Н. П. АНДРЕЕВ, А. А. ГЛАГОЛЕВА и А. А. ГЛАГОЛЕВ

ОСНОВЫ НОМОГРАФИИ

ОНТИ НКТП СССР 1936

П. П. АНДРЕЕВ, А. А. ГЛАГОЛЕВА и А. А. ГЛАГОЛЕВ

ОСНОВЫ НОМОГРАФИИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
Проф. А. А. ГЛАГОЛЕВА

МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ

Т-25-4-4
ТКК

АННОТАЦИЯ

Книга содержит обстоятельное и систематическое изложение всех основных понятий современной номографии. Начав с описания простейших элементарных номограмм, построение которых доступно школьнику, авторы постепенно переходят к все более сложным типам, так что в результате читатель получает понятие о самых сложных в теоретическом отношении номограммах (круговые номограммы). Все это достигается самыми простыми средствами без применения высшей математики. Таким образом, книгой могут пользоваться лица, знающие только элементарную математику и элементы аналитической геометрии.

Книга может быть использована в качестве учебного пособия для студентов втузов и техникумов, а также для целей самообразования.

Редактор *С. Ф. Струпинский* Техн. редактор *Э. М. Бейлина* Корректор *К. Цветкова*

Сдано в набор 19/VI 1936 г. Тираж 7000 Уполномоч. Главлита № В-43255
Подписано к печати 11/VII 1936 г. Издател. № 32 Формат бумаги $72 \times 105\ ^{1}/_{16}$
Колич. печ. знаков в 1 бум. листе 131778 Количество авт. листов 11 Количество бум. листов 4
Объем 8 печ. листов Заказ № 742

4-я типография ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник». Ленинград, Международный пр., 75а.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В основу настоящей книги положены результаты работ семинаров по номографии, проводимых мною за последние годы. На всех этих семинарах велась большая научно-исследовательская и методическая работа. Часть результатов этой работы вошла в мои «Методические письма по преподаванию номографии в техникумах» (ОНТИ, 1935), часть в «Информационные письма» ФОН НКЗ РСФСР (1933—1934 гг.).

При отделе техникумов ГУУЗ НКТП по инициативе заведующей отделом В. М. Джапаридзе был организован семинар по номографии для преподавателей техникумов. Этот семинар можно считать первоисточником методического оформления настоящего курса.

Значительному расширению и углублению подверглись первоначальные идеи, появившиеся в результате указанного семинара в работах семинара при ФОН НКЗ РСФСР. Семинар был организован начальником ФОН, проф. Я. Ф. Каган-Шабшаем, который принимал деятельное участие в разработке новых видов номограмм, неоднократно выступая на семинаре с ценными докладами.

Окончательно удалось скомпановать весь материал настоящего руководства по окончании работы семинара, функционировавшего в течение 1934/35 г. Этот семинар был организован П. П. Андреевым, заведующим кафедрой математики Всесоюзной промакадемии легкой индустрии им. В. М. Молотова, при руководимой им кафедре.

Главной целью авторов этой книги было дать основные номографические понятия, расположить их в такой методической последовательности, которая сделала бы курс наиболее доступным для студентов втуза и техникума, в то ж время не только не снижая глубины вопросов, а даже, по возможности, увеличивая ее, как это сделано, например, в разделах: «Функциональная шкала», «Проективная шкала», «Перспективное преобразование номограмм». «Общий метод построения сетчатых номограмм с четырьмя переменными» и др.

Мною осуществлялось общее руководство по написанию этой книги и написаны главы I, VII и части III, IV и VIII; А. А. Глаголевой написаны главы II, V, VI, IX и части III, IV и VIII; П. П. Андреевым написаны главы X, XI, XII, XIII и XIV.

Вместе с остальными моими соавторами считаю своим долгом выразить глубокую благодарность С. Ф. Струпинскому, взявшему на себя труд по редактированию настоящего курса и проявившему исключительно внимательное отношение к нашей книге, за ценные указания, сделанные им при редактировании.

А. Глаголев.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

M. d'Ocagne, Traité de Nomographie, Gauthier-Villars, 1921, 2 éd.
M. d'Ocagne, Calcul graphic et Nomographie, Doin, 1924, 3 éd.
M. Fréchet, H. Roullet, Nomographie, Colin, 1928.
P. Luckey, Nomographie, Teubner, 1927.
O. Lacmann, Die Herstellung gezeichneter Rechentafelen, Springer, 1923.
Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, ОНТИ, 1934.
М. Л. Франк. Номографический справочник, ГТТИ, 1933.
А. А. Глаголев, Курс номографии, ОНТИ, 1934.
Он же, Методические письма по преподаванию номографии в техникумах, ОНТИ, 1935.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Сетчатые номограммы для уравнений с тремя переменными

Номограммы со многими переменными

ВВЕДЕНИЕ

В работе инженера и техника значительное место занимают расчеты по формулам с несколькими переменными.

Неоценимую услугу в этих расчетах оказывает логарифмическая линейка. И нет ни одного работника техники, который не пользовался бы этим счетным инструментом. Однако вычисление по сложной формуле даже при помощи линейки или других вычислительных инструментов часто требует большой затраты времени и труда. Зато номограмма совершенно освобождает работника от утомительных вычислений, полностью механизируя процесс определения значения одного переменного из уравнения по данным значениям остальных переменных.

Номограмма — это чертеж, графически устанавливающий ту же зависимость между переменными, которая аналитически выражена формулой.

Отдел математики, изучающий теорию построения номограмм, называется номографией ($\nu \acute{o} \mu o \zeta$ — закон, $\gamma \varrho \acute{\alpha} \varphi \omega$ — пишу).

Надо заметить, что каждая номограмма строится для определенной формулы, если по этой формуле приходится многократно производить вычисления, причем изменения переменных берутся в границах, практически необходимых.

Чтобы иллюстрировать тот эфект, который дает номограмма как вычислительный инструмент, сравним ход вычислений для определения упругости пара нормальных парафиновых углеводородов при температуре t по формуле:

$$\lg \frac{p}{760} = \frac{1{,}8t_0 + 414}{0{,}3091 - 0{,}0001165\,(1{,}8t_0 + 414)} \cdot \left[\frac{1}{1{,}8t_0 + 414} - \frac{1}{1{,}8t + 414}\right]^{1)}, \qquad (1)$$

где p — упругость пара;

t_0 — точка кипения при атмосферном давлении;

t — температура.

Пусть точка кипения углеводорода при атмосферном давлении равна 145°, т. е. $t_0 = 145°$, и требуется определить упругость пара при 200°.

Подставив в формулу данные значения t_0 и t, получим:

$$\lg \frac{p}{760} = \frac{1{,}8 \cdot 145 + 414}{0{,}3091 - 0{,}0001165\,(1{,}8 \cdot 145 + 414} \cdot \left[\frac{1}{1{,}8 \cdot 145 + 414} - \frac{1}{1{,}8 \cdot 200 + 414}\right],$$

откуда

$$\lg \frac{p}{760} \approx \frac{675}{0{,}230} \cdot \left[\frac{1}{675} - \frac{1}{774}\right]$$

и далее

$$\lg \frac{p}{760} \approx 2930 \cdot 0{,}000190 \approx 0{,}557;$$

$$\lg p \approx 0{,}557 + 2{,}88 \approx 3{,}44;$$

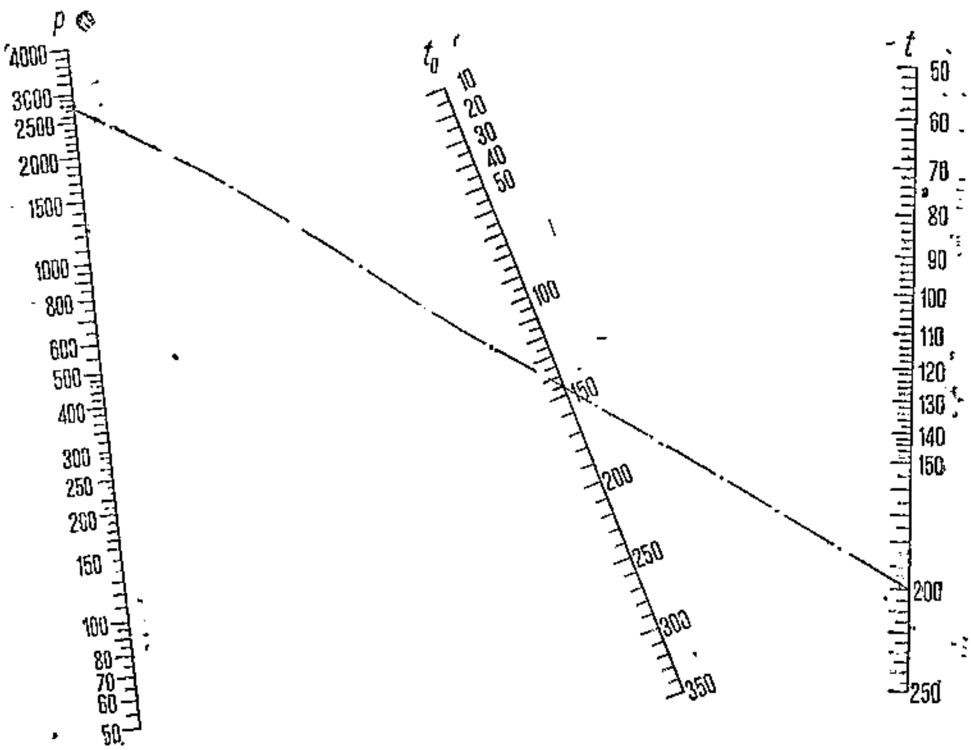
$$p \approx 2750 \text{ мм.}$$

Последовательность вычислений показывает, что для определения p надо было произвести 12 арифметических действий, частью при помощи логарифмической линейки, частью в уме или на бумаге, найти lg 760 и, наконец, от логарифма p перейти к числу p.

---

[1]) *Е. Берль, В. Герберт* и *В. Валиг*, Номограммы для химической промышленности, Госхимтехиздат, 1932.

Все эти вычисления заменяются при помощи номограммы одним только прикладыванием края линейки к точкам, помеченным на шкалах t и t_0, соответственно числами 200 и 145 и прочитыванием искомого результата на шкале p (черт. А). Совершенно очевидно, что на это уходит лишь несколько секунд и притом без всякой затраты энергии на вычисления.



Чертеж А.

Этим объясняется быстрое развитие номографии за последние годы и быстрое внедрение ее в различные области знаний. Только 50 лет назад, в 1884 и 1885 гг., французский инженер и математик, профессор Ecole Polytechnique M. d'Ocagne, впервые исчерпывающе разработал метод построения номограмм из выравненных точек и дал его систематическое изложение [1]). В настоящее же время сотни книг по номографии издаются на всех языках или в виде общих курсов, или преследуя утилитарные цели обслуживать узкую отрасль знаний.

На русском языке тоже имеется значительное количество руководств по номографии, но не было еще ни одного систематического учебника, который мог бы обслужить широкий круг лиц, владеющих лишь элементарной математикой и элементами аналитической геометрии. Нашим курсом по номографии мы пытаемся пополнить этот пробел. В него мы включили лишь основные номографические понятия, дали элементарное теоретическое обоснование важнейших типов номограмм и иллюстрировали теорию значительным числом практических примеров.

[1]) «Coordonnées parallèles et axiales», Nouv. Ann. de Math. 1884 и Gauthiers-Villars 1885.

ПРОСТЕЙШИЕ НОМОГРАММЫ

Глава I

ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ НОМОГРАММ

§ 1. ОСНОВНОЕ ПОНЯТИЕ

Простейшими номограммами считаются те номограммы, для построения которых не требуется никаких специальных познаний из области номографии, а применяются лишь известные теоремы элементарной геометрии.

Этот раздел номографии близко примыкает к геометрическим методам построения алгебраических формул. Можно сказать даже больше: построение номограмм простейшего вида — это, в сущности, то же геометрическое построение алгебраических формул, но построение механизированное.

Чтобы лучше познакомиться со всеми теми приемами, к которым мы прибегаем для механизации геометрических построений, обратимся к примерам.

§ 2. НОМОГРАММА ФОРМУЛЫ

$$z=\sqrt{xy}$$

Построим номограмму для определения среднего геометрического по формуле:

$$z=\sqrt{xy}.$$

Пусть требуется построить отрезок, длина которого должна быть средним геометрическим между длинами отрезков в 3 и 5 *см*. Как известно, все построение сводится к тому, чтобы построить прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 8 *см*, и проекциями катетов на гипотенузу, равными соответственно 3 и 5 *см*. Высота этого треугольника и даст искомое среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу, т. е. будет равна $\sqrt{15}$.

Если нам приходится много раз подряд решать эту задачу для различных числовых значений длин задаваемых отрезков, то мы должны строить ряд прямоугольных треугольников, соответствующих задаваемым условиям, и потратить на эти аналогичные построения много времени.

Вполне естественно поэтому возникает потребность в том, чтобы найти такой инструмент, который избавлял бы от лишней траты времени при многократном решении этой задачи.

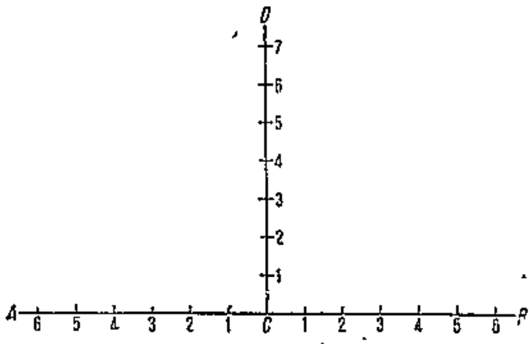
Таким инструментом является номограмма, изображенная на черт. 1. На этом чертеже мы видим прямую AB и перпендикулярную к ней прямую CD. На прямых CA, CB, CD нанесены равномерные шкалы с началом в точке C для всех шкал; за масштаб принят отрезок длиной в 1 *см*.

Для того чтобы пользоваться этой номограммой, необходим обыкновенный угольник или, еще лучше, так называемый «крестообразный транспарант», изображенный на черт 2 и состоящий из двух пересекающихся в точке O взаимно перпендикулярных прямых xx и yy, начерченных на прозрачной бумаге (кальке).

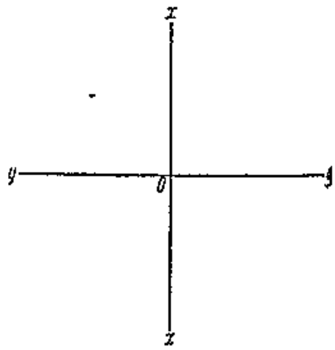
На черт. 3 показано, как по этой номограмме найти отрезок, равный $\sqrt{4\cdot 5}$. Для этой цели нужно наложить крестообразный транспарант на черт. 1 так, чтобы прямая Ox прошла через точку M прямой AC, находящуюся на расстоянии

4 *см* от точки C, а прямая Oy — через точку N прямой CB, находящуюся на расстоянии 5 *см* от точки C. Вершина O прямого угла транспаранта должна лежать на прямой CD.

Получившийся прямоугольный треугольник MON будет искомым треугольником, так как гипотенуза его MN равна 9 *см*, а проекции катетов CM и CN равны соответственно 4 и 5 *см*.



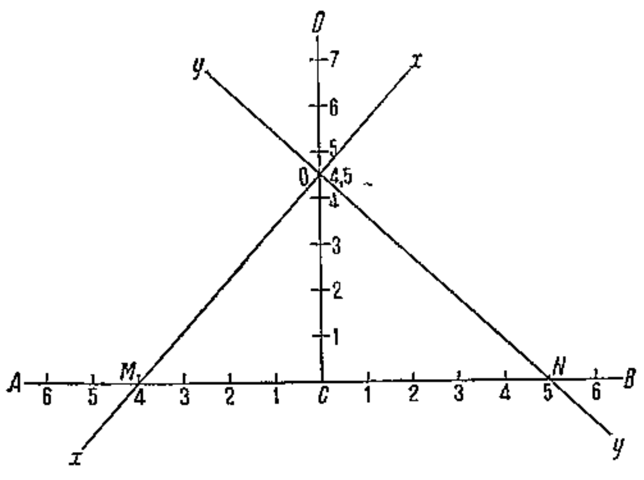
Черт. 1.



Черт. 2.

Высота этого треугольника OC согласно чертежу равна 4,5 *см*, в то же время она равна $\sqrt{20}$, следовательно, мы нашли, что $\sqrt{20} \approx 4{,}5$.

Если мы сравним наш способ построения отрезка OC с обычным геометрическим способом построения среднего геометрического, то мы увидим, что как в том, так и в другом случае мы строим один и тот же прямоугольный треугольник MON, но самый метод построения в обоих способах не одинаковый. Дело в том, что в элементарной геометрии при решении задачи на построение мы можем пользоваться только циркулем и линейкой и не имеем права прибегать к заранее нанесенным равномерным шкалам, заранее начерченным на кальке взаимно перпендикулярным прямым, наложению одного чертежа на другой и т. п.; в номографии мы можем использовать все эти приемы для построения искомой величины.



Черт. 3.

Так, например, в рассматриваемом примере мы получили треугольник MON, накладывая крестообразный транспарант на черт. 1, и пользовались равномерными шкалами, нанесенными на прямые этого чертежа.

Пользование равномерной шкалой, транспарантом и т. п. составляет в совокупности то, что мы называем «механизацией геометрических построений».

При помощи такой механизации мы, прежде всего, быстрее находим нужный нам ответ, чем при обычном геометрическом построении, и, что еще важнее, что с помощью одного чертежа мы решаем ряд задач с одинаковым условием и разными числовыми заданиями. Ясно, что при геометрическом построении мы для каждой задачи должны были бы построить свой чертеж.

Чертеж 3 называется обычно номограммой формулы $z = \sqrt{xy}$; мы смотрим на этот чертеж как на инструмент, с помощью которого, зная x и y, мы находим соответствующее значение z.

Мы видели выше, как определяется z для случая, когда $x = 5$, а $y = 4$.

Для работы с этой номограммой не требуется знания алгебры и геометрии, а лишь умение читать пометки на равномерной шкале.

Несомненно, что для построения простейших номограмм полезно знать геометрическое решение той или иной задачи, и сообразно способу геометрического решения задачи мы можем получить простейшую номограмму того или иного вида.

В дальнейших примерах мы не будем так подробно останавливаться на геометрическом способе построения той или иной формулы и подробно объяснять, в чем состоит его механизация, предоставляя это сделать самому читателю.

§ 3. НОМОГРАММА ФОРМУЛЫ

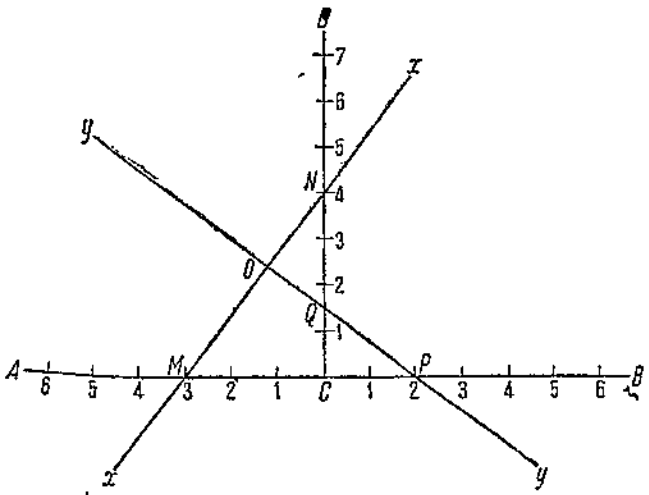
$$t = \frac{xy}{z}$$

Построим номограмму для определения четвертого члена геометрической пропорции по формуле: $t = \frac{xy}{z}$.

Для решения этой задачи мы приводим два вида номограмм.

Первая номограмма — это та же самая номограмма, которая служила нам для определения среднего геометрического.

В самом деле, пусть по этой номограмме требуется определить значение t, если x, y и z соответственно равны числам 3, 4 и 2. Для этой цели накладываем крестообразный транспарант черт. 2 на черт. 1 так, чтобы прямая xx прошла через точки M и N прямых CA и CD с пометками 3 и 4, а прямая yy — через точку P прямой CB с пометкой 2; тогда прямая yy пересечет прямую CD (черт. 4) в точке Q с пометкой 1,5. Пометка этой точки и будет искомым значением t.



Черт. 4.

В самом деле, из чертежа ясно, что треугольник MNC подобен треугольнику PQC, следовательно, $\frac{QC}{CP} = \frac{MC}{NC}$.

Длина $MC = 3$ *см*, длина $NC = 4$ *см*, длина $CP = 2$ *см*, следовательно,

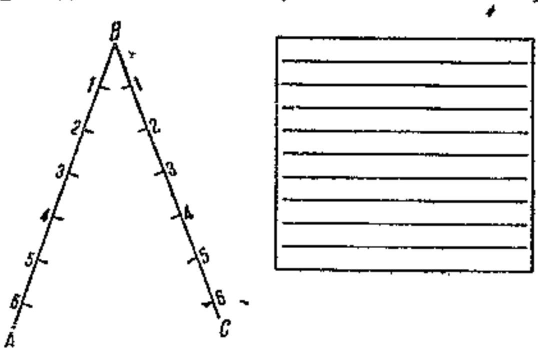
$$QC = \frac{CP \cdot MC}{NC} = \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{3}{2}.$$

QC будет четвертым пропорциональным для чисел 3, 4 и 2; по чертежу видно, что $QC \approx 1{,}5$.

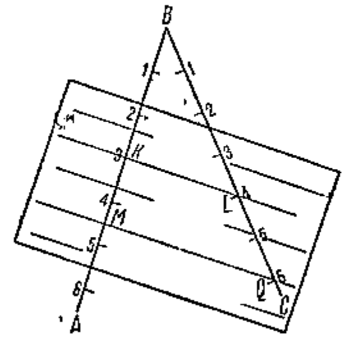
На черт. 5 мы имеем другую номограмму той же формулы.

Представим себе угол ABC, на сторонах которого от вершины B, как от начала, нанесены две равномерные шкалы одинакового масштаба, а вместо крестообразного транспаранта представим себе транспарант, нанесенный на кальку и состоящий из ряда параллельных между собой прямых (черт. 5).

На черт. 5а мы видим, как транспарант наложен на угол для того, чтобы по трем данным числам 4, 3 и 6 найти четвертую им пропорциональную. Одна из



Черт. 5.



Черт. 5а.

прямых транспаранта проходит через точки K и L, лежащие на сторонах угла ABC с пометками 3 и 4. Параллельная этой прямой, проходящая через точку Q стороны BC с пометкой 6, пересечет сторону BA в точке M, пометка которой $4^1/_2$ даст искомое значение четвертой пропорциональной.

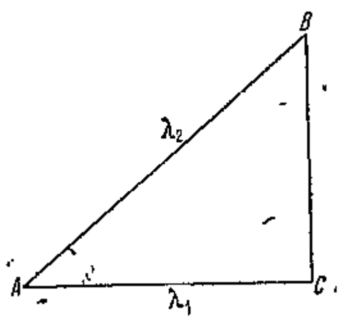
Номограмма построена на основании теоремы элементарной геометрии о том, что параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

§ 4. НОМОГРАММА ФОРМУЛЫ

$$\cos\varphi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

По данным значениям λ_1 и λ_2 требуется определить величину угла φ из уравнения $\cos\varphi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Эта формула встречается в радиотехнике. Значения переменных λ_1 и λ_2 изменяются обычно в пределах от 0 до 100.

Геометрически эту задачу можно решать построением прямоугольного треугольника по данной гипотенузе λ_2 и



Черт. 6.

Черт. 7.

анному катету λ_1 (черт. 6). Величина угла φ определяется в построенном реугольнике измерением его транспортиром.

На черт. 7 дана номограмма той же формулы. Мы имеем на нем прямой угол ABC, на сторонах которого BA и BC от точки B, как начала, нанесены две одинаковые равномерные шкалы в пределах от 0 до 100.

Из точки B, как из центра, проведен ряд концентрических окружностей. На чертеже даны лишь четверти каждой окружности. Дуга большей окружности разделена на градусы.

Чтобы найти по этой номограмме значение угла для данных значений λ_1 и λ_2, отыскиваем на прямой BC точку M с пометкой λ_1 и в этой точке проводим перпендикуляр MK до пересечения с той окружностью, которая проходит через точку N прямой BA, имеющей пометку λ_2. Точку K пересечения перпендикуляра MK с окружностью соединяем с вершиной прямого угла B и продолжаем до пересечения с дугой AC в точке P. Число градусов, служащее пометкой точки P, и является искомым значением угла φ.

В самом деле, из прямоугольного треугольника BKM мы имеем, что $\cos\varphi = \frac{BM}{BK} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Так, по чертежу мы видим, что при $\lambda_1 = 40$ и $\lambda_2 = 60$ $\varphi = 48°$.

§ 5. НОМОГРАММА УРАВНЕНИЯ

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{1}{F}$$

Построим номограмму для определения фокусного расстояния линзы по формуле:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} + \frac{1}{F},$$

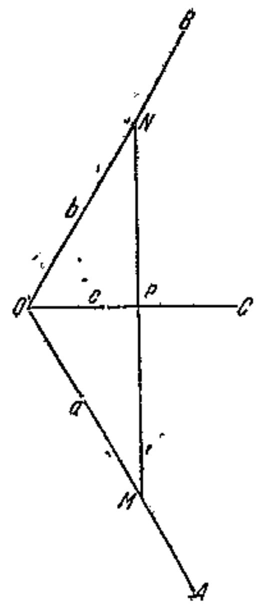
где f — расстояние центра линзы от предмета;
F — расстояние центра линзы от изображения;
p — фокусное расстояние линзы.

По данной выше формуле можно вычислить значение p, если известны значения f и F.

Решим эту задачу геометрическим построением, а затем для получения номограммы это построение механизируем.

Пусть $f = a$, $F = b$, требуется построить отрезок, по длине своей равный соответствующему значению p.

Для этой цели возьмем угол AOB, равный 120°, и проведем в нем биссектрису OC (черт. 8).



Черт. 8.

На сторонах OA и OB угла AOB отложим отрезки OM и ON, соответственно равные по своей длине a и b. Точки M и N соединим прямой. Эта прямая пересечет равноделящую угла OC в некоторой точке P. Длина отрезка $OP = c$ и будет определять искомое значение p.

В самом деле, площадь треугольника MON, очевидно, равна сумме площадей треугольников NOP и OPM. Выражая площадь каждого треугольника как половину произведения двух сторон на синус угла между ними, мы можем написать:

$$\frac{1}{2} ab \sin 120° = \frac{1}{2} ac \sin 60° + \frac{1}{2} bc \sin 60°.$$

Принимая во внимание, что $\sin 120° = \sin 60°$, и производя сокращение обеих частей равенства, мы получим, что

$$ab = ac + bc,$$

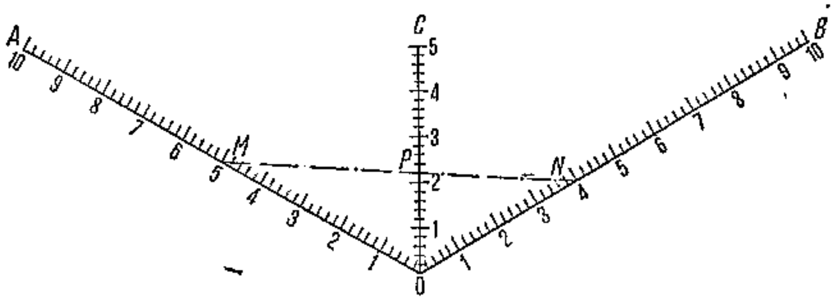
и, наконец, разделив обе части равенства на произведение abc, имеем окончательно:

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

что и требовалось доказать.

Из только что сказанного следует непосредственно способ построения номограммы, на которой по данным f и F мы находим соответствующее значение p.

Мы должны (черт. 9) на сторонах угла AOB нанести равномерные шкалы с одинаковыми масштабами; такую же шкалу и с тем же масштабом следует нанести и на равноделящую угла. Началом каждой из этих шкал будет точка O.



Черт. 9.

Таким образом мы получим на черт. 9 номограмму формулы $\frac{1}{p}=\frac{1}{f}+\frac{1}{F}$, по которой для каждого значения f и F можно найти соответствующее значение p.

Пусть, например, значения f и F будут равны соответственно 5 и 4. Находим на прямой OA точку M с пометкой 5, а на прямой OB точку N с пометкой 4; таким образом отрезок OM равен 5, а отрезок ON равен 4.

Пусть P, как и раньше, будет точкой пересечения прямой MN с биссектрисой угла AOB, тогда пометка этой точки 2,2 и даст приближенно искомое значение p, так как отрезок OP будет равен 2,2.

Заметим, что на практике, работая с этой номограммой, обычно не проводят прямой MN, а лишь прикладывают к чертежу линейку в точках M и N. Линейка пересечет среднюю шкалу в точке P, пометка которой и будет искомым значением p — фокусного расстояния линзы.

§ 6. НОМОГРАММА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ, СОЕДИНЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНО

Как известно из физики, если соединить параллельно проводники, то они дают сопротивление, обратная величина которого равна сумме величин обратных сопротивлений отдельных проводников.

Таким образом, если мы буквой R обозначим сопротивление всех проводников, взятых вместе, и буквами R_1, R_2, R_3,... сопротивления отдельных проводников, то можем написать формулу:

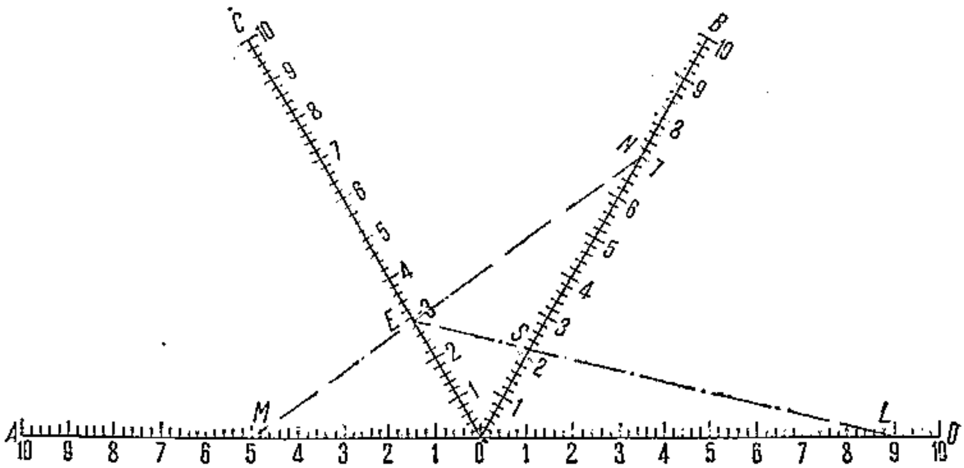
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ \ldots$$

На черт. 10 дана номограмма этой формулы. По этой номограмме мы, зная значения R_1, R_2, R_3,.., сможем найти соответствующее значение R.

Номограмма черт. 10 отличается от номограммы предыдущего примера только тем, что сторона AO угла AOB продолжена, и на ней нанесена четвертая равномерная шкала с тем же масштабом, с каким построены первые три шкалы, и с началом в точке O.

Интересно отметить, что такое небольшое видоизменение предыдущей номограммы дает возможность находить по номограмме сопротивление уже не двух, а какого угодно числа параллельно соединенных проводников.

В самом деле, найдем в качестве примера сопротивление трех проводников. Пусть $R_1 = 5$, $R_2 = 7$, $R_3 = 9$, требуется найти R.



Черт. 10.

Найдем на шкале OA точку M с пометкой 5 и на шкале OB точку N с пометкой 7. Соединим эти точки прямой MN. Прямая MN пересечет равноделящую OC в точке E, пометка которой α удовлетворяет формуле:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{1}{\alpha}.$$

С другой стороны, на шкале OD найдем точку L с пометкой 9 и соединим ее прямой линией с точкой E. Прямая EL пересечет OB, которая служит равноделящей угла COD, в точке S, пометка которой β и будет служить искомым значением R.

В самом деле, мы можем написать, что

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{9}=\frac{1}{\beta},$$

или, заменяя $\frac{1}{\alpha}$ его выражением данным выше, получим, что

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{1}{\beta},$$

т. е. пометка точки S дает искомое значение R.

На черт. 10 $\beta = 2{,}2$.

Из разобранного примера ясно, как найти сопротивление R для большего числа параллельно соединенных проводников.

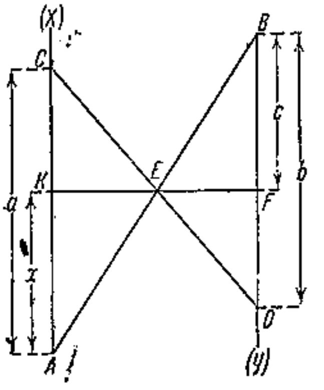
Номограммы двух последних примеров носят название *номограмм из выравненных точек, так как точки шкал, пометки которых удовлетворяют данной формуле, лежат на одной прямой.*

§ 7. НОМОГРАММА ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОПОРЦИИ

Пусть в пропорции $\frac{x}{c}=\frac{a}{b}$ требуется определить величину четвертого члена x.

Берем отрезок AB и через его концы проводим две параллельные прямые (x) и (y), направленные в противоположные стороны (черт. 11).

На прямых (x) и (y) отложим отрезки AC и BD по длине своей равные a и b, и проведем прямую CD, которая пересечет отрезок AB в точке E. На прямой (y) отложим, кроме того, отрезок BF, равный по своей длине c.



Черт. 11.

Если точку F соединить с точкой E и прямую EF продолжить до пересечения с прямой (x) в точке K, то отрезок AK по своей длине будет равен искомому четвертому члену пропорции x.

В самом деле, как видно из чертежа, треугольник ACE подобен треугольнику BDE, и мы можем написать:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AE}{EB}.$$

С другой стороны, треугольник AKE подобен треугольнику BFE, и мы имеем, что

$$\frac{AK}{BF}=\frac{AE}{EB}.$$

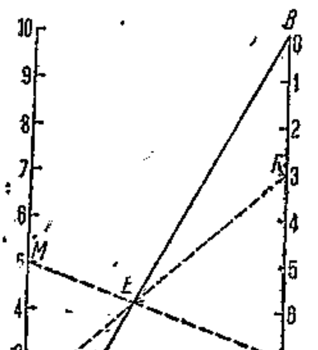
Из обеих пропорций вытекает третья:

$$\frac{AK}{BF}=\frac{AC}{BD},$$

или, что то же

$$\frac{x}{c}=\frac{a}{b},$$

что и требовалось доказать.



Черт. 12.

Механизируя наше построение, мы придем к номограмме, изображенной на черт. 12, для нахождения четвертого члена пропорции.

На чертеже показано, что для $a=5$, $b=7$ и $c=3$ номограмма дает для четвертого пропорционального x значение 2,1.

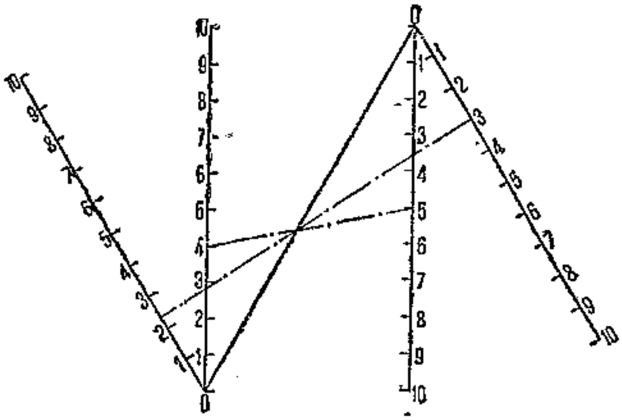
Номограмма черт. 12 принадлежит к типу номограмм с немой шкалой. Такой шкалой в нашей номограмме является прямая AB; мы видим, что, несмотря на то, что эта прямая играет в нашем построении такую же роль, как и шкалы на прямых (x) и (y), нам нет необходимости наносить на прямую AB равномерной шкалы, так как пометкой точки E этой шкалы при решении задачи мы не пользуемся.

З а д а ч а. На черт. 13 изображена номограмма для определения четвертого члена пропорции несколько иного вида. В основание ее построения положены те же самые геометрические соображения, что и в предыдущем.

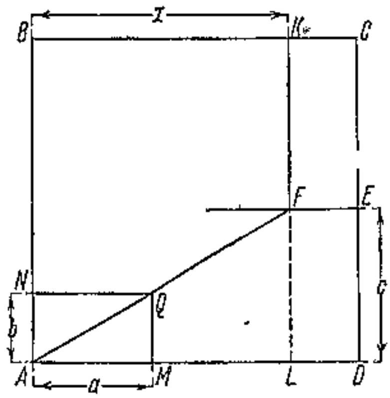
Предлагаем читателю с помощью этой номограммы определить x для $a=4$, $b=5$ и $c=3$.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММЫ ДРУГОГО ТИПА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОПОРЦИИ $\frac{x}{c}=\frac{a}{b}$

Возьмем квадрат $ABCD$ (черт. 14). На сторонах его AB и AD отложим отрезки AM и AN, по длине своей равные a и b. В точках M и N восставим перпендикуляры к сторонам квадрата; эти перпендикуляры пересекутся в точке Q. Далее,



Черт. 13.



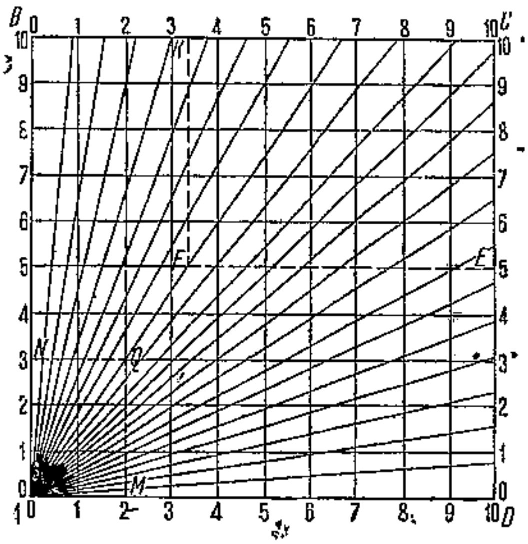
Черт. 14.

на стороне квадрата DC отложим отрезок DE, по длине равный c, и проведем две прямые: перпендикуляр к стороне DC из точки E и прямую AQ, которую продолжим до пересечения с проведенным перпендикуляром в точке F. Из точки F опустим перпендикуляр FK на сторону квадрата BC. Отрезок BK по своей длине равен искомому значению x.

В самом деле, продолжим перпендикуляр FK до пересечения со стороной AD в точке L.

Мы получаем два подобных треугольника AQM и AFL, для которых верны пропорции $\frac{AM}{QM}=\frac{AL}{LF}$ или $\frac{AM}{QM}=\frac{BK}{DE}$, так как $AL=BK$ и $LF=DE$. Заменяя длины отрезков, входящих в последнюю пропорцию, через a, b, x и c, получаем пропорцию $\frac{a}{b}=\frac{x}{c}$, т. е. то, что и требовалось доказать.

Если мы механизируем наше построение, то придем к номограмме, приведенной на черт. 15.



Черт. 15.

На этом чертеже мы видим квадрат, на каждой стороне которого нанесена равномерная шкала. Все шкалы построены с одним и тем же масштабом. Кроме того, мы имеем пучок лучей, выходящих из вершины квадрата A и прямолинейную сетку, состоящую из горизонталей и вертикалей, проведенных через помеченные точки шкал на сторонах квадратов.

Способ пользования этой номограммой вытекает из вышеприведенного геометрического способа решения данной задачи.

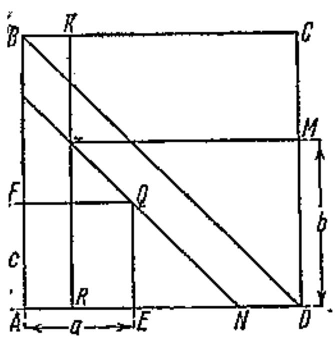
Пусть, например, нам нужно найти по этой номограмме x для $a = 2$, $b = 3$ и $c = 5$. Находим на шкале AD точку M с пометкой 2, а на шкале AB точку N с пометкой 3. Вертикаль из точки M и горизонталь из точки N пересекаются в точке Q. На шкале DC находим точку E с пометкой 5. Идем по горизонтали, выходящей из E, до ее пересечения с лучом, проходящим через Q в точке F; по вертикали, проходящей через точку F, двигаемся до шкалы на стороне BC; вертикаль из точки F пройдет через точку K этой шкалы, имеющую пометку, 3,4. Это и будет искомое значение x.

Номограмма, приведенная на черт. 15, принадлежит к типу *сетчатых номограмм*.

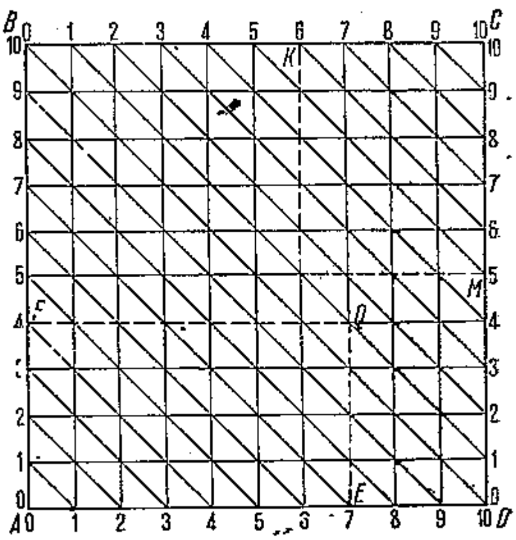
§ 9. ПОСТРОЕНИЕ СЕТЧАТОЙ НОМОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОПОРЦИИ

Из пропорции $x - c = a - b$, где a, b и c даны, нужно найти x.

Эту задачу можно решить геометрическим методом сложения и вычитания отрезков; вместо этого тривиального решения дадим более сложное геометрическое построение для определения отрезка x по данным отрезкам a, b и c. Такое усложнение геометрических решений имеет определенный смысл для номографических целей. Дело в том, что иногда механизация более сложного геометрического построения приводит к номограмме, более удобной для пользования, чем механизация простого геометрического построения.



Черт. 16.



Черт. 17.

Для решения нашей задачи берем квадрат $ABCD$ (черт 16) и на его сторонах AD и AB отложим два отрезка AE и AF, равные a и c. В точках E и F восставим перпендикуляры к сторонам квадрата и продолжим их до пересечения в точке Q. Затем на стороне DC квадрата отложим отрезок DM, равный b; через точку M проведем прямую, параллельную горизонтальной стороне квадрата AD, а через точку Q прямую, параллельную диагонали квадрата BD. Эти две прямые пересекутся в некоторой точке L. Если из точки L опустить перпендикуляр LK на сторону BC, то длина отрезка BK будет равна искомому значению x. В самом деле, пусть N — точка пересечения прямой LQ со стороной квадрата AD. Ясно, что $QE = EN$, так как треугольник QEN равнобедренный. С другой стороны, $AF = QE$, и, следовательно, $AN = AE + EN = a + c$. Аналогично $MD = LR = RN$, а потому $AN = AR + RN = BK + RN = BK + MD = x + b$, откуда $x + b = a + c$, или $x - c = a - b$, что и требовалось доказать.

На черт. 17 дана номограмма этой формулы. Мы видим, что на прямоугольной сетке нанесен ряд параллельных прямых, наклоненных к сторонам квадрата под углом в 45° или параллельных диагонали BD.

На чертеже дан пример для значения $a = 7$, $b = 5$ и $c = 4$; $x = 6$.

Способ пользования этой номограммой вытекает из приведенного выше геометрического решения задачи о нахождении четвертого члена арифметической пропорции.

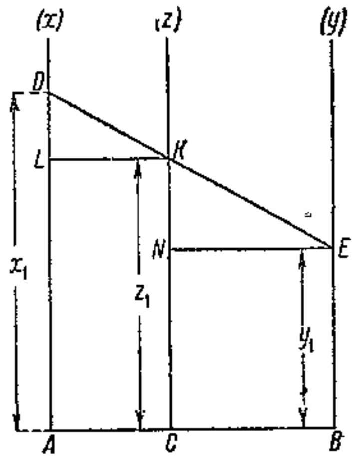
Такого типа сетчатые номограммы встречаются в книгах по машиностроению, в особенности в вопросе о паспортизации станков.

§ 10. НОМОГРАММА ФОРМУЛЫ $ax + by = (a + b)z$

Решим прежде всего путем геометрического построения такую задачу: построить отрезок длины z при заданных величинах отрезков x и y так, чтобы числовые значения длин отрезков x, y и z удовлетворяли уравнению

$$ax + by = (a + b)z, \tag{1}$$

в котором a и b числа данные.



Черт. 18.

Чтобы решить эту задачу, мы берем отрезок AB произвольной длины и делим его в точке C на две части так, чтобы длина AC относилась к длине CB, как b относится к a (черт. 18):

$$\frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}.$$

Из точек A, C и B проводим три параллельные между собой прямые (x), (z) и (y), наклоненные под произвольным углом к прямой AB.

На первой из этих прямых (x) от точки A, как от начала, отложим отрезок AD, равный данному значению $x = x_1$; на второй прямой (y) от точки B, как от начала, отложим отрезок BE, равный данному значению $y = y_1$. Если мы соединим прямой линией ED точки E и D, то эта прямая пересечет среднюю из параллельных прямых (z) в точке K так, что отрезок CK этой прямой даст искомое значение $z = z_1$, которое вместе с данными x_1 и y_1 удовлетворяет заданному уравнению (1).

Докажем это. Из точек K и E проведем прямые KL и EN параллельно прямой AB. Мы получим (черт. 18) два подобных треугольника DLK и KNE, для которых можем написать следующую пропорцию:

$$\frac{DL}{KN} = \frac{LK}{NE},$$

а так как $LK = AC$, а $NE = CB$, что видно из чертежа, то $\frac{LK}{NE} = \frac{b}{a}$.

Заменяя согласно чертежу DL через $x_1 - z_1$, KN через $z_1 - y_1$, мы получим пропорцию:

$$\frac{x_1 - z_1}{z_1 - y_1} = \frac{b}{a}.$$

Освобождаясь от знаменателя и перенося член, содержащий z_1, в правую часть равенства, мы последовательно получим:

$$x_1 a - z_1 a = b z_1 - b y_1$$

и

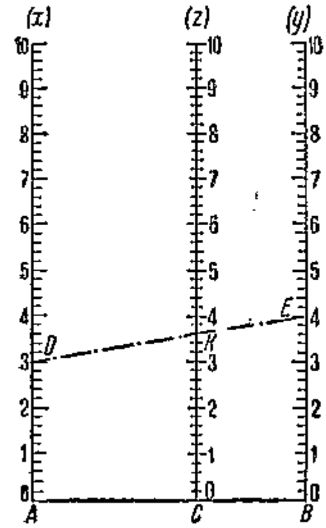
$$ax_1 + by_1 = (a + b)z_1, \tag{A}$$

что и требовалось доказать.

На черт. 19 дана номограмма формулы (A) для $a = 2$ и $b = 3$, т. е. формулы:

$$2x + 3y = 5z.$$

Мы имеем отрезок AB, который в точке C разделен на две части AC и CB, относящиеся между собой как 3 : 2. На параллельных прямых (x), (z) и (y) нанесены равномерные шкалы с одинаковым масштабом и с началами в точках A, C и B. На чертеже показано, что если мы соединим точки D и E шкал (x) и (y) с пометками 3 и 4, то получим на шкале (z) точку K, пометка которой 3,6 даст соответствующее значение z.



Черт. 19.

Такая номограмма, как приведенная на черт. 19, носит название номограммы из выравненных точек на параллельных шкалах.

§ 11. НОМОГРАММА ФОРМУЛЫ $ax - by = (a + b)z$

По уравнению $ax - by = (a + b)z$ при заданных a и b мы для каждой пары значений x и y можем найти соответствующее значение z.

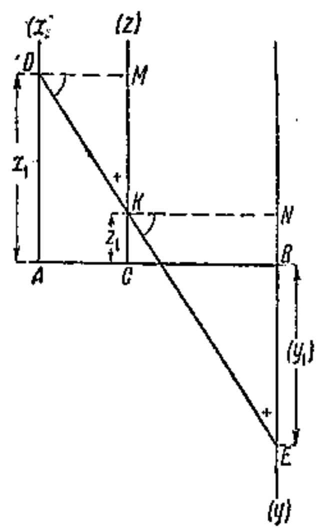
Геометрическое решение задачи аналогично решению задачи предыдущего параграфа. Различие в решении заключается в том, что, взяв отрезок AB произвольной длины и разделив его в точке C в отношении $b : a$, мы проводим затем из точек A и B прямые (x) и (y), параллельные между собой, но противоположно направленные. Из точки C попрежнему проводим прямую (z), параллельную прямым (x) и (y).

На прямой (x) от A, как от начала откладываем вверх отрезок AD, равный заданному значению $x = x_1$; на прямой (y) от B, как от начала, откладываем вниз отрезок BE, равный соответствующему значению $y = y_1$ (черт. 20). Точки D и E соединяем прямой. Прямая DE пересечет прямую z в точке K. Длина отрезка CK дает искомое значение $z = z_1$, которое вместе с x_1 и y_1 удовлетворяет уравнению $ax - by = (a + b)z$.

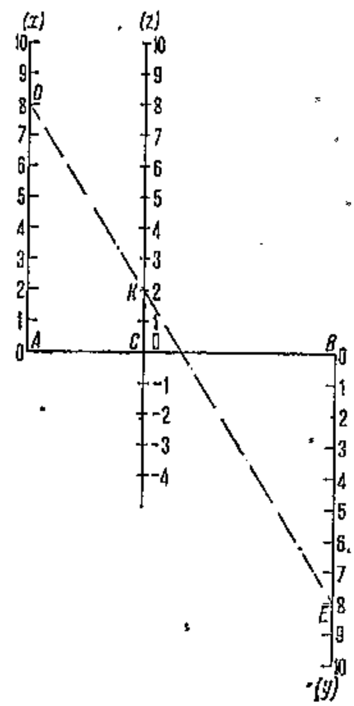
Докажем это. Из точки D проведем прямую DM, параллельную прямой AB, из точки K — прямую KN, также параллельную AB. Мы получим, таким образом, на чертеже два подобных треугольника DMK и KNE. Для этих треугольников можно написать пропорцию:

$$\frac{KM}{NE} = \frac{DM}{KN},$$

но $DM = AC$ и $KN = CB$, следовательно, $\frac{DM}{KN} = \frac{b}{a}$.



Черт. 20.



Черт. 21.

С другой стороны, $KM = x_1 - z_1$, а $NE = y_1 + z_1$. Наша пропорция заменяется такой пропорцией:

$$\frac{x_1 - z_1}{y_1 + z_1} = \frac{b}{a},$$

из которой мы имеем: $ax_1 - az_1 = by_1 + bz_1$ или $ax_1 - by_1 = (a + b)z_1$, что и требовалось доказать.

На чертеже 21 дана номограмма формулы $5x - 3y = 8z$.

На прямых (x), (y) и (z) нанесены три равномерные шкалы с одинаковыми масштабами и с началом в точках A, B и C. Направления шкал на прямых (x) и (y) противоположны.

Из этого чертежа мы видим, что для $x = 8$, $y = 8$ и $z = 2$.

Замечание. Ясно, что мы можем получить для искомой величины z и отрицательное значение; в таком случае точка K будет лежать вниз от точки C.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из этих двух примеров можно вывести одну геометрическую теорему, которой мы воспользуемся в дальнейшем.

Из чертежа 18 мы видим, что если три параллельные прямые (x), (y) и (z) пересечь двумя непараллельными прямыми AB и DE, то отрезки x, y и z параллельных, заключенных между этими секущими прямыми, связаны соотношением:

$$ax + by = (a + b)z, \tag{A}$$

причем отношение чисел $\frac{b}{a}$ показывает отношение расстояний средней прямой (z) от прямой (x) и от прямой (y).

Черт. 20 не противоречит этой теореме, если мы условимся считать, что отрезки x, y, и z могут быть направленными, т. е. имеют как положительные, так и отрицательные значения.

Все номограммы этой главы состоят из равномерных шкал. В следующей главе будет дано учение о неравномерных шкалах — шкалах функциональных, являющихся неотъемлемым элементом большинства обычных номограмм, имеющих практическое приложение.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ШКАЛЫ

Глава II

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ШКАЛА

§ 12. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Если между двумя переменными величинами x и y существует такая связь, что для каждого определенного числового значения x величина y получает одно или несколько определенных значений, то y и x являются зависимыми друг от друга, причем первая из них y называется функцией, или зависимой переменной, а вторая x — аргументом, или независимой переменной.

Самая зависимость этих двух величин друг от друга носит название функциональной зависимости. Функциональная зависимость величины y от переменной величины x символически записывается так: $y = f(x)$, и прочитывается следующим образом: y есть функция от x.

Существует три способа выражения функциональной зависимости двух величин:

1) Формулой; так, например, формула $y = \frac{k}{x}$ обозначает, что одна величина y изменяется обратно пропорционально другой величине x; постоянное число k в данном случае называется коэфициентом обратной пропорциональности.

2) Таблицей, в которой для каждого значения аргумента помещается соответствующее значение функции; таковы, например, таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций и т. п.; таблицы составляются путем вычисления соответствующего значения функций по заданной величине аргумента. Таблицы могут составляться и из значений двух величин, добытых из опыта, из наблюдения, в таком случае мы вносим в таблицу эмпирические данные, т. е. данные, полученные нами из опыта.

Приведем пример эмпирически составленной таблицы, выражающей зависимость между коэфициентом полезного действия турбины и числом оборотов.

n	10	20	30	40	50	60
k	0,32	0,60	0,81	0,83	0,60	0,05

(1)

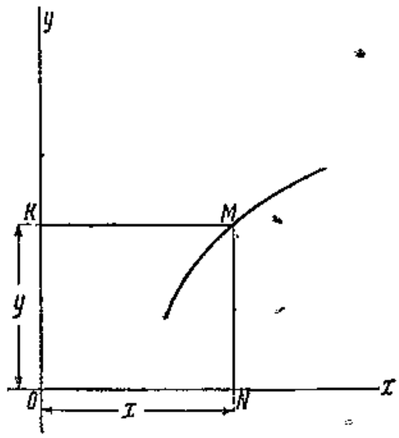
Эта таблица дает возможность определять коэфициент полезного действия k тихоходной турбины Френсиса в зависимости от числа n ее оборотов в минуту. Неудобство второго способа состоит в том, что мы не можем для любого промежуточного значения аргумента, не стоящего в таблице, определить соответствующее значение функции.

Тем не менее на практике очень часто приходится иметь дело с этим вторым способом выражения функциональной зависимости.

3) Третий, наиболее наглядный способ выражения зависимости двух величин друг от друга, — это способ графический, основанный на методе координат.

В этом способе на чертеже дается некоторая линия, называемая графиком функции, определенным образом расположенная относительно двух взаимно перпендикулярных прямых (черт. 22) Ox и Oy, пересекающихся в точке O и называемых прямоугольными, или декартовыми осями координат.

Каждая точка M этого чертежа определяет соответствующие значения аргумента и функции следующим образом. Из точки M чертежа опускаем два перпендикуляра: один на ось Oy, а другой на ось Ox, и измеряем эти два перпендикуляра одной и той же единицей длины. Длина перпендикуляра MK или равного этому перпендикуляру отрезка ON дает значение аргумента x, а длина перпендикуляра MN или равного ему отрезка OK дает значение функции y.



Черт. 22.

Замечание. В том случае, когда отрезок ON направлен влево от начала или отрезок OK вниз от начала, они измеряются отрицательными числами.

Таким образом при графическом способе выражения функциональной зависимости как значение аргумента, так и значение функции даются отрезком определенной длины и определенного направления.

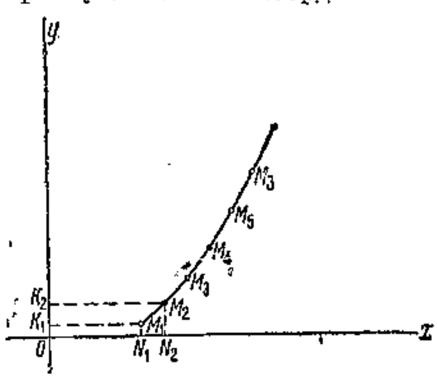
Ясно, что мы можем построить график функции и тогда, когда она дана таблицей или формулой.

В самом деле, пусть табл. (2) дает соответствующие значения аргумента и функции и требуется построить график этой функции.

x	4	5	6	7	8	9	10
y	0,5	1,4	2,5	3,8	5,4	7,1	11,0

(2)

Найдем ряд точек, принадлежащих искомому графику. Для этого начертим прямоугольные оси координат Ox и Oy. На оси Ox отложим отрезок ON_1, равный значению аргумента $x = 4$; на оси Oy отложим отрезок OK_1, равный соответствующему значению функции $y = 0,5$ (черт. 23). Из точек N_1 и K_1 восставим перпендикуляры к осям. Точка M_1 пересечения этих перпендикуляров будет точкой искомого графика. Таким же образом построим ряд точек M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, каждый раз пользуясь соответствующей парой значений x и y. Соединяя эти точки плавной линией, мы получим график (черт. 23) функциональной зависимости между y и x.



Черт. 23.

Для построения графика в том случае, когда функция задана формулой, надо предварительно составить таблицу соответствующих значений x и y. Таблица эта составляется так: аргументу x дается произвольное числовое значение, а соответствующее значение y находится из формулы, выражающей функциональную зависимость y от x. Имея таблицу соответствующих значений аргумента и функции, поступают так же, как и в предыдущем случае.

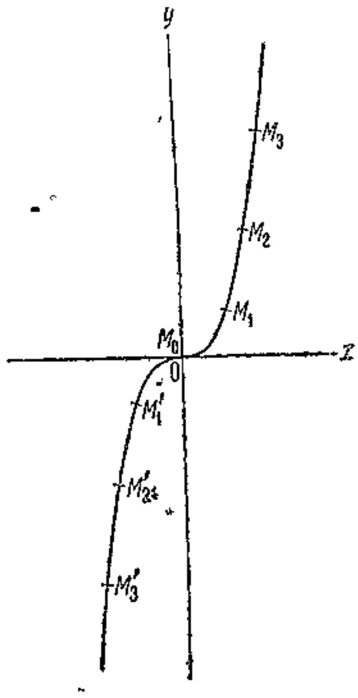
Пример. Имеем функцию $y = x^3$.

Составим таблицу соответствующих значений аргумента и функции, давая x значения —1,7, —1,4, —1, 0, 1, 1,4, 1,7...; получим таблицу (3):

x	—1,7	—1,4	—1	0	1	1,4	1,7
y	—4,9	—2,7	—1	0	1	2,7	4,9

(3)

Построим точки M_0, M_1, M_2, M_3, M_1', M_2', M_3', определяемые парами чисел ($x = 0$, $y = 0$); ($x = 1$, $y = 1$) и т. д., так, как мы строили их в предыдущем примере. Соединим построенные точки плавной кривой и мы получим (черт. 24) график функции $y = x^3$.



Черт. 24.

Графический способ изображения функциональной зависимости весьма распространен; с помощью графика функции решается большое число задач, которые или не могут быть решены вычислительным путем, или решаются с большим трудом.

Кроме графического способа выражения функциональной зависимости существует еще способ, который может быть назван полуграфическим способом выражения функциональной зависимости.

Этот способ состоит в построении функциональной шкалы данной функции, он в большой мере применяется в номографии. Функциональная шкала является основным элементом номограммы в огромном числе ее видов.

§ 13. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

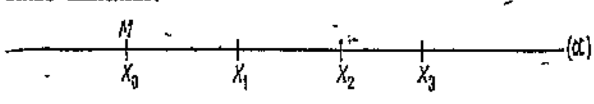
Когда мы имеем функциональную зависимость между двумя величинами, т. е. когда мы можем найти для каждого значения аргумента x соответствующее значение функции y, мы говорим, что нам дана определенная функция $y = f(x)$.

Каким бы из трех способов эта функция ни была дана: формулой, таблицей или графиком, мы можем дать ей новое выражение в виде функциональной шкалы этой функции.

Покажем, как строится эта шкала.

Пусть дана функция $y = f(x)$.

Возьмем некоторую прямую (a), называемую «носителем шкалы» (черт. 25), и выберем на ней точку M за начало шкалы.



Черт. 25.

Затем, если функция не задана таблицей, составим для нее таблицу соответствующих значений функции и аргумента. Даем аргументу x ряд последовательных значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и вычисляем ряд соответствующих значений y, которые обозначаем через $y_1, y_2, y_3, \ldots$ или $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$.

На прямой (a) от M, как от начала, откладываем отрезки, равные по своей длине значениям функции $y_1, y_2, y_3, \ldots$ При откладывании отрезков мы пользуемся выбранным заранее масштабом.

Если какое-либо значение y отрицательно, то соответствующий этому значению отрезок откладывается влево от начала шкалы M.

В конце каждого из отложенных отрезков мы ставим штрих и около него пишем соответствующее числовое значение аргумента.

На функциональной шкале *значения аргумента даются числами*, на ней написанными, а *значения функции — отрезками*, на ней откладываемыми.

Этот способ выражения функциональной зависимости между двумя величинами характеризуется как полуграфический способ и отличается от графического тем, что в графическом способе как функция, так и аргумент даются отрезками, а в полуграфическом способе значение функции дается отрезком, а значение аргумента числом, написанным в конце этого отрезка.

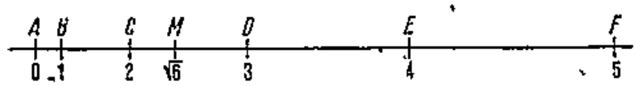
Начальная точка M шкалы имеет пометку, равную x_0, тому значению аргумента, при котором значение функции $f(x_0)$ равно нулю, так как откладываемый отрезок должен быть равен нулю, как отрезок, имеющий и начало и конец в точке M.

Пример. Построим шкалу функции $y=\frac{x^2}{2}-3$.

Прежде всего составляем таблицу соответствующих значений аргумента и функции, давая x ряд последовательных числовых значений, отличающихся друг от друга на 1.

x	0	1	2	3	4	5
y	—3	—2,5	—1	1,5	5	9,5

Затем выберем модуль шкалы m, т. е. число миллиметров в единице масштаба. Для того чтобы откладываемые отрезки выражались целым числом миллиметров, возьмем m равным четному числу, например 10 *мм*.



Черт. 26.

На прямой с точкой M, взятой за начало шкалы (черт. 26), откладываем отрезки $MA = 10\cdot(-3) = -30$ *мм*; $MB = 10\cdot(-2,5) = -25$ *мм*; $MC = 10\cdot(-1) = -10$ *мм*; $MD = 10\cdot 1,5 = 15$ *мм* (черт. 26); $ME = 10\cdot 5 = 50$ *мм*; $MF = 10\cdot 9,5 = 95$ *мм*. Отрезки MA, MB и MC, как отрицательные, откладываются влево от начала.

Около точек A, B, C, D, E, F ставим числовые пометки 0, 1, 2, 3, 4, 5,..., равные соответствующим значениям аргумента x. Чтобы узнать, какую пометку имеет начало шкалы, надо найти то значение x, при котором $y=0$. Полагая $\frac{x^2}{2}-3=0$, имеем $x=\sqrt{6}$. Отсюда следует, что пометка точки M должна быть $\sqrt{6}$.

§ 14. УРАВНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

При построении функциональной шкалы после того, как выбран модуль и составлена таблица соответствующих значений аргумента и функции, нам приходится вычислять в миллиметрах длины тех отрезков, которые откладываются на прямой. Вычисления эти удобнее всего производить по формуле:

$$S_k = m\cdot f(x_k), \tag{1}$$

где S_k означает длину откладываемого отрезка для значения аргумента, равного x_k.

Значок k можно опустить и написать эту формулу в более общем виде, так как она верна для любого значения аргумента, а именно:

$$S = mf(x). \tag{I}$$

Эта формула носит название уравнения функциональной шкалы, и ею пользуются для построения шкалы.

Согласно этому уравнению начало шкалы имеет пометку, равную тому значению аргумента, при котором $f(x)$ равно 0.

Для практических целей удобнее уравнению функциональной шкалы придать несколько иное, более сложное выражение, которое мы приведем ниже.

В самом деле, на практике мы обычно строим функциональную шкалу для ограниченной области изменения переменного x.

Пусть наше переменное x изменяется в пределах от a до b, следовательно, функция меняется в пределах от $f(a)$ до $f(b)$ и пусть $f(a) \neq 0$.

В таком случае нам нужен отрезок функциональной шкалы нашей функции, в начале которого стоит числовая пометка a, а в конце b.

Расстояние между двумя точками с пометками a и b на основании формулы (1) равно разности S_b и S_a, т. е.

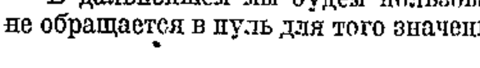
$$mf(b) - mf(a) = m[f(b) - f(a)]. \tag{2}$$

Промежуточные пометки мы поставим, откладывая отрезки, вычисляемые не по формуле (I), а по формуле:

$$S = m[f(x) - f(a)]. \tag{II}$$

Эта формула (II) переходит в формулу (I) в том случае, когда $f(a) = 0$.

Если отрезок AB (черт. 27) представляет собой ту часть шкалы, которую нам нужно построить, то ясно, что точка A имеет пометку a, а точка B пометку b.



Черт. 27.

В самом деле, если мы в формуле (II) поставим вместо переменного x число a, то получим, что $S = 0$ или, что точка A должна иметь пометку a, а если поставим число b, то получим, что длина отрезка AB, как расстояние между двумя помеченными точками A и B, равна $m[f(b) - f(a)]$, из чего следует, что точка B будет иметь пометку b.

В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (II) всякий раз, когда $f(x$ не обращается в нуль для того значения аргумента, которое стоит в начале шкалы)

§ 15. ДЛИНА ШКАЛЫ И МОДУЛЬ

При построении функциональной шкалы существенным моментом является выбор модуля. Модуль зависит, с одной стороны, от предполагаемой длины шкалы, а с другой, — от интервала изменения функции.

Найдем формулу, которая установит эту связь.

Пусть мы хотим построить нашу шкалу на отрезке AB равном L *мм*. Размер отрезка AB обыкновенно зависит от величины чертежа, который мы хотим получить.

Пусть аргумент x меняется в пределе от a до b; в таком случае функция меняется в пределах от $f(a)$ до $f(b)$. Длина отрезка $AB = L$ на основании § 14 равна $m[f(b) - f(a)]$; таким образом мы приходим к формуле:

$$L = m[f(b) - f(a)], \tag{1}$$

из которой нетрудно получить и формулу для вычисления

$$m = \frac{L}{f(b) - f(a)}; \tag{III}$$

если для m получается дробное выражение, то его можно округлять до целого числа миллиметров.

§ 16. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

Пример 1. Построим функциональную шкалу функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 7$ на отрезке AB, равном 250 *мм*.

Пусть x меняется в пределах от 3 до 6, тогда

$$f(a) = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 7 = 2;$$

$$f(b) = f(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 - 7 = 65;$$

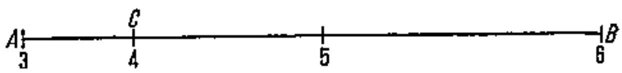
$$L = 250.$$

Находим по формуле (III):

$$m = \frac{L}{f(b) - f(a)} = \frac{250}{65 - 2} = \frac{250}{63} \approx 4 \text{ мм}.$$

Берем модуль равным 4, от этого фактически длина шкалы будет не 250, а 252 *мм*, что допускается размером чертежа.

Начало шкалы A (черт. 28) снабжаем числовой пометкой 3, конец B — пометкой 6. Промежуточные пометки наносим в конце отрезков, откладываемых от точки A, как от начала. Длины откладываемых отрезков вычисляем по формуле (II):



Черт. 28.

$$S = m[f(x) - f(a)]$$

Так,

$$S_4 = 4[f(4) - f(3)] = 4\left[21\frac{1}{3} - 9\right] = 49\frac{1}{3} \text{ мм};$$

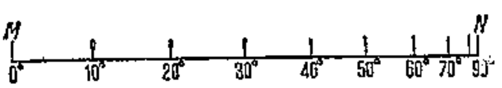
$$S_5 = 4[f(5) - f(3)] = 4\left[41\frac{2}{3} - 9\right] = 130\frac{2}{3} \text{ мм}.$$

Пример 2. Возьмем функцию $y = \sin x$ и построим шкалу этой функции. Пусть длина шкалы будет равна 100 *мм* и пусть x изменяется от 0 до 90°.

По формуле (III) масштаб шкалы

$$m = \frac{100}{f(90°) - f(0°)} = \frac{100}{\sin 90° - \sin 0°} = 100 \text{ мм}.$$

В качестве носителя шкалы возьмем отрезок MN длиной в 100 *мм*; начало шкалы — точка M, конец ее — точка N (черт. 29).



Черт. 29.

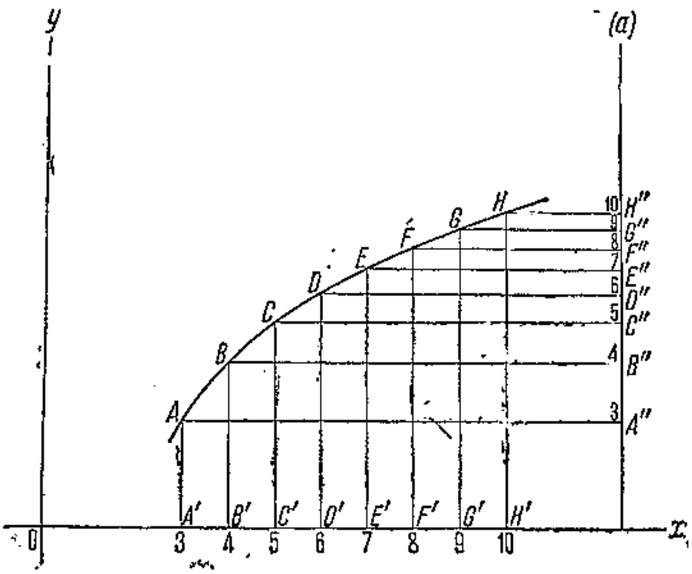
Будем давать аргументу x значения 0°, 10, 20°, 30°,... 90°.

Выпишем по таблице натуральных тригонометрических величин соответствующие значения синуса: 0; 0,17; 0,34; 0,5;... 1. По формуле (1) вычислим соответствующие отрезки $S_1 = 100 \cdot 0 = 0$, $S_2 = 100 \cdot 0{,}17 = 17$ *мм*, $S_3 = 100 \cdot 0{,}34 = 34$ *мм*, $S_4 = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ *мм* и т. д. Отложим эти отрезки от общего начала M вправо, так как все они положительные. В точке M поставим пометку 0°. В концах A, B, C,.., N отложенных отрезков поставим пометки 10°, 20°, 30°,..., 90°; шкала синусов построена на черт. 29.

§ 17. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

Если функция дана графически, и мы не имеем ни формулы, ни таблицы для соответствующих значений аргумента и функции, то мы графическим путем можем построить функциональную шкалу.

В самом деле, пусть мы имеем (черт. 30) график некоторой функции. Интервал изменения аргумента x от 3 до 10; на чертеже отмечены все целые значения x от 3 до 10, для этих целых значений x соответствующие значения y даются отрезками AA', BB', CC' и т. д.

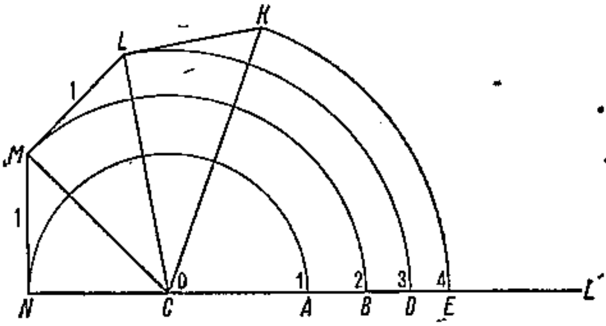


Черт. 30.

Чтобы получить функциональную шкалу заданной функции на прямой (a), параллельной оси Oy, надо все отрезки, определяющие значения y, AA', BB', CC', DD' и т. д., передвинуть параллельно самим себе до совпадения с прямой (a). Точка A попадет после этого передвижения в точку A'', точка B в точку B'', точка C в точку C'' и т. д. Эти точки мы снабдим соответственно пометками 3, 4, 5,... и получим, таким образом, на прямой (a) функциональную шкалу той функции, которая первоначально была дана графиком.

Модуль этой шкалы равен числу миллиметров в отрезке $A'B'$, т. е. в единице длины, так как отрезки, равные значениям y, откладываются в том же масштабе, в каком отложены отрезки, представляющие собой соответствующие значения x.

Функциональную шкалу иногда можно строить геометрически и не имея графика заданной функции. Способ построения зависит от вида той функции, для которой она строится. В качестве примера рассмотрим геометрический способ построения шкалы функции $y=\sqrt{x}$.



Черт. 31.

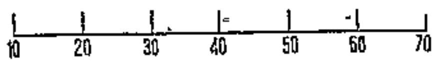
Возьмем полуокружность радиуса, равного единице, и продолжим диаметр вправо от центра C. Получим прямую CL. На ней построим функциональную шкалу функции $y=\sqrt{x}$ для интервала изменения x от 0 до 4 (черт. 31). Примем точку C

за начало шкалы; она имеет пометку 0. Точку A — конец радиуса, равного единице, снабдим пометкой 1. В точке N восставим перпендикуляр к прямой CL и отложим на нем отрезок NM, равный единице длины. Соединяя C с M, мы получим прямоугольный треугольник, в котором CM служит гипотенузой и равна $\sqrt{2}$; описав из C, как из центра, радиусом CM окружность, мы увидим, что CB будет радиусом этого круга и будет равна $\sqrt{2}$, поэтому точку B снабдим пометкой 2, так как точка B находится на расстоянии $\sqrt{2}$ от начала шкалы C. Точно так же, далее, в точке M восставим перпендикуляр к MC и отложим на нем отрезок ML, равный единице. Соединив L с C, мы получим прямоугольный треугольник CML, в котором гипотенуза CL равна $\sqrt{3}$. Если из точки C, как из центра, описать окружность радиусом CL, то CD будет также радиусом этого круга и точка D должна иметь пометку 3, так как расстояние от D до C, начала шкалы, равно $\sqrt{3}$. Производя дальше такие же построения, мы найдем, что точка E должна будет иметь пометку 4. Модуль этой шкалы равен числу миллиметров в радиусе CN, принятом за единицу.

§ 18. РАВНОМЕРНАЯ ШКАЛА

При построении функциональной шкалы линейной функции, общее выражение которой $y = ax + b$, мы приходим к равномерной шкале, на которой расстояния между числовыми пометками, разнящимися на одно и то же число, всюду одинаковы.

Эта шкала имеет вид обычной измерительной линейки. Числа, написанные на ней, представляют собой арифметическую прогрессию с той или иной разностью, а отрезки, заключенные между последовательными числовыми пометками, равны между собой.



Черт. 32.

Черт. 32 дает такую равномерную шкалу.

Построим в качестве примера функциональную шкалу линейной функции $y = 2x - 3$ в пределах изменения x от 2 до 10. Выберем заранее длину шкалы. Пусть шкала равна 160 *мм*. Определим модуль по формуле (III), § 15:

$$m = \frac{L}{f(b) - f(a)} = \frac{160}{f(10) - f(2)} = \frac{160}{17 - 1} = 10 \text{ мм}.$$

Составим таблицу соответствующих значений x и y, давая x последовательные значения от 2 до 10.

x	y
2	1
3	3
4	5
5	7
6	9
7	11
8	13
9	15
10	17

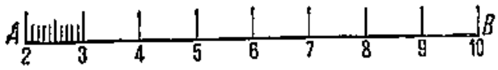
Из этой таблицы ясно, что в то время как значения x представляют собой ряд натуральных чисел от 2 до 10, значения y представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом, равным 1, и разностью, равной 2. Отсюда ясно, что при построении функциональной шкалы не нужно вычислять все промежуточные значения откладываемых отрезков по формуле (II), § 14, а найти лишь длину отрезка, заключенного между двумя последовательными числовыми пометками. Так как разность арифметической прогрессии, представляющей собой последовательные значения y, в нашем примере равна 2, то длина искомого отрезка, нужного для построения шкалы, равна $10 \cdot 2 = 20$ *мм*. Отсюда ясно, что для того чтобы построить шкалу функции $y = 2x - 3$ выбранной длины в 160 *мм*, нужно начертить отрезок в 160 *мм*, в начале и в конце его поставить начальное и конечное значения аргумента 2 и 10; чтобы наносить промежуточные пометки, нужно, начиная от начала, один за другим откладывать отрезки в 20 *мм* и в конце каждого из них ставить пометку в последовательности 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (черт. 33).

Ясно также, что если мы хотим иметь шкалу с более мелкими делениями, то интервал между двумя крупными штрихами мы разобьем на равные части.

Расстояние любой помеченной точки, например 5,2 от начала шкалы, вычисляется по формуле (II) § 14 $S = m[f(x) - f(a)]$:

$$S_{5,2} = 10 \cdot [(2 \cdot 5{,}2 - 3) - 1] = 64 \text{ мм}.$$

Чтобы иметь право таким способом строить функциональную шкалу любой линейной функции, мы докажем, что при увеличении x последовательно на одно и то же число, соответствующие значения y также увеличиваются на одно и то же число.



Черт. 33.

В самом деле, возьмем функцию $y = ax + b$, дадим x ряд последовательных значений, разнящихся между собой на одно и то же постоянное число d: x_1, $x_1 + d$, $x_1 + 2d$,... и найдем соответствующие значения y, т. е. y_1, y_2, y_3,...

$$y_1 = ax_1 + b;$$
$$y_2 = ax_1 + ad + b;$$
$$y_3 = ax_1 + 2ad + b\ldots$$

Из этих равенств видим, что

$$y_2 - y_1 = ad,$$
$$y_3 - y_2 = ad,$$

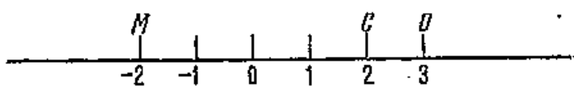
следовательно, y изменяется равномерно.

§ 19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ, ИЗОБРАЖАЕМОЙ ДАННОЙ РАВНОМЕРНОЙ ШКАЛОЙ

В дальнейшем, рассматривая равномерную шкалу, мы будем иметь в виду ту линейную функцию, которую она изображает. Это необходимо для применения равномерной шкалы в номографии.

Если мы имеем определенную равномерную шкалу, знаем ее начало, какую-либо помеченную точку и модуль, то тем самым мы имеем определенную линейную функцию, которую она полуграфически изображает.

При изменении масштаба или переносе начала шкалы в другую точку шкалы та же равномерная шкала изображает уже другую линейную функцию. Происходит то же, что и в аналитической геометрии, где от переноса начала координат или изменения направления осей изменяется уравнение данной на чертеже прямой линии.



Черт. 34.

Пусть мы имеем (черт. 34) линейную функциональную шкалу функции $y = 2x + 4$ с началом в точке M и модулем, равным 2. Начало шкалы имеет пометку — 2, т. е. то числовое значение x, при котором функция y обращается в 0, точка C имеет пометку 2.

Перенесем начало шкалы в точку C и изменим модуль, приняв его равным единице. Зададим себе вопрос, какую линейную функцию изображает эта шкала при данных условиях.

Обозначим искомую функцию в виде:

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Так как начало шкалы имеет пометку 2, то результат подстановки 2 вместо x в наше уравнение обратит y в 0.

$$0 = 2a + b. \tag{2}$$

С другой стороны, точка D, имеющая пометку 3, находится на расстоянии 4 *мм* от точки C, т. е. от начала шкалы. Следовательно, мы имеем право написать равенство:

$$3a + b = 4. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (2) и (3) относительно неизвестных a и b, мы найдем, что $a = 4$, $b = -8$. Таким образом мы видим, что тот чертеж, который представлял собой полуграфическое изображение функции $y = 2x + 4$, можно рассматривать как изображение линейной функции $y = 4x - 8$, если за начало шкалы принять не точку M, а точку C и изменить модуль с 2 на 1.

Таким образом *выбор модуля и начала на равномерной шкале* играют ту же роль, что и *выбор осей координат в аналитической геометрии.*

Выведем формулы для составления уравнения той линейной функции, которая изображается данной равномерной шкалой.

Назовем независимое переменное буквой u вместо x, таким образом линейная функция этого независимого переменного:

$$f(u) = au + b.$$

Пусть нам известны две точки шкалы: точка C с пометкой u_1 и точка D с пометкой u_n. Модуль шкалы примем равным m. Примем точку C за начало шкалы. Тогда из выражения линейной функции в самом общем виде $f(u) = au + b$ получим два равенства: первое равенство будет нами получено из условия, что точка C начало шкалы и будет иметь вид:

$$0 = au_1 + b,$$

а второе равенство вытекает из условия, что модуль шкалы равен m, оно будет:

$$\frac{l}{m} = au_n + b,$$

где l — длина отрезка CD в миллиметрах.

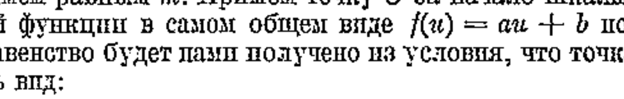
Решая эти два равенства, как два уравнения с неизвестными a и b, мы найдем, что

$$a = \frac{l}{m(u_n - u_1)} \quad \text{и} \quad b = \frac{lu_1}{m(u_1 - u_n)};$$

выражение искомой линейной функции будет:

$$f(u) = \frac{l}{m(u_n - u_1)}\,u - \frac{lu_1}{m(u_n - u_1)}. \tag{IV}$$

Замечание. m — число положительное, знак l зависит от направления отрезка CD, т. е. если D расположена вправо от C, то l положительно, если влево — то отрицательно.



Черт. 35.

Из всего сказанного мы можем сделать такой вывод: если мы имеем две помеченные точки равномерной шкалы, из которых одна принимается за начало, знаем модуль этой шкалы и расстояние между этими двумя точками, то уравнение линейной функции, изображаемой этой шкалой, определяется вполне и единственным образом.

Пример. Возьмем черт. 35. На нем изображена равномерная шкала; точка C — начало шкалы — имеет пометку -10, точка D — пометку -11, l равно 1 *см* и отрицательно. Дано, что m равно 2 *мм*.

Тогда согласно вышеприведенной формуле (IV) выражение линейной функции, которая дается этой шкалой, будет иметь вид:

$$f(u)=\frac{-10}{2\cdot(-11+10)}\,u-\frac{(-10)\cdot(-10)}{2\cdot(-11+10)}\quad\text{или}\quad f(u)=5u+50.$$

§ 20. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ШКАЛА

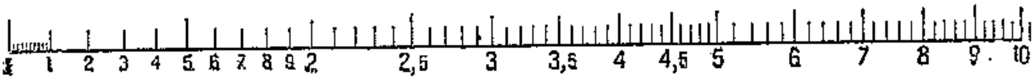
Из всех функциональных шкал наиболее употребительной на практике шкалой является логарифмическая шкала, т. е. шкала функции $f(x)=\lg x$. Остановимся на ее построении.

Пусть переменная величина x изменяется от 1 до 10. Выберем длину шкалы L в 100 *мм* и найдем масштаб m:

$$m=\frac{100}{\lg 10-\lg 1}=100\ \textit{мм}.$$

Если мы берем переменное x в пределах изменения от 1 *до* 10, *то масштаб и длина логарифмической шкалы всегда совпадают.* Таким образом, если хотят воспроизвести ту логарифмическую шкалу, которая имеется на обыкновенной счетной линейке длиной в 25 *см*, то масштаб берут равным 250 *мм*.

Для построения шкалы длиной в 100 *мм* берем отрезок (черт. 36) длиной в 10 *см* и ставим в начале его пометку 1, а в конце 10. Затем нанесем крупные



Черт. 36.

штрихи, снабженные числовыми пометками 2, 3, 4,..., 9; для этого возьмем таблицу логарифмов и, пользуясь формулой (1) для S, вычислим:

$$S_2=100\cdot\lg 2=100\cdot 0{,}30103\approx 30\ \textit{мм};$$
$$S_3=100\cdot\lg 3=100\cdot 0{,}47712\approx 48\ \textit{мм};$$
$$S_4=100\cdot\lg 4=100\cdot 0{,}60206\approx 60\ \textit{мм};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_9=100\cdot\lg 9=100\cdot 0{,}95424\approx 95\ \textit{мм}.$$

Отложим от начала шкалы отрезки S_2, S_3, S_4, .., S_9 и, поставив там крупные штрихи с числовыми пометками 2, 3, 4, ..., 9, мы получим крупные интервалы на шкале.

Далее каждый из этих интервалов разделим на 10 мелких интервалов и поставим штрихи, которые снабдим соответствующими пометками.

Разделим, например, первый интервал между 1 и 2 на мелкие интервалы. Мы должны опять с помощью таблицы логарифмов при помощи формулы (1) вычислить отрезки:

$$S_{1,1}=100\cdot\lg 1{,}1\approx 4\ \textit{мм};$$
$$S_{1,2}=100\cdot\lg 1{,}2\approx 4{,}5\ \textit{мм};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{1,9}=100\cdot\lg 1{,}9\approx 28\ \textit{мм}.$$

Откладывая эти отрезки от начала шкалы, нужно в конце каждого из них поставить числовые отметки 1,1; 1,2;..., 1,9, вместо которых на практике ставят 1; 2; ...; 9, т. е. десятые доли, а единицу подразумевают.

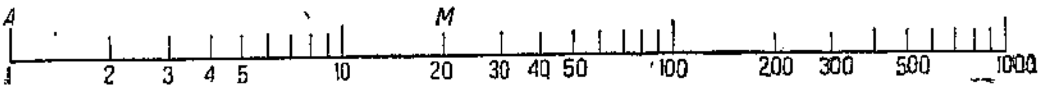
Чтобы получить еще более мелкие интервалы, нужно только что полученные интервалы в свою очередь разделить на интервалы.

Для разделения первого интервала от 1 до 1,1 придется вычислять отрезки:

$$S_{1,01} = 100 \cdot \lg\ 1,01;$$
$$S_{1,02} = 100 \cdot \lg\ 1,02;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{1,09} = 100 \cdot \lg\ 1,09$$

и отложить их от начала шкалы, снабдив мелкими штрихами. Чисел поставить уже невозможно благодаря близости штрихов друг к другу.

Если приложить друг к другу три одинаковые логарифмические шкалы, построенные таким образом, и составить из них одну шкалу, то эта последняя представит собой логарифмическую шкалу функции $f(x) = \lg x$ для того случая, когда переменная x меняется от 1 до 1000 (черт. 37).

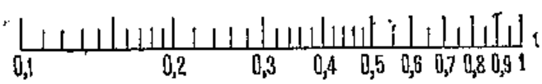


Черт. 37.

Это непосредственно вытекает из того факта, что логарифмы чисел, превышающих данные в 10 или 100 раз, отличаются только характеристикой, сохраняя ту же мантиссу.

Так, отрезок AM равен $S = 100 + 100 \lg 2 = 100 (1 + \lg 2) = 100 (\lg 10 + \lg 2) = 100 \cdot \lg 20 = S_{20}$. Поэтому точка M должна иметь пометку 20.

Такое свойство логарифмической шкалы называется ее периодичностью.



Черт. 38.

Если нужно построить логарифмическую шкалу для интервала изменения x от 1 до 0,1, то мы продолжим шкалу влево от A, так как отрезки $S_{0,9}$, $S_{0,8}$, $S_{0,7} \ldots S_{0,1}$ должны быть отрицательны, и нанесем на ней те же деления при условии сохранения того же масштаба (черт. 38).

§ 21. ИЗМЕНЕНИЕ МОДУЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

Если мы построим функциональную шкалу какой-либо функции $f(x)$ с модулем m, то та же самая шкала может рассматриваться как функциональная шкала функции $k \cdot f(x)$ с модулем $\frac{m}{k}$.

В самом деле, если мы построим, например, шкалу функции $k \lg x$ с модулем $\frac{m}{k}$, то вследствие того, что уравнение этой шкалы будет иметь вид:

$$S = \frac{m}{k} \cdot k \lg\ x = m \lg x,$$

шкала функции $kf(x)$ совпадет со шкалой функции $f(x) = \lg x$, построенной с масштабом m и имеющей уравнение $S = m \lg x$. Это обстоятельство облегчает построение функциональных шкал и позволяет пользоваться готовыми шкалами-шаблонами. Один и тот же шаблон с масштабом $m = 250$ для функции $\lg x$ изобразит с масштабом $\frac{m}{2}$ функцию $\lg\ x^2$, с масштабом $\frac{m}{3}$ функцию $\lg\ x^3$ и т. д.

В самом общем случае, если мы имеем отрезок шкалы с начальной пометкой a для функции $f(x)$, причем $f(a) \neq 0$, то мы пользуемся уравнением этой шкалы в виде

$$S = m[f(x) - f(a)].$$

То же самое уравнение может быть приведено к такому уравнению:

$$S = \frac{m}{k} \cdot k\,[f(x) - f(a)],$$

т. е. построенный отрезок шкалы является отрезком функциональной шкалы функции $k \cdot f(x)$ с модулем $\frac{m}{k}$.

Пример. Построить шкалу функции $\lg x + \lg 4$, имея готовый шаблон, снятый с логарифмической линейки длиной в 25 *см*.

Уравнение шкалы этой функции будет:

$$S = mf(x) = m(\lg x + \lg 4) = m \cdot \lg 4x.$$

В начале шкалы $m \lg 4x$ должно обратиться в нуль, т. е.

$$\lg 4x = 0; \quad 4x = 1; \quad x = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

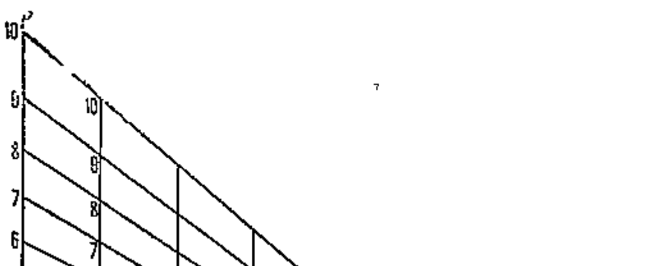
Черт. 39.

Начало шкалы должно иметь пометку 0,25. Точка с пометкой 1 будет находиться от начала шкалы на расстоянии $S_1 = m \lg 4$. От этой точки можно отложить вправо готовую логарифмическую шкалу, снятую с линейки (черт. 39).

В интервале от начала шкалы до точки с пометкой 1 можно нанести шкалу, сняв с готовой шкалы интервал от 2,5 до 10 так, чтобы пометка 2,5 совпала с началом шкалы функции $\lg x + \lg 4$, а пометка 10 с 1.

§ 22. ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА ШКАЛЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Если мы имеем построенную шкалу функции $y = f(x)$ с масштабом в m миллиметров, т. е. если модуль шкалы равен m, то для получения шкалы той же функции с измененным модулем мы можем сделать следующее геометрическое построение.



Черт. 40.

Пусть функциональная шкала нашей функции нанесена на прямой OP с модулем m и с началом шкалы в точке O. P — конец шкалы. Пределы изменения x от 0 до 10.

Проведем прямую OA под каким-нибудь углом к шкале OP и любую точку этой прямой соединим с помеченными точками шкалы, нанесенной на OP (черт. 40).

Тогда, если разделить отрезок AO на несколько равных частей, например на 8, и через точки деления провести прямые, параллельные OP, то на этих прямых мы получим шкалы той же функции только с модулем, равным

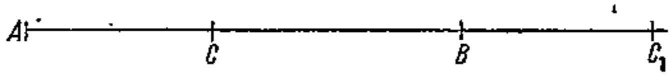
$$\frac{7}{8}m, \quad \frac{6}{8}m, \quad \frac{5}{8}m, \quad \ldots, \quad \frac{1}{8}m.$$

Глава III

ПРОЕКТИВНАЯ ШКАЛА

§ 23. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Если мы имеем отрезок AB, начало которого A, а конец B, то всякая точка C, лежащая на нем, делит его в некотором отношении, т. е. (черт. 41) отношение отрезка от начальной точки A до делящей точки C к отрезку от точки C до конечной точки B равно некоторому определенному числу n:



Черт. 41.

$$\frac{AC}{CB} = n. \qquad (1)$$

n может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от того, где лежит точка C — внутри отрезка или на его продолжении. В самом деле, если точка C лежит внутри отрезка AB, оба отрезка AC и CB имеют одинаковое направление, и их отношение положительно. Если точка C_1 лежит на продолжении отрезка AB в ту или другую его сторону, оба отрезка AC_1 и C_1B противоположно направлены, и их отношение отрицательно.

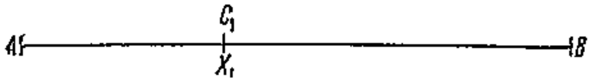
Из формулы (1) ясно, что если за начало отрезка взять точку B, а за конец точку A, то та же точка C разделит отрезок BA в отношении $\frac{1}{n}$.

Если точка C лежит в середине отрезка AB, то $n = 1$; если точка C лежит в бесконечности, то $n = -1$. В самом деле, представим себе, что точка C_1 удаляется вправо безгранично далеко, тогда отношение отрезков AC_1 и C_1B, противоположных по направлению и безгранично больших, будет приближаться в пределе к -1.

§ 24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ШКАЛЫ

Деление отрезка в данном отношении лежит в *основе построения шкалы функции* $f(x)$, называемой *проективной шкалой функции* $f(x)$.

Если нам дана функция $y = f(x)$, то проективная шкала этой функции строится на отрезке определенной длины AB на следующих основаниях: значение функции $f(x_1)$ рассматривается как отношение, в котором точка C_1, снабженная числовой пометкой x_1, делит отрезок AB, начало которого A (черт. 42).



Черт. 42.

Из этого определения вытекает способ построения проективной шкалы. Пусть дана функция $f(x)$. Составляем таблицу соответствующих значений функции и аргумента.

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Затем на отрезок AB произвольной длины наносим точки $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ так, чтобы

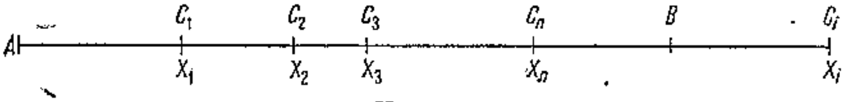
$$\frac{AC_1}{C_1B} = f(x_1); \quad \frac{AC_2}{C_2B} = f(x_2); \quad \frac{AC_3}{C_3B} = f(x_3); \quad \ldots; \quad \frac{AC_n}{C_nB} = f(x_n).$$

Разделив в указанных отношениях отрезок AB точками C_1, C_2, C_3, ..., Cn, мы снабжаем их соответственно числовыми пометками x_1, x_2, x_3, ..., x_n (черт. 43).

Если $f(x_i)$ имеет отрицательное значение, то точка C_i с пометкой x_i будет лежать на продолжении отрезка AB.

Полученная таким образом прямая с нанесенными на нее числовыми пометками называется *проективной шкалой функции* $f(x)$.

Таким образом на проективной шкале *значения аргумента* даются *числами* на ней написанными, а *значения функции* теми *отношениями*, в которых помеченные точки делят тот отрезок, на котором строится проективная шкала функции $f(x)$. Если $f(x) = x$, то проективная шкала функции $f(x)$ в этом случае будет называться просто проективной шкалой. В последующем мы будем иметь либо «проективную шкалу функции», либо просто «проективную шкалу».



Черт. 43.

Замечание. Как мы увидим ниже, проективная шкала функции $f(x)$ является центральной проекцией функциональной шкалы функции $f(x)$, а просто проективная шкала является центральной проекцией равномерной шкалы.

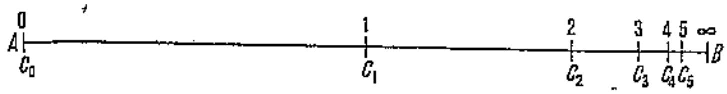
Пример. Построим проективную шкалу функции $f(x) = x^2$.

Составим прежде всего таблицу соответствующих значений аргумента и функции:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Далее возьмем произвольной длины отрезок AB, в котором примем A за начало, а B за конец.

Затем найдем точки C_0, C_1, C_2, C_3, ..., C_{10}, делящие отрезок AB так, чтобы $\frac{AC_0}{C_0B} = 0$; $\frac{AC_1}{C_1B} = 1$; $\frac{AC_2}{C_2B} = 4$; $\frac{AC_3}{C_3B} = 9$; ...; $\frac{AC_{10}}{C_{10}B} = 100$.



Черт. 44.

Из чертежа видно, что точка C_0 совпадает с началом шкалы, C_1 будет серединой отрезка AB (черт. 44), а остальные точки по мере возрастания их числовых пометок сгущаются к концу шкалы. Нетрудно сообразить, что точка B должна иметь пометку ∞, так как $\frac{AB}{BB} = \frac{AB}{0} = \infty$.

Рассматривая чертеж этой проективной шкалы функции $f(x) = x^2$, мы видим, что ее преимущество перед функциональной шкалой в том, что для положительных значений $f(x)$ помеченные точки умещаются внутри отрезка AB, с другой же стороны, она имеет недостаток в том, что ее помеченные точки сгущаются к концу шкалы. От последнего недостатка можно избавиться введением нового понятия о коэфициенте проективной шкалы.

§ 25. КОЭФИЦИЕНТ ПРОЕКТИВНОЙ ШКАЛЫ

Для того чтобы разредить до некоторой степени числовые пометки проективной шкалы функции $f(x)$, мы предварительно умножим нашу функцию на некоторое отвлеченное число k, называемое *коэфициентом проективной шкалы*. Удачным выбором этого коэфициента мы достигнем того, что сгущенные точки разредятся на некоторых частях шкалы, длина же шкалы останется неизменной.

Умножив нашу функцию на коэфициент k, мы будем на отрезок AB наносить точки C_i, удовлетворяющие равенству

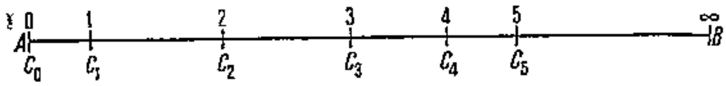
$$\frac{AC_i}{C_iB} = kf(x).$$

Построим теперь вторично проективную шкалу функции $y = x^2$ с коэфициентом k, равным 0,1. Точки C_0, C_1, C_2, ..., C_{10} разделят отрезок AB соответственно в таких отношениях:

$$\frac{AC_0}{C_0B} = 0{,}1 \cdot 0 = 0; \quad \frac{AC_1}{C_1B} = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1; \quad \frac{AC_2}{C_2B} = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4; \ldots$$

$$\ldots; \quad \frac{AC_{10}}{C_{10}B} = 0{,}1 \cdot 100 = 10.$$

Сравнивая чертежи (44) и (45), мы видим, что помеченные точки на черт. 45 расположились относительно друг друга иначе, чем на черт. 44. Сгущенные точки разредились.



Черт. 45.

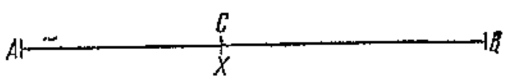
При построении функциональной шкалы мы видели, что изменение модуля тоже может влиять на большую или меньшую сгущенность точек, но там увеличение модуля влёчет за собой увеличение длины шкалы. Разреженность числовых пометок происходит за счет увеличения длины шкалы, характер расположения помеченных точек остается неизменным. Коэфициент проективной шкалы существенным образом отличается в этом отношении от модуля функциональной шкалы. *Введение коэфициента изменяет характер расположения помеченных точек, длина же шкалы остается неизменной.*

§ 26. УРАВНЕНИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ШКАЛЫ ФУНКЦИИ $f(x)$

Обратимся дальше к выводу уравнения проективной шкалы функции $f(x)$, построенной с коэфициентом k.

Пусть (черт. 46) длина отрезка $AB = a$ *мм*, и пусть точка C имеет числовую пометку x, откуда следует, что

$$\frac{AC}{CB} = kf(x). \qquad (1)$$



Черт. 46.

С другой стороны, $AC + CB = a$ или $CB = a - AC$. Подставляя значение CB в равенство (1), мы получаем:

$$\frac{AC}{a - AC} = kf(x).$$

Решая это равенство относительно AC, имеем:

$$AC = akf(x) - AC\,kf(x);$$

$$AC + AC\,kf(x) = akf(x);$$

$$AC = a \cdot \frac{kf(x)}{1 + kf(x)}.$$

Так как A начало шкалы и C помеченная точка шкалы с пометкой x, то, заменяя AC буквой s, мы получаем равенство:

$$s = a \cdot \frac{kf(x)}{1 + kf(x)},$$

которое и представляет собой *уравнение проективной шкалы функции* $f(x)$ *с коэфициентом* k.

Этим уравнением можно пользоваться для построения точек самой шкалы. Так, например, чтобы построить точку с пометкой 5, мы должны вычислить числовую величину выражения

$$a \cdot \frac{kf(5)}{1+kf(5)}.$$

Взять отрезок AC, равный по длине вычисленной величине выражения $a \cdot \frac{kf(5)}{1+kf(5)}$ и отложить его от начала A. Конец отрезка C нужно снабдить пометкой 5.

Отсюда ясно, что проективную шкалу функции $f(x)$ с коэфициентом k мы можем построить как функциональную шкалу функции

$$F(x) = \frac{kf(x)}{1+kf(x)} \tag{V}$$

с модулем a, где a — число миллиметров в отрезке AB.

Для построения функциональной шкалы функции $F(x)$ иногда проще бывает вычислять отрезок BC, для которого можно получить формулу.

В силу того что

$$BC = AB - AC, \quad BC = a - \frac{akf(x)}{1+kf(x)} = a \cdot \frac{1}{1+kf(x)}.$$

По этой формуле отрезок BC вычисляется проще, чем отрезок AC.

Пример. Построить этим последним способом проективную шкалу функции $f(x) = x^2$, откладывая на прямой AB вычисленные заранее отрезки BC_i. Коэфициент проективной шкалы примем равным 0,1; длину отрезка AB, а вместе с тем и модуль функциональной шкалы — равным 200 *мм*. Функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \frac{0{,}1\,x^2}{1+0{,}1\,x^2}.$$

Вычислим отрезки $BC_0, BC_1, BC_2, \ldots, BC_{10}$, соответствующие значениям x: 0, 1, 2, ..., 10 по формуле:

$$BC = 200 \cdot \frac{1}{1+0{,}1\,x^2}.$$

$$BC_0 = 200 \text{ мм}; \quad BC_1 \approx 182 \text{ мм}; \quad BC_2 \approx 143 \text{ мм}; \quad \ldots; \quad BC_{10} \approx 18{,}2 \text{ мм}.$$

Чертеж в точности совпадает с черт. 45, если в них обоих длина отрезка a останется одна и та же.

§ 27. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ШКАЛЫ ФУНКЦИИ $f(x)$

Графический способ построения проективной шкалы функции выясняет, почему эта шкала называется проективной шкалой.

В самом деле, пусть нам требуется построить проективную шкалу функции $f(x)$ с коэфициентом k геометрическим путем.

Для этой цели мы берем отрезок AB (черт. 47), на котором эта шкала должна быть построена, и из начала и конца его проводим под произвольным углом две параллельные прямые (x) и (y).

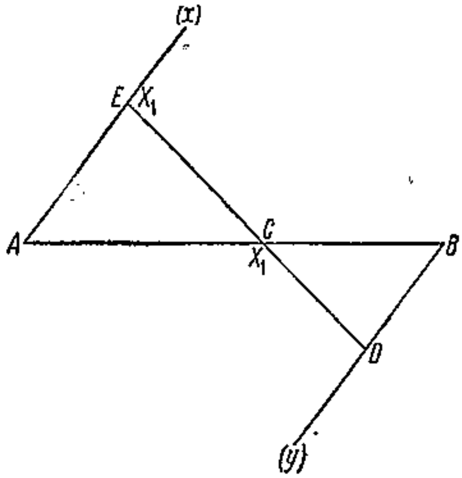
На прямой (x) строим функциональную шкалу функции $f(x)$ с началом в точке A и модулем, равным m; на прямой (y) откладываем отрезок BD, равный $\frac{m}{k}$, где m — модуль шкалы $f(x)$, а k — коэфициент проективной шкалы.

Пусть точка E шкалы, построенной на прямой (x), имеет пометку x_1. Если мы соединим прямой линией точку E прямой (x) с точкой D прямой (y), то точка пересечения этой прямой с AB определит на AB точку C проективной шкалы функции $f(x)$, носящей пометку x_1.

В самом деле, из чертежа видно, что треугольник AEC подобен треугольнику CBD, следовательно,

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{CB}.$$

Заменяя AE через $mf(x_1)$, BD через $\frac{m}{k}$, мы получим $\frac{AC}{CB} = \frac{mf(x_1)}{m} \cdot k = kf(x_1)$, т. е. точка C делит отрезок AB в отношении $kf(x_1)$, а потому она, действительно, является точкой проективной шкалы функции $f(x)$ с коэфициентом k и с пометкой x_1.

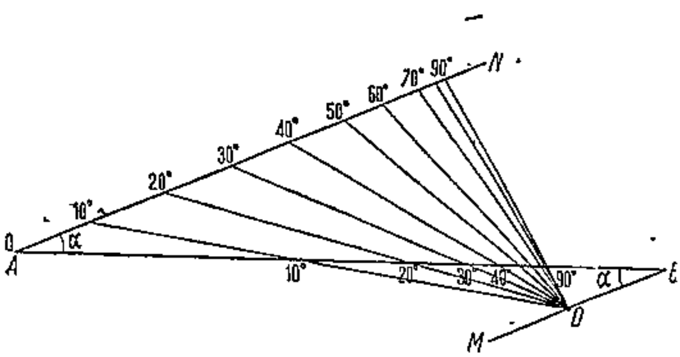


Черт. 47.

Отсюда ясно, что все помеченные точки проективной шкалы функции $f(x)$ с коэфициентом k на прямой AB мы можем получить, проектируя из точки D, как из центра, помеченные точки функциональной шкалы $f(x)$ на прямую AB. Какие бы прямые AM и BN, параллельные между собой, мы ни провели, т. е. если мы повторили то же построение, точка C с пометкой x_1 на проективной шкале останется той же самой, так как точка C делит отрезок AB в постоянном отношении, равном $kf(x_1)$.

Для того случая, когда $f(x) = x$, функциональная шкала обратится в равномерную, а шкала на прямой AB в просто проективную шкалу, и, таким образом, просто проективная шкала будет проекцией равномерной шкалы.

Пример. Построить геометрически проективную шкалу функции $f(x) = \sin x$ с коэфициентом k, равным 5, на отрезке AB, равном 250 *мм*.



Черт. 48.

Возьмем отрезок AB (черт. 48) и в концах его под произвольным углом проведем две параллельные прямые AN и BM; на прямой AN от точки A, как от начала, построим шкалу функции $f(x) = \sin x$ с модулем, равным 200 *мм*, и с интервалом изменения x от 0 до 90°. При построении шкалы синусов даем x последовательные значения, разнящиеся на 10°. Значения синусов мы берем из таблицы натуральных тригонометрических величин.

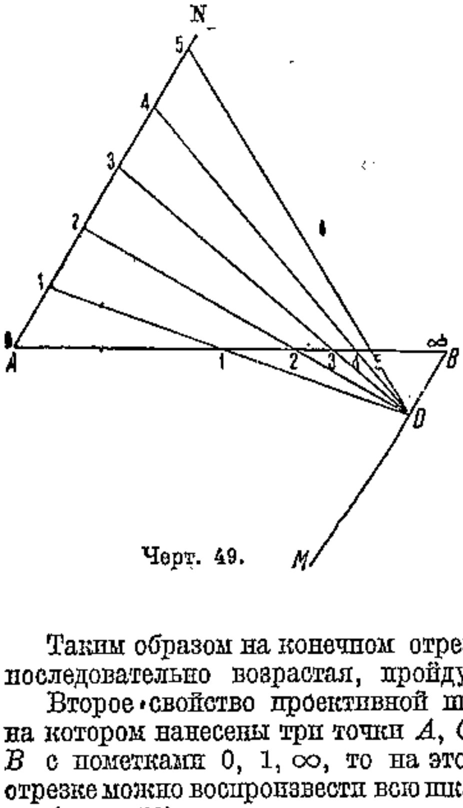
На прямой BM откладываем отрезок BD, равный $\frac{m}{k} = \frac{200}{5} = 40$ *мм*. Из точки D проектируем, как из центра, помеченные точки шкалы синусов на отрезок AB.

На отрезке AB мы получим, таким образом, проективную шкалу функции $f(x) = \sin x$ с коэфициентом k, равным 5.

Ту же шкалу мы имеем право построить согласно формуле (V) § 26, как функциональную шкалу функции $F(x)=\frac{5\sin x}{1+5\sin x}$, построенную на прямой AB с началом в точке A и модулем, равным 250.

§ 28. ПРОСТО ПРОЕКТИВНАЯ ШКАЛА

Мы уже говорили, что если функция $f(x)=x$, то мы получаем на прямо (x) равномерную шкалу и, проектируя эту равномерную шкалу из точки D прямой (y) на отрезок AB, получаем «просто проективную шкалу» (черт. 49).



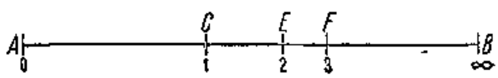
Черт. 49.

Будем называть ее проективной шкалой.

Модуль равномерной шкалы и коэфициент проективной шкалы так же как и отрезок AB, могут быть избираемы по произволу.

Проективная шкала обладает некоторыми замечательными свойствами, которые были известны, правда, в иной формулировке, еще древним геометрам.

Первое замечательное свойство этой шкалы состоит в том, что на конечном отрезке



Черт. 50.

прямой AB найдутся все точки с пометками от 0 до ∞.

В самом деле, мы видим из чертежа, что точка A имеет пометку 0, а точка B пометку ∞, так как луч DB, как параллельный лучу AN, встретит его в бесконечности.

Таким образом на конечном отрезке AB найдутся все точки, пометки которых, последовательно возрастая, пройдут весь ряд чисел от 0 до ∞.

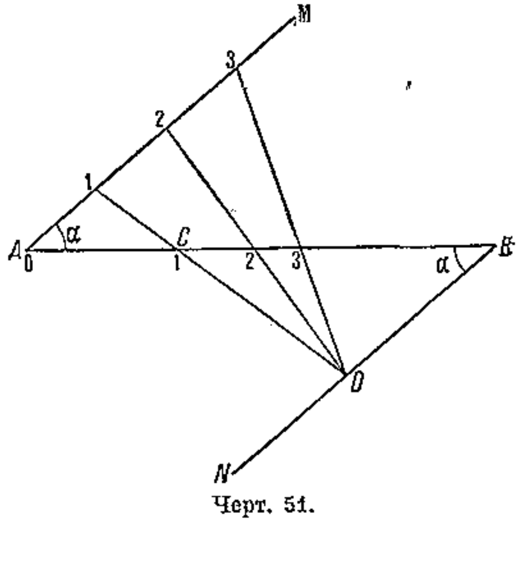
Второе свойство проективной шкалы состоит в том, что если дан отрезок, на котором нанесены три точки A, C, B с пометками 0, 1, ∞, то на этом отрезке можно воспроизвести всю шкалу (черт. 50).

В самом деле, мы знаем, что $\frac{AC}{CB}=k\cdot 1$.

Чтобы найти остальные точки E, F с пометками 2, 3, ..., нужно делить отрезок AB в отношении $2k$, $3k$,... Очевидно k будет коэфициентом проективной шкалы, он определяется положением точки C на отрезке AB.

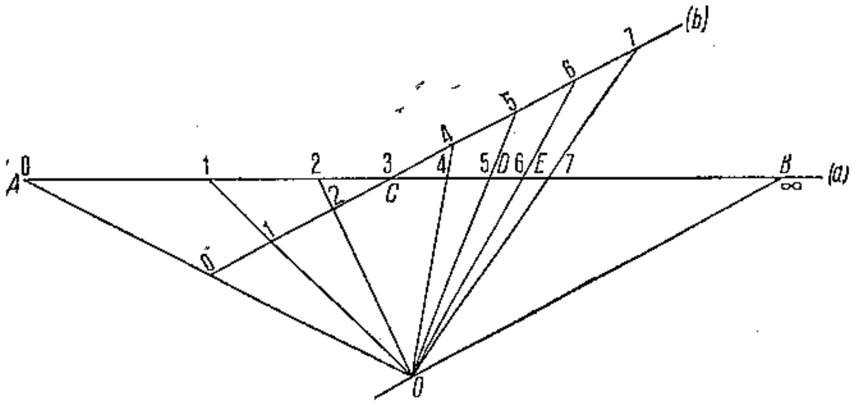
Но если даны три точки проективной шкалы A, C, B с пометками 0, 1, ∞, то построение всей шкалы можно произвести и геометрическим путем.

Через точку A (черт. 51) проводим прямую AM, наклоненную под произ-



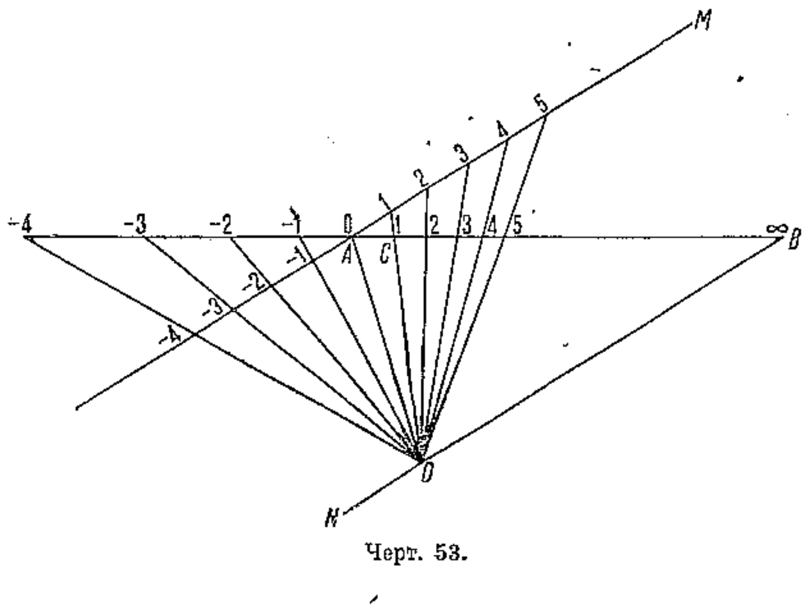
Черт. 51.

вольным углом α к AB, и наносим на ней равномерную шкалу с произвольным масштабом, имеющую в точке A пометку 0. Из точки B проведем прямую BN, параллельную AM, на которой на основании предыдущего должен лежать центр проекции — точка D.



Черт. 52.

Чтобы найти эту точку D, соединяем прямой точки с пометками 1 проективной и равномерной шкал; прямая, соединяющая эти точки, пересечет прямую BN в искомом центре D. Остается из этого центра спроектировать все точки равномерной шкалы на прямую AB.



Черт. 53.

Задача 1. Построить на прямой (a) проективную шкалу, если известны три любые помеченные точки этой шкалы C, D, E с пометками, например, 3, 5, 6 (черт. 52).

Через точку C проводим произвольную прямую (b) и наносим на ней равномерную шкалу так, чтобы точка C этой шкалы имела пометку 3. Масштаб берем произвольный, сообразуясь с размерами чертежа. Проводим две прямые, соединяющие точки с одинаковыми пометками обеих шкал 5 и 5; 6 и 6, и продолжаем их до пересечения в точке O Точка O будет центром проекции. Проектируя из точки O все помеченные точки прямой (b) на прямую (a), получим на ней проективную шкалу. Начало ее A будет проекцией точки с пометкой 0 равномерной шкалы, а конец B, имеющий пометку ∞, получим, если проведем из точки O прямую, параллельную (b), и продолжим эту параллель до пересечения с прямой (a) в в точке B, пометка которой и будет ∞.

Задача 2. На проективной шкале даны три ее помеченные точки A, C, B с пометками $0, 1, \infty$.

Построить точки проективной шкалы, имеющие отрицательные пометки.

Решение. Через точку A (черт. 53) проведем прямую AM, наклоненную под некоторым углом к отрезку AB, а из точки B — параллельную ей прямую BN. На прямой AM от точки A, как от начала, строим равномерную шкалу как с положительными, так и с отрицательными пометками.

Чтобы найти на прямой BN точку D — центр проекции, соединяем точки с пометками 1 обеих шкал и продолжаем эту прямую до пересечения в точке D с прямой BN. Проектируя из точки D все точки равномерной шкалы на прямую AB, мы увидим, что все точки с положительными пометками расположатся внутри отрезка AB, а точки с отрицательными пометками — на его продолжении.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить шкалу функции $y = \frac{1}{8}x^3 - 5$ на отрезке AB, равном 250 *мм*, считая, что x изменяется в пределах от 1 до 5. Поставить пометку в начале шкалы.

2. На прямой нанесена равномерная шкала функции $f(x) = x$ с началом в точке A (A имеет пометку 0) и с модулем m. Шкалу какой функции $f_1(x)$ будет представлять та же шкала, если за ее начало принять точку с пометкой 5, а модуль принять равным m?

3. Дана равномерная шкала; в начале шкалы стоит пометка -3, модуль шкалы равен 2. Точка с пометкой -2 находится на расстоянии 6 *мм* от начала шкалы. Какую функцию изображает эта шкала?

4. На прямой построена шкала функции $y = 2x - 3$ с модулем 5. Какую функцию будет изображать та же шкала, если за начало принять точку с пометкой 2, а модуль шкалы взять равным 3?

5. На равномерной шкале поставлены две точки A и B с пометками 2 и 5, находящиеся на расстоянии 30 *мм* друг от друга; модуль шкалы равен 2. Найти уравнение линейной функции, которая дается этой шкалой.

6. Для шкалы квадратов взят масштаб в 9 *мм*. Какой масштаб нужно взять для шкалы кубов для того, чтобы точки с пометкой 3 находились на одинаковых расстояниях от начала на обеих шкалах?

7. Какой масштаб нужно выбрать для построения шкалы функции $f(x) = \sqrt{x}$, если шкала должна начинаться с пометки 25, а кончаться пометкой 49 и иметь в длину 15 *см*?

8. Строим шкалу функции $f(x)$. Шкалу какой функции будет представлять эта шкала после поворота ее на 180° около начала?

9. Даны две функциональные шкалы двух различных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Масштаб для первой шкалы равен m_1, для второй m_2. Точка с пометкой a первой шкалы и точка с пометкой b второй шкалы находятся на одинаковом расстоянии от начала шкалы. Выразить этот факт формулой.

10. Построить шкалу функции $f(x) = 4 \lg x + 5$.

11. Если повернуть логарифмическую шкалу около точки с пометкой 5 на 180° и принять эту точку за начало новой шкалы, то шкалу какой функции $f_1(x)$ даст эта новая шкала при модуле вдвое меньшем прежнего?

12. Дан прямоугольный треугольник ACB; на катетах AC и CB нанесены логарифмические шкалы с началом в точке C. Масштаб первой шкалы равен m_1, масштаб второй шкалы $m_2 = \frac{m_1}{3}$. Определить углы треугольника, если точка A имеет пометку 3, а точка B — пометку 27.

13. На сторонах прямого угла нанесены шкалы функций $f_1(u) = \sqrt{\lg u}$ и $f_2(v) = \sqrt{\lg v}$ с одним и тем же началом в вершине угла и одинаковым модулем m. На первой стороне угла взяты две точки A и C с пометками u_1 и u_2, на второй стороне две точки с пометками v_1 и v_2. Доказать, что если $u_1 v_1 = u_2 v_2$, то отрезок $AB = CD$. Как, пользуясь циркулем, выполнить умножение и деление на этом чертеже?

14. Даны две логарифмические шкалы: одна от 6 до 50, другая от 300 до 1200 одинакового масштаба (200 *мм*). Вычислить разницу в длине этих шкал.

15. Почему отрезок логарифмической шкалы, заключенный между точками с пометками 2 и 7, равен отрезку ее, заключенному между точками с пометками 1, и 3,5?

16. $f(x) = x$. Построить геометрически шкалу функции $F(x) = \frac{x}{x+1}$.

17. Построить проективную шкалу функции $f(x) = 3x$ с коэфициентом $= \frac{2}{3}$.

18. Построить шкалу функции $F(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$.

19. Даны три помеченные точки 2, 3 и 5 проективной шкалы. Геометрически построить всю шкалу.

20. Построить шкалу функции $F(x) = \frac{7}{x}$, как проективную.

21. Построить шкалу функции $F(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

Объяснить, почему помеченные точки шкалы функции $F(x)$ располагаются симметрично относительно точки с пометкой 45°.

НОМОГРАММЫ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМ

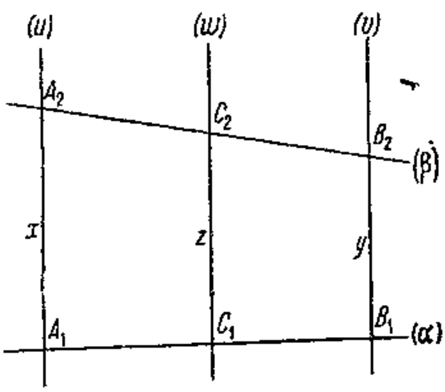
Глава IV

НОМОГРАММЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ

§ 29. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Возьмем три параллельные прямые (u), (w), (v) и нанесем на них функциональные шкалы трех функций от трех переменных u, v, w — $f_1(u)$, $f_3(w)$, $f_2(v)$ (черт. 54) с модулями m_1, m_3, m_2.

Пересечем все три шкалы двумя произвольными прямыми (α) и (β); назовем точки пересечения прямых (u), (w), (v) с прямой (α) буквами A_1, C_1, B_1, а точки пересечения тех же прямых с прямой (β) буквами A_2, C_2, B_2.



Черт. 54.

Пусть пометки точек A_1, C_1, B_1 на соответствующих шкалах будут u_1, w_1, v_1, а пометки точек A_2, C_2, B_2 в свою очередь u_2, w_2, v_2.

Третья прямая (w) проведена так, что она делит расстояние между прямыми (u) и (v) в отношении $b : a$, следовательно,

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{b}{a}.$$

Если обозначить длину отрезков A_1A_2, C_1C_2 и B_1B_2 через x, z и y, то на основании решения задачи, разобранной нами в главе I (§ 10), мы можем написать, что

$$ax + by = (a + b)z. \qquad \text{(A)}$$

Длина отрезка x, как расстояние между двумя помеченными точками шкалы функции $f_1(u)$ с пометками u_1 и u_2, выразится так:

$$x = m_1[f_1(u_2) - f_1(u_1)];$$

аналогично

$$y = m_2[f_2(v_2) - f_2(v_1)]$$

и

$$z = m_3[f_3(w_2) - f_3(w_1)].$$

Если мы при нанесении шкал выберем модули m_1, m_2, m_3 так, чтобы $m_1 = \frac{1}{a}$; $m_2 = \frac{1}{b}$; $m_3 = \frac{1}{a+b}$, и подставим значения x, y, z с такими модулями в формулу (A), мы получим равенство:

$$f_1(u_2) - f_1(u_1) + f_2(v_2) - f_2(v_1) = f_3(w_2) - f_3(w_1). \qquad (1)$$

Так как положение прямой β не зависит от положения прямой α, то мы можем считать прямую α фиксированной, а прямую β произвольной и вместо пометок u_2,

v_2, w_2 поставить произвольные пометки u, v, w, т. е. опустить индексы; тогда мы получим уравнение из равенства (1):

$$f_1(u) - f_1(u_1) + f_2(v) - f_2(v_1) = f_3(w) - f_3(w_1). \tag{2}$$

Если пометки u_1, v_1, w_1 выбраны так, что удовлетворяется соотношение:

$$f_1(u_1) + f_2(v_1) = f_3(w_1),$$

то уравнение (2) примет более простой вид:

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w). \tag{3}$$

Заметим в заключение, что отношение $\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{b}{a}$, причем $\frac{1}{a} = m_1; \frac{1}{b} = m_2$, следовательно

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{a}, \text{ т. е. } \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Резюмируя всё сказанное, мы можем притти к следующей основной теореме.

Если три параллельные шкалы трех функций $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$, из которых средняя шкала функции $f_3(w)$ делит расстояние между крайними шкалами в отношении $b : a$, а модули m_1, m_2, m_3 связаны между собой так, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{a} \text{ и } \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3},$$

то если существует хоть одна прямая, пересекающая три шкалы в трех точках, пометки которых удовлетворяют уравнению $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$, то это же будет справедливо и для любой секущей прямой.

§ 30. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВИДА $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$.

Пусть u изменяется в пределах от u_1 до u_2, а v — в пределах от v_1 до v_2.

Построение шкал начинается с выбора модуля шкалы. Модуль зависит от длины шкалы, а, кроме того, мы стремимся к тому, чтобы шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ были одинаковой длины (последнее условие не является необходимым). Длину L шкал этих функций мы выбираем произвольно, исходя из желаемого размера чертежа, но, выбрав длину, мы тем самым определяем и величину модуля.

В самом деле, если мы для функции $f_1(u)$ пределы изменения переменного u берем от u_1 до u_2, то согласно § 15 главы II (III):

$$m_1 = \frac{L}{f_1(u_2) - f_1(u_1)};$$

аналогично

$$m_2 = \frac{L}{f_2(v_2) - f_2(v_1)},$$

так как пределы изменения v заключаются в границах v_1 и v_2.

Если m_1 и m_2 получат дробные значения, то мы их округлим до ближайшего целого числа.

Длины обеих шкал вследствие такого округления будут несколько отличаться друг от друга и ни одна из них не будет в точности равна L.

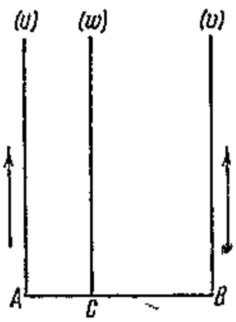
После того как модули нами высчитаны, мы приступаем к построению номограммы. Для этой цели мы берем отрезок AB произвольной длины и делим его в точке C на две части AC и CB так, чтобы $\frac{AC}{CB} = \frac{m_1}{m_2}$. В точках A, C, B мы проводим затем три параллельные прямые (u), (w), (v) — носители шкал для функций переменных u, w, v.

При этом построении неизбежно возникает вопрос, как расположить отрезок AB в плоскости чертежа и под каким углом проводить к нему параллели (u), (w), (v).

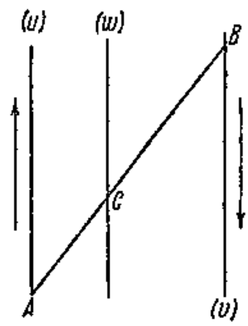
Теоретически отрезок AB можно проводить как угодно и параллельные прямые можно наклонять к нему под любым углом; для удобства пользования номограммой нужно различать два случая.

Если функции $f_1(u)$ и $f_2(v)$ обе принимают положительное значение, то отрезок AB располагают горизонтально и три прямые (u), (v), (w) проводят перпендикулярно к нему (черт. 55).

Если же функция $f_1(u)$ принимает положительные значения, а функция $f_2(v)$—отрицательные значения, то отрезок AB помещают наклонно к параллельным прямым (черт. 56). В дальнейшей части построение номограммы для обоих случаев тождественно и состоит в следующем. На прямых (u) и (v) строят шкалы



Черт. 55.



Черт. 56.

функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ с заранее выбранными модулями m_1 и m_2. На основании способов построения функциональной шкалы, данных в главе II, при построении этих шкал пользуются уравнением шкалы в виде:

$$S = m_1[f_1(u) - f_1(u_1)] \quad \text{[для шкалы функции } f_1(u);]$$
$$[S = m_2[f_2(v) - f_2(v_1)] \quad \text{для шкалы функции } f_2(v),$$

причем при положительных значениях S отрезки откладываются вверх от прямой AB, при отрицательных — вниз.

После того как эти две шкалы построены, переходят к построению шкалы функции $f_3(w)$.

Модуль этой шкалы в силу основной теоремы, данной в § 29, определяется из соотношения $\frac{1}{m_3} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, из которого $m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Получившееся значение для m_3 нельзя округлять, как мы округляли значения для m_1 и m_2; в противном случае мы получим неправильную номограмму, так как нарушим соотношение $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3}$, лежащее в основании ее построения.

Мы знаем из теории функциональной шкалы, что для построения шкалы функции $f_3(w)$, кроме модуля, нужно знать еще одну помеченную точку этой шкалы.

Чтобы получить эту помеченную точку шкалы функции $f_3(w)$, обычно поступают так: в уравнении $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ дают переменным u и v такие значения u_k и v_k, чтобы соответствующее значение w_k выражалось целым числом. Затем проводят прямую через точки с пометками u_k и v_k шкал (u) и (v), которая пересечет прямую (w) в некоторой точке; эту точку снабжают пометкой w_k.

и, зная одну помеченную точку шкалы $f_3(w)$ и модуль, строят всю шкалу. При построении этой шкалы пользуются уравнением шкалы в виде:

$$S = m_3 [f_3(w) - f_3(w_k)].$$

Так как существует прямая, которая пересекает шкалы (u), (v), (w) в трех точках с пометками u_k, v_k, w_k, удовлетворяющими уравнению $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$, то в силу основной теоремы то же соотношение будет справедливо и для любой секущей прямой: пометки трех точек пересечения ее со шкалами (u), (v), (w) будут удовлетворять уравнению:

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w). \qquad \text{(VI)}$$

Способ пользования этой номограммой совершенно очевиден.

Замечание 1. При определении одной помеченной точки шкалы $f_3(w)$ мы могли бы, очевидно, определить пометку точки C из уравнения:

$$f_1(u_1) + f_2(v_1) = f_3(w_1).$$

Эта пометка w_1 заменила бы собой пометку w_k.

Если мы берем точку с пометкой w_k вместо точки C с пометкой w_1, то это делается лишь для облегчения построения шкалы.

Замечание 2. В том случае, когда функции $f_1(u)$ и $f_2(v)$ противоположны по знаку, можно не проводить наклонной к прямым (u) и (v) прямой AB. В самом деле, из самого построения номограммы видно, что прямая AB была нужна для того, чтобы провести среднюю прямую (w), делящую расстояние между крайними шкалами в отношении $\frac{m_1}{m_2}$. Совершенно ясно, что для той же цели можно взять любую прямую, перпендикулярную к прямым (u) и (v), и разделить ее в указанном отношении.

Заметим в заключение, что ответную шкалу всегда лучше помещать между крайними прямыми и что прямые (u) и (v) не следует брать слишком близко друг к другу.

§ 31. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТОГО ЖЕ ВИДА

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$$

Чтобы сделать изложение более наглядным, построим геометрически номограмму из выравненных точек на параллельных шкалах для конкретного примера. В качестве примера возьмем формулу умножения:

$$w = u \cdot v.$$

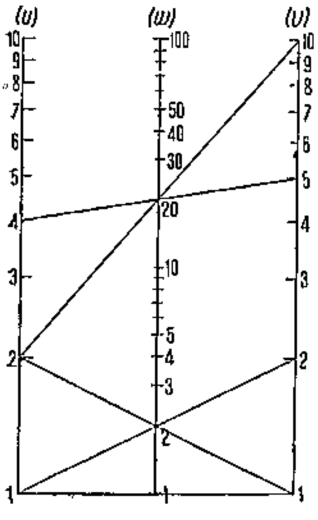
Прежде всего приведем ее к виду $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$; для этого прологарифмируем последнее равенство и получим:

$$\lg w = \lg u + \lg v.$$

Таким образом $f_1 = \lg u$; $f_2(v) = \lg v$; $f_3(w) = \lg w$.

На прямых (u) и (v) нанесем две произвольные логарифмические шкалы с различными модулями совершенно произвольными m_1 и m_2.

Чтобы построить геометрически третью шкалу, найдем сначала две ее помеченные точки. Если мы хотим найти точку шкалы w с пометкой 20, то мы можем соединить прямой сперва точки с пометками $u_1 = 4$, $v_1 = 5$; а затем точки с пометками $u_2 = 2$, $v_2 = 10$ обеих крайних шкал; эти две прямые дадут своим пересечением точку с пометкой 20 третьей шкалы. Чтобы найти носителя третьей шкалы, определим таким же образом вторую точку этой шкалы. Для этого соединим еще две пары точек, например $u_3 = 2$, $v_3 = 1$ и $u_4 = 1$, $v_4 = 2$. Пересечение этой пары прямых определит точку шкалы w с пометкой 2. Таким образом носитель шкалы переменного w прямая (w) двумя точками, лежащими на ней, вполне определится. Проведя эту прямую (черт. 57), мы можем повторить этот способ получения помеченных точек на ней и далее, а можем для геометрического построения помеченных точек шкалы (w) воспользоваться § 22 главы II.



Черт. 57.

В самом деле, если мы на чертеже воспроизведем нашу прямую (w) с двумя помеченными точками на ней и возьмем на параллельной ей прямой какую-либо готовую логарифмическую шкалу, хотя бы шкалу логарифмической линейки, то соединив точки их с одинаковыми пометками 20 и 20, 2 и 2, примем точку пересечения этих прямых O за центр проекций и спроектируем всю шкалу на нашу прямую (w) из этого центра O.

§ 82. ПРИМЕРЫ НОМОГРАММ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ

Пример 1. Формула:

$$D = 3{,}85\,(\sqrt{H} + \sqrt{h})$$

определяет D — дальность освещения маяком — в километрах в зависимости от H — высоты фонаря над уровнем моря и h — высоты наблюдателя над тем же уровнем.

Нужно построить номограмму этой формулы в предположении, что H меняется от 5 до 100 *м*, а h от 0 до 20 *м*.

В этой формуле

$$\frac{D}{3{,}85} = \sqrt{H} + \sqrt{h},$$

т. е.

$$f_1(H) = \sqrt{H};\quad f_2(h) = \sqrt{h};\quad f_3(D) = \frac{D}{3{,}85}.$$

Поэтому наша формула относится к тому виду, для которого может быть построена номограмма на параллельных шкалах.

Прежде всего мы должны определить модули m_1 и m_2 для шкал переменных H и h. Длину шкал возьмем одинаковой для шкал обеих переменных и, исходя из желательного размера чертежа, примем ее равной 137 *мм*.

Тогда

$$m_1 = \frac{137}{\sqrt{100} - \sqrt{5}} = 17{,}6,$$

так как H меняется в пределах от 5 до 100 *м*.

$$m_2 = \frac{137}{\sqrt{20}} = \frac{137}{2\sqrt{5}} = 30{,}7,$$

так как h меняется в пределах от 0 до 20.

Округляя эти масштабы, мы возьмем $m_1 = 18$, а $m_2 = 30$. Написав уравнение для шкалы функции переменного H в виде $S = 18(\sqrt{H} - \sqrt{5})$, мы производим вычисления по этой формуле, давая H последовательные значения, разнящиеся на 5 единиц.

$$S_5 = 18(\sqrt{5} - \sqrt{5}) = 0;$$

$$S_{10} = 18(\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 16{,}5;$$

$$S_{15} = 18(\sqrt{15} - \sqrt{5}) = 29{,}3;$$

. . . .

$$S_{95} = 18(\sqrt{95} - \sqrt{5}) = 135;$$

$$S_{100} = 18(\sqrt{100} - \sqrt{5}) = 137{,}9.$$

Точно так же поступаем для построения шкалы функции переменного h. Уравнение этой шкалы:

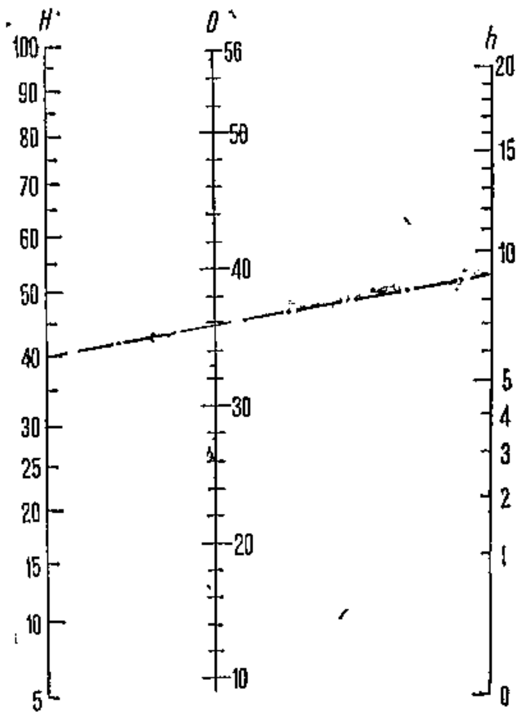
$$S = 30\sqrt{h}.$$

Шкала переменного D — равномерная шкала; ее можно определить путем пересечения двух пар прямых, соединяющих помеченные точки шкал h и H; определить таким образом носитель этой шкалы, две ее помеченные точки, и получить остальные точки проектированием данной равномерной шкалы (§ 31).

Но можно носитель этой шкалы построить сразу, зная, что он делит расстояние между параллельными шкалами (H) и (h) в отношении $m_1 : m_2 = 18 : 30$, а помеченную точку этой шкалы найти из уравнения.

Давая H и h минимальные значения 5 и 0, мы получим, что $D = 8{,}6$. Модуль этой шкалы будет $m_3 = \frac{18 \cdot 30}{48} = 11\frac{1}{4}$.

На чертеже 58 дана номограмма этой формулы.



Черт. 58.

Пример 2. Формула

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

представляет собой момент инерции кругового кольца относительно диаметра.

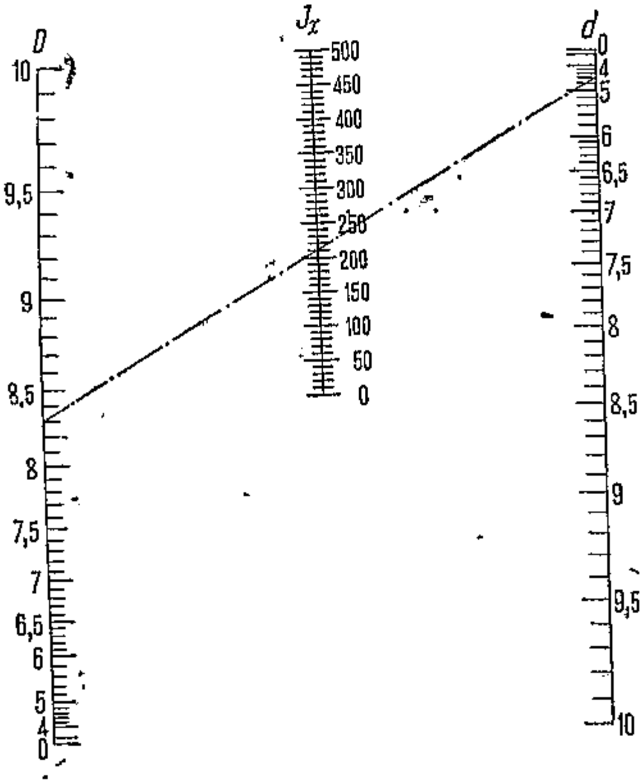
Для построения номограммы этой формулы на трех параллельных шкалах преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{I \cdot 64}{\pi} = D^4 - d^4,$$

т. е.

$$f_1(D) = D^4; \quad f_2(d) = -d^4; \quad f_3(I) = \frac{I \cdot 64}{\pi}.$$

Шкалы функций $f_1(D)$ и $f_2(d)$ будут противоположно направлены. Номограмма построена для значений d и D, меняющихся в пределах от 0 до 10.



Черт. 59.

На примерах покажем, как найти соответствующее значение I для $D > 10$ или $d > 10$.

На черт. 59 мы имеем номограмму этой формулы:

$$m_1 = m_2 = 0{,}0134.$$

Равномерная шкала для I построена с модулем m_3, определяемым из формулы:

$$m_3 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{2} = 0{,}0067.$$

На чертеже дана лишь положительная часть шкалы I в пределах изменения его от 0 до 500.

Пусть 1) $D = 83$; $d = 46$.

Берем на номограмме $D_1 = 8{,}3$; $d_1 = 4{,}6$. Находим $I \approx 210$. Очевидно, для нахождения нужного значения I его следует умножить на 10^4; $I \approx 210 \cdot 10^4$.

2) $D = 4{,}2$; $d = 3{,}1$.

Принимаем $D_1 = 8{,}4$; $d_2 = 6{,}2$ (пользоваться номограммой для значений, близких к 3, неудобно). Находим $I \approx 175$. Нужное значение $I \approx \frac{175}{16} \approx 10{,}9$.

§ 33. УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ МОГУТ БЫТЬ ПРИВЕДЕНЫ К ВИДУ $F_1(u) + F_2(v) = F_3(w)$.

1°. Уравнение $f_1(u) \cdot f_2(v) = f_3(w)$.

Большое число формул, встречающихся в прикладных науках, принадлежит к этому типу. Чтобы привести это уравнение к виду (VI), нужно его почленно прологарифмировать:

$$\lg f_1(u) + \lg f_2(v) = \lg f_3(w);$$

таким образом

$$F_1(u) = \lg f_1(u); \quad F_2(v) = \lg f_2(v); \quad F_3(w) = \lg f_3(w).$$

2°. Уравнение $f_1(u) \cdot f_2(v) \cdot f_3(w) = A$, где A — постоянное.

Напишем, что $f_1(u) \cdot f_2(v) = \frac{A}{f_3(w)}$ и прологарифмируем обе части:

$$\lg f_1(u) + \lg f_2(v) = \lg\left(\frac{A}{f_3(w)}\right);$$

уравнение приведено к виду (VI).

3°. Уравнение $f_1(u)\cdot f_3(w)+f_2(v)\cdot f_3(w)=f_1(u)\cdot f_2(v)$.

Разделив обе части равенства на произведение $f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w)$, мы получим:

$$\frac{1}{f_1(u)}+\frac{1}{f_2(v)}=\frac{1}{(f_3 w)},$$

т. е. уравнение вида (VI).

4°. Уравнение $f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w)$, откуда $-f_3(w)=$ $=\frac{f_1(u)+f_2(v)}{1-f_1(u)f_2(v)}$,

затем произведем замену переменных:

$$f_1(u)=\operatorname{tg}\alpha;\quad f_2(v)=\operatorname{tg}\beta;\quad -f_3(w)=\operatorname{tg}\gamma;$$

отсюда

$$-f_3(w)=\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha+\beta);$$

$$\alpha+\beta=\gamma+n\pi;$$

α есть функция u, β — функция v и γ — функция w, т. е. мы приходим к виду (VI).

5°. Уравнение вида:

$$f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=Af_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w),$$

где A — постоянное положительное число.

Чтобы привести это уравнение к виду, который мы рассматривали в 4°, сделаем подстановку:

$$af_1(u)=g_1(u);\quad af_2(v)=g_2(v);\quad af_3(w)=g_3(w),$$

где a — постоянное, которое определится ниже.

Данное уравнение после этой подстановки примет вид:

$$\frac{g_1(u)+g_2(v)+g_3(w)}{a}=\frac{Ag_1(u)\,g_2(v)\,g_3(w)}{a^3},$$

или

$$a^2[g_1(u)+g_2(v)+g_3(w)]=Ag_1(u)\,g_2(v)\,g_3(w);$$

полагая $a=\sqrt{A}$, мы вновь приходим к уравнению:

$$g_1(u)+g_2(v)+g_3(w)=g_1(u)\,g_2(v)\,g_3(w),$$

которое было рассмотрено в 4°.

Чтобы иметь возможность сделать указанную подстановку, необходимо, чтобы A было числом положительным.

6°. Уравнение вида

$$f_1(u)f_2(v)+f_2(v)f_3(w)+f_3(w)\cdot f_1(u)=A,$$

где A — положительное постоянное число.

Это уравнение можно привести к предыдущему виду.

В самом деле, разделим его почленно на произведение $f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w)$, получим:

$$\frac{1}{f_1(u)}+\frac{1}{f_2(v)}+\frac{1}{f_3(w)}=\frac{A\cdot 1}{f_1(u)}\cdot\frac{1}{f_2(v)}\cdot\frac{1}{f_3(w)},$$

а затем положим:

$$\frac{1}{f_1(u)}=g_1(u);\quad \frac{1}{f_2(v)}=g_2(v);\quad \frac{1}{f_3(w)}=g_3(w).$$

§ 34. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ ДЛЯ БОЛЕЕ СЛОЖНОЙ ФОРМУЛЫ [1]

Номограмма для определения падения напряжения в цепи переменного тока. Закон падения напряжения выражается сложной формулой:

$$x = \frac{e_r}{e_h} \cos\varphi_2 + \sqrt{1 - \left(\frac{e_r}{e_h}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\varphi_2}.$$

Эту формулу можно привести к такой простой формуле, для которой можно построить номограмму на параллельных шкалах.

Процентное падение напряжения y в замкнутой цепи тока с большой точностью вычисляется по формуле:

$$y = \frac{e_k}{E_1} x, \tag{1}$$

где

$$x = \frac{e_r}{e_h} \cos\varphi_2 + \frac{e_s}{e_h} \sin\varphi_2, \tag{2}$$

причем E_1 означает постоянное напряжение сети;
e_h » напряжение короткого замыкания;
e_r » ваттную потерю напряжения;
e_s » безваттную потерю »
$\cos\varphi_2$ » коэфициент мощности.

Венский проф. Эдлер дал геометрический способ построения x на миллиметровой бумаге с помощью циркуля и линейки по заданным e_k, e_r и $\cos\varphi_2$.

Эдлер исходит из того, что оба уравнения

$$\left(\frac{e_r}{e_h}\right)^2 + \left(\frac{e_s}{e_h}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

и

$$\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 = 1 \tag{4}$$

могут быть представлены кругом с радиусом, равным 1.

Он дает сперва геометрическое построение двух отрезков

$$\left(\frac{e_r}{e_h}\right) \cos\varphi_2 \text{ и } \left(\frac{e_s}{e_h}\right) \sin\varphi_2,$$

а затем графическим сложением этих последних получается величина x.

Но возможно вместо этих графических способов, осуществление которых приводит к построению очень большого числа линий, прибегнуть к номограмме.

Для того чтобы привести уравнение (2) к виду, для которого можно построить номограмму на параллельных шкалах, мы прибегаем к искусственному приему, а именно: мы делаем в уравнении (2) такую подстановку:

$$\frac{e_r}{e_h} = \cos\delta \tag{5}$$

и

$$x = \cos\alpha \tag{6}$$

Из уравнений (3) и (5) мы получаем:

$$\frac{e_s}{e_h} = \sqrt{1 - \left(\frac{e_r}{e_h}\right)^2} = \sin\delta.$$

[1] Журнал Elektrotechnische Zeitschrift, Heft 18, 1926, номограмма Ф. Вольфа.

Уравнение (2) перепишется так:

$$\cos\alpha = \cos\delta \cdot \cos\varphi_2 + \sin\delta \cdot \sin\varphi_2,$$

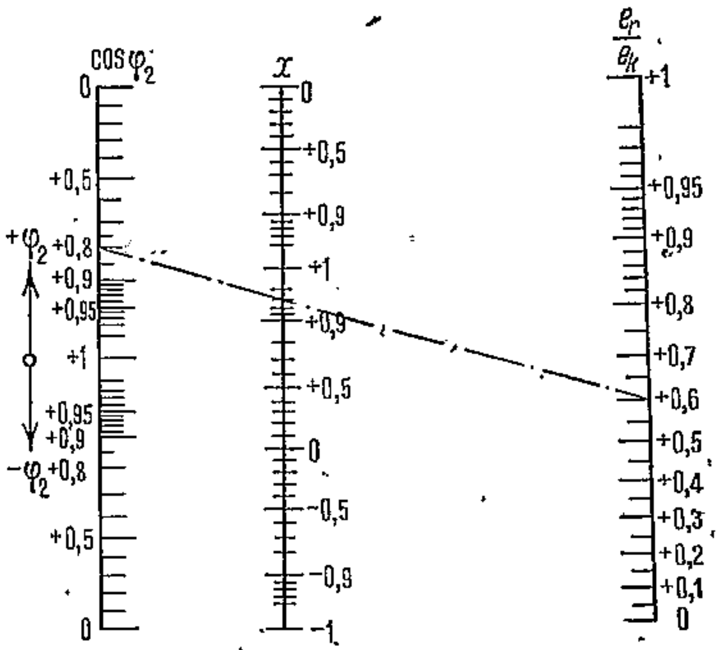
или

$$\cos\alpha = \cos(\delta - \varphi_2)$$

откуда

$$\pm\alpha = \delta - \varphi_2. \tag{7}$$

Уравнение (7) может быть представлено номограммой с тремя параллельными равномерными шкалами для переменных φ_2, α и δ; деления должны быть



Черт. 60.

помечены градусами. Пределы изменения для этих переменных на практике существуют такие: для δ от 0 до $+90°$, для φ_2 от -90 до $+90°$, а для α поэтому от -90 до $+180°$.

Если опустить пометки с градусными делениями, а около нанесенных штрихов равномерных шкал поставить соответствующие значения косинусов, то мы получим (черт. 60) номограмму формулы:

$$x = \frac{e_r}{e_k}\cos\varphi_2 + \frac{e_s}{e_h}\sin\varphi_2.$$

При отрицательном значении φ_2 номограмма может дать нам отрицательное значение падения напряжения, т. е. она даст увеличение напряжения.

Пример пользования номограммой. Найти по номограмме значение x для

$$E_1 = 2000\,v;\ \cos\varphi_2 = 0{,}8;\ e_r = 30\,v;\ e_k = 50\,v.$$

Прежде всего находим отношение:

$$\frac{e_r}{e_k}=\frac{30}{50}=0{,}6;$$

затем прикладываем линейку (на чертеже пунктирная линия) к точкам с пометкой 0,8 шкалы $\cos\varphi_2$ и с пометкой 0,6 шкалы $\frac{e_r}{e_k}$. Линейка пересечет шкалу x в точке, пометка которой 0,96 даст искомое значение x.

Процентное падение напряжения y, таким образом, будет:

$$y=\frac{50}{2000}\cdot 0{,}96=2{,}4\%.$$

Предлагаем написать уравнение шкал номограммы.

Глава V

НОМОГРАММЫ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ОДНОЙ НАКЛОННОЙ ШКАЛОЙ (z-НОМОГРАММА)

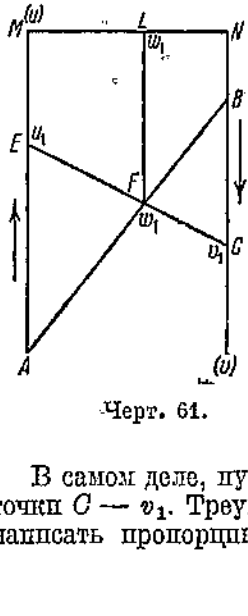
§ 35. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Номограммы с двумя параллельными и одной наклонной шкалой строятся для уравнений вида:

$$f_1(u)=f_2(v)\cdot f_3(w). \tag{VII}$$

По внешнему виду номограмма этого типа напоминает начертание буквы z, почему она и называется z-номограммой.

Строится z-номограмма следующим образом: через концы отрезка AB проводят две параллельные полупрямые (u) и (v), направленные в противоположные стороны (черт. 61), и, приняв точки A и B за начала шкал, строят на них шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ с произвольными модулями m_1 и m_2, причем положительные значения $f_1(u)$ откладывают вверх от точки A, а положительные значения функции $f_2(v)$ — вниз от точки B. Затем на отрезке AB наносят проективную шкалу функции $f_3(w)$ с коэфициентом $k=\frac{m_1}{m_2}$, принимая точку A за начало отрезка AB.



Черт. 61.

Этим заканчивается построение номограммы.

Такая номограмма принадлежит к номограммам из выравненных точек, так как нетрудно доказать, что пометки трех точек E, F, C всех трех шкал, лежащих на одной прямой, удовлетворяют уравнению

$$f_1(u)=f_2(v)\cdot f_3(w).$$

В самом деле, пусть пометка точки F — w_1, пометка точки E — u_1 и пометка точки C — v_1. Треугольник AEF подобен треугольнику BCF, и поэтому можно написать пропорцию:

$$\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{FB}.$$

Но $AE=m_1f_1(u_1)$; $BC=m_2f_2(v_1)$; а точка F делит отрезок AB согласно определению проективной шкалы (Гл. III § 24) так, что

$$\frac{AF}{FB}=kf_3(w_1)=\frac{m_1}{m_2}f_3(w_1).$$

Подставив в нашу пропорцию вместо каждого отношения равное ему, мы получим равенство:

$$\frac{m_1 f_1(u_1)}{m_2 f_2(v_1)} = \frac{m_1}{m_2} \cdot f_3(w_1),$$

или

$$f_1(u_1) = f_3(w_1) \cdot f_2(v_1),$$

т. е. то, что и требовалось доказать.

Относительно приведенного выше построения можно сделать несколько замечаний практического характера.

Замечание 1. Модули m_1 и m_2 теоретически можно выбирать совершенно произвольно, но практически их лучше выбирать так, чтобы длины шкал функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ были приблизительно одинаковы, что делает номограмму удобной для пользования.

Замечание 2. Функции $f_2(v)$ и $f_3(w)$ играют одинаковую роль в уравнении

$$f_1(u) = f_2(v) \cdot f_3(w).$$

Поэтому можно на отрезке AB построить проективную шкалу функции $f_2(v)$, а на прямой параллельной (u) шкалу функции $f_3(w)$. Но при том и другом способе построения нужно помнить, что начало отрезка AB всегда должно совпадать с началом функциональной шкалы для функции $f_1(u)$.

Замечание 3. Если мы проведем отрезок MN, перпендикулярный к параллельным прямым (u) и (v), (черт. 61), и, приняв точку M за начало отрезка, построим на нем проективную шкалу функции $f_3(w)$ с тем же коэфициентом k, то прямые, соединяющие точки с одинаковыми пометками обеих шкал, будут лежать на прямой, параллельной прямым (u) и (v), так как эти точки будут делить отрезки AB и MN в одинаковых отношениях.

Например проведем из точки F с пометкой w_1 прямую FL, параллельную (u) и (v), тогда пометка точки L должна быть w_1, так как

$$\frac{AF}{FB} = \frac{m_1}{m_2} f_3(w_1), \text{ а } \frac{AF}{FB} = \frac{ML}{LN}.$$

Это замечание полезно иметь в виду при построении z-номограммы, так как обычно номограмму чертят на миллиметровой бумаге, на горизонталях которой пометки наносить удобнее, чем на косо лежащих прямых.

Кроме того при построении проективной шкалы на отрезке AB по ее уравнению необходимо точно знать длину отрезка AB, которую, как мы увидим из дальнейшего, не всегда легко вычислить. Длину же отрезка MN мы вычисляем легко как расстояние между двумя параллельными прямыми. Шкалу, построенную на MN, легко перенести на отрезок AB, в особенности если чертеж номограммы делается на миллиметровой бумаге.

§ 36. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ z-НОМОГРАММЫ

Геометрический способ построения z-номограммы немногим отличается от геометрического способа построения номограммы на параллельных шкалах и, пожалуй, даже проще его, так как носитель проективной шкалы в большинстве случаев дается заранее.

Поясним наш способ на примере: построим z-номограмму для той же формулы, для которой мы ее строили на параллельных шкалах, именно для формулы умножения:

$$u = v \cdot w.$$

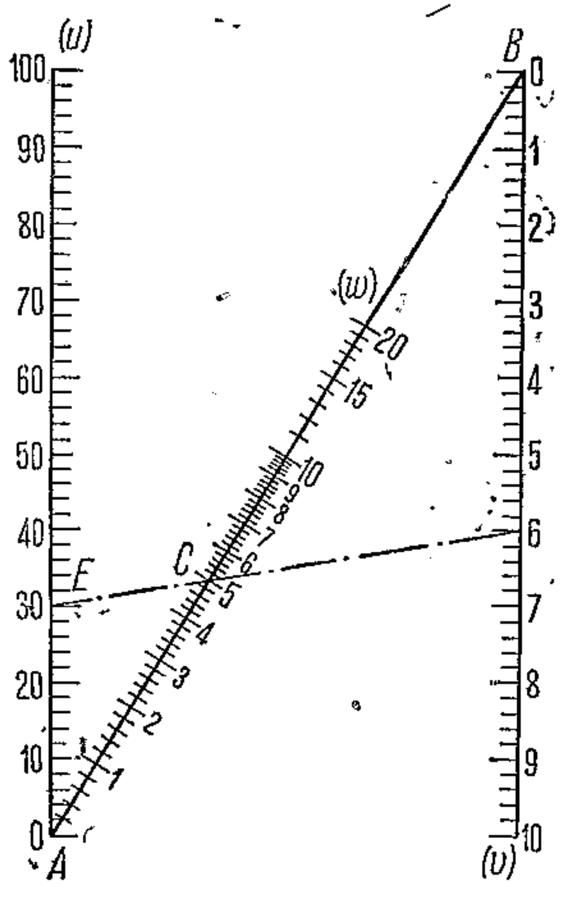
На параллельных прямых (u) и (v) наносятся шкалы функций $f_1(u) = u$ и $f_2(v) = v$ (черт. 62) с произвольными модулями m_1 и m_2. На отрезке AB должна быть построена проективная шкала функции $f_3(w) = w$ с коэффициентом $k = \frac{m_1}{m_2}$, т. е. просто проективная шкала. Покажем, как получать геометрически точки этой шкалы с определенными числовыми пометками. Определим, например, построением положение точки C с пометкой 5. Три числа 30, 5 и 6 удовлетворяют уравнению $u = v \cdot w$, следовательно, точки трех шкал, имеющие указанные числовые пометки, должны лежать на одной прямой.

Находим на шкале (u) точку E с пометкой 30, а на шкале (v) точку F с пометкой 6 и соединяем эти точки прямой EF. Прямая EF пересечет отрезок AB в точке C, пометка которой должна быть равна 5. Определив таким же образом положение остальных помеченных точек проективной шкалы, мы получим номограмму, данную на черт. 62. Шкалы (u) и (v) на этом чертеже взяты одинаковой длины, а потому модуль m_1 в 10 раз меньше модуля m_2. Коэффициент проективной шкалы вследствие этого равен $\frac{m_1}{m_2} = 0{,}1$.

Если строить проективную шкалу на отрезке AB пользуясь ее уравнением, то это уравнение в данном случае будет:

$$S = a \frac{0{,}1x}{1 + 0{,}1x},$$

где a — длина отрезка AB, а точка A — начало шкалы.



Черт. 62.

§ 37. ПОСТРОЕНИЕ z-НОМОГРАММЫ ДЛЯ ТОГО СЛУЧАЯ, КОГДА НАЧАЛА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛ НЕ ПОМЕЩАЮТСЯ НА ЧЕРТЕЖЕ

В технических формулах с тремя переменными величинами, приводимых к виду:

$$f_1(u) = f_2(v) \cdot f_3(w),$$

переменные u и v изменяются в таких пределах $(u_1 - u_2)$ и $(v_1 - v_2)$, что при выборе соответствующих модулей m_1 и m_2 начала A и B шкал функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ не помещаются в пределах чертежа и прямую AB нельзя провести, непосредственно соединяя начала шкал. Таким образом возникает вопрос о том, как найти положение прямой AB и как вообще строить z-номограмму.

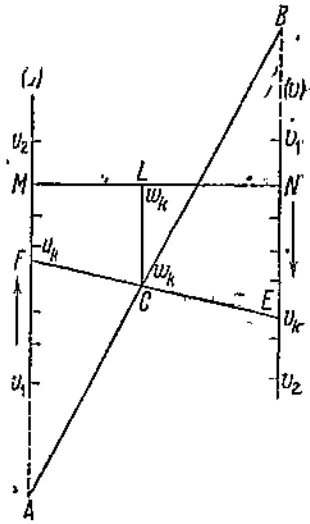
В этом случае правило построения номограммы вытекает из замечания 3, § 35; это правило состоит в следующем: выбирают модули m_1 и m_2, руководствуясь тем, что

$$m_1 = \frac{L}{f_1(u_2) - f_1(u_1)} \text{ и } m_2 = \frac{L}{f_2(v_2) - f_2(v_1)},$$

где L общая длина обеих параллельных шкал. Далее на две параллельные прямые (u) и (v) (черт. 63) наносят шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ в интервалах изменения переменных от u_1 до u_2 и от v_1 до v_2, причем направления возрастания пометок на обеих шкалах прямо противоположны (черт. 63). Для построения проективной шкалы функции $f_3(w)$ проводим прямую, перпендикулярную к обеим параллельным прямым (u) и (v), и строим на ней проективную шкалу функции $f_3(w)$ с коэфициентом $k=\frac{m_1}{m_2}$.

Согласно тому же примечанию 3, если точка L отрезка MN имеет пометку w_k, то на прямой, проходящей через точку L параллельно прямым (u) и (v), лежит и точка C проективной шкалы, нанесенной на прямой AB.

С другой стороны, если три числа u_k, v_k и w_k удовлетворяют уравнению $f_1(u)=f_2(v)\cdot f_3(w)$, то та же точка C будет лежать на прямой FE, соединяющей точки F и E с пометками u_k и v_k двух шкал (u) и (v). Построив таким же методом еще точку прямой AB, мы определим ее положение и затем перенесем проективную шкалу, построенную на отрезке MN, на прямую AB.



Черт. 63.

Примеры построения z-номограмм

Пример 1. Построение z-номограммы для формулы:

$$Q=3{,}33\,BH^{-\frac{3}{2}},$$

где Q меняется от 0 до 80, а B от 0 до 10.

В данном случае $f_1(Q)=Q$; $f_2(B)=3{,}33\,B$ и $f_3(H)=H^{\frac{3}{2}}$.

Следует заметить, что числовой множитель, входящий в эту формулу, можно отнести к любой из трех входящих в эту формулу функцию, положив, например,

$$f_1(Q)=\frac{Q}{3{,}33}$$

или

$$f_3(H)=3{,}33H^{\frac{3}{2}}.$$

Но удобнее отнести его к $f_2(B)$ с тем, чтобы уменьшить разницу в модулях m_1 и m_2.

Возьмем две параллельные шкалы длиной в 160 *мм* и построим на них шкалы функций $f_1(Q)$ и $f_2(B)$.

Ясно, что

$$m_1=\frac{160}{80}=2;$$

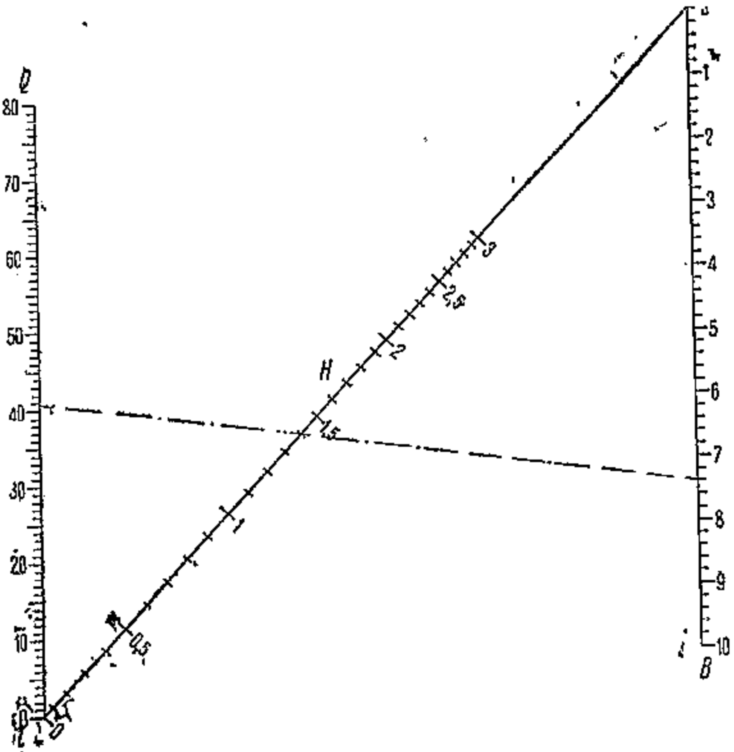
$$m_2=\frac{160}{3{,}33\cdot 10}\approx 5;$$

модуль m_2 мы округляем до 5, что незначительно изменит длину шкалы для переменного B.

Коэфициент k проективной шкалы третьей функции будет равен:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

В дальнейшем построении мы поступаем так (черт. 64). Берем отрезок AB длиной в 250 *мм* и через концы его проводим две параллельные прямые (Q) и (B). (Угол наклона этих прямых к отрезку AB обычно находится в пределах от 40 до 60°). На прямых (Q) и (B) строим шкалы функций $f_1(Q)$ и $f_2(B)$; в данном случае равномерные шкалы с модулями 2 и 5 и с началами в точках A и B.



Черт. 64.

На отрезке AB наносим проективную шкалу функции $f_3(H) = H^{\frac{3}{2}}$ с коэфициентом $k = 0{,}4$.

Эту шкалу можно построить по ее уравнению, которое в нашем примере имеет вид:

$$S = 250 \cdot \frac{0{,}4 \cdot H^{\frac{3}{2}}}{1 + 0{,}4H^{\frac{3}{2}}}.$$

Началом шкалы должна быть точка A.

Произведя указанные построения, мы получаем номограмму черт. 64.

Пунктирная прямая на этом чертеже показывает, что при $Q = 40{,}8$; $B = 7{,}4$; $H = 1{,}4$.

Пример 2. Построение z-номограммы для формулы:

$$v = \sqrt{648{,}5 \cdot D \cdot I.}$$

По этой формуле вычисляется скорость v течения воды по трубам, причем D означает диаметр трубы в метрах, I — высоту напора в сантиметрах.

Возведя в квадрат обе части данной формулы и решая относительно D, приводим ее к виду:

$$D = \frac{1}{648{,}5I} \cdot v^2;$$

принимаем

$$D = f_1(D); \quad \frac{1}{648{,}5I} = f_2(I);$$

$$v^2 = f_3(v).$$

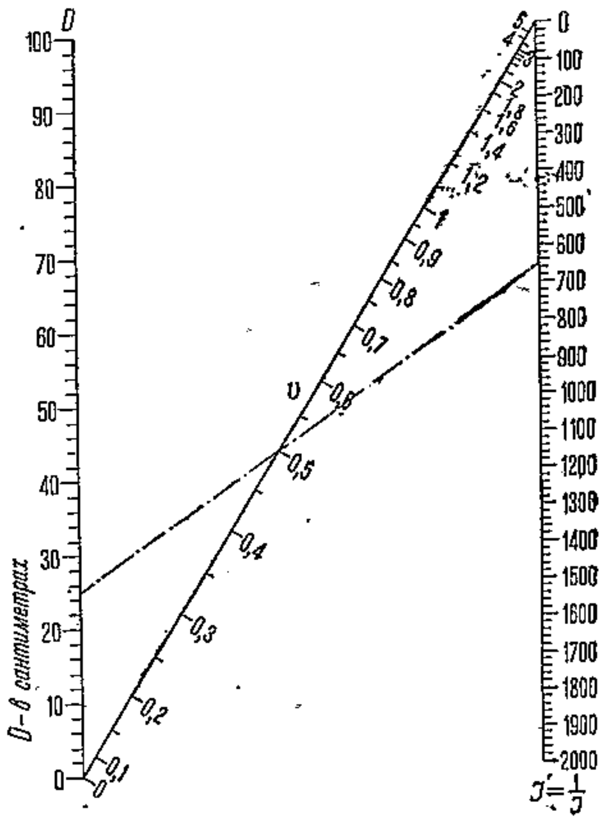
Заменяем $\frac{1}{I}$ через I', значения которого и даются на нашей номограмме, вследствие чего шкала для I' так же, как и шкала для D, становится равномерной (черт. 65).

Длины шкал для переменных D и I' принимаем равными 400 *мм*, D меняется от 0 до 1 *м*;

$$m_1 = \frac{400}{1} = 400.$$

Модуль для переменного I', так как I' меняется от 0 до 2000, определится по формуле:

$$m_2 = \frac{400 \cdot 648{,}5}{2000} = 129{,}7.$$



Черт. 65.

На наклонной шкале длиной в 236,5 *мм* построена проективная шкала функции $f_3(v) = v^2$ с коэфициентом $k = \frac{400}{129{,}7}$. Пунктирная прямая показывает, что для $D = 25$ *см* и $I' = 650$ *см* скорость $v = 0{,}5$ *м/сек*.

Глава VI

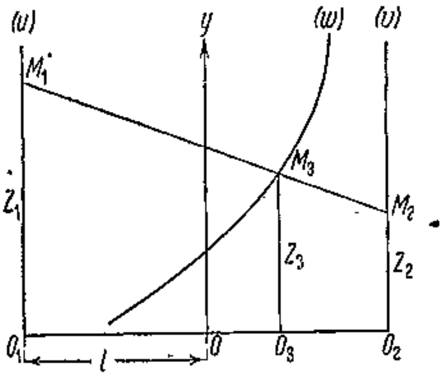
НОМОГРАММЫ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ И ОДНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ

§ 38. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Выведем в общем виде то уравнение с двумя переменными, которое может быть представлено номограммой из выравненных точек с двумя параллельными и одной криволинейной шкалой; в частном случае криволинейная шкала может оказаться и прямолинейной, но не параллельной первым двум шкалам.

Представим себе, что мы имеем две параллельные шкалы (u) и (v) переменных u и v и третью криволинейную шкалу (w) переменной w. Найдем условие, при котором три точки M_1, M_2, M_3, взятые на этих шкалах, лежали бы на одной прямой. Проведем через эти три точки с пометками u_k, v_k, w_k прямую $M_1M_3M_2$; кроме того, проведем другую прямую, которая пересечет обе параллельные шкалы (u) и (v) в точках O_1 и O_2 (черт. 66).

Из точки M_3 проведем прямую M_3O_3 параллельно прямым (u) и (v). Если мы далее назовем отрезки O_1M_1 через z_1; O_2M_2 через z_2; O_3M_3 через z_3, то на основании теоремы, данной в конце главы I, мы можем написать такое соотношение:



Черт. 66.

$$\overline{O_3O_2}\cdot z_1+\overline{O_1O_3}\cdot z_2=\overline{O_1O_2}\cdot z_3. \qquad (1)$$

Длины отрезков $\overline{O_3O_2}$, $\overline{O_1O_3}$, $\overline{O_1O_2}$ заменяют наши прежние коэфициенты a, b и $a+b$ формулы (A), § 11.

Длина отрезка $\overline{O_1O_2}$ остается постоянной, а слагаемые $\overline{O_1O_3}$ и $\overline{O_3O_2}$ меняются вместе с пометкой точки M_3 — w_k; они являются функциями переменного w. Обозначим первую из них через $h_3(w)$, а вторую через $g_3(w)$. Что касается отрезков z_1 и z_2, то они являются функциями переменных (u) и (v), так как положение точек M_1 и M_2 определяется пометками u_k и v_k этих точек.

Подставляя в формулу (1) вместо z_1 и z_2 их выражения в виде функций от переменных u и v, мы получим уравнение:

$$f_1(u)\cdot g_3(w)+f_2(v)\cdot h_3(w)=f_3(w)\,^{1)} \qquad \text{(VIII)}$$

оно является тем уравнением, номограмма для которого состоит из двух параллельных шкал для переменных u и v и криволинейной шкалы для переменного w.

Обратно, всякое уравнение, приводимое к виду (VIII), может быть представлено номограммой из выравненных точек с двумя параллельными шкалами.

Чтобы доказать это положение, мы обозначим z_1 через $m_1f_1(u)$; z_2 через $m_2f_2(v)$, и приведем уравнение (VIII) к виду:

$$\frac{z_1}{m_1}\,g_3(w)+\frac{z_2}{m_2}\,h_3(w)=f_3(w). \qquad (2)$$

Это уравнение может быть представлено номограммой означенного выше вида, если оно равносильно уравнению (1).

Условие равносильности двух уравнений, как известно, состоит в том, что коэфициенты двух равносильных уравнений должны быть пропорциональны между собой, т. е. мы должны иметь равенства:

$$\frac{\overline{O_3O_2}}{\dfrac{g_3(w)}{m_1}}=\frac{\overline{O_1O_3}}{\dfrac{h_3(w)}{m_2}}=\frac{\overline{O_1O_2}\cdot z_3}{f_3(w)}. \qquad (3)$$

Этих последних соотношений вполне достаточно для того, чтобы мы могли в полной мере определить третью шкалу и построить ее по точкам, выбрав предварительно для этой цели оси координат.

Так, за ось x-в мы можем принять прямую O_1O_2, а за ось y-в — прямую, проходящую через середину O отрезка O_1O_2, параллельно прямым (u) и (v). Совершенно необязательно, чтобы оси координат были прямоугольными.

1) Постоянная введена под знак функции.

Обозначая координаты точки M_3 относительно этой системы координат через x и y и полагая $O_1O_2 = 2l$, мы получим, что

$$\overline{O_3O_2} = l - x;$$

$$\overline{O_1O_3} = l + x;$$

$$\overline{O_1O_2} \cdot z_3 = 2ly.$$

Равенства (3) в таком случае примут вид:

$$\frac{l-x}{\frac{g_3(w)}{m_1}} = \frac{l+x}{\frac{h_3(w)}{m_2}} = \frac{2ly}{f_3(w)}. \tag{4}$$

Складывая и вычитая числители и знаменатели двух первых отношений, мы получим два отношения, равные двум первым, т. е.

$$\frac{2l}{\frac{h_3(w)}{m_2} + \frac{g_3(w)}{m_1}} = \frac{2x}{\frac{h_3(w)}{m_2} - \frac{g_3(w)}{m_1}} = \frac{2ly}{f_3(w)}.$$

Из этих последних равенств можно вывести формулы для вычисления координат x и y помеченных точек третьей шкалы переменного w.

Формулы эти таковы:

$$\left.\begin{aligned} x &= l \cdot \frac{m_1h_3(w) - m_2g_3(w)}{m_1h_3(w) + m_2g_3(w)}; \\ y &= \frac{f_3(w) \cdot m_1m_2}{m_1h_3(w) + m_2g_3(w)}. \end{aligned}\right\} \tag{IX}$$

Этими формулами определяются координаты любой точки линии (w), как функции пометки этой точки w_k. Давая переменному w определенное значение w_k, мы получим по этим формулам определенные значения для x и y, т. е. получим на плоскости чертежа точку, которую должны снабдить пометкой w_k. Нанеся ряд таких точек, координаты которых вычислены аналогичным образом, мы должны соединить их плавной кривой, чтобы получить третью шкалу (прямолинейную или криволинейную) переменного w; пометки этих точек равны значениям w.

В заключение мы можем высказать такую теорему:

Всякая номограмма из выравненных точек с двумя параллельными шкалами представляет собой уравнение вида:

$$f_1(u) \cdot g_3(w) + f_2(v) \cdot h_3(w) = f_3(w). \tag{VIII}$$

Обратно, всякое *уравнение, приводящееся к виду* (VIII), *может быть представлено номограммой из выравненных точек, в которой носители шкал переменных* u *и* v *представляют собой две параллельные прямые, произвольно выбираемые*; длины и модули этих шкал выбираются также произвольно.

§ 39. ПОСТРОЕНИЕ НОМОГРАММЫ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ОДНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ

1. Геометрический способ построения. Этот способ, наиболее удобный, по существу ничем не отличается от того геометрического способа, который был дан в § 31 для номограмм с тремя параллельными шкалами.

Если дано какое-нибудь значение третьего переменного w, например $w = 20$, то для него из уравнения (VIII) находят две системы значений переменных u и v; для определенности полагаем, что одна система будет $u = 1$, $v = 6$, а другая $u = 7$, $v = 3$. Пересечение прямых 1—6 и 7—3 даст точку шкалы (w) с пометкой 20.

Так как шкала (w) в общем случае криволинейна, то, чтобы построить носителя этой шкалы методом пересечения, нужно получить достаточное число точек этой шкалы, чтобы соединить их затем плавной кривой.

2. Аналитический способ построения. Кривую (w) строят по координатам ее точек, вычисляемым по формулам (IX), § 38. Ясно, что такой метод построения длиннее предыдущего, но читателю, привычному к методам аналитической геометрии, он позволит выяснить некоторые свойства той кривой, которую он строит (асимптоты, двойные точки и т. п.).

На практике к аналитическому методу построения прибегают лишь как к поправке геометрического метода построения и вычисляют координаты точек в том случае, когда линии пересечения, определяющие положение помеченных точек в первом способе, слишком близко наклонены друг к другу.

§ 40. ПРИМЕРЫ НОМОГРАММ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ

Пример 1. Геометрический способ построения номограммы квадратного уравнения.

В качестве иллюстрации геометрического метода построения номограммы из выравненных точек с криволинейной шкалой построим по этому способу номограмму квадратного уравнения. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, или $px + q = -x^2$ принадлежит к типу уравнений, рассмотренных нами в § 38, формула (VIII):

$$f_1(u) \cdot g_3(w) + h_3(w) f_2(v) = f_3(w)$$

и, следовательно, может быть представлено номограммой из выравненных точек с двумя параллельными и одной криволинейной шкалой.

Черт. 67.

В самом деле, мы должны положить $f_1(q) = q$; $f_2(p) = p$; $g_3(x) = 1$; $f_3(x) = -x^2$ и $h_3(x) = x$, чтобы привести его к виду (VIII).

Строим эту номограмму следующим образом. Берем две параллельные прямые (p) и (q) и строим на них шкалы функций $f_2(p) = p$ и $f_1(q) = q$ с произвольными модулями. На черт. 67 эти модули m_1 и m_2 равны между собой, но это необязательно.

Положим затем, что мы хотим построить точку M криволинейной шкалы с пометкой 2.

Если мы положим в нашем уравнении $q = 0$, $p = -2$ и $x = 2$, то эти три числа удовлетворяют нашему уравнению и, следовательно, точка M находится на прямой BC, соединяющей точки с пометками 0 и -2 шкал (q) и (p). С другой стороны, три числа $x = 2$, $p = 0$ и $q = -4$ тоже удовлетворяют нашему уравнению и, следовательно, точка M лежит на прямой AD, соединяющей точки с пометками -4 и 0 шкал (q) и (p). Таким образом точка M будет точкой пересечения этих прямых. Пометка точки M равна 2 — соответствующему значению x. Чтобы найти точку M_1 с пометкой 3, мы должны искать точку пересечения прямой BE, соединяющей точки с пометками 0 и -3 шкал (q) и (p) с прямой AF, соединяющей точки с пометками -9 и 0 шкал (q) и (p).

Аналогично можно построить точки M_3, M_3 с пометками 4, 5,... и соединить все эти точки плавной кривой, представляющей собой криволинейную шкалу переменного x.

Нетрудно заметить, что наша криволинейная шкала получается в результате пересечения лучей двух пучков: одного, имеющего центр в точке B, лучи которого проходят через точки с пометками —1, —2, —3, —4, ... шкалы (p) и другого, имеющего центр в точке A, лучи которого проходят через точки —1, —4, —9, —16, ... шкалы (q).

Если луч BN проходит через точку N шкалы (p) с пометкой $-a$ [1]), то соответствующий луч AL проходит через точку L шкалы (q) с пометкой $-a^2$.

Так как на шкале q нам приходится брать точки, отметки которых представляют собой по абсолютной величине квадраты чисел и уходят таким образом, на шкале далеко от ее начала, то шкалу (q) можно заменить параллельной ей равномерной шкалой, построенной с меньшим масштабом.

На чертеже показано построение точки с пометкой 9 с помощью такой вспомогательной шкалы.

Так же можно заменить и шкалу (p) параллельной ее шкалой с измененным масштабом.

Пример 2. Построение номограммы из выравненных точек с двумя параллельными и одной криволинейной шкалой для определения коэфициента самоиндукции S нити радиуса r, намотанной на круге радиуса R.

S дается формулой:

$$S = 4\pi R\left(\lg\frac{R}{r} + \frac{1}{3}\right);$$

S выражается в сантиметрах так же, как R и r.

Формулу для S можно написать иначе:

$$S = 4\pi R\left(\lg R + \frac{1}{3} - \lg r\right),$$

или

$$S + 4\pi R \cdot \lg r = 4\pi R\left(\lg R + \frac{1}{3}\right); \qquad (a)$$

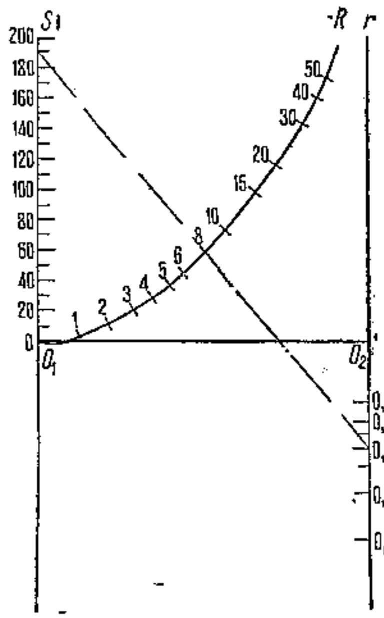
если положить, что

$$\lg r = f_2(r);\ \ S = f_1(S);\ \ g_3(R) = 1;$$

$$h_3(R) = 4\pi R;\ \ f_3(R) = 4\pi R\left(\lg R + \frac{1}{3}\right),$$

то наше уравнение (a) будет приведено к виду:

$$f_1(S)\cdot g_3(R) + f_2(r)\cdot h_3(R) = f_3(R),$$



Черт. 68.

т. е. оно может быть представлено номограммой из выравненных точек с двумя параллельными шкалами для S и r и криволинейной шкалой для переменного R.

На черт. 68 дана эта номограмма. $\overline{O_1O_2} = 2l$ взята равной 11 *см*.

На прямой (S) построена равномерная шкала функции $f_1(S) = S$ с модулем $m_1 = \frac{1}{2}$, в пределах изменения S от 0 до 200. На параллельной (S) прямой (r) нанесена логарифмическая шкала функции $f_2(r)$ с модулем $m_2 = 50$ в пределах изменения r от 0,05 до 0,4 *см*.

---

[1]) На черт. 67 a равно 9.

Третья шкала (R) построена по точкам с помощью того аналитического метода построения криволинейной шкалы, который был изложен в § 38.

За ось x-ов взята прямая O_1O_2; ось y-ов проведена через середину O отрезка O_1O_2 перпендикулярно к нему; уравнения носителя этой шкалы согласно формулам (IX), § 38 имеют вид:

$$x = \frac{55 \cdot (6{,}28R - 50)}{6{,}28R + 50};$$

$$y = \frac{314R\,(\lg R + 0{,}333)}{6{,}28R + 50};$$

в последних уравнениях π принято равным 3,14.

Каждому значению R соответствует система значений x и y, а следовательно, определенная точка в плоскости чертежа. Эта точка снабжается пометкой, равной соответствующему значению R.

Кроме того из этих уравнений легко увидеть некоторые свойства кривой (R), которые облегчают ее построение. Когда $R \to \infty$, $x \to 55$, а $y \to \infty$, из этого следует, что прямая (r) служит асимптотой этой кривой. Когда $R \to 0$, то произведение $R \lg R \to 0$, $y \to 0$, а $x \to -55$; из этого мы заключаем, что точка O_1 принадлежит нашей кривой.

Можно найти также точки пересечения кривой (R) с осями координат; значения R в этих точках являются решениями уравнений:

$$\lg R + 0{,}333 = 0$$

и

$$6{,}28R - 50 = 0;$$

эти решения будут $R = 0{,}46$ и $R = 8$.

Шкала для R построена в пределах изменения R от 0 до 50 *см*.

Что касается способа пользования этой номограммой, то на чертеже показано, что для $r = 0{,}2$ *см*, $R = 8$ *см*, $S = 190$ *см*.

Глава VII

ТРЕУГОЛЬНАЯ НОМОГРАММА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВИДА

$$f_3(w) = f_1(u) \cdot f_2(v).$$

§ 41. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Построение треугольной номограммы для этого уравнения основано на непосредственном применении известной теоремы Менела .

Теорема Менелая состоит в следующем.

Возьмем произвольный треугольник ABC и за начала отрезков, служащих сторонами треугольника, будем считать точки A, B и C, так что мы будем иметь три отрезка AB, BC и CA. Произвольная прямая пересечет стороны этого треугольника или их продолжения в трех точках M, N и P; причем либо все три эти точки будут лежать на продолжении трех сторон треугольника, либо две из них лежат на двух сторонах, а третья — на продолжении третьей стороны, как это имеет место на черт. 69, где точки M и N лежат на сторонах AB и BC, а точка P — на продолжении стороны CA. Если мы обозначим числами α, β, γ величину отношений, в которых точки M, N и P делят отрезки AB, BC и CA, то эти три числа будут или все отрицательными числами, или два из них положительными, а третье отрицательным, так как, если точка лежит внутри отрезка, то она делит его в положительном отношении, а если она лежит на продолжении отрезка, то делит его в отрицательном отношении. Следовательно, при всех положениях секущей произведение чисел α, β, γ будет число отрицательное. Заслуга Менелая состоит в том, что он доказал, что это число равно -1, т. е. $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$.

С помощью этой теоремы нетрудно построить треугольную номограмму для уравнения вида:

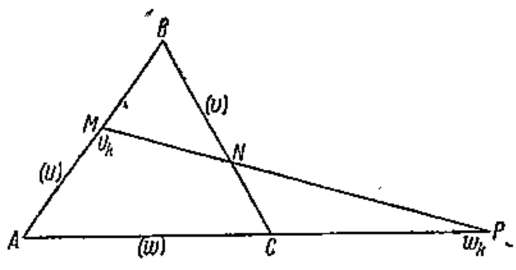
$$f_3(w) = f_1(u) \cdot f_2(v). \tag{1}$$

Для определенности будем предполагать, что функции $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$ для рассматриваемых промежутков изменения переменных u, v, w принимают лишь положительные значения, как это и бывает в большинстве случаев на практике. При таком предположении мы можем нашему уравнению придать вид:

$$f_1(u) \cdot f_2(v) \cdot \frac{-1}{f_3(w)} = -1. \tag{2}$$

Из равенства (2) ясно, что, если мы на сторонах треугольника ABC — AB, BC и CA построим проективные шкалы функций $f_1(u)$, $f_2(v)$ и $-\frac{1}{f_3(w)}$, то мы и получим треугольную номограмму, если выберем коэфициенты трех проективных шкал k_1, k_2 и k_3 для функций $f_1(u)$, $f_2(v)$ и $-\frac{1}{f_3(w)}$ так, чтобы $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$.

В самом деле, шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ расположатся на сторонах AB и BC треугольника ABC, так как эти функции принимают лишь положительные значения, а шкала функции $-\frac{1}{f_3(w)}$ расположится на продолжении стороны CA, так как функция $f_3(w)$ принимает лишь положительные значения, а следовательно, функция $-\frac{1}{f_3(w)}$ будет принимать лишь отрицательные значения.



Черт. 69.

Обратимся далее к черт. 69 и допустим, что точки M, N и P на построенных нами шкалах будут иметь пометки u_k, v_k и w_k.

Тогда, в силу определения проективной шкалы, принимая во внимание, что за начала наших шкал взяты точки A, B, C, мы можем написать:

$$\frac{AM}{MB} = k_1 f_1(u_k); \quad \frac{BN}{NC} = k_2 f_2(v_k); \quad \frac{CP}{PA} = -k_3 \frac{1}{f_3(w)}.$$

Обозначая $k_1 f_1(u_k)$ через α; $k_2 f_2(v_k)$ через β; $-k_3 \frac{1}{f_3(w)}$ через γ и помня, что по теореме Менелая

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1,$$

имеем, что

$$k_1 f_1(u_k) \cdot k_2 f_2(v_k) \cdot -k_3 \cdot \frac{1}{f_3(w_k)} = -1.$$

Заменяя произведение $k_1 k_2 k_3$ единицей, мы получим, что

$$f_1(u_k) f_2(v_k) = f_3(w_k),$$

т. е. что пометки трех точек, лежащих на секущей прямой, удовлетворяют уравнению:

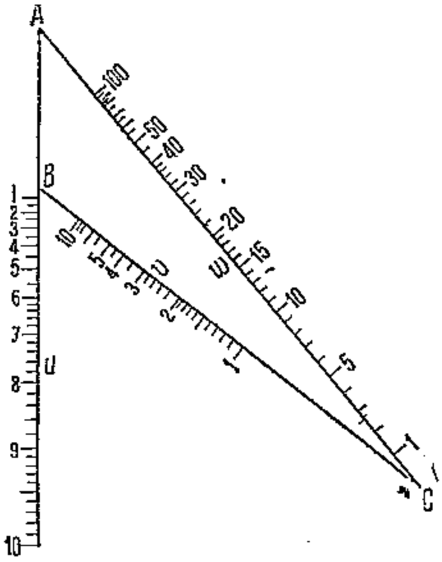
$$f_1(u) \cdot f_2(v) = f_3(w),$$

что и требовалось доказать.

§ 42. ТРЕУГОЛЬНАЯ НОМОГРАММА УМНОЖЕНИЯ

На черт. 70 дана треугольная номограмма формулы умножения:

$$w = u \cdot v.$$


Черт. 70.

Способ построения этой номограммы, а также и способ пользования ею с очевидностью вытекает из вышеизложенной теории построения треугольных номограмм.

Предлагаем читателю определить, какие коэфициенты трех проективных шкал были взяты для построения этой номограммы.

Замечание. При построении номограммы было принято, что $f_1(u) = -u$, а остальные функции положительны: $f_2(v) = v$ и $f_3(w) = \frac{1}{w}$, ввиду чего пометки для w расположились на стороне треугольника AC, а шкала переменного u — на продолжении AB. При построении треугольной номограммы любую из функций мы можем снабдить знаком —, сохраняя знаки у остальных функций.

Глава VIII

НОМОГРАММЫ НА ТРЕХ ШКАЛАХ, СХОДЯЩИХСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ, ИЛИ РАДИАНТНЫЕ НОМОГРАММЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВИДА

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}.$$

§ 43. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

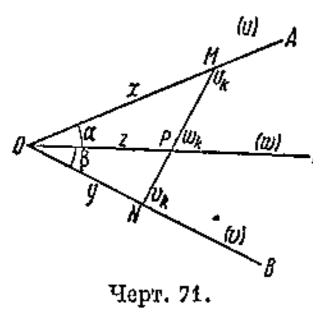
Возьмем три выходящие из одной точки прямые OA, OB, OC и пересечем их произвольной прямой в точках M, N, P и обозначим через x, y и z длины отрезков OM, ON и OP, а углы OAC и COB назовем α и β (черт. 71).

Площадь $\triangle OMP$ + площадь $\triangle OPN$ = площади $\triangle OMN$. Так как площадь всякого треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла между ними, то последнее равенство можно переписать так:

$$\frac{1}{2} xz \sin\alpha + \frac{1}{2} zy \sin\beta = \frac{1}{2} xy \sin(\alpha + \beta),$$

откуда, если умножить обе части равенства на 2 и разделить его почленно на произведение xyz, получим:

$$\frac{\sin\alpha}{y} + \frac{\sin\beta}{x} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{z}. \qquad (1)$$



Черт. 71.

Вообразим теперь, что на прямых OA, OB, OC построены шкалы функций $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$, причем за начало каждой шкалы взята точка O, а модули m_1, m_2, m_3 выбраны так, что $m_1 = k \sin\beta$; $m_2 = k \sin\alpha$; $m_3 = k \sin(\alpha + \beta)$, где k — произвольное число.

Пусть точки M, N, P на построенных нами шкалах будут иметь пометки u_k, v_k, w_k, тогда согласно определению функциональной шкалы мы можем написать:

$$x = m_1 f_1(u_k) = k \cdot \sin\beta \cdot f_1(u_k);$$
$$y = m_2 f_2(v_k) = k \cdot \sin\alpha\, f_2(v_k);$$
$$z = m_3 f_3(w_k) = k \cdot \sin(\alpha + \beta) f_3(w_k).$$

Заменяя в уравнении (1) x, y, z полученными для них выражениями, мы получим:

$$\frac{\sin\alpha}{k\sin\alpha f_2(v_k)} + \frac{\sin\beta}{k\sin\beta f_1(u_k)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{k\sin(\alpha+\beta) f_3(w_k)},$$

или

$$\frac{1}{f_1(u_k)} + \frac{1}{f_2(v_k)} = \frac{1}{f_3(w_k)},$$

т. е. пометки трех точек, лежащих на одной прямой, удовлетворяют уравнению:

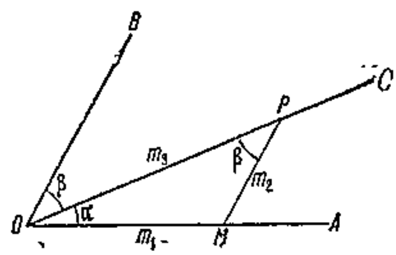
$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}. \qquad \text{(X)}$$

Построенная нами номограмма относится к виду номограмм из выравненных точек. Способ пользования этой номограммой очевиден. В частном случае, если прямая OC делит угол AOB пополам, $\alpha = \beta$; $\sin(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha$ и равенство (1) можно привести к виду:

$$\frac{\sin\alpha}{y} + \frac{\sin\alpha}{x} = \frac{\sin 2\alpha}{z};$$

сокращая почленно уравнение на $\sin\alpha$, мы получим равенство:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{2\cos\alpha}{z},$$



Черт. 72.

где α есть $\frac{1}{2}$ угла AOB.

В этом случае модули шкал $f_1(u)$ и $f_2(v)$ будут равны между собой; если обозначить этот общий модуль через m, то модуль средней шкалы будет равен $2m\cos\alpha$.

Практическое замечание. Как мы видели, модули m_1, m_2, m_3 пропорциональны синусам углов β, α и $\alpha + \beta$.

Если мы построим треугольник, углы которого будут равны α, β и $\pi - (\alpha+\beta)$, то длины противолежащих сторон будут пропорциональны нашим модулям, так как в треугольнике стороны относятся, как синусы противоположных углов.

Обратно, если мы выбрали модули m_1, m_2, m_3 для шкал функций $f_1(u)$, $f_2(v)$ и $f_3(w)$ и хотим затем построить три луча OA, OB и OC, чтобы нанести на них шкалы наших функций, то мы должны построить треугольник OMP, стороны которого OM, MP, OP равны или пропорциональны нашим модулям m_1, m_2, m_3.

В самом деле, проведя прямую OB, параллельную прямой MP и продолжая стороны OM и OP, мы получим три луча OA, OB, OC, которые, очевидно, и будут являться носителями шкал трех функций $f_1(u)$, $f_2(v)$ и $f_3(w)$ (черт. 72).

Это замечание полезно иметь в виду при построении радиантной номограммы.

§ 44. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ РАДИАНТНОЙ НОМОГРАММЫ

Как и в предыдущих случаях, мы начнем с того, что выясним основную идею этого способа на простом примере.

Пусть мы хотим построить геометрически номограмму уравнения

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w},$$

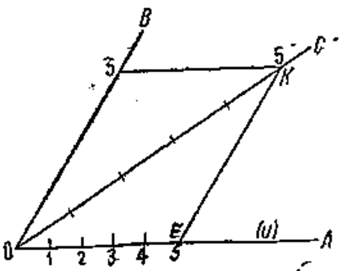
где $f_1(u)=u$; $f_2(v)=v$; $f_3(w)=w$.

Для этой цели возьмем три произвольных луча OA, OB, OC и на первом из них OA построим функциональную шкалу функции $f_1(u)=u$ с модулем m_1, т. е. равномерную шкалу с началом в точке O.

Положим далее, что мы хотим построить точку шкалы $f_3(w)$ с пометкой 5 (черт. 73).

Для этого мы берем на шкале (u) точку с пометкой 5 и проводим через эту точку прямую EK, параллельную прямой OB. Прямая EK пересечет прямую OB в бесконечности, и пометка этой точки будет ∞, но если $u=5$, $v=\infty$, то w должно быть равно 5 для того, чтобы три значения u, v и w удовлетворяли нашему уравнению:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}.$$



Черт. 73.

Из этого следует, что точку K пересечения прямой EK со шкалой OC мы должны снабдить пометкой 5. Построив шкалу на прямой OC, мы проведем через точки этой шкалы прямые, параллельные OA и таким же методом построим шкалу функции $f_2(v)$ на луче OB.

Заметим, что если прямая OC не делит угла AOB пополам, то мы можем только на одном из трех лучей нанести шкалу с произвольным модулем. Если же OC является биссектрисой угла AOB, то мы можем на сторонах угла AOB нанести шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ с одним и тем же произвольным модулем.

Имея уже на прямых OA и OB шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$, мы можем построить на прямой OC шкалу функции $f_3(w)$ тем же самым геометрическим методом, которым мы строили шкалу $f_3(w)$ в z-номограмме, § 36.

§ 45. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММ РАДИАНТНОГО ТИПА

В качестве примера построения номограммы радиантного типа рассмотрим формулу:

$$Q=\frac{2}{3}\cdot 0{,}62\sqrt{2g}\,(h_m^{\frac{3}{2}}-h_0^{\frac{3}{2}}),$$

где Q — расход воды в кубических метрах;

h_0 и h_m — расстояния верхнего и нижнего краев отверстия от зеркала воды в метрах.

Заменяя в этой формуле g его приближенным значением 9,81 и производя арифметические вычисления, можем эту формулу написать так:

$$h_0^{\frac{3}{2}}+\frac{Q}{1{,}82}=h_m^{\frac{3}{2}}.$$

Здесь h_0 меняется от 0 до 4. Если эту формулу привести к виду

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f_3},$$

то мы получим:

$$\frac{1}{\frac{1}{h_0^{\frac{3}{2}}}}+\frac{1}{\frac{1}{\frac{Q}{1,82}}}=\frac{1}{\frac{1}{h_m^{\frac{3}{2}}}}.$$

Но радиантной номограммы для этой формулы мы построить не сможем, так как мы имеем, например, что

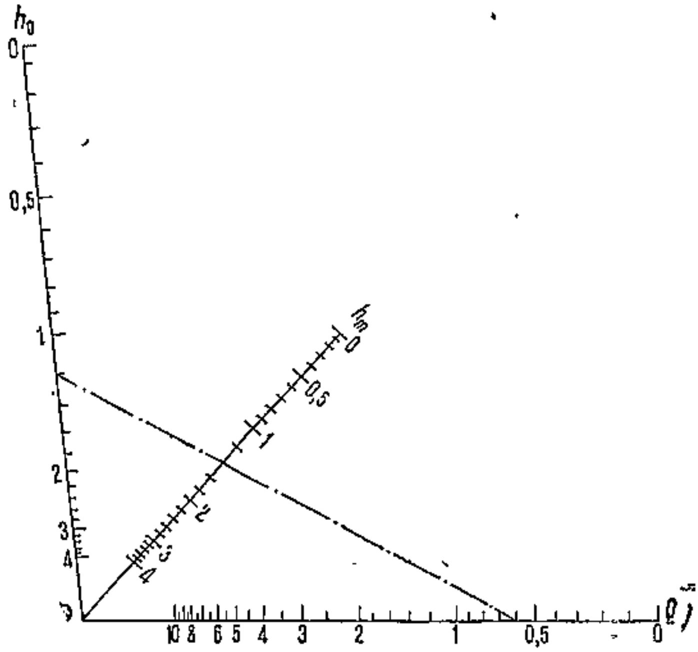
$$m_1 f_1(h_0)=\frac{1}{h_0^{\frac{3}{2}}},$$

и точку с пометкой 0 этой шкалы мы не сможем построить, так как она должна уйти в бесконечность.

Поэтому при преобразовании данной формулы мы прибегаем к искусственному приему.

Мы пишем очевидное равенство:

$$(1+h_0^{\frac{3}{2}})+\left(1+\frac{Q}{1,82}\right)=2+h_m^{\frac{3}{2}}$$



Черт. 74.

и даем ему такой вид:

$$\frac{1}{1:(1+h_0^{\frac{3}{2}})}+\frac{1}{1:\left(1+\frac{Q}{1,82}\right)}=\frac{1}{1:(2+h_m^{\frac{3}{2}})};$$

$$f_1(h_0)=\frac{1}{1+h_0^{\frac{3}{2}}};\quad f_2(Q)=\frac{1}{1+\frac{Q}{1,82}};\quad f_3(h_m)=\frac{1}{2+h_m^{\frac{3}{2}}}.$$

Выбираем модули $m_1=m_2=125$; $m_3=170$ и в дальнейшем производим построение согласно приемам, изложенным в предыдущем параграфе. Получаем номограмму, изображенную на черт. 74. На чертеже показано, что при $h_0=1,2$; $Q=0,6$; $h_m=1,4$.

§ 46. ПЕРСПЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НОМОГРАММЫ

Если мы на двух плоскостях α и α' имеем две фигуры M и M', то мы говорим, что эти фигуры находятся в перспективном соответствии, если прямые, соединяющие соответствующие точки обеих фигур, проходят через одну и ту же точку в пространстве O, которую называют центром перспективы.

Допустим, что три точки A, B, C фигуры M лежат на одной прямой, тогда нетрудно сообразить, что и три соответствующие точки A', B', C' фигуры M' тоже будут лежать на одной прямой, а именно на прямой, по которой плоскость, проходящая через центр перспективы O и прямую ABC, пересекает плоскость α'.

Вообразим теперь, что фигура M будет номограмма с тремя шкалами, сходящимися в точке Q, а плоскость α' будет параллельна прямой OQ. Тогда точке Q

на плоскости α' будет соответствовать точка, лежащая в бесконечности, а трем шкалам, сходящимся в одной точке, будут соответствовать три параллельные шкалы.

Таким образом номограмме с тремя шкалами, сходящимися в одной точке, будет соответствовать номограмма с тремя параллельными шкалами.

Если бы фигура M была треугольной номограммой и точка Q была бы одной из вершин треугольника, а прямая OQ оставалась бы параллельной плоскости α', то на плоскости α' треугольной номограмме соответствовала бы номограмма с двумя параллельными шкалами и одной наклонной шкалой, или z-номограмма.

Отсюда видим, что номограммы одного вида мы можем перспективно преобразовать в номограммы другого вида.

Это преобразование имеет большое практическое значение, потому что номограмма, полученная перспективным преобразованием данной, может оказаться более удобной для пользования, чем данная.

Но не всякую номограмму одного типа можно перспективно преобразовать в номограмму другого типа.

Предлагаем читателю объяснить, почему нельзя, например, треугольную номограмму перспективно преобразовать в номограмму с тремя параллельными шкалами.

Глава IX

КРУГОВЫЕ НОМОГРАММЫ

§ 47. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Среди номограмм из выравненных точек самыми простыми и дающими наибольшую точность результата являются номограммы, в которых носителями шкал служат либо прямые линии, либо окружности.

В номограммах из выравненных точек с двумя прямолинейными шкалами и третьей шкалой какой угодно нельзя предположить, что обе прямолинейные шкалы имеют один и тот же носитель шкал, т. е. обе шкалы переменных u и v нанесены на одну прямую, потому что, применяя известный нам способ пользования номограммой из выравненных точек, мы все время приходили бы к одной и той же точке третьей шкалы — точке пересечения двух носителей прямолинейных шкал. Между тем последнее становится возможным, если носителем шкал является окружность.

Представим себе такую номограмму из выравненных точек, в которой две шкалы нанесены на одну и ту же окружность, а третья — на некоторую кривую линию.

Вид того уравнения, которое представляет собой такая номограмма, достаточно прост и часто встречается в практических формулах.

Номограммы подобного вида носят название «круговых номограмм из выравненных точек».

В них на одну и ту же окружность наносятся шкалы функций двух переменных u и v.

§ 48. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ, КОТОРОЕ МОЖЕТ БЫТЬ ПРЕДСТАВЛЕНО КРУГОВОЙ НОМОГРАММОЙ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

Возьмем окружность, на которую нанесены две шкалы для переменных (u) и (v); третья шкала для переменного w нанесена на некоторую кривую произвольного вида (черт. 75). Ось x-в направим по диаметру OO' окружности, а за ось y-в примем касательную к окружности в точке O — конце диаметра OO'. Спроектируем из точки O, как из центра проекции, точку M_1 шкалы (u) с пометкой u_1 на прямую $O'Y_1$, параллельную OY; проекцию точки M_1 на прямую $O'Y_1$ назовем

N_1. Расстояние точки N_1 от O' меняется в зависимости от значения u, следовательно, это расстояние $\overline{O'N_1} = t$ есть функция переменного u.

Если диаметр круга равен a, то, обозначая координаты точки M_1 через x и y, мы имеем пропорцию:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{t},$$

из которой

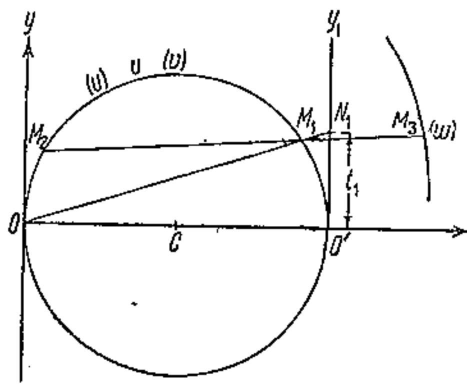
$$y = \frac{t}{a} x. \tag{1}$$

Круг, взятый нами на черт. 75, имеет центр в точке C с координатами $(\frac{a}{2}; 0)$ и радиус его равен $\frac{a}{2}$, поэтому уравнение этого круга будет:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

или

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$



Черт. 75.

Подставив в уравнение этого круга найденное выше значение y, мы получим:

$$x^2 + \frac{t^2}{a^2} x^2 - ax = 0. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) можно определить координаты точек этого круга как функции параметра t, а именно из (2) следует, что

$$x = \frac{a^3}{a^2 + t^2},$$

а из (1)

$$y = \frac{t}{a} \cdot x = \frac{a^2 t}{a^2 + t^2}.$$

Таким образом получается уравнение окружности в параметрической форме (XI):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^3}{a^2 + t^2}; \\ y &= \frac{a^2 t}{a^2 + t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

Возьмем на трех шкалах (u), (v), (w) три точки M_1, M_2, M_3, лежащие на одной прямой. Пусть уравнение этой прямой будет:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Если мы подставим в это уравнение значения x и y, выраженные формулами (XI) в функции t, то мы получим уравнение второй степени относительно t. Корни этого уравнения t_1 и t_2 будут теми значениями параметра t, которые соответствуют двум точкам на окружности M_1 и M_2.

Само уравнение относительно t имеет следующий вид:

$$\gamma t^2 + \beta a^2 t + \alpha a^3 + \gamma a^2 = 0.$$

Из него мы выводим соотношение по известной теореме Виета:

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{\alpha a^3 + \gamma a^2}{\gamma}$$

и

$$t_1 + t_2 = \frac{-\beta a^2}{\gamma}.$$

Из этих выражений можно найти два отношения коэфициентов прямой M_1M_2:

$$\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{(t_1+t_2)}{a^2}$$

и

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{t_1t_2 - a^2}{a^3}.$$

Прямая M_1M_2 определяется вполне, если даются значения t_1 и t_2.

С другой стороны, на той же прямой лежит точка M_3 с координатами x_3, y_3, т. е.

$$\alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma = 0,$$

или

$$\frac{t_1t_2 - a^2}{a^3}x_3 - \frac{t_1+t_2}{a^2}y_3 + 1 = 0,$$

или окончательно имеем формулу:

$$(t_1t_2 - a^2)x_3 - a(t_1 + t_2)y_3 + a^3 = 0,$$

которую можно еще упростить:

$$t_1t_2x_3 + (t_1 + t_2)\cdot(-ay_3) + a^2(a - x_3) = 0.$$

Так как значение переменного u определяет точку M_1 с пометкой u_1, то N_1, а следовательно, и $t_1 = \overline{O'N_1}$ является некоторой функцией переменного u; обозначим ее $f_1(u)$; точно так же $t_2 = \overline{O'N_2}$ [1]) — некоторая функция переменного v; обозначим ее $f_2(v)$; наконец, x_3 и y_3 являются функциями переменного w.

Последнее уравнение показывает, что круговая номограмма из выравненных точек представляет собой уравнение следующего вида:

$$f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w) + [f_1(u) + f_2(v)]\,g_3(w) + h_3(w) = 0, \qquad \text{(XII)}$$

где

$$-ay_3 = g_3(w); \quad a^2(a - x_3) = h_3(w).$$

§ 49. ПОСТРОЕНИЕ КРУГОВОЙ НОМОГРАММЫ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

Пусть точка N_1 прямой $O'Y_1$ соответствует точке M_1 круговой шкалы (u) с пометкой u_1. Точки N являются центральными проекциями точек круговой шкалы (u), и если мы знаем шкалу для точек N_1, то тем самым мы знаем и круговую шкалу функции $f(u)$, так как, если мы построим шкалу для точек N_1, то мы от нее можем перейти к круговой шкале функции $f_1(u)$, проектируя на окружность из O, как из центра проекции, точки прямолинейной шкалы, нанесенной на $O'Y_1$.

Для построения шкал точек N_1 и N_2 мы получаем, что

$$t_1 = m\cdot f_1(u);$$

$$t_2 = m\cdot f_2(v);$$

t_1 и t_2 являются ординатами точек N_1 и N_2, а m — общий модуль обеих шкал.

Если мы подставим получаемые отсюда выражения для $f_1(u)$ и $f_2(v)$ в соотношение (XII), то будем иметь:

$$t_1t_2\frac{f_3(w)}{m^2} + (t_1 + t_2)\frac{g_3(w)}{m} + h_3(w) = 0.$$

---

[1]) $N'O_2$ получается проектированием точки M_2 на прямую $O'y_1$.

Раньше мы имели соотношение между ординатами t_1 и t_2 точек, получающихся проектированием круговых шкал на прямую $O'Y_1$, и координатами точек (x_3, y_3), принадлежащих третьей шкале (w):

$$t_1 t_2 x_3 + (t_1 + t_2)\cdot(-ay_3) + a^2(a - x_3) = 0.$$

Оба последние равенства должны быть тождественными, т. е.

$$\frac{\frac{f_3(w)}{m^2}}{x_3} = -\frac{\frac{g_3(w)}{am}}{y_3} = \frac{\frac{h_3(w)}{a^2}}{a - x_3} = \frac{\frac{f_3(w)}{m^2} + \frac{h_3(w)}{a^2}}{a}.$$

Из последних равенств получаем уравнения для координат точек третьей шкалы

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{a^3 f_3(w)}{a^2 f_3(w) + m^2 h_3(w)}; \\ y_3 &= -\frac{a^2 m g_3(w)}{a^2 f_3(w) + m^2 h_3(w)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}$$

В заключение мы можем так сформулировать правило построения круговой номограммы из выравненных точек.

Построив на касательной $O'Y_1$ к кругу с одним и тем же модулем и одним и тем же началом O' шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$, мы спроектируем их из точки O, как из центра, на окружность. Третья шкала для переменного w получится построением ее по точкам, координаты которых вычисляются по формулам (XIII). Третью шкалу можно получить геометрически методом пересечения, о котором мы неоднократно упоминали.

Замечание. При построении номограммы мы произвольно выбираем две величины: диаметр a круга и модуль шкал m. Диаметр круга выбирается соответственно размерам того листа бумаги, на котором чертится номограмма. Диаметр нужно взять таким, чтобы круг полностью уместился на чертеже. С другой стороны, что касается модуля m, то, как видно из формул (XIII), x_3 и y_3, получают очень малые значения для больших значений m. В большинстве случаев, подбирая m, можно достигнуть того, чтобы третья шкала не вышла за пределы чертежа.

§ 50. КРУГОВЫЕ НОМОГРАММЫ С ОДНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ШКАЛОЙ

С первого взгляда может казаться, что круговые номограммы с прямолинейной шкалой должны представлять особый интерес. В действительности это не так. Нужно сказать, что те формулы, для которых строится круговая номограмма из выравненных точек с одной прямолинейной шкалой, всегда могут быть представлены номограммой более простого типа.

В самом деле, выведем то уравнение, для которого может быть построена круговая номограмма с одной прямолинейной шкалой.

При выводе этого уравнения будем различать два случая.

1. Прямолинейной шкалой служит диаметр круга. Примем этот диаметр за ось x-в, уравнение носителя шкалы в таком случае будет $y_3 = 0$, а поэтому согласно формулам (XIII)

$$g_3(w) = 0.$$

Основное уравнение (XII), выведенное нами в предыдущем параграфе, примет более простой вид:

$$f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w) + h_3(w) = 0,$$

или

$$f_1(u)\cdot f_2(v) = -\frac{h_3(w)}{f_3(w)}.$$

Последнее уравнение можно заменить другим уравнением вида:

$$F_1(u)F_2(v) = F_3(w).$$

Как уже известно, последнее уравнение может быть представлено или номограммой с тремя параллельными шкалами, или z-номограммой.

2. Прямолинейная шкала не совпадает с диаметром круга. Если принять за ось ординат прямую, параллельную прямолинейной шкале, то все точки носителя этой шкалы будут иметь одну и ту же абсциссу, и так как полученное из формул (XIII)

$$x_3 = \frac{a^3 \dfrac{f_3(w)}{h_3(w)}}{a^2 \dfrac{f_3(w)}{h_3(w)} + m^2}$$

должно оставаться постоянным, то должно оставаться постоянным отношение

$$\frac{f_3(w)}{h_3(w)}.$$

Пусть $-A$ величина этого отношения. Тогда основное уравнение (XII) примет вид:

$$-Af_1(u)\cdot f_2(v) + [f_1(u) + f_2(v)]\frac{g_3(w)}{h_3(w)} + 1 = 0,$$

а полагая $\dfrac{h_3(w)}{g_3(w)} = F_3(w)$, имеем уравнение:

$$Af_1(u)\cdot f_2(v)\cdot F_3(w) = f_1(u) + f_2(v) + F_3(w).$$

В § 33 мы видели, как можно это последнее уравнение преобразовать, чтобы построить для него номограмму на трех параллельных шкалах.

В заключение можно сказать, что несмотря на то, что для этой формулы можно построить номограмму на прямолинейных шкалах, все же построенная для нее круговая номограмма иногда имеет некоторые преимущества.

§ 51. ПОСТРОЕНИЕ КРУГОВОЙ НОМОГРАММЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $F_1(u)\cdot F_2(v) = F_3(w)$.

Данное уравнение является частным случаем общего уравнения (XII):

$$f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w) + [f_1(u) + f_2(v)]\,g_3(w) + h_3(w) = 0.$$

Упрощение происходит потому, что функция $g_3(w) = 0$.

Данное уравнение может быть переписано в таком виде:

$$F_1(u)\cdot bF_2(v) = bF_3(w),$$

где b — произвольный множитель.

Считая, что это уравнение должно быть тождественным с уравнением (XII), мы напишем такие равенства:

$$g_3(w) = 0;\quad f_1(u) = F_1(u);\quad f_2(v) = bF_2(v);\quad -\frac{h_3(w)}{f_3(w)} = bF_3(w).$$

Кроме того упростятся и уравнения (XII) для координат точек третьей шкалы; общий вид этих уравнений:

$$x_3 = \frac{a^3 f_3(w)}{a^2 f_3(w) + m^2 h_3(w)} = \frac{a^3}{a^2 + m^2 \dfrac{h_3(w)}{f_3(w)}};$$

$$y_3 = \frac{-a^2 m g_3(w)}{a^2 f_3(w) + m^2 h_3(w)};$$

в данном случае они могут быть записаны на основании вышенаписанных равенств так:

$$x_3 = \frac{a^3}{a^2 - bm^2 \cdot F_3(w)};$$

$$y_3 = 0.$$

Третья шкала прямолинейна и наносится на диаметр OO' (черт. 76).

Две другие шкалы наносятся на касательную к окружности в точке O'. Точка O' берется за начало шкалы; уравнения этих шкал будут:

$$S_1 = mF_1(u)$$

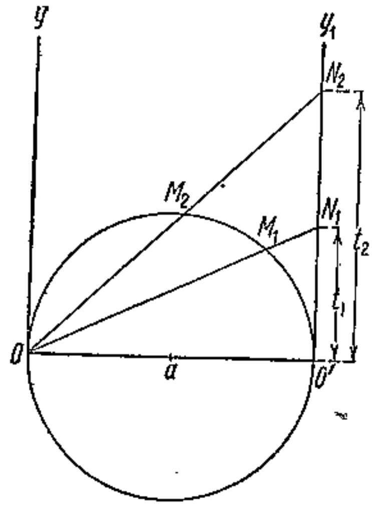
и

$$S_2 = bmF_2(v) = m_1F_2(v),$$

считая, что $m_1 = bm$.

Модули m и m_1 выбираются также и по произволу.

Если функции $F_1(u)$ и $F_2(v)$ сохраняют постоянные знаки в рассматриваемых интервалах изменения переменных, то параметр b выбирают так, чтобы откладываемые на касательной отрезки S_1 и S_2 были направлены противоположно. Тогда круговые шкалы для переменных u и v будут расположены по разные стороны от диаметра OO'. Номограмма выиграет в ясности.



Черт. 76.

§ 52. ПРИМЕРЫ

1. Геометрический способ построения номограммы умножения $u \cdot v = w$. На черт. 77 дана круговая номограмма умножения. На окружности нанесены две круговые шкалы переменных (u) и (v), которые получены проектированием из конца диаметра равномерной шкалы, нанесенной на прямой, параллельной диаметру. Пометки третьей шкалы, нанесенной на диаметре, определяются геометрически, как точки пересечения прямых, соединяющих точки с пометками u_k и v_k двух круговых шкал с диаметром. Соответствующая точка диаметра должна иметь пометку w_k, которая вместе с u_k и v_k удовлетворяет уравнению $u \cdot v = w$.

2. Построение круговой номограммы формулы:

$$\varrho = \frac{r}{1 + (k-1)(1-r)}.$$

Если машины механической мастерской управляются одной общей передачей, то машины функционируют лишь $\frac{1}{k}$ часть времени хода мотора; $\frac{1}{k}$ называется коэфициентом действия передачи. Обозначая через r коэфициент полезного действия этой передачи, мы будем иметь, что действительный коэфициент полезного действия оборудования ϱ будет выражаться вышенаписанной формулой. Формула эта принадлежит Hillairet. k изменяется в пределах от 1 до 5; r — от 0,3 до 0,9.

Формулу для ϱ нужно преобразовать, чтобы привести к виду:

$$F_1 \cdot F_2 = F_3.$$

Раскрывая в знаменателе скобки, имеем:

$$\varrho = \frac{r}{k + r - kr},$$

откуда

$$\frac{1-\varrho}{\varrho}=k\cdot\frac{1-r}{r}.$$

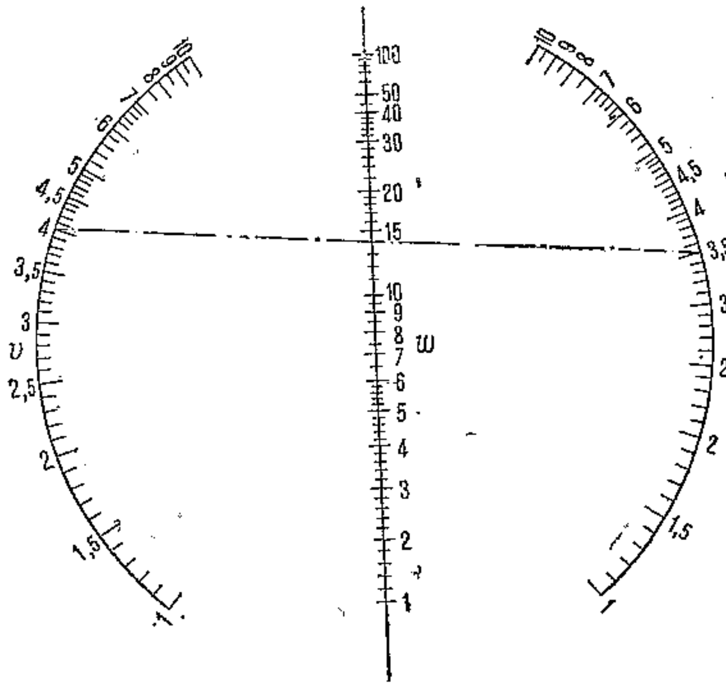
Положим

$$\frac{1-\varrho}{\varrho}=F_3(\varrho);\quad k=F_1(k);\quad \frac{1-r}{r}=F_2(r)$$

и получим уравнение:

$$F_3(\varrho)=F_1(k)\cdot F_2(r),$$

которое можно представить круговой номограммой с одной прямолинейной шкалой на диаметре.



Черт. 77.

Введем параметр b, который поможет нам при построении шкалы. Выберем его так, чтобы шкала на диаметре для переменного ϱ, определяемая уравнением

$$x_3=\frac{a^2}{a^2-m^2b\left(\frac{1-\varrho}{\varrho}\right)}$$

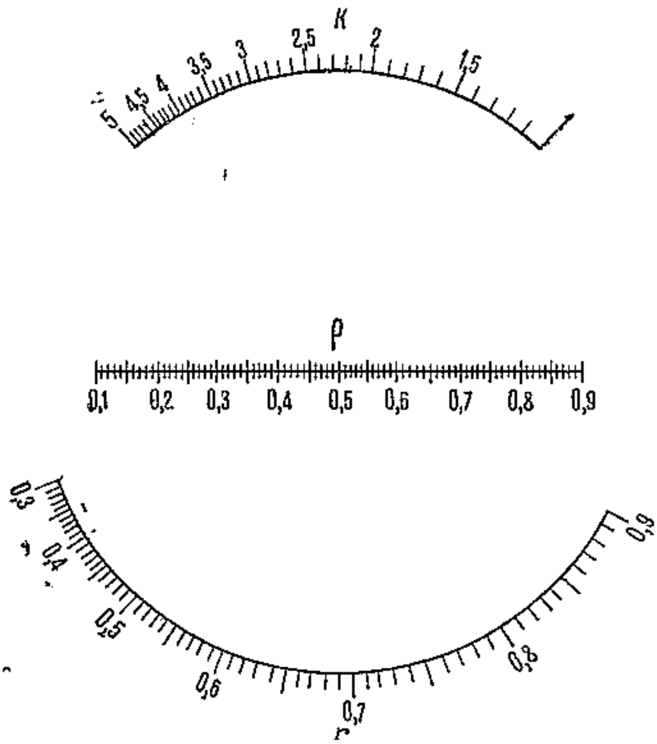
или для $a=1$ уравнением

$$\sqrt{x_3}=\frac{1}{1-m^2b\left(\frac{1-\varrho}{\varrho}\right)}=\frac{\varrho}{\varrho-m^2b+m^2b\varrho},$$

была равномерной.

Для этого нужно принять $m^2b=-1$, т. е. $b=-\frac{1}{m^2}$, потому что тогда уравнение для абсциссы точек шкалы переменного ϱ будет $x_3=\varrho$, т. е. для ϱ мы получаем равномерную шкалу, которая нанесена на горизонтальном диаметре OO' (черт. 78).

Круговая шкала для k получается проектированием из точки O шкалы $y = mk$, построенной на касательной к окружности в точке O'[1]; m принимается равным $\frac{1}{\sqrt{5}}$.



Черт. 78.

Что касается круговой шкалы для r, то замечая, что формула дает $\varrho = r$ для $k = 1$, мы можем получить ее, проектируя из точки k с пометкой 1 шкалу для ϱ на окружность.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить номограмму на параллельных шкалах для следующих формул:

1) $l = \frac{d}{2R}$;

l — толщина стенки канала (изменяется от 3 до 30 *мм*);
d — внутренний диаметр канала в миллиметрах (от 30 до 1250 *мм*);
R — наибольшая нагрузка, допускаемая для металла 2,5 *кг/мм*^{2}.

2) $C = \frac{75N}{v}$;

C — тангенциальное напряжение в килограммах;
N — мощность в лошадиных силах (N изменяется от 0 до 10 л. с.);
v — тангенциальная скорость в метрах в секунду (v изменяется от 1 до 10 *м/сек*).

---

[1]) См. черт. 76.

3) $Q=\frac{\pi D^2}{4\cdot 10^3}\cdot v$;

Q — расход воды в литрах;
D — диаметр водопроводной трубы в сантиметрах (от 1 до 200 *см*);
v — скорость течения в сантиметрах в секунду (от 5 до 1000 *см/сек*).

4) $D=0{,}251\sqrt[19]{\frac{Q^7}{I^4}}$;

D — диаметр водопроводной трубы (изменяется от 5 до 80 *см*);
Q — расход воды в литрах (изменяется от 1 до 100 *л*);
I — наклон трубы на метр (изменяется от 1,0 *м* до 1000 *мм*).

5) $a^3=\frac{3pl^2}{4R}$;

a — сторона квадратного сечения деревянной балки в метрах;
p — нагрузка на 1 *м* в килограммах (изменяется от 100 до 10 000 *кг*);
l — длина балки в метрах (изменяется от 1 до 10 *м*);
R — допустимый в практике груз для дерева в килограммах на квадратный метр $R=60\cdot 10^4\,\frac{кг}{м^2}$.

6) $M=\frac{Pl}{8}$;

M — максимальный изгибающий момент балки в килограммах;
P — общая нагрузка в килограммах (изменяется от 100 до 1000 *кг*);
l — длина балки в метрах (изменяется от 1 до 10 *м*).

2. Построить номограмму из выравненных точек, в которой только две шкалы параллельны для следующих формул:

1) $F=\frac{P}{80}\left(1+\frac{v}{80}+\frac{v^2}{350}\right)$.

Эта формула определяет сопротивление F движению вперед велосипедиста, едущего со скоростью v, где P означает вес велосипеда вместе с человеком в килограммах, а v — скорость в километрах в час.

2) Состояние тела зависит от трех переменных: давления, объема и температуры. Ван дер Вальс дал для газов и жидкостей следующую формулу, связывающую эти переменные величины:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

a, b, R — три постоянные, имеющие определенные значения для каждой жидкости;
p — давление в динах на квадратный сантиметр;
v — объем в кубических сантиметрах;
T — абсолютная температура.

Если в приведенной выше формуле заменить переменные p, v и T тремя новыми переменными h, w и t такими, что $h=\frac{p}{p_0}$; $w=\frac{v}{v_0}$; $t=\frac{T}{T_0}$, причем p_0, v_0, T_0 представляют критические давления, объем и температуру, то для всех жидкостей будет одно и то же уравнение:

$$\left(h+\frac{3}{w^2}\right)(3w-1)=8t.$$

Построить номограмму для следующих промежутков изменения переменных:

t от 0 до 1,1;

h от 0 до 6.

3) $I = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$;

I — модуль сопротивления изгибанию;
D — внешний диаметр полого дерева;
d — внутренний диаметр
(d изменяется от 1 до 6; D изменяется от 1 до 20).

4) Формула Базэна, относящаяся к течению воды в открытых каналах:

$$U = \frac{87\sqrt{RI}}{1 + \frac{\gamma}{R}};$$

U — средняя скорость воды в метрах в секунду (изменяется от 0 до 9 *м/сек*);
I — уклон;
γ — переменный числовой коэфициент, зависящий от материала стенок канала (изменяется от 0 до 1,75);
R — средний радиус (изменяется от 0 до 5).

5) Полное сопротивление поезда дается приближенной формулой:

$$R = 3{,}4 + 0{,}118v + 0{,}03\frac{v^2}{P};$$

R — сопротивление в килограммах на тонну;
v — скорость поезда в километрах в час;
P — сумма веса локомотива и тендера в тоннах
(v изменяется от 20 до 120; P изменяется от 70 до 400).

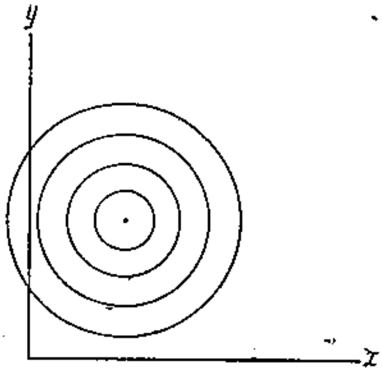
СЕТЧАТЫЕ НОМОГРАММЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Глава X

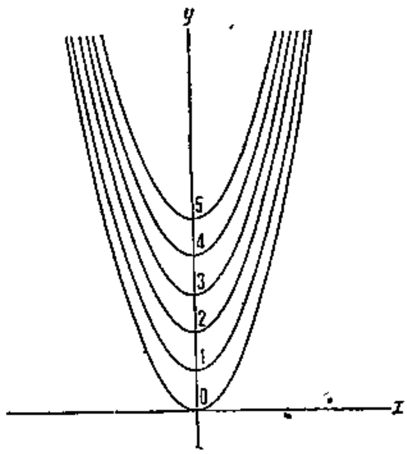
ДЕКАРТОВ АБАК

§ 53. ПОНЯТИЕ О СЕМЕЙСТВЕ КРИВЫХ

Как известно из аналитической геометрии, положение точки на плоскости определяется парой чисел, называемых координатами этой точки. Возьмем уравнение прямой $y = kx + b$ и посмотрим, что определяет пара чисел k и b. Мы знаем, что k есть угловой коэфициент прямой и b — ордината в начале, следовательно, совокупность этих двух чисел определяет единственную прямую на плоскости. Из этого видно, что между числами x и y (координатами точки) и числами k и b, определяющими положение прямой, существует известная аналогия: одна пара чисел определяет положение точки, другая пара чисел определяет положение прямой. На основании сказанного можно пару чисел



Черт. 79.



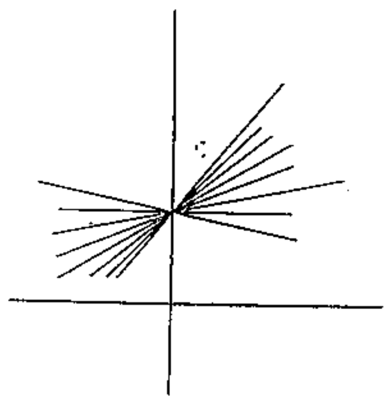
Черт. 80.

k и b считать координатами прямой. Точно так же в уравнении окружности $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ входят три числа α, β и r, которые определяют единственную окружность на плоскости. В уравнении любой линии имеются такие числа, которые определяют положение этой линии. Числа, которые, входя в уравнение линии, определяют ее положение, называются параметрами. Посмотрим, что будет происходить, если считать в уравнении параметры переменными. Давая различные значения параметрам, мы будем находить различные линии, изображаемые уравнениями одного и того же вида. В уравнение линии, вообще говоря, входит несколько параметров. Если оставить в уравнении только один параметр переменным, а всем остальным дать определенные числовые значения, то получим множество линий, изображаемых уравнением этого вида. Единственная линия из этого множества соответствует определенному значению переменного параметра. Так, например, если в уравнении окружности положить $\alpha = 2$ и $\beta = 3$ и давать третьему параметру r различные числовые значения, то получим множество концентрических окружностей с центром в точке (2; 3). В этом множестве положение каждой определенной окружности (черт. 79) соответствует определенному значению параметра r.

Такое множество линий, которое изображается одним и тем же уравнением при одном, переменном параметре, называется семейством линий.

На черт. 79 мы имеем семейство концентрических окружностей с центром в точке (2;3).

Возьмем уравнение параболы $y = x^2 + b$ и станем изменять параметр b; получим семейство парабол (черт. 80). На черт. 80 изображены отдельные параболы семейства, соответствующие значениям b, равным 0, 1, 2, 3, 4 и 5.



Черт. 81.

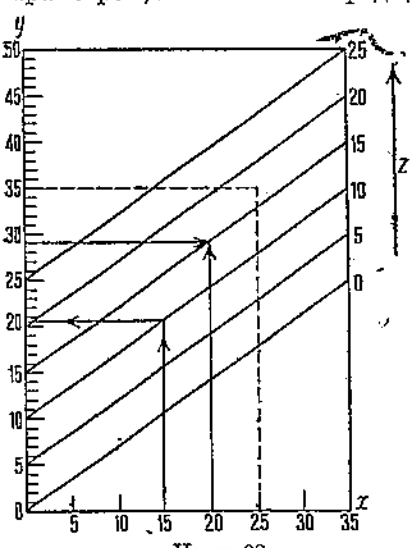
В уравнении прямой $y = kx + b$ два параметра. Если параметру k дать определенное числовое значение и изменять параметр b, то получим семейство параллельных прямых с одним и тем же угловым коэфициентом k, но отсекающих различные отрезки на оси ординат.

Если изменять параметр k, считая b постоянным, то семейство прямых составит пучок прямых с центром, находящимся в точке (0; b).

Пусть, например, дано уравнение $y = kx + 2$. Дадим k значения $-0{,}2$; 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1 и 1,2. Построим по уравнению $y = kx + 2$ прямые, соответствующие указанным значениям k (черт. 81). Получим определенные прямые семейства, представляющего собой пучок прямых с центром в точке (0; 2).

§ 54. НОМОГРАММА УРАВНЕНИЯ $y = ax + z$

В уравнении $y = ax + z$ три переменных: x, y и z. Полагая в этом уравнении z параметром, на основании предыдущего заключаем, что это уравнение изображает семейство параллельных прямых. Чтобы показать, как для построения номограммы уравнения такого вида воспользоваться семейством линий, возьмем частный пример. Пусть дано уравнение



Черт. 82.

$$y = 0{,}7\ x + z, \qquad (1)$$

причем положим, что по условию задачи z может принимать значения 0, 5, 10, 15, 20 и 25, границами изменения x служат 0 и 35, а для y границы изменения 0 и 50.

Исходя из этих границ, берем на осях координат соответствующие отрезки и строим прямые семейства по уравнению (1) для указанных значений z. Получаем номограмму, изображенную на черт. 82, где каждая прямая помечена соответствующим ей значением z.

Пользуясь этой номограммой, можем по данным значениям (в определенных границах) двух переменных находить соответствующее значение третьей переменной уравнения (1).

Определим, например, чему равно z при $x = 20$ и $y = 29$. Для этого достаточно найти точку (20; 29). Пометка прямой, проходящей через эту точку, и будет искомым значением z. В данном случае $z = 15$.

Если даны значения x и z, например $x = 15$ и $z = 10$, то, взяв на оси абсцисс точку, абсцисса которой 15, и восставив в этой точке перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с прямой, пометка которой равна 10, опустим перпендикуляр из точки пересечения на ось ординат. Основание этого перпендикуляра будет точкой, ордината которой и равна искомому значению $y = 20{,}5$. Порядок определения неизвестного в обоих случаях показан на черт. 82 стрелками.

При определении значения z может случиться, что через найденную точку не проходит ни одна из построенных прямых. В этом случае приходится интерполировать на-глаз, принимая во внимание пометки двух прямых, между которыми лежит полученная точка. Пусть требуется определить значение z для $x = 25$ и $y = 35$. Построение точки (25;35) показано на черт. 82 пунктирными прямыми. Полученная точка лежит между прямыми с пометками 15 и 20, находясь на этих прямых на равном расстоянии. Интерполируя, получаем $z = 17{,}5$.

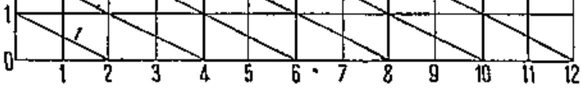
§ 55. НОМОГРАММЫ УРАВНЕНИЙ

$$\frac{x}{nz} + \frac{y}{z} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{z^n} + \frac{y}{z} = 1$$

Покажем на примере, как чисто арифметическую задачу можно решить номографическим путем. Пусть надо найти все правильные дроби (сократимые и несократимые), суммы которых равны 1, если один из знаменателей вдвое больше другого, причем значение меньшего знаменателя не превышает 6. Задача, как мы видим, сводится к решению уравнения

$$\frac{x}{2z} + \frac{y}{z} = 1 \tag{1}$$

в целых, положительных числах при условии $1 \leqslant z \leqslant 6$. С точки зрения аналитической геометрии уравнение (1) изображает семейство прямых, отсекающих на оси абсцисс отрезки вдвое больше, чем на оси ординат. Дадим z значения, которые оно может принимать, т. е. 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Построив прямые семейства, соответствующие взятым значениям z, пометим их этими значениями (черт. 83). Имея перед собой номограмму, изображенную на черт. 83, легко выбрать целые положительные значения x и y, удовлетворяющие условиям задачи. Прямая с пометкой *1* проходит через две точки, координаты которых целые положительные числа, а именно через точки (0; 1) и (2; 0). В первом случае имеем две дроби $\frac{0}{2}$ и $\frac{1}{1}$, которые в сумме дают единицу, во втором случае $\frac{2}{2} + \frac{0}{1} = 1$. Оба эти случая не удовлетворяют тому условию задачи, что искомые дроби должны быть правильными. Больше точек, имеющих целые положительные значения координат, на прямой *1* нет. На прямой *2* берем одну точку с целыми положительными координатами (2;1). Подставляя вместо x и y в уравнение (1) их значения, а вместо z пометку прямой *2*, получаем:



Черт. 83.

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Значения координат равные 0 как здесь, так и в дальнейшем во внимание принимать не будем. Выбрав все точки с целыми положительными значениями координат, лежащие на прямых данного семейства, получим, что всех возможных пар дробей, удовлетворяющих условию поставленной задачи, будет 13, а именно:

$$1)\ \frac{2}{4}+\frac{1}{2}=1;\quad 5)\ \frac{4}{8}+\frac{2}{4}=1;\quad 9)\ \frac{4}{12}+\frac{4}{6}=1;$$

$$2)\ \frac{2}{6}+\frac{2}{3}=1;\quad 6)\ \frac{6}{8}+\frac{1}{4}=1;\quad 10)\ \frac{2}{12}+\frac{5}{6}=1;$$

$$3)\ \frac{4}{6}+\frac{1}{3}=1;\quad 7)\ \frac{8}{10}+\frac{1}{5}=1;\quad 11)\ \frac{6}{12}+\frac{3}{6}=1;$$

$$4)\ \frac{2}{8}+\frac{3}{4}=1;\quad 8)\ \frac{6}{10}+\frac{2}{5}=1;\quad 12)\ \frac{8}{12}+\frac{2}{6}=1;$$

$$13)\ \frac{10}{12}+\frac{1}{6}=1.$$

Перейдем теперь к построению номограммы уравнения вида:

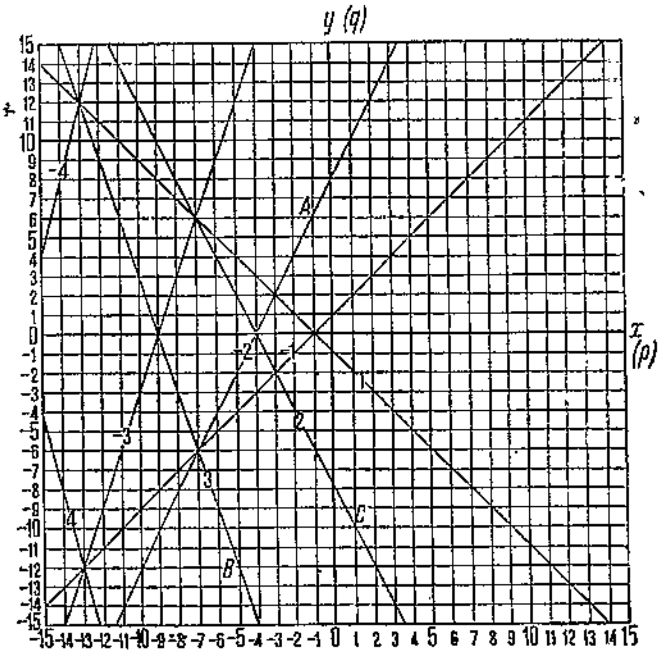
$$\frac{x}{z^n}+\frac{y}{z}=1.$$

Положим, что дано уравнение

$$z^3+xz+y=0, \qquad (2)$$

причем x и y могут принимать любые значения в промежутке от -15 до $+15$, и z имеет целые значения от -4 до $+4$. Если принять x и z или y и z за декартовы координаты, а y или x за параметр, то уравнение (2) будет изображать семейство кривых третьего порядка. Если же принять за параметр z, то, поделив обе части уравнения (2) на $-z^3$, получим уравнение семейства прямых:

$$\frac{x}{-z^2}+\frac{y}{-z^3}=1 \qquad (3)$$



Черт. 84.

На этом примере мы видим, что: 1) вид номограммы зависит от того, какие переменные в уравнении считать за декартовы координаты и какие за параметр; 2) если в уравнении вида $f_1(x)+f_2(y)=f_3(z)$ с тремя переменными два переменных входят в первой степени, то это уравнение может быть преобразовано в уравнение семейства прямых.

Строим прямые семейства изображенного уравнением (3), давая параметру z целые значения от -4 до $+4$, и помечаем каждую прямую числовой пометкой, равной соответствующему значению z (черт. 84).

Имея, например, значения $x=1{,}5$ и $z=-2$, находим значение $y=11$; при $y=14$ и $z=-3$ находим, что $x=-4\frac{2}{3}$ и т. д.

Уравнение (2) принимает вид:

$$z^3+pz+q=0, \qquad (4)$$

если считать $x = p$ и $y = q$. Это кубическое уравнение, к которому приводится полное кубическое уравнение для решения по формуле Кардано. Чтобы построить номограмму для решения уравнения (4), надо провести достаточно большое число прямых, соответствующих различным значениям z. Номограмма в этом случае будет состоять из множества перекрещивающихся прямых. Эти прямые сгущаются в части номограммы, что затрудняет ориентировку в ней. Ввиду этого номограмма такого вида для решения кубического уравнения практического значения не имеет.

Мы поставим вопрос о применении номограммы, изображенной на черт. 84, несколько иначе. Поставим себе три задачи, решаемые при помощи этой номограммы: 1) подобрать значения коэфициентов кубического уравнения вида $z^3 + pz + q = 0$, имеющего хотя бы один действительный целый корень в границах от -4 до $+4$; 2) найти все уравнения с целыми коэфициентами от -15 до $+15$, чтобы они имели определенный целый действительный корень от -4 до $+4$; 3) выбрать такие уравнения, все три корня которых действительны.

По номограмме (84) мы, например, видим, что в точке A $(-1; 6)$ проходит прямая с пометкой -2, следовательно, уравнение $z^3 - z + 6 = 0$ имеет действительный корень -2; через точку B $(-5; -12)$ проходит прямая с пометкой 3, следовательно, уравнение $z^3 - 5z - 12 = 0$ имеет действительный корень 3; через точку C $(\frac{1}{2}; -9)$ проходит прямая с пометкой 2, следовательно, уравнение $z^3 + \frac{1}{2}z - 9 = 0$ имеет действительный корень 2 и т. д.

Далее по этой номограмме можем найти все уравнения с целыми коэфициентами от -15 до $+15$ так, чтобы эти уравнения имели определенный целый действительный корень от -4 до $+4$. Для $z = 4$ таких уравнений два, а именно: $z^3 - 13z - 12 = 0$ и $z^3 - 14z - 8 = 0$. Для $z = 3$ таких уравнений 11, т. е. $z^3 - 4z - 15 = 0$; $z^3 - 5z - 12 = 0$ и т. д. Получим все 11 уравнений, выбирая точки с целыми координатами на прямой 3. Наконец, координаты тех точек, через которые проходят две или три прямые, служат коэфициентами уравнений, все три корня которых действительны, причем если через точку проходят две прямые, то уравнение имеет один двукратный корень. Так, например, через точку $(-7; 6)$ проходят три прямые 1, 2 и -3, следовательно, уравнение $z^3 - 7z + 6 = 0$ имеет три целых действительных корня. Через точку $(-3; 2)$ проходят две прямые 1 и -2. Действительно, уравнение $z^3 - 3z + 2 = 0$ имеет двукратный[1]) корень $z_1 = z_2 = 1$ и $z^3 = -2$. На примерах этого параграфа мы видим, что номограмма может служить не только как инструмент для вычислений, но и как метод исследования вопросов чисто аналитического характера.

§ 56. НОМОГРАММА УМНОЖЕНИЯ (ПУШЭ)

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ представляет собой общий вид уравнения с тремя переменными. Если одно из переменных этого уравнения считать за параметр, а два других за декартовы координаты, то, как мы знаем, данное уравнение будет изображать семейство кривых. Такое семейство кривых, отнесенных к декартовой системе координат, причем каждая кривая снабжена пометкой, соответствующей определенному значению параметра, представляет собой номограмму, носящую название декартова абака.

Понятно, что номограммы, рассмотренные в предыдущем параграфе, являются частным случаем декартова абака, так как осуществлены при помощи семейства прямых.

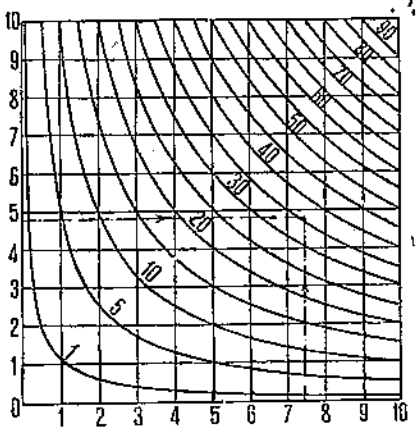
Возьмем уравнение

$$xy - z = 0. \tag{1}$$

[1]) Из высшей алгебры известно, что мнимые корни уравнения попарно сопряжены, т. е. число их может быть только четное, следовательно, в уравнении третьей степени действительных корней или один, или три.

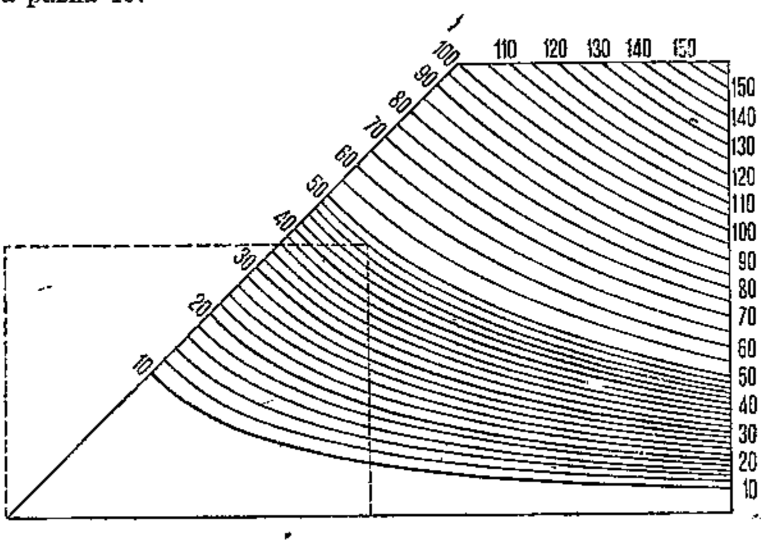
Такого вида уравнение часто встречается, как выражение законов техники и физики (закон Ома $IR - E = 0$, формула для определения коэфициента полезного действия станка $\eta = \frac{N_e}{N_i}$, или $\eta N_i - N_e = 0$, где N_i — мощность, потребленная станком, и N_e — полезная мощность станка и т. д.).

Будем рассматривать в уравнении (1) x и y как сомножители, а z как произведение, т. е. перепишем уравнение (1) в виде $xy = z$. Положим, что x и y могут изменяться в границах от 0 до 10, а следовательно z может принимать значения от 0 до 100. Если мы дадим z некоторое постоянное значение a, то уравнение $xy = a$ будет изображать равностороннюю гиперболу, асимптоты которой служат осями координат. Давая, например, z значения 1, 5, 10, 20,...90, получим кривые семейства гипербол (черт. 85). Пометив кривые семейства соответствующими значениями z, имеем номограмму умножения, или номограмму Пушэ, по имени автора «Линейной арифметики», где в 1795 г. впервые дана эта номограмма.



Черт. 85.

Чтобы найти по этой номограмме какое-нибудь произведение $x \cdot y$ при данных значениях сомножителей, например при $x = 8$ и $y = 5$, надо найти точку (8;5) и прочесть пометку на гиперболе, проходящей через эту точку. В данном примере эта пометка равна 40.



Черт. 86.

В большинстве случаев для нахождения приближенного произведения приходится интерполировать на-глаз, что довольно затруднительно при номограмме, состоящей из семейства кривых. В дальнейшем будут рассмотрены приемы преобразования номограммы, состоящей из семейства кривых в номограмму, состоящую из семейства прямых.

На черт. 85 стрелками показано нахождение приближенного произведения $4{,}75 \cdot 7{,}5 \approx 36$. Эта же номограмма может служить и для деления, если даны произведения z и один из сомножителей x или y. Только что рассмотренная номограмма имеет применение в практике полиграфического производства для определения площади клише (черт. 86). Чтобы определить площадь клише, имеющего форму прямоугольника, его помещают на номограмме так, чтобы одна из его вершин находилась в начале координат и одна из его сторон совпала бы с осью абсцисс. Пометка гиперболы, проходящей через вершину клише, противоположную лежащей в начале координат, дает число квадратных сантиметров в данном клише. На черт. 86 пунктиром обозначено клише, площадь которого равна 48 *см*^{2}.

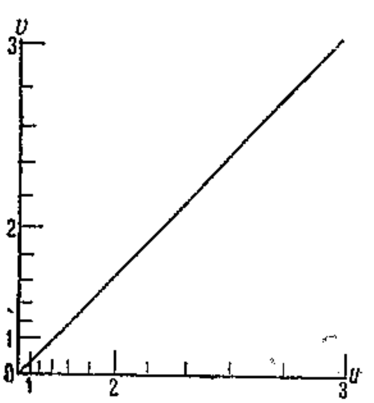
Для данного практического применения, как мы видим, наиболее удобной формой номограммы служит декартов абак, который позволяет определить площадь прямоугольника, не измеряя его сторон.

Глава XI

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СЕТКИ

§ 57. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СЕТКАХ

Возьмем, как и в прямоугольной системе декартовых координат, две взаимно перпендикулярные прямые. На этих прямых построим две функциональные шкалы. Пусть на одной оси (черт. 87) построена функциональная шкала $f_1(u)$ с модулем m_1, назовем эту ось осью u, а на другой оси v построим функциональную шкалу $f_2(v)$ с модулем m_2. Любая точка M плоскости может быть спроектирована на обе взятые нами оси. Проекции этой точки на оси координат будут иметь пометки построенных функциональных шкал. Эти пометки проекций данной точки на функциональных шкалах и носят название функциональных координат точки.



Черт. 87.

В то же время числа x_1 и y_1, измеряющие длину перпендикуляров, проектирующих точку M на оси координат, являются декартовыми координатами точки M.

Легко можно установить зависимость между числами u_1 и v_1, с одной стороны, и x и y — с другой, т. е. установить зависимость между функциональными и декартовыми координатами одной и той же точки. Установим эту зависимость при условии, что начала обеих шкал совпадают с началом координат. Пользуясь уравнением функциональной шкалы, можем написать для точки A, что $x_1 = m_1 f_1(u_1)$ и $y_1 = m_2 f_2(v_1)$. Так как точка A взята нами произвольно, то эти соотношения имеют место для любой точки плоскости, а потому

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 f_1(u); \\ y &= m_2 f_2(v). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

Формулы (XIV) служат формулами перехода от декартовых координат к функциональным, если начала координат и шкал, построенных на осях, совпадают.

Пусть мы имеем, например, биссектрису координатного угла. На осях координат построены функциональные шкалы: на оси u шкала $f_1(u) = u^3$ и на оси v шкала $f_2(v) = v^2$. Длины шкал по 72 *мм*, границы изменения для u и v от 0 до 3 (черт. 87). Модуль шкалы u, т. е. $m_1 = \frac{72}{27-0} = \frac{8}{3}$; модуль шкалы v, т. е. $m_2=\frac{72}{9-0}=8$. В декартовых координатах уравнением биссектрисы координатного угла служит уравнение:

$$y=x.$$

Посмотрим, какой вид имеет уравнение той же прямой, если его выразить в функциональных координатах u и v.

Применяя для перехода от декартовых координат к функциональным формулы (XIV), получим:

$$x=\frac{8}{8}u^3;$$
$$y=8v^2.$$

Заменим x и y в уравнении $y=x$ и придем к уравнению данной прямой в функциональных координатах:

$$v=\frac{1}{8}u^{\frac{3}{2}}.$$

Если через все помеченные точки шкал на осях u и v провести прямые, параллельные осям координат, то эти прямые образуют сетку, которая носит название функциональной сетки. Построенные таким образом сетки помогают отыскивать пометки на осях координат, служащие функциональными координатами точки. Номограммы, состоящие из семейства кривых, построенных на функциональных сетках, называются сетчатыми номограммами.

§ 58. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ КООРДИНАТАМИ И ДЕКАРТОВЫМИ КООРДИНАТАМИ

В предыдущем параграфе было дано общее понятие о функциональных координатах; § 19 главы II был посвящен выяснению представления о функциональной шкале линейной функции, причем была установлена формула

$$f(u)=\frac{lu}{m_1(u_n-u_1)}-\frac{lu_1}{m_1(u_n-u_1)}, \qquad \text{(IV)}$$

позволяющая составлять выражение линейной функции, если дана ее функциональная шкала.

В настоящем параграфе мы выведем формулы перехода от декартовых координат к линейным функциональным.

Положим, что на одной оси координат (u) построена линейная функциональная шкала $f(u)$ с модулем m_1 и на другой оси (v) линейная функциональная шкала $f(v)$ с модулем m_2. Тогда на основании формул (XIV) имеем:

$$x=m_1f(u);$$
$$y=m_2f(v).$$

Если длина шкалы для $f(u)$ равна l_1 и длина шкалы $f(v)$ равна l_2, то по формуле (IV) имеем:

$$f(u)=\frac{l_1}{m_1(u_n-u_1)}u-\frac{l_1u_1}{m_1(u_n-u_1)},$$

и

$$f(v)=\frac{l_2}{m_2(v_p-v_1)}v-\frac{l_1v_1}{m_2(v_p-v_1)}.$$

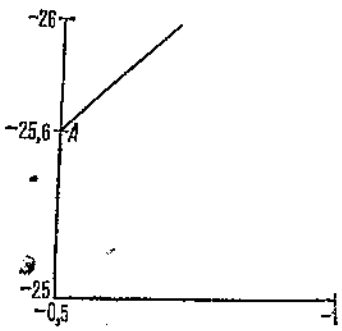
Подставив в формулы (XIV) вместо $f(u)$ и $f(v)$ их значения, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{l_1}{u_n-u_1}u-\frac{l_1u_1}{u_n-u_1};\\ y&=\frac{l_2}{v_p-v_1}v-\frac{l_2v_1}{v_p-v_1}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV)}$$

Формулы (XV) служат формулами перехода от декартовых координат к линейным функциональным координатам.

Понятно, что при переходе от декартовых координат к линейным функциональным порядок кривой, изображаемой уравнением $F(xy) = 0$, не изменяется, так как формулы перехода (XV) линейного вида. На том же основании и обратно, если кривая изображена в функциональных координатах уравнением $\Phi(u, v) = 0$, то при переходе к декартовым координатам по формулам (XV) порядок кривой не изменяется. Следовательно, в частности, любая линейная зависимость в линейных функциональных координатах графически изображается прямой линией.

Пример 1. На осях координат построены функциональные шкалы линейных функций: на оси u с пометками $-0{,}5$ в начале и -1 в конце шкалы: на оси v с пометками -25 в начале и -26 в конце шкалы. Длина и той и другой шкалы 60 *мм*, т. е. $l_1 = l_2 = 60$ (черт. 88). Из точки A под углом в 45° к оси u построена прямая, причем в точке A стоит пометка $-25{,}6$. Написать уравнение этой прямой в функциональных координатах.



Черт. 88.

В прямоугольных декартовых координатах уравнение этой прямой $y = x + 36$, так как угловой коэфициент $k = 1$, и ордината вначале равна $60 \cdot 0{,}6 = 36$.

По формулам (XV) имеем:

$$x = \frac{60}{-1+0{,}5}u - \frac{60\cdot(-0{,}5)}{-1+0{,}5};$$

$$y = \frac{60}{-26+25}v - \frac{60\cdot(-25)}{-26+25},$$

откуда

$$x = -120u - 60$$

и

$$y = -60v - 1500.$$

Подставим значения x и y в уравнение прямой в декартовых координатах и получим:

$$-60v - 1500 = -120u - 60 + 36$$

и окончательно имеем уравнение данной прямой в функциональных координатах:

$$v = 2u - 24{,}6.$$

Пример 2. Дано каноническое уравнение эллипса (черт. 89):

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1. \tag{1}$$

Построить график этого эллипса в виде окружности, изображенной уравнением в линейных функциональных координатах, т. е. уравнением:

$$\frac{u^2}{64} + \frac{v^2}{25} = 1, \tag{2}$$

где u и v — функциональные координаты.

Так как большая полуось эллипса равна 8, то возьмем длины шкал u и v по 8 единиц. Конечные пометки на осях u и v должны быть те же, что и на осях x и y для эллипса, т. е. на оси u конечная пометка точки B равна 8 и на оси v точка C_1 с пометкой 5. Если в уравнении (2) заменить функциональные координаты u и v декартовыми координатами x и y, то мы должны получить уравнение окружности. На самом деле, воспользуемся формулами (XV) и получим:

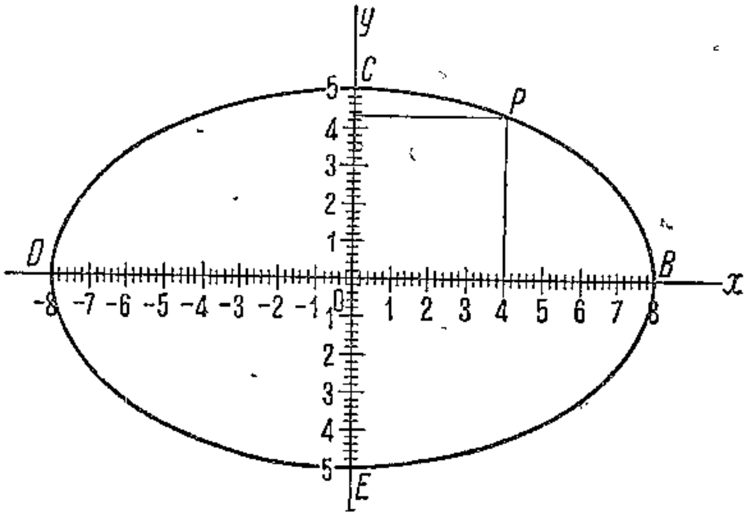
$$x = \frac{8}{8}u \quad \text{и} \quad y = \frac{8}{5}v,$$

откуда $u = x$ и $v = \frac{5}{8}y$.

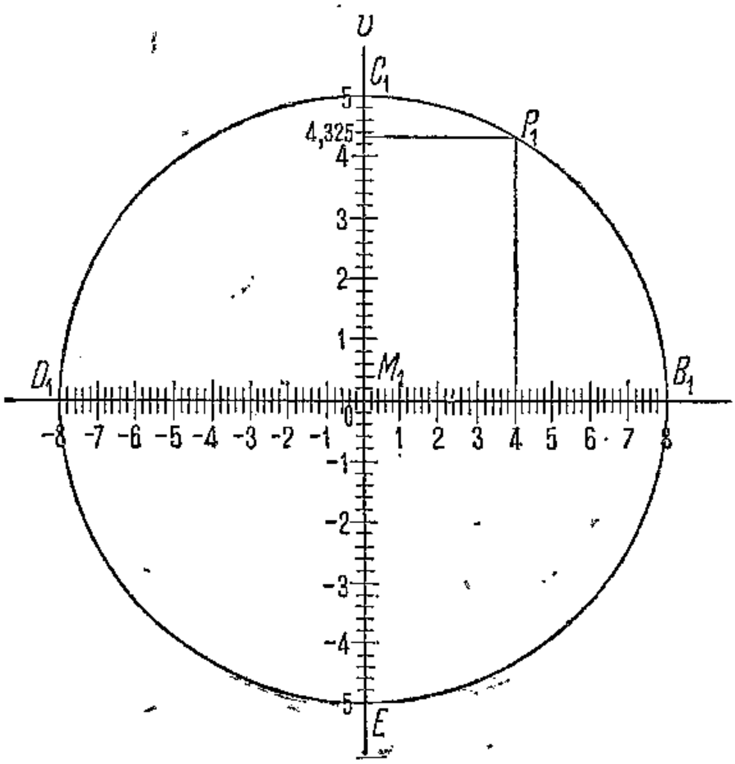
Подставим вместо u и v их значения в уравнение (2) и получим:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{5^2y^2}{64\cdot 25}=1 \text{ или } x^2+y^2=64,$$

т. е. действительно получили окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 8 (черт. 90).



Черт. 89.

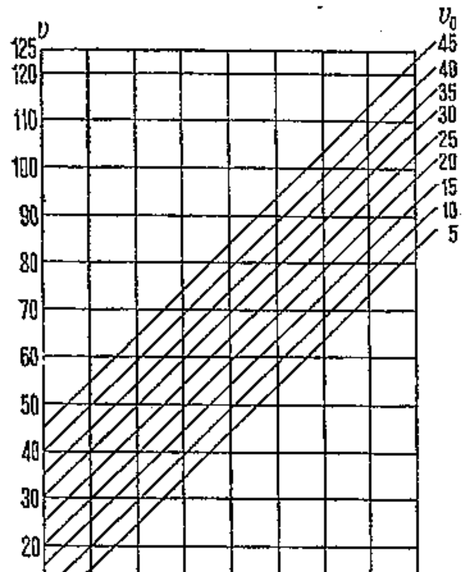


Черт. 90.

Сравнивая черт. 90 с черт. 89, заметим, что координаты u и v в уравнении (2) окружности в функциональных координатах и координаты x и y в уравнении (1) эллипса для соответствующих точек равны. Так, например, для точки P координаты эллипса $x = 4$ и $y = 4{,}8$, соответствующая ей точка окружности P_1 имеет те же функциональные координаты $u = 4$ и $v = 4{,}3$. Совпадение координат соответственных точек двух кривых черт. 89 и 90 показывает, что обе кривые являются графиками одной и той же функциональной зависимости, но только в различных координатах. Так как окружность чертить легче, чем эллипс, то очевидно, что графически легче изобразить уравнение вида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ окружностью, чем эллипсом; нужно только воспользоваться не декартовыми координатами, а функциональными.

§ 59. НОМОГРАММЫ НА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СЕТКАХ

Требуется построить номограмму закона скорости падения в безвоздушном пространстве $v = v_0 + 9{,}8t$ (1). Начальная скорость падения v_0 может быть различна, следовательно, уравнение (1) с тремя переменными — v_0, v и t. Если t и v принять за декартовы координаты, то угол наклона к оси абсцисс параллельных прямых семейства будет больше 84°, так как угловой коэфициент равен 9,8, а такой угол наклона делает номограмму крайне неудобной для пользования.



Черт. 91.

Будем считать уравнение (1) за уравнение прямой в функциональных координатах и найдем уравнение этой же прямой в декартовых координатах.

Дано, что граница изменения для t от 0 до 8 сек. и для v_0 от 5 до 45 *м/сек*. Соответственно этим данным границы изменения для v будут от 5 до 123,4 *м/сек*. или, округлив, до 125 *м/сек*. Возьмем размеры номограммы $l = 80$ *мм* и $l_1 = 120$ *мм*, удобные для пользования ею.

Чтобы перейти от уравнения (1) в функциональных координатах к уравнению той же прямой в декартовых координатах, воспользуемся формулами (XV).

Так как в начале и на конце оси t стоят пометки 0 и 8, а на оси v — пометки 5 и 125 (черт 91), то имеем:

$$x = \frac{80}{8-0}\,t - \frac{80 \cdot 0}{8-0}$$

и

$$y = \frac{120}{125-5}\,v - \frac{120 \cdot 5}{125-5},$$

откуда

$$t = \frac{x}{10} \quad \text{и} \quad v = y + 5.$$

Подставив в уравнение (1) вместо t и v их значения, получаем:

$$y = 0{,}98x + (v_0 - 5).$$

По этому уравнению строим прямые семейства, давая следующие значения параметру v_0:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 и 45 *м/сек* и снабжая эти прямые соответствующими пометками. Прямые строим по угловому коэффициенту 0,98 и значению свободного члена $v_0 - 5$ при данных значениях v_0.

Воспользуемся построенной номограммой (черт. 91) для определения v_0 при $t = 4{,}6$ *сек* и $v = 55$ *м/сек*. Найдя точку с функциональными координатами 4,6 и 55 видим, что через эту точку проходит прямая с пометкой 10, следовательно, $v_0 = 10$ *м/сек*, т. е. чтобы через 4,6 *сек* от начала падения скорость достигла 55 *м/сек*, необходимо падающему телу сообщить начальную скорость 10 *м/сек*.

Пусть теперь дано $v = 105$ и $v_0 = 45$, определить t. Из точки шкалы v с пометкой 105 восставим перпендикуляр к оси v до пересечения с прямой, помеченной 45, из точки пересечения опустим перпендикуляр на ось t и получим, что $t = 6{,}1$ *сек*.

В качестве второго примера построения сетчатой номограммы на линейной функциональной сетке рассмотрим номограмму формулы окружной скорости при вращательном движении:

$$v = \frac{\pi D n}{1000}, \tag{2}$$

где v — скорость точки, лежащей на окружности в метрах в минуту;
D — диаметр окружности в миллиметрах;
n — число оборотов в минуту.

Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$v = \frac{\pi n}{1000} D. \tag{2}$$

Пусть v может изменяться от 0 до 50 *м/мин* и D от 0 до 1000 *мм*. Возьмем длину шкалы D равной 140 *мм* и шкалы v равной 70 *мм*. Примем уравнение $v = \frac{\pi n}{1000} D$ за уравнение прямой в функциональных координатах и перейдем к декартовым координатам. По формулам (XV) имеем:

$$x = \frac{140}{1000} D;$$

$$y = \frac{70}{50} v,$$

откуда

$$D = \frac{x}{0{,}14} \quad \text{и} \quad v = \frac{y}{1{,}4}.$$

После подстановки уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{y}{1{,}4} = \frac{\pi n}{1000} \cdot \frac{x}{0{,}14}$$

или

$$y = \frac{\pi n}{100} x.$$

Полученное уравнение изображает в декартовых координатах пучок прямых с центром в начале координат. Угловой коэфициент отдельной прямой пучка вычисляется по формуле $k = \frac{\pi n}{100}$. Так как значения n выделяют из пучка определенную прямую, то у каждой из них ставим пометкой соответствующее значение n, изменяя его от 10 до 200.

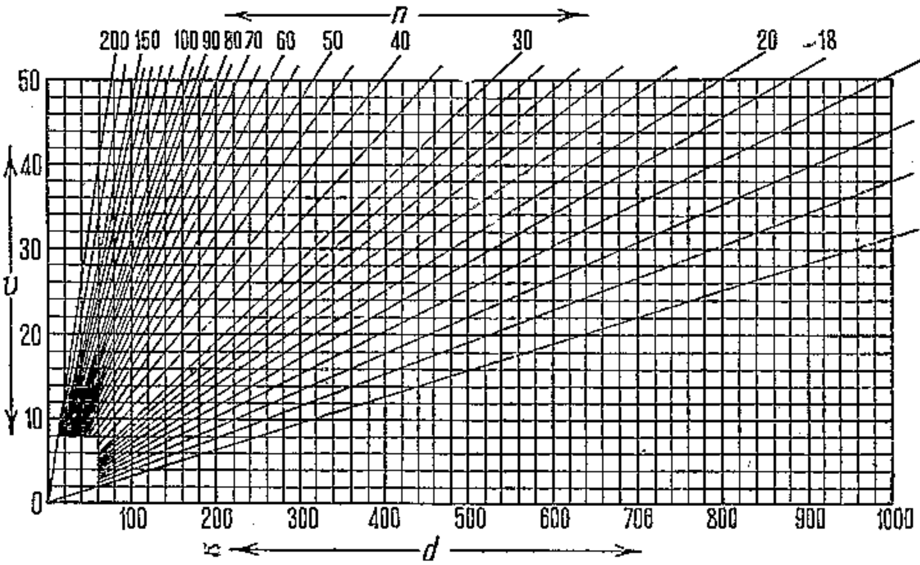
Номограмма изображена на черт. 92.

Определим по черт. 92, какое число оборотов надо сообщить вращающемуся цилиндру, если диаметр его $D = 400$ *мм* и окружная скорость v должна быть 25 *м/мин*. Находим точку с функциональными координатами 400 и 25 и видим, что через эту точку проходит прямая с пометкой 20, следовательно, цилиндру надо сообщить 20 об/*мин*.

Возьмем еще в качестве примера номограммы на линейной функциональной сетке номограмму закона падения тела, брошенного с начальной скоростью v_0:

$$S = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \tag{3}$$

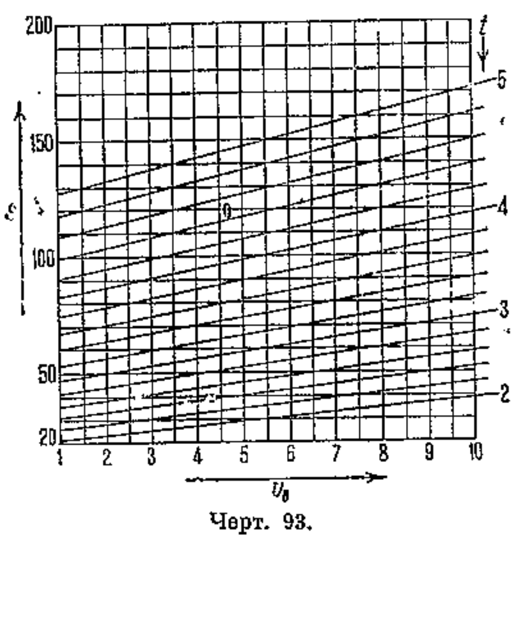
для значений v_0 от 1 до 10 *м/сек* и t от 2 до 5 *сек*. Границы значений S определяются из данного уравнения. Данные размеры номограммы 90 × 90 *мм*. Прежде всего



Черт. 92.

выясним вопрос, какие из трех переменных, входящих в уравнение (3), принять за координаты и какое за параметр.

Так как v_0 и S входят линейно в уравнение (3), а t входит во второй степени, то за параметр принимаем t. В таком случае уравнение (3) будет изображать семейство прямых. Далее замечаем, что в начале координат нам нет необходимости иметь пометкой нуль. На горизонтальной оси построим функциональную шкалу для v_0 с пометкой 1 в начале координат и 10 в конце шкалы. На вертикальной оси построим функциональную шкалу для S с пометкой 20 в начале координат и 200 в конце шкалы (черт. 93).



Черт. 93.

Чтобы построить семейство прямых, изображаемых уравнением

$$S = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

в функциональных координатах, найдем уравнение этого же семейства в декартовых координатах. По формулам (XV) имеем:

$$x = \frac{90}{9} v_0 - \frac{90}{9} = 10\, v_0 - 10;$$

$$y = \frac{90}{180} S - \frac{90 \cdot 20}{180} = 0{,}5\, S - 10.$$

Выразим из этих уравнений v_0 и S через x и y и подставим найденные значения в уравнение (3). Получаем:

$$v_0 = \frac{x+10}{10};$$

$$S = \frac{y+10}{0,5},$$

следовательно, уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{y+10}{0,5} = \frac{x+10}{10}\,t + 4,9\,t^2,$$

или

$$y = \frac{t}{20}\,x + \frac{1}{2}\,(t + 4,9\,t^2 - 20).$$

Получили уравнение, изображающее семейство прямых, угловой коэфициент которых $k = \frac{t}{20}$ и начальная ордината $b = \frac{1}{2}(t + 4,9\,t^2 - 20)$. По этому уравнению строим семейство прямых и получаем номограмму, изображенную на черт. 93.

Глава XII

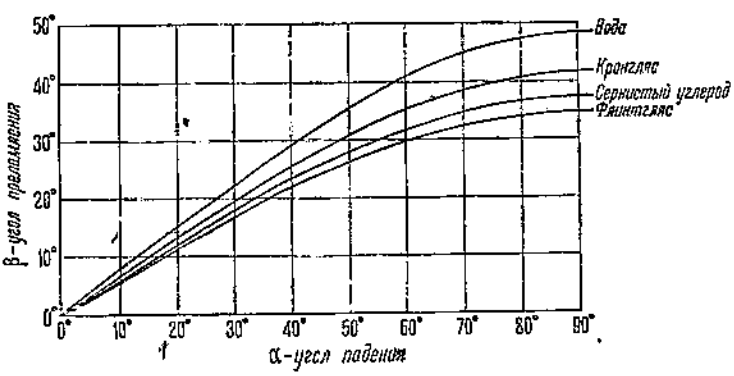
АНАМОРФОЗА ДЕКАРТОВА АБАКА

§ 60. ВЫПРЯМЛЕНИЕ КРИВЫХ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В предыдущих параграфах мы видели, что для уравнения $f_1(x) + f_2(y) = f_3(z)$, в котором два переменных входят в первой степени, может быть построена номограмма, состоящая из семейства прямых.

Пользование функциональными координатами дает возможность: 1) строить номограммы, состоящие из семейства прямых, для уравнения $f_1(x) + f_2(y) = f_3(z)$, и в том случае, если оно нелинейно относительно двух или трех переменных; 2) преобразовывать номограммы, построенные эмпирически и состоящие из семейства кривых, в номограммы, осуществляемые семейством прямых.

Пример 1. Для получения зависимости между углом падения и углом преломления луча, идущего из воздуха в другую среду (вода, кронглас, сернистый углерод, флинтглас), построена эмпирически номограмма, изображенная на черт. 94.



Черт. 94.

На оси абсцисс отложены значения угла падения α, а на оси ординат значения угла преломления β и на основании опыта построены кривые. Для угла падения в 30° при переходе луча из воздуха в воду находим по номограмме угол преломления 22°. Для угла падения в 45° при переходе луча из воздуха в сернистый углерод (жидкий) находим угол преломления в 26° и т. д.

Чтобы выразить ту же зависимость между углами падения и преломления, построим на осях координат функциональные шкалы $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ и воспользуемся тем, что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления имеет постоянные значения для данной среды (показатель преломления). Для воды показатель преломления 1,33, для кронгласа 1,52, для сернистого углерода 1,63, для флинтгласа 1,75. Приняв числа, обратные показателям преломления, за угловые коэфициенты для соответствующих прямых, строим по этим угловым коэфициентам прямые, проходящие через начало координат, и получаем номограмму, изображенную на черт. 95.

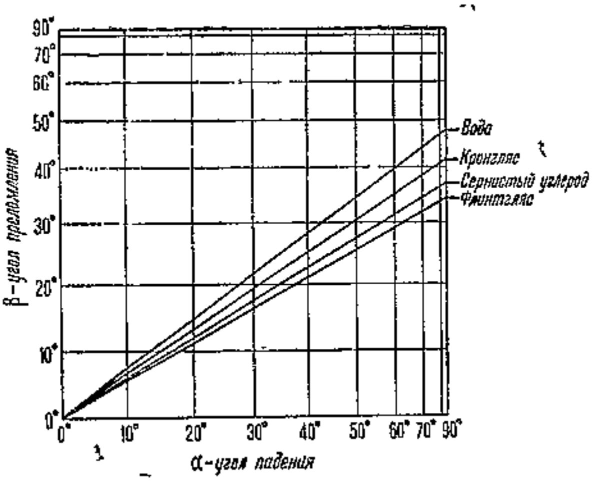
Такого вида номограммы носят название лучевых, или радиантных.

Пример 2. При определении количества кубических метров Q воды, вытекающей в 1 сек. через прямоугольное отверстие шириной в 1 *м* в тонкой вертикальной стенке, пользуются формулой:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 0{,}62 \sqrt{2g} \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right), \tag{1}$$

где h_2 — расстояние от поверхности воды до нижнего края отверстия;

h_1 — то же до верхнего края отверстия (см. § 45).



Черт. 95.

В уравнении (1) три переменные Q, h_1 и h_2. Построим при помощи функциональных координат номограмму для уравнения (1), состоящего из семейства прямых.

Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$Q = 1{,}82 \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right). \tag{2}$$

Для перехода от функциональных координат к декартовым воспользуемся формулами (XIV) и получим:

$$x = m_1 f(h_2);$$
$$y = m_2 f(h_1).$$

Примем $m_1 = m_2 = 18{,}2$, тогда, так как $f(h_2) = h_2^{\frac{3}{2}}$ и $f(h_1) = h_1^{\frac{3}{2}}$, имеем:

$$x = 18{,}2\, h_1^{\frac{3}{2}},$$

$$y = 18{,}2\, h_2^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$h_2^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{18{,}2} \quad \text{и} \quad h_1^{\frac{3}{2}} = \frac{y}{18{,}2}.$$

Подставим полученные значения $h_2^{\frac{3}{2}}$ и $h_1^{\frac{3}{2}}$, выраженные через декартовы координаты x и y, в уравнение (2) и найдем:

$$10Q = x - y$$

или

$$y = x - 10Q. \tag{3}$$

Уравнение (3) изображает семейство параллельных прямых в декартовых координатах, образующих угол в 45° с осью абсцисс (черт. 96).

Пусть h_2 может изменяться от 0 до 5 *м* и h_1 от 0 до 4 *м*. Так как модуль взят нами в 18,2 *мм*, то l_1 (по оси h_1) равно $18{,}2 \cdot f(4) = 18{,}2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} \approx 145{,}6$ *мм* ≈ 146 *мм* и l_2 (по оси h_2) равно $18{,}2 \cdot f(5) \approx 204$ *мм*. Построение функциональных шкал ведется по уравнениям шкал:

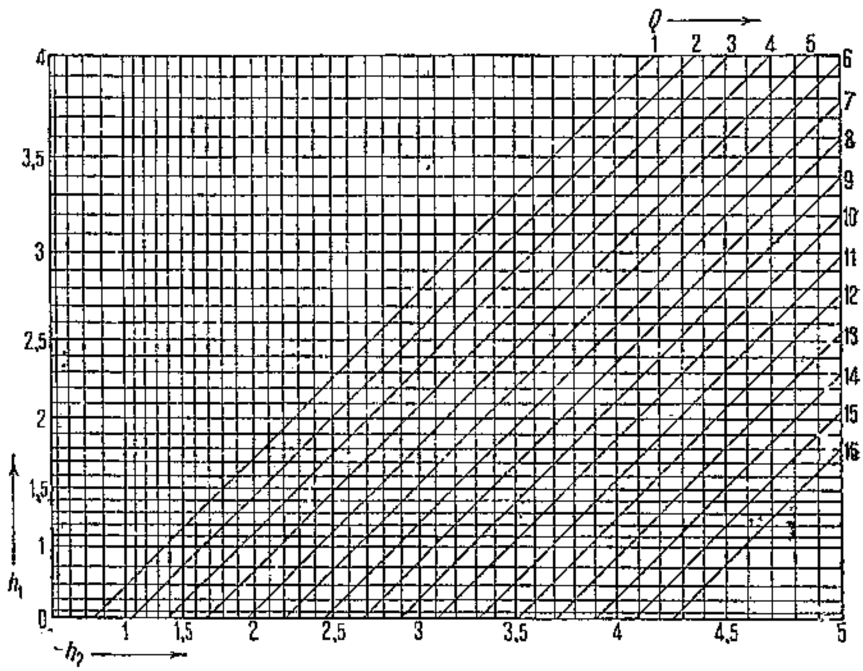
$$x = 18{,}2\, h_2^{\frac{3}{2}}$$

и

$$y = 18{,}2\, h_1^{\frac{3}{2}},$$

Так, для $f(1) = 1^{\frac{3}{2}}$ получаем $x = y = 18{,}2$ *мм*,

для $f(2) = 2^{\frac{3}{2}}$ получаем $x = y = 18{,}2 \cdot 2{,}83 \approx 51{,}5$ *мм* и т. д.



Черт. 96.

Построение прямых, соответствующих значениям параметра Q, можно сделать очень просто, исходя из следующих соображений. Уравнение этих прямых в декартовых координатах $y = x - 10Q$, следовательно, абсцисса точек их пересечения с осью абсцисс определяется из уравнения $x - 10Q = 0$, откуда $\frac{x}{10} = Q$.

Полагая $Q = 1$, находим, что $x = 10$ *мм*; для $Q = 2$ получим $x = 20$ *мм* и т. д. Зная, что прямые семейства, изображенного уравнением (3), наклонены под углом в 45°, проводим их через каждые 10 *мм* по оси абсцисс и ставим пометки 1, 2, 3, ...

По номограмме (черт. 96) находим, например, что при $h_2 = 4$ *м* и $h_1 = 2{,}8$ *м* количество вытекающей в 1 сек. воды $Q = 6$ *м*^{3}.

На практике особенно часто пользуются логарифмическими координатами, к изучению свойств которых и переходим.

§ 61. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И ДЕКАРТОВЫМИ КООРДИНАТАМИ

Если в начале координат стоит пометка 1, то формулами, выражающими зависимость между логарифмическими и декартовыми координатами, служат уравнения шкал:

$$x = m_1 \lg u \quad \text{и} \quad y = m_2 \lg v, \tag{XVI}$$

где x и y декартовы координаты, а u и v функциональные — логарифмические.

Возьмем уравнение прямой, проходящей через начало координат, в декартовых координатах

$$y = kx$$

и заменим в нем x и y их выражениями через логарифмические u и v; получим

$$m_2 \lg v = km_1 \lg u,$$

откуда имеем

$$v = u^{k \frac{m_1}{m_2}}. \tag{1}$$

Если модули обеих логарифмических шкал одинаковы, то уравнение (1) примет вид:

$$v = u^k. \tag{2}$$

На основании сказанного заключаем, что прямая, проходящая через начало координат и наклоненная к оси u под углом, тангенс которого равен k, в логарифмических координатах служит графиком уравнения (2).

Построение прямых, изображаемых уравнениями (2), проще всего делать по угловому коэфициенту k.

Пусть, например, надо построить в логарифмических координатах прямую, данную уравнением $v = u^{0,9}$. Достаточно взять точку с декартовыми координатами 10 и 9 и соединить ее с началом координат. Полученная прямая и будет графиком уравнения $v = u^{0,9}$ в логарифмических координатах.

Возьмем теперь уравнение прямой, не проходящей через начало координат. Ее уравнение в декартовых координатах

$$y = kx + b.$$

Положим, что прямая пересекает ось v в точке, пометка которой c, тогда $b = m_2 \lg c$.

Переходим к логарифмическим координатам и получаем:

$$m_2 \lg v = km_1 \lg u + m_2 \lg c,$$

откуда

$$v = cu^{k \frac{m_1}{m_2}}. \tag{3}$$

В частности, когда $m_1 = m_2$, уравнение (3) принимает вид:

$$v = cu^k. \tag{4}$$

Следовательно, прямая, пересекающая ось v в точке с пометкой c и наклоненная к оси u под углом, тангенс которого равен k, служит в логарифмических координатах графиком уравнения (4).

Часто при практическом построении номограмм нет надобности ставить пометки 1 в начале координат, а приходится ставить пометки, не равные единице.

Положим, что в начале координат по оси u стоит пометка a_1 и по оси v пометка a_2 (черт. 97).

Найдем зависимость между декартовыми и логарифмическими координатами для этого случая.

Пусть на оси u построена логарифмическая шкала с модулем m_1 и на оси v логарифмическая шкала с модулем m_2. В таком случае $x = m_1\,(\lg u - \lg a_1)$ и $y = m_2\,(\lg v - \lg a_2)$, если пометки идут возрастая от начала координат.

Откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 \lg \frac{u}{a_1}; \\ y &= m_2 \lg \frac{v}{a_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII)}$$

Пусть теперь пометки на шкалах идут, убывая от начала координат. В таком случае $m_1(\lg u - \lg a_1)$ и $m_2(\lg v - \lg a_2)$ будут числами отрицательными, между тем как координаты x и y, откладываемые от начала вправо и вверх, должны считаться положительными.

Ввиду этого

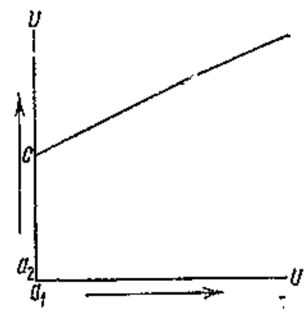
$$x = -m_1(\lg u - \lg a_1) \text{ и } y = -m_2(\lg v - \lg a_2).$$

Для того случая, когда пометки идут от начала координат убывая, имеем:

$$x = m_1\,(\lg a_1 - \lg u);$$
$$y = m_2\,(\lg a_2 - \lg v),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 \lg \frac{a_1}{u}; \\ y &= m_2 \lg \frac{a_2}{v}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVIII)}$$



Черт. 97.

Понятно, что может быть и такой случай, когда пометки по одной оси идут возрастая, а по другой убывая. Тогда приходится брать одну формулу из формул (XVII) и другую из формул (XVIII). Пользуясь формулами (XVII) и (XVIII), легко по данной номограмме, состоящей из семейства прямых на логарифмической сетке, найти уравнение функции, для которой построена эта номограмма. Воспользуемся черт. 97. (Стрелками показано возрастание пометок.)

Положим, что одна прямая некоторого семейства пересекает вертикальную ось в точке с пометкой c.

Возьмем уравнение прямой с угловым коэфициентом в декартовых координатах, т. е. $y = kx + b$. По формулам (XVII) имеем $x = m_1 \lg \frac{u}{a_1}$ и $y = m_2 \lg \frac{v}{a_2}$, кроме того $b = m_2 \lg \frac{c}{a_2}$.

Подставляем значения x и y и b в уравнение прямой и получаем:

$$m_2 \lg \frac{v}{a_2} = km_1 \lg \frac{u}{a_1} + m_2 \lg \frac{c}{a_3},$$

откуда

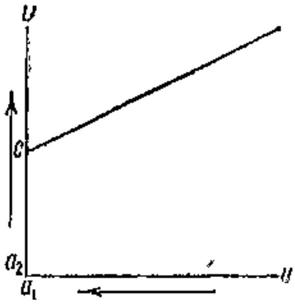
$$v^{m_2} = \frac{c^{m_2} u^{km_1}}{a_1^{km_1}}. \qquad \text{(XIX)}$$

Если модули обеих шкал одинаковы, т. е. $m_1 = m_2$, то уравнение (XIX) принимает вид:

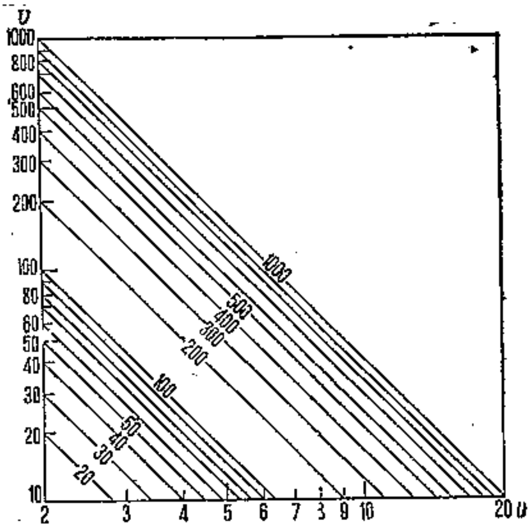
$$v = c\left(\frac{u}{a_1}\right)^k. \qquad \text{(XX)}$$

В этом уравнении v и u логарифмические координаты, c, k и a_1 произвольные постоянные. Если v и u считать за декартовы координаты, то уравнение (XX) изображало бы семейство кривых. Каждая такая кривая благодаря логарифмическим координатам выпрямляется в прямую.

Найдем теперь тот вид уравнения, для которого номограмма в логарифмических координатах осуществляется семейством прямых, если пометки на оси v идут возрастая, а на оси u убывая (черт. 98).



Черт. 98.



Черт. 99.

В этом случае

$$x = m_1 \lg \frac{a_1}{u}; \quad y = m_2 \lg \frac{v}{a_2}; \quad b = m_2 \lg \frac{c}{a_2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение прямой $y = kx + b$, получим:

$$m_2 \lg \frac{v}{a_2} = k m_1 \lg \frac{a_1}{u} + m_2 \lg \frac{c}{a_2},$$

откуда

$$v^{m_2} = \frac{c^{m_2} a_1^{k m_1}}{u^{k m_1}}. \tag{XXI}$$

При $m_1 = m_2$ имеем:

$$v = c \left(\frac{a_1}{u}\right)^k. \tag{XXII}$$

В качестве упражнения предлагается убедиться, что формулы (XIX) и (XX) справедливы для случая, когда пометки на обеих осях идут убывая от начала координат, а формулы (XXI) и (XXII) справедливы для случая, когда на оси u пометки идут возрастая, а на оси v убывая.

Пример. Положим, что имеется номограмма размером 100 × 100 *мм*, состоящая из семейства параллельных прямых, наклоненных под углом в 135° к оси u (черт. 99), на логарифмической сетке. Найдем уравнение, для решения которого служит эта номограмма.

Мы видим по пометкам, стоящим в начале координат и в конце шкал, что пометки на обеих осях идут возрастая, а потому воспользуемся формулой (XIX). Кроме того пусть пометки точек, в которых прямые семейства пересекают ось v, будут w. Прежде всего находим модули m_1 и m_2. Так как на шкале u начальная и конечная пометки 2 и 20, а на шкале v пометки 1000 и 10, то получим:

$$m_1 = \frac{100}{\lg 20 - \lg 2} = 100 \text{ мм};$$

$$m_2 = \frac{100}{\lg 1000 - \lg 10} = 50 \text{ мм}.$$

Подставляем найденные значения m_1 и m_2 и данное значение k в формулу (XIX) и получаем:

$$v^{50} = \frac{w^{50} u^{-100}}{2^{-100}},$$

откуда

$$v = \frac{4w}{u^2} \quad \text{или} \quad u^2 v - 4w = 0.$$

Для решения этого уравнения служит номограмма (черт. 99).

§ 62. НОМОГРАММЫ НА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СЕТКЕ

Если на осях координат нанести логарифмические шкалы и через помеченные точки этих шкал провести прямые, параллельные осям координат, то получится сетка, образованная двумя семействами параллельных прямых. Такая сетка носит название логарифмической сетки. При построении логарифмических шкал на осях координат можно модули брать и различными, и одинаковыми. Имеющаяся в продаже логарифмическая бумага представляет собой логарифмическую сетку при равных между собой модулях обеих шкал, например при $m_1 = m_2 = 100$ *мм* или $m_1 = m_2 = 250$ *мм* и т. п.

В предыдущем параграфе было указано, что при помощи логарифмических координат можно производить преобразование декартова абака, выпрямляющее все линии абака.

Это преобразование носит название логарифмической анаморфозы.

Рассмотрим несколько примеров построения номограмм на логарифмической сетке.

П р и м е р 1. В § 55 была дана номограмма умножения Пушэ, состоящая из семейства равносторонних гипербол. Формула (XXII) предыдущего параграфа показывает, что для уравнения вида $v = c\left(\frac{a_1}{u}\right)^k$ на логарифмической сетке может быть построена номограмма, состоящая из семейства прямых, отнесенных к логарифмическим координатам. При $k = 1$ и $a_1 = 1$ уравнение (XXII) принимает вид:

$$vu = c, \tag{1}$$

т. е. уравнение равносторонней гиперболы, если v и u считать за декартовы координаты.

Примем v и u за логарифмические координаты и для перехода к декартовым воспользуемся формулами (XVI).

Из этих формул при условии, что $m_2 = m_1$, имеем $u = 10^{\frac{x}{m_1}}$ и $v = 10^{\frac{y}{m_1}}$. Подставив значения u и v в уравнение $vu = c$, получаем

$$10^{\frac{x}{m_1} + \frac{y}{m_1}} = c$$

или, полагая $m_1 = m$,

$$x + y = m \lg c,$$

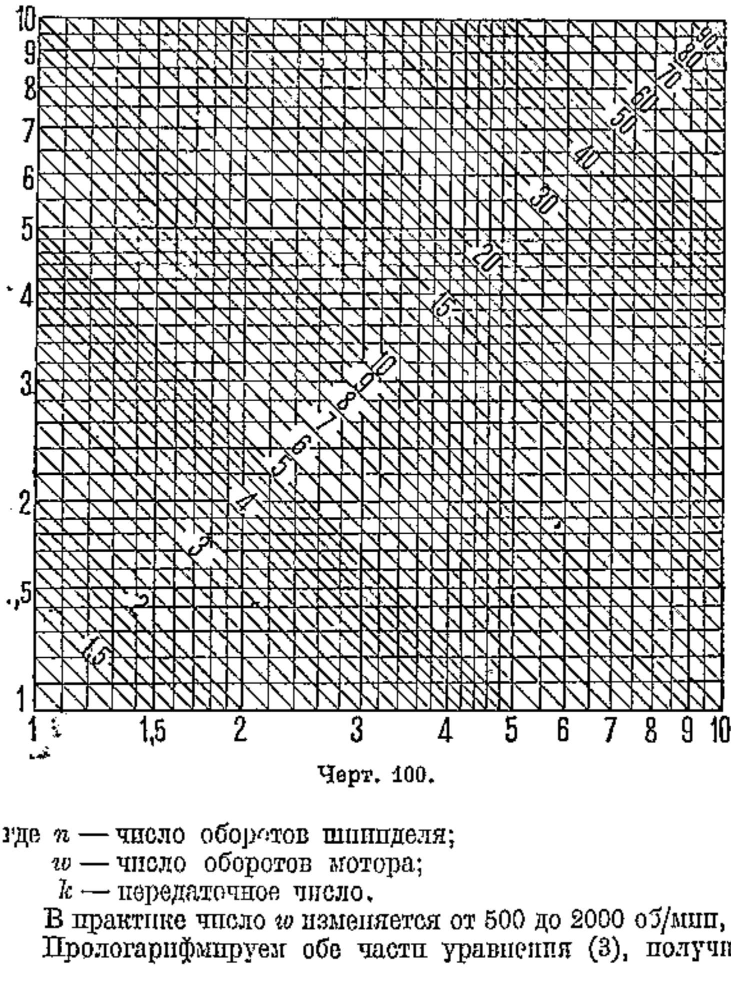
откуда

$$y = -x + m \lg c. \tag{2}$$

Получили уравнение семейства прямых, наклоненных к оси абсцисс под углом в 135°. Легко заметить, что пометки этих прямых, равные значениям параметра c, равны пометкам точек пересечения прямых с осью ординат или с осью абсцисс, так как при $x = 0$ имеем $m \lg c = y$, а при $y = 0$ имеем $m \lg c = x$. К тому же самому уравнению (2) можно было притти, сначала прологарифмировав уравнение (1), а затем уже применив формулу (XVI). На самом деле, после логарифмирования уравнения (1) получаем:

$$\lg v + \lg u = \lg c.$$

Так как $\lg u = \frac{x}{m}$ и $\lg v = \frac{y}{m}$ (из формул XVI), то, заменяя $\lg u$ и $\lg v$ их значениями, приходим опять к уравнению (2):



Черт. 100.

$$y = -x + m \lg c.$$

Положим $m=10$ *мм* и построим семейство прямых по уравнению:

$$y = -x + 100 \lg c.$$

Получим номограмму умножения (черт. 100).

Только что изложенная анаморфоза номограммы Пушэ была дана Лаланом в 1843 г., как первый пример анаморфозы декартова абака.

Пример 2. Построим номограмму для формулы, по которой производится подсчет оборотов шпинделя токарного станка при зубчатой передаче от отдельного мотора [1]). Формула имеет вид:

$$n = wk, \tag{3}$$

где n — число оборотов шпинделя;
w — число оборотов мотора;
k — передаточное число.

В практике число w изменяется от 500 до 2000 об/мин, число k — от 0,01 до 1. Прологарифмируем обе части уравнения (3), получим

$$\lg w = -\lg k + \lg n. \tag{4}$$

На горизонтальной оси построим логарифмическую шкалу для k и на вертикальной для w. Так как логарифмическая шкала для k повторится два раза (от 0,01 до 0,1 и от 0,1 до 1), то при длине ее в 200 *мм* (размер чертежа) модуль $m_1 = 100$ *мм*; длину шкалы w возьмем 100 *мм*, тогда

$$m_2 = \frac{100}{\lg 2000 - \lg 500} \approx 166 \text{ мм}.$$

Чтобы перейти от уравнения (4) к уравнению семейства прямых в декартовых координатах, применим формулы (XVII) предыдущего параграфа.

[1]) *Н. П. Зархий*, Паспортизация станков, ГНТИ, 1931.

Получаем:

$$x = 100 \lg \frac{k}{0{,}01},$$

$$y = 166 \lg \frac{w}{500},$$

откуда

$$\lg k = \frac{x}{100} - \lg 100;$$

$$\lg w = \frac{y}{166} + \lg 500.$$

После замены в уравнении (4) k и w их значениями имеем:

$$\frac{y}{166} + \lg 500 = -\frac{x}{100} + \lg 100 + \lg n,$$

или

$$y = -1{,}66\,x + 166 \lg \frac{n}{5}. \qquad (5)$$

Получим уравнение семейства прямых, наклоненных под углом 59° к оси абсцисс. Для построения семейства параллельных прямых и снабжения их соответствующими пометками можно воспользоваться следующими соображениями.

Из уравнения (5) видим, что абсциссы точек пересечения (при $y = 0$) этих прямых с осью абсцисс будут получаться из формулы $x = 100 \lg \frac{n}{5}$, в то же время мы имеем, что $x = 100 \lg \frac{k}{0{,}01}$. Отсюда можем установить соответствие между пометками n и k для одной и той же абсциссы x. На самом деле в таком случае имеем $100 \lg \frac{n}{5} = 100 \lg \frac{k}{0{,}01}$, откуда получаем $\frac{n}{5} = \frac{k}{0{,}01}$, или $n = 500\,k$.

Следовательно, чтобы получить пометку n, достаточно соответствующую пометку k умножить на 500. Исходя из тех же соображений устанавливаем зависимость между пометками n и w, т. е. полагаем $x = 0$, находим $y = 166 \lg \frac{n}{5}$ и далее получаем $\frac{n}{5} = \frac{w}{500}$, откуда $n = \frac{w}{100}$.

Следовательно, чтобы получить пометку n, надо соответствующую w разделить на 100. После изложенного построение номограммы не представляет затруднений (черт. 101).

Пусть, например, требуется определить число оборотов мотора, если число оборотов шпинделя $n = 180$ и передаточное число $k = 0{,}12$. По номограмме находим $w = 1500$ об/мин.

Пример 3. Построим номограмму для уравнения из гидравлики

$$Q = 0{,}2 \sqrt{D^5 I}, \qquad (6)$$

где Q — количество воды в литрах, протекающее в 1 сек. по трубе;
D — диаметр трубы в сантиметрах;
I — наклон трубы.

Логарифмируем обе части уравнения и получаем:

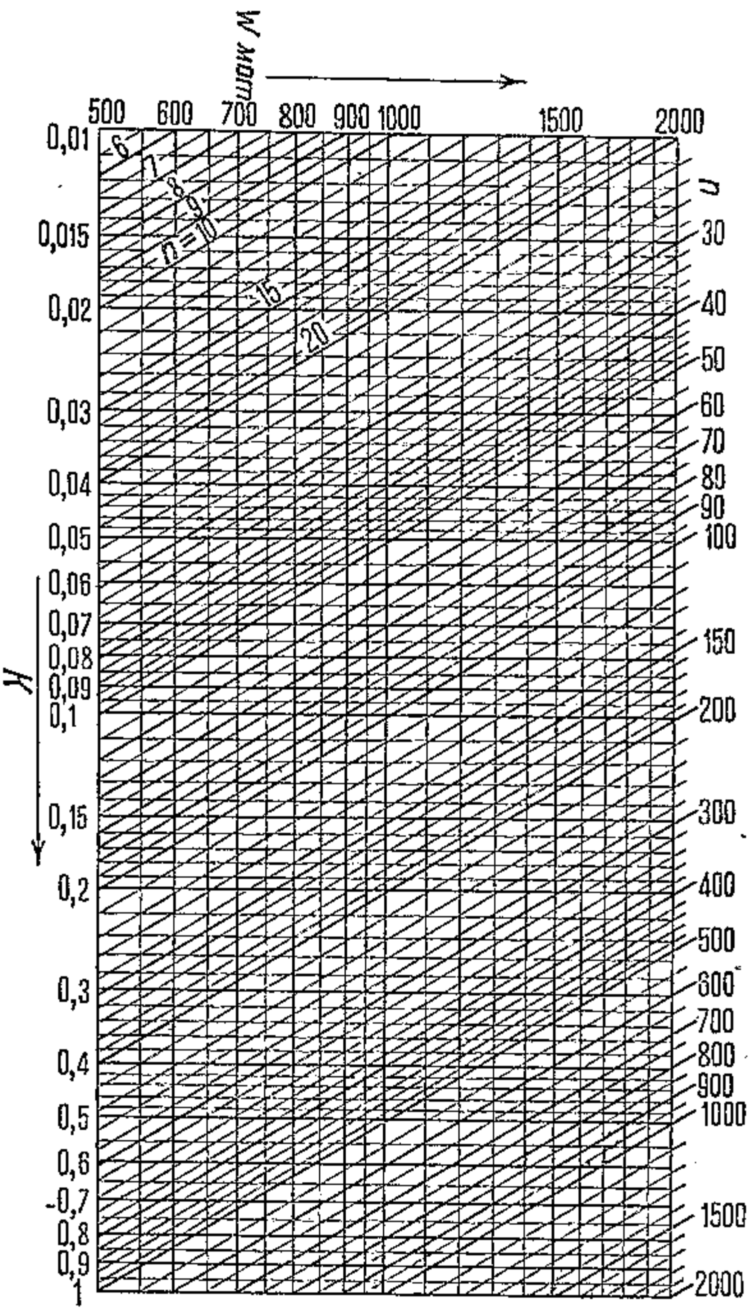
$$\lg Q = \lg 0{,}2 + \frac{5}{2} \lg D + \frac{1}{2} \lg I,$$

откуда

$$\lg I = -5 \lg D + 2 \lg 5Q. \qquad (7)$$

Пусть D изменяется от 1 до 100 *см*, I от 0,0001 до 0,01 и Q от 0,1 до 200 *л* в сек. Размер номограммы 100 × 100 *мм*. На одной оси строим логарифмическую шкалу для D, на другой для I (черт. 102); исходя из этих данных, получаем:

$$m_1 = \frac{100}{\lg 100 - \lg 1} = 50 \text{ мм}; \quad m_2 = \frac{100}{\lg 0{,}01 - \lg 0{,}0001} = 50 \text{ мм}.$$



Черт. 101.

По формулам (XVII) имеем:

$$x=50\lg D;$$

$$y=50\lg\frac{I}{0{,}0001},$$

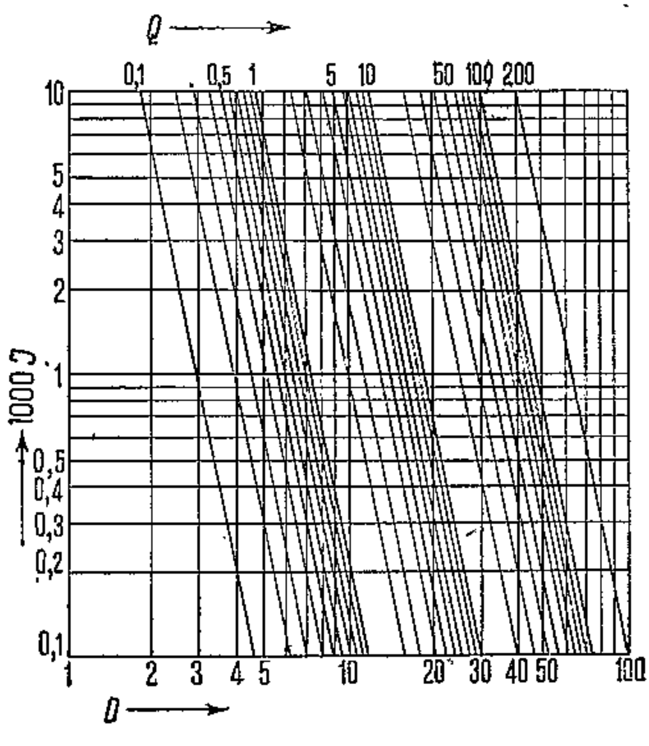
откуда

$$\lg D=\frac{x}{50}\quad\text{и}\quad\lg I=\frac{y}{50}-4.$$

Подставляем полученные значения для $\lg D$ и $\lg I$ в уравнение (7) и приходим к уравнению прямой в декартовых координатах:

$$y=-5x+100\lg 500\,Q. \tag{8}$$

Для построения прямых семейства находим точки пересечения этих прямых с осью абсцисс, строим одну какую-нибудь прямую по тангенсу угла наклона, равному -5, а затем проводим остальные прямые, ей параллельные. Так, для $Q=0{,}1$ имеем $y=-5x+100\lg 50$ или $y=-5x+170$. Положив $y=0$, находим $x=34$, т. е. прямая с пометкой 0,1 пересекает ось абсцисс на расстоянии 34 *мм* от начала координат. Проводим через эту точку прямую, наклоненную к оси абсцисс под углом, тангенс которого равен -5, и помечаем эту прямую пометкой 0,1. Берем следующее значение $Q=0{,}2$, находим точку пересечения прямой, соответствующей этому значению Q, с осью абсцисс, для чего опять в уравнении (8) полагаем $y=0$. Получаем $x=40$, а потому через точку, отстоящую от начала координат на расстоянии 40 *мм*, проводим прямую, параллельную первой прямой, и помечаем ее пометкой 0,2 и т. д. Для $D=40$ *см* и $I=0{,}002$ находим $Q=90$.



Черт. 102.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить номограмму уравнения $S=0{,}4t+S_0$ в виде декартова абака, если S_0 может принимать значения: 0, 5, 10, 15, 20, 25 и 30; границами изменения t служат 0 и 40. Размеры номограммы взять 80×100 *мм*.

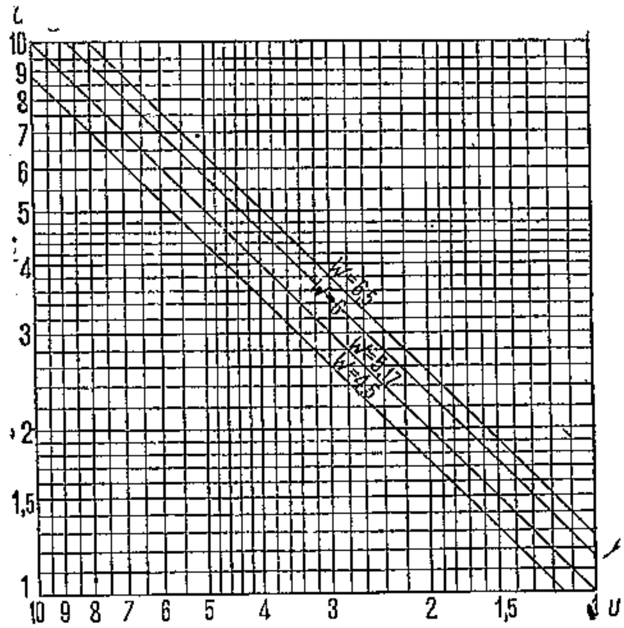
2. Построить номограмму уравнения $\frac{x}{5z}+\frac{y}{z}=1$ в виде декартова абака, если z может принимать целые значения 2, 4, 6, 8, 10 и 12. По построенной номограмме найти все правильные дроби с данными знаменателями, сумма которых равна 1.

3. Построить номограмму квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$ в виде декартова абака, если p и q имеют границами изменений -12 и $+12$ и z может иметь целые значения от -10 до $+10$.

4. Построить номограмму уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в виде декартова абака.

5. Построить номограмму для формулы деления $\frac{x}{y} = z$, давая z значения 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; ...; 1; 2; 3; ... 100. Указание: номограмма должна состоять из семейства прямых (лучей), проходящих через начало координат.

6. Стороны прямого угла приняты за оси координат u и v. На оси u нанесена шкала $f_1(u) = u$ с модулем m_1, на оси v нанесена функциональная шкала функции $f_2(v) = v^2$ с тем же модулем m_1 *мм*. Написать уравнение биссектрисы координатного угла в функциональных координатах.



Черт. 103.

7. На осях координат построены функциональные линейные шкалы: на оси u с пометками 1 в начале шкалы и — 3 в конце шкалы, на оси v с пометками — 2 в начале и 1 в конце. Длины шкал по 60 *мм*. Из точки C с пометкой 0 под углом в 60° к оси u проведена прямая. Составить уравнение этой прямой в функциональных координатах.

8. Построить номограмму уравнения $v = v_0 + 9{,}8\,t$ для значений v_0 от 10,4 до 50 *м/сек* и для t от 2 до 10 сек.

9. По номограмме предыдущей задачи найти: 1) v при $v_0 = 35$ *м/сек* и $t = 5$ сек. 2) t при $v = 81$ *м/сек* и $v_0 = 37$ *м/сек*.

10. Дана номограмма (черт. 103) на логарифмической сетке, угол наклона семейства прямых к оси u равен 135°. Найти уравнение, для решения которого служит эта номограмма. Размер номограммы 100×100 *мм*.

11. Построить номограмму уравнения $v = \pi r^2 h$ (объем цилиндра) на логарифмической сетке при условии, что r изменяется от 10 до 30 *см* и h изменяется от 20 до 60 *см*.

12. Построить номограмму уравнения $d = 3{,}85\ \sqrt[3]{l} \cdot \sqrt[3{,}3]{F}$,
где d — диаметр обтачиваемого предмета;
l — длина его;
F — сечение стружки в квадратных миллиметрах;
d — изменяется от 5 до 150 *мм*, l от 10 до 1000 *мм* и
F — от 1 до 50 *мм*^{2}.

13. По номограмме (черт. 95) определить угол преломления луча при переходе его: 1) из воздуха в воду, если угол падения $\alpha = 50°$, 2) из воздуха в флинтглас, если $\alpha = 37°{,}5$.

14. По номограмме (черт. 96) определить количество воды Q, вытекающее в 1 сек. через прямоугольное отверстие шириной в 1 *м* в тонкой вертикальной стенке, если: 1) $h_2 = 3{,}2$ *м* и $h_1 = 1{,}5$ *м*, 2) $h_2 = 2{,}5$ *м* и $h_1 = 1{,}9$ *м*.

15. По номограмме (черт. 101) определить число оборотов шпинделя станка n, если: 1) число оборотов шестерни на моторе $w = 950$ и передаточное число $k = 0{,}75$; 2) $w = 1200$ и $k = 0{,}04$.

16. По номограмме (черт. 102) определить Q, если: 1) $D = 10$ *см* и $I = 0{,}001$; 2) $D = 30$ и $I = 0{,}0026$.

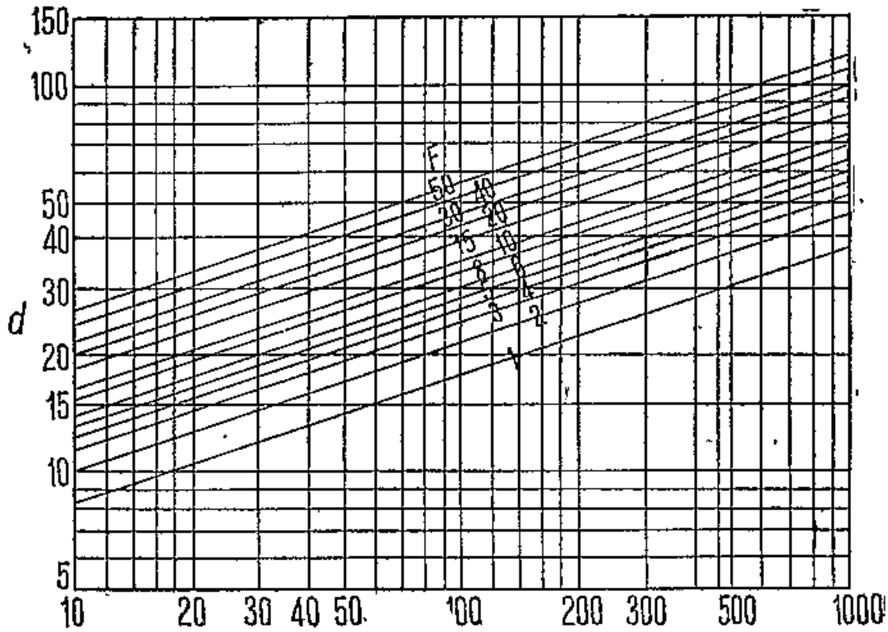
Ответы

6. $v^2 = u$.

7. $20v + 15\sqrt{3}\cdot u - 15\sqrt{3} = 0$.

8. *Указание*: длину шкалы t можно взять 80 *мм* и длину шкалы v—120 *мм*.

9. 4,5 сек.



Черт. 104.

10. *Указание*: воспользовавшись формулой (XXII), найдем уравнение $C = 10\,\frac{v}{u}$, где C — пометка точек пересечения прямых с осью v. Уравнение будет иметь вид: $w = 5{,}17\,\frac{v}{u}$.

12. *Указание*: размеры номограммы можно взять 100×75 *мм* с одним и тем же модулем $m = 50$ *мм*; ответом служит черт. 104.

13. $\beta = 35°$; $\beta = 20°$.

14. $Q = 7$ *м*^{3}; $Q = 2{,}5$ *м*^{3}.

15. $n = 700$ об/мин; $n = 48$ об/мин.

16. $Q = 2$ *л/сек*; $Q = 50$ *л/сек*.

НОМОГРАММЫ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Глава XIII

НОМОГРАММЫ НА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СЕТКЕ

§ 63. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Мы знаем, что уравнение $y = kx + b$ (1) при переменном b изображает семейство параллельных прямых. Перейдя к функциональным координатам при помощи формул

$$x = m_1 f_1(u);$$
$$y = m_2 f_2(v),$$

найдем, что уравнение вида

$$m_2 f_2(v) - k m_1 f_1(u) = b \tag{2}$$

изображает при переменном b семейство параллельных прямых в функциональных координатах.

Представим себе, что на тех же осях координат, на которых нанесены функциональные шкалы $f_1(u)$ и $f_2(v)$, построены еще шкалы для функций $f_3(t)$ и $f_4(w)$. Тогда, перейдя в уравнении (1) от декартовых координат к новым функциональным t и w, получим, что уравнение $m_4 f_4(w) - k m_3 f_3(t) = b$ (3) будет изображать то же самое семейство прямых в функциональных координатах t и w. Легко доказать, что если точки $A(u_1, v_1)$ и $B(t_1, w_1)$ лежат на одной прямой l, то четыре числа u_1, v_1, t_1 и w_1 удовлетворяют уравнению:

$$m_2 f_2(v) - k m_1 f_1(u) = m_4 f_4(w) - k m_3 f_3(t).$$

В самом деле, если точка A лежит на прямой l, то координаты точки A удовлетворяют уравнению (2) при значении b, соответствующем этой прямой; в то же время, если точка B лежит на той же прямой l, то координаты точки B удовлетворяют уравнению (3) при том же значении b, так как значение b дает нам определенную прямую семейства. Следовательно, если точки A и B лежат на одной и той же прямой, то координаты их удовлетворяют уравнению:

$$m_2 f_2(v) - k m_1 f_1(u) = m_4 f_4(w) - k m_3 f_3(t). \tag{XXIII}$$

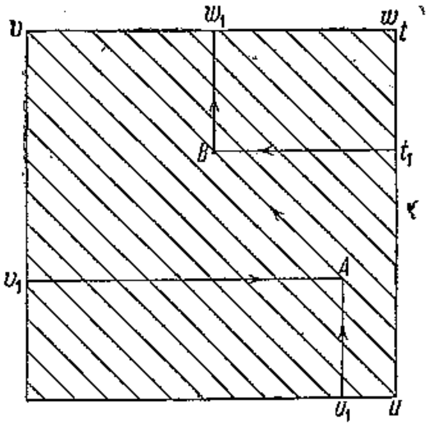
Так как полученное уравнение не зависит от b, а зависит только от k, то оно справедливо для всех прямых, параллельных прямой l.

Наносить пометки двух функциональных шкал на одной и той же оси неудобно, так же неудобно было бы их читать, а потому при построении номограмм с четырьмя переменными на функциональных сетках функциональные шкалы наносят на четырех сторонах прямоугольника или квадрата, ограничивающих номограмму (§ 9). На черт. 105 дана схема такой номограммы. Из только что доказанной теоремы следует и способ пользования номограммой.

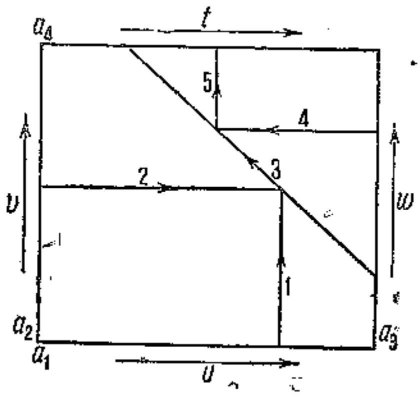
Положим, что даны значения трех переменных u, v и t, например u_1, v_1 и t_1, и требуется найти соответствующее им значение w_1 из уравнения:

$$m_2 f_2(v) - k m_1 f_1(u) = m_4 f_4(w) - k m_3 f_3(t).$$

По данным координатам u_1 и v_1 находим некоторую точку A, лежащую на одной из прямых семейства. На той же прямой должна лежать и точка B с координатами t_1 и w_1, поэтому находим точку B пересечения этой прямой с перпен-

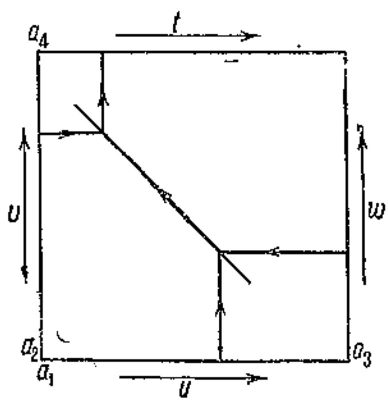


Черт. 105.



Черт. 106.

дикуляром к прямой t в точке с пометкой t_1. Пометка основания перпендикуляра, опущенного из полученной точки B, дает искомое значение w, т. е. w_1. На черт. 105 стрелками показан порядок нахождения значения w по данным значениям u, v и t. В связи с тем, как наклонены прямые семейства, как расположены пометки шкал и какова схема пользования номограммой, номограмма на логарифмической сетке будет служить графическим изображением той или иной зависимости между четырьмя переменными.



Черт. 107.

Разберем несколько примеров, причем для простоты будем считать модули всех шкал одинаковыми.

Положим, что на черт. 106 [1]) имеем схему номограммы с четырьмя переменными u, v, t и w на логарифмической сетке. Стрелками вне квадрата показано направление возрастания пометок шкал, стрелками внутри квадрата дана схема пользования номограммой; эта схема показывает, что здесь взяты две системы координат: одна u и v, другая t и w. Положим, что угол наклона прямых семейства к горизонтальной оси 135°, следовательно, $k = -1$.

Воспользовавшись уравнением XXIII, получим:

$$\lg \frac{v}{a_2} + \lg \frac{u}{a_1} = \lg \frac{w}{a_3} + \lg \frac{t}{a_4},$$

откуда

$$\frac{vu}{a_2 a_1} = \frac{tw}{a_3 a_4} \quad \text{или} \quad t = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_2} \frac{vu}{w}, \qquad (4)$$

следовательно номограмма (черт. 106) изображает уравнение (4).

На черт. 107 дана номограмма с иной схемой пользования ею, чем в предыдущем случае. Эта схема показывает, что при построении номограммы за одну систему координат принята система t, v и за другую система u, w.

[1]) Здесь, как и в дальнейшем на всех схемах даны только начальные пометки шкал, т. е. пометки, подразумевающиеся в начале координат.

Тогда уравнение XXIII примет вид:

$$\lg\frac{v}{a_2}+\lg\frac{t}{a_4}=\lg\frac{w}{a_3}+\lg\frac{u}{a_1},$$

откуда

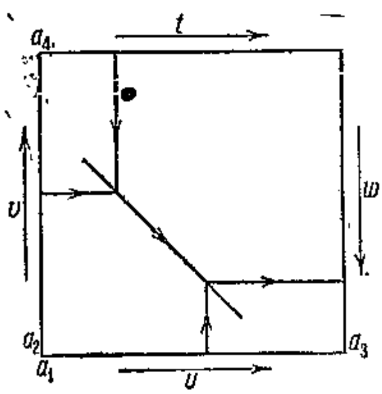
$$\frac{vt}{a_2a_4}=\frac{wu}{a_1a_3}\quad\text{или}\quad t=\frac{a_2a_4}{a_1a_3}\cdot\frac{wu}{v}. \tag{5}$$

Положим теперь, что пометки одной из шкал, например w, обратно направлены (черт. 108), тогда:

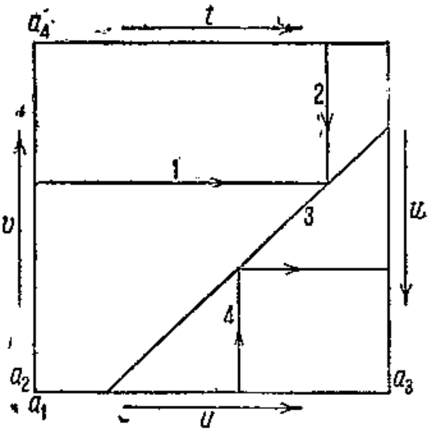
$$\lg\frac{v}{a_2}+\lg\frac{t}{a_4}=\lg\frac{a_3}{w}+\lg\frac{u}{a_1},$$

откуда

$$w=\frac{a_2a_3a_4}{a_1}\cdot\frac{u}{vt}. \tag{6}$$



Черт. 108.



Черт. 109.

По схеме данной на черт. 109, найдем:

$$\lg\frac{v}{a_2}-\lg\frac{t}{a_4}=\lg\frac{a_3}{w}-\lg\frac{u}{a_1},$$

откуда

$$w=\frac{a_1a_2a_3}{a_4}\cdot\frac{t}{vu}. \tag{7}$$

Черт. 110a и 110b показывают, что номограммы, построенные по ним, изображают одну и ту же зависимость между u, v, w и t. На самом деле по черт. 110a имеем:

$$\lg\frac{v}{a_2}-\lg\frac{u}{a_1}=\lg\frac{a_3}{w}-\lg\frac{t}{a_4},$$

откуда

$$u=\frac{a_1}{a_2a_3a_4}\,vwt; \tag{8a}$$

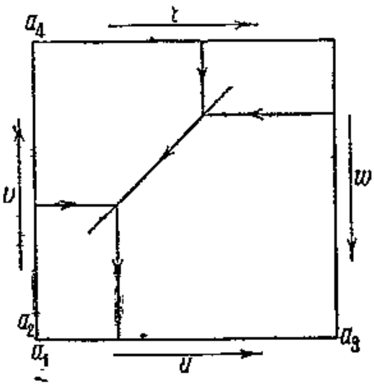
по черт. 110b имеем:

$$\lg\frac{a_2}{v}-\lg\frac{t}{a_4}=\lg\frac{w}{a_3}-\lg\frac{u}{a_1},$$

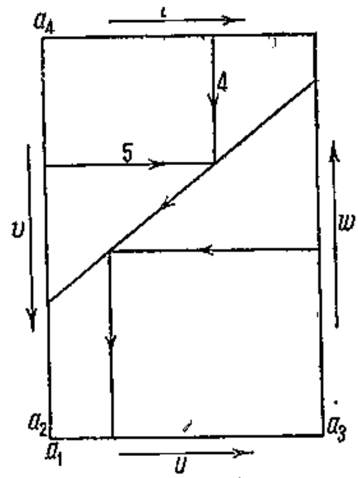
откуда

$$u=\frac{a_1}{a_2a_3a_4}\,vwt. \tag{8b}$$

Это и понятно, так как перемена схемы пользования номограммой переменила знак у двух членов уравнения, а изменение направлений вертикальных шкал переменило знак у двух других членов уравнения, т. е. знаки оказались измененными на противоположные у всех членов уравнения. Как видим, каждая из приведенных схем номограммы соответствует определенной зависимости между



Черт. 110а.



Черт. 110б.

четырьмя переменными. Очевидно, что рассмотренными примерами схем не исчерпываются все возможные комбинации.

§ 64. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММ НА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СЕТКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пример 1. Построим номограмму формулы, по которой рассчитывают момент сопротивления резанию на токарном станке:

$$M = \frac{f\sigma d}{2000}, \tag{1}$$

где M — момент сопротивления в килограммометрах;
f — сечение стружки в квадратных миллиметрах;
d — диаметр точения в миллиметрах;
σ — удельное сопротивление в килограммах на квадратный миллиметр.

Переписав уравнение (1) в виде

$$M = \frac{1}{2000} f\sigma d,$$

видим, что оно аналогично уравнению ($^8/_5$) предыдущего параграфа. Следовательно, для уравнения (1) можно построить номограмму по схеме, данной на черт. 110b, заменив переменное u переменным M, v переменным d, t переменным f и w переменным σ.

Дано, что d изменяется в границах от 10 до 500 *мм*, f от 1 до 20 *мм*^{2} и σ от 20 до 800 *кг/мм*^{2}.

Начнем с построения шкалы d. Возьмем ее равной 150 *мм*, тогда

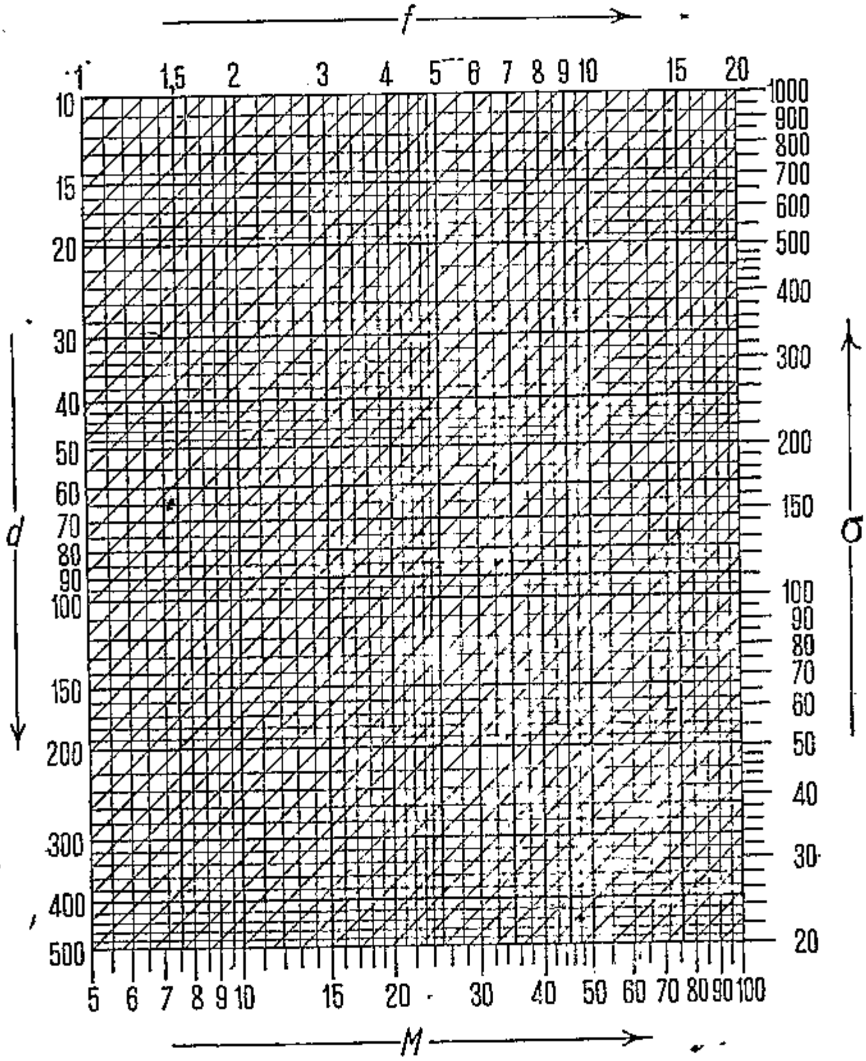
$$m_d = \frac{150}{\lg 500 - \lg 10} \approx 88 \text{ мм}.$$

Определим теперь длину шкалы f; положив $m_f = m_d = 88$ *мм*, получим:

$$88 = \frac{L}{\lg 20},$$

откуда $$L = 88 \lg 20 \approx 114 \text{ мм}.$$

Шкала σ должна быть по длине равной шкале d, т. е. 150 *мм*, Посмотрим, можно ли будет поместить все пометки, соответствующие значениям σ от 20 до 800, на шкале в 150 *мм* при модуле, равном модулю $m_d = \frac{150}{\lg 50}$.



Черт. 111.

Оставим начальную пометку шкалы σ, равную 20, без изменения, а конечную примем за неизвестную σ_n. Приравняв выражения, составленные для модулей m_d и m_σ, получим

$$\frac{150}{\lg \sigma_n - \lg 20} = \frac{150}{\lg 50},$$

откуда

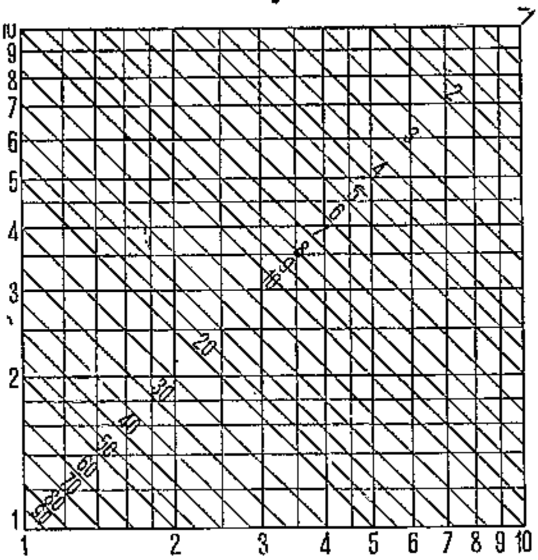
$$\lg \frac{\sigma_n}{20} = \lg 50 \quad \text{и} \quad \sigma_n = 1000.$$

Итак, шкала в 150 *мм* для σ позволяет не только поместить все значения σ в данных границах, но и расширить их, доведя верхнюю границу до 1000. Остается определить границы изменения M, или, иначе говоря, установить начальную и конечную пометки шкалы M. Для этой цели подставляем в уравнение (1) предельные значения f, d и σ и получаем:

$$M_0 = \frac{1 \cdot 500 \cdot 20}{2000} = 5 \quad \text{и} \quad M_n = \frac{20 \cdot 10 \cdot 1000}{2000} = 100,$$

где M_0 — начальная пометка шкалы M и M_n — конечная. После того как все четыре шкалы нанесены, проводим параллельные прямые семейства под углом в 45° к горизонтальной оси и тем заканчиваем построение номограммы (черт. 111).

Пусть, например, требуется определить M, если $d = 90$ *мм*, $f = 4{,}2$ *мм*^{2} и $\sigma = 320$ *кг/мм*^{2}. Находим ту прямую, которая проходит через точку с логарифмическими координатами $d = 90$ и $f = 4{,}2$. На этой прямой находим точку, для которой $\sigma = 320$. Вторая координата этой точки в системе координат M и σ будет искомым значением $M \approx 60$ *кгм*. Схемой отыскания M по номограмме может служить черт. 110b.



Черт. 112.

Пример 2. Положим, что дано два уравнения, в каждое из которых входит по три переменных, но одно из этих переменных является общим для обоих уравнений. Исключив это общее переменное, получим одно уравнение с четырьмя переменными, для которого можем построить номограмму, как указано в § 63. Значениям пятого переменного будут соответствовать пометки параллельных прямых семейства. Направление возрастания этих пометок будет служить еще одним из факторов, обусловливающих форму соотношения между переменными, входящими в уравнение, которое изображается данной номограммой.

В качестве примера рассмотрим номограмму уравнения $u \cdot v \cdot w = 100$. Прологарифмировав обе его части, получим:

$$\lg u + \lg v = -\lg w + \lg 100.$$

На черт. 112 изображена номограмма этого уравнения. Номограмма имеет тот же вид, что и номограмма Лаллана, но пометки прямых семейства идут убывая от начала координат.

Мы уже сказали, что рассмотрим пример построения номограммы для двух уравнений с тремя переменными каждое, причем одно из переменных у них общее.

Даны уравнения:

$$T = \frac{100}{nS} \tag{1a}$$

и

$$v = \frac{\pi n d}{1000}, \tag{1b}$$

где T — машинное время в минутах;

n — число оборотов в минуту;

S — подача в миллиметрах за один оборот;

d — диаметр обрабатываемой детали в миллиметрах;

v — окружная скорость (скорость резания) в метрах в минуту.

По этим формулам производится расчет числа оборотов шпинделя станка и машинного времени T при обточке на токарном станке детали длиной в 100 *мм*.

Исключаем из данных уравнений (1a) и (1b) переменное n и получаем:

$$T = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{d}{vS}.$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение

$$d = \frac{10}{\pi} TvS,$$

а для решения уравнения такого вида может служить номограмма, построенная по схеме, данной на черт. 110а.

Пусть дано, что S может принимать значения от 0,01 до 5, d от 1 до 450 и v от 1 до 125. Начнем построение со шкалы S. Возьмем длину ее в 200 *мм*, тогда

$$m_s = \frac{200}{\lg 5 - \lg 0{,}01} \approx 74 \text{ мм}.$$

Определим длину шкалы v при условии, что $m_v = m_s = 74$ *мм*. Из уравнения $74 = \frac{L}{\lg 125}$ имеем $L \approx 155$ *мм*.

Посмотрим, могут ли сохраниться границы изменения d при условии, что длина шкалы $d = 200$ *мм* и $m_d = m_v = m_s = 74$ *мм*. Для этого, оставив низшую границу $d = 1$, определим верхнюю из соотношения:

$$74 = \frac{200}{\lg d_h - \lg 1},$$

откуда

$$\lg d_h = \frac{200}{74} \approx 2{,}7$$

и

$$d_k \approx 500,$$

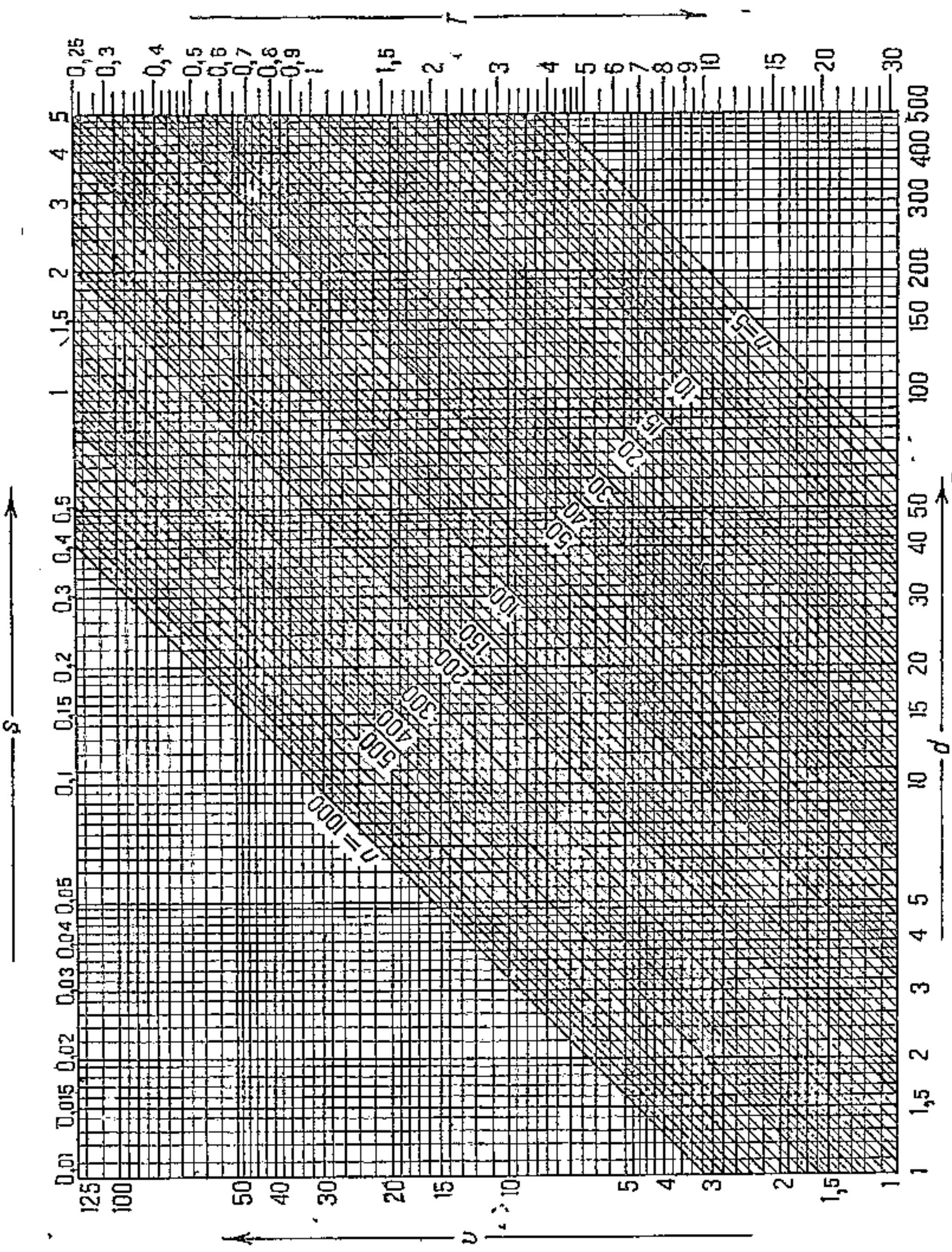
где d_k — конечная пометка шкалы d, следовательно, верхнюю границу изменения d можно довести до 500. Границы изменения T получим, подставив в уравнение (2) предельные значения для d, S и v. Низшая граница будет $T_0 = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{500}{5 \cdot 125} \approx 0{,}25$, верхняя граница $T_h = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{1}{1 \cdot 0{,}01} \approx 31$. Теперь мы имеем все для построения шкал S, d, v и T.

Остается построить параллельные прямые семейства и нанести на них пометки. Наклон прямых мы знаем из схемы (черт. 110а). Для нанесения пометок найдем зависимость между ними и пометками точек, в которых прямые пересекают какую-нибудь из шкал, например S. Возьмем уравнение $T = \frac{100}{n \cdot S}$. Значение T для точек, в которых прямые семейства пересекают шкалу S, равно 0,25, следовательно, между пометками прямых и пометками шкалы S существует соотношение

$$0{,}25 = \frac{100}{n \cdot S} \quad \text{или} \quad n = \frac{100}{0{,}25 S}.$$

Пользуясь этим соотношением, найдем две какие-нибудь пометки n. При $S = 0{,}4$ имеем $n = \frac{100}{0{,}25 \cdot 0{,}4} = 1000$; при $S = 4$ имеем $n = \frac{100}{0{,}25 \cdot 4} = 100$. Итак, прямая с пометкой 1000 должна пройти через точку шкалы S с пометкой 0,4, а прямая с пометкой 100 должна пройти через точку с пометкой 4. Проведя эти две прямые, измерим расстояние между ними. Это расстояние будет служить модулем логарифмической шкалы пометок прямых, так как мы получили прямые с пометками

1000 и 100. Если бы получены были две другие пометки, то, зная расстояние между ними, определили бы модуль шкалы по формуле (III).



Черт. 113.

На черт. 113 расстояние между прямыми с пометками 1000 и 100 равно 52 *мм*. Теперь остается взять логарифмическую шкалу с модулем в 52 *мм* и, наложив ее на семейство прямых по перпендикулярному к ним направлению, нанести соответствующие пометки. Полученная номограмма изображена на черт. 113.

Найдем по номограмме число оборотов n шпинделя станка и машинное время T при длине предмета в 100 *мм*, если d обтачиваемого предмета равно 40 *мм*, скорость резания $v = 20$ *м/мин* и подача $S = 0{,}15$ *мм*. По логарифмическим координатам $d = 40$ и $v = 20$ находим соответствующую точку, через эту точку проходит прямая с пометкой 160, следовательно, $n = 160$ об/мин. Найдя на этой прямой точку, координата которой $S = 0{,}15$, берем вторую ее координату $T = 4{,}2$. Это и служит ответом на поставленный вопрос, т. е., что на обточку данной детали в 100 *мм* потребуется 4,2 мин.

Глава XIV

СОСТАВНЫЕ НОМОГРАММЫ

§ 65. НОМОГРАММЫ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ ДВУХ СЕТЧАТЫХ НОМОГРАММ

Для построения номограмм уравнений с четырьмя и большим числом переменных часто соединяют между собой или сетчатые номограммы, или номограммы на параллельных шкалах, или, наконец, номограммы различных типов. Номограммы, построенные как соединение двух или нескольких номограмм, носят название составных.

В настоящем параграфе рассмотрим примеры построения номограмм, состоящих из двух сетчатых.

Пример 1. Построим номограмму формулы для определения веса трубы:

$$P = 0{,}001\pi\,(dS + S^2)\,\gamma, \tag{1}$$

где d — внутренний диаметр поперечного сечения трубы в миллиметрах;

S — толщина стенки в миллиметрах;

γ — удельный вес металла (свинца, красной меди, желтой меди, чугуна и алюминия);

P — вес 1 пог. *м* трубы в килограммах.

Переписав данное уравнение в виде

$$dS + S^2 = \frac{1000\,P}{\pi\gamma}$$

и обозначив обе части равенства одним и тем же вспомогательным переменным α, получим два уравнения с тремя переменными:

$$dS + S^2 = \alpha$$

и

$$\frac{1000\,P}{\pi\gamma} = \alpha. \tag{2}$$

Для каждого из этих уравнений можно построить сетчатую номограмму с тремя переменными (§ 58 и 59). Чтобы получить из них одну составную номограмму, шкалы для переменных α должны быть одинаковы в обеих номограммах.

Перепишем первое из уравнений (2) в виде:

$$d = \frac{1}{S}\,\alpha - S; \tag{3}$$

границы изменения d от 0 до 100 *мм*; границы изменения S от 0 до 10 *мм*; границы изменения для α найдем, подставив предельные значения для d и S в первое из уравнений (2). Эти границы будут от 0 до 1100. Длину для шкалы α возьмем 110 *мм* и для шкалы d 100 *мм*, тогда

$$m_\alpha = \frac{110}{1100} = 0{,}1\ мм \quad и \quad m_d = \frac{100}{100} = 1\ мм.$$

Перейдем от функциональных координат к декартовым в уравнении (3) и, так как

$$x = 0{,}1\,a \qquad \text{и} \qquad y = d,$$

то получим:

$$y = \frac{10}{S}\,x - S. \tag{4}$$

Уравнение (4) изображает семейство прямых, помеченных значениями S (черт. 114).

Для построения прямых этого семейства можно воспользоваться определением точек пересечения их с осью абсцисс $y = 0$ и с прямой, параллельной оси абсцисс $y = 100$, т. е. находить абсциссы этих точек по уравнениям

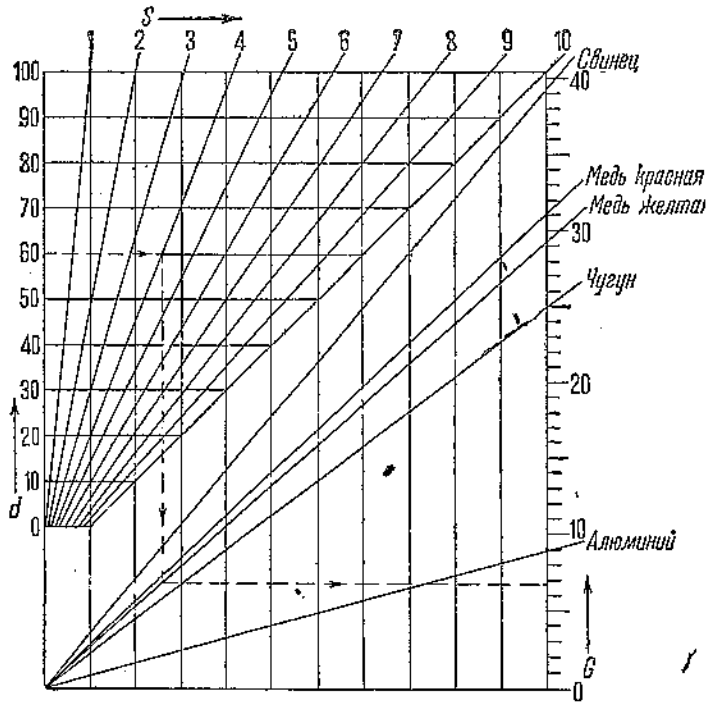
$$x = 0{,}1\,S^2 \qquad \text{и} \qquad x = 10\,S + 0{,}1\,S^2.$$

Переходим к построению номограммы для второго из уравнений (2), т. е. к уравнению

$$P = \frac{\pi\gamma}{1000}\,a. \tag{5}$$

Так как для шкалы a надо взять тот же модуль, то получаем $x = 0{,}1a$. Верхнюю границу для P находим подсчетом по формуле (5), положив для γ наибольшее значение из удельных весов данных металлов, т. е. 11,4 (удельный вес свинца). Для удобства совмещения номограмм берем верхнюю границу изменения $P \approx 40{,}5$ *кг*, длину шкалы P возьмем равной 135 *мм*, тогда

$$m_P = \frac{135}{40{,}5} = \frac{10}{3},$$



Черт. 114.

откуда

$$y = \frac{10}{3}\,P.$$

После перехода к декартовым координатам уравнение (5) принимает вид:

$$y = \frac{\pi\gamma}{30}\,x. \tag{6}$$

Уравнение (6) изображает пучок прямых, проходящих через начало координат. Пометки γ, равные удельному весу металла, заменяем наименованием самого металла. На черт. 114 изображена составная номограмма для уравнения:

$$P = 0{,}001\pi\,(dS + S^2)\,\gamma.$$

Пунктирными линиями со стрелками показано, что при $d = 60$ *мм* и $S = 4$ *мм* 1 *м* трубы из желтой меди весит около 6,8 *кг*.

Пример 2. Построим номограмму формулы для определения числа оборотов шпинделя при ременной передаче от отдельного мотора:

$$n = 0{,}98\,k\,\frac{ND}{d}, \qquad (1)$$

где n — число оборотов шпинделя в минуту;
k — передаточное число от шкива на станке к шпинделю;
N — число оборотов шкива на моторе в минуту;
D — диаметр шкива на моторе в миллиметрах;
d — диаметр шкива на станке в миллиметрах.

Коэфициент 0,98 введен потому, что учитывается потеря в 2% на скольжение ремня [1]).

Данную формулу заменим двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ND}{d} &= a \\ \text{и} \qquad 0{,}98\,ka &= n. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для первого уравнения строим номограмму (§ 63) по схеме, указанной на черт. 106, а для второго уравнения номограмму умножения. Шкала для вспомогательного переменного a является связывающей две номограммы для уравнений (2), а потому обе эти номограммы соединяем в одну, причем, так как пометки a нам читать не надо, оставляем шкалу a немой. В результате получаем номограмму, состоящую из двух соединенных номограмм на логарифмической сетке (черт. 115). Пользуясь этой номограммой, можно по данным значениям четырех переменных N, D, d и k находить значение пятого переменного n. Пусть, например, дано, что $N = 500$, $D = 550$, $d = 445$ и $k = 0{,}03$. По координатам $D = 550$ и $N = 500$ находим точку. На прямой, проходящей через эту точку, берем точку, для которой координата $d = 445$, вторая координата этой точки лежит на оси a. По этой координате, не прочитывая ее, и координате $k = 0{,}03$ находим точку; пометка (18) прямой, проходящей через нее, и будет искомым значением n, следовательно, шпиндель будет делать 18 об/мин.

§ 66. СОСТАВНАЯ НОМОГРАММА ИЗ РАДИАНТНОЙ НОМОГРАММЫ И z-НОМОГРАММЫ

В физике по формуле

$$\frac{1}{F} = (\nu - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где ν — показатель преломления;
R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы;
F — фокусное расстояние,

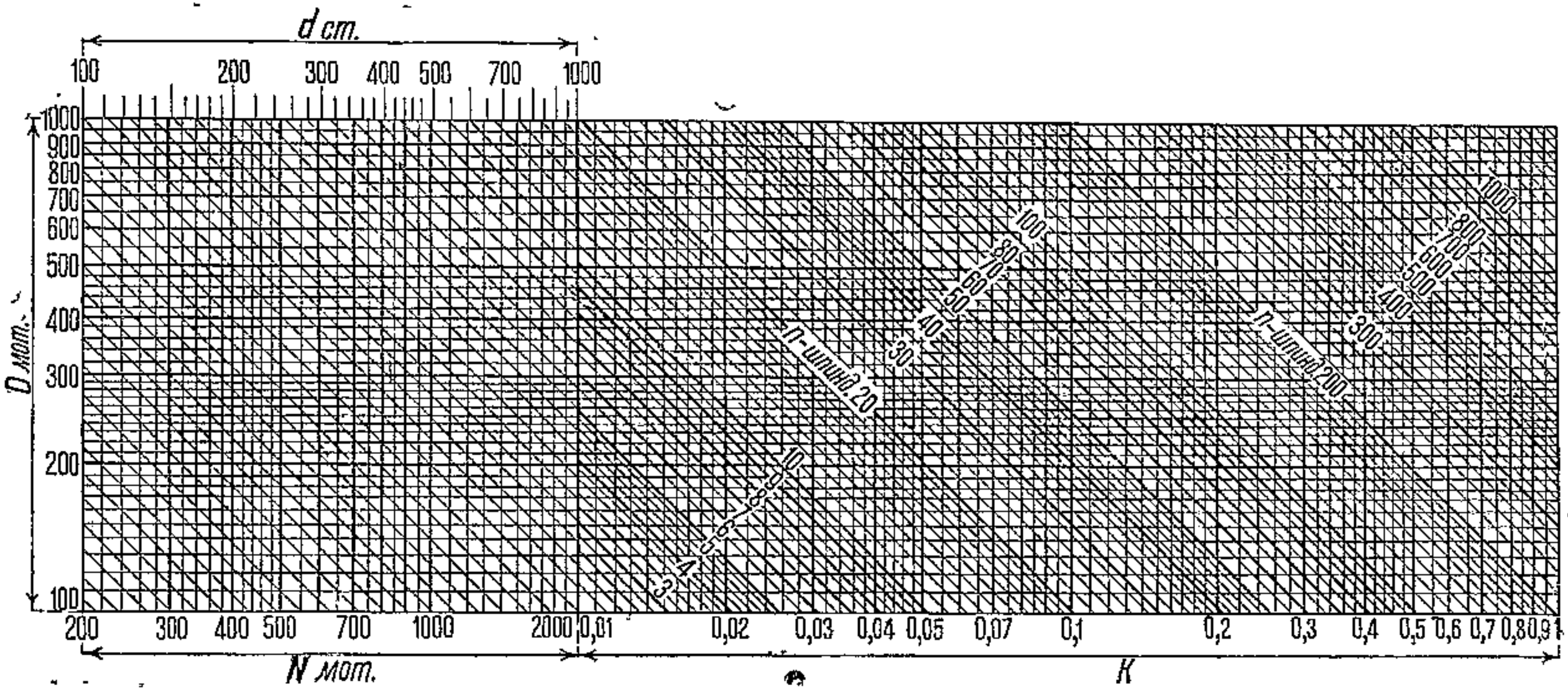
вычисляется фокусное расстояние линзы.

Данное уравнение можно заменить двумя уравнениями:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_3} \quad \text{и} \quad F = \frac{R_3}{\nu - 1}.$$

Для первого из этих уравнений строим радиантную номограмму (§ 5), причем шкалу R_3 оставляем немой, так как значения R_3 читать нам нет надобности. Для второго из этих уравнений строим z-номограмму (§ 35), причем на той же прямой, где нанесены пометки R_2, наносим и пометки F. Подробного описания по-

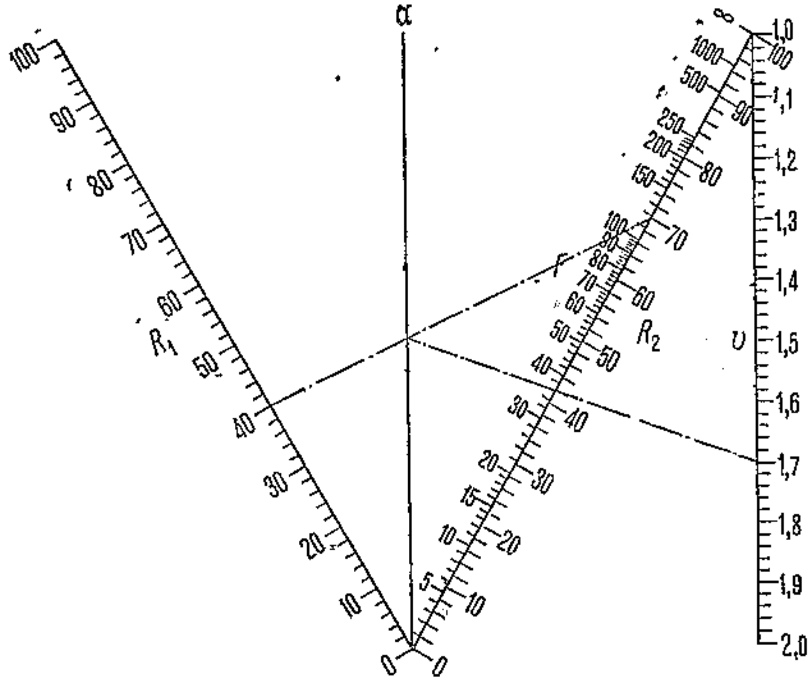
[1]) *Н. И. Зархий*, Паспортизация станков, ГНТИ, 1931.


d cm.
100
200
300
400
500
700
1000
D мот.
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
N мот.
200
300
400
500
700
1000
2000
K
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,07
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
n-шпинд 20
n-шпинд 200

Черт. 115.

строения не даем, так как построение обоих типов номограмм подробно было разобрано в предшествующей части курса. Номограмма изображена на черт. 116 [1]).

Положим, что требуется найти F, если $R_1 = 40$, $R_2 = 70$, $\nu = 1,7$. Соединив прямой пометки 40 и 70 на шкалах R_1 и R_2, найдем соответствующую точку на



Черт. 116.

немой шкале R_3. Прямая, соединяющая эту точку с точкой 1,7 на шкале ν, даст в точке пересечения со шкалой F пометку 36, которая и служит ответом на поставленный вопрос.

§ 67. СОСТАВНАЯ НОМОГРАММА ИЗ НОМОГРАММЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ И z-НОМОГРАММЫ

Для определения машинного времени при круглом фрезеровании применяется формула:

$$T = \frac{\pi d + y}{S},$$

где d — диаметр обрабатываемого предмета в миллиметрах;
y — длина врезания фрезы в миллиметрах;
S — подача в миллиметрах в минуту.

Данное уравнение заменяем уравнениями

$$\pi d + y = a$$

и

$$T = \frac{a}{S}.$$

Для первого из этих уравнений строим номограмму из выравненных точек на параллельных шкалах (§ 30). Шкалу a, как шкалу вспомогательного переменного, оставляем немой. Для второго уравнения строим z-номограмму так,

[1]) Проф. *М. Л. Франк*, Номографический справочник, ГТТИ, 1933.

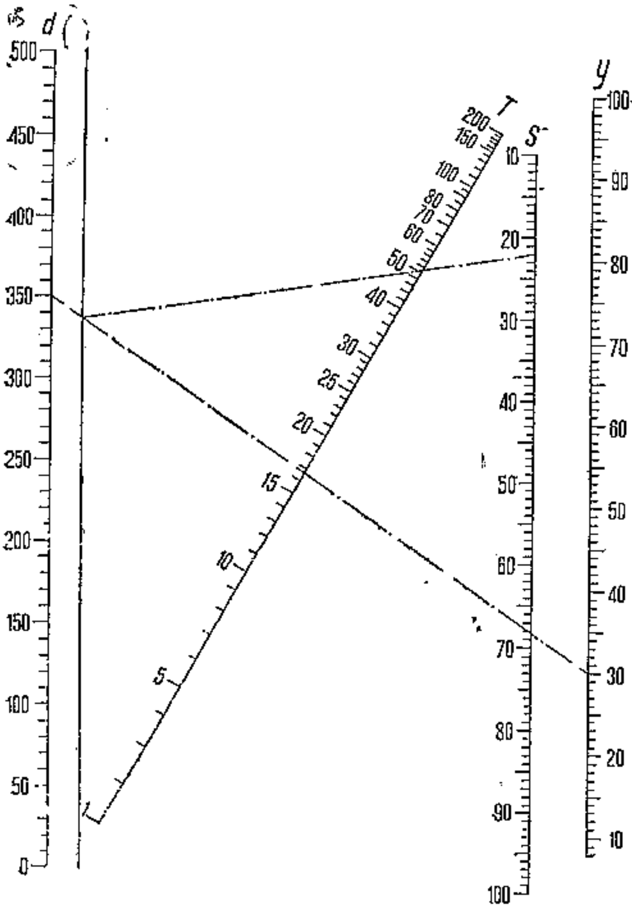
чтобы шкала α входила как ее составная часть [1]). В результате получается номограмма (черт. 117).

Найдем по этой номограмме T, если $d = 350$ *мм*, $y = 30$ *мм* и $S = 22$ *мм/мин*. Пользуясь ключом $d - y - \alpha$; $\alpha - S - T$ (§ 61), находим, что $T \approx 51$ мин

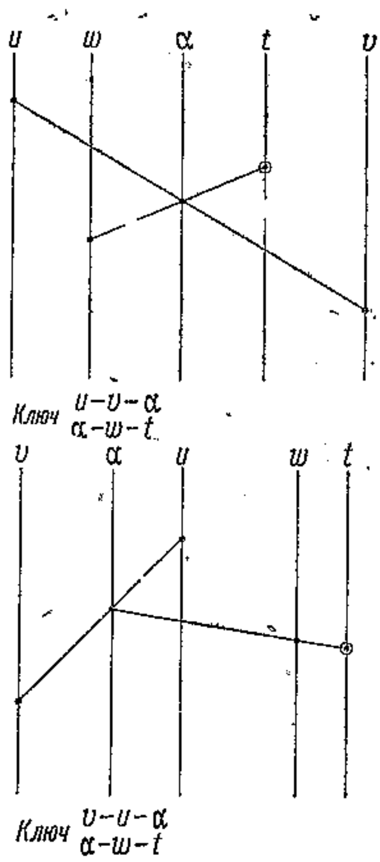
§ 68. СОСТАВНЫЕ НОМОГРАММЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ

Номограммы из выравненных точек на трех параллельных шкалах строятся, как мы знаем, для уравнений вида:

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w). \tag{1}$$



Черт. 117.



Черт. 118.

Положим теперь, что нам дано уравнение вида

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) = f_4(t), \tag{2}$$

т. е. уравнение с четырьмя переменными u, v, w и t и требуется построить номограмму из выравненных точек для этого уравнения. Уравнение вида (2) легко заменить двумя уравнениями вида (1), положив, например, в уравнении (2)

[1]) Инж.-мех. *Д. Н. Федотов*, Номограммы по техническому нормированию работ на металлорежущих станках, ОНТИ, 1935.

$f_1(u) + f_2(v) = \alpha$. Тогда вместо уравнения (2) можно написать два уравнения:

$$f_1(u) + f_2(v) = \alpha$$

и

$$\alpha + f_3(w) = f_4(t).$$

Построим затем номограммы для каждого из полученных уравнений с тремя переменными и совместим эти номограммы в одну. Для осуществления такого совмещения модули всех шкал и соотношения расстояний между шкалами должны быть выбраны так, чтобы модуль шкалы вспомогательного переменного α в обеих номограммах был один и тот же и шкалы α совпали бы. На шкале вспомогательного переменного пометки обычно не наносятся, вследствие чего эта шкала носит название немой шкалы.

При номограмме уравнения со многими переменными дается схема пользования ею или ключ к номограмме. На черт. 118 даны схематические изображения номограммы с четырьмя переменными.

Ключ $u - v - \alpha$;

$\alpha - w - t$ обозначает, что, соединив прямой данные пометки шкал u и v, находим точку на шкале α, а, соединив затем найденную точку шкалы α с данной пометкой шкалы w, найдем пометку шкалы t.

Ключ $v - u - \alpha$;

$\alpha - w - t$ обозначает, что, соединив прямой данные пометки шкал v и u, находим точку на шкале α, а, соединив найденную точку шкалы α с данной пометкой шкалы w, найдем пометку шкалы t.

Пример 1. Построить номограмму уравнения:

$$T = \frac{b}{nS}, \tag{3}$$

по которой производится расчет машинного времени при строгании.

В данной формуле T — машинное время в минутах;

b — ширина строгания в миллиметрах;

n — число двойных ходов в минуту;

S — подача за один двойной ход в миллиметрах.

Логарифмируем данное уравнение и приходим к уравнению вида (2):

$$\lg b - \lg n - \lg S = \lg T. \tag{4}$$

Заменяем уравнение (4) уравнениями

$$\lg b - \lg n = \lg \alpha$$

и

$$\lg \alpha - \lg S = \lg T.$$

Так как перед $\lg n$ и $\lg S$ стоят минусы, то направление на шкалах n и S берем противоположное направлению на шкале b. Длины шкал b и n пусть будут по 200 *мм*. Границы изменения b от 20 до 1500 *мм*, границы изменения n от 0,4 до 200 двойных ходов в минуту. На основании этих данных находим модули шкал b и n; получаем:

$$m_b = \frac{200}{\lg 1500 - \lg 20} = \frac{200}{\lg 75} \approx 105 \text{ мм};$$

$$m_n = \frac{200}{\lg 200 - \lg 0{,}4} = \frac{200}{\lg 500} \approx 74 \text{ мм}$$

Отсюда имеем:

$$m_\alpha = \frac{105 \cdot 74}{105 + 74} = \frac{7\,770}{179} \approx 44 \text{ мм}.$$

Расстояние между шкалами b и n возьмем равным 84 *мм*, тогда расстояния шкалы a от шкалы b и n будут равны:

$$a_1 = \frac{84 \cdot 7}{12} = 49 \text{ мм}$$

и

$$b_1 = \frac{84 \cdot 5}{12} = 35 \text{ мм}.$$

Построив шкалы b и n и немую шкалу a, переходим к построению шкал S и T. Модуль шкалы S находим по произвольно выбранной ее длине и помещаем ее на произвольном расстоянии от шкалы a. Модуль шкалы T и ее положение находим по соответствующим формулам. Пусть длина S будет 200 *мм* и границы изменения S от 0,15 до 10, тогда

$$m_S = \frac{200}{\lg 10 - \lg 0{,}15} \approx 110 \text{ мм}.$$

Так как расстояние между шкалами a и S надо делить пропорционально числам 44 и 110, или пропорционально 2 и 5, то, помещая шкалу S на расстоянии 70 *мм* от шкалы a, найдем, что шкалу T и ее модуль можно определить по формулам § 30:

$$a_2 = \frac{70 \cdot 2}{7} = 20 \text{ мм};$$

$$b_2 = \frac{70 \cdot 5}{7} = 50 \text{ мм};$$

$$m_T = \frac{44 \cdot 110}{154} \approx 31 \text{ мм}.$$

Чтобы найти какую-нибудь пометку шкалы T, даем в уравнении (3) переменным b, n и S произвольные значения (в данных границах) и помечаем точку шкалы T соответствующей пометкой. Если имеется пометка одной точки и модуль m_T, то можем построить всю шкалу T в данных границах, например от 1 до 1000 мин. В данном случае легко получить на шкале T пометку, равную 1. Дадим значение b, равное 200, и n, равное 100, и найдем точку, соответствующую этим значениям на немой шкале a. Затем дадим значение S, равное 2. Соединив прямой найденную точку на шкале a с пометкой 2 на шкале S, получим на шкале T пометку 1, так как $T = \frac{200}{100 \cdot 2} = 1$. По этой пометке и модулю $m_T = 31$ *мм* строим шкалу S до верхней границы 1000.

Ключ полученной номограммы будет такой (черт. 119):

$$b - n - a;$$
$$a - S - T.$$

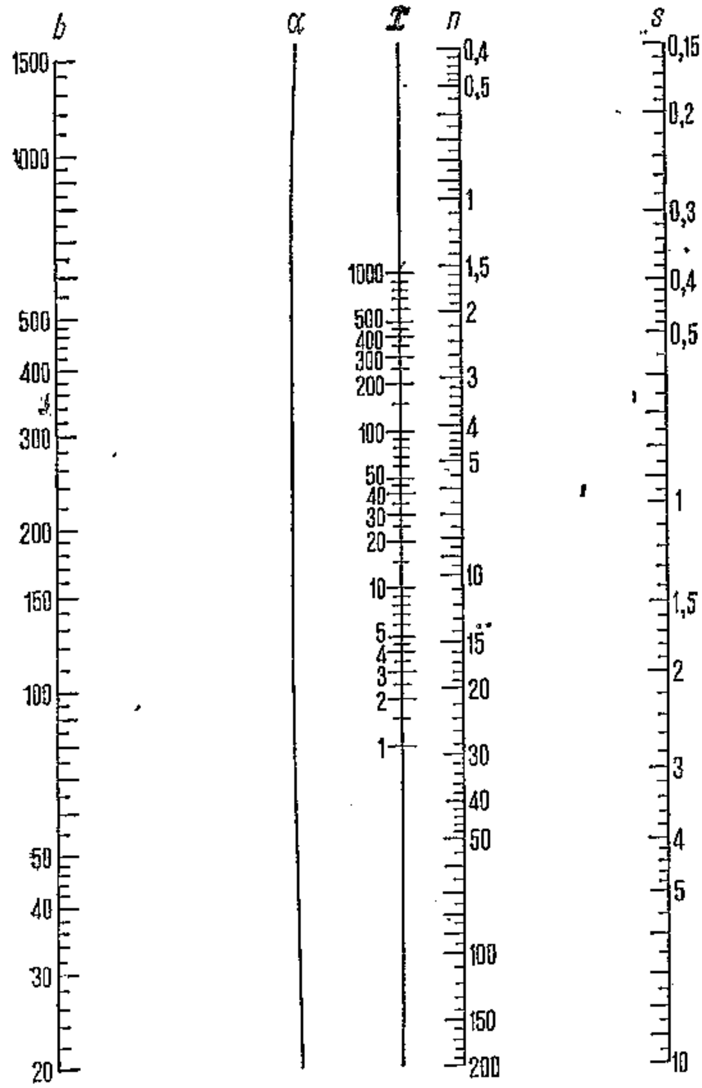
Положим, что надо определить машинное время, если $b = 420$ *мм*, $n = 14$ двойных ходов в минуту и $S = 0{,}85$ *мм*. Прямая, соединяющая пометки 420 на шкале b и 14 на шкале n, при пересечении шкалы a дает некоторую точку. Соединив прямой эту точку с пометкой 0,85 на шкале S, получаем на шкале T в точке пересечения пометку 35, что и дает ответ на поставленный вопрос, т. е., что время строгания изделия при ширине 42 *см* при 14 двойных ходах в минуту и при подаче на 1 двойной ход в 0,85 *мм* равно 35 мин.

Пример 2. В качестве второго примера построим номограмму для двух уравнений с пятью переменными, причем одно из переменных входит в оба уравнения; построим номограмму для определения окружной скорости и машинного времени обработки деталей на токарном станке.

Приняв длину обтачиваемого предмета равной 100 *мм*, имеем уравнения:

$$T = \frac{100}{nS} \quad \text{и} \quad v = \frac{\pi d n}{1000}, \tag{1}$$

где T — машинное время в минутах;
n — число оборотов в минуту;
S — подача в миллиметрах за один оборот;
d — диаметр обрабатываемой детали в миллиметрах;
v — окружная скорость в метрах в минуту.



Черт. 119.

Практические границы изменения этих переменных таковы: n — от 1 до 1000 об/мин; S—от 0,01 до 5 *мм*; d—от 1 до 500 *мм*; v—от 1 до 200 *м/мин*; T—от 0,14 до 30 мин.

Легко заметить, что построение номограммы для уравнений (1) совершенно аналогично построению номограммы в предыдущем параграфе. На самом деле, исключая n из уравнений (1), получим уравнение:

$$T = \frac{\pi d}{10 vS}, \tag{2}$$

т. е. уравнение с четырьмя переменными. Шкала для переменного n будет играть в номограмме ту же роль, что и шкала α в номограмме, изображенной на черт. 119. В данном случае шкалу n градуируем, чтобы можно было самостоятельно пользоваться той частью номограммы, которая будет служить для уравнения $v = \frac{\pi d n}{1000}$.

Приступаем к построению номограммы. Логарифмируем оба уравнения (1) и получаем:

$$\left.\begin{aligned} -\lg n &= \lg T + \lg S - \lg 100; \\ -\lg n &= \lg d - \lg v + \lg \pi - \lg 1000. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Полагаем $f(n) = -\lg n$; $f(d) = \lg d$; $f(v) = -\lg v + \lg \pi - \lg 1000$; $f(T) = \lg T$; $f(S) = \lg S - \lg 100$.

Направление возрастания пометок шкал n и v берем противоположное шкалам d, S и T.

Начнем с построения шкал T и S, взяв длину их равной 200 *мм*. Тогда модуль шкалы T будет:

$$m_T = \frac{200}{\lg 30 - \lg 0{,}14} \approx 85 \text{ мм};$$

модуль шкалы S:

$$m_S = \frac{200}{\lg 5 - \lg 0{,}01} \approx 74 \text{ мм}.$$

Положение шкалы n находим, пользуясь тем, что она делит расстояние между шкалами T и S пропорционально модулям этих шкал, т. е. 85 и 74. Расстояние между шкалами T и S берем 159 *мм*, тогда шкала n должна находиться от шкалы T на расстоянии $\frac{159 \cdot 85}{159} = 85$ *мм* и от шкалы S на расстоянии $\frac{159 \cdot 74}{159} = 74$ *мм*. Модуль шкалы n определяем по формуле $m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ и находим $m_n \approx 39{,}5$ *мм*.

Чтобы получить какую-нибудь пометку шкалы n, как исходную для ее построения, дадим произвольные значения T и S в данных границах их изменения, затем, соединив соответственно пометки шкал T и S прямой, нанесем в точке пересечения этой прямой с прямой n пометку на шкале n, причем пометку эту найдем путем вычисления по формуле $T = \frac{100}{nS}$. Пусть, например, $T = 20$ и $S = 0{,}5$, тогда $n = 10$. Ставим на шкале n пометку 10, вверх от нее строим логарифмическую шкалу от 10 до 1 и вниз от 10 до 1000 с модулем 39,5 *мм*.

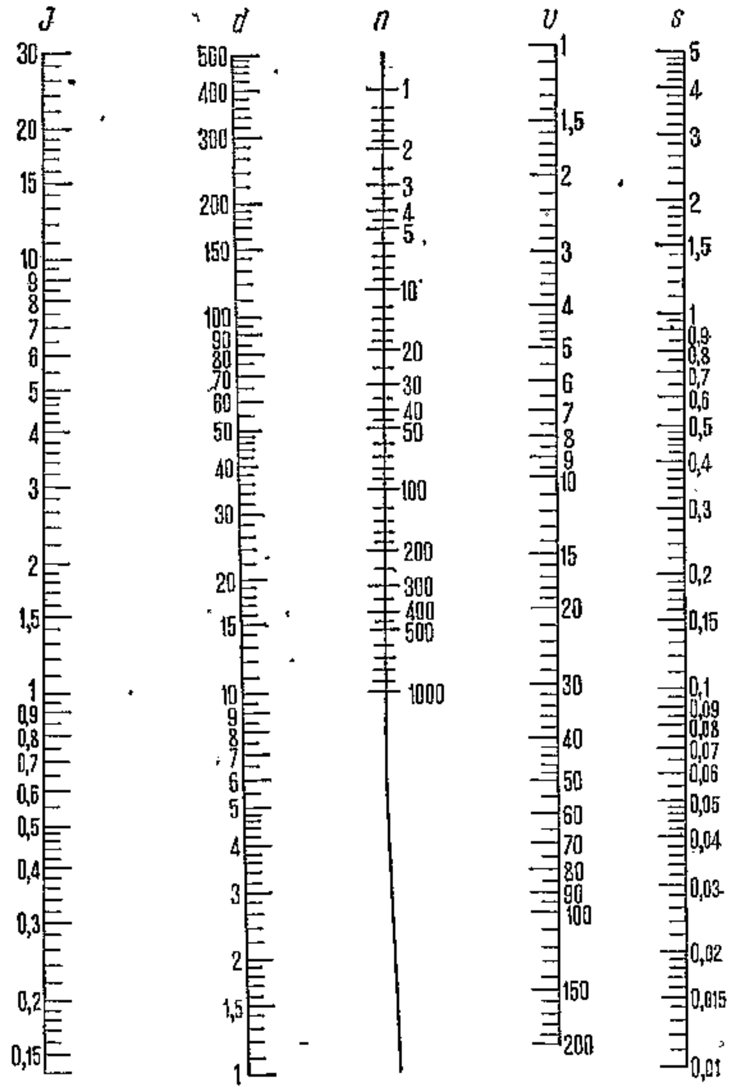
Переходим теперь к построению второй части номограммы уравнения (1), или, что то же, для второго уравнения (3). Шкалу для n мы уже имеем. Берем длину шкалы d равной 200 *мм*, тогда модуль ее $m_d = \frac{200}{\lg 500 - \lg 1} \approx 74$ *мм*. Шкалу v поместим так, чтобы шкала n находилась между шкалами d и v, тогда соотношение между модулями шкал d, n и v выразится равенством:

$$m_n = \frac{m_d \cdot m_v}{m_d + m_v}, \quad \text{т. е.} \quad 39{,}5 = \frac{74 \cdot m_v}{74 + m_v},$$

откуда

$$m_v \approx 85 \text{ мм}.$$

Поместим шкалу v на расстоянии 34 *мм* от шкалы n, что удобно для пользования номограммой, так как шкала v не будет слишком близко расположена



Черт. 120.

к шкале n. Обозначим расстояние между шкалами d и n через a; на основании формул § 30 напишем пропорцию $\frac{a}{34} = \frac{74}{85}$, откуда $a = 29{,}6$ *мм*. Помещаем прямую для шкалы d влево от шкалы n на расстоянии 29,6 *мм* и строим на ней шкалу $\lg d$ с модулем $m_d = 74$ *мм*. Чтобы найти точку с какой-нибудь пометкой на шкале v и, приняв эту пометку за исходную, построить всю шкалу для $f(v)$, даем во втором из уравнений (2) произвольные (в данных границах изменения) значения n и d и находим некоторое значение v. Соединив прямой точки со взятыми нами пометками на шкалах n и d, поставим в точке пересечения на прямой v соответствующую им пометку, найденную вычислением. Построив вверх и вниз от помеченной точки логарифмическую шкалу для $f(v)$ с модулем $m_v = 85$ *мм*, закончим построение номограммы. Так, например, взяв $d = 100$ и $n = 16$, получим из второго уравнения (1) $v \approx 5$. Соединив прямой пометку 100 на шкале d с пометкой 16 на шкале n и продолжив эту прямую до пересечения с прямой v, нанесем в точке пересечения пометку 5, а затем вверх строим логарифмическую шкалу в порядке убывания пометок до 1, а вниз в порядке возрастания до 1000 (черт. 120). Если номограмма должна быть использована для определения числа оборотов в минуту n по данному диаметру обрабатываемого предмета и окружной скорости, то ключом ее будет: $d - v - n$.

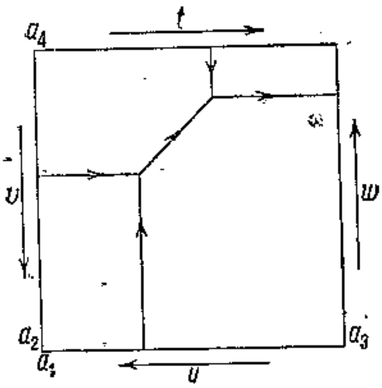
Если же по данным n и S надо определить T, то пользуемся ключом:

$$n - S - T.$$

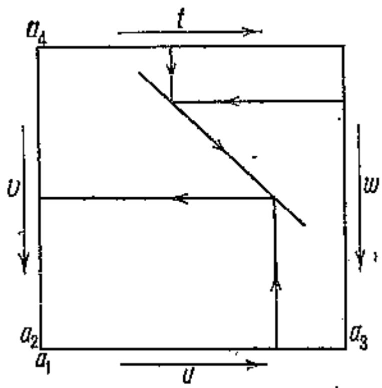
Применяя совместно оба ключа, найдем по данным d, v и S машинное время T. Определим, сколько следует дать оборотов шпинделю станка, если d обтачиваемого предмета 90 *см*, и допустимая для данного материала окружная скорость (скорость резания) $v = 50$ *м/мин*. Соединив прямой точки на шкалах d и v с пометками 90 и 50, получим, что $n \approx 180$ об/мин. Далее узнаем, сколько времени потребуется для снятия стружки с обрабатываемой детали за один проход при подаче 0,3 *мм*, если длина ее 250 *мм*. Соединив пометку 180 на шкале n с пометкой 0,3 на шкале S, на шкале T получим пометку 1,8; следовательно, на снятие стружки в один проход с детали длиной в 100 *мм* потребуется 1,8 *м*, а для детали в 250 *мм* придется затратить $1{,}8 \cdot 2{,}5 = 4{,}5$ мин.

УПРАЖНЕНИЯ

1. По данному черт. 121 составить формулу, для которой изображением служит данная номограмма. Прямые семейства наклонены к горизонтальной оси под углом в 45°, модули всех шкал одинаковые.



Черт. 121.



Черт. 122.

2. Написать формулу по номограмме, если в чертеже предыдущего примера возрастание пометок шкалы t считать обратно направленным.

3. По данному черт. 122 составить формулу, для которой изображением служит данная номограмма. Прямые семейства наклонены к горизонтальной оси под углом в 135°, модули всех шкал одинаковы.

4. Написать формулу по номограмме, если в чертеже предыдущего примера возрастание пометок шкал t и u обратное, а шкал v и w прямое.

5. По номограмме (черт. 111) определить момент сопротивления резанию M, если: 1) $f = 4$ *мм*^{2}, $\sigma = 200$ *кг/мм*^{2} и $d = 70$ *мм*; 2) $f = 6{,}5$ *мм*^{2}, $\sigma = 150$ *кг/мм*^{2} и $d = 36$ *мм*.

6. По номограмме (черт. 113) определить число оборотов n и машинное время T, если: 1) $d = 35$ *мм*, $v = 4{,}5$ *м/мин.* и $S = 0{,}8$ *мм*; 2) $d = 70$ *мм*, $v = 18$ *м/мин.* и $S = 0{,}2$ *мм*.

7. По номограмме (черт. 114) определить: 1) вес 1 *м* алюминиевой трубы, если $d = 40$ *мм* и $S = 3$ *мм*; 2) вес 1 *м* чугунной трубы, если $d = 75$ *мм* и $S = 5$ *мм*; проверить найденные по номограмме ответы вычислением, если удельный вес алюминия 2,6 и удельный вес чугуна 7,2.

8. Удельный вес красной меди 8,9 и удельный вес желтой меди 8,7. Объяснить построение прямых, отмеченных названиями металла в номограмме (черт. 114).

9. Построить номограмму на логарифмической сетке для формулы объема эллипсоида $v = \frac{4}{3}\pi abc$, если a, b и c могут изменяться в границах от 2 до 10 *см*.

10. Построить номограмму для формулы задачи 9 на параллельных шкалах.

Ответы

1. $w = \frac{a_2 a_3}{a_1 a_4} \cdot \frac{ut}{v}$.
2. $w = \frac{a_2 a_3 a_4}{a_1} \cdot \frac{u}{vt}$.
3. $v = \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3} \cdot \frac{uw}{t}$.
4. $v = \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3} \cdot \frac{uw}{t}$.
5. $M = 28$ *кгм*; $M = 17{,}6$ *кгм*.
6. $n = 40$ об/мин; $T = 3{,}1$ мин.
   $n = 80$ об/мин; $T = 6{,}2$ мин.
7. $P = 1$ *кг*; $P = 9$ *кг*.

§ 69. НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПРИ ПОСТРОЕНИИ НОМОГРАММЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШКАЛАХ

При построении номограмм уравнений со многими переменными на параллельных шкалах приходится иметь дело с самыми разнообразными модулями шкал. Чтобы по возможности не тратить времени и сил на вычисления при построении отдельных шкал, следует: 1) пользоваться шкалами логарифмической линейки, т. е. 250, 125 и 83,3 *мм*; 2) иметь готовый логарифмический шаблон[1]); 3) логарифмические шкалы, для которых нет готового шаблона, строить геометрически; 4) если шкала повторяется на одной прямой несколько раз, то нанести эту шкалу на полоску бумаги и, прикладывая ее к прямой (носителю шкалы), перенести на эту прямую. Чтобы конкретизировать эти практические указания, разберем последовательно построение номограммы формулы $T = \frac{2bL}{1000\,vS}$, по которой производится расчет машинного времени строгания при одинаковой скорости прямого и обратного хода, и где

T — машинное время берется в границах от 0,1 до 2000 мин,
b — ширина строгания в границах от 40 до 1000 *мм*;
L — длина хода » » » 50 » 5000 » ;
v — скорость резания » » » 5 » 25 *м/мин*;
S — подача на один двойной ход в границах от 0,25 до 25 *мм*.

Прологарифмируем данную формулу:

$$\lg L + \lg b - \lg S - \lg v = \lg T + \lg 1000 - \lg 2$$

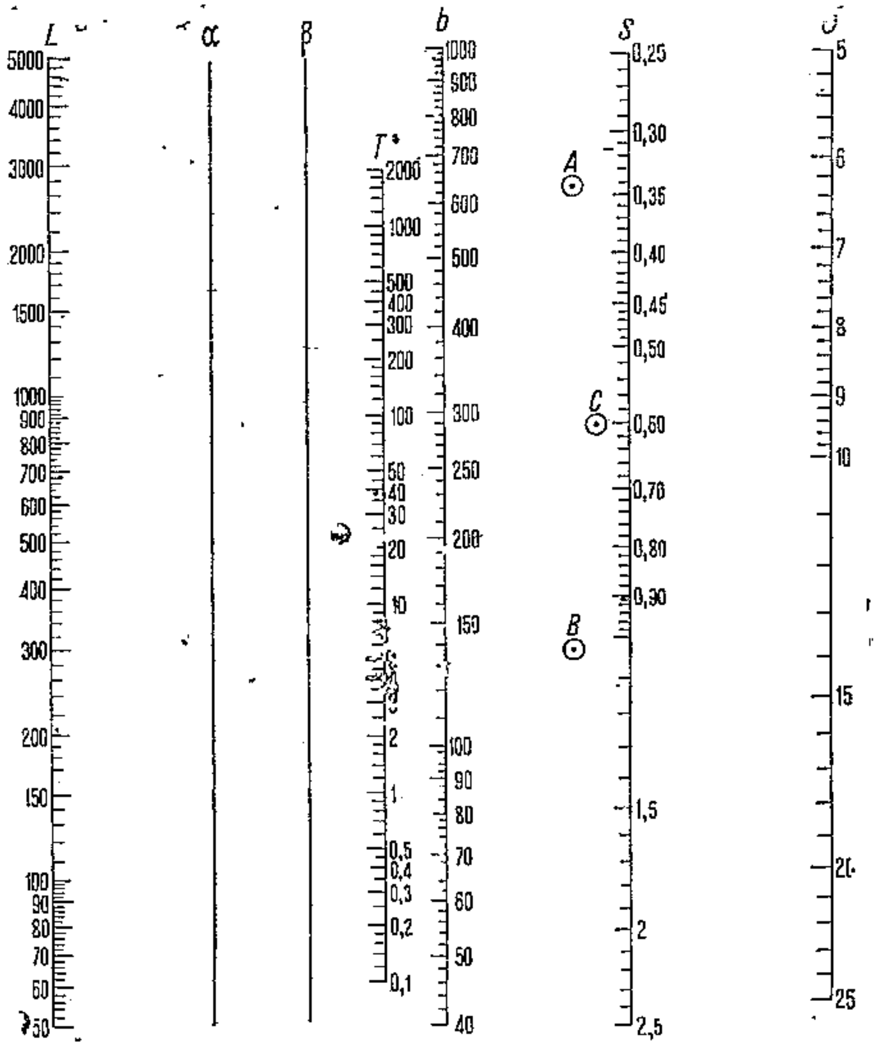
и заменим полученное логарифмическое уравнение тремя уравнениями:

[1]) «Учебный атлас по номографии» под общей редакцией проф. Н. А. Глаголева, ОНТИ, 1935, табл. 3.

1) $\lg L + \lg b = \alpha$; 2) $\alpha - \lg S = \beta$; 3) $\beta - \lg v = \lg T + \lg 1000 - \lg 2$.

Для построения шкалы L, пользуясь произволом выбора модуля, берем *модуль логарифмической шкалы на логарифмической линейке, т. е.* 125 *мм*. Так как шкала на прямой L повторится два раза, то длина прямой будет 250 *мм*. Длину шкалы b возьмем равной 250 *мм*, тогда $m_b = \frac{250}{\lg 1000 \cdot \lg 2} \approx 180$ *мм*. Для шкалы b пользуемся готовым шаблоном, начиная ее строить от 1000 до 100 сверху вниз, а от 100 до 40, повторяя ту часть шкалы, которая нанесена в интервале от 1000 до 400 (удобно предварительно перенести шкалу с шаблона на полоску бумаги, а с полоски бумаги уже на прямую b; при построении нижней части шкалы от 100 до 40 полоску соответственно сдвинуть вниз). Немая шкала α должна поместиться между шкалами L и b, причем отношение расстояний ее от этих шкал равно 125 : 180 ≈ 7 : 10. Берем расстояние между шкалами L и b число кратное 17, т. е. 102, и получаем, что расстояние от шкалы L до шкалы α равно 42 *мм* и от шкалы α до шкалы b равно 60 *мм*. Для шкалы S берем модулем опять *модуль шкалы логарифмической линейки*, т. е. 250 *мм*, причем длина ее тоже будет равна 250 *мм*. Возрастание пометок S и v, очевидно идет в противоположном направлении возрастанию пометок шкал L и b. Для модуля шкалы β получаем $m_\beta = \frac{250 \cdot 74}{250 + 74} \approx 57$ *мм*. Так как шкала β должна делить расстояние от шкалы α до шкалы S в отношении 74 : 250, то берем это расстояние в 108 *мм* и проводим шкалу β на расстоянии 25 *мм* от шкалы α и 83 *мм* от шкалы S. Возьмем длину шкалы v в 250 *мм*, тогда $m_v = \frac{250}{\lg 25 - \lg 5} \approx 357$. Шкалу v можем поместить произвольно, но, так как отношение $\frac{57}{357} = \frac{19}{119}$, то помещаем шкалу T на расстоянии 19 *мм* от шкалы β и 119 *мм* от шкалы v. Шкалы v и T строим геометрически, путем проектирования, так как при их модулях $\left(m_v = 357 \text{ и } m_T = \frac{357 \cdot 57}{414} \approx 49 \text{ мм}\right)$ построение пришлось бы вести путем вычисления ввиду отсутствия готовых шаблонов. Нанесем на шкале v пометки двух точек, например, 5 и 10, причем 5 поставим в верхнем конце шкалы v. Точку с пометкой 10 найдем путем вычисления по формуле $m(\lg v - \lg v_0)$, получив $357\,(1 - 0{,}699) = 357 \cdot 0{,}301 \approx 107$ *мм* и отложив 107 *мм* от точки с пометкой 5 вниз по шкале v. *Имея две помеченные точки на шкале v, берем на шкале b соответственные им точки с пометками 500 и 1000 и соединяем их прямыми с точками, помеченными 5 и 10 на шкале v. Получим центр проекции в точке A (на чертеже обведена кружком). Проектируем из точки A интервал шкалы от 500 до 1000 на прямую v и получаем интервал шкалы v от 5 до 10.* Чтобы построить интервал шкалы v от 10 до 25, помечаем конечную точку шкалы v пометкой 25 и соединяем прямыми точки 10 и 25 с точками 250 и 100 шкалы b, получаем центр проекции в точке B и проектируем интервал шкалы b от 250 до 100 на прямую v в интервале от 10 до 25. Такой способ построения шкалы весьма упрощает работу. Для построения шкалы T применим этот же способ. Как мы видели, достаточно пометить только две точки шкалы, чтобы дальнейшее ее построение вести путем проектирования. Из данной формулы $T = \frac{Lb2}{1000\,vS}$, находим, что при $b = 100$, $L = 1000$, $v = 10$ и $S = 1$, $T = 20$, а при $b = 1000$, $L = 1000$, $v = 10$ и $S = 1$, $T = 200$. Эти две пометки на шкале T наносим следующим образом. *Берем циркуль с двумя остриями и ставим в точках 1000 на шкале L и 100 на шкале b, к ножкам циркуля вплотную придвигаем край линейки и переносим одну ножку циркуля в точку, найденную на шкале α, другую ножку циркуля помещаем в точку с пометкой 1 на шкале S, вновь придвигаем к ним край линейки и находим соответствующую точку на шкале β. Помещаем ножку циркуля в эту точку, отнимаем линейку, а другую ножку циркуля ставим в точку с пометкой 10 на шкале v. Придвигаем к нож-*

кам циркуля линейку, отмечаем полученную точку на шкале T и ставим пометку *20*. Точно так же найдем и вторую точку 200. Чтобы найти центр проекций для проектирования отрезка шкалы L от 200 до 2000 на отрезок шкалы T от 20 до 200, соединяем прямыми соответственно точки 200 на шкале L и 20 на шкале T; 2000 на шкале L и 200 на шкале T. Получаем в точке C центр проекций. Дальней-



Черт. 123.

шее построение этого интервала шкалы T ведется так же, как было указано при построении шкалы v. Построив шкалу указанного интервала, переносим ее на полоску бумаги и, передвигая эту полоску по прямой T, повторяем шкалу нужное число раз (в данном случае еще три раза и часть шкалы от 0,2 до 0,1).

Номограмма [1] изображена на черт. 123.

Ключ номограммы

$$L - b - \alpha; \quad \alpha - S - \beta; \quad \beta - v - T.$$

---

[1] Подробные практические указания как пользоваться номограммой можно найти в книге «Что такое номограмма и как ею пользоваться» доц. *Н. Н. Денисюк*, ОНТИ, 1935.