Б. С. ЗЕРНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1932

Б. С. ЗЕРНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА * 1932 * ЛЕНИНГРАД

ТТ 12-5-2

Читатель! Сообщите отзыв об этой книге (Ваши замечания о ее недостатках и пожелания об изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Мясницкая, д. 20, Государственное технико-теоретическое издательство (в секцию организационно-массовой работы).

Редакционную работу по этой книге провел Г. А. Вольперт. Издание оформила Н. И. Москвичева. Наблюдал за выпуском Е. М. Богданов. Рукопись сдана в производство 30/VII 1932 г., листы подписаны к печати 1/XII 1932 г., книга вышла в свет в декабре 1932 г., в количестве 20 000 экз., на бумаге формата 62 × 88. Печатных знаков в листе 48 6 0., листов в книге 10¾. Зак. № 3515. ГТТИ № 621. Уполномоченный Главлита Б-21333.

1-я типография Огиза РСФСР „Образцовая“. Москва, Валовая, 28.

СОДЕРЖАНИЕ

ДИНАМИКА

Стр.

I. Принцип возможных перемещений 5
II. Теорема д'Аламбера. Основное уравнение динамики 33
III. Теорема живых сил 53
IV. Теорема о движении центра тяжести системы 72
V. Момент инерции. Теорема о моментах количества движения (теорема площадей). Реакции оси 82
VI. Движение тела параллельно плоскости (плоская задача) 105
VII. Интегрирование диференциальных уравнений прямолинейного движения точки 115
VIII. Криволинейное движение точки 140
IX. Движение точки по заданной линии 148
X. Поверхности уровня 154
XI. Удар тел 158

Д И Н А М И К А

I. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

Не задаваясь целью повторить вывод условия равновесия в форме Лагранжа, напомним только текст его:

„Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы сумма работ сил, приложенных к системе, равнялась нулю или была отрицательна для каждого бесконечно малого возможного перемещения системы“.

Таким образом, приступая к разрешению того или иного вопроса о равновесии, необходимо выяснить, какие перемещения возможны для системы, и сколькими параметрами можно определить ее положение; от изменения этих параметров и будут зависеть перемещения.

Если представить координаты точек приложения внешних сил как функции этих параметров, то для составления выражения работы внешних сил можно воспользоваться либо выражением работы в виде:

$$F\,\delta s\cos(F, \delta s),$$

либо выражением:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z.$$

Здесь F — сила, δs — возможное перемещение точки ее приложения, X, Y, Z — проекции силы F на оси координат, δx, δy, δz — возможные изменения координат точки приложения силы.

В случае, если к телу приложена пара сил, будем называть работой пары при перемещении тела сумму работ сил, составляющих пару.

Если тело совершит поступательное перемещение δs, то работа T пары P, P' будет:

$$T = P\,\delta s\cos(P, \delta s) + P'\,\delta s\cos(P', \delta s);$$

ввиду параллельности P и P' имеем:

$$\cos(P, \delta s) = -\cos(P', \delta s),$$

и кроме того

$$P = P',$$

очевидно

$$T = 0.$$

Черт. 1.

Если тело совершит поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг оси z, перпендикулярной плоскости пары, то, расположив пару так, чтобы одна из сил, именно P', имела точку приложения O на оси вращения (черт. 1), имеем:

$$T = P\,\delta s = Pl\,\delta\varphi = L\delta\varphi;$$

здесь l — плечо пары, L — ее линейный момент, т. е. **работа равна произведению момента пары на угловое перемещение тела.**

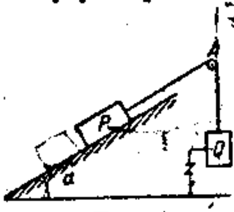
Если тело совершит поворот вокруг оси, параллельной плоскости пары, то, переместив пару в плоскость, проходящую через ось, расположим ее так, чтобы обе точки приложения лежали на оси; очевидно, в этом случае работа пары будет равна нулю.

Если тело совершит поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, как-либо расположенной относительно плоскости пары, то, предположив, что линейный момент ее L образует с осью вращения угол θ, разложим пару на две пары: первую с моментом $L\cos\theta$, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и вторую с моментом $L\sin\theta$, лежащую в плоскости, параллельной оси вращения. Первая дает работу T, равную $L\cos\theta\delta\varphi$, вторая не дает работы.

Итак в этом случае работа пары равна проекции линейного момента пары на ось вращения, умноженной на угловое перемещение тела.

Выяснив, как составляется выражение работы сил, действующих на систему, дадим ряд примеров применения метода Лагранжа.

Задача 1. На гладкой наклонной плоскости лежит груз P, удерживаемый нитью, перекинутой через блок A, и несущий на конце груз Q. При каком наклоне α плоскости к горизонту грузы будут в равновесии (черт. 2)?



Черт. 2.

Единственным возможным перемещением системы будет перемещение, при котором груз Q поднимается или опускается.

Параметром, определяющим положение системы, можно считать ординату z центра тяжести груза Q, откладываемую от произвольного начала.

Изменим эту ординату на бесконечно-малую величину δz, тогда работа силы Q будет $-Q\delta z$, а силы P представится так: $P\sin\alpha\delta z$. Сумма работ при равновесии должна равняться нулю:

$$-Q\delta z + P\sin\alpha\,\delta z = 0,$$

или

$$\delta z(P\sin\alpha - Q) = 0.$$

δz — величина произвольная, вообще не равная нулю, следовательно,

$$P\sin\alpha - Q = 0,$$

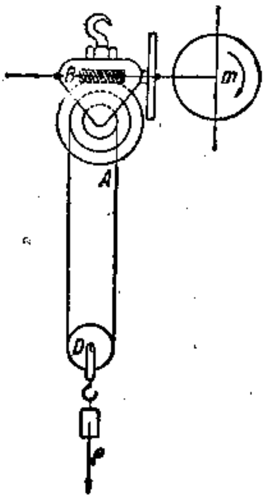
откуда

$$\sin\alpha = \frac{Q}{P}.$$

Задача 2. Диференциальный ворот A приводится в движение червяком B. Число зубцов на шестерне ворота N, радиусы шкивов R и r. К маховику C приложена пара с моментом m. Подвижной блок D несет груз P. Найти соотношение между m и P при равновесии (черт. 3).

Пусть маховик C повернулся на угол $\delta\varphi$. Работа пары при этом будет равна $m\delta\varphi$. Шестерня ворота повернется на угол $\frac{\delta\varphi}{N}$. Груз P переместится на длину $\frac{R-r}{2}\frac{\delta\varphi}{N}$ и совершит работу:

$$-P\frac{R-r}{2}\frac{\delta\varphi}{N}.$$


Черт. 3.

Сумма работ при равновесии должна равняться нулю:

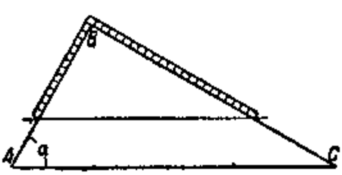
$$\delta\varphi\left(\frac{R-r}{2}\frac{P}{N}-m\right)=0;$$

$\delta\varphi\neq 0$, следовательно

$$m=\frac{P}{2N}(R-r).$$

Задача 3. Прямоугольный клин ABC положен гипотенузой на горизонтальный пол; через верхнее ребро клина перекинута тяжелая однородная цепочка длиной l. Показать, что при равновесии концы цепочки лежат на одной горизонтали (черт. 4).

Назовем один из острых углов клина через α. Пусть на левой щеке поместилась часть цепочки длиной s, на правой $l-s$. Дадим цепочке возможное перемещение δs по клину, тогда сила веса левой части совершит работу $-s\sin\alpha\,\gamma\delta s$, правой части $(l-s)\cos\alpha\,\gamma\,\delta s$, здесь γ вес единицы длины цепочки. Условие равновесия цепочки напишется так:


Черт. 4.

$$-s\sin\alpha\,\delta s+(l-s)\cos\alpha\,\delta s=0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l-s}{s}=\frac{BC}{AB},$$

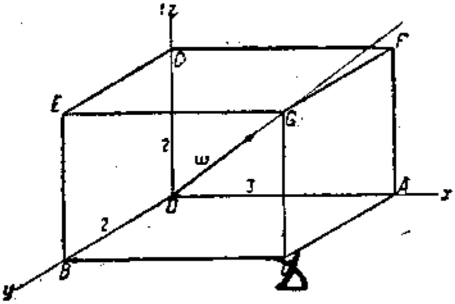
что и требовалось доказать.

Задача 4. Задан прямоугольный параллелепипед $OADBCFGE$ тремя измерениями: $OA=3$, $OB=2$, $OC=2$.

Параллелепипед поворачивается вокруг оси OG на угол $\delta\varphi$. Какую работу совершит при этом сила, данная по величине и направлению отрезком DB?

Обозначим через ω угловую скорость, с которой совершается возможное перемещение; пусть δt соответствующий промежуток времени.

Разложим вектор ω по трем осям координат; проекции его пусть будут p, q, r. При вращении параллелепипеда вокруг оси x со скоростью p на угол $p\delta t$ сила DB, перпендикулярная к возможному перемещению, работы не дает. Равным образом при вращении вокруг оси y сила DB не даст работы, так как пересекает ось и перпендикулярна к возможному перемещению (черт. 5).



Черт. 5.

Перенесем силу DB в точку B. При повороте параллелепипеда вокруг оси z точка B совершит перемещение $OBr\delta t$, совпадающее по направлению с силой DB. Сила при этом совершит работу T,

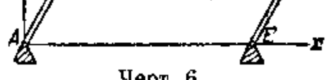
$$T=DB\cdot OD\,r\delta t=3\cdot 2\,r\delta t;$$

но

$$r=\frac{2\omega}{\sqrt{2^2+2^2+3^2}}=\frac{2\omega}{\sqrt{17}};$$

очевидно

$$T=\frac{12}{\sqrt{17}}\,\omega\delta t=\frac{12}{\sqrt{17}}\,\delta\varphi.$$



Черт. 6.

Задача 5. В представленном на черт. 6 механизме фигура $ABDE$ — параллелограм, составленный из стержней, соединенных шарнирами, из которых два — A и E неподвижны. Стержень ABC представляет одно целое. В точке B к механизму приложена сила Q, направленная вдоль стержня BD.

К ползушке F приложена сила P, перпендикулярная к BD. Весом частей пренебрегаем. Установить, какова связь между силами P и Q при равновесии.

Примем за начало системы прямоугольных координат, обычным способом расположенных, точку A. Положение механизма будем определять углом BAE, обозначив его через φ. Длину BA назовем через a. Теперь координаты точек B и F будут:

$$x_B = a\cos\varphi;\ y_B = a\sin\varphi;$$
$$x_F = AB\cos\varphi + BF;\ y_F = a\sin\varphi.$$

Проекции сил, приложенных в этих точках, будут:

$$X_B = -Q;\ Y_B = 0;$$
$$X_F = 0;\qquad Y_F = -P.$$

Дадим углу φ приращение $\delta\varphi$, тогда работа сил Q и P представится так:

$$X_B\delta(a\cos\varphi) + Y_F\delta(a\sin\varphi);$$

работа эта должна равняться нулю. Подставляя значения проекций сил, имеем:

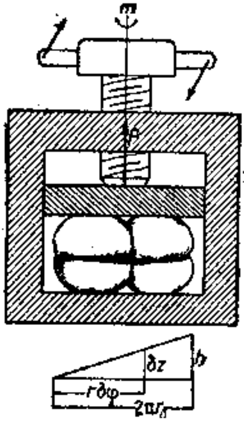
$$(Q\,a\sin\varphi - P\,a\cos\varphi)\,\delta\varphi = 0.$$

Откуда, приравняв нулю выражение, стоящее в скобках, имеем:

$$Q\sin\varphi - P\cos\varphi = 0,$$

или

$$\frac{P}{Q} = \operatorname{tg}\varphi.$$



Черт. 7.

Задача 6. Каков должен быть шаг винта у винтового пресса, если пара момента m, действуя на головку винта, может вызвать давление вдоль оси винта в P *кг*? Плоскость пары перпендикулярна к оси винта (черт. 7).

Напишем условия равновесия винта под действием пары с моментом m и реакции P; для этого дадим винту угловое перемещение $\delta\varphi$, тогда вдоль оси он переместится на длину δs, при этом:

$$\delta s = h\cdot\frac{\delta\varphi}{2\pi},$$

здесь h есть шаг винта. Кроме указанных выше сил на винт действуют силы реакции гайки, но они не дают работы, так как при отсутствии трения перпендикулярны к соприкасающимся поверхностям. Условие равновесия будет:

$$m\delta\varphi - P\,\delta s = 0,$$

или

$$m-P\frac{h}{2\pi}=0,$$

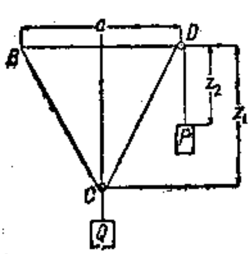
откуда

$$h=2\pi\frac{m}{P}.$$

На чертеже показана боковая поверхность цилиндра, на которой нарезан винт, развернутая на плоскости. Радиус сечения цилиндра, перпендикулярного оси, обозначен через r.

Задача 7. Один из концов нити закреплен в точке B. Нить несет подвижной блок C и перекинута через неподвижный блок D. Размеры блоков будем считать исчезающе малыми; ось блока D расположена на одном уровне с точкой B. К обойме подвижного блока прикреплен груз Q. Конец нити нагружен грузом P. Расстояние $BD=a$. Найти положение равновесия системы (черт. 8).

Назовем через l длину нити, через z_1 — расстояние оси подвижного блока от горизонтальной прямой BD, через z_2 — расстояние конца нити от той же прямой. Очевидно



Черт. 8.

$$l=2\sqrt{z_1^2+\frac{a^2}{4}}+z_2,$$

или

$$z_2=l-2\sqrt{z_1^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Дадим грузу P возможное перемещение δz_2 по вертикали, тогда z_1 получит приращение δz_1.

$$\delta z_2=-2\frac{z_1\,\delta z_1}{\sqrt{z_1^2+\frac{a^2}{4}}}.$$

Работа T сил P и Q представится так:

$$T=Q\,\delta z_1-2P\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+\frac{a^2}{4}}}\delta z_1;$$

приравняв T нулю, имеем:

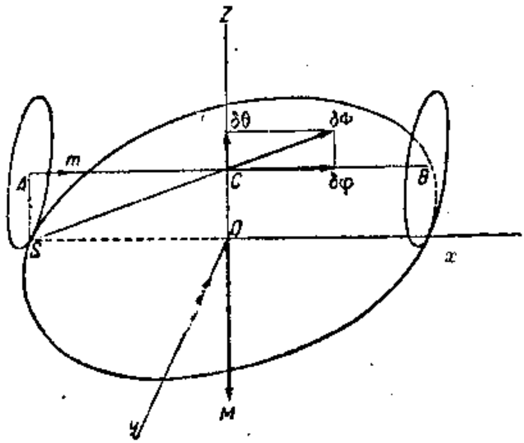
$$Q-2P\sin\varphi=0.$$

Здесь φ угол DBC:

$$\sin\varphi=\frac{Q}{2P}.$$

Задача 8. На горизонтальной оси AB надеты два плоских бегуна. Через середину C оси AB проходит вертикальная ось z, вокруг которой ось AB может вращаться; при этом движении оба бегуна катятся без скольжения по плоскости xoy. К бегуну A приложена пара с моментом m, лежащая в плоскости бегуна, к оси AB — другая пара с моментом M, лежащая в горизонтальной плоскости. Определить, при каком соотношении между m и M система будет находиться в равновесии (черт. 9).

Дадим бегуну A бесконечно-малое угловое перемещение $\delta\Phi$ вокруг мгновенной оси SC, проходящей через середину C оси AB и точку прикосновения бегуна к плоскости xoy, которая обозначена через S. Отложив это перемещение вдоль мгновенной оси от точки C, разложим его на два угловых перемещения: одно $\delta\theta$ вокруг оси Cz и другое $\delta\varphi$ вокруг оси AB. Вектор m перпендикулярен к оси Cz, следовательно пара, соответствующая ему, совершит работу только при вращении вокруг оси AB, равную $m\delta\varphi$. Вместе с перемещением точки A вокруг оси Cz ось AB повернется вокруг оси Cz на угол $\delta\theta$ так, что $r\delta\varphi$ будет равно $R\delta\theta$, вторая пара совершит при этом отрицательную работу $-M\delta\theta$. Сумма работ должна равняться нулю:



Черт. 9.

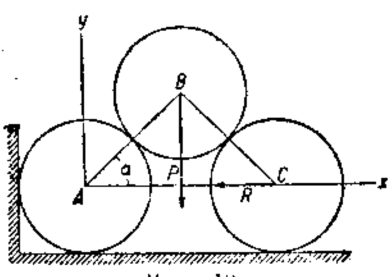
$$m\delta\varphi - M\delta\theta = 0;$$

но

$$r\delta\varphi - R\delta\theta = 0,$$

следовательно

$$\frac{m}{M} = \frac{r}{R}.$$



Черт. 10.

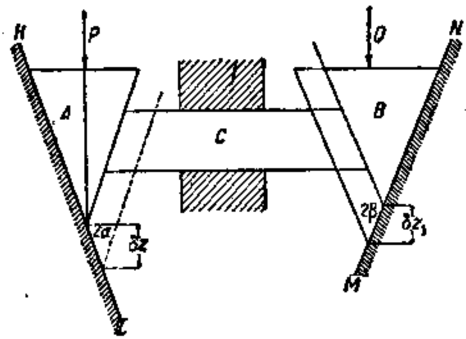
Задача 9. У стены здания положены три одинаковых чугунных трубы, как указано на черт. 10. Какую горизонтальную силу R надо приложить к правой нижней трубе, чтобы удержать трубы в равновесии? Сила R должна пересекать ось трубы. Радиус сечения труб r, вес каждой трубы P, линии, соединяющие центры сечений, образуют равнобедренный треугольник с углом a при основании.

Предположим, что A, B и C суть центры тяжести труб. Силу R можно считать приложенной в точке C. Вес верхней трубы приложен в точке B.

Если правой нижней трубе сообщить возможное перемещение вдоль оси x, то работу совершат только две указанные силы P и R, поэтому координируем только точки их приложения.

Координаты точки B будут $2r\cos\alpha$, $2r\sin\alpha$; координаты точки C — $4r\cos\alpha$ и 0.

Работа сил P и R представится так:



Черт. 11.

$$-R\delta(4r\cos\alpha) - P\delta(2r\sin\alpha),$$

работа эта должна равняться нулю:

$$2R\sin\alpha\,\delta\alpha - P\cos\alpha\,\delta\alpha = 0,$$

откуда при $\delta\alpha \neq 0$:

$$2R\sin\alpha = P\cos\alpha,$$

$$R = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Задача 10. На двух наклонных плоскостях KL и MN расположены два равнобоких клина A и B. Их линейные углы при вершине равны 2α и 2β. Между клиньями вставлена горизонтальная распорка C, перемещающаяся в неподвижной прорези. На клин A действует вертикальная сила P. Какую вертикальную силу Q надо приложить к клину B, чтобы вся система была в равновесии (черт. 11)?

Если клину A дать возможное перемещение по вертикали δz, то распорка C сместится по горизонтальному направлению на величину $2\delta z\operatorname{tg}\alpha$; клин B поднимется на величину δz_1, причем

$$\delta z_1 = \delta z\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Сумма работ сил P и Q должна равняться нулю:

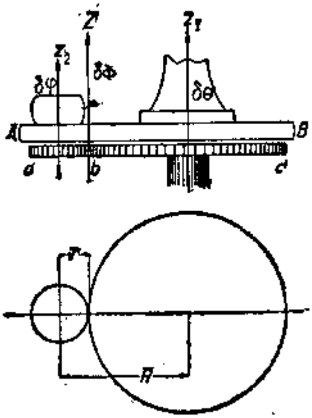
$$P\delta z - Q\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\,\delta z = 0;$$

сокращая на δz, имеем:

$$Q = P\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Задача 11. Кран расположен на платформе AB, вращающейся вокруг оси z_1. Чтобы вращать платформу, на ней имеется мотор, его ось z_2. На оси мотора насажена шестерня ab, входящая в зацепление с неподвижной шестерней bc, насаженной на ось z_1. Z—мгновенная ось вращения шестерни ab. Расстояние между осями указано в плане. Вращающий момент мотора m. Определить момент пары M, которую надо приложить к платформе, чтобы уравновесить действие мотора (черт. 12).

Обозначим возможное угловое перемещение якоря мотора относительно платформы через $\delta\varphi$, перемещение платформы вокруг оси z_1,—через $\delta\Theta$, перемещение якоря и шестерни ab вокруг мгновенной оси Z—через $\delta\Phi$, отложим эти векторы вдоль по осям z_2, z_1 и Z, тогда



Черт. 12.

$$\delta\Phi = \delta\varphi + \delta\Theta,\ r\delta\varphi = (R - r)\delta\Theta.$$

Сумма работ при возможном перемещении должна быть равна нулю:

$$m\delta\varphi - M\delta\Theta = 0,$$

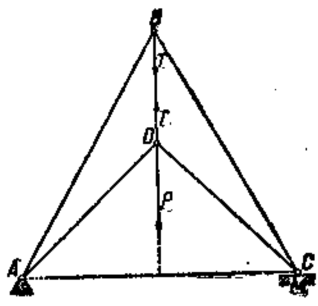
откуда

$$M = m\frac{R-r}{r}.$$

Задача 12. Плоская невесомая стержневая ферма $ABCD$ (черт. 13) расположена в вертикальной плоскости и нагружена вертикальной силой P, приложенной в узле D. Узел A закреплен в опоре неподвижно; узел C может перемещаться по горизонтальной плите M. Линия AC горизонтальна. Длины стержней удовлетворяют условию:

$$AB = BC = AC = a,\ AD = DC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Определить напряжение стержня BD.



Черт. 13.

Удалим стержень BD и заменим его действие на ферму двумя равными силами T, приложенными в узлах B и D.

Определим величину силы T в предположении, что ферма деформировалась и находится в состоянии равновесия, причем угол BAC равен φ, а DAC равен Θ.

Ордината точки B, считая от оси AC, будет $y_1 = a\sin\varphi$, точки D — $y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\Theta$.

Дадим теперь узлу C возможное перемещение так, что углы φ и θ получат приращение $\delta\varphi$ и $\delta\theta$; при этом суммы работ всех сил должны равняться нулю; заметим, что сила реакции в правой опоре перпендикулярна к возможному перемещению узла:

$$-T\delta y_1 + (T-P)\delta y_2 = 0;$$

но

$$\delta y_1 = a\cos\varphi\delta\varphi,\ \delta y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta\delta\theta,$$

а потому

$$T\cos\varphi\delta\varphi = \frac{T-P}{\sqrt{2}}\cos\theta\delta\theta.$$

Параметры θ и φ связаны уравнением:

$$a\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta,$$

следовательно

$$-\sin\varphi\delta\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\delta\theta.$$

Разделив почленно уравнения

$$T\cos\varphi\delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(T-P)\cos\theta\delta\theta,$$

$$\sin\varphi\delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\delta\theta,$$

получим уравнение

$$T\operatorname{ctg}\varphi = (T-P)\operatorname{ctg}\theta$$

для определения T.

Если при равновесии форма фермы такова, что

$$\varphi = \frac{\pi}{3},\ \theta = \frac{\pi}{4},$$

то

$$\frac{T}{\sqrt{3}} = T - P,$$

или

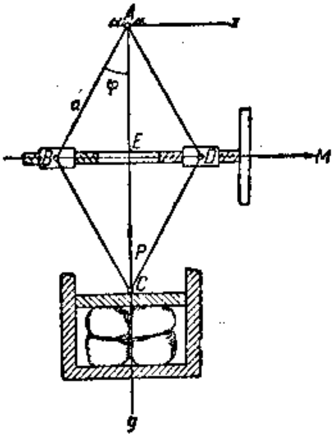
$$T = \frac{P\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

Задача 13. На рукоять коленчатого пресса (черт. 14) действует пара, линейный момент которой представляется вектором M; определить силу давления пресса P на прессуемый товар.

Фигура $ABCD$ — параллелограм.

Выберем оси координат, как указано на чертеже.

Пусть $AB = a$, $BAE = \varphi$, ордината точки C — $y_1 = 2a\cos\varphi$; абсцисса точки D — $x_2 = a\sin\varphi$; шаг винта — h. Если повернуть рукоятку пресса на угол $\partial\theta$ так, чтобы момент M дал положительную работу, то гайка D переместится на величину $\partial x_2 = -\frac{h}{2\pi}\partial\theta$; ту же величину можно написать иначе, именно: $\partial x_2 = a\cos\varphi\partial\varphi$; перед ней не стоит знака минус, но угол $\partial\varphi$, соответствующий положительной работе момента M, отрицательный. Очевидно



Черт. 14.

$$-\frac{h}{2\pi}\partial\theta = a\cos\varphi\partial\varphi,$$

или

$$\partial\theta = -\frac{2\pi a}{h}\cos\varphi\,\partial\varphi.$$

Точка C переместится на величину $\partial y_1 = -2a\sin\varphi\partial\varphi$. Реакция $-P$ совершит работу $-P\partial y_1$.

Сумма работ при возможном перемещении должна равняться нулю

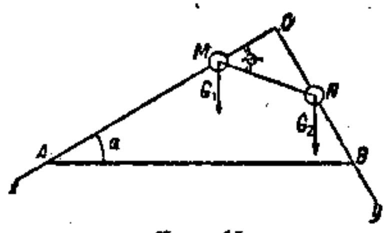
$$M\partial\theta - P\partial y_1 = 0,$$

или

$$-M\frac{2\pi}{h}\cos\varphi\partial\varphi + 2P\sin\varphi\partial\varphi = 0;$$

но $\partial\varphi \neq 0$, следовательно

$$P = M\frac{\pi}{h}\operatorname{ctg}\varphi.$$



Черт. 15.

Задача 14. По сторонам AO и BO прямоугольного треугольника AOB, расположенного в вертикальной плоскости, могут скользить без трения два шарика M и N, имеющие веса G_1 и G_2 и связанные между собой нерастяжимым стержнем (черт. 15). Угол $OAB = a$. Найти величину угла $OMN = \phi$ при равновесии.

Примем катеты AO и BO за оси координат. Координаты центров шариков обозначим x_1, y_1 для M и x_2, y_2 для N. Пусть $MN = a$, тогда

$$x_1 = a\cos\phi,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = a\sin\phi.$$

Проекции весов на оси координат будут:

$$X_1 = G_1 \sin\alpha,\ Y_1 = G_1 \cos\alpha;\ X_2 = G_2 \sin\alpha,\ Y_2 = G_2 \cos\alpha$$

Возможные изменения координат:

$$\delta x_1 = -a \sin\psi\delta\psi,\ \delta y_1 = 0,\ \delta x_2 = 0,\ \delta y_2 = a\cos\psi\delta\psi.$$

Работа сил G_1 и G_2 при возможном перемещении системы равна нулю:

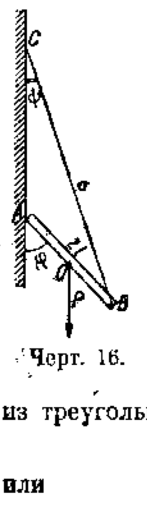
$$-G_1 \sin\alpha \cdot a \sin\psi\delta\psi + G_2 \cos\alpha \cdot a \cos\psi\delta\psi = 0;$$

сокращая на $\delta\psi$, имеем:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{G_2}{G_1}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Задача 15. Однородный тяжелый брусок $AB = 2l$ опирается концом A на вертикальную гладкую стену, а за конец B удерживается в равновесии нитью $BC = a$, которая укреплена в точке C. Найти зависимость между углами φ и ψ при равновесии (черт. 16).

Если заменить связи силами, то очевидно реакция в точке A и натяжение нити в точке B будут перпендикулярны к возможным перемещениям концов стержня и работы при этих перемещениях не совершают. Обозначим через z вертикальное расстояние центра тяжести O бруска AB от точки C, тогда при возможных перемещениях бруска работа его веса P будет $P\delta z$ и должна равняться нулю, но $P \neq 0$, следовательно $\delta z = 0$. Проектируя ломаную CBO на вертикаль, имеем:



Черт. 16.

$$z = a\cos\psi - l\cos\varphi,$$

или, диференцируя:

$$\delta z = -a\sin\psi\delta\psi + l\sin\varphi\delta\varphi = 0,$$

$$a\sin\psi\delta\psi = l\sin\varphi\delta\varphi; \tag{1}$$

из треугольника ACB следует:

$$a\sin\psi = 2l\sin\varphi,$$

или

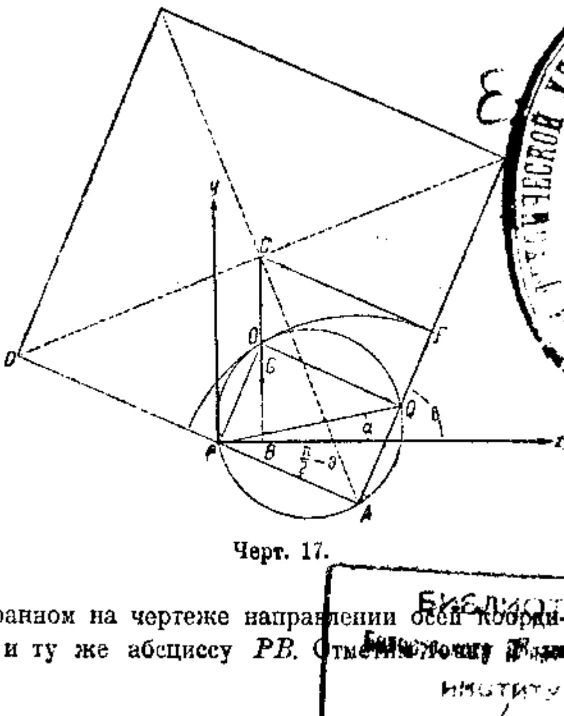
$$a\cos\psi\delta\psi = 2l\cos\varphi\delta\varphi. \tag{2}$$

Деля почленно уравнение (1) на (2), получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\psi.$$

Задача 16. Квадратная пластинка DE поддерживается в вертикальном положении двумя точками P и Q, не лежащими на одной горизонтали и отстоящими друг от друга на расстоянии a, равном половине стороны квадрата. Определить, при каком соотношении между углами α и ϑ квадрат будет в равновесии. Угол ϑ образован стороной AE с горизонтом, угол α — линией PQ с горизонтом (черт. 17).

Силы реакции неподвижных точек P и Q перпендикулярны к сторонам квадрата, на них опирающимся. Возможные перемещения квадрата сводятся к вращению вокруг мгновенного центра O, найденного пересечением прямых PO и QO, перпендикулярных к AD и AE. При этих возможных перемещениях сумма работ реакций и силы веса должна равняться нулю. Сумма работ реакций обращается в нуль, так как перемещения и реакции друг к другу перпендикулярны. Чтобы и работа силы веса обратилась в нуль, возможное перемещение центра тяжести C должно быть горизонтально, т. е. точки O и C должны лежать на одной вертикальной прямой и при выбранном на чертеже направлении осей координат должны иметь одну и ту же абсциссу PB. Отметим точку F на середине стороны AE.



Черт. 17.

Очевидно:

$$PB = \text{пр}_x PO = \text{пр}_x PA + \text{пр}_x AF - \text{пр}_x OF,$$

$$a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \vartheta\right) \cos\vartheta = a \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \vartheta\right) \sin\vartheta + a\cos\vartheta - a\sin\vartheta.$$

$$\cos(\vartheta - \alpha)\cos\vartheta = \sin(\vartheta - \alpha)\sin\vartheta + \cos\vartheta - \sin\vartheta,$$

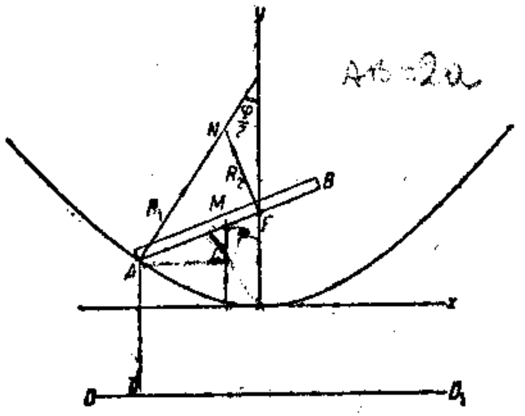
$$\cos(2\vartheta - \alpha) = \cos\vartheta - \sin\vartheta.$$

Если задан угол ϑ, то α легко определяется.

Указанные на чертеже окружности представляют подвижную и неподвижную полоиды.

Задача 17. Стержень $AB = 2a$, опирающийся концом A на внутреннюю сторону параболы ($x^2 = 2py$), имеет еще точку опоры в ее фокусе F, вес стержня G (черт. 18). Найти в положении равновесия величину угла φ между стержнем и осью параболы [1]).

Реакция в точке A нормальна к возможному перемещению конца A. Реакция в точке B нормальна к стержню AB. Возможное перемещение той точки стержня, которая совпадает с фокусом F, направлено по AB.



Черт. 18.

Если стержень находится в состоянии равновесия, то работа всех сил R_1, R_2, G при возможном перемещении стержня равна нулю.

Реакции R_1 и R_2 работы не совершают. Сила веса не нуль, следовательно возможное перемещение центра тяжести M горизонтально: $\delta\bar{y} = 0$. Отложим ординату центра тяжести $\bar{y}$ вниз от фокуса, тогда

$$\bar{y} = (\rho - a)\cos\varphi = \left(\frac{p}{1+\cos\varphi} - a\right)\cos\varphi;$$

диференцируя, имеем:

$$\left[\frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}\cos\varphi - \left(\frac{p}{1+\cos\varphi} - a\right)\sin\varphi\right]\delta\varphi = 0,$$

или, принимая во внимание, что $\delta\varphi \neq 0$:

$$p\sin\varphi\cos\varphi - p\sin\varphi(1+\cos\varphi) + a\sin\varphi(1+\cos\varphi)^2 = 0,$$

или

$$\left(4a\cos^4\frac{\varphi}{2} - p\right)\sin\varphi = 0,$$

откуда два решения:

$$\sin\varphi_1 = 0; \ \cos^4\frac{\varphi_2}{2} = \frac{p}{4a}.$$

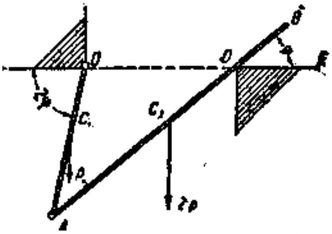
---

[1]) Примем фокус F за полюс полярной системы координат, прямую FO—за полярную ось, амплитуду φ будем откладывать от FO по стрелке часов, радиус-вектор AF обозначим через ρ. Уравнение параболы в полярных координатах получим так: если DD_1 директриса, то $AF = AC$, или $\rho\cos\varphi = p - \rho$:

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi}.$$

Задача 18. Два тяжёлых стержня OA $(=a)$ и AB, из которых последний вдвое длиннее и тяжелее первого, соединены в точке A шарниром (черт. 19). Первый стержень может вращаться около неподвижной точки O, второй опирается о край D стола, расположенного так, что линия OD горизонтальна и $OD=OA$. Найти угол $BDE=\varphi$ при равновесии.

Обозначим через z_1 и z_2 расстояния центров тяжести стержней C_1 и C_2 от линии OD. Пусть веса стержней будут обозначены через p и $2p$. Рассуждения, подобные тем, которые изложены в предыдущей задаче, приводят к заключению, что работа сил p и $2p$ при возможных перемещениях должна равняться нулю.



Черт. 19.

Но

$$z_1 = \frac{a}{2}\sin 2\varphi,\ z_2 = a\sin 2\varphi - a\sin\varphi.$$

Работа сил p и $2p$ напишется так:

$$(pa\cos 2\varphi + 4pa\cos 2\varphi - 2pa\cos\varphi)\,\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$5\cos 2\varphi - 2\cos\varphi = 0,$$

или

$$10\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 5 = 0,$$

откуда

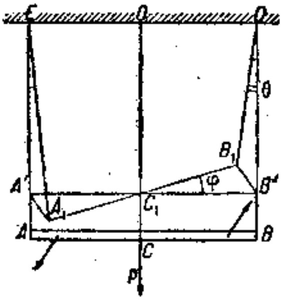
$$\cos\varphi = \frac{1+\sqrt{51}}{10}.$$

Приблизительно: $\cos\varphi = 0{,}8$; $\varphi = 37^\circ$. Угол φ острый, потому решение со знаком минус у радикала отпадает.

Задача 19. Палочка веса p и длины l подвешена на двух нитях равной длины (черт. 20). На палочку действует пара, расположенная в горизонтальной плоскости. Найти положение равновесия палочки, если длина нитей равна l, а момент пары равен M.

Под действием пары палочка повернулась на угол φ вокруг оси CO, и ее центр тяжести C занял положение C_1. Таким образом A_1B_1 — положение равновесия палочки.

Дадим палочке возможное перемещение, изменив угол φ, тогда работа всех сил, действующих на пару, будет:


Черт. 20.

$$M\,\delta\varphi + p\,\delta\,(OC_1);$$

но

$$OC_1 = l\cos\theta.$$

Для определения угла θ имеем:

$$\overline{B_1B'} = 2\,\frac{l}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = l\sin\theta,$$

откуда

$$\theta = \frac{\varphi}{2}.$$

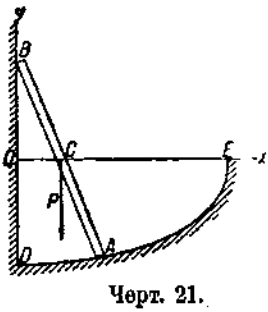
Приравняв нулю работу сил при возможном перемещении палочки, имеем:

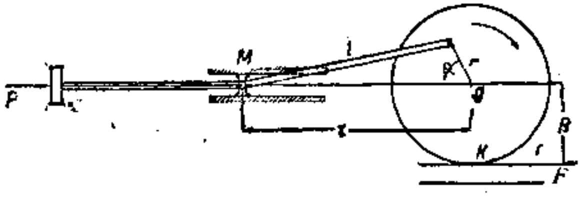
$$\left(M - p\,\frac{l}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\delta\varphi = 0,$$

откуда для положения равновесия:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2M}{pl}.$$

Задача 20. Тяжелый однородный стержень AB одним концом опирается о вертикальную стену BD, другим концом о неподвижную кривую DE (черт. 21). Стержень остается в вертикальной плоскости и при всяком положении сохраняет равновесие. Найти форму кривой DE. Длина стержня $2l$.


Черт. 21.


Черт. 22.

Работа реакций в точках A и B при возможных перемещениях равна нулю, следовательно работа веса стержня P тоже должна равняться нулю, и возможное перемещение центра тяжести C должно быть горизонтально во всех положениях стержня. Очевидно точка A описывает эллипс, уравнение которого будет:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{4y^2}{l^2} = 1.$$

Задача 21. С целью определить силу тяги паровоза тяговый прибор паровоза прикреплен к динамометру (черт. 22). Размеры механизма даны. Предполагается, что давление пара на поршень одинаково как в правой, так и в левой машине и равно P. Найти связь между показанием динамометра T и давлением P.

Поршень и ползун машины имеют одинаковые перемещения. Назовем расстояние MO через x, угол кривошипа с горизонтом через φ. Предположим, что у другой машины угол кривошипа с горизонтом φ_1, а расстояние $OM_1 = x_1$. Очевидно:

$$x = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}, \quad x_1 = r\cos\varphi_1 + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi_1}.$$

Освободим паровоз от связи с динамометром, заменив связь горизонтальной силой T. На ведущее колесо паровоза действует еще в точке прикосновения K колеса к рельсу горизонтальная сила трения F. Сила эта направлена в сторону движения паровоза и при возможном его перемещении работы не дает, так как при бесконечно-малом перемещении колеса оно вращается вокруг точки приложения этой силы. При составлении условия равновесия системы сил, приложенных к паровозу, надо принять во внимание работу не только внешних сил, но и сил внутренних, какими являются в данном случае силы давления пара на поршни машин.

Дадим углу φ бесконечно-малое приращение $\delta\varphi = \delta\varphi_1$, тогда поршень сместится на величину δx, а паровоз на $R\delta\varphi$, где R радиус ведущего колеса. Поршень второй машины сместится на величину δx_1.

Принимая во внимание работу двух машин, напишем условие равновесия:

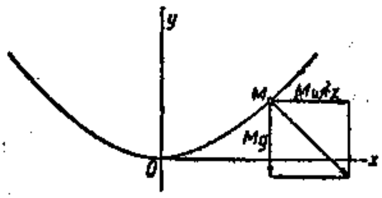
$$P\delta x + P\delta x_1 - TR\delta\varphi = O,$$

откуда

$$T = \frac{P}{R}\left[-r(\sin\varphi + \sin\varphi_1) - r^2\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} + \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi_1}}\right)\right].$$

Задача 22. На изогнутый прут, прикрепленный к вертикальной оси и равномерно вращающийся около нее с угловой скоростью ω, надето колечко, могущее скользить по пруту. Какова должна быть форма последнего, чтобы колечко во всяком положении было в равновесии (черт. 23)?

Пусть масса колечка M. Под действием собственного веса Mg и центробежной силы инерции $M\omega^2 x$ колечко должно быть в состоянии относительного равновесия на пруте. Не освобождая колечка от свявей, дадим ему относительное перемещение по пруту. При отсутствии трения силы реакции работы не совершат, и условие равновесия примет вид:



Черт. 23.

$$M\omega^2 x\delta x - Mg\delta y = 0;$$

или после интегрирования:

$$\omega^2x^2 - 2gy = \text{const}.$$

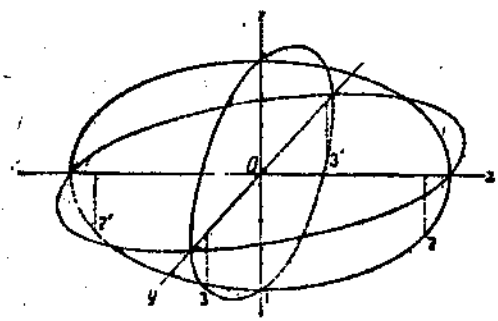
Если избрать оси, как указано на чертеже, то постоянная равна нулю, и уравнение, определяющее форму прута, будет:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}y \quad \text{(парабола).}$$

Задача 23. Тело, имеющее полость в виде трехосного эллипсоида с полуосями a, b, c, вращается равномерно вокруг вертикальной оси oz с угловою скоростью ω. Внутри полости находится тяжелая точка, масса которой равна единице. Найти положения ее относительного равновесия (черт. 24).

Уравнение эллипсоида, отнесенное к осям, будет:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Черт. 24.

Точка должна находиться в состоянии относительного равновесия под действием силы тяжести — g и центробежной горизонтальной силы инерции $\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$, проекции которой на оси будут

$$\omega^2x \text{ и } \omega^2y.$$

Если точке сообщить возможное перемещение по поверхности эллипсоида (δx, δy, δz), то это перемещение должно удовлетворить условию:

$$b^2c^2x\delta x + c^2a^2y\delta y + a^2b^2z\delta z = 0,$$

которое получим, продиференцировав левую часть уравнения эллипсоида.

Сумма работ сил, приложенных к точке, должна равняться нулю; при этом надо заметить, что нормальная сила реакции поверхности работы не совершает:

$$\omega^2x\delta x + \omega^2y\delta y - g\delta z = 0.$$

Если предположить, что точка при возможном перемещении сходит с поверхности во внутреннюю полость эллипсоида, то

$$b^2c^2x\delta x + c^2a^2y\delta y + a^2b^2z\delta z = \delta\alpha < 0.$$

Работа сил в этом случае будет тоже отрицательна:

$$\omega^2x\delta x + \omega^2y\delta y - g\delta z = \delta\pi < 0;$$

Чтобы не иметь дела с неравенствами, составим новое условие, не содержащее неравенств и одинаково удовлетворяющееся, как для перемещений освобождающих, так и для перемещений неосвобождающих.

Помножая последнее из написанных выше уравнений на произвольный множитель μ, получим, сложив с предыдущим:

$$(b^2c^2 + \mu\omega^2)\,x\delta x + (c^2a^2 + \mu\omega^2)\,y\delta y + (a^2b^2z - \mu g)\,\delta z = \delta\alpha + \mu\delta\pi. \quad (1)$$

В случае перемещений неосвобождающих вторая часть обращается в нуль, ибо $\delta\alpha = 0$ и $\delta\pi = 0$.

Подберем μ так, чтобы и в случае перемещений освобождающих вторая часть равнялась нулю:

$$\delta\alpha + \mu\,\delta\pi = 0;\ \ \mu = -\frac{\delta\alpha}{\delta\pi};$$

$\delta\alpha$ и $\delta\pi$ имеют одинаковый знак, следовательно $\mu < 0$. Теперь уравнение

$$(b^2c^2 + \mu\omega^2)\,x\delta x + (c^2a^2 + \mu\omega^2)\,y\delta y + (a^2b^2z - \mu g)\,\delta z = 0$$

должно удовлетворяться как при освобождающих, так и при неосвобождающих перемещениях. Выберем μ так, чтобы обратился в нуль коэфициент при δz

$$a^2b^2z - \mu g = 0,$$

тогда при произвольных δx и δy должны обратиться в нуль и их коэфициенты:

$$(b^2c^2 + \mu\omega^2)\,x = 0;\ (c^2a^2 + \mu\omega^2)\,y = 0.$$

Если присоединить сюда уравнение поверхности, то найдем следующие три решения:

$$1)\ x = 0,\ y = 0,\ a^2b^2z - \mu g = 0.$$

Принимая во внимание уравнение эллипсоида, для z получим значение $z = -c$; берем знак минус, ибо должно быть:

$$\mu = \frac{a^2b^2z}{g} < 0.$$

$$2)\ x = 0;\ c^2a^2 + \mu\omega^2 = 0,\ a^2b^2z - \mu g = 0.$$

Эти три уравнения и уравнение эллипсоида дают второе решение:

$$x=0,\ y=\pm\frac{\sqrt{\omega^4b^4-g^2c^2}}{\omega^2b^2},\ z=-\frac{gc^2}{\omega^2b^2}.$$

$$3)\ l^2c^2+\mu\omega^2=0;\ y=0;\ a^2b^2z-\mu g=0;$$

третье решение будет:

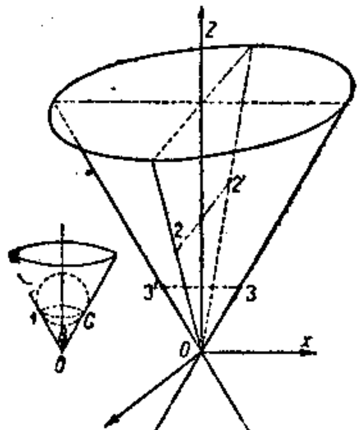
$$x=\frac{\sqrt{\omega^4a^4-g^2c^2}}{\omega^2a^2};\ y=0;\ z=-\frac{gc^2}{\omega^2a^2}.$$

На черт. 24 изображены все пять положений точки и отмечены номерами: 1, 2, 2', 3, 3'; при этом принято $a>b>c$.

Задача 24. Тяжелая точка веса g находится внутри конуса

$$\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=0,$$

имеющего вертикальную ось (черт. 25). Точка отталкивается от вершины конуса силой, пропорциональной расстоянию от вершины ($F=kr$). Найти положение равновесия точки.



Черт. 25.

Проекции на оси координат силы, отталкивающей точку от начала, будут:

$$\text{пр}_x F=kr\frac{x}{r}=kx;$$

$$\text{пр}_y F=kr\frac{y}{r}=ky;$$

$$\text{пр}_z F=kr\frac{z}{r}=kz.$$

Возможные перемещения точки δx, δy, δz как освобождающие от связей, так и не освобождающие должны удовлетворять условию:

$$x\delta x+4y\delta y-4z\delta z=\delta\alpha\leqq 0.$$

Работа сил F и g при возможных перемещениях должна быть равна нулю, или меньше нуля:

$$kx\delta x+ky\delta y+(kz-g)\,\delta z=\delta\pi\leqq 0.$$

Помножим это уравнение на произвольный множитель μ; складывая с предыдущим, имеем:

$$(1+k\mu)x\delta x+(4+k\mu)y\delta y-\{(4-k\mu)z+\mu g\}\,\delta z\leqq\mu\delta\pi+\delta\alpha.$$

Это условие должно оправдываться при всех возможных перемещениях; но при перемещениях, не освобождающих от связей:

$$\delta\pi = 0 \text{ и } \delta a = 0.$$

Чтобы левая часть при произвольных δx, δy, δz обращалась в нуль, подберем μ так, чтобы коэфициент при δz обращался в нуль, тогда условие равновесия точки напишется так:

$$(1 + k\mu)x\delta x + (4 + k\mu)y\delta y = 0;$$

оно обращается в тождество в следующих случаях:

$$1)\ x = 0,\ y = 0;$$
$$2)\ x = 0,\ 4 + k\mu = 0;$$
$$3)\ 1 + k\mu = 0,\ y = 0.$$

Если к этим уравнениям присоединить уравнения:

$$(4 - k\mu)z + \mu g = 0 \text{ и } x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0,$$

то найдем значение μ и трех координат, соответствующих положениям равновесия точки.

Выше было указано, что для перемещений по поверхности сумма $\mu\delta\pi + \delta a$ должна обращаться в нуль, т. е. $\mu < 0$, ибо и

$$\delta\pi < 0 \text{ и } \delta a < 0.$$

Исследуя первое решение, видим, что требованию $x = 0$, $y = 0$ соответствует $z = 0$ и $\mu = 0$. Последнее невозможно, следовательно решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ не есть положение равновесия.

Второе решение дает:

$$\mu = -\frac{4}{k};\ x = 0;\ y = \pm\frac{g}{2k};\ z = \frac{g}{2k}.$$

Третье решение:

$$\mu = -\frac{1}{k};\ x = \pm\frac{2g}{5k},\ y = 0,\ z = \frac{g}{5k}.$$

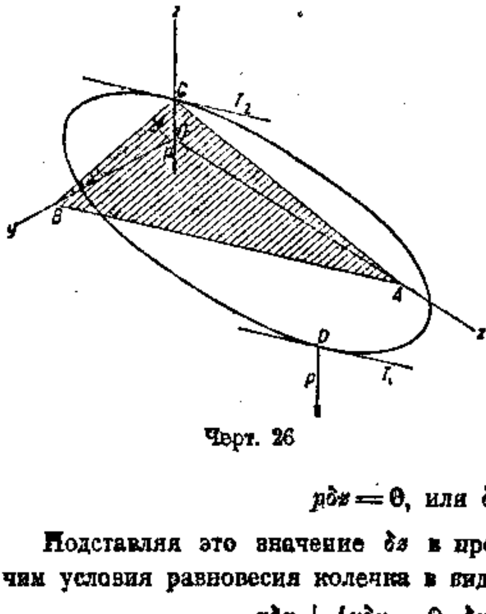
Все решения показаны на чертеже.

На первый взгляд, пожалуй, может показаться странным, что точка не будет в состоянии равновесия, находясь в вершине конуса, где отталкивающая сила обращается в нуль, а сила веса, как учит повседневный опыт, уничтожается сопротивлением поверхности. Конечно такое положение реально не осуществляется, ибо мы все же мыслим точку как шарик с исчезающе малыми размерами, совпасть с вершиной она не может, а находясь вблизи вершины, опирается на конус по ряду точек, лежащих на целой окружности ABC, которые и создают вертикальную реакцию. Уравнения, выведенные выше, не содержат всех этих соображений и все же дают отрицательный ответ потому, что при составлении их мы полагали, что реакции связи имеют определенное направление по нормали к поверхности и не совершают работы при возможных перемещениях. В точке O направление нормали становится неопределенным, и уравнения теряют смысл, что сказывается в требовании, чтобы множитель μ равнялся нулю.

Задача 25. Тяжелое колечко надето на прут, которому придана форма кривой:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+z^2=1\,;\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}+z=1$$

(черт. 26), вес колечка p, найти положение равновесия колечка. Ось z предполагается вертикальной, колечко считать за точку.



Черт. 26

При всех возможных перемещениях должны выполняться условия:

$$x\delta x+4y\delta y+36z\delta z=0;$$
$$\delta x+2\delta y+6\delta z=0,$$

которые получим, продиференцировав заданные уравнения.

Силы реакции при отсутствии трения не дадут работы при возможных перемещениях колечка. Остается работа силы веса $p\delta z$, которая тоже должна быть равна нулю:

$$p\delta z=0,\ \text{или}\ \delta z=0.$$

Подставляя это значение δz в предыдущие два уравнения, получим условия равновесия колечка в виде:

$$x\delta x+4y\delta y=0,\ \delta x+2\delta y=0,$$

или, исключив δy:

$$(x-2y)\,\delta x=0.$$

Условие должно оправдываться при всяком δx, следовательно:

$$x=2y.$$

Принимая во внимание уравнения кривой, по которой изогнут прут, получим два решения:

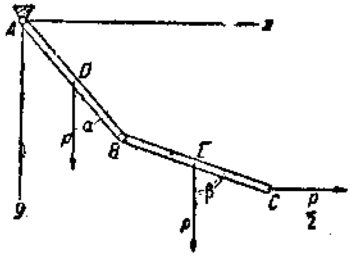
$$1)\ x=4,\ y=2,\ z=-\frac{1}{3}\,;\ 2)\ x=0,\ y=0,\ z=1.$$

Форма прута получается в сечении трехосного эллипсоида с плоскостью ABC.

На черт. 26 показано это сечение и два положения равновесия колечка C и D. В этих точках касательные T_1 и T_2 горизонтальны.

Задача 26. Два одинаковых стержня AB, BC веса p и длины $2a$ скреплены шарниром B. Конец A закреплен в неподвижном шарнире, к концу C приложена горизонтальная сила $\frac{p}{2}$. Положение равновесия системы определяется двумя углами α и β, которые образуют стержни AB и BC с вертикалью (черт. 27).

Найти значение параметров α и β при равновесии.



Черт. 27

Система обладает двумя степенями свободы, так как параметры α и β могут изменяться независимо друг от друга.

Изберем систему координат, как указано на чертеже, назовем ординаты центров тяжести стержней через y_1 и y_2, и абсциссу свободного конца C через x; тогда очевидно:

$$y_1 = a\cos\alpha,\ \delta y_1 = -a\sin\alpha\,\delta\alpha;$$
$$y_2 = 2a\cos\alpha + a\cos\beta,\ \delta y_2 = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha - a\sin\beta\,\delta\beta;$$
$$x = 2a\sin\alpha + 2a\sin\beta,\ \delta x = 2a\cos\alpha\,\delta\alpha + 2a\cos\beta\,\delta\beta.$$

Сумма работ всех действующих сил при возможных перемещениях будет:

$$p\delta y_1 + p\delta y_2 + \frac{p}{2}\delta x$$

Сумма эта должна равняться нулю:

$$-pa\sin\alpha\,\delta\alpha - 2pa\sin\alpha\,\delta\alpha - pa\sin\beta\,\delta\beta + ap\cos\alpha\,\delta\alpha + ap\cos\beta\,\delta\beta = 0,$$

или

$$(-3\sin\alpha + \cos\alpha)\,\delta\alpha - (\sin\beta - \cos\beta)\,\delta\beta = 0.$$

При произвольных $\delta\alpha$ и $\delta\beta$:

$$-3\sin\alpha + \cos\alpha = 0,\ \sin\beta - \cos\beta = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3},\ \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Задача 27. К стержню BC системы стержней, указанных в предыдущей задаче (черт. 28), приложена пара (q, q'), момент которой равен m. Найти значения параметров α и β при равновесии системы.

При возможных перемещениях сумма работ сил, приложенных к системе, должна равняться нулю. Так же, как и в предыдущей задаче, имеем:

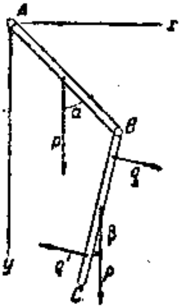
$$-ap\sin\alpha\,\delta\alpha - 2ap\sin\alpha\,\delta\alpha - ap\sin\beta\,\delta\beta + m\delta\beta = 0,$$

или

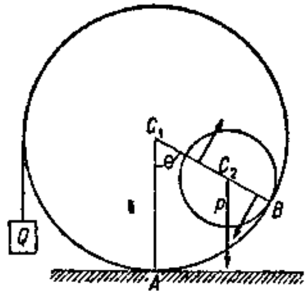
$$3\sin\alpha\,\delta\alpha + \left(\frac{m}{ap} - \sin\beta\right)\delta\beta = 0.$$

При произвольных $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ должно быть:

$$\sin\alpha = 0,\ \sin\beta = \frac{m}{ap}.$$



Черт. 28.



Черт. 29.

Задача 28. В полый цилиндр радиуса R, лежащий на горизонтальной плоскости, вложен массивный цилиндр радиуса r и веса p. К последнему цилиндру в плоскости чертежа приложена пара с моментом M (черт. 29). На полый цилиндр намотана нить, несущая на свободном конце груз Q. Полагая поверхности цилиндров достаточно шероховатыми, найти положение равновесия системы и определить, при какой зависимости между заданными силами оно возможно.

Положение относительного равновесия частей системы определяется одним параметром — углом $ACB = \theta$, но система обладает двумя степенями свободы. Действительно можно, закрепив внутренний цилиндр в полом цилиндре, всю систему повернуть на бесконечно-малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенной оси A; можно поступить иначе, именно задержать полый цилиндр и повернуть массивный цилиндр на угол $\delta\psi$ вокруг мгновенной оси B. Таким образом условия равновесия выражаются двумя уравнениями, из которых одно будет служить для определения значения параметра Θ, другое даст условие, которому должны удовлетворять заданные силы.

Чтобы составить условия равновесия при первом возможном перемещении, перенесем силы Q и p в точку A, добавив пары с моментами:

$$-QR, \quad p(R-r)\sin\Theta.$$

Через точку A будут проходить четыре вертикальные силы: вес полого цилиндра, реакция пола, силы Θ и p, все они при бесконечно-малом вращении вокруг оси A работы не совершают.

Моменты трех пар

$$M, \; -QR, \quad p(R-r)\sin\Theta$$

совершат работу, в сумме равную нулю:

$$[M-QR+p(R-r)\sin\Theta]\,\delta\varphi=0.$$

Перенесем теперь силу p в точку B, добавив пару с моментом $-pr\sin\Theta$.

При повороте массивного цилиндра вокруг мгновенной оси, проходящей через B, сумма работ должна равняться нулю. Сила p, приложенная в точке B, работы не совершит:

$$(M-pr\sin\Theta)\,\delta\psi=0.$$

При произвольных $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ имеем:

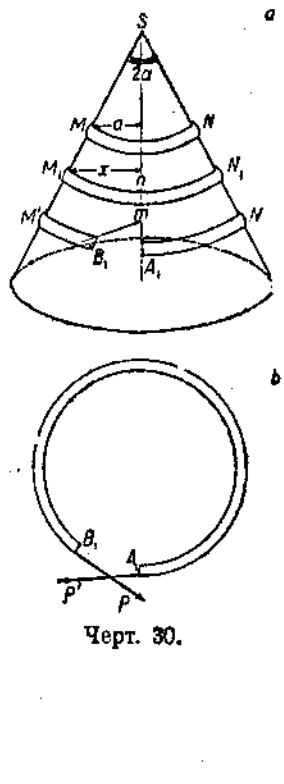
$$M-pr\sin\Theta=0,$$
$$M-QR+p(R-r)\sin\Theta=0,$$

откуда

$$\sin\Theta=\frac{M}{pr}=\frac{Q}{p},$$

или

$$M=Qr, \; \frac{Q}{p}<1.$$



Черт. 30.

Чтобы равновесие было возможно, заданные величины должны удовлетворять двум последним условиям.

Задача 29. Тяжелый упругий круг в горизонтальном положении надет на прямой, вертикально поставленный, абсолютно гладкий круглый конус. Угол осевого сечения при вершине равен 2α. Найти положение равновесия круга на конусе (черт. 30).

Обозначения: G — вес круга, a — радиус круга, λ — модуль упругости материала круга. В силу полной симметрии условий во всех частях круга мы в праве предположить, что в положении равновесия M_1N_1 плоскость круга будет горизонтальна.

Радиус круга, в начале равный a, сделается равным x. Между смежными сечениями круга возникнут силы упругости, пропорциональные относительному удлинению ε:

$$P = \lambda\varepsilon.$$

Переместим теперь круг в смежное положение $M'N'$, увеличив его радиус на δx. Чтобы представить работу сил упругости внутри кольца, разрежем его в сечении mn. Будем называть свободный конец, прилегающий к mn, справа — буквой A и слева — буквой B. Пусть конец A сместился по образующей в положение A_1, а конец B — в положение B_1. Связь между A и B можно заменить силами P' и P, равными друг другу и направленными по касательной к кольцу.

(Поперечными размерами пренебрегаем.) (Черт. 30 b).

При возможном смещении кольца сила P' работы не совершит, ибо перемещение конца A перпендикулярно силе. Работа силы P будет:

$$P\delta s = 2\pi P(x + \delta x - x) = 2\pi P\delta x.$$

Работу сил упругости надо взять со знаком минус, работу веса $G \operatorname{ctg} \alpha\delta x$ — с плюсом.

$$-2\pi\lambda\frac{x-a}{a}\delta x + G \operatorname{ctg} \alpha\delta x = 0,$$

откуда

$$x = a\left(1 + \frac{G \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi\lambda}\right).$$

Задача 30. Три точки обладают массами $\frac{m}{2}$, m, m, и могут скользить по кругу радиуса a. Точки действуют друг на друга отталкивающими силами, пропорциональными произведению масс и первой степени расстояний r друг от друга. Найти положение равновесия системы (черт. 31).

Назовем координаты точек так:

$$1)\ \frac{m}{2} \ldots x_1, y_1,$$

$$2)\ m \quad x_2, y_2,$$

$$3)\ m \quad x_3, y_3.$$

Сила, с которой точка 2 действует на точку 1, будет:

$$F_{1,2} = k\frac{m^2}{2}r_{1,2}.$$

Ее проекция на ось x-ов:

$$X_{1,2}=k\,\frac{m^2}{2}\,r_{1,2}\,\frac{x_1-x_2}{r_{1,2}}=k\,\frac{m^2}{2}\,(x_1-x_2).$$

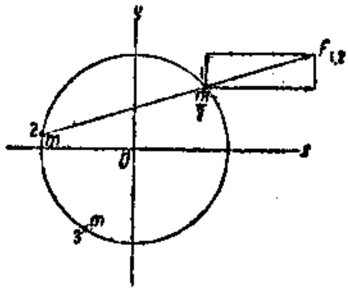
Аналогично для точек 1 и 3 будем иметь:

$$x_{1,3}=k\,\frac{m^2}{2}\,(x_1-x_3).$$

Проекция на ось y представляется так:

$$Y_{1,2}=k\,\frac{m^2}{2}\,(y_1-y_2),$$

$$Y_{1,3}=k\,\frac{m^2}{2}\,(y_1-y_3).$$



Черт. 31.

Поместим начало координат в центре окружности, тогда координаты каждой из трех точек должны удовлетворять уравнению

$$x^2+y^2=a^2.$$

Применяя метод Лагранжа, получим условия равновесия первой точки в виде:

$$k\left[\frac{m^2}{2}(x_1-x_2)+\frac{m^2}{2}(x_1-x_3)\right]\delta x_1+$$

$$+k\left[\frac{m^2}{2}(y_1-y_2)+\frac{m^2}{2}(y_1-y_3)\right]\delta y_1=0,$$

$$x_1\delta x_1+y_1\delta y_1=0.$$

Помножим последнее уравнение на некоторый множитель λ и сложим с первым, в результате получим:

$$(2x_1-x_2-x_3+\lambda x_1)\,\delta x_1+(2y_1-y_2-y_3+\lambda y_1)\,\delta y_1=0.$$

Подберем значение λ так, чтобы исчез коэфициент при δy_1, тогда при произвольном δx_1 уравнение может иметь место при условии, что и коэфициент при δx_1 тоже равен нулю. Условия равновесия первой точки примут вид:

$$2x_1-x_2-x_3+\lambda x_1=0,\ 2y_1-y_2-y_3+\lambda y_1=0,$$

или, исключая $2+\lambda$:

$$\frac{x_2+x_3}{x_1}=\frac{y_2+y_3}{y_1}.$$

Расположим ось x так, чтобы она проходила через первую точку, тогда $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Из последней пропорции имеем:

$$y_2 + y_3 = 0,$$

или:

$$y_2 = -y_3.$$

Подобным же образом составим условия равновесия второй точки:

$$k\ \left\{(x_2 - x_1)\frac{m^2}{2} + (x_2 - x_3)\,m^2\right\}\delta x_2 +$$

$$+ k\ \left\{(y_2 - y_1)\frac{m^2}{2} + (y_2 - y_3)\,m^2\right\}\delta y_2 = 0,$$

$$x_2\delta x_2 + y_2\delta y_2 = 0;$$

вводя неопределенный множитель λ_1, имеем:

$$(3 + \lambda_1)x_2 - x_1 - 2x_3 = 0,$$
$$(3 + \lambda_1)\,y_2 - y_1 - 2y_3 = 0,$$

или, исключая $3 + \lambda_1$:

$$\frac{x_1 + 2x_3}{x_2} = \frac{y_1 + 2y_3}{y_2};$$

но

$$x_1 = a,\ y_1 = 0,\ y_2 = -y_3,$$

следовательно

$$x_2 + x_3 = -\frac{a}{2}.$$

Из уравнения окружности:

$$x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2,$$

$$x_2 = x_3 = -\frac{a}{4},$$

$$y_2 = -y_3 = \pm\frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Итак, положение равновесия системы таково:

$$x_1 = a,\ y_1 = 0;$$

$$x_2 = -\frac{a}{4},\quad y_2 = \frac{a\sqrt{15}}{4};$$

$$x_3 = -\frac{a}{4},\ y_3 = -\frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

II. ТЕОРЕМА Д'АЛАМБЕРА. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.

Чтобы напомнить о выводе основного уравнения динамики, приведем следующий ряд соображений.

Пусть материальная точка массы m движется под действием силы P, проекции которой на оси координат равны X, Y, Z. Реакция связей — R, ее проекции — R_x, R_y, R_z. Связи предполагаются без трения.

Диференциальные уравнения движения точки можно написать так:

$$X+R_x-m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ Y+R_y-m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\ Z+R_z-m\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

или

$$X+R_x+\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,\ Y+R_y+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

$$Z+R_z+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0.$$

Написанные в такой форме уравнения представляют условия равновесия точки, находящейся под действием внешней силы, силы реакции и силы инерции.

Если бы имелась система n точек, то для каждой точки можно было бы написать такие уравнения, и мы имели бы n совокупных диференциальных уравнений, определяющих движение системы.

Этой системе уравнений, можно дать такое истолкование: **если предположить, что система материальных точек остановлена, и кроме действующих сил и сил реакции связей к ней приложены силы инерции, то в любой момент система будет в равновесии.**

Изложенный принцип носит название **принципа д'Аламбера.**

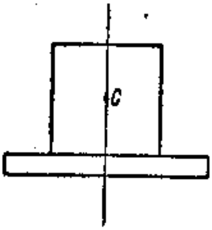
Если воспользоваться методом возможных перемещений, то, принимая во внимание, что работа реакций идеальных связей при возможных перемещениях равна нулю, получим условие равновесия системы в виде:

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0.$$

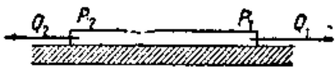
Применение этого уравнения и составляет содержание приведенных ниже задач. Однако в некоторых простейших задачах условия равновесия написаны по правилам элементарной статики.

Задача 31. Пластинка падает по вертикали с ускорением 4 *м/сек*² (черт. 32); на ней помещен однородный прямоугольный параллелепипед в 10 *кг* веса. Какое давление оказывает он на пластинку во время движения?

Остановим систему и, освободив груз от связи, приложим к нему вертикальную силу инерции. Собственно говоря, силу инерции надо приложить к каждой точке груза, но их равнодействующая будет равна $\frac{10}{g}\cdot 4$ и приложена в центре тяжести параллелепипеда C.



Черт. 32.



Черт. 33.

Сила сопротивления пластинки N тоже пройдет через центр тяжести C и будет вертикальна. Согласно изложенному выше принципу точка C должна быть в равновесии под действием трех сил, направленных по одной прямой: $10, -\frac{10}{g}\cdot 4, -N$; поэтому

$$10 - 4\cdot\frac{10}{g} - N = 0,\ N = \frac{10}{g}(g-4).$$

Задача 32. На гладкой плоскости (черт. 33) расположены две точки веса P_1 и P_2, связанные невесомым стержнем; на точку P_1 действует сила Q_1, на точку P_2 — сила Q_2, направленные вдоль стержня, но в разные стороны. Найти, с каким ускорением будет двигаться система.

Назовем через j ускорение системы. Силы инерции будут равны

$$\frac{P_1}{g}j,\ \frac{P_2}{g}j$$

и направлены вдоль стержня, в сторону, противоположную движению. Если $Q > Q_2$, то для равновесия сил приложенных и сил инерции необходимо, чтобы

$$Q_1 = Q_2 + (P_1 + P_2)\frac{j}{g},$$

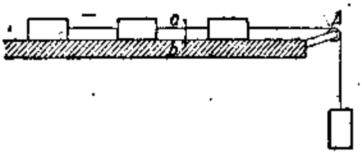
откуда

$$j = \frac{Q_1 - Q_2}{P_1 + P_2}g.$$

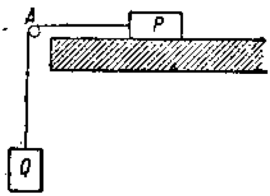
Задача 33. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости (черт. 34) лежат связанные нитью три равных груза весом p кг каждый; четвертый такой же груз прикреплен к ним нитью, перекинутой через блок A, и подвешен вертикально. Вся система предоставлена самой себе. Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении ab во время движения.

Система начнет двигаться с ускорением j.

Сила инерции каждого груза приложена к его центру тяжести и равна $\frac{P}{g}j$. Остановим систему и дадим ей возможное перемещение δs



Черт. 34.



Черт. 35.

по направлению движения; работа сил веса и сил инерции напишется так:

$$\left(p-4\frac{p}{g}j\right)\delta s=0.$$

Перемещение δs не нуль, следовательно

$$p-4\frac{p}{g}j=0,\ j=\frac{g}{4}\ м/сек^2.$$

Разрежем теперь нить в сечении ab и заменим действие грузов, лежащих правее этого сечения, горизонтальной силой T, тогда сила эта должна уравновесить сумму сил инерции грузов, лежащих левее сечения ab:

$$T=2\ \frac{p}{g}j=\frac{p}{2}\ кг.$$

Задача 34. Один конец нити перекинут через блок A, и к нему прикреплен груз Q, к другому концу привязан груз P, лежащий на горизонтальном столе. Вся система начинает двигаться без начальной скорости. Определить скорость груза Q, когда он пройдет H *м* (черт. 35).

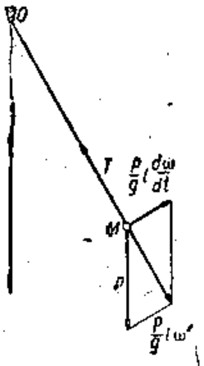
Ускорение j всей системы согласно предыдущей задаче определится так

$$j=\frac{Q}{P+Q}g;$$

искомую скорость найдем по формуле равномерно-переменного движения:

$$v=\sqrt{2jH}=\sqrt{\frac{2gHQ}{P+Q}}.$$

Задача 35. Математический маятник, веса p *кг* и длины l *м* отклонен от положения равновесия на угол в 30° и предоставлен самому себе. Найти натяжение нити маятника в тот момент, когда маятник проходит через положение равновесия (черт. 36).



Черт. 36.

Маятник движется по кругу. Разложим его ускорение на два слагаемых $l\,\dfrac{d\omega}{dt}$ и $l\omega^2$, тангенциальное и нормальное; ω обозначает угловую скорость маятника. Сила инерции представится двумя слагаемыми:

$$\frac{p}{g}\,l\,\frac{d\omega}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{p}{g}\,l\omega^2.$$

В тот момент, когда маятник проходит через положение равновесия, натяжение его нити T складывается из веса p и силы инерции $\dfrac{p}{g}\,l\omega^2$. Квадрат угловой скорости найдется, если написать уравнение живых сил:

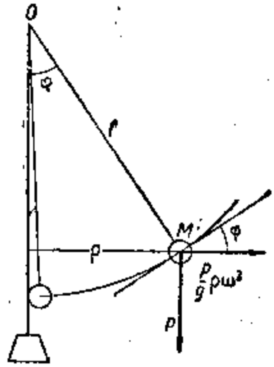
$$pl(1-\cos 30^\circ)=\frac{p}{2g}\,l^2\omega^2,$$

откуда

$$T=p+4p\sin^2 15^\circ=1{,}27\,p \text{ кг}.$$

Задача 36. Шарик веса p прикреплен на нити длиной l к вертикальному стержню, который начинает вращаться с угловой скоростью ω вокруг своей оси (черт. 37).

Найти положение относительного равновесия шарика.



Черт. 37.

Пусть положение относительного равновесия шарика определяется углом φ, образуемым нитью с осью вращения, или расстоянием ρ его центра от оси вращения.

Предположим, что система остановлена; считая шарик за материальную точку, приложим кроме его веса p центробежную силу инерции $\dfrac{p}{g}\,\rho\omega^2$; теперь сообщим шарику, не освобождая его от связей, возможное перемещение δs, соответствующее изменению угла φ

на величину $\delta\varphi$. Работа сил, приложенных к шарику, должна равняться нулю:

$$\left(\frac{p}{g}\rho\omega^2\cdot\cos\varphi - p\sin\varphi\right)\delta s = 0;$$

но

$$\rho = l\sin\varphi,$$

следовательно

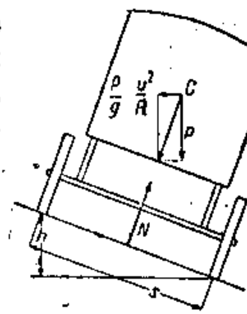
$$\frac{l}{g}\omega^2\cos\varphi - 1 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Решение $sin\,\varphi = 0$ практически не выполнимо.

Задача 37. Определить возвышение h наружного рельса на закруглении железнодорожного пути. Радиус закругления R, скорость поезда v, ширина колеи s (черт. 38).

При равномерном движении вагона по закруглению направление силы инерции любой его точки пересекает вертикальную прямую, проходящую через центр закругления; но считая, что радиус закругления во много раз больше размеров вагона, будем полагать все силы эти параллельными; тогда, принимая во внимание, что величины их пропорциональны массам точек, должны заключить, что равнодействующая их равна $\frac{p}{g}\cdot\frac{v^2}{R}$ и приложена к центру тяжести вагона.



Черт. 38.

Равнодействующая сил сопротивления рельсов N также должна проходить через центр тяжести вагона; остается применить принцип д'Аламбера к движению центра тяжести вагона. Принимая во внимание наклон полотна, имеем:

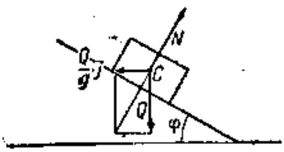
$$\frac{p}{g}\frac{v^2}{R} : h = \sqrt{p^2 + \frac{p^2}{g^2}\frac{v^4}{R^2}} : s,$$

откуда

$$h = \frac{sv^2}{gR\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2R^2}}}.$$

Задача 38. Гладкая доска, образующая с горизонтом угол φ, движется поступательно по горизонтальному направлению с ускорением j (черт. 39). Каково должно быть это ускорение, чтобы груз, положенный на доску, не падал?

Равнодействующая сил инерции поступательного движения груза горизонтальна, приложена в его центре тяжести и равна $\frac{Q}{g}j$, где Q — вес груза. Сила эта и вес груза должны уравновеситься силой нормального сопротивления доски, поэтому:



Черт. 39.

$$\frac{Q}{g}j = Q \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда

$$j = g \operatorname{tg} \varphi,$$

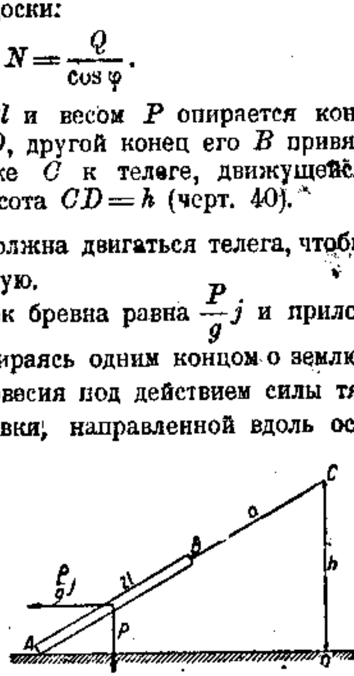
Сопротивление доски:

$$N = \frac{Q}{\cos \varphi}.$$

Задача 39. Бревно AB длины $2l$ и весом P опирается концом A на горизонтальную дорогу AD, другой конец его B привязан веревкой BC длины a в точке C к телеге, движущейся с постоянным ускорением, причем высота $CD = h$ (черт. 40).

Определить, с каким ускорением j должна двигаться телега, чтобы веревка и бревно составляли одну прямую.

Равнодействующая сил инерции точек бревна равна $\frac{P}{g}j$ и приложена в его центре тяжести. Бревно, опираясь одним концом о землю, должно оставаться в положении равновесия под действием силы тяжести, сил инерции и натяжения веревки, направленной вдоль оси бревна. Из трех условий равновесия плоской системы напишем уравнение моментов относительно точки A, обозначив угол BAD через φ:



Черт. 40.

$$Pl \cos \varphi - \frac{P}{g} jl \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$j = g \operatorname{ctg} \varphi = \frac{g}{h} \sqrt{(2l + a)^2 - h^2}.$$

Задача 40. Тонкий однородный обруч радиуса r и веса P, плоскость которого вертикальна, расположен на наклонной шероховатой плоскости, угол которой с горизонтом равен α. Исследовать движение обруча, полагая, что скольжение отсутствует (черт. 41).

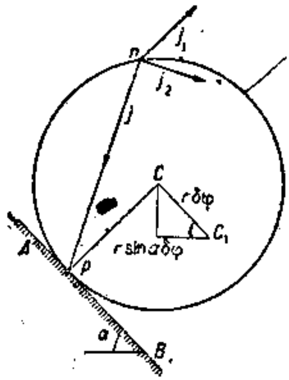
Ускорение любой точки n обруча складывается из трех векторов:

j_1 — ускорение полюса p, перпендикулярное к общей касательной AB полоид и одинаковое для всех точек обода.

$j_2 = \overline{pn} \cdot \frac{d\omega}{dt}$ — тангенциальное ускорение при вращении вокруг полюса p с угловой скоростью ω и угловым ускорением $\frac{d\omega}{dt}$.

$j = \overline{pn}\,\omega^2$ — нормальное ускорение при том же вращении.

Соответственно этому будем иметь три группы сил инерции.



Черт. 41.

Остановим обруч, приложим ко всем его точкам силы инерции и дадим его центру C возможное перемещение $CC_1 = r\delta\varphi$, где $\delta\varphi$ бесконечно-малый угол поворота обруча вокруг полюса p.

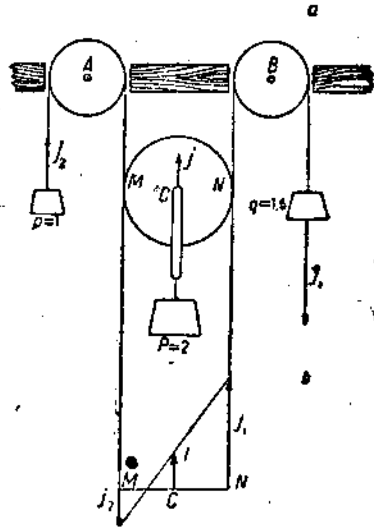
Первая группа сил инерции работы не совершит, ибо их равнодействующая проходит через центр тяжести обруча C и полюс p.

Вторая—дает работу:

$$-\delta\varphi\sum \overline{pn}^2\cdot m\cdot\frac{d\omega}{dt} = -J_p\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi;$$

здесь m — масса любой точки n обода, J_p — момент инерции обода относительно полюса p. Если обозначим массу обода через $\frac{P}{g}$, то

$$J_p = \frac{2P}{g}\cdot r^2.$$



Черт. 42.

Каждая из сил третьей группы проходит через p и работы не даст.

Сила тяжести дает работу $Pr\sin\alpha\,\delta\varphi$.

Итак, приравняв нулю сумму работ возможных перемещений, имеем:

$$\left(Pr\sin\alpha - J_p\frac{d\omega}{dt}\right)\delta\varphi = 0;$$

$\delta\varphi \neq 0$, следовательно

$$\frac{d\omega}{dt} = Pr\sin\alpha : \frac{2Pr^2}{g} = \frac{g\sin\alpha}{2r}.$$

Движение диска — равномерно-ускоренное качение.

Задача 41. Через неподвижные блоки A и B перекинут шнур, поддерживающий подвижной блок C; части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. Блок C нагружен гирей, вес которой вместе с обоймой $P = 2$ *кг*. К концам шнура прикреплены грузы: $p = 1$ *кг* и $q = 1,5$ *кг*. Найти ускорения всех трех грузов, считая блоки невесомыми (черт. 42).

Данная система обладает двумя степенями свободы, и положение ее определяется двумя параметрами, например ординатами груза p и центра блока C; можно задержать ось блока C и заставить двигаться грузы p и q; или, задержав груз p, сообщить перемещение грузам P и q.

Сделаем предположение, что груз q опускается, а грузы P и p поднимаются; применительно к этому указаны на чертеже ускорения j, j_1 и j_2.

Точка M блока C обладает ускорением j_2, направленным вниз, точка N — ускорением j_1, направленным вверх; между перемещениями, скоростями и ускорениями точек M, C, N существует одинаковая постоянная связь, изображенная диаграммой, которую можно выразить уравнениями:

Черт. 43.

$$\delta s_C = \frac{\delta s_N - \delta s_M}{2}, \quad j = \frac{j_1 - j_2}{2} \tag{1}$$

Задержим теперь ось блока C и сообщим грузам p и q одинаковые перемещения δs_1. Приравняв нулю работу сил тяжести и сил инерции, имеем:

$$\left\{\left(1{,}5 - \frac{1{,}5}{g} j_1\right) - \left(1 + \frac{1}{g} j_2\right)\right\} \delta s_1 = 0. \tag{2}$$

Задержим теперь груз p и сообщим грузу q перемещение δs_2; тогда для груза P перемещение $\delta s_C = \frac{\delta s_2}{2}$, и уравнение работы возможных перемещений будет:

$$\left\{2 \cdot \left(1{,}5 - \frac{1{,}5}{g} j_1\right) - \left(2 + \frac{2}{g} j\right)\right\} \delta s_2 = 0. \tag{3}$$

Три уравнения (1), (2), (3) дают:

$$j_1 = \frac{3}{11} g, \quad j_2 = \frac{1}{11} g, \quad j = \frac{1}{11} g.$$

Все ускорения получились с положительными знаками, следовательно предположения о направлении движения грузов правильны.

Задача 42. На горизонтальной оси C насажен невесомый блок, через него перекинута веревка, на концах которой A и B сидят две обезьяны равного веса.

Обезьяна A поднимается по веревке со скоростью u. Определить скорость v движения второй обезьяны (черт. 43).

Остановим систему и рассмотрим общий случай, когда u переменная величина; приложим кроме весов двух обезьян силы инерции.

Сила инерции первой обезьяны в относительном движении направлена вниз и равна $m\frac{du}{dt}$; предположив, что вращение блока, вызванное движением обезьяны A, совершается против стрелки часов, мы должны силу инерции переносного движения $m\frac{dv}{dt}$ направить для обезьяны A вверх, а обезьяны B — вниз. Веса обезьян p и p. Силы на левом конце веревки и силы на правом должны уравновеситься:

$$p + m\frac{du}{dt} - m\frac{dv}{dt} = p + m\frac{dv}{dt},$$

откуда

$$2\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt},$$

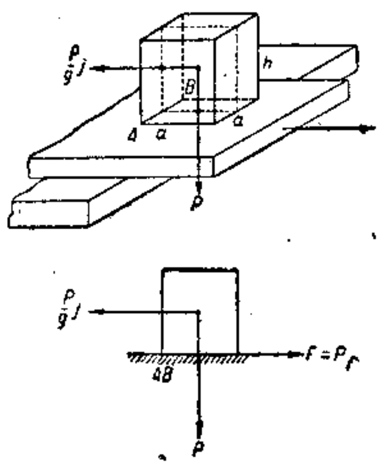
или

$$2v = u + C;$$

но при $u = 0$ и $v = 0$, следовательно $C = 0$, и

$$v = \frac{u}{2}$$

независимо от того, постоянна или переменна скорость u.



Черт. 44.

Скорость v получилась со знаком плюс, следовательно предположение о ее направлении было сделано верно.

Задача 43. На горизонтальном столе положена доска, и на ней расположен параллелепипед размеров (a, a, h); поверхности его и доски шероховаты, коэфициент трения f. Доску начинают двигать с ускорением j параллельно одному из ребер параллелепипеда в горизонтальном направлении (черт. 44). Определить, как будет двигаться параллелепипед.

Рассмотрим вертикальное сечение параллелепипеда, проходящее через его центр тяжести и параллельное ускорению доски.

Напишем условия, при которых параллелепипед будет двигаться вместе с доской. При поступательном движении равнодействующая сил инерции будет равна $\frac{P}{g}j$ и приложена в центре тяжести. Равнодействующая сил трения горизонтальна и будет приложена в рассматриваемом сечении. Для равновесия необходимо, чтобы:

$$Pf - \frac{P}{g}j \geqq 0, \quad \frac{P}{g}j\,\frac{h}{2} \leqq \frac{P}{2}a,$$

или

$$j \leqq fg, \quad j \leqq \frac{a}{h}g.$$

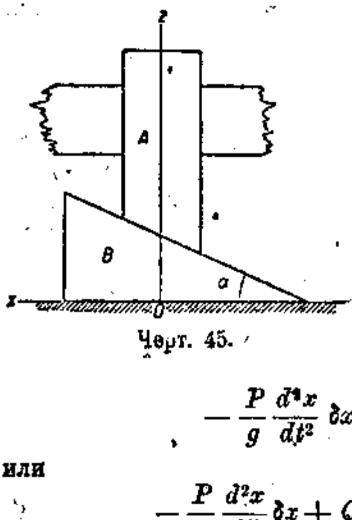
Здесь следует отметить два случая:

1) $\frac{a}{h} > f$. При выполнении первого неравенства выполняется и второе: параллелепипед не опрокидывается и не скользит. При выполнении только второго параллелепипед будет скользить, не опрокидываясь.

2) $\frac{a}{h} < f$. Параллелепипед будет стоять или опрокинется в зависимости от того, выполняется второе условие или нет.

Задача 44. Брусок A, скользящий в вертикальной прорези, опирается на клин B. Этот последний может скользить по горизонтальной плоскости (черт. 45).

Вес первого — Q, второго — P, трения нет. Угол клина a. Определить, с каким ускорением начнет двигаться клин B.



Черт. 45.

Между перемещениями тела $A \delta z$ и тела $B \delta x$, их скоростями и их ускорениями существуют соотношения:

$$\delta z = \delta x \operatorname{tg} a, \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \operatorname{tg} a, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \operatorname{tg} a.$$

Приложим силы инерции и напишем работу всех сил при возможном перемещении клина δx; получим:

$$-\frac{P}{g}\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + Q\left(1 - \frac{1}{g}\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

или

$$-\frac{P}{g}\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + Q \operatorname{tg} a \, \delta x - \frac{Q}{g}\operatorname{tg}^2 a \frac{d^2 x}{dt^2}\delta x = 0,$$

откуда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{Qg \operatorname{tg} a}{P + Q \operatorname{tg}^2 a}.$$

Задача 45. Клин данных размеров (черт. 46) и веса P может скользить по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. На клин положен груз веса p, и вся система предоставлена самой себе. С каким ускорением клин начнет двигаться, и какое давление оказывает груз на клин?

Система обладает двумя степенями свободы, и ее положение определяется двумя параметрами, например абсциссой x центра тяжести клина, взятой по горизонту относительно любого начала, и абсциссой s центра тяжести груза, взятой параллельно щеке клина от вершины A.

Ускорение клина обозначим через j. Ускорение груза при движении по клину через j_1; соответственно с этим будем иметь три силы инерции, приложенные в центре тяжести тел:

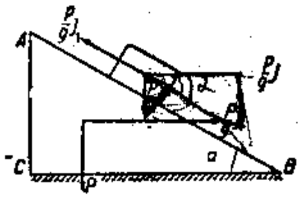
$$\frac{P}{g}j, \quad \frac{p}{g}j \text{ и } \frac{p}{g}j_1.$$

Дадим клину возможное перемещение δx. Веса тел не совершат работы; а силы инерции дадут работу:

$$-\frac{P}{g}j\,\delta x - \frac{p}{g}j\,\delta x + \frac{p}{g}j_1 \cos\alpha\,\delta x = 0.$$

Сообщим теперь грузу p возможное перемещение по щеке клина δs, тогда получим уравнение:

$$p\sin\alpha\,\delta s + \frac{p}{g}j\cos\alpha\,\delta s - \frac{p}{g}j_1\,\delta s = 0.$$



Черт. 46

Сокращая уравнения на δx и δs, получим для j:

$$j = g\frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{P + p\sin^2\alpha}.$$

До сих пор в уравнения вовсе не входила сила внутреннего взаимодействия между телами N. Сила эта нормальна к щеке клина.

Освободим груз p от связей, тогда он должен будет находиться в состоянии равновесия под действием четырех сил: N, p, $\frac{p}{g}j$ и $\frac{p}{g}j_1$, приложенных к его центру тяжести.

Проектируя все силы на направление силы N, имеем:

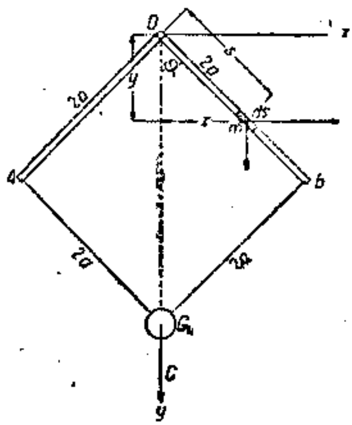
$$N = p\cos\alpha - \frac{p}{g}j\sin\alpha;$$

подставляя значение j, найдем:

$$N = \frac{Pp\cos\alpha}{P + p\sin^2\alpha}.$$

Задача 46. Два равных бруска длиной $2a$ и веса G, соединенные между собой шарниром в O, вращаются около вертикальной оси OC, на которой имеется груз G_1, привязанный на двух равных нитях длиной $2a$ каждая к концам брусков A и B. Найти зависимость между угловой скоростью ω и углом φ (черт. 47).

При равномерном вращении бруски будут в относительном равновесии под углом 2φ друг к другу. Остановим систему, приложим силы инерции и, дав углу φ приращение $\delta\varphi$, напишем уравнение работ при возможном перемещении системы.



Черт. 47.

Координаты центра тяжести одного из брусков: $a\sin\varphi$, $a\cos\varphi$; работа веса:

$$G\delta(a\cos\varphi) = -Ga\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Координаты груза G_1: 0, $4a\cos\varphi$; работа веса:

$$G_1\delta(4a\cos\varphi) = -4G_1a\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Рассмотрим элемент бруска m; координаты его середины: $x = s\sin\varphi$, $y = s\cos\varphi$, длина его ds, вес $p\,ds$, где p — вес единицы длины; сила инерции, приложенная к нему: $\frac{p}{g}\,ds\,x\omega^2$.

Работа силы инерции при возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\frac{p}{g}\,ds\,x\omega^2\,\delta x = \frac{p}{g}\,s^2\sin\varphi\,\omega^2\,ds\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Работа сил инерции всей массы брусков будет:

$$2\int_0^{s=2a}\left[\frac{p}{g}\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\,\delta\varphi\right]s^2\,ds = \frac{2}{3}\,\frac{p}{g}\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\,(2a)^3\,\delta\varphi.$$

При этом интегрировании переменной является только s.

Уравнение работ напишется так:

$$\left(-2Ga\sin\varphi - 4G_1a\sin\varphi + \frac{8}{3}\,\frac{G}{g}\,\omega^2a^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\delta\varphi = 0;$$

$$\sin\varphi \neq 0, \quad \delta\varphi \neq 0,$$

следовательно

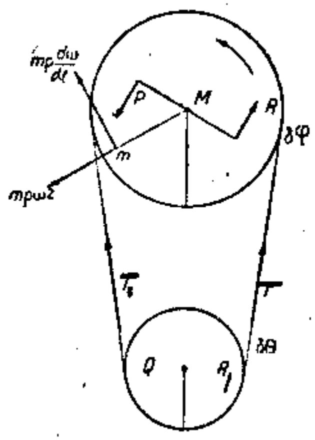
$$\omega^2\cos\varphi = \frac{3}{4}\,\frac{g}{a}\left(1 + \frac{2G_1}{G}\right).$$

Задача 47. Два вала весом P и Q и радиусов R и R_1 вращаются около параллельных осей, будучи соединены бесконечным ремнем, настолько натянутым, что скольжение отсутствует (черт. 48). На первый вал действует пара сил постоянного момента M. Найти угловое ускорение первого вала и разность натяжений в правой и левой части ремня.

Угловые перемещения валов $\delta\varphi$ и $\delta\theta$, угловые скорости ω и ω_1 и угловые ускорения $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\omega_1}{dt}$ связаны уравнениями:

$$R\delta\varphi = R_1\delta\theta,\ R\omega = R_1\omega_1,\ R\frac{d\omega}{dt} = R_1\frac{d\omega_1}{dt}.$$

Силы инерции любой точки вала массы m можно разложить на тангенциальную $m\rho\frac{d\omega}{dt}$ и центробежную $m\rho\omega^2$; при возможном повороте вала на угол $\delta\varphi$ работу дадут только тангенциальные силы: именно $-\sum m\rho\frac{d\omega}{dt}\rho\delta\varphi = -J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi$, где J — момент инерции вала относительно его оси. Так же точно для второго вала $-J_1\frac{d\omega_1}{dt}\delta\theta$. Работа момента M будет $M\delta\varphi$. Уравнение д'Аламбера напишется так:



Черт. 48.

$$-J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi - J_1\frac{d\omega_1}{dt}\delta\theta + M\delta\varphi = 0,$$

или

$$-J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi - J_1\frac{d\omega}{dt}\frac{R^2}{R_1^2}\delta\varphi + M\delta\varphi = 0,$$

но

$$J = \frac{PR^2}{2g},\quad J_1 = \frac{QR_1^2}{2g}.$$

следовательно

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2g}{R^2}\frac{M}{P+Q}.$$

Чтобы решить второй из поставленных вопросов, заменим действие ремня на нижний вал силами T и T_1 и, приложив силы инерции, напишем условия равновесия этого вала:

$$(T - T_1)R_1 - J_1\frac{d\omega_1}{dt} = 0,$$

или

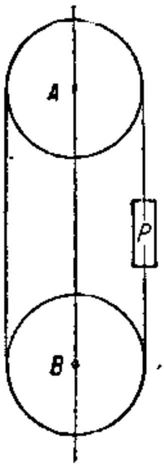
$$(T-T_1)R_1-\frac{QR_1^2}{2g}\cdot\frac{2g}{R^2}\frac{M}{P+Q}\frac{R}{R_1}=0,$$

откуда

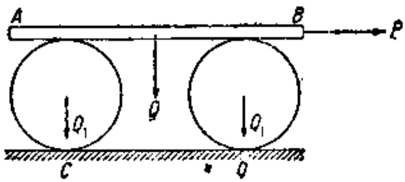
$$T-T_1=\frac{MQ}{(P+Q)R}.$$

Задача 48. На два блока A и B веса Q и радиуса R, центры которых лежат на одной вертикали, накинут бесконечный ремень, несущий груз. Определить, с каким ускорением будет двигаться груз (черт. 49).

Моменты тангенциальных сил инерции блоков относительно их геометрических осей соответственно равны $-J\frac{d\omega}{dt}$; J — момент инерции блока относительно той же оси; $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение. Ускорение j груза P выразится так: $j=R\,\frac{d\omega}{dt}$; возможное перемещение системы определяется поворотом блоков на угол $\delta\varphi$. Смещение δs груза P при этом равно $R\delta\varphi$.



Черт. 49.



Черт. 50.

Уравнение д'Аламбера напишется так:

$$-2J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi+PR\delta\varphi-\frac{P}{g}\cdot jR\delta\varphi=0;$$

но

$$J=\frac{QR^2}{2g},$$

и

$$j=\frac{Pg}{P+Q}.$$

Задача 49. Стержень AB лежит на двух одинаковых дисках, расположенных в вертикальной плоскости (черт. 50). Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. Вес дисков — Q_1, вес стержня — Q, радиусы дисков — R. На стержень вдоль его оси действует сила P и приводит в движение стержень и диски. Определить, с каким ускорением будет двигаться стержень.

Точки C и D — мгновенные центры дисков. Возможное перемещение стержня $\delta x = 2R\delta\varphi$, где $\delta\varphi$ — угол поворота дисков вокруг центров C и D. Ускорение стержня $j = 2R\,\frac{d\omega}{dt}$; $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение дисков. Движение стержня поступательное, равнодействующая его сил инерции $\frac{Q}{g}j$.

Приложим к системе все силы инерции, дадим ей возможное перемещение, повернув диски вокруг точек C и D на угол $\delta\varphi$. При этом силы, приложенные к стержню, совершат работу:

$$\left(P - \frac{Q}{g}j\right)\cdot 2R\delta\varphi.$$

Силы, приложенные к каждому из дисков, совершат работу:

$$-J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi$$

(см. зад. 40),

$$J = \frac{3Q_1R^2}{2g}$$

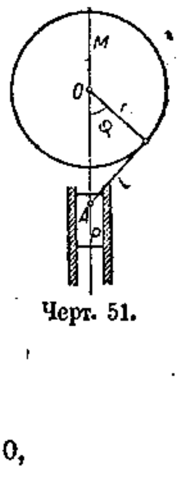
J момент инерции диска относительно точки C или D.

Сумма работ должна равняться нулю:

$$2R\left(P - \frac{Q}{g}j\right)\delta\varphi - \frac{3Q_1R^2}{g}\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi = 0,\ \delta\varphi \lessgtr 0,$$

откуда

$$j = \frac{4Pg}{4Q + 3Q_1}.$$



Черт. 51.

Задача 50. Груз P, скользя в вертикальных направляющих, приводит своим весом в движение маховик M веса Q помощью кривошипного механизма, в котором $l = r$. Найти начальное угловое ускорение маховика, если начальная скорость равна нулю. Весом шатуна пренебрегаем (черт. 51).

Положение всей системы определяется одним параметром φ — углом между кривошипом и вертикалью. Расстояние $OA = s$ в зависимости от угла φ представится так: $s = 2r\cos\varphi$.

Возможное перемещение маховика определяется изменением угла φ, т. е. $\delta\varphi$, груза P — изменением расстояния s, т. е. δs. Очевидно:

$$\delta s = -2r\sin\varphi\delta\varphi.$$

Между угловым ускорением маховика $\frac{d\omega}{dt}$ и ускорением груза j существует связь, которую получим, диференцируя дважды выражение $z = 2r\cos\varphi$:

$$\frac{dz}{dt} = -2r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$j = \frac{d^2z}{dt^2} = -2r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2r\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

Угол φ отсчитывается против стрелки часов, угловую скорость считаем положительной по стрелке часов, поэтому:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega;\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}.$$

для начального момента $\omega = 0$:

$$j = 2r\sin\varphi\frac{d\omega}{dt}.$$

Обозначим момент инерции маховика относительно оси вала через J, тогда момент тангенциальных сил инерции относительно оси вала будет $J\frac{d\omega}{dt}$, а их работа при возможном перемещении: $J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi$.

Работа эта положительна при $\delta\varphi > 0$ и отрицательна при $\delta\varphi < 0$. Работа силы веса P и силы инерции груза $\frac{P}{g}j$ будет:

$$\left(P - \frac{P}{g}j\right)\delta z,$$

следовательно

$$J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi + P\left(1 - \frac{j}{g}\right)\delta z = 0.$$

Подставляя значения δz и j, имеем:

$$\left\{J\frac{d\omega}{dt} - P\left(1 - \frac{2r}{g}\sin\varphi\frac{d\omega}{dt}\right)2r\sin\varphi\right\}\delta\varphi = 0,$$

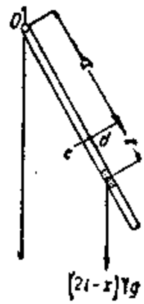
откуда, сокращая на $\delta\varphi$, найдем:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2rgP\sin\varphi}{Jg + 4r^2P\sin^2\varphi}.$$

Задача 51. Цилиндрический однородный стержень длины $2l$ и веса P имеет на одном конце неподвижный шарнир o. Стержень отклонен от вертикального положения на некоторый угол и предоставлен самому себе. Найти изгибающий момент в сечении cd, отстоящем от точки o на расстоянии x в тот момент, когда стержень образует с вертикалью угол φ (черт. 52).

Обозначим через γ линейную плотность стержня: $\gamma=\frac{P}{2lg}$, через J— момент инерции стержня относительно оси вращения o:

$$J=\frac{4Pl^2}{3g};$$



Черт. 52.

через $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение стержня.

Применяя уравнение д'Аламбера, решим, с каким ускорением начнет двигаться стержень.

Уравнение напишется так:

$$\left(-J\frac{d\omega}{dt}+Pl\sin\varphi\right)\delta\varphi=0,$$

Действительно, слагающая силы веса, перпендикулярная к стержню, равна $P\sin\varphi$, перемещение центра тяжести стержня $l\delta\varphi$, работа веса:

$$Pl\sin\varphi\,\delta\varphi;$$

работа тангенциальных сил инерции:

$$-J\frac{d\omega}{dt}\delta\varphi.$$

Определяя $\frac{d\omega}{dt}$, найдем:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g\sin\varphi}{4l};$$

ускорение взято со знаком плюс; движение по стрелке часов.

Относительно сечения cd стержень изгибается: 1) весом нижней его части по стрелке часов. Момент этот равен

$$\frac{(2l-x)^2\,\gamma g\sin\varphi}{2};$$

2) тангенциальными силами инерции — против стрелки часов.

Чтобы вычислить момент сил инерции относительно сечения cd, возьмем элемент стержня dz на расстоянии z от cd; его тангенциальное ускорение $(x+z)\frac{d\omega}{dt}$, масса γdz, плечо z, изгибающий момент, который создает сила инерции, будет

$$-(x+z)z\gamma\frac{d\omega}{dt}dz,$$

момент этот имеет знак, противоположный знаку момента сил веса.

Совокупность сил инерции части ниже сечения cd создает момент, равный следующему интегралу:

$$-\int_0^{2l-x}(x+z)z\gamma\frac{d\omega}{dt}dz=$$

$$=-\gamma\frac{d\omega}{dt}\frac{x+4l}{6}(2l-x)^2.$$

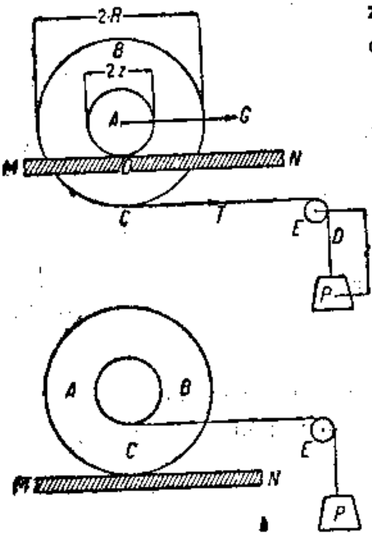
Подставляя значение углового ускорения, найдем полный изгибающий момент:

$$M=\frac{(2l-x)^2\gamma g\sin\varphi}{2}-$$

$$-\gamma\frac{g\sin\varphi}{4l}\,\frac{x+4l}{2}(2l-x)^2,$$

или

$$M=-\frac{\gamma g\sin\varphi}{8l}(x^3-4lx^2+4l^2x).$$



Черт. 53.

Если проследить изменение момента M, то максимум его будет при $x=\frac{2l}{3}$, а минимум — при $x=2l$. При последнем значении x он обращается в нуль.

Задача 52. По горизонтальным рельсам MN может катиться без скольжения вал A данного веса и радиуса r (черт. 53). На середину вала насажен шкив B, вес которого вместе с валом обозначен через Q, а радиус равен R. Шкив обмотан нитью C, переброшенной через неподвижный блок E и несущей на конце груз P. Определить движение вала. Какое различие получилось бы, если бы нить была навернута не на выдающийся шкив, а на выемку вала радиуса $R<r$?

Все силы, действующие на вал, можно перенести в вертикальную плоскость, проходящую через нить, и задачу рассматривать как плоскую.

Движение плоской фигуры шкива будем рассматривать как сложное, состоящее из поступательного вместе с центром шкива и вращательного вокруг центра.

Пусть с начала движения центр шкива прошел путь x влево и шкив повернулся вокруг центра на угол φ против стрелки часов, тогда между этими величинами существует соотношение: $x = r\varphi$, равным образом для возможных перемещений имеем: $\delta x = r\delta\varphi$.

Между скоростями вращательного и поступательного движения ω и $\frac{dx}{dt}$ получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}, \text{ или } \frac{dx}{dt} = r\omega.$$

Наконец для ускорений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Если бы шкив двигался только поступательно, то пройденному влево пути $r\varphi$ соответствовал бы подъем груза P на ту же величину.

Если бы шкив только вращался, то повороту на угол φ соответствовало бы опускание груза P на величину $R\varphi$ большую $r\varphi$.

При наличии двух движений груз спустится на величину z, назовем его ординатой центра тяжести, считая от начального положения $z = (R - r)\varphi$; очевидно:

$$\frac{dz}{dt} = (R - r)\frac{d\varphi}{dt} = (R - r)\omega, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = (R - r)\frac{d\omega}{dt}.$$

Названное вращение можно заменить вращением вокруг геометрического центра A и поступательным движением по горизонтальному направлению со скоростью $r\omega$ и ускорением $r\frac{d\omega}{dt}$. Движение совершается влево, если P опускается, и вправо, если P поднимается.

Имея в виду написать для данного случая основное уравнение динамики, рассмотрим все силы, включая силы инерции, приложенные к системе: вал, шкив и груз.

Общий вес вала и шкива Q и реакция рельс не даст работы при возможном перемещении вала. Сила инерции G поступательного движения равна $\frac{Q}{g}\frac{d^2z}{dt^2}$, или $\frac{Q}{g}\, r\, \frac{d\omega}{d}$. Момент пары тангенциальных сил инерции равен $J\frac{d\omega}{dt}$, где J — момент инерции вала и шкива относительно их оси; если назвать через k радиус инерции, от $J = \frac{Q}{g}\, k^2$.

Центробежные силы инерции вала и шкива все пересекаются на оси вала и, взаимно уравновешиваясь, не дают работы при возможных перемещениях.

Сила инерции груза P будет

$$\frac{P}{g}\frac{d^2z}{dt^2},$$

или

$$\frac{P}{g}(R-r)\frac{d\omega}{dt}.$$

Дадим грузу P возможное перемещение δz вниз.

Шкив повернется вокруг O на угол $\delta\varphi$ против стрелки часов; при этом

$$\delta z=(R-r)\,\delta\varphi.$$

Работа всех вышеназванных сил при возможном перемещении δz будет:

$$P(R-r)\,\delta\varphi;\ -\frac{P}{g}(R-r)\frac{d\omega}{dt}(R-r)\,\delta\varphi;$$

$$-\frac{Q}{g}\,r\,\frac{d\omega}{dt}\,r\delta\varphi;\ -\frac{Q}{g}\,k^2\frac{d\omega}{dt}\,\delta\varphi.$$

Сумма их при всяком $\delta\varphi$ равна нулю; поэтому

$$P(R-r)-\frac{P}{g}(R-r)^2\frac{d\omega}{dt}-\frac{Q}{g}\,r^2\frac{d\omega}{dt}-\frac{Q}{g}\,k^2\frac{d\omega}{dt}=0,$$

откуда ускорение центра A, которое назовем через j, будет:

$$j=r\,\frac{d\omega}{dt}=\frac{Pr(R-r)\,g}{P(R-r)^2+Q(r^2+k^2)},$$

но $R>r$, следовательно вал покатится действительно влево.

Если при рассмотрении второго случая сохранить прежние обозначения, то R будет меньше r, общее уравнение сохранит свою силу, но j будет меньше нуля, т. е. вал покатится вправо.

III. ТЕОРЕМА ЖИВЫХ СИЛ.

Приращение живой силы системы за данный промежуток времени равно работе всех сил, приложенных к системе.

Силы, приложенные к системе, можно разделить на три группы: первая группа: силы внешние, непосредственно приложенные к системе; вторая группа: силы внутренние, являющиеся результатом взаимодействия точек системы между собою; третья группа: силы реакции связей.

Если система состоит из одного твердого тела, то вторая группа сил не дает работы, так как расстояние точек твердого тела не меняется.

Если связи не сопровождаются трением и не зависят от времени, т. е. каждая точка системы перемещается по неподвижной кривой, то третья группа сил не дает работы.

Живая сила системы выражается суммой $\sum\frac{mv^2}{2}$, где m — масса отдельных точек системы, v — скорость их; сумма распространяется на все точки системы.

Если система движется поступательно, то скорости всех точек одинаковы, и

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum m=\frac{Mv^2}{2};$$

здесь M — масса всей системы.

Если система вращается вокруг оси с угловой скоростью ω, то живая сила ее равна $J\frac{\omega^2}{2}$, где J — момент инерции системы относительно оси вращения.

Теорема Кенига. Живая сила системы складывается из живой силы, которую имела бы масса системы, помещенная в центре тяжести системы, и живой силы системы в движении относительно осей постоянного направления с началом в том же центре тяжести.

На основании этой теоремы можно вычислить живую силу, например катящегося диска, рассматривая его движение как слагающееся из поступательного движения вместе с центром тяжести и вращения вокруг центра тяжести.

Задача 53. Три неподвижные точки A, B и C с равными массами m_1 притягивают лежащую на оси симметрии точку M с массой m силами прямо пропорциональными массам и их расстояниям.

Сила притяжения единицы массы на единице расстояния равна k; точка M в начале была в покое и занимала положение M_0. С какой скоростью придет она в точку D, если

$$M_0D = 4BD,\ BD = a$$

(черт. 54)?

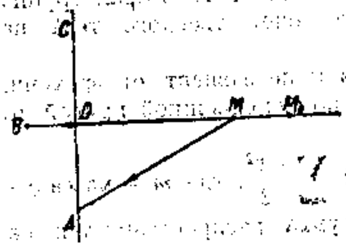
Возьмем промежуточное положение точки M. Силы, притягивающие ее к точкам A, B и C, выразятся так:

$$F_A = kmm_1AM,\ F_B = kmm_1BM,\ F_C = kmm_1CM.$$

Проекции сил F_A и F_C на ось симметрии будут:

$$\text{пр. } F_A = kmm_1x,\ \text{пр. } F_C = kmm_1x;$$

здесь через x обозначено расстояние точки M от D.



Черт. 54.

Напишем уравнение живых сил для промежутка времени, когда точка M переходит из M_0 в D:

$$\frac{mv^2}{2} = -\int_{4a}^{0}\left\{2kmm_1x + kmm_1(x+a)\right\}dx,$$

или

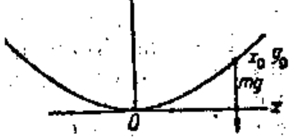
$$v^2 = 56km_1a^2.$$

Задача 54. Тяжелое колечко падает по пруту, согнутому в виде параболы, ось которой вертикальна (черт. 55).

Найти давление колечка на прут в нижней точке, если полагать, что трение отсутствует, уравнение параболы $x^2 = 2y$, а координаты начального положения колечка $x_0 = 2$, $y_0 = 2$.

В точке o давление колечка F складывается из силы веса и нормальной слагаемой силы инерции, следовательно

$$F = mg + \frac{mv^2}{\rho},$$



Черт. 55.

где v — скорость колечка и ρ — радиус кривизны параболы в точке o. Чтобы найти скорость v, напишем уравнение живых сил. Реакция связи работы не дает, а потому

$$\frac{mv^2}{2} = mgy_0,$$

откуда

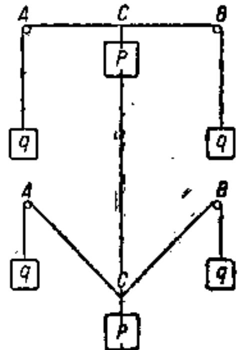
$$v^2 = 4g.$$

Радиус кривизны параболы в вершине равен ее параметру, а потому

$$\rho = 1, \quad F = 5mg.$$

Задача 55. На блоки A и B, оси которых расположены на одном уровне, накинута нить, несущая на концах равные грузы q (черт. 56). В точке C, середине отрезка AB, к нити прикреплен груз p и предоставлен самому себе. Определить, на какое расстояние x опустится груз p.

Будем рассматривать систему, состоящую из трех грузов p, q и q. Взаимодействие между грузами направлено по нити, длина которой не меняется, следовательно при перемещении грузов работа внутренних сил равна нулю.



Черт. 56.

Начальная и конечная скорость грузов равна нулю, следовательно нулю же должна быть равна работа сил тяжести. Назовем расстояние AB через $2a$, тогда

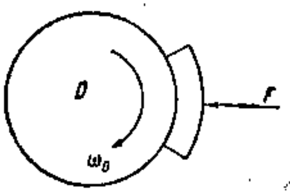
$$px - 2q\left(\sqrt{x^2 + a^2} - a\right) = 0;$$

решая это уравнение, имеем для начального момента $x_1 = 0$ и для конечного:

$$x_2 = \frac{4apq}{4q^2 - p^2};$$

x_2 должно быть больше 0; поэтому $2q > p$. Если $2q = p$, то $x_2 = \infty$, и груз p не остановится.

Задача 56. Массивный диск радиуса R и веса Q вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω_0. С какой силой F надо нажать тормаз, чтобы остановить диск, дав ему сделать только один оборот? Коэфициент трения f (черт. 57).



Черт. 57.

Момент инерции диска относительно оси O равен

$$\frac{QR^2}{2g},$$

его живая сила равна

$$\frac{QR^2}{2g} \cdot \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Работа силы трения на одном обороте диска равна $2\pi R \cdot Ff$.

На основании теоремы живых сил:

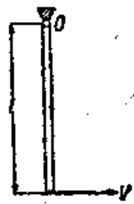
$$\frac{QR^2}{2g} \frac{\omega_0^2}{2} = 2\pi R \cdot Ff,$$

откуда

$$F = \frac{QR\omega_0^2}{8\pi f g}.$$

Задача 57. Стержень длиною l подвешен на шарнире к горизонтальной оси O. Какую скорость v нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы он поднялся до горизонтального положения (черт. 58)?

Если нижний конец обладает начальной скоростью v, то угловая скорость стержня в начале движения равна $\frac{v}{l}$, момент инерции стержня относительно оси равен $\frac{Ml^2}{3}$, где M — масса стержня, живая сила стержня в начальный момент равна $\frac{Ml^2}{3} \cdot \frac{v^2}{2l^2}$. При переходе стержня в горизонтальное положение его центр тяжести поднимется на длину $\frac{l}{2}$, а потому, принимая во внимание закон живых сил, получим:



Черт. 58.

$$\frac{Ml^2}{3}\frac{v^2}{2l^2} = Mg\frac{l}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{3lg}.$$

Задача 58. Тяжелая однородная палочка движется в шаровой чаше радиуса a, оставаясь в вертикальной плоскости, проходящей через центр чаши O. Начальное положение палочки AB указано на чертеже. Найти угловую скорость палочки в тот момент, когда она достигнет горизонтального положения. Длина палочки A равна радиусу чаши. Радиус инерции палочки относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через центр O, равен k (черт. 59).

Расстояние палочки от точки O равно $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, центр тяжести палочки опустится на половину этого расстояния. Сила тяжести Mg совершит работу $Mg\frac{a\sqrt{3}}{4}$, равную живой силе палочки в конечном положении $Mk^2\frac{\omega^2}{2}$, откуда

Черт. 59.

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ag}{k^2}.$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину и перпендикулярной чертежу, равен $\frac{Ma^2}{12}$. Расстояние этой оси от оси, параллельной и проходящей через точку O, равно $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, а потому

$$Mk^2 = \frac{Ma^2}{12} + \frac{3}{4}Ma^2,$$

откуда

$$k = a\sqrt{\frac{10}{12}} = a\sqrt{\frac{5}{6}}$$

Задача 59. Однородный тяжелый диск катится вверх по наклонной плоскости. При этом центр его C обладает начальной скоростью v_0. Определить, как высоко поднимется диск (черт. 60)

Если скорость центра диска v_0, то угловая скорость вращения диска вокруг его центра равна $\frac{v_0}{r}$, где r — радиус диска. На основании теоремы Кенига живая сила диска напишется в виде суммы:

$$\frac{Mv_0^2}{2} + J\frac{v_0^2}{2r^2},$$

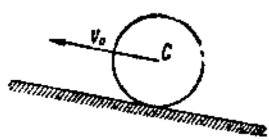
но $J = \frac{Mr^2}{2}$, а потому живая сила диска в начальный момент равна

$$\frac{3}{4}Mv_0^2.$$

Уравнение живых сил напишется так:

$$\frac{3}{4}Mv_0^2 = Mgx,$$

где x — высота подъема центра тяжести.



Черт. 60.

Отсюда

$$x = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}.$$

Если бы диск при тех же начальных условиях двигался по наклонной плоскости поступательно, то начальная живая сила была бы равна $\frac{Mv_0^2}{2}$, а высота подъема y определилась бы так:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = Mgy,$$

откуда

$$y=\frac{v_0^2}{2g}.$$

Очевидно

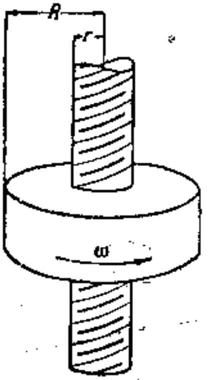
$$x>y.$$

Задача 60. На вертикально поставленный винт надета массивная гайка. Ей сообщена угловая скорость ω такого направления, что гайка начинает подниматься. На какую высоту поднимется гайка. Трение отсутствует. Шаг винта h, радиус r, радиус гайки R (черт. 61).

Обозначим скорость движения гайки вдоль оси через v. Скорость эта найдется из пропорции:

$$\frac{v}{h}=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Считая, что гайка имеет форму диска, найдем ее момент инерции J относительно оси винта (M — масса гайки):



Черт. 61.

$$J=\frac{M}{2}(R^2+r^2).$$

Пусть высота подъема гайки x, тогда на основании уравнения живых сил имеем:

$$Mgx=\frac{M}{2}\left(\frac{\omega h}{2\pi}\right)^2+\frac{M}{2}(R^2+r^2)\frac{\omega^2}{2},$$

откуда

$$x=\frac{\omega^2}{4g}\left\{\frac{h^2}{2\pi^2}+(R^2+r^2)\right\}.$$

Задача 61. Груз P, скользя в вертикальных направляющих, приводит своею тяжестью в движение маховик M того же веса P помощью кривошипного механизма, в котором длина кривошипа r равна длине шатуна l (черт. 62).

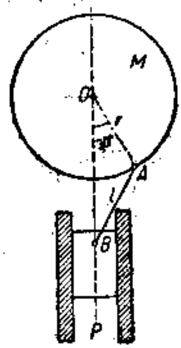
Маховик представляет собой однородный диск радиуса r. Груз P без начальной скорости спускается от положения, определяемого углом кривошипа OA с вертикалью OB, равным 60°, до нижнего положения, определяемого углом 30°. Найти конечную его скорость.

Назовем угол кривошипа OA с вертикалью через φ, тогда расстояние $x = OB$ выразится так

$$x = 2r\cos\varphi,$$

и скорость груза P будет

$$v = \frac{dx}{dt} = -2r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$



Черт. 62.

Считая направление угловой скорости кривошипа по стрелке часов, а отсчет угла φ от вертикали OB — против стрелки, получим:

$$v = 2r\omega\sin\varphi.$$

Живая сила груза равна $\frac{Pv^2}{2g}$. Живая сила маховика:

$$\frac{Pr^2}{2g}\cdot\frac{\omega^2}{2}.$$

Работа силы тяжести при падении груза до нижнего положения:

$$2rP(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = rP(\sqrt{3} - 1).$$

Уравнение живых сил напишем так:

$$\frac{Pv^2}{2g} + \frac{Pr^2}{2g}\cdot\frac{\omega^2}{2} = rP(\sqrt{3} - 1);$$

или, исключая ω помощью равенства:

$$v = 2r\omega\sin 30^\circ,$$

имеем:

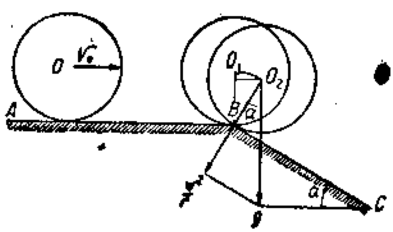
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{v^2}{g} = r(\sqrt{3} - 1),$$

откуда

$$v^2 = \frac{4}{3}gr(\sqrt{3} - 1).$$

Задача 62. По горизонтальной плоскости AB катится шар радиуса r с постоянной скоростью v_0. Затем шар скатывается по плоскости BC, наклоненной к горизонту под углом α. Какое наибольшее значение можно придать углу α, чтобы при переходе на наклонную плоскость шар не делал бы скачка (черт. 63)?

Если предположить, что при переходе с одной плоскости на другую шар не делает скачка, то движение его вблизи точки B представляется следующим образом. Дойдя до точки B, шар вращается вокруг оси, проходящей через B и перпендикулярной чертежу, на угол α, затем начинает двигаться по наклонной плоскости BC. Напишем уравнение живых сил для промежутка времени, в течение которого шар делает поворот на угол α вокруг указаной оси.



Черт. 63.

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр, равен $0{,}4Mr^2$, где M — масса шара.

Относительно оси вращения момент инерции равен $0{,}4\,Mr^2 + Mr^2$, или $1{,}4\,Mr^2$.

Угловая скорость в начале вращения $\frac{v_0}{r}$, в конце $\frac{w}{r}$; w — линейная скорость центра шара в начале движения по BC.

Живая сила шара в начале поворота равна

$$\frac{1{,}4}{2}Mr^2\left(\frac{v_0}{r}\right)^2,$$

в конце:

$$\frac{1{,}4}{2}Mr^2\left(\frac{w}{r}\right)^2.$$

Работа силы тяжести за тот же промежуток времени равна

$$Mgr(1-\cos\alpha).$$

Уравнение живых сил напишется так:

$$0{,}7\,Mr^2\left(\frac{w}{r}\right)^2 - 0{,}7Mr^2\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = Mgr(1-\cos\alpha).$$

В тот момент, когда закончится поворот шара вокруг точки B, ускорение, сообщаемое его центру силой тяжести, будет равно g.

Его проекция на направление радиуса, соединяющая центр с точкой B, в этот момент равна $\frac{w^2}{r}$, т. е. $\frac{w^2}{r} = g\cos\alpha$ *).

*) Этот момент можно охарактеризовать еще так: когда шар без скачка переходит на плоскость BC, слагаемая веса на направление O_2B равна $Mg\cos\alpha$ и уравновешивается центробежной силой инерции $M\frac{w^2}{r}$, так что в этот момент шар на плоскость давления не производит.

Подставляя в уравнение живых сил, имеем:

$$0{,}7\cos\alpha-(1-\cos\alpha)=0{,}7\,\frac{v_0^2}{g\cdot r},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{17}\left(10+\frac{7v_0^2}{rg}\right).$$

Такова предельная величина $\cos\alpha$. Угол α может быть и меньше угла, соответствующего этому значению косинуса, следовательно

$$\cos\alpha\geqq\frac{1}{17}\left(10+\frac{7v_0^2}{rg}\right).$$

Это условие может быть выполнено только в том случае, если

$$\frac{v_0^2}{rg}<1.$$

Если

$$\frac{v_0^2}{rg}=1,$$

то

$$\cos\alpha=1,\ \alpha=0.$$

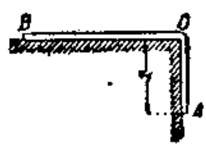
Задача 63. Найти закон движения тяжелой однородной цепочки, свесившейся с края горизонтального стола (черт. 64). Длина цепочки l, начальная скорость $v_0=0$.

Назовем скорость движения цепочки через v, длину свесившегося конца — x, линейную плотность цепочки — γ.

Сила, движущая цепочку, равна весу $g\gamma x$. Если длина свесившейся части изменилась от x_0 до x, то работа силы тяжести равна $g\gamma\int\limits_{x_0}^{x}xdx$; живая сила цепочки $\gamma\frac{lv^2}{2}$.

Очевидно

$$\gamma\frac{lv^2}{2}=g\gamma\int\limits_{x_0}^{x}xdx;$$



Черт. 64.

но

$$v=\frac{dx}{dt},$$

а потому

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x^2-x_0^2}.$$

Разделив переменные, имеем:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-x_0^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt;$$

интегрируя в пределах x_0, x и 0, t, получим:

$$\ln(x+\sqrt{x^2-x_0^2})-\ln x_0=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t,$$

или

$$x+\sqrt{x^2-x_0^2}=x_0e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}.$$

Помножим и разделим левую часть на $x-\sqrt{x^2-x_0^2}$, тогда

$$x-\sqrt{x^2-x_0^2}=x_0e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}.$$

Сложив уравнения, получим закон движения цепочки:

$$x=\frac{x_0}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}}+e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}\right).$$

Можно предложить второе решение задачи.

Напишем уравнение движения центра тяжести цепочки.

Перемещение центра тяжести цепочки всегда равно удлинению свесившейся части ее, поэтому ускорение центра тяжести можно обозначить через $\frac{d^2x}{dt^2}$. Движущая сила равна $g\gamma x$, масса γl. Очевидно

$$\gamma l\frac{d^2x}{dt^2}=g\gamma x,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{l}x=0.$$

Характеристическое уравнение $r^2-\frac{g}{l}=0$ имеет два корня:

$$r_1=\sqrt{\frac{g}{l}}\text{ и }r_2=-\sqrt{}$$

и интеграл диференциального уравнения представится так:

$$x = Ae^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}.$$

Для определения произвольных постоянных A и B заметим, что в начальный момент свешивается отрезок равный x_0, а скорость

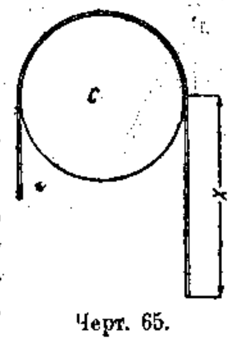
$$v_0 = 0;$$

$$x_0 = A + B,\ 0 = A - B,$$

откуда

$$A = B = \frac{x_0}{2}.$$

Задача 64. На цилиндр, ось которого C горизонтальна, положена цепочка, расположенная в плоскости, перпендикулярной к оси. Радиус цилиндра — R, длина цепочки — l. В начальный момент с одной стороны цилиндра свешивается вдвое больший отрезок цепочки, чем с другой. Трение отсутствует. Цепочка начинает двигаться без начальной скорости. Определить скорость цепочки, когда конец короткого отрезка подойдет к цилиндру (черт. 65).



Черт. 65.

Обозначим вес единицы длины цепочки через p, длину большого отрезка, свешивающегося с цилиндра, — через l; сила веса, приводящая цепочку в движение, равна $p\{x - (l - \pi R - x)\}$, вес всей цепочки pl, масса ее $\frac{pl}{g}$.

Уравнение живых сил напишется так:

$$p\int\limits_{2\frac{(l-\pi R)}{3}}^{l-\pi R} \{x - (l - \pi R - x)\}\,dx = \frac{lp}{2g}v^2,$$

или

$$\left[\frac{\{2x - (l - \pi R)\}^2}{4}\right]_{2\frac{(l-\pi R)}{3}}^{l-\pi R} = \frac{lv^2}{2g},$$

откуда

$$v = \frac{2}{3}(l - \pi R)\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Задача 65. Четыре одинаковых, расположенных в вертикальной плоскости, стержня, соединенных шарнирами, образуют ромб $ABCD$. Шарниры A и B неподвижны. Определить период колебания системы при малых отклонениях от положения равновесия (черт. 66).

Назовем длину стержней через l. Момент инерции стержней AD и BC относительно осей шарниров A и B напишется так:

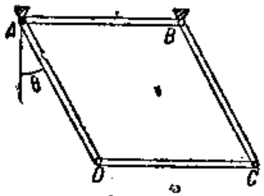
$$J=\frac{Pl^2}{3g},$$

где P — вес стержня.

Назовем угловую скорость вращения стержней AD и BC через ω, тогда скорость всех точек стержня DC будет ωl. Живая сила всей системы будет:

$$\frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{Pl^2}{3g}+\frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{Pl^2}{3g}+\frac{\omega^2 l^2}{2}\cdot\frac{P}{g}.$$

Будем отсчитывать ординаты центров тяжести стержней от неподвижного стержня, тогда ординаты центров тяжести крайних стержней при угле отклонения θ будут $\frac{l}{2}\cos\theta$, нижнего стержня $l\cos\theta$.



Черт. 66.

Пусть угол отклонения системы изменился от θ_0 до θ; уравнение живых сил для этого промежутка напишется так:

$$\omega^2\frac{Pl^2}{3g}+\omega^2\frac{Pl^2}{2g}=2Pl(\cos\theta-\cos\theta_0).$$

Ввиду малости углов θ и θ_0 можно положить:

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=1-\frac{\theta^2}{2},$$

$$\cos\theta_0=1-\frac{\theta_0^2}{2};$$

тогда, полагая:

$$\omega=-\frac{d\theta}{dt},$$

получим:

$$\frac{d\theta}{dt}=-\sqrt{\frac{6}{5}}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}=-\sqrt{\frac{6}{5}}\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\theta_0^2-\theta^2};$$

у радикала взят минус, так как угол θ откладывается от вертикали против стрелки часов и с возрастанием переменного t убывает.

Разделяя переменные, имеем:

$$-\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}=\sqrt{\frac{6}{5}}\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt,$$

проинтегрируем это уравнение в пределах θ_0, $-\theta_0$ и 0, T:

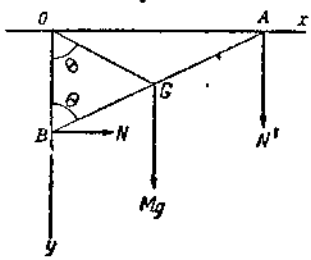
$$\left\{\arccos\frac{\theta}{\theta_0}\right\}_{\theta_0}^{-\theta_0}=\sqrt{\frac{6}{5}}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T,$$

откуда

$$T=\pi\sqrt{\frac{5}{6}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Система будет колебаться с тем же периодом, с каким колеблется маятник длины $\frac{5}{6}l$.

Задача 66. Определить движение бесконечно-тонкого однородного тяжелого стержня AB длины $2l$, концы которого скользят без трения по двум неподвижным осям ox и oy, из которых одна вертикальна, другая горизонтальна (черт. 67).



Черт. 67.

Положение стержня зависит от угла yoG который образует с осью oy радиус oG, соединяющий начало с центром тяжести G, серединой AB.

Приложим теорему живых сил.

Полная живая сила складывается:

1. Из живой силы всей массы M, совмещенной с центром G, т. е. $\frac{1}{2}Mv^2$ (здесь v — скорость точки G, равная $l\frac{d\theta}{dt}$):

$$\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

2. Живой силы движения стержня по отношению к осям $Gx'y'$, параллельным неподвижным осям (теорема Кенига). Это последнее движение есть вращение вокруг оси Gz', перпендикулярной к чертежу, с угловой скоростью $\frac{d\theta}{dt}$. Эта часть живой силы представится так:

$$\frac{J}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

где $J=M\frac{l^2}{3}$ — момент инерции стержня по отношению к его центру тяжести; поэтому в относительном движении:

$$\frac{1}{2}\sum mv^2=\frac{1}{6}Ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Внутренние силы, равным образом реакции связей, не дают работы. Назовем ординату центра тяжести G через $\overline{y}$, тогда

$$\overline{y}=l\cos\theta.$$

Предположим, что стержень без начальной скорости перешел из положения, определяемого углом θ_0, в положение, определяемое углом θ. Тогда работа силы тяжести будет равна

$$Mgl(\cos\theta-\cos\theta_0),$$

следовательно

$$\frac{1}{6}Ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}Ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=Mgl(\cos\theta-\cos\theta_0),$$

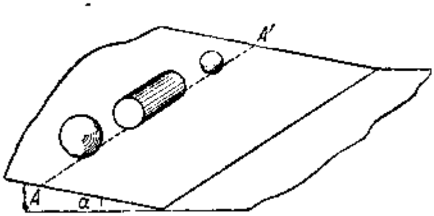
или

$$\frac{4}{3}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(\cos\theta-\cos\theta_0).$$

Если предположить, что колебание стержня совершается только вблизи оси oy в пределах $\pm$ малый угол θ, то интегрирование уравнения совершится по образцу предыдущей задачи.

Центр тяжести стержня будет колебаться, как маятник длины

$$\frac{4}{3}l.$$



Черт. 68.

Задача 67. На плоскости, наклоненной к горизонту под углом α, касаясь ее по одной и той же горизонтальной прямой, лежат разнообразные шары и цилиндры. Показать, что при скатывании без скольжения по плоскости центры тяжести всех шаров будут иметь в любой момент одну и ту же скорость; то же самое можно сказать и о цилиндрах, но скорость шаров будет больше, и они скорее достигнут подошвы (черт. 68).

Качение шара или цилиндра за бесконечно-малый промежуток времени есть вращение вокруг горизонтальной прямой, лежащей на наклонной плоскости, по которой шары и цилиндры соприкасаются с наклонной плоскостью. Момент инерции шара J относительно мгновенной оси вращения равен $0{,}4Mr^2+Mr^2$ или $1{,}4\,Mr^2$. Момент инерции цилиндра $1{,}5Mr^2$. Здесь M — масса того или другого тела.

Определим путь, пройденный катящимся телом за t секунд. Если тело прокатилось по наклонной плоскости на расстояние x, то центр тяжести опустился на расстояние $x\sin\alpha$, и сила тяжести совершила работу $Mgx\sin\alpha$. Если предположить, что все тела начали двигаться без начальной скорости от прямой AA', то приобретенная живая сила каждого из них равна работе сил тяжести. Если скорость центра тяжести обозначим через v и радиус тела через r, то угловая скорость качения равна $\frac{v}{r}$, а живая сила

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{Jv^2}{2r^2}.$$

Для шара:

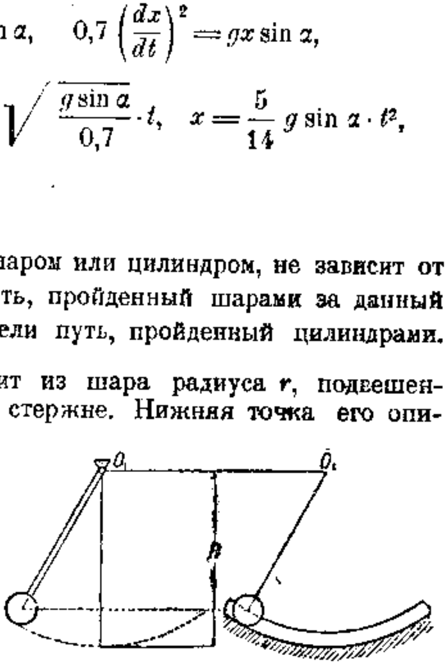
$$1{,}4\,Mr^2 \cdot \frac{v^2}{2r^2} = Mgx\sin\alpha, \quad 0{,}7\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gx\sin\alpha,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{0{,}7}}\,dt, \quad 2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{0{,}7}}\cdot t, \quad x = \frac{5}{14}\,g\sin\alpha\cdot t^2,$$

для цилиндра $x = \frac{5}{15}\,g\sin\alpha t^2$.

Как видим, путь, пройденный шаром или цилиндром, не зависит от массы и размеров этого тела. Путь, пройденный шарами за данный промежуток времени, больше, нежели путь, пройденный цилиндрами.

Задача 68. Маятник состоит из шара радиуса r, подвешенного к точке O_1 на невесомом стержне. Нижняя точка его описывает окружность радиуса R. Такой же шар положен в круговой жолоб радиуса R. Поверхности шара и жолоба шероховаты, и шар может только катиться по жолобу. Центры шаров в начальном положении находятся на одном уровне и начинают двигаться без начальной скорости. Каково отношение скоростей центров тяжести каждого из шаров при прохождении через положение равновесия (черт. 69)?



Черт. 69.

При каком соотношении между радиусами скорости эти будут одинаковы?

Центры тяжести того и другого шара начинают двигаться от одного уровня, следовательно проходя через положение равновесия, шары обладают одной и той же живой силой, равной работе силы тяжести.

Живая сила катящегося шара на основании предыдущей задачи выразится так: $\frac{1{,}4}{2}Mr^2\frac{v_2^2}{r^2}$, где M — масса шара, r — его радиус, v_2 — скорость его центра.

Чтобы написать живую силу маятника, заметим, что он вращается около оси O_1 с угловой скоростью $\frac{v_1}{R-r}$; здесь v_1 — линейная скорость центра тяжести шара. Момент инерции относительно оси O_1 равен $\frac{2}{5} Mr^2 + M(R-r)^2$.

Для одного и того же уровня, сравнивая обе живые силы, имеем:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{5} Mr^2 + M(R-r)^2\right\}\frac{v_1^2}{(R-r)^2} = \frac{1}{2}\, 1{,}4\, Mr^2 \frac{v_2^2}{r^2},$$

откуда

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{7(R-r)^2}{2r^2 + 5(R-r)^2}};$$

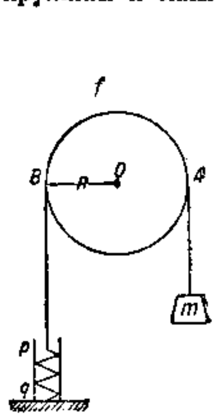
скорости v_1 и v_2 будут равны при $R = 2r$.

Задача 69. Однородный блок массы M и радиуса R вращается без трения вокруг горизонтальной оси O, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости. Через этот блок перекинута нить mfp, не имеющая массы; к концу ее привязан груз массы m. Другой конец привязан к цилиндрической пружине pq, прикрепленной к неподвижному полу. Исследовать движение груза m, полагая, что в начале движения груз был в покое, пружина была не натянута (черт. 70).

Обозначим момент инерции блока относительно оси O через J, угловую скорость блока — ω, силу упругости пружины — через kx, x — смещение груза m, или абсолютная вытяжка пружины, g — ускорение силы тяжести.

При падении груза m работа силы упругости пружины и силы тяжести представится так:

$$\int_0^x (mg - kx)\, dx.$$



Черт. 70.

Живая сила системы (блока и груза) будет

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2}.$$

По теореме живых сил имеем:

$$\int_0^x (mg - kx)\, dx = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2},$$

или, интегрируя:

$$\frac{1}{k}\left\{ m^2g^2-(mg-kx)^2 \right\} = \left\{ \frac{M}{2}+m \right\} R^2\,\omega^2,$$

откуда, полагая $\frac{dx}{dt}=R\omega$, найдем:

$$\frac{dx}{\sqrt{m^2g^2-(mg-kx)^2}}=\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{M}{2}+m\right)k}}. \tag{1}$$

Оба радикала взяты с одинаковыми знаками, так как, **пока груз движется вниз**, $\frac{dx}{dt}>0$.

Преобразовав найденное равенство, имеем:

$$\frac{-d\left(\frac{mg-kx}{mg}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{mg-kx}{mg}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2k}\,dt}{\sqrt{M+2m}},$$

или, выполняя интегрирование в пределах 0 и x, 0 и t, получим:

$$\operatorname{ars\,cos}\frac{mg-kx}{mg}=\frac{\sqrt{2k}\,t}{\sqrt{M+2m}},$$

или

$$\frac{mg-kx}{mg}=\cos\frac{\sqrt{2k}\,t}{\sqrt{M+2m}},$$

откуда

$$x=\frac{2}{k}\,mg\sin^2\frac{\sqrt{2k}\,t}{2\sqrt{M+2m}}.$$

Очевидно x всегда больше нуля.

Отклонение груза вниз достигает наибольшей величины $\frac{2mg}{k}$ при $t=T$; для этого момента:

$$\frac{\sqrt{2k}\cdot T}{2\sqrt{M+2m}}=\frac{\pi}{2},$$

или

$$T=\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2k}}.$$

Для обратного движения груза $\frac{dx}{dt} < 0$, и радикалы в уравнении (1) будут иметь разные знаки, но окончательный результат останется прежний, так как

$$\cos \frac{\sqrt{2k} \cdot t}{\sqrt{M+2m}} = \cos \left\{ -\frac{\sqrt{2k} \cdot t}{\sqrt{M+2m}} \right\}.$$

Таким образом груз будет совершать колебания с периодом

$$\frac{2\pi \sqrt{M+2m}}{\sqrt{2k}}.$$

Второе решение.

Применим основное уравнение динамики. Освободим систему от связи с пружиной, заменим ее действие силой kx, направленной вниз. Остановив систему, приложим все силы инерции, при этом получим состояние равновесия.

Если вертикальное смещение груза m назовем через x, то ускорение груза будет $\frac{d^2x}{dt^2}$, сила инерции:

$$-m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Момент тангенциальных сил инерции для блока будет $-J \frac{d\omega}{dt}$, где $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение блока, связанное с $\frac{d^2x}{dt^2}$ равенством $\frac{d^2x}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt}$.

Угловое возможное перемещение блока $\delta\varphi$ связано с перемещением δx груза m подобным же равенством:

$$\delta x = R\delta\varphi.$$

Уравнение д'Аламбера для возможного перемещения системы напишется так:

$$-kx\delta x - J \frac{d\omega}{dt} \delta\varphi - m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + mg\delta x = 0.$$

Первый член — работа силы, заменяющей пружину, второй — работа сил инерции блока, третий — работа силы инерции груза, четвертый — работа веса груза.

Подставляя вместо J его значение $\frac{MR^2}{2}$, получим:

$$-kx - \left(\frac{M}{2} + m\right) \frac{d^2x}{dt^2} + mg = 0,$$

или

$$(M + 2m) \frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 2\,mkg.$$

Это линейное уравнение имеет частное решение $x=\frac{mg}{k}$, а общее его решение будет складываться из частного решения и общего решения уравнения

$$(M+2m)\frac{d^2x}{dt^2}+2kx=0,$$

для которого характеристическим служит уравнение:

$$(M+2m)r^2+2k=0,$$

откуда

$$r_1=i\sqrt{\frac{2k}{M+2m}};\quad r_2=-i\sqrt{\frac{2k}{M+2m}};$$

общий интеграл последнего уравнения:

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t},$$

или

$$x=A\sin r_1t+B\cos r_2t.$$

Общий интеграл уравнения со второй частью:

$$x=A\sin t\sqrt{\frac{2k}{M+2m}}+B\cos t\sqrt{\frac{2k}{M+2m}}+\frac{mg}{k}.$$

Определим произвольные постоянные по начальным данным: при $t=0$, $x=0$, $B=-\frac{mg}{k}$, $\frac{dx}{dt}=0$, $A=0$;

подставляя эти значения, имеем:

$$x=\frac{mg}{k}\cdot\left(1-\cos t\sqrt{\frac{2k}{M+2m}}\right),$$

или

$$x=\frac{2}{k}\,mg\sin^2\frac{\sqrt{2k}\,t}{2\sqrt{M+2m}}.$$

IV. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СИСТЕМЫ.

Теорема. Центр тяжести системы движется, как материальная свободная точка, в которой сосредоточена вся масса системы, и к которой приложены силы, равные и параллельные силам, извне приложенным к системе.

Под силами, извне приложенными к системе, подразумеваются как силы, непосредственно приложенные к точкам системы, так и силы реакций связей. Проекции первых назовем X_e, Y_e, Z_e, проекции вторых R_x, R_y, R_z.

Аналитическим выражением этой теоремы будут уравнения:

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=M\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}=\sum X_e+\sum R_x,$$

$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2}=M\frac{d^2\overline{y}}{dt^2}=\sum Y_e+\sum R_y,$$

$$\sum m\frac{d^2z}{dt^2}=M\frac{d^2\overline{z}}{dt^2}=\sum Z_e+\sum R_z.$$

$\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ — координаты центра тяжести системы, M — масса системы, m — масса любой ее точки. Если система может поступательно двигаться по направлению той или иной оси координат, то сумма проекций сил реакций на эту ось равна нулю, и соответственно исчезает последний член в одном из написанных уравнений.

Уравнениям можно придать иной вид; соответственно получим новый текст теоремы:

$$\frac{d}{dx}\sum m\frac{dx}{dt}=\sum X,$$

$$\frac{d}{dy}\sum m\frac{dy}{dt}=\sum Y,$$

$$\frac{d}{dz}\sum m\frac{dz}{dt}=\sum Z;$$

здесь под X, Y, Z подразумеваются проекции внешних сил.

Теорема. Если материальная система может поступательно двигаться по направлению любой оси координат, то производная по времени от суммы проекций количеств движения всех точек системы на эту

ось равна сумме проекций на ту же ось внешних сил, приложенных к системе.

Если сумма проекций сил равна нулю, то сумма проекций количеств движения точек системы сохраняет постоянную величину.

Надо заметить, что в написанных уравнениях не участвуют внутренние силы системы.

Задача 70. Показать, что уравнения движения центра тяжести системы получаются из комбинации уравнений движения отдельных точек системы.

Разделим силы, действующие на отдельную точку системы, на три группы: силы внешние (X_e, Y_e, Z_e), внутренние (X_i, Y_i, Z_i) и силы реакций (R_x, R_y, R_z).

Силами внутренними называем силы между отдельными точками системы.

Для каждой точки системы можно написать три уравнения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X_e+X_i+R_x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y_e+Y_i+R_y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z_e+Z_i+R_z.$$

Если уравнения точек системы, написанные для каждой оси, сложить, то получим:

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=M\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}=\sum X_e+\sum R_x,$$

$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2}=M\frac{d^2\overline{y}}{dt^2}=\sum Y_e+\sum R_y,$$

$$\sum m\frac{d^2z}{dt^2}=M\frac{d^2\overline{z}}{dt^2}=\sum Z_e+\sum R_z.$$

Сумма сил внутренних для каждой оси равна нулю, так как силы эти попарно равны и прямо противоположны.

Полученная система уравнений и представляет аналитическое выражение теоремы о движении центра тяжести системы.

Задача 71. На горизонтальной отшлифованной плоскости положена соломинка AB массы m. Насекомое той же массы сначала неподвижно находится на конце A, затем оно начинает двигаться от A к B с постоянным ускорением a. Каково движение соломинки, и каково действие насекомого на соломинку?

Благодаря отсутствию трения сумма проекций внешних сил, действующих на систему (соломинка и насекомое), на направление оси соломинки равна нулю, следовательно сумма проекций количеств движения равна постоянному. Ввиду отсутствия начальных скоростей это постоянное — нуль. Принимая во внимание равенство масс насекомого и соломинки, приходим к заключению, что абсолютная скорость соломинки v и абсолютная скорость насекомого $v+u$ в сумме равны нулю, здесь u относительная скорость насекомого, равная at:

$$v+v+at=0,$$

откуда

$$v=-\frac{a}{2}t,$$

т. е. соломинка движется равноускоренно в противоположную сторону с ускорением $\frac{a}{2}$.

Сила взаимодействия между соломинкой и насекомым равна $\frac{ma}{2}$.

Задача 72. Из пушки, стоящей на горизонтальной шероховатой плоскости, производят выстрел. Относительная скорость ядра, когда оно покидает дуло пушки, v, масса его m, масса пушки M, коэфициент трения о поверхность земли f. Показать, что пушка откатится на расстояние:

$$x=\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2\cdot\frac{1}{2gf}.$$

Силы, возникающие при сгорании заряда внутри канала орудия, должны быть отнесены к категории ударных сил, а потому за тот период, пока снаряд находится внутри ствола, мы пренебрегаем горизонтальными внешними силами, действующими на пушку, сумма количеств движения пушки и снаряда равна постоянному, в данном случае нулю.

Назовем скорость пушки в момент взрыва заряда через V, тогда скорость снаряда равна $V+v$, и

$$MV+m(V+v)=0,$$

$$V=-\frac{mv}{M+m}.$$

Применим теперь теорему живых сил.

Работа силы трения о земную поверхность $Mgfx$ должна равняться живой силе пушки:

$$Mgfx=\frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2,$$

откуда

$$x=\frac{1}{2gf}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2.$$

Задача 73. Два лица стоят на абсолютно гладкой плоскости на расстоянии a друг от друга. Один из них бросает мяч массы m, другой подхватывает мяч через t секунд. Показать, что бросивший мяч начнет скользить по плоскости со скоростью $\frac{ma}{Mt}$, где M — масса бросившего мяч.

Примем за одну материальную систему наблюдателя, бросающего мяч, и самый мяч.

На эту систему не действует внешних горизонтальных сил, следовательно сумма количеств движения по горизонтальному направлению должна сохранять ту величину, которую имела в начале опыта, т. е. нуль. Горизонтальная скорость мяча равна $\frac{a}{t}$, скорость бросившего v:

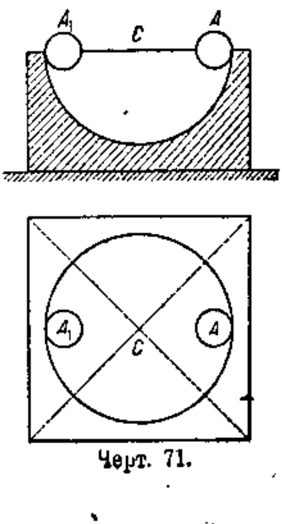
$$Mv + \frac{a \cdot m}{t} = 0,$$

откуда

$$v = -\frac{am}{tM}.$$

Знак минус показывает, что бросивший мяч начнет двигаться в сторону, противоположную движению мяча.

Задача 74. В массе M прямоугольного параллелепипеда, стоящего на абсолютно гладкой плоскости, сделано полушаровое углубление радиуса R так, что центр C этого углубления совпадает с пересечением диагоналей верхней грани. На шероховатой внутренней поверхности положен шарик массы m и радиуса r в положении A и предоставлен самому себе. Определить, что сделается с сосудом, когда шарик, катясь без скольжения, займет положение A_1. Изменится ли результат, если поверхность будет гладкой (черт. 71)?



Черт. 71.

Движение катящегося шарика будем рассматривать как сложное: поступательное движение вместе с центром тяжести и вращение вокруг оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к чертежу. Сумма проекций количеств движения последнего вращения на любую ось ввиду полной симметрии шарика относительно оси вращения равна нулю.

На систему шарик — сосуд не действуют внешние горизонтальные силы, следовательно сумма проекций количеств движения на горизонтальную ось, лежащую в плоскости чертежа, сохраняет свою величину, в данном случае, ввиду отсутствия начальных скоростей, величина эта равна нулю.

Назовем горизонтальную слагающую переносной скорости сосуда через V и горизонтальную слагающую относительной скорости центра тяжести шарика внутри сосуда u, тогда

$$MV + m(V + u) = 0,$$

$$V = -\frac{mu}{M+m}.$$

Пусть X абсцисса центра C относительно неподвижной системы координат, расположенной в плоскости чертежа обычным образом.

Пусть x абсцисса центра шарика относительно подвижных осей, параллельных первым и имеющим начало в центре C.

Очевидно:

$$V = \frac{dX}{dt}, \quad u = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{m}{M+m}\frac{dx}{dt}.$$

В то время как абсцисса x центра шарика меняется от $R - r$ до $-(R - r)$, абцисса X меняется от X_1 до X_2.

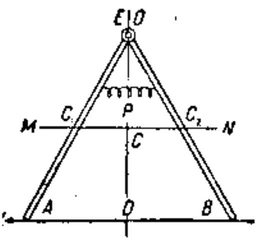
Проинтегрировав уравнение в этих пределах, имеем:

$$X_2 - X_1 = \frac{2m}{M+m}(R - r).$$

Знак плюс показывает, что перемещению центра шарика влево соответствует перемещение сосуда вправо.

Если бы шарик скользил, а не катился, изменились бы скорости V и u, но результат остался бы тот же самый.

Задача 75. Два одинаковых стержня, лежащие на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости и соединенные концами помощью шарнира O, стремятся раздвинуться под действием пружины P, но удерживаются нитью, соединяющей концы A и B (черт. 72). Какую траекторию опишут концы A и B, если нить оборвется?



Черт. 72.

Проведем прямую ED, равноделящую угол AOB.

Центр тяжести всей системы C лежит на этой равноделящей. Центры тяжести C_1 и C_2 отдельных стержней AO и BO лежат на прямой MN, перпендикулярной к ED и проходящей через C. Ввиду отсутствия горизонтальных сил, действующих на систему, центр тяжести C останется в покое. Прямая C_1C_2 всегда проходит через C. Движения центров тяжести C_1 и C_2 стержней ввиду симметричного расположения стержней и одинаковых условий действия сил будут служить одно другому зеркальным отражением относительно прямой ED.

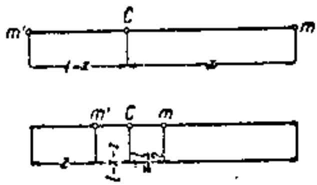
Из двух последних замечаний заключаем, что центры C_1 и C_2 будут двигаться по направлению, перпендикулярному к ED, а точка O — вдоль по этой прямой.

Таким образом, каждый из стержней осуществляет собой эллиптический циркуль, и концы A и B будут описывать эллипс с центром в C и осями, направленными по ED и MN. Большая ось равна длине стержней, а малая половине их.

Задача 76. На абсолютно гладком горизонтальном столе лежит палочка данной длины l. На концах ее сидят 2 жука, массы которых m и m'. Первый из жуков прошел до середины палочки, причем она сдвинулась. На сколько надо переместиться по палочке второму жуку, чтобы палочка вернулась на прежнее место (черт. 73)?

Пусть C центр тяжести палочки. Ввиду того, что в результате перемещения жуков центр тяжести вернется на старое место, примем эту точку плоскости за начало координат. На основании формулы, служащей для определения абсциссы центра тяжести

$$\bar{x} = \frac{\sum mx}{\sum m},$$



Черт. 73.

имеем, обозначив абсциссу одного жука через x:

$$mx - m'(l - x) = 0.$$

После перемещения жуков: одного — на $\frac{l}{2}$, другого — на z, получим подобное же уравнение:

$$m\left(x - \frac{l}{2}\right) - m'(l - x - z) = 0,$$

откуда

$$z = \frac{ml}{2m'}.$$

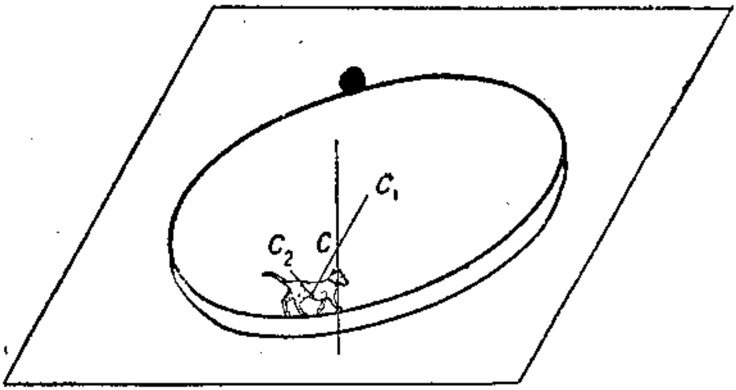
Задача 77. На гладкой горизонтальной плоскости лежит диск данной массы m и радиуса a. По краю диска идет собака массы m'. Определить вид кривой, по которой будет двигаться центр диска (черт. 74).

На систему диск — собака не действуют внешние горизонтальные силы, следовательно общий центр тяжести C, неподвижный в начале опыта, не может сойти со своей вертикали.

Горизонтальное расстояние x центра диска C_1 от общего центра тяжести C найдется из уравнения:

$$mx - m'(a - x) = 0,$$

$$x = \frac{m'a}{m + m'}.$$



Черт. 74.

Расстояние это, как сказано, не может измениться, следовательно точка C_1 будет двигаться по кругу радиуса x с центром, лежащим на вертикали C.

Задача 78. На совершенно гладкую горизонтальную плоскость поставлено тяжелое однородное полушарие в данном на чертеже положении и предоставлено самому себе. Центр тяжести совпадает с плоскостью чертежа и ввиду отсутствия внешних горизонтальных сил остается в этой плоскости (черт. 75).

Исследуя движение сечения, совпадающего с чертежом, найти:

1. Мгновенный центр и полоиды вертикального сечения, лежащего в плоскости симметрии.

2. Угловую скорость вращения вокруг мгновенного центра и живую силу всего тела.

3. Ускорение мгновенного центра.

4. Давление полушара на горизонтальную плоскость.

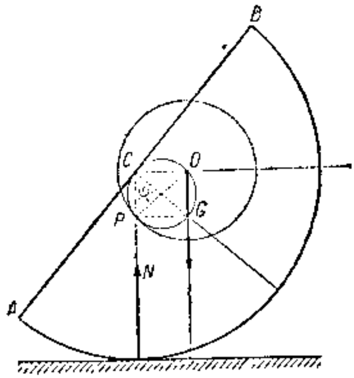
Обозначения:

радиус полушария — R,

радиус кривизны неподвижной полоиды — r,

радиус кривизны подвижной полоиды — r',
угловая скорость вращения полушара вокруг мгновенной оси — ω.
Момент инерции полушара относительно мгновенной оси вращения — J_p, радиус инерции — k; масса полушара — M, ускорение центра тяжести — j_G, мгновенного центра — j, угол наклона диаметральной плоскости AB к горизонту — φ, реакция опорной плоскости — N, центр полушара — C, центр тяжести его — G, мгновенный центр сечения, совпадающего с чертежом — P, длина отрезка $CG = \frac{3}{8} R$.

Как указано, на полушар не действует горизонтальных сил, следовательно центр тяжести может перемещаться только по вертикали OG. Геометрический центр C перемещается по горизонтальной прямой O , следовательно отрезок CG скользит своими концами по сторонам неподвижного прямого угла.



Черт. 75.

Центр мгновенного вращения P лежит в вершине прямоугольника $OCPG$. Неподвижная полоида будет круг радиуса OP с центром в O, подвижная полоида — круг, построенный на PO как на диаметре.

Если угол φ изменится от начального значения φ_0 до какого-либо иного значения φ, то работа силы тяжести выразится так:

$$\frac{3}{8} R(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\cdot Mg.$$

Живая сила полушара будет $J_p \frac{\omega^2}{2}$; здесь полагаем, что начальная скорость равна нулю. Величина ω найдется из уравнения:

$$J_p \frac{\omega^2}{2} = \frac{3}{8} R(\cos\varphi - \cos\varphi_0) Mg.$$

Зная угловую скорость, найдем ускорение мгновенного центра P по формуле:

$$j = \frac{rr'}{r - r'}\,\omega^2;$$

ускорение j направлено по общей нормали к полоидам PO, но

$$r' = \frac{r}{2},$$

$$j = r\omega^2 = PO\omega^2 = \frac{3}{8} R\omega^2;$$

вертикальная слагающая:

$$j_y = \frac{3}{8} R\omega^2 \cos\varphi.$$

Ускорение центра тяжести G геометрически складывается из ускорения мгновенного центра P и ускорения при вращении вокруг этого центра.

Угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ найдется из уравнения:

$$J_p \frac{d\omega}{dt} = Mg\,\frac{3}{8} R\sin\varphi;$$

тангенциальное ускорение направлено по вертикали OG и равно $PG\frac{d\omega}{dt}$.

Вертикальная слагающая ускорения центра тяжести, которую обозначим через $(j_G)_y$, будет:

$$(j_G)_y = PG\,\frac{d\omega}{dt} - \frac{R}{8}\,\omega^2\cos\varphi,$$

горизонтальная слагающая $(j_G)_x$ равна нулю, она слагается из центростремительного ускорения, равного $PG\,\omega^2$, или $\frac{3}{8}\,R\,\omega^2\sin\varphi$, и горизонтальной слагающей вектора j, направленной в противоположную сторону и тоже равной $\frac{3}{8} R\omega^2\sin\varphi$.

Чтобы найти, чему равно давление полушара на горизонтальную плоскость, применим общую теорему д'Аламбера, тогда:

$$N = Mg - Mj_G;$$

после подстановки имеем:

$$N = Mg\left\{1 - \frac{3}{64}\frac{R^2}{k^2}\left[3\sin^2\varphi - 2\cos\varphi\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\right]\right\}.$$

Задача 79. Горизонтальный двигатель внутреннего сгорания не прикреплен к горизонтальной раме, на которой он расположен. Считая поверхность рамы гладкой плоскостью, определить амплитуды колебания машины вдоль ее оси, если вал будет двигаться с угловой скоростью ω. При этом заданы вес машины P, вес поступательно движущихся частей p, ход их — $2a$; угол кривошипа с вертикалью обозначен через φ; длину шатуна считаем бесконечно большою.

В виду отсутствия внешних горизонтальных сил, действующих на машину, можно написать, что сумма горизонтальных проекций количеств движения сохраняет постоянную величину, какая была до начала движения, т. е. нуль.

При бесконечно длинном шатуне относительная скорость поступательно движущихся частей равна скорости проекции на горизонт пальца кривошипа, т. е. $a\omega\cos\varphi$.

Обозначим скорость машины по горизонтальному направлению через v, тогда абсолютная скорость поступательно движущихся частей будет $v + a\omega\cos\varphi$; уравнение количеств движения представится так:

$$\frac{p}{g}\cdot\left(v + a\omega\cos\varphi\right) + \frac{P-p}{g}\cdot v = 0;$$

откуда:

$$v = \frac{p}{P}a\omega\cos\varphi.$$

Задача 80. Гимнаст веса P_1, имея при себе груз P_2, прыгает под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. В тот момент, когда им достигнута наибольшая высота, он бросает груз со скоростью c относительно себя назад. Насколько увеличилась дальность прыжка от того, что груз брошен?

Примечание. Под c надо понимать скорость груза относительно прыгуна в тот момент, когда они разделились.

Ввиду отсутствия внешних горизонтальных сил, действующих на систему гимнаст и груз, сумма горизонтальных проекций количеств движения частей системы по отношению к центру тяжести системы должна сохранять постоянную величину — нуль.

Пусть скорость гимнаста относительно общего центра тяжести его и груза — u, скорость груза относительно того же центра тяжести — $u - c$, тогда

$$\frac{P_1}{g}u + \frac{P_2}{g}(u - c) = 0,$$

и

$$u = \frac{P_2 c}{P_1 + P_2}.$$

Гимнаст будет падать до земли $\frac{v_0\sin\alpha}{g}$ *сек*, и дальность его полета увеличится на

$$x = \frac{P_2 c}{P_1 + P_2}\,\frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

V. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. ТЕОРЕМА О МОМЕНТАХ КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ РЕАКЦИИ ОСИ.

1. Пусть m — масса какой-либо точки тела. Выражение вида:

$$J_1 = \Sigma my^2,$$

где знак суммы распространен на все точки тела, называется моментом инерции тела относительно плоскости xoz. Выражение

$$J_2 = \Sigma mx^2$$

при тех же условиях называется моментом инерции тела относительно плоскости yoz. Наконец выражение

$$C = \Sigma m\rho^2,$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

называется моментом инерции тела относительно оси z. Если найдены первые две величины, то простым сложением найдем и третью.

Указанные суммы выражаются определенными интегралами.

К группе функций, носящих наименование моментов инерции, относятся выражения вида:

$$D = \Sigma myz;\quad E = \Sigma mzx,\quad F = \Sigma mxy.$$

Такие выражения легко приводятся к вышеприведенным. Повернем систему координат вокруг оси oz для наблюдателя, смотрящего с положительного ее конца, по стрелке часов на угол в 45°, тогда для новой системы координат x_1oy_1 имеем:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1),$$

$$\sum mxy = \frac{1}{2}\sum m(x_1^2 - y_1^2) = \frac{1}{2}\sum mx_1^2 - \frac{1}{2}\sum my_1^2.$$

Задача 81. Найти момент инерции однородного прямоугольного параллелепипеда относительно плоскости, проходящей через середины противоположных ребер (черт. 76).

Размеры параллелепипеда $2a$, $2b$, $2c$, плотность равна единице.

Примем указанную плоскость за плоскость yoz. Расположим оси координат, как указано на чертеже. Проведем две смежные плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельные плоскости zoy. Благодаря тому, что толщина полученного слоя бесконечно-мала, мы можем считать, что все точки внутри его обладают одной и той же абсциссой. Момент инерции этого слоя относительно плоскости yoz равен:

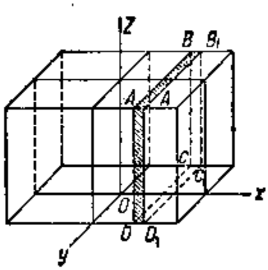
$$x^2 \cdot 2b \cdot 2c \cdot dx.$$

Момент инерции всего параллелепипеда:

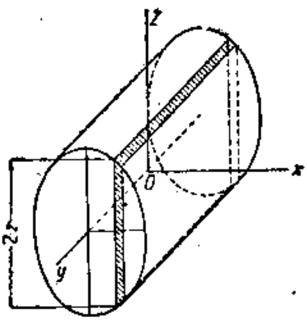
$$J_1 = \int_{-a}^{+a} 2b\, 2cx^2 dx = 2b\, 2c \frac{2a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3};$$

через M обозначена масса тела. Совершенно аналогично момент относительно плоскости xoz представится так:

$$J_2 = \frac{Mb^2}{3}.$$



Черт. 76.



Черт. 77.

Момент инерции C относительно оси oz получится так:

$$C = J_1 + J_2 = \frac{M}{3}(a^2 + b^2).$$

Задача 82. Найти момент инерции относительно оси прямого эллиптического цилиндра. Плотность равна единице, оси основания $2a$ и $2b$, высота цилиндра $2c$ (черт. 77).

Выберем начало o в середине оси цилиндра, оси ox и oz параллельно осям эллиптического основания. Проведем две смежные плоскости, параллельные плоскости zoy. Момент инерции массы, заключенной между этими плоскостями, относительно плоскости zoy будет

$$x^2\, 2z\, 2c\, dx,$$

момент инерции всего тела:

$$J_1 = \int\limits_{-a}^{+a} 2z\,2c\,x^2 dx.$$

Уравнение эллипса, лежащего в основании:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

откуда z по абсолютной величине:

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

после подстановки:

$$J_1 = 4\,\frac{cb}{a}\int\limits_{-a}^{+a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Введем новое переменное φ:

$$x = a\sin\varphi;$$

при $x = -a$:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2},$$

при $x = a$:

$$\varphi = \frac{\pi}{2};$$

тогда

$$J_1 = 4a^3bc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = a^3bc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = a^3bc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^3bc}{2}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a b\,2c a^2}{4} = \frac{Ma^2}{4}.$$

Момент инерции относительно плоскости xoy, очевидно, будет:

$$J_3 = \frac{Mb^2}{4}.$$

Момент инерции относительно оси oy:

$$B = \frac{M}{4}(a^2 + b^2).$$

Если цилиндр круглый, радиус основания r, то

$$B = \frac{Mr^2}{2}.$$

Эти же формулы годятся для круглой или эллиптической пластинки.

Если провести сечения на расстоянии dy параллельно плоскости xoz, то площадь такого сечения будет πab, и момент инерции цилиндра относительно плоскости xoz будет:

$$J_2 = \int_{-c}^{+c} y^2 \pi ab dy = \pi ab \frac{2c^3}{3} = \pi ab 2c \frac{c^2}{3} = \frac{Mc^2}{3};$$

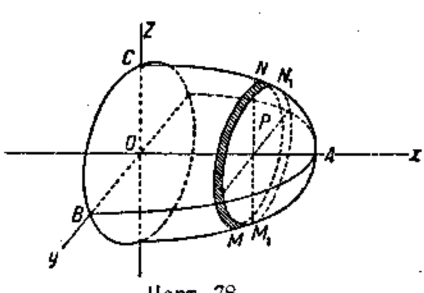
момент инерции цилиндра относительно оси z будет:

$$C = J_1 + J_2 = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{3}\right).$$

Задача 83. Дан трехосный эллипсоид уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

найти его момент инерции относительно оси oz (плотность равна единице) (черт. 78).



Черт. 78.

Проведем на расстоянии $op = x$ от начала o два смежных сечения, параллельных плоскости yoz. Оси сечения NM будут:

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

площадь сечения NM равна πyz, объем слоя NMN_1M_1 равен $\pi yzdx$. Момент инерции эллипсоида относительно плоскости zoy будет:

$$J_1 = \pi \int_{-a}^{+a} zyx^2 dx = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)x^2 dx = \frac{2bc\pi}{a^2}\left(\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5}\right) =$$

$$= \frac{4}{15}\pi bca^3; = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi abc\cdot a^2 = \frac{Ma^2}{5}.$$

Аналогично момент инерции эллипсоида относительно плоскости xoz будет:

$$J_3 = \frac{Mb^2}{5}.$$

Относительно оси oz:

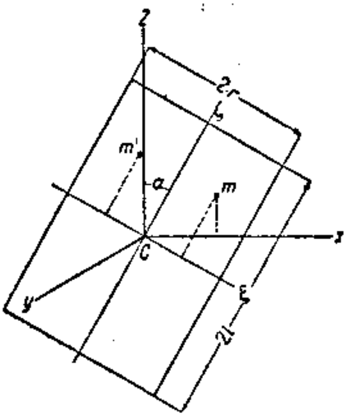
$$C = J_1 + J_2 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2).$$

Задача 84. Начало координат расположено в центре тяжести прямого круглого однородного цилиндра. Радиус основания r, высота $2l$, масса $\frac{P}{g}$. Ось цилиндра наклонена к вертикали под углом α и лежит в плоскости zox. Найти величину центробежного момента Σmxz (черт. 79).

Повернем систему координат вокруг оси oy на угол α так, чтобы новая ось $o\zeta$ совпала с осью цилиндра, тогда

$$\begin{aligned}\Sigma mxz &= \Sigma m(\xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha)(\zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha) = \\ &= \sin\alpha\cos\alpha(\Sigma m\zeta^2 - \Sigma m\xi^2) + \cos^2\alpha\,\Sigma m\xi\zeta - \sin^2\alpha\,\Sigma m\xi\zeta.\end{aligned}$$

Последние два члена обратятся в нуль, так как момент $\Sigma m\xi\zeta$ относительно оси симметрии $o\zeta$ равен нулю. Любой точке m с координатами ξ и ζ можно найти симметричную относительно оси ζ точку m' с координатами $-\xi$ и ζ. Очевидно члены под знаком суммы попарно сократятся. Беря из задачи 82 выражения двух других моментов, имеем:



Черт. 79.

$$\sum mxz = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{P}{g}\cdot\frac{l^2}{3} - \frac{P}{g}\cdot\frac{r^2}{4}\right),$$

или

$$\sum mxz = \frac{P\sin 2\alpha}{2g}\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right).$$

2. Аналитическое выражение теоремы о сумме моментов количеств движения таково:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum(yZ - zY),\\ &\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \sum(zX - xZ),\\ &\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \sum(xY - yX).\end{aligned} \tag{1}$$

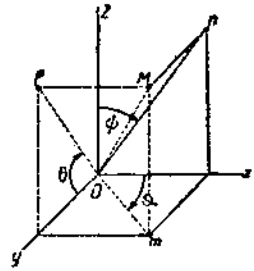
„**Производная по времени от суммы моментов количеств движения точек материальной системы относительно осей координат равна сумме моментов внешних сил**".

Каждое из трех написанных уравнений применимо в том случае, если система может вращаться вокруг соответствующей оси координат.

Если система может вращаться вокруг любой оси, проходящей через начало координат, то применимы все три уравнения.

Может случиться, что для какой-либо оси сумма моментов внешних сил равна нулю, тогда сумма моментов количеств движения для этой оси есть величина постоянная, т. е. имеют место или все три, или некоторые из ниже написанных уравнений:

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=C_1;$$
$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=C_2; \qquad (2)$$
$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C_3.$$



Черт. 80.

В случае, если имеем неизменяемую систему, левой части уравнений (1) и (2) можно придать иной вид. Спроектируем радиус-вектор, соединяющий любую точку системы M с началом координат, на три координатные плоскости (черт. 80). Обозначим углы xom, yop, zon через φ, θ, φ, тогда производные $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ представят угловые скорости точки при вращении вокруг осей координат. Угловые ускорения будут $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Назовем $\frac{d\varphi}{dt}$ через ω, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ — через $\frac{d\omega}{dt}$, вектор om — через r, момент инерции $\sum mr^2$ — через J, тогда:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi;$$
$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi;$$
$$dy=\sin\varphi\,dr-r\cos\varphi\,d\varphi$$

и левая часть уравнения (2) будет:

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d\varphi}{dt}\sum mr^2=\omega J.$$

Уравнения (1) дают:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sum(xY-yX)}{J}. \qquad (3)$$

„Угловое ускорение системы, вращающейся вокруг оси, равно моменту внешних сил относительно этой оси, деленному на момент инерции системы относительно той же оси“.

Задача 85. Из уравнений движения отдельных точек системы получить уравнение моментов количеств движения.

Освободим любую точку системы от связей; все силы, к ней приложенные, разобьем на три группы:

a) внешние активные силы;

b) силы внутренние, т. е. силы воздействия на данную точку других точек системы;

c) силы реакции, или пассивные силы.

Каждую группу заменим одной силой.

Проекции их обозначим так:

a) $X_e,\ Y_e,\ Z_e;$
b) $X_i,\ Y_i,\ Z_i;$
c) $X_r,\ Y_r,\ Z_r.$

Уравнения движения отдельных точек системы будут иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_e + X_i + X_r;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_e + Y_i + Y_r;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z_e + Z_i + Z_r.$$

Помножим третье уравнение на y, второе на z; сложив, получим:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (yZ_e - zY_e) + (yZ_i - zY_i) + (yZ_r - zY_r).$$

Первый член второй части представляет момент относительно оси x равнодействующей сил первой группы — сил внешних.

Второй член — момент равнодействующей сил второй группы — сил внутренних.

Третий член — момент равнодействующей сил третьей группы — сил реакции.

Подобные уравнения можно написать для всех точек системы. Сложив все эти уравнения, в результате имеем:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) =$$
$$= \sum(yZ_e - zY_e) + \sum(yZ_i - zY_i) + \sum(yZ_r - zY_r). \tag{1}$$

Второй член правой части обратится в нуль, так как внутренние силы попарно равны и прямо противоположны, и сумма моментов их равна нулю.

Заметим, что уравнение (1) существует для всякого движения системы. Но в некоторых случаях оно допускает дальнейшие преобразования.

Положим, что силы реакции таковы, что не препятствуют системе вращаться вокруг оси x. В этом случае момент сил реакции относительно этой оси равен нулю, и исчезает во второй части уравнений (1) третий член:

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(yZ_e-zY_e). \tag{2}$$

Простым диференцированием можно проверить, что

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right);$$

правая часть равенства представляет производную от суммы моментов количеств движения точек системы.

Теперь уравнение (2) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\sum(yZ_e-zY_e).$$

Мы составили уравнение моментов количеств движения для оси x; очевидно, совершенно так же можно получить аналогичные уравнения для осей y и z; уравнения будут иметь место, если система может вращаться вокруг этих осей.

Задача 86. Маховик, момент инерции которого относительно оси равен J, вращается с угловой скоростью ω_0. Предоставленный самому себе маховик остановился через T секунд. Определить величину момента вредных сопротивлений M относительно оси маховика.

Угловое ускорение маховика отрицательно и равно дроби $-\frac{M}{J}$:

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{M}{J};$$

по разделении переменных:

$$\int_{\omega_0}^{0}d\omega=-\int_0^T\frac{M}{J}\,dt,$$

$$-\omega_0=-\frac{M}{J}T,$$

$$M=\frac{J\omega_0}{T}.$$

Задача 87. Два человека равного веса P стоят на концах горизонтального стержня, вращающегося вокруг вертикальной оси o, проходящей через середину стержня, с угловой скоростью ω_0. Как изменится угловая скорость, если оба они займут положения на середине отрезков OA и OB? Вес стержня P. Каждого наблюдателя считать за материальную точку и моменты инерции их в начальном положении полагать равными $\overline{AO}^2\,\frac{P}{g}$ (черт. 81).

На систему по предположению не действует других сил кроме веса. Моменты сил веса относительно вертикальной оси равны нулю.

Момент инерции стержня относительно оси O равен $\frac{P}{g}\frac{l^2}{3}$, где

$$l = OA = OB.$$

Действительно

$$J = \int_{-l}^{+l} \gamma x^2 dx = \frac{Pl^2}{3g},$$

Черт. 81.

γ — плотность (масса единицы длины).

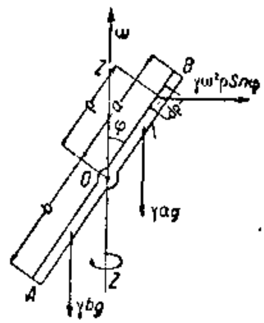
Сумма моментов количеств движения системы остается постоянной.

$$\frac{P}{g}\,\omega_0\left(\frac{l^2}{3} + 2l^2\right) = \frac{P}{g}\,\omega\left(\frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{2}\right).$$

Новая угловая скорость ω определится так:

$$\omega = 2{,}8\,\omega_0.$$

Задача 88. Брусок AB, укрепленный в O на шарнире, ось которого горизонтальна, вращается около вертикальной оси zz с угловой скоростью ω. Определить положение относительного равновесия бруска, т. е. угол отклонения φ (черт. 82).



Черт. 82.

Брусок может поворачиваться вокруг горизонтальной оси O, следовательно для этой оси должно существовать уравнение, аналогичное ур-нию (2) стр. 89. Смысл его такой: момент внешних сил относительно оси, для которой написано это уравнение, уравновешивается моментом сил инерции.

В данном случае вес бруска уравновешивается силами инерции, происходящими от вращения вокруг вертикальной оси.

Для элемента $d\rho$ такая сила равна $\gamma\omega^2\rho\sin\varphi$, горизонтальна и пересекает ось z. Момент ее относительно оси, проходящей через точку O, перпендикулярной чертежу, равен $\gamma\omega^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi$.

Сумма моментов таких сил для всего бруска будет:

$$\int_{-b}^{+a}\gamma\omega^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho=\gamma\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{a^3+b^3}{3}.$$

Сумма моментов сил веса относительно оси шарнира равна

$$\gamma ag\cdot\frac{a}{2}\sin\varphi-\gamma bg\cdot\frac{b}{2}\sin\varphi.$$

Силы инерции должны уравновесить силы веса, поэтому:

$$\frac{\gamma g}{2}(a^2-b^2)\sin\varphi=\frac{a^3+b^3}{3}\gamma\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

По сокращении имеем:

$$1.\ \sin\varphi=0;\quad 2.\ \cos\varphi=\frac{3}{2}\,\frac{g}{\omega^2}\,\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}.$$

Задача 89. С какой скоростью u следовало бы пустить по экватору с востока на запад поезд в 2 000 тонн, чтобы уменьшить продолжительность суток на одну секунду?

Масса поезда:

$$m=\frac{2\,000\text{ тонн}}{g},$$

масса земли:

$$M=\frac{5\cdot10^{21}\text{ тонн}}{g},$$

радиус земли $R=6\,000$ *км*, момент инерции земли относительно оси вращения:

$$J_1=\frac{2}{5}MR^2,$$

момент инерции поезда, считая его за точку массы m: $J_2=mR^2$, начальная угловая скорость земли:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{24\cdot60\cdot60},$$

новая угловая скорость:

$$\omega=\frac{2\pi}{24\cdot60\cdot60-1}.$$

Равнодействующая сил притяжения, действующих на землю, пересекает ось вращения, момент ее равен нулю, и сумма моментов количеств движения земли и поезда сохраняет свою величину:

$$J_1\omega + J_2\left(\omega - \frac{u}{R}\right) = (J_1 + J_2)\,\omega_0,$$

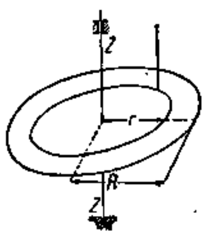
$$\left(\frac{2}{5}M + m\right)\omega - m\frac{u}{R} = \left(\frac{2}{5}M + m\right)\omega_0,$$

$$u = \frac{R\left(\frac{2}{5}M + m\right)(\omega - \omega_0)}{m}.$$

Если подставить числовые величины, то получим для u значение порядка 10^{12} *км/сек*.

Задача 90. По круглой горизонтальной платформе, могущей вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр (черт. 83), идет с постоянной относительной скоростью v по окружности радиуса r человек веса p. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа около оси, если вес ее можно считать распределенным по площади радиуса R, а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю?

Момент сил веса, действующих на платформу и на человека, относительно оси вращения равен нулю, следовательно сумма моментов количеств движения частей системы сохраняет свою величину, которую имела до начала движения, т. е. нуль.



Черт 83.

Момент инерции платформы $\frac{PR^2}{2g}$, момент инерция человека $\frac{p}{g}r^2$ начальная угловая скорость нуль, угловая скорость в данный момент ω, относительная угловая скорость человека $\frac{v}{r}$. Уравнение моментов количеств движения:

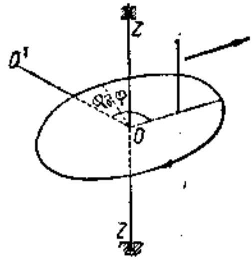
$$\frac{PR^2}{2g}\,\omega + \frac{p}{g}r^2\left(\omega + \frac{v}{r}\right) = 0,$$

$$\omega = -\frac{2prv}{PR^2 + 2pr^2}.$$

Платформа начинает вращаться в сторону, противоположную движению человека.

Задача 91. По диску радиуса R, вращающемуся свободно вокруг вертикальной оси, идет человек веса P в направлении одного из радиусов, выходящих из центра. На какой угол повернется диск к тому времени, когда человек дойдет до края его, если движение человека относительно диска равномерное со скоростью a, первоначальная угловая скорость диска ω_0, а вес диска P_1 (черт. 84)?

По истечении t секунд от начала движения человек отойдет от оси на расстояние at.



Черт. 84.

Все силы, действующие на систему, вертикальны, и сумма моментов их относительно оси zz равна нулю; поэтому сумма моментов количеств движения постоянна.

Угловая скорость вращения диска $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$, начальная ω_0; J_1 — момент инерции диска, J — человека:

$$J_1\frac{d\varphi}{dt}+J\frac{d\varphi}{dt}=J_1\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0,$$

или

$$\frac{P_1R^2}{2g}\frac{d\varphi}{dt}+a^2t^2\frac{P}{g}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{P_1R^2}{2g}\omega_0;$$

отсюда угол поворота диска:

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_0^{\frac{R}{a}}\frac{\frac{P_1R^2}{2g}\omega_0dt}{\frac{P_1R^2}{2g}+\frac{P}{g}a^2t^2};$$

$\frac{R}{a}$ — время перемещения человека от оси до края диска.

$$\varphi-\varphi_0=\omega_0\sqrt{\frac{P_1R^2}{2Pa^2}}\int\limits_0^{\frac{R}{a}}\frac{\sqrt{\frac{2P}{P_1R^2}}\,adt}{1+\left(\sqrt{\frac{2P}{P_1R^2}}\,at\right)^2};$$

окончательно:

$$\varphi-\varphi_0=\omega_0\sqrt{\frac{P_1R^2}{2Pa^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2P}{P_1}}.$$

Задача 92. На абсолютно гладкой плоскости лежит диск массы M; на концах A и A_1 одного из его диаметров стоят двое наблюдателей одинаковой массы $m=\frac{M}{2}$. Другие двое B и B_1 расположены посредине радиусов AO и A_1O и обладают такими же массами, как и первые. Наблюдатели A и A_1 идут по краю диска, перемещаясь по нему на четверть окружности таким образом, что во все время движения остаются на противоположных концах одного и того же диаметра. Затем A и A_1 останавливаются, а B и B_1 с одинаковой скоростью идут к центру, где и останавливаются. Тогда A и A_1 по диску возвращаются на старые места, идя опять с одинаковой скоростью; то же потом делают и B и B_1. Какова конфигурация системы после этих перемещений (черт. 85)?

Если провести через центр диска вертикальную ось, то центр тяжести всей системы останется на этой оси при всех перемещениях наблюдателей, так как нет горизонтальных сил, действующих на систему. Единственно возможное движение диска — это вращение вокруг оси zz. Силы реакции гладкой плоскости этому вращению не препятствуют.

Черт. 85.

Внешняя сила — сила тяжести вертикальна, следовательно сумма моментов внешних сил относительно оси zz равна нулю, и сумма моментов количеств движения системы постоянна. В нашем случае равна нулю, ибо начальное положение системы — состояние покоя.

При первом перемещении наблюдателей A и A_1 (оно указано стрелкой) сумма моментов количеств движения равна

$$\left(\frac{Mr^2}{2}+\frac{Mr^2}{4}\right)\frac{d\varphi}{dt}+Mr^2\left(\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\right), \tag{1}$$

где

$\frac{Mr^2}{2}$ — момент инерции диска,

$\frac{Mr^2}{4}$ — момент инерции наблюдателей B и B_1,

Mr^2 — момент инерции наблюдателей A и A_1,

$\frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость диска,

$\frac{d\theta}{dt}$ — относительная угловая скорость наблюдателей A и A_1.

Будем считать за положительное направление отсчета углов то, которое совпадает с первым движением наблюдателей A и A_1 и указано стрелкой. Приравняем сумму (1) нулю и, помножив на dt, проинтегрируем уравнение

$$\frac{7}{4}\,d\varphi = -\,d\theta$$

в пределах 0 и φ, 0 и $\frac{\pi}{2}$; тогда

$$\varphi = -\frac{2}{7}\,\pi.$$

Угол поворота диска отрицателен. Диск повернулся в сторону, обратную движению наблюдателей A и A_1.

Направление движения наблюдателей B и B_1 пересекает ось zz, и сумма моментов их количеств движения остается равной нулю. Диск при этом движении неподвижен.

При втором движении наблюдателей A и A_1 уравнение моментов количеств движения получит вид:

$$\frac{Mr^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} + Mr^2\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

(наблюдатели B, B_1 стоят у оси). По сокращении

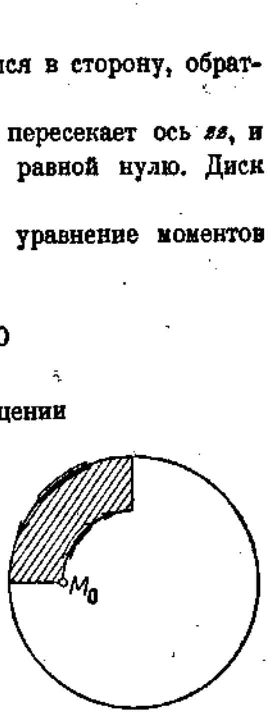
$$\frac{3}{2}\,d\varphi = -\,d\theta,$$

пределы интегрирования:

$$-\frac{2}{7}\pi \text{ и } \varphi_1, \ \frac{\pi}{2} \text{ и } 0.$$

Проинтегрировав, имеем:

$$\frac{3}{2}\left(\varphi_1 + \frac{2}{7}\pi\right) = \frac{\pi}{2}, \ \varphi_1 = \frac{\pi}{21}.$$



Черт. 86.

В итоге диск повернулся в сторону первого движения наблюдателей A и A_1.

Задача 93. Однородный материальный диск радиуса R и веса P свободно может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр (черт. 86). На диске по концентрической окружности радиуса r перемещается человек от начального положения M_0 на угол $\frac{\pi}{2}$ по стрелке часов. Затем он идет по радиусу до края диска, снова на $\frac{\pi}{2}$ по краю диска против стрелки часов и наконец по радиусу на прежнее место. Вес человека равен весу диска. Найти угол поворота диска.

На основании соображений, подобных тем, которые изложены в предыдущей задаче, можно написать уравнение моментов количеств движения частей системы относительно оси вращения. Сумма моментов постоянна и равна нулю, как и в момент начала движения:

$$\frac{P}{2g}R^2\frac{d\varphi}{dt}+\frac{P}{g}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

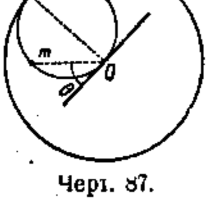
(сохранены обозначения предыдущей задачи); по разделении переменных имеем:

$$(R^2+2r^2)\,d\varphi=-2r^2\,d\theta.$$

Пределы интегрирования 0 и φ, 0 и $\frac{\pi}{2}$:

$$(R^2+2r^2)\,\varphi=-r^2\pi,$$

$$\varphi=-\frac{r^2\pi}{R^2+2r^2}.$$



Черт. 87.

Движения по радиусу не вызывают поворота диска.

Для обратного движения наблюдателя уравнение моментов количеств движения будет:

$$\frac{P}{2g}R^2\frac{d\varphi}{dt}+\frac{P}{g}R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\right)=0,$$

или

$$\frac{3}{2}\,d\varphi=-d\theta;$$

пределы интегрирования:

$$-\frac{r^2\pi}{R^2+2r^2}\ \text{и}\ \varphi_1,\ \frac{\pi}{2}\ \text{и}\ 0;$$

следовательно

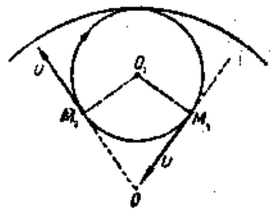
$$\varphi_1+\frac{\pi r^2}{R^2+2r^2}=\frac{2}{3}\,\frac{\pi}{2},\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2r^2}{R^2+2r^2}\right)=\frac{\pi}{3}\,\frac{R^2-r^2}{R^2+2r^2}.$$

Задача 94. Диск, способный вращаться вокруг вертикали, проходящей через его центр, покоится на абсолютно гладком столе. Насекомое выходит из центра и идет по диску, описывая круг радиуса $\frac{R}{2}$, равного половине радиуса диска. На какой угол повернется диск к тому моменту, когда насекомое вернется в его центр? Масса диска M, насекомого m (черт. 87).

Так же, как и в предыдущих задачах, сумма моментов внешних сил относительно оси диска равна нулю. Силы веса параллельны оси вращения. Сохраняя прежние обозначения, получим уравнение моментов количеств движения:

$$\frac{MR^2}{2}\frac{d\varphi}{dt}+m(R\sin\theta)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\theta}{dt}\right)=0.$$

Сумма моментов остается постоянной и, так же как для начального момента, равной нулю. Углом φ определяется положение диска, углом θ положение насекомого на диске.



Черт. 88.

Отсюда:

$$d\varphi=-\frac{2m\sin^2\theta}{M+2m\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Пределы интегрирования для φ будут: 0 и φ, для θ — 0 и π.

Преобразуем последнее уравнение:

$$d\varphi=-\frac{M+2m\sin^2\theta-M}{M+2m\sin^2\theta}\,d\theta=-d\theta+\frac{M d\theta}{M+2m\sin^2\theta}=$$

$$=-d\theta+\frac{M d\theta}{M(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2m\sin^2\theta}=-d\theta+\frac{M\frac{d\theta}{\sin^2\theta}}{M+2m+M\operatorname{ctg}^2\theta}=$$

$$=-d\theta-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\,\frac{-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta}}{1+\left(\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\operatorname{cotg}\theta\right)^2},$$

после интегрирования:

$$\varphi=\left[-\theta+\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\operatorname{cotg}\theta\right]_0^\pi;$$

$$\varphi=-\pi+\pi\sqrt{\frac{M}{M+2m}}=-\pi\left(1-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\right).$$

Задача 95. По диску радиуса $r(1+\sqrt{2})$ движется насекомое, обходя окружность радиуса r, касающуюся края диска. Определить положения насекомого, при которых угловая скорость диска меняет знак (черт. 88).

Если из центра диска провести две касательные к траектории насекомого, то в точках прикосновения M и M_1 направление относительной скорости u проходит через центр диска o, и момент количества движения в относительном перемещении равен нулю. Если момент инерции диска J_1, насекомого J_2, то

$$(J_1 + J_2)\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

т. е. в данный момент угловая скорость диска равна нулю.

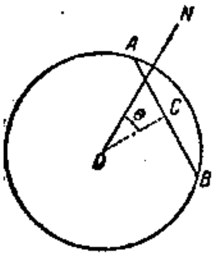
Задача 96. Концы материальной однородной прямой AB массы M и длины $2a$ могут скользить без трения по горизонтальной окружности радиуса R. Насекомое такой же массы M положено на середину C прямой, причем предполагается, что прямая неподвижна. В мгновение $t = 0$ насекомое начинает двигаться вдоль прямой от C к A с постоянной относительной скоростью u.

Определить характер движения палочки (черт. 89).

Обозначения:

Если момент инерции палочки J_0 относительно оси O, перпендикулярной чертежу, приравнять произведению массы M на квадрат длины некоторого отрезка k, то длину этого отрезка называют радиусом инерции:

$$J_0 = Mk^2.$$



Черт. 89.

Положение прямой координируем углом θ перпендикуляра OC к прямой с некоторой неподвижной прямой ON. Угол θ откладывать будем по стрелке часов, $OC = h$.

Угловая скорость при вращении диска вокруг точки O будет $\frac{d\theta}{dt}$.

Момент количества движения палочки и насекомого в переносном движении будет:

$$M(k^2 + \rho^2)\frac{d\theta}{dt};$$

здесь ρ — расстояние насекомого от оси O.

Момент количества движения насекомого в относительном перемещении по палочке:

$$Mhu.$$

Знак зависит от направления движения. При движении от C к B — плюс, от C к A — минус.

Путь, пройденный насекомым по палочке, назовем через x:

$$\rho^2 = x^2 + h^2.$$

Сумма моментов внешних сил относительно оси O, перпендикулярной к чертежу, равна нулю. Сумма моментов количеств движения постоянна и во время движения, так же как в начальный момент, равна нулю:

$$M(k^2+\rho^2)\frac{d\theta}{dt}-Mhu=0,$$

или

$$M(k^2+h^2+x^2)\frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}-Mh\frac{dx}{dt}=0.$$

По сокращении $\left(\frac{dx}{dt}\lesseqgtr 0\right)$:

$$(k^2+h^2+x^2)\frac{d\theta}{dx}-h=0,$$

$$d\theta=\frac{hdx}{k^2+h^2+x^2},$$

или

$$d\theta=\frac{h}{\sqrt{k^2+h^2}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{k^2+h^2}}\,dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{k^2+h^2}}\right)^2},$$

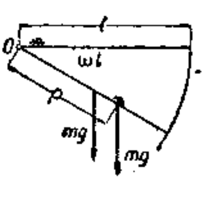
$$\theta-\theta_0=\left(\frac{h}{\sqrt{k^2+h^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{k^2+h^2}}\right)_0^x.$$

Если насекомое переместится до конца палочки, то верхний предел равен a

$$\theta_1=\theta_0+\frac{h}{\sqrt{k^2+h^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{k^2+h^2}}.$$

Палочка вращается по стрелке часов и поворачивается на угол θ.

Задача 97. Игла длины l, могущая вращаться в вертикальной плоскости около одного из своих концов, приведена в горизонтальное положение. Затем ей сразу сообщена угловая скорость ω (черт. 90). Одновременно с началом движения иглы паук, масса которого равна массе иглы, начинает двигаться от точки привеса по такому закону, что игла вращается равномерно. Определить, когда паук достигнет конца иглы.



Черт. 90.

Пусть расстояние паука от оси вращения O равно ρ. Масса иглы и паука каждого отдельно равна m. Угловая скорость иглы ω. J_0 — момент инерции иглы относительно точки O.

Момент веса иглы относительно точки O:

$$\frac{mgl\cos\omega t}{2}.$$

Момент веса паука относительно точки O:

$$mg\rho\cos\omega t.$$

Момент количества движения иглы:

$$J_0\omega.$$

Момент количества движения паука:

$$m\rho^2\omega$$

(скорость, направленная по игле, не дает момента).

На основании теоремы площадей имеем:

$$\frac{mgl\cos\omega t}{2}+mg\rho\cos\omega t=\frac{d}{dt}(J_0\omega+m\rho^2\omega),$$

или

$$\frac{mgl\cos\omega t}{2}+mg\rho\cos\omega t=2m\rho\omega\frac{d\rho}{dt};$$

отсюда

$$\frac{g\cos\omega t\,dt}{\omega}=2\frac{2\rho\,d\rho}{2\rho+l};$$

после интегрирования:

$$\frac{g\sin\omega t}{\omega^2}=2\int_0^l\left(1-\frac{l}{2\rho+l}\right)d\rho,$$

или

$$\frac{g\sin\omega t}{\omega^2}=2l-l\ln 3=l(2-\ln 3),$$

$$t=\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega^2 l}{g}(2-\ln 3)\right).$$

Задача 98. Очень тонкий, однородный, расположенный в горизонтальной плоскости, диск вращается вокруг вертикальной оси, не проходящей через его центр тяжести C, с постоянной угловой скоростью ω. Определить реакции опор — подшипника B и подпятника A в данном положении диска. Вес диска $P=Mg$. Размеры по чертежу (черт. 91).

Расположим систему координат так, чтобы плоскость xoz служила бы плоскостью симметрии для диска в данный момент.

Обозначим проекции реакций в опорах A и B через X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2. Подшипник B может создавать только горизонтальные реакции.

Остановим систему и кроме действующих сил — пяти реакций и веса P — приложим силы инерции. При равномерном вращении сила инерции любой точки массы m направлена по радиусу om и равна $m\omega^2\rho$, здесь $om = \rho$; ее слагающие по осям будут:

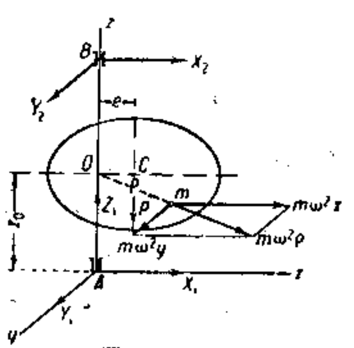
$$m\omega^2\rho\frac{x}{\rho} = m\omega^2 x;\ m\omega^2\rho\frac{y}{r} = m\omega^2 y,$$

где x, y координаты точки m.

Напишем шесть условий равновесия свободной системы.

Первая группа уравнений (суммы проекций):

$$X_1 + X_2 + \omega^2\sum mx = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \omega^2\sum my = 0,$$
$$Z_1 - P = 0.$$



Черт. 91.

Абсцисса центра тяжести C равна:

$$e = \frac{\sum mx}{\sum m} = \frac{\sum mx}{M}.$$

Ордината равна нулю:

$$\frac{\sum my}{\sum m} = 0;\ \sum my = 0.$$

Уравнения перепишутся так:

$$X_1 + X_2 + \omega^2 eM = 0;$$
$$Y_1 + Y_2 = 0; \tag{1}$$
$$Z_1 - P = 0.$$

Моменты сил X_1, Y_1, Z_1, X_2, P относительно оси x равны нулю.

Момент силы Y_2 равен $-ABY_2 = -Y_2h$, полагая $AB = h$.

Силы инерции дадут момент $-\sum m\omega^2 yz$.

Но z для всех точек диска равен z_0, $\sum my$ равна нулю, так как ордината центра тяжести диска равна нулю. Следовательно:

$$-\sum m\omega^2 yz = -z_0\omega^2\sum my = 0.$$

Сумма моментов сил относительно оси x будет:

$$-Y_2 h = 0; \tag{2}$$

откуда

$$Y_2 = 0.$$

Моменты сил X_1, Y_1, Z_1, Y_2 относительно оси y равны нулю.

Моменты сил инерции будут в сумме равны $\omega^2\sum mxz$, или $\omega^2 z_0 eM$.

Уравнение моментов для оси y напишется так:

$$Pe + X_2 h + \omega^2 z_0 eM = 0. \tag{3}$$

Уравнения (1), (2) и (3) дадут

$$Y_1 = -Y_2 = 0; \quad Z_1 = P.$$

$$X_2 = -\frac{Me}{h}(\omega^2 z_0 + g).$$

Сила X_2 получилась со знаком минус, следовательно она направлена в сторону, противоположную той, которая указана на чертеже:

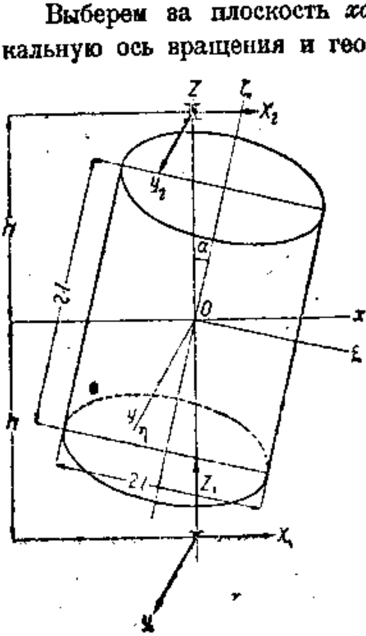
$$X_1 = -X_2 - \omega^2 eM.$$

$$X_1 = \frac{Me}{h}[g - \omega^2(h - z_0)],$$

$h > z_0$; при достаточно большой скорости ω и сила X_1 может сделаться отрицательной.

Задача 99. Однородный круглый цилиндр веса $P = Mg$ вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести с постоянной угловой скоростью ω (черт. 92). Ось вращения oz образует с геометрической осью $o\zeta$ цилиндра угол α. Высота цилиндра $2l$, диаметр основания $2r$. Вертикальное расстояние между опорами $2h$. Найти реакции в подшипнике и подпятнике.

Выберем за плоскость xoz плоскость, проходящую через вертикальную ось вращения и геометрическую ось цилиндра.



Черт. 92.

Назовем момент инерции цилиндра относительно оси $o\zeta$ через C (зад. 82):

$$C = \frac{Mr^2}{2}.$$

Момент инерции относительно любой оси, лежащей в плоскости, проходящей через центр тяжести O параллельно основанию цилиндра, назовем через A (зад. 82):

$$A = \frac{Ml^2}{3} + \frac{Mr^2}{4}.$$

Остановим систему, приложив силы инерции. Силы инерции при равномерном вращении сводятся к центробежным со слагающими $m\omega^2 x$ и $m\omega^2 y$ для каждой точки массы m.

Условия равновесия напишутся так:

$$X_1 + X_2 + \sum m\omega^2 x = 0;$$
$$Y_1 + Y_2 + \sum m\omega^2 y = 0;$$
$$Z_1 - P = 0;$$
$$Y_1 h - Y_2 h - \omega^2 \sum myz = 0;$$
$$X_2 h - X_1 h + \omega^2 \sum mxz = 0.$$

Повернем систему координат oxy вокруг оси oy на угол α, координаты любой точки относительно новой системы $o\xi\eta\zeta$ назовем через ξ, η, ζ; тогда

$$x = \xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha;\ y = \eta;\ z = \zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha;$$
$$\sum mxz = \sum m(\xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha)(\zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha) =$$
$$= \sum m\,\xi\zeta\cos^2\alpha - \sum m\,\xi\zeta\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\left(\sum m\,\zeta^2 - \sum m\,\xi^2\right).$$

Плоскость $\zeta o\eta$ является плоскостью симметрии для цилиндра, поэтому

$$\sum m\,\zeta\xi = 0.$$

То же самое можно сказать и о плоскости xoz, и

$$\sum myz = 0.$$

Теперь $\sum mxz$ представится так:

$$\sum mxz = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\sum m(\zeta^2 + \eta^2) - \sum m(\xi^2 + \eta^2)\right] = \frac{\sin 2\alpha}{2}(A - C) =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{Ml^2}{3} + \frac{Mr^2}{4} - \frac{Mr^2}{2}\right) = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{Ml^2}{3} - \frac{Mr^2}{4}\right).$$

Далее

$$\sum m\omega^2 x = \omega^2 \sum mx = 0;$$
$$\sum m\omega^2 y = \omega^2 \sum my = 0.$$

Подставляя найденные величины в условия равновесия, имеем:

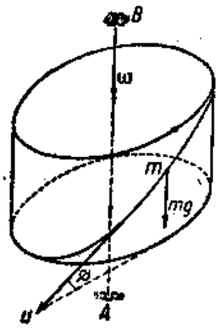
$$Y_1 = Y_2 = 0,$$
$$Z_1 = P,$$
$$-X_2 = X_1 = \frac{P\omega^2\sin 2\alpha}{4gh}\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right).$$

Последние две слагающие образуют пару, следовательно, если $\frac{l^2}{3} > \frac{r^2}{4}$, то силу X_2 на чертеже надо показать в противоположную сторону.

Задача 100. Цилиндр, который может вращаться около вертикальной оси AB, имеет на своей поверхности винтовой желоб; в него вложен шарик массы m (материальная точка) (черт. 93). Найти скорости шарика и цилиндра при движении системы под действием силы тяжести, полагая, что масса цилиндра равна массе шарика, радиус цилиндра a равен его высоте, и угол φ наклона касательной к винтовой нарезке с горизонтом равен 45°.

Вся система может вращаться вокруг вертикальной оси. Сумма моментов внешних сил — сил тяжести и сил реакции опор — относительно этой оси равна нулю. Следовательно сумма моментов количеств движения системы постоянна и в начале движения равна нулю.

Момент инерции цилиндра J относительно его оси равен $\frac{ma^2}{2}$;



Черт. 93.

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Угловая скорость цилиндра ω, относительная скорость шарика по нарезке u. Уравнение моментов количеств движения напишется так:

$$\omega(J + ma^2) + mau\cos\varphi = 0,$$

или

$$\frac{3}{2}ma^2\omega + \frac{mau}{2}\sqrt{2} = 0,$$

откуда

$$3a\omega + u\sqrt{2} = 0.$$

В этом уравнении два неизвестных ω и u. Очевидно $\omega < 0$.

Составим теперь второе уравнение, именно уравнение живых сил.

Живая сила цилиндра: $\frac{J\omega^2}{2}$.

Живая сила шарика:

$$\frac{m}{2}[(a\omega + u\cos\varphi)^2 + u^2\sin^2\varphi].$$

Работа сил веса при падении шарика на высоту z:

$$mgz.$$

Уравнение живых сил:

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{m}{2}[(a\omega + u\cos\varphi)^2 + u^2\sin^2\varphi] = mgz;$$

подставляя значения φ и J, имеем:

$$\frac{3}{2}\omega^2 a^2 - 3a^2\omega^2 + \frac{9a^2\omega^2}{2} = 2gz,$$

или

$$3a^2\omega^2 = 2gz,$$

$$\omega = -\sqrt{\frac{2gz}{3a^2}}; \quad u = \sqrt{3gz}.$$

Цилиндр вращается в сторону, указанную на чертеже.

I. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПАРАЛЛЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА).

Задача 101. Исследовать движение двух материальных точек, связанных невесомым неизменяемым стержнем, которые движутся в горизонтальной плоскости по инерции (черт. 94).

Воспользуемся предложенным вопросом, чтобы восстановить в памяти основные положения движения.

Пусть массы точек A и B — m_1 и m_2, общая масса M. Вся система представляет твердое тело с центром тяжести в точке C:

$$AC = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}; \quad BC = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Черт. 94.

Остановим систему и кроме действующих сил, которые вместе с их проекциями обозначим: $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$, приложим силы инерции. По теореме д'Аламбера мы должны получить состояние равновесия.

На чертеже для одной из точек A изображена сила инерции — mj и ее слагающие mj_n и mj_t; так как все, что будет говориться о первой точке, в той же мере относится и ко второй, будем писать j и m без значков 1 и 2.

Для равновесия необходимо:

$$\sum X - \sum \text{пр}_x(mj) = 0;$$
$$\sum Y - \sum \text{пр}_y(mj) = 0;$$
$$-\sum M_C(mj) + \sum M_C(P) = 0.$$

Точку C мы по праву, но вполне произвольно, избрали за центр моментов.

Преобразовав уравнения обычным образом и называя через $\overline{x}$, $\overline{y}$ координаты центра тяжести, через ω — угловую скорость относительно центра тяжести и наконец через r — расстояние любой из заданных точек от C, получим:

$$\sum m \frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \sum X, \quad \sum m \frac{d^2\overline{y}}{dt^2} = \sum Y; \quad \sum mrj_t = \sum M_C(P),$$

или

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=\sum X;\ M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}=\sum Y;\ \frac{d\omega}{dt}\sum mr^2=\sum M_C(P).$$

Обозначив момент инерции $\sum mr^2$ системы относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через центр тяжести C, через J, можем последнему уравнению придать вид:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sum M_C(P)}{J}.$$

Сущность трех полученных уравнений можно формулировать следующим образом.

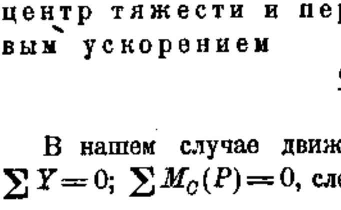
Центр тяжести движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы, и к которой приложена равнодействующая всех внешних сил, перенесенных поступательным движением в центр тяжести.

Система вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной чертежу с угловым ускорением

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sum M_C(P)}{J}.$$

В нашем случае движение происходит по инерции: $\sum X=0$ и $\sum Y=0$; $\sum M_C(P)=0$, следовательно движение центра тяжести прямолинейное и равномерное. Угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ — нуль, следовательно точки A и B в относительном движении описывают вокруг C окружности, двигаясь равномерно.

Задача 102. На абсолютно гладкую плоскость MN поставлена в наклонном положении палка AB длиной $2l$ и предоставлена самой себе. Какую кривую опишет свободный конец B палки при ее падении под влиянием ее веса (черт. 95).



Черт. 95.

Силы, действующие на палку, вертикальны и лежат в одной плоскости ACO. Горизонтальных сил нет, следовательно центр тяжести C не сойдет с вертикали OC; точка A будет двигаться по прямой OM, и свободный конец B опишет эллипс с полуосями l и $2l$:

$$x_B=l\sin\varphi;\quad y_B=2l\cos\varphi;$$

$$\frac{x_B^2}{l^2}+\frac{y_B^2}{4l^2}=1,$$

Задача 103. В условиях предыдущей задачи найти скорость центра тяжести C в тот момент, когда стержень достигнет плоскости MN, т. е. станет горизонтальным.

Обозначим ординату центра тяжести через y, начальную ординату y_0, J_1 — момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через мгновенный центр P, ω — мгновенную угловую скорость. Заметим, что для данного положения, определяемого углом φ, момент инерции J_1 равен сумме $J_0 + PC^2 \dfrac{G}{g}$, где G — вес стержня, а J_0 — момент инерции его относительно оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через центр тяжести.

Для любого момента согласно уравнению живых сил имеем:

$$G(y_0 - y) = \frac{J_1}{2}\,\omega^2,$$

но

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};\; y = l\cos\varphi;\; \frac{dy}{dt} = -l\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt};\; J_0 = \frac{Gl^2}{3g};$$

поэтому

$$G(y_0 - y) = \frac{1}{2}\left(J_0 + \frac{G}{g}\,l^2\sin^2\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

или

$$2Ggl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = (J_0 g + Gl^2\sin^2\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2;$$

подставляя значение J_0 и $\dfrac{d\varphi}{dt}$:

$$2Ggl^3(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\sin^2\varphi = \left(\frac{Gl^2}{3} + Gl^2\sin^2\varphi\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2;$$

по сокращении:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{6\,lg\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\sin^2\varphi}{1 + 3\sin^2\varphi};$$

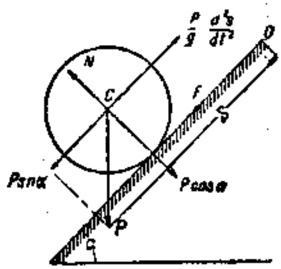
при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{3lg}{2}\cdot\cos\varphi_0}.$$

Задача 104. Однородный круглый цилиндр радиуса r веса P начинает двигаться по шероховатой наклонной плоскости под действием силы тяжести, и во время всего движения ось его остается горизонтальной. Какова в любой момент сила трения, каково движение цилиндра, и каков должен быть коэфициент трения первого рода, чтобы отсутствовало скольжение (черт. 96)?

Условие горизонтальности оси цилиндра следует рассматривать как указание на то, что силы, действующие на цилиндр, расположены совершенно симметрично относительно плоскости, перпендикулярной оси и проходящей через середину ее и сводятся к равнодействующим, расположенным в названной плоскости.

Силы эти следующие: силы веса P, силы реакции плоскости: нормальная N и тангенциальная F, и наконец силы инерции. Пусть s — путь, пройденный точкой C. Уравнения движения цилиндра будут следующие:



Черт. 96.

$$P\sin\alpha - \frac{P}{g}\frac{d^2s}{dt^2} - F = 0,$$

$$P\cos\alpha - N = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Fr}{J_0},$$

где $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение цилиндра.

$-\frac{P}{g}\frac{d^2s}{dt^2}$ — равнодействующая сил инерции поступательного движения цилиндра. Но между $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d^2s}{dt^2}$ можно установить связь:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = r\frac{d\omega}{dt} = \frac{Fr^2}{J_0}.$$

Равным образом, обозначив коэфициент трения первого рода через f, имеем:

$$F = Nf = Pf\cos\alpha.$$

Далее

$$J_0 = \frac{Pr^2}{2g}.$$

После подстановки имеем:

$$P\sin\alpha - \frac{P^2fr^2\cos\alpha}{\frac{Pr^2}{2g}g} - fP\cos\alpha = 0;$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha - 3f = 0; \quad f = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

но конечно коэфициент f может быть и больше этой величины, так как мы рассмотрели случай, когда сила трения достаточна для того, чтобы исключить скольжение.

Интегрируя уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{Pfr^2\cos\alpha}{J_0},$$

имеем:

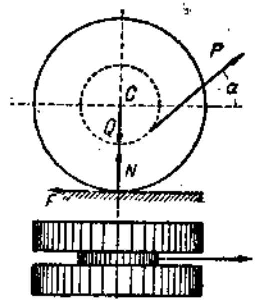
$$s=\frac{1}{3}g\sin\alpha\cdot t^2;$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{2}{3}\frac{g}{a}\sin\alpha=\text{const};$$

при этом полагаем, что в начале движения цилиндр был в покое.

Движение центра C будет равномерно-ускоренное. Равным образом и вращение цилиндра вокруг оси будет совершаться с постоянным угловым ускорением.

Задача 105. На шейку катка, лежащего на горизонтальной плоскости, достаточно шероховатой, намотана нить. Свободный конец нити образует с горизонтом угол α и натянут силой P. Исследовать движение катка, полагая, что скольжение отсутствует (черт. 97). Радиус катка R, шейки r.



Черт. 97.

На каток действуют следующие силы:

Вес $Q=Mg$.

Натяжение нити P.

Нормальная реакция пола N.

Сила трения F.

Напишем уравнение движения центра тяжести C по горизонтальному направлению:

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=P\cos\alpha-F.$$

Обозначим через $\frac{d\omega}{dt}$ угловое ускорение при вращении катка вокруг оси C, тогда

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=R\frac{d\omega}{dt};$$

и

$$MR\frac{d\omega}{dt}=P\cos\alpha-F;$$

но

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{RF-Pr}{Mk^2};$$

где k — радиус инерции вала по отношению к оси C.

Исключив из трех последних уравнений величины F и $\frac{d\omega}{dt}$, найдем ускорение центра C, лучше сказать ускорение поступательного движения оси катка:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{PgR(R\cos\alpha-r)}{Q(R^2+k^2)}.$$

Если предположить, что угол α меняет свою величину, то при

$$R\cos\alpha - r = 0$$

ускорение оси меняет знак.

Задача 106. Палочка PQ расположена в вертикальной плоскости, перпендикулярной к стене, на которую палочка опирается концом Q, другой конец ее P опирается на горизонтальный пол. Палочка однородна, и толщина ее одинакова по всей длине. Трение отсутствует. Предоставленная самой себе палочка начинает падать.

При каком положении палочки верхний ее конец отделится от стены (черт. 98)?

Введем следующие обозначения:

S — центр тяжести палочки,

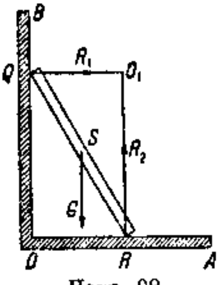
$2PS = 2QS = 2a$ — длина палочки.

x и y — координаты S.

$\angle QPO = \varphi$ — для момента t.

G — вес палочки.

k — радиус инерции по отношению к оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через S.



Черт. 98.

R_1 и R_2 — силы реакции, перпендикулярные к опорным плоскостям.

M — масса палочки: $G = Mg$.

Освободив палочку от связей, мы можем написать три уравнения движения свободной системы.

Переносное движение вместе с центром:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} - R_1 = 0; \quad M\frac{d^2y}{dt^2} - R_2 + Mg = 0. \tag{1}$$

Вращательное движение вокруг центра S:

$$Mk^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R_1 a\sin\varphi - R_2 a\cos\varphi; \tag{2}$$

исключив реакции из этих трех условий, получим:

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a\sin\varphi\frac{d^2x}{dt^2} - a\cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2} - ag\cos\varphi; \tag{3}$$

но

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi;$$

вместе с тем:

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - a\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}; \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = a\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}; \tag{5}$$

из этих уравнений следует:

$$a\sin\varphi\frac{d^2x}{dt^2}-a\cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2}=-a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

после подстановки уравнение (3) примет вид:

$$(a^2+k^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-ag\cos\varphi; \tag{6}$$

после умножения обеих частей на $2\frac{d\varphi}{dt}$ и интегрирования получим:

$$(a^2+k^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=C-2ag\sin\varphi.$$

Обозначим через α начальное значение φ, тогда имеем:

$$(a^2+k^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2ag(\sin\alpha-\sin\varphi); \tag{7}$$

или, полагая известным, что $Mk^2=\frac{Ma^2}{3}$, найдем:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{3}{2}\frac{g}{a}(\sin\alpha-\sin\varphi).$$

Уравнение (7) можно было бы написать и непосредственно, так как оно после умножения обеих частей на M представляет собой интеграл живых сил: левая часть — живая сила палочки при вращении вокруг мгновенного центра O_1, правая — работа силы тяжести при переходе палочки из положения, определяемого углом α, в положение, определяемое углом φ.

В тот момент, когда конец палочки отделяется от стены, реакция R_1 обращается в нуль. По уравнению (1) видно, что обратится в нуль и $\frac{d^2x}{dt^2}$, тогда уравнение (4) дает:

$$a\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+a\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0;$$

подставляя значения производных из уравнений (6) и (7), получим:

$$2(\sin\alpha-\sin\varphi)\cos\varphi=\sin\varphi\cos\varphi;$$

но φ не может равняться $\frac{\pi}{2}$, поэтому:

$$2(\sin\alpha-\sin\varphi)=\sin\varphi;\quad \sin\varphi=\frac{2}{3}\sin\alpha.$$

Задача 107. На горизонтальной плоскости неподвижно лежит полушар BOD; с него скатывается, начиная движение с верхней точки B, однородный шар C. Поверхность BD шероховатая, и качение происходит без скольжения. Найти точку, в которой шар C покинет поверхность BD (черт. 99).

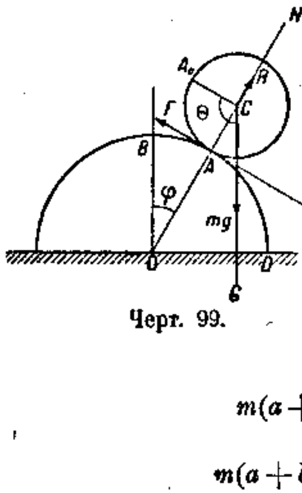
Обозначим: радиус $OA:b$, радиус $AC:a$, вес шара $C:mg$, $\angle BOA:\varphi$, $\angle A_0CG:\theta$, радиус инерции шара относительно оси, проходящей через $C:k$.

Означенные величины связаны между собою так:

$$mk^2=0{,}4ma^2;\quad k^2=0{,}4a^2;$$

$$\smile BA=\smile A_0A \text{ или } a(\theta-\varphi)=b\varphi;\quad (a+b)\varphi=a\theta.$$

Проведем в точке A нормаль AN и касательную A. Заметим, что угловая скорость движения точки C равна $\frac{d\varphi}{dt}$, а угловое ускорение $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$; линейное тангенциальное ускорение точки C равно $(a+b)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$; нормальное ускорение: $(a+b)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$.



Черт. 99.

После этих замечаний можно написать уравнения движения точки C, означив силы реакции через F и R:

$$\left.\begin{aligned} m(a+b)\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=mg\sin\varphi-F\\ m(a+b)\left(\frac{d\varphi}{dt^2}\right)^2&=mg\cos\varphi-R \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(проекции всех сил на нормаль и касательную).

Уравнение, определяющее угловое ускорение вращения шара вокруг центра C:

$$mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=Fa;$$

принимая во внимание соотношение $a\theta=(a+b)\varphi$, получим:

$$mk^2\frac{a+b}{a}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=Fa;\qquad(2)$$

после подстановки в уравнение (1):

$$F\frac{a^2}{k^2}=mg\sin\varphi-F,\text{ или }F=\frac{k^2}{a^2+k^2}mg\sin\varphi=\frac{2}{7}mg\sin\varphi.$$

Подставив это значение силы F в уравнение (2) и помножив обе его части на $2\frac{d\varphi}{dt}$, имеем:

$$2(a+b)\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt}dt=\frac{10}{7}g\sin\varphi\, d\varphi.$$

После интегрирования в пределах 0 и $\frac{d\varphi}{dt}$ для левой части, 0 и φ — для правой получим:

$$(a+b)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{10}{7}g(1-\cos\varphi). \tag{3}$$

В момент, когда шар C готов покинуть неподвижную поверхность другого шара, сила $R=0$, и второе из уравнений (1) совместно с уравнением (3) дадут:

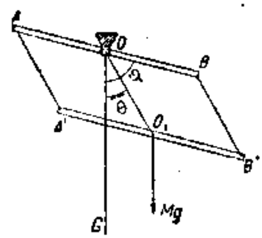
$$\frac{10}{7}g(1-\cos\varphi)=g\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi=\frac{10}{17};$$

когда угол φ достигнет значения

$$\varphi=\arccos\frac{10}{17},$$



Черт. 100.

шар C отделится от неподвижной поверхности.

Задача 108. Определить движение системы, состоящей из двух однородных тяжелых брусков AB и $A'B'$ равной длины и одинаковой массы, связанных невесомыми нитями одинаковой длины, причем брусок AB должен вращаться вокруг своей середины O, а вся система двигаться в неподвижной вертикальной плоскости (черт. 100).

Обозначим: $\angle GOB : \varphi$, $\angle GOO_1 : \theta$, вес каждого стержня : Mg, длину $OO_1 : l$, радиус инерции стержня относительно середины $O : k$, угловую скорость вращения AB вокруг $O: \frac{d\varphi}{dt}$, угловую скорость вращения точки O_1 вокруг $O : \frac{d\theta}{dt}$.

Живая сила каждого стержня при вращении вокруг своего центра тяжести:

$$\frac{Mk^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Живая сила поступательного движения стержня $A'B'$:

$$\frac{Ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Напишем теперь уравнение живых сил для указанного в задаче движения стержней, согласного со связями, за бесконечно-малый промежуток времени:

$$\frac{1}{2}\,d\left[2Mk^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+Ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-Mgl\sin\theta d\theta.$$

Уравнение моментов количеств движения напишется так:

$$\frac{d}{dt}\left(2Mk^2\frac{d\varphi}{dt}+Ml^2\frac{d\theta}{dt}\right)=-Mgl\sin\theta,$$

откуда, приравнив правые части, имеем:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\theta}{dt}\right)\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0;$$

$\frac{d\varphi}{dt}\gtrless\frac{d\theta}{dt}$, следовательно нулю равен второй множитель:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\text{const},$$

и

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta;$$

но это есть уравнение движения математического маятника длины l.

Итак, точка O_1 движется, как центр качания маятника длины OO_1, а стержень AB равномерно вращается вокруг центра O.

VII. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Рассмотрим частный случай движения, когда точка движется по прямой, которую примем за ось x. Единственное уравнение движения напишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X.$$

Наиболее общим случаем является тот, когда сила X, действующая на точку, будет функцией одновременно координаты x, скорости v и времени t. В этом случае:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

Это — уравнение второго порядка, которое позволит вычислить x в функции времени t. Общий интеграл уравнения будет содержать две произвольных постоянных:

$$x=f(t, C, C');$$

постоянные C и C' определяются по начальным данным:

$$x_0=f(t_0, C, C'),\quad v_0=f'(t_0, C, C').$$

Интегрирование рассматриваемого уравнения сводится к квадратурам, если X содержит только одну из переменных x, v, t.

Во всех ниже разобранных задачах прямолинейная траектория точки принята за ось x. В тех случаях, когда сила является функцией времени или скорости, уравнению придают вид:

$$m\frac{dv}{dt}=X$$

Если X есть функция x, то уравнение преобразуется так:

$$mv\frac{dv}{dx}=X.$$

Задача 109. Точку массы m заставляют двигаться по горизонтальному направлению под действием постоянной силы P с целью определить закон сопротивления среды в зависимости от скорости. Закон пространств: $s=bt^3$. Каков закон сопротивления среды в зависимости от скорости?

Диференцируя уравнение, выражающее закон пространств, имеем:

$$s = bt^3, \quad v = \frac{ds}{dt} = 3bt^2, \quad j = \frac{d^2s}{dt^2} = 6bt$$

(v — скорость, j — ускорение).

Уравнение движения точки, если обозначить сопротивление среды через R, даст:

$$P - R = 6mbt,$$

откуда:

$$R = P - 6mb\sqrt{\frac{v}{3b}}.$$

Задача 110. Тяжелая точка свободно падает в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Определить наибольшую скорость точки, если при $v = 1$ *м/сек* сила сопротивления равна одной трети веса точки. Какова также зависимость скорости от времени? ($v_0 = 0$.)

Обозначая вес точки через mg, фактор пропорциональности в выражении силы сопротивления — через k, получим уравнение движения точки:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv;$$

но $k \cdot 1 = \frac{1}{3}mg$, потому:

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v}{3}\right), \quad \frac{dv}{1 - \frac{v}{3}} = g\,dt,$$

или, интегрируя в пределах: 0 и v, 0 и t, найдем:

$$\ln\left(1 - \frac{v}{3}\right) = -\frac{gt}{3}, \quad 1 - \frac{v}{3} = e^{-\frac{gt}{3}}, \quad v = 3\left(1 - e^{-\frac{gt}{3}}\right).$$

Max v, равный 3 *м/сек*, получим при $t = \infty$.

Задача 111. На точку, вес которой равен 19,62 *кг*, находившуюся в начальный момент в начале координат и имевшую начальную скорость $v_0 = 10$ *м/сек*, действует сила, направленная одинаково с начальной скоростью и равномерно возрастающая на a *кг/сек*. Зная, что начальная величина силы $P_0 = 4$ *кг*, и что на расстоянии 450 *м* от начального положения скорость точки равна 105 *м/сек*, определить величину a.

Масса точки : $\frac{19,62}{9,81}=2.$

Диференциальное уравнение движения напишется так:

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=4+at;$$

интегрируя его, получим:

$$2\frac{dx}{dt}=4t+\frac{at^2}{2}+20;$$

при вторичном интегрировании имеем:

$$2x=2t^2+\frac{at^3}{6}+20t.$$

Подставляя в два эти уравнения значения $x=450$ и $\frac{dx}{dt}=105$, для некоторого момента T получим:

$$210=4T+\frac{aT^2}{2}+20;$$

$$900=2T^2+\frac{aT^3}{6}+20T;$$

исключая aT^2, найдем:

$$T^2+125T-1\,350=0;$$

$$T_1=10;\ \ T_2=-135;\ \ a=3\ кг/сек.$$

Решение T_2 отпадет.

Задача 112. Материальная точка массы $m=1$ движется под действием силы, равномерно убывающей с течением времени на 0,5 *кг/сек*. Точке сообщена начальная скорость $v_0=4$ *м/сек*, направленная прямо противоположно силе. Определить, какова была величина силы P_0 в начальный момент, и найти время и место остановки, если известно, что сила обратилась в нуль как раз в тот момент, когда точка остановилась.

Время, протекшее до остановки точки:

$$T=P_0:\frac{1}{2}=2P_0.$$

Сила P, действующая на точку, выразится так:

$$P=-P_0+\frac{t}{2};$$

или, при $m=1$:

$$P=\frac{dv}{dt}=-P_0+\frac{t}{2};$$

откуда

$$v=-P_0t+\frac{t^2}{4}+4. \quad (v_0=4).$$

В момент остановки:

$$T=2P_0,\ v=0,\ 0=-2P_0^2+P_0^2+4;$$

откуда

$$P_0=2\ \textit{кг};\quad T=4\ \textit{сек.}$$

Интегрируя уравнение

$$v=\frac{dx}{dt}=-2t+\frac{t^2}{4}+4$$

имеем:

$$x=-t^2+\frac{t^3}{12}+4t;$$

для $t=4$ *сек.* $x=\frac{16}{3}$ *м.*

Таким образом начальная величина силы $P_0=2$ *кг*, и точка остановится через 4 *сек.* после начала движения, пройдя путь $\frac{16}{3}$ *м.*

Задача 113. Материальная точка массы $m=2$, находящаяся под действием центральной силы, удаляется от центра действия силы, причем скорость во все время движения пропорциональна третьей степени расстояния. Зная, что в начальный момент $r_0=3$ *м*, $v_0=4$ *м/сек*, найти величину силы в начальный момент, предполагая, что сила зависит только от расстояния r точки от центра.

Пусть k фактор пропорциональности в выражении скорости, тогда:

$$v=\frac{dr}{dt}=kr^3;\quad v_0=kr_0^3;\quad 4=27k.$$

Диференциальное уравнение движения точки будет:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=m\frac{dv}{dr}\cdot v=2\cdot 3kr^2v,$$

откуда

$$P_0=\left[m\frac{d^2r}{dt^2}\right]_{r=3}=2\cdot 3\cdot\frac{4}{27}\cdot 9\cdot 4=32\ \textit{кг.}$$

Задача 114. Точка A, находящаяся на верхнем конце некоторого вертикального отрезка (черт. 101), начинает падать без начальной скорости как раз в тот момент, когда из нижней точки отрезка брошена вертикально вверх такая же точка B со скоростью w_0. Когда они встретятся, если известно, что сопротивление среды пропорционально первой степени скорости?

Обозначим силу сопротивления среды, действующую на точку массы m, через kmv, тогда уравнение движения точки A напишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=mg-kmv,$$

сокращая на m:

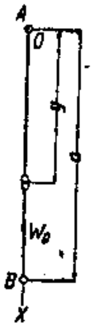
$$\frac{dv}{dt}=g-kv.$$

Проинтегрируем это уравнение два раза, первый раз (по переменным v и t) в пределах:

$$0 \text{ и } v; \quad 0 \text{ и } t;$$

второй раз (по переменным x и t) в пределах:

$$0 \text{ и } y; \quad 0 \text{ и } T.$$



Черт. 101.

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dv}{g-kv}=dt;$$

или, интегрируя:

$$\int_0^v \frac{dv}{g-kv}=\int_0^t dt;$$

$$\frac{1}{k}\ln(g-kv)-\frac{1}{k}\ln g=-t;$$

откуда

$$\ln\left(1-\frac{k}{g}v\right)=-kt; \quad v=\frac{dx}{dt}=\frac{g}{k}(1-e^{-kt}); \tag{1}$$

снова разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_0^y dx=\frac{g}{k}\int_0^T (1-e^{-kt})dt;$$

$$y=\frac{g}{k}\left(T+\frac{1}{k}e^{-kT}\right)-\frac{g}{k^2}.$$

Уравнение движения точки B будет то же самое, какое и для точки A, только пределы интегрирования будут иные: при первом интегрировании:

$$-w_0 \text{ и } v; \quad 0 \text{ и } t;$$

при втором интегрировании:

$$a \text{ и } y; \quad 0 \text{ и } T;$$

интегрируя, получим:

$$\int_{-w_0}^{v} \frac{dv}{g-kv} = \int_0^t dt,$$

$$\frac{1}{k}\ln(g+kw_0) - \frac{1}{k}\ln(g-kv) = t,$$

или

$$\ln\frac{g+kw_0}{g-kv} = kt; \quad g+kw_0 = (g-kv)e^{kt};$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}[g-(g+kw_0)e^{-kt}];$$

вторично интегрируя:

$$\int_a^y dx = \frac{1}{k}\int_0^T [g-(g+kw_0)e^{-kt}]\,dt;$$

$$y - a = \frac{gT}{k} + \frac{1}{k^2}(g+kw_0)e^{-kT} - \frac{g+kw_0}{k^2}. \tag{2}$$

Вычитая из ур-ния (1) ур-ние (2), получим:

$$a = \frac{w_0}{k} - \frac{1}{k}w_0 e^{-kT},$$

откуда

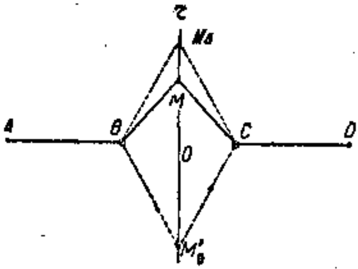
$$e^{kT} = \frac{w_0}{w_0 - ak}, \quad T = \frac{1}{k}\ln\frac{w_0}{w_0-ak}.$$

Задача 115. Две упругие нити одинаковой длины $AB = CD$ продернуты в кольца B и C и прикреплены концами в точках A и D. Другие концы прикреплены к колечку M, находящемуся на перпендикуляре, восстановленном из середины линии BC на расстоянии s_0 от нее. Отрезок $BC = AB = CD$. Колечко предоставлено действию сил упругости нитей. Найти закон движения колечка M, полагая, что сила упругости нитей пропорциональна их относительной вытяжке (черт. 102).

В силу полной симметрии чертежа относительно прямой SO, перпендикулярной к линии AD и проходящей через среднюю точку O, движение колечка будет прямолинейным по прямой SO.

Сила упругости F любой нити, например AB, напишется так:

$$F=E\cdot\frac{BM}{AB},$$



Черт. 102.

где M — одно из положений колечка,
AB — начальная длина нити,
BM — абсолютная вытяжка,
E — модуль упругости.

Вертикальная слагающая этой силы будет:

$$F\cos BMO=E\frac{MO}{AB}.$$

Геометрическая сумма двух равных сил упругости нитей будет:

$$\overline{2F}=2E\frac{MO}{AB}$$

Назовем массу колечка — m, длину отрезка MO через s, постоянную дробь $\frac{2E}{m}\cdot\frac{1}{AB}$ через k^2, тогда:

$$\overline{2F}=k^2ms.$$

Колечко как бы притягивается к центру O силой $2F$, пропорциональной расстоянию колечка от центра, и диференциальное уравнение движения колечка будет иметь вид:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-k^2ms,\text{ или }\frac{d^2s}{dt^2}=-k^2s.$$

Ниже приведем два способа интегрирования этого уравнения.

1. Обозначим скорость колечка $\frac{ds}{dt}$ через v, тогда:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds}=v\frac{dv}{ds};$$

и

$$v\frac{dv}{ds}=-k^2s;$$

разделяя переменные, интегрируем уравнение в пределах: для v от 0 до v и для s от s_0 до s:

$$\int_0^v v\,dv = -k^2 \int_{s_0}^{s} s\,ds; \quad v^2 = k^2(s_0^2 - s^2),$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \pm k\sqrt{s_0^2 - s^2}.$$

Исследуя участок движения, в котором колечко движется в отрицательную сторону оси s, возьмем у радикала знак минус. Разделяя переменные, снова интегрируем в пределах: для s от s_0 до s и для t от 0 до t:

$$-\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = k\int_0^t dt; \quad \arccos\frac{s}{s_0} = kt,$$

или

$$s = s_0 \cos kt.$$

Движение колечка будет гармоническим колебанием. При $t = \frac{\pi}{k}$ координата $s = -s_0$, т. е. колечко станет относительно прямой AD в положение M_0', симметричное начальному M_0, и совершит обратное колебание.

$T = \frac{\pi}{k}$ называется периодом колебания, $2s_0$ — амплитудой.

2. Дадим уравнению $\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2 s$ вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2 s = 0;$$

получим линейное уравнение второго порядка с постоянными коэфициентами без второй части. Характеристическое уравнение будет:

$$r^2 + k^2 = 0;$$

корни его: $r_1 = ki$, $r_2 = -ki$.

Общее решение заданного уравнения:

$$s = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt},$$

или

$$s = (C_1 + C_2)\cos kt + i(C_1 - C_2)\sin kt.$$

Полагая $C_1 + C_2 = A$, $(C_1 - C_2)i = B$, имеем:

$$s = A\cos kt + B\sin kt.$$

C_1, C_2, A и B — произвольные постоянные. Определим A и B по начальным данным:

$$s = s_0 \text{ при } t = 0,$$
$$s_0 = A;$$

далее:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v = -Ak \sin kt + Bk \cos kt,$$
$$v = v_0 = 0 \text{ при } t = 0,$$
$$0 = Bk;$$

$k \lessgtr 0$, следовательно $B = 0$, и общее решение примет вид:

$$s = s_0 \cos kt.$$

Задача 116. Материальная точка массы $m = 2$ **движется по** оси x под действием силы, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от начала координат и притягивающей ее к этому началу. Определить положение точки в конце первой секунды от начала движения по следующим данным: $x_0 = 1$; $v_0 = 4$, направление v_0 положительно; в тот момент, когда $x = 2$, сила притяжения равна 4.

Уравнение движения точки будет:

$$2v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^3};$$

где k — фактор пропорциональности. По начальным данным $4 = \frac{k}{8}$; $k = 32$, и уравнение примет вид:

$$2v\frac{dv}{dx} = -\frac{32}{x^3};$$

разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$2\int_4^v v\,dv = -32\int_1^x \frac{dx}{x^3};$$

или

$$v^2 - 16 = 16\left(\frac{1}{x^2} - 1\right); \qquad v = \frac{4}{x};$$

v будем считать > 0, ибо $v_0 = 4$, а в нуль скорость v обращается при $x \to \infty$.

Далее

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{4}{x},$$

или

$$x\,dx = 4dt,$$

интегрируя

$$\int_1^x x\,dx = 4t; \quad x^2 - 1 = 8t,$$

при

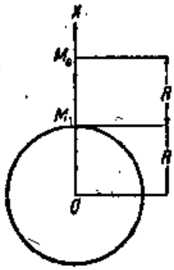
$$t = 1; \quad x = 3.$$

Знак взят положительный, ибо во все время движения x возрастает.

Задача 117. Материальная точка массы m, находящаяся над поверхностью земли на расстоянии радиуса земли R, предоставлена самой себе и начинает падать к центру земли. Определить, через сколько секунд от начала движения она достигнет земли и какова у ней в этот момент будет скорость (черт. 103).

Предполагается, что атмосфера отсутствует, а земля притягивает точку силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от начала координаты o (центр земли). Радиус земли

$$R = 6\,366\,000 \text{ м}; \quad g = 9{,}8 \text{ м/сек.}$$



Черт. 103.

Диференциальное уравнение движения будет иметь вид:

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{km}{x^2};$$

k — постоянный фактор пропорциональности; знак минус у выражения силы поставлен потому, что сила направлена к центру o.

Интегрируя это уравнение в пределах o и v, $2R$ и x, имеем:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{x} - \frac{k}{2R},$$

или

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{R}}\sqrt{\frac{2R}{x} - 1};$$

на поверхности земли

$$mg = \frac{km}{R^2}; \quad k = gR^2$$

и

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{Rg}\sqrt{\frac{2R}{x} - 1};$$

при

$$x = R; \quad v = -\sqrt{Rg};$$

знак минус соответствует направлению скорости к центру o.

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{2R}-1}}=-\sqrt{Rg}\,dt;$$

интегрируя в пределах $2R$ и R, o и T, получим

$$T=\frac{1}{\sqrt{Rg}}\int_R^{2R}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2R}{x}-1}}.$$

Подставим значение $R=6\,366\,000$ *м*, тогда скорость точки при падении на землю окажется равной $8\,000$ *м/сек*:

$$T=\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{640\,000}\cdot\frac{5}{2};$$

$$T=2\,000 \text{ сек.}=33 \text{ мин.}$$

Примечание. Для вычисления интеграла

$$\int_R^{2R}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2R}{x}-1}}$$

положим:

$$\sqrt{\frac{x}{2R}}=\sin\varphi;\quad x=2R\sin^2\varphi;\quad dx=4R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi;$$

новые пределы интегрирования будут:

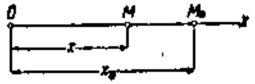
$$\varphi_1=\frac{\pi}{4};\quad \varphi_2=\frac{\pi}{2};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2R}{x}-1}}=\int\frac{4R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi}-1}}=4R\int\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=2R\int(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=2R\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right);$$

$$2R\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=R\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 118. Неподвижный центр o притягивает материальную точку M с силой, обратно пропорциональной кубу ее расстояния x от него. Найти время, в которое точка падает до центра. Начальная скорость $v_0=0$, начальное расстояние точки от центра $x_0=a$, масса точки $m=1$, k — коэфициент пропорциональности в выражении силы (черт. 104).



Черт. 104.

Примем за ось ox прямую Mo, соединяющую начальное положение точки M_0 с центром o; диференциальное уравнение движения точки будет:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^3};$$

пределы интегрирования для v будут o и v; для x будут a и x

$$\int_0^v v dv = -k\int_a^x \frac{dx}{x^3};$$

откуда

$$v^2 = k\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

или

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{k}\,\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{ax};$$

разделяя переменные, найдем:

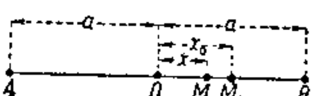
$$-\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{k}}{a}\,dt;$$

$$-\int_a^0 \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{k}}{a}\int_0^T dt;$$

$$(\sqrt{a^2 - x^2})_a^0 = \frac{\sqrt{k}}{a}\,T;$$

$$T = \frac{a^2}{\sqrt{k}}.$$

Задача 119. Два одинаковых неподвижных центра притягивают материальную точку силами, прямо пропорциональными массе точки и обратно пропорциональными квадрату расстояния точки до центра. В начальный момент точка находится на линии, соединяющей центры (черт. 105), втрое ближе к одному из них, чем к другому, и обладает скоростью v_0, направленной к более удаленному центру. Определить, при какой величине начальной скорости точка, придя в середину расстояния между центрами, там останется.



Черт. 105.

Начало координат O примем в середине отрезка AB.

Обозначим силу притяжения единицы массы на единице расстояния через k. Диференциальное уравнение движения точки напишется так:

$$v\frac{dv}{dx}=k\left[\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{(a+x)^2}\right]$$

или

$$v\frac{dv}{dx}=\frac{4akx}{(a^2-x^2)^2}.$$

Разделяя переменные, проинтегрируем уравнение в пределах от $-v_0$ до o и от $\frac{a}{2}$ до o:

$$\int_{-v_0}^{0} v\,dv=\int_{\frac{a}{2}}^{0}\frac{4akx\,dx}{(a^2-x^2)^2},$$

или

$$\left(\frac{v^2}{2}\right)_{-v_0}^{0}=\left(\frac{2ak}{a^2-x^2}\right)_{\frac{a}{2}}^{0};$$

откуда

$$v_0=\sqrt{\frac{4k}{3a}}.$$

Задача 120. Молекулы бесконечно тонкой однородной материальной окружности радиуса r притягивают точку P, лежащую на перпендикуляре к плоскости окружности, восстановленном из ее центра o, силами, обратно пропорциональными квадратам расстояния до точки P и прямо пропорциональными произведению массы точки (черт. 106) и массы молекулы.

Фактор пропорциональности у силы — k, линейная плотность окружности — ρ.

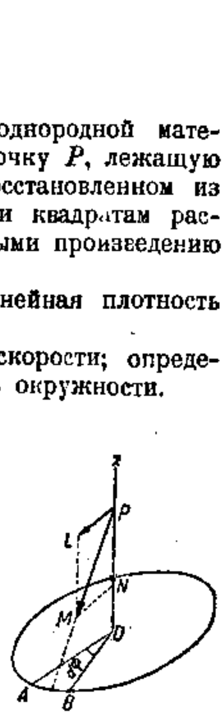
Точка P начинает двигаться без начальной скорости; определить, с какой скоростью она пересекает плоскость окружности.

Примем перпендикуляр oP за ось ox, точку o за начало координат. Бесконечно малый элемент AB массы $r\rho d\varphi$ притягивает точку P силой, равной

$$\frac{kr\rho d\varphi}{x^2+r^2}.$$

Вертикальная ее слагающая равна

$$\frac{kr\rho x d\varphi}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Черт. 106.

Совокупность F сил, притягивающих точку P к плоскости колечка, направленная по оси x, представится интегралом:

$$F = -\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r\rho k \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}}\, d\varphi = -2\pi r\rho k \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}}.$$

Диференциальное уравнение движения точки P будет:

$$v\frac{dv}{dx} = -2\pi r\rho k \frac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}};$$

разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_0^v v dv = -2\pi r\rho k \int_{x_0}^0 \frac{x dx}{(r^2+x^2)^{3/2}};$$

или

$$v^2 = 4\pi r\rho k \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right]_{x_0}^0 = 4\pi r\rho R \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+x_0^2}}\right];$$

$$v^2 = 4\pi\rho k\left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+x_0^2}}\right].$$

Задача 121. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить, с какой наименьшей скоростью надо бросить точку вертикально вверх, чтобы она не вернулась на землю.

Сила земного притяжения равна $\frac{km}{r^2}$, где k — фактор пропорциональности, m — масса точки, r — расстояние точки до центра земли. Обозначим радиус земли $R = 6\,366\,000$ *м*; $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, тогда на поверхности земли $\frac{k}{R^2} = g$.

Материальная точка не вернется на землю, если в момент, когда скорость ее сделается равной нулю, перестанет действовать и сила.

Сила притяжения обратится в нуль при $r = \infty$.

Работа силы тяжести при изменении r от R до ∞ представится так:

$$T = -\int_R^\infty \frac{km}{r^2}\, dr = -\frac{km}{R};$$

знак минус взят потому, что сила направлена в сторону, противоположную движению.

По теореме живых сил

$$-\frac{k}{R}=-\frac{v_0^2}{2},$$

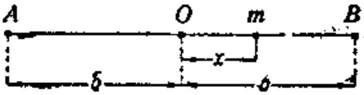
откуда:

$$v_0=\sqrt{\frac{2k}{R}}=\sqrt{2gR};$$

подставляя числовые данные, получим для v_0 приблизительное значение:

$$v_0=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6\,366\,000}=11\,000\ м/сек.$$

Задача 122. Точка массы m находится на прямой, проходящей через два центра A и B. Длина отрезка $AB=2b$ (черт. 107). Центры притягивают точку с силами, пропорциональными произведению массы точки на расстояние до центра (k^2mr). Фактор k^2 одинаков для обоих центров. Начальная скорость точки $v_0=0$; начальное расстояние точки от O середины отрезка AB равно a. Определить закон движения точки.



Черт. 107.

Примем прямую AB за ось x-ов, точку O за начало координат. Закон движения материальной точки будет представлен уравнением:

$$v\frac{dv}{dx}=k^2(b-x)-k^2(b+x),$$

или

$$v\frac{dv}{dx}=-2k^2x,$$

интеграл этого уравнения:

$$x=a\cos(\sqrt{2}kt)\ (см.\ зад.\ №\ 115);$$

движение будет гармоническим колебанием с периодом:

$$T=\frac{\pi}{k\sqrt{2}}.$$

Задача 123. На упругой нити длины l повешен шарик M (материальная точка), веса mg. Шарик выведен из положения равновесия в вертикальном направлении и предоставлен самому себе. При этом оказалось, что период колебаний шарика равен 0,1 секунды (черт. 108). Определить силу упругости, возбуждаемую в нити при разных положениях шарика.

Пусть a — абсолютная вытяжка нити в положении равновесия; x — дополнительное отклонение шарика от положения равновесия,

ε — модуль упругости нити, тогда сила упругости, возбуждаемая в нити, будет:

$$F = \varepsilon \cdot \frac{a+x}{l};$$

но

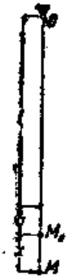
$$\varepsilon \frac{a}{l} = mg;$$

следовательно:

$$F = mg + \varepsilon \frac{x}{l},$$

или, полагая

$$k^2 = \frac{\varepsilon}{lm},$$



Черт. 168.

имеем:

$$F = mg + k^2 mx.$$

Уравнение движения центра шарика будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - (mg + k^2 mx),$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x.$$

По условию период колебания $T = \frac{\pi}{k}$ равен одной десятой доли секунды, следовательно

$$k = 10\pi \cdot F = mg + 100\,\pi^2 mx.$$

Задача 124. Две одинаковых точки притягиваются некоторым центром силой, обратно пропорциональной n-й степени расстояния. Одна точка в начальный момент находится на бесконечно большом расстоянии от центра, другая на расстоянии a. Для обеих $v_0 = 0$. Когда первая точка будет на расстоянии a от центра, то ее скорость будет одинакова с той, которой обладала вторая, будучи удалена от центра на $\frac{a}{4}$. Определить n при условии $n > 1$.

Примем прямую, проходящую через центр и начальное положение точек, за ось x. Центр за начало координат. Обозначим через k фактор пропорциональности в выражении силы.

Диференциальное уравнение движения той и другой точки будет иметь вид:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^n}.$$

Чтобы определить скорость одной точки, проинтегрируем уравнение в пределах $v=0$ и v; $x=\infty$ и $x=a$.

Для второй точки пределы скорости будут те же, а x меняется от a до $\frac{a}{4}$:

$$\frac{v^2}{2}=-\int_{\infty}^{a}\frac{kdx}{x^n};\quad \frac{v^2}{2}=-\int_{a}^{\frac{a}{4}}\frac{kdx}{x^n};$$

сравнивая правые части, имеем

$$\frac{k}{n-1}\frac{1}{a^{n-1}}=\frac{k}{n-1}\left(\frac{4^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

откуда:

$$2^{2n-2}=2;\quad n=\frac{3}{2}.$$

Задача 125. Точка, получив начальную скорость v, движется в среде, сопротивление которой пропорционально квадратному корню из скорости при отсутствии других сил. По истечении какого времени точка остановится, если k — сопротивление при скорости, равной единице? Какой путь пройдет точка?

Единственной силой, действующей на точку, является сопротивление среды, выраженное в функции скорости, и диференциальному уравнению движения точки можно придать вид:

$$mv\frac{dv}{dx}=-k\sqrt{v},$$

или

$$m\frac{dv}{dt}=-k\sqrt{v},$$

уравнение в первой форме будет служить для определения пути; во второй — для определения протекшего времени.

Проинтегрируем первое уравнение, разделив переменные; пределы изменения скорости v_0 и o, пути o и x.

$$m\int_{v_0}^{0}\sqrt{v}\cdot dv=-\int_{0}^{x}kdx;\quad \frac{2}{3}mv_0^{\frac{3}{2}}=kx;$$

откуда

$$x=\frac{2}{3}\frac{mv_0^{\frac{3}{2}}}{k}.$$

Проинтегрировав второе, получим:

$$m\int\limits_{v_0}^{0}\frac{dv}{\sqrt{v}}=-k\int\limits_{0}^{T}dt,$$

или

$$T=\frac{2m\sqrt{v_0}}{k}.$$

Задача 126. Материальная точка движется по инерции в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости. Определить путь, пройденный точкой, и время, протекшее от начала движения до ее остановки. Масса точки равна единице.

Как и в предыдущей задаче, представим уравнение движения в двух видах:

$$v\frac{dv}{dx}=-kv^2$$

и

$$\frac{dv}{dt}=-kv^2;$$

k — сила сопротивления при скорости в 1 *м/сек*. Интегрируя первое уравнение, имеем:

$$\int\limits_{v_0}^{0}\frac{dv}{v}=-kx;\; x=\frac{1}{k}\left\{\ln\frac{1}{v}\right\}_{v_0}^{0}=\infty.$$

Интегрируя второе, имеем:

$$-\int\limits_{v_0}^{0}\frac{dv}{v^2}=\int\limits_{0}^{T}dt;\; T=\infty.$$

Точка будет двигаться вечно.

Задача 127. Материальная точка, которой сообщена некоторая скорость v_0, движется в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Какое расстояние пройдет точка до остановки, если кроме силы сопротивления не действует никаких других сил.

Пусть k — сила сопротивления при $v=1$ *м/сек*.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kv,$$

или

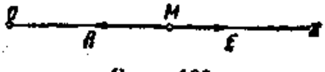
$$mv\frac{dv}{dx}=-kv;$$

интегрируя, имеем:

$$m\int_{v_0}^{0}dv=-kx;\ x=\frac{mv_0}{k}.$$

Задача 128. Материальная точка M массы m отталкивается от центра o силой, прямо пропорциональной расстоянию ($F=4\,mx$) (черт. 109).

Найти закон движения точки, если известно, что сопротивление среды пропорционально первой степени скорости ($R=3\,mv$).



Черт. 109.

В начале движения расстояние от центра равно единице, а скорость — нулю.

Примем прямую, соединяющую точки o и M, за ось x. Начало координат — точка o. Сила $F=4mx$ и направлена в положительную сторону оси x. Сила сопротивления среды $R=3mv$ и направлена к центру, поэтому ее следует взять со знаком минус. Диференциальное уравнение движения будет:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=4mx-3m\frac{dx}{dt},$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-4x=0;$$

характеристическое уравнение напишется так:

$$r^2+3r-4=0;$$
$$r_1=1,\ r_2=-4.$$

Называя через C_1 и C_2 произвольные постоянные, получим общий интеграл в виде

$$x=C_1e^t+C_2e^{-4t}.$$

Скорость $v=x'$:

$$x'=C_1e^t-4C_2e^{-4t},$$

при $t=0$; $x_0=1$; $x'_0=0$.

$$1=C_1+C_2;\ 0=C_1-4C_2,$$

откуда

$$x=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t}).$$

С течением времени x беспредельно возрастает. Вместе с тем возрастает и скорость.

Задача 129. Материальная точка притягивается к некоторому центру силой, прямо пропорциональной расстоянию до него ($F=2mx$). Найти закон движения, если известно, что сопротивление среды прямо пропорционально первой степени скорости ($=2mv$). Начальные условия: $x_0=a$; $v_0=0$.

Диференциальное уравнение движения точки будет иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2mx-2mv,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2+2r+2=0;$$

корни его

$$r_1=-1+i;\ r_2=-1-i.$$

Общий интеграл:

$$x=C_1e^{(-1+i)t}+C_2e^{(-1-i)t}$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные), или

$$x=e^{-t}[(C_1+C_2)\cos t+i(C_1-C_2)\sin t].$$

Полагая

$$C_1+C_2=A;\ i(C_1-C_2)=B,$$

дадим интегралу вид:

$$x=e^{-t}[A\cos t+B\sin t].$$

Скорость $v=x'$:

$$x'=e^{-t}[(B-A)\cos t-(A+B)\sin t],$$

подставляя начальные данные, имеем

$$a=A;$$
$$x'_0=B-A=0;\ B=a.$$

Окончательно

$$x=a\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right).$$

Движение точки представляет затухающее колебание.

Скорость

$$x'=-2ae^{-t}\sin t$$

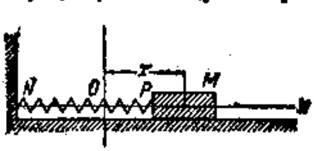
обращается в нуль при $t=0,\ \pi,\ 2\pi\ldots$ Наибольшие отклонения точки от центра O будут представлять ряд:

$$a,\ ae^{-\pi},\ ae^{-2\pi},\ ae^{-3\pi}.$$

Задача 130. Тело M, веса 0,5 *кг*, лежит на негладкой горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой N пружиной, ось которой NP горизонтальна. Коэфициент трения плоскости 0,2; пружина такова, что для удлинения ее на 1 *см* требуется сила 0,25 *кг*. Тело M отодвинуто от точки N так, что пружина вытянулась на 3 *см*, и затем отпущено без начальной скорости. Найти: 1) число размахов, которые совершит тело; 2) величины размахов и 3) продолжительность T каждого из них (черт. 110).

Примечание. Тело остановится, когда в положении, где скорость его равна нулю, сила упругости пружины будет равна силе трения или меньше ее. (Сборник задач проф. Мещерского.)

Предоставленное самому себе тело первое время начнет двигаться влево. Выберем за ось x горизонтальную прямую, проходящую через центр тяжести тела, и за начало координат начальное положение o центра тяжести. Сила пружины будет в первое время направлена влево и равна $0{,}25\,x$ *кг*, сила трения направлена вправо и равна $0{,}5\cdot 0{,}2$ *кг*.



Черт. 110.

Первый размах. Тело двинулось влево от крайнего положения. Уравнение движения центра тяжести:

$$\frac{0{,}5}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}25x + 0{,}5\cdot 0{,}2, \tag{1}$$

или

$$10\frac{d^2x}{dt^2} + 5gx - 2g = 0;$$

частное решение уравнения

$$x = \frac{2}{5}.$$

Характеристическое уравнение будет:

$$2r^2 + g = 0,$$

корни его:

$$r_1 = i\sqrt{\frac{g}{2}}; \quad r_2 = -i\sqrt{\frac{g}{2}}.$$

Общий интеграл уравнения (1):

$$x = A_1 \sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t + B_1\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t + \frac{2}{5}. \tag{2}$$

Начальные данные:

$$x_0 = 3; \quad v_0 = 0;$$

скорость:

$$x' = A_1\sqrt{\frac{g}{2}}\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t - B_1\sqrt{\frac{g}{2}}\sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t; \tag{3}$$

отсюда по уравнениям (2) и (3) для $t=0$:

$$3=B_1+\frac{2}{5};\ A_1\sqrt{\frac{g}{2}}=0;$$

$$B_1=\frac{13}{5};\ A_1=0.$$

Общий интеграл примет вид:

$$x=\frac{13}{5}\cos\sqrt{\frac{g}{2}}t+\frac{2}{5};$$

скорость:

$$x'=-\frac{13}{5}\sqrt{\frac{g}{2}}\sin\sqrt{\frac{g}{2}}t.$$

При $t=0$ скорость обращается в нуль. Следующий раз она обратится в нуль через T секунд, причем T найдем из уравнения:

$$T\sqrt{\frac{g}{2}}=\pi;$$

$$T=\pi\sqrt{\frac{2}{g}}=1{,}41\ \textit{сек.}$$

Координата центра тяжести x при этом будет равна $\frac{13}{5}\cos\pi+\frac{2}{5}$, или $-2{,}2$. Абсолютная величина размаха: $3+2{,}2=5{,}2$; сила упругости пружины будет равна $0{,}25\cdot 2{,}2$, или $0{,}55$ *кг*, и направлена вправо; сила трения равна $0{,}5\cdot 0{,}2$, или $0{,}1$ *кг*, и направлена влево.

Тело начнет **второй размах**, двигаясь вправо. Уравнение движения будет:

$$\frac{0{,}5}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-0{,}25x-0{,}5\cdot 0{,}2. \qquad (4)$$

Интеграл уравнения (4) будет:

$$x=A_2\sin\sqrt{\frac{g}{2}}t+B_2\cos\sqrt{\frac{g}{2}}t-\frac{2}{5};$$

скорость тела

$$x'=A_2\sqrt{\frac{g}{2}}\cos\sqrt{\frac{g}{2}}t-B_2\sqrt{\frac{g}{2}}\sin\sqrt{\frac{g}{2}}t;$$

по начальным данным $x_0=-2{,}2$; $v_0=0$;

$$-2{,}2=B_2-\frac{2}{5};\ B_2=-1{,}8;\ A_2=0;$$

наибольшее отклонение вправо наступит по истечении $\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ секунд от начала второго размаха, тогда $x=1{,}8-\frac{2}{5}=1{,}4$; $x'=0$. Абсолютная величина второго размаха $2{,}2+1{,}4=3{,}6$; сила, действующая на пружину в конце второго размаха, направлена влево и равна $0{,}25\cdot 1{,}4$, или $0{,}35$ *кг*; сила эта больше возможной силы трения $0{,}1$ *кг*, и тело начинает т р е т и й р а з м а х.

Уравнение движения будет иметь вид (1), постоянное A_3 в общем интеграле будет равно нулю, $B_3=1{,}0$. Общее решение:

$$x=\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t+\frac{2}{5};$$

$$x'=-\sqrt{\frac{g}{2}}\sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t.$$

Наибольшее отклонение влево от точки o будет при

$$\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t=-1;\; x=-1+0{,}4=-0{,}6.$$

Величина третьего размаха равна: $1{,}4+0{,}6$, или 2 *см*. Натяжение пружины в конце третьего размаха $0{,}6\cdot 0{,}25=0{,}15$ *кг* превосходит возможную силу трения, равную $0{,}1$ *кг*. Т е л о н а ч н е т ч е т в е р т ы й р а з м а х. Уравнение движения будет иметь вид уравнения (4), начальные данные будут: $x_0=-0{,}6$; $v_0=0$, решение уравнения:

$$x=A_4\sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t+B_4\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t-\frac{2}{5};$$

$$x'=A_4\sqrt{\frac{g}{2}}\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t-B_4\sqrt{\frac{g}{2}}\sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t,$$

по начальным данным:

$$-0{,}6=B_4-\frac{2}{5};\; B_4=-0{,}2;\; A_4=0.$$

окончательно

$$x=-0{,}2\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t-\frac{2}{5};$$

скорость:

$$x'=0{,}2\sqrt{\frac{g}{2}}\sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t;$$

она сделается равной нулю при

$$T=\pi\sqrt{\frac{2}{g}};$$

при этом

$$x = 0{,}2 - 0{,}4 = -0{,}2;$$

абсолютная величина размаха: $0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$.

Сила натяжения пружины при этом равна $0{,}25 \cdot 0{,}2$, или $0{,}05$ кг, она меньше силы трения, и движение тела прекратится.

Задача 131. Дан закон движения точки $x = \sin t$, найти силу, его воспроизводящую.

Скорость точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t.$$

Ускорение:

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = -\sin t.$$

Сила F_1, производящая ускорение точки с массой m, будет

$$F_1 = -m \sin t.$$

Но ту же силу можно выразить иначе. Например:

$$F = -m\sqrt{1 - v^2};\ \ F = -mx;\ \ F = -m\frac{x}{2} - \frac{m}{2}\sqrt{1 - v^2}.$$

Решение остается неопределенным.

Задача 132. Дан закон движения

$$x = A \sin t + B \cos t,$$

где A и B — произвольные постоянные; найти силу, производящую это движение.

Масса точки m.

Скорость:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cos t - B \sin t,$$

при $t = 0$, $x_0 = B$, $v_0 = A$.

Ускорение:

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \sin t - B \cos t = -x.$$

Сила

$$F = -mx.$$

В этой задаче ускорение j, а следовательно и сила F являются функциями двух произвольных постоянных A и B; два уравнения, определяющие x и v, дают возможность исключить эти постоянные и найти общее определенное выражение силы. В предыдущей задаче дано было частное значение x без произвольных постоянных, и решение получилось неопределенное.

Задача 133. Дан закон движения точки:

$$x^2 = \frac{\mu t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2.$$

Найти силу, производящую это движение; x_0 и v_0 — начальные значения переменных, x и v — путь и скорость точки.

С целью найти ускорение точки, продиференцируем предложенное уравнение и получим:

$$xx' = \frac{\mu t}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t) v_0;$$

возводя в квадрат, имеем:

$$(xx')^2 = \left[\left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2\right) t + x_0 v_0\right]^2,$$

но

$$x^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2\right) t^2 + 2x_0 v_0 t + x_0^2,$$

подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получим после простых преобразований выражение скорости точки, т. е. первой производной пути x':

$$(xx')^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2\right)\left[\left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2\right) t^2 + 2x_0 v_0 t\right] + x_0^2 v_0^2,$$

$$(xx')^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2\right)(x^2 - x_0^2) + x_0^2 v_0^2;$$

откуда

$$(x')^2 = \left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2\right) - \frac{\mu}{x^2}.$$

После второго диференцирования:

$$x'x'' = \frac{\mu}{x^3} x', \text{ или } x'' = \frac{\mu}{x^3}.$$

Искомая сила

$$F = m\frac{\mu}{x^3},$$

VIII. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.

Основная задача динамики сводится к следующему.

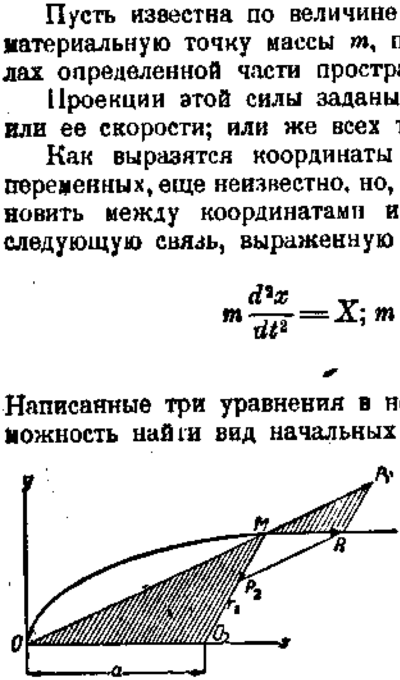
Пусть известна по величине и направлению сила, действующая на материальную точку массы m, помещенную в любом пункте в пределах определенной части пространства.

Проекции этой силы заданы, как функции времени, места точки, или ее скорости; или же всех трех переменных сразу.

Как выразятся координаты движущейся точки в функции этих переменных, еще неизвестно, но, назвав их через x, y, z, мы можем установить между координатами и проекциями X, Y, Z заданной силы следующую связь, выраженную системой уравнений:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X;\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y;\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Написанные три уравнения в некоторых частных случаях дают возможность найти вид начальных функций x, y, z.



Черт. 111.

Операция интегрирования уравнений сопровождается появлением шести постоянных произвольных величин, которые соответствуют трем начальным координатам движущейся точки и трем проекциям скорости ее в начальный момент.

Ниже приведены несложные примеры, где интегрирование доводится до конца.

Задача 134. Материальная точка массы m находится под действием двух сил $P_1=kmr_1$ и $P_2=kmr_2$ пропорциональных ее расстояниям MO и MO_2 от двух неподвижных центров O и O_2, из которых первый отталкивает, а второй притягивает точку. Найти вид траектории точки (черт. 111).

Если сложить две силы P_1 и P_2, действующие на точку M, то их равнодействующая, как явствует из двух подобных, заштрихованных треугольников, параллельна OO_2 и равна постоянной величине $mkOO_2$, или mka. То же самое аналитически можно вывести так. Сила

$P_1 = kmr_1$; если координаты точки M назвать через x и y, то проекции силы P_1 на оси координат будут:

$$X_1 = kmr_1 \frac{x}{r_1} = kmx;\ Y_1 = kmr_1 \frac{y}{r_1} = kmy.$$

Сила $P_2 = kmr_2$; ее проекции на оси координат:

$$X_2 = -kmr_2 \frac{x-a}{r_2};\ Y_2 = -kmr_2 \frac{y}{r_2};$$

или

$$X_2 = -km(x-a);\ Y_2 = -kmy.$$

Проекции равнодействующей R:

$$R_x = kmx - km(x-a) = kma;$$
$$R_y = kmy - kmy = 0.$$

Диференциальные уравнения движения точки M будут:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kma;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

или:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = ka;\ d\left(\frac{dx}{dt}\right) = kadt;$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0;\quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Пусть проекции скорости точки M в начальный момент будут x_0' и y_0', тогда, интегрируя последние два уравнения, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = kat + x_0';\ \frac{dy}{dt} = y_0'.$$

Разделяя переменные и интегрируя вторично, имеем:

$$x - x_0 = \frac{kat^2}{2} + x_0' t;\ y - y_0 = y_0' t;$$

исключая время, найдем уравнение траектории:

$$x - x_0 = \frac{ka}{2}\cdot\frac{(y-y_0)^2}{(y_0')^2} + \frac{x_0'}{y_0'}(y - y_0),$$

это есть уравнение параболы.

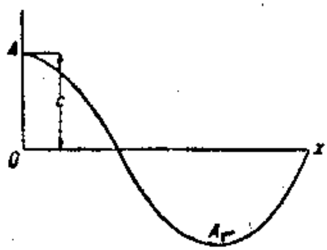
Рассмотрим частный случай, когда $x_0=0$; $y_0=0$; $x'_0=0$; $y'_0=v_0$, т. е. в начальный момент точка находилась в O и начальная скорость направлена была по оси oy. Уравнение траектории будет:

$$x=\frac{ka}{2v_0^2}y^2.$$

Задача 135. Материальная точка A, находясь на расстоянии c от данной прямой ox, получила начальную скорость, параллельную этой прямой. Точка A притягивается к прямой ox силой, пропорциональной расстоянию от нее; найти вид траектории и место точки для любого момента. Фактор пропорциональности в выражении силы mk^2 (черт. 112).

Возьмем данную прямую ox за ось x, ось y перпендикулярна к ней на линии OA, проходящей через начальное положение точки A.

Диференциальные уравнения движения напишутся так:



Черт. 112.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mk^2y,$$

но

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt}=y'\frac{dy'}{dt};$$

по сокращении имеем:

$$\frac{dx'}{dt}=0;\quad y'\frac{dy'}{dy}=-k^2y;$$

разделяя переменные и интегрируя в пределах: в первом уравнении x'_0 и x'; во втором o и y'; c и y.

$$x'-x'_0=0;\quad (y')^2=k^2(c^2-y^2),$$

или

$$\frac{dx}{dt}=x'_0;\quad \frac{dy}{dt}=-k\sqrt{c^2-y^2}.$$

Скорость точки A по оси y взята со знаком минус, так как от начального положения точка A приближается к оси ox.

Разделяя переменные и интегрируя вторично, имеем:

$$x=x'_0t;\quad -\int_c^y\frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}=k\int_0^t dt;$$

$$\arccos\frac{y}{c}=kt,$$

или

$$y = c\cos kt,$$
$$x = x_0' t.$$

Уравнение траектории:

$$y = c\cos\frac{kx}{x_0'}.$$

Кривая эта косинусоида. Точка A до пункта A_1 будет двигаться так, что $\frac{dy}{dt} < 0$, в пункте A_1 производная $\frac{dy}{dt}$ обратится в нуль и затем должна переменить знак. Движение будет длиться вечно.

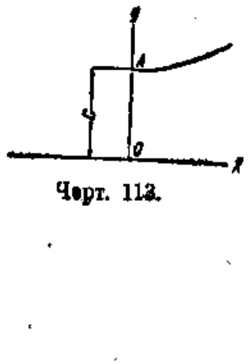
Задача 136. Решить предыдущую задачу для случая, когда сила, действующая на точку A, отталкивает ее от оси ox (черт. 113).

Уравнения движения точки будут:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mk^2y,$$

последнее можно написать так:

$$y'\frac{dy'}{dy} = k^2y;$$



Черт. 113.

или, интегрируя оба уравнения, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = x_0';\quad (y')^2 = k^2(y^2 - c^2),$$

или

$$dx = x_0'dt;\quad \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = kdt.$$

В последнем уравнении для радикала взят знак плюс, так как скорость по оси oy в случае отталкивающей силы положительна; вторичное интегрирование дает:

$$x = x_0't;\quad \ln(y + \sqrt{y^2 - c^2}) - \ln c = kt;$$

пределами интегрирования служили: для $x \cdots o$ и x; для $y \cdots c$ и y.

Последнее уравнение преобразуем так:

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{kt};$$

или

$$y - \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{-kt};$$

откуда

$$y = \frac{c}{2}(e^{kt} + e^{-kt}).$$

Таким образом x и y найдены в функциях от t. Уравнение траектории получим, исключая t:

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{kx}{x'_0}}+e^{-\frac{kx}{x'_0}}\right).$$

Если дано частное задание $\frac{k}{x'_0}=c$, то траектория обращается в цепную линию:

$$x=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Задача 137. Точка M в начале своего движения находилась на оси oy, на расстоянии b от начала o; скорость ее была параллельна оси ox и равна c.

Точка M притягивается к началу силой, пропорциональной произведению массы на первую степень расстояния ее до центра $o\{k^2mr\}$. Выразить координаты точки x и y в функциях времени и найти траекторию точки.

Диференциальные уравнения движения точки будут:

$$mx'\frac{dx'}{dx}=-k^2mx;\quad my'\frac{dy'}{dy}=-k^2my.$$

Интегрируя первое, имеем:

$$(x')^2-(x'_0)^2=k^2(x_0^2-x^2);\quad x'=\sqrt{k^2x_0^2+(x'_0)^2-kx^2},$$

скорость точки в первое время после начала движения направлена по оси x в положительную сторону и у радикала взят знак плюс.

Положим

$$\sqrt{x_0^2+\frac{(x'_0)^2}{k^2}}=n,$$

тогда

$$\frac{dx}{\sqrt{n^2-x^2}}=kdt,$$

или после интегрирования, в пределах o и x, o и t имеем:

$$\arcsin\frac{x}{n}=kt,$$

$$x=\sqrt{x_0^2+\frac{(x'_0)^2}{k^2}}\sin kt.$$

Если интегрировать второе из написанных выше уравнений, то результат получится подобный же, только при определении $\frac{dy}{dt}$ придется взять знак минус, ибо первое время после начала движения скорость по оси y направлена в отрицательную сторону:

$$y=\sqrt{y_0^2+\frac{(y_0')^2}{k^2}}\cos kt.$$

Положим теперь:

$$x_0=0;\ y_0=b;\ x_0'=c;\ y_0'=0$$

и исключим время, тогда

$$x=\frac{c}{k}\sin kt;\ y=b\cos kt,$$

откуда

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{k}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение эллипса.

Задача 138. Решить ту же задачу в предположении, что центр отталкивает точку M силой, пропорциональной расстоянию.

Диференциальные уравнения движения напишем в таком виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mk^2x;\ m\frac{d^2y}{dt^2}=mk^2y;$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0;\ \frac{d^2y}{dt^2}-k^2y=0.$$

Оба уравнения линейные без второй части. Характеристическое уравнение для того и другого будет:

$$r^2-k^2=0;$$

корни его:

$$r_1=k;\quad r_2=-k;$$

решение того и другого

$$x=A_1e^{kt}+B_1e^{-kt},$$
$$y=A_2e^{kt}+B_2e^{-kt}.$$

По начальным данным определим произвольные постоянные:

$$x'=A_1\,ke^{kt}-B_1ke^{-kt},$$
$$y'=A_2\,ke^{kt}-B_2ke^{-kt},$$

при $t=0$

$$x_0=0;\quad x'_0=c;\quad y_0=b;\quad y'_0=0.$$

$$A_1+B_1=0;\ c=k(A_1-B_1);\ b=A_2+B_2;\ 0=A_2-B_2,$$

откуда:

$$A_1=-B_1=\frac{c}{2k};\ A_2=B_2=\frac{b}{2};$$

окончательно имеем:

$$x=\frac{c}{2k}(e^{kt}-e^{-kt});\ y=\frac{b}{2}(e^{kt}+e^{-kt});$$

или, исключая t:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{k^2x^2}{v^2}=1.$$

Уравнение гиперболы.

Задача 139. Материальная точка, обладая в начальный момент скоростью w_0, параллельной оси x, и находящаяся от нее на расстоянии b, притягивается к оси x силой, обратно пропорциональной кубу ординаты $\left(-\frac{k^2}{y^3}m\right)$. Найти траекторию.

Уравнения движения точки:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0;\quad y'\frac{dy'}{dy}=-\frac{k^2}{y^3}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\frac{dx}{dt}=x'_0,$$

$$(y')^2-(y'_0)^2=\frac{k^2}{y^2}-\frac{k^2}{y_0^2},$$

но

$$x_0=0;\ x'_0=w_0;\ y_0=b;\ y'_0=0;$$

следовательно:

$$x'=w_0;\quad (y')^2=\frac{k^2(b^2-y^2)}{b^2y^2}.$$

Первое время после начала движения $y'<0$, поэтому

$$y'=-\frac{k\sqrt{b^2-y^2}}{by},$$

или

$$-\frac{y\,dy}{\sqrt{b^2-y^2}}=\frac{k}{b}\,dt.$$

Производя вторичное интегрирование последних двух уравнений в пределах:

$$0_0 \text{ и } x;\ \ b \text{ и } y;\ \ 0 \text{ и } t;$$

имеем:

$$x = w_0 t;\ \ \sqrt{b^2 - y^2} = \frac{k}{b}\,t;$$

исключая t, найдем:

$$b^2 - y^2 = \frac{k^2}{b^2}\,\frac{x^2}{w_0^2},$$

или

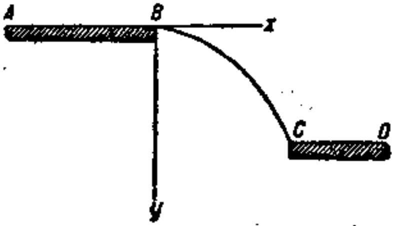
$$\frac{k^2 x^2}{b^2 w_0^2} + y^2 = b^2.$$

Это есть уравнение эллипса.

Задача 140. Материальная точка скользит по горизонтальной плоскости AB со скоростью v_0; дойдя до ее края B, точка начинает свободно падать и достигает края C горизонтальной плоскости CD. Какова начальная скорость v_0, если вертикальное расстояние между плоскостями равно h, а горизонтальное расстояние между краями B и C равно a (черт. 114)?

Выберем оси координат, как указано на чертеже, тогда уравнения движения точки будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0;\ \ \frac{d^2y}{dt^2} = g,$$



Черт. 114.

интегрируя их, имеем:

$$\frac{dx}{dt} = v_0;\ \ \frac{dy}{dt} = gt;$$

интегрируя второй раз:

$$x = v_0 t;\ \ y = \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая t, найдем уравнение траектории:

$$y = \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2}.$$

Этому уравнению должны удовлетворять координаты точки C (a и h),

$$h = \frac{g}{2}\,\frac{a^2}{v_0^2};$$

откуда

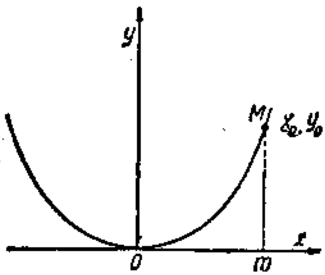
$$v_0 = a\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

IX. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ЛИНИИ.

При движении точки в случае наличия сил, сопротивляющихся этому движению, силы сопротивления совершают работу, и часть живой силы точки тратится на эту работу.

Можно представить себе силы сопротивления иного рода, которые не совершают работы при движении точки и всегда направлены перпендикулярно к элементу траектории, по которому в данный момент точка совершает свое перемещение. Живая сила точки не расходуется на это сопротивление, и закон живых сил применим к этому движению, как и к движению свободной точки.

Представим себе, что перемещение точки совершается по заданной **неподвижной** кривой и не сопровождается трением. Связи, наложенные на точку, **не изменяются со временем**. Если бы мы заменили связи силой нормальной к траектории, то получили бы движение свободной точки, но кроме сил, по заданию действовавших на точку, у нас была бы налицо сила реакции, известная нам только по направлению. Если к этому движению применить закон живых сил, то сила сопротивления, как уже выше было сказано, не войдет в уравнение и сама собой исключается.



Черт. 115.

Ниже приведем ряд примеров на движение без трения точки по заданной неподвижной кривой.

Задача 141. Прут изогнут в виде параболы ($x^2 = 2py$). Ось ее вертикальна. В точках x_0, y_0 на прут надето колечко M. Колечко начинает ниспадать по пруту. Считая его за точку, найти давление колечка на прут, когда оно достигает вершины параболы (черт. 115).

Радиус кривизны ρ определяется формулой:

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

x 1

Для вершины параболы $x=0$; $\rho_0=p$. Применяя теорему живых сил, имеем:

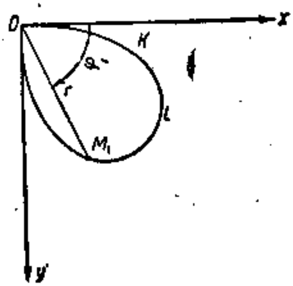
$$\frac{mv^2}{2}=mgy_0;\ v^2=2gy_0.$$

Нормальная слагающая ускорения в вершине параболы равна $\frac{2gy_0}{p}$. Давление N на прут складывается из веса колечка и нормальной силы инерции $mj_n=m\frac{v^2}{\rho}=\frac{2mgy_0}{p}$.

$$N=mg\left(1+\frac{2y_0}{p}\right).$$

Задача 142. По лемнискате, уравнение которой $r^2=2a^2\sin 2\varphi$, скользит вниз от o весомая точка M, не имеющая начальной скорости. Вычислить продолжительность падения от o до M, как функцию угла φ.

Сравнить время падения по лемнискате и по прямой oM. Трение отсутствует (черт. 116).



Черт. 116.

По теореме живых сил скорость в точке M определится по уравнению живых сил:

$$\frac{v^2}{2}=gh,$$

где h — высота падения,

$$h=r\sin\varphi;\ v^2=2ga\sqrt{2\sin 2\varphi}\cdot\sin\varphi.$$

В уравнении лемнискаты угол φ будем считать от прямой ox по стрелке часов; при этом дуга лемнискаты будет возрастать в направлении oKL; точка же M движется в обратном направлении, следовательно ее скорость $\frac{ds}{dt}$, выраженную в функции угла φ, надо считать отрицательной:

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}=-\sqrt[4]{8g^2a^2\sin^2\varphi\sin 2\varphi},$$

но

$$r=a\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi};\ \frac{dr}{dt}=a\sqrt{2}\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\cdot\frac{d\varphi}{dt},$$

после подстановки имеем:

$$\sqrt{2a^2\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}+2a^2\sin 2\varphi}\ \frac{d\varphi}{dt}=-\sqrt[4]{8g^2a^2\sin^2\varphi\sin 2\varphi};$$

откуда:

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{ctg}^{-\frac{3}{4}}\varphi\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi};$$

интегрируя, имеем:

$$T = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_1}\mathrm{ctg}^{-\frac{3}{4}}\varphi\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt[4]{\mathrm{ctg}\,\varphi}.$$

При падении по хорде oM время определится по уравнению:

$$g\frac{\sin\varphi_1}{2}T^2 = \sqrt{2a^2\sin 2\varphi_1},$$

ибо ускорение падения в этом случае равно $g\sin\varphi_1$, а пройденный путь r_1:

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt[4]{\mathrm{ctg}\,\varphi}.$$

Оба падения совершаются за один и тот же промежуток времени.

Задача 143. Точка, будучи обязана оставаться на параболе $y^2 = 4x$, движется по этой кривой при отсутствии каких-либо внешних сил. В начальный момент $x_0 = y_0 = 4$, начальная скорость $v_0 = 5$ и направлена к вершине параболы. Через сколько времени точка достигнет вершины?

Скорость точки $\frac{ds}{dt}$ можно представить так:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dt},$$

но по уравнению параболы:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2}.$$

Точка движется по заданной кривой по инерции, причем сила реакции кривой нормальна к пути точки, а потому скорость точки постоянна:

$$-5 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + y^2}\,\frac{dy}{dt};$$

это уравнение устанавливает связь между ординатой y и временем t. Перед левой частью поставлен знак минус, потому что радикал взят с плюсом, а при указанном в задаче направлении движения $\frac{dy}{dt} < 0$.

$$dt = -\frac{1}{10}\sqrt{4 + y^2}\,dy;$$

это уравнение будем интегрировать в пределах 0 и T; 4 и 0:

$$T=\frac{1}{10}\int_0^4 \sqrt{4+y^2}\,dy.$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int\sqrt{4+y^2}\,dy,$$

интегрируя его по частям, имеем:

$$\int\sqrt{4+y^2}\,dy=y\sqrt{4+y^2}-\int\frac{y^2}{\sqrt{4+y^2}}\,dy.$$

В числителе подынтегральной функции в последнем члене прибавим и вычтем 4:

$$\int\sqrt{4+y^2}\,dy=y\sqrt{4+y^2}-\int\sqrt{4+y^2}\cdot dy+4\int\frac{dy}{\sqrt{4+y^2}};$$

откуда

$$\int\sqrt{4+y^2}\,dy=\frac{y}{2}\sqrt{4+y^2}+2\ln\left(y+\sqrt{4+y^2}\right).$$

После этого:

$$T=\frac{1}{10}\left(\frac{y}{2}\sqrt{4+y^2}+2\ln\left(y+\sqrt{4+y^2}\right)\right)_0^4,$$

или

$$T=\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

Задача 144. Какова была величина начальной скорости точки, двигавшейся по внешней стороне вертикально поставленного эллипса (черт. 117):

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,$$

если точка, выйдя из верхнего конца малой полуоси, соскочила с эллипса на высоте, равной $\frac{2}{3}$ малой полуоси, считая от центра эллипса (черт, 117)?

Черт. 117.

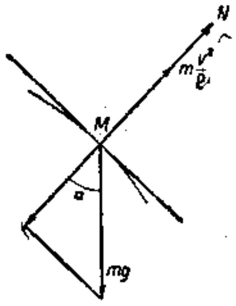
Назовем через α угол касательной к эллипсу с осью x, составим выражение косинуса этого угла с осью x и выражение радиуса кривизны эллипса:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx};\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};\quad y^2=1-\frac{x^2}{4}.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}};\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4(4-x^2)}}=\frac{4(4-x^2)}{16-3x^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\sqrt{4-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{2(4-x^2)}=-\frac{2}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

Радиус кривизны эллипса вычислим по формуле:



Черт. 118.

$$\rho=\pm\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

Окончательно имеем:

$$\rho=\frac{(16-3x^2)^{\frac{3}{2}}}{16}.$$

По основной теореме д'Аламбера силы, действующие на точку: вес, нормальная реакция N дуги кривой, уравновешиваются силами инерции; а потому сумма проекций всех этих сил на нормаль должна равняться нулю (черт. 118). Сила инерции дает проекцию на нормаль $m\frac{v^2}{\rho}$, направленную в сторону выпуклости кривой:

$$N+\frac{mv^2}{\rho}-mg\cos\alpha=0,$$

в тот момент, когда точка M покидает дугу эллипса $N=0$, и

$$\frac{v^2}{\rho}=g\cos\alpha. \tag{1}$$

Для того чтобы найти квадрат скорости, напишем, что приращение живой силы точки от начала движения до момента, когда N обратилась в нуль, равна работе силы тяжести:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg\cdot\frac{1}{3},$$

откуда

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2g}{3}.$$

Подставляя в уравнение эллипса значение $y = \frac{2}{3}$, найдем величину соответствующей абсциссы $x^2 = \frac{20}{9}$.

Подставляя эти значения координат точки M в выражение радиуса кривизны, по уравнению (1) получим:

$$\left(v_0^2 + \frac{2g}{3}\right) \frac{16}{(16 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}} = g \frac{2\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{16 - 3x^2}}.$$

Окончательно

$$v_0^2 + \frac{2g}{3} = \frac{14}{9} g,$$

$$v_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2g}.$$

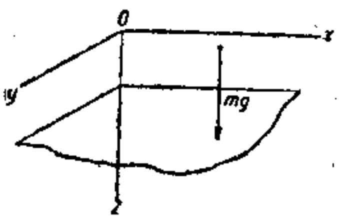
X. ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ.

Если в некотором силовом поле проекции X, Y, Z силы, действующей на материальную точку массы, равной единице с координатами x, y, таковы, что являются функциями этих координат и соответственно равны частным производным некоторой функции U тех же координат, т. е., если

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$

то функция U называется силовой функцией.

Если уравнения (1) существуют, то должны быть справедливы следующие три равенства:



Черт. 119.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y}&=\frac{\partial Y}{\partial x};\\ \frac{\partial Y}{\partial z}&=\frac{\partial Z}{\partial y};\\ \frac{\partial Z}{\partial x}&=\frac{\partial X}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Приравняем постоянной величине силовую функцию

$$U=C.$$

Полученное уравнение представляет некоторую поверхность. Соответствующее диференциальное уравнение напишется так:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=0,$$

или

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0.$$

Эта поверхность называется поверхностью уровня.

Свойства поверхности уровня:

1. Напряжение поля нормально к поверхности уровня.

2. При перемещении точки по поверхности уровня силы, приложенные к точке, не совершают работы.

3. Приращение живой силы точки при переходе с одной поверхности уровня на другую равно приращению силовой функции.

Задача 145. Указать поверхность уровня для постоянной силы тяжести $P=g$; проекции ее (черт. 119):

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z=g.$$

Проверим, оправдываются ли уравнения (2). Частные производные сил X, Y, Z все нули, следовательно уравнения (2) оправдываются.

Диференциальное уравнение поверхности уровня:

$$gdz = 0,$$

откуда

$$gz = C.$$

Уравнение это представляет ряд горизонтальных плоскостей.

Задача 146. Найти поверхность уровня для ньютонианской силы $F = k\frac{1}{r^2}$, направленной к началу координат.

Ее проекции:

$$X = -k\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -k\frac{x}{r^3};$$

$$Y = -k\frac{1}{r^2}\frac{y}{r} = -k\frac{y}{r^3};$$

$$Z = -k\frac{1}{r^2}\frac{z}{r} = -k\frac{z}{r^3}.$$

Проекции взяты со знаком минус, так как направлены к притягивающему центру.

Диференциальное уравнение будет:

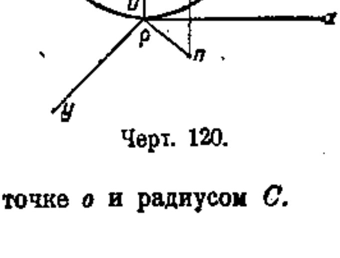
$$\frac{k}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = 0,$$

откуда

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

или

$$dr = 0,$$
$$r = C.$$



Черт. 120.

Это есть уравнение шара с центром в точке o и радиусом C.

В декартовых координатах:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2.$$

Задача 147. Указать поверхность уровня для силового поля, образованного силой тяжести и центробежной силой, происходящей от вращения вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (черт. 120).

Выберем оси, как указано на чертеже.

Проекции напряжения поля:

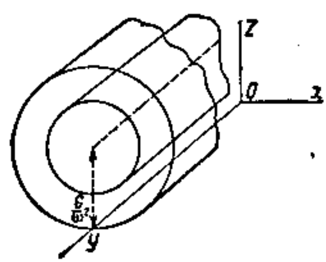
$$X = \omega^2\rho\frac{x}{\rho} = \omega^2 x,$$

$$Y = \omega^2\rho\frac{y}{\rho} = \omega^2 y,$$

$$Z = -g.$$

Здесь ρ — расстояние материальной точки до оси z.

Уравнения (2) оправдываются.



Черт. 121.

Для поверхности уровня диференциальное уравнение будет

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Интегрируя, имеем:

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2}z = C.$$

Уравнение это дает семейство параболоидов вращения с вертикальной осью.

Задача 148. Решить ту же задачу, если ось вращения горизонтальна (ось oy) (черт. 121).

В этом случае:

$$X = \omega^2 x,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = -g + \omega^2 z.$$

Уравнения (2) оправдываются.

Диференциальное уравнение поверхности будет таково:

$$\omega^2 x dx - (g - \omega^2 z)\, dz = 0,$$

или после интегрирования:

$$x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = C^2.$$

Это уравнение семейства круглых цилиндров, ось которых параллельна оси y и проходит от нее на расстоянии $\frac{g}{\omega^2}$.

Задача 149. Определить вид поверхности уровня в силовом поле, образованном силами, притягивающими точку к неподвижному центру силой, пропорциональной расстоянию (kmr), вместе с силами тяжести.

Проекции силы, действующей на единицу массы, будут:

$$X = -kr\frac{x}{r}; \quad Y = -kr\frac{y}{r}; \quad Z = -kr\frac{z}{r} - g = -(kz + g).$$

Диференциальное уравнение поверхности уровня будет:

$$kxdx + kydy + (kz + g)\,dz = 0.$$

Интегрируя его, получаем:

$$kx^2 + ky^2 + \left(z + \frac{g}{k}\right)^2 = C^2.$$

Это есть уравнения семейства шаров с центром в точке с координатами $\left(0,\ 0,\ -\frac{g}{k}\right)$ и радиусом C, равным произвольному постоянному.

Задача 150. Определить вид поверхности уровня в силовом поле, образованном силами, отталкивающими точку от некоторой плоскости, и одновременно действующими силами, притягивающими точку к оси, перпендикулярной этой плоскости; причем оба рода сил пропорциональны соответствующим расстояниям (факторы k и k_1).

Примем указанную выше ось за ось z, а плоскость, притягивающую точку, за плоскость xoy. Расположение осей ox и oy безразлично. Напряжение поля будет иметь своими проекциями:

$$X = -kx; \quad Y = -ky; \quad Z = k_1 z,$$

откуда получаем:

$$kxdx + kydy - k_1 z dz = 0;$$

интегрируя, имеем:

$$k(x^2 + y^2) - k_1 z^2 = C.$$

Это есть уравнение семейства гиперболоидов вращения первого или второго рода в зависимости от знака у C. При $C = 0$ имеем круглый конус с вершиной в начале координат.

XI. УДАР ТЕЛ.

Если при движении материальной системы мгновенно появляется новая связь или исчезает одна из старых, то мы говорим, что в данном случае имеется явление удара.

Примеры: тело в своем движении встречает другое тело; снаряд во время полета разрывается на части; из-под покоящегося на опорах тела вынимают часть опор так, что тело начинает падать.

Все возникающие при этих явлениях силы существуют крайне малый промежуток времени. Силы достигают столь значительной величины, что за ничтожный промежуток времени существования импульсы их получают конечную величину, а координаты точек системы не успевают измениться.

Как на особенность данного явления надо указать на то, что при составлении уравнений все обычные силы, непрерывно действующие на тело, исчезают в сравнении с ударными и в уравнения не входят вовсе.

Импульсы внутренних мгновенных сил попарно равны и прямо противоположны; их геометрическая сумма и геометрическая сумма их моментов равны нулю.

В случаях удара измеряются не самые силы, которые перестанут быть конечными величинами, а импульсы сил; их и называют **импульсивными силами.**

Единица силы — килограмм. Единица импульса — килограмм-секунда.

Чтобы знать действительную среднюю величину силы при ударе, надо знать продолжительность удара и разделить импульс на время. Частное будет величиной, достаточно большой, чтобы отказаться от ее измерения.

Основные уравнения: уравнения количеств движения, моментов количеств движения и живых сил, последние, когда связи не сопровождаются трением, сохраняют свою силу, но принимают своеобразный вид.

По каждой оси сумма приращений количеств движения отдельных точек системы равна сумме импульсов внешних сил.

Сумма приращений моментов количеств движения системы равна сумме моментов всех внешних ударных сил, приложенных к системе.

Наконец теорема живых сил получает, кроме обычной своей формулировки при соударении упругих тел, новую формулировку для случая тел неупругих:

„потерянная при ударе живая сила равна живой силе потерянных скоростей“ (теорема Карно).

При изучении удара все тела делятся на три категории:

вполне упругие, это те, которые восстанавливают свою форму после деформации;

неупругие — сохраняют полученную деформацию в полной мере;

наконец *тела средней упругости* — отчасти сохраняют деформацию.

Если весь период удара разбить на две части: первая — период возрастания деформации, вторая — период восстановления формы тел, то импульс второго периода Q_1, составляет обычно только долю ε от импульса первого периода Q:

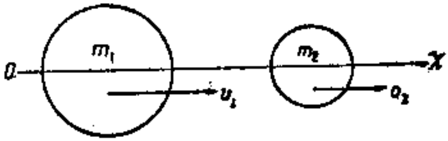
$$Q_1 = \varepsilon Q; \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

множитель ε называется *коэфициентом восстановления.*

Для тел абсолютно неупругих $\varepsilon = 0$; для тел вполне упругих $\varepsilon = 1$.

Постараемся дать ряд формул для решения простейших вопросов, возникающих при соударении тел.

Предположим, что два тела массы m_1 и m_2 движутся по направлению данной оси ox и для каждого из них ось эта является осью симметрии, тогда и сила удара направлена по этой оси. Назовем силу удара Q (черт. 122).



Черт. 122.

Пусть скорости тел до удара v_1 и v_2, после удара w_1 и w_2. Будем считать их положительными по указанию стрелки и отрицательными в противоположном направлении.

Сила удара за весь период соударения будет для тел средней упругости:

$$Q = (1 + \varepsilon)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{1}$$

Скорости тел после удара найдутся по формулам:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= v_1 - (1+\varepsilon)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2); \\ w_2 &= v_2 + (1+\varepsilon)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

как следствие уравнения (2) имеем:

$$w_1 - w_2 = -\varepsilon(v_1 - v_2). \tag{3}$$

Потерянная при ударе живая сила напишется так:

$$T = (1 - \varepsilon^2)\cdot\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{4}$$

Задача 151. Два упругих шара, массы m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу с равными скоростями; после удара второй шар остается в покое. Определить отношение их масс (черт. 123).

Пусть скорости шаров до удара равны v_1 и $-v_1$, скорость после удара $-u$ и 0.

Импульс внешних сил для всей системы, состоящей из двух шаров, равен нулю, следовательно количество движения всей системы сохраняет свою величину:

$$(m_1 - m_2) v_1 = - m_1 u.$$

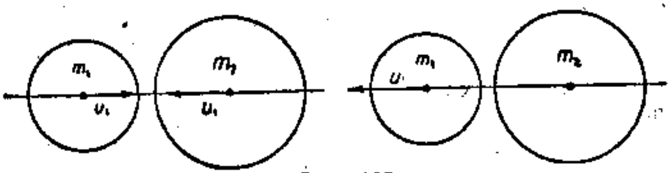
Живая сила упругих шаров при ударе не изменяется:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2}.$$

Написанные уравнения дают:

$$(m_1 + m_2) v_1^2 = m_1 u^2,$$

$$(m_1 - m_2) v_1 = - m_1 u,$$



Черт. 123.

возвышая обе части второго уравнения в квадрат и деля первое на второе, имеем:

$$\frac{m_1 + m_2}{(m_2 - m_1)^2} = \frac{1}{m_1},$$

или, обозначая отношение $\frac{m_1}{m_2}$ через z, имеем:

$$\frac{z + 1}{(1 - z)^2} = \frac{1}{z},$$

$$z^2 + z = 1 - 2z + z^2; \quad 3z = 1;$$

$$z = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3},$$

т. е. остановившийся шар обладает массой втрое большей, чем тот, который изменил направление скорости на обратное.

Задача 152. Шар массы m_1 центрально ударяет покоящийся шар массы m_2.

После удара m_1 остается на месте. Определить отношение масс m_1 и m_2.

Будем рассматривать оба шара как одну систему. Внешних сил по направлению удара не имеется, а потому приращение количества движения всей системы равно нулю.

Обозначим скорости до удара v_1 и v_2, после удара w_1 и w_2, тогда:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2,$$

кроме того

$$w_2 - w_1 = \varepsilon (v_1 - v_2),$$

ε — коэфициент восстановления;
по заданию $v_2 = 0$, $w_1 = 0$, подставляя эти значения в уравнения, имеем:

$$w_2 = \varepsilon v_1,$$

$$m_1v_1 = m_2 \varepsilon v_1,$$

или

$$\frac{m_1}{m_2} = \varepsilon.$$

Задача 153. Четыре равных шара, массы m_1, касаются друг друга.

Их центры лежат на одной прямой и соединены между собой неупругими нитями произвольной длины.

Первый шар получает скорость v_1, вдоль линии центров, и приводит в движение за собой остальные шары. Определить последовательные скорости шаров.

При соударении двух неупругих тел, после удара оба тела получают одинаковую скорость.

По уравнениям (1) и (2) при $\varepsilon = 0$, имеем:

$$w = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Сообщение движения ряду шаров помощью неупругой нити есть не что иное, как наложение новой неупругой связи в виде нерастяжимой нити, заставляющей шары двигаться с одинаковой общей скоростью.

Для первого шара скорость до удара v_1, для второго нуль; общая скорость после удара напишется так:

$$w = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2},$$

но $m_1 = m_2$, следовательно

$$w = \frac{v_1}{2}.$$

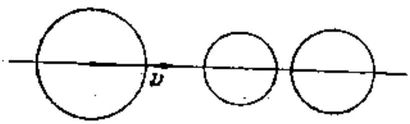
Та же формула для движения третьего шара даст:

$$w' = \frac{2m_1 \frac{v_1}{2}}{2m_1 + m_1} = \frac{v_1}{3};$$

наконец для четвертого шара:

$$w'' = \frac{3m_1 \frac{v_1}{3}}{3m_1 + m_1} = \frac{v_1}{4}.$$

Задача 154. Центры трех упругих шаров лежат на одной прямой; их массы m_1, m_2 и m_3. Второй и третий шары находятся в покое; первый ударяет второй со скоростью v, направленной по линии центров. После этого удара второй шар, двигаясь с некоторой скоростью w, ударяет третий шар и сам получает скорость $-v$; найти величину массы третьего шара, если $m_1 = 5\,m_2$ (черт. 124).



Черт. 124.

Величина скорости w найдется, если в уравнении 2:

$$w_2 = v_2 + (1 + \varepsilon)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

положить

$$w_2 = w; \quad v_1 = v; \quad v_2 = 0; \quad m_1 = 5m_2, \quad \varepsilon = 1.$$

После подстановки имеем:

$$w = \frac{5}{3}v.$$

Двигаясь с этой скоростью, второй шар встречает третий шар и после соударения с ним получает скорость $-v$.

Воспользуемся уравнением 2:

$$w_1 = v_1 - (1 + \varepsilon)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2),$$

положив в нем:

$$w_1 = -v; \quad v_1 = \frac{5}{3}v; \quad v_2 = 0; \quad \varepsilon = 1;$$

m_1 заменим через m_2 — ударяющий шар, а m_2 через m_3 — покоящийся шар, тогда:

$$-v = \frac{5}{3}v - 2\frac{m_3}{m_2 + m_3}\cdot\frac{5}{3}v,$$

откуда

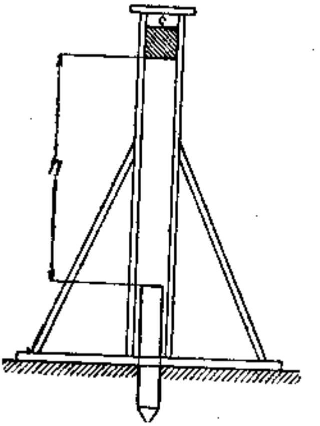
$$m_3 = 4m_2.$$

Задача 155. Баба массы M_1, падая с высоты h, ударяет по свае, масса которой равна m. Принимая коэфициент восстановления равным ε, определить, сколько требуется ударов, чтобы вбить сваю на a *см*, если сопротивление грунта постоянно и равно P (черт. 125).

Назовем через g ускорение силы земного притяжения, выраженное в *м/сек²*.

Углубление сваи равно $\frac{a}{100}$ *м*.

Живая сила упавшей на сваю бабы равна Mgh *кг/м*.



Черт. 125.

Потерянная на удар живая сила T будет

$$T = \frac{1-\varepsilon^2}{2}\frac{M\cdot m}{M+m}v^2,$$

где v — скорость бабы до удара

$$Mv^2 = 2\,Mgh.$$

Полезная работа при одном ударе:

$$Mgh - (1-\varepsilon^2)\frac{Mm}{M+m}gh.$$

Вся работа при x ударах должна равняться $\frac{Pa}{100}$, т. е. работе силы сопротивления грунта:

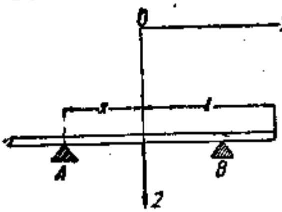
$$\left\{Mgh - (1-\varepsilon^2)\frac{Mm}{M+m}\right\}x = \frac{Pa}{100}.$$

Это уравнение и дает искомое число ударов.

Задача 156. Однородный брусок длины $2l$ расположен симметрично на двух опорах A и B. Выбрать расстояние $2x$ между опорами так, чтобы по удалении опоры B начальное давление на опору A осталось без изменения (черт. 126).

В момент, когда удаляется связь в точке B, реакция в точке A не достигает значительной величины в сравнении с весом балки, именно, по условию остается равной половине веса, поэтому при составлении уравнений силу веса надо принимать во внимание.

Пусть z — ордината центра тяжести; $J_0 = \frac{Ml^2}{3}$ — момент инерции бруска относительно центра тяжести; ω — мгновенная угловая скорость вращения бруска вокруг точки A, $\frac{dz}{dt} = \omega x$ — линейная скорость центра тяжести. Движение бруска в первый момент есть вращение вокруг точки A с угловой скоростью ω, или поступательное движение со скоростью ωx и вращение вокруг центра тяжести с той же угловой скоростью.



Черт. 126.

Изменение количества движения центра тяжести всей системы равно сумме импульсов всех вертикальных сил, приложенных к системе:

$$M\frac{dz}{dt} = \left(P - \frac{P}{2}\right)\tau,$$

или

$$Mx\omega = \frac{P}{2}\tau,$$

τ — длительность удара.

Изменение момента количеств движения при вращении вокруг центра тяжести равно моменту импульсивных сил:

$$J_0\omega = \frac{P}{2}\tau x.$$

Написанные уравнения дают:

$$Mx^2 = J_0;$$

или

$$Mx^2 = \frac{Ml^2}{3};$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Задача 157. Брусок массы M подвешен на шарнире в o и без начальной скорости падает из горизонтального положения. В вертикальном положении он ударяет груз массы m, сообщая ему движение по горизонтальной шероховатой плоскости. Удар не упругий. Определить путь, который пройдет груз (черт. 127). Коэфициент трения f.

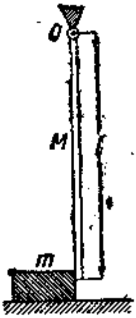
Изменение суммы моментов количеств движения точек бруска равно моменту импульсивной силы Q, проявляющейся при ударе бруска о груз.

Приращение количества движения груза m определяет величину импульсивной силы.

Радиус инерции бруска по отношению к шарниру o будет $\frac{l^2}{3}$.

Обозначим угловую скорость бруска до удара через ω_1, после удара ω_2, скорость груза после удара v. Теперь мы имеем два уравнения: уравнение моментов количеств движения

$$\frac{l^2}{3} M(\omega_2 - \omega_1) = -Ql,$$



Черт. 127.

и уравнение количеств движения

$$mv = Q;$$

чтобы найти величину ω_1, напишем уравнение живых сил для движения бруска:

$$M \frac{l^2}{3} \frac{\omega_1^2}{2} = Mg \frac{l}{2},$$

откуда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Написанные выше уравнения, принимая во внимание, что $v = l\omega_2$, по исключении Q, дают:

$$\frac{l^2}{3} M \left(\omega_2 - \sqrt{\frac{3g}{l}}\right) + ml^2 \omega_2 = 0;$$

откуда

$$v = l\omega_2 = \frac{M}{3m + M} \sqrt{\frac{3g}{l}} \cdot l,$$

или

$$v = \frac{M}{3m + M} \sqrt{3gl}.$$

Живая сила груза $\frac{mv^2}{2}$ должна равняться работе силы трения $mgfx$, где x — путь, пройденный грузом.

$$3gl \left\{ \frac{M}{3m + M} \right\}^2 m = 2mgfx.$$

Из этого уравнения определяется x:

$$x = \frac{3l}{2f} \cdot \frac{M^2}{(3m + M)^2}.$$

Задача 158. Куб скользит со скоростью v по горизонтальному полу и ударяется в препятствие H. Какую скорость получает его центр тяжести после удара? Какова должна быть величина v, чтобы куб после удара опрокинулся (черт. 128)?

Куб наталкивается на препятствие своим ребром A; длину ребра обозначим через a, объем куба a^3, массу $a^3\rho$, где ρ — плотность; положим ее равной единице.

Момент инерции куба J_0 относительно оси, параллельной ребру A и проходящей через центр тяжести, равен $M\frac{a^2}{6}$, а момент инерции J_1 относительно ребра A напишется так:

Черт. 128.

$$J_1 = M\frac{a^2}{6} + M\frac{a^2}{2} = \frac{2}{3}Ma^2.$$

Импульсивные силы приложены в точках ребра A, следовательно моменты их относительно этого ребра равны нулю. Момент количества движения куба относительно ребра A до удара $Mv\frac{a}{2}$ и после удара $\frac{2}{3}Ma^2\omega$ должен быть один и тот же:

$$Mv\frac{a}{2} - \frac{2}{3}Ma^2\omega = 0,$$

из этого уравнения имеем:

$$\omega = \frac{3v}{4a}.$$

а) Скорость центра тяжести после удара c,

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}}\omega = \frac{3}{8}v\sqrt{2}.$$

в) Для того чтобы куб, вращаясь вокруг ребра A, опрокинулся, необходимо, чтобы центр тяжести поднялся на высоту $\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$, при этом совершена будет работа

$$\frac{Mga}{2}(\sqrt{2}-1),$$

за счет живой силы куба

$$\frac{Mga}{2}(\sqrt{2}-1) \lesseqgtr J_1\frac{\omega^2}{2},$$

или

$$\frac{Mga}{2}(\sqrt{2}-1)\gtrless\frac{2}{3}Ma^2\frac{9v^2}{32a^2};$$

откуда

$$v^2=\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)ag.$$

Задача 159. Ящик с землею A подвешен на горизонтальной оси O и служит приемником для снаряда, который с горизонтально направленной скоростью ударяет в приемник (черт. 129).

Неупругий удар вызывает отклонение приемника вместе с попавшим в него снарядом по чертежу влево на некоторый угол θ. Чтобы ось не испытывала давления, соблюдены все необходимые требования:

1. Удар направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения O и центр тяжести прибора C.

2. Вертикальная плоскость, содержащая направление удара, пересекает эту ось в такой точке O, для которой ось вращения есть главная ось инерции тела.

3. Расстояние l линии удара от оси вращения равно расстоянию от этой оси, как оси привеса до соответствующей оси качания.

Определить скорость снаряда.

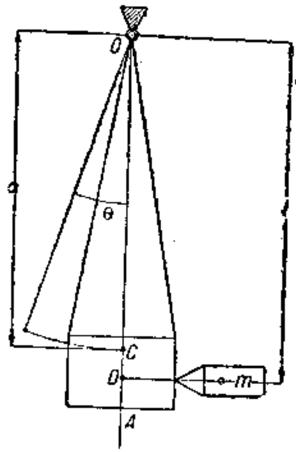
Обозначения:

$OC \ldots a$
$OD \ldots l$

масса приемника — M,
масса снаряда — m,
момент инерции приемника относительно оси $O \ldots J_0$,
радиус инерции приемника для той же оси $\ldots k$,

$$J_0=Mk^2,$$

угловая скорость прибора после удара $\ldots \omega$.



Черт. 129.

Ввиду того, что для системы тел — приемник и снаряд — сила удара является внутренней силой, сумма моментов количеств движения должна сохранить свою величину

$$J_0\omega+ml^2\omega=mlv,$$

или

$$(Mk^2+ml^2)\omega=mlv;$$

но при выполнении третьего условия

$$k^2=al$$

и

$$(Ma + ml)\omega = mv,$$

$$v = \frac{Ma + ml}{m}\omega.$$

Расстояние $\bar{z}$ центра тяжести всей системы от оси O напишется так:

$$\bar{z} = \frac{Ma + ml}{M + m}.$$

Напишем теперь уравнение живых сил для периода после удара, считая, что маятник отклонился на угол θ:

$$J_0\omega^2 + ml^2\omega^2 = 2g(M + m)\bar{z}(1 - \cos\theta),$$

или

$$(Mk^2 + ml^2)\omega^2 = 4g(M + m)\frac{Ma + ml}{M + m}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Заменим в левой части уравнения k^2 через al. По сокращении имеем:

$$l\omega^2 = 4g\sin^2\frac{\theta}{2},$$

или

$$\omega = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

и

$$v = 2\frac{Ma + ml}{m}\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\theta}{2}.$$