{array}$$

Увеличивая истинные корни, мы уменьшаем ложные, и на оборот.

Нужно заметить, что увеличивая истинные корни уравнения, мы уменьшаем на ту же величину ложные, и наоборот, уменьшая истинные, мы увеличиваем ложные [86]. Далее, когда те или другие корни уменьшаются на равную им величину, они обращаются в ничто, а когда корни уменьшаются на величину, превосходящую их, то из истинных они становятся ложными, а из ложных — истинными. Так, если здесь увеличить истинный корень, который был 5, на 3, то на 3 же уменьшится каждый из ложных корней, так что корень, бывший 4, станет лишь 1, бывший 3 — ничем, а бывший 2 станет истинным и будет 1, так как $-2+3$ дает $+1$. Именно поэтому в уравнении

$$y^3-8yy-1y+8\propto 0$$

имеются теперь лишь 3 корня, два из которых, 1 и 8, истинны, а один, также 1, ложный. А в другом уравнении

$$y^4+16y^3+71yy-4y-420\propto 0$$

имеется лишь один истинный корень, 2, так как $+5-3$ дает $+2$, и три ложных: 5, 6 и 7.

Как удалить второй член уравнения?

С помощью этого способа изменения значения найденных корней можно сделать две вещи, которые получат некоторое применение в дальнейшем. Первая заключается в том, что всегда возможно удалить второй член рассматриваемого уравнения [87]. А именно, когда один из первых двух членов отмечен знаком $+$, а другой знаком $-$, это достигается уменьшением истинных корней на известную величину во втором члене [88], деленную на число измерений первого члена; когда же оба они имеют знак $+$ или же оба имеют знак $-$, это достигается путем их увеличения на ту же величину. Например, чтобы удалить второй член последнего уравнения

$$y^4+16y^3+71yy-4y-420\propto 0,$$

мы, поделив 16 на 4, ибо член y^4 имеет 4 измерения, получим снова 4. Поэтому я полагаю $z-4\propto y$ и пишу

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4-16z^3 & +\ 96zz & -256z & +\ 256 & \\
+16z^3 & -192zz & +768z & -1024 & \\
 & +\ 71zz & -568z & +1136 & \\
 & & -\ \ 4z & +\ \ 16 & \\
 & & & -\ 420 & \\
\hline
z^4\ \star & -\ 25zz & -\ 60z & -\ \ 36 & \propto 0;
\end{array}$$

здесь истинный корень, бывший раньше 2, есть 6, так как он увеличен на 4, а ложные, бывшие 5, 6 и 7, из-за уменьшения каждого из них на 4, суть лишь 1, 2 и 3.

Точно так же, если желательно удалить второй член уравнения

$$x^4 - 2ax^3 \left.\begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix}\right\} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0,$$

то, поскольку при делении $2a$ на 4 получается $\frac{1}{2}a$, нужно положить $z + \frac{1}{2}a \infty x$ и написать

$$\begin{array}{llll|l|l}
z^4 & +2az^3 & +\frac{3}{2}aazz & +\frac{1}{2}a^3z & & +\frac{1}{16}a^4 \\
 & -2az^3 & -3aazz & -\frac{3}{2}a^3 & z & -\frac{1}{4}a^4 \\
 & & +2aa \mid zz & +2a^3 & & +\frac{1}{2}a^4 \\
 & & -cc & -acc & & -\frac{1}{4}aacc \\
 & & & -2a^3 & & -a^4 \\
 & & & & & +a^4 \\
\hline
z^4 & \star & \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} & zz \; \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} & z & \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \quad \infty 0;
\end{array}$$

и если потом будет найдено значение z, то, прибавив к нему $\frac{1}{2}a$, мы получим значение x.

Как можно сделать, чтобы все ложные корни уравнения стали истинными, но истинные не стали бы ложными?

Вторая вещь, которая получит некоторое применение в дальнейшем, состоит в том, что посредством увеличения значений истинных корней на величину, бо́льшую величины любого из ложных, всегда можно сделать все корни истинными, так что уже более не встретятся подряд два знака +

или два знака —, а также сделать известную величину в третьем члене больше квадрата половины известной величины во втором. Хотя всё это производится при условии, что ложные корни неизвестны, но легко составить приблизительное суждение об их величине и взять затем величину, превосходящую их настолько или же больше, чем требуется для такой цели [60]. Например, если мы имеем:

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 +$$
$$+ 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0,$$

то, положив $y - 6n \infty x$, найдем:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
y^6 - 36n & y^5 + 540nn & y^4 - 4320n^3 & y^3 + 19440n^4 & yy - 46656n^5 & y + 46656n^6 \\
+ n & - 30nn & + 360n^3 & - 2160n^4 & + 6480n^5 & 7776n^6 \\
 & - 6nn & + 144n^3 & - 1296n^4 & + 5184n^5 & - 7776n^6 \\
 & \cdot & + 36n^3 & - 648n^4 & + 3888n^5 & - 7776n^6 \\
 & & & - 216n^4 & + 2592n^5 & - 7776n^6 \\
 & & & & + 1296n^5 & - 7776n^6 \\
 & & & & & - 7776n^6 \\
\hline
\end{array}$$
$$y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4y^2 - 27216n^5y \star \infty 0;$$

здесь очевидно, что величина $504nn$, известная величина в третьем члене, больше квадрата $\frac{35}{2}n$, половины известной величины во втором; и не бывает случая, чтобы величину, на которую увеличивают истинные корни, потребовалось для этой цели взять большей, в сравнении с данными величинами, чем в этом случае.

Как заполняют в уравнении все места?

Так как последний член в этом уравнении отсутствует, то, если это нежелательно, нужно еще хотя бы немного увеличить значение корней; и как бы мало ни было увеличение, оно будет достаточным для этой цели. Точно так же обстоит дело, когда угодно увеличить число измерений каконибудь уравнения и заполнить все места его членов. Например, если вместо

$$x^5 * * * * - b \infty 0$$

угодно получить уравнение, в котором неизвестная величина имеет шесть измерений и не отсутствует ни один из членов, то, вместо

$$x^5 * * * * - b \infty 0,$$

сперва нужно написать

$$x^6 * * * * - bx * \infty 0;$$

затем, положив $y - a \infty x$, мы получим

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - 6a^5y +$$
$$+ a^6 - by + ab \infty 0.$$

Здесь очевидно, что сколь малой ни предположить величину a, все места уравнения все равно будут заполнены.

Как можно, не зная корней, их умножать и делить?

Далее, не зная значений истинных [90] корней уравнения, их все можно умножить или разделить на произвольную известную величину. Этого можно достигнуть, предположив, что неизвестная величина, умноженная или разделенная на величину, на которую требуется умножить или разделить корни, равна некоторой другой, а затем, умножив или разделив известную величину во втором члене на ту самую величину, на которую требуется умножить или разделить корни; известную величину в третьем — на ее квадрат; известную величину в четвертом — на ее куб, и так далее — до последнего члена.

Как приводят в уравнении дробные числа к целым?

Это может служить для приведения к целым и рациональным числам дробей, а часто также и иррациональных чисел [91], находящихся в членах уравнений. Например, если

$$x^3 - \sqrt{3}\,xx + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0$$

и если вместо этого уравнения желательно получить другое, все члены которого выражаются рациональными числами, то нужно принять $y \infty x\sqrt{3}$ и известную величину во втором члене, так же $\sqrt{3}$, умножить на $\sqrt{3}$, известную величину в третьем, $\frac{26}{27}$, на его квадрат, то-есть на 3, и известную величину в последнем $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ — на его куб, то-есть на $3\sqrt{3}$. Это даст

$$y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0.$$

Если затем вместо этого уравнения желательно получить еще другое, в котором все известные величины выражались бы только целыми числами, то следует принять $z \infty 3y$; умножив 3 на 3, $\frac{26}{9}$ на 9 и $\frac{8}{9}$ на 27, мы найдем

$$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0.$$

Так как корни здесь суть 2, 3 и 4, то мы видим, что корни предыдущего уравнения были $\frac{2}{3}$, 1 и $\frac{4}{3}$, а корни первого

$$\frac{2}{9}\sqrt{3},\quad \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Как сделать известную величину в каком-либо члене уравнения равной любой величине?

Эта же операция может служить для того, чтобы известную величину в каком-либо члене уравнения сделать равной какой-либо другой величине. Например, если вместо уравнения

$$x^3 * - bbx + c^3 \infty 0$$

желательно получить другое уравнение, в котором известная величина в члене, занимающем третье место, здесь bb, была бы $3aa$, то нужно принять $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ и затем написать

$$y^3 * -3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0.$$

Как истинные, так и ложные корни могут быть или действительными, или воображаемыми.

Наконец, как истинные, так и ложные корни не всегда бывают действительными, оказываясь иногда лишь воображаемыми (imaginaires) [92]. Другими словами, хотя всегда можно вообразить себе (imaginer) у каждого уравнения столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням. Так, например, хотя у уравнения

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$$

можно вообразить себе три корня, но на самом деле оно имеет только один действительный, именно, 2. Что касается двух других корней, то сколько бы их ни увеличивать, уменьшать или умножать так, как я только что объяснил, все равно их не удастся сделать иными, чем воображаемыми.

Приведение кубических уравнений в случае плоской задачи.

Если в поисках построения какой-нибудь задачи получается уравнение, в котором неизвестная величина имеет три измерения, и если, во-первых, имеющиеся в уравнении известные величины содержат дроби, то посредством объясненного выше умножения их следует привести к целым числам. Если же они содержат иррациональные числа, то их также следует по возможности привести к рациональным числам при помощи как того же умножения, так и различных иных способов, найти которые довольно легко. Затем, рассматривая по порядку все величины, на которые делится нацело последний член, следует установить, не может ли какая-нибудь из них при соединении с неизвестной величиной знаком $+$ или $-$ образовать двучлен, на который делилось бы все выражение [93]. И если это так, то задача является плоской, то-есть может быть построена при помощи линейки и циркуля. Действительно, либо искомым корнем будет входящая в двучлен известная величина, либо же уравнение, после деления на двучлен, приводится к двум измерениям, так что корень можно будет потом найти на основании сказанного в первой книге.

Если, например,

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 \infty 0,$$

то последний член, 64, можно разделить нацело на 1, 2, 4, 8, 16, 32 и 64. На этом основании следует по порядку рассмотреть, нельзя ли разделить уравнение на какой-нибудь из двучленов: $yy - 1$ или $yy + 1$; $yy - 2$ или $yy + 2$; $yy - 4$ и т. д.; при этом мы найдем, что оно делится на $yy - 16$ следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
+y^6 & -\ 8y^4 & -124yy & -64 \infty 0 \\
\underline{-1y^6} & -\ \underline{8y^4} & -\ \underline{4yy} & \overline{-16} \\
\quad 0 & -\underline{16y^4} & -\underline{128yy} & \\
 & \quad 16 & \quad 16 & \\
\hline
+y^4 & +\ 8yy & +\ 4 & \infty 0 \ [94].
\end{array}$$

Способ деления уравнения на двучлен, содержащий его корень.

Я начинаю с последнего и делю -64 на -16, это дает $+4$, что я и записываю в частном. Затем я умножаю $+4$ на yy, что дает $+4yy$, почему я и записываю в делимом выражении $-4yy$, ибо в нем всегда следует писать знак $+$ и $-$, противоположный знаку, получающемуся при умножении. Прибавив $-124yy$ к $-4yy$, я нахожу $-128yy$

и это снова делю на -16, причем получаю $+8yy$, которые нужно поставить в частном. Умножая это на yy, я, для прибавления к подлежащему делению члену, который также есть $-8y^4$, получаю $-8y^4$; вместе они дают $-16y^4$, и это я делю на -16. Это дает $+1y^4$ для частного и $-1y^6$ для прибавления к $1y^6$, что дает 0 и свидетельствует об окончании деления. Но если бы осталась какая-нибудь величина или же если бы какой-нибудь из предшествующих членов нельзя было разделить нацело, то это обнаружило бы, что деление невозможно.

Аналогично, если

$$y^6 \begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}\, y^4 \begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}\, yy \begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix} \infty 0,$$

то последний член можно нацело разделить на a, на aa, $aa+cc$, a^3+acc и т. п. Но рассмотреть нужно лишь два выражения, именно aa и $aa+cc$, ибо остальные, давая в частном или больше или меньше измерений, чем их имеет известная величина в предпоследнем члене, не позволили бы произвести деление. При этом заметьте, что измерение y^6 я здесь принимаю равным лишь трем, так как во всем выражении нет ни y^5, ни y^3, ни y. Испытывая двучлен $yy-aa-cc \infty 0$, мы увидим, что деление на него можно произвести так:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & +aa & & -a^4 & & -a^6 & \\
y^6 & & y^4 & & yy & -2a^4cc & \infty 0, \\
 & -2cc & & +c^4 & & \underline{-aac^4} & \\
\underline{-y^6} & -2aa & & -a^4 & & -aa-cc & \\
0 & \underline{+cc} & & \underline{-aacc} & & & \\
 & -aa-cc & & -aa-cc & & & \\
\hline
 & & & +2aa & & +a^4 & \\
 & +y^4 & & & yy & & \infty 0; \\
 & & & -cc & & +aacc &
\end{array}$$

это показывает, что искомый корень есть $aa+cc$. Это легко проверить умножением.

Каковы телесные задачи, когда уравнение является кубическим?

Но если нельзя найти такой двучлен, на который делится, таким образом, все выражение предложенного уравнения, то зависящая от последнего задача, несомненно, телесная. После этого было бы не меньшей ошибкой пытаться ее построить при помощи лишь кругов и прямых линий, чем применять конические сечения к построению задач, для которых требуются только круги; ибо в конце концов все, что свидетельствует о каком-либо незнании, называется ошибкой.

О приведении уравнений с четырьмя измерениями в случае плоской задачи и о телесных задачах.

Если имеется уравнение, в котором неизвестная величина имеет четыре измерения, то после удаления из него иррациональных и дробных чисел, если они имеются, следует таким же образом выяснить, нельзя ли найти двучлен, на который делилось бы все выражение, причем двучлен составляется из величин, на которые делится нацело последний член. Если такой двучлен удастся найти, то либо искомым корнем будет входящая в него известная величина, либо, по крайней мере, после деления останется уравнение, которое имеет всего три измерения и которое нужно будет затем, в свою очередь, подвергнуть такому же исследованию. Если же такой двучлен найти не удастся, то нужно по указанному выше способу путем увеличения или уменьшения значения корня удалить второй член выражения и затем привести последнее к другому выражению, содержащему лишь три измерения. Это проделывается следующим образом вместо:

$$+x^4 * \cdot pxx \quad \cdot qx \cdot r \infty 0$$

нужно написать

$$+y^6 \cdot 2py^4 {+pp \atop \cdot 4r} yy - qq \infty 0 \text{ [95]},$$

Что касается опущенных мною знаков $+$ и $-$, то если в предшествующем уравнении было $+p$, в последующем надо поставить $+2p$, а если было $-p$, то надо поставить $-2p$; наоборот, если было $+r$, то надо поставить $-4r$, а если было $-r$, то надо поставить $+4r$; далее, было ли $+q$ или $-q$, надо все равно поставить $-qq$ и $+pp$, по крайней мере, если предположить, что x^4 и y^6 отмечены знаком $+$; в случае же знака $-$ при них все было бы наоборот.

Если, например, мы имеем

$$+x^4 * -4xx-8x+35 \propto 0,$$

то вместо этого нужно написать

$$y^6-8y^4-124yy-64 \propto 0 \text{ [96]}.$$

Действительно, так как величина, названная мною p, здесь есть -4, то вместо $2py^4$ нужно поставить $-8y^4$; далее, так как величина, названная мною r, здесь есть 35, то вместо $\begin{matrix}+pp\\-4r\end{matrix}\,yy$ нужно поставить $\begin{matrix}+16\\-140\end{matrix}\,yy$, то-есть $-124yy$, и, наконец, так как q есть 8, то вместо $-qq$ нужно поставить -64.

Аналогично вместо

$$+x^4 * -17xx-20x-6 \propto 0$$

нужно написать

$$+y^6-34y^4+313yy-400 \propto 0,$$

ибо 34 вдвое больше 17, 313 представляет собой квадрат 17, сложенный с учетверенным 6, и 400 есть квадрат 20.

Аналогично также вместо

$$+z^4 * \begin{matrix}+\frac{1}{2}aa\\ \\ -cc\end{matrix}\; zz \;\begin{matrix}-a^3\\ \\ -acc\end{matrix}\; z \;\begin{matrix}+\frac{5}{16}a^4\\ \\ -\frac{1}{4}aacc\end{matrix} \propto 0$$

нужно написать

$$y^6 \begin{matrix}+aa\\ -2cc\end{matrix}\; y^4 \begin{matrix}-a^4\\ +c^4\end{matrix}\; yy \begin{matrix}-a^6\\ -2a^4cc\\ -aac^4\end{matrix} \infty 0,$$

так как p есть $+\frac{1}{2}aa-cc$ и pp есть $\frac{1}{4}a^4-aacc+c^4$, и $4r$ есть $-\frac{5}{4}a^4+aacc$ и, наконец, $-qq$ есть $-a^6-$ $-2a^4cc-aac^4$.

После того как уравнение приведено таким путем к трем измерениям, следует, по уже изложенному способу, определить значение yy, а если его нельзя найти, то не следует итти дальше, так как это непременно означает, что задача — телесная. Если же значение yy будет найдено, то предшествующее уравнение можно, пользуясь им, разделить на два других, в каждом из которых неизвестная величина будет обладать только двумя измерениями и корни которых будут те же, что и его корни. Именно, вместо уравнения

$$+x^4 * \cdot pxx \cdot qx \cdot r \infty 0$$

нужно написать два других

$$+xx-yx+\frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0$$

и

$$+xx+yx+\frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} \infty 0.$$

Что касается опущенных мною знаков $+$ и $-$, то, если в предыдущем уравнении было $+p$, в каждом из данных надо поставить $+\frac{1}{2}p$, а если было $-p$, то надо поставить $-\frac{1}{2}p$. Далее, если в первоначальном уравнении имеется $+q$, то в уравнении, где имеется $-yx$, надо поставить $+\frac{q}{2y}$, а в уравнении, где имеется $+yx$, надо поставить $-\frac{q}{2y}$. Наоборот, если там имеется $-q$, то в уравнении, где имеется $-yx$, надо поставить $\frac{-q}{2y}$, а в уравнении, где имеется $+yx$, надо поставить $+\frac{q}{2y}$. Таким путем легко узнать все корни предложенного уравнения и, следовательно, построить задачу, решение которой содержится в нем, пользуясь лишь кругами и прямыми линиями.

Например, так как, взяв

$$y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto 0$$

вместо

$$x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0,$$

мы найдем, что yy есть 16, то вместо данного уравнения

$$+x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0$$

нужно написать два других

$$+xx - 4x - 3 \propto 0$$

и

$$+xx + 4x + 2 \propto 0;$$

ибо y есть 4, $\frac{1}{2}yy$ есть 8, p есть 17 и q есть 20. Таким образом

$$+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ дает } -3,$$

$$+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ дает } +2.$$

Извлекая корни этих двух уравнений, мы найдем как раз все те корни, которые получились бы из уравнения, содержащего x^4: именно один истинный $\sqrt{7}+2$, и три ложных:

$$\sqrt{7}-2,\quad 2+\sqrt{2} \quad \text{и} \quad 2-\sqrt{2}.$$

Аналогично, если

$$x^4 * - 4xx - 8x + 35 \propto 0 \text{ [97]},$$

то, так как корень уравнения

$$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$$

снова есть 16, нужно написать:

$$xx - 4x + 5 \propto 0,$$

и

$$xx + 4x + 7 \propto 0,$$

Действительно, здесь $+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}$ дает 5

и $a+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}$ дает 7.

Так как у обоих последних уравнений мы не найдем ни истинных, ни ложных корней, то из этого узнаем, что четыре корня того уравнения, из которого получены данные,— воображаемые. Задача, для которой было найдено уравнение, по природе своей плоская, но она не может быть построена никоим образом, ибо данные величины входить в таком сочетании (se joindre) не могут.

Аналогично, если

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ \\ -cc \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} zz \begin{matrix} -a^3 \\ \\ -acc \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0,$$

то, так как мы найдем для yy значение $aa+cc$, нужно будет написать

$$zz-\sqrt{aa+cc}\,z+\frac{3}{4}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}\infty 0,$$

$$zz+\sqrt{aa+cc}\,z+\frac{3}{4}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}\infty 0.$$

Действительно, y есть $\sqrt{aa+cc}$, $+\frac{1}{2}yy+\frac{1}{2}p$ есть $\frac{3}{4}aa$, и $\frac{q}{2y}$ есть $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Из этого видно, что значение z есть

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

или же

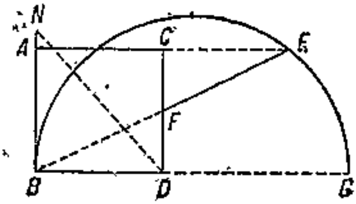
$$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Так как мы положили выше $z+\frac{1}{2}a\infty x$, то узнаем, что величина x, для нахождения которой мы произвели все эти действия, есть

$$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Пример употребления этих приведений.

Чтобы можно было лучше уяснить всю пользу этого правила, я применю его к решению какой-нибудь задачи.



Черт. 24.

Допустим, например, что даны квадрат AD и линия BN и что требуется так продолжить сторону AC до E, чтобы линия EF, проведенная из E к B, была равна NB (черт. 24). Из Паппа известно, что если продолжить сперва BD до G, так, чтобы DG была равна DN, и описать круг диаметра BG, а затем продолжить прямую AC, то она пересечет окружность этого круга в искомой точке E. Но тем, кто незнаком с этим построением, найти его будет довольно трудно. Если бы они стали искать его при помощи предложенного мною здесь способа, то им никогда не пришло бы в голову принять за неизвестную величину DG; в качестве нее они скорее взяли бы CF или FD, ибо как раз эти величины легче всего приводят к уравнению. При этом получилось бы уравнение, привести которое, не прибегнув к изложенному мною выше правилу, было бы отнюдь не легко. В самом деле, полагая BD или CD равными a, EF равной c, DF равной x, мы найдем, что $CF \propto a-x$ и что CF или $a-x$ относится к FE или c, как FD или x относится к BF, которая, следовательно, есть $\frac{cx}{a-x}$. Затем, так как треугольник BDF прямоугольный и одна из сторон его равна x, а другая a, то их квадраты, то-есть $xx+aa$, равны квадрату основания, который есть $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$. Таким образом, умножая все на $xx - 2ax + aa$, мы найдем, что уравнение будет

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$$

или же

$$x^4 - 2ax^3 \begin{array}{c} +2aa \\ \\ -cc \end{array} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0.$$

Отсюда мы при помощи предыдущих правил узнаем, что его корень, представляющий собой длину линии DF, есть

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Если бы в качестве неизвестной величины взяты были BF или CE [98], или BE, то мы снова пришли бы к уравнению, которое имело бы четыре измерения, но которое привести было бы легче. Притти к этому уравнению было бы довольно легко; между тем, если бы мы взяли DG, то уравнение, правда, очень простое, было бы получить значительно труднее. Я указываю на это с целью предупредить вас, что когда предложенная задача не телесная и когда, решая ее одним путем, приходишь к очень сложному уравнению, то, решая ее другим путем, можно обыкновенно притти к более простому уравнению.

Я мог бы к этому добавить еще несколько различных правил приведения уравнений, восходящих до куба или квадрата квадрата, но они были бы лишними, ибо в случае плоских задач построение их всегда можно найти, пользуясь уже приведенными правилами.

Общее правило приведения уравнений выше квадрато-квадратных.

Я мог бы также добавить и другие правила для уравнений, восходящих до сверхтела или до квадрата куба или же выше. Однако я предпочитаю объединить их все воедино и указать вообще, что если, пытаясь привести эти уравнения к уравнениям той же формы и с тем же числом измерений и получающимся при перемножении двух других уравнений меньшего числа измерений, и перебрав все способы, какими можно произвести такое перемножение, мы увидим, что осуществить это никак нельзя, то можно быть уверенными, что наши уравнения не могут быть приведены к более простым. Следовательно, если неизвестная величина имеет три или четыре измерения, то задача, в которой ее ищут, будет телесной, а если она имеет пять или шесть измерений, то задача будет на один порядок сложнее и т. д.

Я не привел здесь доказательств большей части сказанного по той причине, что они кажутся мне столь легкими, что если вы только потрудитесь методически проверить, не ошибся ли я, то эти доказательства представятся сами собой. И будет полезнее познакомиться с ними таким путем, чем путем простого чтения.

Общий способ построения всех телесных задач, приводящихся к уравнению трех или четырех измерений.

Если мы удостоверились, что предложенная задача — телесная, то, будет ли уравнение, служащее для ее решения, восходить до квадрата квадрата или же только до куба, — корень его всегда можно найти посредством любого из трех конических сечений или даже части одного из них, хотя бы столь малой, насколько это лишь возможно, и пользуясь еще только прямыми и кругами. Но я удовольствуюсь здесь тем, что дам общее правило нахождения всех корней посредством параболы, ибо в некотором отношении оно является простейшим.

В первую очередь, если имеется еще второй член уравнения, то следует его удалить. Тогда, если неизвестная величина имеет только три измерения, мы приведем уравнение к виду

$$z^3 \propto * \cdot apz \cdot aaq,$$

а если неизвестная имеет четыре измерения, то к виду

$$z^4 \propto \star \cdot apzz \cdot aaqz \cdot a^3r,$$

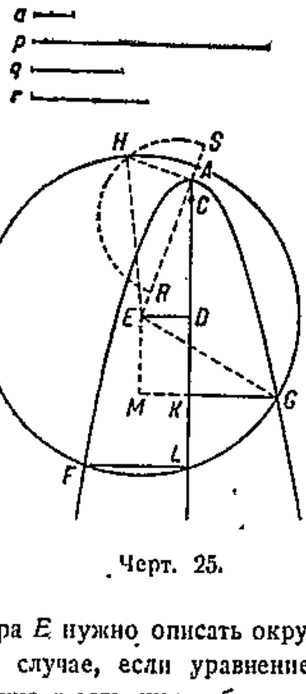
или же, принимая a за единицу, к виду

$$z^3 \propto \star \cdot pz \cdot q$$

и к виду

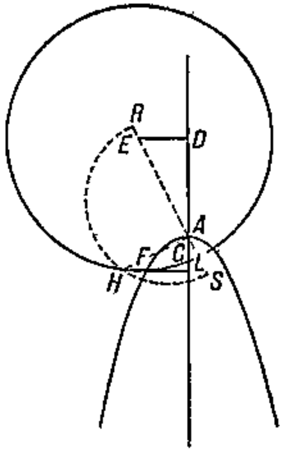
$$z^4 \propto \star \cdot pzz \cdot qz \cdot r.$$

Далее, предположим (черт. 25), что парабола FAG уже описана, что ось ее есть $ACDKL$, что ее прямая сторона есть a, или 1, что отрезок AC равен половине этого и что, наконец, точка C находится внутри параболы, а точка A является ее вершиной. Затем следует положить $CD \propto \frac{1}{2} p$ и в случае, если в уравнении стоит $+p$, взять ее с той же стороны, с которой расположена точка A относительно точки C [99], а если в нем стоит $-p$, то с другой стороны. Далее, в точке D или же, если величина p есть нуль, в точке C следует восставить перпендикуляр и продолжить его до E так, чтобы он был равен $\frac{1}{2} q$. И, наконец, из центра E нужно описать окружность FG, полудиаметр которой, в случае, если уравнение лишь кубическое, так что величина r есть нуль, будет AE. Но если в уравнении имеется $+r$, то на одной стороне продолженной линии AE (черт. 26) нужно взять AR, равную r, а на другой AS, равную прямой стороне параболы, то-есть 1, и затем, описав окружность с диаметром RS, восставить перпендикуляр AH к AE, пересекающий окружность RHS в точке H, через



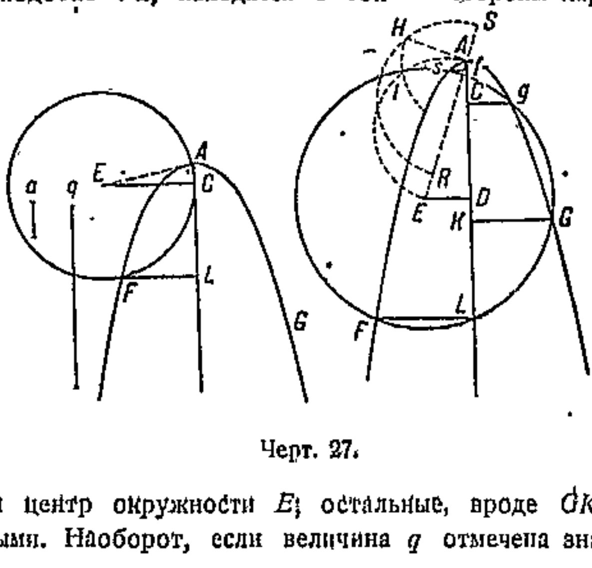
Черт. 25.

которую должна проходить другая окружность FHG. Если же в уравнении имеется $-r$, то, найдя указанным образом линию AH, нужно в другую окружность с диаметром (черт. 27) AE вписать равную AH линию AI; тогда первая искомая окружность FIG должна проходить через точку I [100]. Окружность FG может пересечь параболу или коснуться ее в 1, или в 2, или в 3, или в 4 точках, и если из них опустить перпендикуляры на ось, то получатся все — как истинные, так и ложные — корни уравнения. А именно, если величина q отмечена знаком $+$, то



Черт. 26.

истинными корнями будут значения тех перпендикуляров, которые, подобно FL, находятся с той же стороны параболы,



Черт. 27.

что и центр окружности E; остальные, вроде GK, будут ложными. Наоборот, если величина q отмечена знаком $-$, то истинные корни будут находиться с другой стороны, а ложные, или меньшие, чем ничто, с той же стороны, что и центр окружности E. Наконец, если окружность не пересекает и не касается параболы ни в одной точке, то это означает, что уравнение не имеет ни истинных, ни ложных корней и что все они воображаемые. Таким образом приведенное правило является настолько общим и полным, как этого только можно пожелать [101].

Доказательство сказанного очень легко. Действительно, если найденная в этом построении линия GK называется z, то из свойства параболы, согласно которому GK должна быть средней пропорциональной между AK и прямой стороной, то-есть 1, следует, что AK будет zz. Далее, если от AK отнять AC, то-есть $\frac{1}{2}$, и CD, то-есть $\frac{1}{2}p$, то останется DK или EM, то-есть $zz-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}$, квадрат чего есть

$$z^4-pzz-zz+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}.$$

А так как DE или KM есть $\frac{1}{2}q$, то вся GM есть $z+\frac{1}{2}q$, квадрат чего есть

$$zz+qz+\frac{1}{4}qq.$$

Складывая оба эти квадрата, мы получим:

$$z^4-pzz+qz+\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4},$$

что выражает собой квадрат линии GE, основания прямоугольного треугольника EMG (черт. 25, стр. 96).

Но так как та же линия GE, с другой стороны, является полудиаметром круга FG, то ее можно выразить еще и через другие члены. Именно, так как

$$ED \text{ есть } \frac{1}{2}q \quad \text{и} \quad AD \text{ есть } \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}$$

и угол ADE прямой, то

$$EA \text{ есть } \sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}.$$

Далее, так как HA есть средняя пропорциональная между AS, то-есть 1, и AR, то-есть r, то она есть $\sqrt{r}$; и так как угол EAH прямой, то квадрат HE или EG будет

$$\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}+r,$$

и, таким образом, между этим выражением и предшествующим получается уравнение, которое есть то же, что и

$$z^4 \propto \star pzz - qz + r.$$

Следовательно, найденная линия GK, названная нами z, является корнем этого уравнения, что и требовалось доказать. Если вы примените такие же вычисления во всех прочих случаях этого правила, меняя в соответствии с обстоятельствами знаки $+$ и $-$, то вы также найдете требуемое решение, и мне нет необходимости на этом останавливаться.

Нахождение двух средних пропорциональных.

Допустим, что при помощи этого правила хотят найти две средние пропорциональные между линиями a и q. Всякий знает, что если принять z за одну из них, то как a относится к z, так z относится к $\frac{zz}{a}$ и $\frac{zz}{a}$ к $\frac{z^3}{aa}$; и таким образом между q и $\frac{z^3}{aa}$ имеется уравнение, то-есть

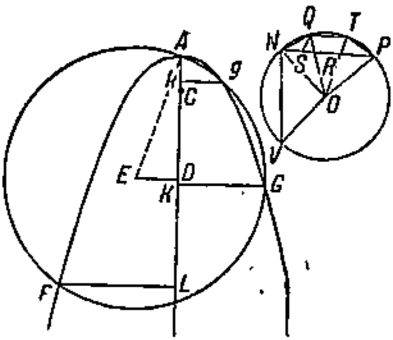
$$z^3 \propto \star\star aaq.$$

Если парабола (черт. 27, стр. 97) FAG и часть ее оси AC, равная $\frac{1}{2}a$, т. е. половине прямой стороны, описаны, то из точки C нужно восставить равный $\frac{1}{2}q$ перпендикуляр CE, а из центра E описать проходящую через точку A окружность AF; и мы найдем в качестве искомых средних пропорциональных FL и LA.

Способ деления угла на три равные части.

Точно так же, если угодно разделить на три равные части угол NOP (черт. 28) или же дугу, или часть круга $NQTP$ [102], то, положив радиус круга $NO \infty 1$, хорду (la subtendue) данной дуги $NP \infty q$ и хорду трети дуги $NQ \infty z$, мы получим уравнение

$$z^3 \infty \star 3z - q.$$



Черт. 28.

Действительно, если провести линии NQ, OQ, OT и провести QS параллельно TO, то ясно, что, как NO относится к NQ, так NQ к QR и QR к RS. И так как NO есть 1, NQ есть z, то QR есть zz, и RS есть z^3. Далее, так как для того чтобы линия NP, то-есть q была втрое больше NQ, то-есть z, не достает только RS или z^3, то

$$q \infty 3z - z^3 \quad \text{или же} \quad z^3 \infty \star 3z - q.$$

Если парабола FAG описана и CA, половина ее прямой стороны, есть $\frac{1}{2}$, то, взяв $CD \infty \frac{3}{2}$, а перпендикуляр $DE \infty \frac{1}{2} q$, опишем из центра E через точку A окружность $FAgG$; эта окружность пересечет параболу в трех точках F, g, G, не считая еще точки A — вершины. Это показывает, что данное уравнение имеет три корня, именно два истинных GK и gk и третий — ложный, именно FL. В качестве искомой линии NQ из двух истинных корней следует взять меньший, gk. Действительно, другой корень GK равен NV, хорде одной трети дуги NVP, дополняющей другую дугу NQP до окружности. Ложный корень FL, как в этом легко убедиться с помощью вычисления, равен QN и NV, обоим вместе.

Все телесные задачи могут быть приведены к этим двум построениям.

Было бы лишним задерживаться здесь, приводя еще другие примеры, ибо все задачи не выше телесных можно привести таким образом, что это правило потребуется для их построения лишь в той мере, в какой оно служит для нахождения двух средних пропорциональных либо же для деления угла на три равные части. Вы это поймете, если примете во внимание, что встречающиеся в телесных задачах трудности всегда можно выразить посредством уравнений, восходящих не выше куба или квадрата квадрата, и что все уравнения, восходящие до квадрата квадрата, приводятся к квадратным при помощи некоторых других уравнений, восходящих лишь до куба, и что, наконец, из последних можно удалить второй член. Таким образом среди них нет таких, которые не могли бы быть приведены к одной из следующих трех форм:

$$z^3 \propto \star - pz + q,$$
$$z^3 \propto \star + pz + q,$$
$$z^3 \propto \star + pz - q.$$

Если мы имеем $z^3 \propto \ast - pz + q$, то правило, приписываемое Кардано некоему Сципиону Ферро [103], учит, что корень есть

$$\sqrt{\mathrm{C.}+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-$$
$$-\sqrt{\mathrm{C.}-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Точно так же, если $z^3 \propto \ast + pz + q$ и квадрат половины последнего члена больше куба трети известной величины в предпоследнем, то подобное же правило учит нас, что корень есть

$$\sqrt{\text{C}.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{\text{C}.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

Из этого вытекает, что все задачи, трудности которых приводятся к одной из этих двух форм, можно построить, используя конические сечения только для извлечения кубических корней из некоторых данных величин, то-есть для нахождения двух средних пропорциональных между этими величинами и единицей.

Допустим далее, что $z^3 \infty \star + pz + q$ и что квадрат половины последнего члена не больше куба трети известной величины в предпоследнем. Если представить себе круг $NQPV$, полудиаметр NO которого равен $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, то-есть средней пропорциональной между третью данной величины p и единицей, а также вписать в этот круг линию NP, равную $\frac{3q}{p}$, то-есть относящуюся к другой данной величине q, как единица к трети p, то нужно будет только разделить каждую из обеих дуг NQP и NVP на три равные части, и мы тогда получим хорду трети одной из дуг, NQ, и хорду трети другой, NV, которые взятые вместе составят искомый корень.

Наконец, допустим, что $z^3 \infty \star pz - q$. Если опять-таки представить себе круг $NQPV$ (черт. 28, стр. 100), радиус NO которого есть $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, и вписанную в него прямую NP, равную $\frac{3q}{p}$, то NQ, хорда трети дуги NQP, будет одним из искомых корней, а NV, хорда трети другой дуги, — другим. Это справедливо, когда квадрат половины последнего члена не более куба трети известной величины в предпоследнем;

ибо если бы он был более, то линию NP нельзя было бы вписать в круг, так как она тогда была бы длиннее его диаметра. По этой причине оба истинных корня данного уравнения являлись бы лишь воображаемыми и из действительных корней имелся бы только ложный, равный, согласно правилу Кардано,

$$\sqrt{\text{C}.\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+$$

$$+\sqrt{\text{C}.\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}\ [^{104}].$$

Способ выражения всех корней кубических уравнений и, следовательно, всех уравнений, восходящих не выше квадрата квадрата.

Следует заметить, впрочем, что этот способ выражения корней при помощи того отношения, которое они имеют к сторонам некоторых кубов, у которых известен только объем, ничуть не понятнее и проще, чем способ выражения их при помощи того отношения, которое они имеют к хордам некоторых дуг или частей кругов, утроенное кратное которых дано. При этом все корни кубических уравнений, которые не могут быть выражены при помощи правил Кардано, можно выразить столь же или более ясно изложенным здесь способом.

Если, например, думают, что знают корень уравнения:

$$z^3 \propto \star + pz + q,$$

ибо известно, что он состоит из двух линий, одна из которых является стороной куба, объем которого равен сумме $\frac{1}{2}q$ и стороны квадрата с площадью $\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3$, а другая — стороной другого куба, объем которого равен разности $\frac{1}{2}q$ и стороны этого квадрата с площадью $\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3$, а это все, что мы узнаем из правила Кардано, то несомненно, что корень уравнения

$$z^3 \infty * pz - q$$

познается столь же или более отчетливо, когда его рассматривают как вписанный в круг полудиаметра $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ и знают, что он является хордой такой дуги, что дуга, втрое бо́льшая, имеет хорду $\frac{3q}{p}$. Эти выражения даже значительно проще первых, и они были бы еще короче, если бы для обозначения хорд пользовались каким-нибудь особым знаком, подобно тому как для обозначения стороны кубов пользуются знаком $\sqrt{C}$. [105].

Из вышеизложенного следует, что, пользуясь вышеприведенными правилами, можно выразить корни всех уравнений, восходящих до квадрата квадрата включительно. И я поэтому не знаю, чего еще можно пожелать в этом вопросе, ибо самая сущность этих корней не позволяет ни выразить их в более простых выражениях, ни определить их посредством какого-нибудь другого построения, которое было бы одновременно и более общим, и более легким.

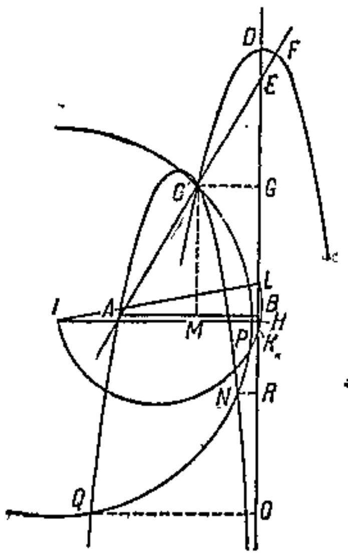
Почему телесные задачи нельзя построить без помощи конических сечений, а более сложные — без помощи каких-либо других более сложных линий?

Я, правда, еще не указал, на чем основываюсь, позволяя себе таким образом утверждать, возможна ли некоторая вещь или невозможна. Но если обратить внимание на то, как при помощи употребляемого мной метода всё, что попадает под рассмотрение геометров, приводится к одному и тому же роду задач, а именно к отысканию значения корней какого-нибудь уравнения, перечислить все способы нахождения которых нетрудно, то можно признать, что этого достаточно для убедительного доказательства того, что метод выбран был самый общий и самый простой. В частности, для телесных задач, — о которых я утверждал, что их нельзя построить, не прибегая к более сложным линиям, чем круговая, — мое утверждение можно вывести из того, что все они приводятся к двум построениям, в одном из которых требуется получить обе точки, определяющие две средние пропорциональные между двумя данными линиями, а в другом — две точки, делящие на три равные части данную дугу. Действительно, поскольку кривизна (courbure) круга зависит лишь от простого отношения всех его частей к одной точке, служащей его центром, то и пользоваться ею можно лишь при определении одной точки между двумя крайними точками или при определении одной средней пропорциональной между двумя данными прямыми, или при делении дуги пополам. Между тем кривизна конических сечений, зависящая всегда от двух различных вещей, позволяет определить также и две различные точки [106].

На том же основании ни одна из задач, на один порядок более сложных, чем телесные, и предполагающих нахождение четырех средних пропорциональных или же деление угла на пять равных частей, не может быть построена с помощью какого бы то ни было из конических сечений. Поэтому я полагаю, что сделаю самое лучшее из того, что могу, если приведу общее правило их построения при помощи кривой, описываемой пересечением параболы и прямой по вышеизложенному способу. Действительно, я смею утверждать, что в природе не существует более простой пригодной для этой же цели кривой. И вы видели, как эта кривая непосредственно следует за коническими сечениями в этом вопросе, который столь усердно изучали древние и решение которого дает по порядку все кривые, подлежащие включению в геометрию.

Общий способ построения всех задач, приводящихся к уравнению, имеющему не более шести измерений.

Вы уже знаете, каким образом можно при определении величин, нужных для построения этих задач, привести последние к какому-либо уравнению, восходящему не выше квадрата куба или сверхтела. Вы знаете также, как путем увеличения корней этого уравнения можно всегда сделать все его корни истинными и вместе с тем известную величину в третьем члене — большей, чем квадрат половины ее во втором. Вы знаете, наконец, каким образом уравнение, восходящее лишь до сверхтела, можно повысить до квадрата куба, а также заполнить места всех его членов. Для того чтобы все встречающиеся здесь затруднения можно было разрешить при помощи одного правила, я требую, чтобы все это уже было сделано и чтобы таким образом они были всегда уже приведены к уравнению:



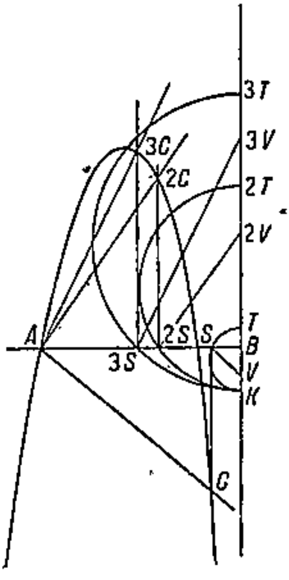
Черт. 29.

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 +$$
$$+ syy + y + v \infty 0,$$

причем величина, названная здесь q, больше квадрата половины величины, названной p.

Неопределенно продолжив (черт. 29) в обе стороны линию BK и восставив в точке B перпендикуляр AB длиной в $\frac{1}{2}p$, нужно в какой-либо особой плоскости описать параболу CDF, прямая сторона которой есть $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, что я для краткости назову n. Затем плоскость этой параболы нужно наложить на плоскость линий AB и BK так, чтобы ее ось DE оказалась как раз в верхней части прямой линии BK. Приняв часть этой оси между точками E и D

равной $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, в точке E следует так приложить длинную линейку, чтобы, будучи приложена также и в точке A нижней плоскости, она всегда оставалась связанной с этими двумя точками при перемещении параболы вверх и вниз вдоль линии BK, на которой находится ее ось. Пересечение параболы и линейки, происходящее в точке C, опишет тогда кривую ACN, которая нам как раз и нужна для построения предложенной задачи. Действительно, описав таким образом кривую, возьмем на линии BK точку L с той стороны, к которой обращена вершина параболы, и проведем BL, равную DE, то-есть $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Затем отложим на той же линии BK в направлении от L к B линию LH, равную $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; в найденной таким образом точке H восставим к BK в сторону кривой ACN перпендикуляр HI, длина которого будет $\frac{r}{2nn}+\frac{\sqrt{v}}{nn}+\frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, что для краткости назовем $\frac{m}{nn}$. Потом, соединив точки L и I, опишем окружность LPI диаметра IL и впишем в эту окружность линию LP, длина которой равна $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$. И, наконец, из центра I, через найденную таким образом точку P, опишем окружность PCN. Эта окружность пересечет или коснется кривой ACN в таком числе точек, сколько будет корней уравнения; и таким образом перпендикуляры, опущенные из этих точек на линию BK, как CG, NR, QO и им подобные, будут искомыми корнями. Правило это не допускает никаких исключений или отклонений. Действительно, если бы величина s была столь велика по сравнению с другими, p, q, r, s, t и v, что линия LP оказалась бы больше диаметра круга IL и поэтому не могла бы быть в него вписана, то предложенное уравнение вовсе не имело бы корней, отличных от воображаемых. То же самое случилось бы, если бы окружность IP была столь мала, что ни в одной точке не пересекала бы кривую ACN. Окружность может пересечь кривую ACN в шести различных точках, так же как уравнение может иметь шесть различных корней. Если же она пересекает ее в меньшем числе точек, то это свидетельствует о том, что некоторые из этих корней равны или же только воображаемы.



Черт. 30.

Если проведение линии ACN посредством перемещения параболы кажется вам неудобным, то легко найти некоторые другие способы ее описания. Возьмем, например (черт. 30), в качестве AB, BL и BK, принятой за главную прямую сторону параболы, те же величины, что и ранее. Затем из взятого произвольным образом на BK центра опишем полуокружность KST так, чтобы она где-либо пересекала линию AB, скажем, в точке S. От точки T, где кончается полуокружность, отложим в направлении к K линию TV, равную BL, и затем, проведя линию SV, проведем из точки A параллельную ей линию AC. Далее, через точку S проведем еще SC параллельно BK; C, точка пересечения этих двух параллелей, будет одной из точек искомой кривой. Аналогичным образом можно найти сколько угодно других точек.

Все это довольно легко доказать. Действительно, приложим линейку AE и параболу FD вместе в точке C, что можно сделать, ибо точка C лежит на кривой ACN, описываемой при их пересечении. Если CG назвать y, то GD

будет $\frac{yy}{n}$, ибо прямая сторона n относится к CG, как CG к GD. Отнимая DE, то-есть $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, от GD, мы для GE получим $\frac{yy}{n}-\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Затем, так как AB относится к BE, как CG к GE, и AB есть $\frac{1}{2}p$, то BE будет $\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Точно то же будет, если предположить, что точка C кривой находится при пересечении прямых SC, параллельной BK, и AC, параллельной SV. SB, равная CG, есть y, и так как BK равна прямой стороне параболы, названной мной n, то BT есть $\frac{yy}{n}$. Действительно, KB относится к BS, как BS к BT. И так как TV равна BL, то-есть $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, то BV есть $\frac{yy}{n}-\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. А так как SB относится к BV, как AB к BE, то BE, как и раньше, будет $\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{v}}{ny}$. Отсюда ясно, что с помощью обоих способов описывается одна и та же кривая.

Затем, так как BL и DE равны (черт. 29, стр. 106), то равны также DL и BE. Значит, прибавив LH, то-есть $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, к DL, то-есть $\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{v}}{ny}$, мы получим всю DH, которая есть

$$\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{v}}{ny}+\frac{t}{2n\sqrt{v}}.$$

Отняв отсюда линию GD, то-есть $\frac{yy}{n}$, получим GH, то-есть

$$\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{v}}{ny}+\frac{t}{2n\sqrt{v}}-\frac{yy}{n}.$$

Это я запишу по порядку так:

$$GH \propto \frac{-y^3+\frac{1}{2}pyy+\frac{ty}{2\sqrt{v}}-\sqrt{v}}{ny}.$$

Квадрат GH будет

$$\frac{y^6-py^5\left.\begin{matrix}-\dfrac{t}{\sqrt{v}}\\ \\ +\dfrac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+2\sqrt{v}\\ \\ +\dfrac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\ \\ +\dfrac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy-ty+v}{nnyy}.$$

И в каком другом месте этой кривой мы бы ни вообразили себе точку C, в направлении ли N или же в направлении Q, мы всегда найдем, что квадрат прямой, заключенной между точкой H и точкой, в которую падает перпендикуляр, опущенный из точки C на BH, всегда сможет быть выражен в тех же членах и с теми же знаками $+$ и $-$.

Затем, так как IH есть $\frac{m}{nn}$, а LH есть $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$ и угол IHL прямой, то IL есть

$$\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{tt}{4nnv}}.$$

Так как LP есть $\sqrt{\frac{s}{nn}+\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$ и угол IPL также прямой, то IP или IC есть

$$\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}}.$$

Опустим перпендикуляр CM на IH; IM будет разностью между IH и HM или CG, то-есть между $\frac{m}{nn}$ и y, и квадрат ее будет всегда

$$\frac{mm}{n^4}-\frac{2my}{nn}+yy.$$

Отняв это от квадрата IC, мы получим в остатке для квадрата CM, равного найденному уже квадрату GH, выражение

$$\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}+\frac{2my}{nn}-yy,$$

Или же, представив это выражение, как и выражение для квадрата GH, поделенным на $nnyy$, мы получим

$$\frac{-nny^4+2my^3-p\sqrt{v}yy-syy+\frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$

Затем, восстанавливая

$$\frac{t}{\sqrt{v}}y^4+qy^4-\frac{1}{4}ppy^4 \quad \text{вместо } nny^4$$

и

$$ry^3+2\sqrt{v}y^3+\frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3 \quad \text{вместо } 2my^3$$

и умножив оба выражения на $nnyy$, получим

$$y^6-py^5\left.\begin{matrix}-\frac{t}{\sqrt{v}}\\ \\ +\frac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+2\sqrt{v}\\ \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\ \\ +\frac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy-ty+v$$

равным

$$\left.\begin{matrix}-\frac{t}{\sqrt{v}}\\ -q\\ +\frac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+r\\ +2\sqrt{v}\\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\ -s\\ +\frac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy,$$

то-есть получим

$$y^6-py^5+qy^4-ry^3+syy-ty+v \infty 0.$$

Отсюда явствует, что CG, NK, QO и им подобные линии являются корнями этого уравнения, что и требовалось доказать [107].

Таким же образом, если желательно найти четыре средние пропорциональные между линиями a и b и если принять первую из них равной x, то получится уравнение

$$x^5 \star\star\star\star - a^4b \infty 0,$$

или же

$$x^6 \star\star\star\star - a^4bx \star \infty 0.$$

Положив $y - a \propto x$, мы найдем

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ \\ -a^4b \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +a^6 \\ \\ +a^5b \end{matrix} \propto 0.$$

Поэтому нужно взять $3a$ для линии AB, $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa+bb}} + 6aa}$ для BK, или же названной мной n прямой стороны параболы, $\frac{a}{3n}\sqrt{aa+bb}$ для DE, или BL.

После того как в соответствии с мерой этих трех линий будет описана кривая ACN, нужно будет взять

$$LH \propto \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa+ab}},$$

$$HI \propto \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$$

и

$$LP \propto \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}.$$

Действительно, окружность, имеющая центр в точке I, пройдет через найденную указанным путем точку P и пересечет кривую в двух точках C и N. Опустив из них на BK перпендикуляры NK и CG и отняв меньший, NR, от большего, CG, мы получим остаток x, первую из четырех искомых средних пропорциональных.

Аналогичным образом легко разделить угол на пять равных частей, вписать в круг фигуру с одиннадцатью или тринадцатью равными сторонами и придумать бесчисленное множество других примеров на это правило.

Следует, однако, заметить, что в некоторых из этих примеров может случиться, что окружность будет пересекать параболу второго рода столь наклонно, что окажется затруднительным установить их точку пересечения, так что такое построение будет практически неудобным. В таком случае легко помочь делу, установив на подобие приведенного другие правила, что можно осуществить множеством способов.

Однако в мои цели не входит написать большую книгу. Я скорее стремлюсь в немногих словах выразить многое. С тем, что я так и сделал, может быть согласятся, обратив внимание на то, что, приведя все задачи одного рода к одному построению, я вместе с тем дал способ приводить их к бесчисленному множеству других, отличных и решать каждую из них бесчисленным множеством способов. После того как я дал построение всех плоских задач посредством пересечения прямой линии и окружности, всех телесных—посредством пересечения снова окружности и параболы и, наконец, всех задач на один порядок более сложных посредством пересечения опять-таки окружности и линии на один порядок более сложной, чем парабола, для построения все более и более, вплоть до бесконечности, сложных задач, нужно лишь следовать по тому же пути. Действительно, имея два или три первых члена математической прогрессии, нетрудно найти все остальные. И я надеюсь, что наши потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было добровольно опущено, с целью предоставить им удовольствие самим найти это.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I

ИСЧИСЛЕНИЕ ГОСПОДИНА ДЕКАРТА [108].

<ВВЕДЕНИЕ В „ГЕОМЕТРИЮ“>.

Эта новая арифметика состоит из букв a, b, c и т. д., а также из цифр 1, 2, 3 и т. д. Если цифры стоят перед буквами, например $2a$, $3b$, $\frac{1}{4}c$, то это означает, что величина a берется двойной, величина b — тройной, а от величины c берется четверть. Но если она находится позади букв, например a^3, b^4, c^5 [109], то это означает, что величина a умножается [сама на себя] три раза, величина b четыре раза, а величина c пять раз.

[*Сложение и вычитание*] [110].

Сложение производится с помощью такого знака $+$. Так, чтобы сложить a и b, я пишу $a+b$. *Item* [также], чтобы сложить $a+b$ и $d+f$, я пишу $a+b+d+f$ и т. д.

Вычитание производится с помощью такого знака —. Так, чтобы вычесть a из b, я пишу $b-a$ и т. д. Если в вычитаемом выражении есть несколько частей, то у них в нем изменяются лишь знаки. Так, если из d требуется вычесть $a-b+c$, то останется $d-a+b-c$. Точно так же, при вычитании a^2-b^2 из c^2-d^2, останется $c^2-d^2-a^2+b^2$.

Но если имеются присоединенные цифры и члены одинакового вида, то их следует подписывать друг под другом и производить их сложение или вычитание как в обыкновенной арифметике.

Примеры.

Требуется сложить

$$3ab + 2cd + 5ac + 4d^2 - ad$$

с

$$4ac + 13ab + 2ad + 4d^2.$$

Сложение:

$$\begin{array}{l} 3ab + 2cd + 5ac \quad - ad + 4d^2 \\ 13ab \qquad\quad + 4ac + 2ad + 4d^2 \\ \hline 16ab + 2cd + 9ac + \; ad + 8d^2 \end{array}.$$

Точно так же, чтобы вычесть

$$13ad - 2d^2 + c^2 + 4ac$$

из

$$5d^2 + 12ad - 3c^2 + 2a^2 + 4ac,$$

я располагаю члены, как было сказано, и, изменив знаки, произвожу второе испытание (examen):

$$\begin{array}{rl} & + 5d^2 + 12ad - 3c^2 + 2a^2 + 4ac \\ & + 2d^2 - 13ad - c^2 \qquad\quad - 4ac \\ \hline \text{остаток} & 7d^2 - ad \quad - 4c^2 + 2a^2 \end{array},$$

Об умножении.

Если требуется умножить одну букву на другую, то их следует лишь соединить вместе, но если имеются присоединенные числа, то они следуют законам обыкновенной арифметики. Что касается знаков, то известно, что $+$ на $+$ дает в произведении $+$ и что $-$, умноженный на $-$, также дает в произведении $+$. Но $+$ на $-$, или же $-$, умноженный на $+$, дает в произведении $-$. И величины одинакового вида следует ставить друг под другом, чтобы их было легче привести с помощью сложения или вычитания. Так, чтобы умножить a на b, я пишу ab. *Item*, при умножении $2a + 3b$ на $3c - 2b$ в произведении получится

$$6ac + 9bc - 4ab - 6b^2.$$

$$\begin{array}{rl} & 2a + 3b \\ & 3c - 2b \\ \hline \text{произведение:} & 6ac + 9bc - 4ab - 6b^2, \end{array}$$

Другой пример

$$
\begin{array}{r}
ab + cd - bc \\
ab + bc - cd \\
\hline
a^2b^2 + abcd - ab^2c + bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 \\
- abcd + ab^2c + bc^2d \qquad\qquad\quad \\
\hline
a^2b^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 2bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2.
\end{array}
$$

Nota [заметь], что следует тщательно избегать умножения на самого себя выражения [111], про которое известно, что оно меньше нуля или же в котором наибольшие члены имеют знак $-$, ибо произведение в этом случае будет таким же, как если бы они имели знак $+$. Например, $a^2 - 2ab + b^2$ одинаково является квадратом как $a - b$, так и $b - a$; поэтому, если известно, что a меньше b, то не следует умножать на самое себя $a - b$, ибо это даст истинное выражение, вместо меньшего, чем ничто, что породит ошибку в уравнении.

О делении.

При делении ab на b в частном получается a, и $ab + ac$, деленное на a, дает в частном $b + c$.

Но чтобы разделить $2ac + 2bc + 3c^2 - 2ad - 2bd - 3cd$ на $2a + 2b + 3c$, следует расположить делимое выражение слева, а делитель справа, как это сделано ниже:

$$
\begin{array}{l|c}
 & \text{делитель} \\
\cancel{2ac} + \cancel{2bc} + \cancel{3c^2} - \cancel{2ad} - \cancel{2bd} - \cancel{3cd} & 2a + 2b + 3c \\
\hline
\cancel{2ac} + \cancel{2bc} + \cancel{3c^2} - \cancel{2ad} - \cancel{2bd} - \cancel{3cd} & \text{частное} \\
 & c - d
\end{array}
$$

Затем я делю $2ac$ на $2a$; частное есть c, и на это я умножаю делитель; произведение есть $2ac + 2bc + 3c^2$, и это я вычитаю из предложенного числа; остаток есть $-2ad - 2bd - 3cd$, и это я снова делю на $2a$; для второго знака (figure) частного получается $-d$, и это я умножаю на делитель; произведение есть $-2ad - 2bd - 3cd$, и это я отнимаю от остатка названного предложенного числа, — и у меня не остается ничего.

Следует заметить, что если члены, возникающие при умножении частного на делитель, не находятся в делимом выражении, то их нужно прибавить к нему с помощью $+$

или —, смотря по тому, с какими знаками окажутся названные отнимаемые члены, и продолжать деление со всеми без различия членами.

Требуется разделить $c^2 - d^2$ на $c + d$

$$\begin{array}{l|l} \underline{-\cancel{cd}+\cancel{c^2}-\cancel{d^2}} & c+d \\ +\cancel{cd}+\cancel{c^2}-\cancel{d^2} & \overline{c-d} \\ -\cancel{cd} & \end{array}$$

Другой пример. Разделить

$$a^2b^2 + 2bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 \;|\text{на}\; \frac{\overset{\text{делитель}}{ab + cd - bc}}{\underset{ab + bc - cd}{\text{частное}}}$$

$$\begin{array}{l} +\cancel{ab^2c}-\cancel{abcd}+\cancel{a^2b^2}+\cancel{2bc^2d}-\cancel{b^2c^2}-\cancel{c^2d^2} \\ -\cancel{ab^2c}+\cancel{abcd}+\cancel{a^2b^2}+\cancel{bc^2d}-\cancel{b^2c^2}-\cancel{c^2d^2} \\ +\cancel{ab^2c}-\cancel{abcd} \qquad\qquad + \cancel{bc^2d}. \end{array}$$

Но если в делимом выражении останутся какие-либо члены, которые не могут быть разделены на делитель, то это доказывает, что произвести деление нельзя, и в этом случае удовлетворяются тем, что делитель пишут под делимым выражением, — как в следующих примерах:

$$\frac{ab + bc - cd}{a + d}, \quad \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{c^2 + cd} \quad \text{или} \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2 + cd}x^2.$$

О дробях.

При всех действиях над дробными величинами следуют правилам обыкновенной [арифметики]. Их нужно приводить к более простым членам, если это возможно. А это возможно, когда делимое выражение и делитель имеют какой-либо общий делитель.

Так, чтобы привести $\frac{abc}{cd}$, я замечаю, что их общий делитель есть c, и я делю на него оба члена дроби и получаю $\frac{ab}{d}$.

Item, желая привести к меньшим членам $\frac{a^2c - adc - a^2d + ad^2}{cd - dd}$, я делю оба члена дроби на $c - d$; частные суть $a^2 - ad$ и d, и их я пишу так: $\frac{a^2 - ad}{d}$.

Item, при сокращении $\frac{cd - dd}{c - d}$ получается d.

Приведение к одному знаменателю.

Мне нужно привести $\frac{a^2}{c}$ и $\frac{b^2}{a}$. Я умножаю a^2 на a и b^2 на c и c вновь на a. Я получаю $\frac{a^3}{ac}$ и $\frac{b^2c}{ac}$.

Item, желая привести к одному знаменателю $\frac{ab+cd}{a+b}$ и $\frac{b^2+c^2}{c+d}$, я получаю $\frac{abc+c^2d+abd+cd^2}{ac+bc+da+db}$ и $\frac{ab^2+ac^2+b^3+bc^2}{ac+bc+da+db}$. Но если вместе с дробями имеются целые, например, $a+b+$ $+\frac{cd-ab}{f-c}$, то нужно умножить целые $a+b$ на делитель $f-c$ и произведение сложить с $cd-ab$. Получится

$$\frac{af+bf-ca-cb+cd-ab}{f-c}.$$

Если бы данные дроби имели делителей, обладающих общим делителем, то приведение было бы короче. Так [обстоит дело] в этом примере $\frac{b^2c+c^2d}{ax+bx}$ и $\frac{a^3+d^3}{ac+bc}$. Общий делитель названных делителей есть $a+b$. При делении $ax+bx$ на $a+b$ в частном получается x, на что я умножаю a^3+d^3, а в частном для другого получается c, на что я умножаю другой b^2c+c^2d; затем $ax+bx$ на c и $ac+bc$ на x. И я получаю $\frac{b^2c^2+c^3d}{acx+bcx}$ и $\frac{a^3x+d^3x}{acx+bcx}$. И так далее.

О сложении и вычитании.

После того как данные дроби приведены указанным образом, их складывают с помощью знака $+$ и меньшую вычитают из большей с помощью знака $-$, так же как целые.

Пример. Я хочу сложить $\frac{a^3}{ac}$ и $\frac{b^2c}{ac}$. Сумма есть $\frac{a^3+b^2c}{ac}$. Но если вычесть $\frac{b^2c}{ac}$ из $\frac{a^3}{ac}$, то в остатке получается $\frac{a^3-b^2c}{ac}$.

Об умножении.

Чтобы умножить $\frac{ab}{c}$ на $\frac{cd-ad}{b}$, следует перемножить друг на друга делимые выражения и подобным же образом перемножить делители. Произведение будет $\frac{abcd-a^2bd}{cb}$.

Но прежде чем приступать к умножению, нужно посмотреть, нельзя ли разделить на общий делитель делимое выражение одной части и делитель другой части. Так, в приведенном выше примере, [где] $\frac{ab}{c}$ [умножается] на $\frac{cd - ad}{b}$, выражение ab одной части может быть разделено на b, и делитель другой части b также может быть разделен на b, так что мне остается умножить лишь $\frac{a}{c}$ на $\frac{cd - ad}{1}$; и произведение есть $\frac{acd - a^2d}{c}$ или же $ad - \frac{a^2d}{c}$.

Item, $a + b - \frac{cd + ac}{f - g}$ на $c + d$. Здесь не нужно приводить целые к дробям, но лишь умножить целые на целые, и произведение будет

$$ac + bc + ad + db - \frac{c^2d + ac^2 + cd^2 + acd}{f - g}.$$

О делении.

Чтобы разделить $\frac{ab^3}{d}$ на c, я умножаю c на d: частное есть $\frac{ab^3}{cd}$. *Item*, я желаю разделить $\frac{ab + a^2}{c}$ на $\frac{ab^2}{cd}$, я поступаю как с обыкновенными дробями $\frac{ab + a^2}{c} \times \frac{ab^2}{cd}$ [112]; частное есть $\frac{abcd + a^2cd}{ab^2c}$.

Но прежде чем перейти к умножению, следует привести делимые выражения и делители к их более простым членам. Так, здесь $\frac{ab + a^2}{c}$ и $\frac{ab^2}{cd}$ делятся на $\frac{a}{c}$. Поэтому я удаляю a сверху и c снизу, у меня остается $\frac{b + a}{1}$ или же $b + a$, и это следует разделить на $\frac{b^2}{d}$; частное есть $\frac{bd + ad}{b^2}$.

Это частное получается путем деления, как в случае обыкновенных дробей:

$$\frac{ab + a^2}{c} \times \frac{a}{c}, \text{ частное } \frac{cab + ca^2}{ca} \text{ или } \frac{b + a}{1};$$

$$\text{и } \frac{ab^2}{cd} \times \frac{a}{c}, \text{ частное } \frac{cab^2}{acd} \text{ или } \frac{b^2}{d},$$

$$\frac{b + a}{1} \times \frac{b^2}{d}, \text{ частное } \frac{bd + ad}{b^2}.$$

Извлечение квадратного корня.

При извлечении квадратного корня из $4a^2$ получается $2a$. Но, чтобы извлечь корень из многочлена $a^2+c^2+b^2+$ $+2ac-2bc-2ab$, сперва нужно найти корень одного из квадратов, о котором известно, что он не из меньших; этот корень и будет первым членом искомого корня, который будет написан под предложенным числом между двумя линиями. Так, в предложенном примере я выбираю a^2, и его корень есть a; затем я вычитаю a^2 из предложенного числа, остается $c^2+b^2+2ac-2bc-2ab$, и это я делю на удвоенный корень, который есть $2a$; в качестве второго члена получается $+c$, и это я умножаю на самое себя и на $2a$; произведение есть c^2+2ac, и это я вычитаю, как выше, из предложенного числа. Останется $+b^2-2bc-2ab$, и это я снова делю на $+2a+2c$, удвоенную [величину] всего найденного корня; в качестве третьего члена получается $-b$, и это я умножаю на самое себя и на $2a+2c$; произведение есть $+b^2-2ab-2bc$, и это я отнимаю от предложенного числа, и не остается ничего. Если же b^2 было бы больше, чем a^2, то первым членом корня было бы b, а весь корень был бы $+b-a-c$ и т. д. За этим нужно внимательно следить, когда у квадратов имеются члены, снабженные знаком $-$, и т. д.

Предпол.: a^2 больше чем b^2

$$\begin{array}{ll}
\cancel{a^2}+\cancel{c^2}+\cancel{b^2}+\cancel{2ac}-\cancel{2bc}-\cancel{2ab} & \\
\hline
\qquad\qquad a+c-b & \text{искомый корень} \\
\hline
\cancel{a^2}+\cancel{c^2}+\cancel{b^2}+\cancel{2a}+\cancel{2c}+\cancel{2a} & \\
\qquad\quad +\cancel{2ac}-\cancel{2bc}-\cancel{2ab} &
\end{array}$$

Предпол.: b^2 больше чем a^2

$$\begin{array}{c}
a^2+c^2+b^2+2ac-2bc-2ab \\
\hline
b-a-c \\
\hline
\cancel{a^2}+\cancel{c^2}+\cancel{b^2}-\cancel{2a}+\cancel{2b}+\cancel{2b} \\
\qquad\quad +\cancel{2ac}-\cancel{2bc}-\cancel{2ba}
\end{array}$$

Об иррациональных величинах.

Когда корень извлечь из квадрата нельзя, его [квадрат] помещают под связку (le vinculum) $\sqrt{}$, чтобы отметить, что его следует рассматривать как корень, и тогда его [корень] называют *иррациональной величиной* (*quantité sourde*).

Так, не будучи в состоянии извлечь квадратный корень из a^2+b^2, я его пишу так $\sqrt{a^2+b^2}$. А если нужно извлечь кубический корень, то пользуются таким знаком $\sqrt{C.\ a^3+ab^2}$.

Если же нужно извлечь корень из квадрата квадрата, то его пишут так: $\sqrt{\sqrt{a^2b^2+bc^3}}$ [118]. И если требуется извлечь квадратный корень из $ab+c^2$ и корня из $bc^3+a^2b^2$, то его напишут так: $\sqrt{ab+c^3+\sqrt{bc^3+a^2b^2}}$. А если бы нужно было извлечь квадратный корень из a^4+b^4, деленный на абсолютные величины $c-2d$, то его написали бы так: $\frac{1}{c-2d}\sqrt{a^4+b^4}$.

Item, я хочу извлечь корень из ab^3+c^4, деленного на b^2-d^2, и корня из b^5c+a^5d, деленного на $a+b$; я пишу так: $\sqrt{\frac{ab^3+c^4}{b^2-d^2}+\frac{1}{a+b}\sqrt{b^5c+a^5d}}$.

Item, чтобы извлечь корень из b^2+dc, умноженный на абсолютные величины $a+b$ и деленный на $c+d$, я его пишу так: $\frac{a+b}{c+d}\sqrt{b^2+dc}$.

Приведение иррациональных величин.

Во-первых, всякая иррациональная величина, которая может делиться на квадрат, приводится к меньшим членам, и делитель становится рациональным и выносится из под связки.

Так, $\sqrt{a^2b^2+a^2c^2}$ делится на a^2, корень из чего есть a, и я пишу $a\sqrt{b^2+c^2}$, что означает a, умноженное на корень из b^2+c^2.

Item, $\sqrt{12a^2}$ приводится к $2a\sqrt{3}$, ибо квадрат $2a$ есть $4a^2$; умноженное на 3 [это] дает $\sqrt{12a^2}$.

Item, $\sqrt{27a^2}$ приводится к $3a\sqrt{3}$.

Item, $\sqrt{48a^2}$ есть $4a\sqrt{3}$, *Item*, $\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+2abc^2+2abd^2+<b^2c^2>+b^2d^2}$ делится на $a^2+2ab+b^2$; частное есть c^2+d^2, и корень из $a^2+2ab+b^2$ есть $a+b$. Поэтому я пишу $a+b\sqrt{c^2+d^2}$ [114], что означает $a+b$, умноженное на корень из c^2+d^2.

Item, $\frac{pq^2-q^3+qr^2-pr^2}{r\sqrt{q^2-r^2}}$ можно привести к такому выражению $\frac{p-q}{r}\sqrt{q^2-r^2}$. Ибо $pq^2-q^3+qr^2-pr^2$ делится на $p-q$ и частное есть q^2-r^2; это, будучи снова разделено на $\sqrt{q^2-r^2}$, дает $\sqrt{q^2-r^2}$; и, снова умноженное на $p-q$ и деленное на r, дает $\frac{p-q}{r}\sqrt{q^2-r^2}$.

Item, чтобы привести $\frac{ac^2+a^3}{2\sqrt{a^2+c^2}}$, или же $\frac{\sqrt{a^2c^4+2a^4c^2+a^6}}{\sqrt{4a^2+4c^2}}$, что равно этому, или же $\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{c^4+2a^2c^2+a^4}}{<\sqrt{a^2+c^2}>}$, я делю $\sqrt{c^4+2a^2c^2+a^4}$ на $\sqrt{c^2+a^2}$; частное есть $\sqrt{c^2+a^2}$, что умноженное на $\frac{1}{2}a$ дает $\frac{1}{2}a\sqrt{c^2+a^2}$.

О сложении и вычитании иррациональных величин.

При действиях сложения и вычитания члены, заключенные в связке, вовсе не испытывают изменения знаков $+$ и $-$. Их лишь складывают или вычитают с помощью названных знаков, которые ставят во вне и впереди связки.

Так, чтобы сложить $\sqrt{ab-a^2}$ с $\sqrt{b^2-bc}$, я пишу:

$$\sqrt{ab-a^2}+\sqrt{b^2-bc}.$$

И также, чтобы вычесть $\sqrt{ab-a^2}$ из $\sqrt{b^2-bc}$, я в качестве их разности пишу

$$\sqrt{b^2-bc}-\sqrt{ab-a^2}.$$

Item, чтобы вычесть $\sqrt{\frac{a^4+b^2c^2}{cd}}$ из $\sqrt{\frac{b^4+a^3b}{ac}}$, я пишу

$$\sqrt{\frac{b^4+a^3b}{ac}}-\sqrt{\frac{a^4+b^2c^2}{cd}}.$$

Item, при вычитании $\frac{b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}}$ из $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$ остается $\frac{2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$; это находится с помощью приведения обоих выражений к одному знаменателю путем умножения делителя $2\sqrt{4a^2-b^2}$ на $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$: произведение есть $4a^2-b^2$; точно так же при умножении делителя 1 на b^2 произведение будет b^2; оба выражения будут $\frac{b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}}$ и $\frac{4a^2-b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}}$. Теперь я отнимаю b^2 от $4a^2-b^2$, остаток есть

$$\frac{4a^2-2b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}},$$

а деля все на 2, я получаю $\frac{2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Item, при вычитании корня, умноженного на абсолютные величины из подобных же величин и корней, как, например, $a+b\sqrt{c^2+d^2}$ из $c+d\sqrt{a^2+2ab}$, остается

$$c+d\sqrt{a^2+ab}-a+b\sqrt{c^2+d^2}\ [115].$$

И так далее во всех других случаях.

Умножение иррациональных величин.

При умножении друг на друга иррациональных величин искомым корнем является корень из произведения их степеней (puissances), умноженных друг на друга. Так, при умножении $\sqrt{ab}$ на $\sqrt{bc}$ в произведении получается $\sqrt{ab^2c}$. Так же, умножая $\sqrt{ab+c^2}$ на $\sqrt{cd-ad}$, я получаю в произведении $\sqrt{abcd+c^3d-a^2bd-adc^2}$. Но когда умножение довести до конца не хотят, то члены ставят так: $\sqrt{ab+c^2}\,\mathrm{M}\sqrt{cd-ad}$ [116], что означает, что корень из $ab+c^2$ должен быть умножен на корень из $cd-ad$.

Item, произведение из $\frac{a-c}{b^2-c^2}\sqrt{db^3+bd^3}$ на $\sqrt{\frac{ab^3-ad^3}{bc}}$ есть $\frac{a-c}{b^2-c^2}\sqrt{\frac{adb^6-ad^4b^3+ab^4d^3-ad^6b}{bc}}$.

Item, чтобы получить квадрат $\sqrt{ab-bc-c^2}-\sqrt{b^2-ac}$, я отбрасываю обе связки для получения их квадратов и 2 раза умножаю корни друг на друга: в качестве искомого квадрата я получаю

$$ab-bc-c^2+b^2-ac-2\sqrt{b^2-ac}\ \mathrm{M}\sqrt{ab-bc-c^2}.$$

Связку можно поставить еще так: $-\sqrt{4b^2-4ac}\,\mathrm{M}\sqrt{ab-bc-c^2}$; или, если желают довести умножение до конца, следует умножить $+4b^2-4ac$ на $ab-bc-c^2$: произведение будет

$$\sqrt{4ab^3-4b^3c-4b^2c^2-4a^2bc+4abc^2+4ac^3}.$$

Item, квадрат $a+c+\sqrt{b^2+bc}$ есть

$$a^2+2ac+c^2+b^2+bc+2a+2c\sqrt{b^2+c^2}\ [117].$$

Item, квадрат $a+\sqrt{ab+cd}+\sqrt{c^2+d^2}$ есть

$$a^2+ab+cd+c^2+d^2+2a\sqrt{ab+cd}+2a\sqrt{c^2+d^2}+$$
$$+2\sqrt{ab+cd}\,\mathrm{M}\sqrt{c^2+d^2},$$ и т. д.

О делении иррациональных величин.

При делении иррациональных величин друг на друга, искомым частным является корень из частного.

Так, при делении $\sqrt{abc^2}$ на $\sqrt{d^2}$ в частном получается $\sqrt{\frac{abc^2}{d^2}}$ или же $\frac{c}{d}\sqrt{ab}$.

Item, при делении $\sqrt{ab^3+c^2d^2+d^4}$ на $\sqrt{ac+cd}$ в частном получается $\sqrt{\frac{ab^3+c^2d^2+d^4}{ac+cd}}$.

Item, при делении $a\sqrt{b^2-c^2}$ на $d+c$ получается $\frac{a}{d+c}\sqrt{b^2-c^2}$.

Item, при делении $a^2+bc+\sqrt{ac^3+cd^3}$ на $\sqrt{c^2-d^2}$ получается $\frac{a^2+bc+\sqrt{ac^3+cd^3}}{\sqrt{c^2-d^2}}$.

Item, при делении a^2-b^2 на $\sqrt{a^2-b^2}$ получается $\sqrt{a^2-b^2}$.

Item, при делении $\frac{ac^2+a^3}{2\sqrt{a^2+c^2}}$, или равного ему $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}$, на $\sqrt{a^2+c^2}$ в частном получается $\frac{1}{2}a$.

Item, мне нужно разделить a^2+b^2 на корень из $ac+c^2$; получается $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ac+c^2}}$ или же $\sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{ac+c^2}}$

Но если требуется разделить бином [118] на делитель, являющийся также биномом, имеется еще способ. Например, я хочу разделить бином $a^2+\sqrt{abcd}$ на бином $a+\sqrt{bc}$. Следует умножить $a^2+\sqrt{abcd}$ на вычет делителя $a-\sqrt{bc}$; в произведении получается

$$a^3+a\sqrt{abcd}-a^2\sqrt{bc}-bc\sqrt{ad}.$$

Точно так же я умножаю делитель $a+\sqrt{bc}$ на названный вычет $a-\sqrt{bc}$; произведение будет a^2-bc и на него я делю предыдущее произведение; в качестве искомого частного получается

$$\frac{a^3+a\sqrt{abcd}-a^2\sqrt{bc}-bc\sqrt{ad}}{a^2-bc}.$$

Таким же образом, если данный делитель представляет собой многочлен, то его следует умножать на его вычет до тех пор, пока его произведение не даст, наконец, абсолютной величины, на которую нужно будет разделить делимое выражение, после того как оно будет умножено на те же вычеты и столько же раз, сколько и делитель. То, что при этом получится, будет искомым частным.

Извлечение корня из биномов.

Чтобы извлечь квадратный корень из $a+\sqrt{bc}$, я беру полуразность обоих предложенных квадратов $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc$ [119] и соединяю ⟨полу⟩-корень этой разности с полукорнем из большего квадрата знаком $+$, и корень из всей этой величины дает для одного члена $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}$, а соединяя его знаком $-$, я получаю другой член, который будет $\sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}$, и суммой (l'aggregat) является

$$\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}\,bc}}+\sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}\,bc}},$$

⟨что и⟩ будет корнем из $a+\sqrt{bc}$.

Но корень из его вычета $a-\sqrt{bc}$ будет отличаться лишь знаком $-$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}\,bc}}-\sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}\,bc}}.$$

Другой пример, взятый из *Геометрии*, стр. 328. При извлечении корня из этого бинома $m^2+\frac{p^2x^2}{m}+\sqrt{4pmx^2}$ разностью обоих квадратов является $+m^4-2pmx^2+\frac{p^2x^4}{m^2}$, половина корня есть $\frac{1}{2}m^2-\frac{p^2x^2}{2m}$, а при сложении этого с половиной корня большего квадрата, равной $\frac{1}{2}m^2+\frac{px^2}{2m}$, я для одного члена получаю $\sqrt{m^2}$ или же m, а для другого я вычитаю $\frac{1}{2}m^2-\frac{px^2}{2m}$ из $\frac{1}{2}m^2+\frac{px^2}{2m}$; в остатке я имею $\sqrt{\frac{px^2}{m}}$; эти члены я складываю и получаю $m+\sqrt{\frac{px^2}{m}}$, или же $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$.

Item, при извлечении корня из этого бинома

$a^2x^2+d^2x^2-2a^2d^2+\sqrt{4a^2d^2x^4-4a^4d^2x^2-4a^2d^4x^2+4a^4d^4}$, разностью их квадратов является $a^4x^4-2a^2d^2x^4+d^4x^4$ и если принять a бóльшим, чем d, то корень из этого есть $a^2x^2-d^2x^2$. Прибавив затем к этому полукорню $\frac{1}{2}a^2x^2-\frac{1}{2}d^2x^2$ полукорень большего квадрата $\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{2}d^2x^2-a^2d^2$, я получаю $a^2x^2-a^2d^2$, и корень из этого есть $\sqrt{a^2x^2-a^2d^2}$ или $a\sqrt{x^2-d^2}$ [и есть] первый член. А при отнятии от $\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{2}d^2x^2-a^2d^2$ получается остаток $d^2x^2-a^2d^2$, и корень из этого есть $\sqrt{d^2x^2-a^2d^2}$ или же $d\sqrt{x^2-a^2}$ [и есть] другой член; при соединении их знаком $+$ получается корень

$$a\sqrt{x^2-d^2}+d\sqrt{x^2-a^2},\ \text{и т. д.}$$

Об уравнениях.

Когда желают решить какую-либо задачу для известных членов (будет ли то линия, число, поверхность или тело) берут первые буквы алфавита a, b, c, а для неизвестных пользуются последними x, y, z; и, составив список, пользуются для обозначения равенства двух вещей таким знаком ∞; так, чтобы сказать, что линия AB равна b, я пишу $AB \infty b$; при этом, однако, в своих предположениях [120] нужно соблюдать число измерений, беря для линии или числа одну букву, для поверхности две буквы, и для тела три; таким образом, если единица в вопросе не определена, то нужно, чтобы в одном члене было столько же измерений, сколько в другом. Ибо, так как единица не уменьшает числа измерений при делении, и не увеличивает его при умножении, то ее позволительно отнимать от членов, в которых она находится, как это видно из *Геометрии*, стр. 299 (13), в приведенном для этой цели примере: $a^2b^2 - b$; приняв c за единицу, умножим $-b$ на единицу два раза, а a^2b^2 разделим на единицу один раз; при восстановлении ее, в одном члене будет иметься столько же измерений, сколько в другом, $\frac{a^2b^2}{c} - bc^2$.

Также, стр. 395 (99), в уравнении $z^4 \infty pz^2 - qz + r$ за единицу принимается a, и pz^2 умножается один раз, $-qz$ два раза, и r три раза: так что, при восстановлении единицы, получится $z^4 \infty pz^2a - a^2qz + a^3r$. И также в некоторых других случаях.

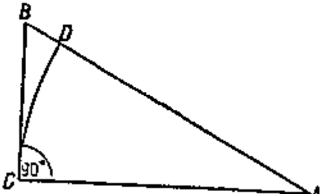
Дав названия известным величинам, дело рассматривают как уже сделанное, и смотрят, может ли быть удобно решена задача, если принять только одну неизвестную линию ∞x, именно искомую, или же $z^2 \infty x$, умноженному на другую известную величину, $+$ или $-$ другие известные члены и т. д. Во всех этих случаях *Геометрия* дает средства извлечь корень и сделать неизвестную величину $x \infty$ известным членам. И задача решена.

Но если предложенная задача такова, что только одна неизвестная буква недостаточно связана с известными, так что с их взаимной помощью найти уравнение нельзя, или же если при допущении только одной буквы запутываешься в слишком большом вычислении, то следует пользоваться несколькими неизвестными буквами, а также найти столько уравнений, сколько принято букв, и с помощью этих уравнений привести все эти буквы лишь к одной, которая доставляет решение задачи. Чтобы довести эти приведения до конца, нужно рассмотреть, нельзя ли узнать одну из букв по одному уравнению или же путем сравнения двух или нескольких уравнений, складывая их или же вычитая одно из другого. И если это невозможно, то для нахождения одной [буквы] следует перейти к извлечению корня; затем дóлжно удалить эту букву из одного из других уравнений и поставить на ее место найденное значение; так освободишься от одной неизвестной буквы. Затем, сравнивая это уравнение с другим, из которого эта же буква, если она в нем имеется, также удалена, избавишься от второй; и также — от других, пока не останется лишь одна неизвестная посреди всех известных, члены чего нужно будет расположить по порядку. И с помощью извлечения корня, как и раньше, станет известным, каково ее значение; и таким образом задача будет решена.

Если найти столько же уравнений, сколько было принято неизвестных букв, нельзя, то это показывает, что задача не вполне определена. Тогда за одну из неизвестных букв можно принять какую угодно величину, и ее разнообразие породит ряд точек, которые все удовлетворяют вопросу и которые составляют плоские, телесные или линейные места, если недостает лишь одного уравнения, и поверхностные места, если недостает двух, и так далее.

Пример первый.

Дана одна из сторон прямоугольного треугольника и разность двух других сторон; найти в треугольнике все остальное (черт. 31).



Черт. 31.

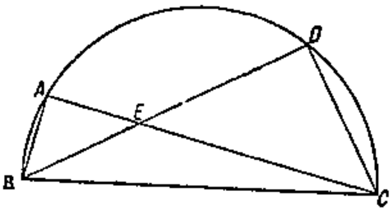
Предположение: $BC \infty a$, $BD \infty b$, $AC \infty x$; дело как бы уже сделано. Два квадрата $AC \infty x^2$, $BC \infty a^2$ равны квадрату AB. Но $AB \infty x + b$, а ее квадрат есть $x^2 + 2bx + b^2$. Поэтому имеется уравнение между $x^2 + a^2$ и $x^2 + 2bx + b^2$.

Я отнимаю с той и другой стороны $x^2 + b^2$; у меня остается $2bx \infty a^2 - b^2$, и эти величины я делю на $2b$. Получается $x \infty \frac{a^2 - b^2}{2b}$. Это показывает, что если разность квадратов BC и BD поделить на удвоенную BD, то частное и будет стороной AC. Или же, если найти линию, относящуюся к линии a, как a к удвоенной b, и отнять затем половину этой линии [b], то остаток будет искомой x или AC и т. д.

Пример второй.

Даны два прямоугольных треугольника с общим основанием, пересекающиеся в некоторой точке; найти отрезки пересекающихся сторон (черт. 32).

Допущения: $BE \infty x$, $AB \infty a$, $AC \infty b$, $DC \infty c$, $DB \infty d$. Дело как бы уже сделано. Если $BE \infty x$, то $DE \infty d - x$. Так как прямоугольные треугольники ABE и CDE подобны, $AB \infty a$ относится к $BE \infty x$, как $DC \infty c$ относится к $CE \infty \frac{cx}{a}$. В свою очередь, как $DC \infty c$ относится к $DE \infty d - x$, так $AB \infty a$ относится к $AE \infty \frac{ad - ax}{c}$. И если отнять $CE \infty \frac{cx}{a}$ от $AC \infty b$, то оста-



Черт. 32.

нется $AE \infty b - \frac{cx}{a}$, в других членах, дающих следующее уравнение $b - \frac{cx}{a} \infty \frac{ad - ax}{c}$, или же $a^2d - a^2x \infty abc - c^2x$. Если отнять с той и другой стороны $-c^2x + a^2d$, то останется $c^2x - a^2x \infty abc - a^2d$. И, деля ту и другую стороны на $c^2 - a^2$, я получу

$$x \infty \frac{abc - a^2d}{c^2 - a^2}.$$

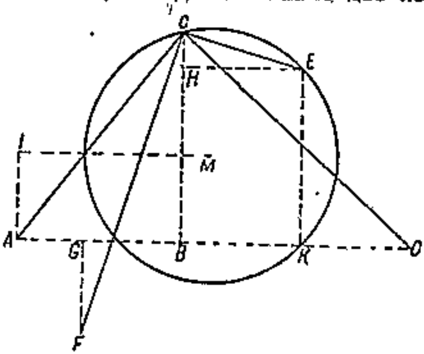
То-есть, как разность квадратов AB и DC (которые являются непересекающимися сторонами) относится к разности прямоугольников ACD и ABD [121], так сторона AB относится к линии $BE \infty x$. Или же пропорция (l'analogie) выразится так, как $\frac{c^2 - a^2}{bc - ad} \infty \frac{a}{x}$ [122].

В этом же отношении [находится] также DC к CE.

Пример третий [123].

Даны четыре точки A, D, E, F, найти такую пятую C, что если провести из нее прямые линии вроде четырех CA, CF, CD, CE, то квадраты их [вместе] будут равны пространству d^2 (черт. 33).

Допущения: $AG \infty a$, $AK \infty f$, $AD \infty c$, $GF \infty b$, $KE \infty g$, $AB \infty x$, $BC \infty y$. Я предполагаю, что дело уже сделано и [принимаю за] искомую точку C, из которой провожу линии к четырем данным точкам. Я соединяю также две из этих точек линией AD, на которую опускаю из других точек перпендикуляры EK, GF, CB; и пусть EK больше FG. Затем, следуя допущениям моего списка, я ищу искомые четыре квадрата следующим образом. [И прежде всего квадрат $AB \infty x^2$, а таковой для $BC \infty y^2$. Значит, квадрат $AC \infty x^2 + y^2$. Два квадрата $BD \infty c - x$ и $BC \infty y$ суть $c^2 - 2cx + x^2$ и y^2. Значит, квадрат $CD \infty y^2 + c^2 - 2cx + x^2$.



Черт. 33.

А квадрат линии $CB + GF \infty y^2 + 2by + b^2$; и квадрат $GB \infty x - a$ есть $x^2 - 2ax + a^2$; и два последних квадрата равны квадрату

$$CF \infty y^2 + 2by + b^2 + x^2 - 2ax + x^2.$$

Два квадрата CH и BK, $\infty y - g$ и $f - x$, суть $y^2 - 2gy + g^2$ и $f^2 - 2fx + x^2$, а они равны квадрату $CE \infty y^2 - 2gy + g^2 + f^2 - 2fx + x^2$. А так как сумма этих четырех квадратов равна данному пространству d^2, то, произведя сложение, я имею

$$4y^2 + 4x^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + \\ + 2by - 2gy - 2cx - 2ax - 2fx \infty d^2.$$

И так как я принял две неизвестные величины x и y, и не вижу средства найти второе уравнение, то я заключаю, что вопрос недостаточно определен и что это должно быть геометрическое место, согласно стр. 334 (44) *Геометрии*. Тогда, согласно стр. 300 (14), строка 22 (26), я могу одну из них выбрать произвольно, и в качестве таковой здесь выбираю $AB \propto x$ и с помощью этого уравнения я определяю y следующим образом:

$$y^2 \propto \frac{-2by+2ax-a^2-f^2+2gy+2cx-b^2-g^2+2fx-c^2+d^2}{4},$$

откуда следует, согласно правилам *Геометрии*, стр. 302 (16), извлечь корень

$$y \propto \frac{-b+g}{4} + \sqrt{\frac{\begin{array}{l}-4a^2-3b^2\\ -4f^2-3g^2+4d^2\\ -4c^2-2bg\end{array}}{16}\;\frac{\begin{array}{l}+2ax\\ +2cx\\ +2fx\end{array}}{4}-x^2}.$$

И прежде всего я вижу, по странице 328 (16), что это эллипс или круг, потому что там стоит $-x^2$, и так как угол прямой, то для определения того, что это есть круг, требуется лишь, чтобы a^2m было равно pz^2. Чтобы это узнать, я смотрю, каковы эти величины и откуда они получились, и я вижу, страница 328 (40), что a и z вместе с n служат для выражения отношения между KI и IL на чертеже страницы 329 (37), а они здесь равны, и, следовательно, $a \propto z$ или же $a^2 \propto z^2$. Остается $\frac{p}{m}$, что бралось за член, который умножается на x^2 и который здесь есть единица. Итак, $\frac{p}{m} \propto 1$ или же $p \propto m$. Отсюда я заключаю, что это круг. И так как это уравнение на странице 326 (39), именно

$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2},$$

служит общим правилом для построения всяческих мест, то ему можно следовать таким образом: к данной AD в точке A восстанавливается перпендикуляр AI, равный $\frac{g-b}{4}$, и так как g больше b, то точка I должна быть взята со стороны E, над линией AD. Но если бы b была больше g, точка I должна была бы быть взята под линией AD, со стороны F. Затем из названной точки I параллельно AD проводится IM, на которой находится центр круга; и чтобы найти его, я пользуюсь определением IM, страница 330 (40), $\infty \dfrac{aom}{2pz}$ или же, так как $am \infty pz$, я для линии IM имею $\frac{1}{2}o$, и M является центром круга. И так как o обозначает член, который умножается под связкой на x, именно $\dfrac{2ax+2cx+2fx}{4}$, то я узнаю, что IM есть $\dfrac{a+c+f}{4}$, и так как прямая сторона или диаметр определяется немного далее, на строке 15 (12) страницы 41, как $\sqrt{\dfrac{o^2z^2}{a^2}-\dfrac{4mpz^2}{a^2}}$, что то же, что и $\sqrt{o^2-4pm}$ или же $\sqrt{o^2-4m^2}$, ибо $m \infty p$, то я вижу, что для получения радиуса нужно взять от этого половину и что к квадрату $\dfrac{a+c+f}{4}$, который здесь есть $\frac{1}{4}o^2$, нужно прибавить абсолютное число, обозначенное под связкой через $-m^2$, и которое в этом уравнении есть

$$\frac{-4a^2-3b^2-4c^2-4f^2-3g^2<-2bg>+4d^2}{16}.$$

$$\text{И сумма } \infty <\tfrac{1}{4}> \sqrt{\begin{matrix}-3a^2-3c^2-3g^2+2af\\ <->3b^2-3f^2-<2bg+>2ac+2cf+4d^2\end{matrix}}$$

дает искомый радиус этого круга, описываемого из центра M.

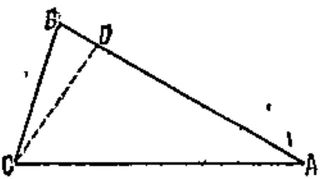
Рассматривая для осуществления построения все эти величины, отсюда весьма легко увидеть, что, в первую очередь, линия AI есть $\frac{1}{4}(g-b)$, то есть составлена из суммы или разности перпендикуляров, опущенных на линию AD из других данных точек, каковы здесь F и E, поделенной на число всех данных точек: именно, в этом примере, поскольку GF находится с одной стороны от линии AD, а KE с другой, следует взять разность, имеющуюся между этими линиями, и поделить ее на 4, ибо даны четыре точки; между тем, если бы GF и KE находились с одной и той же стороны от линии AD, то следовало бы взять их сумму, и делить эту разность или сумму на 5, если бы вопрос содержал пять точек; а также на 6 и т. д. Частное есть линия AI, причем точка I предполагается с той стороны от линии AD, на которой находятся бо́льшие перпендикуляры: так здесь, в силу того, что KE больше GF, я провожу линию AI с той стороны, где находится точка E.

Во вторую очередь видно, что IM есть $\frac{a+c+f}{4}$, то-есть, что она должна состоять из суммы линии AD и всех отрезков этой линии, лежащих между точкой A и точками, на которые опущены перпендикуляры из других точек, деленной на число данных точек.

Наконец, видно, что для нахождения радиуса этого круга, следует только вычесть из данного пространства квадраты всех линий, проведенных из каждой данной точки ко всем другим, ибо они должны быть меньше, чем это пространство; и разделить этот вычет (le residu) на число данных точек, а затем извлечь корень из частного, каковой и будет искомым радиусом. Так, например, здесь нужно отнять от d^2 квадраты шести линий AD, AE, AF, ED, DF, FE; и если разделить вычет на 4, то корень из частного будет искомым корнем. Или же, поскольку центр M уже найден, радиус найдется, если провести из всех данных точек прямые линии к M; ибо если вычесть квадраты этих линий из данного пространства и разделить остаток на число данных точек, то квадратный корень из частного будет искомым радиусом.

Пример четвертый.

В некотором прямолинейном треугольнике даны угол, одна из заключающих его сторон и сумма двух других сторон; найти в треугольнике остальное (черт. 34).



Черт. 34.

$BC \propto a$, $BD \propto d$, $AB + AC \propto b$,

$AC \propto x$.

Раз угол B дан, то дано также отношение радиуса к синусу его дополнения, и так как дана BC, то будет данной и BD, которую я называю d.

Установив это, следует найти величину BD через другие члены таким образом: если назвать $AB \propto b - x$, то это дает $AC \propto x + BC \propto a$, что даст $x - a$? Для разности AD и BD получается $\frac{x^2 - a^2}{b - x}$ [124], и если ее вычесть из $b - x$, то останется

$$b - x - \frac{x^2 - a^2}{b - x} \infty 2d,$$

или же

$$b^2 - 2bx + x^2 - x^2 + a^2 \infty 2bd - 2dx,$$

или

$$b^2 - 2bx + a^2 \infty 2bd - 2dx,$$

и если с той и другой стороны отнять $-2bx + 2bd$, то останется

$$b^2 - a^2 - 2bd \infty 2bx - 2dx,$$

и, разделив обе стороны на $2b - 2d$, я получу

$$x \infty \frac{b^2 + a^2 - bd}{2b - 2d} \ldots$$

II

ПЬЕР ДЕ-ФЕРМА.

ВВЕДЕНИЕ В ИЗУЧЕНИЕ ПЛОСКИХ И ТЕЛЕСНЫХ МЕСТ [125].

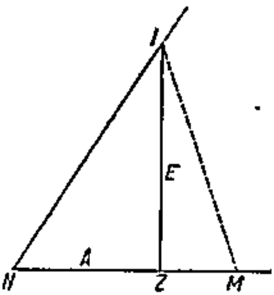
Несомненно, что древние много писали о геометрических местах. Свидетелем этого является Папп, уверяющий в начале VII книги, что Аполлоний писал о плоских, а Аристей о телесных. Но если мы не ошибаемся, исследование мест было для них нелегким делом. Мы заключаем это из того, что они не дали достаточно общего выражения для многочисленных мест, как это будет видно из дальнейшего.

Поэтому мы подвергнем эту отрасль знания особому и специально для нее подходящему анализу, с тем чтобы впредь был открыт общий путь к изучению мест.

Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины [126], налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию. Существует только одна единственная и простая прямая линия; наоборот, кривых линий бесконечно много: круг, парабола, гипербола, эллипс и т. д.

Всякий раз, когда описывающий место конец неизвестной величины находится на прямой или на окружности, место является плоским; когда же он описывает параболу, гиперболу или эллипс, место будет телесным, а когда — какую-либо другую кривую, место называется линейным. Последний случай мы здесь разбирать не будем, ибо с помощью приведений познание линейного места очень легко выводится из исследования плоских и телесных мест.

Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин. Если при этом ни одна из неизвестных величин не будет превосходить квадрата, то, как это станет ясно из дальнейшего, место будет плоским или телесным.



Черт. 35.

Допустим (черт. 35), что NZM — данная по положению прямая и N — данная точка на ней. Пусть NZ равна неизвестной величине A, а проведенная под данным углом NZI прямая ZI пусть будет равна другой неизвестной величине E [127]. Тогда, если

$$D \text{ на } A \quad \text{равно} \quad B \text{ на } E;$$

точка I находится на данной по положению *прямой*.

Действительно, отношение A к E равно отношению B к D. Поэтому отношение A к E является данным. Так как, кроме того, дан угол при Z, то вид треугольника MIZ и угол INZ будут даны. Но точка N и положение прямой NZ также даны. Следовательно, дано и положение прямой NI и легко произвести синтез [128].

К этому уравнению приводятся все уравнения, часть членов [129] которых дана, а часть содержит неизвестные A и E, умноженные на какие-нибудь данные величины или же взятые просто [130]

$$Zpl. — D \text{ на } A \quad \text{равно} \quad B \text{ на } E \text{ [131]}.$$

Если положить

$$Zpl. \text{ равным } D \text{ на } R,$$

то

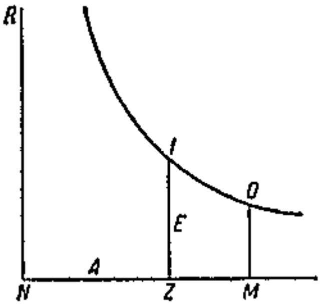
$$B \text{ относится к } D, \text{ как } R - A \text{ к } E.$$

П. ФЕРМА (1601—1665).

Положим MN равной R; тогда точка M будет данной и MZ будет равна $R-A$. Значит, отношение MZ к ZI будет дано; а так как угол при Z дан, то будет дан вид треугольника IZM. Если соединить еще прямой MI, то мы заключим, что эта прямая дана по положению. Следовательно, точка I будет находиться на данной по положению прямой. То же самое можно без труда вывести для всякого уравнения, в котором имеются члены, содержащие величины A или E.

Это — простое и первое уравнение мест, с помощью которого можно найти все прямолинейные места. Например, с его помощью 7-е предложение первой книги Аполлония *О плоских местах* может быть теперь высказано и построено более общим образом [182].

В этом уравнении содержится следующее прекрасное предложение, найденное нами с его помощью:



Черт. 36.

Допустим, что имеется какое-либо число данных по положению прямых и что к ним из некоторой точки проведены под заданными углами отрезки; если сумма произведений этих проведенных прямых на данные равна данной площади, точка находится на данной по положению прямой.

Мы опускаем бесчисленные другие предложения, которые можно было бы с полным правом противопоставить предложениям Аполлония.

Второй порядок (gradus) таких уравнений получается, если

$$A \text{ на } E \text{ равно } Zpl.$$

В этом случае точка I находится на *гиперболе.*

Проведем (черт. 36) NR параллельно ZI. Возьмем на NZ какую-нибудь точку, например M, и проведем из нее MO параллельно ZI. Затем сделаем прямоугольник NMO равным Zpl. [183]. Опишем через точку O, между асимптотами NR и NM, гиперболу. Она будет дана по положению и пройдет через точку I, так как прямоугольник A на E

или NZI равен прямоугольнику NMO. К этому уравнению приводятся все прочие уравнения, часть членов которых дана, а часть содержит A либо E или A на E.

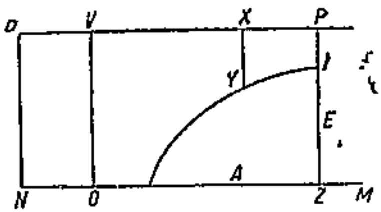
Допустим, например, что

$$Dpl. + A \text{ на } E \text{ равно } R \text{ на } A + S \text{ на } E;$$

тогда на основании правил искусства [184] мы получим, что

$$R \text{ на } A + S \text{ на } E - A \text{ на } E \text{ равно } Dpl.$$

Образуем по двум сторонам такой прямоугольник, в котором имелись бы члены



Черт. 37

$$R \text{ на } A + S \text{ на } E - A \text{ на } E.$$

Две эти стороны будут

$$A - S \text{ и } R - E,$$

а прямоугольник на этих сторонах равен R на $A + S$ на $E - A$ на $E - R$ на S. Значит, если отнять R на S от $Dpl.$, то прямоугольник на $\overline{A - S}$ и $\overline{R - E}$ будет равен $Dpl. - R$ на S.

Положим (черт. 37) NO равной S, и ND, параллельную ZI, равной R. Через точку D проведем DP параллельно NM, затем проведем OV параллельно ND и продолжим ZI до P.

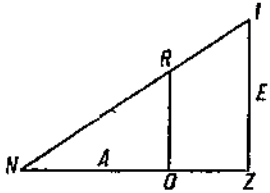
Так как NO равна S и NZ равна A, то $A - S$ будет равно OZ или VP. Аналогично, так как ND или ZP равна R и ZI равна E, то $R - E$ будет равно PI. Поэтому прямоугольник на VP и PI будет равен данной площади $Dpl. - R$ на S. Следовательно, точка I находится на гиперболе с асимптотами PV и VO.

Действительно, приравняем площади $Dpl. - R$ на S прямоугольник VXY, взяв произвольную точку X и проведя параллель XY. Если через точку Y описать между асимптотами PV и VO гиперболу, то она пройдет через точку I. Во всех случаях ни анализ, ни построение не представляют труда [185].

Следующий порядок уравнений мест возникает, когда $Aq.$ либо равен, либо находится в данном отношении к $Eq.$, или же когда $Aq. + A$ на E находится в данном отношении к $Eq.$. Таким образом этот случай заключает все уравнения, члены которых восходят до квадрата и содержат квадрат A, или еще [136] квадрат E, или еще прямоугольник A на E.

Во всех этих случаях, как весьма легко доказать, точка I находится на прямой линии.

Допустим (черт. 38), что NZ квадр. $+$ NZ на ZI находится в заданном отношении к ZI квадр. Если мы проведем какую-нибудь параллельную OR, то NO квадрат $+$ NO на OR будет находиться, как весьма легко доказать, к квадрату OR в том же самом отношении. Следовательно, точка I будет находиться на данной по положению прямой. То же самое будет иметь место для всех уравнений, все члены которых содержат либо квадраты (potestas) неизвестных, либо же прямоугольник из них обеих. Поэтому нет необходимости в более тщательном рассмотрении отдельных случаев [137].



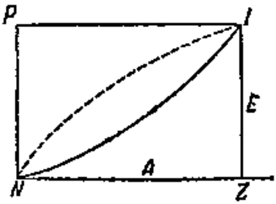
Черт. 38.

Если наряду с квадратами неизвестных или еще прямоугольниками из них имеются еще и другие члены, частью вполне данные, частью являющиеся произведениями из одной неизвестной на некоторую данную прямую, то построение труднее. Мы коротко изложим, как провести построение в отдельных случаях, и приведем соответствующие доказательства.

Если

$Aq.$ равно D на E,

точка I находится на *параболе*.



Черт. 39.

Допустим (черт. 39), что NP параллельна ZI и опишем параболу с диаметром NP, прямая сторона которой есть данная прямая D и ординаты [138] которой параллельны NZ. Тогда точка I будет находиться на этой данной по положению параболе.

Действительно, согласно построению, прямоугольник на D и NP равен квадрату PI и, следовательно,

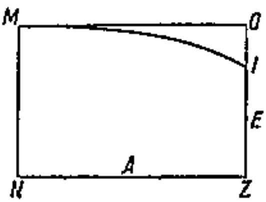
D на E равно $Aq.$

К этому уравнению весьма легко приводятся все те, в которых наряду с $Aq.$ имеются еще члены с произведениями из E и данных величин или же наряду с $Eq.$ имеются еще члены с произведениями из A и данных величин. То же самое будет, если, помимо того, в уравнение входят еще и вполне данные члены.

Пусть

$$Eq. \text{ равняется } D \text{ на } A.$$

Возьмем предыдущую фигуру и из вершины N опишем параболу с диаметром NZ, прямая сторона которой пусть будет D, а ординаты параллельны прямой NP. Эта парабола, очевидно, удовлетворяет предложенному.



Черт. 40.

Если положить

$$Bq. - Aq. \text{ равн. } D \text{ на } E,$$

то

$$Bq. - D \text{ на } E \text{ будет равно } Aq.$$

Разделим $Bq.$ на D и пусть $Bq.$ равно D на R. Тогда

$$D \text{ на } R - D \text{ на } E \text{ будет равно } Aq.$$

или

$$D \text{ на } (R - E) \text{ будет равно } Aq.$$

Таким образом это уравнение приведено к предыдущему. Только вместо E стоит $R - E$.

Действительно, проведем прямую (черт. 40) NM, равную R, параллельно ZI и через точку M прямую MO параллельно NZ: точка M и прямая MO будут даны по положению. Согласно построению, OI равна $R - E$, значит, D на OI будет равно NZ квадр. или MO квадр. Парабола с вершиной M, диаметром MN и прямой стороной D, ординаты которой параллельны NZ, удовлетворяет, как это явствует из построения, предложенному.

Если

$$Bq. + Aq. \text{ равно } D \text{ на } E,$$

то также

$$D \text{ на } E - Bq. \text{ будет равно } Aq.$$

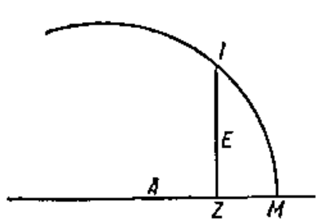
и т. д., как и выше. Подобным же образом осуществляется построение всех уравнений, содержащих E и $Aq.$

Но часто случается, что Aq. входит вместе с Eq. и вполне данными членами. Пусть

$$Bq. - Aq. \text{ равно } Eq.$$

Точка I будет находиться на данной по положению *окружности*, если только угол NZI прямой.

Возьмем (черт. 41) NM, равную B. Тогда предложенному будет удовлетворять круг, описанный из центра N радиусом NM. Действительно, какую бы точку I ни взять на его окружности, всегда очевидным образом квадрат ZI будет равен квадрату NM (или $Bq.$) — квадрат NZ (или $Aq.$).



Черт. 41.

К этому уравнению приводятся все те, которые содержат члены с Aq. и Eq. и с произведениями A или еще E на данные величины, если только угол NZI прямой и если, кроме того, коэфициент при Aq. равен коэфициенту при Eq.

Допустим, например, что

$$Bq. - \text{два } D \text{ на } A - Aq. \text{ равняется } Eq. + \text{два } R \text{ на } E.$$

Если на обеих сторонах прибавить $Rq.$, так что вместо E будет стоять $E + R$, то получится

$$Rq. + Bq. - \text{два } D \text{ на } A - Aq. \text{ равняется } Eq. + Rq. + \\ + \text{два } R \text{ на } E.$$

Прибавим еще Dq. к Rq. и $Bq.$, так что вместо A будет стоять $D + A$, и положим сумму квадратов $Rq.$, Bq. и Dq. равной $Pq.$. Тогда

$$Pq. - Dq. - \text{два } D \text{ на } A - Aq. \text{ равно } Rq. + Bq. - \\ - \text{два } D \text{ на } A - Aq.,$$

ибо, согласно построению,

$$Pq. - Dq. \text{ равно } Rq. + Bq.$$

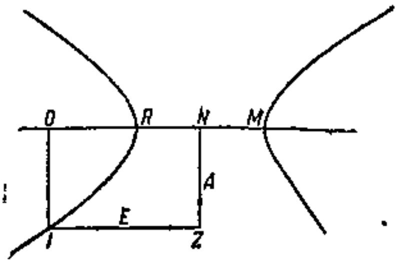
Если теперь вместо $A + D$ взять A, а вместо $E + R$ таким же образом E, то

$$Pq. - Aq. \text{ равно } Eq.,$$

и уравнение окажется приведенным к предыдущему. Посредством аналогичных рассуждений осуществляется приведение аналогичных уравнений. Именно таким образом мы построили все предложения второй книги Аполлония *О плоских местах* и доказали, что первые шесть справедливы для любых точек [189]. Это поистине замечательное обстоятельство, быть может, не было известно Аполлонию.

Но если

Bq. — *Aq.* находится в некотором данном отношении к *Eq.*,



Черт. 42.

точка *I* находится на *эллипсе*.

Возьмем *MN*, равную *B*, и опишем эллипс с вершиной *M*, диаметром *NM* и центром *Z*, — эллипс, ординаты которого параллельны *ZI*, а квадраты ординат находятся в данном отношении к прямоугольнику на отрезках диаметра. Точка *I* будет находиться тогда на этом эллипсе. Действительно, квадрат *NM* — квадрат *NZ* равен прямоугольнику на отрезках диаметра.

К этому уравнению приводятся другие, сходные уравнения, имеющие на одной стороне *Aq.*, а на другой *Eq.* с противоположным знаком и с другим коэфициентом. Действительно, как мы уже говорили, если бы коэфициенты были равны, а угол был прямой, то местом была бы окружность. Но если угол не прямой, то и при равных коэфициентах место будет эллипсом. Если в уравнении, кроме того, имеются члены с произведениями *A* или *E* на данные величины, то можно произвести приведение с помощью указанного приема.

Если

в данном отношении к *Eq.* находится *Aq.* + *Bq.*,

точка *I* находится на *гиперболе*.

Проведем *NO* параллельно *ZI* (черт. 42) и допустим, что данное отношение есть отношение *Bq.* к квадрату *NR*. Значит, точка *R* будет данной. Опишем гиперболу с диаметром *RO*, вершиной *R* и центром *N*, ординаты которой параллельны *NZ*, и пусть прямоугольник на всем диаметре и RO вместе с квадратом RO находится к квадрату OI в данном отношении NR квадрат к Bq.. Тогда, componendo[140], прямоугольник MOR (если положить MN равным NR), вместе с квадратом NR, будет находиться к квадрату OI, вместе с Bq., в данном отношении, именно в отношении NR квадрат к Bq.. Но прямоугольник MOR, вместе с NR квадрат, равен NO квадрат или ZI квадрат или Eq., а квадрат OI, вместе с Bq., равен квадрату NZ или Aq., вместе с Bq.. Значит,

Eq. относится к $Bq. + Aq$., как NR квадрат к Bq.;

и, convertendo,

$Bq. + Aq$. находится в данном отношении к Eq.

Следовательно, точка I находится на данной по положению гиперболе.

Посредством того же самого приема, который мы уже применяли, к этому уравнению приводятся все те, которые содержат Aq. и Eq. вместе с данными членами, будут ли эти члены входить просто или же наряду с членами, являющимися произведениями A и E на данные величины, лишь бы Aq. входило на другой стороне уравнения, чем Eq., но с одинаковым знаком. Если же знаки будут различны, то предложение приводит к кругу или эллипсу.

Наиболее трудное уравнение встречается, когда наряду с Aq. и Eq. встречаются еще члены, содержащие произведение A на E и данные величины и т. д.

Допустим, что

Bq. — два Aq. равно два A на $E + Eq$.

Прибавим на обеих сторонах Aq. так, чтобы корнем одной стороны было $A + E$. Тогда

$Bq. - Aq$. будет равно $Aq. + Eq. +$ два A на E.

Если мы заменим $A + E$, скажем, через E, то предложенному будет удовлетворять круг MI, т. е.

MN квадрат (или Bq.) — NZ квадрат (или Aq.) будет равен

квадрату ZI (или квадрату $\overline{A+E}$).

Если положить VI равной NZ или A, то ZV будет равно E. Но в этом вопросе мы ищем лишь точку V, или же конец прямой E. Следовательно, мы должны рассмотреть и показать, на какой линии находится точка V.

Проведем прямую (черт. 43) MR, равную MN, параллельно ZI и проведем NR, которую продолженная линия IZ пересечет в точке O. Так как MN равна MR, то NZ равна ZO. Но NZ равна VI, значит, вся прямая VO равна всей ZI. Следовательно

квадрат MN — квадрат NZ равен квадрату VO.

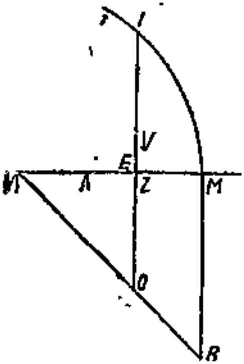
Но вид треугольника NMR дан, а значит, дано отношение квадрата NM к квадрату NR и, следовательно, отношение квадрата NZ к квадрату NO. Значит, дано также отношение

квадрата MN — квадрат NZ к квадрату NR — квадрат NO.

Но мы доказали, что

квадрат OV равен квадрату MN — квадрат NZ.

Следовательно, известно отношение квадрата NR — квадрат NO к квадрату OV. Но точки N и R и угол NOZ также даны. Поэтому, согласно вышедоказанному, точка V находится на эллипсе [141].



Черт. 43.

Аналогичным путем приводятся к рассмотренным выше случаям все другие, в которых наряду с членами, содержащими A на E, встречаются еще данные члены, а также Aq. и Eq. или же члены, в которых A и E умножены на данные величины. Исследование во всех этих случаях провести очень легко. Вопрос всегда строится при помощи некоторого данного по виду треугольника.

Таким образом мы коротко и ясно изложили все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест. Теперь видно, какие места получаются во всех случаях последнего предложения первой книги Аполлония *О плоских местах* [142]. И вообще все, что относится к этому предмету, отныне можно будет найти без труда.

В завершение всего изложенного мы приведем следующее замечательное предложение, легкость которого ясна сразу.

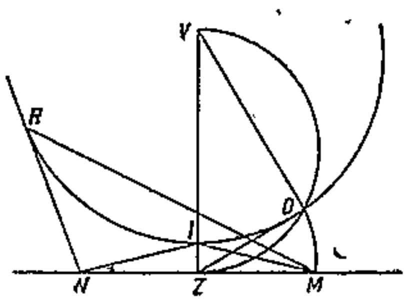
Если из одной и той же точки провести под данными углами прямые к произвольному числу данных по положению прямых и если квадраты проведенных прямых равны некоторой данной площади [143], то точка находится на данном по положению телесном месте.

Для указания общего построения достаточно привести один пример. Допустим (черт. 44), что даны две точки N и M и требуется найти место таких точек I, что если провести прямые IN и IM, то квадраты их находятся в данном отношении к треугольнику INM.

Положим NM равной B, перпендикулярную прямую ZI назовем E и NZ назовем A. Тогда, согласно правилам искусства,

два $Aq. + Bq.$ — два B на $A +$ два $Eq.$ будет находиться к прямоугольнику B на E в данном отношении.

Если решать согласно вышеизложенным правилам, то построение будет таким:



Черт. 44.

Разделим NM в Z пополам, восставим в Z перпендикуляр ZV и сделаем отношение учетверенного ZV к NM равным данному отношению. Опишем на VZ полукруг VOZ и отложим хорду ZO, равную ZM; проведем VO и опишем из V радиусом VO окружность OIR. Возьмем на этой окружности произвольную точку R и проведем прямые RN и RM; я утверждаю, что квадраты RN и RM находятся в данном отношении к треугольнику RNM [144].

Если бы это открытие предшествовало произведенной нами ранее реставрации двух книг *О плоских местах*, то построения предложений о местах были бы, несомненно, изящнее. И все же мы не раскаиваемся в написании этого преждевременного и не вполне зрелого сочинения. Действительно, для науки представляет некоторый интерес не утаивать от последующих поколений еще неоформившиеся плоды разума; и благодаря новым открытиям науки первоначально грубые и простые идеи как укрепляются, так и множатся. И в интересах самих изучающих составить себе полное представление как о сокровенных путях разума, так и о самопроизвольно развивающемся искусстве.

Приложение к „Введению в места", содержащее решение телесных задач с помощью мест [116].

Метод отыскания линий, служащих геометрическими местами, уже изложен; остается исследовать, каким образом можно изящнее всего вывести из вышесказанного решение телесных задач. Для этого следует ограничить способность неизвестных величин выходить за их границы, ибо у геометрических мест имеется бесчисленно много точек, удовлетворяющих предложенному вопросу.

Наиболее удобно определять вопрос с помощью двух уравнений геометрических мест, ибо две данные по положению линии — два геометрических места взаимно пересекаются и данная по положению точка пересечения приводит вопрос от неопределенности к предложенным членам.

Это кратко и ясно выяснится из примеров. Допустим, что предложено

$$Ac. + B \text{ на } Aq. \text{ равняется } Zpl. \text{ на } B.$$

Удобно приравнять каждую из сторон уравнения телу B на A на E, так, чтобы при делении этого тела, с одной стороны, на A, а с другой — на B дело было приведено к местам.

Так как, следовательно,

$$Ac. + B \text{ на } Aq. \text{ равняется } B \text{ на } A \text{ на } E,$$

то

$$Aq. + B \text{ на } A \text{ будет равно } B \text{ на } E,$$

и, как это явствует из нашего метода, конец E будет находиться на данной по положению параболе.

С другой стороны,

$$Zpl. \text{ на } B \text{ равняется } B \text{ на } A \text{ на } E;$$

следовательно,

$$Zpl. \text{ будет равно } A \text{ на } E,$$

и, согласно нашему методу, конец E будет находиться на данной по положению гиперболе.

Но мы уже доказали, что он находится на данной по положению параболе: следовательно, он будет дан по положению и от анализа легко перейти к синтезу.

Для всех кубических уравнений метод будет тем же. В самом деле, поместив в одной части все телесные члены, содержащие A, а в другой — вполне данный телесный член или же, наряду с ним, члены, содержащие A или еще $Aq.$, можно будет образовать уравнение, подобное вышеприведенному.

Допустим, что предложен пример квадрато-квадратных уравнений [146]:

$$Aqq. + Bs. \text{ на } A + Zq. \text{ на } Aq. \text{ равняется } Dpp.$$

Следовательно,

$$Aqq. \text{ будет равно } Dpp. - Bs. \text{ на } A - Zq. \text{ на } Aq.$$

Приравняем здесь обе части $Zq.$ на $Eq.$

Так как, следовательно,

$$Aqq. \text{ равняется } Zq. \text{ на } Eq.,$$

то, по извлечении квадратного корня (per subdivisionem quadraticam),

$$Aq. \text{ будет равно } Z \text{ на } E$$

и конец E будет находиться на данной по положению параболе.

С другой стороны, так как

$Dpp. - Bs.$ на $A - Zq.$ на $Aq.$ равняется $Zq.$ на $Eq.$,

то, по разделении всего на $Zq.$,

$$\frac{Dpp. - Bs. \text{ на } A}{Zq.} - Aq. \text{ будет равно } Eq.;$$

и, согласно нашему методу, конец E будет находиться на данной по положению окружности. Но он находится также на данной по положению параболе и, следовательно, он дан.

Все квадрато-квадратные вопросы решаются с помощью того же метода. В самом деле, по способу Виеты можно удалить (Cap. I, *De emendatione*) член, содержащий куб, и если поместить в одной части неизвестный квадрато-квадрат, а в другой — прочие члены, вопрос можно будет решить с помощью параболы, круга или гиперболы.

Допустим, например, что предложено *найти две непрерывных средних пропорциональных.*

Пусть даны две прямые, из которых B есть бо́льшая, а D меньшая, и между которыми нужно найти две средних пропорциональных. Если принять за бо́льшую из средних пропорциональных A, то

$$A c. \text{ равняется } B q. \text{ на } D.$$

Приравняем части отдельно B на A на E. Тогда

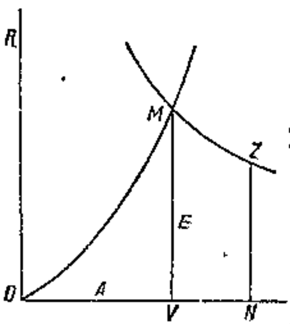
$$A q. \text{ равняется } B \text{ на } E,$$

а

$$A \text{ на } E \text{ равняется } B \text{ на } D.$$

Следовательно, вопрос будет решен посредством пересечения гиперболы и параболы.

Допустим (черт. 45), что дана по положению какая-либо прямая OVN и на ней дана точка O. Пусть даны две прямые B и D, между которыми нужно найти две средние пропорциональные. Положим, что прямая OV равна A, а прямая VM, перпендикулярная к OV, равна E.



Черт. 45.

Из предыдущего уравнения, в котором

$$A q. \text{ равняется } B \text{ на } E,$$

видно, что через точку O как вершину следует описать параболу, прямая сторона которой есть B, диаметр параллелен VM, а ординаты параллельны OV; эта парабола пройдет через точку M.

Согласно второму уравнению, в котором

$$B \text{ на } D \text{ равняется } A \text{ на } E,$$

возьмем на прямой OV какую-либо точку, например N, в которой восставим перпендикуляр NZ, и пусть прямоугольник ONZ будет равен прямоугольнику B на D. Восставим также перпендикуляр OR. Согласно нашему методу геометрических мест, следует между асимптотами RO, OV описать гиперболу, проходящую через точку Z; она будет дана по положению и пройдет через точку M.

Но описанная нами выше парабола также дана по положению и проходит через ту же точку M; следовательно, будет дана по положению точка M. Если из нее опустить перпендикуляр MV, то будет дана точка V, а также прямая OV, которая является большей из двух искомых непрерывных пропорциональных.

Следовательно, эти две средние могут быть найдены посредством пересечения параболы и гиперболы.

Если вопрос угодно распространить на квадрато-квадраты, умножим все члены на A:

$$Aqq. \text{ будет равно } Bq. \text{ на } D \text{ на } A.$$

Приравняем по вышеизложенному методу отдельно стороны $Bq.$ на $Eq.$; получатся два уравнения, именно

$$Aq. \text{ равн. } B \text{ на } E \text{ и } D \text{ на } A \text{ равн. } Eq.,$$

каждое из которых даст данную по положению параболу. Следовательно, в этом случае построение мезолабия получится посредством пересечения двух парабол.

Первое и последнее построения имеются в комментарии Эвтокия к Архимеду, они легко объясняются с помощью этого метода [147].

Поэтому *climacticae parapleroses* [148] Виеты, с помощью которых он приводит квадрато-квадратные уравнения к квадратным через посредство кубических уравнений с плоским корнем, излишни. Ведь ясно, что квадрато-квадратные вопросы решаются с таким же изяществом, легкостью и краткостью, что и кубические, и я полагаю, что они и не могут быть решены более изящно.

Чтобы выявить изящество этого метода, я приведу *построение всех кубических и квадрато-квадратных задач с помощью параболы и круга.*

Положим, что

$$Aqq. - Zs. \text{ на } A \text{ равняется } Dpp.;$$

следовательно,

$$Aqq. \text{ будет равно } Zs. \text{ на } A + Dpp.$$

Образуем квадрат из $Aq. - Bq.$ или какой-либо другой квадрат; этот квадрат будет

$$Aqq. + Bqq. - \text{ два } Bq. \text{ на } Aq.$$

Прибавим в дополнение к обеим частям уравнения

$$Bqq. \text{— два } Bq. \text{ на } Aq.;$$

получится, что

$$Aqq. + Bqq. \text{— два } Bq. \text{ на } Aq. \text{ равняется}$$
$$Bqq. \text{— два } Bq. \text{ на } Aq. + Zs. \text{ на } A + Dpp.$$

Пусть удвоенный $Bq.$ равен $Nq.$ и пусть отдельные члены или части уравнения равны $Nq.$ на $Eq.$; тогда, по извлечении квадратного корня, получится

$$Aq. — Bq. \text{ равняется } N \text{ на } E,$$

и, значит, крайняя точка E будет, согласно нашему методу на параболе. С другой стороны, получится

$$\frac{Bqq.}{Nq.} — Aq. + \frac{Zs. \text{ на } A}{Nq.} + \frac{Dpp.}{Nq.} \text{ равняется } Eq.,$$

и, значит, согласно нашему методу, крайняя точка E будет на окружности.

Таким образом вопрос решается посредством описания параболы и круга.

Этот метод весьма легко распространяется на все как кубические, так и квадрато-квадратные случаи. Следует лишь следить за тем, чтобы на одной стороне был $Aqq.$, а на другой — какие угодно члены, но только не содержащие $Ac.$; но с помощью expurgationem Виеты все квадрато-квадратные уравнения могут быть освобождены от члена, содержащего куб. Следовательно, во всех случаях метод будет тем же самым.

Что касается кубических уравнений, то по методу Виеты они могут быть освобождены от члена, содержащего квадрат; таким образом если умножить все члены на A, то получится квадрато-квадратное уравнение, ни один из членов которого не содержит куба и которое, значит, будет решаться по вышеизложенному методу.

Нужно лишь следить за тем, чтобы $Aq.$ на одной стороне второго уравнения и $Eq.$ на другой были отмечены различными знаками, что всегда весьма легко сделать.

Для того чтобы разобрать все случаи, допустим еще, что

$$Aqq. \text{ равняется } Zpl. \text{ на } Aq. — Zs. \text{ на } D.$$

Образуем какой-либо квадрат из *Aq.* — какой-либо данный квадрат, например *Bq.*; получится

$$Aqq. + Bqq. - \text{два } Bq. \text{ на } Aq.$$

Прибавим в дополнение к обеим сторонам уравнения

$$Bqq. - \text{два } Bq. \text{ на } Aq.;$$

получится

$$Aqq. + Bqq. - \text{два } Bq. \text{ на } Aq. \text{ равняется } Bqq. - \text{два } Bq. \text{ на } Aq. + \\ + Zpl. \text{ на } Aq. - Zs. \text{ на } D.$$

Для удобства при извлечении корня (divisio) следует во второй части уравнения взять разность между удвоенным *Bq.* и *Zpl.* и принять ее, например, за *Nq.* и приравнять каждую из частей уравнения *Nq.* на *Eq.* Тогда получится

$$Aq. - Bq. \text{ равняется } N \text{ на } E,$$

а с другой стороны,

$$\frac{Bqq.}{Nq.} - Aq. - \frac{Zs. \text{ на } D}{Nq.} \text{ равняется } Eq.$$

Следует заметить, что удвоенный *Bq.* должен превосходить *Z* plano, в противном случае *Aq.* не будет отмечен знаком недостатка и вместо круга мы найдем гиперболу. Но этому легко помочь, ибо, так как мы берем *Bq.* по произволу, нетрудно взять двойную его величину большей, чем *Z* plano. А наш метод геометрических мест устанавливает, что всегда, когда в одной части уравнения стоит один неизвестный квадрат со знаком +, а в другой — другой неизвестный квадрат со знаком —, то уравнение дает круг.

Если, в качестве примера к этому, ты возьмешь нахождение двух средних, то

$$Ac. \text{ равняется } Bq. \text{ на } D$$

и

$$Aqq. \text{ равняется } Bq. \text{ на } D \text{ на } A.$$

Если прибавить к обеим частям *Bqq.* — два *Bq.* на *Aq.*, то получится, что

$$Aqq. + Bqq. - \text{два } Bq. \text{ на } Aq. \text{ будет равно } Bqq. + \\ + Bq. \text{ на } D \text{ на } A - \text{два } Bq. \text{ на } Aq.$$

Пусть удвоенный $Bq.$ равняется $Nq.$, а отдельные части уравнения равны $Nq.$ на $Eq.$; тогда

$$Aq. - Bq. \text{ равняется } N \text{ на } E$$

и конец E будет на параболе; с другой стороны,

$$Bq. \frac{1}{2} + D\frac{1}{2} \text{ на } A - Aq. \text{ будет равно } Eq.$$

и конец E будет на окружности.

Тот, кто примет все это во внимание, не станет пытаться выводить вопросы о мезолабии, о трисекции угла и им подобные из плоских задач, т. е. решать их с помощью прямых и кругов [149].

III.

ПЬЕР ДЕ-ФЕРМА.

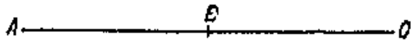
МЕТОД ОТЫСКАНИЯ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ [150].

Все учение о нахождении наибольших и наименьших значений основывается на том, что принимают две буквенные неизвестные (positio in notis) и применяют следующее единственное правило:

Допустим, что A представляет собой какую-либо неизвестную в вопросе величину (поверхность либо тело, или же длину в соответствии с предложенным), и выразим максимум или минимум через члены, содержащие A в каких-либо степенях. Затем возьмем для первоначальной неизвестной значение $A+E$ и снова выразим максимум или минимум через члены, содержащие A и E в каких-либо степенях. Затем оба выражения для наибольшего или наименьшего значения приравняем [151], как говорит Диофант, друг другу и отбросим общие члены (после чего в каждом члене на обеих сторонах будет стоять либо E, либо какая-нибудь его степень). Затем разделим все члены на E или же на высшую степень ее так, чтобы (по крайней мере) один из членов на какой-либо стороне был совершенно свободен от E. Затем на обеих сторонах отбросим члены, содержащие E или ее степени, а то, что останется, положим равным друг другу или же, если на одной из сторон ничего не останется, то — что сводится к тому же — положим отрицательные члены равными положительным. Решение последнего уравнения даст значение A; когда же последнее известно, то максимум или минимум получится на основании ранее проделанного решения (ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innolescet).

Приведем следующий пример: *прямую AC требуется так разделить в E, чтобы прямоугольник AEC был наибольшим.*

Прямую AC (черт. 46.) назовем B. Одну часть B назовем A, так что другая будет $B - A$, а прямоугольник на отрезках, для которого требуется найти наибольшее значение, будет B на $A - Aq$. Положим теперь, с другой стороны, одну часть B равной $A + E$, так что другая будет $B - A - E$, и прямоугольник на отрезках будет



Черт. 46.

$$B \text{ на } A - Aq. + B \text{ на } E - \text{два } A \text{ на } E - Eq.,$$

что должно быть приравнено первому прямоугольнику

$$B \text{ на } A - Aq.$$

Отбросив одинаковые члены, получим, что

$$B \text{ на } E \text{ равняется два } A \text{ на } E + Eq.,$$

а если все поделить на E, то получится, что

$$B \text{ равняется два } A + E.$$

Если отбросить E, то

$$B \text{ будет равно два } A.$$

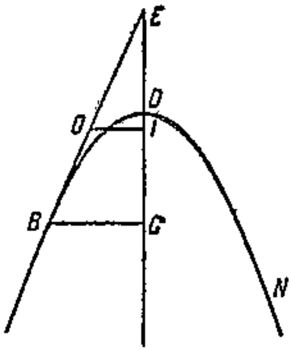
Таким образом решением вопроса является деление B пополам. И более общий метод привести невозможно [152].

О касательных к кривым линиям.

Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу.

Допустим, например, что дана парабола BDN с вершиной D, диаметром DC и на ней дана точка B, через которую требуется провести прямую BE, касающуюся параболы и встречающую диаметр в точке E.

Если на прямой BE (черт. 47) взять какую-либо точку O и от нее провести ординату (ordinatam) OI, а также провести ординату BC от точки B, то отношение CD к DI будет больше, чем отношение квадрата BC к квадрату OI, ибо точка O находится вне параболы. Но, вследствие подобия треугольников, квадрат BC относится к квадрату OI, как квадрат CE к квадрату IE, и, следовательно, отношение CD к DI больше, чем отношение квадрата CE к квадрату IE.



Черт. 47.

Так как точка B дана, то дана и ордината BC, а значит, и точка C и, следовательно, также CD. Положим поэтому CD равным данной D. Положим также, что CE есть A, а CI есть E.

Следовательно,

D находится к $D - E$ в отношении большем, чем $Aq.$ к $Aq. + Eq.$ — два A на E.

И если перемножить между собой средние и крайние, то

D на $Aq. + D$ на $Eq.$ — два A на E будет больше, чем D на $Aq.$ — $Aq.$ на E.

Приравняем теперь, согласно вышеизложенному методу. Отбрасывая одинаковые члены, мы получим

D на $Eq.$ — два D на A на E равно — $Aq.$ на E,

или, что то же,

D на $Eq. + Aq.$ на E равно два D на A на E.

Разделим все на E; тогда

D на $E + Aq.$ равно два D на A.

Отбросим D на E; тогда

$Aq.$ будет равно два D на A

и, значит,

A будет равно два *D*.

Следовательно, мы доказали, что *CE* вдвое больше *CD*, как оно и есть на самом деле [153].

Этот метод никогда не изменяет. Напротив, он может быть распространен на многочисленные прекрасные вопросы. Действительно, с его помощью мы определили центры тяжести фигур, ограниченных кривыми линиями и прямыми, и центры тяжести тел и многое другое, о чем я, может быть, расскажу, если у меня будет досуг.

Что касается квадратуры площадей, заключенных кривыми и прямыми линиями, а также отношения порождаемых ими тел к конусам с теми же высотой и основанием, то это я уже подробно обсуждал с господином де-Робервалем [154].

IV.

ИЗ ПЕРЕПИСКИ ДЕКАРТА.

1. О КАСАТЕЛЬНЫХ К КРИВЫМ ЛИНИЯМ.

Декарт — Мерсенну. (*январь* 1638 *г.*) [155].

Преподобный отец,

Я был бы рад не говорить ничего о посланном Вами мне сочинении, ибо не смог бы сказать ничего, что было бы в пользу его составителя. Но так как я узнал, что это тот самый человек, который перед тем пытался опровергнуть мою *Диоптрику*, и так как Вы сообщили мне, что он послал это после того, как прочел мою *Геометрию* и в удивлении, что я не нашел ту же вещь, т. е. (как я имею основание его истолковать) послал это с целью вступить в соперничество и показать, что он в этом знает больше, чем я, и так как еще из ваших писем я узнал, что за ним числится репутация весьма сведующего геометра, то я считаю себя обязанным ему ответить.

Прежде всего я нахожу ошибку в его правиле и еще более — в приводимом им примере с нахождением касательных к параболе. Я это нахожу следующим образом.

Пусть *BDN* (черт. 47, стр. 156) представляет собой данную параболу с диаметром *DC* и пусть требуется провести из данной точки B прямую линию BE, встречающую DC в точке E и наибольшую из тех, которые можно провести от той же точки E к параболе; *таким образом требуется найти максимум.*

Правило его гласит: *допустим, что A представляет собой какую-либо неизвестную в вопросе величину*; поэтому я принимаю EC за A, так же как делает он. *Выразим максимум* (именно BE) *через члены, содержащие A в каких-либо степенях*, что лучше всего можно сделать следующим образом: пусть BC есть B, квадрат BE будет $Aq. + Bq.$, ибо угол BCE — прямой. *Затем возьмем для первоначальной неизвестной значение $A + E$*; именно я делаю EC равным $A + E$ (или же, следуя его примеру, $A - E$, ибо одно сводится к другому). *И снова выразим максимум* (именно BE) *через члены, содержащие A и E в каких-либо степенях*, что лучше всего сделать следующим образом: положим, что раньше, когда BC была B, CD была D; тогда прямая сторона параболы будет $\frac{Bq.}{D}$, ибо она относится к ординате BC, как BC к отрезку диаметра CD, к которому она прилагается. Поэтому теперь, когда CE есть $A + E$, DC есть $D + E$, а квадрат BC есть $\frac{Bq. \text{ на } D + Bq. \text{ на } E}{D}$, и если это прибавить к квадрату CE, который есть $Aq. +$ два A на $E + Eq.$, то это даст квадрат BE.

Оба выражения для максимума приравняем друг другу, т. е. положим $Aq. + Bq.$ равным

$$Bq. + \frac{Bq. \text{ на } E}{D} + Aq. + \text{два } A \text{ на } E + Eq.$$

Отбросим общие члены; останется

$$\frac{Bq. \text{ на } E}{D} + \text{два } A \text{ на } E + Eq. \text{ равно ничему.}$$

Разделим на E и т. д.; получится

$$\frac{Bq.}{D} + \text{два } A + E;$$

отбросим E; останется

$$\frac{Bq.}{D} + \text{два } A \text{ равно ничему.}$$

А это вовсе не дает значения линии A, как уверяет автор, и, следовательно, его правило ложно [156].

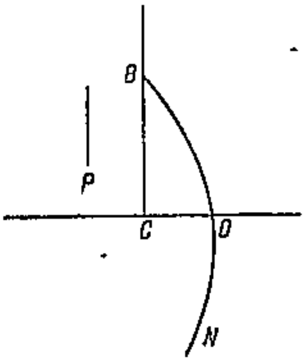
Но он заблуждается еще более в примере с той же параболой, касательную к которой пытается найти. В самом деле, он не только совершенно не следует своему правилу, как это достаточно ясно из того, что его вычисление вовсе не соответствует тому, которое я только что провел, но и пользуется таким рассуждением, что если в нем только вместо parabole и parabolen повсюду поставить hyperbole и hyperbolen или название какой угодно другой кривой, не меняя во всем прочем ни слова, то все будет затем следовать точно так же, как у него в случае параболы, вплоть до слов: *следовательно, мы доказали, что CE вдвое больше CD, как оно и есть на самом деле. Этот метод никогда не изменяет*, вместо которых можно поставить: *отсюда не следует, что CE вдвое больше CD, что на самом деле имеет место только для параболы, в случае которой это верно, но не в силу предшествующего; и метод этот изменяет всегда* [157].

Если этот автор удивился тому, что я не поместил таких правил в моей *Геометрии*, то я имею больше оснований удивляться тому, что он решил вступить в состязание столь плохо вооруженным. Впрочем, я согласен дать ему еще время взобраться на лошадь и взять для этого поединка самое лучшее оружие, какое он может выбрать; именно если изменить несколько слов в правиле, предложенном им для нахождения максимума и минимума, то его можно сделать верным и довольно хорошим.

Я, однако, не мог бы этого сказать здесь, если бы не знал его [правила] до того, как получил его сочинение: ибо в том виде, как оно приведено, оно скорее помешало бы, чем помогло бы, мне его найти. Но даже если бы оно мне было неизвестно, а он его знал превосходно, я не думаю, чтобы это давало ему какое-либо основание сравнивать его правило с тем, которое имеется на тот же предмет в моей *Геометрии*.

Ибо, во-первых, его правило (т. е. то, которое он желал найти) таково, что можно легко без мастерства и случайно напасть на путь, который к нему ведет и который представляет собой только ложное положение, основанное на способе доказательства посредством приведения к невозможному, а оно является наименее почитаемым и наименее искусным из всех, которыми пользуются в математике. Между тем мое правило извлечено из познания природы уравнений, которая, насколько я знаю, нигде, кроме третьей книги моей *Геометрии*, не была объяснена достаточно хорошо. Таким образом оно не могло быть изобретено лицом, незнакомым с основаниями алгебры, и следует оно самому благородному из всех возможных способов доказательства, именно тому, который называют a priori.

Кроме того, его мнимое правило вовсе не универсально, как это ему кажется, и оно не может быть распространено ни на один сколько-либо сложный вопрос, будучи пригодным лишь для самых легких. Он сможет это проверить, если, продумав его лучше, попробует воспользоваться им для нахождения касательных, например, к кривой BDN (черт. 48.), которую я предполагаю такой, что если в любом месте ее контура взять точку B и опустить перпендикуляр BC, то кубы двух линий BC и CD вместе равны параллелепипеду на тех же двух линиях BC, CD и на данной линии P [158].



Черт. 48.

(Именно если P есть 9 и CD есть 2, то BC будет 4, ибо кубы 2 и 4, т. е. 8 и 64, дают 72, и параллелепипед, составленный из 9, 2 и 4, также есть 72.)

Ибо оно не может быть применено ни в этом примере, ни в других, более трудных, тогда как мое распространяется общим образом на все примеры, которые можно подвергнуть геометрическому исследованию; и не только в том, что относится к касательным к кривым, — его также очень легко применить во всякого рода задачах к отысканию максимумов и минимумов.

Таким образом, если бы, прочитав его, он его понял как следует, то не сказал бы, что этот предмет я в моей *Геометрии* пропустил. Впрочем, верно, что я не ввел эти термины максимумов и минимумов. Причина этого в том, что они известны лишь потому, что Аполлоний занимается ими в своей пятой книге и что я не намеревался ни останавливаться на объяснении каких-либо вещей, уже бывших известными другим, ни заниматься восстановлением утерянных книг Аполлония, как это делали Виета, Снеллий, Марино Гетальди и т. д. [159], но желал выйти за пределы этого во всех направлениях, что я достаточно показал, начав с вопроса, который, по свидетельству Паппа, не мог быть решен ни одним из древних, и составив и определив с помощью того же средства все телесные места, — что Аполлоний еще искал, — и сведя по порядку все кривые линии, большинство из которых даже не представляли себе, и указав примеры способа, с помощью которого можно найти все их свойства, и, наконец, построив не только телесные задачи, но также все те, которые доходят до сверхтела или до квадрата куба, и показав, с помощью того же средства, как их строить бесчисленным множеством различных способов. На основании этого можно также научиться видоизменять (deguiser) на тысячу ладов правило, данное мной для нахождения касательных, — как если бы то было столько же различных правил. Но я позволю себе сказать, что правило, столь же хорошее и общее, как мое, из другого основания извлечь невозможно.

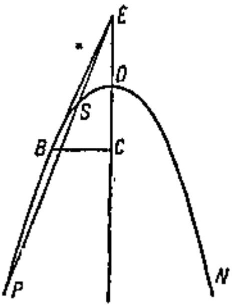
Наконец, хотя я и писал [160], что эта задача отыскания касательных была прекраснейшей и полезнейшей среди мне известных, но следует заметить, что я не сказал тем самым, что она — труднейшая. Очевидно, что задачи, помещенные мною далее и относящиеся к форме зажигательных стекол, которые уже предполагают эту задачу, — труднее. Таким образом те, которые хотят показать, что знают в геометрии столько же, сколько писал о ней я, не должны ограничиться исследованием этой задачи с помощью средств, отличных от моих, но скорее должны были бы поупражняться в составлении всех сверхтелесных мест, подобно тому, как я составил телесные, и в объяснении формы зажигательных стекол, когда одна из их поверхностей представляет собою часть сферы или данного коноида, подобно тому, как я объяснил способ изготовления стекол, у которых одна из поверхностей сколь угодно вогнута или выпукла, и, наконец, в построении всех задач, восходящих до квадрата квадрата квадрата или до куба куба, подобно тому, как я построил все, восходящие до квадрата куба.

И я утверждаю, что и после того как они все это найдут, они должны будут быть благодарны мне, по крайней мере если они воспользуются для этой цели моей *Геомет-*

рией, ибо в ней заключен путь, которым следует итти, чтобы притти к этому. И даже если они ею не воспользуются, они не должны будут на этом основании претендовать на какое-либо преимущество передо мной, ибо среди этих вещей нет ни одной, которую я не мог бы найти, — поскольку ее вообще можно найти, если бы пожелал взяться за труд произвести соответствующее вычисление. Но я полагаю, что с большей пользой могу употребить свое время на другие вещи. Остаюсь и т. д.

Возражения Декарта Робервалю и Э. Паскалю (март 1638 г.) [161].

Меня удивляет, что трактат de maximis et minimis, который был мне недавно прислан и который, как я теперь узнал, был составлен г. де-Ферма, нашел защитников, и я не нахожу, что они хоть сколько-либо его оправдывают. Ибо, прежде всего, они заставляют меня говорить вещь, о которой я никогда не думал, с тем, чтобы затем ее опровергнуть, — именно они полагают, что я говорю *о проведении прямой из данной точки B на параболе BDN, именно о прямой BE, встречающей диаметр CD в точке E, причем эта линия BE является наибольшей из всех, которые можно провести из той же взятой на параболе точки B и которые пересекают тот же диаметр CD.*



Черт. 49.

Таковы их слова, и я признаю вместе с ними, что это нелепо; но ведь я сказал совсем иное, именно, что *следует найти прямую BE, встречающую DC в точке E и наибольшую, какую можно провести от той же точки E до параболы.* Но ведь очевидно, что из этой точки *E* можно провести к параболе линию, которая является наибольшей из всех, какие можно провести от той же точки к той же параболе, — именно линию, проведенную к точке *B*, если предположить, что в этой точке *B* она касается параболы. В самом деле, сказать, например (черт. 49), что *EP* больше, чем *EB*, значит, не сказать ничего, ибо эта линия *PE* проведена не только до параболы, но за параболу, и она простирается по ту сторону от S до P, так что до параболы проведена лишь ее часть ES, а ES меньше, чем EB. Лица, готовые внимать доводам рассудка, отрицать этого не смогут и, значит, против этого они ничего не возразили.

Следовательно, я очевидным образом обнаружил, что правило г. де-Ферма для нахождения maximam et minimam несовершенно, и я мог бы это показать еще на бесчисленном множестве других примеров, но дело того не стоит. Я скажу лишь, что если это правило исправить должным образом, то истинный способ применения его для нахождения касательных к кривым заключается в определении таким образом точки E, из которой можно провести к B линию, наибольшую или наименьшую из тех, какие можно провести от той же точки E до данной кривой. Г. де-Ферма, как он сам обнаружил, этого не знал, ибо в поисках касательной к параболе он пользуется другим способом, а именно способом, содержащим (чтобы называть вещи их именами, вовсе не намереваясь при этом его оскорбить) в себе паралогизм, который никоим образом не может быть оправдан. Впрочем я вполне готов признать, что для применения его рассуждения к гиперболе нужно не только вместо Parabolen поставить Hyperbolen, но, кроме того, изменить пару слов, которые совсем несущественны и на которые, как я не стыжусь в том признаться, я не обратил внимания. Ибо я сразу же столь ясно заметил в этом сочинении паралогизм, что не счел нужным затем его смотреть, и я думал, что самому автору будет совсем нетрудно его увидеть, как только он будет о нем предупрежден. Слова эти таковы: вместо того, чтобы говорить *отношение CD к DI будет больше, чем отношение квадрата BC к квадрату OI*, следует, говоря о гиперболе, лишь сказать: *отношение CD к DI будет больше, чем отношение BC к OI, или же отношение квадрата CD к квадрату DI будет больше, чем отношение квадрата BC к квадрату OI*. Все остальное следует отсюда точно так же, как если сравнивают линии CD и DI с квадратами BC и OI. И это распространяется общим образом на все существующие на свете кривые. Однако для того, чтобы на этом нельзя было строить каких-либо оправданий, пусть вместо Parabolen поставят не Hyperbolen, но Ellipsim или Circuli circumferentiam и тогда во всем прочем не нужно будет изменить ни слова, как это будет здесь ясно видно ... [162].

Роберваль против Декарта (*апрель* 1638 *г.*) [163].

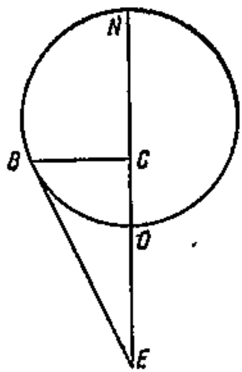
... Перехожу к делу. Господин Декарт делает два возражения и оба нелепы. Первое таково: он принимает, что линия EB (черт. 47, стр 156), касающаяся параболы в точке B, является наибольшей, какую можно провести от данной на диаметре точки E до параболы. Мы вполне согласны с тем, что дается как раз точка E на диаметре, тогда как он в своем первом письме сказал, что данной точкой является B на параболе, — что он исправил в своем втором письме. Но мы здесь видим, что он плохо обдумал наш ответ, в котором мы показали в двух словах, что равно нелепо пытаться сделать и то и другое, — как провести наибольшую линию от точки B до диаметра, так провести ее от точки E до параболы, — ибо и в том и в другом случае эта наибольшая линия бесконечна и, значит, невозможна. Превосходство метода явствует отсюда тем больше, ибо в нелепых вопросах он приводит к открытию нелепостей, чего только и можно ожидать в подобном случае от хорошего метода. Господин Декарт признает в своем письме нелепым, что BE является наиболее длинной линией, которую можно провести от точки B до диаметра, и ему следовало бы признать точно так же, что EB не является наиболее длинной линией, которую можно провести от данной точки E на диаметре до параболы, ибо он сам проводит там EP (черт. 49, стр. 162), более длинную, чем EB, причем точка E находится на диаметре, а точка P на параболе, так что EP проведена от данной на диаметре точки E до параболы, на которой она заканчивается в точке P. Что же касается его слов, что эта линия PE проведена не только до параболы, но за параболу, то это столь же нелепо, как сказать, что за параболой находится точка P, которая, однако, лежит на ней так же, как и бесчисленное множество других точек, которые все более и до бесконечности удаляются, и к которым из данной точки E можно проводить прямые, которые будут все время возрастать, так что определить наибольшую невозможно.

Столь же нелепым образом можно было бы утверждать, что наибольшей линией, какую можно провести от данной вне круга в его плоскости точки до окружности, является касательная, и тем самым опровергнуть Эвклида, который доказал, что наибольшей такой линией является та, которая проведена от той же точки через центр до вогнутости окружности. Об этой наибольшей можно было бы, в согласии с господином Декартом, сказать, что она проведена не только до окружности круга, но за окружность, хотя она и заканчивается в точке этой окружности. Говорить же, что под наибольшей линией он понимает ту, которая встречает параболу только в одной точке, значит, противоречить самому себе, ибо это не наибольшая линия; во всяком случае называть словом *наибольшая* касательную, которую господин де-Ферма нашел с помощью вполне пригодного для этого рассуждения, как это видно из его сочинения, значит, им злоупотреблять ... [164].

Из письма Декарта Мерсенну (3 *мая* 1638 *г.*) [165].

Преподобный отец,

Я уже несколько дней назад получил Ваше последнее письмо от 26 марта, где Вы сообщали мне возражения тех, кто поддерживает сочинение г. Ферма *de maximis etc.* Но они столь бесцветны, что я не думал, чтобы стоило мне на них отвечать. Однако так как с тех пор я не имею от Вас больше известий и опасаюсь, что Вы не пишете мне в ожидании моего ответа, то я предпочитаю здесь изложить сразу все, что я об этом думаю, с тем, чтобы мне никогда более не нужно было об этом говорить. Прежде всего, когда они говорят, что для параболы вовсе нет maxima и что г. Ф. находит касательные с помощью правила, совершенно отличного от того, которое он употребляет для отыскания maxima, они ему вредят, ибо хотят заставить думать, что он не знал, что правило, учащее нахождению наибольших значений, служит также для нахождения касательных к кривым, — что было бы грубейшим невежеством, ибо именно для этого, главным образом, оно должно служить; и они противоречат его сочинению, где, изложив свой метод нахождения наибольших значений, он определенно говорит: *отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу.* Правда, он не следовал ему в приведенном им примере с параболой, но причина этого очевидна. В самом деле, поскольку метод в этом и аналогичных случаях негоден (по крайней мере в том виде, как он его предложил), автор, желая следовать ему, не смог бы получить нужного результата и это заставило его пойти другим путем. И придя сначала по нему к заключению, которое, как ему было уже известно, верно, он решил, что действовал правильно, и не обратил внимания на недостатки своего рассуждения. Кроме того, когда они говорят, что линия EP, проведенная внутри параболы, абсолютно говоря, больше линии EB, то это им не на пользу, ибо вовсе и не требуется, чтобы она была наибольшей, говоря абсолютно, но только чтобы она была наибольшей при некоторых условиях, как они это сами определили в начале присланного ими мне письма, где они говорят, что это открытие г. Фер. относится к наибольшим и наименьшим линиям или же *наибольшим и наименьшим пространствам, которые можно провести или образовать при некоторых предложенных условиях.* И они не смогут отрицать, что линия EB является наибольшей, какую можно провести от точки E до параболы, при поставленных мною условиях, именно так, чтобы она только доходила до нее, ее не пересекая; и они бы должны были это понять сразу. Но чтобы лучше показать непригодность их объяснения, я приведу другой пример, где не буду говорить ни о касательной, ни о параболе и где все же правило г. Фер. потерпит неудачу, так же как в предыдущем...



Черт. 50.

Пусть дан круг DBN (черт. 50), вне него также дана точка E, и требуется провести от этой точки E к этому кругу такую прямую, чтобы часть этой линии, находящаяся вне круга и лежащая между его окружностью и данной точкой E, была наибольшей. Вот как учит здесь действовать правило, данное г. Фер. Проведя линию EDN через центр круга, назвав ее часть ED через B, а ее часть DN, являющуюся диаметром круга, через C, *допустим, что A представляет собой какую-либо неизвестную в вопросе величину*; это нельзя сделать лучше, чем проведя BC перпендикулярно к DN и приняв A за CD. *И выразим максимум* *и т. д.* Чтобы выразить этот максимум, именно BE, заметим, что так как DC есть A и DN есть C, то квадрат BC есть A на $C-A$ квад. И так как CD есть A и DE есть B, то квадрат CE есть

$$Aq.+Bq.+\text{два } A \text{ на } B,$$

что вместе с квадратом BC даст квадрат наибольшей BE, который будет

$$A \text{ на } C+Bq.+\text{два } A \text{ на } B.$$

Затем возьмем для первоначальной неизвестной значение $A+E$ и снова выразим максимум. В силу предыдущего это можно сделать, лишь положив $A+E$ вместо DC, и тогда квадрат BC будет

$$C \text{ на } A+C \text{ на } E-Aq.-\text{два } A \text{ на } E-Eq.$$

Далее, квадрат CE есть

$$Aq.+\text{два } A \text{ на } E+Eq.+Bq.+\text{два } A \text{ на } B+\text{два } E \text{ на } B,$$

что вместе с другим дает для квадрата наибольшей BE

$$A \text{ на } C+E \text{ на } C+Bq.+\text{два } A \text{ на } B+\text{два } E \text{ на } B.$$

Приравняем: т. е., другими словами, нужно положить

$$A \text{ на } C+Bq.+\text{два } A \text{ на } B$$

равным

$$A \text{ на } C+E \text{ на } C+Bq.+\text{два } A \text{ на } B+\text{два } E \text{ на } B.$$

И отбросив равные члены, в остатке получим

$$E \text{ на } C+\text{два } E \text{ на } B \text{ равно ничему.}$$

Это, очевидно, обнаруживает ошибочность правила [166].

И наконец, чтобы никто не мог быть впредь столь слеп, чтобы этого не видеть, я скажу здесь, как можно его исправить. ...Прежде всего к словам *и выразим максимум* хорошо добавить: *или что-либо другое, с помощью чего затем можно выразить максимум.* В самом деле, отыскивая таким образом наибольшее значение, часто связываешься с множеством излишних вычислений. Впрочем, не это существенный пункт. Главное же, и то, что является основанием всего правила, опущено в том месте, где стоят слова: *приравняем оба выражения, равные наибольшему или наименьшему*, которые означают лишь то, что выражение, *дающее максимум через члены, содержащие A в каких-*

либо степенях, должно быть предположено равным выражению, дающему его *через члены, содержащие A и E в каких-либо степенях.* И я Вас прошу спросить у тех, кто его поддерживает, так ли они его понимают, прежде чем сообщить им, что следует там добавить. Именно вместо того чтобы сказать просто: *приравняем,* следовало сказать: *приравняем так, чтобы величина, находимая из этого уравнения, была в случае максимума или минимума единственной, но такой единственной, которая возникает из тех двух, которые можно найти из того же уравнения и не равны в случае, меньшем наибольшего или большем наименьшего* [167].

Так, в приведенном только что примере недостаточно выразить двумя способами квадрат наибольшей, но, кроме того, следует сказать: как этот квадрат, когда он есть

$$A \text{ на } C + Bq. + \text{два } A \text{ на } B,$$

относится к тому же квадрату, когда он есть

$$A \text{ на } C + E \text{ на } C + Bq. + \text{два } A \text{ на } B + \text{два } E \text{ на } B,$$

так

$$C \text{ на } A - Aq.,$$

т. е. квадрат BC, относится к тому же квадрату

$$C \text{ на } A + C \text{ на } E - Aq. - \text{два } A \text{ на } E - Eq.$$

Затем, умножив первый из этих квадратов на четвертый, его нужно предположить равным второму, умноженному на третий; затем, приводя это уравнение по правилу, мы находим результат, именно, что CD есть $\frac{C \text{ на } B}{2B + C}$, как и должно быть [168].

И вот как надо действовать в примере с параболой, который выбрал г. Ф. и которому я следовал в первом письме. Пусть BDN (черт. 47, стр. 155) есть данная парабола с диаметром DC и пусть требуется из данной точки B провести прямую BE, встречающую DC в точке E, и наибольшую, какую можно провести от той же точки E до параболы (именно вне этой параболы, и тот, кто не глух по собственной воле, поймет, почему я называю ее наибольшей). Я беру B за BC, D за DC, откуда следует, что прямая сторона есть $\frac{Bq.}{D}$, и, не останавливаясь на поисках наибольшей, я лишь выражаю квадрат BC в членах, отличных от известных, выбирая A за линию CE, а затем беря для нее же $A+E$. Именно я сперва выражаю ее с помощью треугольника BCE; ибо как A относится к B, так $A+E$ относится к $\frac{A \text{ на } B + E \text{ на } B}{A}$, что, следовательно, и представляет собой BC. А квадрат его есть

$$\frac{Aq. \text{ на } Bq. + \text{два } A \text{ на } E \text{ на } Bq. + Eq. \text{ на } Bq.}{Aq.}.$$

Затем я выражаю его с помощью параболы, ибо когда EC есть $A+E$, DC есть $D+E$ и квадрат BC есть

$$\frac{Bq. \text{ на } D + Bq. \text{ на } E}{D},$$

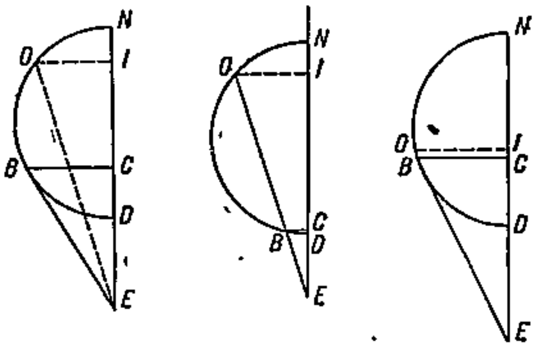
что должно быть равно предыдущему, именно

$$\frac{\text{два } A \text{ на } E \text{ на } Bq. + Eq. \text{ на } Bq.}{Aq.} \text{ равно } \frac{Bq. \text{ на } E}{D}.$$

Отсюда, согласно правилу, мы находим, что A, т. е. CE, вдвое больше D, т. е. CD, как и должно быть. Следует заметить, что это условие, бывшее опущенным, — то же самое, которое я объяснил на стр. 346 (54), как основание метода, которым я пользовался для нахождения касательных, и что оно является также единственным основанием, на которое должно опираться правило г. Ф. ... [109].

Записка, приложенная к предыдущему письму.

Чтобы вполне понять третью страницу моего письма, а вместе с тем недостаток правила господина де-Ферма, следует рассмотреть эти три фигуры (черт. 51) и иметь в виду, что когда он говорит: *допустим, что $A+E$ является значением первоначальной неизвестной*, то это значит, что, приняв EC за A и EI за $A+E$, он представляет себе EI равным EC, как это видно на третьей фигуре, и тем не менее производит вычисления, как если бы они были неравными, как это видно на первой и второй фигурах, выражая сперва EB через EC, которую он называет A, а затем EO через EI, которую он называет $A+E$; и это получается вполне хорошо; но ошибка заключается в том, что, после того как он их вычислил таким образом, он говорит просто: *приравняем*. И ее можно ясно заметить на первой фигуре; если там принять линию *EO* равной *EB*, то нет ничего, что заставляло бы две точки *B* и *O* соединяться в каком-либо одном месте окружности круга предпочтительно перед другим, если только вся эта окружность не является лишь точкой, в каковом случае все величины, остающиеся в уравнении, оказались бы равными ничему. Для того же, чтобы эти две точки *B* и *O* могли соединяться лишь в одном месте, именно в том, в котором *EB* является наибольшей,



Черт. 51.

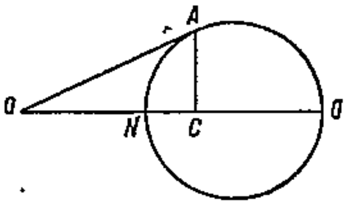
какой она может быть при предложенном условии, следует рассмотреть вторую фигуру; и в силу подобия двух треугольников *ECB* и *EIO* следует сказать: *EC* или *BC* относится к *EB*, как *EI* или *OI* к *EO*. Благодаря этому, по мере того как будет приниматься все большей величина *EB*, величина *EO* будет приниматься все меньшей, ибо точки *E*, *B*, *O* всегда находятся на одной прямой; и таким образом, когда *EB* принимается равной *EO*, она принимается наибольшей, какой она может быть; поэтому и получается правильный результат. Таково опущенное основание правила... [170].

Ферма — Мерсенну (*июнь* 1638 *г.*) [171].

Преподобный отец,

Я уже кое-что написал, чтобы более понятно объясниться перед г. Декартом в вопросе о моем методе *de maximis et minimis et de inventione tangentium*, когда мне передали ваше последнее письмо, содержащее копию ответа г. Декарта. Я все же пошлю ему то, что уже написал, и он несомненно найдет там вещи, которые помогут ему отказаться от присущего ему, повидимому, мнения, будто я нашел этот метод случайно и его подлинные основания мне неизвестны.

Он уже согласен, что метод этот годится для касательных, если пользоваться специфическим свойством кривых, что, как он говорит, нельзя было подразумевать в моем латинском сочинении; на самом деле, у меня не было бы ни здравого смысла, ни естественной логики, если бы я думал из общего свойства извлечь частные. Таким образом в том виде, в каком я применяю его к касательным, метод хорош.



Черт. 52.

Указывать, что следует производить два действия, одно с $A+E$, другое с $A-E$, несущественно, ибо для построения достаточно одного, хотя доказательство, которого я еще не дал, имеет своим главным основанием то, что $A+E$ дает то же, что $A-E$ [172].

Остается сказать несколько слов о методе нахождения *maximae et minimae*, который он находит ошибочным, причем ссылается на следующий пример:

Из точки D (черт. 52) следует провести DA к кругу, так, чтобы она была наибольшей, какую можно провести из точки D к названному кругу, не пересекая его (это, действительно, то же, что найти касательную AD).

Если взять CN за A и DA за наибольшую, согласно методу, то мы получим невозможное уравнение, откуда он заключает, что метод недостаточен.

Я отвечаю, что и не думаю принимать за наибольшую DA (хотя ограничение г. Декарта, как ему кажется, позволяет дать это название), поскольку метод, действующий лишь в соответствии со специфическим свойством круга, находит всякий раз все большие линии, которые можно провести к названному кругу, вплоть до точки B. Однако метод удовлетворяет и в этом вопросе, который очень легко можно к нему привести, как это увидел г. Декарт, именно следующим образом:

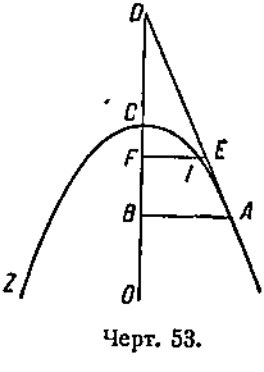
Так как DA касается круга, то DA находится к перпендикуляру AC в отношении, меньшем, чем отношение какой-либо другой линии, проведенной от точки D к кругу, по ту или другую сторону от точки A, к перпендикуляру, опущенному из точки встречи ее с кругом на диаметр; это видно сразу.

Найдем же с помощью метода на круге точку, скажем A, так, чтобы DA *находилась к* AC *в наименьшем отношении; будет дана точка* A *и, значит, касательная.*

Таково основание действий г. Декарта, на которое он не указал и которое вполне подтверждает правило. Отнюдь не усматривая в нем недостатков, я думаю, что он найдет его более легким, чем свое...

Метод de maximis et minimis, разъясненный и посланный г. Ферма г. Декарту [178].

Общий метод нахождения касательных к кривым заслуживает того, чтобы объяснить его более ясно, чем это было сделано до сих пор.



Черт. 53.

Пусть дана кривая ZCA (черт. 53) с диаметром CB. Пусть на кривой дана также точка A, из которой к диаметру проведена ордината AB. Требуется найти касательную AD, которая встречается с продолженным диаметром в точке D.

Линии AB и BC даны; допустим, что BA называется B и что BC называется D. Допустим, что искомая линия BD называется A. Возьмем на касательной произвольную точку, вроде E, из которой проведем EF параллельно AB, и допустим, что линия BF есть E.

Следовательно, CF будет $D-E$, FE будет

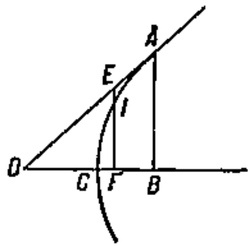
$$\frac{B \text{ на } A - B \text{ на } E}{A},$$

и, какова бы ни была природа кривой, мы всегда будем давать линиям CF и FE те же названия, которые им дали сейчас, Теперь ясно, что точка E линии EF, находящаяся на касательной, будет вне кривой и, следовательно, линия EF будет больше или меньше ординаты, прилагающейся к кривой в точке F: больше, когда кривая выпуклая наружу, как в этом примере, и меньше, когда кривая выпуклая внутрь; ибо правило годится для всякого рода линий, и даже определяет, в соответствии со свойством кривой, в какую сторону она обращена выпуклостью. Хотя линия FE не равна ординате, проведенной к кривой из точки F, я тем не менее принимаю ее как бы равной на самом деле ординате и затем сравниваю ее путем *приравнения* с линией FI, в соответствии со специфическим свойством кривой. Так, например, в параболе я беру

квадрат BA к квадрату FE
в отношении BC и CF,

или же, чтобы избежать дробей и различия линий,

квадрат BD к квадрату DF
в отношении BC к CF,



Черт. 54.

ибо это всегда одно и то же, в силу подобия треугольников DBA и DFE.

Или же, я мог бы еще сравнить квадрат FE с прямоугольником, заключенным между прямой стороной и линией CF, как если бы этот квадрат был равен этому прямоугольнику, хотя на самом деле он не таков, ибо лишь ординаты кривой обладают свойством, которое мы придаем путем *приравнивания* линии FE.

Сделав это, я удаляю общие вещи и делю остаток на E. Я отбрасываю все, что остается в сочетании с E, и приравниваю остальное и, таким образом, из этого последнего уравнения я узнаю значение A, а следовательно, линию BD и касательную.

Чтобы показать общность метода, а также, что он с равной легкостью употребляется во всякого рода вопросах, мы можем применить его — чтобы взять второй пример — к кривой, предложенной г. Декартом.

Пусть дана кривая CA (черт. 54), *обладающая тем свойством, что какую бы точку A ни взять на этой кривой, то, по проведении перпендикуляра AB, два куба*

CB и BA будут равны параллелепипеду, заключенному между данной прямой, скажем N, и двумя линиями CB и BA.

Допустим, что дело уже сделано, произведено построение, подобное предыдущему, и приняты названия линий BD, BC, BA, CF, FE. Нужно будет сравнить посредством *приравнения* два куба CF, FE с телом, заключенным между N, FC, FE.

Два куба CF, FE в буквенном обозначении суть

$$D\,cub. - E\,cub. - Dq. \text{ на } E\cdot 3 + \frac{B\,cub. \text{ на } A\,cub.}{A\,cub} +$$

$$+\frac{-B\,cub. \text{ на } E\,cub. - B\,cub. \text{ на } Aq. \text{ на } E\cdot 3 + B\,cub. \text{ на } A \text{ на } Eq\cdot 3}{A\,cub.};$$

тело из N, CF, FE в буквенном обозначении есть

$$\frac{N \text{ на } D \text{ на } B \text{ на } A}{A} +$$

$$+\frac{-N \text{ на } D \text{ на } B \text{ на } E - N \text{ на } B \text{ на } A \text{ на } E + N \text{ на } B \text{ на } Eq.}{A}.$$

Умножив все на $A\,cub.$, нужно будет сравнить

$$Dc. \text{ на } Ac. - Ec. \text{ на } Ac. - Dq. \text{ на } E \text{ на } Ac.\,3 +$$
$$+ D \text{ на } Eq. \text{ на } Ac.\,3 + Bc. \text{ на } Ac. - Bc. \text{ на } Ec. -$$
$$- Bc. \text{ на } Aq. \text{ на } E\cdot 3 + Bc. \text{ на } Aq. \text{ на } Eq.\,3$$

с

$$N \text{ на } D \text{ на } B \text{ на } Ac. - N \text{ на } D \text{ на } B \text{ на } E \text{ на } Aq. -$$
$$- N \text{ на } B \text{ на } E \text{ на } Ac. + N \text{ на } B \text{ на } Eq. \text{ на } Aq.$$

Удалим общие вещи, а именно из первого члена

$$Dc. \text{ на } Ac. + Bc. \text{ на } Ac.,$$

а из второго

$$N \text{ на } D \text{ на } B \text{ на } Ac.,$$

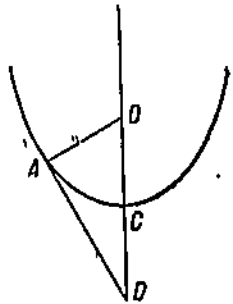
которые равны в силу свойства линии; ибо два куба $Dc.$ и $Bc.$, соответствующие кубам двух линий BC и BA, равны телу N на D на B, соответствующему телу из данной линии и двух линий BC и BA. Разделим остаток на E и затем удалим все, что останется в сочетании с E; наконец, останется $Dq.$ на $3A + 3B\,cub.$ равняется N на D на $B + N$ на B на A, и мы получим

$$\frac{N \text{ на } D \text{ на } B = 3B\ cub.}{3Dq. = N \text{ на } B} \text{ равняется } A,$$

что и требовалось найти.

Следуя методу Виеты, мы поставили две линии = для обозначения недостатка, ибо не видно, если только это не было указано специальным образом, в каком отношении находятся данные две линии B и D, или же BA и BC. Ибо в одних случаях, в соответствии с различием в отношении между B и D, может оказаться, что кривая будет выпуклой, а в других, что она будет вогнутой; иногда также касательная будет параллельной диаметру; иногда, наконец, встреча ее с диаметром происходит с другой стороны, что легко определяется с помощью самого метода, когда нам дается отношение двух данных линий BA и BC, как это весьма легко увидеть и показать. Когда я говорю об отношении двух данных линий, то имею в виду их значения *в иррациональных или рациональных числах*; ибо достаточно известно, что если даны две линии, то дано также их отношение.

Таким образом обнаруживается, что либо я плохо объяснился, либо г. Декарт плохо понял мое латинское сочинение. Если ему угодно, чтобы верным было первое, то я отнюдь не стану у него это оспаривать. Он также ошибся, полагая, что для приложения метода *de maximis et minimis* к отысканию касательных следует найти линию, вроде AD, проведенную от данной на диаметре точки A таким образом, чтобы AD была наибольшей, какую только можно провести от точки D к кривой. Г. де-Роберваль уже показал ему причину его ошибки, из которой он пожелал сделать то заключение, что метод *de maximis et minimis* ошибочен и нуждается в исправлении, в чем он ошибся, так же как и в остальном.

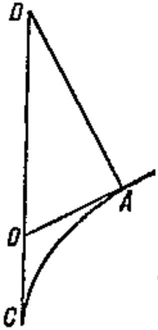


Черт. 55.

Но чтобы показать ему, как можно применить к отысканию касательных метод *de maximis et minimis*, вот он:

Если точка A дана (черт. 55); то нужно прибегнуть не *ad maximam*, ибо тогда мы найдем лишь бесконечность, но *ad minimam*. Отыщем поэтому на диаметре точку O, так, чтобы линия OA была кратчайшей, какую только можно провести от точки O к кривой. Найдя с помощью метода точку O, соедините обе точки O и A линией OA и перпендикулярно к OA проведите линию AD. Я говорю, что линия AD коснется кривой, это легко доказать.

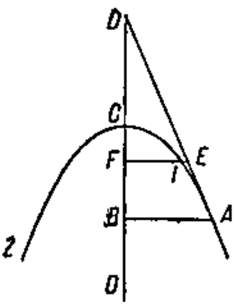
Действительно, если AD не касается кривой, то в точке A ее коснется другая прямая, которая будет встречаться выше или ниже точки D, и все ее точки будут лежать вне кривой, и в точке A она образует с OA неравные углы. Значит, если из точки O опустить на эту предполагаемую касательную перпендикуляр, то он встретит касательную не в точке A, но выше или ниже и пересечет кривую раньше, чем дойдет до касательной. Следовательно, часть этого перпендикуляра, заключенная между точкой O и кривой, будет короче, чем перпендикуляр; а так как перпендикуляр короче, — в силу прямого угла, — чем OA, то отсюда будет следовать, что линия, заключенная между кривой и точкой O и составляющая часть перпендикуляра, будет короче, чем OA, которую, однако, мы предположили кратчайшей из всех, какие можно провести от точки O к кривой.



Черт. 56.

Пусть линия CA (черт. 56) выпуклая наружу и пусть DA есть касательная, на которую опущен перпендикуляр AO. Из построения видно, что AO короче всех тех, которые проведены к кривой от точки O, так что, отыскав при данной точке A точку O, мы легко найдем касательную.

Таким образом остается найти при помощи метода точку O.



Черт. 57.

Допустим, например, что дана парабола CIA и на ней точка A. Я желаю найти точку O, так, чтобы OA была кратчайшей из всех, какие можно провести к параболе из точки O.

Назовем BC (черт. 57), как и раньше, D, BA назовем B; прямая сторона параболы, Z, будет дана, так как дана парабола. Предположим, что OB есть A. Тогда квадрат OA в буквенном обозначении будет $Aq. + Bq$.

Вместо линии A, или OB, возьмем теперь OF или $A + E$. Если мы проведем из точки F ординату FI, то квадрат ее в буквенном обозначении будет

$$Z \text{ на } D - Z \text{ на } E,$$

что при сложении с квадратом OF даст

$$Aq. + Eq. + \text{два } A \text{ на } E + Z \text{ на } D - Z \text{ на } E;$$

это выражение и будет квадратом OI, который должен быть больше, чем квадрат OA, ибо его сторону мы предположили большей, чем OA. Сравним поэтому в буквенном обозначении квадраты OI и OA путем приравнивания.

С одной стороны, мы будем иметь

$$Aq. + Bq.,$$

а с другой —

$$Aq. + Eq. + \text{два } A \text{ на } E + Z \text{ на } D - Z \text{ на } E.$$

Удалим общие вещи. Сравнение сохранится между

$$Eq. + \text{два } A \text{ на } E,$$

с одной стороны, и

$$Z \text{ на } E,$$

с другой, ибо $Bq.$, согласно свойству параболы, равно Z на D Разделим все на E и из остатка удалим это же E:

$$\text{два } A \text{ будет равно } Z,$$

и, значит, A, или OB, будет равно половине прямой стороны параболы и касательная найдена.

Именно таким образом я применял мой метод к нахождению касательных, но я заметил, что в нем имеется недостаток, ибо найти таким образом линию OI или ее квадрат, обыкновенно трудно. Это объясняется асимметриями [174], которые встречаются тогда в сколько-нибудь трудных вопросах и которых нельзя избегнуть, ибо при буквенном обозначении $D-E$ нужно выразить в буквах также и FI, что часто весьма трудно.

Метод г. Декарта не в большей степени облегчает все затруднения. В самом деле, поскольку он требует, чтобы вместо x ставили $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ и вместо xx квадрат этого выражения, и вместо x^3 его куб и т. д., как он говорит на стр. 342 (51), то, если ему предложат найти касательную к кривой, для которой отношение между x и y, где линия MA взята равной y и CM — равной x, выражается уравнением

$$by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y \propto$$
$$\propto x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 - d^9x,$$

ему будет, полагаю, весьма трудно избавиться от асимметрий, встречающихся в этом вопросе и других, подобных и, если угодно, все более трудных до бесконечности. Я буду рад, если он попытается это сделать.

Так как оба эти метода представляются недостаточными, то следовало найти такой, который бы преодолел все эти затруднения.

Я думаю — и с основанием — что таковым является первый предложенный мной метод, ибо так как CF всегда остается $D - E$, а FE остается $\frac{B \text{ на } A - B \text{ на } E}{A}$, то я не вижу, что бы могло помешать его сравнить, принимая, если вам угодно, $D - E$ за y, а $\frac{B \text{ на } A - B \text{ на } E}{A}$ за x; при этом сравнении не встретится ни одна асимметрия, в чем и заключаются легкость и совершенство этого метода.

После этого можно было бы заняться поисками обратного этому предложению и по данному свойству касательной искать кривую, которой должно соответствовать это свойство: к этому вопросу сводятся вопросы о зажигательных стеклах, предложенные г. Декартом. Но это заслуживает особого рассмотрения, и, если он согласен, то мы обсудим это, когда ему будет угодно. Я только хочу, чтобы он знал, что наши вопросы *de maximis et minimis* и *de tangentium linearum curvarum* (о касательных к кривым) вполне закончены уже лет восемь или десять назад и что несколько лиц, которые видели их пять или шесть лет назад, могут это засвидетельствовать.

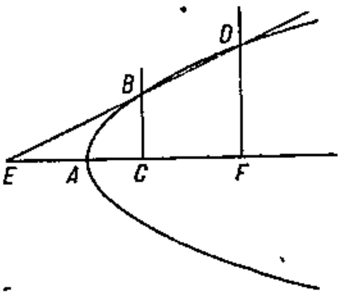
Если он хочет ознакомиться с приложением, которое я даю моему методу для нахождения центров тяжести пространств, заключенных кривыми линиями и их телами, то я их покажу ему и, в случае его согласия, предложу ему, между тем, *найти центр тяжести коноида, образующегося при вращении полупараболы СВА вокруг ее ординаты ВА, а также всех его частей, так же как отношение их к конусам с тем же основанием и той же высотой* [175].

Декарт — Гарди (июнь 1638 *г.)* [176].

Сударь,

В общем я весьма Вам обязан за то, что Вы поддержали мою сторону в вопросе о правиле *De maximis* господина де-Ферма, и я вовсе не удивлен, что Вы судите о нем не более благоприятно, чем я, ибо, если взять его в том виде, в каком оно предложено, все, что Вы о нем говорите, справедливо.

Но так как еще в первом моем письме я сказал, что, исправив, его можно сделать хорошим и затем всегда поддерживал то же мнение, то я уверен, что Вы не подосадуете, если я Вам сообщу основание этого; точно так же я убежден, что его не понимают ни эти господа, столь высоко ценящие это правило, ни, может быть, даже его автор.



Черт. 58.

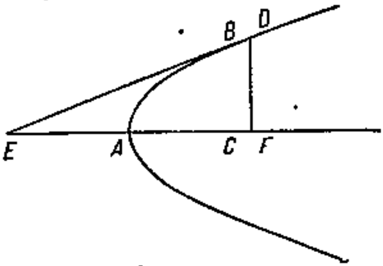
Пусть дана кривая линия ABD (черт. 58), а также точка этой линии B, именно я полагаю ординату $BC \propto b$, а диаметр $AC \propto c$, и пусть требуется найти на этом диаметре такую точку, вроде E, что прямая, проведенная от нее к B, пересекает эту кривую в B и еще в одной точке, вроде D, так, что ордината DF находится в данном отношении к ординате BC, например, в отношении g к h. Вам хорошо известно, что для нахождения этой точки E можно положить $EC \propto a$ и $CF \propto e$, и прежде всего, в силу подобия треугольников ECB и EFD, сказать, что $CE \propto a$ относится к $BC \propto b$, как $EF \propto a + e$ к DF, которая, следовательно, есть $DF \propto \frac{ba + be}{a}$. Далее, так как DF является одной из ординат кривой, то ее можно найти еще и в других членах, которые будут различными, в соответствии с различием в свойствах этой кривой. Если, например, это — первая из линий, придуманных господином де-Ферма по образцу параболы, т. е. та, для которой отрезки диаметра находятся в том же отношении, что кубы ординат, то мы скажем, что $AC \propto c$ относится к $FA \propto c + e$, как куб BC, т. е. b^3, к кубу DF, который, в соответствии с вышенайденными членами, будет $\frac{b^3a^3 + 3b^3aae + 3b^3aee + b^3e^3}{a^3}$. Действительно, это и есть куб $\frac{ba + be}{a}$. Затем, перемножив средние и крайние из этих четырех пропорциональных [177]

$$c \mid c+e \mid b^3 \mid \quad \text{и} \quad \frac{b^3a^3+3b^3aae+3b^3aee+b^3e^3}{a^3},$$

мы получим

$$cb^3+eb^3 \infty \frac{cb^3a^3+3b^3caae+3b^3acee+cb^3e^3}{a^3}.$$

И если разделить все на b^3 и умножить на a^3, то получится $a^3c+a^3e \infty ca^3+3caae+3caee+ce^3$, а если удалить с обеих сторон ca^3, то останется $a^3e \infty 3caae+3caee+ce^3$. Наконец, так как все делится на e, то получится $a^3 \infty 3caa+$ $+3cae+cee$. Но так как здесь имеются две неизвестные величины, именно a и e, а из одного уравнения можно найти только одну, то следует найти еще другое, а это легко получить из отношения линий BC и DF, которое дано. Именно g относится к h, как $BC \infty b$ относится к $DF \infty \frac{ba+be}{a}$, и, следовательно, $bh \infty \frac{gba+gbe}{a}$, или же $ha \infty ga+ge$. С помощью этого уравнения легко находится одна из двух величин a или e, вместо которой следует затем подставить в другое уравнение равные ей члены, чтобы затем найти другую неизвестную величину. Таков обычный путь анализа для нахождения точки E, или же линии CE, когда дано отношение между линиями BC и DF. Для того чтобы применить теперь все это к нахождению касательной (или, что то же самое, наибольшей величины), нужно лишь иметь в виду, что, когда EB является касательной, линия DF совпадает с BC (черт. 59). При этом она все же находится с помощью того же вычисления, которое я сейчас привел, — и только нужно предположить отношение равенства вместо отношения, которое я назвал отношением g к h, ибо поскольку EB есть касательная (по крайней мере, если она такова), DF становится равным BC, точно так же как она становится вдвое, втрое и т. д. больше BC, когда та же самая EB пересекает кривую в такой-то или же такой-то точке, —



Черт. 59.

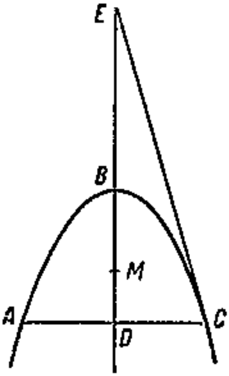
если только она в них ее пересекает. Таким образом, поскольку h равно g, во втором уравнении имеем вместо $ha \infty ga + ge$ лишь $a \infty a + e$, т. е. e равно ничему. Отсюда ясно, что для нахождения значения величины a нужно только в первом уравнении, которое есть $a^3 \infty 3caa + 3cae + cee$, вместо всех членов, умножающихся на e, поставить нуль, т. е. нужно лишь их уничтожить. Ведь умножение действительной величины на другую, воображаемую и нулевую, всегда дает ничто. В этом и состоит отбрасывание членов у господина де-Ферма, которое производится в этом смысле вовсе недаром. После этого отбрасывания в нашем уравнении остается только $a^3 \infty 3caa$, или же $a \infty 3c$, откуда видно, что если EB является касательной к предложенной кривой, то линия EC необходимым образом втрое больше линии AC.

Таково основание правила, в котором виртуально содержатся два уравнения, хотя явно требуется упоминать лишь об одном, так как другое служит лишь для уничтожения этих членов. Однако весьма вероятно, что господин де-Ферма вовсе не понял его таким образом и нашел его лишь ощупью, ибо он опустил главное условие, именно то, которое опирается на это основание, — Вы это можете, если хотите, увидеть из того, что должно быть в нем исправлено, как я сообщал раньше в одном письме преп. отцу Мерсенну. Ваш ... [178].

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ И КУБАТУРЫ ДЕКАРТА

Из письма Декарта Мерсенну (13 *июля* 1638 г.) [179].

...Заглянув случайно на днях в *Статику* Стевина, я нашел там центр тяжести параболического коноида, про который Вы сообщили мне, что его определение прислал Вам г. (Ферма); и меня удивляет, что он, интересующийся чтением книг, несомненно, больше, чем я, прислал Вам его в качестве своего, — тем более, что Стевин приводит его из Коммандино [180]. Но так как это — то самое, что я отправил Вам в последний раз через Жилло, то, чтобы не подумали, будто я это сделал потому, что не мог послать другие, я здесь приведу все центры тяжести линий, составленных по образцу параболы, — центры, найденные по его словам им самим. Я это делаю, однако, с тем условием, что Вы сообщите о них ему лишь, если он Вам также сообщит, как их нашел; ибо я полагаю, что он сам еще не очень уверен в своем правиле и решается пользоваться им для нахождения только тех вещей, про которые ему известно, что они уже найдены как-либо иначе. Итак, пусть *ABC* (черт. 60) есть кривая, природа которой такова, что отрезки ее диаметра относятся между собой, как кубы проведенных к ним ординат, и пусть *BD* является осью или диаметром фигуры, заключенным между этой кривой *ABC* и прямой *AC*. Разделим диаметр *BD* в точке *M* так, чтобы линия *BM* относилась к линии *MD*, как четыре к трем; точка *M* будет центром тяжести этой фигуры. Для получения центра тяжести кривой, у которой отрезки диаметра относятся между собой, как квадрато-квадраты ординат, *BM* к *MD* следует взять в отношении 5 к 4; для следующей, в которой эти отрезки относятся, как сверхтела ординат, *BM* к *MD* следует взять в отношении 6 к 5; для той, у которой эти отрезки относятся, как квадрато-кубы ординат, — в отношении 7 к 6; для следующей — в отношении 8 к 7 и так до бесконечности. Кроме того, если принять, что *BD* падает на *AC* под прямым углом и что *ABC* есть коноид, описываемый кривой *AB* или *BC*, вращающейся вокруг оси *BD*, так что *AC*, основание этого коноида, является кругом, то, чтобы найти центр тяжести этого тела *ABCD*, когда у линии *ABC* отрезки диаметра относятся, как кубы ординат, *BM* к *MD* следует взять в отношении 5 к 3; для следующей их нужно взять в отношении 6 к 4; для следующей в отношении 7 к 5; для следующей в отношении 8 к 6, и так до бесконечности. Что касается, далее, площадей этих фигур, то у первой из этих кривых поверхность, заключенная между этой кривой и прямой *AC*, относится к вписанному треугольнику *ABC*, как 6 к 4; у второй, как 8 к 5; у третьей, как 10 к 6; у четвертой, как 12 к 7, и так до бесконечности. И если *ABC* представляет собой первый коноид, т. е. тот, который описан первой из этих линий, то он относится ко вписанному конусу, как 9 к 5; если это второй, то, — как 12 к 6; если третий, то, — как 15 к 7; если четвертый, то, —



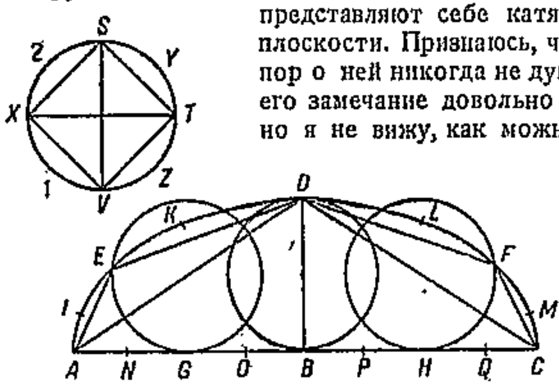
Черт. 60.

как 18 к 8; если пятый, то, — как 21 к 9, и так до бесконечности. Наконец, что касается их касательных, то для первой из этих кривых, которой прямая *CE* касается в точке *C*, *BE* будет вдвое больше *BD*; для второй — втрое больше той же *BD*; для третьей — вчетверо; для четвертой — впятеро, и так до бесконечности. Я не привожу доказательств всего этого, ибо записать их стоило бы слишком большого труда; и в подобных вопросах достаточно привести факт [181], ибо найти его могут лишь те, кто знает также и доказательства. Впрочем, Вы заметите по легкости этих решений, что они не заслуживают того, чтобы по поводу них поднимали такой шум ... [182].

3. КВАДРАТУРА ЦИКЛОИДЫ.

Из письма Декарта Мерсенну (27 *мая* 1638 *г.*) [183].

... Вы начинаете с одного открытия господина де-Роберваля относительно пространства, заключенного кривой линией, которую описывает точка окружности круга, который представляют себе катящимся на плоскости. Признаюсь, что до сих пор о ней никогда не думал и что его замечание довольно красиво; но я не вижу, как можно подни-



Черт. 51.

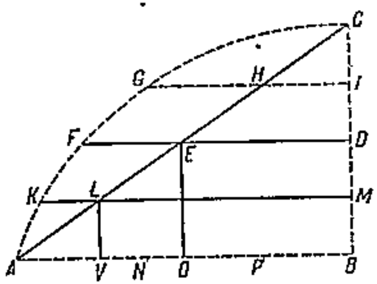
мать такой шум по поводу открытия вещи настолько простой, что всякий, хоть немного знакомый с геометрией, не может не открыть ее, если только станет ее искать. В самом деле, пусть (черт. 61) *ADC* есть эта кривая и *AC* — прямая, равная окружности круга *STVX*; разделим эту линию *AC* в точках *B*, *G*, *H*, *N*, *O*, *P*, *Q* и т. д. на

2, 4, 8 и т. д. равных частей; очевидно, что перпендикуляр BD равен диаметру круга и что вся площадь прямолинейного треугольника ADC вдвое больше этого круга. Далее, если принять E за точку, в которой этот же круг коснулся бы кривой AED, помещаясь на основании в точке G, и приняв также F за точку, в которой он касается этой кривой, когда помещается на основании в точке H, то ясно, что два прямолинейных треугольника AED и DFC равны квадрату $STVX$, вписанному в круг. Точно так же, если взять точки I, K, L, M за те, в которых круг касается кривой, когда он касается основания в точках N, O, P, Q, то очевидно, что четыре треугольника AIE, EKD, DLF и FMC равны вместе четырем равнобедренным треугольникам SYT, TZV, $V1X$, $X2S$, вписанным в круг, и что восемь других треугольников, вписанных в кривую на сторонах этих 4, будут равны 8, вписанным в круг, и так до бесконечности. Отсюда видно, что вся площадь двух сегментов кривой, имеющих основаниями прямые AD и DC, равна площади круга и, следовательно, вся площадь, заключенная между кривой ADC и прямой AC, втрое больше круга. Я бы не потрудился здесь это написать, если бы оно должно было отнять у меня хоть на минуту больше времени, чем потребовалось для написания. И если бы я стал хвалиться тем, что нашел такие вещи, то это показалось бы мне подобным тому, как если бы, рассматривая внутренность разрезанного мною пополам яблока, я стал хвалиться тем, что вижу вещь, которую никогда никто, кроме меня, не видел ... [184].

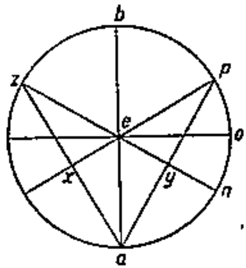
Из письма Декарта Мерсенну (27 *июля* 1638 *г.*) [185].

... Я перехожу к доказательству рулетты, которое я послал вам раньше, как вещь, не имеющую никакого значения, исключительно лишь с целью показать тем, кто поднимает вокруг этого большой шум, что оно очень легко. Я изложил его раньше весьма сжато как для сбережения времени, так и потому, что думал, что они не преминут признать его хорошим, только лишь увидят его первые слова. Но так как я узнал, что они его отрицают, то поясню его здесь таким образом, что судить о нем станет легко каждому.

Пусть $AKFGC$ (черт. 62) есть половина кривой, описываемой точкой a рулетты $anopb$ (черт. 63), когда эта рулетта движется по прямой AB, так что эта линия AB равна половине ее контура, а перпендикуляр CB равен ее диаметру. Я провожу перпендикуляры OE и DF, делящие AB и CB на равные части. Я провожу также прямую AC, замыкающую треугольник ABC. Затем я вижу, что когда точка o рулетты налагается на точку O линии AB, то ее центр e находится в точке E, в которой пересекаются AC и DF, ибо, так как CD есть половина CB, DE должно быть равным половине BA, т. е. BO. Я вижу также, что ее полудиаметр ea налагается тогда на линию EF, которая,



Черт. 62.

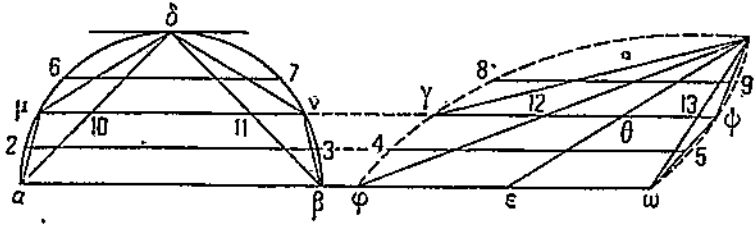


Черт. 63.

следовательно, будет ему равна, ибо, так как линия AO равна четверти контура этой рулетты, угол aeo должен быть прямым, так же как угол FEO; наконец, AE равна EC. Кроме того, взяв на линии AB, с обеих сторон от точки O, точки N и P, равноудаленные от нее и находящиеся на произвольном расстоянии, лишь бы они лежали между точками A и B, и взяв, далее, также на рулетте соответствующие им точки n и p, так что дуга an равна дуге pb, а также прямым AN и PB, я провожу диаметры ne, pe и перпендикуляры ay, ax. И я вижу, что когда точка n рулетты приложена в точке N прямой AB, ее точка a сходится с точкой кривой, обозначенной K, и такой, что если провести KM параллельно BA, то эта линия KM равна NB плюс ay и MD равна ye.

Точно так же я вижу, что когда точка p рулетты приложена в точке P прямой AB, ее точка a касается кривой в точке G, которая такова, что линия GI равна PB плюс ax и ID равна xe. Таким образом обе линии вместе, GI плюс KM, равны линии AB плюс линия qz, ибо очевидно, что

$ax+ay$ равны вместе всей az и что NB плюс PB равны всей AB, ибо AN равна PB. Кроме того, я вижу, что если H есть точка, в которой GI пересекает AC, и L — точка, в которой ту же AC пересекает KM, то линии LM и HI вместе равны всей AB; ибо MB равна CI; а если параллельно MB провести LV, то она также будет равна CI и, следовательно, HI равна AV, ибо треугольники AVL и HIC равны и подобны. И LM также равна VB. Так как LM плюс HI равны линии AB и KM плюс GI равны той же AB плюс линия az, то очевидно, что остающиеся две KL



Черт. 61.

и GH равны вместе этой линии az, которая столь же удалена от центра рулетты c, как KL и GH удалены от точки E, т. е. от линии FE. И так как точки N и P были взяты произвольно, за исключением того, что они равно удалены от точки O (вследствие чего линии KL и GH также равно удалены от линии FE), то это должно относиться вообще ко всяким двум линиям, проведенным между прямой AC и кривой AFC, параллельным FE и равноотстоящим от нее, одна — с одной стороны, а другая — с другой, именно вместе они равны прямой, вписанной в рулетту и столь же удаленной от ее центра, как эти линии удалены от точки E, или же от линии FE.

Отсюда следует, что если на одной и той же прямой, вроде $\alpha\beta\varphi\omega$ (черт. 64), описать полукруг $\alpha\delta\beta$, равный половине рулетты, и фигуру $\varphi\gamma\chi\psi\omega$, часть которой $\varphi\gamma\chi\theta\varepsilon$ равна и подобна $FGCHE$, а другая часть $\varepsilon\theta\chi\psi\omega$ равна и подобна $ELAKF$ (ибо поскольку AE равна EC, и угол AEF равен углу DEC, очевидно, что эти две части фигуры могут так соединиться), то основание $\varphi\omega$ будет равно $\alpha\beta$ и высота этой фигуры $\varphi\chi\omega$ равна высоте полукруга $\alpha\delta\beta$. И кроме того, все отрезки одних и тех же прямых, параллельных основанию $\alpha\beta\varphi\omega$, заключающиеся — одни в фигуре $\varphi\varkappa\omega$, а другие в полукруге, будут друг другу равны, так $\gamma\psi$ будет равна $\mu\nu$; *4 5* будет равна *2 3*; *8 9* равна *6 7*; и т. д.

Для тех, кто знает, что вообще если две фигуры имеют одинаковое основание и одинаковую высоту и если все прямые, параллельные их основаниям и вписанные в одну из них, равны прямым, вписанным на тех же расстояниях в другую, то обе они заключают одинаковое пространство, это достаточным образом доказывает, что пространство $\varphi\varkappa\omega$ равно полукругу $\alpha\delta\beta$ [186]. Но так как эта теорема, быть может, не будет признана всеми, я продолжаю следующим образом.

Если провести прямые $\delta\alpha$, $\delta\beta$ и $\varkappa\varphi$, $\varkappa\omega$, то ясно, что треугольник $\varphi\varkappa\omega$ равен треугольнику $\alpha\delta\beta$, ибо $\varkappa$ и δ я принимаю за высшие точки обеих фигур. Точно так же, если провести линии $\mu\alpha$, $\mu\delta$, $\nu\delta$, $\nu\beta$, $\gamma\varkappa$, $\gamma\varphi$, $\psi\varkappa$, $\psi\omega$, то ясно, что два треугольника $\gamma\varkappa\varphi$ и $\psi\varkappa\omega$ вместе будут равны двум треугольникам $\mu\delta\alpha$ и $\nu\delta\beta$, ибо поскольку $\varphi\omega$ равно $\alpha\beta$, *12 13* также равна *10 11*, и так как $\gamma\psi$ равна $\mu\nu$, то γ*12* плюс *13*ψ, которые являются основаниями треугольников $\gamma\varkappa\varphi$ и $\psi\varkappa\omega$, равны вместе μ*10* плюс *11*ν, которые являются основаниями треугольников $\mu\delta\alpha$ и $\nu\delta\beta$, и эти четыре треугольника имеют одинаковую высоту. Вписывая снова другие треугольники в точках *4*, *5*, *8*, *9*, и *2*, *3*, *6*, *7* и сколько угодно, вплоть до бесконечности, других, мы всегда найдем таким же образом, что треугольники фигуры $\varphi\varkappa\omega$ будут равны треугольникам полукруга и, следовательно, вся эта фигура равна этому полукругу. Ибо, раз все части одной величины равны всем частям другой, то целое необходимо равно целому. Это понятие столь очевидно, что, думаю, только те, кто в состоянии называть все вещи именами, противоположными истинным, могут его отрицать и говорить, что такое заключение верно только приблизительно.

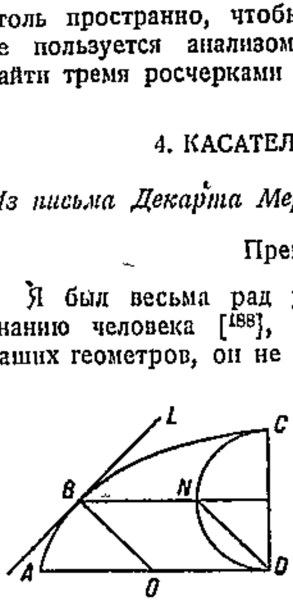
Наконец, так как пространство, заключенное между прямой *AC* и кривой *AKFGC* (черт. 62, стр. 185), равно полукругу, то очевидно, что все пространство *AFCB* втрое больше полукруга; ведь прямолинейный треугольник *ABC* равен всему кругу, ибо линия *AB* предполагалась равной половине его окружности, а *BC* — равной его диаметру. Но даже если бы эта линия *AB* предположена была большей или меньшей (например, если представить себе, что точка, описывающая кривую AFC, находится не на контуре рулетты, а вне или внутри ее), пространство, заключенное между прямой AC и кривой AFC, всегда оставалось бы равным полукругу, диаметр которого равен BC, так что менялась бы только величина треугольника ABC. Из одного этого достаточно ясно, что если величина линии AB и изменится, из-за этого не нужно будет ничего изменить в приведенном мной доказательстве. И то, что я изложил здесь столь пространно, чтобы быть понятым теми, кто совсем не пользуется анализом, можно с помощью вычислений найти тремя росчерками пера ...

4. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ЦИКЛОИДАМ.

Из письма Декарта Мерсенну (23 *августа* 1638 *г.*) [187].

Преподобный отец,

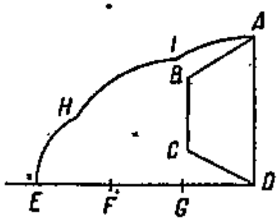
Я был весьма рад увидеть вопросы, которые, по признанию человека [188], почитаемого Вами главным среди ваших геометров, он не может решить, ибо, исследовав их, смогу испытать, так ли хорош мой анализ, как их.



Черт. 65.

Первый из этих вопросов состоит в отыскании касательных к кривым, описываемым движением рулетты. На это я отвечаю, что прямая, проходящая через точку кривой, в которой желают найти касательную, и через точку основания, которой касается рулетта при ее описании, всегда пересекает эту касательную под прямым углом. Таким образом, если, например, желают найти прямую, касающуюся в точке B кривой ABC (черт. 65), описанной на основании AD одной из точек контура рулетты DNC, то следует провести через эту точку B линию BN, параллельную основанию AD, затем из точки N, в которой эта параллель встречает рулетту, провести еще линию к точке D, в которой эта рулетта касается основания, потом провести BO параллельно ND и, наконец, BL, пересекающую ее под прямым углом, ибо эта линия BL и есть искомая касательная.

Я приведу здесь весьма краткое и весьма простое доказательство сказанного. Если по прямой линии катят какой-либо прямолинейный многоугольник, кривая, описываемая какой-либо его точкой, будет состоять из нескольких частей кругов, и касательные во всех точках каждой из этих частей кругов будут пересекать под прямыми углами линии, проведенные от этих точек к точке, в которой многоугольник касается основания при описании этой части. Вследствие этого, если рассматривать круговую рулетту как многоугольник, обладающий бесчисленным множеством сторон, ясно видно, что она должна обладать тем же свойством, т. е. что касательные в каждой из точек описываемой ею кривой должны пересекать под прямыми углами линии, проведенные из этих точек к точкам основания, которых она касается в то время, как описывает точки кривой.

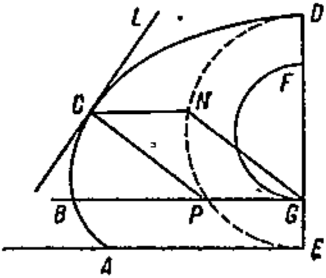


Черт. 66,

Так, когда по прямой $EFGD$ катят шестиугольник $ABCD$ (черт. 66), его точка A описывает кривую линию $EHIA$, составленную из дуги EH, которую он описывает, когда этот шестиугольник касается основания в точке F, являющейся центром этой дуги, из дуги HI, центр которой есть G, из дуги IA, центр которой есть D, и т. д., и через эти центры проходят все линии, пересекающие касательные к этим дугам под прямыми углами. То же самое происходит с многоугольником со ста тысячами миллионов сторон и, следовательно, также с кругом. Я мог бы вывести эту касательную другим способом, на мой взгляд лучшим и более геометрическим, но я опускаю его, чтобы не возиться с его описанием, так как он был бы несколько длиннее [189].

Следует заметить, что когда основание этой кривой равно окружности круга, который мы представляем себе для ее описания катящимся по этому основанию, как я и предположил в предыдущем примере, то эта кривая выгибается лишь наподобие полукруга, т. е., в каждом из ее концов касательная в ее последней точке перпендикулярна к этому основанию. Но если основание короче, то оба ее конца заворачиваются с обеих сторон внутрь, так что несколько ее оборотов образуют такую фигуру [190]: .

Чтобы найти касательные к этой кривой и точно узнать, где она начинает так заворачиваться, следует представить себе, что описывающая ее точка находится вне рулетты, и принять два основания (черт. 67): одно, на котором описана кривая — им здесь является *AE* — и на котором кривая *ABCD* описана точкой *D*, соединенной с рулеттой *FG* вне так, что она описывает вокруг этой рулетты круг *ED*, в то же время как на плоскости *AD* она описывает кривую *ABCD*, и другое основание, например *BG*, по которому движется рулетта *FG*, полуокружность которой должна быть равна половине основания *AE*. И касательные здесь определяются с помощью круга *DE* и точки *G*, в которой рулетта *FG* касается своего основания *BG*; так что, для того чтобы найти линию, касающуюся этой кривой, например, в точке *C*, следует параллельно основанию провести *CN* и соединить точку *N*, находящуюся на окружности *DNE*, с точкой *G*, в которой рулетта касается своего основания, затем параллельно *NG* провести *CP*; эта *CP* будет перпендикулярна *CL*, искомой касательной.



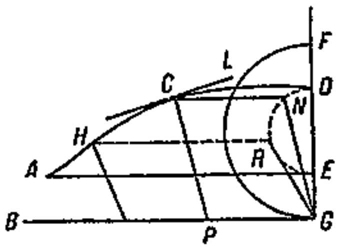
Черт. 67.

Отсюда ясно видно, что точка *B*, в которой второе основание *BG* встречает эту кривую, и есть та, в которой она начинает заворачиваться внутрь, ибо касательная в этой точке перпендикулярна основанию *AE*.

Если же основание этой кривой длиннее окружности круга, вычерчиваемого вокруг центра рулетты описывающей ее точкой, то два ее конца заворачиваются наружу, так что несколько ее оборотов образуют такую фигуру: .

И чтобы найти ее касательные и узнать, где она начинает заворачиваться, следует представить себе, что описывающая ее точка находится внутри рулетты, а также принять второе основание *BG*, по которому движется рулетта *FG*, окружность которой равна этому основанию, в то время как точка *D*, описывающая кривую на другом основании *AE*, описывает вокруг центра рулетты круг *DE*. Затем, чтобы найти касательную в точке C (черт. 68), произвольно взятой на этой кривой, следует параллельно основанию провести CN и соединить точку N, находящуюся на окружности DE, с точкой G, в которой рулетта касается своего основания, затем параллельно NG провести CP; CL, которую она пересекает под прямым углом, и есть искомая касательная.

Поэтому, чтобы найти точку H, в которой часть кривой AH перестает быть вогнутой, а HCD перестает быть выпуклой, нужно лишь из точки G провести линию GR, касающуюся круга DRE в точке R, и из этой точки R параллельно основанию провести RH. Следует заметить, что не может существовать прямой, касающейся этой кривой AHC в этой точке H, потому что она отделяет две ее части, из которых одна вогнутая, а другая выпуклая [191]. Эти столь простые и легкие определения можно применить для второй вещи, которой, как он признается, не знает Ваш господин геометр, ибо, хотя он говорит, что имеет ее доказательство, только длинное, и что он лишь желал бы иметь более короткое, но все же он не мог иметь такого доказательства, которое точно определяет какую-либо из этих вещей, ибо ведь он не мог найти касательных [192].



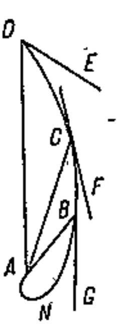
Черт. 68.

Наконец, следует заметить, что как то, что я написал здесь о касательных, так и то, что я сообщил Вам раньше о пространстве, заключенном линиями, описанными круговой рулеттой, можно также распространить на все кривые, описываемые рулеттами, имеющими какую угодно другую фигуру. Но только для определения пространства нужно, чтобы контуры этих рулетт были выпуклыми, а их противоположные части — подобными, как в случае, когда они имеют фигуру эллипса или же двух расположенных друг против друга гипербол и т. д. Применить к ним посланные Вам доказательства столь легко, что мне не стоит трудиться объяснять это. В них нужно изменить очень немногое, даже если контуры этих рулетт не везде выпуклы. И таким образом я думаю, что едва ли можно сказать об этих линиях еще что-либо, что не содержалось бы в том немногом, что я Вам о них написал. Следует также заметить, что описываемые рулеттами кривые — вполне механические линии и принадлежат к числу тех, которые я исключил из моей *Геометрии*; поэтому неудивительно, что касательные к ним нельзя найти с помощью приведенных мной там правил ... [193].

5. ОТКРЫТИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ.

Из письма Декарта Мерсенну (12 *сентября* 1638 *г.*) [194].

... Что же касается этой спирали, то она обладает некоторыми свойствами, благодаря которым является довольно примечательной. Если A есть центр земли, а $ANBCD$ — спираль (черт. 69) и если провести прямые AB, AC, AD и им подобные, то между кривой $ANBC$ и прямой AB существует то же отношение, что между кривой $ANBC$ и прямой AC или $ANBCD$ и AD и т. д. А если провести касательные DE, CF, GB и т. д., то углы ADE, ACF, ABG и т. д. будут равны ...

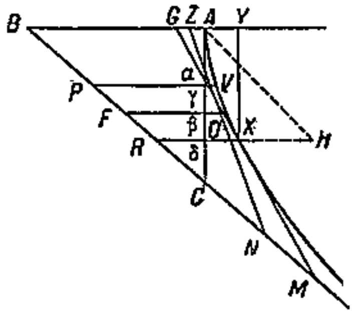


Черт. 69.

6. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НА КАСАТЕЛЬНЫЕ.

Из письма Декарта Дебону (20 *февраля* 1639 *г.*) [195].

... Что касается ваших кривых, то свойство, доказательство которого Вы мне прислали, я нахожу столь прекрасным, что предпочитаю его квадратуре параболы, найденной Архимедом. Ведь он исследовал данную линию, между тем как Вы определяете пространство, заключенное линией, которая еще не дана [196]. Я не думаю, чтобы можно было найти общим образом правило, обратное моему правилу для касательных, или же правилу, которым пользуется господин де-Ферма, хотя в некоторых случаях его легче применять, чем мое. Но отсюда можно вывести a posteriori теоремы, распространяющиеся на все кривые, выражающиеся уравнением, в котором одна из величин x или y не превосходит двух измерений, хотя бы другая имела их тысячу. И в поисках вашей второй кривой я нашел их почти все, но так как я записал их лишь в черновых набросках, которых не сохранил, то послать их Вам не могу. Впрочем, имеется другой способ, более общий и a priori, именно — посредством пересечения двух касательных, которое всегда должно происходить между двумя точками, в которых они касаются кривой и которые так близки, как это можно себе представить. Действительно, рассматривая, какой должна быть эта кривая, для того чтобы это пересечение всегда происходило между этими двумя точками, а не с той или другой стороны, можно найти ее построение. Но здесь можно итти столь различными путями, и я занимался этим так мало, что еще не мог бы это хорошо изложить. Впрочем, Вы здесь увидите, как я воспользовался этим в случае ваших трех кривых.



Черт. 70.

В случае второй, AVX (черт. 70), вершина которой есть A, я, вместо того чтобы рассматривать ось AY и ее ординату XY, рассматривал асимптоту BC. Проведя к ней ординаты, параллельные оси, как PV, RX и т. д., и касательные, как AC, ZVN, GXM и т. д., я нашел, что часть асимптоты между ординатой и касательной одной и той же точки, как PN или RM и т. д., всегда равна BC, как Вы это легко увидите из вычисления [197]. Поскольку две линии, ZVN и GXM, касаются кривой в точках V и X, они должны пересечься в пространстве между этими двумя точками, столь близкими, сколь это возможно, — как, например, в точке D, через которую я параллельно PV провожу FD.

И я называю $AB \propto b$, $NP \propto b\sqrt{2}$, $PF \propto \varepsilon$, $FR \propto \omega$, $PV \propto \frac{nb}{m}$

и $RX \propto \frac{nb-b}{m}$, причем я понимаю под m число равных частей, на которые предполагаю разделенной всю линию b, а под n — другое, меньшее число, выражающее, сколько таких частей имеет линия PV, так что если m есть 16 и n есть 13, то $PV \propto \frac{13}{16} b$ и $RX \propto \frac{12}{16} b$, ибо я предполагаю, что RX меньше, чем PV, только на одну из этих частей. Затем я продолжаю так.

$NP \infty b\sqrt{2}$ относится к $PV \infty \frac{nb}{m}$, как $NF \infty b\sqrt{2} - \varepsilon$ к $FD \infty \frac{nb}{m} - \frac{n\varepsilon}{m\sqrt{2}}$ и $MR \infty b\sqrt{2}$ относится к $\frac{nb-b}{m}$, как $b\sqrt{2} + \omega$ к $FD \infty \frac{nb-b}{m} + \frac{n\omega}{m\sqrt{2}} - \frac{\omega}{m\sqrt{2}}$. Таким образом я получаю FD в двух видах, которые дают мне, что $\frac{b}{m} \infty \frac{n\omega - \omega + n\varepsilon}{m\sqrt{2}}$, или же $b\sqrt{2} \infty n\omega - \omega + n\varepsilon$. Это показывает, что PR, названная мной $\varepsilon + \omega$, есть $\frac{b\sqrt{2}+\omega}{n}$, или же $\frac{b\sqrt{2}-\varepsilon}{n-1}$, т. е. что PR необходимо больше $\frac{b\sqrt{2}}{n}$ и меньше $\frac{b\sqrt{2}}{n-1}$, или же, чтобы избавиться от иррационального числа $\sqrt{2}$, линия $\alpha\beta$ больше $\frac{b}{n}$ и меньше $\frac{b}{n-1}$. И так как то же самое должно относиться ко всем параллельным оси ординатам, отличающимся друг от друга лишь на одну из частей линии AB, то этого достаточно для доказательства того, что если разделить эту линию AB на 8 и если PV содержит, например, $\frac{3}{4}b$, то $A\alpha$ будет больше $\frac{1}{8}b + \frac{1}{7}b$ и меньше $\frac{1}{7}b + \frac{1}{6}b$, и что если разделить AB на 16, то $A\alpha$ будет больше $\frac{1}{16}b + \frac{1}{15}b + \frac{1}{14}b + \frac{1}{13}b$ и меньше $\frac{1}{15}b + \frac{1}{14}b + \frac{1}{13}b + \frac{1}{12}b$ и т. д. Таким образом, деля AB на все большее число частей, можно все более и более до бесконечности приближаться к истинной длине линий $A\alpha$, $A\beta$ и им подобных, и таким путем механически построить предложенную линию [198].

Кроме того, если RX есть $\frac{1}{2}b$, то на линии $A\beta$ нельзя представить себе над β ни одной, как угодно близкой к β, точки, вроде γ, чтобы промежуток $\gamma\beta$ при этом не оказался меньше удвоенной разности между ординатой RX и ординатой, проходящей через точку γ, и наоборот, нельзя себе представить под β ни одной точки, вроде δ, чтобы промежуток $\beta\delta$ не оказался больше удвоенной разности между ординатой RX и той, которая проходит через δ. Также, если PV есть $\frac{3}{4}b$, то над ней нельзя провести ни одной ординаты, например, через точку η, чтобы при этом линия $\alpha\eta$ не оказалась меньшей $\frac{4}{3}$ их разности, и ни одной — над ней, например, через точку θ, чтобы $\alpha\theta$ не оказалась большей $\frac{4}{3}$ их разности и т. д. [190]. Это показывает, что для точного описания этой кривой AVX нужно перемещать две прямые так, чтобы одна из них была сперва наложена на линию AH, а другая — на линию AB и чтобы они начали двигаться одновременно и одинаково быстро, причем AH к BR и AB к RH, и чтобы та из них, которая движется от AH к BR, постоянно сохраняла одну и ту же скорость, тогда как у другой, спускающейся от BA параллельно RH, скорость возрастала в таком отношении, что если она имеет одну степень скорости вначале, то она имеет $\frac{8}{7}$ ее, когда первая прошла восьмую часть линии AB, и $\frac{8}{6}$, или $\frac{4}{3}$, когда первая прошла четверть AB, и $\frac{8}{5}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{2}$ и 8, и 16, и 32, и т. д., когда первая достигнет $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ и $\frac{7}{8}$, и $\frac{15}{16}$, и $\frac{31}{32}$, и т. д. линии AB; и т. д. до бесконечности. Пересечение этих двух прямых в точности опишет кривую AVX, которая и будет обладать требуемыми свойствами. Я думаю, однако, что эти два движения столь несоизмеримы, что одно из них не может точно определяться другим и что, таким образом, эта линия как механическая принадлежит к числу тех, которые я исключил из моей *Геометрии*. Поэтому я не удивляюсь более, что не мог найти ее другим применявшимся мной способом, ибо он распространяется только на геометрические линии.

Что касается Вашей третьей кривой, то Вы достаточно ясно видите, что она такой же природы и описывается так же, как и вторая, с тем лишь различием, что тогда как в последней угол BAH в 135 градусов, а HAY в 45, в той оба они должны быть прямыми.

Что касается четвертой, то ее я совсем не рассматривал и у меня для этого нехватит досуга, если я не отложу письмо к Вам до следующей почты; но я уверен, что Вы предпочтете исследовать ее сами.

ПРИМЕЧАНИЯ

GEOMETRIA,

à

RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum NOTIS

FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.

AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIƆ IƆC LIX.

Титульный лист первого (скаутеновского) латинского издания „Геометрии" Декарта.

Примечания к „Геометрии" Декарта.

[1] (к стр. 9). *„Геометрия"* вышла впервые на французском языке осенью 1637 г. в Лейдене у книгопродавца Ж. Лемера в книге Декарта „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences". Она являлась приложением общего метода Декарта к отдельным наукам и следовала в этом издании за *„Диоптрикой"* и *„Метеорами"* (стр. 295—413).

В 1649 г. Франц ван Скаутен (1615—1660) выпустил у Лемера первый латинский перевод *„Геометрии"*, титульный лист которого воспроизведен в настоящем издании. Для современников книга была трудна. Поэтому Скаутен присоединил к работе Декарта латинский перевод „Кратких замечаний" Фл. Дебона (1601—1652), а также некоторые собственные примечания.

Второе латинское издание содержало значительно больше материала и состояло из двух томов, выпущенных в одном переплете в 1659—1661 гг. в Амстердаме у Эльзевиров. Какое место занимает *„Геометрия"* по сравнению с другим материалом, помещенным в этом издании, показывает оглавление обоих томов (страницы указаны по доступному мне изданию 1695 г.):

Renati des Cartes Geometria, tribus libris comprehensa (стр. 1—106).

Florimondi de Beaune in illam Notae breves (стр. 107—142).

Francisci à Schooten in eandem Commentarii recogniti et aucti (стр. 143—344).

Francisci à Schooten Ejusdem Appendix de Cubicarum Aequationum Resolutione (стр. 345—368).

Francisci à Schooten item Additamendum, in quo continentur solutio artificissima difficilis cujusdam Problematis; et Generalis Regula de extrahendis quibuscumque Radicibus Binomiis (стр. 369—400).

Iohanni Huddenii Epistolae duae, quarum altera de Aequationum Reductione, altera de Maximis et minimis agit (стр. 401—516).

Henrici van Heuraet Epistola, de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione (стр. 517—520).

Francisci à Schooten Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Geometriae methodum Renati des Cartes conscripta ab. Er. Bartholino (стр. 1—48).

Florimondi de Beaune duo Tractatus posthumi, Alter de Natura et Constructione, alter de Limitibus Aequationum (стр. 49—116).

Erasmius Bartholinus Ad Tractatum de limitibus aequationum Epistola praeliminaris (стр. 117—152).

Iohanni de Witt Elementa curvarum linearum (стр. 153—340).

Francisci à Schooten Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraicis (стр. 341—420).

Примечания Скаутена в этом издании подверглись значительной переработке и заняли весьма большое место. „Principia Matheseos Universalis" составлены Эразмом Бартолином (1625—1698) по указаниям Скаутена и отдельно вышли раньше в Лейдене в 1651 г. под тем же названием.

Третье латинское издание выпущено было в 1683 г. Оно было дополнено принадлежащим Декарту Musicae Compendium. — Ко 2-му изданию, между прочим, был приложен портрет Декарта, нарисованный самим Скаутеном. Под портретом помещены были латинские стихи, посвященные Декарту Константином Гюйгенсом (старшим братом знаменитого ученого).

Четвертое и последнее латинское издание выпустил Як. Бернулли (1654—1705) в 1695 г. во Франкфурте на Майне у книгопродавца Фр. Кнох. В нем были помещены написанные Як. Бернулли Notae et Animadversiones tumultariae (стр. 422—468), излагавшие некоторые собственные геометрические изыскания автора. Содержание названных приложений отчасти охарактеризовано в нижеследующих моих примечаниях. Подробнее ознакомиться с ними можно по книге H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik, ч. II, вып. 2, Berlin-Leipzig 1921 г., гл. I, в дальнейшем цитируется — H. Wieleitner, ч. II, в. 2.

Французское издание *„Геометрии"* опубликовано было также в 11-томном собрании сочинений Декарта, выпущенном В. Кузеном в 1824—1826 гг.

Отдельно *„Геометрия"* была издана в Париже в 1886 г. Формулы в этом издании носят современный характер. Последнее французское издание — самое лучшее — дали в полном 12-томном собрании сочинений Декарта Ш. Адам и П. Таннери: Oeuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et P. Tannery, Paris 1897—1910. *„Геометрия"* занимает там 367—485 стр. VI тома. Двенадцатый том содержит очень полную биографию Декарта, написанную Ш. Адамом.

Немецкий перевод *„Геометрии"* с небольшим количеством примечаний выпустил Л. Шлезингер (1-е издание, Berlin 1894, 2-е издание, Leipzig 1923).

Недавно вышел английский перевод, выполненный Д. Е. Смитом и Марчией Л. Латам: The Geometry of René Descartes. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. With a Facsimile of the First Edition 1637. 246 p. quarto. Portrait, Chicago 1925. Мне не удалось видеть это издание. Дж. Сартон дал о нем прекрасный отзыв (см. Isis, т. VIII, 1926, стр. 173—175). Оно ценно, в частности, тем, что содержит факсимиле первого французского издания.

[2] (к стр. 11). Разделение математических предложений на теоремы и задачи встречается еще в античной математике. Разные школы и лица вкладывали в эти термины различное содержа-

ние. Для Декарта и его современников теорема представляет собой общее предложение, утверждающее свойство, присущее всем объектам рассматриваемой области. Задача отличается от теоремы тем, что условиям ее удовлетворяют не все объекты рассматриваемой области, а лишь определенная — конечная или бесконечная — их совокупность. Если, например, требуется внутри равностороннего треугольника найти точку, для которой сумма расстояний от трех сторон треугольника равна его высоте, то налицо теорема, ибо всякая точка треугольника обладает требуемым свойством. Решая вопрос о местонахождении такой точки, Скаутен в своих комментариях к „*Геометрии*" после ряда выкладок приходит к тождеству и заключает: „Отсюда ясно, что если мы приходим к уравнению, в обеих сторонах которого стоит одна и та же величина, то предложенный вопрос является не задачей, но теоремой; или что условие, из которого было выведено это уравнение, содержится в данном вопросе и он не может существовать без этого условия .. , поэтому искомую точку E можно брать внутри треугольника ABC где угодно" (Renati des Cartes Geometria и т. д. изд. 1695, стр. 229; в дальнейшем цитируется как „*Geometria*"). Напротив, отыскание в плоскости точки, равноудаленной от двух данных точек A и B, является задачей; условию удовлетворяет совокупность точек, лежащих на прямой, перпендикулярной к отрезку AB в его середине. — Впрочем, достаточно изменить область объектов предложения, чтобы оно из задачи превратилось в теорему: все точки прямой, перпендикулярной к отрезку в его середине, равно удалены от его концов. — См. также Г. Г. Цейтен, „История математики в древности и в средние века", пер. П. С. Юшкевича, М. 1932, стр. 70—72 (в дальнейшем цитируется как Цейтен, ч. I).

В XVIII в. термины „теорема" и „задача" приняли иной смысл. „Задача как геометрический термин обозначает предложение, в котором требуется произвести некоторое действие или построение, например, разделить линию, построить угол, провести круг через три точки не лежащие на одной прямой" (Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, т. XIII, 3-е изд., 1774 г., стр. 374). Теорема — истина, подлежащая доказательству; задача заключает в себе подлежащий решению вопрос (там же, стр. 451). Ср. также распространенный в XVIII в. курс Chr. Wolff, „Die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften", ч. I, 3-е изд., 1725, стр. 21—29. „Построение задачи" — геометрическое решение ее, включающее геометрическое доказательство истинности решения. „Построение уравнения" — это „метод нахождения корней уравнения посредством действий, осуществляемых с помощью ... описания какой-либо кривой" (Encyclopédie, т. IV, 1772 г., стр. 84); корни выражаются тогда некоторыми отрезками. — Построение корней уравнений было известно еще грекам. Для древних „основное значение геометрического построения заключается в доказательстве реального существования того самого объекта, к нахождению которого приводит это построение" (Цейтен, ч. I, стр. 71).

[3] (к стр. 11). Там, где мы бы сказали „отрезок", Декарт почти всегда говорит „la ligne droite" — „прямая линия". „Отрезок линии" он пишет очень редко (Oeuvres, т. VI, стр. 383: „le segment

de la ligne"). Твердое терминологическое разграничение отрезка, луча и прямой — дело Я. Штейнера (1769—1863).

[4] (к стр. 11). Следуя древним, Декарт представляет квадратный корень с помощью пропорции: если $1:x=x:a$, то $x=\sqrt{a}$. Аналогично $x_1=\sqrt[n]{a}$ можно выразить с помощью $n-1$ средней пропорциональной $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$1:x_1=x_1:x_2=x_2:x_3=\ldots=x_{n-1}:a.$$

Декарт рассматривает извлечение корня как вид деления. „При делении, замечает Скаутен, делимое относится к делителю, как частное к единице. При извлечении же квадратного корня данное число, или делимое, относится к корню, или делителю, как корень, или частное, к единице" („*Geometria*", стр. 147). Эту связь обоих действий Декарт формулировал еще в Regulae ad directionem ingenii, написанных около 1628 г. „Что касается таких делений, в которых делитель не дан, а только обозначен некоторым отношением, как, например, когда говорят, что нужно извлечь квадратный или кубический и т. д. корень, то заметим, что в этих случаях делитель и все остальные члены нужно представлять как линии, образующие ряд непрерывно-пропорциональных, из которых первой является единица и последней делимая величина" (Oeuvres, т. X, стр. 467; „Правила для руководства ума", М. 1936, пер. В. И. Пикова, стр. 171).

О представлении таким же образом корней у древних см. Цейтен, ч. I, стр. 104, 105.

[5] (к стр. 12). Слово le cercle, обозначающее у Декарта и круг и окружность, переводится везде, где речь идет о пересечении линий, через окружность. В редких случаях Декарт говорит об „окружности круга".

[6] (к стр. 13). Буквенное обозначение величин, предполагаемых известными, но не зафиксированных числовым образом, восходит к древним грекам, в частности и к Аристотелю (384—322 гг. до н. э.). В „Началах" Эвклида (ок. 300 г. до н. э.) величины выражались отрезками прямых, которые обозначались в тексте с помощью двух букв, отмечавших их концы; у Архимеда (287—212 гг. до н. э.) такую же роль играла одна (а не две) буква. Отсюда смогла взять впоследствии свою символику алгебра. В средние века обозначение величин с помощью букв изредка встречалось у Леонардо Пизанского, выделявшего их в тексте точками (например, так: $.a.$) (1202); буквы свободно применял Иордан Неморарий (ок. 1200 г.); Ник. Орезм (1323—1382) снабжал их даже числовыми множителями (например $4.a.$). Однако при этом отсутствовало буквенное исчисление в собственном смысле слова — аппарат формул, составляющий ядро современной алгебры. Неморарий, например, изображал результаты действий над буквами каждый раз другими буквами и вместо стройной системы соподчиненных формул получал хаотическое нагромождение новых и новых буквенных знаков, лишенное силы операторного исчисления и отчетливости. Лишь значительно позднее слабые и разрозненные начатки буквенного исчисления попадаются у Христофора Рудольфа (1525) и в 1570 г. у Джеронимо Кардано (1501—1576).

Буквенное представление одной неизвестной величины мы находим у греческого математика III в. Диофанта, характеризовавшего ее символом ς, являвшимся, вероятно, сокращением какого-либо соответствующего слова. Для степеней неизвестной он пользовался также сокращениями слов и некоторыми комбинациями их. Так, квадрат неизвестного обозначался δ^{υ} (от δύναμις — состояние, сила), куб $\varkappa^{\upsilon}$ (от κύβος — куб), четвертая степень $\delta^{\upsilon}\delta^{\upsilon}$, пятая $\delta^{\upsilon}\varkappa^{\upsilon}$, шестая $\varkappa^{\upsilon}\varkappa^{\upsilon}$. Несколько веков спустя, индусы стали отмечать различные неизвестные, присваивая им сокращенные наименования различных цветов. Математики европейского средневековья долго называли неизвестную вещью, res (по-итальянски cosa, откуда старое немецкое название алгебры Coss, косс), квадрат ее — quadratus или census (состояние, сила), куб — cubus. В XV—XVI вв. начали появляться и совершенствоваться знаки для степеней неизвестных величин. Так, Ник. Шюке (1484) писал $7^3\widetilde{m}$, что соответствует нашему $7x^{-3}$. Если Кардано записал бы еще наше уравнение $x^3+5x=12$ в форме cūbus $\widetilde{p}5$ rėbus aequantur 12, то у Раф. Бомбелли (1572) оно уже имело бы вид $1\overset{3}{\smile}\,\widetilde{p}\,5\overset{1}{\smile}$ aequ. 12. Довольно сходные приемы можно встретить у Иоста Бюрги (1552—1632), Иог. Кеплера (1571—1630) и др. Немецкие коссисты ввели ряд особых значков, соответствующих нашим $x, x^2, \ldots, x^9$ и получивших широкое распространение; недостатком их являлась непригодность для обозначения произвольных степеней. Все эти обозначения относились к степеням одной неизвестной. Симон Стевин (1548—1620) предложил отмечать неизвестные по порядку, начиная со второй, сокращениями sec., ter. и т. п. Впрочем, коссист Мих. Штифель (1487—1567) обозначал — отнюдь не систематически — степени различных неизвестных готическими буквами, выписывая нужное число раз основание степени: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{AA}$, $\mathfrak{AAA}$, ..., $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{BB}$, $\mathfrak{BBB}$ и т. д. Этот прием подходил лишь для целых степеней.

Все это существенно подготовило основание современной символической алгебры. Ее необходимость и возможность заключались и в том факте, что в XVI в. часто оперировали не конкретными числовыми уравнениями, а уравнениями довольно общего вида, выражавшимися примерно так: „кубы вместе с корнями равны числам", причем число кубов и корней, так же как и свободный член, мыслилось любым (положительным). Принципиальный поворот сделан был Франсуа Виетой (1540—1603), который ввел важнейший символический элемент алгебры: общий буквенный коэфициент уравнений („In artem analyticen Isagoge", 1591). Благодаря этому стало возможным изучение общего алгебраического уравнения и употребление общих формул. Виета определенно подчеркивал значение ясного и систематического обозначения. „Так как, писал он, для того чтобы можно было опираться на некое вспомогательное средство, необходим всегда одинаковый и наглядный символ, то данные величины должны отличаться от искомых неизвестных, например, тем, что неизвестные величины будут обозначены буквой *A* или другой гласной *E*, *I*, *O*, *U*, *Y*, а данные — буквами *B*, *G*, *D* или другими согласными". В употреблении прописных букв Виета — как и во многих других случаях — примыкал к древним. Но он сам указывал, что употребление букв алфавита для выражения алгебраических величин не носят обязательного характера, — форма знаков безразлична. Уравнения в записи Виеты содержали еще довольно большое количество слов („умноженный на", „равно" и т. д.).

Некоторое усовершенствование было введено еще Томасом Гарриотом (1560—1621; опубл. 1631), записывавшим уравнения уже совсем без слов. Для выражения целой положительной степени он, однако, выписывал еще все множители по порядку; a^5 у него выглядело *aaaaa*. Он заменил прописные буквы строчными.

Материалы, сохранившиеся от раннего периода деятельности Декарта, не дают полной картины истории его обозначений. В 1619 г. Декарт в письмах к своему ученому другу, Исааку Бекману (1570?—1637), пользовался коссическими знаками, следуя той книге, которая, вероятно, служила одним из главных источников его первого ознакомления с математикой, именно „Алгебре" Христофора Клавия (1537—1612; ср. Oeuvres, т. X, стр. 154 и след.). Эти обозначения встречаются у него и значительно позднее, в 1628 г. и если опереться на даты, установленные П. Таннери, позднее выхода „*Геометрии*", в 1638 и 1640 гг. (Oeuvres, т. X, стр. 297, 298). В период 1619—1620 гг. у Декарта можно найти и другое обозначение, заимствованное у Клавия и латинизирующее коссические знаки; a^2 обозначается *aq*, a^4 через *aqq* (Oeuvres, т. X, стр. 247, 248; также около 1629 г., т. X, стр. 289, 294; употребляемые там греческие буквы могли быть лишь неаккуратно переписанными позднее латинскими).

Обозначение величин, представленных отрезками, буквами *e* и *k*, служащими также для названия этих отрезков, употреблялось Декартом и Бекманом в 1618—1619 гг. (Oeuvres, т. X, стр. 55).

К 1619 г. относится также использование значка *O* для представления произвольного коэфициента уравнения; правая часть уравнения $x^2 = ax + b$ записывается в письме от 26-III-1619 г. в форме $Ox + ON$ (я ставлю *x* вместо коссического знака; *N* — от Numerus, число). „Этот знак *O*, пишет в примечании Густав Энестрем, вероятно, есть нуль и имеет своим назначением то же, что и точки, которые Декарт позднее употребил в своей „*Геометрии*" (см. стр. 88 этого издания), т. е. отмечает место некоторой величины, зависящей от рассматриваемого вопроса" (Oeuvres, т. X, стр. 156).

В „Правилах для руководства ума" (1629) Декарт делает крупный шаг вперед: „Для большего удобства мы воспользуемся строчными буквами *a*, *b*, *c* и т. д., чтобы выражать уже известные величины, и прописными *A*, *B*, *C* для выражения неизвестных величин. Часто мы будем ставить цифры 1, 2, 3, 4 и т. д. либо впереди этих знаков для указания числа величин, либо позади, для того, чтобы обозначать количество отношений, которые будут в них мыслиться. Так, например, если я записываю $2a^3$, то это одно и то же, как если бы я говорил: удвоенная величина, обозначаемая буквой *a*, содержащая 3 отношения" (Oeuvres, т. X, стр. 455, рус. пер., стр. 157, 158).

Впервые знаки *x* и *y*, а также обозначения *yy*, y^3, y^4 мы находим в рукописи, относимой Таннери примерно к 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 310 и след.). Впоследствии они полностью вытесняют другие символы. — Вначале, следуя, быть может, обратному порядку алфавита, первую неизвестную Декарт называет z, следующую y, третью x, но уже в III книге *„Геометрии“* в качестве первой неизвестной берется всегда x, — возможно, как заметил Иог. Тропфке, потому, что по начертанию своему x было сходно с привычным для Декарта коссическим знаком неизвестной. Запись aa или xx, наряду с более последовательной a^2 или x^2, сохранилась вплоть до Гаусса (1777—1855), который считал, что aa занимает не больше места, чем a^2.

Современное общее обозначение любых степеней (дробных и отрицательных) по способу Декарта, который сам ввел его лишь для целых положительных показателей, — заслуга Ньютона (1647—1727; около 1667 г.). У Декарта начальные буквы алфавита обозначали сами по себе положительные величины, и для выражения отрицательных величин он присоединял знак минус. Применение букв для выражения — безразлично положительных и отрицательных величин — дело Иог. Гудде (1628—1704; см. прим. 95).

Влияние Виеты на создание Декартом алгебраической символики совершенно исключается для первого периода творчества Декарта, когда он находился под влиянием коссистов. Он не стал бы, кроме того, применять указанный общий значок для коэффициентов уравнения, если бы знал различные символы Виеты. Возможность такого влияния можно считать почти исключенной и для позднейшего времени. Как свидетельствует переписка Декарта, он познакомился с „Isagoge“ Виеты весной 1632 г. (Oeuvres, т. I, стр. 245). То же самое можно сказать и о Гарриоте, книгу которого Декарт увидел уже после выхода *„Геометрии“* (Oeuvres, т. II, стр. 455 и след.).

Подробнее об истории алгебраических обозначений см Ioh. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, 1921, т. II, сс. 39—48, 104—134 и F. Cajory, A History of mathematical notations, 1928, т. I, гл. III.

[7] (к стр. 13). Знак корня $\sqrt{\ }$, довольно быстро вытеснивший полное или сокращенное словесное обозначение его (R от Radix), применявшееся итальянцами и французами в XV—XVI вв., возник у коссистов около 1480 г. Вначале квадратный корень представлялся точкой, ставившейся впереди подкоренного выражения, корень четвертой степени — двумя точками и т. п. Затем у Хр. Рудольфа к точке присоединился штришок и в результате появился знак $\sqrt{\ }$. Для обозначения корней высших порядков коссические и следовавшие за ними авторы ставили после радикала знак, выражавший соответствующую степень; так поступает и Декарт. Знак $\sqrt{\ }$ Декарт употреблял еще около 1619 г. Подкоренное выражение он, как и некоторые другие, выделял тогда точками, ставившимися в начале и конце этого выражения (Oeuvres, т. X, стр. 247, также около 1629 г., т. X, стр. 288—289). В 1629 г. у него встречается придуманная им объединительная черта над подкоренным выражением (Oeuvres, т. X, стр. 292). В *„Геометрии“* имеются лишь квадратные и кубические корни, высшие попадаются в переписке. Здесь Декарт обозначает $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$ и т. д. через $\sqrt{\ }3$, $\sqrt{\ }4$, $\sqrt{\ }5$, ставя после показателя корня скобку и употребляя выде-

лительные точки. Так, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ он пишет в виде $\sqrt{3}$). $20+\sqrt{392}$ (Oeuvres, т. III, стр. 190). Сходную запись давал Гарриот. Современная форма $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ введена была Альб. Жираром (1595?—1632), но окончательно утвердилась лишь в XVIII в. См. Tropfke, цит. соч., т. II, стр. 143—154 и Cajory, цит. соч., т. I, гл. III.

[8] (к стр. 13). У Декарта стоит ordinairement — обыкновенно, в латинском переводе Скаутена: semper — всегда.

[9] (к стр. 13). Словом „измерение" переведен термин dimension, введенный в применении к членам алгебраического уравнения Декартом.

[10] (к стр. 13). Le quantité везде переведено через „величина"

[11] (к стр. 13). Почти все математики XVI в. выражали равенство полным или сокращенным словом „равно". Так поступал около 1619—1621 гг. и Декарт (Oeuvres, т. X, стр. 234). Придуманный им знак ∞ попадется среди рукописей, отнесенных Таннери примерно к 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 292 и след.). Происхождение его неизвестно. Применялся он в XVII в. довольно часто.

Современный знак равенства $=$ ввел англичанин Роб. Рекорд (1510—1558), писавший, что две вещи не могут быть более равными, чем пара параллельных линий одинаковой длины; его символ был значительно длиннее принятого ныне. Знак Рекорда широко употребляли Вильям Оутред (1574—1660) и Гарриот. Во Франции он привился не скоро, ибо Виета понимал под $a=b$ разность между большей и меньшей из величин a и b. У Декарта символ $=$ обозначал $\pm$; в таком смысле он употребляется перед радикалом в выражении для корня квадратного уравнения (письмо от 23-VIII-1638 г., Oeuvres, т. II, стр. 314 и след.). В письме от 30-IX-1640 г. (Oeuvres, т. III, стр. 190) знак $=$ применяется Декартом в нашем значении, в связи с аналогичным пользованием им адресатом.

См. Tropfke, цит. соч., т. II, стр. 20, 21 и Cajory, цит. соч., т. I, стр. 260—270.

[12] (к стр. 14). Речь идет о равенстве совокупности членов одного выражения совокупности членов другого. Оборот речи, употребляемый Декартом, встречается еще у древних греков.

[13] (к стр. 14). Словом „приводя" переведено декартовское en les demeslant. В латинском переводе место это гласит: „atque ita, reducenda illas, efficere oportet"..., („*Geometria*", стр. 4). Декарт охотно употреблял слово demesler в применении к неизвестным или уравнениям, но часто применяет и термины reduire, reduction.

[14] (к стр. 15). Следуя традиции, восходящей к древним и арабам, а в более близкое время к коссистам, Декарт называет последовательные целые степени геометрическими и quasi — геометрическими терминами. Четвертая степень называется quarré de quarré (лат. quadrato-quadratum, коссическое zensus de zensu), пятая — sursolide (sursolidum у Адама Ризе — 1489?—1559 г., или surdesolidum у Штифеля; также и supersolidus), шестая — quarré de cube (quadrato-cubus, коссическое zensi-cubus), седьмая — в письме от 30-IX-1640 г. (Oeuvres, т. III, стр. 188) *B*-sursolide (от bissursolidum). Точное происхождение слова sursolidum неизвестно (см.

примечание П. Таннери в Oeuvres, т. II, стр. 581 и Tropfke, цит. соч., т. II, стр. 119); по смыслу этот варваризм должен выражать в шкале quasi — геометрических величин сверхтело.

[15] (к стр. 15). Здесь стоит degré. Таким образом утверждается, что все задачи, для построения которых требуются алгебраические кривые не выше шестой степени, приводят к системе уравнений, из которых могут быть исключены все неизвестные, кроме одной. Кривые выше 6-го порядка (в нашей терминологии) Декарт в „*Геометрии*" не рассматривает.

[16] (к стр. 15). Трудно установить, что понимает Декарт под „всеми делениями, которые окажется возможным выполнить". Скаутен говорит, что „сложение и вычитание не делают членов какого-либо вопроса более сложными (difficiliores)... При умножении же члены запутываются (involvuntur) и усложняются (intricantur), а измерения увеличиваются; напротив, при делении члены распутываются, а измерения уменьшаются. То же следует иметь в виду относительно извлечения корня, которое, как было сказано выше, есть лишь род деления. Поэтому для нахождения простейших членов, к которым может быть приведен вопрос, следует тщательнейшим образом следить за тем, чтобы при приведении уравнений были испробованы все деления и извлечения, какие возможно сделать" („*Geometria*", стр. 162). Таким образом Скаутен добавляет, что нужно произвести всевозможные извлечения корней, под которыми следует понимать, в соответствии с словоупотреблением той эпохи, не только извлечение корня, в нашем смысле слова, но и определение неизвестного из уравнения, в частности выражение одного неизвестного через какие-либо другие. Это можно поставить в связь с тем описанием решения задач, которое содержится в так называемом „Исчислении господина Декарта" (см. стр. 130 этого издания). Что касается понижения степени, упоминаемого Скаутеном, то, быть может, он имеет в виду деление левой части уравнения на двучлен формы $x-a$, о котором рассказывается в третьей части „*Геометрии*" (стр. 77).

В одной рукописи от 1619—1621 гг. Декарт говорит о „приведении с помощью деления (reductio per divisionem)" при удалении второго члена из уравнения, в современной записи имеющего форму

$$z^3=a_2z^2+a_1z+a_0.$$

Декарт, вероятно, производил преобразование корня („деление") посредством подстановки $z=\frac{a_2}{3}x$, после чего уравнение приводилось к

$$x^3=\pm 3x^2+\frac{9a_1}{a_2^2}x+\frac{27a_0}{a_2^3},$$

затем полагал $x=y\pm 1$ и получал уравнение вида

$$y^3=b_1y+b_2.$$

См. Oeuvres, т. X, стр. 244—246.

[17] (к стр. 16). Плоскими называли задачи, разрешаемые посредством прямой и окружности. Термин этот, возникший у греков, связан, вероятно, с тем, что такие задачи (приводящие

к уравнениям 2 степени) выражались древними с помощью отношений между площадями, лежащими в плоскости. Отсюда же термин „плоское место". Но возможно, что плоскими эти задачи называли потому, что служащие для их построения прямая и окружность с самого начала рассматривались как планиметрические линии. См. Цейтен, ч. I, стр. 145, 146.

[18] (к стр. 16). Термины „гипотенуза" и „катет", появившиеся у греков, свободно применялись в XVII в. Декарт, однако, здесь называет катеты „сторонами" (les costés), а гипотенузу — „основанием" (la baze) См. Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, пер. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, М. 1936, 2-е издание, стр. 94, 95.

[19] (к стр. 16). Второй, отрицательный корень Декарт здесь во внимание не принимает, но в третьей книге отрицательные корни употребляются и строятся.

Скаутен приводит второй корень, „меньший, чем нуль, и называемый г. Декартом ложным", и доказывает его существование проверкой — возведением в квадрат. Корень этот, согласно Скаутену, изображается отрезком *PM*, но на самом деле этот отрезок дает лишь абсолютную величину второго корня. Аналогичные указания он делает и по поводу следующих далее уравнений. См. „*Geometria*", стр. 162, 163.

[20] (к стр. 17). В этом случае уравнение имеет мнимые корни; об отношении Декарта к ним см. книгу III и прим. 92.

[21] (к стр. 18). Папп — выдающийся александрийский математик конца III в. н. э. — эпохи эпигонства и нарастающего упадка античной культуры и науки. Уцелевшее — не полностью — „Собрание" Паппа представляет огромную ценность для истории математики, ибо прямо или косвенно знакомит с содержанием ряда более ранних неразысканных сочинений первоклассной важности. См. Цейтен, ч. I, стр. 35 и статью В. Бобынина „Папп" в Энциклопедическом словаре Брокгауза-Ефрона, т. 44, 1897 г.

[22] (к стр. 18). Эвклид — александрийский ученый, живший около 300 г. до н. э. Его „Начала" подвели итог наиболее крупным элементарно геометрическим и в значительной части арифметическим и алгебраическим изысканиям древних и служили основой изучения математики в продолжение 2000 лет. См. Цейтен, ч. I.

[23] (к стр. 18) Аполлоний Пергский — великий греческий геометр второй половины III в. до н. э., автор основоположного труда „Конические сечения", из 8 книг которого сохранились полностью первые 7. См. Цейтен, ч. I.

[24] (к стр. 18). Перевод, которым пользовался Декарт, неточен. Здесь должно быть не „в его III книге", а „по поводу его III книги". Вот собственные слова Аполлония из вступления к I книге „Конических сечений": „III книга содержит ряд замечательных теорем, полезных для синтеза телесных мест и определений условий возможности задач. Большинство этих теорем и притом наилучшие — новы; открытие их показало нам, что Эвклид не выполнил синтеза места к 3 и 4 линиям, но дал лишь синтез части этого места, взятой случайным образом, и что он даже и с ним не вполне справился, ибо без наших открытий не было возможности выполнить полный синтез".

[25] (к стр. 20). Телесными называли задачи, разрешаемые посредством конических сечений. Термин этот, возникший у греков, связан, вероятно, с тем, что эти задачи, приводящиеся к уравнениям 3 (или 4 степени), выражались отношениями между параллелепипедами. Отсюда же термин „телесное место" для обозначения конических сечений. Но возможно, что телесными эти задачи называли потому, что служащие для их решения конические сечения первоначально были определены именно как сечения тела — конуса. Остальные кривые древние называли линейными местами. См. Цейтен, ч. I, стр. 145, 146.

[26] (к стр. 20). Пользуясь новым изданием Паппа, П. Таннери в примечании к *„Геометрии"* Декарта (Oeuvres, т. VI, стр. 721—722) переводит это место совершенно иначе: „И не было дано синтеза ни для одной из этих линий, ни показано, что он пригодился бы для этих мест, даже для той линии, которая, казалось бы, является первой и наиболее естественно встречающейся".

Возможно, что здесь синтез понимается только в смысле способа построения, потому что о доказательстве приводимых предложений (как это явствует из контекста) речь идет особо; Папп замечает, повидимому, что не было дано ни синтеза, ни доказательства его достаточности.

Об анализе и синтезе у древних см. Цейтен, ч. I, стр. 72—80.

[27] (к стр. 21). Во французском переводе Таннери здесь еще добавлено: „говоря о заключенном такими-то линиями по отношению к квадрату такой-то прямой или к заключенному такими-то другими" (Oeuvres, т. VI, стр. 722).

[28] (к стр. 21). Сложное или составное отношение соответствовало у древних нашему произведению. Так, составленное из двух отношений $a:b$ и $b:c$ сложное отношение представляло $a:c$. То, что теперь называют произведением двух или трех чисел, греки выражали с помощью площадей прямоугольников или объемов параллелепипедов, либо же с помощью таких сложных отношений. Последний способ имел то преимущество, что был пригоден при любом числе сомножителей. Выражение „прямоугольник" вместо „произведение" удержалось вплоть до XVII в. См. Цейтен, ч. I, стр. 103—105.

[29] (к стр. 22). Здесь Декарт говорит о „произведении" сомножителей. Собственный его оборот речи таков: ce qui se produist lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre. Латинские термины producere, productum часто встречаются уже с XIII в., слова multiplicare, multiplicatio — в I в. н. э. См. Tropfke, цит. соч., т. I, стр. 77, 78.

[30] (к стр. 23). Относительно истории задачи Паппа, послужившей для Декарта пробным камнем силы изобретенного им математического метода, Таннери пишет следующее (Oeuvres, т. VI, стр. 722—724). „Способ, посредством которого древние изучали место к трем или четырем прямым, был мастерски разъяснен в замечательном сочинении г. Цейтена из Копенгагена, переведенном на немецкий г. Фишер-Бенцоном под заглавием Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum. Поэтому мы отметим здесь лишь то, что в словах Аполлония и Паппа могло

ввести в XVII в. в заблуждение относительно подлинной истории этой задачи.

Она, по всей вероятности, была поставлена и решена посредством геометрического анализа древних в одном сочинении, несколько предшествующем времени Эвклида, именно в пяти книгах „*Телесных мест*“ Аристея... Синтез, весь ход которого указывался анализом, был интересен лишь в качестве упражнения или приложения к отдельным данным; но было важно объединить и установить различные необходимые теоремы либо для облегчения синтеза, либо для придания ему полноты. Именно это (а не сам синтез) и было, повидимому, той целью, которую поставил себе Эвклид в части четырех книг его „*Конических сечений*“, — сочинении, уже более не изучавшемся во времена Паппа; Эвклид, повидимому, ограничился в них тем, что объединил синтетические труды более древних геометров, в частности для облегчения изучения „*Телесных мест*“ Аристея. Аполлоний в третьей книге „*Конических сечений*“ дополнил оставленную незавершенной теорию (одним из больших его достижений было, в частности, одновременное исследование двух противолежащих гипербол, или, как выражаемся мы, двух ветвей одной гиперболы); но эта книга могла быть использована в вопросе о месте к трем или четырем прямым лишь в том случае, если было уже известно аналитическое решение, которое одно лишь могло пролить свет на подлинное значение теорем Аполлония и на способ их применения.

В начале XVII в. математики, не располагавшие более ни сочинением Аристея, ни „*Коническими сечениями*“ Эвклида и имевшие на руках лишь четыре первые книги Аполлония, да весьма недостаточные указания Паппа, должны были для решения вопроса о месте к трем или четырем прямым, заново открыть древний анализ, приемы которого им были неизвестны, или же дойти до поистине трудной догадки. Поэтому для иллюстрации употребления нового аналитического метода, задуманного Декартом с целью облегчить приложение алгебраического исчисления к геометрии, он не мог бы найти более разительного примера, чем это геометрическое место.

Задача была поставлена Голиусом перед Мидоржем по крайней мере уже в 1630 г. (Oeuvres, т. I, стр. 256, строка 18) и перед Декартом в 1631 г. (т. I, стр. 232—235). Еще до выхода „*Геометрии*“ Декарт указывает на нее Мерсенну (1588—1648) в 1632 и 1634 гг. как на задачу, которую следует предложить Робервалю (т. I, стр. 256 и 288). Ферма решил ее ранее 1637 г. по образцу древних (Oeuvres de Fermat, т. II, стр. 105, строка 2); сохранилось лишь очень изящное его решение для места к трем прямым. Роберваль занялся ею, повидимому, позднее; но 4 августа 1640 г. (Oeuvres de Fermat, т. II, стр. 201, строка 8) он писал Ферма: „После этого открытия (именно — его метода касательных. *П. Т.*) я взялся за телесные места ad tres et quatuor lineas, которые я полностью восстановил, хотя, чтобы ничто не было опущено, требуется не меньше рассуждений, чем в первых шести книгах „Начал“. Таким образом он должен был дать полный синтез“.

Декарт решил задачу Паппа в конце 1631 г.; это видно из письма к Голиусу от января 1632 г. (т. I, стр. 233, 234), где он сжато формулирует основные результаты исследования. — Я. К. Голиус (Gool) — профессор математики и восточных языков в Лейдене (1596—1667).

О задаче Паппа у древних см. также Цейтен, ч. I, стр. 146—148.

[31] (к стр. 24). У Декарта здесь стоит mais toutes celles qui sont d'un degré plus composées y peuvent servir. Перевод Скаутена передает мысль Декарта точнее: quemadmodum etiam nulla earum imaginari licet, quae ibidem utilis esse non possit („*Geometria*", стр. 12).

[32] (к стр. 24). В общем виде задача Паппа формулируется следующим образом. Дано $2n$ линий, имеющих в прямоугольной или косоугольной системе уравнения

$$d_i = a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{1}$$

Длины отрезков, проведенных из точки $M(x, y, z)$ к этим прямым под данными углами, отличаются от d_i лишь постоянными множителями, зависящими от величин a_i, b_i, c_i, угла между осями координат и данных углов (такие выражения и получает Декарт). Уравнение геометрического места к $2n$ прямым имеет поэтому вид

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \pm \lambda d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n}. \tag{2}$$

Аналогично для места к $2n-1$ прямой получается уравнение

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \pm \lambda d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n-1}. \tag{3}$$

Между прочим, это общее определение для места к трем прямым дало бы

$$d_1 d_2 = \pm \lambda d_3,$$

а не

$$d_1 d_2 = \pm \lambda d_3^2,$$

как его определяет Папп.

У Декарта отсутствует наш двойной знак $\pm$, его заменяет в соответствующем пункте исследования замечание, что точки геометрического места следует представлять себе в различных углах (четвертях). См. стр. 25, 26 настоящего издания.

Декарт справедливо говорит, что место к $2n$ или $2n-1$ прямым является, если воспользоваться современной терминологией, алгебраической кривой. Но классифицирует кривые Декарт по-иному, объединяя кривые порядка $2n-1$ и $2n$ в один „род".

Утверждения относительно построения точек этих кривых он доказывает ниже (стр. 27). Если, например, рассматривается место к 3, 4 или 5 прямым, то, выбрав одну из них за ось абсцисс, так, чтобы один из множителей левой части уравнения оказался просто y, и придавая какое-либо значение y, мы для определения x получаем квадратное уравнение, и точки места, следовательно, строятся циркулем и линейкой. Но в случае пяти параллельных прямых уравнение места, не содержащее теперь x, оказывается относительно y кубическим:

$$y(y + c_1)(y + c_2) = \pm \lambda (y + c_3)(y + c_4), \tag{4}$$

и здесь для построения необходимо, вообще говоря, прибегнуть к коническим сечениям.

Вместе с тем Декарт ошибается, полагая, что всякая кривая n-го порядка (в нашем смысле слова) представляет собой геометрическое место к $2n$ прямым. В общем случае при $n>4$ это неверно. Если в (2) подставить значения d_i из (1) и разделить обе стороны на $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, то получится уравнение вида

$$(x+k_1y+l_1)(x+k_2y+l_2)\ldots(x+k_ny+l_n)=$$
$$=\pm\lambda(x+k_{n+1}y+l_{n+1})\ldots(x+k_{2n}y+l_{2n}). \qquad (5)$$

Это уравнение содержит $4n+1$ величину k_i, l_i, λ. Общее уравнение кривой n-го порядка содержит $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ коэфициентов; для того чтобы представить его в виде (5), нужно определить $4n+1$ величину k_i, l_i, λ из $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ уравнений. Эта задача разрешима при $n\leqslant 4$, но при $n>4$ число уравнений превосходит число неизвестных и система, вообще говоря, несовместна.

Декарт не заметил, что построение точек места к 6 прямым также представляет собою плоскую задачу (см. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII вв., пер. П. Новикова под ред. М. Выгодского, М. 1933, стр. 204, 205; в дальнейшем цитируется как Цейтен, ч. II).

[33] (к стр. 27). У Скаутена добавлено „aut etiam unam", т. е. „или же одно" („*Geometria*", стр. 15).

[34] (к стр. 30). Декарт, видящий задачу геометрии в познании мер всех тел, включает в нее те кривые, для которых можно точно узнать их меру, понимая под ними линии, выражаемые алгебраическими уравнениями. Все точки таких линий можно путем отнесения к прямым — нашим осям координат — определить с помощью двух движений, зависимость между которыми точно выражается алгебраическим уравнением (других Декарт не знал). „Геометрические кривые" Лейбниц в 1684 г. (Leibnizens mathematische Schriften, изд. Gerhardt, Halle, 1859, т. V, стр. 123) назвал алгебраическими: „Кривые из числа тех, природа которых или же отношение между ординатой и абсциссой, может быть выражена алгебраическим уравнением, т. е. уравнением определенной степени, и которые Декарт называл геометрическими, я, руководясь важными основаниями, имею обыкновение называть алгебраическими". (Лейбниц возражал против изгнания трансцендентных линий из геометрии.) Расширив область геометрии бесчисленным множеством новых линий, Декарт, однако, не допустил в нее „механические кривые", вроде спирали Архимеда, квадратрисы и т. п., ибо порождающие их круговые и прямолинейные равномерные движения невозможно точно связать алгебраическим уравнением. Это было естественно для Декарта, ибо применить к изучению их, к проведению к ним касательных и т. п. свой, алгебраический метод, претендовавший на значение общего метода геометрического исследования, он не мог. Установленное Декартом ограничение предмета геометрии отразилось на том, что современная аналитическая геометрия в собственном смысле слова изучает лишь

алгебраические кривые, обладающие рядом специфических свойств, выделяющих их из всей совокупности линий. Такое ограничение геометрии не помешало Декарту глубоко исследовать ряд свойств циклоиды (см. стр. 183—192 этого издания).—Термин „механические" линии был вытеснен предложенным в 1686 г. Лейбницем словом „трансцендентные" (Leibnizens math. Schrift, т. V, стр. 228, 229).

[85] (к стр. 30). Спираль, изобретенная и изученная Архимедом, — трансцендентная линия, описываемая точкой, равномерно движущейся по прямой, равномерно вращающейся вокруг какой-либо своей неподвижной точки. Уравнение ее в полярных координатах $\rho = a\varphi$ было записано в конце XVII в.

[86] (к стр. 30). Квадратриса Динострата (IV в. до н. э.) — трансцендентная кривая, служившая в древности для построения задачи о квадратуре круга и о трисекции угла. В квадрат $ABCD$ вписывается четверть круга; радиус $AB = r$ равномерно вращается вокруг центра A, сторона BC равномерно движется параллельно самой себе вдоль AB; при этом AB и BC совпадают с AD одновременно. Квадратрисой является геометрическое место точек пересечения этих движущихся прямых. Ее полярное уравнение будет $\rho = \frac{2r}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$; в прямоугольных координатах оно имеет вид $y = x \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2r}$. Открыл квадратрису Гиппий из Элиды (V в.).

[87] (к стр. 31). Если из данной точки A проводить прямые AM, пересекающие данную прямую CD, и от точек их пересечения N откладывать на AM в обе стороны отрезки данной длины $NM = b$, то геометрическое место точек M будет конхоидой Никомеда (греческий математик, живший около 180 г. до н. э.). При $AB = a$ ($AB \perp CD$) уравнение ее в прямоугольных координатах будет $(x-a)^2(x^2+y^2) - b^2x^2 = 0$, в полярных $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$. „Первая" конхоида соответствует знаку $+$ в последнем уравнении, „вторая" — знаку минус, при $b < a$.

[88] (к стр. 31). Даны круг с центром O, два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD и касательная в конце D диаметра CD. Если из точки C проводить прямые CM, пересекающие касательную в E и окружность в F, то точки M циссоиды Диоклеса (греческий математик, живший около 180 г. до н. э.) получатся при отложении на отрезках CF в левую сторону $EM = CE$; при этом $CM = EF$. Уравнение ее имеет вид $x^3 = y^2(2a - x)$, где a — радиус круга.

Об истории названных выше кривых см. G. Loria, „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte", тт. I, II, 2-е изд., Leipzig 1910, 1911.

[89] (к стр. 31). В латинском издании стоит XYZ.

[90] (к стр. 32). В латинском издании добавлена буква E.

[91] (к стр. 32). Этот инструмент был изобретен Декартом между 1619 и 1621 гг. Декарт описывает его в Cogitationes privatae и пользуется им для построения корней уравнения $x^3 = x + 2$ (Oeuvres, т. X, стр. 234—240). В начале третьей части *„Геометрии"* Декарт употребляет его для построения любого числа средних

пропорциональных. Несколько иной, но напоминающий по идее декартов, механизм придумал для построения двух средних пропорциональных александрийский математик, астроном и географ Эратосфен (276—196 гг. до н. э.), назвавший его мезолабием. Описание мезолабия дал Эвтокий Аскалонский (около 540 г.) в сохранившемся комментарии к сочинению Архимеда „О шаре и цилиндре". Слово мезолабий употребляет иногда (Oeuvres, т. X, стр. 238, 239) и Декарт. Уравнения линий, описываемых этим инструментом, таковы

$$r^2(x^2+y^2)^{2x-1} = x^{4k} \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

См. также статью В. Бобынина „Мезолабий" в Энциклопедическом словаре Брокгауза-Ефрона, т. 16, 1896.

[42] (к стр. 33). Декарт первый понял значение классификации всех геометрических кривых, которую он связал с порядком выражающих их уравнений. Однако применяемая им группировка по родам, каждый из которых обнимает по два наших порядка, не имеет смысла. К созданию такой классификации Декарта привело то, что уравнение четвертой степени приводится к уравнению третьей, что, как он думал, уравнение шестой степени приводится к уравнению пятой и т. д. (стр. 35 этого издания).

Ферма, согласный с Декартом в вопросе о сводимости уравнений степени $2n$ с одним неизвестным, считал ее невозможной в общем случае для уравнений, содержащих две неизвестные, т. е. для уравнений кривых (см. Oeuvres de Fermat, т. I, стр. 119—120). — Современная классификация линий по порядку их уравнений была дана Ньютоном в „Enumeratio lineis tertii ordinis", 1704.

[43] (к стр. 34). Ниже следует первый пример составления уравнения кривой по ее свойствам. Здесь, как и в начатом, но не доведенном еще до конца разборе задачи Паппа, одна прямая — именно горизонтальная — берется за ось y и на ней выбирается начало отсчета; расстояния точек кривой от нее, отмеряемые в некотором направлении, обозначаются x. В данном примере система берется прямоугольной. Вторая ось не проводится. Начиная с этого примера, координаты неизменно обозначаются x и y. Термины „абсцисса", „ордината" в *„Геометрии"* Декарта еще не употребляются. Вместо них служат названия „segmens de diametre" и „appliqué par ordre" (в латинском издании quae ad diametrum ordinatim adplicantur). Эти названия связаны с греческой терминологией учения о конических сечениях, к которым и приложен был координатный метод в первую очередь. Аполлоний называл сопряженные с диаметром конического сечения параллельные хорды „по порядку проведенными линиями", а отрезки диаметра между концом его и точками пересечения с сопряженными хордами — „отсекаемыми на диаметре по порядку проведенными" прямыми. В латинском издании Аполлония, данном Федериго Коммандино (1566), эти обороты речи были переведены „ordinatim applicatae" и „quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur". Отсюда терминология Декарта. В переписке Декарт употреблял позднее и слово „ordonnée", например, в приведенном выше письме к Гарди от июня 1638 г. — Слова „абсцисса" и „ордината" ввел в употребление Лейбниц (1675 и 1684 гг., Leibnizens, math.

Schrift., т. V, стр. 123), ему же принадлежит слово coordinates (1692 г., там же, т. V, стр. 268) — и применительно не только к прямолинейным, но и к любым криволинейным координатам. Декарт не знает еще отрицательных абсцисс, но отрицательные ординаты ему известны (см. прим. 68). Вторая ось введена была впервые в 1730 г. в „Commentaires sur la Geometrie de M. Descartes" Кл. Рабюеля (1669—1728). Он же первый сформулировал печатно правило знаков координат. См. H. Wieleitner, ч. II, вып. 2, стр. 26—27, 43—45.

[44] (к стр. 34). Вряд ли Декарт обладал полным доказательством теоремы об инвариантности порядка кривой относительно системы прямолинейных координат. Г. Вилейтнер думает, что Декарт владел параллельным переносом системы, „хотя у него нет ни одного соответствующего примера. Но мы имеем основание сомневаться в том, что Декарт владел также и случаем с вращением осей координат, несмотря на его замечание, что это легко доказать" (Г. Вилейтнер, „Хрестоматия по истории математики", М. 1936, 2-е издание, стр. 140).

В комментарии Скаутена эта теорема подвергнута более подробному рассмотрению. Он переносит, как мы бы сказали, начало координат в точку $(-a, 0)$ и вращает систему по часовой стрелке на угол α, так что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ (ось абсцисс горизонтальна). Далее он выражает новые ординату и абсциссу через старые формулы $\frac{ab+bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{a^2+ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}$; они тотчас же принимают современный вид при введении тригонометрических функций. Доказательство инвариантности, вероятно, представлялось Скаутену вытекающим из линейного характера формул преобразования. Но он не проводит необходимых рассуждений и даже не дает формул, выражающих старые координаты через новые. См. „*Geometria*", стр. 176—178 и Г. Вилейтнер, Хрестоматия ..., стр. 147—150.

[45] (к стр. 35). Скаутен дает построение этой гиперболы и ее асимптот и приводит другие примеры составления уравнений („*Geometria*", стр. 171—175).

[46] (к стр. 35). Утверждение, что род кривой, получающейся от пересечения указанных линий, на единицу выше, чем у движущейся кривой, неверно.

Пусть в подвижной системе координат с началом L уравнение данной кривой CK есть $f(x', y)=0$, причем абсциссы берутся вертикальными, а ординаты горизонтальными. Тогда, как легко следует из подобия треугольников, абсцисса $x'=AB$ точки описываемой кривой GCE в неподвижной системе координат с началом в A удовлетворяет уравнению $x'=\frac{xy}{a-y}$, так что уравнение GCE будет $f\left(\frac{xy}{a-y}, y\right)=0$. Указанную ошибку Декарта отметил еще на одном частном примере Ферма (Oeuvres de Fermat, т. I, стр. 121—122). Кривая, которая образуется, когда движущейся кривой является парабола с диаметром KB, имеет уравнение $y^3-2ay^2-a^2y+2a^3=axy$ (см. стр. 47 этого издания). Об этой

„параболе Декарта" („трезубец" по терминологии Ньютона) см. G. Loria, цит. соч., т. I.

[47] (к стр. 38). Когда коэфициенты уравнения суть многочлены, Декарт то объединяет их фигурной скобкой, располагая их друг под другом, то употребляет вертикальную черту (стр. 82 этого издания), то выписывает члены коэфициента сверху вниз без какого-либо объединяющего знака (стр. 87). Употребление скобок восходит еще к М. Штифелю. Односторонняя фигурная скобка при умножении употреблялась Виетой. Круглую скобку Декарт применял лишь под знаком радикала (см. прим. 7). В повседневное употребление круглые скобки ввел Лейбниц. См. Tropfke, цит. соч., т. II, стр. 27—33; Cajory, цит. соч., т. I.

[48] (к стр. 38). В оригинале se trouvoit nulle, ou moindre que rien.

[49] (к стр. 38). О замене $\frac{dezz+cfgz-bcgz}{ez^3-cgzz}$ на $\frac{2n}{z}$ Вилейтнер пишет: „Несмотря на свое первоначальное замечание, что нет надобности в соблюдении однородности выражений, Декарт все-таки обозначает отвлеченное число как отношение отрезков $\frac{n}{z}$. Но здесь это имеет то основание, что он все время имеет в виду геометрическое построение отрезка y по данному x. Поэтому естественно, что он считает более удобным выражение типа $\frac{n}{z}x$, которое немедленно может быть построено" (Г. Вилейтнер, Как рождалась современная математика, пер. А. А. Мочульского под ред. А. Я. Хинчина, М. 1933, 2-е изд., стр. 44).

[50] (к стр. 38). Знак минус перед $\frac{p}{m}$ поставлен Таннери. Он указывает, что этот минус отсутствует в первом издании и в издании Скаутена (Oeuvres, т. VI, стр. 399). Однако Скаутен не допускает ошибки, ибо в его переводе под радикалом в выражении для y стоит соответственно $\sqrt{mm+ox+\frac{p}{m}xx}$ (*„Geometria"*, стр. 27, 28). Точно так же поступает в своих Notae breves, приложенных к латинскому изданию *„Geometria"*, Дебон (стр. 116, 117). Можно полагать, что описка или опечатка вкралась у Декарта в подрадикальном выражении: естественнее вместо $\frac{nn}{zz}-\frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ писать $\frac{p}{m}$, чем $-\frac{p}{m}$.

[51] (к стр. 39). Получив в системе координат, в которой осью абсцисс служила прямая AB, началом — точка A, а ординаты брались параллельно BC, уравнение кривой в виде

$$y=m-\frac{n}{z}x+\sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx},$$

Декарт меняет систему координат. За новую ось абсцисс он принимает прямую MN, являющуюся диаметром кривой, сохраняя прежнее направление ординат; при этом все ординаты уменьшаются на величину $m-\frac{n}{z}x$. Абсциссы Декарт умножает на постоянную $\frac{a}{z}$. Начало координат будет находиться теперь в I, точке пересечения прямой MN с (отсутствующей у Декарта) прямой, проходящей через A параллельно ординатам. Эти преобразования можно записать уравнениями

$$LC=y'=y-\left(m-\frac{n}{z}x\right),\ IL=x'=\frac{a}{z}x.$$

В новых координатах x', y' уравнение приняло бы вид

$$y'=\sqrt{mm+\frac{ozx'}{a}-\frac{pzz}{maa}x'x'},$$

но Декарт пользуется уравнением

$$LG=\sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx},$$

связывающим y' и x.

Далее следует подробный анализ этого уравнения, показывающий, что место к 3 или 4 прямым или кривая первого рода является одним из конических сечений.

В последующем времени был сделан ряд дополнений и критических замечаний по поводу декартова анализа места к 4 прямым. Часть их отмечена ниже. В последний раз Декарт вернулся к задаче Паппа в 1649 г. в связи с некоторыми возражениями Роберваля. Большинство их было несправедливо или било мимо цели. Но в одном Роберваль углубил исследование Декарта. Он подробнее рассмотрел вопрос о возможности нахождения точки C в 4 разных углах и пришел к выводу, что геометрическое место может распадаться на два разных конических сечения. Для нас это ясно сразу из самых уравнений $d_1d_2=+\lambda d_3d_4$; $d_1d_2=-\lambda d_3d_4$ (см. прим. 32). Ср. переписку по этому поводу в т. V, стр. 373, 394—397, и замечания Таннери на стр. 422, 423. Возможность такого случая Декарт отрицал (в сентябре 1639 г., Oeuvres, т. II, стр. 576 и 580).

[52] (к стр. 40). Таннери указывает, что „слова в квадратных скобках, написанные по недосмотру, были опущены Скаутеном в издании 1659 г." (Oeuvres, т. VI, стр. 401).

[53] (к стр. 40). Декарт знает, таким образом, что уравнение первой степени выражает прямую, хотя и не выписывает его отдельно. У него, однако, нет представления о „вырождении" кривой второго порядка в пару (пересекающихся, параллельных, слившихся, при этом действительных или мнимых) прямых. Не встречается и указаний на возможность „вырождения" кривой в точку. Таннери, первоначально полагавший на основании одного места в письме Декарта от 31-III-1638, что этот случай был знаком Декарту (Oeuvres, т. II, стр. 84 сноска a), признал впоследствии свою догадку мало вероятной (Oeuvres, т. VI, стр. 725). Что

уравнение первой степени представляет прямую, было известно еще до выхода *„Геометрии“* Ферма (см. стр. 137 этого издания), но печатно выступил первым с таким общим утверждением Дебон в 1649 г. (*„Geometria“*, стр. 127). Он указал также впервые, что уравнения $x=c$ или $y=c$ выражают прямые, параллельные осям координат (там же, стр. 130).

[54] (к стр. 40). П. Таннери здесь замечает: „В этом втором случае прямая *IL*, как не пересекающая коническое сечение, не рассматривалась тогда как диаметр“ (Oeuvres, т. VI, стр. 401).

[55] (к стр. 40). „Прямая сторона“ (costé droit, latus rectum) конического сечения численно равна нашему удвоенному параметру. Слово „параметр“ ввел в учение о конических сечениях в 1631 г. Клод Мидорж (1585—1647), — его параметр вдвое больше нашего. Latus rectum — перевод греческого слова, обозначавшего у Аполлония отрезок, проходящий через конец диаметра, перпендикулярный к плоскости сечения и участвующий в его определении (см. Г. Вилейтнер „Хрестоматия ...“, стр. 124, 125).

[56] (к стр. 40). Здесь и далее Декарт ссылается на *„Конические сечения“* Аполлония, теоремы и определения которых являлись предпосылкой его исследования. Декарт не определяет конические сечения теми или иными свойствами с целью вывода их уравнения и последующего изучения этого уравнения. Он идет обратным путем, показывая, что уравнение второй степени выражает всегда какое-либо из конических сечений (или прямую). Таким образом некоторое определяющее свойство каждого из них предполагается известным. См. прим. 59.

Скаутен снабжает этот текст Декарта подробнейшими комментариями, давая построение соответствующих кривых (*„Geometria“*, стр. 181—225).

[57] (к стр. 41). „Поперечная сторона“ (costé traversant, latus transversus) есть диаметр конического сечения (не обязательно ось). Этот термин также восходит к Аполлонию (см. Вилейтнер, „Хрестоматия ...“, стр. 124—126).

[58] (к стр. 42). Декарт прошел мимо случая, когда уравнение второго порядка не содержит y^2 и x^2. Этот пробел частично восполнил в своих „Notae breves“ Ф. Дебон, показавший, что уравнение вида $axy+bx+cy+d=0$ представляет гиперболу при $a \neq 0$. У Дебона выписано 17 форм такого уравнения в соответствии с различными возможными знаками коэфициентов, но отсутствуют формы, в которых положительны все коэфициенты в уравнении с правой частью, равной нулю, а также $xy=0$. Впрочем, Дебон говорит, что мог бы вывести все 17 форм из одной $xy+cy+bx-df=0$ при различных знаках коэфициентов. Он упоминает также, что это уравнение не может получиться при рассмотрении задачи Паппа о месте к трем или четырем прямым; оно характеризует место точек, для которых произведение расстояний от двух взаимно перпендикулярных прямых пропорционально расстоянию от третьей, параллельной одной из них (*„Geometria“*, стр. 127—130).

Дебон послал свои Notae Декарту в начале 1639 г. и последний полностью одобрил их содержание. В письме от 20-II-1639 г. к Дебону Декарт сообщает: „я поистине могу сказать, что не нашел в них ни одного слова, с которыми бы не был вполне согласен" (Oeuvres, т. II, стр. 510). Декарт пишет также, что обнаруженный Дебоном пробел был плодом недосмотра. „Кроме того, я пропустил случай, когда нет yy и имеется лишь xy вместе с некоторыми другими членами, что всегда дает в качестве места гиперболу, для которой линия, названная мной AB, есть асимптота или параллельна асимптоте. И в уравнении на стр. 325 (стр. 38 этого издания), из которого я сделал образец для всех прочих, нет члена, составленного из известных величин; это хорошо для вопроса Паппа, ибо такой член никогда не получается тогда по способу, каким я его привел; но для того чтобы ничего не было пропущено касательно мест, таковой следовало поставить". Указав затем на некоторые другие допущенные им пропуски („я не дал анализа этих мест, а только их построение" и др.), Декарт прибавляет: „Впрочем, могу уверить, что все это я пропустил намеренно, кроме случая с асимптотой, про который забыл (que j'ay oublié)" (Oeuvres, т. II, стр. 511). Этот случай имел, вероятно, в виду Декарт, когда писал 31-III-1638 г. Мерсенну: „Впрочем, один случай, из числа наиболее легких, я пропустил в силу его чрезмерной простоты ... Мне легко будет добавить о нем в 3 словах во втором издании" (Oeuvres, т. II, стр. 84). К этому мнению склоняется Таннери (Oeuvres, т. VI, стр. 725). Я полагаю это тем более правдоподобным, что в январе 1638 г. Декарт смог узнать о своем пробеле по „Isagoge" Ферма, содержавшему разбор уравнения гиперболы, отнесенной к асимптотам. (См. Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 508 и стр. 139 настоящего издания.) Если это верно, то в письме к Мерсенну Декарт выразился „неточно", говоря, что он пропустил его в силу чрезмерной простоты.

[59] (к стр. 42). В теореме 13 книги I „*Конических сечений*" Аполлоний показывает, что замкнутое сечение косоугольного кругового конуса плоскостью, не параллельной ни его оси, ни образующей, обладает следующим свойством: квадрат полухорды, сопряженной с некоторым определенным диаметром, равен прямоугольнику, построенному на прямой стороне и отрезке диаметра между вершиной и этой полухордой, уменьшенному на прямоугольник, одна из сторон которого есть тот же отрезок диаметра, а другая относится к первой, как прямая сторона к диаметру. Это свойство лежит в основе всех дальнейших исследований, связанных с эллипсом; в дальнейшем изложении оно распространяется на любые диаметры и сопряженные с ними хорды. Если начало координат взять в левой вершине диаметра, принятого за ось OX, направление сопряженных хорд принять за направление ординат, обозначить прямую сторону через l, а длину диаметра через d, то сейчас же получается уравнение эллипса, отнесенного к вершине:

$$y^2 = lx - \frac{l}{d}x^2.$$

В теоремах 11 и 12 выводятся аналогичные свойства параболы и гиперболы, выражающиеся соответственно уравнениями

$$y^2 = lx + \frac{l}{d}x^2 \quad \text{и} \quad y^2 = lx.$$

См. Вилейтнер, Хрестоматия ..., стр. 124—130, Цейтен, ч. I, стр. 135—139. Первая книга *„Конических сечений"* Аполлония переведена частью на русский язык Ив. Ягодинским, Известия Северокавказского государственного университета, т. III (XV), 1928 г. Свободное употребление Декартом (и Ферма) косоугольных координат связано с тем, что определяющие свойства конических сечений были выведены Аполлонием для произвольных диаметров и сопряженных с ними хорд. Немного ниже у Декарта следует первый образец уравнения кривой с числовыми коэфициентами (ср. стр. 286).

[60] (к стр. 45). В одном из примеров, приведенных в комментариях Скаутена, требуется найти внутри равностороннего треугольника точку, для которой сумма перпендикуляров, опущенных на его стороны, равна высоте. Осью абсцисс служит основание, началом — левая вершина, за y берется перпендикуляр, опущенный из искомой точки на основание. Для определения точки, говорит Скаутен, должны быть два условия — уравнения: одно, определяющее x, другое, определяющее y. В силу того что ни для x, ни для y никаких условий не получается, точка может быть взята внутри треугольника, где угодно. Искомым местом оказывается ограниченная часть плоскости (*„Geometria"*, стр. 229). Заменяя сумму перпендикуляров определенными разностями, Скаутен распространяет задачу и на точки, лежащие вне треугольника, так что искомым местом является и вся бесконечная плоскость. В качестве кривой поверхности, получающейся при отсутствии двух условий, Скаутен приводит гиперболоид вращения, все точки которого обладают лишь одним свойством: разность расстояний их от двух данных точек, фокусов образующей гиперболы, постоянна (стр. 233).

Продолжая мысль Декарта, Скаутен говорит, что когда недостает трех условий, местом является тело. В примере требуется найти точку внутри тетраедра, для которой сумма перпендикуляров, опущенных на его грани, равна его высоте. Как и в случае правильного треугольника, требование выполняется для любой точки и местом служит ограниченное тело. При замене суммы на разность получается в качестве места все пространство (стр. 233, 234).

В связи с последней задачей, Скаутен мимоходом указывает на способ определения точки в пространстве: „для определения этой точки требуются три корня или неизвестные величины, из которых одна служит для определения длины перпендикуляра, опущенного из искомой точки на одну из плоскостей, а другие две для определения места этого перпендикуляра в этой же плоскости" (стр. 233, 234). Однако Скаутену не приходит еще мысль построить общую систему координат в пространстве; внимание его, как и Декарта, целиком поглощено вопросами плоской геометрии. Нет у него и уравнения поверхности, хотя по существу он был к тому весьма близок. Ф. Лагир (1640—1718), у которого в 1679 г. встречается уравнение поверхности, мог непосредственно исходить из Декарта и комментария Скаутена. Он даже получает его в примере с двумя „недостающими условиями" (см. Вилейтнер, Хрестоматия..., стр. 150—152).

[61] (к стр. 46). Здесь у Декарта имеется явная описка, les lignes cherchées, исправленная Скаутеном на datae lineae („*Geometria*", стр. 35).

[62] (к стр. 48). Таннери делает здесь следующее замечание: „Декарт очень ясно объясняет свое решение для рассмотренного им первого простого случая места к пяти прямым. Но что касается второго случая, то сказанное Декартом страдает неясностью,— вероятно, намеренной, а при буквальном понимании даже неточно. Предположив, что место отнесено к диаметру (допустим оси x) и сопряженной оси, проходящей через вершину (оси y), он говорит, что ординаты y равны ординатам конического сечения, абсциссы z которого образуют с соответствующими абсциссами x геометрического места постоянное произведение, скажем, m^2. Другими словами, тогда было бы

$$y^2 = 2pz - \frac{p}{a} z^2; \quad zx = m^2.$$

Но понятно, если только не принять член с z^2 равным нулю, то уравнение будет относительно x и y четвертой, а не третьей степени, как это должно быть для места к пяти линиям; а с другой стороны, если коническое сечение есть просто парабола $y^2 = 2pz$, то уравнение места примет вид $xy^2 = k^3$, что нельзя привести к виду, соответствующему случаю, изучаемому Декартом.

Он должен был взять четыре параллельные прямые симметрично относительно оси x и принять пересекающую их прямую за ось y. Тогда уравнения пяти прямых будут

$$y - a = 0, \quad y + a = 0, \quad y - b = 0, \quad y + b = 0, \quad x = 0,$$

а уравнение геометрического места:

$$x(y^2 - b^2) = m(y^2 - a^2).$$

Полагая $ma^2 = b^2c$, $c - m = n$, $x = c + x'$, это уравнение можно привести к виду $y^2 = \dfrac{b^2x'}{x' + n}$.

Полагая затем $x' + n = \dfrac{n^2}{z}$, имеем $y^2 = \dfrac{b^2}{n}(n - z)$. Таким образом мы действительно приходим к уравнению параболы; но только абсциссы геометрического места отсчитываются не от вершины, как говорит Декарт, а от точки пересечения оси x с перпендикуляром, служащим асимптотой для двух ветвей кривой" (Oeuvres, т. VI, стр. 725).

[63] (к стр. 49). У Декарта сказано: pour determiner l'esgalité ou la difference. У Скаутена: ad determinandam summam vel differentiam, т. е. для определения суммы или разности („*Geometria*", стр. 39). Таннери полагает, что следует читать „для определения равенства суммы или разности" (Oeuvres, т. VI, стр. 412, сноска).

[64] (к стр. 49). Декарт был уверен, что выразить длину окружности через радиус алгебраически невозможно и что вообще длины кривых алгебраически неопределимы. Первое вычисление

длины кривой — полукубической параболы $ay^2 = x^3$, — алгебраически выражающее дугу через координаты, дали почти одновременно около 1658 г. В. Нейль (1637—1670), Генрих фан-Гейрат (род. 1633) и Ферма. Из них опубликована была первой в 1659 г. работа Гейрата в виде письма к Скаутену; оно помещено в „*Geometria*", стр. 517—520. — См. Цейтен, II, стр. 284—288.

[65] (к стр. 50). Общим методом вычисления квадратур любых алгебраических кривых Декарт не располагал. О ряде выполненных им вычислений площадей, объемов и центров тяжести см. его письмо Мерсенну от 13-VII-1638 г. (стр. 181 этого издания).

[66] (к стр. 50). Вопрос о проведении нормалей к кривым у Декарта был тесно связан с его занятиями оптикой. Речь шла не об отыскании уравнения нормали, но о ее построении, для чего достаточно было определить отрезок, теперь называемый поднормалью. Этой задаче Декарт придавал огромное практическое значение. Вместе с тем она служила блестящим показателем силы его общего метода. Овладел методом построения нормалей Декарт не позднее 1629 г. Ср. Oeuvres, т. X, стр. 310—328.

Построение нормали основывается на методе неопределенных коэфициентов, — также крупнейшем открытии Декарта, и носит алгебраический характер. Чтобы найти нормаль в точке $M(a, b)$ кривой, он, представляя себе задачу решенной, вводит точку $N(c, 0)$ пересечения нормали с осью абсцисс. Уравнение окружности с центром в N и радиусом MN будет $(x-c)^2 + y^2 = (a-c)^2 + b^2$. Если бы NM не была нормалью в точке M, то окружность пересекала бы кривую по крайней мере еще в одной точке по соседству с M. Если же она, действительно, нормаль, то точки пересечения, соседние с M, сливаются с последней. Координаты общих точек окружности и кривой найдутся, если в уравнение кривой подставить значение y из уравнения окружности. При совпадении этих точек в M корень $x = a$ результирующего уравнения будет по меньшей мере двукратным, а это наложит на величину c некоторое условие.

Для определения c Декарт применяет метод неопределенных коэфициентов, который базируется на том, что тождественное равенство двух целых алгебраических многочленов влечет за собой тождество коэфициентов при членах одинаковой степени. Так как уравнение, определяющее абсциссы точек пересечения окружности и кривой, должно иметь двукратный корень $x = a$, то левая часть его должна содержать множитель $(x-a)^2$. Декарт приравнивает эту левую часть произведению из $(x-a)^2$ на многочлен со степенью на две единицы меньшей, чем эта левая часть, и с неопределенными коэфициентами. Сравнивая затем коэфициенты членов одинаковой степени, он получает уравнения, позволяющие найти введенные неопределенные величины и связанную с ними искомую c. Понятно, как важно для Декарта записывать все члены уравнения с одной стороны от знака равенства.

Способ Декарта, как понимал и его автор, годится в системе прямолинейных координат лишь для алгебраических кривых. Для проведения нормалей к трансцендентным линиям приходилось пользоваться специальными приемами, связанными с характером их образования. Интересно данное Декартом решение задачи о проведении касательной к циклоиде (см. стр. 188 этого издания). Общий метод проведения касательных был открыт вместе с диференциальным исчислением.

Одно упрощение приема Декарта, впрочем, бросилось в глаза сразу. Его удобнее прилагать к проведению касательной, находя условие, при котором сливаются в одну точку точки пересечения данной кривой и прямой линии, уравнение которой — лишь первой степени. Такой способ излагает в своих комментариях Скаутен („*Geometria*", стр. 246, 247). Впрочем, он был известен Декарту и Ферма раньше (см. стр. 157 и сл. этого издания). Этот прием можно и теперь найти в учебниках и задачниках по аналитической геометрии, когда хотят обойтись без применения диференциального исчисления.

Связанная с декартовым способом определения нормалей задача об отыскании кратных корней алгебраических уравнений привела Иог. Гудде к интересным исследованиям, также приложенным в скаутеновском издании „*Геометрии*". Для нахождения двукратных алгебраических корней уравнения $f(x)=0$ Гудде пользуется правилом, вычисления которого совпадают с нашими, т. е. определяет общий делитель уравнений $f(x)=0$ и $f'(x)=0$, [$f'(x)$ Гудде образует путем умножения членов первого уравнения на члены арифметической прогрессии]. („*Geometria*", стр. 433, 434). Аналогичное правило употребляется для нахождения трехкратных корней (стр. 435); затем оно применяется к исследованию наибольших и наименьших значений (стр. 509 и след.). Общего доказательства Гудде не опубликовал. См. также Цейтен, ч. II., стр. 318, 319.

Метод неопределенных коэфициентов Декарт применил, по всей вероятности, и для решения уравнения четвертой степени (стр. 88 этого издания). Более широкое употребление он получил впервые у Ньютона с блестящим успехом приложившего его при разложении в бесконечные ряды, при обращении рядов, интегрировании диференциальных уравнений и пр., а несколько позднее Лейбницем. См. Is. Newtoni, Opuscula mathematica etc., т. I, 1744 и Цейтен, ч. II стр. 352—357, 368—370, 404, 405.

[67] (к стр. 53). В этом примере речь идет об уравнении формы $x=f(r-e)$, где $x=AM$—обычная абсцисса, а $r=CF$—радиус-вектор точки кривой относительно лежащей на оси x точки F. Кривая принадлежит к так называемым овалам Декарта, изучаемым им ниже. Если положить $FC=r$, $GC=r_1$, то из определяющего свойства $\dfrac{CF-FA}{GA-GC}=\dfrac{d}{e}$, где $FA=c$, $GA=b$, следует уравнение ее в биполярной системе $er+dr_1=ae+db$ (см. прим. 72).

[68] (к стр. 54). У Декарта renversée, у Скаутена inversa („*Geometria*", стр. 45). Таким образом ординаты, расположенные по обратную сторону от оси абсцисс, соответствуют здесь отрицательным числам. Однако, как было сказано, отрицательные абсциссы Декарт не рассматривал.

[69] (к стр. 56). Конечно, здесь проще было бы воспользоваться сразу тем, что левая сторона есть полный квадрат.

[70] (к стр. 59). Скаутен сопровождает это место обширным комментарием. Выведя уравнение конхоиды, при $BH=x$ и $HC=y$, $AB=b$ и $CE=c$, получающее вид $x^2y^2=b^2c^2+2bc^2y+(c^2-b^2)y^2-$ $-2by^3-y^4$, он сперва дает доказательство построения общим спо-

собом Декарта („*Geometria*", стр. 249—253). Приводит он и другое доказательство „по способу Ферма", в котором требует, чтобы отрезок CP (P—точка пересечения нормали и EA) был минимальным (стр. 253—255). На стр. 258 и след. он еще приводит доказательство построения ее точек перегиба, предложенного Христ. Гюйгенсом (1629—1695). Он опирается на то, что в точке перегиба сливаются три точки пересечения конхоиды и прямой, так что соответствующее уравнение, определяющее эти точки, должно иметь три равных корня (стр. 259—262). Впервые способ нахождения точек перегиба дал Ферма. См. Цейтен, ч. II, стр. 324—325.

Цейтен полагает, что построение нормали к конхоиде Декарт получил сперва инфинитезимальным путем. Если положить $AC=r$, $HC=y$, $EC=a$, $AB=b$, то из подобия треугольников CHE и ABE находим

$$(r-a)y=ab,$$

откуда, диференцируя по какому-либо аргументу, например, — времени, получаем

$$\frac{dy}{y}=-\frac{d(r-a)}{r-a}.$$

Таким образом $HC=CF=y$ и $FG=AE=r-a$ относятся как проекции скорости движущейся по конхоиде точки C на направления HC и CA. Так как dy и $d(r-a)$ пропорциональны проекциям скорости точки C на эти направления, то они пропорциональны косинусам углов, образуемых с этими прямыми касательной, или же синусам углов, образуемых с ними нормалью. Следовательно, CG, третья сторона треугольника CFG, в котором стороны $CF=CH$ и $FG=AE$ относятся, как синусы углов, образуемых ими с нормалью, сама будет нормальна к кривой. См. Цейтен, ч. II, стр. 313—315 и ниже прим. 72.

[71] (к стр. 59). Катоптрика — часть оптики, изучающая законы отражения света; диоптрика изучает законы преломления света. Основной закон диоптрики, гласящий, что отношение синусов углов, образуемых преломляемым и преломленным лучами с нормалью к преломляющей кривой, для данных двух сред постоянно, был открыт Виллебрордом Снеллем (1581—1626) около 1620 г. и независимо от него, но несколько позднее, Декартом (вероятно, около 1628 г.). Опубликовал его Декарт в „Диоптрике", вышедшей в 1637 г. вместе с „*Геометрией*" в качестве приложения к „Рассуждению о методе".

[72] (к стр. 61). Положим данные отношения $\frac{A6}{A5}=\frac{m}{n}$, $AG=q$, примем, для введения биполярной системы координат, за полюсы точки F и G, точку I назовем M и обозначим $MG=r_1$ и $MF=r_2$. Тогда $r_1=MG=K6=AK-A6=q-A6=q-\frac{m}{n}A5$ и $r_2=MF=$ $=F5=AF+A5=p+A5$. Следовательно,

$$nr_1+mr_2=mp+nq=\text{const}.$$

Если считать радиусы-векторы r_1, r_2 положительными, взять $k<1$ и обозначить расстояние между фокусами через d, то биполярные уравнения всех четырех видов овалов можно представить так:

$$(1)\quad r_1+kr_2=q+kp,\quad q+p=d,$$
$$(2)\quad r_1-kr_2=q-kp,\quad q+p=d,$$
$$(3)\quad r_1-kr_2=q-kp,\quad q-p=d,$$
$$(4)\quad r_1+kr_2=q+kp,\quad q-p=d.$$

Таннери указывает, что классификация Декарта, отвечающая его целям, лишена теоретического значения. Существует лишь два вида овалов, причем встречаются они сопряженными парами, каждая из которых выражается одним уравнением (четвертой степени в прямолинейных координатах и линейным в биполярных, если допустить отрицательные радиусы-векторы). Одна из кривых (сердцевидная, 2 и 3 роды Декарта) всегда объемлет другую, подлинный овал (3 и 4 роды), если только все три фокуса (один — внешний, два — внутренних) находятся друг от друга на конечном расстоянии. Наличие трех фокусов было известно и Декарту. Овалы третьего и четвертого рода геометрически тождественны с овалами второго и, соответственно, первого родов. Различие, устанавливаемое Декартом, связано лишь с выбором фокусов, служащих полюсами. Так овал, принадлежащий к первому роду при отнесении его к внешнему и внутреннему фокусам, оказывается овалом четвертого рода, если отнести его к двум внутренним фокусам. См. замечания Таннери, Oeuvres, т. X, стр. 325—328.

Наибольший интерес представляли для Декарта излагаемые им ниже свойства нормалей к этим овалам. Нормаль в точке M образует с обоими радиусами-векторами углы, синусы которых относятся, как m к n, так что если овал разделяет две среды с показателем преломления $\frac{m}{n}$, то все лучи, исходящие из одного фокуса F, будут встречаться по преломлении в другом фокусе G. В связи с этим, позднее декартовы овалы получили наименование апланетических, т. е. неотклоняющих кривых. Практического употребления в оптике эти овалы, однако, не получили. Подробности см. у G. Loria, цит. соч., т. I.

Декарт пришел к своим овалам в поисках кривых, обладающих указанным оптическим свойством. Остроумно восстанавливая ход мыслей Декарта, Цейтен принимает, что последний знал, что величины, которые мы могли бы обозначить через dr_1 и dr_2 и которые пропорциональны проекциям скорости, движущейся по кривой точке, на радиусы-векторы, пропорциональны косинусам углов, образуемых с ними касательной, или синусам углов, образуемых нормалью. „В соответствии с этим, пишет он, Декарт нашел, что нормаль к кривым, изображаемым уравнениями вида

$$ar+br_1+c=0$$

и получившим имя декартовых овалов, делит угол между радиусами-векторами на части, синусы которых относятся, как b к a. Несомненно, что первоначально он получил этот результат, исходя из прямых геометрических инфинитезимальных соображений ... Задача, поставленная и решенная Декартом, была задачей, обратной той, которую он решает алгебраическим методом; она формулируется так: найти кривую, нормаль к которой в любой ее точке обладает тем свойством, что отношение между синусами углов, образуемых ею с прямыми, соединяющими точку с двумя данными точками, имеет данное значение". (Цейтен, ч. II, стр. 314).

Своеобразное обозначение точек цифрами привело впоследствии Лейбница к изобретению индексации букв.

[73] (к стр. 65). Декарт называет фокусы poins brûlans. Слово focus (очаг) ввел в 1609 г. Иог. Кеплер (1571—1630).

[74] (к (стр. 67). Эта запись обозначает

$$b+\frac{-bcdd+bcde-bddz-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}.$$

[75] (к стр. 68). У Декарта: en un mesme point; у Скаутена in alio puncto („*Geometria*", стр. 60).

[76] (к стр. 68). У Скаутена слова „от одной точки к другой" отсутствуют („*Geometria*", стр. 61).

[77] (к стр. 73). Здесь Декарт касается вопроса о распространении своего метода на линии в пространстве трех измерений. Он замечает лишь, что пространственную кривую можно задать с помощью ортогональных проекций ее на две взаимно перпендикулярные плоскости. Эти проекции относятся затем к принимаемой за ось абсцисс общей прямой двух плоскостей. По существу он этим ограничивается. Выделение более элементарных, и вместе с тем более фундаментальных, частей геометрии в пространстве — установление трех координат точки и теория поверхностей — весьма далеко от его внимания. Нет у Декарта и уравнений тех цилиндрических поверхностей, с помощью которых можно по его способу определить пространственную кривую.

Первое уравнение поверхности, как было сказано в прим. 60, встречается у Ф. Лагира. Несколько богаче содержанием работа А. Парана (1666—1716) от 1700 г., где выводится уравнение сферической поверхности; он рассмотрел также касательную плоскость к ней. Настоящие основы аналитической геометрии в пространстве были заложены и развиты в опубликованных в 1731 г. „Recherches sur les courbes à double courbure" А. Клеро (1713—1765), написавшего их в юношеском возрасте. См. H. Wieleitner, ч. II, выпуск 2, стр. 47—53.

Насколько неглубоко продумал Декарт вопросы пространственной геометрии, показывает ошибочное утверждение, будто проекции нормали к пространственной кривой на две взаимно перпендикулярные плоскости являются нормалями к проекциям самой кривой. Декарт не отмечает, что неплоская кривая обладает бесчисленным множеством нормалей, образующих нормальную плоскость. Даже для плоской кривой, рассматриваемой в пространстве, утверждение Декарта неверно. Проекциями касательной будут, действительно, касательные к проекциям кривой (не здесь ли корень ошибки Декарта?), но угол между проекцией нормали и проекцией касательной не будет, вообще говоря, прямым.

[78] (к стр. 75). У Декарта „des sommes, composées de plusieurs termes. Термин somme переводится через „выражение", ибо в ряде случаев обозначает вовсе не сумму, и применяется, например, к одночленам, вроде $\frac{ab}{c}$. См. стр. 121 этого издания 2 3 строка снизу.

[79] (к стр. 75). У Декарта sont esgaux a rien. Он не употребляет здесь слова нуль, zero, хорошо знакомого, впрочем, математикам значительно ранее.

Запись алгебраического уравнения в канонической форме $f(x)=0$ случайно встречается еще у М. Штифеля в 1544 г. Гарриот также иногда записывал уравнения в подобном виде, чаще, однако, уединяя с правой стороны от знака равенства свободный член. Систематическое употребление этой, столь важной для алгебры, записи — дело Декарта.

[80] (к стр. 76). Образование уравнений посредством перемножения линейных двучленов было открыто Гарриотом и изложено в Artis analyticae praxis..., опубликованном после смерти автора в 1631 г. Это дало повод английскому математику Дж. Валлису заявить в 1685 г., что большинство открытий Декарта содержалось у английского математика и обвинить автора „*Геометрии*" в плагиате.

Однако с книгой Гарриота Декарт познакомился только после опубликования „*Геометрии*". Об этом свидетельствует письмо Декарта к Константину Гюйгенсу (отцу знаменитого ученого) от декабря 1638 г.: „Сударь, я так редко обращаюсь к своим книгам, что среди них — хотя у меня их всего лишь с полдюжины — скрывалась, оказывается, незамеченной более шести месяцев одна из ваших книг — это Генриотти... Я хотел увидеть эту книгу, ибо мне говорили, что в ней содержится некое исчисление для геометрии, весьма сходное с моим; я нашел, что это верно, но он углубляется в существо дела столь мало и на множестве страниц учит столь малому числу вещей, что у меня нет оснований иметь претензии к его мыслям за то, что они предупредили мои" (Oeuvres, т. II, стр. 456, см. также стр. 457—461). Кроме того, см. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. II, Leipzig 1900, стр. 720—722 и F. Montucla, Histoire des mathématiques, Paris 1799, т. II, стр. 105—110.

Теорема о числе корней алгебраического уравнения была высказана в 1629 г. Альб. Жираром в его замечательной Invention nouvelle en l'algebre. Была ли эта книга знакома Декарту, — неизвестно; Жирар упоминается в его письмах лишь как издатель сочинений Сим. Стевина. — Условная форма, в которой эта теорема фигурирует у Декарта („всякое уравнение может иметь и т. д."), объясняется тем, что Декарт имеет пока в виду только действительно корни. Ниже (стр. 85) он дополняет свое утверждение, говоря, что „всегда можно вообразить себе у каждого корня столько корней, сколько я сказал", т. е. какова его степень, но иногда эти корни лишь воображаемые. Современная безусловная формулировка дана была К. Маклореном (1698—1746) и Л. Эйлером (1707—1783) в 40-х годах XVIII в. Для Декарта и его современников истинность теоремы казалась очевидной в силу способа образования уравнений посредством перемножения двучленов, а также ее справедливости для известных им уравнений. Общее доказательство фундаментальной теоремы алгебры пытались дать Даламбер (1717—1783) в 1746 г., Эйлер в 1749 и Лагранж (1736—1813) в 1778 г. Однако их доказательства содержали бо́льшие или меньшие недостатки. Строго доказал ее двадцатилетний Гаусс (1777—1855) в 1797 г. См. H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik, ч. II, выпуск I, Leipzig 1911, по указателю.

[81] (к стр. 76). Греки отрицательных чисел не знали. Впервые встречаются они у индусских математиков, выражавших их словом, соответствующим нашему „долгу" (в противоположность положительным, „имуществу"), и обозначавших их путем проставления над цифрами точек. Индусам были известны и двузначность квадратного корня, которой они пользовались при решении квадратных уравнений, и правила действий над отрицательными числами. В средневековой европейской математике отрицательные числа долго не появлялись. В XV в. они встречаются лишь в отдельных случаях, например, у француза Ник. Шюке (1484), пришедшего в одной задаче к разложению числа 20 на сумму — $7\frac{3}{11}$ и $27\frac{3}{11}$ и писавшего, что „вычисление это, которое другие считают невозможным, верно". Ряд крупнейших ученых XVI в. не признавал отрицательных корней уравнений. К ним относились Виета и Гарриот, который полагал даже, будто ему удалось доказать, что алгебраические уравнения могут иметь лишь положительные решения (доказательство страдало petitio principii). Серьезное внимание уделил отрицательным числам М. Штифель, указывавший, что эти „нелепые числа" (numeri absurdi), меньшие, чем ничто, обладают рядом важных математических свойств; Кардано в 1539 и 1545 гг. именовал их то придуманными числами (numeri ficti) в противовес настоящим числам (numeri veri), то minus purum в противоположность minus sophisticum, обозначавшим мнимые числа. Развитие учения об уравнениях заставляло оперировать ими, но употребление их носило совершенно формальный характер, и они рассматривались в алгебре, опиравшейся на геометрию, как фикции, ибо не был известен их геометрический эквивалент. Крупный шаг вперед сделал А. Жирар, указавший в 1629 г. на возможность геометрического толкования отрицательных корней уравнений. „Решение с помощью минуса (par moins), писал он, объясняется в геометрии возвращением вспять (en rétrogradant) и минус отступает там, где плюс идет вперед".

Декарт, примыкающий в терминологии к коссистам, однако, не считает отрицательные корни лишь воображаемыми (каковыми представляются ему мнимые решения), хотя его понимание их, как недостатка величины, не отличается ясностью. Говоря об отрицательных числах, он постоянно имеет в виду их абсолютные величины. Декарт геометрически интерпретирует отрицательные корни как отрезки ординат, располагающиеся с другой стороны от выбранной оси абсцисс, по отношению к положительным ординатам. „*Геометрия*" дала мощный толчок развитию учения об отрицательном числе. В ней отрицательные корни получили фактическое полноправие в алгебре. Изображение их с помощью направленных ординат показало вскоре их незаменимое значение в геометрии. Это обстоятельство, наряду с теми преобразованиями корней, которые Декарт проделывает несколько ниже (превращение отрицательных корней в положительные, соответствующее параллельному переносу системы координат), явилось основой для синтеза понятий положительного и отрицательного чисел в более общем понятии относительного числа. У Декарта, между прочим, встречаются и ошибочные утверждения, связанные с неразработанным представлением о природе отрицательных чисел (см. прим. 86). Вообще XVII в. был богат парадоксами, возникавшими на этой почве даже у крупнейших ученых.

Скаутен, поясняя геометрическое значение отрицательных чисел, дает точно такое же объяснение, что и Жирар, совпадают даже выражения („*Geometria*", стр. 283—287). — Ближайшие учебники алгебры довольно близко примыкали к Декарту. Ньютон (Arithmetica universalis, 1707) уже свободно оперировал отрицательными абсциссами. Его комментатор Маклорен (A treatise of algebra, 1748), подчеркивал, что отрицательные числа столь же действительны, как и положительные. XVIII в. отмечен оживленным обсуждением природы отрицательных чисел и попытками обосновать действия над ними, — в этом приняли участие Эйлер, Даламбер, Маклорен и др. Любопытны размышления по этому поводу Л. Карно (см. его „Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых", М. 1936, 2-е изд., стр. 281—306).— Строгая трактовка этого понятия была дана лишь в XIX в., главным образом на основе работ Г. Грассмана (1809—1877) и В. Гамильтона (1805—1865). — См. статью И. Арнольда „Число", Большая советская энциклопедия, т. 61. — Термины numerus negativus и numerus positivus наряду с некоторыми другими начали появляться в XVI в. Совместно были употреблены они в нашем смысле (по-французски) математиком де-Бограном в 1638 г. (см. Descartes, Oeuvres, т. V, стр. 506). См. также Tropfke, цит. соч., ч. II, стр. 73—79.

[82] (к стр. 77). Эта важная теорема, получаемая Декартом из его способа образования уравнений, встречается здесь, кажется, впервые.

[83] (к стр. 77). Частный характер утверждения Декарта не был замечен некоторыми современниками, обвинившими Декарта в прямой ошибке. Однако в той условной форме, которую придал своему знаменитому правилу знаков Декарт, оно справедливо. Но, конечно, фраза: „... имеется также один ложный корень, ибо встречаются подряд два знака минус", неудачна; это „ибо" плохо согласуется с условностью правила. Возражения против последнего развивались еще в 1649 г.; 17 августа этого года Декарт, отвечая на критику Роберваля, подчеркивал, что положительных корней может быть, а не есть, столько же, сколько перемен знака, и что правило нарушается при наличии мнимых корней (Oeuvres, т. V, стр. 397).

Скаутен указывает, что Декарт заранее ограничивает действие правила лишь уравнениями с действительными корнями, так как начинает этот раздел словами „отсюда очевидно"; он, кроме того, показывает, как применять правило в случае отсутствия каких-либо членов („*Geometria*", стр. 285—287). — Отчетливее формулировал правило знаков Ньютон (1707), приведший также способ определения числа мнимых решений, не всегда, однако, применимый. Доказательство теоремы Декарта для случая, когда все корни вещественны, дал де-Гюа де-Мальв (1712—1785) в 1741 г. Общее доказательство принадлежит Гауссу (1828). Определением числа положительных, отрицательных и мнимых корней занимался ряд математиков. Основной здесь является теорема Хр. Штурма (1803—1855). — Первые попытки связать наличие положительных решений с характером коэфициентов уравнения встречаются еще у Кардано. См. H. Wieleitner, ч. II, выпуск I, стр. 30—40.

[84] (к стр. 78). Правило увеличения или уменьшения корней на данную величину, как и ряд других (умножения и деления корней, приведения дробных и иррациональных коэфициентов к целым, подстановки вида $x=\frac{1}{y}$), было дано раньше Декарта Виетой в сочинении De aequationum recognitione et emendatione, выпущенном после смерти автора в 1615 г. Андерсеном. Это дало повод ученому издателю Виеты Ж. де-Бограну уже в 1637 г. обвинить Декарта в плагиате (см. большое письмо Вограна к Мерсенну, написанное весной 1638 г., Oeuvres, т. V, стр. 504—509 и M. Cantor, Vorlesungen ..., т. II, стр. 582—585). Из письма Декарта к Мерсенну от 3 мая 1632 г. видно, что он уже был знаком с излагавшим общие представления Виеты о природе алгебры In artem analyticam Isagoge, изданном в 1591 и переизданном в 1624 г., и что перед отправкой письма он прочел посланные ему Мерсенном Fr. Vietae ad Logisticem speciosam Notae priores (Oeuvres, т. I, стр. 245 и 248). Какую роль сыграло первое названное сочинение, сказать затруднительно. В декабре 1637 г. Декарт писал: „Мнение автора Геостатики (Бограна) о моих сочинениях трогает меня весьма мало ... Относительно же того, что написанное мной могло быть легко взято у Виеты, то, напротив, причиной трудного понимания моего трактата является то, что я в нем старался помещать только такие вещи, которые, как я полагал, не были известны ни ему, ни кому-либо другому. Это можно увидеть, сравнив то, что я написал о числе корней, имеющихся во всяком уравнении, на стр. 372 (стр. 76 этого издания), т. е. на месте, с которого я начинаю приводить правила моей алгебры, и то, что написал об этом Виета в самом конце своей книги De emendatione aequationum, ибо тогда увидят, что я определяю это общим образом во всех уравнениях, между тем как он, дав лишь несколько частных примеров, — которым, однако, придал такое значение, что пожелал ими закончить свою книгу, — показал тем самым, что он не мог этого определить общим образом. Таким образом я начал там, где он кончил; впрочем, я это сделал неумышленно, ибо я больше раз перелистал Виету со времени получения вашего последнего письма, чем это делал когда-либо до сих пор, найдя его случайно здесь у одного из моих друзей. И, между нами, я не нахожу, что он знал об этом столько, сколько я полагал, хотя он и был весьма искусен". (Oeuvres, т. I, стр. 479, 480, см. также письмо от 31-III-1638 г.,

т. II, стр. 82). Оставляя в стороне несправедливое отношение к Виете, можно заметить, что Декарт здесь оправдывается. Повидимому, De aequationum recognitione кое в чем послужило для третьей части „*Геометрии*". Декарт даже не говорит, что он никогда не перелистывал этой книги до написания „*Геометрии*". Другое дело, что он не углублялся в эту книгу и лишь мельком проглядел ее, — этого было для него достаточно, чтобы заметить многое. Но, конечно, то, что он мог взять оттуда, составляет незначительную часть содержания третьей части „*Геометрии*"; кроме того, изложил он преобразования уравнений гораздо доступнее и более общим образом, чем это сделал Виета. Ср. мнение Ш. Адама в его биографии Декарта (Oeuvres, т. XI, стр. 210—218, особенно 215—217). — О Виете см. M. Marie, Histoire des mathématiques, Paris 1887, т. V, стр. 27—65; M. Cantor, Vorlesungen..., т. II.

[85] (к стр. 79). Звездочки обозначают у Декарта отсутствие каких-либо членов уравнения. Они часто употреблялись до середины XVIII в. (например, в «Алгебре» Маклорена).

[86] (к стр. 79). Этот ляпсус Декарта, имеющего в виду абсолютные величины корней, был замечен Бограном, писавшим в упоминавшемся выше письме: „Несомненно, напротив, что нельзя увеличить положительные корни уравнения, не увеличивая отрицательных, ни уменьшить одни, не уменьшая на ту же величину другие" (Oeuvres, т. V, стр. 506).

[87] (к стр. 80). Правило удаления второго члена кубического уравнения сформулировал Кардано (1545), а известно оно было еще несколько раньше.

[88] (к стр. 80). То-есть коэфициент при втором члене; у Декарта la quantité connuë de ce second membre, у Скаутена quantitas cognita secundi termini („*Geometria*", стр. 73). Термин „коэфициент" возник из longitudo coefficiens Виеты (1591), понимавшего под ним множитель в члене уравнения, придающий ему нужное для однородности число измерений (буквально: содействующая длина). Жирар употреблял слово коэфициент, но еще Лопиталь (1661—1704) в 1697 г. писал „la quantité qui multiplie".

[89] (к стр. 82). Вопросу о границах корней в латинском издании „*Геометрии*" посвящена статья Дебона De limitibus aequationum. Исследование носит узкий характер; Дебон ограничивается уравнениями до четвертой степени включительно и рассматривает большое количество отдельных случаев, в зависимости от знаков коэфициентов и отсутствия тех или иных членов. Например, для положительного корня уравнения $x^2 - lx + m^2 = 0$ из $m^2 = lx - x^2$ следует, что $l > x$, а из $x^2 = lx - m^2$ следует, что $x > \frac{m^2}{l}$ и т. п. Начало более общим исследованиям положил в работах 1690—1692 гг. М. Ролль (1662—1719), установивший, что между двумя соседними корнями алгебраического уравнения, которое в нашем обозначении имеет вид $f'(x) = 0$, может содержаться не более, чем один корень уравнения $f(x) = 0$. Ньютон привел другой способ, опирающийся на те же принципы, что и прием Ролля, но более эффективный, так называемое правило Ньютона, а также способ нахождения границ действительных корней, использующий суммы первых, вторых и т. д. степеней корней, выражающихся

через коэфициенты (Arithmetica universalis, 1707, ч. II, гл. о преобразовании уравнений). Работа Ньютона была усовершенствована Маклореном, в частности давшим известную верхнюю границу действительных корней (A Treatise of algebra, 1748, ч. II, гл. V).

[90] (к стр. 83). У Скаутена слово „истинные", вставленное Декартом, вероятно, по недосмотру опущено.

[91] (к стр. 84). Иррациональные числа Декарт называет nombres sours от латинского surdus (глухой, немой), с помощью которого в переводной литературе средневековья передали арабский термин, в свою очередь бывший переводом греческого ἄλογος (неразумный, немой, невыразимый), обозначавшего несоизмеримые величины. Латинское irrationalis встречается еще в литературе V в. н. э. и во времена Декарта также было в ходу.

Греческая математика, построившая теорию пропорций, пригодную и для несоизмеримых величин, не ввела понятия иррационального числа. Индусы, легко оперировавшие иррациональными квадратными корнями, не проникли, однако, в их существо. Европейские ученые вплоть до XVI в. не признавали по большей части иррациональности подлинными числами, понимая под числом лишь то, что измеряется единицей. Оригинальнее были воззрения Штифеля, который писал, что иррациональные числа располагаются между соседними целыми. Но и для него это все же не подлинные числа. Декарт, наглядно истолковавший иррациональные корни алгебраических уравнений в виде отрезков, подготовил почву для Ньютона, давшего новое определение действительного числа: „Под числом понимают не собрание нескольких единиц, а отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех родов: целое, дробное и иррациональное (surdus). Целое измеряется единицей, дробное — подмножимым единицы, иррациональное несоизмеримо с единицей" (Arithmetica universalis, 1707, ч. I). Декарту, а затем Ньютону, алгебра, таким образом, обязана введением непрерывной величины и обобщением понятия числа. — Строгая теория иррационального числа построена была лишь во второй половине XIX в. Р. Дедекиндом (1881—1916), К. Вейерштрассом (1815—1897) и Г. Кантором (1845—1918). См. И. Арнольд, статья „Число" в Большой советской энциклопедии и Tropfke, цит. соч., т. II, стр. 62—73.

[92] (к стр. 85). Мнимые величины были открыты в середине XVI в. Древние не натолкнулись на них ни разу; их охраняли от этого так называемые „диоризмы", накладывавшие на условия задач ограничения, при которых могли получаться только действительные решения. Индусы прямо указывали, что отрицательные числа не могут быть квадратами каких бы то ни было чисел. Вскоре после открытия в XVI в. Ник. Тартальей (1500—1557) правила решения кубического уравнения в радикалах введение мнимых величин стало неизбежным. В некоторых случаях, когда такое уравнение заведомо имело три действительных решения и наложение ограничительных условий на коэфициенты не имело смысла, участвующие в выражении корней квадратные радикалы содержали отрицательные величины („неприводимый случай", casus irreducibilis). Кардано (1545) и особенно Р. Бомбелли (1572)

разработали ряд основных правил для действия над выражениями формы $\sqrt{-n}$. Бомбелли также правильно объяснил неприводимый случай, показав, что формула Тартальи тогда приводится к сумме двух чисел вида $a+bi$ и $a-bi$. Впрочем, многие математики не желали пользоваться этим новообразованием. Применение мнимостей в алгебре было существенно расширено Жираром. Для него значение мнимых величин заключалось в том, что с их помощью удается придать теоремам алгебры общий характер, — именно теореме о числе корней уравнения и формулам, связывающим коэфициенты уравнения с симметрическими функциями корней. „Могут спросить, писал он, к чему эти невозможные решения? Я отвечаю: для трех вещей, для справедливости общего правила, так как других решений нет и ради пользы" (см. M. Cantor, Vorlesungen ..., т. II, стр. 718). Ньютон остроумно обосновывал необходимость мнимых корней уравнений тем, что если бы их не было, то задачи, решение которых невозможно и которые приводят к этим уравнениям, оказались бы разрешимыми (Arithmetica universalis, 1707). — Точка зрения, высказанная Жираром, господствовала в XVII и XVIII вв. безраздельно. Еще в 1797 г. Л. Карно писал: „Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы и иероглифы нелепых количеств" („Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых", стр. 255). Никакого геометрического толкования мнимостей себе не представляли, ибо при построении корней уравнений в этом случае кривые вовсе не пересекались. Скаутен говорил: „Истинные и ложные корни какого-либо уравнения всегда действительны или же существуют, т. е. обозначают какую-либо величину или же нехватку величины, и значение их можно выразить арифметически или геометрически; но воображаемые не таковы" („*Geometria*", стр. 287). XVIII в. обогатился широчайшим применением мнимых чисел у Даламбера и особенно у Эйлера во всех отделах анализа. Но лишь в прошедших мимо общего внимания работах К. Весселя (1745—1818) и Ж. Аргана (1768—1822) им была дана геометрическая интерпретация. Современным пониманием комплексного числа $a+bi$ мы обязаны Гауссу, который ввел и самый этот термин, чтобы не употреблять отпугивающее слово невозможное, мнимое число. Символ i ввел Эйлер. См. И. Арнольд, статья „Число" в Большой советской энциклопедии, т. 61.

Разделением корней на истинные, ложные и воображаемые Декарт владел уже в 1628 г. См. Oeuvres, т. X, стр. 344—346.

Декарт различает положительные и отрицательные мнимости; так поступал еще Бомбелли (см. Ф. Кэджори, История элементарной математики, Одесса 1917, пер. под ред. И. Тимченко, стр. 440—442). Пользуясь этим, можно придать правилу знаков Декарта всеобщий характер, — именно просто причисляя к положительным нужное число мнимых корней (ср. F. Montucla, Histoire des Mathématiques, т. II, стр. 115, 116; Цейтен, ч. II, стр. 207—208).

[93] (к стр. 86) Только в этом месте Декарт пользуется связью между коэфициентами уравнения и корнями (свободный член равен произведению корней). Об истории этого вопроса, привлек-

шего внимание Виеты, Жирара, Ньютона и др. См. H. Wieleitner, ч. I, вып. 1.

[94] (к стр. 86). Таннери указывает, что строкой выше в обоих случаях при 16 недостает знака минус (Oeuvres, т. VI. стр. 455).

[95] (к стр. 88). Точки означают, что перед коэфициентом может стоять любой знак, ибо сами по себе буквы, выражающие коэфициенты, у Декарта означают еще лишь положительные величины. Применение буквы, при которой стоит $+$, для обозначения, безразлично положительной или отрицательной, величины — дело Гудде (см. его письмо от 1657 г. в лат. изд. „*Geometria*", например, стр. 487, где все буквенные коэфициенты уравнения соединены знаком $+$).

[96] (к стр. 89). Уравнение четвертой степени впервые решил, по известному под его фамилией способу, ученик Кардано—Луиджи Феррари (1522—1565, опубликовано в 1545 г.). Декарт не показывает, как он пришел к своему решению. Скаутен дает вывод с помощью неопределенных коэфициентов. Он полагает

$$x^4 - px^2 - qx + r = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v),$$

откуда для определения коэфициентов y, z, v находит

$$z - y^2 + v = -p, \quad -zy + vy = -q, \quad vz = r$$

и

$$y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$$

(„*Geometria*", стр. 315). Несколько иначе получает такое же разрешающее уравнение Дебон (стр. 137, 138). См. также M. Cantor, Vorlesungen ..., т. II, стр. 728—729.

[97] (к стр. 91). Звездочка в этом уравнении, упущенная Декартом, имеется у Скаутена („*Geometria*", стр. 81).

[98] (к стр. 94). Скаутен здесь выбросил „или *CE*" и поставил „или *CE*" после *FD*, на стр. 93, строка 10 снизу („*Geometria*, стр. 83—84).

[99] (к стр. 96). У Декарта ошибка: „qu'est le point *A* au regard du point *C*"; между тем должно быть: „qu'est le point *C* au regard du point *A*" (сноска Таннери, Oeuvres, т. VI, стр. 465).

[100] (к стр. 97). Это построение корней уравнений 3 и 4 степени Декарт знал еще в 1629 г. Ср. Oeuvres, т. X, стр. 344—346.

[101] (к стр. 98). Графическое построение корней трехчленных и четырехчленных кубических уравнений с помощью конических сечений было впервые систематически проведено замечательным арабским математиком и поэтом Омаром Альхайямом. См. L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, изд. Woepcke, Paris 1853, а также стр. 263 этого издания.

[102] (к стр. 100). О классической задаче трисекции угла у греков см. Цейтен, ч. I, по указателю.

[103] (к стр. 101). Правило решения кубического уравнения $x^3 + px = q$ открыл болонский профессор математики Сципион дель-Ферро (1465—1526), но не опубликовал его; Тарталья самостоятельно нашел выражение в радикалах для корней указанного уравнения, а также уравнений $x^3 = px + q$ и $x^3 + q = px$. Кардано опубликовал сообщенные ему Тартальей правила в 1545 г., дополнив их некоторыми собственными исследованиями.

[104] (к стр. 103). Таннери указывает, что формула дает абсолютную величину корня (Oeuvres, т. VI, стр. 473).

[105] (к стр. 104). Решение кубического уравнения в неприводимом случае с помощью трисекции угла, т. е. тригонометрическое решение, впервые дал Виета в Supplementum Geometriae.

[106] (к стр. 105). Утверждение, что решение неприводимых уравнений 3-й степени с помощью циркуля и линейки невыполнимо, было доказано только в XIX в. Ванцелем (1814—1848). См. Cajory, A History of mathematics стр. 350. Соображения, которыми Декарт подкрепляет свою мысль, лишены доказательной силы.

Поставленная в последних разделах проблема разложения многочленов на множители сыграла в последующем развитии алгебры большую роль. См. H. Wieleitner, ч. II, выпуск 2.

[107] (к стр.111). Скаутен („*Geometria*", стр. 104) дает далее заголовок: „Нахождение четырех средних пропорциональных".

Примечания к „Исчислению г. Декарта".

[108] (к стр.117). Издатели собрания сочинений Декарта о происхождении этой незаконченной работы сообщают следующее:

„Лейбниц в своих Remarques sur l'Abrégé de la Vie de Mons des Cartes говорит: «Я видел небольшое сочинение, которое должно было служить введением в „*Геометрию*" г. Декарта. Мне передал его покойный г. Тевено. Оно довольно кратко, но я совсем не замечаю в нем тех достоинств, которые, по словам г. Байе, ему приписывали и которые заставляли думать, что автором его был сам г. Декарт» (Leibnizens math. Schrist., т. IV, стр. 319).

Эта вещь, скопированная в Ганновере во время научной поездки в августе-сентябре 1894 г., была опубликована Анри Адамом в Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-я серия, т. XX, сентябрь 1896 г.

Королевская Ганноверская библиотека в самом деле располагает, среди других бумаг Лейбница, рукописной тетрадью, озаглавленной Calcul de Monsieur des Cartes. Она каталогизирована под № 381 в т. IX Каталога, изданного покойным библиотекарем Эдуардом Бодеманном. Почерк не принадлежит ни Декарту, ни Лейбницу; рукопись не содержит ни имени автора, ни даты. В ней, однако, имеется ряд ссылок на „*Геометрию*", и сверка обнаруживает, что цитированные страницы совпадают с нумерацией „*Геометрии*" Декарта в издании 1637 г. Написан этот Calcul de Monsieur des Cartes также по-французски. Не является ли он той работой, о которой Декарт несколько раз говорит в переписке 1638 г. и которую он отправил Мерсенну под названием „Введение в мою Геометрию"? Это второе название отсутствует в рукописи, которая озаглавлена только: „Исчисление г. Декарта". Но две эти вещи составляют в действительности одну, что доказывает простое чтение следующих текстов ..." (Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 659—660). Далее следует перечисление соответственных мест из переписки Декарта с Мидоржем и Мерсенном в 1638 г. и сличение упоминаемых в них примеров с примерами, содержащимися в Calcul. В заключение издатели пишут: «Исчисление» и «Введение» — это одно и то же сочинение, и поэтому его можно озаглавить так, как это сделали мы ... Что касается автора, то Декарт его характеризует как «местного (голландского) дворянина»..., не указывая точнее, кто он. Это неопределенное указание до сих пор не позволило нам установить его личность" (там же, т. X, стр. 660—661).

Ш. Адам высказал предположение, что автором Calcul был Готфрид Гестрехт (Haestrecht). См. Descartes, Oeuvres, т. XII, стр. 225.

В лапках ⟨⟩ стоят поправки французского издания Таннери-Адама. Слова, заключенные в квадратные скобки [ ], принадлежат переводчику.

В круглых скобках ( ) указаны страницы „*Геометрии*" по настоящему изданию.

[109] (к стр. 117). В рукописи всюду стоят не a^3, b^4, c^5, а $a3$, $b4$, $c5$ и т. п.

[110] (к стр. 117). Этот заголовок вставлен издателями.

[111] (к стр. 119). Здесь и в других аналогичных случаях la somme переведено через „выражение".

[112] (к стр. 122). Введением знака умножения в форме $\times$ (1631 г.) математика обязана Вил. Оутреду (1574—1660). В настоящем сочинении он служит для обозначения деления дроби на дробь. Подобное употребление его встречается у П. Борги (1488), Л. Пачиоли (1523) и доходит до отдельных авторов XVIII в. См. F. Cajory, A History of mathematical notations, 1928, т. I, стр. 259—260.

[113] (к стр. 124). Этот знак корня четвертой степени возник у коссистов около 1480 г., в печати у Хр. Рудольфа — в 1525 г.

[114] (к стр. 125). Над $a+b$ нехватает горизонтальной черты, которая заменяла тогда более употребительные теперь скобки.

[115] (к стр. 126). Над $a+b$ и $c+d$ нехватает черты.

[116] (к стр. 126). Знак умножения M (от multiplicatio, умножение) употреблял постоянно С. Стевин (1585), а еще раньше М. Штифель (1545). См. F. Cajory, цит. соч., т. I, стр. 250.

[117] (к стр. 127). Над $2a+2c$ нехватает черты.

[118] (к стр. 128). Под биномом здесь и далее специально имеется в виду выражение формы $m+\sqrt{n}$. Вычетом (le residu) бинома называется сопряженный двучлен $m-\sqrt{n}$. Терминология эта связана с классификацией иррациональностей в X книге „Начал" Эвклида.

[119] (к стр. 128). На самом деле берется не полуразность квадратов, а четверть разности.

[120] (к стр. 130). В рукописи стоит en ses suppositions. Это, вероятно,—описка и следует читать, как указывают французские издатели, en ces suppositions.

[121] (к стр. 132). Прямоугольник ACD это прямоугольник со сторонами AC, CD, т. е. $AC \cdot CD$.

[122] (к стр. 132). В рукописи стоит: как с $2-a2 \| bc-ac \|$ так $a \| x$.

[123] (к стр. 133). Этот пример взят из „Плоских мест" Аполлония, книга II, предложение V. См. Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 675—676. Им занимался и Ферма (Oeuvres de Fermat, изд. Tannery и Henry, т. I, стр. 37; т. II, стр. 74 и 100).

[124] (к стр. 136). Действительно, $AC^2 = CD^2 + AD^2 = BC^2 - BD^2 + AD^2 = BC^2 + (AD - DB)\ AB$, откуда

$$AD - DB = \frac{AC^2 - BC^2}{AB} = \frac{x^2 - a^2}{b - x}.$$

На этом примере текст рукописи обрывается; недостает окончания решения 4-го примера и, по всей вероятности, еще одного-двух примеров (см. Oeuvres, т. X, стр. 660).

Примечания к „Введению в изучение плоских и телесных мест" П. Ферма.

[125] (к стр. 137). Перевод „Ad locos planos et solidos isagoge" сделан с латинского текста в Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry (Paris 1891, т. I, стр. 91—103) и сравнен с французким переводом П. Таннери (там же, 1896, т. III, стр. 85—101) и немецким — Г. Вилейтнера «Einführung in die ebenen und körperlichen Örter", Ostwalds Klassiker, № 208, Leipzig 1923). При жизни автора «Isagoge», как и другие его работы, опубликовано не было, но в списках стало известно ряду математиков. Написано было «Isagoge» около 1636 г.; составитель некролога Ферма в Journal des Sçavans от 9 февраля 1665 г. говорит, что „его видели раньше, чем г. Декарт опубликовал что-либо по этому вопросу" (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 360). «Isagoge» было напечатано в Varia opera mathematica domini Petri de Fermat, изданных в 1679 г. сыном автора Самуилом Ферма. Однако это издание содержит некоторые вставки и в нем изменена свойственная Ферма запись уравнений. Издание Таннери и Анри, опирающееся на одну старинную копию, несомненно, ближе к первоначальному тексту (см. Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 91).

Мерсенн — общий корреспондент Декарта и Ферма и посредник между ними — переслал Декарту «Isagoge» в феврале 1638 г. (Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 503). Декарт, давно знакомый с тем, что составляло главное содержание Isagoge, отнесся к нему без всякого интереса (ср. его письмо от 9 февраля 1639 г. в Oeuvres, т. II, стр. 495).

О работе Ферма над восстановлением сочинения Аполлония „О плоских местах" и над задачей Паппа в случае 3 или 4 линий, предшествовавшей его открытию аналитической геометрии и отчасти приведшей к нему — см. Цейтен, ч. II, стр. 193—194 и Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 3—50, 87—89.

[126] (к стр. 137). Под величиной Ферма понимает здесь прямолинейный отрезок.

[127] (к стр. 138). В алгебре Ферма всецело примыкает к Виете, на которого неоднократно ссылается в письмах и работах. Он всегда соблюдает принцип однородности в уравнениях; неизвестные обозначает прописными гласными A, E, известные — согласными B, D, Z, ... Знак равенства у него отсутствует. *Aq.*, *Ac.* и т. п. означают A^2, A^3 и пр. Уравнения он весьма часто представляет еще в виде пропорций. Близка к Виете и его терминология. Выделение уравнений в отдельную строчку у него, веро-

ятно, отсутствовало. Для удобства я, однако, следую в этом отношении французскому изданию.

Значения алгебры Декарта Ферма не понял. Он видел в его символике только ненужную замену одних букв другими. „Я, подобно Виете, обозначаю неизвестные гласными буквами и не вижу, зачем Декарт поспешил произвести изменение в вещи маловажной и совершенно произвольной", писал он (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 120).

[128] (к стр. 138). Синтез (compositio) — здесь обращение задачи, т. е. нахождение уравнения данной по положению прямой.

[129] (к стр. 138). Словом «члены» переводится специфический термин homogenea — однородные.

[130] (к стр. 138). „Умножение" Ферма (ductio, собственно проведение), как и у Виеты, представляет собой операцию, лишь формально соответствующую обыкновенному арифметическому умножению. Все величины „видовой", т. е. общей буквенной алгебры Виеты, располагаются в последовательность родов; это — длина, площадь (planum), тело (solidum), площаде-площадь и т. д. Ducere B in A — означает произвести величину, род которой выше рода A настолько, насколько род B выше рода начальной величины. Делению A на B у Виеты соответствует „приложение A к B" (applicatio A ad B); род частного ниже рода A, насколько род начальной величины ниже рода B. Приложить, например, тело к данной длине — значит, найти основание равновеликого телу параллелепипеда данной высоты. Ср. Кэджори, История элементарной математики, прим. И. Тимченко, стр. 391—396 и М. Marie, Histoire des sciences mathématiques et physiques, 1884, т. III, стр. 33—39.

[131] (к стр. 138). Z pl. — это Z planum, т. е. плоское Z; два измерения приписываются ему для однородности.

[132] (к стр. 139). Здесь впервые утверждается, что уравнение первой степени с двумя неизвестными всегда выражает собой прямую. Однако, в утверждении Ферма содержится больше, чем мог в него вложить сам автор. У Ферма нет отрицательных координат и уравнение $ax+by+c=0$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$ в его глазах должно быть лишено смысла.

[133] (к стр. 139). Прямоугольник NMO — это прямоугольник со сторонами NM и MO.

[134] (к стр. 140). «Искусство» (ars), о котором говорит здесь и ниже Ферма, есть искусство анализа, ars analytica, как часто называли в XVI—XVII вв. алгебру.

[135] (к стр. 140). Утверждая, что уравнение вида $xy = \text{const}$ выражает гиперболу, Ферма опирается на свойства хорд и сопряженных диаметров конических сечений, известные еще древним. Исследование случая $d+xy=rx+sy$ проведено вполне по-современному, хотя Ферма и не говорит о переносе координат. Этот вид уравнения не был рассмотрен в „*Геометрии*" Декарта.

[136] (к стр. 141). Стоящее у Ферма латинское vel не представляет собой исключающего «или» (как aut). Я перевожу: «или еще».

[137] (к стр. 141). Ферма не видит, что существуют две прямые, выражающиеся уравнением $ax^2+bxy+cy^2=0$.

VARIA OPERA

MATHEMATICA

D PETRI DE FERMAT,

SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Титульный лист сочинений П. Ферма, изданных его сыном Самуилом.

[138] (к стр. 141). У Ферма: applicatae (см. прим. 43).

[139] (к стр. 144). В I книге „О плоских местах“ Аполлония решаются задачи, приводящие к прямым, а во II книге — главным образом к окружностям, иногда к прямым. Например, если расстояния точки от двух данных точек находятся в данном отношении, то она лежит на прямой или на окружности и т. п. Папп в „Собрании“ сохранил содержание предложений этой работы Аполлония. Ферма в своем восстановлении дает геометрические их доказательства, весьма упрощающиеся при пользовании теоремами «Isagoge».

Дополнение до квадрата, с помощью которого Ферма приводит общее уравнение окружности к „каноническому“, конечно, соответствует параллельному переносу координатной системы. С ним по существу он имел дело, еще рассматривая общее уравнение прямой. Как видно из последнего примера «Isagoge», Ферма умеет определить радиус и геометрически построить центр круга. Однако координаты центра оказались бы в рассматриваемом случае отрицательными и перенос начала произведен был бы в точку $(-D; -R)$. Аналогично обстоит дело ниже с уравнением эллипса. Вилейтнер в связи с этим справедливо пишет: „мне не совсем ясно, сумел ли бы он (т. е. Ферма) правильно представить себе необходимое в этом случае параллельное перенесение координат“ («Хрестоматия по истории математики», стр. 136).

[140] (к стр. 145). Термины componendo и convertendo суть латинские переводы эвклидовых названий производных пропорций. Если $a:b=c:d$, то componendo будет

$$(a+c):(b+d)=c:d,$$

а convertendo

$$b:a=d:c.$$

[141] (к стр. 146). Преобразования Ферма соответствуют введению новой системы координат с прежними началом и осью ординат и с осью абсцисс, образующей угол в 45° со старой. В этой системе X, Y будет: $X=\sqrt{2}\cdot x$, $Y=x+y$, $NR=\sqrt{2}\cdot b$, так что $\frac{2b^2-X^2}{Y^2}=2$ и, следовательно, фигура есть эллипс,

[142] (к стр. 146). Предложение VIII (в переводе Паппа, данном Коммандино) было понято Ферма следующим образом: если от точек геометрического места проводить под данными углами прямые к двум данным параллельным прямым и если отсекаемые первыми на последних, считая от некоторых данных точек, отрезки 1) либо находятся в постоянном отношении, 2) либо образуют постоянное произведение, 3) либо имеют постоянную сумму или же разность квадратов, то место есть прямая. В своем восстановлении Ферма указал, что для случаев 2) и 3) это неверно; теперь он видит сразу, что геометрическое место является тогда эллипсом или гиперболой. Однако в предложении VIII имелись в виду другие отрезки, именно отрезки на прямых, проводимых от точек геометрического места до данных параллельных прямых. В этих условиях искомое место — прямая, параллельная данным. См. Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 27 и там же примечание Таннери.

[143] (к стр. 147). Речь идет о равенстве суммы квадратов.

[144] (к стр. 147). Это построение определяет координаты центра $\left(\frac{b}{2}, \frac{kb}{4}\right)$ и радиус $\sqrt{\frac{b^2k^2}{16}-\frac{b^2}{4}}$, где k — данное отношение.

[145] (к стр. 148). Как видно из письма Ферма от февраля 1638 г., „Приложение" было написано до выхода „*Геометрии*" Декарта. См. Fermat, Oeuvres, т. II, стр. 134.

[146] (к стр. 149). *Bs.*—это *B* solidum, телесное *B*; *Dpp.*—плоско-плоское *D*.

[147] (к стр. 151). Эвтокий — комментатор Аполлония и Архимеда, живший около 540 г. н. э. В комментарии к сочинению „О сфере и цилиндре" он подробно излагает различные решения задачи о построении двух средних пропорциональных. Приводимое здесь Ферма построение Эвтокий приписывает Менехму (около 360 г. до н. э.), ученику Эвдокса Книдского. См. Цейтен, ч. I, стр. 68.

[148] (к стр. 151). Climacticae parapleroses весьма близко к методу решения уравнений четвертой степени, придуманному Л. Феррари. Пусть в современных обозначениях $x^4+f^2x^2+g^3x=h^4$; введем новую неизвестную y, добавив слева и справа по $x^2y^2+\frac{y^4}{4}$.

$$\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)^2=(y^2-f^2)\,x^2-g^3x+\frac{y^4}{4}+h^4.$$

Условие, при котором справа стоит полный квадрат, будет

$$g^6=(y^2-f^2)\left(\frac{1}{4}y^4+h^4\right).$$

Это уравнение 3 степени с „плоским" корнем y^2. Ср. Marie, цит. соч., т. III, стр. 58—59.

[149] (к стр. 154). Вопросам геометрии в пространстве Ферма посвятил небольшое Isagoge ad locos ad superficiem („Введение в изучение поверхностных мест", см. его Oeuvres, т. I, стр. 111—117), написанное около 1643 г. В нем нет распространения координатного метода и алгебры на трехмерное пространство. Предметом этого сочинения служат различные поверхности второго, как мы бы сказали, порядка. Ферма исходит из сочинения Архимеда „О коноидах и сфероидах" (т. е. двухполостных гиперболоидах и параболоидах вращения и эллипсоидах вращения). Он существенно обобщает эти поверхности. Ему известны общий двухполостный гиперболоид и параболоид и общий (трехосный) эллипсоид, которые он называет „косыми", scalenos, в противоположность „прямым" фигурам вращения; к ним он приводит ряд задач. Точно так же он впервые рассматривает прямые и косые гиперболические и параболические цилиндры. При этом он подчеркивает, что под сферой, сфероидом и т. д. понимает именно поверхности, а не тела; между тем древних интересовали преимущественно самые тела вращения, их объемы и центры тяжести (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 113). Поверхности Ферма определяет в шести леммах по виду кривых, получающихся в их

плоских сечениях. Однако Ферма еще не подозревал о существовании однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида, благодаря чему некоторые леммы неполны и неточны. Немногочисленные задачи этой работы решаются посредством выяснения характера плоских сечений исследуемого геометрического места. Например, Ферма находит, что геометрическое место точек, для которых сумма квадратов отрезков, проведенных под данными углами к нескольким данным плоскостям, постоянна, есть сфероид. Он обобщает задачу Паппа о прямых в плоскости на случай 3 или 4 плоскостей в пространстве и т. п. В одном месте Ферма замечает, что уравнение с 3 неизвестными выражает поверхность. О дальнейшем развитии этих вопросов аналитической геометрии см. H. Wieleitner, ч. II, в. 2, стр. 53—60.

Примечания к „Методу отыскания наибольших и наименьших значений" П. Ферма.

[150] (к стр. 154). Перевод „Methodus ad disquirendam maximam et minimam" сделан с латинского по изданию Таннери-Анри, т. I, стр. 133—136 и сличен с французским переводом Таннери в т. III. Излагаемый в нем метод был выработан Ферма не позднее 1629 г., как видно из его письма к Робервалю от 22 сентября 1636 г. (Fermat, Oeuvres, т. II, стр. 71).

[151] (к стр. 154). В другой работе Ферма поясняет, что приравнение, adaequatio, состоит в том, что величины, в действительности неравные, принимаются за равные (Oeuvres, т. I, стр. 140); таким образом — это приближенное равенство. Adaequatio — латинский перевод греческого παρισότης, означавшего у Диофанта приближенное равенство.

[152] (к стр. 155). Немногочисленные задачи на определение геометрических экстремумов были решены еще древними греками. Решения носили частный характер и в ряде случаев сводились к отысканию границ, в которых уравнения могли иметь положительные корни. Если, например,

$$y = ax - x^2, \text{ то } x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - y};$$

значит, максимальное возможное значение y будет $\frac{a^2}{4}$, причем $x = \frac{a}{2}$. Мысль о том, что около максимума изменение величины становится незаметным, соответствующая нашему уравнению $dy = 0$, высказана была в 1615 г. И. Кеплером. Алгорифм разыскания экстремумов дал впервые Ферма; он годился для функций, приводящихся к целым алгебраическим многочленам.

Практически Ферма производит почти такие же вычисления, как и мы. В приближенном равенстве

$$f(x+h) \approx f(x)$$

отбрасываются тождественные члены, затем все делится на h, потом члены, в которых еще остается h, откидываются и приближенное равенство превращается в точное, совпадающее с нашим

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = 0.$$

Однако Ферма не производит предельного перехода. Стараясь теоретически обосновать открытый им прием, он даже не представляет себе h величиной бесконечно малой. Для него здесь h — конечная и непеременная величина, правда, весьма малая. Производимое им отбрасывание членов с высшими степенями h он рассматривает не как пренебрежение исчезающими величинами. И в объяснении правила, которое он привел в 1643 г. в одном недавно найденном письме, нет указания на бесконечную малость h. Мысль Ферма можно передать с небольшими отклонениями примерно так. Если $f(x)$ есть максимум, то одновременно $f(x+h)<f(x)$ и $f(x-h)<f(x)$. Левые части неравенств можно представить в виде $f(x)+A(\pm h)+Bh^2+C(\pm h)^3+\ldots$ Если коэфициент при $\pm h$, т. е. наша $f'(x)=A$, равен нулю, то, утверждает и показывает на одном примере Ферма, коэфициент B при h^2 будет отрицательным. Но тогда левые части неравенств, действительно, вместе меньше правой, ибо члены с $\pm h^3$, h^4 и т. д. не влияют на знак левых частей неравенств. Из письма видно, что Ферма уже мог различать максимум от минимума: первый имеет место, когда коэфициент при h^2 положителен, второй, когда он отрицателен; это соответствует известному правилу со второй производной (см. Oeuvres de Fermat, supplément aux tt. I—IV, par M. C. de Waard, Paris 1922 г., стр. 123—125). Правило нахождения экстремума и установления его типа опубликовал в 1684 г. Лейбниц (Ньютону оно было известно раньше). Случай исчезновения ряда производных рассмотрел в 1748 г. Маклорен. Подробности см. H. Wieleitner, ч. II, в. 1.

[153] (к стр. 157). Когда Ферма говорит о приложении „вышеизложенного метода" к нахождению касательных, то имеет в виду не отыскание наибольших или наименьших линий, а „приравнивание". Однако его туманные обороты речи Декарт понял иначе, благодаря чему возникла знаменитая переписка по вопросу о проведении касательных. Сам Ферма писал: „Мы рассматриваем в плоскости какой-либо кривой две данные по положению прямые, одну из которых можно назвать диаметром, а другую ординатой. Затем мы полагаем, что касательная в данной точке кривой уже найдена и на основании „приравнивания" рассматриваем специфическое свойство кривой уже не на самой кривой, а на искомой касательной; затем, отбрасывая члены (как этому учит теория наибольших и наименьших значений), мы, наконец, получаем уравнение, определяющее точку встречи касательной с диаметром, и, значит, самое касательную" (Fermat, Oeuvres т. I, стр. 159). Касательную Ферма рассматривает еще, вслед за древними, как прямую, имеющую одну общую точку с кривой.

Если обозначить $CD = x$, $CI = dx$, $CB = y$, $IO = y - dy$, $CE = s_t$, $IE = s_t - dx$, $-\Delta y$ приращение ординаты кривой в точке I, то вычисления Ферма равносильны следующим:

$$\frac{y}{y - dy} = \frac{s_t}{s_t - dx}.$$

(Для нас отсюда следовало бы $s_t = \frac{y\,dx}{dy}$, но Ферма не располагает понятием диференциала.) Так как для параболы $\frac{x}{x - dx} = \left(\frac{y}{y - \Delta y}\right)^2$, он возводит в квадрат предыдущее равенство, получая $\frac{y^2}{(y - dy)^2} = \frac{s_t^2}{(s_t - dx)^2}$, и далее „приравнивает" $y - dy$ и $y - \Delta y$ (с погрешностью высшего порядка малости):

$$\frac{s_t^2}{(s_t - dx)^2} \approx \frac{x}{x - dx},$$

откуда

$$s_t^2 x - s_t^2\,dx \approx s_t^2 x - 2s_t\,x\,dx + x\,(dx)^2$$

и

$$s_t = 2x.$$

Никакого характеристического треугольника здесь еще нет, вопреки мнению Цейтена (ч. II, стр. 322).

Касательные к коническим сечениям были построены Аполлонием. Ферма берет пример с параболой, чтобы продемонстрировать быстроту и точность своего способа. В других работах Ферма находит касательные к ряду иных кривых и дает правило отыскания точек перегиба. В них достигает максимума угол касательной с диаметром, т. е. отношение ординаты к подкасательной $\frac{y}{s_t} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 166, 167).

[154] (к стр. 157). Речь идет о квадратуре парабол $y = ax^n$ (n — целое, положительное), центрах тяжести их площадей, объемах и центрах тяжести их тел вращения. См. письма Ферма к Робервалю от 4 ноября и 16 декабря 1636 г. в его Oeuvres, т. I, стр. 83—87, 92—96.

Примечания к переписке Декарта.

[155] (к стр. 157). См. Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 486—493. Этим письмом начинается знаменитая переписка по вопросу о касательных, в которой, кроме Декарта и Ферма, приняли участие Роберваль, Э. Паскаль, Ж. Дезарг (1593—1661?) и др. Слова, которыми Ферма начал изложение способа проведения касательных к кривым, объясняют недоразумение Декарта, ожесточенного к тому же критикой его „Диоптрики".

Как видно из всей переписки, Декарт, несмотря на резкие упреки по адресу Ферма, понял, что новый метод, с некоторыми исправлениями, вполне эффективен.

[156] (к стр. 159). Заметил ли Декарт сразу, что его рассуждения позволяют определить не длиннейшую линию и не касательную, но кратчайшую, именно нормаль? Допустим, что E лежит внутри параболы на оси; тогда $\overline{BE}^2 = y^2 + (x-\xi)^2 = p\xi + (x-\xi)^2$, где x — абсцисса точки E, ξ — абсцисса точки B. Предполагая E данной, минимум BE мы найдем по уравнению $p - 2(x-\xi) = 0$, откуда поднормаль $s_n = x - \xi = \frac{p}{2}$. Результат Декарта отличается внешне только знаком и годился бы для параболы $y^2 = -px$. В действительности найти экстремум для BE, если точка E лежит на оси вне параболы ($x < 0$), с помощью уравнения $y' = 0$ нельзя, и прием Ферма просто неприменим. В этом случае существует только краевой минимум, достигаемый при данном x, когда $\xi = 0$; BE будет отрезком нормали в вершине. Ср. стр. 174.

[157] (к стр. 159). Декарт не замечает, что в своих неравенствах Ферма пользовался специфическим свойством, присущим только рассматриваемой им параболе.

[158] (к стр. 160). Уравнение этой кривой — „декартова листа" — в прямоугольных координатах $x^3 + y^3 = axy$. Первоначально, считая абсциссы и ординаты в обе стороны от осей положительными, ее рисовали во всех четвертях одинаковой — в виде четырехлистника и не замечали (в силу того же обстоятельства) бесконечных ветвей. Отсюда ее первоначальное название, данное Робервалем, le galand (узел ленты).

[159] (к стр. 161). Впервые попытку восстановления текста утраченных книг Аполлония, на основании имеющихся отрывочных данных, сделал Виета (1600). За ним последовали в 1607 г. итальянец Марино Гетальди (1566—1627), в 1608 г. голландец Виллеброрд Снеллий (1546—1613), в 1612 г. шотландец Алекс. Андерсен, живший в Париже (1582—1619), сам Ферма и др.

[160] (к стр. 161). См. стр. 50 настоящего издания.

[161] (к стр. 162). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 1—5. Это письмо — ответ на неразысканное письмо известного математика, профессора Collège de France Ж. Роберваля (1602—1675) и любителя математики Этьена Паскаля (1588—1651, отец знаменитого математика и философа), ставших на сторону Ферма. О личных отношениях участников спора см. замечание Таннери, Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 13, 14.

[162]. (163) Вслед за этим Декарт приводит три параллельных столбца. Первый содержит вывод уравнения касательной к параболе, данный Ферма, а два других получены из первого заменой слова „парабола" на слова „эллипс" и „гипербола" (с небольшим изменением в случае гиперболы, указанным самим Декартом).

[163] (к стр. 164). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 105—107.

[164] (к стр. 165). После этого Роберваль рассматривает второе возражение Декарта (будто рассуждения Ферма можно дословно приложить к гиперболе и эллипсу). Он указывает, что для этих кривых неравенства, использованные в случае параболы, несправедливы; эту ошибку он считает особенно серьезной.

[165] (к стр. 165). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 123—129, 132—134.

[166] (к стр. 167). Если $ED=b$, $DN=c$, $DC=x$, то $z=\overline{BE}^2=(c+2b)x+b^2$. И здесь применить обычный метод отыскания экстремума нельзя. Краевые минимум и максимум соответствуют $x=0$ и $x=2c$; вообще же z — функция возрастающая.

[167] (к стр. 168). Здесь и ниже Декарт стремится свести обоснование метода Ферма к своему приему, требующему, чтобы некоторое уравнение имело двойной корень. Но выкладки он производит по способу Ферма. См. прим. 66 и 178.

[168] (к стр. 168). Теперь для нахождения BE Декарт ищет экстремум не самого BE, а $\left(\frac{BC}{BE}\right)^2=\frac{cx-x^2}{(c+2b)x+b^2}=\sin^2\alpha$, где $\alpha=\sphericalangle BEC$. Ср. объяснение Ферма на стр. 171.

[169] (к стр. 169). Общее утверждение, что новая ордината равна $\frac{(A+E)B}{A}$, если ввести $A=s_t$, $E=dx$, $B=y$, равносильно $y+\Delta y=\frac{(s_t+dx)y}{s_t}$, т. е. $s_t=\frac{y\,dx}{\Delta y}$. Хотя Декарт говорит, что получает это из треугольника BCE, но в действительности использует два бесконечно мало отличных и подобных треугольника BCE и $B'C'E$, где B', B, E лежат на одной прямой, а C', C, E — на оси. Тогда $\frac{B'C'}{BC}=\frac{A}{A+E}$, т. е. $\frac{y+\Delta y}{y}=\frac{s_t+dx}{s_t}$. С другой стороны, $(y+\Delta y)^2=\frac{b^2}{d}(x+dx)$ и, значит, $\frac{b^2}{d}(x+dx)=\left(\frac{s_t+dx}{s_t}\right)^2 y^2$, где $y^2=\frac{b^2}{d}x$, и $s_t=2x$.

Далее Декарт пытается ответить на критику Робервалем его второго возражения. Он соглашается с тем, что необходимо пользоваться специфическим свойством кривой, и центральная часть его ответа состоит в обвинении Ферма в неясности.

[170] (к стр. 170). Здесь Декарт исходит из новой точки зрения на касательную как на предельное положение секущей, вращающейся вокруг некоторой точки вне кривой, так, что две ее точки пересечения с кривой сливаются в одну. На этом и основываются все его выкладки. Но он не отмечает определенно, что угол $\alpha=\sphericalangle BEC$ достигает экстремума в случае касательной. Ср. следующее письмо Ферма.

[171] (к стр. 170). См. F e r m a t, Oeuvres, т. II, стр. 152—154. Это письмо — ответ на предыдущее письмо Декарта. Оно было отправлено Мерсенном Декарту 20 июля 1638 г. вместе с разъяснениями, помещенными на стр. 172 настоящего издания.

[172] (к стр. 171). На это и указывает Декарт в опущенной мной части письма. Ср. прим. 152.

[173] (к стр. 172). См. F e r m a t, Oeuvres, т. II, стр. 154—162. Ферма подчеркивает в первых же абзацах общий и единообразный характер своего приема.

[174] (к стр. 177). Асимметрии — алгебраические иррациональности, к которым метод Ферма непосредственно неприменим; в этих случаях до открытия диференциального исчисления сперва избавлялись от иррациональностей (также как и от дробей).

[175] (к стр. 178). См. письмо Декарта на стр. 180 и сл. настоящего издания.

[176] (к стр. 178). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 169—173. Клод Гарди (Cl. Hardy, скончался в 1678 г.) — французский судебный чиновник, наряду с этим — ученый языковед и математик; издатель эвклидовых „Data" на греческом языке с латинским переводом и комментарием. — Чертеж в этом письме не годится для рассматриваемой кубической параболы.

[177] (к стр. 180). Особый символ для обозначения 4 пропорциональных величин придумал Декарт. В 1619—1621 гг. он писал его несколько иначе: центральная черточка писалась дважды. Этот знак употреблялся и позднее в XVII—XVIII вв. См. F. Cajory, цит. соч., т. I, стр. 288.

[178] (к стр. 181). Декарт рассматривает касательную еще с новой точки зрения. Секущая вращается вокруг точки пересечения с кривой, пока вторая точка пересечения не сольется с первой. Всего значения такого определения касательной Декарт не сознавал; роль его в последующем развитии анализа и его приложений общеизвестна. Если сравнить прием Ферма и рассуждения Декарта, то в них заметно — в начальной форме — расхождение между исчислением бесконечно малых Лейбница и теорией флюксий и пределов Ньютона. „Отбрасывание" Ферма — прямой шаг к пренебрежению бесконечно малыми (хотя сам автор старался объяснить его поиному); так его и поняли позднейшие авторы. Воззрения, сформулированные в письме к Гарди Декартом, и выкладки его, связанные с переходом отношения $h:g$ в отношение равенства, отчасти предвосхищают теорию первых и последних отношений Ньютона. От чисто алгебраического решения вопроса Декарт здесь уже отошел. Ср. статью A. Aubry, Sur l'histoire du calcul infinitésimal pendant les années 1638—1639 (Fermat, Oeuvres, т. IV, 1912, стр. 222—227), в ряде пунктов, однако, несправедливую.

В основном полемика закончилась летом 1638 г. Несмотря на то, что Ферма и Декарт упорно отстаивали свои начальные позиции и уверяли, что не отступают от них ни на шаг, переписка внесла существенные поправки в ошибочные толкования Декарта, а главное обогатила математику решением ряда новых задач, разъяснением метода максимумов и минимумов и более широкой точкой зрения на понятие касательной. В июле 1638 г. между Декартом и Ферма состоялся обмен письмами с изъявлением дружеских и почтительных чувств. Ср. письма Декарта к Ферма в Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 280—282 и 406, 407. Впрочем, примирение носило формальный характер.

[179] (к стр. 181). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 247—250. В феврале 1638 г. Ферма предложил Мерсенну поставить перед Декартом задачу об определении центров тяжести тел вращения парабол $y = ax^n$ вокруг их осей (Fermat, Oeuvres, т. II, стр. 133, 134), о чем Мерсенн известил Декарта в письме от 28 апреля 1638 г. (Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 119, 120). 29 июня Декарт сообщает Мерсенну, что он рассказал об этой задаче профессору инженерной школы Жилло (своему бывшему служителю, которому он дал хорошее научное образование), и приводит его решение для обыкновенной параболы. Жилло легко

нашел бы и другие центры тяжести, добавляет Декарт, но не успеет этого сделать, ибо уезжает утром следующего дня в Париж. Там же он приводит решение Жилло некоторых других задач. Целью всего этого являлось ущемить гордость Ферма и других противников: „Так как он говорит, что опущенное мною как легкое, на самом деле очень трудно, то мне захотелось проверить это на молодом Жилло...", писал он (Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 179—181).

[180] (к стр. 181). Ни в „Centrum gravitatis parabolici conoidis" (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 18—139), ни в письмах Ферма не выдавал определения центра тяжести сегмента параболоида вращения за свое личное открытие. Положение этого центра было найдено еще Архимедом и стало известным в XVI в. по переводу второй его книги „О плавающих телах" (1565). В этом сочинении результат давался без доказательства. Переводчик Коммандино опубликовал свое доказательство в том же 1565 г. Ферма и тут, как в случае определения касательной, умышленно применяет свой, более скорый и легкий метод на известном примере.

[181] (к стр. 183). Таннери замечает: вместо le fait Декарт должен был написать le facit, т. е. правило построения (Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 249).

[182] (к стр. 183). Результаты Декарта таковы:

1. Площадь сегмента параболы $y=ax^n$ находится к площади вписанного треугольника в отношении $\frac{2n}{n+1}$.

2. Объем сегмента параболоида вращения находится к объему вписанного конуса в отношении $\frac{3n}{n+2}$.

3. Центр тяжести сегмента параболы делит отрезок ее оси BD в отношении $\frac{n+1}{n}$.

4. Центр тяжести сегмента параболоида делит отрезок оси вращения в отношении $\frac{n+2}{n}$.

5. Отношение подкасательной к абсциссе равно n.

Первые четыре теоремы, безусловно, связаны с вычислениями, соответствующими определению интеграла $\int\limits_0^x x^n\,dx$, по крайней мере для любого целого положительного n. К сожалению, неизвестно, каким путем шел Декарт. Наиболее вероятно, что он руководствовался идеями метода неделимых, изложенными Б. Кавальери (1591?—1647) в так называемой „Геометрии неделимых" (1635). Таково мнение и Таннери и Вилейтнера. В пользу этого особенно свидетельствует письмо Декарта, где определяется площадь циклоиды. Владел своим приемом Декарт в совершенстве, ибо решил задачи Ферма в кратчайший — двухмесячный — срок. Стоит заметить, что основная теорема „Геометрии неделимых" позволяла решать еще только задачи, приводящиеся к $\int\limits_0^a x^2\,dx$. Более общие теоремы, соответствующие вычислению интегралов до 9-й степени, Кавальери доказал много позднее, а в справедливости общего положения о квадратуре кривых $y=ax^n$ убедился в 1641 г., после того как узнал о результатах Ферма [см. письмо Кавальери к Мерсенну от 24 ноября 1641 г. (Fermat, Oeuvres, т. IV, стр. 71—81)]. Квадратура кривых $y=ax^n$, при n целом и положительном, была известна Ферма еще к 1636 г.; на случай дробных и отрицательных показателей он распространил ее в 50-х годах. В первом случае Ферма исходил, следуя отчасти идее Архимеда, из деления отрезка оси абсцисс на равные части и неравенства $\sum\limits_{k=1}^{k=m} k^n > \frac{m^{n+1}}{n+1} > \sum\limits_{k=1}^{k=m-1} k^n$, во втором — из употребляемого с этой целью и в наших учебниках деления отрезка оси точками, абсциссы которых образуют геометрическую прогрессию, что приводит вычисление площади и интеграла к суммированию бесконечной геометрической прогрессии. — См. письма Ферма Робервалю от 22 сентября 1636 г., ответ Роберваля от 11 октября, письмо Ферма от 4 ноября (Fermat, Oeuvres, т. II, стр. 73, 74, 81, 82) и работу о квадратуре кривых от 1657 г. (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 255 и след., или же отрывок в „Хрестоматии" Вилейтнера). Подробности о развитии интеграционных приемов в этот период см. Цейтен, ч. II, стр. 242 и след.

[183] (к стр. 183). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 135—137. В приведенной части этого письма Декарт лишь бегло наметил ход исследования, детальное же изложение дает в письме от 27 июля.

[184] (к стр. 184). Циклоида была открыта Г. Галилеем (1564—1642) в конце XVI в. Галилей тщетно пытался определить ее площадь, в частности путем взвешивания циклоидальной пластинки. Последний способ неизменно давал ему для отношения площади циклоиды к площади образующего круга число, меньшее 3, и привел к мысли, что это отношение несоизмеримо. Галилею же принадлежит название „циклоида". В 1634 г. Робервалю удалось найти ее квадратуру по методу неделимых; попутно он открыл синусоиду (см. Цейтен, ч. I, стр. 329). Квадратура Декарта, не знавшего доказательства Роберваля, и несходная с квадратурой последнего, также базируется на идее неделимых. В том же 1638 г. дал квадратуру циклоиды Ферма. Касательную к ней определили тогда же Роберваль, Декарт (см. стр. 188 настоящего издания), а за ними — Ферма. В Италии эти же открытия параллельно сделали ученики Галилея В. Вивиани (1622—1703) и Э. Торричелли (1608—1647). В последующем развитии математики циклоида сыграла роль, уступающую лишь коническим сечениям. Спрямление ее дали около 1657 г. Хр. Рен (Wren, 1632—1723), Ферма и Гейрет. Б. Паскаль (1623—1662) посвятил ей, начиная с 1657 г., несколько замечательных работ, где вычислил связанные с ней объемы тел

вращения, центры тяжести и т. д. Его результаты соответствовали вычислению некоторых интегралов от тригонометрических функций. Около 1665 г. Хр. Гюйгенс установил ее таутохронность, а работая над практическим использованием этого свойства, пришел к теории эволют (опубл. в 1673 г.). В 1696 г. Иог. Бернулли, поставив задачу о брахистохроне, кривой быстрейшего спуска, положил начало вариационному исчислению; этой кривой, как показали в том же году Ньютон, Лейбниц, братья Бернулли и Лопиталь, являлась циклоида. Подробности см. Цейтен, ч. II, по указателю. — Таким образом задача, решаемая здесь Декартом, являлась важным звеном в цепи открытий исчисления бесконечно малых.

[185] (к стр. 184). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 257—263. — Рулеттой Декарт называет образующую катящуюся кривую (от французского rouler — катить); Б. Паскаль так называл циклоиду.

[186] (к стр. 187). Этот абзац передает одну из фундаментальных идей Кавальери.

[187] (к стр. 188). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 307—313.

[188] (к стр. 188). Речь идет о Робервале.

[189] (к стр. 189). Решение Декарта опирается на представление кривой как многоугольника с бесчисленным множеством бесконечно малых сторон и на идею о мгновенном центре вращения. Это решение, как указывает Декарт, можно применить к любым линиям, описываемым при качении. Гюйгенс впоследствии доказал справедливость приема Декарта, изложившего его недостаточно строго (см. Цейтен, ч. II, стр. 330). Построение Ферма, использовавшего „специфическое свойство" циклоиды $\overline{BN} = \overline{NC}$, вытекало из его общего приема (Fermat, Oeuvres, т. I, стр. 162—165). Роберваль применил изобретенный им — и почти одновременно Торричелли — способ сложения скоростей. Представим себе образующий круг, проходящий через B и касающийся основания в O. Точка E, описывающая циклоиду, участвует в двух движениях, одно из которых направлено по касательной к образующему кругу в точке B, а другое по прямой BN. Так как скорости обоих движений одинаковы (ибо основание циклоиды равно длине окружности), то касательная BL должна быть биссектрисой угла между касательной к кругу в B и прямой BN. См. M. Cantor, Vorlesungen ..., т. II, стр. 882. — О впечатлении, произведенном решениями Ферма и Декарта, Таннери пишет: „Ферма, показав, что его метод касательных применим и к циклоиде, совершенно поразил Роберваля. Повидимому, он был менее удивлен решением Декарта и, несомненно, потому, что не признал в нем общего приема для построения касательных. Однако в зародыше это решение содержит всю *теорию мгновенных центров вращения*, которая при построении касательных фактически равносильна методу Роберваля" (Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 341).

[190] (к стр. 189). Речь идет здесь о так называемой удлиненной циклоиде.

[191] (к стр. 191). Декарт определяет точку перегиба укороченной циклоиды. Любопытно, что для Декарта в такой точке не может быть касательной (она пересекает кривую). Ферма смотрел на это дело иначе (см. прим. 153).

[192] (к стр. 191). По поводу этих слов Декарта Таннери замечает: „Действительно ли признание Роберваля относится к построению касательной к циклоиде? Как он утверждает, для определения точки перегиба укороченной циклоиды он обладал доказательством, но хотел иметь более краткое. Но так как этот вопрос заключается в первом, то Роберваль, безусловно, должен был либо обладать решением обоих вопросов, либо не иметь его ни для одного". После подробного анализа Таннери приходит к выводу: „В 1638 г. Роберваль рассматривал свой метод касательных как *механический*; построив с помощью этого метода касательную к циклоиде, *он признал, что не знает никакого способа притти к тому же геометрическим путем* ... и в силу этого сохранял свое построение в тайне ... Мерсенн не был в состоянии точно понять точку зрения, на которой стоял Роберваль, и смысл его признания в незнании. С другой стороны, в письме, которое видел Декарт, Роберваль мог плохо объясниться, как это часто с ним случалось" (см. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 338—341).

[193] (к стр. 192). Систематическое изучение более общих кривых качения было начато Лагиром, затем продолжено Николем (1683—1758), Э. Варингом (1734—1798) и др. См. H. Wieleitner, ч. II, в. 2, стр. 87.

[194] (к стр. 192). См. Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 360. — Логарифмическая спираль была открыта почти одновременно Декартом и Торричелли. Декарт пришел к ней, рассматривая вопрос о тяжести тела в различных местах наклонной плоскости. Известное правило (сила тяжести относится к весу, как высота наклонной плоскости к ее длине), писал он, было бы справедливо для всех мест наклонной плоскости, если бы тяжелые тела стремились книзу по параллельным прямым. Это можно допустить для практических целей, но теоретически неправильно. Для того чтобы вес тела в разных местах такой плоскости был одинаков, нужно, чтобы она была спиралевидна (см. письмо к Мерсенну от 13 декабря 1638 г.; Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 232, 233). В приводимом месте Декарт отвечает на вопрос Мерсенна о характере кривой. Исходным свойством кривой было то, что углы радиусов-векторов, проведенных из ее полюса („центра"), с касательными имеют постоянную величину. Таким образом здесь налицо обратная задача на касательные. Как установил Декарт пропорциональность длины дуги и радиуса-вектора — неизвестно. Найти ее легко, рассматривая „прямоугольный" треугольник со сторонами ds, $d\rho$, $\rho\, d\varphi$, ибо в силу постоянства μ, угла касательной (т. е. ds) и радиуса-вектора $ds = \sec\alpha\, d\rho$; кроме того, $s=0$ при $\rho=0$. — О весьма интересной истории логарифмической спирали (название это было дано в начале XVIII в., см. Цейтен, ч. II, по указателю).

[195] (к стр. 192). См. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 513—518. Письмо Дебона, в котором он излагал свои вопросы, не сохранилось. Из письма Декарта от 15 ноября 1638 г. видно, что еще в неразысканном письме от 11 октября 1638 г. он уже кое-что сообщал о задачах Дебона (Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 420). Все задачи Дебона, кроме первой, представляли собой обратные задачи на касательные, в которых дается свойство касательной (подкасательной) кривой в функции абсциссы и ординаты, а ищется

сама кривая. На нашем языке речь в них идет об интегрировании диференциальных уравнений первого порядка $f(x, y, y') = 0$. Проблема, поставленная Дебоном, не была совершенно новой для Декарта: с аналогичными задачами он имел дело, когда изучал оптические овалы и логарифмическую спираль. Но теперь она была поставлена в гораздо более общем виде, как особая проблема геометрии. Роль ее в истории математики огромна. См. об этом H. Wieleitner, ч. II, в. 1 и Цейтен, ч. II.

[196] (к стр. 192). Линия, о которой пишет здесь Декарт, не была первой из кривых Дебона, ибо ею являлась гипербола (см. письмо Декарта от 15 ноября в Oeuvres, т. I, стр. 444). Таннери считает, кроме того, что первая задача была прямой задачей на касательные (см. Descartes, Oeuvres, т. V, стр. 514). Квадратуру гиперболы Дебон дать не мог, ибо в выражение ее площади входит логарифмическая функция, в то время неизвестная. Вряд ли этой линией была четвертая кривая, — в этом случае, как указывает Таннери, Декарт обратил бы на нее внимание, чего он не делает. Таким образом ею могла быть или вторая или третья из кривых.

Определяющее свойство знаменитой второй кривой таково: отношение подкасательной к ординате равно отношению данной линии к разности абсциссы и ординаты, т. е. $\frac{s_t}{y} = \frac{b}{x-y}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$ (ср. письмо Декарта от июня 1645 г. в Oeuvres, т. IV стр. 229, 230 и замечания Таннери в т. II, стр. 520). Отсюда Дебон легко мог бы получить площадь, ибо

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x x\,dx - b\int_0^x dy = \frac{x^2}{2} - by.$$

Что касается третьей кривой, о которой Декарт говорит ниже, то ее определяющим свойством было, вероятно, постоянство подкасательной в прямоугольных координатах, откуда $y\,dx = k\,dy$ площадь ее $\int_0^x y\,dx = ky$.

Декарт считает, что методы определения касательных, данные им и Ферма, нельзя обратить общим образом, и сообщает, что пытался найти эти кривые обходным путем, рассмотрев, не обладают ли нужным свойством касательные к алгебраическим кривым. Он перебрал множество линий с уравнениями, вроде $y^n = ax^2 + bx + c$, или сходными, где n доходило до тысячи. Неудача этих проб убедила его в „механическом“ характере кривой и заставила воспользоваться иным средством приближенного построения кривой. В основу он кладет по существу замену дуги кривой многоугольником, образуемым касательными в близких друг к другу точках.

[197] (к стр. 193). Пусть AC есть ось x, AY — ось y. Декарт выбирает за новую ось абсцисс асимптоту BM и за новую ось ординат BY. Тогда

$$x=\frac{x'}{\sqrt{2}},\quad y=y'+\frac{x'}{\sqrt{2}}-a, \tag{1}$$

и уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{b} \tag{2}$$

преобразуется в

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{y'}{b\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Таким образом подкасательная $\left(y':\frac{dx'}{dy'}\right)$ в новой системе постоянна и равна $b\sqrt{2}=BC$. Это и нашел Декарт.

Положив в (3) $b=1$ и интегрируя, мы нашли бы

$$\ln y'=-\frac{x'}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Отсутствие логарифмической функции не позволяет Декарту записать уравнение в конечном виде. Но связь построения кривой со свойствами логарифмов Непера (1550—1617) Декартом была замечена, как это видно из дальнейшего.

[198] (к стр. 194). Если $\alpha\beta=\Delta x_n$, $b=1$, то Декарт получает

$$\frac{1}{n-1}>\Delta x_n>\frac{1}{n}. \tag{5}$$

Из (1) и (4) предыдущего примечания

$$x=-\ln y'$$

и $\ln\frac{m}{n}=-\ln\frac{n}{m}=x_n=\sum\limits_{i=n+1}^{i=m}\Delta x_i$ лежит в границах, определяемых неравенствами:

$$\sum_{i=n+1}^{i=m}\frac{1}{i-1}>\sum_{i=n+1}^{i=m}\Delta x_i>\sum_{i=n+1}^{i=m}\frac{1}{i}, \tag{6}$$

т. е.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{m-1}>\ln\frac{m}{n}>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{m}. \tag{7}$$

Декарт, получая эти замечательные соотношения для $A\alpha=x_n$, не указывает на производимое им суммирование. Разность левой и правой частей неравенства $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$, при $n\to\infty$, $m\to\infty$, можно, как видит Декарт, сделать как угодно малой, так что $A\alpha = x_n$ можно строить с любой точностью.

[199] (к стр. 195). Таннери указывает, что неравенства в начале этого абзаца, имеющие в общем случае вид

$$\frac{m}{n_1}\left(\frac{n_1}{m}-\frac{n}{m}\right)<\ln\frac{n_1}{n}<\frac{m}{n}\left(\frac{n_1}{m}-\frac{n}{m}\right), \qquad (8)$$

легко получаются из (7) (см. предыдущее прим.), если в левой части все $n_1 - n$ членов заменить на наименьший $\frac{1}{n_1}$, а в правой — на наибольший $\frac{1}{n}$.

Далее Декарт приводит способ описания кривой с помощью пересечения двух прямых, из которых одна движется вдоль AB параллельно самой себе из положения AH с постоянной скоростью, а другая — опускается из положения AB с возрастающей скоростью, обратно пропорциональной расстоянию, остающемуся у первой прямой от конечного положения BR. Прием этот выражает то же, что диференциальное уравнение (3), если заменить в нем $\frac{dy'}{dx'}$ на $\frac{dy'}{dt}:\frac{dx'}{dt}$. В пользовании этими двумя движениями Декарт, несомненно, следует за Непером, определившим аналогично свои логарифмы. См. Цейтен, ч. II, стр. 131—136 и 339—341 и широко использованные мной замечания Таннери к письму Декарта в т. II, стр. 520—523. — Я не могу, однако, согласиться с оценкой, данной Таннери результатам Декарта. Я не мог бы сказать, что принцип всего исчисления бесконечно малых уже был выявлен у Декарта, так что нехватало лишь „удобного обозначения", да логарифмической и показательной функций, которые удалось ввести сперва лишь с помощью рядов. Во-первых, не видно, чтобы Декарт представлял себе — хотя бы и в геометрической форме — связь между двумя операциями исчисления бесконечно малых. Во-вторых, когда Лейбниц создавал свой алгорифм, суть дела заключалась не в „удобном" обозначении, а в оперативности его символики, являющейся как бы алгеброй исчисления бесконечно малых в сравнении с частными и специальными приемами предшественников его и Ньютона. Отсутствовал у Декарта и столь важный прием исчисления бесконечно малых, как разложение в ряды, которое произвело принципиальный переворот в изучении трансцендентных функций. Но, конечно, решение Декарта носит инфинитезимальный характер. И он во всех отношениях — один из крупнейших предшественников творцов нового анализа.

А. П. ЮШКЕВИЧ

ДЕКАРТ И МАТЕМАТИКА

„Геометрия“ знаменитого французского философа Декарта, изданная в 1637 г., несомненно, явилась в истории новой математики поворотным пунктом.

Математику последних трех веков характеризует несколько признаков, чуждых античности и средневековью. Новая математика — это прежде всего наука о переменной величине. Благодаря введению переменной она в состоянии изучать общие соотношения между общими величинами, что позволяет ей решать общими же методами бесчисленное множество частных задач, каждую из которых математика античности рассматривала в отдельности, самое по себе. Идея функциональной зависимости, центральная в анализе, предполагает понятие переменной величины, а бесконечно большие и бесконечно малые составляют частные ее виды. Основанием новой математики является алгебра — учение о простейших операциях над переменными, в частности о свойствах целых многочленов.

С алгебраизацией математики связано возникновение в ней повсюду алгорифмов. Мы называем теперь алгорифмом всякое приведенное в систему исчисление, пользующееся определенными символикой и правилами преобразования. Таков в первую очередь алгорифм буквенного исчисления, т. е. самой алгебры, таковы, далее, алгорифмы математической логики, диференциального и интегрального исчислений, теории определителей и пр. Алгорифмический процесс играет в новой математике исключительную творческую роль.

Главнейшей заслугой Декарта и было введение переменной величины и буквенной алгебры, заменившей словесную. И хотя революция, начатая Декартом, была произведена им в сфере конечных величин, но плодотворное воздействие ее быстро сказалось и в математике бесконечного. Алгорифм анализа бесконечно малых явился неизбежным распространением на этот вид переменных новых алгебраических идей и приемов. „Поворотным пунктом в математике, писал Энгельс в „Диалектике природы“, была декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же *стало немедленно необходимым диференциальное и интегральное исчисление*, зачатки которого вскоре были заложены и которое было в целом завершено, а не открыто Ньютоном и Лейбницем“ [1]).

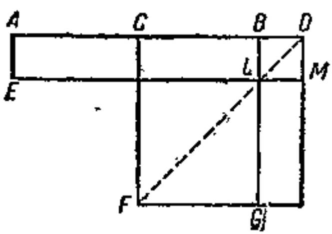
---

[1]) К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, т. XIV, М.-Л. 1931, стр. 426, 427.

Другой характерной чертой новой математики является глубокое проникновение арифметики в геометрию. Древность связала некоторым частным образом пространство и величину. Однако возможность исследования непрерывных пространственных образов с помощью чисел не была известна до Декарта, создавшего первые основания аналитической геометрии [1]). И здесь решающей была выработка алгебраического алгорифма. Чтобы понять и оценить должным образом переворот, произведенный в математике „*Геометрией*“, нам придется коснуться математики древних и рассказать о работах математиков, предшествовавших Декарту.

I. *„Геометрическая алгебра“ и античное учение о конических сечениях.*

Еще за два тысячелетия до н. э. вавилоняне решали числовым путем задачи на системы линейных уравнений и полные квадратные уравнения. Совершенно иной характер приняло развитие алгебры в классических работах Эвклида, Архимеда, Аполлония.



Совокупность соответствующих античных приемов была названа в XIX в. „геометрической алгеброй“. „Геометрическая алгебра“ оперировала не числами, а отрезками, площадями и телами. Она приспособлена была к их исследованию и выросла из проблем геометрии. Это было приложение геометрических построений и преобразований к задачам, у нас выражающимся уравнениями первой и второй степени. Например, требовалось построить сторону правильного вписанного в круг данного радиуса десятиугольника. Мы, обозначив радиус a, сторону x, получили бы пропорцию $\frac{x}{a-x}=\frac{a}{x}$, затем уравнение $x^2+ax=$ $=a^2$ и как-либо построили его корень $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. Античная математика прямо строила искомый отрезок.

На отрезке $AB\,[=a]$ строился прямоугольник $AM\,[=(a+x)\,x]$, равный квадрату $[a^2]$, так, чтобы избыточная над прямоугольником $AL\,[=ax]$ площадь $BM\,[=x^2]$ была квадратом. Предположив задачу решенной, делили AB пополам в C, на LM строили прямоугольник MG, тождественный с EC; прямоугольник AM будет разностью квадратов DF и LF. Так как эта разность и квадрат LF известны, то, теорема Пифагора давала квадрат DF; затем находились $DC\left(=\frac{1}{2}a+x\right)$ и $DB\,(=x)$. Описанное построение давало то же, что и наше положительное решение уравнения $x^2+ax=a^2$. Но,

---

1) См. Ф. Энгельс, Диалектика природы, там же, стр. 477, 478.

несмотря на соответствие решений, речь шла у древних о чисто геометрическом построении некоторого отрезка. Этому не мешало то, что греки знали связь между указанным построением и правилом решения квадратного уравнения. Аналогично были решены задачи на другие квадратные уравнения [1]) и представлены многие важные тождества.

В силу описанного характера задач и метода „геометрической алгебры", равенства в ней могли иметь место лишь между элементами одинакового измерения и все уравнения подчинялись принципу однородности. Действиям умножения и деления, в чистой арифметике порождающим из чисел числа, здесь соответствовали операции, порождающие величины нового числа измерений. Произведению двух чисел у древних отвечал прямоугольник, построенный на двух отрезках, а трех — параллелепипед.

Древние не знали иррационального числа. Однако несоизмеримость целого ряда отрезков ими была доказана. Желание свести отношения непрерывных величин к отношениям между целыми числами привело Эвдокса (IV в. до н. э.) к созданию замечательной общей теории пропорций. В ней роль вещественного положительного числа играло отношение двух однородных геометрических величин, а сами отношения последних вводились через определение, устанавливавшее равенство двух любых отношений посредством сравнения целочисленных отношений [2]). Геометрические образы заменяли также в некоторой степени произвольные величины. Так, правило суммирования геометрической прогрессии выводилось с помощью величин, представленных отрезками. Являясь геометрическими знаками величин и фиксируя внимание исследователя, эти отрезки все же не могли служить базой для алгебраического исчисления. Теорема и ее доказательство излагались и проводились словесно.

„Геометрическая алгебра" и теория пропорций Эвдокса нашли у древних обширные применения. Работы Эвклида и Архимеда без них немыслимы. Важные приложения получили они и в учении о конических сечениях, с высоким совершенством и полнотой изложенном во второй половине III в. до н. э. Аполлонием [3]). Исходным пунктом теории является установление планиметрических свойств, так называемых „симптомов", плоских сечений конуса. Пусть, например, конус с круговым основанием пересечен плоскостью, не параллельной основанию, но так, что сечение является замкнутой линией (на чертеже оно представлено линией ED) [4]). PR представляет круг, образуемый в сечении, параллельном основанию и содержащем произвольную точку M прямой ED;

[1]) Эти приемы назывались „приложением площадей". См. Г. Цейтен, История математики в древности и в средние века, пер. П. Юшкевича М. 1938, 2-е изд., стр. 38 и след., 42 и след.

[2]) См. Г. Цейтен, цит. соч., стр. 97, и Г. Вейль, О философии математики, М. 1934, стр. 65, 66.

[3]) См. статью О. Нейгебауэра в Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1932, т. II, 3.

[4]) См. Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, М. 1935, 2-е изд., стр. 124—130.

LM проведена параллельно прямой HZ, по которой пересекаются плоскости основания и сечения и которая перпендикулярна к BC. Наконец, отрезок EO' перпендикулярен к плоскости сечения и имеет данную длину, определяемую пропорцией

$$EO' : ED = BK \cdot KC : AK^2,$$

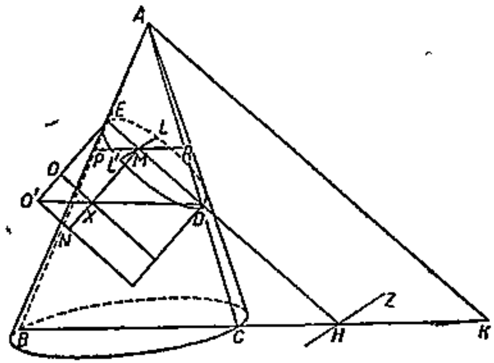
так, что

$$EO' = ED\frac{BK \cdot KC}{AK^2}.$$

Основываясь на перпендикулярности полухорды LM к диаметру круга ED и на подобии треугольников EMP и AKB, а также MRD и ACK, Аполлоний получил, что

$$PM \cdot MR = XM \cdot ME = EO \cdot EM,\ LM^2 = EO \cdot EM.$$

Основное планиметрическое свойство эллипса и заключается в том, что квадрат на LM равен прямоугольнику, имеющему ширину EM и приложенному к отрезку EO', так, что недостает (до прямоугольника MO') фигуры XO', подобной прямоугольнику DO'. Это свойство легко перевести на язык наших символов, получив сперва из тех же соображений, что



$$LM^2 = EM \cdot DM\,\frac{EO'}{ED}.$$

Если положить $EO' = p$, $ED = d$, $ML = y$, $EM = x$, то последнее свойство выразится уравнением

$$y^2 = \frac{p}{d}\,x\,(d - x) = px - \frac{p}{d}\,x^2,$$

т. е. известным уравнением эллипса относительно вершины. Аналогично Аполлоний доказал, что сечения, параллельные оси или же образующей конуса, обладают свойствами, которые мы характеризуем уравнениями (гиперболы и параболы)

$$y^2 = px + \frac{p}{d}\,x^2 \quad \text{и} \quad y^2 = px.$$

Дальнейшее изложение теории конических сечений, свойств их диаметров, хорд, касательных, радиусов-векторов и т. п. строилось на этих определяющих свойствах. Особенно важен был перенос „симптомов", первоначально установленных для некоторого определенного диаметра и сопряженных с ним хорд, на любые диаметры и сопряженные хорды. Выдающуюся роль с самого начала играло, как видно, „приложение площадей".

За сложной внешней формой аполлониевой теории можно заметить некоторый общий подход к изучению конических сечений. Во многих случаях теоремы сперва доказываются для параболы, затем они или их модификации выводятся для гиперболы и, наконец, для эллипса. Эта последовательность доказательств играла в исследовании Аполлония большую роль [1]). Однако наличие такого приема и употребление „приложения площадей" не означают, что у Аполлония имелся алгебраический метод исследования. Вывод теорем из определяющих свойств кривых совершенно не опирался на формулы и уравнения; там же, где нет общих формул и уравнений, там нет и алгебраического метода [2]). Не располагавшее единым методом исследования учение Аполлония было направлено больше на особенности отдельных кривых, чем на их общие свойства. Богатая по содержанию предложений теория Аполлония страдала поэтому крайней расчлененностью.

Теория конических сечений дала древним средства решения задач высшего порядка. Особенно известна „делосская задача" об удвоении куба, т. е. нахождении ребра куба, объем которого вдвое больше данного куба; эта задача нами выражается уравнением $x^3 = 2a^3$. Около 400 г. до н. э. Гиппократ Хиосский привел „делосскую задачу" к определению x, y из соотношений $a : x = x : y = y : 2a$. После этого заметили, что искомый отрезок является, выражаясь по-современному, абсциссой общей точки каких-нибудь двух из трех кривых: $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, $xy = 2a^2$.

Наряду с удвоением куба, геометрической трактовке подверглись трисекция угла, квадратура круга и т. д. Решение всегда достигалось при помощи тех или иных кривых (конхоиды, квадратрисы, спирали).

2. Алгебра Диофанта и арабов.

Греческая математика знала и числовое решение уравнений первой и второй степени. До нас дошла ничтожная и весьма поздняя по происхождению часть соответствующей научной литературы, явно оттесненной „классической". Главным образом мы судим о ней по „*Арифметике*" Диофанта (конец III в. н. э.).

По изложению и трактовке задач „*Арифметика*" Диофанта — числовая. Определив вслед за Эвклидом (целое) число как совокупность единиц, Диофант выделил 13 основных категорий чисел. Эта — единица, первые шесть степеней неизвестного числа, а также шесть обратных им величин. Дроби он также считал числами. Геометрический характер величин здесь по существу утрачивался,

---

1) См. O. Negebauer, цит. статья, стр. 226.

2) См. ниже, стр. 276, 277, 286.

ибо уже квадрато-квадраты, т. е. четвертые степени, и все обратные степеням величины не имели для древних геометрического смысла. Геометрические названия Диофант сохранил лишь по аналогии и в силу традиции. Диофант и действовал над величинами, отвлекаясь от геометрического их смысла. Он нарушал принцип однородности и складывал „прямоугольник" из двух величин, т. е. величину второго измерения, со „стороной", т. е. величиной первого. Впрочем, отказ от однородности не являлся принципиальным; просто, в рассматриваемом кругу задач она не имела значения и на нее часто не обращалось внимания. С другой стороны, „*Арифметика*" употребляла некоторую символику. В ней имелись обозначения неизвестной величины ее степеней, действия вычитания, равенства. Но общей буквенной величины и ее символа она не знала. Если воспользоваться несколько формальной, но все же удобной классификацией, предложенной Нессельманом [1]), и различать алгебру реторическую, все излагающую словами, синкопированную, выражающую отдельные понятия сокращениями слов, и символическую, имеющую специальные знаки для всех математических понятий, то алгебра Диофанта была синкопированная.

Следующим этапом в истории алгебры явилась числовая алгебра индусов. Индусские ученые V—X вв. открыли двойственность корней квадратного уравнения, двузначность квадратного корня из числа и отрицательные числа. Индусы свободно обращались с иррациональными квадратными корнями из положительных чисел и распространили на них арифметические действия. Алгебра получила у них и несколько более развитую символику. При всем том индусская алгебра не представляла научной дисциплины, это было только собрание решений некоторых задач.

В VIII—XII вв. под влиянием греческой и индусской культуры сложилась алгебра арабов. Наиболее известным сочинением их по алгебре была „*Алджебр в'алмукабала*" Магомета ибн Муса Альховаризми (т. е. из Хорезма — Хивы), вышедшая около 82§ г. В ней в частности давались и числовое (словесное и неснабженное доказательством) и геометрическое решение уравнений первой и второй степени. „*Алджебр в'алмукабала*" заняла особое место в истории математики как руководство, по которому обучалась долгое время вся Европа. Ярчайшим же проявлением арабского гения в алгебре явился трактат знаменитого ученого и поэта XI в. Омара Алхайями [2]).

Алхайями первый высказал мысль о самостоятельности алгебраической науки, установил ее предмет и описал в общих выражениях ее приемы. „Алгебра представляет собой научное искусство. Ее предмет — абсолютное (т. е. отвлеченное целое *А. Ю.*) число и измеримые величины, неизвестные, но отнесенные к чему-либо известному, так что их можно определить; известная вещь есть количество или определенное индивидуально отношение, как это видно при их внимательном рассмотрении. Ищут в этом искусстве отношения, связывающие данные элементы задач с неизвестной...". Указав, что под измеримыми величинами понимаются

---

1) F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842.

2) V. Woepcke, L'Algebre d'Omar Alkhayyâmî, Paris 1851.

непрерывные величины четырех родов — линия, поверхность, тело и время (здесь сказывается влияние Аристотеля), Алхайями замечает, что понятия квадрато-квадрата, квадрата-куба и т. п. к ним не относятся и что их надлежит понимать лишь метафорически. Далее заявляется, что „алгебраические решения, как известно, производятся только при помощи уравнений, т. е. приравнивая одни степени другим"[1]), т. е. иными словами, формулируется задача алгебры.

Цель Алхайями — решение кубических уравнений, и в этой области он сделал крупные открытия. Алхайями не сумел найти правила числового решения уравнений третьей степени, хотя его он искал[2]). Он пошел по античному пути построения корней, для чего воспользовался коническими сечениями. Это позволило ему привести довольно детальную классификацию кубических уравнений. Для каждого вида он привел построение положительных корней, исследовал, не всегда полно, вопрос о числе корней.

Так у арабов возникла концепция алгебры как общего учения о решении уравнений. Однако Алхайями не развил общего метода решения любых задач любой степени. Примененный им для кубических уравнений античный прием в случае высших уравнений потребовал бы введения высших же кривых и их классификации. Алхайями, во-первых, не имел средств геометрического представления степеней выше куба; во-вторых, не располагая понятием переменной, он не мог знать, что уравнение (с двумя величинами) выражает существующую между ними функциональную зависимость; для него существовали только уравнения с одной неизвестной величиной. Поэтому Алхайями не мог притти к геометрии, обнимающей последовательно линии все более высокого порядка и разбивающей их по степеням выражающих их уравнений, т. е. аналитической геометрии, создание которой было предпосылкой геометрического построения корней любых алгебраических уравнений[3]). Работа Алхайями осталась, впрочем, неизвестной европейским ученым до XIX в. и не оказала влияния на дальнейшее развитие алгебры.

3. Развитие учения об уравнениях в Европе до Виеты.

Первые шаги европейской средневековой математики заключались в усвоении результатов арабских и античных ученых. Процесс этот растянулся на ряд столетий.

В 1505 г. Сципион дель-Ферро открыл правило числового решения уравнения $x^3+px=q$. Тридцать лет спустя, Николай Тар-

---

[1]) L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi. стр 5,7.

[2]) Цит. соч., стр. 32—34. У греков встречается одна геометрическая задача, приводящаяся к уравнению вида $x^3+q=px$. Ее решали с помощью конических сечений Архимед, Диоклес и др. См. Г. Цейтен, цит. соч., стр. 146—147 и Les oeuvres complètes d'Archimède, пер. P. ver Eecke, Paris 1921, стр. 104, 105.

[3]) Ср. статью С. Яновской, „Геометрия Декарта", „Фронт науки и техники", 1937, № 7, стр. 29.

талья вновь нашел это правило, а также решение уравнений $x^3+q=px$ и $x^3=px+q$. В 1545 г. решение Ферро-Тартальи было опубликовано Джироламо Кардано, снабдившим его геометрическим доказательством; в книге Кардано было приведено решение уравнения четвертой степени, найденное его учеником Лодовико Феррари. Серьезный прогресс испытала и теория квадратных уравнений. В работах немецких алгебраистов произошло постепенное слияние различных форм квадратного уравнения, каждой из которых до того соответствовало свое отдельное правило решения. У Мих. Штифеля (1544) эти правила были сведены в одно. Это единообразное рассмотрение привело к возникновению единой же общей формулы решения. Вскоре затем Раф. Бомбелли (1572) впервые аналитически вывел решение квадратного уравнения, и хотя этот вывод был проведен на примере с числовыми коэфициентами, было ясно, что он относится к любому другому уравнению. Обобщение действия возведения в степень явилось другим могучим фактором развития алгебры. Дробные показатели встречались уже у француза Ник. Орезма (ум. 1382 г.). Отрицательные и нулевые показатели и правила действия над ними ввел впервые Ник. Шюке (1484). Развитию теории уравнений и прогрессий сопутствовало введение отрицательных чисел, а решение кубических уравнений привело к мнимым числам.

Крупные сдвиги произошли в символике. В результате сокращения слов или изобретения специальных символов были введены знаки действий сложения, вычитания, корня, равенства и т. п., а также ряд особых значков для обозначения нескольких первых степеней неизвестной величины[1]).

В алгебре XVI столетия занимали все более крупное место число и вычисление. Это было естественно для науки, крепко связанной с коммерческой арифметикой, питавшейся ее задачами и разрабатывавшейся учеными-практиками. В этом же направлении действовало развитие астрономии и тригонометрии с их огромным вычислительным аппаратом. Обращение с высшими и дробными степенями, лишенными геометрического значения, возникновение новых родов чисел, не нашедших сперва никакой геометрической интерпретации, также усиливало отвлеченно-числовую сторону алгебры. Но наряду с этим в теоретической работе алгебраистов сказывалось сильное влияние античной математики. Углубление знакомства с греческими авторами в период Возрождения на некоторое время даже увеличило это влияние.

4. Видовая алгебра Виеты.

После столь крупных успехов, как решение уравнений третьей и четвертой степени, математики XVI в. начали приходить к убеждению, что возможна наука, сочетающая эффективность алгебраических приемов с глубиной античных геометрических понятий. Первый опыт построения такой новой дисциплины был произведен знаменитым французским математиком Франсуа Виетой.

---

[1]) См. прим. 6, стр. 202 этого издания.

Он поставил задачу исследования геометрических величин алгебраическими приемами. Во *„Введении в аналитическое искусство"* (In artem analyticen Isagoge, 1591) он построил для этой цели новый анализ.

Древний анализ, говорил Виета, состоял из пористики и зететики. Пористика учит доказательству уже найденных решений или предложений. Для этого предложение предполагается верным и преобразуется в другие, вытекающие из него предложения, до тех пор, пока не получится истинное. Так как истинное предложение может получиться из ложного, то цепь предложений затем обращается и от добытого истинного возвращаются к исходному[1]). Зететика ищет самые решения. Предполагая задачу решенной, она исходит из данных связей между известными и неизвестными элементами проблемы и, преобразуя их, т. е. решая уравнение, дает ответ на задачу. К старым двум видам анализа Виета присоединил еще один — экзегетику, — собственно теорию алгебраических уравнений. Сочетание этих трех частей анализа дает учение, позволяющее „хорошо производить математические открытия". Более того, изложив все свои теории, Виета пришел к убеждению, что отныне можно будет решить любой математический вопрос, и закончил книгу словами: nullum non solvere problema. Для приобретения полной силы зететика нуждалась в серьезной реформе. Слабым пунктом древних аналистов было употребление только конкретных чисел. Новая наука „гораздо более счастливая и могучая" рассматривает общие величины[2]). Изучаемые „аналитическим искусством" величины разбиваются на виды. Величины первых трех родов носят геометрический характер, последующие образуют с ними как бы ряд непрерывно пропорциональных, но непосредственно геометрического значения не имеют. Восходящие и образующие шкалу-лестницу величины называются скалярами (ступеньками). Таковы: сторона, квадрат, куб, квадрато-квадрат, квадрато-куб и т. д. Виды соответствующих величин суть длина, площадь, тело, площаде-площадь, площаде-тело и т. д. Величинами управляет закон однородности: сравнивать между собой можно только величины одного и того же рода.

Чтобы исследование соотношений между скалярами приобрело желанную общность, Виета рассматривал величины как произвольные, а не как конкретные, характеризуемые определенным числом. Эта идея намечалась уже ранее в общей трактовке квадратных уравнений, в формулировках уравнений или их решений, говоривших, скажем, о том, что „кубы и корни равны числу", причем подразумевалось какое угодно количество кубов и корней и какое угодно число. Нужно было зафиксировать эту подразумеваемую общность величин в понятии и обозначить. В этом и заключалась крупнейшая заслуга Виеты. Для него существовали

---

[1]) Первую часть описанного процесса часто называют просто анализом, вторую — синтезом. См. подробнее P. Tannery, Mémoires Scientifiques, т. III, Paris 1915.

[2]) Не располагая работами Виеты, я пользуюсь изложением M. Marie, Histoire des sciences mathématiques et physiques, Paris 1884, т. III, стр. 6—19 и 27—65.

две алгебры. Одна имеет дело с числами,—ее он называет „числовой логистикой". Другая изучает общие величины с помощью каких-либо видов или фигур, которыми у Виеты служили прописные буквы латинского алфавита. Это—„видовая логистика".

Действия над скалярами бывают четырех родов. Сложение и вычитание подчиняются только закону однородности. „Проведение" величины A к B, называемое Виетой тем же словом, что и умножение, ductio A in B, дает величину высшего рода, размерность которой как бы складывается из размерностей данных величин. „Приложение" величины A к B (applicatio A ad B) дает величину, размерность которой равна разности размерностей первой и второй величин. Сложение величин отмечается знаками $+$ и —, „проведение"—словом in, наконец „приложение" A к B—знаком $\frac{A}{B}$. Установив правила действий, построенные в согласии с обыкновенными сложением, вычитанием, умножением и делением, Виета оказывается в состоянии применить результаты видовой логистики и к геометрическим проблемам и к числовым уравнениям. Все операции, соотношения числовой и видовой алгебры находятся в известном соответствии, хотя в принципе они резко противостоят друг другу.

Другим нововведением Виеты было различение символов для величин данных и неизвестных. „Данные величины, писал он, должны отличаться от искомых неизвестных тем, что неизвестные величины будут обозначены буквой A или другой гласной E, I, O, а данные—буквами B, D или другими согласными". Идеи Виеты, и в первую очередь создание буквенного коэфициента, явились началом коренного перелома в развитии алгебры. Лишь теперь становилось возможным строить алгебраическое исчисление как оперативный механизм.

На таком фундаменте Виета воздвигнул алгебру как науку о решении уравнений. В своеобразной форме он открыл связь между корнями и коэфициентами уравнения, показал, как строятся уравнения, корни которых так или иначе зависят от корней данного уравнения (например, отличаются от них на данную величину или превосходят их в данное число раз), дал новый способ решения уравнения четвертой степени и т. д. Он установил далее, что решение кубических уравнений всегда приводится либо к трисекции угла, либо к нахождению двух средних пропорциональных между данными величинами. В связи с этим он нашел тригонометрическое решение кубического уравнения в неприводимом случае. Однако, произведенная Виетой реформа носила ещё половинчатый характер. Алгебра оперировала разнотипными предметами—скалярами. Область операций над величинами оказывалась ограниченной. В шкале величин видовой логистики не получили места ни дробные степени, ни отрицательные. Даже извлечение квадратного корня из площади или кубического из тела у него не имело смысла; можно было только находить сторону квадрата или ребро куба. В задачах с общими величинами Виета не употреблял радикалов, применявшихся им в числовых примерах к этим же задачам. Сужено было у Виеты, не признававшего отрицательных чисел, действие вычитания. Существенные неудобства заключались в принципе однородности, не имевшем значения для числовых уравнений и чрезвычайно отягощавшем всю аппаратуру исследования. Коротко говоря, между видовой и числовой логистикой существовал глубокий разрыв. Общая алгебра отставала от алгебры числовой и даже не имела средств решить многие ее задачи[1]).

Другие недостатки заключались в символике. Особенно недоставало общего обозначения степени. Виета характеризовал степени величин, приписывая сбоку сокращенные названия степени; x^3 у него имел вид A cubus или A cub. Подобное обозначение было не распространимо на более высокие, на дробные, отрицательные и переменные степени и не применялось к любым величинам. Виета не употреблял его ни для буквенных коэфициентов, он обозначал их размерность словами (B pl. — плоское B и т. п.), ни для чисел. Между тем для алгебры обозначение степени имело особенное значение[2]).

Первым результатом алгебры Виеты явилось приложение ее к геометрии, данное П. Ферма. В 1636 г. он отправил парижским ученым небольшое *„Введение в изучение плоских и телесных мест"*. Это был набросок аналитической геометрии, построенной на быстро устаревшей алгебре Виеты. Однако ему не пришлось стать краеугольным камнем новой геометрии: эта роль выпала на долю *„Геометрии"* Декарта[3]).

5. Предпосылки новой математики.

Для средневекового мыслителя мир представлялся совокупностью качественных и разнородных сущностей, не связанных количественными зависимостями, а миропознание состояло в определении этих качеств с помощью немногих логических категорий. Наука XVII в. отстаивает в противовес этому концепцию рационального изучения мира на основе наблюдения, измерения и эксперимента. В борьбе за новое мировоззрение философия отошла от аристотелизма и более или менее сблизилась с античным атомистическим материализмом. Обращение к активному изучению и завоеванию природы, сопровождавшееся утратой веры во всемогущество силлогизма и вербальных определений, требовало нового научного метода. Этот метод должен был гарантировать от ошибочных положений, которыми столь богаты были неокрепшие еще астрономия, алхимия, анатомия, зоология и т. д. Он должен

---

[1]) Скаляры Виеты вообще не могут служить для теоретико-группового построения алгебры. Его действия — негрупповые операции. Начать с того хотя бы, что любые два элемента a, b не определяют вообще однозначную „сумму" $a+b$. Ср. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, М. 1934, ч. I.

[2]) Отметим, что идеи Виеты получили новое развитие в позднейшее время. Созданное в середине прошлого века Г. Грассманом и В. Гамильтоном векторное исчисление в известном смысле продолжает линию Виеты. Ср. Ф. Кэджори, История элементарной математики, стр. 396 (примечания И. Тимченко).

[3]) О Ферма см. прим. 125 и след., стр. 237 этого издания.

был вести к истине общедоступной прямой и верной дорогой. Эта мысль пронизывает механические работы Г. Галилея, ее с большой силой высказывают и развивают в философских сочинениях Ф. Бэкон и Р. Декарт. Четвертое из *„Правил для руководства ума"* Декарта (около 1629 г.) начиналось словами: „Смертными настолько владеет слепое любопытство, что они направляют свой ум на неизведанные пути без всякого основания для надежды, просто лишь для того, чтобы испытать, не подвернется ли им под руку то, что они ищут ... Так трудятся почти все химики, многие геометры и немалое число философов. Я не отрицаю, что во время их блужданий им иногда удавалось находить кой-какие истины, но по-моему мнению этим они обязаны не умению, а счастью. Уже лучше совсем не помышлять об отыскании каких бы то ни было истин, чем делать это без всякого метода ... Под методом же я разумею точные и простые правила, строгое соблюдение которых всегда воспрепятствует принятию ложного за истинное и без лишней траты умственных сил, но постепенно и непрерывно увеличивая знания, способствует тому, что ум достигает истинного познания всего, что ему доступно"[1]). В заголовке правила говорилось: „Метод необходим для разыскания истины"; в глазах Декарта он был и достаточен для этого.

Несколько ранее сходные идеи развивал Бэкон. „Единственные люди, писал он, бравшиеся за изучение природы, были только механики, математики, врачи, алхимики и магики; но и они, по крайней мере до последнего времени, не достигли ни больших успехов, ни истинного метода. Безумием и противоречием было бы воображать, что то, что никогда не могло быть достигнуто, может быть достигнуто иначе, как новыми путями ..."[2]). Хотя Декарт был рационалистом, а Бэкон — индуктивистом и эмпириком, но их объединяли не только вражда к схоластике и поиски нового метода; многие частные правила исследования у них просто тождественны.

Наибольшие успехи в XVII в. выпали на долю различных отделов механики. Это в свою очередь привело к быстрому прогрессу математики. „Первое место, пишет Энгельс в „Диалектике природы", заняла элементарнейшая отрасль естествознания — механика земных и небесных тел, а наряду с ней, на службе у нее, открытие и усовершенствование математических методов"[3]). Убеждение в колоссальном значении математики для познания природы было сформулировано с особенной четкостью Галилеем. Полемизируя с аристотеликом Личети, великий механик видел в математике мощное средство обработки данных опыта и наблюдения. „Если философия — это то, что содержится в книгах Аристотеля, то ваша милость была бы, вероятно, величайшим философом на свете, ибо вы владеете всеми цитатами из него, держа их всегда наготове. Я же думаю, что книга философии — это то, что

---

[1]) Декарт, Правила для руководства ума, пер. В. Пикова, М. 1936, стр. 60, 61.

[2]) Бэкон, Собрание сочинений, пер. П. Бибикова. Спб., т. II, стр. 16; ср. там же стр. 65, 81 и т. I, стр. 67.

[3]) К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, т. XIV, стр. 477.

всегда раскрыто перед нашими глазами; но так как она написана иными буквами, чем буквы нашего алфавита, то она не может быть прочитана всеми: буквами этой книги являются треугольники, четырехугольники, круги, шары, конусы, пирамиды и другие математические фигуры, очень пригодные для чтения ее" [1]).

В оценке математики не все были единодушны и не все видели в ней универсальное орудие науки. Но даже Бэкон, чуждый математике, не отрицал ее огромной пользы, требуя лишь, чтобы она была прислужницей физики. Он предсказывал ей выдающиеся успехи именно вследствие ее связи с последней [2]).

Однако чтобы математика стала орудием революции в естествознании, она должна была быть преобразована сáма. В первую очередь необходим был метод исследования общей переменной величины — математического эквивалента движения и зависимостей между переменными. Движение в ограниченных формах включалось, правда, и в античную математику. Оно входило в определение спирали Архимеда и некоторых других кривых. Но никогда переменные величины и зависимость между ними не превращались еще в собственный предмет математического исследования. В математику XVII в. движение и функциональная связь проникли тем быстрее и легче, что одни и те же лица работали над проблемами механики и математики.

Универсальный метод изучения переменных величин необходимо было применить внутри математики к геометрии. Ведь механика изучала траектории земных и небесных тел, их скорости, направленные по касательным, центры тяжести фигур. Особое внимание при этом привлекли конические сечения, исключительное значение которых показали Галилей и Кеплер. Первый установил параболическую траекторию падающих на земле тел, второй — эллиптические орбиты и законы движения планет. Геометрическая оптика, вызванная к жизни изобретением зрительной трубы, поставила, со своей стороны, проблему нормали к кривой и вопрос о целесообразной форме поверхностей линз.

6. Первые математические исследования Декарта.

Важнейшие сдвиги в науке не раз производились философами. Это особенно относится к переломным в истории науки моментам, когда в центр интересов становилась проблема научного метода. То, что именно Декарту пришлось заложить фундамент новой математики, не явилось случайным. Мировоззрение, математическая образованность и гений Декарта представляли комбинацию, наиболее благоприятную для решения новых задач математики.

Еще в иезуитском колледже Декарт сильно заинтересовался математикой. Много лет спустя, он свидетельствовал, что ему „особенно нравились математические науки верностью и очевидностью их рассуждений". Он проникся пренебрежением к школьной философии средневековья, к чистой логике. „Что касается

[1]) G. Galilei, Le Opere, Edizione Nazionale, Firenze 1890—1909, т. XVIII, стр. 291. Ср. т. VI, стр. 232.

[2]) Бэкон, Собрание сочинений, т. I, стр. 283—286.

логики, писал он 25 лет спустя, то ее силлогизмы и большинство других ее предписаний служат более для того, чтобы объяснять другому известные вещи, или даже, подобно искусству Люллия, для того, чтобы говорить, не рассуждая толком, о вещах, которых не знаешь, чем для того, чтобы их изучать. И хотя логика действительно содержит много очень верных и хороших правил, но с ними смешано столько вредных или излишних, что разделить их почти столь же трудно, как извлечь Диану или Минерву из неотделанной еще глыбы мрамора". В философии — которой обучали в колледже — „не было ни одной вещи, о которой не спорили бы" [1]). Конечно, отрыв от прошлого не мог быть полным. Даже столь резко высмеиваемые Декартом идеи средневековых философов оказали на него косвенное влияние. Из колледжа он вышел с интересом к математическим наукам и с мыслью о необходимости выработать новые правила рассуждения и исследования.

Первые известные нам занятия Декарта математикой относятся к 1619—1621 гг. Записи Декарта и его ученого друга Бекмана показывают, что первыми руководствами для Декарта явились работы немецких алгебраистов и древних. Вероятнее всего, это были книги Христ. Клавия („Algebra", 1608 и „Geometria Practica", 1604), „*Собрание*" Паппа, комментарий Эвтокия к Архимеду и т. п. [2]). В частности Декарта привлекают решение кубического уравнения и задача о делении угла на три или более частей. По примеру древних он строит „циркули", дающие нужные построения. Например, для построения корня кубического уравнения $x^3 = x + 2$ служит механизм, дважды описанный в „*Геометрии*", и т. п. [3]). В это же время Декарт старается математически вывести закон падения тел, прибегая к идеям неделимых; работает над вопросом о давлении жидкостей; пишет книгу по математической теории гармонии, открывает важное соотношение между числом ребер, граней и вершин выпуклых многогранников [4]). Но самое главное, — у него возникает общая концепция математики, которую он изложил Бекману в письме от 26 марта 1619 г. Должна существовать универсальная математика, общим образом решающая все проблемы как в области непрерывной, так и в области дискретной величины. Решение всех проблем первого рода сводится к пересечению кривых. В зависимости от характера этих кривых задачи разбиваются на группы. Для некоторых вопросов достаточно прямых, кругов и конических сечений. Другие требуют более сложных линий, но также описываемых, как говорит Декарт,

---

[1]) Descartes, Oeuvres, т. VI, стр. 4—8 и 17.

[2]) Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 154, 155, 235—247. Влияние Виеты исключается, в противном случае Декарт заимствовал бы у него ряд решений и обозначений. В иезуитской школе Декарта также не могли познакомить с гугенотом Виетой. Ср., написанную Ш. Адамом биографию Декарта в Descartes, Oeuvres, т. XII, гл. II., и прим. 6, стр. 202 этого издания.

[3]) Там же, стр. 234—237, 240—242; Ср. выше, стр. 31 и 74.

[4]) Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 58 и след., 68 и след., 84 и след., 265 и след.

„единым движением", с помощью механизмов, подобных тому, какой им был применен для кубического уравнения. Все эти кривые противостоят линиям, порождаемым несколькими несоподчиненными движениями, вроде квадратрисы[1]). В этом замечательном наброске уже намечался ряд важных пунктов „*Геометрии*". Это были уверенность в разрешимости общим образом всех задач математики непрерывных величин, определение кривых через посредство движения и, наконец, мысль о классификации всех линий, которая позволила бы установить, какие кривые необходимы для решения тех или иных вопросов. Математические занятия Декарта в последующие семь-восемь лет мало известны. Еще до 1627 г. им был самостоятельно, но позднее чем В. Снеллием, открыт закон преломления света. Поиски линз, преломляющих или отражающих все лучи, выходящие из точки, лежащей в среде с некоторым показателем преломления, так, что они затем сходятся в данной точке другой среды, поставили проблему отыскания нормалей и привели его к открытию особых овалов, изученных Декартом около 1629 г. Требовалось определить кривую по свойству нормали: синусы углов, образуемых радиусами-векторами, соединяющими точки кривой с источником света и точкой преломления или отражения, должны находиться в данном отношении. Эта задача, первая среди так называемых обратных задач на касательные, решена была Декартом, вероятно, с помощью бесконечно малых[2]). Однако затем Декарт доказал оптические свойства овалов алгебраически. Сохранившиеся черновики 1629 г. показывают ряд новых успехов Декарта. Прежде всего в них встречается употребление координат и уравнений. В качестве оси координат выбирается прямая, соединяющая три фокуса B, C, K; за координаты берутся $AD=x$, расстояние от вершины A до D, основания перпендикуляра, опущенного на ось из любой точки E кривой, и y, равный полуразности радиусов-векторов CE и RE. Эти линии x и y Декарт называет „неопределенными" и говорит о них, что „одна из них, остающаяся неопределенной, обозначает все точки кривой, а другая определяется способом, по которому должна быть описана кривая". Данным линиям даются обозначения $AC=a$, $AR=a$, $AB=b$. Радиусы векторы выражаются тогда в одном случае через y уравнениями

$$RE=2\frac{by}{a}+y+a, \quad CE=\frac{2by}{a}-y+a.$$

Кроме того, весь текст говорит, что в 1629 г. Декарт владел алгебраическим приемом проведения нормалей, описанным в „*Геометрии*"[3]) Декарт продолжал интересоваться и геометрическим

---

[1]) Там же, стр. 156.

[2]) См. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII вв., пер. П. Новикова, М. 1933, стр. 313 и след.

[3]) Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 310—328 и 335—342 (дневник Бекмана). Ср. изложение оптических работ Декарта и их связи с работами других ученых у G. Milhaud, Descartes savant, Paris 1921, гл. IV и V.

построением корней уравнений. Так, Бекман записывает найденное Декартом построение двух средних пропорциональных, пользующееся пересечением параболы и окружности. В другой раз Декарт сообщает Бекману общий способ построения с помощью параболы и окружности всех „телесных" задач, или, как он говорит, „универсальный секрет выражения всех уравнений, содержащих три или четыре измерения, с помощью геометрических линий". Решается уравнение четвертой степени без второго члена (способ удаления его Декарту был известен); уравнение третьей степени приводится к биквадратному умножением на неизвестную, как это делается и в „*Геометрии*". Хотя буквенной записи уравнения у Бекмана, дословно передающего разговор с Декартом, не дается, но вопрос ставится об уравнении с любыми коэфициентами: „Прежде всего уравнение подготовляется так, чтобы остался биквадрат, равный плюс или минус некоторому числу квадратов, + или — некоторое число корней и плюс некоторое число корней и плюс или минус некоторое абсолютное число". Вывод и обоснование решения Бекман не сообщает. Из подробно излагаемого построения явствует, что для уравнения $x^4 = \pm px^2 + qx + r$ берутся парабола $x^2 = y$ и окружность

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 = R^2,$$

где

$$R^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r;$$

при этом разбираются относительное расположение и величина отрезков, определяющих центр круга, в зависимости от знаков коэфициентов[1]). Мы также узнаем, что Декарт принимает отрицательные корни уравнений. Он видит, что число действительных корней равно числу общих точек параболы и окружности. Отсутствие точек пересечения означает, что уравнение не имеет „истинных" (verae) корней, а только воображаемые (imaginariae). „Истинные" корни разделяются на „явные" (explicitae) и „неявные" (implicitae), т. е. положительные и отрицательные. Декарт указывает, с какой стороны от оси параболы и центра окружности располагаются в разных случаях линии, характеризующие те и другие корни[2]).

7. „*Универсальная математика*" Декарта.

Около 1629 г. Декарт сформулировал ряд важных положений своей теории познания в незаконченных и неопубликованных при его жизни „Regulae ad directionem ingenii". Новый научный

---

[1]) Декарт здесь уравнений кривых не пишет. Один математик того времени, Липсторп, утверждал, что это решение Декарт знал в 1619 г. См. Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 344—346 стр. 253.

[2]) Ср. то-же решение на стр. 95—99 этого издания.

метод был построен в немалой степени под влиянием математики. Свидетельствовал это сам Декарт: „те длинные цепи совсем простых и легких выводов, которыми имеют обыкновение пользоваться геометры, чтобы доходить до их труднейших доказательств, дали мне повод сообразить, что все вещи, которые могут подпасть под человеческое познание, находятся между собой в такой же последовательности и можно, если только остерегаться и не принять какую-либо за истинную, между тем как она не такова, и всегда соблюдать порядок, в каком надо их выводить одни из других, достичь самых отдаленных и открыть самые сокровенные" [1]).

Мы должны руководиться достовернейшими средствами познания. Ими были в глазах Декарта не индукция и ее опора — наблюдение, часто страдающие недостоверностью. Декарт не отвергал эксперимент и индукцию вообще; он сам производил оптические опыты, он советовал Бл. Паскалю произвести знаменитый барометрический опыт на вершине горы Пюи де-Дом. Хорошо зная сочинения Бэкона, Декарт отзывался с большим уважением о его взглядах, в частности о знаменитых сравнительных таблицах исследуемых явлений [2]). Однако точное и безусловное знание можно по Декарту получить лишь путем непосредственного простого и отчетливого понятия здравого и внимательного ума, сразу схватывающего предмет (декартова „интуиция"). К интеллектуальной интуиции присоединялась дедукция. Она выводит необходимым образом из известных вещей неизвестные и нужна потому, что многие достоверные вещи сами по себе не очевидны, а только могут быть соединены с очевидными непрерывным движением дедуцирующей мысли. Идеи доминирующего у Декарта рационализма [3]), в котором односторонне утвердилась вера человека в силы разума, детально излагаются в „Правилах". Методическое исследование заключается в упорядоченном расчленении разбираемого вопроса и понятий на простейшие. Все вещи, свойства, понятия разбиваются на группы; познание одних зависит от познания других. Сравнивая их друг с другом, разум отделяет абсолютные, т. е. самые легкие и самые простые, от относительных. Так, для измеримых тел абсолютной является протяженность, для самой протяженности — длина и т. п. Изучение взаимных связей тех и других должно привести к познанию истины. Условием этого является полнота перечисления рассматриваемых предметов. Стоит сравнить эти и другие указания „Правил", сжато сформулированные позднее в четырех знаменитых предписаниях „Рассуждения о методе", со способом решения алгебраической задачи (отделение известных и неизвестных, полнота их перечисления, установление их связей, т. е. уравнений, и т. д.), описанным в начале „*Геометрии*", чтобы роль математики в формировании

---

[1]) Descartes, Oeuvres, т. VI, стр. 19.

[2]) Там же, т. I, стр. 109, 195, 251. Ср. также Milhaud, цит. соч., гл. X. и Бэкон, Собрание сочинений, т. II, стр. 16, 22, 29, 41, 65, 81 и др.

[3]) Совершенно чуждого современному алогическому, иррациональному интуиционизму.

теории науки Декарта стала ясной. В свою очередь, рационалистический метод воздействовал на математику обратно с многократно возросшей силой.

Идеи математики Декарта переплетались также с его механическим материализмом. Мировоззрение Декарта не было целостным. Но физика его, как и большинства крупных естествоиспытателей XVII в., была последовательно механистической: в этой форме находил свое выражение тогдашний материализм. Идея материи рождается у нас под воздействием вещей внешнего мира и им вполне подобна. Природа материи, или же тел, состоит в протяженности в длину, ширину и глубину. Материя едина в физическом мире, который в силу этого также един в своей материальности — протяженности. Все свойства, которые мы замечаем в материи, сводятся к ее делимости и подвижности [1]. Если предметом физики в самом широком смысле слова оказывалась для Декарта отвлеченная протяженность — материя или пространство, то объяснения всех явлений он искал в движении, к которому сводились в принципе все качественные различия фактических вещей. В противовес средневековому аристотелизму, с его различными, не связанными друг с другом качественными движениями, объяснявшими нагревание как motus ad calorem (движение к теплоте), рост, как motus ad quantitatem (движение к количеству) и т. п., он выдвигает одно движение — механическое. Для Декарта движение — это „перемещение одной части материи или одного тела из соседства тех тел, которые его непосредственно касались и рассматривались как бы покоящимися, в соседство других тел" [2]. Новое понятие движения даже проще, чем понятие поверхности и линии в геометрии, ибо является по отношению к ним первоначальным. „Это видно хотя бы из того, что линию геометры объясняют посредством движения точки, а поверхность посредством движения линии", говорит Декарт в „Трактате о мире" [3]. Поскольку пространство и пространственное движение заняли центральное место в учении Декарта о мире, его математика должна была стать универсальным методом исследования пространственных форм и движения.

Хотя Декарт и не определил математику явно, но видно, что для него математика была наука о пространственных образах и величинах. Это, как он выражается, — наука „о порядке и мере", к каким бы вещам они ни относились, и постольку она является общим методом познания физического мира [4]. Почему, спрашивал себя Декарт, к числу математических наук относят не только арифме-

---

[1]) Ср. Р. Декарт, Начала философии, пер. Н. Сретенского, Казань 1914, стр. 40—49.

[2]) Ср. Р. Декарт, Начала философии, стр. 49.

[3]) Ср. L. Brunschvigc, „Les étapes de la philosophie mathématiques, Paris 1929, стр. 112.

[4]) Ср. Ф. Энгельс, Анти-Дюринг (К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, т. XIV, М. 1931, стр. 39), а также Ф. Энгельс, Диалектика природы (там же, стр. 397) и Гегель, Философия природы, М. 1934, стр. 53.

тику и геометрию, но также астрономию, музыку, оптику, механику. „К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера и совершенно несущественно будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое"[1]. А отсюда он пришел к заключению, что „должна существовать некая общая наука, объясняющая все относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным словом, но старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики (Mathesis universalis), ибо она содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики". Однако наличная математика не обладала должной силой. „Когда я впервые отдался душой математическим наукам, я сразу перечитал большую часть трудов, которые доставляют нам в этой области авторы. Наиболее охотно я занимался арифметикой и геометрией, потому что они считались тогда самыми простыми из всех наук и как бы дверью для всех остальных. Но ни в той, ни в другой мне не посчастливилось найти автора, который бы меня вполне удовлетворил... Почему это делалось так, а не иначе, и каким путем достигались подобные открытия, они не могли объяснить моему уму удовлетворительно"[2]. Выставлявшееся творцами философии требование от приступающих к ее изучению знания математики заставило его, однако, догадаться, что „они разумели под нею науку, весьма отличную от обыкновенной математики нашего времени", хотя они и не владели ею в совершенстве. „Некоторые следы этой истинной математики" Декарт видел у Паппа и Диофанта. Требовалось восстановить следы этой математики, для которой обыкновенная математика является лишь как бы „оболочкой"[3].

В центр „универсальной математики" было поставлено изучение отвлеченных отношений величин. Всякое познание, если оно приобретено не с помощью простой и чистой интуиции, получается путем сравнения между собой двух или нескольких предметов одинакового рода. Главная роль „человеческого искусства" заключается в установлении отчетливых равенств между искомыми и известными вещами. К таким равенствам могут быть приведены, однако, лишь вещи, обладающие величиной. Изучение отношений между вещами поэтому приводится к изучению отношений величин. Учение о величинах можно построить на каком-либо частном их роде. Удобнее всего воспользоваться теми величинами, которые „и легче и яснее всего рисуются в нашем воображении. Такими величинами является реальное протяжение тел, отвлеченное от всего, кроме того, что относится к их фигуре"[4].

Приведение всех вопросов к изучению пространственной величины связано было с более общим понятием измерения. „Под измерением мы разумеем не что иное, как способ и основание, по которым та или иная вещь считается измеримой, почему изме-

---

[1] Декарт, Правила для руководства ума, М. 1936, стр. 68.
[2] Там же, стр., 64, 65, 68.
[3] Там же, стр. 66.
[4] Там же, стр. 140—142.

рениями тела являются не только длина, ширина и глубина, но также и тяжесть, по которой тела взвешиваются, и скорость, измеряющая движение... Отсюда становится понятным, что в одном и том же предмете может быть бесконечное количество различных измерений" [1]). Измерение предполагает его единицу. Для отчетливого ее представления „Правила" предлагают три способа: для непрерывных величин она изображается квадратом или отрезком, а для целых — точкой. Все степени непрерывной величины, образующие непрерывно-пропорциональный ряд — корень, квадрат, куб и т. д., — можно представлять с помощью двух простейших образов — линии или поверхности. Любые операции над ними приводят снова к линиям и поверхностям; при этом за простейшие фигуры берутся отрезок и прямоугольник. При умножении получившегося в произведении прямоугольника на новую линейную величину число измерений результата уже более не повышается. С этой целью прямоугольник заменяется линией, так что в новом произведении получается снова прямоугольник и т. д. Для нахождения частного делимая величина представляется прямоугольником, делитель — одной из сторон. Все это требует только преобразования прямоугольника в другой с данной (равной единице) стороной. Извлечение корней приводится к отысканию средних пропорциональных между данным числом и единицей. В „*Геометрии*" Декарт пошел еще далее и для представления величин сохранил лишь отрезок [2]).

Сведя математическое исследование к рассмотрению отношений между пространственными величинами, Декарт затем сделал следующий шаг. В натурфилософском отношении протяженная величина и ее частный вид — протяженность линейная — не подлежали сведению к более простым началам. Но исследование таких общих величин нуждались в дальнейшей замене их специальными символами. Первоначально Декарт указывал лишь на психологическую пользу вводимой им символики [3]) (облегчение памяти и т. п.), но он понимал, что этим ее значение не исчерпывается. В абстрагировании от конкретных чисел он видел способ общего представления зависимостей, раскрывающих все таящиеся в них возможности при замене переменных буквенных величин числами. Тогда как для вычислителя важен лишь числовой результат, Декарта интересовали общие отношения величин, выражаемые формулами, „в этом и заключается вся наука" [4]).

---

[1]) Декарт, Правила для руководства ума, М. 1936, стр. 149—150. Ср. Brunschvigc, цит. соч. стр. 111.

[2]) Там же, стр. 155, 156 и 167—171. В дневнике Бекмана за 1629 г. сжато передается беседа с Декартом об „открытии им общей Алгебры" и говорится о двух способах изображения величин. В одном площади и линии чередуются, как в „Правилах", в другом все степени алгебраических величин представлены уже только отрезками. Descartes, Oeuvres, т. X, стр. 332—335.

[3]) Декарт уже здесь произвел реформу записи степенных выражений. См. прим. 6, стр. 202 этого издания.

[4]) См. Декарт, Правила для руководства ума, М. 1936, стр. 158.

Впрочем, Декарт не охарактеризовал свойств созданного им исчисления с другой, не менее важной стороны. Буквенные формулы вроде $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $a+b$, ab, формула корня квадратного уравнения и т. п. не только выражают на особенно простом и наглядном языке результаты операций или отношения между общими, т. е. переменными, величинами, которые можно передать и словами. Словесная передача правила возведения в квадрат также носит весьма общий характер и относится к каким угодно числам. Нет, такие формулы являются, кроме того, самостоятельными объектами, к которым в свою очередь могут быть применены те или иные операции. Закрепляя какую-нибудь зависимость в виде известного сочетания знаков, формулы представляют ее как новый предмет исчисления, как элемент новых формул. Буквенное исчисление оказывается в результате системой многообразных формул, переходящих друг в друга по определенным правилам, среди которых большую роль играет так называемое в математической логике правило подстановки, позволяющее подставлять в формулы, содержащие переменные, вместо последних не только числа, но опять-таки формулы.

Последние правила (для некоторых из них написаны были одни заголовки) содержали указания относительно порядка решения задач[1].

Так у Декарта складывалась картина научного познания. Мир физики, единый в материальной протяженности, изучается группой математических наук. Их основой являются понятия протяженной величины и движения. Отношения величин и связывающие их уравнения изучает универсальная математика, „новая алгебра" буквенного исчисления.

Оставался вопрос о решении любых алгебраических уравнений. Его Декарт намеревался попрежнему получить построением корней с помощью пересечения кривых. Это требовало, как было сказано выше, установления связи между кривой и уравнением и классификации линий, т. е. введения аналитической геометрии. Для последнего Декарт располагал всеми нужными средствами. В первооснове лежали идея переменной величины и совершенно новая точка зрения на уравнение как на математическую характеристику зависимости между входящими в уравнение величинами. Декартово понимание уравнения $f(x, y)=0$ как функции (слово, это, впрочем, ввел позже Лейбниц) имело важнейшее значение в математике. Для него самого, в частности, оно послужило в работе над преобразованием геометрии. Мы видели, что кривые по Декарту возникали вследствие движения точек или описывающих их механизмов. Необходимо было выразить связи между порождающими линии движениями. Этого Декарт достиг, установив, что положение точки определяется двумя переменными, а самый закон движения — уравнением с этими „неопределенными" величинами.

В конце 1631 г. голландский ученый Як. Гооль дал Декарту внешний повод разобрать вопрос о решении высших алгебраических уравнений с помощью кривых, обратив его внимание на так называемую задачу Паппа[2]. Из письма Декарта к Гоолю в начале

---

[1] Декарт, Правила для руководства ума, М. 1936. стр. 164—173.

[2] См. прим. 30, стр. 209 этого издания.

1632 г. видно, что он уже вполне овладел приложением алгебры к исследованию линий и построил, в связи с задачей Паппа, классификацию кривых, о которой начал думать в 1619 г. При любом числе прямых, сообщал Декарт, искомые точки лежат на кривой, описываемой единым непрерывным движением, т. е. на алгебраической (по терминологии Лейбница) кривой. Эти линии противопоставляются квадратрисе и спирали; они определяются с помощью „простых отношений", — именно выражаются уравнениями, содержащими величины, образующие геометрические пропорции (т. е. степенные величины); согласно числу отношений (т. е. по степеням) они распределяются по родам. К первому роду относятся конические сечения, решающие задачу в случае не более, чем четырех прямых, ко второму — кривые не выше четвертой степени, возникающие, когда дано не более восьми прямых, к третьему — кривые не выше шестой степени, возникающие, когда дано не более двенадцати прямых, и т. д.[1]). Обратно, для всякой такой кривой можно найти соответствующее число данных прямых, для которых она служит решением задачи Паппа[2]). Установив классификацию кривых и неограниченно расширив область геометрии, Декарт получил инструмент для решения алгебраических задач любой степени.

Таким образом „универсальная математика" представляла по замыслу Декарта нечто целое. Буквенное исчисление сливалось воедино с геометрией кривых; только их синтез давал ключ к решению любых задач математики. Однако исторически из „универсальной математики" выросли две науки: независимая от геометрии алгебра и опирающаяся на алгебру аналитическая геометрия. Как будет показано, Декарт видел, что принципиально буквенное исчисление есть самостоятельная дисциплина, хотя он не счел возможным обойтись при его развитии без обращения к некоторым геометрическим средствам. Точно так же он понимал, что, введя алгебру в геометрию, он поставил последнюю на новый путь. Мы рассмотрим поэтому алгебраические и геометрические открытия Декарта, сосредоточенные главным образом в его знаменитой *„Геометрии"*, по отдельности.

8. Алгебра Декарта.

„Геометрия", написанная в кратчайший срок, вышла осенью 1637 г. в качестве третьего приложения к „Рассуждению о методе"[3]). Вместе с *„Оптикой"* и *„Метеорами"*, объяснявшими ряд атмосферных явлений, *„Геометрия"* служила образцом применения общего метода. „Рассуждение о методе" должно было дать всеобщий прием открытия и установления истины. Первоначально Декарт даже хотел снабдить книгу названием: „Проект универсальной науки, которая может поднять нашу природу до ее высшей сте-

---

[1]) См. Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 232—234.

[2]) Это неверно. См. прим. 32. стр. 211 этого издания.

[3]) Декарт говорит, что написал ее и даже впервые открыл некоторые вошедшие в нее вещи во время печатания *„Метеоров"*. См. Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 458.

пени совершенства. Вместе с диоптрикой, метеорами и геометрией, где наиболее любопытные предметы, которые мог выбрать автор, чтобы подтвердить универсальность предлагаемой им науки, объяснены так, что их могут понять даже необученные люди" [1]).

Резюмируя в „Рассуждении" плоды своих размышлений, Декарт еще определеннее, чем в „Правилах", подчеркивал, что предмет математики — это абстрактные отношения величин. „Видя, что все математические науки — хотя предметы их и различны — согласуются между собою в том, что рассматривают не что иное, как разные отношения и пропорции, я думал, что наилучше будет, если я стану рассматривать только эти отношения вообще, предполагая их, правда, только в предметах, которые бы облегчили мне их познание, но и не стесняя их этими предметами, чтобы иметь возможность тем лучше приложить их потом ко всем другим предметам, к которым они подойдут" [2]). В качестве подспорья, облегчающего познание отношений, он теперь обратился исключительно к отрезкам и обозначающим их буквам. „Затем, приняв во внимание, что для лучшего познания их мне потребуется иногда рассматривать эти пропорции каждую в отдельности, а иногда только удержать их в памяти или обнять многие разом, я полагал, что для лучшего рассмотрения в частностях должен их предполагать в линиях, так как не находил ничего более простого и ясного, что мог бы более отчетливо представить моему воображению и моим чувствам. А чтобы удержать и обнять многие разом, требовалось, чтобы я изъяснил их возможно кратчайшими знаками; и таким образом я позаимствовал лучшее и из геометрического анализа и из алгебры, и исправлял все недостатки одного с помощью другого" [3]).

Алгебра здесь попрежнему связывалась с геометрией через выражающие величины отрезки. На первой же странице *„Геометрии"* выяснялось взаимоотношение арифметических действий и геометрических построений и с помощью единичного отрезка одни сводились к другим. Однако отношение между алгеброй и геометрией у Декарта существенно отличалось от того, каким оно было у Виеты. Видовая логистика Виеты была исчислением разнородных „скаляров", управляемым принципом однородности. Операции над скалярами были хотя и сходны, но не изоморфны действиям над числами, и законы арифметики и алгебры не совпадали. Отделение учения о величинах от учения о числах исчезало у Декарта. Его исчисление буквенных величин не подчинялось узко геометрическим требованиям. Оно становилось единственным общим методом математического исследования, проникающим в геометрию, и преобразующим ее самое. В принципе Декарт не связывал, „не стесняя", как писал он, каким-либо специальным предметом свою алгебру, изучавшую отвлеченные отношения [4]),

---

1) Descartes, Oeuvres, т. I, стр. 339.

2) Там же, т. VI, стр. 20.

3) Там же, стр. 20.

4) Ср. L. Liard, Descartes, Paris 1882, стр. 47 и P. Boutroux, L'idéal Scientifique des mathématiciens, Paris 1920, стр. 95.

О стремлении освободить алгебру от подчинения геометрии ярко свидетельствует небольшое сочинение, дошедшее до нас в незаконченном виде под названием *„Исчисления г. Декарта"*. Декарт рекомендовал его в качестве введения в *„Геометрию"*. В этом введении излагаются правила буквенного исчисления и основные рецепты решения задач без какой-либо связи с геометрией. „Новая арифметика", указывается там, состоит из употребления букв a, b, c и цифр. Известные взаимные расположения цифр и букв обозначают операции над целыми, дробными и иррациональными буквенными выражениями. Вслед за этим даются общие предписания о составлении и решении уравнений, содержащиеся в *„Геометрии"* и намеченные еще в „Правилах" [1]). Впрочем, не следует усматривать в алгебре Декарта „чистую технику" и систему „конвенциональных определений", лишь „недостаточно близко исследованных Декартом" [2]). Верно, что алгебра не ограничена частной природой объектов задач, к которым применяется. Но ее общность и глубокая отвлеченность ее понятий не обозначают оторванности от всякого содержания. Алгебра не беспредметна: ее предмет — общие отношения величин, и Декарту, конечно, не приходила мысль строить определения операций лишь так, чтобы система их не была противоречивой и чтобы результаты одноименных операций над числами в арифметике и над отрезками в геометрии находились во взаимно-однозначном соответствии.

Так выступала на первое место числовая математика. И если она обратилась за помощью к геометрическому представлению в двух важных пунктах: в самом начале и в самом конце, то в отличие от Виеты, приспособившего понятия алгебры к разнородным объектам геометрии, Декарт строил геометрическую основу так, чтобы алгебра его была подобна числовой. Он создал новую алгебру как алгебру линейную.

Всякая положительная величина, рациональная или иррациональная, выражается прямолинейным отрезком, этим наиболее отчетливым и простым предметом, способным служить для образования отношений и пропорций [3]). И a^2 и a^3 представляют собой отрезки, хотя и называются по традиции квадратами, кубами и т. п. Отрезки обозначаются буквами, вводится единичный отрезок и приводятся правила символического выражения известных и неизвестных величин и производимых над ним операций. Умножению и делению соответствует нахождение четвертой пропорциональной. Действительно, $c = a \cdot b$, или $c = \frac{a}{b}$ можно найти из пропорций $c : a = b : 1$ или $c : 1 = a : b$, а это приводит к элементарнейшим геометрическим построениям. Корень любой степени можно строить с помощью механизма, описанного выше [4]).

---

[1]) См. стр. 117 — 137 этого издания.

[2]) Как поступает Boutroux, цит. соч., стр. 96, 97, 100.

[3]) Ср. Liard, цит. соч., стр. 57.

[4]) См. стр. 74 этого издания. Разумеется, эти построения, пользующиеся подобием треугольников, основывались на облеченной в геометрическую форму эвдоксовой теории пропорций.

В новой алгебре совершенно отпадала забота о соблюдении однородности, поскольку все члены любого уравнения были отрезками. Если в какой-нибудь задаче, в которой единица еще не определена, приходилось складывать по форме неоднородные члены, скажем a^2 и b^3, то всегда можно было представить себе, что они помножены или поделены столько раз на единицу, что измерения их одинаковы. Так устанавливался полный параллелизм между исчислением отрезков и числовой алгеброй.

Первый успех состоял в расширении области чисел. До Декарта число все еще рассматривали как собрание единиц. Между непрерывной величиной геометрии, с одной стороны, и целым положительным числом арифметики, а также числовыми новообразованиями алгебры с другой, лежала пропасть. Трактуя всякое вещественное число как отрезок и введя отрезок-единицу, Декарт открывал путь к новому общему определению положительного числа, хотя сам его и не сформулировал. По-иному он ввел в арифметику и отрицательное число, служившее ранее лишь в качестве удобной фикции. Построение уравнений привело Декарта к выражению отрицательных корней отрезками, располагавшимися по другую сторону от оси, чем положительные отрезки. Эта геометрическая интерпретация давала отрицательным числам полное признание. Наконец, смелое и широкое употребление Декартом и позднейшими учеными мнимых величин раскрыло их незаменимое практическое значение.

Операции алгебры Декарта относились к отрезкам. Однако изложение важнейших ее теорем и приемов ничем об этом не напоминает и совершенно сходно с нашим. В третьей книге „*Геометрии*“ довольно систематически и доступно излагаются полученные Декартом, а частью другими учеными, важные результаты, послужившие отправными пунктами развития целых отделов алгебры [1]. Заметим, при этом, что символика „*Геометрии*“ почти ни в чем не отличается уже от нашей. Неизвестные обозначаются буквами x, y, z; известные (положительные) величины — буквами a, b, c, а для степеней Декарт пользуется тем обозначением, которое ввел еще в „Правилах“.

Изложение теории уравнений Декарт начинает с замечания, что их удобнее представлять с правой частью, равной нулю, а не записывая по обе стороны от знака равенства члены с положительными коэфициентами. Это было существенное новшество, послужившее основой общих теорем о связи корней и коэфициентов, различных правил знаков для определения числа корней того или иного вида, способа неопределенных коэфициентов и пр. Далее Декарт рассматривает образование уравнений путем перемножения двучленов типа $x-a$ и убеждается в том, что уравнение имеет столько корней, какова его степень. Иногда, добавляет он, корни эти оказываются лишь воображаемыми. Тот же прием обнаруживает делимость многочлена на разность $x-a$,

[1]) Структура „*Геометрии*“ несколько беспорядочна. Сам Декарт советовал после первой части читать более легкую третью, ранее второй, включающей приложение алгебры к геометрии. Ср. Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 22, 23.

если a является его корнем. Вслед за этим излагаются знаменитое правило знаков Декарта, способ уничтожения второго члена в уравнении, способы изменения корней уравнений, превращение действительных корней в положительные, опирающееся на хотя бы примерное знание границ корней и т. д., новое решение уравнения четвертой степени, опирающееся на открытый Декартом метод неопределенных коэфициентов. Почти все излагается на примерах и не снабжено подлинными доказательствами. В большинстве случаев Декарт и не мог бы их дать при тогдашнем состоянии математики.

Все эти теоремы играли служебную роль, способствуя определению корней уравнений, служащих для решения задач. Именно последнее — главная цель алгебры. Здесь Декарт вновь обратился к геометрии. Он не вычислял корни, а строил их посредством пересечения кривых, причем стремился выбирать линии возможно низшего рода[1]). Ему было известно, что две кривые с уравнениями степени m и n позволяют найти корень некоторого уравнения степени mn. В конце III книги он построил для образца корни уравнения $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + 5y^2 + y + v = 0$, и разобрал возможные комбинации действительных и мнимых корней, зависящие от соотношений между коэфициентами.

Это вторичное использование геометрии определялось всем характером декартовой математики. Формулы решения уравнений выше четвертой степени не имелось, и, как выяснилось много позднее, в общем случае их корни в радикалах не выражаются. „Универсальная математика" должна была указать общий прием нахождения корня уравнения любой степени. Теоретически мыслимы были два пути. Одним являлось приближенное вычисление корня с любой степенью точности. Такого аналитического способа Декарт не знал. Но он его и не искал, ибо его полностью удовлетворял второй путь геометрического построения, соответствовавший определению числа как отрезка. Построение корней теоретически совершенно точно давало искомый отрезок. Основанием этого приема служила классификация кривых по их уравнениям в прямолинейных координатах, о которой рассказывала II книга „*Геометрии*".

Нити, соединявшие у Декарта алгебру с геометрией, были непрочными. Чистая алгебра была объявлена принципиально независимой от геометрии, служившей не для придания ей „логической неуязвимости"[2]), но лишь в качестве полезного подспорья, а отрезки применялись точно так, как мы применяем числа. Поэтому вскоре оказалось возможным решительно арифметизировать алгебру, не изменив внешне в ней ничего: для этого лишь потребовалось начать понимать всюду под буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$ вместо отрезков соответствующие им и измеряющие их числа[3]).

---

[1]) См. стр. 74 этого издания.

[2]) Как представляет Boutroux, цит. соч., стр. 99.

[3]) И. Тимченко отметил сходство определений и построений алгебры Декарта и исчисления отрезков Р. Шура и Д. Гильберта (Ф. Кэджори, цит. соч., стр. 401), используемого при исследовании аксиом геометрии. Ср. „Основания геометрии" Гильберта, гл. III.

9. Преобразование геометрии.

Отношение Декарта к античной геометрии, лишенной в его глазах единства метода, скрывавшей способы получения своих предложений, было выше охарактеризовано. Задачей философа являлась разработка общего подхода к пространственным предметам и их взаимоотношениям.

Метрическая геометрия Эвклида и Аполлония нуждалась в реформе. Эту реформу Декарт произвел, арифметизировав геометрию; Декарт сам подчеркивал, что ключом решения стоявшей перед ним проблемы было открытие связи между числом и пространственной формой. „Боязнь древних употреблять в геометрии арифметические термины, которая могла быть вызвана лишь тем, что они не понимали достаточно ясно связи между этими науками, породила много неясностей и неудобств в их способе изъясняться" [1]). На первой же странице своего сочинения он говорит об „установлении более тесной связи с числами". Правда, арифметизация не была проведена до конца. Декарт ввел в геометрию не число, а его заменитель — линейный отрезок. Но для конкретного математического исследования это не имело значения.

Все задачи геометрии, заявлял Декарт, приводятся к такой форме, что для построения их нужно лишь определить длины отрезков. Исчисление отрезков сопрягает все операции арифметики с геометрическими построениями, — это позволяет строить по точкам любой целый многочлен с одним переменным. Для решения задачи геометрии надо итти обычным путем: обозначив данные и неизвестные отрезки, составить между ними уравнения. Поэтому приходится исследовать геометрический смысл алгебраических уравнений с несколькими переменными [2]).

Ясно, что при этом Декарт исходил из того нового понимания уравнения $f(x, y) = 0$, о котором было сказано выше, — именно алгебраическое уравнение для него выражало функциональную связь между отрезками, характеризующими положение точек на плоскости. Другой важнейшей предпосылкой аналитической трактовки геометрических проблем была уже отмеченная более общая точка зрения Декарта на число. Алгебраическое изучение непрерывных образов геометрии на основе целочисленной арифметики было немыслимо.

Основой решения вопроса является метод прямолинейных координат. В выбранной для образца задаче Паппа Декарт принимает некоторую прямую за главную и к ее точкам „относит" точки исследуемого геометрического места. Конкретно берется задача Паппа для четырех линий. На выбранной прямой фиксируется начало отсчета, и из точек геометрического места к выбранной прямой проводятся под заданными углами отрезки. Один из них, обозначается через x, а отрезок первой выбранной прямой, лежащий между этим отрезком и началом отсчета, через y. Затем составляется уравнение, выражающее соотношение между x и y,

---

[1]) См. стр. 21 этого издания.

[2]) См. стр. 14, 44, 45 этого издания.

Какие линии, спрашивается теперь, можно отнести к области геометрии? Древние, пишет Декарт, различали геометрические и механические кривые, описываемые с помощью приборов — вроде конхоиды, циссоиды, спирали и квадратрисы[1]). Декарт возражает против такого подразделения. Движение его не отпугивает; он даже кладет его в основание учения о кривых.

Изгнание механизмов из геометрии нельзя, говорит он, объяснить их большей сложностью, чем линейка и циркуль. Геометрия преследует не точность чертежа, но лишь точность рассуждений, а последняя не меньше для многих линий, описываемых сложными инструментами, вроде мезолябия, чем для кругов и прямых. Кривые, которые он собирается употреблять в геометрии, получаются кинематически в том предположении, что „две или несколько линий можно перемещать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другую линию".

На образование геометрических линий накладывалось, впрочем, одно ограничение. Геометрия „учит вообще познанию мер всех тел" не приближенно — это дело механики, а „определенно и точно". Поэтому „геометрические" линии должны быть „описаны непрерывным движением или же несколькими такими движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, — ибо этим путем всегда можно узнать меру". Линии же вроде спирали и квадратрисы „действительно принадлежат только механике и не относятся к тем, которые должны, на мой взгляд, быть здесь допущены, так как их представляют себе описанными двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить"[2]). Кинематическое порождение кривых было предметом размышлений Декарта еще в 1619 г. Теперь он дал более точное определение объектов, которые им включены в геометрию. Если приведенная характеристика их была туманна (что означает „непрерывность" описывающего движения, какие именно линии и как можно перемещать?), то далее Декарт ясно указал, что геометрическими линиями являются алгебраические[3]).

Декарт весьма ограничил область геометрии. Исключение трансцендентных линий не означало, правда, отказа от их изучения, но Декарт был уверен, что общих приемов математического исследования, выходящих за пределы алгебры, не существует. Получение каких-нибудь результатов относительно механических кривых было для него возможно лишь случайно, а не в порядке методического научного исследования. Эта концепция была быстро ниспровергнута жизнью. Однако если Декарт не дал общего приема изучения всяких кривых, зато он положил основы аналитической геометрии в собственном смысле слова.

Выделив круг геометрических кривых, Декарт классифицировал их по „родам". Классификация кривых по уравнениям сыграла

---

[1]) П. Таннери указывает, что твердых оснований принять наличие такой классификации у древних нет. См. P. Tannery, Mémoires Scientifiques, Paris 1912, т. II, стр. 10, 11.

[2]) См. стр. 30, 31 настоящего издания.

[3]) См. стр. 33 настоящего издания.

исключительную роль, но провел ее Декарт неудачно. Он соединил кривые порядка $2n-1$ и $2n$ в одну группу — род [1]). Так как выбор прямой, к которой относятся кривые, произволен, то для определенности классификации требовалось, чтобы род кривой не зависел от положения оси и направления координат. Декарт привел, впрочем, эту теорему без доказательства.

После этого Декарт возвращается к задаче Паппа. Для искомого геометрического места, проходящего через начало координат, получается в результате некоторых преобразований уравнение второй степени, решение которого относительно y дает, что

$$y=\sqrt{m^2+\frac{oz}{a}x-\frac{pz^2}{ma^2}x^2}.$$

На основе этого уравнения Декарт провел довольно полное исследование общего уравнения кривой второго порядка. В заключение утверждалось, что к первому роду кривых принадлежат только круг, парабола, гипербола и эллипс [2]). При доказательстве своих теорем Декарт опирался на известные из Аполлония свойства кривых. Естественно, что он сразу пользовался косоугольными координатами. Некоторое место было уделено отдельным высшим кривым [3]).

Координатный метод составлял центр геометрии Декарта. Другое капитальное открытие относилось к проведению нормалей и касательных к алгебраическим кривым. Решение Декарта опиралось на пользование методом неопределенных коэфициентов и отыскание двойного корня некоторого уравнения, соответствующего слиянию двух точек кривой в одну [4]). Декарт провел таким способом нормаль к эллипсу, циссоиде и применил его также к выводу оптических свойств овалов.

Последний параграф второй книги „*Геометрии*" содержит совершенно неразвитый набросок изучения пространственных кривых [5]).

Декартова геометрия встретила весьма различную оценку. О. Конт объявил ее революцией в математике. М. Шаль назвал геометрию Декарта „ребенком, возникшим без матери". В последнее время, наоборот, стали появляться иные отзывы. Так, например, Мило писал: „революция, которую Конт и историки XIX в. усмотрели в аналитической геометрии Декарта, — самообман. Не может быть и речи ни о революции, ни о творении, радикально преобразовавшем математику и обновившем науку, а только о нормальном развитии, после возвращения к грекам, руководящих идей их анализа" [6]). Совсем недавно Дж. Кулидж пришел к мнению, что подлинными творцами аналитической геометрии были

---

1) См. стр. 33—35 этого издания.
2) См. стр. 37—42 этого издания.
3) См. стр. 45—48 этого издания.
4) См. стр. 50—55 этого издания.
5) См. стр. 72, 73 этого издания.
6) Milhaud, цит. соч., стр. 141.

древние. За Декартом американский историк оставляет арифметизацию геометрии, отказ от однородности, классификацию [1]. Однако решение вопроса о новизне геометрии Декарта зависит от внутреннего характера последней. И если верно, что Декарт положил начало арифметизации геометрии и построил изучение ее задач на буквенном исчислении и алгебре, то грандиозность и оригинальность его творения становятся несомненными. Учение о конических сечениях имелось у Аполлония, учение об уравнениях было отчасти развито в XVI в.; и то, и другое вошло в декартову математику. Новизна геометрии Декарта заключалась в подходе к ее проблемам, в методе, которые действительно обновили науку и не завершили старый период, а открыли современный.

Разумеется, решение вопроса о происхождении аналитической геометрии зависит от ее определения. Характерным для последней является изучение фигур с помощью уравнений, опирающееся на способ прямолинейных координат. Но тогда не может быть и речи об аналитической геометрии у древних. Древние знали „симптомы" изучавшихся ими кривых и пользовались ими: было бы странно ожидать иного. Свойства конических сечений, далее, легко переводятся в наши уравнения. Однако сама возможность такого перевода не дает права модернизировать античный метод. „Перевод" заменяет геометрическое свойство уравнением, а синтетические умозаключения — формальными преобразованиями алгебраического аппарата. Эти приемы совершенно не эквивалентны, как уже говорилось ранее. Из „скрытого" (по выражению Кулиджа) уравнения не извлечешь следствия, так же как из настоящего. Теоремы, получаемые синтетически и аналитико-геометрически, будут формулироваться часто отличным образом, ибо одно уравнение объемлет случаи, для античной геометрии принципиально разнородные. „Геометрическая алгебра" древних не могла бы аналитически построить хотя бы теорию прямой линии. Ей чуждо было общее понятие вещественного числа и весь аппарат теории уравнений, решение систем линейных уравнений, преобразования корней, связанные с преобразованием координат, и т. д. [2] Отметим еще, что неизменно связанные с кривой диаметров и сопряженные с ними хорды не были у древних координатами [3], т. е. характеристиками положения отдельных точек на плоскости.

Творец аналитического направления в геометрии не довел, однако, до конца ее арифметизации. Геометрия Декарта, далее, еще мало использовала возможности алгебраического аппарата. Изучение свойств кривых по уравнениям совершенно не было

---

[1] См. Osiris, т. I, 1936. Julian L. Coolidge, The origin of analytic geometry.

[2] Весьма характерно, что Декарт приводит (стр. 43—44) пример числового уравнения конического сечения и определяет его элементы. Это было немыслимо у Аполлония и даже у Ферма.

[3] Распространено мнение, будто координаты имелись у Ник. Орезма. Это неверно. Столь же ошибочно, что начатки аналитической геометрии имелись у Гетальди. См. статьи Н. Wieleitner в Bibliotheca mathematica, 3 серия, т. XIII.

начато. Для конических сечений в этом не было нужды. Не был создан и аппарат основных формул аналитической геометрии[1]).

Несовершенной являлась сама координатная система. Координаты были неравноправны, вследствие наличия только одной оси. Отсутствовало четкое различение знаков координат. Истолкование, данное Декартом отрицательным корням уравнений, не привело ни его, ни ближайших последователей к правилу знаков координат в различных четвертях. Уравнение кривой рассматривалось только в каком-либо одном (подразумевавшемся) координатном угле. Вследствие этого уравнения, вроде $x+y+1=0$, где x и y не могут быть оба положительными, не имели геометрического смысла, что лишало общности теоремы аналитической геометрии. Располагающиеся по обе стороны от оси ординат, но несимметричные относительно нее кривые не могли бы при этом выражаться одним неприводимым уравнением. Все уравнения должны были бы изображаться фигурами, симметричными относительно обеих осей. В известных случаях кривая, часть которой падала на первую четверть, правильно дорисовывалась в других четвертях. Но при введении новых кривых происходили иногда недоразумения.

10. Отношение Декарта к математике и его инфинитезимальные открытия.

Декарт, по крайней мере до 1638 г., не догадывался о необозримости открывавшихся в математике возможностей и считал ее главные задачи решенными. Заканчивая вторую книгу „*Геометрии*", он писал: „я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий". Эта оценка созданной им геометрии согласовалась с философскими высказываниями: „во всем этом видимом мире, поскольку лишь оно видимо или ощутимо, имеются только вещи, нашедшие здесь свое объяснение . . . Нет ни одного явления природы, объяснение которого было бы опущено"[2]).

Правда, для Декарта существовали неразрешимые проблемы, вроде задачи спрямления кривой[3]). Но неразрешимость таких вопросов была принципиальной. Алгебра ставила границы научной геометрии, но в своих границах была всесильна. Некоторое влияние в этом отношении могло оказать на Декарта чрезвычайно малое количество известных тогда внеалгебраических задач — особенно до появления „*Геометрии*". Но в главном вера Декарта в универсальность метода обусловлена была метафизическим характером его мышления. Все познаваемые математические задачи приводились к единому и всеобъемлющему методу алгебры. Построения более общей теории он не мыслил.

---

[1]) Само слово это ввел С. Лакруа Cours de mathématiques, par S. F. Lacroix, Paris 1796—1799. Аналитическая геометрия здесь впервые излагалась в ныне принятой форме и порядке.

[2]) Descartes, Oeuvres, т. IX, стр. 317.

[3]) Стр. 49 этого издания. Лейбниц резко упрекал Декарта, „измерявшего, как пишет он, силы всех последующих поколений своими собственными". Leibnizens Philosophische Schriften, т. IV, стр. 285.

Столь высоко расценив мощь своего метода внутри геометрии, Декарт вместе с тем неоднократно высказывался о математике пренебрежительно. Еще в „Правилах" он отзывался об обыкновенных геометрии и арифметике как о „детских и тщетных познаниях", писал, что „нет ничего более пустого, чем заниматься бесплодными числами и воображаемыми фигурами" и т. п. Эти суждения, относящиеся к старой математике, в известной мере показательны для понимания его отношения к математике вообще. Чисто спекулятивная философия, наука, лишенная приложений, для него представлялись праздной игрой праздного воображения. Наука и философия предназначены для усовершенствования человечества, для усиления его мощи и покорения природы (механика), для возвышения характера (мораль), для исправления слабостей человеческого организма (медицина)[1]. И отвлеченная математика по Декарту, действительно, большой цены сама по себе не имела. После издания *„Геометрии"* начинается определенный отход Декарта от математики. Хотя год или два еще в переписке играли большую роль математические вопросы, в связи с различными спорами и откликами на *„Геометрию"*, но все время Декарт говорил о желании бросить чистую математику. 27 июля 1638 г. он писал: „Я решился оставить только отвлеченную геометрию, т. е. исследование вопросов, служащих лишь для упражнения ума, с целью получить больше досуга для разработки геометрии другого рода, представляющейся в вопросах объяснения явлений природы"[2]. И все же неверно, будто для Декарта „предмет математики был лишен значения, ибо он бесполезен при изучении природы"[3]. Приложения математики к изучению природы Декарт ценил высоко. Еще в 1619 г. он пробовал математически вывести закон падения тел; позднее он многократно обращался к математике в оптике в объяснении радуги, в рассмотрении вопроса о тяжести тела на наклонной плоскости и др. „Вся моя физика есть лишь геометрия", заявлял он[4]. Говоря о Галилее, он видел его главную заслугу в математическом исследовании физических проблем. „Я нахожу вообще, писал Декарт, что Галилей рассуждает много лучше, чем обычно это делают, — он именно, насколько может, расстается с ошибками школы (т. е. схоластики) и старается изучать вопросы физики с помощью математических рассуждений... Я считаю, что нет другого способа найти истину"[5].

Какое значение придавал Декарт в частности своей *„Геометрии"*, показывает, что, спустя десять лет после ее выхода, у него возникает намерение дать более популярное изложение ее. В письме к Мерсенну от 4 апреля 1648 г. он признавал, что написал ее трудной нарочно — для посрамления Роберваля и других противников, которые, не поняв ее, „попали бы в своей критике впросак". „Уверяю вас, что если бы я не имел в виду этих злоб-

---

[1] Ср. Descartes, Oeuvres, т. XII, стр. 229. Эти воззрения Декарт разделял с Бэконом и другими крупнейшими умами эпохи.

[2] Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 268, ср. также стр. 361, 362.

[3] Boutroux, цит. соч., стр. 102.

[4] Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 268, ср. т. I, стр. 331, 332.

[5] Descartes, Oeuvres, т. II, стр. 380.

ных умов, то я написал бы ее совершенно иначе и сделал бы много яснее: быть может, я еще это и сделаю как-нибудь, если только увижу этих чудовищ побежденными, или смирившимися"[1]).

Таким образом пренебрежительные замечания Декарта направлены были против чрезмерного увлечения лишь отвлеченной математикой. Отход его от математики после 1637 г. объясняется тем, что он считал свою миссию выполненной. Перед ним стояла более высокая цель — установление системы натурфилософии.

Некоторую неудовлетворенность в созданном им математическом методе Декарт, видимо, начал испытывать после издания *„Геометрии"*. В 1638 г. Декарт встретился с множеством задач, не подчинявшихся его методу. Обилие новых важных вопросов, общие принципы изучения которых он, несомненно, искал, но не находил, не позволяло выключить их из математики.

Иногда Декарт мог думать, что эти задачи решаются алгебраически. В знаменитом споре о проведении касательных, возникшем у него с Ферма, он упорно настаивал на преимуществе своего приема, казавшегося ему чисто алгебраическим[2]). Внеалгебраический момент (содержавшийся в обосновании этой операции на определении касательной как прямой, проходящей через сливающиеся точки кривой линии и в скрытом предельном переходе) здесь еще не был заметен. Можно было пытаться включить также в общий метод квадратуру парабол $y = x^n$, которая, кроме алгебраических операций, требовала „только" еще инфинитезимального приема[3]). Но трактовка других задач не могла носить и по видимости алгебраического характера. Таковы были квадратура циклоиды, осуществленная Декартом по методу неделимых, проведение касательной к циклоиде, полученное с помощью представления о мгновенном центре вращения, исследование свойств логарифмической спирали[4]). Такой была его попытка решить обратную задачу о касательных, предложенную Дебоном[5]). Задача Дебона, требовавшая определения кривой по свойству касательной, приводится в рассмотренном им частном случае к диференциальному уравнению $by' = x - y$. Интегралом служит логарифмическая функция, и точное алгебраическое решение невозможно. Декарт заметил, что кривая — „механическая", установил ее логарифмические свойства и дал способ приближенного построения точек. Он видел, что здесь требуется общий метод, обратный методу проведения касательных. Но сколько-либо продвинуться в этом направлении ему не удалось и с присущей ему в таких случаях гордостью он заявил: „Я не думаю, чтобы возможно было найти общим образом правило, обратное моему правилу для касательных, или же правилу, которым пользуется г. де-Ферма"[6]).

Некоторые из названных задач Декарт расценивал — искренно или неискренно — не высоко, но другие произвели на него силь-

---

1) Descartes, Oeuvres, т. V, стр. 142.
2) См. стр. 178 и след. этого издания.
3) См. стр. 181 и след. этого издания.
4) См. стр. 192 этого издания.
5) См. стр. 192 и след. этого издания.
6) См. стр. 192 этого издания.

ное впечатление. О квадратуре одной из кривых, данной Дебоном, он писал: „свойство, доказательство которого вы мне прислали, я нахожу столь прекрасным, что предпочитаю его квадратуре параболы, найденной Архимедом. Ведь он исследовал данную линию, между тем как вы определяете пространство, заключенное линией, которая еще не дана"[1]. Таким образом новая алгебра, оказывалось, не была всеобщим ключом к насущным математическим проблемам. Охлаждающе действовало, вероятно и то, что широкого применения в механике и физике математический метод у Декарта не получил. Установленные им законы движения материи и соударения тел (сыгравшие, несмотря на ряд ошибочных предположений, большую роль), не нашли у него математического развития; это было и невозможно на основе конечных величин.

Этот конфликт философии, стеснившей математику априорными границами, и развивавшейся науки не получил принципиального разрешения у Декарта. Он не мог уже перестраивать свою „универсальную математику", он мог лишь испытать некоторое внутреннее разочарование. Самые открытия Декарта в области инфинитезимальной математики занимают почетное место. Ему не пришлось здесь сыграть ту же основоположную роль, что в алгебре и геометрии, но отдельные результаты его содействовали подготовке открытия диференциального и интегрального исчислений и кое в чем предварили Ньютона и Лейбница[2].

II. Декарт, его предшественники и современники.

Декарта не раз обвиняли в плагиате. Ученики Виеты и Роберваль во Франции, Лейбниц, Валлис, Ньютон нападали на Декарта с разных сторон. В целом эти нападки были лишены основания.

Конечно, Декарт имел близких предшественников и влиявших на него современников. Влияния иногда были незаметны для него самого. Перелистывание книги, намек в переписке или разговоре зарождали идею, подтверждение которой он находил впоследствии и которая потому ему представлялась его собственностью.

Несомненно, что ряд отделов *„Геометрии"* Декарт мог бы позаимствовать. Виета дал почти все преобразования корней и коэфициентов, которые содержатся в *„Геометрии"*, и приведение уравнения третьей степени к задачам о двух средних пропорциональных и о трисекции угла. Образование уравнений посредством перемножения двучленов и употребление малых букв для обозначения произвольных известных и неизвестных величин содержались в опубликованной в 1631 г. книге Гарриота Artis analyticae praxis („Практике аналитического искусства"). Теорема о числе корней алгебраического уравнения, интерпретация отрицательных решений и свободное применение мнимых чисел содержались в „Nouvelle invention en l'algèbre" („Новом открытии в алгебре") А. Жирара (1629). Тем не менее обширный материал, содержащийся в переписке Декарта, и общий характер его результатов свидетельствуют о его самостоятельности в решающих пунктах.

---

[1]) Стр. 192 этого издания.

[2]) Подробнее см. прим. 178—198 стр. 246—253 этого издания.

Наиболее важен вопрос о взаимоотношении Декарта и Виеты. Распространены работы последнего были слабо, но именно в протестантской Голландии ученый гугенот пользовался особыми уважением и вниманием. Однако письма Декарта, которым мы имеем тем более основания доверять, что они вовсе не составлялись в ответ на какие-либо обвинения, показывают, что с Виетой Декарт познакомился лишь весной 1632 г. Его алгебраические идеи к этому времени уже сложились давно, а книгой, которую он прочитал в 1632 г., была как раз „In artem analyticem isagage", излагавшая общие основы видовой алгебры. Что касается Жирара, то его алгебра ни разу не упоминается в письмах Декарта, и вопрос о том, почерпнул ли Декарт теорему о числе корней уравнения из нее или нет, остается открытым. Геометрическое же толкование отрицательного числа и признание мнимых величин были даны Декартом не позднее, чем вышла книга Жирара, — это видно из приведенных выше записей Бекмана. Гарриот упоминается Декартом впервые в декабре 1638 г. Он прочитал книгу Гарриота за полгода до того, т. е. после выхода „*Геометрии*". Иначе дело обстоит с „De aequationum recognitione" — Виеты, содержавшим правила преобразования корней и коэфициентов. С ним Декарт, очевидно, познакомился раньше составления „*Геометрии*"[1]. Но если теорема о числе корней, правила их преобразований и кое-что другое было, сознательно или бессознательно, взято у других авторов, то главные результаты Декарта все равно остаются за ним. Это относится к введению переменной величины и новой точке зрения на уравнения, к линейной алгебре, к отказу от однородности уравнений, к обозначению степеней произвольных величин. Это полностью относится к его аналитической геометрии. Это относится, беря более частные вопросы, к записи уравнений, к правилу знаков Декарта, к теореме о делимости многочленов на двучлен $x - a$, к способу неопределенных коэфициентов. Личной заслугой Декарта явилось и то, что все открытия, чужие и собственные, были изложены им в новой, более доступной форме.

Несколько по-иному стоит вопрос о взаимоотношении Декарта и Ферма. Открытие аналитической геометрии было произведено обоими учеными почти одновременно и совершенно самостоятельно. Тем не менее „*Введение*" Ферма не оказало такого влияния, как „*Геометрия*" Декарта. Это объясняется не тем, что оно было опубликовано лишь в 1679 г., — ибо работы Ферма по исчислению бесконечно малых, распространявшиеся сперва тоже лишь в рукописях, сыграли огромную роль как раз до их напечатания. Главным явилось то, что алгебра Ферма, примыкавшего к Виете, была совершенно устарелой в сравнении с алгеброй Декарта. А именно алгебраический метод привлек внимание в первую очередь. К этому присоединялось и большое богатство геометрической части сочинения Декарта. И все же ошибочно мнение, будто Ферма лишь „возобновил и углубил приемы, употреблявшиеся до него, с тем, чтобы поднять их до высшего изящества и простоты"[2]. Его математика не искала универсальных приемов, он

[1] См. прим. 6 и 84, стр. 202 и 230 этого издания.

[2] Brunschvigc, цит. соч., стр. 101.

был гораздо ближе к античности, чем Декарт, но открытие обоих ученых проистекало в конечном счете из одного источника. „*Введение*“ Ферма было также плодом применения общей алгебры к геометрии. Ферма сознавал это, когда писал, что оно предназначено для открытия общего пути к исследованию геометрических задач. Сам он мог думать, что только непрерывно продолжает древних и обобщает их результаты. Но мы знаем, что обобщение это представляло собой одну из сторон революции в математике, вождем которой был Декарт.

Революции в науке, как и в общественной жизни, не бывают вообще делом одного лица. Бурные переломы являются результатом длительных периодов относительно спокойного развития. Лучшие буржуазные ученые не боялись видеть в Декарте революционера. В наше время философы и ученые буржуазии часто стараются изгнать революцию из истории науки, как они хотели бы исключить возможность и неизбежность ее в истории общества. Так, уже упоминавшийся Мило рисует Декарта не только в геометрии, а в математике вообще консерватором, завершителем античных традиций. Но ведь, как говорилось, вопрос о революционности открытия определяется содержанием новых идей. Мы видели, что декартова математика, воспринявшая наиболее ценное достояние старой, носит название новой математики с полным правом. Это— математика переменных величин и буквенного исчисления, перестроившая геометрию на арифметической основе.

12. *Дальнейшее развитие математических идей Декарта.*

Ограниченность сферы алгебры не была замечена ближайшими последователями Декарта. Комментаторские работы Дебона, Скаутена, Бартолина и более поздних картезианцев, до известного М. Ролля, тщетно боровшегося в 1700 г. с диференциальным исчислением на почве алгебры, показывают, что ученики упорно верили в универсальность математики учителя. Этим ученикам принадлежал ряд почтенных трудов, собранных в латинском издании „*Геометрии*“, выпущенном впервые Скаутеном в 1649 г. выдержавшем четыре издания и несколько раз увеличивавшемся в объеме. Работы, приложенные к полному недомолвок сочинению Декарта, действительно, облегчили его чтение, а кое в чем шагнули дальше.

Однако лучшими продолжателями Декарта оказались не прямые его ученики, а преодолевшие его слабости последователи. Некоторый разрыв линии, намеченной самим Декартом, стал в свою очередь необходимым для дальнейшего прогресса. Нужно было отказаться от ограниченности декартовой философии, видевшей в алгебре начало и конец математического знания. Механика и математика нуждались в введении специального типа переменных величин—бесконечно малых и бесконечно больших и в алгорифме, пригодном для изучения трансцендентных функций. Как писал Энгельс, благодаря декартовой переменной величине „стало немедленно необходимым диференциальное и интегральное исчисление“.

Новый толчок развитию математики в сфере инфинитезимальных приемов дали Ньютон и Лейбниц. При этом они сбросили ограничения, наложенные Декартом на геометрию из метафизических соображений и отказали алгебре в ее претензии на универсальность. Лейбниц отчетливо указывал на этот слабый пункт декартовой математики. „Можно сказать, писал он, что общее искусство знаков (specieuse en général) или искусство обозначения (l'art des caractères) представляет чудесное пособие, так как оно разгружает воображение. Однако алгебра далеко не есть искусство изобретения, так как сама она нуждается в более общем искусстве". Указав на созданное им диференциальное исчисление как подлинно общий метод изучения кривых, он вскрывает ошибку Декарта: „Причина преимуществ этого нового исчисления заключается опять-таки в том, что оно разгружает воображение в проблемах, которые Декарт исключил из своей геометрии под тем предлогом, что они чаще всего приводят к механике, в действительности же потому, что они не подводили к его исчислению[1]).

Именно Ньютон и Лейбниц, не пожелавшие остаться на пути, предначертанном Декартом, оказались лучшими его последователями. Открытием диференциального и интегрального исчислений и разработкой теории рядов они решили задачу, перед которой остановился Декарт, изучая кривые Дебона. Лейбницевы поиски „всеобщей характеристики", с которыми тесно связано было открытие инфинитезимального алгорифма, выросли из поисков „универсальной математики", а исходным пунктом их и образцом, которого приходилось держаться, была символическая алгебра.

Ньютон непосредственно продолжил работу Декарта в нескольких направлениях. Знаменитая Arithmetica universalis („Всеобщая арифметика") Ньютона, от которой отправлялись алгебраисты XVIII в., распространяла и очищала идеи декартовой алгебры. Алгебра и изложение ее окончательно освободились в „Всеобщей арифметике" от геометрической опоры. Понятие числа лишилось последних черт пространственности, приобретя необходимую для анализа общность. Число было определено не как совокупность единиц, а как „отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу". „Построение" корней — отрезков автоматически теряло прежнее значение. Ньютон дал первый общий способ вычисления корней алгебраических уравнений с любой степенью точности („способ Ньютона", усовершенствованный Фурье), оставив за построением корней скромное место грубо приближенного вспомогательного приема. Влияние Декарта сказывалось почти в каждом разделе. Описание общего приема составления уравнений давалось „по Декарту". Ряд теорем углублял предложения *„Геометрии"*. Таковы теоремы о числе действительных и мнимых корней уравнения, установление границ положительных корней и т. д. Через Маклорена, Эйлера и других ученых эти вопросы продолжали оказывать воздействие на развитие алгебры вплоть до Хр. Штурма. Ньютон обобщил и декартово обозначение степени на любые показатели. В области анализа Ньютон использовал метод неопределенных коэфициентов. Он применил его весьма широко в теории бесконечных рядов, — этой алгебре бесконечных многочленов, лежащей

---

[1]) Г. Г. Лейбниц, Новые опыты о человеческом разуме, М. 1936, пер. П. С. Юшкевича, стр. 433.

в основе изучения трансцендентных функций и при интегрированиях. Позднее этот прием использовали с успехом Маклорен и Эйлер. Ньютонова кинематическая трактовка функциональных связей также продолжала идеи Декарта. Даже в своем учении о первых и последних отношениях (т. е. пределах) он высказывал мысли, близкие к тем, которыми руководился Декарт в письме к Гарди о касательных.

Продолжателем Декарта Ньютон был и в аналитической геометрии. Его „Enumeratio lineis tertiis ordini" („Перечисление кривых третьего порядка", 1704), построенное на исследовании корней канонических уравнений этих линий, явилось первым собственным достижением новой геометрии. Здесь аналитическая геометрия плоских кривых показала свои мощь и значение в качестве самостоятельного отдела математики. В „Перечислении" давалась современная классификация линий и впервые вносилась полная ясность в вопрос о знаках координат в различных четвертях. Эта глубокая работа, доказательства теорем которой Ньютон не оставил, в свою очередь сообщила серьезный толчок развитию плоской геометрии, — прежде всего тем, что математикам пришлось вывести все утверждения Ньютона. Впрочем, современный облик аналитическая геометрия на плоскости получила только во второй части „Introductio in analysin infinitorum" („Введение в анализ", 1748) Л. Эйлера. В этом сочинении, содержавшем теорию кривых до четвертого порядка включительно, давалось систематическое изложение предмета. Здесь содержалось определение координат как числовых характеристик любых точек, не связанных уже с кривыми. У Эйлера же, единообразно подходящего ко всем линиям, впервые исследование свойств кривых второго порядка приобрело подлинно аналитический характер и было основано на изучении их уравнений.

Геометрию пространства пришлось строить совершенно заново. Ученики Декарта сделали в этой области весьма немногое. Только в 1679 г. у Лагира случайно встретилось уравнение поверхности, характер которой он даже не определил; четверть века спустя, А. Паран вывел уравнение сферической поверхности. Подлинные основы трехмерной аналитической геометрии были заложены А. Клеро в 1731 г. в Recherches sur les courbes à double courbure („Исследование кривых двоякой кривизны"). Он установил, что уравнение с тремя переменными выражает собой поверхность, дал многочисленные примеры различных типических поверхностей, например, поверхностей вращения, исследовал кривые как пересечение поверхностей, провел ряд касательных и т. д.

В конце XVIII в. в математику было внесено много нового, а в XIX и XX вв. возникли идеи, даже не намечавшиеся в эпоху Декарта. Но *„Геометрия"* Декарта останется навсегда сочинением, которому мы в первую очередь обязаны нашей математикой, а вместе с тем блестящим примером глубокого философского преобразования одной из важнейших отраслей знания.

ОГЛАВЛЕНИЕ