Проф. Д. Г. АНАНОВ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КАК ОСНОВА ЧЕРЧЕНИЯ

Часть первая

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

НТИ ГТУ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Ленинград—1931

Проф. АНАНОВ, Д. Г.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КАК ОСНОВА ЧЕРЧЕНИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Издание третье

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
Ленинград — 1931

Просьба прислать Ваш отзыв об этой книге по адресу: Ленинград, Гостиный двор, Б. Суровская линия, 2-ой этаж, № 141 — 142, Гостехиздат (отзыв).

Ленинградский Областлит № 65770. Тираж 10100 экз. 9 л. Зак. № 1703.

Типография Гидр. Упр. Упр. В.-М. Сил Р.К.К.А. в Гл. Адмиралтействе.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В настоящее время, когда студент нагружен массой разнообразных занятий, когда остро ставится вопрос о возможном сокращении длительности пребывания его в учебном заведении, стремление к рационализации постановки преподавания по тем или иным дисциплинам становится вполне естественным и понятным. В этом отношении начертательная геометрия, как дисциплина вспомогательная, стоит в особенно неблагоприятных условиях. С одной стороны ее обстоятельное изучение крайне важно для инженера в смысле развития в нем пространственных представлений, без которых немыслимы ни техническое творчество, ни даже умение хорошо и сознательно разбираться в языке техников — чертежах, с другой стороны в ряде курсов начертательной геометрии нет достаточно яркой увязки между сущностью предмета и непосредственным применением выдвигаемых им положений к черчению и проектированию, или если такие курсы и есть, то они слишком громоздки в соответствии с отводимым теперь на предмет временем. Наличие указанной неувязки служило нередко поводом поднимать вопрос о ненужности начертательной геометрии и исключении ее из учебного плана технических школ и во всяком случае явилось основанием для сильной урезки отведенных на нее часов. Поэтому учебник, в котором были бы тесно связаны и переплетены теоретические положения курса с чисто практическими применениями этих положений и который в то же время не требовал бы чересчур много времени для его штудирования, будет особенно ценным. Таким именно, с моей точки зрения, и является учебник, составленный доцентом Д. Г. Ановым. В этом учебнике приложения всюду чередуются с теоретическими предпосылками и пополняют друг друга, при чем методы ортогональный и косоугольный идут все время рука об руку. Подбор примеров, в смысле перехода от легких к более трудным, а также в смысле выбранных типов удачен. Правильно для современных условий и подразделение курса на части с одинаковым по сути содержанием, но с различным к ним подходом и их развитием, ибо в одних условиях изучающему достаточно ограничиться только первою частью, и в других, будет ли то в силу соответствующих требований или по личному побуждению, в целях самообразования, придется проштудировать и другую. Вышедшая часть курса носит конспективный характер, что также имеет свое значение, ибо заставит студента в значительной доле провести работу по изучению предмета самостоятельно.

Сопоставляя все изложенное, я считаю, что настоящий труд является безусловно полезным вкладом в техническую литературу.

Проф. *М. Дешевой.*

8 августа 1929 г.

К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

В третье издание, сравнительно со вторым, вошли новые главы: VII, XXXV, XXXVI и XVII.

Проф. *Ананов.*

11 сентября 1930 г.

КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Первая часть была выпущена КУБУЧ'ом в середине марта сего года и уже через $3^1/_2$ месяца книга разошлась. Второго июля возник вопрос о переиздании. Этот небольшой факт является косвенным доказательством правильности того плана и метода, который принят автором.

Во втором издании сделаны небольшие добавления в некоторых отделах.

Нумерация чертежей во втором издании оставлена прежняя, а добавленные чертежи пронумерованы особой двойной нумерацией, что сделано по соображениям удобства переиздания.

Доцент *Ананов.*

Ленинград.
Июль 1929 г.

К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Мысль о том, что чертеж есть язык техника, а начертательная геометрия — грамматика этого языка, считается общеизвестной, и мы не будем здесь останавливаться на разъяснении этой мысли.

Весь курс начертательной геометрии предположен к выпуску в трех частях. Первые две части выйдут под заголовком „Начертательная геометрия как основа черчения" и обнимут вопросы и задачи, требуемые программами высших технических учебных заведений.

Третья же часть выйдет под заголовком: „Дополнительные статьи по начертательной геометрии" и будет содержать в себе задачи и вопросы, выходящие за рамки программ втузов и предназначенные для лиц, желающих глубже изучить предмет.

В то время как первым двум частям будет дан уклон более практический, третья часть будет иметь характер чисто теоретический.

При распределении материала первых двух частей предположено в первую часть выделить все вопросы и задачи в простейшем их задании, а во вторую часть курса войдут те же вопросы и задачи, но в общем и более сложном их задании. Во вторую часть войдут также те вопросы, которые не вошли в первую часть вследствие их некоторой сложности для понимания.

Такое распределение материала диктуется желанием дать такой курс начертательной геометрии, который развивал бы учащегося постепенно от самых простейших задач до самых сложных.

Цель такого распределения материала — дать незаметный переход от легких задач к более трудным. С методической точки зрения нам кажется рациональным такой подход к вопросу.

Первой части курса будет дан уклон в сторону машиностроительного черчения, и он по своему содержанию может быть полезен также и для слушателей механических техникумов и курсов чертежников-конструкторов (механической специальности).

Второй части курса будут даны уклоны в сторону топографического, инженерного и архитектурного черчения.

Доцент *Ананов.*

Ленинград.
1929 г.

I. Проектирование на одну плоскость.

1. Проектирование точки на одну плоскость.

Прямоугольной проекцией точки на заданную плоскость будем называть основание перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.

Плоскость, на которую проектируем точку, называется п л о с к о с т ь ю п р о е к ц и й.

За плоскость проекций может быть принята горизонтальная, вертикальная или какая-либо иная плоскость. Мы в первую очередь точку будем проектировать на горизонтальную плоскость, которую обычно обозначают через H.

Таким образом выражение „спроектировать точку на плоскость H“ равносильно выражению „спроектировать точку на горизонтальную плоскость проекций“.

На черт. 1 имеем так называемый „пространственный чертеж“, который, отличаясь своей наглядностью, заменяет м о д е л ь. В дальнейшем мы многие вопросы будем иллюстрировать такими наглядными пространственными чертежами.

На черт. 1 параллелограм условно изображает плоскость H.

Вертикальная пунктирная линия изображает перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость H. Этот перпендикуляр снабжен стрелкой, чтобы показать х о д р а б о т ы, а именно: взята в пространстве точка A и из нее опущен перпендикуляр на плоскость H.

Основание перпендикуляра обозначаем через a и называем его, как было сказано, горизонтальной проекцией точки A.

В продолжение всего курса мы будем точки пространства обозначать большими буквами A, B, C, D.... а их проекции будем соответственно обозначать малыми буквами: a, b, c, d... Например, на черт. 2 даны четыре точки A, B, C и D и их горизонтальные проекции. При этом по черт. 2 видим, что точки A и B находятся выше плоскости H, точка D находится ниже плоскости H и наконец точка C находится на самой плоскости H.

На черт. 1 и 2 имеем пространственные чертежи, заменяющие собою модели, где плоскость H представлена в искаженном виде. Мы плоскость берем в виде прямоугольника, а здесь на пространственных чертежах она изображена в виде параллелограма.

Положим, на черт. 3 плоскость H изображена в натуральную величину в виде прямоугольника и на ней изображена горизонтальная проекция точки A. Черт. 3 соответствует пространственному чертежу первому. На черт. 4 изображена горизонтальная плоскость H и горизонтальные проекции четырех точек A, B, C и D, соответствующих точкам пространственного черт. 2.

Только по горизонтальным проекциям точек (черт. 3 и 4) нельзя судить о местах этих точек в пространстве.

На вопрос, где например находится точка A, мы по черт. 3 и 4 точно ответить не сумеем.

Мы только можем сказать, что точка A находится на перпендикуляре к плоскости H, восстановленном из точки a. Но где именно на этом перпендикуляре находится точка A, мы точно указать не сумеем.

И вот, существует в начертательной геометрии небольшой отдел, который называется: „Проекции с числовыми отметками".

Здесь поставленный выше вопрос разрешается путем введения при горизонтальных проекциях точек еще и дополнительных численных пометок. Эти численные пометки при горизонтальных проекциях точек называются числовыми отметками или просто отметками точек. Они выражают в заданных единицах (метрах, саженях и т. д.) расстояния точек от плоскости H.

Так как точки могут быть над плоскостью H и под плоскостью H, то условились брать для точек выше плоскости отметки с положительным знаком, а ниже—с отрицательным знаком.

Таким образом на черт. 5 мы будем иметь изображение четырех точек A, B, C и D по методу проекций с числовыми отметками.

Положим, на черт. 5 и в дальнейших чертежах отметки даны в метрах, тогда точка A будет лежать выше плоскости H на перпендикуляре к плоскости H, восставленном из точки a, и на расстоянии 6 *м* от H.

Точка B лежит также выше плоскости H, лежит на перпендикуляре к плоскости H, восставленном из точки b, и на расстоянии 10 *м* от плоскости H. Точка D имеет отрицательную отметку — 5, а потому она находится ниже плоскости H на расстоянии 5 *м* на перпендикуляре, восставленном к плоскости H из точки d.

Наконец, точка C имеет отметку, равную нулю, а потому точка C лежит на самой плоскости H там, где лежит ее горизонтальная проекция.

2. Проектирование прямой линии на одну плоскость.

Положим, имеем в пространстве прямую AB.

Проектируем точки A и B на плоскость H, в точки a и b (черт. 6).

Если вообразим плоскость, перпендикулярную к H и проходящую через прямую AB, то такая плоскость будет в себе содержать перпендикуляры Aa и Bb и пересечет плоскость H по прямой линии ab, которую называем горизонтальной проекцией прямой AB.

Если на прямой линии AB возьмем некоторую точку C (черт. 6), делящую прямую AB в отношении $m:n$, то горизонтальная проекция точки C, т. е. точка c также разделит в отношении $m:n$ горизонтальную проекцию прямой линии.

Перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость H, лежит в указанной нами плоскости $ABba$, а поэтому горизонтальная проекция точки C лежит на прямой ab, т. е. на горизонтальной проекции прямой AB.

Из черт. 6 имеем:

$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB} = m:n,$$

что и требовалось доказать.

3. Изображение прямой линии по методу проекций с числовыми отметками.

По одной горизонтальной проекции прямой линии мы не можем судить ни о положении прямой линии в пространстве ни о ее длине. Мы только можем указать, что концы заданного отрезка прямой линии лежат на перпендикулярах, восставленных к плоскости H из концов горизонтальной проекции прямой линии.

Для определенности задания прямой линии в пространстве по одной ее горизонтальной проекции мы задаемся кроме того отметками концов данного отрезка.

На черт. 7 изображены по методу проекций с числовыми отметками две прямые: AB, которая наклонена к плоскости H, и CD, параллельная плоскости H. Точка A находится на высоте 7 *м* от плоскости H, а точка B на высоте 12 *м*. Следовательно прямая AB имеет уклон от B к A.

Обе точки C и D лежат на высоте 8 *м* от плоскости H, а потому CD параллельна плоскости H. Линия, параллельная плоскости H, называется горизонталью.

Следовательно на черт. 7 прямая CD будет горизонтальной.

Решим несколько простейших задач.

З а д а ч а 1. На прямой, заданной своей горизонтальной проекцией и отметками концов, найти проекцию точки с определенной отметкой.

На прямой черт. 8 найдем точки с отметками 10 и 13.

Заметим, что превышение точки B над точкой A будет $16 - 8 = 8$.

Если бы мы прямую AB разделили на 8 равных частей, то точки деления имели бы отметки от A к B: 9, 10, 11.... 15.

Таким образом легко найти точки c и d проекций искомых точек C и D с отметками 10 и 13.

Для этого прямую ab делим на 8 равных частей и берем точку c в конце второго деления, а точку d — в конце пятого деления, считая от точки a.

Задача 2. Даны прямая AB и точка C (черт. 9). Через точку C провести горизонталь, которая пересекала бы прямую AB.

Прямая AB наклонна к плоскости H.

Разность превышений точек A и B над плоскостью H будет $8 - 3 = 5$.

Делим ab на 5 равных частей и получаем горизонтальные проекции точек с отметками 7, 6, 5 и 4, считая от A к B.

Так как заданная точка C имеет отметку 5, то линия cd будет горизонтальной проекцией искомой горизонтали. А имея горизонтальную проекцию горизонтали и отметку этой горизонтали, мы имеем точное положение искомой горизонтали CD.

Задача 3. Даны прямые AB и CD; найти пересечение прямых AB и CD с плоскостью H.

Найти пересечение прямой с плоскостью H это значит найти на прямой такую точку, которая имела бы отметку равную нулю.

Ищем такую точку на прямой AB. Точка A имеет отметку плюс четыре, а точка B минус три.

Следовательно разность превышений точки A над точкой B будет:

$$4 + 3 = 7, \text{ или } 4 - (-3) = 4 + 3 = 7.$$

Поэтому ab делим на 7 равных частей и получаем горизонтальные проекции точек с отметками 3, 2, 1, 0, —1, —2.

Искомая точка n с отметкой $= 0$ легко может быть найдена.

На черт. 10 прямая CD имеет уклон от C к D, что видно по отметкам точек C и D.

Отметка точки $C = 2$, а отметка точки $D = 6$. Разность превышений точки D над точкой C будет $6 - 2 = 4$.

Деля горизонтальную проекцию прямой CD, т. е. линию cd, на 4 равные части, получаем точки, которые являются горизонтальными проекциями точек с отметками 5, 4, 3.

Если по линии cd от точки c влево продолжить полученные деления, то в конце второго деления получим искомую точку m с отметкой 0.

4. Проектирование плоских фигур на одну плоскость.

Из плоских фигур рассмотрим прежде всего проектирование треугольника.

Для проектирования треугольника на H (черт. 11) достаточно вершины A, B и C спроектировать на H и полученные проекции вершин соединить между собою прямыми линиями.

По методу проекций с числовыми отметками треугольник будет задаваться своей горизонтальной проекцией и отметками вершин (черт. 12 и 13).

На черт. 12 все три вершины треугольника лежат выше плоскостей H.

На чертеже 13 одна сторона AB треугольника лежит на плоскости H, а вершина C над плоскостью H на высоте 10 *м*.

Задача 4. Дан треугольник ABC (черт. 14). Найти линию сечения этого треугольника с плоскостью H.

На черт. 14 вершина C находится под плоскостью H, а вершины A и B над плоскостью H. Об этом мы судим по отметкам вершин A, B и C.

На прямых AB и BC находим точки N и M с отметками 0 (нуль), как это мы делали в задаче 3, и соединяем их между собой прямой линией, так как сечение треугольника с плоскостью будет прямая линия.

Задача 5. В плоскости треугольника провести горизонталь (черт. 15).

На черт. 15 проведены две горизонтали в плоскости треугольника *ABC*: одна через вершину *C* на уровне 7 *м*, а другая через точку *M* линии *AB* на уровне 6 *м*. Способ построения ясен из чертежа.

Задача 6. Построить произвольный плоский четыреугольник по методу проекций с числовыми отметками.

Четыре произвольно взятые в пространстве точки не лежат в одной плоскости, а потому для построения плоского четыреугольника мы берем три произвольные точки и образуем таким образом вполне определенный в пространстве треугольник. В плоскости полученного треугольника, но вне его контура, берем точку и называем ее четвертой вершиной искомого четыреугольника.

На черт. 16 показано это построение.

Мы взяли *ABC* с отметками вершин 5, 10 и 9. Линию *ab* разделили на 5 частей и получили горизонтальные проекции точек прямой *AB* с отметками 6, 7, 8 и 9. Если произвольную из этих точек, например точку с отметкой 7, соединим с вершиной *C*, то получим прямую, лежащую в плоскости треугольника *ABC*. Продолжим эту прямую за пределы треугольника и возьмем на ней некоторую точку *D* с отметкой, например, 5. Горизонтальная проекция такой прямой на чертеже изображена пунктиром. Делим расстояние между точками 7 и *c* (9) пополам и посредине получаем горизонтальную проекцию точки с отметкой 8.

На продолжении пунктирной прямой откладываем два деления и получаем искомую горизонтальную проекцию четвертой вершины плоского четыреугольника.

II. Проектирование на две плоскости.

Метод проекций с числовыми отметками весьма ценен в одних областях техники, а в других совершенно не годен, например, в геодезии (им пользуются для показания рельефа местности) абсолютно необходим, а в машиностроении он совершенно непригоден. Если бы вздумали простую деталь машины изобразить по методу проекций с числовыми отметками, то могли бы получить большое нагромождение цифр, и может так случиться, что для отметок некоторых точек не будет места для их проставления. Конечно, таким чертежом совершенно невозможно пользоваться; поэтому метод проекций с числовыми отметками непригоден для чертежей машиностроительных, строительных и ряда других областей техники. В этих областях техники пользуются проектированием на две, либо на три **взаимно перпендикулярные** плоскости.

1. Проектирование точки на две плоскости.

Положим, имеем две взаимно перпендикулярные плоскости, горизонтальную плоскость H и вертикальную V (черт. 17).

Пересечение этих плоскостей будем называть осью проекций и эту ось читать не xo, а ox.

На черт. 17 имеем пространственный чертеж этих плоскостей и точки A с прямоугольными ее проекциями на плоскостях H и V. Как мы уже знаем, для прямоугольной проекции точки на данной плоскости надо из точки опустить перпендикуляр на эту плоскость и взять основание этого перпендикуляра. На чертеже стрелками показаны направления перпендикуляров, опущенных на H и V. Основание одного перпендикуляра будет горизонтальной проекцией точки A.

Горизонтальную проекцию попрежнему обозначим через a, а вертикальную проекцию тоже через a, но со значком наверху, для отличия от горизонтальной проекции.

Таким образом, вертикальную проекцию точки A обозначаем через a'. Через перпендикуляры Aa и Aa' вообразим плоскость, которая пересечет плоскости H и V по пунктирным линиям aa_0 и $a'a_0$. Докажем, что эти линии перпендикулярны к оси ox.

Плоскость четыреугольника Aaa_0a' проходит по перпендикулярам Aa и Aa' к плоскостям H и V, а потому плоскость этого четыреугольника перпендикулярна к H и V, а значит, на основании известной теоремы стереометрии, она перпендикулярна и к оси проекций. Таким образом, мы доказали, что плоскость четыреугольника Aaa_0a' перпендикулярна к оси проекций ox. А из этого следует:

$$aa_0 \perp ox \text{ и } a'a_0 \perp ox,$$

что и требовалось доказать.

Повернув плоскость H вокруг оси ox так, как это показано на черт. 17 стрелкой, до совмещения плоскости H с продолжением плоскости V, мы будем иметь плоский чертеж черт. 18, с изображением на нем оси проекций ox плоскости V, плоскости H в повернутом положении и двух проекций точки A. При этом вертикальная проекция a' осталась на месте, а горизонтальная проекция a повернулась вместе с плоскостью H и заняла на черт. 18 некоторое положение a. Точка же a_0 на оси проекций занимает свое прежнее положение, так как во время вращения плоскости H она была неподвижна.

Было доказано, что $a_0a \perp ox$; во время вращения плоскости H эта перпендикулярность будет сохраняться и после полного поворота плоскости H; мы на черт. 18 будем иметь $aa' \perp ox$, так как линия $a'a_0$ во время вращения плоскости H не изменяла своего положения.

Следовательно на черт. 18 линии aa_0 и $a'a_0$ лежат на одной прямой, перпендикулярной оси ox.

Таким образом имеем право утверждать следующую основную теорему проектирования точки на две плоскости:

Две проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси проекций.

Вернемся опять к черт. 17 и ближе рассмотрим четыреугольник Aaa_0a'. Прямая $Aa \perp H$, а потому угол Aaa_0 прямой.

Прямая $Aa' \perp V$, а потому угол $Aa'a_0$ прямой. Линии a_0a' и a_0a перпендикулярны к оси ox, а потому угол $a'a_0a$ есть линейный угол двугранного угла между плоскостями H и V.

Но плоскость $V \perp H$, а потому двугранный угол прямой. Но прямому двугранному углу соответствует и прямой линейный угол, таким образом угол $a'a_0a$ также прямой.

Мы имеем, следовательно, в четыреугольнике Aaa_0a' три прямых угла, а потому четвертый угол его также прямой.

Следовательно четыреугольник Aaa_0a' есть прямоугольник, в котором имеем:

$$Aa = a'a_0 \text{ и } Aa' = aa_0,$$

1. Т. е. расстояние (Aa) точки до горизонтальной плоскости проекции равно расстоянию ($a'a_0$) вертикальной проекции точки до оси проекций.

2. Расстояние точки до вертикальной плоскости проекций (Aa') равно расстоянию (aa_0) горизонтальной проекции точки до оси проекций.

Таким образом мы по чертежу, на котором изображены две проекции точки (черт. 18), можем определить расстояния самой точки до плоскости проекций.

2. Проектирование точек, лежащих на плоскостях проекций.

На черт. 19 имеем точку M на плоскости H, точку N — на плоскости V и точку K — на обеих плоскостях проекций, т. е. на оси проекций. Точка M имеет вертикальную свою проекцию на оси проекций.

Точка N имеет горизонтальную свою проекцию на оси проекций. Точка K имеет обе свои проекции на оси проекций.

Чтобы точка лежала на плоскости, одна из ее проекций должна лежать на оси проекций. Повернем вокруг оси ox плоскость H до совмещения с плоскостью V, как это показано на черт. 19 стрелкой. Получим плоский черт. 20 с изображением на нем проекций точек M, N и K, лежащих на H, V и оси проекций ox.

3. Проектирование прямой линии на две плоскости.

Мы видим, что проекция прямой линии на любой плоскости есть линия прямая.

Положим, в пространстве имеем прямую AB. Проекция на плоскости H будет ab, а на плоскости V будет $a'b'$.

Для получения ab и $a'b'$ достаточно иметь две проекции каждой из точек A и B и соответственные проекции этих точек соединить между собою прямыми линиями, что и сделано на черт. 21.

Задача 7. Дана прямая в двух проекциях. Построить точку, лежащую на этой прямой. Под выражением „построить точку" — мы должны понимать „построить проекции точки".

Конечно, горизонтальная проекция точки должна лежать на горизонтальной проекции заданной прямой, а вертикальная проекция точки на вертикальной проекции прямой.

Кроме того обе проекции искомой точки лежат на одном общем перпендикуляре к оси проекций. Такой перпендикуляр к оси проекций называется проектирующей прямой и проводится тонким пунктиром.

На черт. 22 точка P лежит на прямой AB.

Задача 8. Построить прямую, которая своими концами упиралась бы в плоскости H и V.

Берем точку M на плоскости H и точку N на плоскости V и соединяем их между собою прямой линией. На черт. 23 исполнено в двух проекциях.

Искомая прямая будет MN, ее же иначе можно читать: $(mn, m'n')$.

Выражения: „даны точка A", „дана прямая AB" могут быть в подлежащих случаях, когда имеется чертеж их в двух проекциях, заменены выражениями „дана точка (a, a')", „дана прямая $(ab, a'b')$".

Задача 9. Построить прямую в двух проекциях так, чтобы она одним концом упиралась в ось проекций, а другой бы конец был равноудален от плоскостей проекций.

Обе проекции первого конца искомой прямой лежат на оси проекций. На черт. 24 имеем решение предложенной задачи.

4. Проектирование прямых, параллельных плоскостям проекций.

a) Прямая, параллельная плоскости H, называется горизонталью. Горизонталь имеет оба свои конца равноудаленными от плоскости H.

Следовательно вертикальные проекции этих концов будут также равноудалены от оси ox и на таком же расстоянии. А отсюда следует, что вертикальная проекция горизонтали должна быть параллельна оси проекций ox. Горизонтальная проекция же горизонтали может занимать произвольное положение по отношению к оси ox. На черт. 25 изображена горизонталь в двух проекциях.

b) Прямая, параллельная плоскости V, называется фронталью.

Фронталь, будучи параллельной плоскости V, имеет оба свои конца на равных расстояниях от плоскости V. Поэтому горизонтальные проекции концов фронтали также будут на равных расстояниях от оси ox, а потому горизонтальная проекция фронтали параллельна оси проекций. Вертикальная же проекция фронтали произвольно наклонена к оси проекций. На черт. 26 изображена фронталь в двух проекциях.

c) Прямая, параллельная обеим плоскостям проекций.

Такая прямая будет и горизонталью и фронталью. Будучи горизонталью, она должна иметь свою вертикальную проекцию параллельною оси ox. Будучи фронталью, она должна иметь горизонтальную проекцию параллельною оси проекций. А потому обе проекции такой прямой параллельны оси ox. На черт. 27 она изображена в двух проекциях.

5. Проектирование прямых, перпендикулярных к плоскостям проекций.

a) Прямая, перпендикулярная к плоскости H.

Рассмотрим пространственный черт. 28.

Прямая AB (черт. 28) перпендикулярна к плоскости H. Как видно из чертежа, оба конца прямой AB на H проектируются в одну точку, а потому горизонтальная проекция ab в такой прямой изображается в виде точки. Не трудно доказать, что вертикальная проекция прямой AB будет перпендикулярна к оси проекций.

На черт. 29 изображены вертикальная и горизонтальная проекции прямой, перпендикулярной плоскости H.

b) Прямая перпендикулярна к плоскости V.

Рассуждая аналогично с предыдущим примером, не трудно понять, что прямая, перпендикулярная к плоскости V, на V проектируется в точку.

Горизонтальная же проекция такой прямой будет перпендикулярна к оси проекций (черт. 30).

6. Проектирование треугольника на две плоскости.

Положим, в пространстве имеем три точки A, B и C. На черт. 31 изображены они в двух проекциях.

Приняв эти точки за вершины треугольника, мы будем иметь на черт. 31 вертикальную и горизонтальную проекции треугольника ABC.

Задача 10. В плоскости треугольника построить точку.

Чтобы построить в плоскости треугольника точку, мы берем в плоскости треугольника вспомогательную прямую и уже на ней берем искомую точку.

На черт. 32 берем точку $(1', 1)$ на стороне $(b'c', bc)$ и эту точку соединяем с вершиной (a', a).

Проведенная таким образом прямая будет лежать в плоскости треугольника. Точка (k', k), взятая на ней, будет искомой точкой.

На черт. 32 прямая $(a' 1', a\ 1)$ есть вспомогательная прямая и проведена она через одну из вершин треугольника, но могла бы она конечно быть проведенной и не через вершину треугольника. Для этого следовало бы на другой стороне треугольника взять точку $(2', 2)$ и ее соединить с точкой $(1', 1)$.

На черт. 33 и 34 решена та же задача, но при помощи горизонтали (на черт. 33) и фронтали (на черт. 34).

Помня, что вертикальная проекция горизонтали параллельна оси проекций, мы на черт. 33 работу начинаем с проведения вертикальной проекции горизонтали. Через точку a' проводим линию, параллельную оси проекций, до пересечения с линией $b' c'$ в точке $1'$. Точку $1'$ проектируем на линию bc в точку 1, которую соединяем с точкой a. На черт. 33 ход работы показан стрелками.

На построенной таким образом горизонтали берем точку (k', k).

На черт. 34 задача решена при помощи фронтали и ход построения проекций фронтали на чертеже показан стрелками.

Задача 11. В плоскости треугольника ABC со сторонами, произвольно наклоненными к плоскости проекций, построить другой треугольник так, чтобы:

Пример I. Все три вершины искомого треугольника лежали на сторонах заданного треугольника.

Пример II. Одна вершина искомого треугольника лежала на стороне данного треугольника, а две другие вершины лежали бы на горизонтали треугольника.

Пример III. Одна вершина искомого треугольника совпадала с вершиной заданного треугольника, другая вершина лежала на стороне треугольника, а третья вершина должна быть взята в центре тяжести заданного треугольника.

Задача 12. Построить проекции плоского четыреугольника:

Пример I. Четыреугольник произвольный.

Пример II. Четыреугольник имеет горизонтальную проекцию в виде квадрата.

Задача 13. Построить проекции плоского пятиугольника.

Пример I. Пятиугольник произвольный.

Пример II. Вертикальная проекция искомого пятиугольника—правильный пятиугольник.

Пример III. Дана горизонтальная проекция искомого пятиугольника и вертикальные проекции трех его вершин; найти вертикальные проекции остальных двух вершин.

Задачи 11, 12 и 13 приведены для самостоятельного решения.

III. Проектирование на три плоскости.

I. Проектирование точки на три плоскости.

Положим, имеем три взаимно перпендикулярные плоскости (черт. 35): знакомые нам горизонтальную и вертикальную плоскости, т. е. плоскости H и V, и третью плоскость W, перпендикулярную к плоскостям H и V.

Плоскость W называется второй вертикальной плоскостью проекций.

Таким образом, на черт. 35 имеем три плоскости проекций H, V и W. Эти плоскости H, V и W называются также координатными плоскостями, а линии их пересечения ox, oy и oz называются координатными осями. Общая их точка o называется началом координат.

Отрезки, откладываемые на координатных осях от начала координат o, называются координатами точек и соответственно обозначаются через x, y и z.

Чтобы понять способ определения координат x, y и z некоторой точки A, находящейся в пространстве, обратимся к черт. 35.

Черт. 35 является пространственным чертежом, где изображена точка A и три проекции a, a' и a''.

Для получения a, т. е. горизонтальной проекции точки A, мы из A опускаем перпендикуляр на плоскость H, как это мы делали во всех предыдущих случаях, и берем основание его. Так же опускаем перпендикуляры на плоскости V и W и получаем a' и a'', первую и вторую вертикальные проекции точки A.

Ход работы на чертеже показан стрелками.

Через точку A (черт. 35) проведем три плоскости, параллельные координатным плоскостям. Эти плоскости будут заключать в себе перпендикуляры Aa, Aa' и Aa''. Плоскость, проходящая через перпендикуляры Aa и Aa', будет параллельна плоскости W и пересекает такая плоскость ox в точке a_x.

Отрезок oa_x и называется координатой x точки A. Плоскость, проходящая через перпендикуляры Aa и Aa'', будет параллельна плоскости V и пересекает ось oy в точке a_y.

Отрезок oa_y называется координатой y точки A. Плоскость, проходящая через перпендикуляры Aa' и Aa'', будет параллельна плоскости H и пересекает ось oz в точке a_z.

Отрезок oa_z называется координатой z точки A.

Таким образом всякая точка A пространства имеет три вполне определенные координаты: $x = oa_x$, $y = oa_y$ и $z = oa_z$. Это и есть декартовы координаты точки A.

Соотношение между проекциями и координатами одной и той же точки.

Не трудно видеть по черт. 35, что каждая пара координат точки определяет одну из ее проекций. Так:

1. Координаты x и y определяют горизонтальную проекцию (a) точки A.

2. Координаты x и z определяют вертикальную проекцию (a') точки A.

3. Координаты z и y определяют вторую вертикальную проекцию (a'') точки A.

И обратно: имея проекцию точки, мы легко определяем две соответственные координаты этой точки.

Например, имея горизонтальную проекцию точки, мы находим ее координаты x и y.

Для этого надо в плоскости H через заданную горизонтальную проекцию провести линии, параллельные осям ox и oy, и пересечь ими эти оси.

По вертикальной проекции a' точки A находим координаты x и z этой точки, и наконец по второй вертикальной проекции a'' точки A легко находим координаты y и z.

Три координаты точки вполне определяют положение точки в пространстве.

Положим даны: $x = oa_x$, $y = oa_y$ и $z = oa_z$ (черт. 35).

Докажем, что эти три координаты имеет одна единственная точка пространства:

1. Через точку a_x проведем плоскость, параллельную W. Все точки этой плоскости имеют координату $x = oa_x$.

2. Через точку a_y проведем плоскость, параллельную плоскости V. Все точки этой плоскости имеют координату $y = oa_y$. Обе проведенные плоскости пересекаются по линии Aa, Следовательно все точки линии Aa имеют координаты $x = oa_x$, $y = oa_y$.

3. Проведем через точку a_z плоскость, параллельную плоскости H. Все точки этой плоскости имеют координату $z = oa_z$. Пересечем эту плоскость с прямой Aa в единственной точке A.

Следовательно точка A будет иметь координаты:

$$x = oa_x;\ y = oa_y;\ z = oa_z.$$

Эта точка A и является искомой.

Повернем плоскость H черт. 35 вокруг оси ox до совмещения с плоскостью V. Тогда горизонтальная проекция (a) точки A будет, как мы это видели раньше, лежать на одном перпендикуляре к оси ox с вертикальной проекцией заданной точки A.

Повернем плоскость W черт. 35 вокруг оси oz до совмещения с плоскостью V.

Не трудно видеть, рассуждая аналогично предыдущему, что точки a' и a'' будут лежать на одном перпендикуляре к оси oz.

Черт. 35 после совмещения плоскостей H и W с плоскостью V примет вид черт. 36.

На черт. 36 $y = oa_y$ встречается дважды, а потому обе точки с обозначением a_y будут лежать на дуге круга, центр которого лежит в точке o.

Отсюда вытекает чисто графический метод определения третьей проекции точки, когда даны две проекции ее. На черт. 37, 38 и 39 показан стрелками способ определения третьей проекции по заданным двум проекциям ее.

2. Проектирование точек, лежащих на плоскостях H, V и W, на три плоскости.

На черт. 40 точка M лежит в плоскости H, точка N лежит в плоскости V, а точка P — в плоскости W.

Все эти точки имеют одну свою проекцию, совпадающую с самой точкой, а две другие проекции лежат на координатных осях.

Повернем плоскости H и W вокруг осей ox и oz до совмещения с плоскостью V.

Тогда будем иметь на чертежах 41, 42 и 43 изображения точек M, N и P в трех проекциях.

3. Проектирование прямой, произвольно наклонной к плоскостям проекций, на три плоскости.

На черт. 44 имеем пространственный чертеж проектирования прямой AB на три плоскости.

Совместив плоскости H и W с плоскостью V, мы на черт. 45 будем иметь три проекции прямой линии.

Так как точки A и B нами были взяты совершенно произвольно, то прямая черт. 44 и 45 будет произвольно наклонной к плоскостям проекций.

Рассмотрим теперь особые случаи задания прямой линии, когда прямая параллельна, либо перпендикулярна к одной из плоскостей проекций.

4. Проектирование прямых, параллельных плоскостям проекций, на три плоскости.

Таких имеем три случая:

a) Прямая, параллельная плоскости H, она же называется, как мы видели, горизонталью (черт. 46 и 47).

Горизонталь (черт. 46 и 47), будучи параллельна плоскости H, будет равна и параллельна своей горизонтальной проекции $AB \# ab$.

Вертикальная проекция $a'b'$ и вторая вертикальная проекция $a''b''$ параллельны соответственно осям ox и oy, $a'b' \parallel ox$; $a''b'' \parallel oy$.

b) Прямая, параллельная плоскости V, она же называется, как мы видели, фронталью (черт. 48, 49).

Фронталь параллельна плоскости V, а потому она равна и параллельна своей вертикальной проекции, что видно из четыреугольника $Aa'b'B'$ черт. 48. Две другие проекции фронтали параллельны осям ox и oz (черт. 48 и 49).

c) Прямая, параллельная плоскости W, она же называется профильной линией.

Профильная линия (черт. 50 и 51) параллельна плоскости W, а потому проекция ее на W равна и параллельна самой прямой.

Вертикальная и горизонтальная проекции профильной линии перпендикулярны оси ox.

5. Проектирование прямых, перпендикулярных плоскостям проекций.

Таких имеем три случая:

a) Прямая, перпендикулярная плоскости H (черт. 52 и 53). Горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной к H, обращается в точку, вертикальная проекция перпендикулярна к оси ox, а вторая вертикальная проекция перпендикулярна к оси oy.

b) Прямая, перпендикулярная к плоскости V (черт. 54 и 55).

Вертикальная проекция прямой, перпендикулярной к плоскости V, превращается в точку (черт. 54 и 55), а две другие проекции соответственно параллельны оси oy.

c) Прямая, перпендикулярная плоскости W (черт. 56 и 57).

Прямая, перпендикулярная к W, на W проектируется в точку, а на H и V проектируется прямыми, параллельными оси ox (черт. 56 и 57).

6. Проектирование треугольника на три плоскости.

Чтобы иметь три проекции произвольного треугольника, достаточно взять в трех проекциях три совершенно произвольные точки и принять их за проекции трех вершин искомого треугольника.

На черт. 58 имеем изображение трех проекций произвольного треугольника.

На черт. 58 и в дальнейших чертежах мы будем чертить только оси ox, oy и oz, а контурные линии, принадлежащие прямоугольникам H, V и W, мы без ущерба для дела можем и будем выпускать, имея их только в своем воображении.

З а д а ч а 14. Построить треугольник, который имел бы одну сторону, параллельную одной из плоскостей проекций:

a) Одна сторона треугольника параллельна H (черт. 59).

Берем в трех проекциях (черт. 59) горизонталь AB и принимаем ее за одну из сторон искомого треугольника. Далее берем три проекции вершины C, которую берем произвольно.

b) Одна сторона треугольника параллельна плоскости V (черт. 60).

Берем фронталь AB в трех проекциях (черт. 60) и принимаем ее за одну из сторон искомого треугольника. Третью вершину C берем произвольно.

c) Одна сторона треугольника параллельна плоскости W (черт. 61).

Берем в трех проекциях профильную линию AB и ее принимаем за одну из сторон искомого треугольника, а третью вершину C искомого треугольника берем произвольно.

Задача 15. Построить треугольник в трех проекциях так, чтобы одна из сторон треугольника была перпендикулярна к одной из плоскостей проекций.

a) Одна сторона треугольника перпендикулярна к плоскости H (черт. 62).

Изображаем прямую AB, перпендикулярную к плоскости H, в трех проекциях и принимаем ее за одну из сторон искомого треугольника. Вершину C берем произвольно.

Обычно каждая проекция треугольника изображается в виде треугольника, но в данном случае горизонтальная проекция треугольника обратилась в прямую линию, в виду того что одна сторона искомого треугольника (черт. 62) перпендикулярна к H и на H проектируется в точку.

b) Одна сторона треугольника перпендикулярна к плоскости V (черт. 63).

Работу начинаем с построения трех проекций прямой AB, перпендикулярной к плоскости V. Такую прямую принимаем за одну из сторон искомого треугольника. Третью вершину искомого треугольника берем произвольно.

На черт. 63 в трех проекциях изображен искомый треугольник, вертикальная проекция которого обратилась в прямую линию, так как вертикальная проекция стороны AB обращается в точку.

c) Одна из сторон треугольника перпендикулярна к плоскости W (черт. 64).

Берем прямую AB, перпендикулярную к плоскости W. Она горизонтальную и вертикальную проекции свои имеет параллельными оси ox, а проекцию на W в виде точки. Прямую AB принимаем за одну из сторон искомого треугольника. Третью вершину C искомого треугольника берем произвольно. На черт. 64 изображены три проекции искомого треугольника, при чем проекция на W обращается в прямую линию.

7. Построение точки в плоскости данного треугольника.

Положим, на черт. 65 и 66 дан треугольник ABC, в трех проекциях. Чтобы построить в плоскости треугольника точку, мы должны предварительно в плоскости треугольника построить вспомогательную прямую и уже на ней взять точку. Для построения же вспомогательной прямой в плоскости треугольника мы берем точку на одной из сторон его и соединяем ее либо с вершиной (черт. 65) треугольника, либо с точкой (черт. 66), лежащей на другой стороне треугольника.

На черт. 65 и 66 показаны оба эти случая, при чем ход работы показан стрелками.

Задача 16. Дан треугольник ABC в трех проекциях (черт. 67).

В плоскости заданного треугольника построить другой треугольник так, чтобы одна вершина искомого треугольника лежала на стороне данного треугольника, а две другие вершины лежали бы на горизонтали и фронтали заданного треугольника.

На черт. 67 вершина P искомого треугольника лежит на стороне BC, вершина M на горизонтали, а вершина N— на фронтали заданного треугольника.

Задача 17. Дан треугольник в трех проекциях. Построить в плоскости заданного треугольника треугольник так, чтобы одна вершина искомого треугольника совпала бы с одной из вершин данного треугольника, другая вершина лежала бы на горизонтали (фронтали) заданного треугольника.

Задача 18. Построить треугольник в трех проекциях так, чтобы вершины треугольника лежали бы в плоскостях H, V и W (черт. 70).

На черт. 70 вершина A лежит в плоскости H, вершина B—в плоскости V и вершина C—в плоскости W.

Задача 19. Построить треугольник в трех проекциях так, чтобы одна вершина лежала в плоскости H, другая на оси oz, а третья вершина была бы равноудалена от плоскостей проекций.

Задача решена на черт. 71.

Задача 20. Построить треугольник в трех проекциях так, чтобы все три вершины лежали бы на координатных осях *ox*; *oy* и *oz*.

На черт. 72 изображен искомый треугольник.

8. Проектирование прямоугольника на три плоскости.

Прямоугольники мы будем брать в простейшем их задании, когда плоскость прямоугольника перпендикулярна, либо параллельна одной из плоскостей проекций, а две противоположные стороны прямоугольника перпендикулярны к плоскости проекций.

При исполнении пространственных чертежей будем считать прямоугольник непрозрачным.

На черт. 73 и 74 плоскость прямоугольника *ABCD* перпендикулярна к плоскости *H*. Стороны *AB* и *CO* также перпендикулярны к плоскости *H*.

Так как *AB*, а также *CD* проектируются на *H* в точку, то горизонтальная проекция прямоугольника обращается в прямую линию.

Если *AB* и *CD* перпендикулярны к *H*, то *BC* и *AD* будут параллельны *H*, а потому проектируются на *V* и *W* в виде линий, параллельных осям *ox* и *oy*, стороны же *AB* и *CD* на *V* и *W* перпендикулярны к тем же осям, а потому весь прямоугольник *ABCD* будет проектироваться на *V* и *W* в виде прямоугольников, что мы и видим на черт. 74.

На черт. 75 и 76 плоскость прямоугольника *ABCD* параллельна плоскости *V*, а стороны *AB* и *CD* перпендикулярны к *H*.

Такой прямоугольник проектируется на *V* в натуральную величину, а на *H* и *W* в виде линий, параллельных *ox* и *oz*.

На черт. 77 и 78 плоскость прямоугольника перпендикулярна к плоскости *V*, при чем одна сторона *BC* лежит в плоскости *V*, а потому ее проекции на *H* и *W* лежат на осях *ox* и *oz*.

На черт. 79 изображены три проекции плоскости прямоугольника, параллельного плоскости H, кроме того одна сторона прямоугольника лежит в плоскости V.

На черт. 80 и 81 плоскость прямоугольника перпендикулярна к плоскости W и кроме того две стороны BC и AD параллельны оси ox.

На черт. 82 прямоугольник $ABCD$ лежит в плоскости, параллельной плоскости W, и на W проектируется в натуральную величину. Две другие проекции прямоугольника параллельны осям oy и oz, т. е. перпендикулярны к оси ox. Прямоугольник черт. 82 одной своей стороной AD соприкасается с плоскостью H.

9. Проектирование куба, призмы, пирамиды, цилиндра и конуса, в простейшем их задании, на плоскости H, V и W[1]).

На черт. 83 и 84 изображен куб в трех проекциях. Каждая проекция куба есть квадрат при том положении куба, которое имеется на черт. 83 и 84.

На черт. 83 куб одной своей гранью лежит на плоскости H, а две другие грани параллельны координатным плоскостям V и W.

На черт. 84 три грани куба, сходящиеся у одной вершины, параллельны координатным плоскостям H, V и W.

На черт. 83 и 84 буквы опущены, так как и без них чертежи вполне понятны. Мы и в дальнейшем будем иногда опускать буквы, если это не будет затруднять понимание чертежа.

Мы вообще должны привыкать к чертежам без букв, так как в дальнейшем мы в машиностроительных, инженерных и архитектурных чертежах сплошь будем иметь чертежи без букв.

На черт. 85 изображен прямоугольный параллелепипед, одна грань которого лежит в плоскости H, а две другие грани параллельны плоскостям V и W.

[1]) Общие случаи задания будут рассматриваться во второй части курса.

Во всех проекциях такой параллелепипед изображается прямоугольниками.

Изобразим на черт. 86 тот же прямоугольный параллелепипед, но несколько повернутый вокруг вертикальной оси.

Горизонтальная проекция такого параллелепипеда будет изображаться тем же прямоугольником, что и на черт. 85, но только здесь стороны прямоугольника не параллельны осям ox и oy.

При проектировании этого параллелепипеда на V мы будем изображать проекции талько трех боковых ребер сплошными, так как эти ребра при проектировании на V будут видимы. Четвертое же боковое ребро при проектировании на V невидимо, а потому мы изображаем пунктиром проекцию его на V.

Также при проектировании на W мы имеем три боковых ребра видимыми, а четвертое—невидимым.

На черт. 87 изображена в трех проекциях правильная прямая пятигранная призма, стоящая своим основанием на плоскости H.

Горизонтальная проекция изобразится правильным пятиугольником.

Вертикальные проекции двух ребер изображены пунктиром, так как эти ребра при проектировании на V будут невидимы.

При проектировании же на W проекции невидимых ребер совпадают с проекциями видимых ребер, а потому здесь нет пунктирных линий.

На черт. 88 изображена в трех проекциях правильная прямая шестигранная призма, при чем при проектировании на V и W проекции невидимых ребер покрываются проекциями видимых ребер, а потому на черт. 88 совершенно нет пунктирных проекций ребер.

На черт. 89 изображена в трех проекциях правильная прямая пирамида с основанием на H.

На черт. 90 и 91 изображены в трех проекциях прямой и круговой цилиндры.

Основание первого цилиндра лежит в плоскости H, а другого в плоскости, параллельной V.

На черт. 92 изображены в трех проекциях цилиндр с цилиндрической выемкой.

Контур выемки на V и W изображены пунктиром, а на H—второй, меньшей окружностью.

Основание цилиндра лежит в плоскости, параллельной H.

На черт. 93 имеем прямой круговой конус в трех проекциях. Основание конуса лежит в плоскости H.

10. Выяснение необходимости проектирования на три плоскости.

Если на чертеже отсутствуют буквы, то не всегда бывает возможно судить об изображенном предмете.

Возьмем например черт. 94, где вертикальная и горизонтальная проекции неизвестного нам предмета изображаются квадратами. Для целого ряда предметов мы имеем вертикальную и горизонтальную проекции такими, как на черт. 94.

Черт. 94 может изображать проекции куба, прямоугольника, трехгранной призмы и двух квадратов.

Взяв же кроме двух проекций еще и третью проекцию данного предмета, мы возникшую неопределенность уничтожаем.

Пристроим к черт. 94 для разных случаев еще и третью проекцию.

На черт. 95 имеем проекцию куба.

На черт. 96 и 97—проекцию прямоугольника.

На черт. 98 имеем проекции трехгранной призмы, а на черт. 99—проекции двух квадратов, плоскости которых параллельны плоскостям H и V.

Во всех приведенных примерах одни и те же вертикальные и горизонтальные проекции.

Из приведенного примера видно, что третья проекция во многих случаях необходима.

11. Проектирование на три плоскости усеченной пирамиды и усеченного конуса.

На черт. 100 изображены три проекции усеченной пирамиды с квадратным основанием, лежащим в плоскости H.

На черт. 101 даны три проекции усеченного конуса. Основание конуса лежит в плоскости H.

12. Проектирование куба с вырезами на три плоскости.

Для наглядности каждый чертеж сопровожден еще и пространственным.

Каждая пара пронумерована последовательно: 102 и 103, 104 и 105, 106 и 107... 116 и 117.

На черт. 103 имеем три проекции куба с вырезом левой верхней одной четверти.

На черт. 102 изображен пространственный чертеж того же куба с вырезом левой верхней одной четверти.

На черт. 105 изображены три проекции куба с вырезом левой верхней передней одной восьмой части куба.

На черт. 104 конечно имеем пространственный чертеж куба, изображенного на черт. 105.

В дальнейшем изображен в трех проекциях тот же куб, но с более сложными вырезами, которые можно легко понять, рассматривая соответственные пространственные чертежи.

Например, в последней паре, а именно в черт. 116 и 117 куб с таким вырезом, который был сделан на черт. 104 и 105, но кроме того еще сделано цилиндрическое сквозное отверстие диаметра, равного половине стороны куба.

При построении этого отверстия мы должны провести части окружностей диаметра, равного половине стороны куба, с центрами в центре задней грани куба, в центре передней грани и в точке, делящей линию, соединяющую эти центры, пополам.

На черт. 114 и 115 куб с таким же сквозным цилиндрическим отверстием как и на черт. 116 и 117.

Остальные пары чертежей рекомендуется учащемуся разобрать самостоятельно.

13. Изображение трех проекций куба с вырезами без показания проектирующих линий.

Так как в технических чертежах, в большинстве случаев, проектирующие линии выпускаются, то мы должны уже здесь к этому подойти и привыкнуть.

Для примера на черт. 118—123 изображен куб с вырезами в трех проекциях, при чем опущены все проектирующие линии.

Для большей понятности на черт. 118—123 взят тот же куб и с теми же вырезами, которые мы имели в предыдущем параграфе.

Так попарно следует рассмотреть черт. 118 с 107, 119 со 109, 120 с 111, 121 с 113, 122 с 115, наконец 123 с 117.

Часто отсутствие проектирующих линий делает чертеж более простым и наглядным, тогда как большое количество без нужды проведенных проектирующих линий затемняет чертеж.

14. Проектирование на три плоскости призм, пирамид, цилиндров и конусов с вырезами.

Для наглядности каждый пример сопровождаем пространственным чертежом.

На черт. 124, 126, 128 и 130 имеем пространственные чертежи, а на 125, 127, 129 и 131—изображения в трех проекциях попарно одних и тех же тел.

Во всех приведенных примерах №№ 125, 127, 129 и 131 опущены проектирующие линии, так как и без них способ построения понятен.

Мы, вообще, в дальнейшем будем на чертеже оставлять возможно меньше проектирующих линий, оставляя те, которые относятся к решению самой задачи.

Проектирующие же линии, относящиеся к построению самого задания, без ущерба для понимания и наглядности чертежа, конечно, могут быть опущены.

В следующей главе мы покажем изображения тех же тел в трех прямоугольных проекциях с опусканием не только проектирующих линий, но и координатных осей, что практикуется при исполнении технических чертежей.

15. Изображение трех прямоугольных проекций тел без изображения на чертеже координатных осей.

Начинаем работу с изображения какой-либо проекции, например, вертикальной.

Под ней располагаем горизонтальную проекцию так, чтобы вертикальная и горизонтальная проекции точки лежали бы на вертикальной прямой.

Построив горизонтальную проекцию данного предмета мы будем иметь уже две проекции его (вертикальную и горизонтальную).

По имеющимся уже двум проекциям строим третью (проекцию на W) и располагаем ее так, чтобы третья проекция каждой точки с вертикальной проекцией ее лежали бы на одной горизонтальной прямой.

Здесь мы горизонтальную и вторую вертикальную проекции можем брать на произвольных расстояниях от вертикальной проекции. Одну можем отодвинуть, а другую придвинуть к ранее построенной вертикальной проекции в зависимости от имеющегося на бумаге места.

Здесь приведены на черт. 132, 133, 134 и 135 изображения в трех проекциях тех же тел, что и на черт. 125, 127, 129 и 131.

Проекции взяты те же и расположены в должных местах, но только расстояния между проекциями не всегда взяты те же, которые имеются на черт.: 125, 127, 129 и 131, что не мешает пониманию чертежа.

В этих случаях предмет несколько иначе расположен по отношению к воображаемым координатным плоскостям.

Ниже мы приведем способ восстановления координатных осей, что даст нам возможность судить о расположении данного предмета относительно координатных плоскостей *H*, *V* и *W*.

16. Проекции шара и его частей.

Контур прямоугольной проекции шара на любую плоскость есть окружность того же диаметра, что не требует особых пояснений.

Таким образом достаточно иметь проекции центра шара и радиус его, чтобы изобразить проекции самого шара, что сделано на черт. 136. Рассекая шар плоскостью, параллельной *H* и проходящей через центр шара, мы получаем верхнее и нижнее полушария.

На черт. 137 изображено верхнее полушарие в трех проекциях. Рассекая шар плоскостью, параллельной *V* и проходящей через центр шара, мы получаем переднее и заднее полушария.

На черт. 138 имеем изображение переднего полушария в трех проекциях. Рассекая шар плоскостью параллельной плоскости *W* и проходящей через центр шара, мы будем иметь левое и правое полушария.

На черт. 139 изображено левое полушарие в трех проекциях.

На черт. 140 изображен в трех проекциях шар с вырезом.

На черт. 141 имеем три проекции шара с вырезом.

На черт. 141_1, 141_2, 141_3, 141_4, 141_5 и 141_6, в трех проекциях изображен полный шар с вырезами. Проектирующие линии и невидимые линии не показаны.

IV. Метод косоугольных проекций.

Положим, имеем некоторую плоскость *K*, параллельную плоскости *V*.

Такую плоскость K будем называть картинной плоскостью и будем на нее проектировать, но направление проектирования будем брать не перпендикулярным к плоскости K.

Таким образом, проектирующие линии между собою параллельны, но не перпендикулярны к картинной плоскости.

Так как проектирующие линии к картинной плоскости направлены косо, то и проекции в этом случае называются, в отличие от прямоугольных, косоугольными.

Конечно, одна и та же точка пространства имеет большое количество косоугольных проекций на данной картинной плоскости K в зависимости от того или иного направления проектирующих линий.

До установления определенного направления проектирующих линий, вопрос построения косоугольной проекции точки есть вопрос неопределенный.

Для выбора направления проектирующих линий, рассмотрим проектирование координатных осей на картинную плоскость.

Начнем с проектирования ox. На пространственном черт. 142 имеем ось ox и три ее косоугольные проекции на плоскости K.

Эти проекции обозначены через o_1x_1, o_2x_2 и o_3x_3.

Не трудно доказать, что все они равны и параллельны оси ox.

Возьмем, например, четыреугольник oxo_1x_1. Две стороны xx_1 и oo_1 этого четыреугольника между собою параллельны, а потому четыреугольник oxo_1x_1 есть плоский четыреугольник.

Поэтому линия o_1x_1 может быть рассматриваема как линия сечения плоскости K с плоскостью четыреугольника oxo_1x_1, а так как $ox \parallel K$, то o_1x_1 должна быть параллельна и ox.

Следовательно рассматриваемый нами четыреугольник oxo_1x_1 есть параллелограм, а потому $ox = o_1x_1$.

На основании тех же рассуждений и для остальных случаев будем иметь: $ox = o_2x_2$; $ox = o_3x_3$, что и требовалось доказать.

Поэтому имеем право утверждать, что ось ox и отрезки, лежащие на ней, проектируются на картинную плоскость K в натуральную величину в виде отрезков равных и параллельных независимо от направления проектирования.

Далее рассмотрим проектирование на картинную плоскость K оси oz, что сделано на черт. 143.

Не трудно видеть из черт. 143, что отрезки o_1z_1, o_2z_2 o_3z_3 и o_4z_4 равны и параллельны оси oz.

Конечно, каждый отрезок на оси oz спроектируется на плоскость K в виде равного и параллельного отрезка. Поэтому здесь так же, как и в предыдущем случае, имеем право утверждать: ось oz и отрезки, лежащие на ней, проектируются на картинную плоскость K в натуральную величину в виде отрезков равных и параллельных независимо от направления проектирования.

Рассмотрим наконец проектирование на оси oy, что показано на черт. 144.

На черт. 144 при разных направлениях проектирования даны проекции оси oy.

Не трудно доказать, что все эти проекции сходятся в одной точке P, в которой продолжение оси oy пересекает картинную плоскость K, так как такая точка P, как лежащая на плоскости K при любом направлении проектирования, имеет свою проекцию в этой же точке P, а потому продолжения всех линий o_1y_1, o_2y_2, o_3y_3 и o_4y_4 проходят через точку P.

Кроме того заметим, что ось oy перпендикулярна к плоскости V, а потому она перпендикулярна и к плоскости K.

Следовательно все треугольники: yPy_1, yPy_2, yPy_3 и yPy_4 прямоугольные, с прямым углом при точке P.

Обозначим углы, составляемые различными направлениями проектирующих лучей с осью oy через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4.

Вычертим отдельно в натуральную величину один из прямоугольных треугольников черт. 144.

Положим, на черт. 145 изображен в натуральную величину прямоугольный треугольник yPy_1.

$Py_1 = Py\ \mathrm{tg}\,\alpha$; $Po_1 = Po\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$, $Py_1 - Po_1 = (Py - Po)\ \mathrm{tg}\,\alpha_1$ или $o_1y_1 = oy\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$,

далее имеем:

$$\frac{o_1y_1}{oy} = \mathrm{tg}\,\alpha_1$$

Аналогично рассуждая, будем иметь:

$$\frac{o_1y_1}{oy} = \mathrm{tg}\,\alpha_1;\quad \frac{o_2y_2}{oy} = \mathrm{tg}\,\alpha_2;\quad \frac{y_3o_3}{oy} = \mathrm{tg}\,\alpha_3;\quad \frac{o_4y_4}{oy} = \mathrm{tg}\,\alpha_4$$

Отсюда следует, что величины проекций оси oy не равны самой оси и зависят от направления проектирования.

Отношение проекции оси oy к самой оси oy называется к о э ф ф и ц и е н т о м и с к а ж е н и я о с и oy, которое, как мы видели, равно тангенсу угла наклонения проектирующего луча к оси oy.

Конечно, нам выгодно, чтобы это искажение было наиболее удобным для построения.

Возьмем коэффициент искажения $k = {}^1/_2$ и все дальнейшие построения будем вести в предположении $k = {}^1/_2$, что означает, что ось oy и отрезки на ней проектируются на плоскость K с искажением вдвое, т. е. изображаются в половинную величину.

Если какой-либо отрезок в 8 *см* лежит на оси oy, то, при принятом коэффициенте искажения $k = {}^1/_2$, косоугольная проекция этого отрезка изобразится отрезком в $8 \cdot k = 8 \cdot {}^1/_2$ *см*.

Но в пространстве существует целый ряд направлений проектирующих линий, которые с осью oy составляют угол $\alpha = \mathrm{arctg}\ {}^1/_2$.

Поэтому, выбрав коэффициент искажения по оси oy $k = {}^1/_2$, мы еще не избавились окончательно от неопределенности вопроса.

При коэффициенте искажения $k = {}^1/_2$ все же для одной точки мы будем иметь возможность построить бесчисленное множество косоугольных проекций ее, так как коэффициенту $k = {}^1/_2$ удовлетворяет бесчисленное множество направлений проектирующих линий, которые параллельны образующим некоторого прямого кругового конуса.

Вершина такого конуса лежит в точке y, центр основания — в точке P, а радиус основания $= Py/2$ (черт. 146).

На черт. 146 точки y_1, y_2, y_3 и y_4 лежат на окружности, центр которой лежит в точке P и радиус $= Py/2$.

В данном случае $o_1y_1 = o_2y_2 = o_3y_3 = o_4y_4$, а следовательно и отношения:

$$\frac{o_1y_1}{oy} = \frac{o_2y_2}{oy} = \frac{o_3y_3}{oy} = \frac{o_4y_4}{oy} = \frac{Py_1}{Py} = \frac{1}{2}.$$

Направления проектирующих линий yy_1, yy_2, yy_3 и т. д. являются образующими прямого кругового конуса, вершина которого лежит в точке y, центр основания — в точке P, а радиус основания равен ${}^1/_2 Py$.

Часть такого конуса изображена на черт. 146.

Таким образом, мы видим, что коэффициенту $k = {}^1/_2$ удовлетворяет бесчисленное множество направлений проектирующих линий.

Выберем из этих направлений одно такое, при котором косоугольная проекция оси oy будет составлять с горизонтальной линией угол $= 30°$.

Это направление является наиболее выгодным, так как при нем изображения предметов, построенные по косоугольному методу, будут наиболее близкими к перспективным.

Это направление и примем во всей дальнейшей части курса.

На пространственном черт. 146 окончательно принятое нами направление косоугольного проектирования есть линия yy_2.

При этом направлении проектирования ось oy спроектируется в линию oy_2, которая наклонена с горизонтальной линии под углом 30°.

Как мы уже знаем, координатами x, y и z некоторой точки пространства будут отрезки на осях ox, oy и oz, при чем эти отрезки отсчитываются от начала координат o.

Из сказанного в настоящей главе мы имеем право сделать следующее заключение:

При изображении косоугольных проекций координат некоторой точки, координаты x и z будут изображаться в натуральную величину, а координата y в половину натуральной величины.

Положим, на черт. 147 на картинной плоскости изображены косоугольные проекции всех трех координатных осей при выбранном нами выше направлении проектирующих линий.

Проекция прямого угла xoz будет изображаться прямым же углом $x_1o_1z_1$.

Прямой угол zoy изображается на черт. 147 углом $z_1o_1y_1$, который равен $90 + 30° = 120°$.

Прямой угол xoy изображается на черт. 147 углом $x_1o_1y_1$, который $= 180° - 30° = 150°$.

Во всем дальнейшем курсе косоугольные проекции координатных осей на картинной плоскости K будем изображать под теми углами, которые получались на черт. 147.

Условимся в дальнейшем контур картинной плоскости не вычерчивать, а проекции координатных осей обозначать без дополнительных значков.

Таким образом вместо черт. 147 будем иметь черт. 148, на котором изображены проекции координатных осей.

Как мы видим по черт. 147 и 148, косоугольные проекции координатных осей могут быть изображены чрезвычайно просто.

Мы всегда их будем изображать так, как они показаны на черт. 148.

1. Изображение точки в косоугольных проекциях, заданной тремя ее координатами аналитически, либо графически.

Положим, дана точка A (7, 8, 10), где $x=7$, $y=8$ и $z=10$ единицам длины в принятом на чертеже масштабе.

Изобразим в косоугольных проекциях параллелепипед координат точки A.

Прежде всего строим изображение координатных осей.

Косоугольные проекции координитных осей на картинной плоскости будем называть изображениями этих осей. Так что мы можем сказать, что на черт. 148 и 147 имеем „изображения координатных осей".

Косоугольные проекции горизонтальной, вертикальной и второй вертикальной проекций точки будем называть изображениями на плоскостях H, V и W и будем обозначать также через a, a' и a''.

Они же называются: a — „вторая проекция точки A" на H", a' — „вторая проекция точки A на V и a'' — „вторая проекция точки A на плоскости W".

Косоугольную проекцию самой точки A будем обозначать также через A и будем называть ее „изображением самой точки".

Для заданной точки A (7, 8, 10) построим косоугольную проекцию параллелепипеда координат, для чего вспомним, что координаты x и z на картинной плоскости изображаются в натуральную величину, а координата y изображается в половину натуральной величины, в силу принятого нами выше направления косоугольного проектирования. На черт. 149 изображена косоугольная проекция параллелепипеда координат для заданной точки A (7, 8, 10). При чем для наглядности показаны пометки на осях.

На черт. 149 координату $x=7$ откладываем в натуральную величину, приняв за единицу длины небольшой отрезок, и получаем точку a_x.

В этом же масштабе откладываем и координаты y и z.

При этом $z=10$ откладываем в натуральную величину по оси oz и получаем точку a_z.

Имея точки a_x и a_z, мы, проводя через них прямые параллельные осям ox и oz, получим изображение вертикальной проекции точки A, т. е. получим точку a'. Далее по оси oy откладываем координату y, уменьшенную вдвое, следовательно откладываем в нашем примере $^8/_2=4$ единицы в принятом уже нами масштабе, и получаем точку a_y.

Теперь, построив параллелограмы oa_yaa_x и $oa_za''a_y$, мы будем иметь изображения горизонтальной и второй вертикальной проекций точки A. Далее строим изображение самой точки A, которое на черт. 148 обозначено также через A.

Принимаем, что координатные плоскости занимают в пространстве вполне определенное положение и место точки в пространстве, как мы видели раньше, вполне определяется тремя координатами ее или двумя ее прямоугольными проекциями.

Рассматривая черт. 149, мы имеем право сказать, что место точки в пространстве вполне определяется косоугольной проекцией параллелепипеда координат этой точки, так как, имея чертеж типа черт. 149, мы координаты x и z для искомой точки непосредственно берем из чертежа, т. е. берем $x=oa_x$ и $z=oa_z$.

Координату же искомой точки берем равной двойной длине oa_y, т. е. $y=2\cdot oa_y$.

Раз мы таким образом умеем определить все три координаты искомой точки, то тем самым будем иметь возможность точно указать место искомой точки в пространстве.

На черт. 149 имеем три группы равных между собою отрезков:

$$1)\ oa_x=a_ya=a''A=a_za'$$
$$2)\ oa_y=a_xa=a'A=a_za''$$
$$3)\ oa_z=a_ya''=aA=a_xa'$$

Принимая во внимание указанные здесь равенства отрезков, мы изображение точки A могли бы получить одним из шести приведенных ниже на черт. 150, 151, 152, 153, 154 и 155 способов.

По каждому из шести приведенных в этом параграфе чертежей 150—155) легко определить все три координаты искомой точки, а следовательно вполне точно указать место точки в пространстве.

Таким образом по косоугольному методу проектирования точка вполне определяется в пространстве по одному из чертежей 150—155.

На каждом из них имеется изображение самой точки (косоугольная проекция самой точки) и изображение одной из ее проекций (одна из вторых проекций).

Задача 21. Построить точки M (5, 6, 0), N (10, 0, 5), K (0, 8, 9) и T (6, 0, 0), F (0, 5, 0), G (0, 0, 7) и D (0, 0, 0).

При решении этой задачи и вообще в дальнейшем следует опускать изображение проекции точки, если она совпадает с изображением самой точки.

На черт. 156 показано построение точек A (0, 0, 8) и B (7, 6, 0).

Точка A лежит на оси oz, следовательно a' и a'' совпадают с A, а потому a' и a'' на чертеже не показаны.

Точка B лежит в плоскости H и совпадает с b, а потому b опущено.

2. Изображение в косоугольных проекциях точки A, заданной двумя своими прямоугольными проекциями.

На черт. 157 дана точка (a, a') в двух проекциях.

Проводим (черт. 158) через точку o линию zoy, т. е. координатную ось oz и совмещенное с плоскостью V положение оси oy, и определяем графически величины всех трех координат, что имеем на черт. 158.

Сопоставляя черт. 157 и 158, мы имеем право написать:

$$x = oa_x;\ y = a_x a;\ z = a_x a'.$$

Поэтому на черт. 157 для определения координат точки A, мы могли бы и не проводить линии zoy, а получить непосредственно искомые координаты по черт. 157, как мы в дальнейшем и будем делать.

Здесь же черт. 158 приведен для показания справедливости равенств:

$$x = oa_x;\ y = a_x a;\ z = a_x a'.$$

Имея величины координат точки, не трудно изобразить эту точку по косоугольному методу, что сделано на черт. 159, где по оси oy отложен отрезок $= a_x a/2$, а по пунктирной линии, параллельной оси ox, отрезок, равный oa_x, и наконец по вертикальной пунктирной линии от точки a отложен отрезок, равный $a_x a'$.

Здесь имеем изображение самой точки A и изображение ее горизонтальной проекции.

Построение сделано по типу черт. 150.

Вообще, следует заметить, что в большинстве случаев по косоугольному методу точка задается ее изображением (косоугольная проекция самой точки) и изображением ее горизонтальной проекции (косоугольная проекция горизонтальной проекции точки, а иначе — вторая проекция точки на H).

Задача 22. Даны три проекции a, a' и a'' точки A, но положение координатных осей не дано (черт. 160).

Изобразить точку A по косоугольному методу.

Для решения этой задачи мы прежде всего должны установить положения координатных осей (черт. 161).

Проводим линию xy перпендикулярно к линии $a'a$ на произвольном от a расстоянии. Через точки a и a'' проводим пунктирные линии так, как показано стрелками, и через найденную точку (в пересечении горизонтальной пунктирной линии и наклонной под углом 45° к линии xy) проводим линию zoy перпендикулярно к xy.

Теперь на черт. 161 имеем графически величину трех координат, а потому искомое построение точки по косоугольному методу не представляет затруднения и может быть исполнено по типу черт. 159.

Предложенную задачу могли бы решить проще, как это показано на черт. 162, где так же, как и раньше, проведена на произвольном месте, но перпендикулярно к линии aa', линия xy. Для проведения же линии zoy мы откладываем по линии $a''a'$ от точки a'' отрезок $a''a_z = aa_x$.

Несмотря на существование второго (простого) способа решения задачи, мы тем не менее приводим и первый способ, как более наглядный.

Вопрос восстановления координатных осей имеет значение при построении косоугольных проекций. В следующей главе рассмотрим более подробно вопрос восстановления координатных осей, при чем будем применять первый, хотя и несколько громоздкий, но более наглядный способ решения вопроса.

3. Восстановление координатных осей.

Как мы видели, на черт. 132, 133, 134 и 135 координатные оси отсутствуют, тогда как для построения тех же моделей по методу косоугольному необходимо знать координаты ряда точек этой модели.

Таким образом появляется необходимость на чертеже модели временно иметь координатные оси и по ним определить координаты необходимых точек.

Это можно сделать, имея три проекции какой-либо одной точки.

Положим, на черт. 163 даны a, a' и a'' — три проекции некоторой точки A и требуется изобразить координатные оси.

После совмещения плоскостей H и W с плоскостью V оси ox, oy, oz, как мы много раз видели, расположатся на двух взаимно перпендикулярных прямых с общей точкой o. Одну из этих прямых xoy либо zoy берем произвольно, а другую находим следующим построением.

На черт. 164 мы линию xoy взяли произвольно, но, конечно, перпендикулярно к линии $a'a$.

Дальнейшее решение легко понятно из рассмотрения стрелок чертежа. Отрезки, отмеченные двумя черточками, между собою равны.

На черт. 165 линия zoy проведена произвольно, но перпендикулярно к линии $a'a''$. Линия xoy найдена и способ ее нахождения показан на чертеже стрелками.

На черт. 166 оси найдены в предположении, что точка A лежит на плоскости H.

Здесь прежде всего проведена линия xoy через точки a' и a'', а далее найдена линия zoy. Способ построения понятен из черт. 166 при рассмотрении направления стрелок. Равные отрезки отмечены двумя черточками.

На черт. 167 оси проведены в предположении точки A в плоскости V. Здесь линию xoy проводим через точку a, а zoy—через точку a'' перпендикулярно линиям aa' и $a''a'$.

На черт. 168 оси проведены в предположении точки A в плоскости W.

Здесь прежде всего проведена линия zoy через точки a и a', а далее найдена линия xoy по указанному на чертеже стрелками способу.

З а д а ч а 23. Даны три проекции точки A (черт. 160). Провести координатные оси так, чтобы точка A оказалась на равных расстояниях от плоскостей H и V.

З а д а ч а 24. Даны три проекции точки A (черт. 160). Провести координатные оси так, чтобы точка A была вдвое ближе к V, чем к W.

4. Изображение по косоугольному методу проектирования линий и фигур, лежащих в координатных плоскостях H, V и W.

Заметим, что линии и фигуры, лежащие в плоскости V, будут изображаться по косоугольному методу в натуральную величину и в том же положении, в котором они находятся в плоскости V.

Линии и фигуры, лежащие на плоскостях H и W, будут по косоугольному методу изображаться с искажением за исключением линий, параллельных осям ox и oz. Эти линии будут изображаться в натуральную величину.

На черт. 171 изображены правильные фигуры на плоскостях H, V и W, при чем буквы выпущены, так как и без них чертеж понятен.

На черт. 172 в косоугольных проекциях изображены фигуры черт. 171.

При построении черт. 170 и 172 мы, как было раньше сказано, координаты x и z берем в натуральную величину, а координаты y — в половину натуральной величины.

На черт. 173 имеем три окружности, которые лежат в плоскостях H, V и W. Изобразим их в косоугольных проекциях.

Окружность, лежащая на V, изобразится окружностью того же радиуса. Окружности же, лежащие в плоскостах H и W, изобразятся эллипсами; при чем оси их не параллельны осям координат, что видим из черт. 174, где изображены в косоугольных проекциях те же окружности, которые были даны на черт. 173.

Строим же косоугольные проекции окружностей, лежащих в плоскостях H и W, по точкам. Для этого берем ряд точек на окружности черт. 173 и их переводим на черт. 174, помня всегда, что для каждой точки координаты x и z должны переноситься в натуральную величину, а координата y — в половину натуральной величины.

Так как мы построили по точкам косоугольные проекции окружностей, можно построить изображения на картинной плоскости любых кривых, лежащих в плоскостях H и W.

Мы особенно рекомендуем обратить внимание на черт. 174, так как часто при изображении по косоугольному методу деталей машин придется строить изображения окружностей, лежащих в плоскостях H, V и W.

5. Изображение по косоугольному методу проектирования линий и фигур, не лежащих ни в одной из координатных плоскостей.

На черт. 175 изображены в двух проекциях прямая, произвольно наклоненная к плоскостям проекций, горизонталь и прямая, перпендикулярная к плоскости *H*.

Для построения косоугольных проекций линий черт. 175, мы предварительно строим изображения горизонтальных проекций этих линий (можно было бы начать работу с построения изображений вертикальных проекций), что сделано на черт. 176.

Главным на чертеже будем считать косоугольную проекцию самого предмета, а ее вторую проекцию (изображение проекции) будем считать вспомогательным.

Условимся поэтому изображения самих линий чертить сплошными линиями (конечно, если эти линии видимы), а изображения проекций, как построения вспомогательные, чертить пунктиром.

Построив на черт. 176 вторые проекции на *H* линий черт. 175, мы строим косоугольные проекции самих линий, что показано на черт. 177, для чего из каждого изображения горизонтальной проекции точки проводим линии, параллельные оси oz, и на них откладываем соответственные координаты z.

На черт. 178 имеем в двух проекциях квадрат, лежащий в плоскости, параллельной плоскости *H*.

На черт. 179 строим предварительно изображение горизонтальной проекции данного квадрата.

На черт. 179 изображение горизонтальной проекции, как мы условились выше, чертим пунктиром.

На черт. 180 изображение самого квадрата чертим сплошными линиями.

На черт. 181 дано изображение того же квадрата черт. 178, но здесь построено оно с помощью изображения вертикальной проекции квадрата. Другими словами, на черт. 181 дана косоугольная проекция квадрата и ее вторая проекция на *V*.

На черт. 183 изображена косоугольная проекция окружности черт. 182, плоскость которой параллельна плоскости H. Вторую проекцию на H этой окружности чертим, как полагается, пунктиром. На черт. 185 и 187 изображены косоугольные проекции фигур черт. 184 и 186.

6. Изображение в косоугольных проекциях тел, заданных в прямоугольных проекциях.

Положим, на черт. 188 дана в двух прямоугольных проекциях пирамида, основание которой параллельно плоскости H.

Прежде всего строим изображение горизонтальной проекции пирамиды (вторая проекция на H) (черт. 189) и его чертим пунктиром, как мы условились выше.

Далее строим косоугольную проекцию самой пирамиды, т. е. изображение самой пирамиды.

На черт. 191 имеем три проекции правильной прямой шестигранной призмы. Изобразим эту призму в косоугольных проекциях.

Мы предварительно на черт. 192 строим изображение второй вертикальной проекции призмы, а далее на черт. 193 строим и изображение самой призмы.

На черт. 190 и 193 показаны все проектирующие и невидимые линии.

В дальнейшем мы будем часто опускать изображение осей, второй проекции и невидимых ребер тела, когда при таком опускании не нарушается наглядность. Вообще заметим, что мы косоугольными проекциями тел пользуемся как более наглядными изображениями тел, чем это получается в прямоугольных проекциях.

Таким образом, часто мы пользуемся косоугольными проекциями для пояснения чертежей, исполненных по методу прямоугольных проекций. В начале курса мы приводили для пояснения так называемые „пространственные чертежи“, которые заменяли собой соответственные модели и были исполнены все по косоугольному методу проектирования. Как там видно, каждый пространственный чертеж имеет для себя парный, исполненный в прямоугольных проекциях.

Для учащихся было бы полезным упражнением часть чертежей курса, исполненных в прямоугольных проекциях, изобразить в косоугольных проекциях с исполнением последовательных всех построений и сверить полученный результат с соответственным пространственным чертежом. Чтобы не было сомнения, поясним тут же, что во всех пространственных чертежах вторые проекции изображены сплошными линиями для сопоставления их с чертежами, исполненными в прямоугольных проекциях. Мы же в дальнейшем, как условились раньше, вторые проекции будем изображать пунктиром.

Приведем подробные последовательные построения косоугольных проекций тел, заданных в прямоугольных проекциях.

Положим, на черт. 194 имеем три проекции прямоугольного параллелепипеда с вырезами.

Временно на черт. 195 строим координатные оси, как это было показано выше, и по найденным по черт. 195 координатам вершин на черт. 196 строим изображение одной из проекций, например горизонтальной.

Далее строим на черт. 197 изображение самого параллелепипеда без вырезов. Так как это построение предварительное, то мы его чертим пока тонкими линиями (на практике следует чертить в карандаше).

Далее на черт. 198 пунктиром намечаем вырезанную часть. И наконец на черт. 199 убираем оси и все пунктирные линии, а оставляем только изображение самого тела.

На черт. 200 изображаем в трех проекциях прямой круговой цилиндр с вырезами.

На черт. 201 проводим координатные оси.

Далее, на черт. 202, 203, 204 и 205 последовательно показываем ход построения косоугольной проекции данного цилиндра с вырезами. При этом на черт. 205, также как и на черт. 199, координатные оси не изображены.

Такими чертежами, исполненными по косоугольному методу, как черт. 199 и 205, пользуются при технических чертежах, когда хотят наглядно изобразить ту или иную деталь.

7. Косоугольные проекции шара и его частей.

На черт. 206 шар рассекаем рядом плоскостей, параллельных плоскости V.

Сечения этих плоскостей с поверхностью шара будут окружности с центрами в точках 1, 2, 3...1_1, 2_1...

На черт. 207 прежде всего изображаем точки 1,2,3. ... 1_1,2_1. ... и их принимаем за центры окружностей, которые и проводим, беря радиусы из черт. 206.

Каждая окружность черт. 206, будучи параллельна плоскости V, на черт. 207 изобразится в натуральную величину. Все эти окружности окаймляем плавной кривой (эллипсом) и получаем контур косоугольной проекции шара.

На черт. 207 все центры C — 1,2,3...1_1, 2_1 лежат на линии, параллельной оси oy, и имеют общую вторую проекцию на V в точке c'.

На черт. 208 в двух проекциях изображен шар с вырезом левой верхней четверти. Изобразим его в косоугольных проекциях.

На черт. 209 прежде всего повторяем работу, выполненную на черт. 207, т. е. строим косоугольную проекцию шара.

Далее, из каждого центра проводим вертикальный и горизонтальный радиусы и концы их соединяем плавной кривой.

Не трудно видеть, что все вертикальные радиусы лежат в одной плоскости, перпендикулярной к H, а горизонтальные радиусы лежат в плоскости, параллельной H. И здесь полученные нами кривые (черт. 209) являются сечениями шара плоскостями, проходящими через вертикальные и соответственно через горизонтальные радиусы.

Таким образом на черт. 210 (переносим с черт. 209) будем иметь косоугольную проекцию шара с вырезом верхней левой четверти.

На черт. 210 изобразили мы косоугольную проекцию шара с вырезом в предположении цельного шара, но, если шар будет полым, то черт. 210 примет вид черт. 211, где уже будет видна и часть внутренней поверхности шара с частями окружностей на ней.

V. Переход от прямоугольных проекций к машиностроительному черчению.

Хотя в машиностроительном черчении и пользуются прямоугольными проекциями, но к ним метод машиностроительного черчения прибавляет ряд дополнительных и условных правил, принятых на практике. Чтобы понять основы метода машиностроительного черчения и связь этого метода с методами прямоугольного проектирования, мы приведем несколько примеров проектирования одного и того же предмета по обоим методам.

На черт. 212 и 213 это исполнено для одного из простейших примеров. На черт. 212 мы имеем две проекции несложного предмета, состоящего из прямоугольных параллелепипедов.

На черт. 213 этот же предмет вычерчен по правилам машиностроительного черчения.

Сравним между собою оба эти чертежа.

Прежде всего замечаем, что на черт. 213 отсутствуют координатные оси и появляются новые линии, начерченные так называемым „осевым пунктиром", т. е. чередованием точек и черточек.

Эти линии являются осями симметрии и они обязательны для машиностроительного чертежа, если изображаемая деталь имеет оси симметрии.

Работу и начинают с проведения осей симметрии.

Далее, на черт. 213 мы замечаем проставленные размеры (способ проставления размеров на машиностроительных чертежах см., например, у проф. И. М. Холмогорова.—„Машиностроительное черчение"), чего нет на черт. 212.

На чертежах типа 212, т. е. исполненных по методу прямоугольных проекций, мы размеры берем прямо из чертежа по масштабу.

На чертежах же машиностроительных это не допускается, а все размеры берутся по проставленным на чертеже размерам.

Поэтому на чертеже должны быть проставлены все необходимые размеры, по которым можно было бы построить проектируемую деталь машины.

Проекциями в машиностроительном черчении пользуются в качестве видов (вертикальная проекция — вид спереди, или называют ее еще „главным видом", горизонтальная проекция — вид сверху и вторая вертикальная проекция—вид слева) и для большей рельефности их чертим более толстыми линиями, хотя эта толщина зависит от масштаба чертежа и сложности его.

В курсах машиностроительного черчения подробно указаны группы линий, которыми следует пользоваться в подлежащем случае (см. проф. И. М. Холмогоров. — „Машиностроительное черчение").

В машиностроительном черчении одним из главных требований является показание материала, из которого должна быть исполнена данная деталь машины. Для этого делаются воображаемые разрезы детали и эти разрезы, согласно условным обозначениям материалов, принятым в машиностроительном черчении, покрываются условной штриховкой, либо условной закраской (см. „Таблицы условных обозначений материалов").

В зависимости от покрывания разрезов штриховкой либо закраской придерживаются следующего правила:

1. Если разрезы заштрихованы, то оси симметрии и оси разрезов чертятся осевым пунктиром того цвета, которым исполнен весь чертеж (обыкновенно черным).

Размерные линии проводятся тем же цветом, что и весь чертеж.

2. Если же разрезы закрашиваются, то осевые линии и линии разрезов проводятся тонкой синей сплошной линией, а размерные линии проводятся красными линиями с черными стрелками. (Чертеж будет неодноцветен).

Черт. 213—одноцветный, а потому мы разрезы заштриховываем, а осевые линии проводим осевым пунктиром.

На черт. 213 у нас заштрихована левая половина главного вида, при чем этой штриховкой самый материал здесь не указан; так как в данном случае и в дальнейшем чертежи имеют чисто теоретический характер, то разрезы просто заштриховываем без показания материала. В практических же примерах эти разрезы должны быть заштрихованы либо закрашены с показанием материала.

В чертежах, построенных по методу прямоугольных проекций, мы вырезы и разрезы делаем фактическими, и линия, отделяющая разрезанную часть от неразрезанной, в каждой проекции проводится сплошной линией, если, конечно, она видима (например, черт. 125, 129, 195, 201 и другие).

В машиностроительном же чертеже в любой проекции линия, отделяющая разрезанную часть от неразрезанной и совпадающая с осью симметрии или с осью разреза, не проводится сплошной линией. Здесь разрез ограничивается осевой линией.

Другими словами, по осевой линии не проводят сплошной линии, за исключением случая, когда на ось проектируется ребро данной детали, либо в детали сделан фактический вырез, край которого проектируется на ось.

В прямоугольных проекциях фактический вырез проектируется на все плоскости проекции, на которые проектируется самый предмет, как это мы видели выше. В машиностроительном же черчении можно разрезы показывать не обязательно на всех проекциях.

При этом разрезы делаются так, чтобы чертеж был более понятен. Разрезы надо показывать, не нарушая общего контура проекции. В машиностроительных чертежах допустимы также случаи, когда на одной проекции показывается один разрез, а на другой — другой.

Например, на черт. 226 на W показан полный разрез. На V и H же совершенно разреза не показано.

Цель резрезов на машиностроительных чертежах двоякая: во-первых, показать материал, из которого изготовлена деталь, во-вторых, дать более понятный чертеж.

Разрезами мы часто показываем тѣ части, которые при проектировании не видны.

Возьмем другой пример (черт. 214 и 215).

На черт. 212 и 213 мы пользовались двумя проекциями, тогда как не всегда это возможно, не рискуя иметь неопределенный чертеж.

На черт. 214 и 215 имеем три проекции одного и того же предмета.

Черт. 214 построен по методу прямоугольных проекций, а черт. 215 по методу машиностроительного черчения.

Здесь на черт. 215 замечаем еще одну особенность машиностроительного чертежа: условились ребра, перегородки, спицы и выступы вдоль не резать, хотя бы они и попадали в разрез, а потому часть разреза на главном виде черт. 215 не заштрихована.

На черт. 220, 222, 224 и 226 приведен ряд примеров построения деталей по методу машиностроительного черчения.

Для этих четырех приведенных в этой главе чертежей построены и косоугольные проекции, при чем на косоугольных проекциях показана штриховка поверхности, которая дает чертежу более рельефный вид (много примеров такой штриховки мы имеем в брошюре Фолька „Скицирование").

Для косоугольных проекций разрезы делаем фактическими.

В заключение скажем, что иногда в машиностроительном черчении пользуются четырьмя, пятью и даже шестью проекциями на плоскости прямоугольного параллелепипеда (черт. 216), внутри которого помещен проектируемый предмет.

Повернув и совместив плоскости H, H_1, W, W_1 и V_1 с плоскостью чертежа, т. е. с плоскостью V, мы будет иметь расположение этих плоскостей, показанное на черт. 217.

Таким образом, будем (черт. 218) иметь точные места расположения видов проектируемой детали.

На черт. 218 показано нормальное расположение шести проекций и в этом случае никаких надписей на проекциях не полагается.

В тех же случаях, когда по недостатку места какая-либо проекция не может быть помещена в должном месте, ее помещают там, где это удобно, но обязательно при этом снабжают эту проекцию надписью „вид снизу“, „вид слева“ и т. д.

На черт. 219 показан пример проектирования детали на пять плоскостей.

На черт. 219 линии, ограничивающие прямоугольники черт. 218, как и полагается, не начерчены, но они при желании легко могут быть восстановлены на основании задач, рассмотренных выше (вопрос восстановления координатных осей по трем проекциям точки).

Для наглядного представления детали, изображенной на черт. 219, даны на черт. 219-а косоугольные проекции этой детали при разных положениях ее. Для большей ясности сделаны вырезы.

Приведенными в этой главе указаниями и примерами не ограничивается весь метод машиностроительного черчения и в полном объеме он изложен в соответственных курсах, но здесь приведены его главные основы, чтобы связать их с методом прямоугольных проекций и показать соотношение между чертежами одного и того же предмета, исполненными по обоим методам, и дать возможность учащемуся сознательно перейти к машиностроительному черчению.

VI. Цилиндрическая винтовая линия.

Положим, имеем вертикальную прямую определенной длины. Пусть по этой прямой равномерно движется точка. Мы имеем возможность в любой момент установить положение этой точки. Если точка всю длину проходит во время t, то в $1/n$ времени t пройдет, конечно, $1/n$ всего пути, т. е. подымется на $1/n$ длины h, если через h обозначить длину всей взятой нами прямой.

Положим теперь, прямая линия сама в свою очередь движется вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H, с постоянной угловой скоростью, т. е. движущаяся прямая в равные промежутки времени поворачивается на равные углы.

Следователвно, взятая нами прямая будет двигаться по поверхности прямого кругового цилиндра с осью, перпендикулярной к плоскости H. Рассматриваемая нами, таким образом, движущаяся по прямой точка будет находиться в сложном движении и ее троектория в пространстве образует линию, которая называется цилиндрической винтовой линией.

Для построения проекций этой линии мы положим, что во время t прямая линия сделает полный оборот вокруг оси и вернется в первоначальное свое положение. Разбив время t на n равных частей (в нашем примере на черт. 227_1 на двенадцать частей), мы имеем возможность построить проекции движущейся точки в моменты $1/n$, $2/n$, $3/n$ ... времени t после начала движения. Эти точки помечаем цифрами 0, 1, 2, 3, 4 ... n и соединяем плавной кривой. Через 0 помечено начальное положение точки.

На черт. 227_1 показаны три проекции двух оборотов цилиндрической винтовой линии. Ход построения на чертеже показан стрелками.

На черт. 227_1 не показана ни прямая, указанная нами выше, ни цилиндрическая поверхность, на которой образуется винтовая линия. Здесь имеем три проекции только самой линии, что и являлось задачей этого параграфа.

Положим, небольшой отрезок вертикальной прямой линии движется вокруг оси винтовой линии и один конец этой прямой скользит по винтовой линии. Полученная поверхность представляет собою винтовую полоску. На черт. 227 показаны три проекции двух оборотов такой полоски.

Цилиндрическая винтовая линия является основой винтовых нарезок разных профилей. Профили нарезки, способ образования винтовой нарезки и вычерчивание ее изложены в курсе машиностроительного черчения.

VII. Проектирование пружины.

Прежде всего должно быть дано нормальное сечение пружины. Положим мы желаем спроектировать пружину квадратного сечения, что заставляет вообразить движение квадрата вокруг вертикальной оси с соблюдением следующих условий:

1) одна из вершин квадрата движется по цилиндрической винтовой линии;

2) плоскость квадрата проходит во все время движения через ось вращения; и

3) одна сторона квадрата во все время движения остается вертикальной. При соблюдении всех указанных условий мы будем иметь пружину, изображенную на черт. 228.

По черт. 228, где в трех прямоугольных проекциях изображена пружина квадратного сечения, видим, что все остальные вершины квадрата также движутся по цилиндрическим винтовым линиям.

На черт. 228 показан один с четвертью оборота пружины. На черт. 229 имеем второй экземпляр черт. 228.

VIII. Задание плоскости следами и построение в плоскостях точек, линий и фигур.

До сих пор мы имели задание плоскости в виде треугольника, прямоугольника и, вообще, плоской фигуры, заданной своими проекциями.

Теперь рассмотрим еще один способ задания плоскости, а именно задание ее следами.

Следом плоскости будем называть пересечение плоскости с плоскостями проекций. Пересечение плоскости с плоскостью H будем называть горизонтальным следом плоскости и будем обозначать большой буквой со значком h. Например, если плоскость обозначаем через P, Q, R ..., то горизонтальный след будет обозначаться через P_h, Q_h, R_h, ...

Сечение плоскости с плоскостью V называется вертикальным следом и обозначается соответственно через P_v, Q_v, R_v...

Сечение плоскости со второй вертикальной плоскостью, т. е. с плоскостью W, называется вторым вертикальным следом плоскости и обозначается соответственно через P_w, Q_w, R_w...

Этих обозначений следов в дальнейшем и будем придерживаться.

Мы в этой первой части курса рассмотрим плоскость не во всех положениях, а здесь остановимся только на простейших положениях плоскости, которыми будем считать плоскости перпендикулярные либо параллельные плоскостям проекций H, V и W.

1. Плоскость, перпендикулярная к H.

Имеем:

$$R \perp H; \qquad V \perp H.$$

Следовательно, $R_v \perp H$, а потому $R_v \perp$ к ox.

После совмещения плоскости H с плоскостью V вертикальный след плоскости R расположится перпендикулярно к оси ox, а горизонтальный — под углом.

Рассмотрим проектирование точки, лежащей в плоскости R. Так как плоскость R перпендикулярна к плоскости H, то проектирующая линия Aa (черт. 230) будет лежать в этой плоскости и пересечет плоскость H в точке (a), лежащей на линии сечения плоскостей R и H, т. е. на линии Rh.

Таким образом имеем право утверждать, что горизонтальная проекция точки, лежащей в плоскости R, перпендикулярной к плоскости H, будет лежать на горизонтальном следе этой плоскости.

Следовательно на черт. 231 точка (a, a') лежит в плоскости R, а точка (b, b') не лежит в плоскости R.

Для построения прямой линии в плоскости R достаточно, в этой плоскости взять две точки, взяв горизонтальные проекции их на линии Rh (черт. 232).

Прямая $(ab, a'b')$ лежит в плоскости R и имеет свою горизонтальную проекцию на горизонтальном следе плоскости.

Для построения фигуры в плоскости R, перпендикулярной к плоскости H, достаточно горизонтальные проекции вершин взять на линии Rh.

На черт. 233 построен треугольник в плоскости R.

Горизонтальные проекции всех вершин лежат на линии Rh, а потому горизонтальная проекция треугольника обращается в прямую линию.

Таким образом имеем право утверждать, что плоскость плоской фигуры будет перпендикулярна к плоскости H, если горизонтальная проекция этой фигуры обращается в прямую линию (черт. 234 и 235).

На черт. 234 треугольник ABC лежит в плоскости, перпендикулярной к H.

На черт. 235 параллелограм лежит в плоскости, перпендикулярной к H.

На черт. 230—233 изображены были два следа плоскости.

Покажем на черт. 236 изображение трех следов плоскости, перпендикулярной к плоскости H.

Так же, как мы доказали, что $R_v \perp ox$, не трудно доказать, что $R_w \perp oy$.

Тогда, после совмещения плоскостей H и W с плоскостью V, будем иметь на черт. 237 следующее расположение следов плоскости R:

R_v и R_w перпендикулярны соответственно к осям ox и oy, а R_h пересекает эти оси.

На черт. 237 изображена в трех проекциях (a, a', a'') точка A, лежащая в плоскости R, перпендикулярной к плоскости H. Горизонтальная проекция такой точки лежит на R_h.

2. Плоскость, перпендикулярная к V.

На черт. 238 плоскость $R \perp V$ и $H \perp V$, а потому R_h перпендикулярна к V.

Раз горизонтальный след R_h перпендикулярен к плоскости V, то он также перпендикулярен и к оси ox, а потому, после совмещения плоскости H с плоскостью V, на черт. 239 будем иметь горизонтальный след R_h, перпендикулярный к оси ox, а вертикальный след под углом к оси.

Точка A (черт. 238) плоскости R будет проектироваться на V в некоторую точку вертикального следа плоскости, так как проектирующий точку A на V луч будет лежать в плоскости R и пересечет плоскость V в точке a' на линии R_v.

На этом основании точка (a, a') черт. 239 будет лежать в плоскости R, а точки (b, b') и (c, c') не лежат на ней.

Так же как и в предыдущем случае, чтобы построить прямую в плоскости R, перпендикулярной к плоскости V, мы на этой плоскости берем две точки (черт. 240), их соединяем прямой линией и замечаем, что эта линия имеет свою вертикальную проекцию на вертикальном следе плоскости, что и следовало конечно ожидать.

На черт. 241 треугольник лежит в плоскости, перпендикулярной к V, так как имеет свою вертикальную проекцию на вертикальном следе плоскости.

На черт. 242 даны три следа плоскости R, перпендикулярной к плоскости V, где след R_h перпендикулярен к оси ox, а след R_w перпендикулярен к оси oz.

После совмещения плоскостей H и W с плоскостью V черт. 242 примет вид черт. 243, где даны три следа плоскости R, перпендикулярной к плоскости V и три проекции точки A, лежащей в этой плоскости.

3. Плоскость, перпендикулярная к W.

На черт. 244 плоскость R перпендикулярна к плоскости W, а так как H и V также перпендикулярны к плоскости W, то R_h и R_w будут перпендикулярны к W, а следовательно будем иметь: $R_h \perp oy$ и $R_w \perp oz$.

Точка A, лежащая в плоскости R, будет иметь свою проекцию на W, т. е. a'', на следе R_w, так как перпендикуляр из точки A на плоскость W, лежа в плоскости R, пересечет W в точке a'', которая должна лежать на линии сечения плоскостей R и W, т. е. на линии R_w.

После совмещения плоскостей H и W с плоскостью V, черт. 244 примет вид черт. 245, где следы R_h и R_w соответственно перпендикулярны осям oy и oz.

Кроме того, на черт. 245 даны три проекции точки A, лежащей в плоскости R.

На черт. 246 и 247 изображены прямая линия и треугольник, лежащие в плоскости, перпендикулярной к плоскости W.

Проекция $a''b''c''$ треугольника ABC, на черт. 247, обращается в прямую линию, совпадающую со следом R_w.

Поэтому плоскость плоской фигуры, имеющей свою проекцию на W в виде прямой линии, будет перпендикулярна к плоскости W, в чем не трудно убедиться.

На черт. 248 и 249 построены в трех проекциях треугольник и четырехугольник, имеющие плоскость свою перпендикулярно к плоскости W, о чем мы судим по проекциям этих фигур на W, которые обращаются в прямую линию.

4. Плоскость, параллельная плоскости H.

На чертеже 250 имеем плоскость, параллельную H, и точку на ней.

Плоскость R, будучи параллельной плоскости H, не имеет горизонтального следа. Вертикальный след плоскости R параллелен оси ox. Точка, лежащая в такой плоскости, имеет свою вертикальную проекцию на вертикальном следе плоскости.

Совместив плоскость H с плоскостью V, мы на черт. 251 будем иметь задание плоскости R и точки на ней в двух проекциях.

Задача 25. В плоскости, параллельной плоскости H, построить квадрат так, чтобы одна из его диагоналей была наклонена к V под углом 60°.

Прежде всего заметим, что всякая фигура, лежащая в плоскости, параллельной H, проектируется на H в натуральную величину, а потому и искомый квадрат спроектируется на H в виде квадрата.

Диагональ, которая должна быть наклонена к V под углом в 60°, будет наклонена под углом 60° к вертикальному следу плоскости.

Угол этот, как лежащий в плоскости, параллельной H, на H будет проектироваться без искажения, а вершина этого угла проектируется на ось ox, так как она лежит на следе R_v.

Теперь не трудно понять построения черт. 252.

Второй вертикальный след плоскости R, параллельной H, будет параллелен оси oy.

Проекция на W всякой фигуры такой плоскости будет лежать на R_w, как это показано на черт. 253.

5. Плоскость, параллельная плоскости V.

Плоскость, параллельная плоскости V, не имеет вертикального следа, а горизонтальный и второй вертикальный следы соответственно параллельны осям ox и oz, что мы и видим на черт. 254.

Кроме того, на черт. 254 показана точка, лежащая на плоскости R. Такая точка имеет свою горизонтальную проекцию на R_h, а вторую вертикальную проекцию — на R_w.

После совмещения плоскостей H и W с плоскостью V будем иметь черт. 255, где дана своими следами R_h и R_w

плоскость, параллельная V, и точка $(a,\ a',\ a'')$, лежащая в этой плоскости.

На черт. 256 в трех проекциях изображен треугольник, лежащий в плоскости, параллельной V, что видно по проекциям треугольника H и W.

Следы самой плоскости на чер. 256 не показаны, но они легко могут быть проведены.

Задача 26. Построить правильный пятиугольник, плоскость которого была бы параллельна плоскости V, одна вершина лежала на H, одна из сторон была перпендикулярна к W, а центр пятиугольника был бы равно удален от плоскости H, V и W.

Решение. Работу начинаем с построения трех проекций центра искомого правильного пятиугольника, который будет иметь свои проекции на равных расстояниях от осей ox, oy и oz (черт. 257).

6. Плоскость, параллельная плоскости W.

Такая плоскость называется профильной плоскостью (черт. 258).

Оба следа профильной плоскости перпендикулярны к оси ox. Точка, лежащая в такой плоскости, имеет свои проекции на соответственных следах плоскости (черт. 258 и 259).

На черт. 260 в трех проекциях изображен треугольник, лежащий в профильной плоскости.

Такой треугольник на W проектируется в натуральную величину.

На черт. 261 построен равносторонний треугольник, который лежит в профильной плоскости, что мы видим по вертикальной и горизонтальной проекциям треугольника. Эти проекции перпендикулярны к оси ox.

Кроме того, на черт. 261 треугольник взят так, что одна сторона треугольника своим продолжением проходит через точку оси ox, что видно по проекции треугольника на плоскости W (продолжение $c''b''$ проходит через точку o).

IX. Метод вращения.

Ряд вопросов легко решается помощью вращения точек, линий и фигур вокруг прямых линий, называемых осями вращения.

В первой части курса мы рассмотрим вращение точек, линий и фигур вокруг одной оси, перпендикулярной либо к H, либо к V.

1. Вращение точки вокруг оси, перпендикулярной к H.

Положим, на черт. 262 имеем точку (a, a') и ось $(mn, m'n')$, перпендикулярную к H.

При вращении точки A вокруг этой оси она будет двигаться по окружности, лежащей в плоскости, параллельной H.

На плоскость H эта окружность спроектируется в натуральную величину. Центр горизонтальной проекции окружности вращения будет в точке m, а радиус будет равен линии ma.

Оси вращения условимся проводить осевым пунктиром.

Проекции повернутых положений точки A будем обозначать: горизонтальную через a_0, а вертикальную проекцию через a_0'.

Горизонтальную и вертикальную проекции окружности проводим, как построения вспомогательные, черточным пунктиром.

Таким образом на черт. 262 точка (a_0, a_0') является повернутым положением точки (a, a').

2. Вращение прямой линии вокруг оси, проходящей через один из концов заданной прямой и перпендикулярной к плоскости H.

Положим, на черт. 263 имеем прямую $(ab, a'b')$ и ось $(mn, m'n')$, перпендикулярную к H. Ось проходит через конец (b, b').

Через точку (b, b') проведем ось вращения $(mn, m'n')$ и начертим проекции ряда повернутых положений прямой AB.

При вращении прямой AB вокруг оси MN точка B, как лежащая на оси вращения, будет оставаться на месте, а будет вращаться только точка A.

Берем ряд повернутых положений точки A и их соединим с неподвижной точкой B; тогда получим проекции повернутых положений прямой AB. Они все на черт. 263 читаются (a_0b, $a'_0 b'$).

3. Определение истинной величины прямой методом вращения.

Положим (черт. 264), имеем прямую AB, произвольно наклонную к плоскости проекции, которую повернем вокруг вертикальной оси (перпендикулярной к H), проходящей через один из концов ее (например, через конец B) до положения, параллельного плоскости V.

В повернутом положении прямая (черт. 264) будет фронталью и на V будет проектироваться в натуральную величину, т. е. $b'a'_0$ будет равна истинной величине прямой.

Можно было бы определить истинную величину прямой AB и вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V.

В этом случае также ось вращения берем через один из концов прямой AB (например, через конец B) и вращаем прямую вокруг этой оси до положения, параллельного плоскости H (черт. 265).

Горизонтальная проекция повернутого положения прямой и будет равна истинной величине прямой.

4. Определение расстояния точки, лежащей на прямой, до одного из концов прямой.

Чтобы найти расстояние точки 1 (черт. 266) от точки B, повернем всю прямую вместе с точкой I, лежащей на ней, вокруг оси MN до положения, параллельного плоскости V.

Горизонтальная проекция повернутого положения прямой, как мы видели выше, будет параллельна оси ox.

Вертикальная же проекция повернутого положения прямой имеет один конец в точке b', а другой конец в точке a'_0, лежащей на оси ox, так как заданная прямая $(ab, a'b')$ одним своим концом упирается в плоскость H.

Теперь достаточно из точки $1'$ провести линию $1'1'_0$, параллельную оси, до пересечения с линией $b'a'_0$ в точке $1'_0$.

Линия $1'_0 b'$ и равна истинной величине искомого расстояния точки 1 до конца B.

На чертеже ход построения показан стрелками. В данном случае совершенно нет нужды вращать горизонтальную проекцию точки 1.

5. Вращение треугольника вокруг оси, проходящей через одну из вершин и перпендикулярной к V, либо к H.

Ось вращения $(mn, m'n')$ проводим через точку (a, a') перпендикулярно к V.

При вращении треугольника $(abc, a'b'c')$ вокруг оси $(mn, m'n')$ (черт. 267) линии $a' b'$ и $a' c'$ повернутся на один и тот же угол, а потому $a'b'_0$ и $a'c'_0$ мы берем соответственно под углом α к линии $a' b'$ и $a' c'$.

Получив таким образом вертикальную проекцию повернутого положения треугольника, мы легко получим горизонтальную проекцию повернутого положения так, как это показано на чертеже стрелками.

На черт. 268 треугольник $(abc, a'b'c')$ лежит в профильной плоскости.

Вокруг оси $(mn, m'n')$, перпендикулярной к H, вращаем треугольник до положения, параллельного плоскости V.

Горизонтальная проекция повернутого положения треугольника будет прямая линия $c_0 b_0 a$, параллельная оси ox.

X. Метод совмещения.

1. Совмещение с плоскостью V плоскости R, перпендикулярной к плоскости H (черт. 269).

Совмещение это осуществляем вращением плоскости R вокруг вертикального следа.

Точка A, лежащая в этой плоскости, во время совмещения плоскости R с плоскостью V будет двигаться по дуге круга, лежащего в плоскости, параллельной плоскости H.

Здесь имеем случай вращения точки вокруг RV — прямой, перпендикулярной к плоскости H, а потому на черт. 270 вопрос весьма просто решается на основании метода вращения.

Ход работы на черт. 270 показан стрелками. Совмещенное положение точки будем обозначать большой буквой со значком нуль (на черт. 270 точка A_0).

2. Совмещение с плоскостью H плоскости R, перпендикулярной к плоскости V.

При совмещении плоскости R (черт. 271) с плоскостью H, мы плоскость R вращаем вокруг R_h — горизонтального следа плоскости. Точка A, лежащая в этой плоскости, будет двигаться во время совмещения по дуге круга, лежащего в плоскости, параллельной плоскости V. Вертикальная проекция такой дуги будет дуга того же радиуса с центром в точке схода следов, а горизонтальная проекция — линия параллельная оси ox.

На черт. 272 показано совмещение точки (a, a') с плоскостью H. Точка A лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости V. Ход работ показан стрелками.

3. Совмещение с плоскостью V плоскости, перпендикулярной к плоскости W.

На основании двух предыдущих примеров не трудно понять, что точка, лежащая в такой плоскости, во время совмещения с плоскостью V будет двигаться по дуге круга, лежащего в профильной плоскости. Эта дуга на W спроектируется в натуральную величину.

На черт. 273 показано совмещение с плоскостью V точки, лежащей в плоскости R, перпендикулярной к плоскости W.

Ход работы показан стрелками.

4. Совмещение профильной плоскости с плоскостями H и V.

Так как профильная плоскость перпендикулярна к плоскости H и к плоскости V, то к ней приложимы все рассуждения 1 и 2 параграфов этой главы, а потому будут понятны черт. 274 и 275, где на черт. 274 точка A совмещена с плоскостью V, а на черт. 275 точка A совмещена с плоскостью H.

5. Построение определенной фигуры в плоскости, заданной следами.

Положим, дана плоскость, заданная своими следами (перпендикулярная к H, V либо W, и профильная плоскость), и совмещенное положение точки; построить проекции этой точки.

Здесь мы решаем обратный вопрос путем перемены направления стрелок на обратные во всех предыдущих примерах.

В виде примера построим проекции треугольника, лежащего в плоскости, перпендикулярной к V, и заданного своим совмещенным с H положением.

На черт. 276 ход решения этой задачи показан стрелками.

Задача 27. Построить в плоскостях, перпендикулярных к H, V и W по треугольнику и определить истинные величины их по способу совмещения.

Задача 28. Построить правильную фигуру либо окружность в профильной плоскости и в плоскостях, перпендикулярных к H, V и W.

Задача 29. В плоскости R, перпендикулярной к H, даны прямая (ab, $a'b'$) и точка (k', k); найти расстояние от точки (k', k) до прямой (ab, $a'b'$), т. е. опустить перпендикуляр из точки K на прямую AB.

Для определения искомого расстояния совместим плоскость R с точкой K и прямой AB с плоскостью V и из совмещенного положения точки K опустим перпендикуляр на совмещенное положение прямой AB.

На черт. 277 искомое расстояние равно линии $K_0 L_0$.

При желании перпендикуляр $K_0 L_0$ не трудно изобразить и в проекциях. Для этого из точки L_0 проводим линию, параллельную оси ox, до пересечения с $a' b'$ в точке e', которую проектируем на ab в точку e.

Соединив точку (e, e') с точкой (k, k'), мы будем иметь две проекции искомого перпендикуляра из точки K на прямую AB.

Стрелками показан ход работы.

XI. Метод перемены плоскостей проекций.

1. Перемена вертикальной плоскости проекций.

Положим, имеем две взаимно перпендикулярные плоскости H и V, линия сечения которых есть знакомая нам ось проекций ox, а плоскости H и V — плоскости проекций.

Будем называть эти две плоскости H и V старой системой плоскостей проекций, так как такая система нам уже знакома.

Ось ox будем называть старой осью проекций. В отличие от этого всякую пару взаимно перпендикулярных плоскостей, на которые будем проектировать, будем называть новой системой плоскостей проекций, а их линию сечения будем называть новой осью проекций.

Задача этого отдела заключается в показании способа перехода от старой системы плоскостей проекций к новой системе плоскостей проекций и обратно.

Мы в первой части курса рассмотрим только простейшие случаи перемены плоскостей проекций. Это будут те случаи, когда меняется одна из плоскостей проекций, а другая плоскость проекций остается старой.

Например, если мы вместо вертикальной плоскости V возьмем другую плоскость V_1, перпендикулярную к H, то будем иметь: старую систему плоскостей HV и новую — HV_1.

На черт. 278 имеем кроме плоскостей H и V еще и плоскость V_1, перпендикулярную к H. Тогда, следовательно, на черт. 278 имеем обе системы и старую HV и новую — HV_1.

Проекции точки A на H и V нам знакомы и обозначаются, как мы знаем, через a и a'. Проекция же на плоскости V называется новой вертикальной проекцией точки A и обозначается через a'_1. Новая ось проекции для отличия от старой обозначается через o_1x_1.

На черт. 278 имеем:

$$Aa = a'a_x \text{ и } Aa = a'_1a_{x_1},$$

а потому

$$a'_1a_{x_1} = a'a_x.$$

Следовательно расстояние новой вертикальной проекции точки от новой оси равно расстоянию старой вертикальной проекции точки от старой оси.

Совместив плоскости V и V_1 с плоскостью H, мы на черт. 279 будем иметь проекции точки A в старой HV и новой HV_1 системах.

Таким образом на черт. 279 мы для получения новой вертикальной проекции точки, т. е. для получения a'_1, опускаем из общей горизонтальной проекции точки перпендикуляр aa_{x_1} на ось o_1x_1 и на продолжении этого перпендикуляра от новой оси откладываем отрезок $a_{x_1}a'_1$ равный a_xa' и в конце отрезка получаем точку a'_1.

На черт. 280 показано построение новой вертикальной проекции прямой AB.

Равные отрезки на чертеже отмечены.

З а д а ч а 30. Даны две проекции треугольника в системе HV; построить проекции этого треугольника в системе HV_1.

Берем произвольную новую ось o_1x_1 (черт. 281) и на нее опускаем перпендикуляры из горизонтальных проекций вершин треугольника. На этих перпендикулярах откладываем соответственные расстояния вертикальных проекций вершин до старой оси. Равные длины на чертеже отмечены обычным способом.

З а д а ч а 31. Построить новую вертикальную проекцию куба.

Вершины куба для удобства перехода от системы HV к системе HV_1 обозначены цифрами 1, 2, 3, ... 7, 8 (черт. 282).

Новая ось на черт. 282 взята через точку 1, что даст нам случай, когда в новой системе наш куб одной своей вершиной будет лежать на плоскости V_1.

2. Перемена горизонтальной плоскости проекций.

На черт. 283 имеем обычную систему HV и кроме того плоскость H_1, перпендикулярную к V.

Примем плоскость H_1 за условно горизонтальную плоскость проекций.

Плоскость H_1 мы называем условно-горизонтальной, так как она фактически не есть горизонтальна.

Теперь плоскость H_1 и ей перпендикулярная плоскость V составят новую систему H_1V плоскостей проекций.

Покажем переход от системы HV к системе H_1V, для чего берем точку A и проектируем ее в обеих системах (черт. 283).

Имеем:

$$Aa' = aa_x \text{ и } Aa' = a_1a_1$$

следовательно

$$aa_x = a_1a_{x_1},$$

т. е. расстояние новой горизонтальной проекции точки от новой оси равно расстоянию старой горизонтальной проекции точки от старой оси, что дает нам основание для перехода от системы HV к системе H_1V после совмещения плоскостей H и H_1 с плоскостью V, что и показано на черт. 284 для точки A.

З а д а ч а 32. Построить новую горизонтальную проекцию прямоугольника ($abcd$, $a'b'c'd'$) (черт. 285).

3. Определение истинной величины прямой, заданной двумя своими проекциями.

Новую ось O_1X_1 берем параллельно одной из проекций прямой.

На черт. 286 новая вертикальная проекция равна истинной величине прямой, т. е. $a'_1 b'_1 = AB$.

На черт. 287 меняем горизонтальную плоскость проекций, и новая горизонтальная проекция прямой будет равна истинной величине прямой, т. е. $a_1 b_1 = AB$.

В виду важности вопроса определения истинной величины прямой по двум ее проекциям, мы здесь привели два случая решения этой задачи.

XII. Проведение прямой, перпендикулярной к плоскости, заданной следами.

1. Проведение перпендикуляра к плоскости, перпендикулярной к H.

На черт. 288 прямая AB перпендикулярна к плоскости R, а потому плоскость четыреугольника $ABba$ перпендикулярна к плоскости R.

Кроме того плоскость четыреугольника $ABba$ также перпендикулярна и к плоскости H, так как содержит в себе линии Aa и Bb, перпендикулярные к плоскости H.

Раз плоскость четыреугольника $ABba$ перпендикулярна к линии их сечения, т. е. к горизонтальному следу R_h, то линия ab, лежащая в плоскости четыреугольника $ABba$, будет перпендикулярна к R_h.

Прямая AB, будучи перпендикулярна к плоскости R, будет параллельна плоскости H, т. е. будет являться горизонталью, а потому ее вертикальная проекция должна быть параллельна оси ox, а следовательно перпендикулярна к вертикальному следу плоскости R.

Таким образом оказывается, что проекции перпендикуляра к плоскости R перпендикулярны к соответственным следам плоскости, что мы и имеем на черт. 289.

2. Проведение прямой, перпендикулярной к плоскости, перпендикулярной к V.

На черт. 290 прямая AB перпендикулярна к плоскости R, а потому плоскость четыреугольника $b'BAa'$ перпендикулярна к плоскости R.

Плоскость четыреугольника $b'BAa'$ также перпендикулярна к плоскости V, так как в себе содержит линии Bb' и Aa', перпендикулярные к плоскости V.

Плоскость четыреугольника $b'BAa'$, будучи перпендикулярна к плоскости R и V, перпендикулярна и к линии их сечения, т. е. и R_v, а потому линия $a'b'$, как лежащая в плоскости четыреугольника $b'BAa'$, также будет перпендикулярна к R_v.

Таким образом опять, как и в первом случае, имеем, что проекции перпендикуляра к плоскости R перпендикулярны к соответственным следам плоскости.

На черт. 291 изображены проекции прямой AB, перпендикулярной к плоскости R.

3. Проведение перпендикуляра к плоскости, параллельной оси ox.

На черт. 292 плоскость R параллельна оси ox, а следовательно перпендикулярна к плоскости W.

Прямая AB перпендикулярна к R, а потому плоскость четыреугольника $ABb''a''$ также перпендикулярна к плоскости R.

В то же время плоскость четыреугольника $ABb''a''$ перпендикулярна к плоскости W, так как содержит в себе линии Aa'' и Bb'', перпендикулярные к W.

Следовательно плоскость четыреугольника $ABb''a''$ перпендикулярна к R_w, а потому и $b''a''$ перпендикулярна к R_w.

Так как AB лежит в профильной плоскости, то проекции ab и $a'b'$ будут обе перпендикулярны к оси ox, а следовательно и к следам R_v и R_h.

Таким образом имеем все три проекции прямой AB перпендикулярными к сооответственным следам плоскости, что мы и имеем на черт. 293.

4. Проведение перпендикуляра к плоскости, параллельной H.

Перпендикуляр к плоскости R, параллельной H, будет перпендикуляром и к H, а потому на H будет проектироваться в точку.

Вертикальная же проекция этого перпендикуляра будет перпендикулярна к оси ox, а следовательно и к вертикальному следу плоскости (черт. 294).

5. Проведение перпендикуляра к плоскости, параллельной V.

Перпендикуляр к плоскости, параллельной V, будет перпендикулярен и к V, а потому на V спроектируется в точку.

Горизонтальная же проекция этого перпендикуляра, будучи перпендикулярна к оси ox, будет перпендикулярна к горизонтальному следу, что и имеем на черт. 295.

6. Проведение перпендикуляра к профильной плоскости.

Перпендикуляр к профильной плоскости будет перпендикулярен к плоскости W, а потому параллелен к оси ox.

Проекции такого перпендикуляра будут: на W — точка, а на H и V — линии, параллельные оси ox.

На черт. 296 имеем перпендикуляр к профильной плоскости.

Задача 33. Построить квадрат, плоскость которого была бы перпендикулярна к плоскости R (плоскость R перпендикулярна H, V, либо W).

Дана сторона квадрата, лежащего в этой плоскости.

Дана сторона (ab, $a'b'$) искомого квадрата в плоскости R.

Совмещаем плоскость R с плоскостью V вместе с прямой линией (ab, $a'b'$) и получаем истинную величину A_0 B_0 стороны искомого квадрата.

Из точек (a, a') и (b, b') восстанавливаем перпендикуляры к плоскости R и откладываем на них длину стороны квадрата.

Так как стороны (ad, $a'd'$) и (bc, $b'c'$) параллельны плоскости H, будучи перпендикулярны к отвесной плоскости, то горизонтальные проекции этих сторон квадрата будут равны истинной величине стороны искомого квадрата.

На черт. 297 пара равных величин отмечена.

Принимая квадрат непрозрачным, мы часть вертикального следа плоскости должны чертить пунктиром.

На черт. 298 и 299 решена та же задача, но для случаев когда стороны квадрата лежат в плоскости R, перпендикулярной к V (черт. 298), и в плоскости R, перпендикулярной к плоскости W (черт. 299).

Ход решения этих примеров понятен по первому примеру.

Задача 34. Построить куб, одна грань которого лежала бы в плоскости R, перпендикулярной к W.

Прежде всего совмещаем плоскость R с плоскостью V, вращая плоскость R вокруг следа R_v.

Строим совмещенное положение квадрата $1_0 2_0 3_0 4_0$ и обратным вращением получаем три проекции $1\,2\,3\,4$, $1'\,2'\,3'\,4'$ и $1''\,2''\,3''\,4''$ этого квадрата (черт. 300).

Из вершин квадрата восставляем перпендикуляры к плоскости R и на них откладываем величины, равные стороне квадрата.

Так получаем три проекции искомого куба.

На основании пространственного представления этого куба мы проекции невидимых ребер изображаем пунктиром. Правильность построения этих пунктиров мы можем проверить помощью метода конкурирующих точек, который и излагаем в следующей главе.

XIII. Метод конкурирующих точек.

Конкурирующими точками условимся называть такую пару точек, которая имела бы общую проекцию.

Так как общая проекция двух точек может быть на плоскости H, V либо W, то и конкурирующие точки разбиваются на три группы: конкурирующие точки при проектировании на H, на V и на W.

Каждая пара конкурирующих точек обладает тем свойством, что одна из них видима, а другая невидима при проектировании на ту плоскость, на которой рассматриваемые точки имеют общую проекцию.

На черт. 301 имеем пару конкурирующих точек при проектировании на H.

Точки $(1, 1')$ и $(2, 2')$ имеют общую горизонтальную проекцию.

Судя по расположению вертикальных проекций, имеем точку 2 видимой при проектировании на H, а точку 1 — невидимой.

На черт. 302 имеем пару конкурирующих точек при проектировании на V, где точка 3 при проектировании на V будет видима, а точка 4—невидима.

На черт. 303 имеем пару конкурирующих точек при проектировании на W.

Точка 6 при проектировании на W видима, а точка 5 — невидима.

Конкурирующими точками мы пользуемся при решении вопроса видимости точек и линий при проектировании многогранников, при пересечении фигур между собою и в ряде других задач, которые мы будем рассматривать в дальнейшем.

Как пример пользования конкурирующими точками приведем следующую задачу.

З а д а ч а 35. Даны две скрещивающиеся прямые, найти на этих прямых те точки, которые были бы невидимы при проектировании на ту, либо иную плоскость проекций.

Точка $(2, 2')$ прямой $(cd, c'd')$ черт. 304 невидима, так как она лежит на одной вертикальной прямой с точкой $(1, 1')$, которая выше точки $(2, 2')$ и при проектировании на H покрывает собою точку $(2, 2')$.

Что обе эти точки лежат на одной вертикальной прямой, мы судим по общей их горизонтальной проекции 1, 2.

Точка $(1, 1')$ черт. 305 невидима при проектировании на V, так как она лежит вместе с точкой $(2, 2')$ на одной прямой, перпендикулярной к плоскости V, и точка $(2, 2')$ находится впереди точки $(1, 1')$.

На черт. 306 точка $(2, 2')$ невидима при проектировании на W, так как она вместе с точкой $(1, 1')$ находится на одной прямой, перпендикулярной к W, и точка $(1, 1')$ находится впереди точки $(2, 2')$.

Далее рассмотрим конкурирующие точки на таких двух скрещивающихся прямых, из которых одна перпендикулярна к одной из плоскостей проекций.

На черт. 307 прямая $(ab,\ a'b',\ a''b'')$ перпендикулярна к H, а прямая $(cd,\ c'd',\ c''d'')$ произвольно наклонена к плоскостям проекций.

При проектировании на H нет невидимых точек.

При проектировании на V невидима точка $(1,\ 1',\ 1'')$ наклонной прямой, а при проектировании на W невидимой будет точка $(4,\ 4',\ 4'')$ вертикальной прямой.

Здесь в одном случае невидимая точка лежит на вертикальной прямой, а в другом случае — на наклонной прямой. Это зависит от расположения горизонтальной проекции наклонной прямой по отношению к горизонтальной проекции вертикальной прямой.

Можно наклонную прямую взять так, чтобы в обоих случаях невидимые точки оказались на ней, либо в обоих случаях невидимые точки были на вертикальной прямой, что и показано на черт. 308 и 309.

На черт. 308 точка $(2,\ 2')$ невидима при проектировании на V и точка $(4,\ 4',\ 4'')$ той же наклонной прямой невидима при проектировании на W.

Таким образом на черт. 308 мы имеем случай, когда обе невидимые точки лежат на наклонной прямой.

На черт. 309, наоборот, мы имеем обе невидимые точки $(1,\ 1',\ 1'')$ и $(3,\ 3',\ 3'')$ на вертикальной прямой.

Сопоставляя черт. 307, 308 и 309 легко заметить признаки, по которым можно судить о невидимых точках при проектировании на V либо W. Для этого достаточно посмотреть по направлению стрелок черт. 307, 308 и 309.

Аналогично можно судить о невидимости точек на прямых, перпендикулярных к V и W. Для этого необходимо вообразить стрелки на соответственных проекциях и, не находя даже конкурирующих точек, указать на ту прямую, на которой будет находиться невидимая точка.

Кроме метода конкурирующих точек мы при проектировании многогранников (призм, пирамид, куба и др.) будем пользоваться еще следующими правилами:

1. Весь окаймляющий контур каждой проекции видим, а потому его следует чертить сплошной линией.

2. Если внутри контура проекции многогранника пересекаются проекции двух ребер, то они единовременно не могут быть сплошными, либо единовременно пунктирными, а обязательно проекция одного из этих ребер должна быть начерчена сплошной линией, а проекция другого ребра — пунктиром.

Это следует из того соображения, что такие два ребра многогранника единовременно не могут быть видимыми, либо единовременно невидимыми.

Видимость ребер выясняется конкурирующими точками.

3. Если внутри контура проекции многогранника встречаются в одной точке проекции трех или нескольких ребер, то все они единовременно должны быть начерчены сплошными линиями или все единовременно должны быть пунктирными.

Это следует из того соображения, что если общая точка этих ребер видима, то все ребра видимы, или обратно, если общая точка невидима, то и все ребра невидимы.

Пользуясь этим параграфом, мы легко можем определить видимость ряда ребер, если известна видимость одного ребра, пересекающегося с остальными ребрами в одной точке.

XIV. Построение призм, пирамид, цилиндра и конуса по заданным условиям.

Задача 36. Построить правильную прямую шестигранную призму с основанием на плоскости, перпендикулярной к H (черт. 310).

Продолжение диагонали основания проходит через точку схода следов плоскости R.

Высота призмы равна четырем сторонам основания.

Совмещаем плоскость R с V и строим $A_0 B_0 C_0 D_0 F_0$, совмещенное с V положение основания. Его берем так, чтобы одна диагональ проходила через точку схода следов.

Далее находим проекции этого основания. Из каждой вершины основания восстановляем перпендикуляры к плоскости R и на них откладываем по четыре стороны основания, что легко сделать, так как все эти перпендикуляры будут параллельны плоскости H и на H проектируются в натуральную величину.

Соединив концы этих перпендикуляров, находим верхнее основание призмы.

Невидимость ребер проверяем на основании сказанного в предыдущем параграфе.

Задача 37. Построить прямой круговой конус, стоящий своим основанием на плоскости, перпендикулярной к W. Даны центр основания, радиус основания и высота, равная 2,5 диаметра основания (черт. 311).

Начинаем работу с совмещения плоскости R с плоскостью V вращением вокруг следа R_v. Вместе с плоскостью R совмещаем с V центр основания и проводим совмещенное положение окружности основания.

На чертеже эта окружность показана пунктиром, как построение вспомогательное.

Берем четыре точки 1_0, 2_0, 3_0 и 4_0 на этой окружности и находим их проекции. Вертикальная и горизонтальная проекции окружности основания будут эллипсы с осями $1'2'$ и $3'4'$ для вертикальной проекции и 12 и 34 для горизонтальной проекции.

Далее из центра основания восставляем перпендикуляр к плоскости R и откладываем на нем 2,5 диаметра.

Так как этот перпендикуляр в натуральную величину проектируется на W, то берем проекцию высоты $c'' s''$, равную 2,5 диаметра.

Имея три проекции точки C и точку s'', не трудно определить s' и s, а далее, проведя из точек s' и s касательные к соответствующим проекциям основания, будем иметь вертикальную и горизонтальную проекции искомого конуса.

На W искомый конус проектируется в виде равнобедренного треугольника, так как основание конуса проектируется в прямую линию, лежащую на следе R_w.

Задача 38. Построить прямой круговой цилиндр, стоящий своим основанием на плоскости, перпендикулярной к V. Высота цилиндра равна двум диаметрам. Работу исполнить в трех проекциях V.

На чертеже 312 совмещаем плоскость R с плоскостью H и строим совмещенное положение основания (пунктирная окружность).

Для точек 1_0, 2_0, 3_0 и 4_0 находим проекции и строим эллипсы, в которые будет проектироваться основание цилиндра.

На расстоянии двух диаметров от плоскости R строим верхнее основание цилиндра. Построения понятны по чертежу.

Задача 39. Построить правильную пятигранную пирамиду с основанием на плоскости, перпендикулярной к H. Даны центр основания, высота и радиус круга, описанного около основания (черт. 313).

XV. Определение углов наклона плоскости к плоскостям проекций.

В общем виде этот вопрос, как и все другие, будет рассматриваться во второй части курса.

Здесь мы рассмотрим углы наклона к плоскостям проекций плоскостей, перпендикулярных к H, V и W, которые находятся весьма просто на черт. 314, 315 и 316.

На этих чертежах обозначены через α — угол наклона плоскости R к плоскости H, через β — к плоскости V и через γ — к плоскости W.

XVI. Проведение плоскости, параллельной плоскости, заданной следами.

Если две плоскости параллельны, то их одноименные следы также параллельны, так как две параллельные плоскости пересекаются по линиям параллельным между собою.

Задача 40. Дана плоскость R, перпендикулярная к плоскости W; провести плоскость, параллельную плоскости R, на заданном расстоянии.

Для решения этой задачи берем на плоскости R точку, из нее восставляем перпендикуляр к заданной плоскости и на нем откладываем требуемое расстояние.

Через конец перпендикуляра проводим плоскость параллельную заданной. Искомая плоскость также будет перпендикулярна к плоскости W.

На черт. 317 плоскость R_1 параллельна плоскости R и находится на заданном расстоянии AB от плоскости R.

Задача 41. Дана плоскость R, перпендикулярная к плоскости H. На расстоянии AB от плоскости R провести плоскость, параллельную плоскости R, и в проведенной плоскости построить квадрат.

Решение. Из точки A, лежащей на плоскости R, восставляем перпендикуляр к ней и откладываем на этом перпендикуляре длину AB. Через конец перпендикуляра проводим плоскость R_1, параллельную плоскости R.

Для построения искомого квадрата в плоскости R_1, мы эту плоскость совмещаем с плоскостью V и строим совмещенное с V положение квадрата. По совмещенному положению квадрата находим проекции его (черт. 318).

XVII. Пересечение прямой линии с плоскостью, заданной следами.

В общем случае этот вопрос будет рассмотрен во второй части курса, здесь же мы рассмотрим пересечение прямой линии с шестью знакомыми нам плоскостями.

На черт. 319 точка (k, k') является точкой пересечения прямой линии с плоскостью, перпендикулярной к H, так как горизонтальная проекция точки (k, k') лежит на горизонтальном следе плоскости R, а потому она лежит в плоскости R, и кроме того проекции точки (k, k') лежат на соответственных проекциях заданной прямой $(ab, a'b')$.

Ведя подобные же рассуждения для черт. 321, 322, 323 и 324,—мы легко имеем возможность доказать, что во всех указанных здесь случаях точка (k, k') является точкой пересечения линии с плоскостью.

Рассмотренные здесь случаи пересечения плоскости с прямой линией ложатся в основу решения многих задач на пересечение. Заметим, что подобным же путем мы могли бы пересечь рассмотренные здесь плоскости с кривой линией, например с окружностью.

Для этого необходимо соответственную проекцию пересечь со следом плоскости и полученную точку пересечения спроектировать на другую проекцию кривой.

На черт. 325 и 326 имеем примеры пересечения дуги круга с плоскостями, перпендикулярными к H и W.

Задача 42. Построить пересечение прямой линии и окружности с прямоугольником, плоскость которого перпендикулярна к одной из плоскостей проекций. Прямоугольник считать непрозрачным.

На черт. 327 плоскость прямоугольника перпендикулярна к плоскости H и точка $(1, 1')$ пересечения этого прямоугольника с прямой $(ab, a'b')$ находится на основании черт. 319. Невидимую часть вертикальной проекции прямой мы чертим пунктиром.

На черт. 328 имеем случай пересечения прямоугольника, плоскость которого перпендикулярна к H, с окружностью, лежащей в плоскости, параллельной V.

Точка пересечения окружности с прямоугольником будет $(1, 1')$. Точка же $(2, 2')$ находится за пределами контура прямоугольника, а потому она не является точкой пересечения прямоугольника с окружностью.

На черт. 329, 330 и 331 имеем пересечения плоскости прямоугольника с прямой линией. На черт. 329 - прямоугольник взят параллельным плоскости V. На черт. 330 прямоугольник перпендикулярен к V и на черт. 331 — перпендикулярен к W. Ход решения показан стрелками.

На черт. 332 и 333 плоскость прямоугольника пересечена с окружностью. Невидимые части окружности показаны пунктиром в соответственной проекции. Ход работы показан стрелками.

XVIII. Пересечение плоской фигуры с прямой, перпендикулярной к H, V либо W.

В качестве плоской фигуры возьмем треугольник, произвольно наклоненный к плоскостям проекций.

На черт. 334, 335 и 336 имеем пересечение треугольника с прямой, перпендикулярной к H.

Рассмотрим каждый чертеж в отдельности.

На черт. 334 проводим в плоскости треугольника вспомогательную линию, которая пересекала бы заданную прямую ($mn, m' n'$). Таких прямых в плоскости треугольника можно провести большое количество и все они будут иметь горизонтальные свои проекции проходящими через точку (mn).

На черт. 334 и проведена одна из таких прямых ($kl, k' l'$). Работу начинаем с проведения горизонтальной проекции (kl) через точку (mn).

Точки k и l, как показано на чертеже стрелками, проектируем на $a' b'$ и $c' b'$ и получаем вертикальную проекцию $k' l'$ вспомогательной прямой.

Вертикальную проекцию вспомогательной прямой пересекаем с вертикальной проекцией заданной прямой в точке $1'$.

Точка $1'$ будет вертикальной проекцией искомой точки пересечения треугольника с прямой (mn, $m' n'$)

Горизонтальная же проекция этой точки будет в точке mn.

На черт. 335 применен тот же прием, что и на черт. 334, но только вспомогательная прямая проведена через вершину треугольника.

Ход работы на чертеже показан стрелками.

На черт. 336 работу также начинаем с проведения горизонтальной проекции вспомогательной прямой, которая лежала бы в плоскости треугольника $(abs, a'b's')$ и пересекала бы заданную прямую.

Далее следовало бы точку k, лежащую на ab, спроектировать на $a'b'$, но так как линия $(ab, a'b')$ лежит в профильной плоскости, то k' непосредственным проектированием определить нельзя.

Прямую $(ab, a'b')$ спроектируем на W и найдем на ней точку k'', а далее простым проектированием точки k'' на $a'b'$ находим искомую k'. Точку k' соединяем с s' и получаем $s'k'$ — вертикальную проекций вспомогательной прямой, которую и пересекаем с вертикальной проекцией заданной прямой в точке $1'$. Ход работы на чертеже показан стрелками. Точка же 1 лежит в точке (m, n).

Так получили мы искомую точку $(1, 1')$ пересечения треугольника $(abs, a'b's')$ с прямой $(mn, m'n')$.

На черт. 337 прямая $(mn, m'n')$ взята перпендикулярной к плоскости V.

Здесь работу начинаем с проведения вертикальной проекции вспомогательной прямой. Точку k' проектируем на ab в точку k, которую соединяем с точкой s. Так получаем ks — горизонтальную проекцию вспомогательной прямой. Линию ks пересекаем с mn в точке 1, которая будет горизонтальной проекцией искомой точки.

Точка $1'$ находится в точке $m'n'$.

Во всех примерах треугольник считаем непрозрачным, а потому некоторые части заданной прямой будут невидимы и в соответственных проекциях они проведены пунктиром.

На черт. 338 и 339 приведены примеры пересечения треугольника с прямой линией, перпендикулярной к плоскости W.

В одном случае (черт. 338) вспомогательная прямая проведена не через вершину треугольника, а в другом случае (черт. 339) она проведена через вершину.

На черт. 338 и 339 ход работы показан стрелками и он понятен на основании предыдущих объяснений, черт. 334 и 335.

На черт. 338 кроме того найдены конкурирующие точки для выяснения видимости частей прямой (mn, $m'n'$, $m''n''$) при проектировании на H и V.

XIX. Пересечение прямоугольника с треугольником.

1. Сечение полное.

Прямоугольник будем брать так, чтобы одна сторона его была параллельна оси oz, а потому плоскость такого прямоугольника перпендикулярна к плоскости H.

Этот прямоугольник будем пересекать с треугольником, произвольно наклоненным к плоскостям проекций. Будем брать ряд случаев, когда получаются полное и неполное сечения.

На черт. 340, 342 и 344 имеем полное сечение прямоугольника с треугольником. Во всех трех случаях плоскость прямоугольника перпендикулярна к плоскости H, а потому пересечение сторон треугольника с плоскостью прямоугольника осуществляется весьма просто.

Пересекаем горизонтальную проекцию стороны треугольника с горизонтальной проекцией прямоугольника (горизонтальная проекция прямоугольника есть прямая линия) либо его продолжением и в пересечении получаем горизонтальную проекцию искомой точки сечения.

На черт. 340, 342 и 344 искомая линия сечения будет ($1\ 2$, $1'\ 2'$).

На черт. 340 линия ($1\ 2$, $1'\ 2'$) находится непосредственно, а на остальных чертежах 342 и 344 мы предварительно находим линию (kl, $k'l'$) и уже на ней находим искомую ($1\ 2$, $1'\ 2'$).

Способ определения линии (kl, $k'l'$) на чертежах указан стрелками.

Кроме того на черт. 342 построены конкурирующие точки (3, 3′) и (4, 4′), помощью которых выясняем невидимые части сторон треугольника и прямоугольника.

На черт. 341, 343 и 345 та же задача решена по косоугольному методу.

На черт. 346, 347, 348, 349, 350 и 351 имеем вторые экземпляры чертежей 340, 341, 342, 343, 344 и 345.

Вторым экземпляром мы будем называть такой чертеж, который получается из первого экземпляра путем выпуска всех букв, всех цифр, проектирующих, вспомогательных и невидимых линий. В большинстве случаев вторые экземпляры закрашивают. В наших же примерах мы треугольник покрываем штриховкой.

На черт. 352 и 353 имеем полные сечения треугольника с прямоугольником.

2. Сечение неполное.

На черт. 354 и 356 имеем неполное сечение прямоугольника с треугольником.

Точка (1, 1′) на этих чертежах получается непосредственным проектированием, как это мы делали на предыдущих чертежах.

Для получения точки (2, 2′) на черт. 354 вообразим плоскость, проходящую через вершину (m, m') треугольника и сторону (cd, $c'd'$) прямоугольника.

Такая плоскость пересечет плоскость треугольника по линии (mk, $m'k'$), горизонтальная проекция которой пройдет через точки m и d. Эту линию мы пересекаем в точке k со стороной mp. Точку k проектируем на m' p' в точку k' и точку k' соединяем с m'.

Линию m' k' пересекаем с $c'd'$ в точке 2′; точка (2, 2′) есть точка пересечения вертикальной линии (cd, $c'd'$) с плоскостью треугольника.

Точка же 2 совпадает с cd. Линия (1 2, 1′ 2′) будет искомой линией сечения треугольника с прямоугольником.

На черт. 356 работа начинается так же, как и на черт. 354, но точка (2, 2′) находится не на вертикальной стороне треугольника, а на горизонтальной.

Для нахождения точки 2′ мы предварительно находим точку f' (вертикальную проекцию пересечения треугольника с продолжением прямой (cd, $c'd'$). Точку f' соединяем с точкой 1′ и этой прямой пересекаем прямую $b'\ c'$ в точке 2′. Искомая линия сечения есть (1 2, 1′ 2′).

На черт. 355 и 357 изображены в косоугольних проекциях черт. 354 и 356.

На черт. 355 и 357 указанный способ решения виден более наглядно.

XX. Развертка призмы, пирамиды, цилиндра и конуса.

Положим, на черт. 357 имеем две проекции прямой трехгранной призмы.

Развертка боковой поверхности призмы состоит из трех прямоугольников. Одна сторона этих прямоугольников равна высоте призмы, а другие стороны равны сторонам основания призмы.

Как высота, так и стороны основания призмы на черт. 358 проектируются в натуральную величину.

К развертке боковой поверхности пристраиваем верхнее и нижнее основания.

На черт. 359 изображена развертка прямой призмы 358 чертежа.

Для занесения на развертку линий и точек призмы достаточно уметь заносить на развертку точку, лежащую на ребре призмы, и точку, лежащую на грани призмы.

Точку, лежащую на ребре призмы, на развертку заносим непосредственно. Например, для занесения на развертку точки (1, 1′), лежащей на ребре (cc_1, $c'c'_1$), откладываем на линии CC отрезок $C1$, равный $c'1'$. Для занесения на развертку точки, лежащей на грани призмы, мы заносим на развертку предварительно ту вспомогательную прямую, на который лежит эта точка, и уже на нее заносим самую точку.

На черт. 358 точка $(2', 2)$ лежит на прямой $(m'n', mn)$.

Строим на развертке прямую MN (отрезок от CN черт. 359 равен отрезку cn черт. 358).

На прямой MN откладываем отрезок $N2$, равный отрезку $n'2'$.

На черт. 360 дана трехгранная пирамида в двух проекциях и две точки. Точка $(1', 1)$ лежит на ребре пирамиды, а точка $(2', 2)$ — на грани пирамиды.

Развертка пирамиды состоит из развертки боковой поверхности плюс основание пирамиды (черт. 361).

Так как пирамида стоит своим основанием на плоскости H, то горизонтальные проекции сторон равны истинным величинам их:

$$ab = AB;\ bc = BC;\ ca = CA.$$

Следовательно построение истинной величины основания не представляет затруднения.

Развертка боковой поверхности состоит из истинных величин трех боковых граней пирамиды.

Для определения истинных величин боковых граней мы находим истинные величины ребер перамиды и, имея истинные величины сторон основания, строим по трем сторонам, что и сделано на черт. 361.

При определении истинных величин боковых ребер пирамиды мы пользуемся методом вращения.

Вокруг оси, проходящей через вершину пирамиды и перпендикулярной к плоскости H, вращаем боковые ребра пирамиды до положения, параллельного плоскости V.

Горизонтальные проекции повернутых положений боковых ребер пирамиды (линии sb_0 и sc_0) будут параллельны оси проекций.

Вертикальные проекции повернутых положений боковых ребер будут равными истинным величинам их.

$$s'c'_o = SC \text{ и } s'b'_o = SB.$$

В данном случае мы находим истинные величины только двух боковых ребер SB и SC.

Третье же ребро SA на V проектируется в натуральную величину, так как оно задано параллельным плоскости V, что видно из параллельности горизонтальной проекции этого ребра оси проекций (sa параллельна ox).

Для занесения на развертку точки 1, лежащей на ребре SB, мы находим расстояние точки 1 до вершины пирамиды. Из точки $1'$ проводим линию $1'\,1'_o$, параллельную оси проекций, до пересечения с $s'b'_o$. Линия $s'1'_o$ равна истинной величине расстояния точки 1 до вершины пирамиды.

На линии SB (черт. 361) откладываем $s\,1 = s'\,1'_o$.

Для занесения на развертку точки, лежащей на грани пирамиды, т. е. точки 2, мы предварительно на развертку заносим ту вспомогательную прямую, на которой лежит эта точка, и уже на нее заносим самую точку.

Точка $(2', 2)$ лежит на вспомогательной прямой ($s'm'$ sm). Вращаем эту прямую вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину пирамиды, до положения, параллельного вертикальной плоскости, вместе с точкой $(2', 2)$, лежащей на ней.

Отрезок $s'\,2'_o =$ истинной длине расстояния между точкой 2 и вершиной.

Эту длину откладываем на линии SM от вершины S. Для занесения же линии SM на развертку мы на линии CA от точки C откладываем отрезок $CM = cm$ и точку M соединяем с точкой S.

Для построения развертки прямого кругового цилиндра (черт. 362) мы строим развертку боковой поверхности, что будет являться прямоугольником со сторонами, равными длине окружности основания и высоте цилиндра.

Длину окружности основания можно определить приближенно, вписав в окружность многоугольник.

К развертке боковой поверхности пристраиваем верхнее и нижнее основания.

Для занесения на развертку точки, лежащей на поверхности цилиндра, мы на развертку заносим ту образующую цилиндра, на которой лежит эта точка, и уже на нее заносим самую точку.

На черт. 363 заносим на развертку образующую MN и на нее точку 1.

Линия LN равна длине ln черт. 362 $N1 = n'1'$.

На черт. 364 даны две проекции прямого кругового конуса.

Развертка этого конуса состоит из развертки боковой поверхности и основания конуса.

Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса есть сектор с центральным углом α, который мы находим из уравнения:

$$\frac{2\pi l\alpha}{360^\circ} = 2\pi R, \text{ откуда } \alpha = 360^\circ \frac{R}{l},$$

где l есть длина образующей конуса, а R — радиус основания.

Длина дуги сектора (черт. 365) равна длине окружности основания конуса (черт. 364). Эту дугу можно определить и приближенно, вписав в окружность основания конуса многоугольник.

Для занесения на развертку точки, лежащей на поверхности конуса, мы заносим на развертку предварительно образующую конуса, на которой лежит эта точка, и уже на нее заносим самую точку.

На черт. 365 занесена точка 1, лежащая на образующей SM.

Длина дуги AM (черт. 365) равна длине дуги am (черт. 364).

Методом вращения находим истинную величину расстояния точки $(1', 1)$ до вершины конуса и на черт. 365 это расстояние откладываем на линии SM от вершины S.

XXI. Пересечение призмы, пирамиды, конуса и цилиндра плоскостью и определение истинной величины сечения.

Мы будем пересекать призму, пирамиду, конус и цилиндр плоскостями, перпендикулярными к плоскостям проекций.

На чертеже 366 прямая призма пересечена плоскостью, перпендикулярной к плоскости V.

Горизонтальная проекция сечения совпадает с контуром горизонтальной проекции призмы. Вертикальная проекция $1' 2' 3' 4'$ сечения лежит на вертикальном следе плоскости.

После совмещения плоскости R с плоскостью H мы получаем четыреугольник $1_0\ 2_0\ 3_0\ 4_0$, который является истинной величиной сечения.

На черт. 367 правильная прямая шестигранная призма пересечена плоскостью, перпендикулярной к плоскости H. В сечении получаем прямоугольник, истинная величина которого будет $1_0\ 2_0\ 3_0\ 4_0$, что является совмещенным положением сечения с плоскостью V.

На черт. 368 и 369 призма пересечена с плоскостями, перпендикулярными к V и H, и найдены истинные величины сечения путем совмещения секущей плоскости с одной из плоскостей проекций.

На черт. 370 пирамида, стоящая на плоскости H, пересечена плоскостью R, перпендикулярной к V.

Вертикальные проекции точек пересечения боковых ребер пирамиды с плоскостью R лежат в точках пересечения вертикальных проекций боковых ребер с вертикальным следом плоскости.

Горизонтальные проекции вершин сечения получаем простым проектированием.

Здесь мы имеем случай, когда пересекаются все боковые ребра пирамиды, а основание не участвует в пересечении.

На черт. 371 пирамида пересечена плоскостью R, перпендикулярной к плоскости V, здесь основание участвует в пересечении.

Способ определения сечения аналогичен предыдущему случаю.

На черт. 370 и 371 найдены истинные величины сечений методом совмещения.

На черт. 372, 373, 374 и 375 имеем сечения прямого кругового конуса:

1) Плоскостью, параллельной основанию (черт. 372). В сечении получаем окружность.

2) Плоскостью, перпендикулярной к V и пересекающей все образующие (черт. 373). В сечении получаем эллипс.

3) Плоскостью, перпендикулярной к V и параллельной одной из образующих (черт. 374). В сечении получаем параболу.

4) Плоскостью, параллельной оси конуса (черт. 375). На черт. 375 плоскость взята профильной. В сечении получаем гиперболу.

В первом случае (черт. 372) окружность сечения получаем весьма просто, имея диаметр его на плоскости V в виде части вертикального следа плоскости между крайними образующими.

Такое сечение на H будет проектироваться в натуральную величину.

В остальных трех случаях для получения сечения мы берем ряд образующих конуса и их пересекаем плоскостью, что делается просто на основании способа пересения прямой линии с плоскостями, перпендикулярными к плоскостям проекций.

На черт. 373 показано кроме того пересечение двух образующих конуса лежащих в профильной плоскости с заданной плоскостью.

Такими образующими являются $(sp,\ s'p')$ и $(sq,\ s'q')$.

Вертикальные проекции этих образующих пересекаем с вертикальным следом заданной плоскости в точках $4'$ и $5'$.

Горизонтальные проекции точек 4 и 5 мы не можем получить простым проектированием, так как проектирующие линии идут вдоль горизонтальных проекций образующих sp и sq.

Для определения горизонтальных проекций точек 4 и 5 мы образующие sp и sq проектируем на плоскость W и находим $s''p''$ и $s''q''$.

Эти проекции образующих, как построения вспомогательные, проводим пунктиром.

Далее находим 4″ и 5″, а найдя их, не трудно построить и горизонтальные проекции искомых точек 4 и 5.

Ход работы на чертеже показан стрелками.

На черт. 373, 374 и 375 найдены истинные величины сечений методом совмещения.

На черт. 376 построено сечение прямого кругового цилиндра с плоскостью, перпендикулярной к плоскости V.

Так как образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости H, то горизонтальная проекция сечения совпадает с контуром горизонтальной проекции цилиндра, что является окружностью.

Вертикальная проекция сечения лежит на вертикальном следе плоскости в пределах контура вертикальной проекции цилиндра.

На черт. 376 найдена истинная величина сечения путем совмещения плоскости R с плоскостью H.

Это будет эллипс с осями $12_0\ 1_0$ и $6_0\ 7_0$.

На черт. 377 показана развертка нижней отсеченной части цилиндра с плоскостью 376 чертежа.

Для построения развертки боковой поверхности мы выравниваем окружность основания цилиндра в прямую линию.

Берем на черт. 376 на равных расстояниях 12 образующих цилиндра и части их, считая от нижнего основания цилиндра до плоскости сечения, заносим на черт. 377 по линиям, перпендикулярным к линии LL и проведенным из точек деления прямой LL на 12 равных частей. Последовательно занеся эти части образующих, мы концы их соединяем плавной кривой.

На черт. 377 показаны только три точки — 12, 6 и 5, которые на черт. 376 лежат на образующих $(ll_1, l' l'_1)$, $(ee_1, e'_1 e'_1)$, $(qq_1, q'_1q'_1)$.

Причерчивая к найденной боковой поверхности части цилиндра нижнее основание цилиндра и найденное сечение цилиндра плоскостью, мы будем иметь развертку полной поверхности нижней отсеченной части цилиндра.

XXII. Пересечение поверхности призмы и цилиндра с прямой линией.

На черт. 378, 379, 380, 381, 382 и 383 показано пересечение прямой линии с поверхностью прямой призмы и прямого кругового цилиндра.

Основания призмы и цилиндра взяты в плоскостях H, V и W. Так как в этих случаях боковые поверхности призмы и цилиндров оказываются перпендикулярными к одной из плоскостей проекции, то искомые точки пересения получаются на основании пересечения прямой линии с плоскостями, перпендикулярными к H, V и W.

На указанных чертежах ход работы показан стрелками.

Проекции невидимых частей линий на чертежах 378, 379, 380, 381, 382 и 383 показаны пунктиром.

XXIII. Пересечение поверхности пирамиды и конуса с прямой линией.

На черт. 384, 286 и 288 поверхность одной и той же пирамиды пересечена с прямой линией, перпендикулярной к H, V и W.

Для пересечения прямой $(mn, m'n')$ черт. 384 с поверхностью пирамиды вообразим вспомогательную плоскость, проведенную через вершину пирамиды и заданную прямую.

Такая плоскость будет перпендикулярна к плоскости H и будет иметь свой горизонтальный след, проходящий через точки S и mn.

На чертеже следы самой вспомогательной плоскости не проведены, но найдена линия сечения $(sk, s'k')$ этой плоскости с гранью пирамиды $(asb, a's'b')$.

Пересекая заданную прямую с линией $(sk, s'k')$, мы находим искомую точку $(1,1')$ пересечения прямой линии с поверхностью пирамиды.

На черт. 386 вообразим вспомогательную плоскость, проходящую через вершину пирамиды и заданную прямую. Эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости V и пересечет поверхность пирамиды по двум прямым $(sk, s'k')$ и $(sl, s'l')$.

Эти обе прямые имеют общую вертикальную проекцию, которая проходит через точки S и $m'n'$, так как через эти точки проходит вертикальный след вспомогательной плоскости.

Пересечение найденных прямых с заданной будет в точках $(1, 1')$ и $(2, 2')$, которые и являются искомыми точками пересечения прямой линии с поверхностью пирамиды.

На черт. 388 построено пересечение поверхности пирамиды с прямой линией, перпендикулярной к плоскости W. Здесь мы прежде всего по двум проекциям пирамиды и прямой линии находим третью проекцию и уже после этого приступаем к решению задачи.

Вспомогательная плоскость, проходящая через вершину пирамиды и заданную прямую, будет перпендикулярна к плоскости W. Сама плоскость здесь не проведена, но показаны проекции на W и H сечения ее с поверхностью пирамиды.

Работу начинаем с проведения $s''k''$ и $s''l''$ через точки S и $m''n''$. Далее находим sk и sl и пересекаем с mn в точках 1 и 2.

Точки 1 и 2 проектируем на $m'n'$ в точки $1'$ и $2'$.

Таким образом получаем три проекции $(1, 1', 1'')$ и $(2, 2', 2'')$ искомых точек пересечения прямой линии с поверхностью пирамиды.

На черт. 385, 387 и 389 построены пересечения прямой линии с поверхностью прямого кругового конуса.

Вопрос решается аналогично с вопросом пересечения прямой линии с поверхностью пирамиды.

Здесь вспомогательные плоскости мы воображаем через прямую линию и вершину конуса. Эти плоскости пересекают поверхности конуса по двум образующим.

В частном случае такая плоскость может касаться конуса по одной образующей. Тогда прямая имеет одну общую точку с поверхностью конуса.

Дальнейшие построения для определения точек сечения прямой линии с поверхностью конуса понятны по черт. 385, 387 и 389.

На черт. 384—389, прямая линия дана перпендикулярной к одной из плоскостей проекций и тогда вспомогательная плоскость нами проведена через вершину пирамиды (конуса). В случае же задания прямой, не перпендикулярной ни к одной из плоскостей проекций мы вспомогательную плоскость проводим через прямую линию перпендикулярно к одной из плоскостей проекций.

Такая плоскость в общем случае не будет проходить через вершину пирамиды (конуса).

На черт. 390 приведен пример пересечения пирамиды с прямой линией, произвольно наклоненной к плоскостям проекций.

Проводим через прямую (mn, $m'n'$) вспомогательную плоскость R, перпендикулярную к плоскости V.

На черт. 390 проведен вертикальный след R_v этой плоскости.

Пересекаем вспомогательную плоскость с поверхностью пирамиды по четыреугольнику ($prtq$, $p'r't'q'$). Этот четыреугольник пересекается с заданной прямой в точках (1, 1′) и (2, 2′), которые и являются искомыми точками пересечения поверхности пирамиды с прямой линией.

На черт. 391 та же задача решена в косоугольных проекциях.

Вообразим на черт. 391 вспомогательную плоскость, перпендикулярную к плоскости V. Вертикальный след этой плоскости пройдет вдоль второй проекции на V заданной прямой.

Находим вторую проекцию на V боковых ребер пирамиды и эти вторые проекции боковых ребер пересекаем с линией $m'n'$ в точках p', q', r' и t', которые являются вторыми проекциями на V вершин сечения поверхности пирамиды с вспомогательной плоскостью.

Проектируем эти точки на SA, SB, SC и SD и получаем косоугольную проекцию сечения поверхности пирамиды с вспомогательной плоскостью, перпендикулярной к V и проходящей через прямую MN.

Точки пересечения 1 и 2 четыреугольника $PQTR$ с прямой MN будут косоугольными проекциями искомых точек пересечения поверхности пирамиды с прямой MN.

Проектируя эти точки на V, получаем $1'$ и $2'$—вторые проекции на V найденных точек сечения.

XXIV. Пересечение поверхности шара плоскостью, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций.

Рассмотрим сечение поверхности шара плоскостью перпендикулярной к плоскости H, при этом плоскость не проходит через центр шара. На черт. 391_1 мы и имеем такой случай.

Из геометрии нам известно, что в сечении должны получить окружность, которая на H спроектируется в прямую линию, лежащую на горизонтальном следе заданной плоскости, а две другие проекции изобразятся эллипсами. Для построения этих эллипсов, т. е. проекции на V и W искомого сечения, мы воображаем поверхность шара пересеченной рядом плоскостей, параллельных плоскости H. Такие сечения будут окружности, которые на H проектируются окружностями, а на V и W прямыми линиями, параллельными осям ox и oy.

Эти сечения называются параллелями. Самая большая параллель лежит в плоскости, проходящей через центр шара, такая параллель называется экваториальным сечением.

Таким образом ряд параллелей и экваториальное сечение пересекаем с заданной плоскостью.

Вообще говоря, каждая параллель и экваториальное сечение пересекают заданную плоскость в двух точках.

На черт. 391_1 найдены точки 1, 2, 3, 10, 11, 12 и ряд других, не показанных на чертеже. Кроме того берем пару параллелей, касательных к заданной плоскости. Каждая из этих параллелей с плоскостью имеет только по одной общей точке. Эти точки (6 и 7) будут на кривой высшей и низшей точками.

Далее берем сечение поверхности шара плоскостями, параллельными плоскостям V и W. Первое из этих сечений называется главным меридиональным сечением, а второе — профильным сечением.

Горизонтальная проекция главного меридионального сечения будет линия, параллельная оси ox, а вертикальная проекция совпадает с контуром вертикальной проекции шара.

Это главное меридиональное сечение пересекается с плоскостью в точках 4 и 5. Точки 4 и 5 являются точками, отделяющими видимую часть сечения от невидимой при проектировании на V.

Профильное сечение на H проектируется в виде диаметра параллельного оси oy, а на W проекция такого сечения совпадает с контуром проекции шара. Это сечение пересекает плоскость R в точках 8 и 9. Точки 8 и 9 отличаются тем, что их проекции на W (точки $8''$ и $9''$) являются точками, отделяющими видимую часть кривой сечения от невидимой при проектировании на W.

Таким образом определены видимые и невидимые части кривой сечения на чертеже 391_1.

На черт. 391_2 имеем более простой случай. Здесь плоскость R перпендикулярна к плоскости V и проходит через центр шара. В сечении будем иметь окружность радиуса равного радиусу шара. Искомое сечение на V проектируется в диаметр, лежащий на следе R_v, а две другие проекции сечения будут эллипсы.

Ход построения аналогичен с построением сечения в предыдущем примере. Только здесь вспомогательные плоскости взяты параллельными плоскости V.

В этой задаче мы коснулись точек, отделяющих видимую часть кривой сечения от невидимой.

Вообще о видимости точек поверхности шара при проектировании на H, V и W следует заметить себе, что:

1. При проектировании на H видимыми будут точки верхнего полушария (черт. 137).

2. При проектировании на V видимыми будут точки переднего полушария (черт. 138).

3. При проектировании на W видимыми будут точки левого полушария (черт. 139).

XXV. Пересечение поверхности шара с прямой линией.

Рассмотрим здесь следующие три случая задания прямой линии:

1. Прямая перпендикулярна к одной из плоскостей проекций.

2. Прямая параллельна к одной из плоскостей проекций.

3. Прямая произвольно наклонена к плоскости проекций.

Во всех случаях проводим через заданную прямую вспомогательную плоскость, которой пересекаем поверхность шара по окружности, и найденное сечение пересекаем с заданной прямой.

В первых шести примерах, а именно на черт. 392, 393, 394, 395, 396 и 397, мы вспомогательную плоскость проводим параллельно одной из плоскостей проекций.

На эту плоскость проекций окружность сечения поверхности шара с вспомогательной плоскостью будет проектироваться в натуральную величину, что и имеем мы на указанных здесь шести чертежах.

На черт. 392, 393, 394, 395, 396 и 397 след вспомогательной плоскости проведен тонкой сплошной линией, а проекция окружности сечения проведена тонким пунктиром.

Точки (1, 1′) и (2, 2′) во всех шести случаях являются искомыми точками сечения шара с прямой линией.

На черт. 398 и 399 мы имеем пересечение поверхности шара с прямой линией, произвольно наклоненной к плоскостям проекций.

На черт. 398 для определения точек сечения мы пользуемся методом совмещения плоскости с плоскостью проекций, а на черт. 399—методом перемены плоскостей проекций.

На черт. 398 через прямую (ab, $a'b'$) проводим плоскость, перпендикулярную к плоскости H. Такая плоскость пересечет поверхность шара по окружности с центром в точке (k, k'), точка (k, k') является основанием перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость R.

Горизонтальная проекция окружности сечения лежит на следе и является хордой контура горизонтальной проекции шара.

Совмещаем плоскость R вместе с прямой линией и окружностью сечения, с плоскостью V, и получаем 1_0 и 2_0—совмещенные положения искомых точек сечения поверхности шара с прямой линией.

По точкам 1_0 и 2_0 находим проекции точек так, как это на чертеже показано стрелками.

На черт. 399 та же задача решена помощью перемены плоскостей проекций.

Вообразим плоскость, проходящую через прямую (ab, $a'b'$) и перпендикулярную к плоскости H. Такая плоскость пересечет поверхность шара по окружности, которую вместе с заданной прямой проектируем на новую вертикальную плоскость V_1, взятую параллельно заданной прямой, что мы видим по положению новой оси o_1x_1. Эта новая ось взята параллельно горизонтальной проекции заданной прямой.

В новой системе плоскостей проекций HV_1 на плоскость V_1 спроектируются в натуральную величину заданная прямая и окружность сечения.

Центр окружности сечения вспомогательной плоскости R с поверхностью шара будет в точке $(k\ k_1)$.

Находим на плоскости V_1 в системе HV_1 новую вертикальную проекцию центра сечения, новую проекцию заданной прямой и окружности сечения.

Здесь мы находим $1'_1$ и $2'_1$ новые вертикальные проекции искомых точек пересечения поверхности шара с прямой линией. Далее находим горизонтальные и вертикальные проекции этих точек так, как это на черт. 399 показано стрелками.

XXVI. Пересечение прямой призмы с треугольником.

При решении этой задачи мы будем различать два случая:

1. Ребро призмы не пересекает треугольника.
2. Ребро призмы пересекает треугольник.

На черт. 400 в трех проекциях изображена прямая четырехгранная призма с основанием на плоскости H.

Для пересечения поверхности этой призмы с треугольником, заданным также в трех проекциях, мы горизонтальную проекцию треугольника пересекаем с контуром основания призмы в точках 1, 2, 3 и 4, которые будут являться горизонтальными проекциями точек пересечения поверхности призмы со сторонами треугольника.

Далее простым проектированием находим $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $1''$, $2''$, $3''$ и $4''$ так, как это на чертеже показано стрелками. Проекции невидимых линий начерчены пунктиром.

На черт. 401 изображен второй экземпляр черт. 400.

На черт. 400 ни одно боковое ребро призмы не участвует в пересечении.

На черт. 402 также прямая четырехгранная призма, пересечена с треугольником, но здесь ребро призмы участвует в пересечении.

Точки $(1, 1', 1'')$ и $(2, 2', 2'')$ мы находим простым проектированием, находим прежде всего точки 1 и 2, а далее находим $1'$, $2'$, $1''$ и $2''$, как на чертеже показано стрелками.

Для определения точки пересечения вертикального ребра призмы с плоскостью треугольника мы через это ребро призмы и одну из вершин вообразим вспомогательную плоскость.

Найдем пересечение этой вспомогательной плоскости с плоскостью треугольника и полученную линию сечения пересечем со взятым ребром призмы.

На черт. 402 мы имеем пересечение ребра $(dd', d'd'_1, d''d''_1)$ призмы с плоскостью треугольника.

Проводим пунктиром (как вспомогательную) линию mdk, которая будет горизонтальной проекцией сечения вспомогательной плоскости, проходящей через ребро DD_1 и вершину M с плоскостью треугольника.

Далее находим вертикальную проекцию $m'k'$ этой линии сечения (ход работы показан стрелками).

Линию $m'k'$ пересекаем с dd'_1 в точке $3'$. Точка 3 будет в точке dd_1 (черт. 402).

Далее находим $3''$ простым проектированием. На черт. 403 имеем второй экземпляр черт. 402.

На черт. 404 и 405 пересечена прямая четырехгранная призма с треугольником.

Основание призмы лежит на плоскости V.

На черт. 404 ребро призмы не участвует в пересечении.

Работа исполнена аналогично случаям черт. 400 и 402, а потому мы не будем здесь останавливаться на подробном решении. Скажем только, что порядок и ход решения показаны стрелками.

XXVII. Пересечение поверхности цилиндра с треугольником.

Прямой цилиндр (черт. 405_1) стоит своим основанием на плоскости H. Треугольник взят произвольно наклоненный к плоскостям проекций.

Прежде всего пересекаем стороны треугольника с поверхностью цилиндра, для чего горизонтальную проекцию стороны пересекаем с контуром горизонтальной проекции цилиндра и полученную точку проектируем на вертикальную проекцию прямой. Далее проектируем найденную точку на W так, как это на чертеже показано стрелками для точки $(1, 1', 1'')$.

В плоскости треугольника берем ряд вспомогательных прямых и поверхность цилиндра пересекаем этими вспомогательными прямыми.

Ход работы на чертеже показан стрелками. Полученные точки соединяем плавной кривой.

На черт. 405_2 изображен второй экземпляр черт. 405_1.

XXVIII. Пересечение многогранников.

1. Пересечение двух прямых призм.

Для примера (черт. 406) в трех ортогональных проекциях построим пересечение прямой четырехгранной призмы, стоящей своим основанием на H, с прямой пятигранной призмой, стоящей своим основанием на W.

Ребра первой призмы пересекаем с гранями второй призмы, а ребра второй призмы с гранями первой. В обоих случаях вопрос решается чрезвычайно просто на основании пересечения прямой линии с прямой призмой, что мы имеем на черт. 378, 380 и 382.

На черт. 406 показан способ определения точек $(5, 5', 5'')$ и $(6, 6'', 6'')$ пересечения одного ребра второй призмы с гранями первой призмы.

Горизонтальную проекцию ребра ee_1 пересекаем с контуром горизонтальной проекции первой призмы в точках 5 и 6 и полученные точки проектируем на $e'e'_1$ в точки $5'$ и $6'$.

Для пересечения ребра qq_1 первой призмы с гранями второй призмы мы это ребро проектируем на плоскость W, где имеется основание второй призмы. Пересекаем $q''q''_1$ с контуром основания второй призмы в точках $13''$ и $14''$. Далее простым проектированием находим $13'$ и $14'$.

Таким же способом найдены все остальные точки.

Вообразив в пространстве полученные точки пересечения, мы их соединяем между собою соответственно прямыми линиями и получаем сечение поверхностей данных призм между собою.

Для проверки правильности соединения полученных точек автором этой книги предложен в 1908 году „Механический способ соединения точек при пересечении многогранников", который точно указывает на тот порядок, в котором следует соединять найденные точки пересечения, указывает на видимость линий пересечения и указывает на то место, где пропущена точка пересечения, если не все точки найдены, либо сделана ошибка при нахождении точек пересечения ребер одного многогранника с гранями другого.

Механический способ имеет два случая: 1) общий, который применим к пересечению самых сложных многогранников и 2) частный, который применим к случаю пересечения призм и пирамид, когда основания их не участвуют в пересечении.

Частный случай состоит в следующем:

Берем ряд параллельных вертикальных прямых числом равным числу боковых ребер первой призмы (или пирамиды) плюс один.

Эти параллельные линии пересекаем рядом горизонтальных прямых числом равным числу боковых ребер другой призмы (пирамиды) плюс один.

Таким образом, если один многогранник (призма, либо пирамида) имеет m боковых граней, а другой многогранник имеем n боковых граней, то мы берем $m+1$ и $n+1$ параллельных линий.

К черт. 406 такая сетка механического способа приложена.

Так как на черт. 406 мы имеем пятигранную и четырехгранную призмы, то параллельных линий на сетке механического способа взято $5+1=6$ и $4+1=5$.

При этом совершенно безразлично, которую из этих групп взять в качестве вертикальных линий.

На нашем примере вертикальных линий сетки механического способа взято 6, а горизонтальных 5.

Вертикальные линии помечены буквами A, B, C, D, E и A— теми буквами которые стоят в вершинах основания пятигранной призмы.

Горизонтальные линии помечены буквами M, N, P, Q и M — теми буквами, которые стоят в вершинах основания четырехгранной призмы.

Мы для краткости линии сетки будем обозначать только одной буквой, стоящей на одном из его концов.

Сопоставляя линии сетки с боковыми ребрами призм черт. 406, мы замечаем, что каждому боковому ребру призмы на сетке механического способа соответствует линия. Например ребру BB_1 пятигранной призмы соответствует вертикальная линия B сетки.

Ребру MM_1 четырехгранной призмы соответствует на сетке механического способа горизонтальная линия с пометкой M.

Так как на сетке линия с пометкой M является крайней, то она взята дважды. Также на сетке дважды взята линия с пометкой A.

Полоски между соседними линиями сетки соответствуют граням призмы. Например, полоска между линиями с пометками A и B, т. е. с пометкой AB, соответствует грани ABA_1B_1 пятигранной призмы; полоска MN сетки соответствует грани MNM_1N_1, четырехгранной призмы.

При пересечении боковых ребер (черт. 406) одной призмы с гранями другой, точка пересечения может находиться на пересечении ребра одной призмы с гранью другой, либо в точке пересечения ребра одной призмы ребром другой. На черт. 406, например, точка 5 находится на пересечении ребра EE пятигранной призмы с гранью MQM_1Q_1 четырехгранной призмы, о чем мы судим по горизонтальной проекции точки 5 (горизонтальная проекция точки 5 лежит на линии mq).

Для занесения точки 5 на сетку механического способа мы отыскиваем полоску с пометкой MQ и на вертикальной линии с пометкой E заносим точку 5 в пределах полоски MQ. (Для аккуратности работы точку 5 ставим посреди, на отрезке линии E, приходящемся в пределах полосы MQ, но это не обязательно. Достаточно точку 5 занести на линии E в пределах полоски MQ).

Точка 1 находится на пересечении ребра AA пятигранной призмы с гранью MNM_1N_1 четырехгранной.

Для занесения точки 1 на сетку механического способа мы отыскиваем полоску с пометкой MN и в ее пределах на прямой с пометкой A заносим точку 1.

Так как на сетке линий с пометкой A две штуки, то на обеих A в пределах полоски MN и заносим по 1.

Так же занесены и остальные точки.

Когда на сетку механического способа занесены таким образом все точки пересечения, мы их на сетке соединяем, пользуясь следующим правилом:

При соединении двух точек линия сетки не должна быть пересечена.

Например: точку 9 нельзя соединить с точкой 11, так как при этом пересекается линия сетки.

Точку 10 нельзя соединять с точкой 7, так как при этом пересекается линия сетки и т. д.

Начиная с какой-либо точки, например, с точки 5, мы соединяем на сетке точки в следующем порядке: 5-13; 13-6; 6-9; 9-2; переходим на вторую двойку и продолжаем работу соединения точек 2-4; 4-10; 10-8 и т. д., пока не вернемся в точку 5.

Таким образом последовательно получим точки 5-13 — 6-9 — 2-4 — 10-8 — 14-7 — 12-3 — 1-11 — 5.

Тут мы получили тот порядок, в котором надо соединить найденные точки пересечения на черт. 406. Кроме того некоторые из сторон искомого сечения при проектировании на H, V и либо W будут невидимы.

Для выяснения видимости сторон сечения при проектировании его на одну из плоскостей проекций мы на сетку механического способа соединения точек должны нанести характеристики граней при проектировании на ту плоскость проекций, которую в данном случае имеем.

На черт. 406, в виду большой простоты задания (боковые ребра одной призмы перпендикулярны к H, а боковые ребра другой к W), проекции сечения на H и W лежат на контурах проекций призм и этими сплошными контурами покрываются, а потому не возникает здесь вопроса видимости сторон сечения при проектировании на H и W.

При проектировании же сечения на V некоторые стороны сечения будут невидимы, а потому на сетку механического способа занесены характеристики граней при проектировании на V.

Работа занесения характеристики граней заключается в следующем: полоски сетки механического способа заканчиваются сплошными линиями, либо пунктиром. Эти сплошные линии и пунктиры, которыми заканчиваются полоски механического способа и названы нами характеристиками граней.

Если какая-либо грань (черт. 406) при проектировании на V будет видима, то соответственная полоска на сетке механического способа заканчивается сплошной линией.

Если грань при проектировании на V будет невидима, то полоска механического способа заканчивается пунктирной линией.

Таким образом заносим характеристики граней на сетку механического способа.

При этом в левом верхнем углу сетки пишем букву V и подчеркиваем ее, что должно нам указывать на то, что характеристики граней занесены для случая проектирования граней призм на V и что вся сетка предназначена для правильного построения вертикальной проекции сечения.

Заметим, что каждый прямоугольник сетки находится единовременно на двух полосках.

Две точки, лежащие на сторонах прямоугольника (на сторонах одного прямоугольника не может быть более двух точек, и если это окажется, то имеется ошибка либо в занесении на сетку механического способа, либо в определении самой точки пересечения), соединяем сплошной линией, если обе полоски заканчиваются сплошными линиями. (характеристиками граней).

Две точки, лежащие на сторонах прямоугольника сетки, соединяем пунктиром, если хоть одна полоска, на которой лежит этот прямоугольник, заканчивается пунктиром.

Например, линия 7 — 14 проводится сплошной линией, так как обе полоски MQ и CD, проходящие через прямоугольник, где находится линия 7 — 14, заканчиваются сплошными линиями.

Линия 10 — 8 проводится пунктиром, так как полоска BC заканчивается пунктиром (одна из полосок заканчивается пунктиром).

Прямая 4 — 10 проводится пунктиром, так как полоски BC и PN заканчиваются пунктиром.

Подобным образом соединяем все точки на сетке механического способа.

Теперь мы имеем для построения вертикальной проекции линии сечения поверхностей двух призм (черт. 406) не только тот порядок, в котором следует соединить найденные точки пересечения, но и видимость сторон сечения.

Если бы не все точки были найдены, то контур сечения не был бы замкнут, и по сетке механического способа мы легко смогли бы обнаружить, в каком месте пропущена точка, и ее соответственно дополнительно найти.

Например, если бы точка 8 не была найдена, то на сетке механического способа не хватало бы точки 8, и точки 10 и 14 остались бы несоединенными. Их можно соединить только посредством точки, лежащей на линии C в пределах полоски PQ, а это значит, что пропущенная точка должна быть найдена в точке пересечения ребра C пятигранной призмы с гранью $PQP_1 Q_1$ четырехгранной призмы.

Построив проекции линии сечения поверхностей заданных призм, мы соответственные проекции невидимых частей боковых ребер чертим пунктиром.

На черт. 407 изображен второй экземпляр черт. 406.

2. Пересечение поверхностей двух призм в косоугольных проекциях.

На черт. 408 в косоугольных проекциях построено пересечение поверхностей двух прямых призм шестигранной с основанием на H и четырехгранной с основанием на плоскости, параллельной плоскости V.

Для этой второй призмы показана и вторая ее проекция на V.

Для пересечения ребра DD шестигранной призмы с гранями четырехгранной призмы мы находим dd'_1 вторую проекцию ребра DD_1, на плоскости V, и пересекаем $d'd'_1$ с контуром второй проекции на V четырехгранной призмы в точках $1'$ и $2'$. Эти точки проектируем на DD_1 в точки 1 и 2, что показано на чертеже стрелками.

Подобным же образом находятся пересечения и других ребер шестигранной призмы с поверхностью четырехгранной призмы.

Для пересечения ребра PP_1 четырехгранной призмы с поверхностью шестигранной призмы мы для ребра PP_1 находим вторую проекцию на H и пересекаем ее (pp_1) с шестиугольником $ABCDEF$ в точках 11 и 14, которые проектируем на PP_1 в точках 11 и 14.

Подобным же образом найдены и косоугольные проекции остальных точек пересечения ребер четырехгранной призмы с гранями шестигранной.

Для случая пересечения призм черт. 408 построена сетка механического способа на той же странице в правом верхнем углу и занесены на ней точки сечения и характеристики граней.

Точки соединены указанным выше способом.

Сетка механического способа снабжена буквами „К. П.“, что должно означать, что сетка механического способа построена для косоугольной проекции пересечения.

Сопоставляя линии на сетке с линиями сечения черт. 408, мы легко убеждаемся в правильности соединения точек на черт. 408.

На черт. 409 и 410 отдельно вычерчена каждая призма вместе с сечением.

Предполагая каждую призму тонкостенной и выпуская буквы, цифры и невидимые части линий, мы на черт. 409 и 410 будем иметь вторые экземпляры призм черт. 408.

На черт. 410 кроме того повернуто верхнее основание призмы в положение, параллельное плоскости V. Для большей наглядности работы внутренняя поверхность призмы покрыта штриховкой.

3. Пересечение поверхности призмы с поверхностью пирамиды.

На черт. 411 в трех прямоугольных проекциях построено пересечение поверхностей прямой пятигранной призмы с трехгранной пирамидой.

Основание призмы лежит в плоскости H, а основание пирамиды в плоскости, перпендикулярной к H.

Для пересечения ребер пирамиды с гранями призмы горизонтальную проекцию ребра пересекаем с контуром горизонтальной проекции основания призмы. Это будут горизонтальные проекции искомых точек.

Остальные проекции искомых точек пересечения ребер пирамиды с гранями призмы находим простым проектированием, что показано на черт. 411 для ребра SM стрелками.

Пересекаем sm с контуром горизонтальной проекции основания призмы в точках 1 и 2.

Точки 1 и 2 проектируем на $s'm'$ в точки $1'$ и $2'$, которые в свою очередь проектируем на линию $s''m''$, в точки $1''$ и $2''$ (ход работы показан стрелками).

Для пересечения вертикального ребра призмы с пирамидой мы через это ребро призмы и вершину пирамиды проводим вспомогательную плоскость и ею пересекаем поверхность пирамиды. Полученные линии сечения пересекаем с ребром призмы в искомых точках.

На черт. 411 этот способ определения пересечения вертикального ребра призмы с поверхностью пирамиды показан для ребра AA_1.

Вспомогательная плоскость будет перпендикулярна к плоскости H и горизонтальный след этой плоскости будет проходить через точки s и a. Этот горизонтальный след на чертеже не показан.

Горизонтальные проекции линий сечения этой вспомогательной плоскости с поверхностью пирамиды будут лежать на горизонтальном следе плоскости, а потому они пройдут через точки a и s.

Этими горизонтальными проекциями будут линии sf и si, которые совпадают в одну линию и проходят через точки s и a.

Точки f и i проектируем на вертикальные проекции сторон основания в точки f' и i', а соединив их с точкой s' будем иметь $s'f'$ и $s'i'$ — вертикальные проекции линий сечения вспомогательной плоскости с поверхностью пирамиды, которые и пересекаем с вертикальной проекцией взятого ребра AA_1 в точках 7 и 8.

Горизонтальные проекции точек 7 и 8 будут в точке aa_1.

Найденные точки 7 и 8 проектируем на линию $a'' a''_1$ в точки $7''$ и $8''$.

Весь последовательный ход работы, относящийся к нахождению проекций точек 7 и 8, на чертеже указан стрелками.

К черт. 411 приложены две сетки механического соединения точек пересечения поверхностей призмы и пирамиды заданных на черт. 411.

С левой стороны сетка предназначена для вертикальной проекции сечения и имеет пометку V, а с правой стороны сетка предназначена для проекции сечения на плоскости W, а потому имеет пометку W.

Ход построения сетки механического способа, способ занесения на нее точек и способ соединения их те же, которые мы имели на черт. 406, а потому здесь на этом вопросе мы не будем останавливаться.

На черт. 412 изображен второй экземпляр черт. 411.

На черт. 413 и 414 показаны пересечения поверхностей правильной прямой пятигранной пирамиды с правильной прямой трехгранной призмой.

На черт. 413 работа исполнена в трех ортогональных проекциях, а на черт. 414 та же работа исполнена в косоугольных проекциях.

На обоих чертежах показаны способы пересечения одного ребра призмы с гранями пирамиды и одного ребра пирамиды с гранями призмы.

На обоих чертежах ход работы определения трех ортогональных проекций и косоугольных проекций точек 1, 2, 6 и 7 показаны стрелками.

К черт. 413 приложена сетка механического способа для построения вертикальной проекции сечения. Такая сетка имеет пометку V.

К черт. 414 приложена сетка механического способа с пометкой „К. П.“, так как такая сетка предназначена для соединения точек на работе, исполненной в косоугольных проекциях.

На основании объяснений предыдущих примеров, внимательно рассматривая направления стрелок, не трудно иметь объяснения черт. 413 и 414, а потому мы на нем не будем останавливаться.

На черт. 415 и 416 изображены вторые экземпляры пирамид черт. 413 и 414.

Пирамиды будем считать тонкостенными и для большей наглядности их поверхности покроем штриховкой.

XXIX. Развертки призмы и пирамиды с нанесением на них линий сечения.

На черт. 417 и 418 показаны развертки призмы и пирамиды черт. 413 и на этих развертках показаны линии сечения

Вспомогательные построения для занесения на развертки точек сечения показаны для тех же точек 1 и 2 на развертке пирамиды и 6 и 7 — на развертке призмы. Способ построения самих разверток нам известен из предыдущего, а потому на нем мы не останавливаемся.

Точки, лежащие на ребрах пирамиды, заносим непосредственно, найдя предварительно методом вращения расстояния этих точек до вершины пирамиды, так, как это показано на черт. 413 для точек 5 и 8. Для занесения же на развертку пирамиды точек, лежащих на гранях пирамиды, мы заносим на развертку предварительно те вспомогательные прямые, на которых лежат эти точки, и уже на них заносим самые точки.

На черт. 417 предварительно занесены на развертку пирамиды линии SP и SQ, пользуясь равенствами $BP = bp$ и $dq = DQ$.

На линии SP и SQ заносим точки 1 и 2, найдя предварительно на черт. 413 истинные величины расстояния точек 1 и 2 до вершины пирамиды так, как это сделано для точек 5 и 8.

На черт. 418 точки, лежащие на ребрах призмы, наносятся весьма просто, так как расстояния этих точек до основания призмы на черт. 413 даны в натуральную величину.

Для занесения на развертку точек, лежащих на гранях призмы, мы предварительно на развертку заносим вспомогательные прямые, на которых лежат эти точки. Вспомогательные линии проще всего брать параллельными ребрам призмы.

На черт. 418 показаны две из них, а именно линии R_1 6 и F_1 7, на которых и занесены точки 6 и 7.

Рассмотрим дополнительно к параграфу XXVIII еще следующее.

На черт. 418_1 и 418_2 построены пересечения поверхности правильной прямой пятигранной призмы с правильной прямой четырехгранной пирамидой. Основание призмы лежит в плоскости W, а пирамиды в плоскости, параллельной плоскости W.

Ребра пирамиды с поверхностью призмы пересекаем непосредственным проектированием так, как это показано на черт. 418_1 для точки (7, 7′, 7″).

Для пересечения ребра призмы с гранями пирамиды мы через ребро призмы и вершину пирамиды проводим вспомогательную плоскость. Этой вспомогательной плоскостью пересекаем поверхность пирамиды, и полученную линию сечения пересекаем со взятым ребром призмы в искомой точке пересечения ребра призмы с поверхностью пирамиды. На чертеже показано построение для точки (11, 11′, 11″). Ход работы показан стрелками.

На черт. 418_2 имеем второй экземпляр черт. 418_1. Для вертикальной и горизонтальной проекций построены сетки механического способа соединения точек.

На черт. 418_3 и 418_4 построены первый и второй экземпляры пересечения поверхностей трехгранной прямой призмы с четырехгранной пирамидой. Способ определения точек пересечения понятен на основании предыдущих примеров.

Ход работы для нахождения некоторых точек показан на чертеже стрелками. Остальные находятся аналогично.

Особенность этого примера заключается в том, что здесь о с н о в а н и я многогранников принимают участие в пересечении, тогда как во всех предыдущих примерах пересечения многогранников эти основания не принимали участия в пересечении. На этом основании во всех предыдущих случаях мы имели возможность пользоваться сетками механического способа соединения точек (частный случай „механического способа").

В примере же черт. 418_3 мы этой сеткой не можем воспользоваться, так как в данном случае основания принимают участие в пересечении.

Здесь надо воспользоваться о б щ и м с л у ч а е м м е х а н и ч е с к о г о с п о с о б а с о е д и н е н и я т о ч е к.

Здесь этот общий случай рассмотрим только на одном примере чертежа 418_3, а более подробно будет изложено во второй части курса, а также можно прочесть в статье автора в „Сборнике Института Инженеров Путей Сообщения“ за 1910 год.

Общий случай механического способа соединения точек при пересечении многогранников состоит из двух, либо трех (по числу проекций) приблизительных разверток, на которые наносим найденные точки сечения. Поясним, во-первых, что мы будем называть приблизительной разверткой.

Приблизительной разверткой многогранника мы условимся называть чертеж, сходный с разверткой многогранника тем, что этот чертеж имеет такое же количество аналогичных фигур и в таком же порядке как и развертка. Вершины приблизительной развертки должны быть обозначены теми же буквами и в том же порядке, что и вершины самой развертки многогранника. Приблизительная развертка чертится таким образом без соблюдения истинных длин сторон и величин углов многогранника.

На черт. 418_5, 418_6 и 418_7 имеем две приблизительные развертки призмы, и одну приблизительную резвертку пирамиды чертежа 418_3.

Эти приблизительные развертки помечены H, V и W, что должно означать, что чертежом 418_5 мы пользуемся для соединения точек на H, чертежом 418 для соединения точек на V и 418_7 — на W.

На каждой приблизительной развертке пометим еще каждую фигуру римской цифрой в любом порядке.

Например на черт. 418_5 мы фигуру $MNLK$ обозначим римской цифрой II, $LQPN$—римской цифрой III и т. д.. При чем мы имеем право эти римские цифры расставлять в любом порядке.

Если, как в данном случае, приблизительная развертка одного многогранника встречается дважды (черт. 418_5 и 418_7), то конечно соответственные фигуры на обоих чертежах следует помечать одной и той же римской цифрой. Например в обоих случаях треугольник LKQ обозначен цифрой I, четырехугольник $MNLK$ в обоих случаях — римской цифрой II и т. д.

Фигуры приблизительной развертки второго многогранника также помечаем римскими цифрами (черт. 418_6).

Это все предварительная работа. Чтобы с предварительной работой покончить, надо на фигурах приблизительных разверток поставить еще обозначения H, V и W. Эти обозначения проставляем только на видимых гранях. Положим, какая-либо грань многогранника видима при проектировании на V и W, тогда соответственная фигура приблизительной развертки должна иметь пометки V и W.

Если какая-либо грань видима только при проектировании на H, то соответственная фигура приблизительной развертки имеет пометку H.

Грань, видимая при проектировании на все три плоскости, имеет пометку H, V и W.

Наконец совершенно невидимая грань, при проектировании на каждую из плоскостей проекций, не имеет ни одной из пометок H, V и W.

Пометки H, V и W на фигурах черт. 418_5, 418_6 и 418_7 проставлены в кружках.

Когда вся эта предварительная работа закончена, приступаем к занесению найденных точек сечения на построенные нами фигуры приблизительных разверток. Каждая найденная точка пересечения является либо точкой пересечения ребра одного многогранника с гранью другого, либо является пересечением ребра одного многогранника с ребром же другого многогранника.

Положим, точку 5 черт. 418_3 хотим занести на черт. 418_5, 418_6 и 418_7. Точка 5 находится на пересечении грани $MKQP$ призмы с ребром SA пирамиды. Наносим в произвольных местах фигур $MKQP$ чертежей 418_5 и 518_7 по пятерке. Далее ставим пятерку на линии SA черт. 418_6. Так как линия SA на чертеже 418_6 встречается дважды, то и пятерку следует на каждой из них занести. Совершенно при этом не обращая внимания на то, на каком расстоянии от S эти пятерки должны быть поставлены, каждую из них на линии SA ставим в случайном месте.

Подобным же образом заносятся и все остальные точки.

Далее при каждой точке, занесенной на приблизительную развертку, ставим скобки и в скобках ставим римские цифры следующим образом:

Каждая точка (5, 8, 10 и т. д.) встречается дважды на приблизительной развертке первого многогранника и на приблизительной развертке второго.

Рассмотрим порядок проставления римских цифр в скобках на примерах.

1. Возьмем точку 8. На черт. 418_5 она находится на фигуре с пометкой II. Эту пометку II в скобках ставим при восьмерке черт. 418_6.

Восьмерка же черт. 418_6 находится на границе фигур с пометками I и II. Эти обе римские цифры I и II ставим в скобках при восьмерке черт. 418_5.

Подобным же образом помечаем и восьмерку черт. 418_7.

2. В качестве другого примера возьмем точку 5, на черт. 418_5 точка 5 находится на фигуре, помеченной римской цифрой V. Эту римскую цифру V ставим в скобках при рассматриваемой точке 5 на черт. 418_6.

На черт. 418_6 пятерка находится на границе фигур с пометками I и IV, а потому при пятерке черт. 418_5 в скобках ставим эти римские цифры I и IV.

Аналогично помечаем и пятерку черт. 418_7.

К о г д а   в с е   т о ч к и   т а к и м   о б р а з о м   б у д у т   и м е т ь   с в о и   д о п о л н и т е л ь н ы е   п о м е т к и   в   в и д е   р и м с к и х   ц и ф р   в   с к о б к а х,   м ы   и х   с о е д и н я е м   в   п р е д е л а х   к а ж д о й   ф и г у р ы   т а к,   ч т о б ы   п р и   с о е д и н е н и и   д в у х   т о ч е к   о н и   и м е л и   о б щ у ю   р и м с к у ю   ц и ф р у.

Например, соединяем на черт. 418_5 точки 10 и 4, так как эти точки имеют общую римскую цифру II.

Точку 10 также соединяем с точкой 12, так как обе эти точки имеют в скобках общую римскую пятерку.

На черт. 418_6 точку 10 нельзя соединять с точкой 8, хотя обе они имеют в скобках римскую цифру II, но эти точки 10 и 8 не лежат „в пределах одной фигуры".

Из приведенных примеров понятен способ соединения точек на приблизительных развертках 418_5, 418_6 и 418_7.

Здесь мы будем иметь тот порядок, в котором следует соединять точки для получения многоугольника сечения. Для выяснения же видимости сторон этого многоугольника при проектировании на H, V и W мы пользуемся нашими тремя приблизительными развертками.

На одной из них соединяем точки с такими пунктирами и сплошными линиями, какие должны быть на горизонтальной проекции нашей работы (черт. 418_3).

Эту приблизительную развертку снабжаем пометкой H, аналогично, две другие — снабжаем пометками V и W.

Положим, хотим должным образом соединить точки (черт. 418_5), т. е. выяснить, какие из сторон многоугольника сечения при проектировании на H будут видимы и какие — нет.

На черт. 418_5:

1) На всех фигурах, которые не имеют пометок H мы, не задумываясь, все линии проводим пунктиром (4 — 10, 10 — 12, 12 — 6 и т. д.).

2) Линии же, лежащие на фигурах с пометками H, (например 2 — 3), проводятся не сразу, а отыскивают такую же линию на приблизительной развертке второго многогранника. Если на приблизительной развертке второго многогранника отыскиваемая линия лежит на фигуре, также имеющей пометку H, то рассматриваемая линия проводится сплошной.

Если же эта фигура не имеет пометки H, то рассматриваемую линию следует проводить пунктиром.

Подобным же образом на черт. 418_6 показана видимость сторон многоугольника сечения при проектировании на V, а на черт. 418_7 — при проектировании на W.

Здесь мы пользуемся пометками V и W на фигурах приблизительных разверток.

Ход работы понятен из предыдущего.

XXX. Пересечение цилиндра с цилиндром, цилиндра с призмой, пирамидой и конусом.

В общем виде этот вопрос мы будем рассматривать во второй части курса.

Здесь же мы рассмотрим простейший частный случай, когда цилиндр прямой круговой и пересекается с прямым же круговым цилиндром либо прямым круговым конусом и при этом оси взаимно пересекаются и лежат в плоскости, параллельной одной из плоскостей проекций.

На черт. 419 имеем пересечение поверхностей двух прямых круговых цилиндров. Оси этих цилиндров пересекаются и лежат в плоскости, параллельной плоскости V. Основание одного цилиндра лежит в плоскости H, а другого — в плоскости, параллельной плоскости W.

Воображаем проведенными ряд плоскостей, параллельных плоскости V. В каждой такой плоскости в общем случае лежат по паре образующих того и другого цилиндра.

Эти четыре образующих взаимно пересекаются в четырех точках.

Таким образом каждая вспомогательная плоскость дает нам четыре точки. Таких вспомогательных плоскостей проводим несколько.

Прежде всего проводим вспомогательную плоскость через оси обоих цилиндров и получаем на черт. 419 в трех проекциях точки 9, 10, 11 и 12.

Проводим плоскости, касательные к горизонтальному цилиндру и параллельные плоскости V. В каждой такой плоскости лежит по одной образующей горизонтального цилиндра и по паре образующих вертикального цилиндра.

В каждой из этих вспомогательных плоскостей получим по паре точек в точках пересечения горизонтальной образующей с двумя вертикальными.

На черт. 419 одной из таких горизонтальных образующих является линия (pq, $p'q'$, $p''q''$), и так как вертикальные образующие совпадают с проектирующими линиями, то они, в виду крайней простоты вопроса, не показаны. Здесь на черт. 419 pq пересечена с контуром основания первого цилиндра в точках 2 и 4, которые спроектированы на $p'q'$, что на чертеже показано стрелками.

Также находятся точки (1, 1′, 1″) и (3, 3′, 3″).

Далее проводим произвольную вспомогательную плоскость, параллельную плоскости V, в которой лежат образующие (mn, $m'n'$, $m''n''$) и (st, $s't'$, $s''t''$) горизонтального цилиндра. Образующие вертикального цилиндра здесь не показаны, а искомые точки найдены как точки пересечения горизонтальных образующих MN и ST с поверхностью вертикального цилиндра.

Для пересечения образующих MN и ST горизонтального цилиндра, мы горизонтальные проекции mn в st (они совпадают в одну линию) пересекаем с контуром горизонтальной проекции вертикального цилиндра в точках 5, 6 и 7, 8 и эти точки проектируем на вертикальные проекции $m'n'$ и $s't'$ этих образующих и точки 5′, 6′, 7′ и 8′.

Ход работы на чертеже показан стрелками.

В виду симметричности расположения точек сечения по отношению к плоскости, проходящей через оси цилиндров, вертикальная проекция искомой линии сечения поверхностей цилиндров будет иметь вид, показанный на черт. 419. Здесь по две точки сечения имеют общую вертикальную проекцию.

На черт. 420 изображен второй экземпляр черт. 419.

На черт. 421 также даны два прямых круговых цилиндра, также с осями, пересекающимися и лежащими в плоскости, параллельной плоскости V, но отличие этого примера от черт. 419 заключается в том, что здесь горизонтальный цилиндр имеет большое основание, а на черт. 419 основание горизонтального цилиндра было меньше основания вертикального цилиндра.

Ход построения линии сечения поверхностей аналогичен со случаем черт. 419.

На черт. 421 ход работы показан стрелками.

На черт. 422 изображен второй экземпляр черт. 421.

На черт. 423 мы имеем тот часто встречающийся на практике случай, когда оба прямых цилиндра с осями пересекающимися имеют равные радиусы основания.

На черт. 423 один цилиндр имеет основание на H, а другой на плоскости, параллельной V.

Кривые сечения поверхностей этих цилиндров проектируются на W в пересекающиеся прямые $3'' 8''$ и $4'' 7''$.

В плоскости, параллельной плоскости W и проходящей через оси цилиндров, мы имеем по паре образующих обоих цилиндров, которые пересекутся в точках 3, 4, 7 и 8. Проекции этих точек на плоскости W будут $3''$, $4''$, $7''$ и $8''$.

Проводим общую касательную плоскость слева к обоим цилиндрам. Эта плоскость будет параллельна плоскости W и будет содержать в себе по одной образующей каждого цилиндра. Эти образующие пересекутся в точке 5. Точка 5 спроектируется на W в точку $5''$.

Проводим общую касательную плоскость справа к обоим цилиндрам. Эта плоскость будет параллельна плоскости W и будет содержать в себе по одной образующей каждого цилиндра.

Эти образующие пересекаются в точке 6, точка 6 проектируется на W в точку $6''$. Точки $5''$ и $6''$ совпадают и лежат на пересечении диагоналей квадрата $3'' 4'' 8'' 7''$.

На черт. 423 найдены еще две точки 1 и 2 пересечения образующей KL вертикального цилиндра с образующими MN и PQ горизонтального цилиндра.

Эти три образующие лежат в плоскости, параллельной плоскости W.

Так как $m''n''$ и $k''l''$ должны находиться на равных расстояниях от крайних образующих, то точка их пересечения $1''$ лежит на диагонали $4''$ $7''$ квадрата $3''$ $4''$ $8''$ $7''$. На том же основании точка $2''$ лежит на диагонали $3''$ $8''$.

Отсюда следует, что все точки сечения поверхностей цилиндров черт. 423 спроектируются на W в точки диагоналей $3''$ $8''$ и $4''$ $7''$ квадрата $3''$ $4''$ $8''$ $7''$. (Такой случай на практике мы имеем при пересечении двух труб с равными диаметрами).

На черт. 424 цилиндры черт. 423 изображены в косоугольных проекциях.

Для построения линии сечения мы пересекаем взаимно пары образующих в плоскостях параллельных плоскости W.

На чертеже показаны косоугольные проекции одной такой пары образующих KL и MN, которые пересекаются в точке 1.

Так же находим точку 2, и т. д.

На черт. 425 изображен второй экземпляр черт. 424.

На черт. 425_1 построено пересечение поверхности прямой четырехгранной призмы, стоящей своим основанием на H, с поверхностью цилиндра, имеющего основание на W.

Прежде всего ряд образующих цилиндра пересекаем с поверхностью призмы так, как это на чертеже показано для одной из образующих стрелками при определении точек $(7, 7', 7'')$ и $(8, 8', 8'')$. Перебрав ряд образующих, далее переходим к пересечению ребер призмы с поверхностью цилиндра.

Проекцию ребра призмы на W пересекаем с контуром проекции цилиндра в точках $1''$ и $2''$, которые проектируем на вертикальную проекцию взятого ребра призмы. Ход работы на черт. 425_1 показан стрелками.

На каждой грани призмы полученные точки соединяем плавной кривой.

На черт. 425_2 показан второй экземпляр чертежа 425_1.

На черт. 426 построено пересечение прямого кругового цилиндра с прямым круговым конусом.

Основание цилиндра лежит в плоскости H, а конуса — в плоскости, параллельной плоскости W.

Для построения пересечения их поверхностей мы берем ряд образующих конуса и пересекаем с поверхностью цилиндра.

Пересечение горизонтальной проекции образующей конуса с контуром горизонтальной проекции основания цилиндра будет горизонтальной проекцией точки пересечения образующей конуса с поверхностью цилиндра, а имея горизонтальную проекцию точки пересечения, не трудно найти простым проектированием остальные две проекции этой точки, что и показано на чертеже стрелками.

На черт. 427 имеем второй экземпляр черт. 426.

На черт. 428 построена линия сечения прямого кругового цилиндра с усеченным конусом.

Основание цилиндра лежит в плоскости H, а усеченного конуса—в плоскости, перпендикулярной к плоскости V.

Здесь не показан способ построения оснований усеченного конуса, что делается весьма просто, так как окружности оснований усеченного конуса на V будут проектироваться в прямые линии, а на H — в эллипсы, с большой осью, равной диаметру окружности основания, и малой осью, равной наименьшей горизонтальной проекции диаметра основания.

Берем ряд образующих усеченного конуса и их пересекаем с поверхностью цилиндра.

Для построения двух проекций какой-либо образующей усеченного конуса, мы предварительно находим вершину (s, s') воображаемого конуса, частью которого является данный усеченный конус. Точки нижнего основания соединяем с точкой (s, s').

На черт. 428 показано построение и пересечение с поверхностью цилиндра двух образующих $(m'n', mn)$ и $(p'q', pq)$ усеченного конуса.

Ход работы показан стрелками.

Искомыми точками будут точки $(5', 5)$ и $(6', 6)$.

Все остальные точки найдены таким же способом.

На черт. 429 показано пересечение прямого кругового цилиндра с прямым круговым конусом.

Основания их лежат в плоскости H.

Оси конуса и цилиндра лежат в плоскости, параллельной плоскости V, что дает нам симметричное сечение по отношению к этой плоскости.

Для получения сечения мы ряд образующих конуса пересекаем с поверхностью цилиндра, что делается, как мы видели, весьма просто.

Так получаем три проекции пересечения боковых поверхностей цилиндра и конуса.

Кроме того поверхность конуса пересекается с плоскостью верхнего основания цилиндра по окружности, которая на H спроектирована в виде небольшой окружности.

На черт. 430 изображен второй экземпляр черт. 429.

На черт. 430_1 в трех проекциях показан пример пересечения поверхности цилиндра с поверхностью пирамиды.

Прежде всего пересекаем ребра пирамиды с поверхностью цилиндра.

На черт. 430_1 все ребра пирамиды с поверхностью цилиндра пересекаются каждая в двух точках, за исключением переднего ребра пирамиды, которое, будучи касательным к цилиндру, с поверхностью цилиндра имеет только одну общую точку (1, $1'$, $1''$), способ нахождения которой на чертеже показан стрелками.

Далее на гранях пирамиды берем вспомогательные линии, проходящие через вершину пирамиды. Эти линии пересекаем с поверхностью цилиндра так, как это показано на чертеже для одной из таких прямых, которая пересекает поверхность цилиндра в точках (14, $14'$, $14''$) и (15, $15'$, $15''$).

На черт. 430_2 имеем второй экземпляр черт. 430_1.

На черт. 430_3 в трех проекциях имеем пересечение поверхности прямой призмы с поверхностью конуса. Основания призмы на W, а конуса на H.

Грани призмы взяты: одна параллельно H (она пересекает поверхность конуса по части окружности), другая параллельно V (она пересекает поверхность конуса по части гиперболы), третья грань призмы параллельна одной из образующих (она пересекает поверхность конуса по части параболы) и четвертая грань наклонена к плоскости H и V, которая пересекает поверхность конуса по части эллипса.

Мы прежде всего ряд образующих конуса пересекаем с поверхностью призмы так, как это на чертеже показано стрелками для точек (15, 15′, 15″) и (16, 16′ 16″). В остальных случаях мы поступаем аналогично.

Далее ребра призмы пересекаем с поверхностью конуса.

Чтобы ребро призмы пересечь с поверхностью конуса, мы через ребро призмы и вершину конуса проводим вспомогательную плоскость и ею пересекаем поверхность конуса по двум образующим. Эти образующие пересекаем со взятым ребром призмы в искомых точках. Такими точками на черт. 430_3 являются точки (5, 5′, 5″) и (6, 6′, 6″). Ход работы на чертеже показан стрелками.

На черт. 430_4 изображен второй экземпляр черт. 430_3.

На черт. 430_5 и 430_6 имеем развертки призмы и конуса с нанесенными на них линиями сечения этих поверхностей на черт. 430_3.

Точки, которые лежат на ребрах призмы, на развертку призмы заносим непосредственно на соответственное ребро (например, точки 1 и 2).

Для занесения на развертку призмы точек, лежащих на гранях призмы, мы на развертку призмы предварительно заносим вспомогательные прямые, на которых лежат заносимые точки, и уже после этого заносим самые точки (например, точки 9 и 10 черт. 430_5).

На развертку же конуса заносим точки при помощи вспомогательных прямых (см. черт. 430_6).

XXXI. Пересечение поверхности правильной прямой шестигранной призмы с поверхностью прямого кругового конуса и с поверхностью полушара.

На черт. 431 ряд образующих конуса пересекаем с поверхностью призмы, так, как это мы делали при пересечении прямой линии с поверхностью прямой призмы.

Так как вершина конуса взята на линии, соединяющей центры оснований призмы, то все грани призмы будут располагаться симметрично относительно оси конуса, а потому сечения всех граней будут одинаковы, и достаточно иметь сечение одной грани, чтобы легко построить сечения остальных граней.

Вертикальная проекция пересечения крайней образующей с крайним ребром получается непосредственным пересечением вертикальной проекции крайней образующей с вертикальной проекцией крайнего ребра призмы. Через эту точку проводим линию, параллельную оси проекций, до пересечения с проекциями боковых ребер призмы. Так получим проекции на V и W точек пересечения боковых ребер призмы с поверхностью конуса.

Для получения промежуточных точек находим точку (1, $1'$, $1''$) пересечения образующей (sm, $s'm'$).

Линия sm проходит через середину линии af, а потому точка 1 будет вертикальной проекцией высшей точки кривой сечения.

Через точку $1'$ проводим линию, параллельную оси проекций, и на ней будем иметь проекций высших точек сечения граней.

Далее находим промежуточную точку ($3'$, 3) сечения образующей конуса ($s'n'$, sn) с передней гранью призмы.

Горизонтальная проекция sn взятой образующей конуса проходит через точку, отстоящую от вершины шестиугольника на расстоянии одной четверти стороны шестиугольника.

Теперь имеется достаточное количество точек для проведения проекций сечения поверхности конуса с гранями призмы.

На черт. 432 в трех проекциях изображено пересечение поверхности полушара с поверхностью правильной, прямой шестигранной призмы.

Основание призмы лежит в плоскости H.

Центр полушара совпадает с центром основания призмы, а потому сечения боковых граней призмы с поверхностью полушара будут одинаковы и будут они дугами кругов.

Грани призмы на черт. 432 расположены так, что две из них параллельны плоскости V и сечения этих граней с поверхностью на V спроктируются в натуральную величину.

Проводим вспомогательную плоскость, совпадающую с передней гранью призмы. Она пересечет поверхность полушара по полуокружности, которая на V спроектируется в натуральную величину (диаметр ее будет $m'n'$, mn).

Часть этой полуокружности, проходящая в пределах передней грани призмы, будет являться сечением этой передней грани призмы с поверхностью полушара.

Проекция этой части полуокружности на чертеже начерчена сплошной дугой.

Проекция на V пересечения задней грани призмы с поверхностью полушара на V проектируется в такую же дугу.

Проекции этих линий на W будут небольшие отрезки прямых линий, что видно на черт. 432.

Для построения проекций линий сечения боковых граней призмы с поверхностью полушара мы проводим вспомогательную плоскость, параллельную плоскости V и через середины боковых сторон шестиугольника основания призмы. Эта вспомогательная плоскость пересечет полушар по полуокружности диаметра ($p'q'$, pq), а боковые грани по вертикальным линиям, проходящим по срединам граней. Точки пересечения этих вертикальных линий с окружностью дадут нам высшие точки сечений. Вертикальная проекция одной из таких точек будет точка $1'$.

Далее не трудно проекцию каждой дуги сечения провести по трем точкам, что и сделано на черт. 432.

Черт. 431 и 432 имеют практическое приложение при построении проекций гайки и шестигранной головки болта.

XXXII. Пересечение поверхности куба с поверхностью шара.

На черт. 433 работа исполнена в трех ортогональных проекциях.

Куб задан так, что его 4 боковых ребра перпендикулярны к плоскости W.

Таким образом две грани куба параллельны плоскости W, а остальные грани ее не параллельны ни H, ни V.

Сечения граней параллельных плоскости W с поверхностью шара будут окружности, которые на W спроектируются в натуральную величину, что и имеем на черт. 433 в виде небольших окружностей на плоскости W. Одна из них проведена сплошной линией, а другая — пунктиром, так как при проектировании на W одна из параллельных граней будет видима, а другая — невидима.

Для пересечения остальных граней куба с поверхностью шара прибегаем к помощи вспомогательных плоскостей.

Вспомогательные плоскости проводим параллельно плоскости V; ими мы пересекаем шар по окружностям, а грани куба — по линиям, параллельным оси ox, т. е. по линиям, совпадающим с проектирующимися на W линиями.

На чертеже показано нахождение двух точек 1 и 2 при помощи такой вспомогательной плоскости.

Сама вспомогательная плоскость не проведена, но показаны проекции сечения этой плоскости с поверхностью шара в виде пунктирной окружности на V и пунктирных линий в пределах проекций шара на H и W.

Проекцию окружности на W пересекаем с квадратом в точках $1''$ и $2''$ и их проектируем на пунктирную окружность в точки $1'$ и $2'$.

Далее находим 1 и 2 так, как это показано на чертеже стрелками.

Так, как получены проекции двух точек 1 и 2, получаем проекции и остальных точек и соединяем их плавной кривой в пределах каждой грани.

В нашем примере кроме этого следует провести вспомогательную плоскость через ребро BB_1 и параллельно плоскости V, чтобы получить сечение этого ребра с поверхностью шара.

Такая вспомогательная плоскость пересечет поверхность шара по окружности, проекция который на плоскости W будет параллельна оси oz и будет проходить через точку b^{v}, b^{v}.

Далее во всем поступаем так, как в первом случае.

На черт. 434 та же задача решена в косоугольных проекциях.

На чертеже показан способ нахождения косоугольных проекций точек 1 и 2.

Пересекаем куб и шар плоскостями, параллельными плоскости V.

Шар пересечется по окружностям, косоугольные проекции которых на чертеже имеются, боковые же грани куба пересекаются по линиям, параллельным оси ox. Пересечения этих линий с соответственными окружностями будут искомыми точками сечения. Соединив их плавной кривой на каждой грани, мы будем иметь косоугольные проекции сечения поверхности шара с кубом.

На черт. 435 и 436 изображены вторые экземпляры отдельно куба и шара черт. 434.

XXXIII. Пересечение цилиндра с шаром.

На черт. 437 работа решена в косоугольных проекциях.

Цилиндр взят прямой круговой с основанием на плоскости V.

Для построения точек пересечения берем на поверхности шара ряд окружностей, параллельных плоскости V (их косоугольные проекции изображаются окружностям без всякого искажения) и находим их вторые проекции на V.

Эти вторые проекции окружностей пересекаем с контуром основания цилиндра и полученные точки проектируем на соответственные косоугольные проекции окружностей.

На черт. 437 это показано для одной окружности, на которой найдена точка 13.

Вторая проекция на этой окружности показана пунктиром.

Пересекаем эту пунктирную окружность с контуром основания в двух точках, из которых одна обозначена через $13'$ (вторая проекция на V искомой точки).

Через точку $13'$ проводим линию, параллельную оси oy (проектирующую линию), до пересечении с косоугольной проекцией взятой окружности в точке 13.

Точка 13 есть косоугольная проекция одной из точек сечения.

Все остальные точки находятся таким же образом.

На черт. 438 изображен второй экземпляр черт. 437 и для большей наглядности верхнее основание цилиндра отвернуто.

На черт. 439 и 440 изображены вторые экземпляры цилиндра и шара черт. 437.

XXXIV. Пересечение поверхности конуса с поверхностью полушара.

На черт. 441 в трех проекциях даны прямой круговой конус и полушар. Центр полушара и ось конуса лежат в одной плоскости, параллельной плоскости V.

Для определения точек пересечения их поверхностей мы проводим ряд вспомогательных плоскостей, параллельных плоскости H, и ими пересекаем как конус, так и полушар по окружностям, которые на H спроектируются в натуральную величину.

Пересечение горизонтальных проекций этих окружностей даст нам горизонтальные проекции искомых точек.

Далее проектированием этих точек находим и остальные две проекции.

На чертеже показано нахождение таким способом точек: $(3, 3', 3'')$ и $(4, 4', 4'')$. Ход работы показан стрелками.

Таким способом находятся все точки, кроме точек $(1, 1', 1'')$ и $(2, 2', 2'')$, которые находятся помощью вспомогательной плоскости, проходящей через ось конуса и параллельной плоскости V.

Такая плоскость пересечет полушар по большой полуокружности, которая называется главным меридиональным сечением и проектируется на V в натуральную величину, а конус по равнобедренному треугольнику, который также на V спроектируется в натуральную величину.

В пересечении этих вертикальных проекций сечений будем иметь точки $1'$ и $2'$.

Точки $1'$ и $2'$ проектируем на H в точки 1 и 2 на диаметр, параллельный оси ox.

Далее проектированием находим точки $1''$ и $2''$.

Полученные точки сечения во всех трех проекциях соединяем плавной кривой и получаем три проекции искомого сечения. Невидимые части линий проводим пунктиром.

На черт. 442 имеем три проекции второго экземпляра черт. 441.

XXXV. Пересечение призмы с шаром.

На чертеже 443 построено пересечение поверхности шара с поверхностью призмы. Работа решена в косоугольных проекциях.

Прежде всего строим призму и шар в косоугольных проекциях, имея их в прямоугольных так, как это указано в ряде предыдущих примеров.

В виду того, что эта работа перевода из прямоугольных проекций в косоугольные нам уже хорошо знакома, то мы здесь не приводим ни прямоугольных проекций призмы и шара, ни способа построения их по косоугольному методу.

Для построения пересечения поверхностей шара и призмы мы вообразим сечения шара плоскостями, параллельными плоскости V. Это будут окружности и, как уже известно нам, будут изображаться в натуральную величину.

Вторые проекции этих окружностей будут линии, параллельные оси ox, одна из которых на чертеже 443 показана в виде линии mn. Вторую проекцию каждой окружности пересекаем с контуром основания призмы и полученные точки проектируем на соответственные косоугольные проекции вспомогательных окружностей.

На чертеже показано построение точек 5 и 6. Все остальные точки получаются аналогично. В каждой грани призмы найденные точки соединяем плавной кривой.

Все точки, лежащие на грани призмы, получаются указанным выше способом. Для пересечения же ребра призмы с поверхностью шара мы через это ребро воображаем плоскость, параллельную плоскости V, и ею пересекаем поверхность шара по окружности.

Вторая проекция на H такой окружности проходит через основание взятого ребра.

По второй проекции окружности строим косоугольную проекцию и ею пересекаем косоугольную проекцию взятого ребра.

На чертеже 443 это построение не показано, предполагая, что в конце курса учащийся его сам может исполнить.

XXXVI. Взаимное пересечение поверхностей двух шаров.

На чертеже 445 показано пересечение поверхностей двух шаров. Работа решена в косоугольных проекциях.

Воображаем ряд плоскостей, параллельных плоскости V. Эти плоскости пересекают каждый шар по окружности. Следовательно в каждой такой вспомогательной плоскости лежат по две окружности, из которых одна лежит на поверхности одного шара, а другая — на поверхности другого шара.

Эти окружности могут пересекаться в двух точках, которые и будут лежать на искомой линии сечения поверхностей заданных шаров.

На чертеже 445 в виде примера таких точек показаны точки 5 и 6. Для этих точек показаны вторые проекции на V (точки $5'$ и $6'$), которые лежат в точках пересечения вторых проекций на V указанных выше окружностей. На чертеже ход работы показан стрелками.

Подобно точкам 5 и 6 найдены и все остальные точки. Полученные точки соединены плавной кривой.

Далее следует обратить внимание на то, что не всегда обе окружности, лежащие в одной вспомогательной плоскости, пересекаются в двух точках. Эти окружности в двух случаях касаются и в ряде случаев совсем не пересекаются.

Чтобы выяснить вспомогательные плоскости, в которых окружности касаются, пересекаются либо не пересекаются, надо заданные шары изобразить в двух прямоугольных проекциях и через точки пересечения контуров горизонтальных проекций шаров провести R_h — горизонтальный след вспомогательной плоскости, параллельной плоскости V.

В этой плоскости будут лежать соприкасающиеся круги. Эта плоскость R будет границей для вспомогательных плоскостей, в которых окружности пересекаются (по одну сторону от плоскости R) и для вспомогательных плоскостей, в которых окружности не пересекаются (по другую сторону плоскости R).

XXXVII. Построение взаимного соприкосновения шаров.

На чертеже 447 построены в трех проекциях четыре шара равных радиусов, взаимно соприкасающиеся. Три шара лежат на плоскости H, а четвертый лежит на них.

Положим, дан радиус этих шаров. Задача сводится к построению проекций четырех центров в точках (a, a', a''), $(в, в'; в'')$, (c, c', c'') и (s, s', s'').

Все эти центры лежат в вершинах правильной, прямой трехгранной пирамиды $SABC$, основание которой есть равносторонний треугольник ABC, лежащий в плоскости, параллельной плоскости H и на высоте радиуса шара. Все боковые ребра и стороны основания должны быть равны между собою и равна каждая двум радиусам.

Работу построения этой пирамиды начинаем с горизонтальной проекции, которую строим в виде равностороннего треугольника *авс* с центром в точке *S*. Сторону *ав* берем перпендикулярно к оси *ох*, что значительно упростит дальнейшее построение, так как при этом одно из боковых ребер пирамиды на *V* будет проектироваться в натуральную величину.

Вертикальную проекцию основания проводим параллельно оси *ох* на высоте радиуса шара. Так получаем a', $в'$, c'. Из точки *s* проводим проектирующую линию и ее засекаем дугою радиуса, равного диаметру шара из точки s'. Так получаем вертикальную проекцию (s') вершины пирамиды.

По найденным двум проекциям *s a в c* и s' a' $в'$ c' пирамиды, находим третью проекцию *s* a'' $в''$ c''. Приняв точки *s*, *a*, *в*, *c*; s', a', $в'$, c'; s'', a'', $в''$, c'' за центры, мы строим на чертеже 447 проекции искомых шаров.

На чертеже 448 имеем второй экземпляр чертежа 447.

На чертежах 449 и 450 имеем первый и второй экземпляры той же работы, но исполненной в косоугольных проекциях.

Работа исполнена обычным способом построения косоугольных проекций по прямоугольным.

ОГЛАВЛЕНИЕ.