532
В-45

Г. ВИЛЛЯ

ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ

17732

ОНТИ
НКТП
1936

LEÇONS
sur la
THÉORIE DES TOURBILLONS

par

HENRI VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Paris
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
1930

53
В-45

Депозитарий

Г. ВИЛЛЯ

ТЕОРИЯ ВИХРЕЙ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
П. М. ГУМЕНСКОГО

Беларускі Дзярж. Універсітэт Бібліятэка
Погашено
17432
РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА
ПРОВЕРЕНО
1592401

ОНТИ · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД · 1936 · МОСКВА

Настоящая книга дает совершенно строгое систематическое изложение как классических, так и новейших исследований по теории вихрей.

Рассчитана она на квалифицированных читателей, требуя для своего понимания знания основ гидромеханики, теории функций комплексного переменного и теории эллиптических функций.

Монография Вилла может служить прекрасным учебным пособием для студентов и аспирантов университетов, желающих углубить свои познания по теории вихрей. В этом отношении она заполняет пробел в научной литературе.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. НАПОМИНАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

В первых главах настоящей книги мы будем предполагать, что изучаем жидкости, лишенные вязкости и, в общем, несжимаемые. Всякая изучаемая жидкая масса, содержащаяся внутри замкнутой поверхности S, будет подвержена действию сил инерции, давлениям, нормальным к поверхности, и действию внешних сил.

Во второй части этого труда основные результаты, относящиеся к идеальным (без вязкости) жидкостям, будут распространены на жидкости вязкие.

Общие уравнения. Пусть ρ обозначает плотность жидкости в точке (x, y, z), X, Y, Z представляют проекции внешней силы, рассчитанной на единицу массы в данной точке, и p обозначает давление. Тогда имеем хорошо известные уравнения:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - I_x, \ldots$$

где I_x, I_y, I_z — составляющие ускорения частицы.

Если взять переменные Лагранжа, следя за каждой движущейся частицей, иными словами, если изобразить движение при помощи времени t и начального положения каждой частицы [(a, b, c) в момент t_0, (x, y, z) в момент t] при помощи уравнений:

$$x = f(a, b, c, t); \quad y = g(a, b, c, t); \quad z = h(a, b, c, t),$$

то уравнения движения, выраженные через переменные Лагранжа a, b, c, t, в силу соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

и аналогичных, примут вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{d^2y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}, \ldots$$

с пятью неизвестными функциями (x, y, z, p, ρ) переменных (a, b, c, t).

Если же мы остановимся на картине скоростей во всякой точке (x, y, z) для любого момента t, то получим уравнения Эйлера:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt}, \ldots$$

с пятью неизвестными функциями (u, v, w, p, ρ) переменных (x, y, z, t). Линии тока выводятся интегрированием уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \ldots$$

Уравнение неразрывности. В переменных Лагранжа уравнение неразрывности, выражающее, что масса, содержащаяся во всякой поверхности Σ, равна той, которая содержалась в первоначальной поверхности Σ_0, имеет вид:

$$\rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho_0.$$

В переменных же Эйлера оно имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Это предполагает, что ни в какой момент времени не происходит ни возникновения ни исчезновения массы.

Дополнительное уравнение. Это уравнение имеет вид:

$$F(\rho, p, T) = 0,$$

где T — температура в рассматриваемой точке.

Здесь мы будем предполагать, что вообще

$$\rho = \text{const}.$$

Вихрь. Вихрем скорости называется вектор, имеющий составляющими в каждой точке:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Если вихрь равен нулю, то скорость (u, v, w) имеет потенциал. Если вихрь везде нормален к скорости, то поле скоростей обладает интегрирующим множителем.

Хорошо известна механическая интерпретация вихря. Около некоторой точки $P(x, y, z)$ вообразим маленькую жидкую сферу с центром в этой точке. Предположим, что мы мгновенно уничтожили всю внешнюю жидкость и одновременно маленькая сфера отвердела; отвердевшая сфера будет обладать мгновенным вращением, которое в точности будет равно (в пределе, когда ее радиус стремится к нулю) вектору-вихрю.

Вводя вихрь в уравнения движения, придадим им следующий вид (уравнениям Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\eta w - 2\zeta v = X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} V^2\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \ldots$$

Предположим, что внешние силы выводятся из силовой функции $U(x, y, z, t)$ и что ρ зависит лишь от p. Положим:

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho}$$

(Q — потенциал ускорений).

Далее положим:

$$H = Q - \frac{1}{2} V^2.$$

Тогда получаем уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) = \frac{\partial H}{\partial x}, \ldots$$

Уравнения Гельмгольца. В предыдущих уравнениях требовалось — для существования входящей туда функции H — чтобы были выполнены условия интегрируемости. Написав, например:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial y},$$

имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\left[\frac{\partial}{\partial z}(\zeta u - \xi w) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi v - \eta u)\right] = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - u\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} +$$
$$+ \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - \eta\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Но

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

и, стало быть,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Уравнение неразрывности может быть написано:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d\xi}{dt} - \xi\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

т. е., деля на ρ,

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{\rho}\right)}{dt}=\frac{\xi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z},\dots$$

Имеем три таких уравнения, которые носят название уравнений Гельмгольца.

Эти диференциальные уравнения линейны относительно $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho}$; если задать начальные значения $\frac{\xi_0}{\rho_0}$, $\frac{\eta_0}{\rho_0}$, $\frac{\zeta_0}{\rho_0}$, соответствующие моменту $t=t_0$, то неизвестные функции определятся единственным образом. В частности, если значения ξ_0, η_0, ζ_0 равны нулю, то очевидно ξ, η, ζ будут постоянно оставаться равными нулю. Это составляет теорему Лагранжа: если в некоторый момент t_0 существует потенциал скоростей, то он будет продолжать существовать во всякий момент.

Например, это будет так, когда, в предположении существования Q, жидкость в начальный момент покоилась.

[Обозначая потенциал скоростей через φ, если он существует, легко видим, что уравнения Эйлера сводятся к одному следующему:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=Q\quad\left(=U-\int\frac{dp}{\rho}\right),$$

а уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\Delta\varphi=0,$$

или, когда речь идет о несжимаемой жидкости,

$$\Delta\varphi=0].$$

Формулы Коши. Обобщение. Теорему Лагранжа можно также доказать методом, принадлежащим Коши, исходя из непреобразованных уравнений Эйлера:

$$\frac{du}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\dots$$

Мы будем предполагать все время существование функции Q, причем

$$p=p(\rho),\qquad X=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad \frac{du}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial x},\dots,$$

уравнения, которые выражают, что ускорения зависят только от потенциальной функции $Q(x, y, z, t)$.

Положим для краткости

$$u'=\frac{du}{dt},\dots$$

и образуем $\frac{\partial Q}{\partial a}$; имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}=u'\frac{\partial x}{\partial a}+v'\frac{\partial y}{\partial a}+w'\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Исключим Q, написав:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)=0;$$

имеем:

$$\frac{D(u',x)}{D(a,b)}+\frac{D(v',y)}{D(a,b)}+\frac{D(w',z)}{D(a,b)}=0.$$

Но очевидные формулы:

$$\frac{\partial u'}{\partial a}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right),\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right),\ldots$$

и элементарные правила диференцирования определителей позволяют далее заключить, что

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{D(u,x)}{D(a,b)}\right]=\frac{D(u',x)}{D(a,b)},\ldots,$$

так что предшествующее уравнение просто выражает, что величина

$$\frac{D(u,x)}{D(a,b)}+\frac{D(v,y)}{D(a,b)}+\frac{D(w,z)}{D(a,b)}$$

не зависит от t.

Но при $t=t_0$ имеем:

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c,\quad u=u_0,\quad v=v_0,\quad w=w_0,$$

и, следовательно:

$$\text{(A)}\qquad \frac{D(u,x)}{D(a,b)}+\frac{D(v,y)}{D(a,b)}+\frac{D(w,z)}{D(a,b)}=\frac{\partial v_0}{\partial a}-\frac{\partial u_0}{\partial b}=2\zeta_0.$$

Получив этот результат, вернемся к старым обозначениям посредством производных по x, y, z от (u, v, w). Имеем такие формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},\ldots,$$

отсюда имеем:

$$\frac{D(u,x)}{D(a,b)}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{D(x,y)}{D(a,b)}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(a,b)},\ldots$$

и, следовательно,

$$2\zeta_0 = \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

т. е. будем иметь три следующих уравнения, из которых первые два доказываются точно так же, как и предшествующее:

$$\xi\frac{D(y,z)}{D(b,c)} + \eta\frac{D(z,x)}{D(b,c)} + \zeta\frac{D(x,y)}{D(b,c)} = \xi_0,$$
$$\xi\frac{D(y,z)}{D(c,a)} + \eta\frac{D(z,x)}{D(c,a)} + \zeta\frac{D(x,y)}{D(c,a)} = \eta_0,$$
$$\xi\frac{D(y,z)}{D(a,b)} + \eta\frac{D(z,x)}{D(a,b)} + \zeta\frac{D(x,y)}{D(a,b)} = \zeta_0.$$

Будем иметь формулы более простые, если решим предыдущие уравнения относительно ξ, η, ζ и положим:

$$\Delta = \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}.$$

Получаем следующие три уравнения Коши:

$$\Delta\cdot\xi = \xi_0\frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial x}{\partial c}, \ldots$$

Так как $\Delta = \frac{\rho_0}{\rho}$, то очевидна связь между этими уравнениями Коши и уравнениями Гельмгольца, именно: уравнения Коши дают интегралы уравнений Гельмгольца, что не трудно проверить непосредственно.

В случае жидкостей ($\rho = \mathrm{const}$) имеем $\Delta = 1$, и эти уравнения приводятся к

$$\xi = \xi_0\frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial x}{\partial c}, \ldots$$

Уравнения Коши можно истолковать иным образом. Рассмотрим выражение

$$E = u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0 da + v_0 db + w_0 dc),$$

где t будем рассматривать как постоянное, а (x, y, z) будут функциями от (a, b, c, t) соответственно движению жидкости. Имеем:

$$E = \left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} - u_0\right)da + (\ldots)\,db + (\ldots)\,dc,$$

а уравнение (A) стр. 9 обозначает, очевидно, что E **является полным диференциалом** F, т. е. существует функция $F(a, b, c, t)$ такая, что

$$E = dF(a, b, c, t).$$

В частности, при $t = t_0$ все три коэфициента в E обращаются в нули и, следовательно, при $t = t_0$, F сводится **к постоянной**, не зависящей от (a, b, c).

Отсюда опять легко получить теорему Лагранжа. В самом деле:

$$E = dF.$$

Если в момент t_0 существует потенциал скоростей, т. е.

$$u_0 da + v_0 db + w_0 dc = d\varphi_0,$$

то

$$u dx + v dy + w dz = d(F + \varphi_0),$$

что означает, что $F + \varphi_0$ будет потенциалом скоростей для момента t, что и требуется доказать.

Обобщение формул Коши для случая, когда внешние силы не имеют потенциала (Friedmann, C. R. Acad. Sc. 63, 1916, p. 219). Ограничимся случаем несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) и предположим, что внешние силы не имеют потенциала (ни теорема Гельмгольца, ни теорема Лагранжа не будут существовать; именно, неконсервативные силы, вместе с трением, будут причиной несохранения вихря).

Но мы сможем заменить уравнения Коши и Гельмгольца другими, несколько отличающимися, из которых и будем исходить.

Имеем уравнения движения:

$$u' = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \ldots;$$

они выражают, очевидно, что

$$(u' - X)\,dx + (v' - Y)\,dy + (w' - Z)\,dz$$

является полным диференциалом в момент t как для переменных (x, y, z), так и для (a, b, c). Рассматривая его относительно этих последних переменных и полагая:

$$A = X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$B = X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} + Z\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$C = X\frac{\partial x}{\partial c} + Y\frac{\partial y}{\partial c} + Z\frac{\partial z}{\partial c},$$

получаем тогда, что

$$\left(u'\frac{\partial x}{\partial a} + v'\frac{\partial y}{\partial a} + w'\frac{\partial z}{\partial a} - A\right)da + (\ldots)\,db + (\ldots)\,dc$$

является полным диференциалом. То же будет иметь место, если возьмем интеграл по t:

$$da \int_{t_0}^{t} \left(u' \frac{\partial x}{\partial a} + v' \frac{\partial y}{\partial a} + w' \frac{\partial z}{\partial a} - A \right) dt + db\,(\ldots) + dc\,(\ldots).$$

Положим

$$A_1 = \int_{t_0}^{t} A\,dt\,, \ldots,$$

и заметим, что можно написать следующие равенства:

$$\int_{t_0}^{t} u' \frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{du}{dt}\,\frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{d}{dt} \left(u \frac{\partial x}{\partial a} \right) - u \frac{\partial u}{\partial a} \right] dt =$$

$$= u \frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial (u^2)}{\partial a}\,dt\,, \ldots$$

Следовательно, откидывая явный диференциал

$$d \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)\,dt,$$

мы видим, что выражение

$$\left(u \frac{\partial x}{\partial a} + v \frac{\partial y}{\partial a} + w \frac{\partial z}{\partial a} - u_0 - A_1 \right) da + (\ldots)\,db + (\ldots)\,dc$$

является полным диференциалом относительно a, b, c.

Но это в точности тот же результат, из которого мы исходили в предшествующем параграфе, с той лишь разницей, что u_0, v_0, w_0 теперь заменены на $u_0 + A_1$, $v_0 + B_1$, $w_0 + C_1$. Далее, полагая

$$2\xi^* = \frac{\partial C_1}{\partial b} - \frac{\partial B_1}{\partial c}\,, \ldots$$

и применяя те же выкладки, что и раньше, приходим к формулам:

$$\frac{D(u, x)}{D(b, c)} + \frac{D(v, y)}{D(b, c)} + \frac{D(w, z)}{D(b, c)} = 2\xi_0 + 2\xi^*,$$

. . . .

Отсюда вытекает, как и выше, что для $\rho = \text{const}$

$$\xi = (\xi_0 + \xi^*) \frac{\partial x}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^*) \frac{\partial x}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^*) \frac{\partial x}{\partial c}$$

. . . .

— уравнения, обобщающие уравнения Коши.

По определению:

$$2\xi^* = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial C}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial c} \right) dt = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{D(X, x)}{D(b, c)} + \frac{D(Y, y)}{D(b, c)} + \frac{D(Z, z)}{D(b, c)} \right] dt.$$

Для $t = t_0$ имеем $\xi_0^* = 0$, но нет никаких оснований считать, что это будет так и при $t \neq t_0$. Становится ясным, каким образом теорема Лагранжа перестает быть справедливой для жидкостей, когда внешние силы неконсервативны.

Свойства вихрей. Вернемся к случаю, когда имеется потенциал ускорений. Известны определения линий тока, вихревых линий, жидких трубок или нитей (образованных линиями тока), вихревых трубок. Теорема о расхождении, примененная к вихрю, показывает, что поток вихря через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\iiint \operatorname{Div} \Omega \, d\tau = \iint (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\sigma = 0$$

(α, β, γ — направляющие косинусы внешней нормали) в силу равенства нулю расхождения от вихря.

Циркуляция по замкнутой линии:

$$C_L = \int_L u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

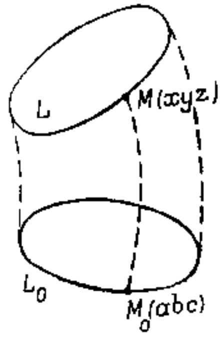

Рис. 1.

Циркуляция остается постоянной, когда меняется t (и одновременно линия L), если существует Q — потенциал ускорений. Это следствие теоремы Лагранжа, так как при указанных условиях:

$$u\,dx + \ldots - (u_0\,da + \ldots) = dF(a, b, c, t);$$

тогда, так как линия L замкнута (рис. 1),

$$\int_L u\,dx + \ldots = \int_{L_0} u_0\,da + \ldots,$$

если, по крайней мере, функция F однозначна. Последнее условие можно уточнить, сказав, что оно сводится к требованию однозначности потенциала ускорений Q. В самом деле, в момент t_0 координаты a, b, c для L_0 могут быть представлены в виде:

$$a = \varphi_1(\lambda), \quad b = \varphi_2(\lambda), \quad c = \varphi_3(\lambda),$$

где λ — параметр, который достаточно менять в пределах от λ_1 до λ_2, чтобы получить всю линию L_0. В момент t координаты для L являются функциями (a, b, c, t), т. е. λ и t, вида:

$$x = \psi_1(\lambda, t), \quad y = \psi_2(\lambda, t), \quad z = \psi_3(\lambda, t),$$

и λ должно меняться от λ_1 до λ_2, чтобы точка (x, y, z) описала L.

Тогда мы имеем:

$$C_L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(u \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v \frac{\partial y}{\partial \lambda} + w \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\lambda.$$

Это есть функция t. Имеем:

$$\frac{dC_L}{dt} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \ldots + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \ldots \right) d\lambda,$$

т. е.

$$\frac{dC_L}{dt} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[Q + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] d\lambda.$$

Правая часть равна нулю, если Q принимает то же значение после обхода контура L. Следовательно, $C_L = \mathrm{const}$, что и требуется доказать.

Применение теоремы Стокса. Проведем через линию L односвязную поверхность S, и приняв, по обычному правилу, положительное направление обхода L, имеем:

$$\int_L u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int\int_S \left[\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \ldots \right] d\sigma,$$

т. е.

$$C_L = \int\int_S 2\,(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\sigma = 2 \int\int_S \Omega_n\, d\sigma.$$

Правая часть дает поток вихря через поверхность S или интенсивность вихрей, пронизывающих ее. Интенсивность эта равна, следовательно, циркуляции вдоль L.

Сохранение циркуляции сводится, в силу этого обстоятельства, к постоянству во времени интенсивности вихрей, пронизывающих поверхность S, когда последняя меняется как жидкая поверхность. Для замкнутой поверхности полная интенсивность (или полный поток) обращается в нуль, что мы уже знаем из теоремы о расхождении потока. Циркуляция вдоль линии, проведенной на вихревой поверхности, равна нулю, так как эта линия может быть стянута в точку непрерывной деформацией на поверхности. В самом деле, взяв за поверхность ограниченную контуром часть рассматриваемой вихревой поверхности, имеем на ней везде $\Omega_n = 0$ и, следовательно, $C_L = 0$.

Обратно, если циркуляция обращается в нуль вдоль всякой замкнутой линии, проведенной по некоторой поверхности S, то последняя будет являться вихревой поверхностью. Так как $\int\int \Omega_n\, d\sigma$ должен быть нулем на всякой части поверхности, то необходимо, чтобы $\Omega_n = 0$.

Пересечение двух вихревых поверхностей является вихревой линией; так как вихрь Ω, будучи касательным одновременно к двум поверхностям, пойдет по касательной и к линии их пересечения.

Теорема. Поверхности (или линии) вихрей сохраняются, они являются жидкими поверхностями (или линиями) (Гельмгольц). В самом деле, на поверхности T проведем какую-нибудь замкнутую линию L; в момент t_0 на поверхности T_0, которую предполагаем вихревой поверхностью, соответствующая линия будет L_0. Имеем:

$$C_L = C_{L_0} = 0,$$

так как L_0 находится на T_0. Но это имеет место для всякой L_0, следовательно, для всякой L, а потому T является вихревой поверхностью.

Эта теорема переносится и на вихревые линии, так как они рассматриваются как пересечения двух вихревых поверхностей.

Вихревая трубка. Ее интенсивность. Для замкнутой линии L, окружающей трубку, циркуляция не обязательно равна нулю. Она сохраняет одинаковое значение для различных замкнутых линий, один раз охватывающих трубку. Достаточно, в самом деле, записать, что полная циркуляция равна нулю вдоль сложной линии, изображенной на рис. 2. Отсюда видим, что интенсивность трубки равна постоянному значению циркуляции вдоль L.

Рис. 2.

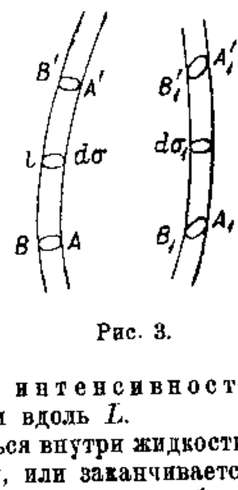

Рис. 3.

Следствие. Вихревая трубка не может кончаться внутри жидкости: она или замыкается сама на себя, подобно кольцу, или заканчивается на стенке сосуда, или простирается либо до бесконечности, либо до поверхности разрыва.

Бесконечно тонкая трубка. Пусть $d\sigma$ ее поперечное сечение, ее интенсивность I, по определению равная

$$\int\int 2\Omega_n\, d\sigma,$$

будет тогда

$$I = 2\Omega d\sigma.$$

Ω перпендикулярен поперечному сечению или касателен к трубке. Эта величина $\Omega d\sigma$, следовательно, постоянна: 1) когда меняется t, 2) если перемещать поперечное сечение вдоль трубки.

Пусть AB и $A'B'$ два соседних поперечных сечения трубки в момент t (рис. 3). В другой момент t_1 они перейдут в A_1B_1 и $A_1'B_1'$, составляя новый косой цилиндр. Пусть $d\sigma$ и $d\sigma_1$ поперечные сечения двух маленьких цилиндров. Имеем, с одной стороны,

$$\Omega d\sigma = \Omega_1 d\sigma_1,$$

а с другой стороны, сохранение массы дает:

$$\rho l d\sigma = \rho_1 l_1 d\sigma_1,$$

где l и l_1 — длины цилиндров.

Отсюда видим, что

$$\frac{\rho l}{\Omega}$$

остается постоянным.

Из всего предшествующего следует, что движущаяся жидкость состоит: 1) из области, где нет вихрей, — области, которая перемещается и, может быть, деформируется во времени, но никогда не содержит вихрей, и 2) из вихревой области, составленной из вихревых нитей, обладающих описанными выше свойствами.

В невихревой области можно положить

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и циркуляция вдоль замкнутой линии L будет:

$$C_L = \int\limits_L u dx + v dy + w dz = \int\limits_L d\varphi.$$

Если линия L, взятая в невихревой области, может быть стянута в точку непрерывной деформацией, не выходя из этой области, то циркуляция равна нулю и φ принимает то же значение после полного обхода линии L.

В самом деле, на поверхности S, проходящей через линию, при ее деформации, имеем всюду $\Omega = 0$, и, следовательно:

$$C_L = \int\int\limits_{S_L} 2\Omega_n d\sigma = 0.$$

Далее видим, что соответственно порядку связности объема, занятого невихревою жидкостью, функция φ может быть однозначна или обладать одной или многими циклическими постоянными, соответственно обходу тех или иных поверхностей (например, имеющих форму кольца). Мы не будем останавливаться на этом вопросе, а перейдем к основной задаче.

Погашено

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПО ЗАДАННЫМ ВИХРЯМ.

Вычисление скоростей в функции данных вихрей в жидкости. Если скорости предположить известными всюду в момент времени t, то совершенно ясно, что мы непосредственно узнаем вихри. Обратно, предположим известными вихри. Можно ли вычислить скорости? Мы будем считать, что речь идет о несжимаемой жидкости, которую можем предположить как неограниченной, так и заключенной внутри сосуда, покоящегося или движущегося. Жидкость тогда состоит из вихревых трубок или колец, в которых функции (ξ, η, ζ) отличны от нуля и которые окружены частицами жидкости без вихрей, т. е. где ξ, η, ζ равны нулю; функции (ξ, η, ζ), следовательно, вообще говоря, — разрывны в области, занятой жидкостью в целом. Мы будем предполагать сосуд односвязным и заполненным жидкостью.

1392401

Задача будет тогда такова. Предположим, например, сосуд неподвижным; надо найти (u, v, w), зная, что:

1° всюду

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=2\xi, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\eta, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\zeta;$$

величины ξ, η, ζ известны, причем в некоторых областях могут обращаться в нуль;

2° всюду

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

3° на стенках сосуда скорость тангенциальна, т. е.

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы внешней нормали к стенке. Если жидкость неограниченная, будем предполагать, что она на бесконечности покоится:

$$u=v=w=0.$$

Естественно, из первых трех уравнений вытекает условие:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0,$$

что легко проверить.

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

Задача будет иметь единственное решение для односвязного сосуда. Так, согласно 1°, разность двух решений будет иметь потенциал φ,

$$u_1 - u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots$$

Согласно 2°, имеем $\Delta\varphi = 0$, и, согласно 3°, $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ на поверхности сосуда.

Далее, вследствие односвязности сосуда видим, что $\int (u_1 - u_2)\,dx + \ldots$ равен нулю вдоль всякой замкнутой кривой внутри сосуда, а потому φ однозначна. Тогда φ не иначе как постоянная и, следовательно: $u_1 = u_2, \ldots$ Это будет иметь место и в том случае, когда сосуд неограничен, ибо тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ на бесконечности нули, а φ функция однозначная и гармоническая, равная постоянной.

(В многосвязной области для получения решения надо задать модули или циклические постоянные для тех замкнутых кривых, которые не стягиваются в одну точку внутри сосуда)

Неограниченная жидкость. Предположим (u, v, w) и (ξ, η, ζ) на бесконечности равными нулю. Жидкость тогда разобьется на вихревые кольца, подвижные в безвихревой жидкой массе. Сразу видно, что всегда можно три функции (u, v, w), удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

представить в виде вихря:

$$u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Это почти очевидно и хорошо известно. Сначала можно найти частное решение, где $R_1 = 0$; тогда можно положить:

$$P_1 = \int_{z_0}^{z} v(x, y, z)\,dz,$$

и далее

$$Q_1 = -\int_{z_0}^{z} u\,dz + \psi(x, y).$$

и остается лишь проверить, удовлетворится ли третье уравнение, т. е.

$$w(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial u}{\partial x}\,dz - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v}{\partial y}\,dz + \frac{\partial\psi}{\partial x} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial w}{\partial z}\,dz +$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial x} = w(x, y, z) - w(x, y, z_0) + \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Но ничто не мешает выбрать произвольную функцию ψ так, чтобы

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} = w(x, y, z_0).$$

Но если (P, Q, R) общее решение, то

$$\frac{\partial(R - R_1)}{\partial y} - \frac{\partial(Q - Q_1)}{\partial z} = 0, \ldots$$

и

$$P = P_1 - \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots,$$

следовательно, имеем бесчисленное множество решений. Принимая за (u, v, w) выражения указанного выше вида, будем иметь из уравнений 1°:

$$2\xi = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z}, \ldots$$

или

$$2\xi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \Delta P, \ldots$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, положив:

$$\Delta P = -2\xi, \quad \Delta Q = -2\eta, \quad \Delta R = -2\zeta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Но, как мы знаем, потенциал притяжения V при плотности ρ удовлетворяет везде уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho,$$

уравнению, которое сводится к $\Delta V = 0$ вне притягивающих масс. Будем, следовательно, ассоциировать с вихревыми кольцами притягивающую материю плотности:

$$\frac{1}{2\pi}\xi(x', y', z', t) = \frac{1}{2\pi}\xi.$$

Положим:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

$$d\tau' = dx'\,dy'\,dz'.$$

Мы удовлетворим уравнению для P, положив:

$$P = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi'}{r}\,d\tau',$$

и также

$$Q=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\eta'}{r}\,d\tau'$$

$$R=\frac{1}{2\pi}\int\int\int\frac{\zeta'}{r}\,d\tau'.$$

Любопытно, что эти три функции сами по себе удовлетворят тогда уравнению:

$$M=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

Доказательство разбивается на две части в зависимости от того, находится ли точка (x, y, z) в вихревой области или нет:

1°. Точка (x, y, z) лежит внутри вихревой трубки, т. е. в пространстве, занятом фиктивной массой, производящей потенциал. Пусть S поверхность, ограничивающая эту массу, V ее объем (рис. 4). Как известно, имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{1}{2\pi}\int\int_S\frac{\alpha\xi'}{r}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\int\int_V\frac{1}{r}\frac{\partial\xi'}{\partial x'}\,d\tau'.$$

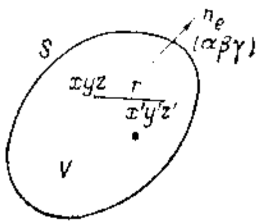

Рис. 4.

Следовательно:

$$M=-\frac{1}{2\pi}\int\int_S\frac{\alpha\xi'+\beta\eta'+\gamma\zeta'}{r}\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\int\int_V\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\xi'}{\partial x'}+\frac{\partial\eta'}{\partial y'}+\frac{\partial\zeta'}{\partial z'}\right)d\tau'.$$

Это же выражение равно нулю, так как $\alpha\xi'+\beta\eta'+\gamma\zeta'=0$ на S, в виду того, что вихрь касателен к поверхности. Далее, внутри объема V имеем:

$$\frac{\partial\xi'}{\partial x'}+\frac{\partial\eta'}{\partial y'}+\frac{\partial\zeta'}{\partial z'}=0.$$

Следовательно, M равно нулю во всем V.

2°. Пусть (x, y, z) находится вне вихревой массы, P, Q, R, будучи потенциалами, имеют первые производные, всюду непрерывные и обращающиеся в нуль на бесконечности. M, следовательно, всюду непрерывно. Оно равно нулю внутри V, следовательно, в силу непрерывности, равно нулю и на поверхности S; кроме того оно обращается в нуль на бесконечности. Более того: M допускает первые и вторые производные вне V; наконец, это гармоническая функция вне V,

$$\Delta M=\frac{\partial}{\partial x}\Delta P+\ldots=0.$$

Следовательно, $M=0$ во всем внешнем пространстве, что и требовалось доказать.

Окончательные формулы. Получаем, следовательно:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\int\int_V\left(\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau', \ldots$$

т. е.

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\int\int_V\frac{\eta'(z-z')-\zeta'(y-y')}{r^3}\,d\tau' \ldots$$

Из формул

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\int\int_V\left(\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau', \ldots$$

получаются обратно формулы:

$$2\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \ldots$$

В самом деле, напишем, как и выше:

$$u=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ v=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ w=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

то получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=-\Delta P,$$

В силу формулы

$$P=\frac{1}{2\pi}\int\int\int_V\frac{\xi'}{r}\,d\tau'$$

плотность в выражении потенциала P равна $\frac{\xi}{2\pi}$; теорема Пуассона даст нам внутри вихревого объема:

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=2\xi,$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0$$

во внешнем пространстве.

Эти формулы можно пересказать в следующем виде: всяким элементом $d\tau'$ вносится в выражении скорости точки P слагаемое, равное скорости W, которую имела бы эта точка в силу вращения (ξ', η', ζ') около элемента $d\tau'$, умноженной на $\frac{d\tau'}{d\pi r^3}$, где r — расстояние P от $d\tau'$.

Скорость, происходящая от бесконечно тонкого кольца. Вся совокупность вихрей может быть разделена на бесконечно тонкие кольца, имеющие каждое некоторую интенсивность. Возьмем одно из этих колец. Элемент объема $d\tau'$ мы можем записать $d\tau' = d\sigma ds$, где ds — длина AB, взятая вдоль трубки, а $d\sigma$ — ее сечение (рис. 5), Вращение Ω от этого элемента $d\tau$ касательно к кольцу и скорость W, от него происходящая, равна $\Omega \times PP'$ (PP' — расстояние от P до Ω). Она направлена перпендикулярно плоскости (P, Ω) и имеет направление, зависящее от вращения Ω. Вводя угол φ (между Ω и r), имеем:

$$W' = \Omega r \sin\varphi.$$

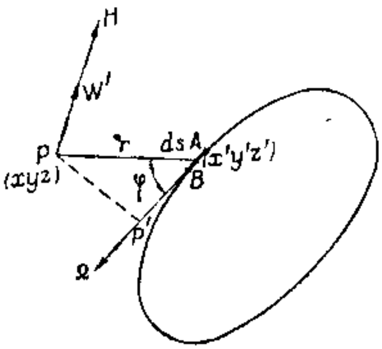

Рис. 5.

Вектор H, представляющий добавочную часть скорости точки P, происходящую от $d\tau'$, будет тогда:

$$H = W' \frac{d\tau'}{2\pi r^3} = \frac{\Omega \sin\varphi}{2\pi r^2}\, d\sigma ds.$$

Так как интенсивность $I = 2\Omega d\sigma$, то

$$H = \frac{I}{4\pi r^2}\, ds \sin\varphi.$$

Вектор K, происходящий от всего кольца, равен геометрической сумме всех векторов H.

Электромагнитная аналогия. Заменим кольцо проводником, по которому течет ток интенсивности I, циркулирующий в том же направлении или в обратном тому, которое указано для вихрей, согласно принятому расположению координатных осей. Поместим в P магнитный полюс единичной массы. Действие тока на полюс P получится из сложения векторов $\frac{\lambda I ds \sin\varphi}{r^2}$, перпендикулярных плоскости (P, ds), причем λ постоянная, зависящая от выбора единиц. Будет иметь место тождественность, если выберем $\lambda = \frac{1}{4\pi}$.

Эта электромагнитная аналогия или непосредственное вычисление показывает, что вектор K происходит от силовой функции

$$U = \frac{1}{4\pi}\,\theta,$$

где θ означает телесный угол, под которым видна из точки P площадь фиктивной поверхности S, проходящей через вихревое кольцо.

Ради точности надо рассматривать θ положительным или отрицательным в зависимости от того, какая из двух сторон поверхности S видна из точки P. Которую из двух сторон поверхности S следует рассматривать как положительную, мы определим, заметив, что (при $I > 0$) U и θ изменяются в одном смысле. Вектор K направлен со стороны U, а следовательно и θ, возрастающих. Если точка P вблизи поверхности S находится с положительной стороны, то θ возрастает, когда приближаются к поверхности, и скорость P направлена к поверхности. Беря же P на S, внутри кольца, мы увидим непосредственно по ориентации вихрей Ω вдоль кольца, в каком направлении вращения Ω стремятся переместить точку P. Следовательно, мы будем знать сторону S, которую надо рассматривать как положительную.

Случай жидкости, содержащейся в неподвижном сосуде.

На поверхности (стенке) S скорость касательна к стенке.

Этот случай может быть сведен к случаю неограниченной жидкости посредством следующего приема: можно вообразить все пространство, внешнее к S, занятым покоящейся жидкостью. Но тогда мы будем иметь разрыв скорости на S для жидкости, сделавшейся неограниченной. Такие разрывы, будучи тангенциальными, приемлемы, как это почти очевидно a priori и, как мы в этом удостоверимся позже, при рассмотрении более общей теоремы.

Чтобы избежать этих разрывов или, по крайней мере, увидеть, чему они соответствуют, вообразим переходный слой, толщины ε, между S и S' (поверхность, параллельная S и с ней соседняя). В этом слое мы заставим скорость изменяться от 0 до ее значения на S (этот метод рассмотрения принадлежит Пуанкаре). Этот переходный слой эквивалентен вихревому слою.

Возьмем сперва случай, когда S представляет неподвижную плоскость:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы нормали со стороны, где жидкость покоится; с той стороны, где жидкость подвижна, ее скорость предполагается постоянной (u_1, v_1, w_1) — параллельной плоскости. Переходный слой заключается между предыдущей плоскостью и плоскостью

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda + \varepsilon.$$

Предположим, что скорость внутри переходного слоя равна:

$$u = u_1\left(1 - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - \lambda}{\varepsilon}\right),$$

$$v = v_1\left(1 - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - \lambda}{\varepsilon}\right),$$

$$w = w_1\left(1 - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - \lambda}{\varepsilon}\right).$$

Скорость u будет изменяться непрерывным образом от 0 до $u_1 \ldots$

Внутри слоя вихрь определяется по формуле:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon}(\gamma v_1 - \beta w_1), \ldots$$

Величина вихря, следовательно, очень велика, вихрь параллелен плоскости S $(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0)$ и перпендикулярен скорости (u_1, v_1, w_1), так как $u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta = 0$. Вихревой слой представляет, следовательно, поверхность вихрей (поверхностный вихрь). От этого частного случая можно перейти к общему случаю какого угодно сосуда посредством классического рассуждения Пуанкаре: заменяют сосуд большим количеством малых элементов поверхностей, достаточно малых, чтобы можно было связать с ними маленькие кусочки плоскости, на которых скорость у стенки оставалась бы постоянной. Выбирают толщину ε достаточно малой, чтобы можно было ею пренебречь сравнительно с самими элементами. Переходный слой будет тогда заменен вихревым слоем, заданным во всякой точке S равенствами:

$$2\varepsilon\xi' = \gamma v_1 - \beta w_1, \ldots$$

Теперь можно написать скорости в какой-нибудь точке жидкости внутри сосуда, пользуясь вычислениями предыдущего параграфа. Мы имеем для функций P, Q, R (см. выше):

$$P = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\xi'}{r}\, d\tau',$$

где тройной интеграл распространен: 1) на объем V, занятый вихрями в сосуде, и 2) на переходный слой. В этом последнем имеем: $d\tau' = \varepsilon d\sigma$, где $d\sigma$ элемент поверхности S; следовательно:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int\int\int_V \frac{\xi'}{r}\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varepsilon\xi'}{r}\, d\sigma,$$

т. е., взяв величину ξ' на S

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_V \frac{\xi'}{r}\, d\tau' + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\gamma v_1 - \beta w_1}{r}\, d\sigma,$$

далее заканчиваем рассуждение как и выше. Но скорости (u, v, w) во всей жидкости известны не только в функции вихрей внутри сосуда, но в функции также скоростей на стенке (u_1, v_1, w_1).

Само собой разумеется, по найденным таким образом значениям P, Q, R получаем u, v, w во всей жидкости из соотношений:

$$u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ldots,$$

что дает для них выражения вида:

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_V \frac{\eta'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\iiint\limits_V \frac{\zeta'}{r}\,d\tau' + A_1,$$

$$v = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + B_1,$$

$$w = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_1,$$

где A_1, B_1 и C_1 происходят от поверхностных интегралов в выражениях P, Q, R. Вихрь в точке (x, y, z) должен быть равен (ξ, η, ζ), отсюда следует, что слагаемые A_1, B_1, C_1 должны давать вне S вихрь, равный нулю. Следовательно, вне поверхности S, A_1, B_1, C_1 получаются из потенциала φ:

$$A_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \; B_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \; C_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

и мы будем иметь $\Delta\varphi = 0$, в силу уравнения непрерывности. Хотя эти формулы, дающие u, v, w, требуют знания скоростей на стенках, мы теперь покажем, что можно предварительным решением уравнения Фредгольма получить формулы, дающие скорость u, v, w по всей жидкости в функции одних только вихрей для всякого момента t. Мы начнем с рассмотрения задачи для случая двух измерений.

Решение общей задачи в случае двух измерений для сосуда, находящегося в заданном движении. Мы будем предполагать, что в двухмерной задаче нам заданы в момент t: 1° вихрь, 2° состояние скоростей сосуда, содержащего жидкость и целиком ею заполненного; при этих условиях состояние скоростей в момент t полностью определено. Нахождение их зависит от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.[1] Здесь вихрь сводится к одной своей составляющей

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Высказанная теорема значительно более точная, чем та, которая касалась неподвижного сосуда в прошлом параграфе. Мы не имеем здесь надобности знать скорости жидкости на стенках, известно только, что эти скорости касательны к стенкам и что нормальная скорость в какой-нибудь точке стенки равна нормальной составляющей скорости перемещения последней. Естественно предвидеть, что здесь, где рассматриваются только две координаты вместо трех, логарифмические потенциалы будут mutatis mutandis играть роль, которую в трех измерениях играют потенциалы массовые.

---

[1] См. *Birkeland*, Comptes rendus, t. 162, Juin 1916, p. 973; t. 163, Août 1916, p. 200.

Приняв это, мы изложим наш результат синтетически следующим образом. Введем нижеследующие интегралы, в которых A будет обозначать площадь сосуда и C его контур:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \iint_A \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) \lg \frac{1}{r}\, d\sigma' = \iint_A 2\zeta' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma', \\ &\qquad \left[r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\,\right], \\ R_2 &= \int_C (\beta u' - \alpha v') \lg \frac{1}{r}\, ds'; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \iint_A \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right) \lg \frac{1}{r}\, d\sigma', \\ S_2 &= \int_C (u'\alpha + v'\beta) \lg \frac{1}{r}\, ds'; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

α и β обозначают направляющие косинусы нормали, внешней к сосуду (односвязному ради простоты изложения), контур C сосуда обходится в прямом направлении. Так как речь идет о несжимаемой жидкости, то расхождение скорости все время равно нулю и, следовательно, S_1 постоянно равно нулю.

В написанных интегралах нет ничего существенно нового; функции R_1 и R_2 те же, которые фигурируют в выражении функции R прошлого параграфа, только $\frac{1}{r}$ заменено на $\lg \frac{1}{r}$.

Далее, очевидные интеграции по частям дадут:

$$R_1 = \iint_A \left(\frac{\partial\left(v' \lg \frac{1}{r}\right)}{\partial x'} - \frac{\partial\left(u' \lg \frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + u' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y'} - \right.$$

$$\left. - v' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x'}\right) d\sigma' = -R_2 + \iint_A \left(u' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y'} - v' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x'}\right) d\sigma',$$

и, следовательно,

$$R = R_1 + R_2 = \iint_A \left(u' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y'} - v' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x'}\right) d\sigma', \quad (3)$$

и также

$$S = S_1 + S_2 = \iint_A \left(v' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y'} + u' \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x'}\right) d\sigma'. \quad (4)$$

Заметим теперь, что r зависит от x' и y' только через разности $x-x'$, $y-y'$. С другой стороны мы знаем, что логарифмические потенциалы имеют частные производные первых двух порядков, из которых первая может быть получена простым диференцированием под знаком интеграла, что не будет иметь места для производной второго порядка. Мы можем, следовательно, написать:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\int_A u' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma' + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int\int_A v' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma',$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int\int_A v' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma' - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\int_A u' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma'.$$

Мы будем иметь затем:

$$\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = -\Delta \int\int_A u' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma', \tag{5}$$

и также получим:

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y} = \Delta \int\int_A v' u' \lg \frac{1}{r}\, d\sigma'. \tag{5a}$$

Если точка (x, y) находится в области A, то мы заключаем, в силу известных свойств логарифмического потенциала:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi u(x, y) &= \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x}, \\ 2\pi v(x, y) &= \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

причем правые части будут равны нулю, если (x, y) находится вне A. Заметим, что мы имеем $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, так как S гармоническая функция, регулярная внутри A.

Если, наконец, мы поместим точку (x, y) в положение m на границе C, то классическое рассуждение, изолирующее точку m, с помощью малой полуокружности, дает вместо (6) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \pi u_m &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x}\right)_m \\ \pi v_m &= \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)_m, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

допуская, во всяком случае, что контур C имеет вполне определенную касательную, единственную во всякой точке m.

Мы допустим, что имеем все время дело с несжимаемой жидкостью

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

в которой вихрь ζ известен. Мы знаем также нормальную скорость на стенке, т. е. выражение $V_n = u\alpha + v\beta$ во всякой точке C. Если бы мы знали также касательную скорость $V_t = \alpha v - \beta u$, то четыре функции R_1, R_2, S_1, S_2 были бы известны, и формулы (6) нам дали бы скорость (u, v) во всякой точке области A. Но мы в состоянии доказать следующую теорему.

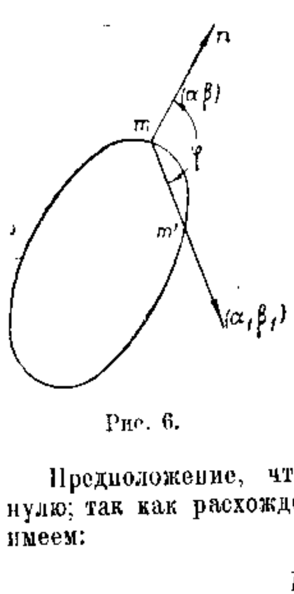

Рис. 6.

Теорема. Наличие перечисленных выше данных позволяет вычислить тангенциальную скорость V_t, как решение уравнения Фредгольма.

В самом деле, образуем выражение V_t в точке m контура, пользуясь уравнениями (7) и предполагая сперва, что нормальная скорость V_n равна нулю во всякой точке контура C. При этих условиях будем иметь:

$$(\pi V_t)_m = \alpha\left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)_m - \beta\left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right)_m. \quad (8)$$

Предположение, что V_n равно нулю, сводит здесь S к S_1, т. е. к нулю; так как расхождение равно нулю и так как вихрь задан, то имеем:

$$R = R_1 - \int_C (V_t') \lg \frac{1}{r}\, ds;$$

штрих указывает, что V_t рассматривается в точке m', принадлежащей C, в соседстве с которой элемент дуги есть ds.

Уравнение (8) дает, следовательно:

$$\pi (V_t)_m = -\alpha\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)_m - \beta\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}\right)_m +$$

$$+ \alpha \frac{\partial}{\partial x}\int_C V_t' \lg \frac{1}{r}\, ds + \beta \frac{\partial}{\partial y}\int_C V_t' \lg\frac{1}{r}\, ds. \quad (9)$$

Но если мы обозначим через α_1, β_1 направляющие косинусы отрезка mm' (рис. 6)

$$\alpha_1 = \frac{x' - x}{r}, \qquad \beta_1 = \frac{y' - y}{r},$$

то будем иметь:

$$\frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{x' - x}{r^2} = \frac{\alpha_1}{r}, \qquad \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{\beta_1}{r},$$

и, следовательно:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x}\int_C V_t' \lg \frac{1}{r}\, ds + \beta \frac{\partial}{\partial y}\int_C V_t' \lg \frac{1}{r}\, ds = \int_C \frac{V_t'}{r}(\alpha\alpha^2 + \beta\beta^2)\, ds.$$

Пусть φ угол между mm' и нормалью mn; уравнение (9) запишется:

$$\pi (V_t)_m - \int_C V_t' \frac{\cos\varphi}{r}\, ds = -\left(\frac{\partial R_1}{\partial n}\right)_m. \tag{10}$$

Мы имеем, следовательно, окончательно для V_t интегральное уравнение классического вида. Интегрирование этого уравнения позволит нам узнать V_t. Далее, будем иметь u и v по формулам (6) внутри A.

Но доказательство предполагало, что V_n равно нулю. Теперь легко отделаться от этого ограничения. В самом деле, если дана (на C) величина $V_n = \alpha u + \beta v$, то возможно, и при том бесчисленным числом способов, определить вектор (u_0, v_0) во всей области A, включая и контур, такой, что на C будем иметь:

$$\alpha u_0 + \beta v_0 = V_n.$$

Например, можно было бы взять в качестве u_0, v_0 скорость во всякой точке, совпадающую со скоростью площадки A, предполагаемой твердой и увлекаемой заданным движением сосуда; положим тогда:

$$u = u_0 + u_1, \qquad v = v_0 + v_1;$$

снабдим также V_n и V_t индексами 0 или 1, в зависимости от их соответствия векторам (u_0, v_0) или (u_1, v_1). Имеем, в силу нашего выбора:

$$(V_n)_1 = 0, \qquad V_n = (V_n)_0 \tag{11}$$

$$V_t = (V_t)_0 + (V_t)_1. \tag{12}$$

После этого уравнение (8) должно быть заменено следующим:

$$\pi (V_t)_0 + \pi (V_t)_1 = -\frac{\partial R_1}{\partial n} + \int_C \left[(V_t')_0 + (V_t')_1\right] \frac{\cos\varphi}{r}\, ds + $$

$$+ \alpha \frac{\partial S}{\partial y} - \beta \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Посмотрим, что сделается с функцией S. S_1 будет все время нулем, и на основании (11) будем иметь:

$$S_2 = \int_C (V_n')_0 \lg \frac{1}{r}\, ds$$

и мы получим окончательно для определения $(V_t)_1$ уравнение Фредгольма:

$$\pi (V_t)_1 - \int\limits_C (V_t')_1 \frac{\cos\varphi}{r} ds = -\frac{\partial R_1}{\partial n} - \pi (V_t)_0 +$$

$$+ \int\limits_C (V_t')_0 \frac{\cos\varphi}{r} ds + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_C V_n' \lg\frac{1}{r} ds - \beta \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_C V_n' \lg\frac{1}{r} ds,$$

где правая часть полностью известна на C. Совокупность двух последних членов легко представить в виде $-\int\limits_C \frac{V_n'}{r} \sin\varphi\, ds$.

Из этого уравнения получаем $(V_t)_1$ и, следовательно, само (V_t) на основании (12), откуда следуют те же заключения, что и выше.

Заметим, что если жидкость заключена в сосуд неподвижный, будем иметь $V_n = 0$ и, непосредственно, применяется уравнение (10).

Замечание I. Введение функций R и S позволяет легко определить в жидкости линии тока для каждого момента.

В самом деле, комбинация

$$\lg\frac{1}{r} - i \operatorname{arctg}\frac{y-y'}{x-x'} = k - i\theta$$

является аналитической функцией от $(x+iy)$ и, если мы положим:

$$Q = -\iint\limits_A \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right)\theta' d\sigma' + \int\limits_C (\alpha u' + \beta v')\theta' ds, \tag{13}$$

то ясно, что классические формулы

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{\partial\theta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial k}{\partial y} = +\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

позволят нам написать

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial x}, \tag{14}$$

так что формулы (6) смогут быть записаны:

$$2\pi u = \frac{\partial}{\partial y}(R - Q),$$

$$2\pi v = -\frac{\partial}{\partial x}(R - Q). \tag{15}$$

Заметим, что функция $R - Q$ является однозначной в A, хотя могло бы показаться, что это не так, в силу многозначности арктангенса. В самом деле, если взять для арктангенса два различных значения, то разность соответствующих значений $(R - Q)$ будет пропорциональна

$$\int\limits_C (\alpha u' + \beta v')\, ds' = \int\limits_C V_n ds',$$

количеству, равному очевидно нулю, в силу несжимаемости жидкости.

Из уравнений (15) следует непосредственно, что линии тока в момент t будут иметь уравнение:

$$R - Q = \text{const}.$$

Замечание II. Вполне понятно, что из уравнений (15), из факта, что $R - Q$ является гармонической функцией, нельзя заключить о равенстве нулю вихря внутри (A), так как в силу наличия особой точки $r = 0$, имеем внутри (A), как это следует из уже приведенной теоремы:

$$\Delta (Q - R) = 2\pi \cdot 2\zeta.$$

Уместно отметить, что функция, аналогичная Q —

$$P = \int\int\limits_A 2\zeta'\theta' d\sigma' + \int\limits_C (\beta u' + \alpha v')\, \theta' ds',$$

(которую мы также могли бы ввести) не является однозначной в области A.

Общая задача в трех измерениях для сосуда, находящегося в заданном движении. Вернемся теперь к задаче в трех измерениях. Мы увидим, что вопрос может быть решен аналогичным образом. Предположим сперва, что сосуд неподвижен. Формулы, дающие скорость в какой-нибудь точке жидкости, будут тогда, как мы видели, иметь следующий вид:

$$u = A + A_1, \ldots, \tag{1}$$

где через A обозначено выражение (функция заданных вихрей)

$$A = \frac{1}{2\pi} \int\int\int\limits_V \frac{\eta' (z - z') - \zeta' (y - y')}{r^3}\, d\tau', \ldots \tag{2}$$

и где положено:

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int\int\limits_S \frac{\beta' u' - \alpha' v'}{r}\, d\sigma' - \frac{\partial}{\partial z} \int\int\limits_S \frac{\alpha' w' - \gamma' u'}{r}\, d\sigma' \right). \tag{3}$$

Эти последние выражения зависят от еще неизвестных скоростей на стенке S: u', v', w'. Мы применим формулы (1) к точке m, находящейся на стенке S, но так как A_1, B_1, C_1 образованы при помощи частных производных от потенциалов простого слоя, мы должны вспомнить, что эти потенциалы $V = \int\int_S \frac{\delta}{r}\, d\sigma$ имеют нормальную производную, разрывную при переходе в обыкновенной точке через поверхность S, на которой располагается слой; величина скачка при переходе с внутренней стороны на наружную равна $4\pi\delta_m$, где δ_m означает плотность слоя в точке m, считая при этом, что нормаль направлена наружу; два значения, отличающиеся на $4\pi\delta_m$, суть предельные значения $\frac{dV}{dn}$, взятые соответственно в двух точках на нормали в m, очень близко друг от друга, когда мы заставляем и ту и другую стремиться к m.

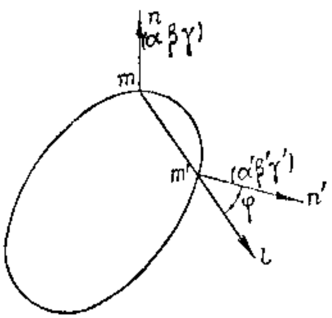

Рис. 7.

Если мы рассмотрим значения V и $\frac{dV}{dn}$, в ы ч и с л е н н ы е н е п о с р е д с т в е н н о в точке m, то новое выражение $\frac{dV}{dn}$ не совпадает ни с одним из предшествующих пределов, но (см. напр. E. Goursat, Analyse, t. III, n° 538) величина скачка при переходе от этого значения нормальной производной к одному из указанных предельных будет равна $2\pi\delta_m$.

Кроме того, тангенциальные производные, когда они существуют, что имеет место при весьма общих условиях (см. мемуар A. Petrini, Les dérivées premières et secondes du potentiel (Acta Mathematica 31, 1908, p. 127—332), непрерывны.

Отсюда следует, что частные производные по x, y, z, вычисленные в н у т р и и непосредственно н а поверхности S, обладают одни по отношению к другим разрывами, равными $2\pi\delta_m$, умноженными на $\cos\widehat{nx}$, $\cos\widehat{ny}$ или $\cos\widehat{nz}$. Из всего предшествующего мы заключаем, что если в формулах (1) мы заставим точку (x, y, z) стремиться (внутри сосуда) к точке m на поверхности S и если, с другой стороны, мы примем значения интегралов по поверхности, в ы ч и с л е н н ы е н е п о с р е д с т в е н н о на S, то мы получим следующую формулу вместе с ей аналогичными:

$$u = A + \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\int_S \frac{\beta' u' - \alpha' v'}{r}\, d\sigma' - \frac{\partial}{\partial z}\int\int_S \frac{\alpha' w' - \gamma' u'}{r}\, d\sigma'\right\} + \frac{1}{2}(\beta u - \alpha v)\beta - \frac{1}{2}(\alpha w - \gamma u)\gamma, \ldots \tag{4}$$

где (u, v, w) означает скорость в m, и где штрих указывает, что рассматриваемая величина относится к точке m', на которую распространяется интегрирование (рис. 7).

Введем направляющие косинусы

$$\alpha_1 = \frac{x' - x}{r}, \ldots$$

направления mm'; будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{r} = \int\int\limits_S \frac{\varepsilon' \beta_1}{r^2}\, d\sigma',$$

следовательно, после очевидных упрощений:

$$\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \alpha (\alpha u + \beta v + \gamma w) =$$

$$= A + \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_S \frac{\beta_1 (\beta' u' - \alpha' v') - \gamma_1 (\alpha' w' - \gamma' u')}{r^2}\, d\sigma', \tag{5}$$

или еще

$$\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \alpha (u\alpha + v\beta + w\gamma) =$$

$$= A + \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_S \frac{u' (\alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' + \gamma_1 \gamma) - \alpha' (u' \alpha_1 + v' \beta_1 + w' \gamma_1)}{r^2}\, d\sigma' \tag{6}$$

или, наконец:

$$\frac{1}{2} u = A + \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_S \frac{u' \cos\varphi - \alpha' V' \cos(V', l)}{r^2}\, d\sigma', \tag{7}$$

где $(u\alpha + v\beta + w\gamma)$ должно исчезнуть, так как скорость, нормальная к стенке неподвижного сосуда, равна нулю.

Мы получаем, таким образом, три уравнения этого вида, которые являются уравнениями Фредгольма, решаемыми классическими методами. Они позволят узнать скорость жидкости во всех точках стенки S, а затем формулы (1) определят скорости (u, v, w) во всякой точке в функции только вихрей, заданных во всякий момент.

Замечания: 1°. Только что примененный метод, перенесенный на случай двух измерений, даст следующие два уравнения (интеграция по z от $-\infty$ до $+\infty$ введет, как это хорошо известно, логарифмический потенциал, см. Appell, III, p. 116):

$$\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \alpha (u\alpha + v\beta) = A + \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{\beta_1 (\beta' u' - \alpha' v')}{r}\, ds',$$

$$\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \beta (u\alpha + v\beta) = B - \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{\alpha_1 (\beta' u' - \alpha' v')}{r}\, ds'.$$

Полагая $V_t = \alpha v - \beta u$, и учитывая, что $V_n = u\alpha + v\beta = 0$, получаем, путем очевидной комбинации

$$\frac{1}{2} V_t = B\alpha - A\beta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_C V_t' \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{r} \, ds',$$

уравнение, которое легко отождествить с уравнением Фредгольма прошлого параграфа, относящимся к плоской задаче.

2°. Чтобы дополнить приведенное изложение, следует еще убедиться, что полученные решения уравнения Фредгольма удовлетворят всем поставленным условиям и, именно, соотношению

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

на поверхности сосуда.

Мы увидим, что удобное преобразование метода, принадлежащее I. Delsarte'у (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Juin 1929), позволяет уточнить все желаемые детали.

Метод I. Delsarte'a. [1] Пусть (A) и (B) будут обозначать соответственно внутреннее и внешнее для сосуда пространство (поверхность сосуда S). Определим скорости u, v, w выражениями вида:

$$u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ldots \tag{8}$$

где

$$P = P_1 + P_2, \ldots$$

и

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int\int\int\limits_{(A)} \frac{\xi' d\tau'}{r}, \ldots \tag{9}$$

а P_2, Q_2 и R_2 потенциалы простого слоя, распространенные па S. Внутри (A) формулы (8) должны нам давать скорость жидкости; в (B), которую мы представим занятой покоящейся жидкостью, мы будем принимать для скоростей значение, равное везде нулю.

Если мы обозначим через M_1 и M_2 расхождения векторов P_1, Q_1, R_1 и P_2, Q_2, R_2, мы заметим прежде всего, что M_2 должно быть постоянным в (A) и в (B), причем значения этих двух постоянных могут быть различны.

В самом деле, рассмотрим в первую очередь, что происходит в (A). Мы должны иметь:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots$$

[1] *I. Delsarte* был любезен проредактировать лично текст настоящего параграфа, чтобы тем дополнить наше изложение.

но слагаемые, происходящие от P_1, Q_1, R_1 в выражениях u, v, w обеспечивают эти равенства. Мы должны иметь, следовательно, соотношение:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial M_2}{\partial x} - \Delta P_2 = \frac{\partial M_2}{\partial x}$$

и аналогичные. M_2 следовательно, постоянно в (A).

Рассмотрим теперь, что делается в (B); u, v, w там равны нулю, и можно написать:

$$P_1 + P_2 = \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots$$

Но P_1, $P_2 \ldots$ гармонические функции, следовательно:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial x} = \frac{\partial \Delta U}{\partial y} = \frac{\partial \Delta U}{\partial z} = 0$$

и ΔU постоянно в (B). Мы имеем:

$$M_2 = \Delta U,$$

так как M_1, как мы видели выше, везде равно нулю. Следовательно, M_2 постоянно в (B). Выпишем теперь наши потенциалы простых слоев:

$$P_2 = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{l' d\sigma'}{r}, \quad Q_2 = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{m' d\sigma'}{r}, \quad R_2 = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{n' d\sigma'}{r},$$

и вычислим M_2. Находим непосредственно, помещаясь в (A) или (B), но вне S:

$$M_2 = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1}{r^2}\, d\sigma',$$

где α_1, β_1, γ_1 обозначают направляющие косинусы полупрямой MM', соединяющей точку M, где вычисляется M_2, с переменной точкой M' на поверхности S. Но на S расхождение M_2 разрывно и мы без труда видим, что его предел, если итти снаружи, равен

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1}{r^2}\, d\sigma' - \frac{1}{2}(\alpha l + \beta m + \gamma n),$$

а если изнутри, то

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1}{r^2}\, d\sigma' + \frac{1}{2}(\alpha l + \beta m + \gamma n).$$

Так как эти два предела постоянны, то постоянна и их разность. Следовательно, количество

$$\rho = \alpha l + \beta m + \gamma n$$

постоянно на S. Я утверждаю, что можно предположить ρ равным нулю. В самом деле, напишем:

$$l = \bar{l} + \alpha\rho, \quad m = \bar{m} + \beta\rho, \quad n = \bar{n} + \gamma\rho$$

при

$$\alpha\bar{l} + \beta\bar{m} + \gamma\bar{n} = 0$$

и

$$P_2 = \frac{1}{4\pi} \int\int_S \frac{\bar{l}' d\sigma'}{r} + \frac{\rho}{4\pi} \int\int_S \frac{\alpha' d\sigma'}{r}, \ldots$$

Количества

$$\frac{\rho}{4\pi} \int\int_S \frac{\alpha' d\sigma'}{r}, \ldots \tag{10}$$

являются составляющими с измененным знаком $-\frac{\partial U}{\partial x}$, $-\frac{\partial U}{\partial y}$, $-\frac{\partial U}{\partial z}$ притяжения однородной массы плотности $\frac{\rho}{4\pi}$, расположенной внутри (A); соответственно потенциал будет равен:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int\int\int_A \frac{\rho d\tau'}{r}. \tag{11}$$

Но прибавление к P_2, Q_2, R_2 частных производных некоторой функции U, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta U = \text{const}$$

в (A) и в (B) не меняет значений u, v, w и только прибавляет постоянные к значениям M_2 в (A) и в (B). Мы сможем, следовательно, предположить:

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

При этих условиях функция M_2, гармоническая в A и в B, становится непрерывной при переходе через S и оказывается постоянной во всем пространстве.

Мы теперь в состоянии построить решение поставленной задачи.

Заметим прежде всего, что функция

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}, \ldots,$$

а также функции

$$\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}, \ldots,$$

гармонические в (B), и их значения должны быть противоположны, так как u, v, w равны там нулю. Но для того, чтобы функции, гармонические в B (обращающиеся в нуль на бесконечности), были противоположны в B, необходимо и достаточно, чтобы они были также противоположны на границе S, в силу непрерывности извне. Пусть A, B, C значения $\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}, \ldots$ на S (значения, непрерывные при переходе через S). Вычислим по непрерывности извне значения $\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}$ на S. Мы находим:

$$\left[\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}\right]_l = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{n'\beta_1 - m'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma' - \frac{1}{2}(n\beta - m\gamma),$$

откуда для определения l, m, n имеем систему уравнений Фредгольма:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(n\beta - m\gamma) = A + \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{n'\beta_1 - m'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Эта система сингулярная; в самом деле, однородная система

$$\left.\begin{array}{l}\nu\beta - \mu\gamma = \frac{1}{2\pi}\int\int_S \frac{\nu'\beta_1 - \mu'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (13)$$

допускает решения, отличные от нуля; эта однородная система могла бы быть удовлетворена тремя функциями p, q, r, дающими на S для $\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \ldots$ значения, равные нулю: p, q, r были бы тогда частные производные функции U, имея вид трех потенциалов простого слоя:

$$p = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{\lambda' d\sigma'}{r} \quad \ldots.$$

Но мы выше встречали подобные потенциалы [см. формулы (10) и (11)], которые получаются, если положить:

$$\lambda = \alpha;\ \mu = \beta;\ \nu = \gamma,$$

и которые являются тремя частными производными от

$$U = \frac{1}{4\pi}\int\int\int_A \frac{d\tau'}{r}.$$

Учитывая значения λ, μ, ν, видим, что имеются соотношения:

$$0 = \int\int_S \frac{\gamma'\beta_1 - \beta'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma' = \int\int_S \frac{\alpha'\gamma_1 - \gamma'\alpha_1}{r^2}\,d\sigma' = \int\int_S \frac{\beta'\alpha_1 - \alpha'\beta_1}{r^2}\,d\sigma'.$$

Согласно общей теории известно, что система Фредгольма невозможна при этих условиях, если A, B, C имеют произвольные значения, и имеется, напротив, бесчисленное множество решений, если A, B, C удовлетворяют условию, которое легко найти, вычисляя — принимая во внимание эту систему — интеграл:

$$\int\int_S (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\sigma.$$

Мы должны здесь вычислить четырехкратный интеграл:

$$\int\int_S\int\int_{S'} \frac{1}{r^2}\left\{l'(\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1) + m'(\alpha\gamma_1 - \gamma\alpha_1) + n'(\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1)\right\} d\sigma\, d\sigma',$$

распространенный дважды на поверхность S. Этот же интеграл равен нулю, так как двойные интегралы

$$\int\int_S \frac{1}{r^2}(\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1)\, d\sigma, \ \ldots$$

равны нулю.

Отсюда следует, что условие возможности имеет вид:

$$\int\int_S (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, d\sigma = 0.$$

Это же условие очевидно выполнено, ибо во всем пространстве

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Полученная система будет иметь бесчисленное множество решений вида:

$$l + \alpha\rho,\ m + \beta\rho,\ n + \gamma\rho,$$

где ρ произвольная постоянная. Мы находим предвиденный результат и, если прибавить к системе дополнительное условие:

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \tag{14}$$

то будем иметь только одно решение. Теперь легко удостовериться, что полученные таким же образом значения для P_2, Q_2, R_2 удовлетворяют всем поставленным условиям. Прежде всего, количества

$$A + \frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}, \ldots$$

обращаются в нуль внутри (B), как мы видели выше. Следовательно, M_2 постоянно в B. Но

$$M_2 = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1}{r^2}\, d\sigma',$$

гармоническая функция внутри (B) и (A) и кроме того непрерывная при переходе через S, так как $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$ на S. Мы видим, следовательно, что функция, гармоническая в (A),

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_S \frac{l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma',$$

постоянна на S, одинакова в силу непрерывности по обе стороны S, и потому постоянна всюду. Отсюда следует, что вектор с составляющими

$$u = \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}, \ldots$$

имеет вихрь, равный ξ, η, ζ в (A). Вычислим, наконец, составляющие u, v, w скорости на поверхности S, идя из области (A). Имеем:

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{4\pi}\int\int\limits_S \frac{n'\beta_1 - m'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma' + \frac{1}{2}(n\beta - m\gamma),$$

откуда на поверхности

$$u = A + \frac{1}{4\pi}\int\int\limits_S \frac{n'\beta_1 - m'\gamma_1}{r^2}\,d\sigma' + \frac{1}{2}(n\beta - m\gamma).$$

. . . .

или, принимая во внимание систему (12), которой удовлетворяют l, m, n, получаем:

$$\left.\begin{aligned} u &= n\beta - m\gamma, \\ v &= l\gamma - n\alpha, \\ w &= m\alpha - l\beta, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

что показывает, что скорость касательна к S во всякой точке этой поверхности. Далее, в силу уравнения (14), получаем из этих формул:

$$\left.\begin{aligned} l &= \gamma v - \beta w, \\ m &= \alpha w - \gamma u, \\ n &= \beta u - \alpha v, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

что придает потенциалам P_2, Q_2, R_2 форму Пуанкаре:

$$P_2 = \frac{1}{4\pi}\int\int\limits_S \frac{\gamma' v' - \beta' w'}{r}\,d\sigma',$$

где фигурируют скорости на поверхности, которые на этот раз известны.

Мы замечаем, что система уравнений Фредгольма настоящего параграфа [уравнения (12) и система уравнений (5) и (7) прошлого параграфа] выводятся друг из друга по формулам преобразования (15) или (16).

Случай движущегося сосуда. Случай движущегося сосуда (в трех измерениях) сводится к случаю сосуда неподвижного. Пусть, в самом деле, Ω вектор-вихрь в точке M жидкости в собственном движении последней, отнесенном к неподвижным осям, в то время как движение сосуда задано. Пусть ω вектор (p, q, r) мгновенного вращения сосуда в данный момент t; и пусть Ω_r вектор-вихрь, происходящий от относительных скоростей точек жидкости по отношению к сосуду.

Имеем соотношение:

$$(\Omega) = (\omega) + (\Omega_r).$$

Эта теорема может быть доказана вычислением: она становится очевидной, если вспомнить механический смысл вихря, рассматриваемого как вектор вращения маленькой сферы, отвердевшей и помещенной в точку M. Тогда мы приходим просто к теореме сложения вращений. Благодаря этому результату, знание истинных вихрей Ω, во всей массе, позволяет вычислять, во всякой точке, значение относительного вихря. Мы, таким образом, приходим к задаче, рассмотренной выше, где рассматривался случай неподвижного сосуда; и в самом деле, получается движение по отношению к сосуду. Раз это движение получено, остается сложить его с движением самого сосуда, что дает нам истинные скорости во всякой точке и во всякий момент, и притом только в функции вихрей (и движения твердой оболочки).

ГЛАВА III

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ. БЕСКОНЕЧНО ТОНКИЕ ВИХРИ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Изучение плоских движений. Бесконечно тонкие вихри. Мы рассмотрим в настоящей главе случай жидкости, заключенной в прямой цилиндр, параллельный Oz. Этот цилиндр имеет два основания, нормальные к Oz; все совершается совершенно одинаковым образом в любом сечении $z = \text{const}$, и мы можем вообразить жидкость неограниченной в направлении Oz, так что высота в наших рассуждениях не будет играть роли. Мы предпочтем в последующем именно эту последнюю интерпретацию, которая освободит нас от введения фиктивных вихревых слоев на двух плоскостях, в случае, если жидкость была бы ограничена.

Вихрь Ω сводится здесь к своей составляющей ζ:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

интенсивность трубки сечения $d\sigma$ равна

$$I = 2\Omega d\sigma, \text{ при } \Omega = \pm\zeta.$$

Мы напишем:

$$I = 2\zeta d\sigma,$$

уславливаясь давать интенсивности знак. Когда меняется t, трубка перемещается и деформируется, но $d\sigma$ и ζ остаются постоянными. В самом деле, рассмотрим кусочек трубки высотой h, его объем будет $hd\sigma$. Но трубка образована все время одними и теми же элементами и жидкость несжимаема, следовательно, $hd\sigma$ остается постоянным, а потому $d\sigma = \text{const}$. С другой стороны, — интенсивность трубки постоянна, согласно общим теоремам. Следовательно, ζ также постоянна (относительно t). Трубка конечного сечения сохраняет, следовательно, постоянное сечение, и всякий элемент там сохраняет свое значение ζ (перемещаясь, быть может, вместе с остальными).

Уравнение неразрывности сводится к

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Существует функция тока $\psi(x, y, t)$, и можно написать:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

$$-2\zeta = \Delta\psi;$$

ψ удовлетворяет, следовательно, этому последнему уравнению, где ζ равно нулю вне вихревых трубок и не равно 0 внутри (уже отмечена аналогия между ψ и логарифмическим потенциалом).

Пример. Бесконечно тонкая трубка в неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности. Пусть имеем единственную трубку интенсивности I, находящуюся в начальный момент в A, с сечением $d\sigma$.

В добавочную часть скорости элемента, находящегося в P (рис. 8), войдет слагаемое, перпендикулярное трубке и AP; оно, следовательно, в плоскости чертежа, нормально AP и имеет направление такое, чтобы вращение ζ стремилось увлечь точку P.

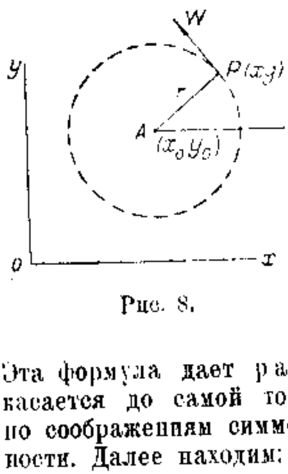

Рис. 8.

Чтобы вычислить скорость W, подсчитаем циркуляцию вдоль окружности AP. Эта циркуляция $2\pi r W$ имеет одинаковое значение вдоль всякой замкнутой линии, окружающей R; она равна в точности интенсивности $2\zeta d\sigma = I$. Следовательно,

$$W = \frac{I}{2\pi r}.$$

Эта формула дает распределение скоростей вокруг A. Что касается до самой точки A, то очевидно она остается неподвижной, по соображениям симметрии, так как жидкость покоится на бесконечности. Далее находим:

$$u = \frac{-I}{2\pi}\,\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \qquad v = \frac{I}{2\pi}\,\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Вне A существует, следовательно, потенциал φ и функция тока ψ, заданные равенствами:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{I}{2\pi}\theta,$$

$$\psi = -\frac{I}{2\pi}\lg\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = -\frac{I}{2\pi}\lg r,$$

откуда комплексный потенциал

$$\chi = \varphi + i\psi = \frac{I}{2i\pi} \lg [x - x_0] + i(y - y_0)],$$

$$\varphi + i\psi = \frac{I}{2i\pi} \lg (z - z_0)$$

$$\begin{pmatrix} z_0 = x_0 + iy_0 \\ z = x + iy \end{pmatrix}.$$

Диференцированием по z этого последнего уравнения получаем комплексную скорость:

$$u - iv = \frac{I}{2i\pi} \frac{1}{z - z_0} = \frac{d\chi}{dz}.$$

Обобщение для многих трубок. Мы все время будем предполагать, что жидкость покоится на бесконечности.

Если имеется несколько бесконечно тонких трубок A_k с интенсивностями I_k (исчисляемыми алгебраически, как и выше, и неизменяемыми, как мы это видели), то, так как скорость частицы является результирующей скоростей, происходящих от каждой A_k, то находим для комплексного потенциала и комплексной скорости в (x, y) выражения:

$$\varphi + i\psi = \frac{1}{2i\pi} \sum_k I_k \lg (z - z_k)$$

$$u - iv = \frac{1}{2i\pi} \sum_k \frac{I_k}{z - z_k}.$$

Движение вихревых трубок. Рассмотрим трубку A_1. Скорость $\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}\right)$ происходит от вихрей $A_2, A_3, \ldots$ и может быть от самого вихря A_1. Но этот последний, если бы он был единственным, оставался бы неподвижным; следовательно, скорость, происходящая от самого вихря, отсутствует, и мы просто будем иметь:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}; \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},$$

где положено

$$\psi_1 = -\frac{1}{2\pi} (I_2 \lg r_{12} + I_3 \lg r_{13} + \ldots),$$

при обозначениях, которые понятны сами по себе.

Если положить:

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum \sum I_h I_k \lg r_{hk},$$

то мы видим, что

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = I_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial H}{\partial y_1} = I_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}.$$

Следовательно, имеем уравнения движения трубок в виде:

$$I_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad I_1 \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1},$$

$$I_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad I_2 \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}.$$

Это, с точностью до незначительной детали (которая устраняется, если положить $S_k = I_k y_k$), суть **канонические уравнения**. Легко заметить некоторые простые свойства функции H; она зависит только от **относительных расстояний** r_{hk}. Она остается, следовательно, неизменной **при всяком перемещении, сохраняющем эти расстояния** r_{hk}. Совершим малое перемещение всей системы в целом параллельно оси Ox (все x возрастут на δx): H при этом остается неизменной, и мы имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} + \ldots = 0,$$

и также

$$\frac{\partial H}{\partial y_1} + \frac{\partial H}{\partial y_2} + \ldots = 0.$$

Заставим повернуться всю систему в целом на угол θ вокруг точки O,

$$\delta x = -y\delta\theta, \quad \delta y = x\delta\theta.$$

H должно остаться неизменным, и мы будем иметь:

$$\left(-y_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial H}{\partial y_1}\right) + \left(-y_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial H}{\partial y_2}\right) + \ldots = 0.$$

Наконец, предположим, что все x и y заменены на λx и λy, r_{hk} умножится тогда на λ, и мы получим:

$$H(\lambda x_1, \lambda y_1, \ldots) = H(x_1, y_1, \ldots) - \frac{\lg \lambda}{2\pi} \sum I_h I_k.$$

Диференцируя по λ и полагая $\lambda = 1$, будем иметь:

$$x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial H}{\partial y_1} + \ldots = -\frac{1}{2\pi} \sum I_h I_k.$$

Следствия: **Центр тяжести трубок неподвижен.** Вообразим на минуту, что интенсивности в точках A_k заменены равными им фиктивными массами. Их центр тяжести найдется по формуле:

$$x_0 \sum I_k = \sum x_k I_k, \ldots$$

Эта точка G будет существовать, если только $\sum I_k \neq 0$, и мы будем иметь:

$$\left(\sum I_k\right) \frac{dx_0}{dt} = \sum I_k \frac{dx_k}{dt} = \sum \frac{\partial H}{\partial y_k} = 0.$$

Следовательно, $x_0 = \text{const}, \ldots$

Заметим, что если $\sum I_k = 0$, тем не менее, будем иметь уравнение:

$$\sum I_k \frac{dx_k}{dt} = 0,$$

т. е.

$$\sum I_k x_k = \text{const},$$

и также

$$\sum I_k y_k = \text{const}.$$

Сумма моментов инерции относительно оси Oz масс I_k равна постоянной.

Так как

$$\frac{d}{dt}\left[\sum I_k (x_k^2 + y_k^2)\right] = 2\sum I_k \left(x_k \frac{dx_k}{dt} + y_k \frac{dy_k}{dt}\right) =$$

$$= 2\sum \left(x_k \frac{\partial H}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial H}{\partial x_k}\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Функция H остается постоянной.

Так как

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \ldots = \frac{\partial H}{\partial x_1} \left(\frac{1}{I_1} \frac{\partial H}{\partial y_1}\right) +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial y_1} \left(-\frac{1}{I_1} \frac{\partial H}{\partial x_1}\right) + \ldots = 0.$$

Сумма моментов количеств движения относительно Oz остается постоянной.

Так как

$$\sum I_k \left(x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt}\right) = -\sum \left(x_k \frac{\partial H}{\partial x_k} + y_k \frac{\partial H}{\partial y_k}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum I_k I_k.$$

Пример. Две вихревые трубки A_1 и A_2 с интенсивностями I_1 и I_2. Здесь

$$H = -\frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi} \lg r_{12}.$$

H является постоянной и, следовательно, r_{12} тоже. Пусть $I_1 + I_2 \neq 0$. Тогда точка G существует и неподвижна: $\frac{GA_1}{I_1} = -\frac{GA_2}{I_2} = \frac{A_1 A_2}{I_1 + I_2}$. Длины GA_1 и GA_2 тогда также постоянны, точки A_1 и A_2 перемещаются по неподвижным окружностям с центром G. Сумма моментов количеств движения относительно G является постоянной, A_1 и A_2 вращаются равномерно вокруг G.

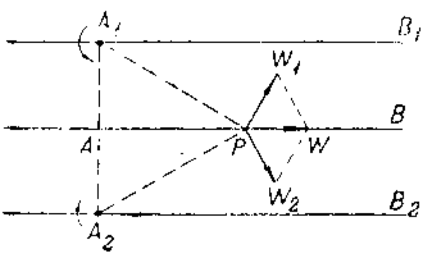

Рис. 9.

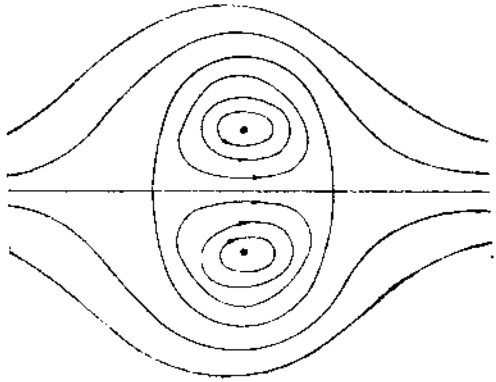

Рис. 10.

Если $I_1 + I_2 = 0$, то уравнения, относящиеся к центру тяжести, будут иметь вид:

$$I_1\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = 0, \ldots$$

они показывают, что $A_1 A_2$ постоянно по величине и направлению, точка G уйдет в бесконечность по направлению $A_1 A_2$, а точки A_1 и A_2 опишут с равными скоростями две параллельные прямые (нормальные к $A_1 A_2$); общая величина скорости будет равна

$$V = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{A_1 A_2},$$

где I абсолютная величина обеих интенсивностей. Частица P, расположенная на оси симметрии AB имеет скорость, равную геометрической сумме скоростей W_1 и W_2 (см. рис. 9), причем

$$W_1 = W_2 = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{PA_1} \left(\text{или } \frac{1}{PA_2}\right).$$

Разультирующая скорость W направлена, следовательно, по AB. В частности, частица, помещенная в A, будет иметь скорость

$$V_1 = 2\,\frac{I}{\pi}\,\frac{1}{AA_1} = \frac{2I}{\pi A_1 A_2} = 4V,$$

т. е. учетверенную скорость перемещения вихрей.

Атмосфера вихревой трубки (Lord Kelvin, Proceedings R. S. Edinb., 1867). Всякую вихревую трубку сопровождает некоторое количество безвихревой жидкости, которая образует как бы атмосферу трубки. Это очевидно на предыдущем примере. Согласно сделанному замечанию, существует место точек, где скорость жидкости имеет составляющую, параллельную AB и равную V. Полученная на рис. 10 кривая ограничивает атмосферу. Начерчены линии тока по отношению к осям, связанным вихрями.

ГЛАВА IV

ВИХРИ БЕНАРА-КАРМАНА. РЕГУЛЯРНАЯ ЦЕПОЧКА. ДВЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПОЧКИ. ДВЕ АЛЬТЕРНИРОВАННЫЕ ЦЕПОЧКИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭТИХ КОНФИГУРАЦИЙ

Вихри Бенара-Кармана и регулярные вихревые конфигурации. Мы уже видели выше, что если рассматривать движения плоские, с бесконечно тонкими вихревыми нитями (прямолинейные и вихревые нити перпендикулярны рассматриваемой плоскости xOy и жидкость можно считать либо бесконечной в направлении Oz, либо ограниченной двумя плоскостями $z = \text{const}$), то скорость жидкой частицы, происходящая от наличия вихря интенсивности I, определяется из равенства

$$u - iv = \frac{I}{2\pi i}\,\frac{1}{z - z_0},$$

где z_0 — аффикс этого вихря. Существует потенциал и функция тока, определенные вне вихря при помощи комплексного потенциала

$$\chi = \varphi + i\psi = \frac{I}{2i\pi}\,\lg(z - z_0),$$

в предположении, что скорость равна нулю на бесконечности (в противном случае, мы можем всегда наложить на рассматриваемое движение поступательное движение жидкости в целом), так что имеем:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

и кроме того

$$u - iv = \frac{d\chi}{dz}.$$

В случае, когда имеется несколько вихрей, достаточно просуммировать соответствующие функции. Чтобы получить скорость перемещения какого-нибудь отдельного вихря, достаточно применять вышеприведенные формулы, исключая при этом член, соответствующий изучаемому вихрю.

Функция $\frac{d\chi}{dz}$, соответствующая такому вихревому состоянию, происходящая от наличия точечных вихрей, будет, следовательно,

$$\frac{1}{2i\pi}\sum\frac{I_k}{z-z_k}. \tag{1}$$

Эта функция характеризуется тем, что она обращается в нуль на бесконечности и имеет особенностями простые полюсы z_k с главной частью $\frac{I_k}{2i\pi(z-z_k)}$. Ясно, что этими условиями функция $\frac{d\chi}{dz}$ определяется вполне, по крайней мере, если жидкой областью служит вся плоскость, так как, если из нее вычесть главные части, соответствующие полюсам, то разность, регулярная всюду и обращающаяся в нуль на бесконечности, сводится к постоянной и, следовательно, равна нулю, т. е. значению этой постоянной на бесконечности.

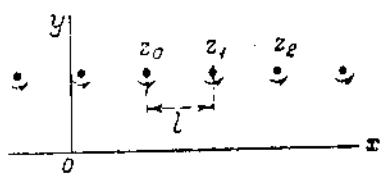

Рис. 11.

Этот результат легко распространяется и на случай, когда число вихрей бесконечно при соблюдении, если надо, необходимых предосторожностей, обеспечивающих сходимость рядов, аналогичных (1), путем надлежащего преобразования каждого члена.

Бесконечная вихревая цепочка. Пусть, например, имеем следующую конфигурацию (рис. 11), образованную бесконечной последовательностью вихрей, равных и одинакового направления (интенсивности I). Здесь имеем:

$$z_k = z_0 + kl.$$

Ряд $\sum\frac{1}{z-z_k}$ не будет сходящимся, но сделается таким, если сгруппировать члены, соответствующие k и $-k$, т. е. если соединить вихри, равноудаленные от z_0 (без этой предосторожности результат не будет определенным); тогда имеем:

$$u - iv = \frac{I}{2i\pi}\left[\frac{1}{z-z_0} + \sum_1^\infty\left(\frac{1}{z-z_0-kl} + \frac{1}{z-z_0+kl}\right)\right].$$

Найдем собственную скорость перемещения вихря, например, вихря z_0. Очевидно имеем:

$$(u-iv)_0 = \frac{I}{2i\pi}\lim_{z\to z_0}\sum\left(\frac{1}{z-z_0-kl} + \frac{1}{z-z_0+kl}\right) =$$
$$= \frac{I}{2i\pi}\lim_{z\to z_0}\sum\frac{2(z-z_0)}{(z-z_0)^2-k^2l^2} = 0, \tag{2}$$

что является почти очевидным по соображениям симметрии.

Соответствующая конфигурация неустойчива. Зададим конфигурацию, очень близкую к данной, причем вихрь к моменту t перемещается на малую величину $\delta z_k = \xi_k + i\eta_k$. Исследуем, будет ли система иметь тенденцию вернуться к начальному состоянию. Согласно уравнению (2), написанному в виде

$$(u - iv)_0 = \frac{I}{2i\pi} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{z_0 - z_k} + \frac{1}{z_0 - z_{-k}} \right),$$

имеем уравнение в вариациях:

$$\frac{2i\pi}{I} (\delta u_0 - i\delta v_0) = \sum_1^\infty \left[\frac{\delta z_k - \delta z_0}{(z_0 - z_k)^2} + \frac{\delta z_{-k} - \delta z_0}{(z_0 - z_{-k})^2} \right]$$

и, следовательно:

$$\frac{2\pi}{I} \left(\frac{d\eta_0}{dt} + i \frac{d\xi_0}{dt} \right) = \sum_1^\infty \left[\frac{\xi_k + i\eta_k - \xi_0 - i\eta_0}{k^2 l^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi_{-k} + i\eta_{-k} - \xi_0 - i\eta_0}{k^2 l^2} \right], \tag{3}$$

Таким образом, имеем для всякого вихря уравнение, аналогичное (3) и эквивалентное д в у м обыкновенным диференциальным уравнениям. Известно, что

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Не изучая полностью систему бесконечного числа уравнений, с бесконечным числом неизвестных, посмотрим, не допускает ли эта система решения частного вида:

$$\begin{aligned} \xi_k &= M e^{i\omega(\lambda t + x_k)}, \\ \eta_k &= iN e^{i\omega(\lambda t + x_k)}, \end{aligned} \tag{4}$$

ω и λ, а также M и N постоянные. Условимся в правых частях сохранять только вещественные части. Уравнения

$$\frac{2\pi}{l} \frac{d\xi_0}{dt} = \sum_1^\infty \frac{\eta_k + \eta_{-k}}{k^2 l^2} - \frac{\pi^2}{3l^2} \eta_0,$$

$$\frac{2\pi}{I} \frac{d\eta_0}{dt} = \sum_1^\infty \frac{\xi_k + \xi_{-k}}{k^2 l^2} - \frac{\pi^2}{3l^2} \xi_0,$$

после сокращения очевидных множителей примут вид:

$$+\frac{2\pi\omega\lambda l^2}{l} M = N\left[2\sum_1^\infty\left(\frac{\cos\omega kl}{k^2}\right)-\frac{\pi^2}{3}\right],$$

$$-\frac{2\pi\omega\lambda l^2}{l} N = M\left[2\sum_1^\infty\left(\frac{\cos\omega kl}{k^2}\right)-\frac{\pi^2}{3}\right],$$

откуда

$$\left[2\sum_1^\infty\left(\frac{\cos\omega kl}{k^2}\right)-\frac{\pi^2}{3}\right]^2+\frac{4\pi^2\omega^2\lambda^2 l^4}{l^2}=0.$$

Зададимся ω вещественным, тогда λ число мнимое, так как все содержимое скобок вещественно; известно, что для $-\pi < x < \pi$ имеем разложение в тригонометрический ряд:

$$\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}=\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}.$$

Следовательно, заменяя x на $\pi - x$, имеем для $0 < x < 2\pi$

$$\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\pi-x)^2}{4}=-\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots\right),$$

и для $0 < \omega l < 2\pi$ количество, написанное в скобках, может быть написано:

$$\frac{(\pi-\omega l)^2}{2}-\frac{\pi^2}{2};$$

λ, следовательно, чисто мнимое, кроме случая $\omega = 0$, когда λ также равно нулю. Отсюда следует, что существует сколько угодно перемещений вида (4), для которых λ чисто мнимое. Эти перемещения не исчезнут, следовательно, для бесконечного t. Значит изучаемая конфигурация **неустойчива** и не сохраняется во времени. Отсюда еще не следует, что не существуют такие частные начальные условия, и даже в бесчисленном множестве, для которых перемещения будут оставаться сколь угодно малыми. Но существуют другие, для которых нет возможного затухания, что мы и характеризуем, называя конфигурацию неустойчивой.

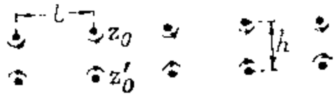

Рис. 13.

Две параллельные цепочки. Предшествующее расположение вихрей не является столь важным для приложений, как расположение в виде двух цепочек, как оно встретилось в опытах Бенара позади движущихся препятствий. Рассмотрим возможные расположения, не заботясь о выяснении их происхождения.

Ниже мы изучим два расположения, одно **симметричное**, другое — **асимметричное** или **альтернированное**.

Вихри имеют одинаковую интенсивность по абсолютной величине, но противоположные знаки в двух цепочках. Расстояние между цепочками h, а между соседними вихрями одной цепочки l. Ясно, что, беря за исходные вихри в двух цепочках z_0 и z'_0 и полагая

$z'_0 = z_0 - ih$, в случае симметричного расположения (рис. 12),

$z'_0 = z_0 - \dfrac{l}{2} - ih$, в случае асимметричного (рис. 13),

можно написать комплексный потенциал

$$\chi = \frac{I}{2i\pi} \lg \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{(z-z_0)\,[(z-z_0)^2-l^2]\,[(z-z_0)^2-4l^2]\dots[(z-z_0)^2-k^2l^2]}{(z-z'_0)\,[(z-z'_0)^2-l^2]\dots[(z-z'_0)^2-k^2l^2]} \right\}$$

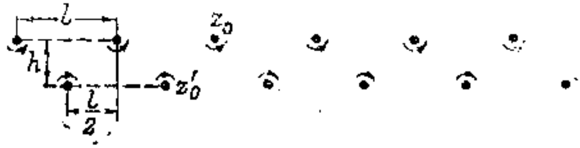

Рис. 13.

после попарной группировки вихрей, как и в предшествующем примере; имеем еще:

$$\chi = \frac{I}{2i\pi} \lg \left\{ \frac{\left(\dfrac{z-z_0}{l}\right)\left[1-\dfrac{(z-z_0)^2}{l^2}\right]\dots\left[1-\dfrac{(z-z_0)^2}{k^2l^2}\right]\dots}{\left(\dfrac{z-z'_0}{l}\right)\left[1-\dfrac{(z-z'_0)^2}{l^2}\right]\dots\left[1-\dfrac{(z-z'_0)^2}{k^2l^2}\right]\dots} \right\}$$

и, следовательно, по классической формуле:

$$\sin x = x\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$\chi = \frac{I}{2i\pi} \lg \frac{\sin\dfrac{\pi}{l}(z-z_0)}{\sin\dfrac{\pi}{l}(z-z'_0)}.$$

Скорость вихрей. Вычислим теперь скорости вихрей в каждой конфигурации. Для этого достаточно воспользоваться формулой

$$u - iv = \frac{d\chi}{dz}$$

исключая предварительно в $\frac{d\chi}{dz}$ член, соответствующий рассматриваемому вихрю. Займемся, например, вихрем, помещенным в (z_0). Имеем:

$$\frac{2i\pi}{I}(u-iv)_0=\lim_{z=z_0}\left[\frac{\pi}{l}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0)-\frac{1}{z-z_0}-\frac{\pi}{l}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z'_0)\right] \text{(A)}.$$

Непосредственно же имеем

$$\frac{\pi}{l}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0)=\frac{1}{z-z_0}[1+O(z-z_0)^2].$$

Следовательно:

$$\frac{2i\pi}{I}(u_0-iv_0)=-\frac{\pi}{l}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_0-z'_0),$$

т. е. для случая симметрии $(z'_0=z_0-ih)$

$$v_0=0,\quad u_0=\frac{I}{2l}\operatorname{ctgh}\frac{\pi h}{l},$$

и для случая асимметрии $\left(z_0'=z_0-\frac{l}{2}-ih\right)$

$$v_0=0,\quad u_0=\frac{I}{2l}\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l}.$$

В силу симметрии естественно, что тот же результат будет найден для любого вихря системы. Отсюда ясно, что конфигурации из двух параллельных цепочек являются перманентными **конфигурациями**, которые увлекаются в направлении Ox с постоянной скоростью u_0.

Устойчивость. Устойчивы ли эти конфигурации? Поставленная задача была впервые решена Ламбом (H. Lamb, Hydrodynamics, 5-e edition, p. 208). Раньше ее рассматривали Карман и Рубах (Nachrichte der K. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen, 1912; Physikalische Zeitschrift, 1912), которые имели в виду упростить вопрос допущением, что все вихри в совокупности перемещаются со скоростью u_0 и не могут быть выведены из строя **кроме одного**, который может покинуть свое относительное положение, а также имели в виду отыскать условия, чтобы этот вихрь, предполагаемый свободным, остался сколь угодно близким к своему начальному положению в цепочке, к которой он принадлежит, если допустить его слегка смещенным.

Например, рассмотрим вихрь, помещенный в z_0 и пусть $\delta z_0=\xi_0+i\eta_0$ есть малое относительное смещение, испытанное его центром в момент t, где мы отвлекаемся от общего перемещения u_0. Согласно формуле (A), имеем для скорости (u_0, v_0) вихря z_0:

$$u_0-iv_0=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{I}{2il}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0')\right]-\frac{I}{2i\pi(z-z_0)}\right\},$$

или, заменяя котангенс его известным разложением

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{x+k\pi}\right)$$

(см. Гурса, Курс математического анализа, т. II):

$$u_0 - iv_0 = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{I}{2i\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_0-kl} + \frac{1}{z-z_0+kl}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{I}{2il}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0')\right],$$

т. е.

$$u_0 - iv_0 = \frac{I}{2i\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{z_0-z_k} + \frac{1}{z_0-z_{-k}}\right) - \frac{I}{2il}\operatorname{ctg}\frac{\pi(z_0-z_0')}{l}.$$

Заменяем z_0 через $z_0+\delta z_0$, находим для приращения $u_0 - iv_0$:

$$\frac{d\xi_0}{dt} - i\frac{d\eta_0}{dt} = -\frac{I}{2i\pi}2\delta z_0\sum_{1}\frac{1}{k^2l^2} + \frac{I}{2il}\,\frac{\pi}{l}\,\frac{\delta z_0}{\sin^2\frac{\pi}{l}(z_0-z_0')}.$$

Мы имеем классическую формулу

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

следовательно,

$$\frac{d\xi_0}{dt} - i\frac{d\eta_0}{dt} = \frac{iI\pi}{2l^2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{l}(z_0-z_0')}\right](\xi_0+i\eta_0).$$

Но для случая симметрии имеем:

$$\sin^2\frac{\pi}{l}(z_0-z_0') = -\sinh^2\frac{\pi h}{l},$$

и в случае альтернированного расположения;

$$\sin^2\frac{\pi}{l}(z_0-z_0') = \cosh^2\frac{\pi h}{l},$$

В первом случае имеем:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{I}{2l^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right)\eta_0;\quad \frac{d\eta_0}{dt} = -\frac{I\pi}{2l^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right)\xi_0,$$

т. е.

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\omega\eta_0; \quad \frac{d\eta_0}{dt} = -\omega\xi_0,$$

откуда следует, что интегрирование вводит члены с $e^{\omega t}$ и $e^{-\omega t}$ и, следовательно, вихрь неустойчив.

Во втором случае, наоборот, имеем систему того же вида, но

$$\omega = \frac{I\pi}{2l^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}\right),$$

откуда следует, что вихрь будет вообще тоже неустойчив, но может сделаться и устойчивым, если выбрать $\frac{h}{l}$ так, что

$$\cosh\frac{\pi h}{l} = \sqrt{3}.$$

Предположение, что выводится из строя лишь один вихрь, разумеется, не имеет физически практического значения и, казалось бы, полученное заключение следовало бы отбросить, но мы, однако, будем дальше развивать полученные вычисления, так как они позволяют упростить дальнейшие рассуждения. Жуковский (Aérodynamique, p. 212 и след.) пытался отсюда сделать вывод, что альтернированная конфигурация будет устойчивой, если это условие осуществлено, и неустойчивой во всяком другом случае, симметричная же конфигурация всегда неустойчива. Но эти рассуждения неточны, так же как и сделанные им из них выводы. Мы снова исследуем этот вопрос, рассматривая две вихревые цепочки, альтернированные в начале, и предполагая, что каждый из вихрей может сместиться относительно своего начального положения. Мы назовем δz_k и $\delta z_k'$ соответствующие смещения ($\delta z_k = \xi_k + i\eta_k$) и поищем уравнения, определяющие, например, смещение вихря, находившегося в начальный момент t в z_0. Исходным пунктом все время будет служить уравнение (A), дающее (u_0, v_0), которое мы запишем в следующем виде:

$$\frac{2i\pi}{l}(u_0 - iv_0) = \lim_{z=z_0}\left\{\sum_1^\infty\left(\frac{1}{z-z_0-kl} + \frac{1}{z-z_0+kl}\right) - \frac{1}{z-z_0'} - \right.$$
$$\left. - \sum_1^\infty\left(\frac{1}{z-z_0'-kl} + \frac{1}{z-z_0'+kl}\right)\right\},$$

т. е.

$$\frac{2\pi}{l}(v_0 + iu_0) = \sum_1^\infty\left(\frac{1}{z_0-z_k} + \frac{1}{z_0-z_{-k}}\right) - \frac{1}{z_0-z_0'} -$$
$$-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{z_0-z_k'} + \frac{1}{z_0-z'_{-k}}\right).$$

Возьмем уравнение в вариациях; мы получаем:

$$\frac{2\pi}{I}\left(\frac{d\eta_0}{dt}+i\,\frac{d\xi_0}{dt}\right)=\sum_1^\infty\left(\frac{\delta z_k-\delta z_0}{(z_0-z_k)^2}+\frac{\delta z_{-k}-\delta z_0}{(z_0-z_{-k})^2}\right)+$$

$$+\frac{\delta z_0-\delta z_0'}{(z_0-z_0')^2}+\sum_1^\infty\left(\frac{\delta z_0-\delta z'_k}{(z_0-z'_k)^2}+\frac{\delta z_0-\delta z'_{-k}}{(z_0-z'_{-k})^2}\right). \qquad (1)$$

Но

$$z_0-z_k=-kl,\quad z_0-z_{-k}=+kl$$

$$z_0'=z_0-\frac{l}{2}-ih,$$

$$z_0-z'_k=\frac{l}{2}+ih-kl;\ \frac{1}{(z_0-z'_k)^2}=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2+2ihl\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right]^2}.$$

Коэфициент при δz_0 в правой части (1) будет тогда

$$-\frac{2}{l^2}\sum_1^\infty\frac{1}{k^2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)l-ih\right]^2}.$$

Он равен вычисленному уже выше коэфициенту, **если мы варьируем только** z_0. Мы согласуем эти результаты следующим образом.

Прежде всего $\sum\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

С другой стороны, формула

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-k\pi)^2},$$

которая получается путем диференцирования из разложения $\operatorname{ctg} x$, нам дает:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)l-ih\right]^2}=\frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{1}{\sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2ih}{l}\right)\right]}=\frac{\pi^2}{l^2\operatorname{ctgh}^2\frac{\pi h}{l}}.$$

Находим, следовательно, коэфициент при δz_0, который равен

$$-\frac{\pi^2}{3l^2}+\frac{\pi^2}{l^2\cosh^2\frac{\pi h}{l}}.$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{2\pi}{I}\left(\frac{d\eta_0}{dt}+i\,\frac{d\xi_0}{dt}\right)=\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}-\frac{1}{3}\right)(\xi_0+i\eta_0)+$$

$$+\frac{1}{l^2}\sum_1^\infty\frac{\delta z_k+\delta z_{-k}}{k^2}-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2+2ihl\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right]^2}\,\delta z'_k. \tag{1'}$$

В последней $\sum$ можно заменить $\sum\limits_{-\infty}^{0}$ на $\sum\limits_{1}^{\infty}$, заменяя k через $-(k-1)$, и получить, отделяя вещественную часть от мнимой:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\pi}{I}\,\frac{d\xi_0}{dt}&=\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}-\frac{1}{3}\right)\eta_0+\frac{1}{l^2}\sum_1^\infty\frac{\eta_k+\eta_{-k}}{k^2}-\\
&\quad-2hl\sum_1^\infty\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)(\xi'_k-\xi'_{-(k-1)})}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right]^2}-\\
&\quad-\sum_1^\infty\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right]^2}\,(\eta'_k+\eta'_{-(k-1)}),\\
\frac{2\pi}{I}\,\frac{d\eta_0}{dt}&=\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}-\frac{1}{3}\right)\xi_0+\frac{1}{l^2}\sum_1^\infty\frac{\xi_k+\xi_{-k}}{k^2}+\\
&\quad+2hl\sum_1^\infty\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)(\eta_k-\eta_{-(k-1)})}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right]^2}-\\
&\quad-\sum_1^\infty\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2-h^2}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2l^2+h^2\right]^2}\,(\xi'_k+\xi'_{-(k-1)}).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Получится столько групп таких уравнений, сколько вихрей в первой цепочке. Что касается вихрей второй цепочки, то они порождают аналогичные уравнения и, в частности, те, которые соответствуют вихрю, помещенному в z_0', получатся совершенно так же, как и предшествующие

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\pi}{l}\frac{d\xi_0'}{dt} &= \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}\right)\eta_0' - \frac{1}{l^2}\sum_1^\infty \frac{\eta'_k+\eta'_{-k}}{k^2} - \\
&- 2hl\sum_0^\infty \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)(\xi_k-\xi_{-(k+1)})}{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2} + \\
&+ \sum_0^\infty \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2-h^2}{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}(\eta_k+\eta_{-(k+1)}), \\
\frac{2\pi}{l}\frac{d\eta_0'}{dt} &= \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}\right)\xi_0' - \frac{1}{l^2}\sum \frac{\xi_k+\xi_{-k}}{k^2} + \\
&+ 2hl\sum_0^\infty \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)(\eta_k-\eta_{-(k+1)})}{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2} + \\
&+ \sum_0^\infty \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2-h^2}{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}(\xi_k+\xi_{-(k+1)}).
\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Переход от предшествующих уравнений к этим совершается заменой I на $-I$, (ξ, η) на (ξ', η'), h и l на $-h$ и $-l$. Замена $(z_0 - z'_k)$ на $(z_0' - z_k)$ вводит $\left(k+\frac{1}{2}\right)l$ вместо $\left(k-\frac{1}{2}\right)l$ в соответствующих членах. Новые $\sum$ пойдут от 0 до $+\infty$ после соединения значений k и $-(k+1)$. Очевидно, можно написать, вместо

$$\sum_0 \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)(\xi_k-\xi_{-(k+1)})}{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}\cdots,$$

$$\sum_1 \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)(\xi_{(k-1)}-\xi_{-k})}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}\cdots.$$

Получаем таким образом бесчисленное множество диференциальных уравнений с бесчисленным множеством неизвестных; эти уравнения линейные однородные и с постоянными коэфициентами. Они легко могут быть сведены к обыкновенным линейным уравнениям с бесконечным числом неизвестных, которые могут быть исследованы по методам Fr. Riesz'a (см. его книгу: Les systèmes d'équations linéaires à une infinite d'inconnues, Collection E. Borel).

Основываясь на формуле Фурье

$$\pi f(x) = \int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u\,(t - x)\, f(t)\, dt,$$

получаем очень общие решения посредством линейных комбинаций, образованных из периодических деформаций следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= Me^{i\omega(\lambda t + x_k)}, \qquad & \xi_k' &= M'e^{i\omega(\lambda t + x_k')}, \\ \eta_k &= iNe^{i\omega(\lambda t + x_k)}, \qquad & \eta_k' &= iN'e^{i\omega(\lambda t + x_k')} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$
$$\left(x_0' = x_0 - \frac{l}{2}, \quad x_k = x_0 + kl, \ldots \right),$$

где M, N, M', N' являются постоянными и где условимся брать только вещественную часть выражений, стоящих в правой части. Перенося выражения (4) во (2) и (3) мы получим, отбрасывая множитель $e^{i\omega(\lambda t + x_0)}$ во (2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{l}\omega\lambda M &= \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{3}\right)N + \frac{2N}{l^2}\sum_1 \frac{\cos \omega kl}{k^2} - \\ &- 4hlM' \sum_1^\infty \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega l}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} - \\ &- 2N' \sum_1^\infty \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 - h^2}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega l, \\ -\frac{2\pi}{l}\omega\lambda N &= \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{3}\right)M + \frac{2M}{l^2}\sum_1 \frac{\cos \omega kl}{k^2} \\ &- 4hlN' \sum_1 \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega l}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} - \\ &- 2M' \sum^\infty \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 - h^2}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 l^2 + h^2\right]^2} \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega l; \end{aligned}\right| \tag{2'}$$

Отбрасывая же множитель $e^{i\omega(\lambda t+x_0')}$ в (3), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\pi}{I}\omega\lambda M' &= -\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}-\frac{1}{3}\right)N' - \frac{2N'}{l^2}\sum_1\frac{\cos\omega kl}{k^2} - \\
&\quad - 4hlM\sum_1\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega l}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2} + \\
&\quad + 2N\sum_1\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2-h^2}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega l, \\
-\frac{2\pi}{I}\omega\lambda N' &= -\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}-\frac{1}{3}\right)M' - \frac{2M'}{l^2}\sum_1\frac{\cos\omega kl}{k^2} - \\
&\quad - 4hlN\sum_1\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega l}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2} + \\
&\quad + 2M\sum_1\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2-h^2}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega l.
\end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Положим для сокращения

$$\left.\begin{aligned}
&2\pi\frac{\omega\lambda}{I} = \alpha, \\
&P = \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi h}{l}}\right), \\
&A = 2\sum_1^\infty\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2-h^2}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}\cos\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)l, \\
&B = 4hl\sum_1^\infty\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\sin\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)l}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 l^2+h^2\right]^2}, \\
&C = \frac{2}{l^2}\sum_1^\infty\frac{\cos\omega kl}{k^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Тогда предшествующие формулы запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \alpha M+(P-C)N+BM'+AN'&=0,\\ (P-C)M-\alpha N+AM'+BN'&=0,\\ BM-AN+\alpha M'-(P-C)N'&=0,\\ AM-BN+(P-C)M'+\alpha N'&=0. \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Эти уравнения относительно M, N, M', N' не могут иметь решений, отличных от нуля, если не соблюдено условие

$$\begin{vmatrix} \alpha & P-C & B & A \\ P-C & -\alpha & A & B \\ B & -A & \alpha & -(P-C) \\ A & -B & P-C & \alpha \end{vmatrix}=0,$$

которое легко развертывается в виде:

$$(P-C)^2=A^2-B^2-\alpha^2\pm 2B\alpha$$

или

$$(P-C)^2+(B\pm\alpha)^2=A^2.$$

Но для того, чтобы (ξ, η, ξ', η') оставались конечными при изменении l, необходимо, чтобы $\omega\lambda$, т. е. α было **вещественным**. Отсюда необходимо условие

$$|A|\geqslant|P-C|, \tag{6}$$

если имеется в виду **устойчивая** конфигурация; и это должно иметь место, каково бы ни было значение ωl, т. е. ω. Достаточно впрочем в виду формул (5) заниматься значениями ωl, заключенными между 0 и 2π. Если же сделать $\omega l=\pi$, замечаем, что A обращается в нуль. Отсюда **необходимое** условие, чтобы и $P-C$ тоже обращалось в нуль при $\omega l=\pi$. Соответствующее же значение C будет:

$$C_1=\frac{2}{l^2}\left(-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\dots\right)$$

Известно, что $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$. Простое сложение дает

$$\frac{\pi^2}{6}+\frac{l^2C_1}{2}=2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)=\frac{\pi^2}{12}.$$

Следовательно, $C_1=-\frac{\pi^2}{6l^2}$.

Условие $P - C_1 = 0$ дает

$$\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\cosh\frac{2\pi h}{l}}\right) = -\frac{\pi^2}{6l^2},$$

т. е.

$$\cosh\frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}, \quad \frac{h}{l} = 0{,}280.$$

Альтернированная конфигурация не будет, значит, теоретически устойчивой, если только отношение $\frac{h}{l}$ не имеет этого частного значения.

Но теперь нужно посмотреть, не будет ли условие (6) выполнено для всех значений ωl. Для этой цели займемся дальше подсчетом количеств A и C.

Вычисление C и A. Элементарное разложение в тригонометрический ряд дает нам для $-\pi < x < \pi$

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \sum_1 \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2}\ldots$$

Заменяя x на $\pi - x$, имеем, следовательно, для $0 < x < 2\pi$

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi - x)^2}{4} = -\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots,$$

и, следовательно, как мы уже видели выше:

$$C = \frac{2}{l^2}\left[\frac{(\pi - \omega l)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right]. \tag{7}$$

Для вычисления A, что является несколько более сложным, мы будем исходить из равенства, полученного разложением $\cosh mx$ в тригонометрический ряд на интервале $-\pi < x < \pi$

$$\frac{\pi\cosh mx}{2\sinh m\pi} = \frac{1}{2m} - \frac{m\cos x}{1^2 + m^2} + \frac{m\cos 2x}{2^2 + m^2} - \frac{m\cos 3x}{3^2 + m^2} \tag{8}$$

(см. напр.: Уиттекер и Ватсон, Современный анализ, пример 9 в конце главы 9). Заменив x на $\pi - \frac{x}{2}$, мы будем иметь, в данном случае, при $0 < x < 4\pi$:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cosh m\left(\pi - \frac{x}{2}\right)}{\sinh m\pi} = \frac{1}{2m} + \frac{m\cos\frac{x}{2}}{1^2 + m^2} + \frac{m\cos x}{2^2 + m^2} + \frac{m\cos\frac{3x}{2}}{3^2 + m^2} + \ldots \tag{9}$$

Заменяя в (8) x через $\frac{x}{2}$, получаем (при $-2\pi < x < 2\pi$):

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cosh\frac{mx}{2}}{\sinh m\pi} = \frac{1}{2m} - \frac{m\cos\frac{x}{2}}{1^2+m^2} + \frac{m\cos x}{2^2+m^2} - \frac{m\cos\frac{3x}{2}}{3^2+m^2} + \ldots \quad (10)$$

Вычитая (10) из (9), будем иметь при $0 < x < 2\pi$:

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{\cosh m\left(\pi-\frac{x}{2}\right) - \cosh m\frac{x}{2}}{\sinh m\pi} = \frac{m\cos\frac{x}{2}}{1^2+m^2} + \frac{m\cos\frac{3x}{2}}{3^2+m^2} + \ldots, \quad (10')$$

или еще:

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{\sinh\left(m\frac{\pi}{2}-\frac{mx}{2}\right)}{\cosh\frac{m\pi}{2}} = \frac{m\cos\frac{x}{2}}{1^2+m^2} + \frac{m\cos\frac{3x}{2}}{3^2+m^2} + \ldots, \quad (11)$$

т. е., меняя несколько обозначения;

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sinh a(\pi-x)}{\cosh a\pi} = \frac{a\cos\frac{x}{2}}{a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{a\cos\frac{3x}{2}}{a^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \ldots; \quad (12)$$

продиференцировав теперь по a, получаем:

$$\frac{\pi(\pi-x)\cosh a(\pi-x)}{2\cosh a\pi} - \frac{\pi^2\sinh a\pi}{2\cosh^2 a\pi}\sinh a(\pi-x) =$$

$$= \frac{\pi}{2a}\,\frac{\sinh a(\pi-x)}{\cosh a\pi} - 2a^2\left[\frac{\cos\frac{x}{2}}{\left[a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\frac{3x}{2}}{\left[a^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^2} + \ldots\right]. \quad (13)$$

(Уравнение (13), продиференцированное по x, дало бы нам возможность вычислить B, но мы не будем проводить это вычисление, ограничившись только этим указанием).

Из (13) мы получаем непосредственно выражение для суммы

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}+a^{2}\right]^{2}},$$

тогда как (12) дает нам

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}+a^{2}};$$

заметив это, рассмотрим вычисляемое выражение A; можно написать:

$$A=2\sum_{1}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}l^{2}+h^{2}-2h^{2}}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}l^{2}+h^{2}\right]^{2}}\cos\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)l,$$

или

$$A=2\sum_{1}\frac{\cos\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)l}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}l^{2}+h^{2}}-4h^{2}\sum_{1}\frac{\cos\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)l}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}l^{2}+h^{2}\right]^{2}};$$

положив

$$\frac{h}{l}=a,\qquad \omega l=x\qquad (0<\omega l<2\pi),$$

имеем:

$$A=\frac{2}{l^{2}}\sum_{1}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}+a^{2}}-\frac{4h^{2}}{l^{4}}\sum_{1}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^{2}+a^{2}\right]^{2}}.$$

Используя (12) и (13) и производя некоторые элементарные приведения, находим:

$$A=\frac{\pi}{l^{2}\cosh^{2}a\pi}\left[\pi\cosh ax-x\cosh a\pi\cosh a(\pi-x)\right]$$

Условие устойчивости (6) превратится тогда, так как $P - C = -\frac{(\pi - x)^2}{2l^2}$, согласно (7), ибо $P = -\frac{\pi^2}{6l^2}$, в

$$\left| \pi^2 \frac{\cosh ax}{\cosh^2 a\pi} - \frac{\pi x}{\cosh a\pi} \cosh a(\pi - x) \right| \geq \frac{(\pi - x)^2}{2}, \tag{14}$$

неравенство, рассматриваемое при $x (= \omega l)$, заключенном между 0 и 2π.

Так как $\frac{h}{l} = a$ и $\cosh \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}$, то имеем здесь:

$$\cosh a\pi = \sqrt{2}, \quad \sinh a\pi = 1.$$

Положим, с другой стороны, $a(\pi - x) = u$, так что переменная u должна меняться между $-a\pi$ и $+a\pi$. Количество, модуль которого фигурирует в левой части неравенства (14), тогда запишется:

$$z = \frac{\pi^2}{2} \cosh ax - \frac{\pi x}{\sqrt{2}} \cosh a(\pi - x),$$

или

$$z = \frac{\pi^2}{2} (\sqrt{2} \cosh u - \sinh u) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\pi - \frac{u}{a}\right) \cosh u$$

или, наконец,

$$z = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{a} \cosh u - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sinh u \right). \tag{15}$$

Эта функция от u нечетна, и достаточно изучить ее для $0 < u < a\pi$ и посмотреть, соблюдается ли в этом интервале неравенство

$$|z| \geq \frac{u^2}{2a^2}. \tag{16}$$

Это легко проверить: имеем:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a} \cosh u + \frac{u \sinh u}{a} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cosh u \right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sinh u \left[\frac{u}{a} + \left(\frac{1}{a} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{ctgh} u \right].$$

Убеждаемся далее (так как $a = 0{,}28\ldots$), что $\frac{1}{a} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ положительно: $\frac{dz}{du}$ всегда, следовательно, положительно в рассматриваемом интервале; z, значит, возрастает от нуля до значения (при $u = a\pi$)

$$z_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\pi \sqrt{2} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

При этом x остается положительным, и наше неравенство будет:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{a}\cosh u-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sinh u\right)\geqslant\frac{u^2}{2a^2}.$$

Оно очевидно превращается в равенство на концах интервала $x=0$, $a\pi$. Положив

$$g(u)=\frac{\pi u}{a\sqrt{2}}\cosh u-\frac{\pi^2}{2}\sinh u-\frac{u^2}{2a^2},$$

имеем:

$$g'=\frac{\pi}{a\sqrt{2}}(u\sinh u+\cosh u)-\frac{\pi}{2}\cosh u-\frac{u}{a^2},$$

$$g''=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{a}-\frac{\pi}{2}\right)\sinh u+\frac{\pi u\cosh u}{a\sqrt{2}}-\frac{1}{a^2}.$$

Коэфициент $\frac{\sqrt{2}}{a}-\frac{\pi}{2}$ очевидно положителен, следовательно, g'' возрастает; начальное ее значение $-\frac{1}{a^2}$, ее значение для $u=a\pi$ положительно; следовательно, g'' имеет корень и притом один; значит g', начиная с положительного значения $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$, убывает, а затем растет до окончательного значения, равного нулю, которое она принимает при $u=a\pi$; g', следовательно, обращается в нуль, один раз между 0 и $a\pi$; она сперва положительна, потом отрицательна; следовательно, g растет, потом убывает, начальные и конечные значения g нули, g остается всегда положительным.

Изучаемая конфигурация системы вихрей должна, следовательно, рассматриваться как устойчивая.

Симметричная система. Нашим исходным моментом опять будет формула (A), дающая скорость вихря z_0:

$$u_0-iv_0=\frac{l}{2il}\left\{\lim_{z\to z_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0)-\frac{l}{\pi(z-z_0)}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0')\right]\right\},$$

т. е.

$$\frac{2\pi}{l}(v_0+iu_0)=\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{z_0-z_k}+\frac{1}{z_0-z_{-k}}\right)-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z_0-z_k'}.$$

Беря уравнение в вариациях, получаем:

$$\frac{2\pi}{l}\left(\frac{d\eta_0}{dt}+i\frac{d\xi_0}{dt}\right)=-\sum_1\left[\frac{\delta z_0-\delta z_k}{(z_0-z_k)^2}+\frac{\delta z_0-\delta z_{-k}}{(z_0-z_{-k})^2}\right]+$$
$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta z_0-\delta z_k'}{(z_0-z_k')^2};$$

но
$$z_k = z_0 + kl, \qquad z_k' = z_0' + kl = z_0 - ih + kl;$$
коэфициентом при $-\delta z_0$ будет:
$$-\frac{2}{l^2}\sum_{1}\frac{1}{k^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(kl-ih)^2}.$$
Но из уравнения
$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-k\pi)^2}$$

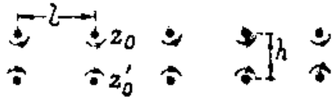

Рис. 14.

следует, что
$$\frac{1}{\sin^2\frac{i\pi h}{l}} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{l^2}{\pi^2}\,\frac{1}{(ih-kl)^2};$$
следовательно, коэфициент при δz_0 будет равен:
$$-\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right).$$
Выражая затем
$$\frac{1}{(z_0-z_k')^2} = \frac{k^2l^2-h^2+2iklh}{(k^2l^2+h^2)^2},$$
приходим сейчас же к двум уравнениям:
$$\left.\begin{aligned}\frac{2\pi}{l}\,\frac{d\xi_0}{dt} &= -\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right)\eta_0 + \frac{1}{l^2}\sum_{1}\frac{\eta_k+\eta_{-k}}{k^2} - \\ &\quad -\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\,\eta_k' - 2lh\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\xi_k'}{(k^2l^2+h^2)^2}, \\ \frac{2\pi}{l}\,\frac{d\eta_0}{dt} &= -\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right)\xi_0 + \frac{1}{l^2}\sum_{1}\frac{\xi_k+\xi_{-k}}{k^2} - \\ &\quad -\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\,\xi_k' + 2lh\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\eta_k'}{(k^2l^2+h^2)^2}.\end{aligned}\right\}\quad(17)$$
Имеем также вполне аналогичные уравнения для ξ_0', η_0'.

Положим, как и выше:
$$\xi_k = Me^{i\omega(\lambda t+x_k)}, \qquad \xi_k' = M'e^{i\omega(\lambda t+x_k')},$$
$$\eta_k = iNe^{i\omega(\lambda t+x_k)}, \qquad \eta_k' = iN'e^{i\omega(\lambda t+x_k')};$$

сокращаем множитель $e^{i\omega(lt+x_0)}$; сумму

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\xi_k'}{(k^2l^2+h^2)^2}$$

можно записать так:

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{k(\xi'_k-\xi'_{-k})}{(k^2l^2+h^2)^2},$$

что вводит

$$\sum_{1} \frac{2ik\sin\omega kl}{(k^2l^2+h^2)^2},$$

а сумма $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\xi_k'$ дает

$$-\frac{1}{h^2}\xi_0'+\sum_{1} \frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}(\xi_k'+\xi'_{-k}),$$

что вводит выражение:

$$-\frac{1}{h^2}+2\sum \frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\cos\omega kl.$$

Окончательно приходим к двум следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\pi}{I}M\omega\lambda &= -\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right)N+\frac{2N}{l^2}\sum_{1}\frac{\cos\omega kl}{k^2}-\\
&\quad -N'\left(-\frac{1}{h^2}+2\sum_{1}\frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\cos\omega kl\right)-\\
&\quad -4lhM'\sum_{1}\frac{k\sin\omega kl}{(k^2l^2+h^2)^2},\\
-\frac{2\pi}{I}N\omega\lambda &= -\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right)M+\frac{2M}{l^2}\sum_{1}\frac{\cos\omega kl}{k^2}-\\
&\quad -M'\left(-\frac{1}{h^2}+2\sum_{1}\frac{k^2l^2-h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\cos\omega kl\right)-\\
&\quad -4lhN'\sum_{1}\frac{k\sin\omega kl}{(k^2l^2+h^2)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Положив, как было раньше:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha = \frac{2\pi\omega\lambda}{l},\\
&P' = \frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}}\right), \qquad C = \frac{2}{l^2}\sum_1 \frac{\cos\omega kl}{k^2},\\
&A' = -\frac{1}{h^2} + 2\sum_1 \frac{k^2l^2 - h^2}{(k^2l^2+h^2)^2}\cos\omega kl,\\
&B' = 4lh\sum_1 \frac{k\sin\omega kl}{(k^2l^2+h^2)^2},
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

будем иметь два уравнения:

$$\alpha M + (P' - C)N + B'M' + A'N' = 0,$$

$$(P' - C)M - \alpha N + A'M' + B'N' = 0,$$

к которым присоединятся еще два подобных уравнения, соответствующих вихрю z_0'. Эти два уравнения запишутся так:

$$B'M - A'N + \alpha M' - (P' - C)N' = 0,$$

$$A'M - B'N + (P' - C)M' + \alpha N' = 0.$$

Образованная таким образом система идентична системе (5′), где лишь A, B, P заменены через A', B', P'. Значит, условием устойчивости будет [уравнение (6)]:

$$|A'| \geqslant |P' - C| \tag{20}$$

для всех значений ωl между 0 и 2π.

Будем иметь, как и выше:

$$C = -\frac{\pi^2}{6l^2} + \frac{(\pi - \omega l)^2}{2l^2};$$

следовательно,

$$P' - C = \frac{\pi^2}{2l^2} - \frac{(\pi - \omega l)^2}{2l^2} + \frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{1}{\sinh^2\frac{\pi h}{l}};$$

остается вычислить A'.

Для этого исходим из формулы (8):

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cosh mx}{\sinh m\pi} = \frac{1}{2m} - \frac{m\cos x}{1^2+m^2} + \frac{m\cos 2x}{2^2+m^2} - \frac{m\cos 3x}{3^2+m^2} + \ldots, \tag{21}$$

имеющей значение при $-\pi < x < \pi$. Заменим x на $\pi - x$; для $0 < x < 2\pi$ будем иметь:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cosh m(\pi - x)}{\sinh m\pi} = \frac{1}{2m} + \frac{m\cos x}{1^2 + m^2} + \frac{m\cos 2x}{2^2 + m^2} + \ldots \tag{22}$$

Диференцируя это уравнение по m, получаем:

$$\frac{\frac{\pi}{2}(\pi - x)\sinh m(\pi - x)}{\sinh m\pi} - \frac{\pi^2\cosh m\pi}{2\sinh^2 m\pi}\cosh m(\pi - x) =$$

$$= -\frac{1}{2m^2} - 2m^2\left[\frac{\cos x}{(1^2 + m^2)^2} + \frac{\cos 2x}{(2^2 + m^2)^2} + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\pi\cosh m(\pi - x)}{2m\sinh m\pi} - \frac{1}{2m^2}.$$

Полагая $x = \omega l$, $m = \frac{h}{l}$, имеем:

$$\frac{\pi(\pi - x)\sinh m(\pi - x)}{2\sinh m\pi} - \frac{\pi^2\cosh m\pi\cosh m(\pi - x)}{2\sinh^2 m\pi} -$$

$$- \frac{\pi\cosh m(\pi - x)}{2m\sinh m\pi} + \frac{1}{m^2} = -2h^2l^2\sum_1 \frac{\cos\omega kl}{(k^2l^2 + h^2)^2}. \tag{23}$$

Эта формула позволяет узнать $\sum\limits_1 \frac{\cos\omega kl}{(k^2l^2 + h^2)^2}$, тогда как (22) дает нам:

$$\sum_1 \frac{\cos\omega kl}{k^2l^2 + h^2} = -\frac{1}{2h^2} + \frac{\pi}{2hl}\,\frac{\cosh m(\pi - x)}{\sinh m\pi}. \tag{24}$$

Запишем теперь A' в форме

$$A' = -\frac{1}{h^2} + 2\sum_1 \frac{k^2l^2 + h^2 - 2h^2}{(k^2l^2 + h^2)^2}\cos\omega kl = -\frac{1}{h^2} +$$

$$+ 2\sum_1 \frac{\cos\omega kl}{k^2l^2 + h^2} - 4h^2\sum_1 \frac{\cos\omega kl}{(k^2l^2 + h^2)^2}$$

и внесем сюда значения обеих $\sum$, взятых из уравнения (23) и (24), получаем окончательно:

$$A' = \frac{\pi(\pi - x)\sinh m(\pi - x)}{l^2\sinh m\pi} - \frac{\pi^2\cosh m\pi\cosh m(\pi - x)}{l^2\sinh^2 m\pi},$$

и неравенство для определения устойчивости примет вид:

$$\left|\frac{\pi(\pi-x)\sinh m(\pi-x)}{\sinh m\pi}-\frac{\pi^2\cosh m\pi\cosh m(\pi-x)}{\sinh^2 m\pi}\right|\geqslant\frac{\pi^2}{2}-$$
$$-\frac{(\pi-x)^2}{2}+\frac{\pi^2}{\sinh^2 m\pi}.$$

Оно должно иметь место для $0<x\leqslant 2\pi$.

Положим:

$$m(\pi-x)=u \qquad (-m\pi<u<m\pi).$$

Неравенство напишется:

$$\left|\pi^2\cosh m\pi\cosh u-\frac{\pi u}{m}\sinh u\sinh m\pi\right|\geqslant\frac{\sinh^2 m\pi}{2}\left(\pi^2-\frac{u^2}{m^2}\right)+\pi^2. \quad (25)$$

Достаточно рассмотреть интервал $0<u<m\pi$, так как с двух сторон стоят четные функции. Непосредственно видим, что при $u=0$ неравенство сводится к

$$\cosh m\pi\geqslant\frac{\sinh^2 m\pi}{2}+1,$$

или иначе

$$(\cosh m\pi-1)^2\leqslant 0,$$

что никогда не выполняется; строго говоря, кроме $h=0$, когда задача перестает существовать. Следовательно, симметричная конфигурация должна рассматриваться как неустойчивая. Присмотримся ближе к неравенству (25) с целью установить, не будет ли оно выполнено при более широких пределах изменения u (именно между 0 и $m\pi$). Мы увидим, что оно не выполняется никогда, кроме $u=m\pi$, так что неустойчивость представляется полной.

Положим:

$$Z=\pi^2\cosh m\pi\cosh u-\frac{\pi u}{m}\sinh m\pi\sinh u;$$

имеем:

$$\frac{1}{\pi}\frac{dZ}{du}=\left(\pi\cosh m\pi-\frac{\sinh m\pi}{m}\right)\sinh u-\frac{u}{m}\sinh m\pi\cosh u=$$
$$=\cosh u\left[\left(\pi\cosh m\pi-\frac{\sinh m\pi}{m}\right)\operatorname{tgh} u-\frac{u}{m}\sinh m\pi\right]=v\cosh u,$$

где

$$v=\left(\pi\cosh m\pi-\frac{\sinh m\pi}{m}\right)\operatorname{tgh} u-\frac{u}{m}\sinh m\pi.$$

Коэфициент $(m\pi\cosh m\pi-\sinh m\pi)$ существенно положителен, в чем легко убедиться. Далее имеем:

$$\frac{dv}{du}=\left(\pi\cosh m\pi-\frac{\sinh m\pi}{m}\right)\frac{1}{\cosh^2 u}-\frac{1}{m}\sinh m\pi.$$

Эта функция имеет положительный корень, только если

$$m\pi \cosh m\pi - \sinh m\pi > \sinh m\pi,$$

т. е.

$$m\pi > 2 \operatorname{tgh} m\pi.$$

Следует различать два случая.

1° $m\pi < 2 \operatorname{tgh} m\pi$. Тогда $\frac{dv}{du}$ остается отрицательным, v убывает, следовательно, остается отрицательным; значит, Z все время убывает. Окончательное же его значение $Z(m\pi) = \pi^2$. Следовательно, Z всегда положительно.

2° $m\pi > 2 \operatorname{tgh} m\pi$. $\frac{dv}{du}$ тогда переходит от положительных значений к отрицательным; v возрастает, начиная с нуля, затем убывает до

$$v(m\pi) = -\frac{\sinh^2 m\pi}{m \cosh m\pi} \ (< 0).$$

Следовательно, v имеет корень и только один; $\frac{dZ}{du}$ сперва положительно, потом отрицательно; Z возрастает (начиная с $Z(0) = \pi^2 \cosh m\pi$), затем убывает до

$$Z(m\pi) = \pi^2.$$

Следовательно, в этом случае тоже Z всегда положительно.

Неравенство (25) сведется тогда к

$$G(u) = \pi^2 \cosh m\pi \cosh u - \frac{\pi u}{m} \sinh m\pi \sinh u - \\ - \frac{\sinh^2 m\pi}{2}\left(\pi^2 - \frac{u^2}{m^2}\right) - \pi^2 \geqslant 0; \qquad (26)$$

Вычисляя производные, имеем:

$$G'(u) = \left(\pi^2 \cosh m\pi - \frac{\pi}{m} \sinh m\pi\right) \sinh u - \frac{\pi u}{m} \sinh m\pi \cosh u + \\ + \frac{\sinh^2 m\pi}{m^2} u,$$

$$G''(u) = \left(\pi^2 \cosh m\pi - \frac{2\pi}{m} \sinh m\pi\right) \cosh u - \frac{\pi u}{m} \sinh m\pi \sinh u + \\ + \frac{\sinh^2 m\pi}{m^2},$$

$$G'''(u) = \left(\pi^2 \cosh m\pi - \frac{3\pi}{m} \sinh m\pi\right) \sinh u - \\ - \frac{\pi u}{m} \sinh m\pi \cosh u = w \cosh u,$$

где

$$w = \left(\pi^2 \cosh m\pi - \frac{3\pi}{m} \sinh m\pi \right) \operatorname{tgh} u - \frac{\pi u}{m} \sinh m\pi$$

и

$$\frac{dw}{du} = \left(\pi^2 \cosh m\pi - \frac{3\pi}{m} \sinh m\pi \right) \frac{1}{\cosh^2 u} - \frac{\pi}{m} \sinh m\pi;$$

$\frac{dw}{du}$ будет иметь корень только в случае

$$m\pi^2 \cosh m\pi - 3\pi \sinh m\pi > \pi \sinh m\pi,$$

что приводит к двум различным случаям:

1° $m\pi < 4 \operatorname{tgh} m\pi$. Тогда w' всегда отрицательно и w тоже; G''' отрицательно и G'' убывает. Имеем:

$$G''(0) = \pi^2 (\cosh m\pi - 1) + \left(\frac{\sinh m\pi}{m} - \pi \right)^2 > 0$$

и

$$G''(m\pi) = \pi^2 - \frac{2\pi}{m} \sinh m\pi \cosh m\pi + \frac{\sinh^2 m\pi}{m^2} =$$

$$= \left(\frac{\sinh m\pi}{m} - \pi \cosh m\pi \right)^2 - \pi^2 \sinh^2 m\pi =$$

$$= \left[\frac{\sinh m\pi}{m} - \pi e^{m\pi} \right] \left[\frac{\sinh m\pi}{m} - \pi e^{-m\pi} \right].$$

Но легко заметить, что при $a > 0$ из величин $\sinh a - ae^a$ и $\sinh a - ae^{-a}$ первое всегда отрицательно, второе всегда положительно. Следовательно:

$$G''(m\pi) < 0.$$

Наконец $G''(u)$ переходит от положительных значений к отрицательным. $G'(u)$ возрастает, начиная с нуля, затем убывает до

$$G'(m\pi) = 0.$$

Следовательно, G' всегда положительно; G возрастает и так как ее окончательное значение $G(m\pi) = 0$, то G всегда отрицательно и неравенство (26) никогда не удовлетворяется (кроме $u = m\pi$).

2° $m\pi > 4 \operatorname{tgh} m\pi$. Предшествующий результат останется в силе. В самом деле, в этом случае $\frac{dw}{du}$ положительно, потом отрицательно,

w возрастает, начиная с нуля, затем убывает до отрицательного значения $w(m\pi) = -\frac{3\pi}{m} \frac{\sinh^2 m\pi}{\cosh m\pi}$. Следовательно, G''' сперва положительно, потом отрицательно; $G''(w)$ возрастает, начиная с $G''(0)$ (>0), затем убывает до $G''(m\pi)$ (<0). Следовательно, G'' имеет корень и переходит от положительных значений к отрицательным. Последовательность рассуждений с этого места тождественна с проведенной выше. Отсюда следует высказанный результат.

ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ ВИХРЕЙ БЕНАРА К ВЫЧИСЛЕНИЮ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ИСПЫТЫВАЕМОГО ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЖИДКОСТИ.

Постановка задачи. Мы уже указали, что опыт показывает, что при соблюдении большой чистоты условий опыта, установление вихревого режима весьма близко к вихрям Бенара. Если привести в равномерное и прямолинейное движение, при некоторых условиях относительно скорости, цилиндр, образующие которого перпендикулярны к направлению движения, то „альтернированные" вихри отрываются периодически справа и слева, так что на некотором расстоянии позади конфигурация, образованная вихрями, очень близка к изученной в предшествующей главе. Можно, например, осуществить опыт в бассейне с водой, находящейся сперва в покое и в которой перемещается вертикальный цилиндр любого сечения. Собственно говоря, существование свободной поверхности осложняет здесь явление, что делается хорошо заметным благодаря наличию воронок, образованных маленькими вихрями в точках, где последние встречают свободную поверхность.

Первое углубленное исследование этого вопроса было проведено Бенаром в 1906 г. (C. R. Acad. des Sciences, t. 147, 1908, p. 839). Mallok в 1907 г. (Proc. of the Royal Soc., t. 79, p. 262) объяснил почти в то же время явления образования эолийских звуков. Д. Рябушинский в 1911 г. (Aérophile, t. 19, p. 15) показал при помощи маятника периодичность альтернированных вихрей позади препятствия. В 1912 г. Karman и Rubach дали математическую теорию явления, описав относящиеся сюда собственные опыты (Physikalische Zeitschrift). С тех пор опубликовано большое число работ по этому вопросу, вплоть до исследований Relf'a (Phil. Mag., t. 42, 1921, p. 173; t. 49, 192, p. 509), работ Camichel'я (Paris, 1925, Ed. G. Roche d'Estrez editeur), Toussaint'a с его замечательной постановкой опытов, показывающих явления последовательного обтекания [Contribution à l'étude de l'écoulement plan des fluides, par M. M. Toussaint et Carafoli (Comptes rendus du Congrès International de Mécanique appliquée, Zurich, 1926)] и последних заметок Benard'a в Comptes rendus (t. 183, 1926, p. 201; t. 187, 1928, p. 1028 et 1123). По истории вопроса и деталям опытов мы отошлем к заметкам Benard'a и к интересному изложению P. Dupin'a и M. Tessié-Solier: L e s t o u r b i l l o n s a l t e r n é s e t l e s r é g i m e s d'é c o u l e m e n t d'u n f l u i d e a u t o u r d'u n o b s t a c l e (Paris, Gauthier-Villars, 1928); там можно найти в чистом виде описанные явления, сопровождающие обтекание. Сперва образуются два вихря, симметрично расположенные на оставшейся позади поверхности на одинаковом расстоянии от цилиндра (который сам предполагается имеющим плоскость симметрии, параллельную общему направлению движения). Эта конфигурация соответствует малым значениям числа Рейнольдса, т. е. отношения $R=\frac{VD}{\nu}$, где V скорость, D — диаметр цилиндра и ν кинематический коэфициент вязкости $\left(\nu=\frac{\mu}{\rho}\right)$. Если это число возрастает, симметрия нарушается, оставшийся тогда след, принимая сперва беспорядочный характер, становится затем волнообразным, под действием вихрей, периодически отрывающихся с одной и с другой стороны цилиндра.

Мы будем здесь предполагать, что волновой режим получен, и будем предполагать, — хотя полученные вихри не образуют цепочек, неограниченно простирающихся в обоих направлениях, изученных в прошлой главе, — что позади тела, на достаточном расстоянии, состояние скоростей таково, как это следовало бы из развитой ранее теории. Напротив, впереди движущегося тела, на больших расстояниях, будет иметься покой, хотя бы в первом приближении. Опыт показывает, что предположения эти не лишены практического значения. При этих условиях нетрудно вычислить, по крайней мере приближенно, сопротивление, испытываемое (на единицу длины) движущимся цилиндром, при его прямолинейном и равномерном перемещении.

Пусть, в самом деле, V абсолютная скорость перемещения твердого тела, u_0 скорость переноса вихрей в области, где на достаточном расстоянии от твердого тела эта скорость становится равномерной. Согласно изложению предшествующей главы, надо бы положить:

$$u_0=\frac{I}{2l}\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l},$$

если бы вихри перемещались одни на линиях, неограниченных в двух направлениях. h означает расстояние двух вихревых цепочек и l везде одинаковое расстояние двух соседних вихрей в каждой цепочке. Устойчивость (теоретическая) налагает условие:

$$\cosh\frac{\pi h}{l}=\sqrt{2}$$

и, следовательно, имеем:

$$u_0=\frac{I}{2l\sqrt{2}}.$$

Придерживаясь все тех же обозначений, что и выше, т. е., называя z_0 и z_0' аффиксы двух вихрей, взятых из обеих вихревых цепочек (которые мы возьмем ради определенности параллельно оси Ox на равном расстоянии от этой оси), заметим, что теоретическое распределение скоростей, вызванных наличием альтернированных вихрей, определяется комплексным потенциалом:

$$\chi = \varphi + i\psi = -\frac{I}{2i\pi} \lg \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0')},$$

и абсолютная скорость жидкой частицы, помещенной вне вихря, будет иметь проекциями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Ничто не изменится в том, что нами было сказано, если мы условимся брать систему осей Oxy, **связанную с системой вихрей** и, следовательно, перемещающуюся со скоростью u_0, так как воздействие перемещений исчезает в разностях $(z - z_0)$ и $(z - z_0')$, которые фигурируют в χ. По отношению к этой подвижной системе, вихревое состояние стационарно позади тела, а впереди поток обладает скоростью $-u_0$. Позади и на больших расстояниях относительная скорость частицы жидкости будет иметь составляющие:

$$u' = -u_0 + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Наконец, ничто нам не мешает поместить точки z_0 и z_0' симметрично относительно начала осей, т. е. положить:

$$z_0 = \frac{l}{4} + \frac{ih}{2}, \qquad z_0' = -z_0$$

и взять:

$$\chi = \frac{iI}{2\pi} \lg \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z_0 + z)}{\sin \frac{\pi}{l}(z_0 - z)}.$$

Так как сам цилиндр движется относительно новых осей со скоростью $V - u_0$, то мы видим, что если рассмотреть конфигурацию, существующую в момент τ, то через время

$$T = \frac{l}{V - u_0}$$

все примет такой вид, как будто каждая из вихревых цепочек подвинулась на один номер, так что с точностью до переноса начала нумерации мы придем в момент $\tau + T$ к прежней конфигурации. Мы принимаем, что, в соответствии с опытом, движение периодическое (относительно твердого тела) с периодом T.

Установив это, мы можем вычислить сопротивление цилиндра применением элементарной теоремы количеств движения, приложенной, например, к движению по отношению к осям xOy, так как они совершают равномерное поступательное движение. С этой целью мы представим себе в каждый момент времени жидкую массу толщиной, равной

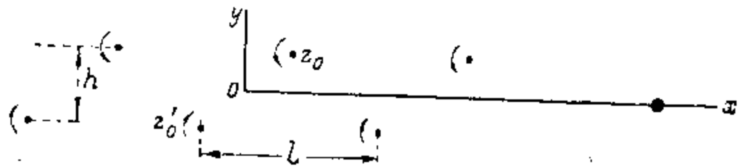

Рис. 15.

единице, в направлении, нормальном к плоскости фигуры, и ограниченную в этой плоскости следующим образом: мы проведем две линии, параллельные оси Ox $(y = \pm\eta)$, на очень больших расстояниях от Ox; затем две прямые, нормальные Ox: одну AB, очень далеко слева и попадающую как раз между двумя последовательными вихрями, из разных цепочек одной пары (это делается с целью избежать в дальнейшем трудностей, проистекающих от присутствия вихрей), вторую $A'B'$ очень далеко справа. В момент τ рассматриваемая масса заключена внутри $ABA'B'$. Беря расстояния достаточно боль-

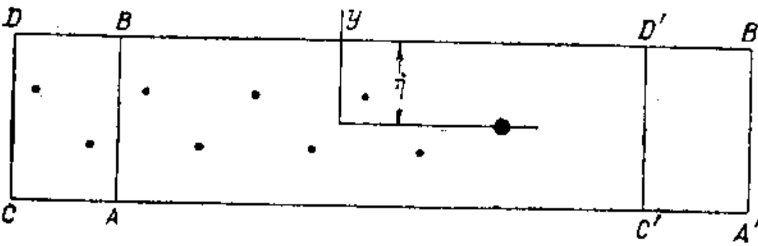

Рис. 16.

шими, мы сможем без чувствительной ошибки допустить, что на AB относительные скорости проистекают из потенциальной функции χ (с точностью до поступательной скорости $-u_0$), что на $A'B'$ скорости частиц равны $-u_0$; на BB' и AA' скорости тоже близки к $-u_0$.

Теорема количеств движения примет теперь следующий вид: производная по времени от количества движения, спроектированного на Ox, для рассматриваемой жидкой массы равна сумме проекций на ось Ox всех внешних сил, приложенных к этой массе. Если мы теперь обозначим через W сопротивление (в направлении оси Ox), испытываемое телом (на единицу длины цилиндра), то реакция, воспринимаемая жидкостью со стороны твердого тела, будет равна $-W$; с другой стороны, давления p, испытываемые жидкостью на $ABA'B'$, которые должны причисляться к внешним силам, дают в сумме $-\oint p dy$.

Если мы проинтегрируем упомянутое равенство в пределах от начального момента τ до $\tau+T$, то получим следующее:

δ (разность количеств движения масс, находящихся в $ABA'B'$ в эти два момента $+$ количество движения масс, вышедшего из прямоугольника за время T)

$$\delta = -\int_{\tau}^{\tau+T} W dt - \int_{\tau}^{\tau+T} dt \oint p dy.$$

Так как очевидно, что W допускает период T, то отсюда следует, что первый интеграл справа равен $\int_0^T W dt$ и представляет с точностью до знака и множителя T среднее значение сопротивления тела; это очевидно и все, что можно надеяться вычислить при сделанных гипотезах.

Разность δ количеств движения, которая стоит в левой части, легко вычислить. В самом деле, она равна разности количеств движения в прямоугольнике $ABA'B'$ (предполагается неподвижным) в моменты τ и $\tau+T$, сложенной с количеством движения, вышедшим из этого прямоугольника за время T (с целью учесть те части жидкой массы, рассмотренной в момент τ, которые могли выйти за пределы площади $ABA'B'$ и быть заменены другими, не находившимися там прежде).

Но по истечении времени, T конфигурация, представленная в прямоугольнике $ABA'B'$, почти та же, что и в момент τ; разница единственно в том, что в своем движении относительно Oxy твердое тело переместилось на длину $(c-u_0)T=l$ в направлении Ox и, следовательно, картина, которую мы застаем в момент $\tau+T$, в точности такова, как в момент τ внутри прямоугольника $CDC'D'$, полученного перенесением $ABA'B'$ на длину l в отрицательном направлении.

Разность количеств движения внутри $ABA'B'$ в моменты τ и $\tau+T$ равна, следовательно, количеству движения массы $ABCD$ в момент τ, уменьшенной на количество движения $A'B'C'D'$ в тот же момент. Но в $ABCD$ далеко слева относительная горизонтальная скорость равна $-u_0+\frac{\partial\psi}{\partial y}$; в $A'B'C'D'$ далеко справа она равна $-u_0$. Искомая разность будет равна, следовательно:

$$\rho \iint_{ABCD} \left(-u_0+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) dx\,dy - \rho \iint_{A'B'C'D'} (-u_0)\,dx\,dy,$$

т. е.

$$\rho \iint_{ABCD} \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Заметив, наконец, что количество движения, вышедшее из $ABA'B'$ за время T, противоположно по знаку вошедшему туда, получаем следующее равенство:

$$\rho \int\int_{ABCD} \frac{\partial\psi}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_0^T W dt - \int_\tau^{\tau+T} dt \oint p dy + Q,$$

где Q обозначает количество движения, вошедшее в $ABA'B'$ за время T.

Чтобы знать теперь среднее сопротивление, нам остается подсчитать некоторые выражения.

Вычисление L и L'. Вычисление $\rho \int\int_{ABCD} \frac{\partial\psi}{\partial y}\, dx dy = L$. Мы вычислим этот интеграл непосредственным переходом к пределу, т. е. предполагая η очень большим.

Имеем:

$$L = \rho \int_0^l dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\psi}{\partial y}\, dy = \rho \int_0^l dx\, [\psi(x, \eta) - \psi(x, -\eta)]_{\eta \to \infty}.$$

Но из значения χ получаем, обозначая через $\bar{z}_0 = \frac{l}{4} - \frac{ih}{2}$ величину, сопряженную z_0:

$$2i\psi = \frac{iI}{2\pi} \lg \frac{\sin\frac{\pi}{l}(z_0 + x + iy)\sin\frac{\pi}{l}(\bar{z}_0 + x - iy)}{\sin\frac{\pi}{l}(z_0 - x - iy)\sin\frac{\pi}{l}(\bar{z}_0 - x + iy)},$$

т. е.

$$\psi = \frac{I}{4\pi} \lg \frac{\cosh\frac{\pi}{l}(h + 2y) - \sin\frac{2\pi x}{l}}{\cosh\frac{\pi}{l}(h - 2y) + \sin\frac{2\pi x}{l}}.$$

Для $y = +\infty$ количество под знаком lg стремится к

$$e^{\frac{2\pi h}{l}}.$$

Для $y = -\infty$ находим также

$$e^{-\frac{2\pi h}{l}},$$

откуда окончательно

$$\psi(x, +\infty) - \psi(x, -\infty) = \frac{I}{4\pi}\left(4\pi\frac{h}{l}\right) = \frac{Ih}{l},$$

и, следовательно, мы получаем:

$$L = \rho \int\limits_0^l \frac{Ih}{l}\, dx = \rho\, Ih.$$

Вычисление $-\int\limits_\tau^{\tau+T} dt \oint p dy + Q \equiv L'$. Мы теперь вычислим совместно сумму количества движения, которое вводится в контур $ABA'B'$, и интеграл, происходящий от подсчета давлений. Прежде всего, если (α, β) направляющие косинусы внешней нормали n к замкнутому контуру C, то количество движения, выходящее из элемента контура ds в течение единицы времени, будет очевидно:

$$\rho\,(u'\alpha + v'\beta)\, u' ds,$$

но в силу формул $dx = -\beta ds$, $dy = \alpha ds$ оно превратится в

$$\rho u'\,(u' dy - v' dx),$$

и для всего контура

$$\rho \int\limits_C u'\,(u' dy - v' dx),$$

так что количество движения, входящее за единицу времени, будет то же, но с измененным знаком; и так как относительное движение без чувствительной погрешности можно принять установившимся на контуре $ABA'B'$, то количество движения, вошедшее за время T, будет:

$$\rho T \int\limits_{ABA'B'} u'^2\, dy - u'v'\, dx.$$

Что касается давления, то в силу того же замечания, что и выше,

$$p = \mathrm{const} - \rho\, \frac{u'^2 + v'^2}{2}$$

вдоль $ABA'B'$, и очевидно получается:

$$-\int\limits_C p dy = +\frac{\rho}{2} \int\limits_C (u'^2 + v'^2)\, dy,$$

т. е.

$$-\int\limits_C p dy = -\frac{\rho}{2} \int\limits_{ABA'B'} (u'^2 + v'^2)\, dy,$$

что дает нам, после присоединения результата вычисления вошедшего количества движения, выражение:

$$-\rho \int\limits_0^T dt \int p dy + Q = \rho T \int \frac{u'^2 - v'^2}{2}\, dy - u'v'\, dx = L'.$$

Положим:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где u и v обозначают абсолютные скорости; имеем:

$$u' = -u_0 + u, \quad v' = v.$$

Тогда в выражении L' член с u_0^2 очевидно исчезнет, член с u_0 также, так как он равен

$$u_0 T\rho \oint v dx - u dy$$

что равно нулю в силу уравнения неразрывности (т. е. закона сохранения массы). Остается, следовательно,

$$L' = T\rho \oint \frac{u^2 - v^2}{2} dy - uv dx.$$

Но, в силу хорошо известных формул

$$w = u - iv = \frac{d\chi}{dz},$$

$$w^2 = u^2 - v^2 - 2iuv, \quad dz = dx + idy,$$

мы сможем, очевидно, написать:

$$2L' = T\rho \times \textit{веществ. часть от } \oint \frac{w^2}{i} dz.$$

Но мы имеем на больших расстояниях позади тела:

$$w = u - iv = \frac{iI}{2l}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_0 + z) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_0 - z)\right] =$$

$$= \frac{iI}{l} \frac{\sin\frac{2\pi z_0}{l}}{\cos\frac{2\pi z}{l} - \cos\frac{2\pi z_0}{l}}.$$

Элементарный подсчет показывает, что $|w|$ стремится очень быстро к нулю, когда $|y|$ возрастает. Кроме того, на AA' и BB' справа и на $A'B'$ значения u и v равны нулю. Заметим далее, что выражения, происходящие от горизонтальных сторон, какое бы ни делалось различие между режимом впереди и режимом сзади, должны быть равными, чтобы в сумме давать нуль.

И находим окончательно в пределе:

$$2L' = T\rho \textit{ веществ. часть } \int_{-kl - i\infty}^{-kl + i\infty} \frac{1}{i} w^2 dz,$$

где интегрирование ведется вдоль прямой $x = -kl$ или, быть может, в соответствии с расположением вихрей $x = -kl + \frac{l}{2}$, что даст очевидно тот же результат.

Положив

$$z = -kl + iy,$$

получаем:

$$w = \frac{iI}{l} \frac{\cosh \frac{\pi h}{l}}{\cosh \frac{2\pi y}{l} + i \sinh \frac{\pi h}{l}},$$

следовательно, надо вычислить:

$$2L' = \Re T\rho \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{I^2}{l^2} \frac{\cosh^2 \frac{\pi h}{l}\, dy}{\left(\cosh \frac{2\pi y}{l} + i \sinh \frac{\pi h}{l}\right)^2} =$$

$$= -\frac{I^2 T\rho}{l^2} \cosh^2 \frac{\pi h}{l} \Re M,$$

что приводит к нахождению значения интеграла

$$M = + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(\cosh \frac{2\pi y}{l} + i \sinh \frac{\pi h}{l}\right)^2}.$$

Ради краткости проведем вычисление в предположении, что

$$\cosh \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}, \quad \sinh \frac{\pi h}{l} = 1$$

$\left[\text{и следовательно } \frac{h\pi}{l} = \lg (1 + \sqrt{2})\right]$. В этом случае

$$L' = -\frac{T\rho I^2}{l^2} \Re (M_1),$$

где

$$M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\left(\cosh \frac{2\pi y}{l} + i\right)^2} = \frac{l}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{(\cosh \theta + i)^2}.$$

Следовательно:

$$\frac{2\pi \Re (M_1)}{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh^2 \theta\, d\theta}{(1 + \cosh^2 \theta)^2},$$

и положив

$$\lambda = \operatorname{tgh}\theta, \quad d\theta = \frac{d\lambda}{1-\lambda^2}, \quad \cosh^2\theta = \frac{1}{1-\lambda^2}, \quad \sinh^2\theta = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2},$$

имеем:

$$\frac{\pi}{l}\,\Re(M_1) = \int_0^1 \frac{\lambda^2 d\lambda}{(2-\lambda^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2-\lambda^2}\right)_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\lambda}{2-\lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{2}+\lambda}{\sqrt{2}-\lambda}\right)_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lg(1+\sqrt{2}),$$

откуда, наконец,

$$L' = \frac{T\rho I^2}{2\pi l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lg(1+\sqrt{2}) - 1\right).$$

Если не накладывать на величину $\frac{\pi h}{l}$ определенного значения, то аналогичное вычисление приводит к формуле:

$$L' = \frac{T\rho I^2}{2\pi l}\left(\frac{2\pi h u_0}{I} - 1\right),$$

или еще:

$$L' = \frac{T\rho I^2}{2\pi l}\left(\frac{\pi h}{l}\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l} - 1\right).$$

Из всего предшествующего вытекает, что

$$\int_0^T W dt = TW_m = L' - L,$$

откуда после приведений и приняв во внимание значение $T = \frac{l}{V-u_0}$, имеем:

$$W_m = \frac{\rho I h}{l}(2u_0 - V) - \frac{\rho I^2}{2\pi l},$$

или еще:

$$W_m = -\frac{\rho I h}{T} + \frac{\rho I^2}{2\pi l}\left(\frac{\pi h}{l}\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l} - 1\right).$$

Таково теоретическое выражение, полученное Карманом для среднего сопротивления при сделанных предположениях.

Метод J. L. Synge. Методом более полного приближения, полезность которого мы отметим в дальнейшем, Synge (Proc. Roy. Irish. Acad., t. XXXVII A, 1927, p. 95) пришел к той же формуле для сопротивления. В виду важности вопроса, мы изложим здесь этот новый метод.

Простой процесс, примененный выше, не свободен от двух следующих упреков: прежде всего мы провели вычисления, допустив, что движение на больших расстояниях квази-перманентно; с другой стороны, поле скоростей позади тела вычислено в предположении, что имеются две вихревые альтернированные цепочки, неограниченно простирающиеся в обоих направлениях. И в действительности, весьма вероятно, допущенная таким образом ошибка весьма незначительна, так как, если поместиться позади на большом расстоянии от тела, то

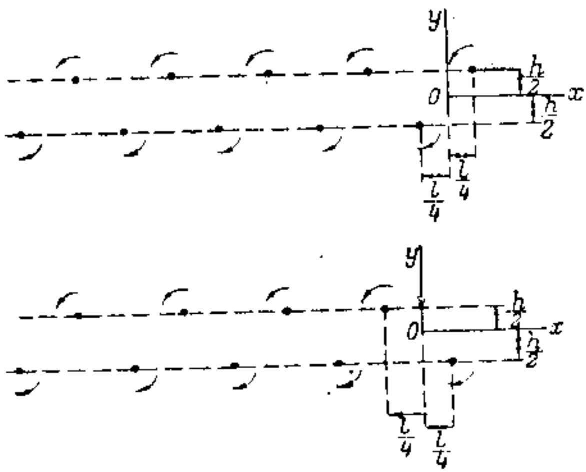

Рис. 17.

вихри, незаконно введенные впереди, дадут для скоростей слагаемые, которыми, очевидно, можно пренебречь.

Но мы не знаем в точности, каков порядок приближения, полученного таким образом, и наше рассуждение, несколько грубое, может внушать некоторые опасения.

Альтернированные вихревые цепочки, неограниченно простирающиеся в одну сторону. Мы начнем с рассмотрения, каковы скорости в жидкости, покоящейся на бесконечности, происходящие от двойного ряда вихрей, интенсивности $\pm I$, расположенных, как указано на одном или другом из приведенных здесь чертежей, где, как видим, имеется только один вихрь справа от оси Oy; вихри верхнего ряда имеют интенсивность I, нижнего $-I$; верхняя цепочка соответствует аффиксам:

$$\varepsilon \frac{l}{4} + i \frac{h}{2} - nl,$$

а нижняя цепочка:

$$-\frac{\varepsilon l}{4}-\frac{ih}{2}-nl,$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$ и $\varepsilon=\pm 1$, соответственно первой или второй конфигурации.

Имея это, положим:

$$\lambda=\frac{\varepsilon l}{4}+\frac{ih}{2};$$

комплексная скорость в точке жидкости z, происходящая от рассматриваемых вихрей, дается уравнением:

$$w=u-iv=\frac{I}{2i\pi}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\lambda+nl}-\frac{1}{z+\lambda+nl}\right). \tag{1}$$

Очевидно, весьма естественно, что это выражение может быть аппроксимировано с помощью классической формулы, касающейся функции Гамма (см. Гурса, Курс математического анализа, т. II):

$$\frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)}+\gamma=-\frac{1}{\zeta}-\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta+n}-\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

где γ означает постоянную Эйлера. Можно тогда написать:

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{z-\lambda}{l}+n}-\frac{1}{n}\right)=-\frac{l}{z-\lambda}-\gamma-\frac{\Gamma'\left(\frac{z-\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{z-\lambda}{l}\right)},$$

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{z+\lambda}{l}+n}-\frac{1}{n}\right)=-\frac{l}{z+\lambda}-\gamma-\frac{\Gamma'\left(\frac{z+\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+\lambda}{l}\right)}$$

и так как уравнению (1) можно придать вид:

$$\frac{2i\pi l}{I}(u-iv)=\frac{l}{z-\lambda}-\frac{l}{z+\lambda}+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{z-\lambda}{l}+n}-\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{\frac{z+\lambda}{l}+n}-\frac{1}{n}\right)\right],$$

то заключаем непосредственно, что

$$\frac{2i\pi l}{I}(u-iv)=\frac{\Gamma'\left(\frac{z+\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+\lambda}{l}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{z-\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{z-\lambda}{l}\right)}. \tag{3}$$

Эта формула в дальнейшем будет нами использована.

Новое применение теоремы количеств движения. Рассмотрим теперь наш цилиндр, для которого C есть контур пересечения цилиндра плоскостью xOy. Вообразим себе явления таким образом, что цилиндр неподвижен, а скорость жидкости равна V на бесконечности вверх по течению. Пусть Ox и Oy неподвижные прямоугольные оси, из которых первая параллельна $-V$, начертим кривую C', на большом расстоянии от C и не проходящую ни через один вихрь; на C' движение будет безвихревое. Мы будем предполагать вполне ясным, что позади установился режим альтернированных вихрей, сделавшийся вполне правильным и соответствующим много раз уже описанной схеме в области, где проходит C'. Рассмотрим количество движения жидкости, содержащейся в момент t в пространстве, заключенном между C и C', и рассмотрим эту движущуюся жидкую массу, принимая во внимание также движение жидких молекул на границе C'. Это количество движения имеет проекциями

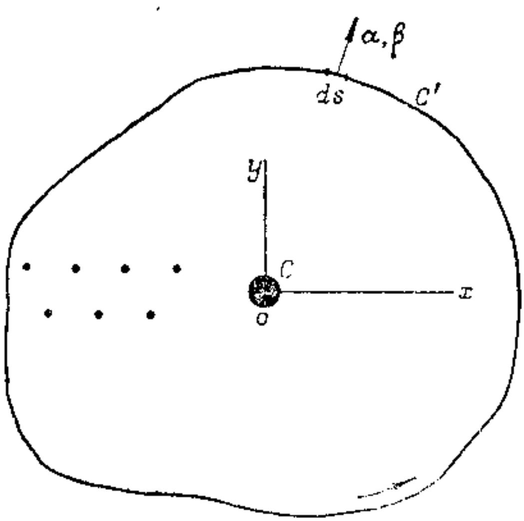

Рис. 18.

$$\iint \rho u d\sigma, \quad \iint \rho v d\sigma;$$

u и v обозначает составляющие скорости относительно твердого тела, а интегралы распространяются на площадь между C и C'. Называя $-X$, $-Y$ составляющие сопротивления, испытываемого цилиндром (на единицу длины в направлении его образующих), видим, что единственными внешними силами, действующими на рассматриваемую массу, являются: сопротивление, но с измененным знаком и, с другой стороны, давление, происходящее от наличия жидкости вне C'. Следовательно, можно написать:

$$\frac{d}{dt}\iint \rho u d\sigma = X - \int_{C'} p dy, \quad \frac{d}{dt}\iint \rho v d\sigma = Y + \int_{C'} p dx,$$

или иначе

$$\frac{d}{dt}\iint \rho(u - iv) d\sigma = X - iY - \int_{C'} p(dy + idx).$$

Но обозначая через (α, β) направляющие косинусы внешней нормали к C' $\left(\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \beta = -\frac{dx}{ds}\right)$, видим, что полная производная $\frac{d}{dt}$ запишется:

$$\frac{d}{dt}\int\int \rho(u-iv)\,d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int\int \rho(u-iv)\,d\sigma + \int_{C'}\rho(u-iv)(\alpha u+\beta v)\,ds,$$

уравнение, в котором $\frac{\partial}{\partial t}$ представляет производную, взятую в предположении, что контур C' **неподвижен**.

Но на C' имеем классическое уравнение

$$p = -\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

где φ есть потенциал скоростей. Отсюда заключаем, что

$$X - iY = -\frac{1}{2}\rho\int_{C'}(u^2+v^2)\,(dy+idx) + \rho\int_{C'}(u-iv)\,(\alpha u+\beta v)\,ds +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\int \rho(u-iv)\,d\sigma - \rho\int_{C'}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(dy+idx)$$

или, полагая по обыкновению:

$$z = x+iy, \qquad \chi = \varphi + i\psi,$$

$$X - iY = \frac{\partial}{\partial t}\int\int \rho\,(u-iv)\,d\sigma - \int_{C'}\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(dy+idx) - \frac{i}{2}\int_{C'}\rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2 dz.$$

Предположим теперь, что установился периодический режим, т. е. явление полностью воспроизводится по истечении времени T, и каждый из вихрей альтернированных цепочек перемещается точно на один ранг. Интегрируем предшествующую формулу по времени от $t=0$ до $t=T$; предположение о периодичности уничтожит первый член справа, и, обозначая через X_m и Y_m средние значения X и Y, получаем:

$$T(X_m - iY_m) = -\rho\int_{C'}[\varphi]_0^T\,(dy+idx) - \frac{i\rho}{2}\int_0^T\left\{\int_{C'} w^2 dz\right\}dt. \qquad (4)$$

Мы будем отыскивать значение X_m и Y_m, предполагая в этой формуле, что кривая C' удаляется на бесконечность по всем направлениям. Например, мы возьмем за C' концентрические квадраты (с центром в начале), стороны которых возрастают на $2l$, когда переходят от одного квадрата к следующему.

Пусть C_0' один из таких квадратов, который мы будем рассматривать как неподвижный, но сторона которого выбрана достаточно большой, так что конфигурация вихрей правильна и соответствует альтернированному расположению позади C_0'. Когда переходят от квадрата C' к следующему, число вихрей внутри C' возрастает на две единицы.

Пусть $2N$ число вихрей, расположенных в момент t между C_0' и C'. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_N, \ldots$ аффиксы вихрей верхней цепочки, нумерованные справа налево, а через $z_1', z_2', \ldots, z_N', \ldots$ то же для нижней цепочки; соответствующие интенсивности $+I$ и $-I$.

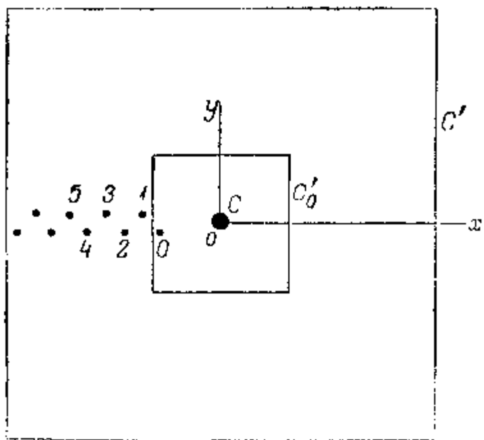

Рис. 19.

Мы начнем, прежде чем производить вычисление, с рассмотрения, как ведут себя w и φ для больших значений $|z|$.

Заметим прежде всего, что разность

$$F(z) = w - \frac{I}{2i\pi} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{z - z_n} - \frac{1}{z - z_n'} \right),$$

которую мы запишем в виде:

$$F(z) = w - \frac{1}{2i\pi} \sum_1^\infty \frac{I_p}{z - z_p}; \ (I_p = \pm I;$$

$$z_p = z_1\, z_2, \ldots, \ldots, z_1', z_2' \ldots), \tag{5}$$

представляет функцию, всегда аналитическую вне квадрата C_0'. Как легко видим, это следует из формул (1), (2) и (3) и классических свойств функции Γ; ряд, стоящий в правой части, стремится к нулю, когда z стремится к бесконечности в направлении, отличном от направления оси x-ов (в отрицательную сторону). Для z равного бесконечности $F(z)$, как и w, должно равняться $-V$, и будем иметь, следовательно, в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$F(z) = -V + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Уравнение (5) позволяет утверждать, что

$$\int_{C_0} w dz = \int_{C_0} F(z)\, dz = 2\, i\pi a_1 = K,$$

где K обозначает циркуляцию вдоль квадрата C_0. Это дает нам значение коэфициента a_1, и можно написать:

$$w = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dz} = -V + \frac{1}{2i\pi}\sum_1^\infty \frac{I_n}{z - z_n} + \frac{K}{2i\pi z} + \frac{a_2}{z^2} + O\left(\frac{1}{|z|^3}\right). \quad (6)$$

Свойство коэфициента a_2. Аффиксы z_n, коэфициент a_2 и другие коэфициенты, фигурирующие в разложении по степеням $\frac{1}{z}$, которые представлены через $O\left(\frac{1}{|z|^3}\right)$, являются функциями времени t. Но если мы предположим, что движение периодическое с периодом T, то функция w примет в точности то же значение, когда t возрастет на T. Если же мы рассмотрим ряд $\sum_1^\infty \frac{I_n}{z - z_n}$, стоящий на втором месте справа в равенстве (6), то мы видим, что в промежуток времени от O до T каждый вихрь изменит свой номер на единицу и ряд видоизменится благодаря уничтожению двух членов $\left(\frac{I}{z - z_1} - \frac{I}{z - z_1'}\right)$, так что при обозначениях, которые сами по себе понятны, имеем:

$$[w]_0^T = -\frac{I}{2i\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_1'}\right) + \frac{[a_2]_0^T}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Но при больших значениях $|z|$ напишем:

$$[w]_0^T = -\frac{I}{2i\pi z}\left[\frac{z_1 - z_1'}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] + \frac{[a_2]_0^T}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Так как это выражение должно обращаться в нуль при всяком z, то отсюда вытекает, между прочим, условие:

$$[a_2]_0^T = \frac{I(z_1 - z_1')}{2i\pi},$$

или иначе

$$[a_2]^T{}_0 = \frac{I}{2i\pi}\left(\frac{\varepsilon l}{2} + ih\right),$$

где $\varepsilon = \pm 1$, в соответствии с тем, находится z_1 справа или слева от вертикали, проходящей через z_1'.

Если положить $a_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, где α_2 и β_2 вещественны, то получим:

$$[\alpha_2]_0^T = \frac{Ih}{2\pi}; \quad [\beta_2]_0^T = -\frac{I\varepsilon}{4\pi}.$$

Выражение для $[\varphi]_0^T$ на больших расстояниях. Из уравнения (6) получаем непосредственно:

$$\varphi + i\psi = -Vz + \frac{1}{2i\pi}\sum_1^\infty I_n \lg(z - z_n) +$$
$$+ \frac{K}{2i\pi}\lg z - \frac{a_2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

откуда

$$\varphi = -Vx + \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty I_n \arg(z - z_n) + \frac{K}{2\pi}\arg z - \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y}{x^2 + y^2} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \quad (7)$$

и, следовательно,

$$[\varphi]_0^T = \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty I_n \delta\arg(z - z_n) - \frac{Ih}{2\pi}\,\frac{x}{x^2 + y^2} +$$
$$+ \frac{I\varepsilon}{4\pi}\,\frac{y}{x^2 + y^2} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Теперь мы сможем приступить к вычислению выражений, стоящих во второй части формулы (4).

Вычисление выражения $\lim \int\limits_{C'} [\varphi]_0^T\,(dy + idx)$. Интеграл, имеющийся здесь, берется вдоль сторон квадрата C_1', которые изображаются уравнениями $x = \pm R$, $y = \pm R$ соответственно. Прежде чем его вычислять, заметим, что в формуле (7) можно пренебречь членами $O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$, имея в виду, что в пределе, при R бесконечном, они дадут нуль. Нам нужно прежде всего заняться выражением:

$$\lim D = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'} \sum I_p \delta\arg(z - z_p)\,(dy + idx) =$$
$$= \frac{I}{2\pi}\int\limits_{C'} \{\delta\arg(z - z_1) + \delta\arg(z - z_2) + \ldots -$$
$$- \delta\arg(z - z_1') - \delta\arg(z - z_2') - \ldots\}\,(dy + idx).$$

Но так как вихрь z_1 перейдет в z_2 по истечении времени T, z_2 в z_3 и т. д., мы видим, что изменения аргументов будут равны углам $\widehat{z_1 z z_2}$, $\widehat{z_2 z z_3}$, ..., и мы будем иметь следующую формулу:

$$\sum I_p \delta \arg(z - z_p) = I \times (\alpha' - \alpha) = I \times \widehat{z_1 z z_1'},$$

и элементарное рассмотрение различных возможных случаев расположения на чертеже показывает, что угол $\widehat{z_1 z z_1'}$ имеет значение, близкое к нулю, когда z расположен на сторонах квадрата C', **к р о м е л е в о й в е р т и к а л ь н о й с т о р о н ы**, между двумя вихревыми цепочками, где его значение близко к 2π.

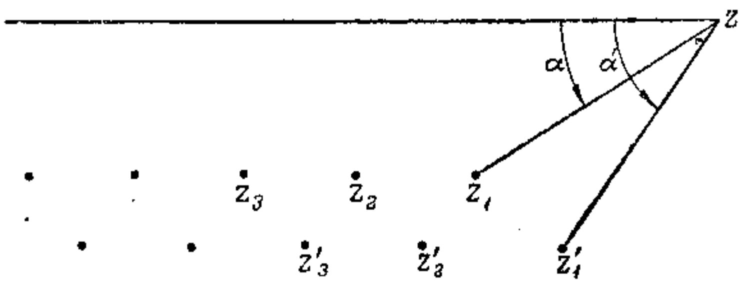

Рис. 20.

Заметив это, вычислим сперва значение D_1, т. е. ту часть D, которая соответствует **г о р и з о н т а л ь н ы м** сторонам квадрата. Подинтегральная функция стремится к нулю вместе с $\frac{1}{R}$, но путь интеграции становится бесконечным, так что значение предела не является очевидным a priori. Но мы находим непосредственно:

$$D_1 = -\frac{iI}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \left(\operatorname{arctg} \frac{R - y_1'}{x - x_1'} - \operatorname{arctg} \frac{R - y_1}{x - x_1} \right) dx +$$

$$+ \frac{iI}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \left(\operatorname{arctg} \frac{-R - y_1'}{x - x_1'} - \operatorname{arctg} \frac{-R - y_1}{x - x_1} \right) dx,$$

или иначе

$$D_1 = \frac{iI}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \left(\operatorname{arctg} \frac{x - x_1'}{R - y_1'} + \operatorname{arctg} \frac{x - x_1'}{R + y_1'} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{x - x_1}{R - y_1} - \operatorname{arctg} \frac{x - x_1}{R - y_1} \right) dx,$$

arctg везде имеют главные значения.

Элементарный подсчет дает:

$$\int \operatorname{arctg} \frac{x - x_1'}{R - y_1'}\, dx = (x - x_1') \operatorname{arctg} \frac{x - x_1'}{R - y_1'} -$$

$$- \frac{R - y_1'}{2} \lg \left[(x - x_1')^2 + (R - y_1')^2 \right],$$

так что D_1 будет суммой четырех членов, первый из которых запишется:

$$E_1 = \frac{iI}{2\pi} \left\{ (R - x_1') \operatorname{arctg} \frac{R - x_1'}{R - y_1'} - (R + x_1') \operatorname{arctg} \frac{R + x_1'}{R - y_1'} - \right.$$

$$- \frac{R - y_1'}{2} \lg \left[(R - x_1')^2 + (R - y_1')^2 \right] +$$

$$\left. + \frac{R - y_1'}{2} \lg \left[(R + x_1')^2 + (R - y_1')^2 \right] \right\}.$$

Но имеем:

$$\operatorname{arctg} \frac{R - x_1'}{R - y_1'} = \frac{\pi}{4} + \frac{y_1' - x_1'}{2R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

$$\lg \left[(R - x_1')^2 + (R - y_1')^2 \right] = \lg 2 + 2 \lg R - \frac{x_1' + y_1'}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Следовательно, пренебрегая членами порядка $\frac{1}{R}$:

$$\lim E_1 = \frac{iI}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} x_1' \right),$$

и дальше, с тем же приближением:

$$\lim D_1 = -\frac{iI}{4} \{ x_1' + x_1' - x_1 - x_1 \} = \frac{iI}{2} (x_1' - x_1) = \frac{iIl}{4} \varepsilon;$$

где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от того, находится вихрь z_1 справа или слева от z_1'.

Рассмотрим теперь то, что относится к вертикальным сторонам квадрата C'. Вне отрезка, определенного равенством $z = -R + iy$ $\left(|y| < \frac{h}{2} \right)$, интеграл будет при соответствующих пределах:

$$\frac{I}{2\pi} \int \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_1'}{R - x_1'} - \operatorname{arctg} \frac{y - y_1}{B - x_1} \right) dy;$$

на правой стороне надо интегрировать между $-R$ и $+R$, на левой между $-R$ и $-\frac{h}{2}$, далее, между $\frac{h}{2}$ и R (меняя знак результата).

Но имеем, как и выше:

$$m(y) = \int \operatorname{arctg} \frac{y - y_1'}{R - x_1'}\, dy =$$

$$= (y - y_1') \operatorname{arctg} \frac{y - y'}{R - x_1'} - \frac{R - x_1'}{2} \lg \left[(y - y_1') + (R - x_1')^2 \right],$$

и, следовательно, часть D, соответствующая правой вертикальной стороне, будет:

$$D_2 = \frac{I}{2\pi} \left\{ (R - y_1') \operatorname{arctg} \frac{R - y_1'}{R - x_1'} - (R + y_1') \operatorname{arctg} \frac{R + y_1'}{R - x_1'} - \right.$$

$$\left. - \frac{R - x_1'}{2} \lg \left[\frac{(R - y_1')^2 + (R - x_1')^2}{(R + y_1')^2 + (R - x_1')^2} \right] - \ldots \right\}.$$

Пропущенные члены выведутся из написанных внутри скобок отбрасыванием штриха и переменой знака.

Рассуждение столь же элементарное, что и выше, дает нам:

$$\lim D_2 = \lim \frac{I}{2\pi} \left\{ (R - y_1') \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x_1' - y_1'}{2R} + \ldots \right) - \right.$$

$$- (R + y_1') \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x_1 + y_1'}{2R} + \ldots \right) -$$

$$\left. - \frac{R - x_1'}{2} \left(\frac{x_1' + y_1'}{R} + \frac{x_1' - y_1'}{R} + \ldots \right) \right\} =$$

$$= \frac{I}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} y_1' + \frac{\pi}{2} y_1 \right) = \frac{Ih}{4}.$$

Что касается значения интеграла вдоль левой стороны, то нужно вести интеграцию, исключая ту часть, которая находится между двумя вихревыми цепочками, приняв также во внимание изменившееся направление обхода.

Получаем, таким образом, выражение

$$D_3 = \frac{I}{2\pi} \int_{-R}^{-\frac{h}{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_1'}{R + x_1'} + \operatorname{arctg} \frac{y - y_1}{R + x_1} \right) dy +$$

$$+ \frac{I}{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{R} \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_1'}{R + x_1'} - \operatorname{arctg} \frac{y - y_1}{R + x_1} \right) dy.$$

Неопределенный интеграл $p(y)$ выводится из $m(y)$ простым изменением знака x_1' и x_1, так что получаем:

$$D_3 = \frac{I}{2\pi}\left\{p(R) - p(-R) - \left[p\left(\frac{h}{2}\right) - p\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\right\}.$$

Слагаемое $\frac{I}{2\pi}[p(R) - p(-R)]$ воспроизводит очевидно D_2, т. е. $\frac{Ih}{4}$ в пределе (так как изменение знака x_1' и x_1 не оказывает влияния на значение D_2). Что же касается остающегося слагаемого D_3, которое назовем D_3', то оно запишется:

$$D_3' = -\frac{I}{2\pi}\left\{\left(\frac{h}{2} - y_1'\right)\operatorname{arctg}\frac{\frac{h}{2} - y_1'}{R + x_1'} - \frac{R + x_1'}{2}\lg\left[\left(\frac{h}{2} - y_1'\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + (R + x_1')^2\right] - \left(\frac{h}{2} + y_1'\right)\operatorname{arctg}\frac{\frac{h}{2} + y_1'}{R + x_1'} +$$

$$\left. + \frac{R + x_1'}{2}\lg\left[\left(\frac{h}{2} + y_1'\right)^2 + (R + x_1')^2\right] + \cdots\right\};$$

строка, заполненная точками, представляет члены, аналогичные ранее написанным, но с измененными знаками и отброшенными штрихами. Совершенно ясно, что это выражение D_3' стремится к нулю вместе с $\frac{1}{R}$.

Сумма слагаемых, соответствующих вертикальным сторонам, равна $\frac{Ih}{2}$, если отвлечься от той части пути интеграции, которая лежит между вихрями.

Остается та часть, которая происходит от интеграции, между $\frac{h}{2}$ и $-\frac{h}{2}$, элемента $\frac{I}{2\pi}(\widehat{z_1 z z_1'})\,dy$, где $\widehat{z_1 z z_1'}$ стремится к 2π, для бесконечного R. В пределе имеем, очевидно:

$$-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} I\,dy = -Ih;$$

складывая, имеем окончательно:

$$\lim D = \frac{iIle}{4} - \frac{Ih}{2}.$$

Возвращаясь к формуле (7), видим, что нам остается вычислить то, что происходит от двух членов $-\frac{Ih}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{Il\varepsilon}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ после интеграции вдоль сторон квадрата.

Первый из этих членов даёт непосредственно выражение

$$-\frac{Ih}{2\pi}\left[\int_{-R}^{+R}\frac{Rdy}{R^2+y^2}-\int_{-R}^{+R}\frac{-Rdy}{R^2+y^2}\right]=-\frac{Ih}{2}.$$

Те части, которые соответствуют горизонтальным сторонам, взаимно уничтожаются. Подобным же образом находим для второго рассматриваемого члена:

$$-\frac{Il\varepsilon i}{2\pi}\int_{-R}^{+R}\frac{Rdx}{R^2+x^2}=-\frac{Il\varepsilon i}{4}.$$

Складывая все полученные результаты, имеем окончательно:

$$\lim\int_{C'}[\varphi]_0^T(dy+idx)=-Ih. \tag{8}$$

Вычисление интеграла $\int_{C'} w^2\,dz$ и его предела. Переходим теперь к рассмотрению последнего члена в правой части формулы (4). Так как интеграция ведется по C', то мы применяем то же выражение (6) для w, что и выше, и видим, что здесь члены порядка $\frac{1}{z^2}$ дадут в пределе выражения, обращающиеся в нуль, и мы сможем написать:

$$\mathrm{J}=\lim\int_{C'}w^2dz=\lim\int_{C'}\left[-V+\frac{K}{2i\pi z}+\frac{1}{2i\pi}\sum_1^\infty\frac{I_n}{z-z_n}\right]^2dz=\lim L,$$

полагая

$$L=\int_{C'}\left[V^2-\frac{K^2}{4\pi^2z^2}+\frac{iKV}{\pi z}+\frac{iV}{\pi}\sum_1^\infty\frac{I_n}{z-z_n}-\right.$$

$$\left.-\frac{K}{2\pi^2z}\sum_1^\infty\frac{I_n}{z-z_n}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_1^\infty\sum_1^\infty\frac{I_nI_p}{(z-z_n)\,(z-z_p)}\right]dz.$$

В фигурирующих здесь суммах, вполне понятно, надо понимать суммирования, произведенные вне C_0, по д в у м вихревым цепочкам, беря попеременно вихрь сверху и снизу.

В этом последнем интеграле, подинтегральная функция аналитическая в C', за исключением $2N$ точек $z_1, z_2\ldots z_N\ldots z_1', z_2'\ldots z_N'$ и точки $z=0$. Вычеты будут равны:

для $z = 0$,

$$\frac{iKV}{\pi} + \frac{K}{2\pi^2} \sum_1^\infty \frac{I_n}{z_n},$$

для $z = z_n$,

$$\frac{iVI_n}{\pi} - \frac{KI_n}{2\pi^2 z_n} - \frac{I_n}{2\pi^2} \sum_1^\infty{}' \frac{I_p}{z_n - z_p}.$$

Штрих указывает, что при суммировании значение $p = n$ исключено.

Сумма этих вычетов P будет, следовательно:

$$P = \frac{iKV}{\pi} + \frac{K}{2\pi^2} \sum_1^\infty \frac{I_n}{z_n} + \frac{iV}{\pi} \sum_1^{2N} I_n -$$

$$- \frac{K}{2\pi^2} \sum_1^{2N} \frac{I_n}{z_n} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_1^{2N} \sum_1^\infty{}' \frac{I_n I_p}{z_n - z_p},$$

но мы имеем

$$\sum_1^{2N} I_n = 0,$$

так как I_n принимает попеременно значения $\pm I$; с другой стороны,

$$\sum_1^\infty \frac{I_n}{z_n} - \sum_1^{2N} \frac{I_n}{z_n}$$

стремится к нулю вместе с $\frac{1}{N}$, т. е. вместе с $\frac{1}{R}$, так что останется в конечном итоге:

$$\lim P = \frac{iKV}{\pi} - \frac{1}{2\pi^2} \lim_{N=\infty} \sum_1^\infty \sum_1^\infty{}' \frac{I_n I_p}{z_n - z_p},$$

или, опуская члены, равные нулю:

$$\lim P = \frac{iKV}{\pi} - \frac{1}{2\pi^2} \lim \sum_1^{2N} \sum_{2N+1}^\infty \frac{I_n I_p}{z_n - z_p}, \tag{9}$$

или, наконец,

$$\lim P = \frac{iKV}{\pi} - \frac{1}{2\pi^2} \lim \sum_1^{2N} I_n \left(\sum_{2N+1}^\infty \frac{I_p}{z_n - z_p} \right). \tag{10}$$

Выражение же

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{2N+1}^\infty \frac{I_p}{z_n - z_p}$$

представляет комплексную скорость в точке z_n, происходящую от совокупности вихрей, расположенных после обтекаемого тела позади квадрата C'. Эта комплексная скорость совпадает, следовательно, с выражением (1), вычисленным выше, если в этой последней заменить z через $z_n+(N+1)l$ и, значит, согласно (3), будем иметь равенство:

$$\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{I_p}{z_n-z_p}=$$

$$=\frac{I}{l}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{z_n+\lambda+(N+1)l}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{z_n+\lambda+(N+1)l}{l}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{z_n-\lambda+(N+1)l}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{z_n-\lambda+(N+1)l}{l}\right)}\right].$$

Но мы имеем здесь:

$$z_n=\lambda-nl,\ \text{при}\ I_n=I,\quad \text{для}\ n\ \text{нечетного}$$

и

$$z_n=-\lambda-nl,\ \text{при}\ I_n=-I,\ \text{для}\ n\ \text{четного.}$$

Таким образом, имеем отсюда:

$$\lim P=\frac{iKV}{\pi}-\lim\frac{I^2}{2\pi^2 l}\left\{\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{2\lambda}{l}+N\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{l}+N\right)}-\frac{\Gamma'(N)}{\Gamma(N)}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{2\lambda}{l}+N-1\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{l}+N-1\right)}-\frac{\Gamma'(N-1)}{\Gamma(N-1)}\right]+\ \dots$$

$$+\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{2\lambda}{l}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{l}+1\right)}-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right]-$$

$$-\left[\frac{\Gamma'(N)}{\Gamma(N)}-\frac{\Gamma'\left(-\frac{2\lambda}{l}+N-1\right)}{\Gamma\left(-\frac{2\lambda}{l}+N-1\right)}\right]-\ \dots$$

$$\left.-\left[\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(-\frac{2\lambda}{l}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{2\lambda}{l}+1\right)}\right]\right\},$$

или еще:

$$\lim P = \frac{iKV}{\pi} + \frac{I^2}{2\pi^2 l}\sum_1^\infty \left\{ 2\,\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma'\left(n+\frac{2\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{2\lambda}{l}\right)} - \frac{\Gamma'\left(n-\frac{2\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{2\lambda}{l}\right)} \right\}.$$

Наконец, ясно, что

$$J = 2i\pi \lim P$$

и что, следовательно,

$$\lim J = -2KV + \frac{iI^2}{\pi l}\sum_1^\infty \left\{ 2\,\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma'\left(n+\frac{2\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{2\lambda}{l}\right)} - \frac{\Gamma'\left(n-\frac{2\lambda}{l}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{2\lambda}{l}\right)} \right\}. \tag{11}$$

Теперь важно подсчитать, имея в виду внести его в формулу (4) для сопротивления, выражение

$$\int_0^T (\lim J)\,dt. \tag{12}$$

С этой целью Synge весьма изящным образом преобразует правую часть (11), используя классическую теорию функции Γ. Известно, что если ζ обладает положительной вещественной частью, то (см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа):

$$\frac{\Gamma'(\zeta)}{\Gamma(\zeta)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\xi}}{\xi} - \frac{e^{-\zeta\xi}}{1-e^{-\xi}} \right) d\xi. \tag{13}$$

При помощи этого результата можем уравнение (11) записать:

$$\lim J = -2KV + \frac{2iI^2}{\pi l}\sum_1^\infty \int_0^\infty \left(\cosh\frac{2\lambda\xi}{l} - 1 \right) \frac{e^{-n\xi}}{1-e^{-\xi}}\,d\xi,$$

и, следовательно, упрощая,

$$\lim J = -2KV + \frac{2iI^2}{\pi l}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{(1-e^{-\xi})^2}\left(\cosh\frac{2\lambda\xi}{l} - 1 \right) d\xi. \tag{14}$$

Заметим теперь, что в течение интервала времени $(0, T)$ из квадрата C_0 выходят два вихря с интенсивностями $+I$ и $-I$, так что в течение половины интервала $(0, T)$ K равно $K_0 - \frac{I}{2}$, а в течение другой половины $K_0 + \frac{I}{2}$; скачок происходит в момент выхода вихря. K_0 обозначает, очевидно, циркуляцию вокруг цилиндра C, которая может быть нулем.

Следовательно, в интеграле (12) первый член из (14) дает величину $-2\ VTK_0$ или нуль, если циркуляция равна нулю вокруг погруженного твердого тела.

Чтобы подсчитать, что происходит из второго члена (14), замечаем, что $\lambda = \frac{\epsilon l}{4} + \frac{ih}{2}$ и что в течение первой половины интервала $(0,\ T)$ надо взять $\epsilon = +1$, а в течение второй $\epsilon = -1$; перемена знака, как и выше, происходит в тот момент, когда вихрь пересекает сторону C_0. В результате в (12) надо ввести тогда $\frac{i\Gamma^2 T}{\pi l}\Omega$, полагая

$$\Omega = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{(1-e^{-\xi})^2}\left[\cosh\frac{\xi}{l}\left(\frac{l}{2}+ih\right)+\cosh\frac{\xi}{l}\left(-\frac{l}{2}+ih\right)-2\right]d\xi,$$

или иначе

$$\Omega = 2\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{(1-e^{-\xi})^2}\left(\cosh\frac{\xi}{2}\cos\frac{h\xi}{l}-1\right)d\xi.$$

Элементарным путем находим:

$$\int \frac{e^{-\xi}\,d\xi}{(1-e^{-\xi})^2} = -\frac{1}{1-e^{-\xi}},$$

$$\int \frac{e^{-\xi}\cosh\frac{\xi}{2}\,d\xi}{(1-e^{-\xi})^2} = -\frac{1}{2\sinh\frac{\xi}{2}}.$$

Затем интегрирование по частям дает:

$$\Omega = \left(\frac{2}{1-e^{-\xi}}-\frac{\cos\frac{h\xi}{l}}{\sinh\frac{\xi}{2}}\right)_0^\infty - \frac{h}{l}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{h\xi}{l}}{\sinh\frac{\xi}{2}}\,d\xi.$$

Сразу видим, что скобки равны $\dfrac{e^{\frac{\xi}{2}}-\cos\frac{h\xi}{l}}{\sinh\frac{\xi}{2}}$, так что проинтегрированная часть сводится к единице. Для оставшегося интеграла можем, кроме того, написать, согласно (13):

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{h\xi}{l}}{\sinh\frac{\xi}{2}}\,d\xi = -i\int_0^\infty \frac{e^{\frac{ih\xi}{l}}-e^{-\frac{ih\xi}{l}}}{e^{\frac{\xi}{2}}-e^{-\frac{\xi}{2}}}\,d\xi =$$

$$= i\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{\xi}{2}-\frac{ih\xi}{l}}}{1-e^{-\xi}} - \frac{e^{-\frac{\xi}{2}+\frac{ih\xi}{l}}}{1-e^{-\xi}}\right)d\xi =$$

$$= -\int_0^\infty \left\{\left[\frac{e^{-\xi}}{\xi} - \frac{e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{ih}{l}\right)\xi}}{1-e^{-\xi}}\right] - \left[\frac{e^{-\xi}}{\xi} - \frac{e^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{ih}{l}\right)\xi}}{1-e^{-\xi}}\right]\right\}d\xi =$$

$$= -i\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\frac{ih}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{ih}{l}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}-\frac{ih}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{ih}{l}\right)}\right].$$

Это выражение, в силу (2), можно написать в виде:

$$i\sum_0^\infty \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{ih}{l}+n} - \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{ih}{l}+n}\right],$$

или еще:

$$\frac{8h}{l}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2+\frac{4h^2}{l^2}},$$

или, наконец, согласно элементарной формуле,

$$\pi \operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l}.$$

В конце концов получаем:

$$\Omega = 1 - \frac{\pi h}{l}\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l},$$

и, следовательно, имеем:

$$\int_0^T (\lim J)\,dt = -2VTK_0 + \frac{iI^2T}{\pi l}\left(1-\frac{\pi h}{l}\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{l}\right). \tag{15}$$

Заключение. Внося в (4) выражения (8) и (15) и беря вещественные части, мы получаем, наконец:

$$TX_m = \rho Ih + \rho \frac{I^2 T}{\pi l}\left(1 - \frac{\pi l}{l} \operatorname{tgh} \frac{\pi h}{l}\right),$$

что и является формулой Кармана, уже полученной нами ранее более элементарным способом [X_m совпадает с $(-W_m)$ в формуле Кармана].

Оба метода, из которых последний очевидно более точен, приводят к одному и тому же результату. Однако, мы изложили оба метода.

Заметим в заключение, что мнимые части уравнения (4) дают соотношение

$$Y_m = -\rho V K_0,$$

что является в данном случае не чем иным, как теоремой Жуковского относительно сопротивления цилиндра, вокруг которого существует циркуляция K_0.

ГЛАВА VI

РАЗЛИЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ. ВИХРЕВЫЕ ЦЕПОЧКИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЖИДКОСТИ

В предшествующих параграфах предполагались вихри (цилиндрические бесконечно тонкие), расположенные в бесконечной жидкости, которую мы рассматривали только в сечении плоскостью xOy. Можно также, как показал F. Jaffe (Annalen der Physik, 61, 1920, p. 173), обобщить эти результаты, чтобы легко получить уравнения, соответствующие случаю системы вихрей в жидкости, содержащейся между неподвижными стенками.

Система n вихрей между двумя параллельными стенками. Мы выберем оси так, чтобы эти две стенки D_1 и D_2 изображались уравнениями

$$x=0 \quad \text{и} \quad x=\frac{d}{2},$$

и мы положим, что

$$z_k = a_k + ib_k$$

обозначает положение в момент t вихря с интенсивностью I_k. Присоединим к заданной системе вихрей S систему S', образованную n новыми вихрями, симметричными первым относительно D_2:

$$I_{n+k} = -I_k, \quad a_{n+k} = d - a_k, \quad b_{n+k} = b_k. \tag{1}$$

Затем будем присоединять неограниченно новые вихри путем отображения. Мы будем иметь тогда $2n$ вихревых цепочек, горизонтальных, аналогичных тем, что мы рассматривали в предшествующих параграфах; ясно, что соответствующий комплексный потенциал будет

$$\chi_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = \frac{1}{2i\pi}\sum_{1}^{2n} I_k \lg \sin\frac{\pi}{d}(z - z_k), \tag{2}$$

если предположить, как это делалось нами и прежде, что скорости равны нулю на очень больших расстояниях; мы предположили, следовательно, что скорости равны нулю при бесконечном y.

Ничто не мешает нам еще предположить, что совокупность наших вихрей, так же, как и вся жидкость, имеет поступательное движение параллельно оси Oy; твердые стенки при этом сохраняются (в дальнейшем мы увидим полезность этого замечания), но в данный момент мы не будем делать это допущение. Чрезвычайно легко увидеть, что написанная функция χ_1 удовлетворяет условию покоя при бесконечном y.

Кроме того функция χ_1 такова, что всякий вихрь и всякая точка, полученная как отображение вихря, будет являться полюсом первого порядка для $\frac{d\chi_1}{dz}$ с главной частью, равной $\frac{I_k}{2i\pi}\frac{1}{z-z_k}$. Это условие, присоединенное к условию покоя на бесконечности, определяет вполне функцию χ_1 (с точностью до постоянной, которая очевидно не играет никакой роли).

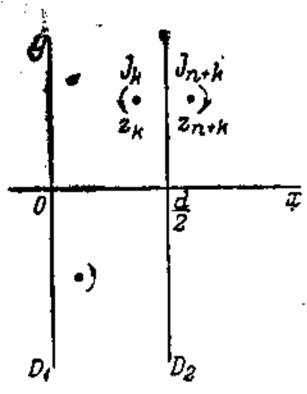

Рис. 21.

В самом деле, вычитая из $\frac{d\chi_1}{dz}$ функцию

$$\frac{1}{2id}\sum_{1}^{2n} I_k \operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(z-z_k),$$

получаем аналитическую регулярную функцию, не имеющую полюсов на конечном расстоянии, которая является, следовательно, целой функцией. Вычтенная часть дает вещественные скорости на бесконечности в направлении Oy; целая функция дает скорости постоянные или бесконечно большие, соответственно тому, сводится ли она к постоянной или нет. Чтобы выполнилось условие равенства нулю на бесконечности, необходимо выбрать целую функцию равной нулю. Тогда χ_1 определено с точностью до постоянной в форме, данной уравнением (2).

Условия на стенках D_1 и D_2 очевидным образом выполняются; в силу симметрии скорости параллельны стенкам во всякой точке D_1 и D_2; имеем:

$$\frac{d\chi_1}{dz}=u-iv=\frac{1}{2id}\sum_{1}^{2n} I_k \operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(z-z_k), \tag{3}$$

откуда непосредственно скорость в точке z:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1}{2d}\sum_{1}^{2n} I_k\frac{\sinh\frac{2\pi}{d}(y-b_k)}{\cosh\frac{2\pi}{d}(y-b_k)-\cos\frac{2\pi}{d}(x-a_k)},\\ v&=\frac{1}{2d}\sum_{1}^{2n} I_k\frac{\sinh\frac{2\pi}{d}(x-a_k)}{\cosh\frac{2\pi}{d}(y-b_k)-\cos\frac{2\pi}{d}(x-a_k)}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В выражении для u соединим попарно члены с I_k и I_{n+k}; мы видим, что они взаимно уничтожаются и что имеем $u=0$ при $x=0$. Аналогичное же получаем для $x=\frac{d}{2}$. Потенциал скоростей φ_1 и функция тока ψ_1 тогда определятся, согласно предшествующему, так:

$$\varphi_1=\frac{1}{2\pi}\sum_1^{2n} I_k\tau_k;\quad \psi_1=-\frac{1}{2\pi}\sum_1^{2n} I_k \lg s_k,$$

где

$$s_k=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(x-a_k)+\sinh^2\frac{\pi}{d}(y-b_k)},\tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\tau_k=\frac{\operatorname{tg}\mathrm{h}\frac{\pi}{d}(y-b_k)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{d}(x-a_k)}.$$

Известно, что для того, чтобы получить скорость перемещения вихря I_k, надо исходить из комплексной скорости $\frac{d\chi_1}{dz}$, вычитая из нее член $\frac{I_k}{2i\pi}\cdot\frac{1}{z-z_k}$, что приводит к отбрасыванию в χ_1 слагаемого

$$\frac{I_k}{2i\pi}\lg(z-z_k),$$

соответствующего самому рассматриваемому вихрю, так как

$$\lim_{z=z_k}\frac{d}{dz}\left[\lg\sin\frac{\pi}{d}(z-z_k)-\lg(z-z_k)\right]=0.$$

Таким образом, не только сам вихрь z_k, но и все вихри горизонтальной цепочки, им порождаемой, не имеют никакого влияния на собственную скорость вихря z_k. Это соответствует результату, уже отмеченному в предшествующем параграфе.

Можно получить для этой собственной скорости формулы, совершенно подобные формулам Гельмгольца, известным нам еще из главы III.

Определим функцию W_1 уравнением

$$W_1=-\frac{1}{2\pi}\sum\sum I_kI_l\lg s_{kl},\tag{6}$$

где суммирование распространено на все пары вихрей системы $(S+S')$, а всякая пара считается только один раз. Имеем, кроме того:

$$s_{kl}=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(a_k-a_l)+\sinh^2\frac{\pi}{d}(b_k-b_l)};\tag{7}$$

тогда уравнения движения для I_k будут:

$$I_k \frac{da_k}{dt} = \frac{\partial W_1}{\partial b_k}; \quad I_k \frac{db_k}{dt} = -\frac{\partial W_1}{\partial a_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{I}$$

Существенно заметить, что в W_1 надо сохранить (a_{n+k}, b_{n+k}), а не выражать их через (a_k, b_k) до выполнения диференцирований. Эти уравнения (I) содержат, следовательно, $4n$ независимых переменных $(a_k, b_k; a_{n+k}, b_{n+k})$. По определению W_1 имеем:

$$\frac{\partial W_1}{\partial a_k} = -\frac{\partial W_1}{\partial a_{n+k}}; \quad \frac{\partial W_1}{\partial b_k} = +\frac{\partial W_1}{\partial b_{n+k}}, \tag{8}$$

как легко заметить, группируя члены, соответствующие I_k, I_l и I_{n+k}, I_{n+l}. Отсюда и из уравнений (I) следует:

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{da_{n+k}}{dt}, \quad \frac{db_k}{dt} = \frac{db_{n+k}}{dt}, \tag{9}$$

что может показаться очевидным в силу симметрии. Достаточно, следовательно, знать только движение системы S.

Формулы (9) означают, что расположение остается симметричным, как это вытекает из уравнений (I) во все время движения, и уравнение (2) для χ_1 все время будет сохранять свою значимость, если только брать за (a_k, b_k) решения (I), полученные интегрированием.

Согласно (6) и (7), очевидно, что

$$\sum_1^{2n} \frac{\partial W_1}{\partial a_k} = \sum_1^{2n} \frac{\partial W_1}{\partial b_k} = 0,$$

что является, кроме того, результатом общих известных теорем. Далее, в силу (8):

$$\sum_1^{n} \frac{\partial W_1}{\partial b_k} = \sum_1^{n} \frac{\partial W_1}{\partial b_{n+k}} = 0, \tag{10}$$

тогда как вообще

$$\sum_1^{n} \frac{\partial W_1}{\partial a_k} = -\sum_1^{n} \frac{\partial W_1}{\partial a_{n+k}} \neq 0.$$

Движение центра тяжести. Предположим, что

$$\sum_1^n I_k \neq 0.$$

Пусть тогда, как обычно, (a_0, b_0) центр тяжести системы вихрей S, так что

$$a_0 \sum_1^n I_k = \sum_1^n a_k I_k, \quad b_0 \sum_1^n I_k = \sum_1^n b_k I_k,$$

и пусть (a_0', b_0') центр тяжести системы S'. Будем иметь, очевидно:

$$a_0' = d - a_0, \quad b_0' = b_0,$$

и уравнения (10) покажут, что

$$\frac{da_0'}{dt} = \frac{da_0}{dt} = 0, \quad \frac{db_0'}{dt} = \frac{db_0}{dt} \quad (\neq 0 \text{ вообще}). \tag{11}$$

Частный случай. Предположим

$$\sum_1^n I_k = 0.$$

Тогда центр тяжести не может быть на конечном расстоянии, а вместо уравнений (11) будем иметь

$$\sum_1^n a_k I_k = \text{const}, \quad \sum_1^n a_{n+k} I_{n+k} = \text{const}, \tag{12}$$

Замечание. Всегда будут иметь место общие теоремы относительно моментов инерции фиктивных масс I_k и моментов количеств движения. Но S и S' туда войдут одновременно, так что результат вычисления не будет здесь представлять большого интереса.

Имеем также очевидный интеграл

$$W_1 = \text{const}, \tag{13}$$

так как

$$\frac{dW_1}{dt} = \sum_1^{2n} \frac{\partial W_1}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial b_k} \frac{db_k}{dt} = 0$$

Пример. Случай единственного вихря I. Здесь

$$I_1 = -I_2 = I.$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = d - a, \quad b_1 = b_2 = 0 \quad \left(0 < a < \frac{d}{2}\right).$$

Имеем здесь для комплексного потенциала и для функции W:

$$\chi = \frac{I}{2i\pi} \lg \frac{\sin \frac{\pi}{d}(x - a + iy)}{\sin \frac{\pi}{d}(x + a + iy)}$$

и

$$W = \frac{I^2}{2\pi} \lg \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{d}(a_1 - a_2)}$$

[a_1 и a_2 при вычислении являются двумя независимыми переменными; не следует заменять a_2 через $d-a$ прежде диференцирований]. Находим, далее:

$$\frac{da}{dt}=0, \quad \frac{db}{dt}=-\frac{I}{2d}\operatorname{ctg}\frac{2\pi a}{d}.$$

Для $a=\frac{d}{4}$ вихрь неподвижен; мы приходим в этом случае к горизонтальной регулярной цепочке (с одинаковым расстоянием между вихрями d), изученной в главе IV. Для $0<a<\frac{d}{4}$ имеем $\frac{db}{dt}<0$; для $\frac{d}{4}<a<\frac{d}{2}$ имеем $\frac{db}{dt}>0$. Для больших значений $\frac{a}{d}$ влияние стенок велико, для $\frac{a}{d}$ малых имеет почти $\frac{db}{dt}=-\frac{1}{4\pi a}$, как и в случае неограниченной жидкости без стенок. Получаем конфигурацию, тождественную с предшествующей, отбрасывая стенку $x=\frac{d}{2}$ и рассматривая два вихря противоположных знаков между стенками $x=0$, $x=d$.

Второй пример. Два равных вихря, расположенных симметрично. Положим:

$$I_1=I_2=I; \quad I_3=I_4=-I,$$

$$a_1=\frac{d}{4}+\xi, \quad a_2=\frac{d}{4}-\xi; \quad b_1=b_3=\eta,$$

$$a_3=\frac{3d}{4}-\xi, \quad a_4=\frac{3d}{4}+\xi; \quad b_2=b_4=-\eta,$$

$$0<|\xi|<\frac{d}{4}.$$

Очевидный подсчет дает:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\frac{I}{2d}\left[\frac{\sinh\frac{4\pi\eta}{d}}{\cosh\frac{4\pi\eta}{d}-\cos\frac{4\pi\xi}{d}}-\operatorname{tgh}\frac{2\pi\eta}{d}\right]$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{I}{2d}\left[\frac{\sin\frac{4\pi\xi}{d}}{\cosh\frac{4\pi\eta}{d}-\cos\frac{4\pi\xi}{d}}+\operatorname{tg}\frac{2\pi\xi}{d}\right].$$

Рассмотрим только два предельных случая. Предположим сперва $\frac{\xi}{d}$ и $\frac{\eta}{d}$ весьма малыми; тогда, пренебрегая величинами третьего порядка, имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{I}{4\pi}\,\frac{\eta}{\xi^2+\gamma^2}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{\xi}{\xi^2+\gamma^2},$$

откуда

$$\xi = \rho_0 \cos(\lambda t + \gamma), \quad \eta = \rho_0 \sin(\lambda t + \gamma), \quad \left(\lambda = \frac{I}{4\pi\rho_0^2}\right);$$

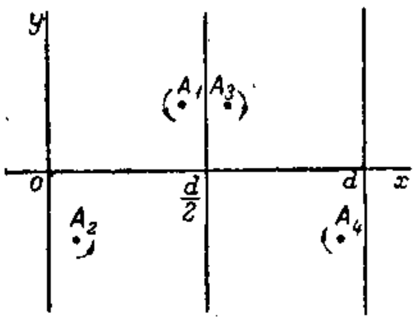

Рис. 22.

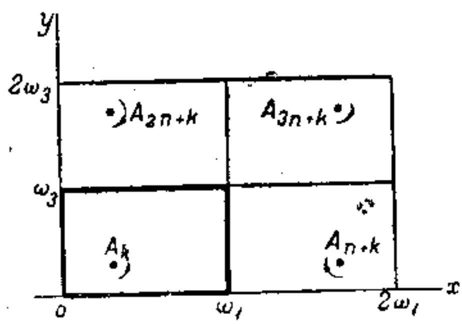

Рис. 23.

два вихря равномерно вращаются по одной и той же окружности, как будто вовсе нет твердых стенок.

Предположим еще, что $\frac{d}{4} - \xi = \varepsilon$ очень мало, а η велико. Тогда $\frac{d\varepsilon}{dt} \sim 0$, $\frac{d\eta}{dt} \sim \frac{I}{4\pi\varepsilon}$ $\left(\text{как и выше при малом } \frac{a}{d}\right)$. В этом примере в соответствии с начальным расположением два вихря описывают замкнутую кривую или же будут двигаться по отдельности под влиянием стенок.

Система вихрей в неподвижном прямоугольнике

Пусть

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \frac{d}{2} = \omega_1, \quad y = \frac{d'}{2} = \frac{\omega_3}{i}$$

стороны прямоугольника и $A_k(z_k)$ один из вихрей интенсивности I_k. Способом отображений относительно прямых $x = \frac{d}{2}$ и $y = \frac{d'}{2}$ мы приведем в соответствие системе S три новых системы S', S'', S''' посредством формул:

$$I_{n+k} = -I_k, \quad a_{n+k} = d - a_k, \quad b_{n+k} = b_k,$$
$$I_{2n+k} = -I_k, \quad a_{2n+k} = a_k, \quad b_{2n+k} = d' - b_k,$$
$$I_{3n+k} = I_k, \quad a_{3n+k} = d - a_k, \quad b_{3n+k} = d' - b_k.$$

Покрытие плоскости сеткой прямоугольников, одинаковых с данным, введет очевидно эллиптические функции периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$; мы возьмем функции $\sigma(z|\omega_1, \omega_3|)$, ζ, $\wp$ и, одновременно, функции $\bar{\sigma}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\wp}$, построенные на периодах:

$$2\omega_1' = \frac{2\omega_3}{i}, \quad 2\omega_3' = 2i\omega_1.$$

Согласно хорошо известным соотношениям однородности (см. Tannery и Molk, III) имеем:

$$\sigma(iz) = i\bar{\sigma}(z),$$
$$\zeta(iz) = -i\bar{\zeta}(z),$$
$$\wp(iz) = -\bar{\wp}(z),$$
$$\wp'(iz) = i\bar{\wp}'(z).$$

Тогда становится почти очевидным, что можно взять за комплексный потенциал, соответствующий нашей системе вихрей S, следующую функцию:

$$\chi_2 = \frac{1}{2i\eta} \sum_1^{4n} I_k \lg \sigma(z - z_k), \tag{14}$$

так как все точки z_k' дадут для χ_2 необходимую нам особенность [1] и мы будем иметь:

$$u - iv = \frac{d\chi_2}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \sum_1^{4n} I_k \zeta(z - z_k). \tag{15}$$

Элементарная формула сложения

$$\zeta(a+b) = \zeta(a) + \zeta(b) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(a) - \wp'(b)}{\wp(a) - \wp(b)}$$

дает:

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{2\pi} \sum_1^{4n} I_k \left[\bar{\zeta}(y - b_k) + \frac{1}{2} \frac{\bar{\wp}'(y - b_k)}{\wp(x - a_k) + \bar{\wp}(y - b_k)}\right] \\
v &= \frac{1}{2\pi} \sum_1^{4n} I_k \left[\zeta(x - a_k) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(x - a_k)}{\wp(x - a_k) + \bar{\wp}(y - b_k)}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

[1] Позже мы вернемся к этому вопросу.

Группируя четыре вихря, соответствующие S, S', S'', S''', непосредственно находим:

$$u=0 \quad \text{для} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=\frac{d}{2},$$
$$v=0 \quad \text{для} \quad y=0 \quad \text{и} \quad y=\frac{d'}{2}.$$

Далее имеем, полагая $\chi_2=\varphi_2+i\psi_2$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2&=\frac{1}{2\pi}\sum_1^{4n} I_k \arg\sigma(z-z_k)\\ \psi_2&=-\frac{1}{2\pi}\sum_1^{4n} I_k \lg S_k\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Здесь S_k представляет модуль $\sigma(z-z_k)$, т. е., в силу классической формулы $\frac{\sigma(a+b)\sigma(a-b)}{\sigma^2(a)\sigma^2(b)}=-[\wp(a)-\wp(b),]$

$$S_k=|\sigma(x-a_k)\bar{\sigma}(y-b_k)|\sqrt{\wp(x-a_k)+\bar{\wp}(y-b_k)}. \tag{18}$$

Если разыскивать собственную скорость вихря (z_k), то нужно отбросить в χ_2 количество $\frac{I_k}{2i\pi}\lg(z-z_k)$. И так как имеем:

$$\lim_{z=z_k}\frac{d}{dz}[\lg\sigma(z-z_k)-\lg(z-z_k)]=0,$$

то это сводится к отбрасыванию члена с I_k в выражении для χ_2. Элементарное вычисление, уже проделанное в аналогичной форме, приведет к следующим результатам: составим функцию

$$W_2=-\frac{1}{2\pi}\sum_k\sum_l I_k I_l \lg S_{kl}, \tag{19}$$

где

$$S_{kl}=|\sigma(a_k-a_l)\bar{\sigma}(b_k-b_l)|\sqrt{\wp(a_k-a_l)+\bar{\wp}(b_k-b_l)} \tag{20}$$

и получаем при $k=1, 2, \ldots 4w$,

$$I_k\frac{da_k}{dt}=\frac{\partial W_2}{\partial b_k}, \quad I_k\frac{db_k}{dt}=-\frac{\partial W_2}{\partial a_k}.$$

Как и выше, нужно остерегаться заменять a_{n+k}, a_{2n+k}, a_{3n+k}, b_{n+k}, b_{2n+k}, b_{3n+k}, их значениями п р е ж д е диференцирования. Легко показать, из условия симметрии, что

$$\frac{da_k}{dt}=-\frac{da_{n+k}}{dt}=\frac{da_{2n+k}}{dt}=-\frac{da_{3n+k}}{dt},$$
$$\frac{db_k}{dt}=\frac{db_{n+k}}{dt}=-\frac{db_{2n+k}}{dt}=-\frac{db_{3n+k}}{dt},$$

т. е., что расположение систем S, S', S'', S''' сохраняет симметрию относительно указанных осей. Таким образом выражение χ_2 сохранит свое значение во всякий момент t, если будем рассматривать (a_k, b_k) как функции времени t, удовлетворяющие вышенаписанным диференциальным уравнениям.

Интеграл $W_2 = \text{const}$ очевиден для этой системы уравнений.

Пример. Случай единственного вихря. Будем иметь для W_2 функцию из шести членов, и получим без труда:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{I}{4\pi}\frac{\bar{\wp}'(2b)}{\wp(2a)+\bar{\wp}(2b)}, \quad \frac{db}{dt} = \frac{I}{4\pi}\frac{\wp'(2a)}{\wp(2a)+\bar{\wp}(2b)}.$$

Умножая на $\wp'(2a)$ и $\bar{\wp}'(2b)$ и складывая, будем иметь интеграл

$$\wp(2a) + \bar{\wp}(2b) = \text{const}.$$

Используя соотношения между $\wp(2a)$ и $\wp'(2a)$, $\bar{\wp}(2b)$ и $\bar{\wp}'(2b)$, а именно:

$$\wp'^2(2a) = 4\wp^3(2a) - g_2\wp(2a) - g_3,$$
$$\bar{\wp}'^2(2b) = 4\bar{\wp}^3(2b) - g_2\bar{\wp}(2b) + g_3,$$

приходим к одной простой квадратуре.

Легко находим:

$$\frac{I}{4C\pi}(t_0 - t) = \int \frac{da}{\sqrt{4[C-\wp(2a)]^3 - g_2[C-\wp(2a)] + g_3}} =$$
$$= \int \frac{da}{\sqrt{-\wp'^2(2a) + 2C\wp''(2a) - 12C^2\wp(2a) + 4C^3}}.$$

Частный случай. Предположим:

$$a = \frac{d}{4} = \frac{\omega_1}{2}, \quad b = \frac{d'}{4} = \frac{\omega_3}{2i};$$

тогда вихрь находится в центре прямоугольника; имеем:

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$$

и вихрь, следовательно, неподвижен.

Рассмотрим случай, весьма близкий к этому предельному, т. е. положим:

$$a = \frac{d}{4} + \varepsilon, \quad b = \frac{d'}{4} + \varepsilon';$$

предполагая, что ε и ε' очень малы сравнительно с d и d', будем иметь приближенно:

$$\wp(2a) + \bar{\wp}(2b) = \wp(\omega_1) + \bar{\wp}\left(\frac{\omega_3}{i}\right) = e_1 - e_3;$$

затем можно написать:

$$\bar{\wp}'^2(2b) = 4\,[\bar{\wp}(2b)+e_1]\,[\bar{\wp}(2b)+e_2]\,[\bar{\wp}(2b)+e_3]$$

и, следовательно,

$$\bar{\wp}''(2b) = 2\,\{[\bar{\wp}(2b)+e_2](\bar{\wp}+e_3)+(\bar{\wp}+e_3)(\bar{\wp}+e_1)+(\bar{\wp}+e_1)(\bar{\wp}+e_2)\}.$$

Далее, для $2b=\frac{\omega_3}{i}+2\varepsilon'$, так как $\bar{\wp}'\left(\frac{\omega_3}{i}\right)=0$ и $\bar{\wp}\left(\frac{\omega_3}{i}\right)=-e^3$

$$\bar{\wp}''(2b)\sim 2\,(e_1-e_3)\,(e_2-e_3).$$

Теперь имеем:

$$\bar{\wp}'(2b)=\bar{\wp}'\left(\frac{\omega_3}{i}+2\varepsilon'\right)\sim 2\varepsilon\bar{\wp}''\left(\frac{\omega_3}{i}\right)\sim 4\varepsilon'\,(e_1-e_3)\,(e_2-e_3).$$

Внося эти результаты в формулу, дающую $\frac{da}{dt}$, получаем:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{I}{\pi}(e_2-e_3)\,\varepsilon'.$$

Также находим:

$$\frac{d\varepsilon'}{dt}=\frac{I}{\pi}(e_1-e_2)\,\varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\varepsilon = A\cos(\lambda t+\gamma)$$
$$\varepsilon' = B\sin(\lambda t+\gamma),$$

где

$$\lambda=\frac{I}{\pi}\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)},\quad \frac{A}{B}=\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_2}}.$$

Траектория будет весьма близка к эллиптической. Отсюда можно заключить, что центральное положение может рассматриваться как устойчивое.

Бесконечные вихревые цепочки между двумя параллельными стенками. Вернемся к нашим общим уравнениям (14) и последующим и вообразим, что вместо суммирования от 1 до $4n$ мы будем суммировать только от 1 до $2n$. Тогда условия на границах будут выполняться для $x=0$ и $x=\frac{d}{2}$, т. е. вдоль двух стенок, параллельных оси Oy, и в силу периодичности эллиптических функций мы будем иметь конфигурацию, в которой вихри расположатся цепочками, параллельными Oy.

Но здесь мы уже знаем, что аналитическое решение, например, для функции χ не будет единственным. Ничто, в частности, не изменится, если на движение, определенное через нашу функцию

$$\chi=\frac{1}{2i\pi}\sum_{1}^{2n} I_k \lg\sigma(z-z_k), \tag{21}$$

мы наложим поступательное перемещение, параллельное Oy; это не нарушит ни периодичности, ни граничных условий на сохраняющихся твердых стенках.

Присмотримся несколько ближе к тем условиям, которым должна удовлетворять функция $f(z)$, чтобы сыграть в нашей задаче ту роль, которую здесь играет $\sigma(z)$.

Прежде всего необходимо, чтобы $f(z)$ имела точку $z=0$ простым нулем; то же должно быть для точек, смещенных относительно нуля на $2m\omega_1$, параллельно Ox (чтобы получить распределение скоростей, параллельных Oy на двух неподвижных стенках), а также для всех точек, полученных смещением на $2n\omega_3$ параллельно Oy (чтобы получить расположение вихрей цепочками, параллельными Oy). Вполне ясно, что m и n означают здесь какие-угодно целые числа.

Во всякой полученной таким образом точке, $f(z-z_k)$ должно представиться в виде $(z-z_k)\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитическая регулярная функция и не обращающаяся в нуль в окрестности z_k. Отсюда следует, что $\lg f=g$ будет вести себя как $\lg(z-z_k)$ с точностью до регулярной функции в той же окрестности; $g'(z)$ и $g''(z)$, в свою очередь, будут вести себя как $\frac{1}{z-z_k}$ и $\frac{-1}{(z-z_k)^2}$. Вспоминая классические свойства функции $\wp(z)$, мы видим, что сумма

$$g''(z)+\wp(z),$$

не имея полюсов, будет регулярна во всем параллелограмме периодов и, следовательно, всюду это будет целая функция $E_1(z)$, и мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} g''(z) &= -\wp(z)+E_1(z), \\ g'(z) &= \zeta(z)+E(z), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $E(z)$ новая целая функция.

Следовательно:

$$g=\lg\sigma(z)+F(z)$$

и

$$f=\sigma(z)e^{F(z)},$$

причем $F(z)$ является целой функцией.

Попытаемся теперь, насколько это можно сделать, определить целую функцию $E(z)$. Мы увидим, каким условиям она должна удовлетворять в силу существования двух твердых стенок $x=0$, $x=\omega_1$.

Для скоростей мы должны иметь:

$$\frac{d\chi_3}{dz}=u-iv=\frac{1}{2i\pi}\sum_{1}^{2n} I_k g'(z-z_k), \tag{23}$$

где

$$z_k=a_k+ib_k,\ I_{n+k}=-I_k,\ a_{n+k}=2\omega_1-a_k,\ b_{n+k}=b_k,$$

так что получаем:

$$u - iv = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1}^{n} I_k [g'(z - a_k - ib_k) - g'(z + a_k - ib_k - 2\omega_1)].$$

Мы желаем, чтобы u равнялось нулю при $x = 0$ и при $x = \omega_1$; следовательно, необходимо и достаточно, так как I_k произвольны, равно как и z_k, чтобы разности

$$g'(iy - a_k - ib_k) - g'(iy + a_k - ib_k - 2\omega_1)$$

и

$$g'(\omega_1 + iy - a_k - ib_k) - g'(-\omega_1 + iy + a_k - ib_k)$$

были вещественны. И так как ζ, входящая в g' дает, например,

$$\zeta[i(y - b_k) - a_k] - \zeta[i(y - b_k) + a_k - 2\omega_1] =$$

$$= -\zeta[-i(y - b_k) + a_k] - \zeta[i(y - b_k) + a_k] + 2\eta_1 = \text{вещ. числу}$$

(и аналогичное заключение для второй комбинации), то отсюда следует, что E должно быть таково, что, если положить:

$$y - b_k = t$$

$$a_k = S', \quad a_k - \omega_1 = S,$$

то количества

$$E(it - S') - E(it + S' - 2\omega_1),$$

$$E(it - S) - E(it + S)$$

всегда вещественны, каковы бы ни были вещественные значения

$$t, \ S, \ S'.$$

Так как E целая функция, то всегда можно написать

$$E(z) = e(z) + ie_1(z),$$

где e и e_1 две другие целые функции с **вещественными коэфициентами**. Выше записанные условия тогда примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &e(it - S) + ie_1(it - S) - e(it + S) - ie_1(it + S) = \text{вещ. величине} \\ &e(it - S') + ie_1(it - S') - e(it + S' - 2\omega_1) - ie_1(it + S' - 2\omega_1) = \\ &\qquad\qquad = \text{вещ. величине.} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Но суммы сопряженных комплексных количеств

$$e(it - S) + e(-it - S),$$

$$ie_1(it - S) - ie_1(-it - S)$$

являются вещественными; следовательно, первое условие (24) может записаться:

$$-e(-it-S)+ie_1(-it-S)-e(it+S)-ie_1(it+S)=$$
$$=\text{вещ. величине.} \tag{25}$$

Полагая здесь $t=0$, мы видим, что это значит:

$$e_1(-S)-e_1(S)=0,$$

т. е. что e_1 функция четная; тогда, согласно (25):

$$e(-it-S)+e(it+S)=\text{вещ. числу}=e(z)+e(-z),$$

откуда легко выводим, что $e(z)$, с точностью до вещественной постоянной, должно быть нечетной функцией от z.

Совершенно ясно $\left(\text{в силу равенства } \sum_1^{2n} I_k=0\right)$, что аддитивная постоянная у e или у E не играет существенной роли и сама по себе исчезает в $\frac{d\chi}{dz}$; можно, следовательно, просто считать $e(z)$ функцией нечетной, не беря во внимание несущественную постоянную.

Посмотрим теперь, что дает второе из уравнений (24). Так как можно написать, в силу уже полученных результатов,

$$e(it-S')=-e(S'-it)=e(S'+it)+\text{вещ. число}$$
$$ie_1(it-S')=ie_1(S'-it)=ie_1(S'+it)+\text{вещ. число},$$

второе условие (24) примет вид:

$$e(S'+it)+ie_1(S'+it)-e(S'+it-2\omega_1)-ie_1(S'+it-2\omega_1)=$$
$$=\text{вещ. числу.}$$

Оно обозначает, что мы должны иметь:

$$E(\lambda+2\omega_1)-E(\lambda)=\text{вещ. числу}, \tag{26}$$

каково бы ни было λ.

Полагая λ вещественным, видим, что отсюда получается:

$$e_1(\lambda+2\omega_1)-e_1(\lambda)=0, \tag{27}$$

но так как e_1 целая функция, то это условие будет иметь место при всяком λ, и, следовательно, $e_1(z)$ должна допускать период $2\omega_1$. Тогда будет выполняться условие:

$$e(\lambda+2\omega_1)-e(\lambda)=\text{вещ. числу},$$

каково бы ни было λ.

Легко может быть установлено, что разность написанного слева должна быть вещественной постоянной. В самом деле, e есть целая нечетная функция; это можно записать в виде:

$$e(2\omega_1)+\lambda e'(2\omega_1)+\frac{\lambda^2}{2}e''(2\omega_1)+\ldots$$

$$-\left[\lambda e'(0)+\frac{\lambda^3}{3}e'''(0)+\ldots\right]=\text{вещ. числу.}$$

Полагая λ чисто мнимым, видим, что необходимо должно быть:

$$e'(2\omega_1)-e'(0)=0,\quad e'''(2\omega_1)-e'''(0)=0,\ \ldots$$

и, следовательно,

$$e(\lambda+2\omega_1)-e(\lambda)=e(2\omega_1)+\frac{\lambda^2}{2}e''(2\omega_1)+\ldots$$

Давая теперь λ значения $\alpha+i\beta\,(\alpha\beta\neq 0)$, которые будем предполагать малыми, легко видим, что правая часть будет оставаться вещественной, если только $e''(2\omega_1)$, $e^{IV}(2\omega_1)\ldots$ обращаются в нули. Следовательно, разность

$$e(\lambda+2\omega_1)-e(\lambda)=e(2\omega_1) \tag{28}$$

есть постоянная. И, далее, $e'(\lambda)$ целая функция, имеющая период $2\omega_1$. Имеется, очевидно, бесчисленное множество функций $e+ie_1=E$, которые удовлетворяют полученным таким образом условиям. Например, можно взять

$$e(z)=2Pz,\quad e_1=0,\quad E=2Pz,$$

где P означает какую-нибудь вещественную постоянную. Для этих частного вида функций будем иметь:

$$g'(z)=\zeta(z)+2Pz,$$

и, следовательно,

$$g(z)=\lg\sigma(z)+Pz^2+Q,$$

$$f(z)=\sigma(z)\,e^{Pz^2+Q}.$$

Мы заметим, что функция $\theta_1\left(\dfrac{z}{2\omega_1}\right)$ принадлежит к этой категории. В самом деле, имеем классическую формулу, связывающую функцию Якоби θ_1 с функцией $\sigma(z)$:

$$\sigma(z)=2\omega_1\frac{\theta_1\left(\dfrac{z}{2\omega_1}\right)}{\theta_1'(0)}\,e^{\eta_1\frac{z^2}{2\omega_1}}, \tag{29}$$

что показывает с очевидностью принадлежность функции $\theta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right)$ к числу выражений, возможных для $f(z)$. Это именно будет та функция, к которой несколько дальше мы придем, когда подойдем к более точному рассмотрению изучаемого нами движения.

Предварительно сделаем здесь следующее замечание.

Замечание. В задаче о прямоугольнике, рассмотренной ранее, мы имели комплексный потенциал χ_2, полученный суммированием

$$\sum_{1}^{4n} \frac{I_k}{2i\pi} \lg \sigma(z - z_k) = \chi_2.$$

Рассмотрим здесь, в свете того, что предшествовало, насколько потенциал χ_2 является таким, который нужен.

Согласно только что сказанному, мы должны иметь для комплексной скорости в какой-нибудь точке (отличной от вихревой) выражение вида:

$$u - iv = \frac{d\chi_2}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1}^{4n} I_k g'(z - z_k), \tag{30}$$

где

$$g' = \frac{f'}{f} = \zeta(z) + E(z); \tag{31}$$

$E(z)$ удовлетворяет уже высказанным условиям, т. е., что $E = e + ie_1$; e_1 — четная функция, обладающая периодом $2\omega_1$; e — нечетная и удовлетворяет условию:

$$e(\lambda + 2\omega_1) - e(\lambda) = e(2\omega_1).$$

В силу условий

$$I_{2n+k} = -I_k, \quad z_k = a_k + ib_k, \quad z_{2n+k} = a_k + 2\omega_3 - ib_k,$$

имеем:

$$u - iv = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1}^{2n} I_k \left[g'(z - a_k - ib_k) - g'(z - a_k + ib_k - 2\omega_3)\right].$$

Стороны прямоугольника, параллельные Ox, должны быть твердыми стенками; v должно на них быть равно нулю; это дает непосредственно условие, что разности

$$\left.\begin{aligned} &g'(x - a_k - ib_k) - g'(x - a_k + ib_k - 2\omega_3) \\ &g'(x - a_k + \omega_3 - ib_k) - g'(x - a_k + ib_k - \omega_3) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

должны быть непременно чисто мнимыми, каковы бы ни были вещественные числа x, a_k, b_k. Так как функция $\zeta(z)$ сама удовлетворяет этим условиям, как в этом легко убедиться, то следует просто написать, что функция $E = e + ie_1$ удовлетворяет им в свою очередь. Полагая

$$x - a_k = \tau, \quad b_k - \frac{\omega_3}{i} = \alpha, \quad b_k = \alpha',$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} e(\tau - i\alpha') + ie_1(\tau - i\alpha') - e(\tau + i\alpha' - 2\omega_3) - ie_1(\tau + i\alpha' - 2\omega_3) = \\ = \text{чисто мнимому} \\ e(\tau - i\alpha) + ie_1(\tau - i\alpha) - e(\tau + i\alpha) - ie_1(\tau + i\alpha) = \text{чисто мнимому.} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Но

$$e(\tau - i\alpha) - e(\tau + i\alpha) \quad \text{и} \quad e_1(\tau - i\alpha) - e_1(\tau + i\alpha)$$

суть количества чисто мнимые. Из второго уравнения (33) получаем:

$$e_1(\tau - i\alpha) \equiv e_1(\tau + i\alpha),$$

где e_1 целая функция с вещественными коэфициентами; правая и левая части этого тождества являются мнимыми сопряженными, которые должны, следовательно, быть постоянно вещественными. Функция $e_1(z)$ вещественна при всяком значении z. Следовательно, $e_1(z)$ сводится к вещественной постоянной.

Первое из условий (33) требует тогда, чтобы

$$e(\tau - i\alpha') - e(\tau + i\alpha' - 2\omega_3) = \text{чисто мнимому},$$

и так как

$$e(\tau - i\alpha') - e(\tau + i\alpha') = \text{чисто мнимому},$$

то это сводится к утверждению, что

$$e(\tau + i\alpha') - e(\tau + i\alpha' - 2\omega_3) = \text{чисто мнимому},$$

или еще, что при всяком λ

$$e(\lambda + 2\omega_3) - e(\lambda) = \text{чисто мнимому}.$$

Но рассуждение, тождественное с тем, что было сделано выше относительно периода $2\omega_1$, нам покажет, что отсюда следует, что

$$e'(2\omega_3) - e'(0) = 0, \quad e'''(2\omega_3) - e'''(0) = 0, \ \ldots,$$

и также

$$e(\lambda + 2\omega_3) - e(\lambda) = e(2\omega_3). \tag{34}$$

Производная $e'(\lambda)$ должна допускать, следовательно, период $2\omega_3$, но она уже допускала период $2\omega_1$; она должна, следовательно, сводиться к постоянной A (очевидно вещественной). Вследствие того, что e нечетна, имеем:

$$e(z) = Az; \tag{35}$$

$$E = Az + iC,$$

где A и C вещественны.

Наконец, комплексная скорость в нашей задаче относительно прямоугольника должна иметь вид:

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1}^{4n} I_k [\zeta(z - z_k) + A(z - z_k) + iC]. \tag{36}$$

Но в этом выражении член $(Az + iC)$ исчезнет по причине очевидного условия

$$\sum_{1}^{4n} I_k = 0.$$

Легко установить посредством формул:

$$\begin{aligned} z_{n+k} &= -x_k + 2\omega_1 + iy_k, & I_{n+k} &= -I_k, \\ z_{2n+k} &= -x_k + 2\omega_3 - iy_k, & I_{2n+k} &= -I_k, \\ z_{3n+k} &= -x_k + 2\omega_1 + 2\omega_3 - iy_k, & I_{3n+k} &= I_k, \end{aligned}$$

что все группы

$$I_k z_k + I_{n+k} z_{n+k} + I_{2n+k} z_{2n+k} + I_{3n+k} z_{3n+k}$$

обращаются в нуль и, следовательно, $\frac{d\chi}{dz}$ сводится к виду

$$\frac{d\chi_2}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1}^{4n} I_k \zeta(z - z_k),$$

что совпадает с тем, что было нами принято. Возвратимся теперь к задаче, которая нами была поставлена, относительно движения наших вихрей между двумя неподвижными стенками $x = 0$, $x = \omega_1$.

Мы видели выше, что функций χ возможно бесчисленное множество и что комплексная скорость должна иметь следующий вид:

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{1}^{2n} I_k [\zeta(z - z_k) + e(z - z_k) + ie_1(z - z_k)],$$

где e функция целая, нечетная и с вещественными коэфициентами, а e_1 тоже целая с вещественными коэфициентами, по четная; e_1 будет обладать периодом $2\omega_1$; а $e(z)$ должна удовлетворять условию

$$e(z + 2\omega_1) - e(z) = e(2\omega_1).$$

Отыщем теперь среди определенных таким образом функций те, которые могут соответствовать, с точностью до поступательного перемещения параллельно Oy, перманентным конфигурациям вихрей, если предположить осуществленным сперва расположение вихрей такое, как в альтернированных вихрях Бенара. Тогда необходимо, чтобы горизонтальная скорость каждого вихревого центра была равна нулю. Но для точки (a_j, b_j) эта скорость дается уравнением:

$$\frac{da_j}{dt} = \Re \frac{1}{2i\pi} \sum_1^{2n} I_k \{ [\zeta \{ a_j - a_k + i(b_j - b_k) \} + \\ + E[a_j - a_k + i(b_j - b_k)] \},$$

если $\sum'$ указывает, что при суммировании надо отбросить в ζ член, соответствующий $k = j$ (что именно и соответствует отбрасыванию количества $\frac{I_j}{2i\pi} \cdot \frac{1}{z - z_j}$, когда z стремится к z_j в выражении $\frac{d\chi}{dz}$.

Но легко может быть проверено и легко может быть выведено из вычислений, которые мы встретим дальше для случая альтернированных вихрей, что остающиеся члены, содержащие функцию ζ с различными аргументами, дадут значение нуль горизонтальной скорости вихря z_j. Условие, которому должна удовлетворять функция $E(z)$, будет состоять в том, что для всякого значения j,

$$\Re \frac{1}{2i\pi} \sum_1^{n} I_k \{ E[a_j - a_k + i(b_j - b_k)] - \\ - E[a_j + a_k - 2\omega_1 + i(b_j - b_k)] \} = 0.$$

Если пренебречь внутри скобок количеством $e(2\omega_1)$, оно сведется к

$$\sum_1^{n} I_k \{ E[a_j - a_k + i(b_j - b_k)] - \\ - E[a_j + a_k + i(b_j - b_k)] \} = \text{вещ. числу}.$$

Иначе говоря, положив

$$a_j - a_k = s, \quad a_j + a_k = t, \quad b_j - b_k = \lambda,$$

мы должны иметь:

$$\sum_1^{n} I_k \{ E(s + i\lambda) - E(t + i\lambda) - \overline{E}(s - i\lambda) + \overline{E}(t - i\lambda) \} = 0;$$

обозначение $\overline{E}(s - i\lambda)$, например, соответствует комплексной величине, сопряженной $E(s + i\lambda)$, и, так как I_k произвольны так же, как и s, t, λ, то это сводится к утверждению, что функция $E(z)$ такова, что

$$E(s + i\lambda) - \overline{E}(s - i\lambda) - E(t + i\lambda) + \overline{E}(t - i\lambda) = 0 \tag{37}$$

каковы бы ни были значения аргументов (вещественные).

Заменяя E через $e+ie_1$, замечаем сейчас же, что

$$E(s+i\lambda)-\overline{E}(s-i\lambda)=2i\left[\lambda e'(s)-\frac{\lambda^3}{3!}e'''(s)+\ldots\right]+$$
$$+2i\left[e_1(s)-\frac{\lambda^2}{2!}e_1''(s)+\ldots\right]$$
$$E(t+i\lambda)-\overline{E}(t-i\lambda)=2i\left[\lambda e'(t)-\frac{\lambda^3}{3!}e_2'''(t)+\ldots\right]+$$
$$+2i\left[e_1(t)-\frac{\lambda^2}{2!}e_1''(t)+\ldots\right].$$

Равенство (37) должно иметь место, каково бы ни было λ, откуда следует, что

$$e'(s)=e'(t),\qquad e'''(s)=e'''(t)$$
$$e_1(s)=e_1(t),\qquad e_1''(s)=e_1''(t),$$

каковы бы ни были s и t — вещественные, а, следовательно, также и комплексные, откуда заключаем, что e' и e_1 должны быть постоянными (вещественными).

Следовательно, мы приходим обязательно к выражению, аналогичному (36), в котором, как мы уже знаем, можно уничтожить член, содержащий iC

$$\frac{d\chi}{dz}=\frac{1}{2i\pi}\sum_1^{2n} I_k\left[\zeta(z-z_k)+A(z-z_k)\right],$$

где A вещественная постоянная.

Эта постоянная A пока не определена, мы ее легко найдем, точнее определив изучаемое нами движение. Мы предположим существование условия, весьма естественного с физической точки зрения: мы потребуем: чтобы скорость была равна нулю для бесконечного y, когда переходим к пределу, делая d' $\left(\text{или } \frac{\omega_3}{i}\right)$ бесконечным.

Легко можно удостовериться, что это условие не может быть выполнено, если только сохранить $I_k \lg \sigma(z-z_k)$ в выражении комплексного потенциала. В самом деле скорости заданы (за исключением вихревых центров) уравнением, взятым из (23) и (22):

$$u-iv=\frac{d\chi_3}{dz}=\frac{1}{2i\pi}\sum_1^{2n} I_k\left[\zeta(z-z_k)+A(z-z_k)\right], \tag{38}$$

в котором имеем:

$$I_{n+k}=-I_k,\quad a_{n+k}=2\omega_1-a_k,\quad b_{n+k}=b_k.$$

Займемся той частью правой стороны равенства, в которой имеем ζ. Известно (см. напр. Lévy, Fonctions elliptiques, p. 197), что если: перейти к пределу для $\frac{\omega_3}{i}$ бесконечного, то для функции $\zeta(\lambda)$ имеем

$$\zeta(\lambda) \to \frac{\pi^2}{12\omega_1^2}\lambda + \frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{2\omega_1}.$$

Элементарное равенство

$$\operatorname{ctg}(\alpha + i\beta) = -\frac{\sin 2\alpha - i\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha - \cosh 2\beta}$$

позволяет заменить в предельном случае $\zeta(z - z_k)$ через

$$\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}[x - a_k + i(y - b_k)] + \frac{\pi}{2\omega_1}\frac{\sin\frac{\pi}{\omega_1}(x - a_k) - \sinh\frac{\pi}{\omega_1}(y - b_k)}{\cosh\frac{\pi}{\omega_1}(y - b_k) - \cos\frac{\pi}{\omega_1}(x - a_k)}.$$

Согласно формуле (38), имеем, что для скорости v в направлении Oy, второй член дает нуль, когда мы перемещаемся в бесконечность в направлении Oy; но первый член дает

$$\frac{\pi}{24\omega_1^2}\sum_1^{2n} I_k(x - a_k),$$

где коэфициент у x уничтожается, так как

$$\sum_1^{2n} I_k = 0,$$

но где выражение

$$\sum_1^{2n} I_k a_k$$

не имеет никаких оснований обращаться в нуль; для v будем иметь выражение

$$-\frac{\pi}{24\omega_1^2}\sum_1^{2n} I_k a_k.$$

Так же, что касается u, найдем:

$$\frac{\pi}{24\omega_1^2}\sum_1^{2n} I_k b_k.$$

Но мы можем воспользоваться присутствием добавочного члена $A\lambda$, чтобы выбрать значение

$$A\lambda = -\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}\lambda.$$

Известно (см. Lévy, loc. cit.) что в предельном случае имеем:

$$\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{12};$$

можно, следовательно, выбрать

$$A\lambda = -\frac{\eta_1}{\omega_1}\lambda.$$

Это сводится к тому, чтобы взять за элементарную функцию в $\frac{d\chi}{dz}$ выражение

$$\zeta(z-z_k) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(z-z_k),$$

и, следовательно, в выражении для χ взять за такую функцию

$$\lg\sigma(z-z_k) - \frac{\eta_1}{2\omega_1}(z-z_k)^2.$$

По формуле (29) мы видим, что эта последняя функция совпадает, с точностью до постоянной, которая не представляет никакого интереса, с функцией

$$\lg\theta_1\left(\frac{z-z_k}{2\omega_1}\right),$$

что и соответствует указанному нами ранее. Заметим теперь, что если мы прибавим к нашему новому простому элементу в $\frac{d\chi}{dz}$ другую целую функцию $E(z)$, не сводящуюся в пределе к постоянной, то скорости на бесконечности сделаются отличными от нуля (и вообще бесконечными), если удаляться в направлении Oy. Это узаконяет иным образом то простое выражение $A\lambda$, которое мы выбрали в качестве $E(\lambda)$. При этих условиях комплексный потенциал, соответствующий нашей задаче, будет иметь вид:

$$\chi_4 = \frac{1}{2i\pi}\sum_1^{2n} I_k\left[\lg\sigma(z-z_k) - \frac{\eta_1}{2\omega_1}(z-z_k)^2\right], \tag{39}$$

и комплексная скорость:

$$u - iv = \frac{d\chi_4}{dz} = \frac{1}{2i\pi}\sum_1^{2n} I_k\left[\zeta(z-z_k) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(z-z_k)\right]. \tag{40}$$

Если же мы будем исследовать собственное движение вихря, нам нужно только, согласно предшествовавшим рассуждениям, образовать функцию

$$W_4 = -\frac{1}{2\pi}\sum_k\sum_j I_k I_j\left\{\lg S_{kj} - \frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_k-a_j)^2 - (b_k-b_j)^2\right]\right\} \tag{41}$$

где

$$S_{kj} = |\sigma[a_k - a_j + i(b_k - b_j)]|,$$

и мы будем иметь уравнение движения все время в виде:

$$I_k \frac{da_k}{dt} = \frac{\partial W_4}{\partial b_k}, \quad I_k \frac{db_k}{dt} = -\frac{\partial W_4}{\partial a_k}.$$

Составляя эти уравнения, нужно, как это уже указывалось, производить диференцирования до замены a_{n+k} и b_{n+k} их выражениями через a_k, b_k.

Приложение. Случай единственного вихря ($n = 1$). В этом случае можно взять

$$I_1 = -I_2 = I,$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = d - a, \quad \left(0 < a < \frac{d}{2}\right), \quad b_1 = b_2 = 0$$

W_4 сводится здесь к единственному члену:

$$W_4 = \frac{I^2}{2\pi}\left\{\lg\left[\sigma(a_2 - a_1)\,\bar{\sigma}(b_2 - b_1)\sqrt{\wp(a_2 - a_1) + \bar{\wp}(b_2 - b_1)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2\right]\right\};$$

$\dfrac{\partial W_4}{\partial b_1}$ дает нуль для $b_2 = b_1$; в самом деле:

$$\frac{\partial W_4}{\partial b_1} = \frac{I^2}{2\pi}\left[-\bar{\zeta}(b_2 - b_1) - \frac{1}{2}\,\frac{\bar{\wp}'(b_2 - b_1)}{\wp(a_2 - a_1) + \bar{\wp}(b_2 - b_1)} + \frac{\eta_1}{\omega_1}(b_1 - b_2)\right].$$

По формуле сложения функции $\bar{\wp}$ можно написать:

$$\frac{\partial W_4}{\partial b_1} = \frac{I^2}{2\pi}\left\{-i\left[\zeta[a_2 - a_1 + i(b_2 - b_1)] - \zeta(a_2 - a_1) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(a_2 - a_1)}{\wp(a_2 - a_1) + \bar{\wp}(b_2 - b_1)}\right] - \frac{\eta_1}{\omega_1}(b_2 - b_1)\right\},$$

что, очевидно, обращается в н у л ь при $b_2 = b_1$.

Имеем также

$$\frac{\partial W_4}{\partial a_1} = \frac{I^2}{2\pi}\left[-\zeta(a_2 - a_1) - \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(a_2 - a_1)}{\wp(a_2 - a_1) + \bar{\wp}(b_2 - b_1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta_1}{\omega_1}(a_1 - a_2)\right],$$

что обращается в

$$\frac{\partial W_4}{\partial a_1} = -\frac{I^2}{2\pi}\left[\zeta(2a) - \frac{2\eta_1}{\omega_1}a\right]$$

и

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{I}{2\pi}\left[\zeta(2a) - \frac{2\eta_1}{\omega_1}a\right].$$

Для

$$a = \frac{d}{4} = \frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{db}{dt} = 0$$

и вихрь неподвижен. Здесь изучен случай цепочки одинаковых вихрей, находящихся на расстоянии d' друг от друга. Для $d' = +\infty$

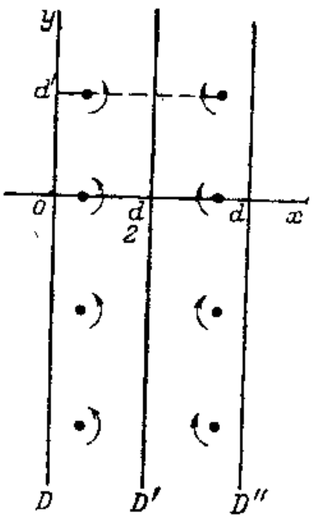

Рис. 24.

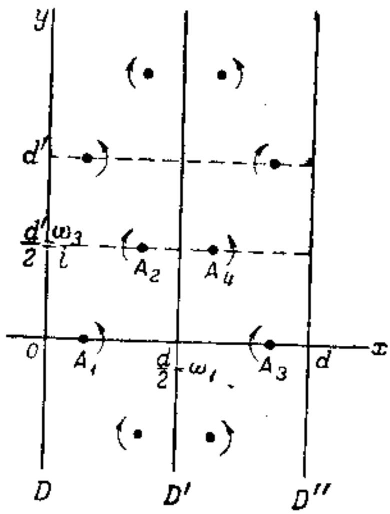

Рис. 25.

возвращаемся к рассмотренному выше случаю одного вихря. Если отбросить стенку D' и рассматривать D и D'' $(x = 2\omega_1)$ как две стенки, будем иметь две параллельные цепочки вихрей с вращением в противоположных направлениях. Это симметричное расположение, но при двух неподвижных стенках (рис. 24). Мы приходим к конфигурации, уже изученной в главе IV, но для ограниченной жидкости.

Если предположить, что $d = \frac{\omega_1}{2}$ делается бесконечным, то, как известно (см. например Tannery и Molk, Fonctions elliptiques, формула CXXII),

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{12\omega_3^2}, \quad \zeta(u) = \frac{\pi^2 u}{12\omega_3^2} + \frac{i\pi}{2\omega_3}\operatorname{ctgh}\frac{i\pi u}{2\omega_3};$$

тогда, беря $\frac{\partial W_4}{\partial a_1}$ в форме (42), видим непосредственно, что

$$\lim \frac{\partial W_4}{dt} = \frac{I^2}{2\pi}\left[-\frac{i\pi}{2\omega} \operatorname{ctgh} \frac{i\pi(a_2-a_1)}{2\omega_3}\right],$$

а

$$\lim \frac{db}{dt} = \frac{1}{2d'} \operatorname{ctgh} \frac{\pi h}{d'}$$

$$\left(h = \text{расстояние между двумя цепочками} = a_2 - a_1,\ d' = \frac{2\omega_3}{i}\right),$$

что, с точностью до обозначений, совпадает с известной уже формулой для системы из двух параллельных цепочек.

Другое приложение. Возьмем два вихря противоположных направлений в A_1 и A_2 (см. рис. 25) и положим:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a\left(0 < a < \frac{d}{4}\right), && b_1 = 0,\\
&a_2 = \frac{d}{2} - a, && b_2 = \frac{d}{2},\\
&a_3 = d - a, && b_3 = 0,\\
&a_4 = \frac{d}{2} + a, && b_4 = \frac{d}{2};
\end{aligned}$$

$$I_1 = -I_2 = -I_3 = I_4 = I.$$

Далее будем иметь

$$\begin{aligned}
-2\pi W_4 = &-I^2\Big\{\lg\left[\sigma(a_2-a_1)\bar{\sigma}(b_2-b_1)\sqrt{\wp(a_2-a_1)+\bar{\wp}(b_2-b_1)}\right] - \\
&\quad -\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_2-a_1)^2-(b_2-b_1)^2\right]\Big\} - \\
&-I^2\left\{\lg\left[\sigma(a_3-a_1)\ \ldots\right]-\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_3-a_1)^2-(b_3-b_1)^2\right]\right\} + \\
&+I^2\left\{\lg\left[\sigma(a_4-a_1)\ \ldots\right]-\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_4-a_1)^2-(b_4-b_1)^2\right]\right\} + \\
&+I^2\left\{\lg\left[\sigma(a_3-a_2)\ \ldots\right]-\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_3-a_2)^2-(b_3-b_2)^2\right]\right\} - \\
&-I^2\left\{\lg\left[\sigma(a_4-a_2)\ \ldots\right]-\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_4-a_2)^2-(b_4-b_2)^2\right]\right\} - \\
&-I^2\left\{\lg\left[\sigma(a_4-a_3)\ \ldots\right]-\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left[(a_4-a_3)^2-(b_4-b_3)^2\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Видим далее, что $\frac{\partial W_4}{\partial b}$ дает нуль в точке A_1. Что касается $\frac{\partial W_4}{\partial a_1}$, то имеем:

$$\frac{\partial W_4}{\partial a_1}=-\frac{I^2}{2\pi}\left\{\zeta(a_2-a_1)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(a_2-a_1)}{\wp(a_2-a_1)+\overline{\wp}(b_2-b_1)}-\frac{\eta_1}{\omega_1}(a_2-a_1)+\right.$$

$$+\zeta(a_3-a_1)+\frac{\wp'(a_3-a_1)}{\wp(a_3-a_1)+\overline{\wp}(b_3-b_1)}-\frac{\eta_1}{\omega_1}(a_3-a_1)-$$

$$\left.-\zeta(a_4-a_1)-\frac{1}{2}\frac{\wp'(a_4-a_1)}{\wp(a_4-a_1)+\overline{\wp}(b_4-b_1)}+\frac{\eta_1}{\omega_1}(a_4-a_1)\right\},$$

то есть:

$$\frac{\partial W_4}{\partial a_1}=-\frac{I^2}{2\pi}\left\{\zeta(\omega_1-2a)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(\omega_1-2a)}{\wp(\omega_1-2a)+\overline{\wp}(\omega_1)}-\frac{\eta_1}{\omega_1}(\omega_1-2a)+\right.$$

$$\left.+\zeta(2\omega_1-2a)-\frac{\eta_1}{\omega_1}(2\omega_1-2a)-\zeta(\omega_1)+\frac{\eta_1}{\omega_1}\omega_1\right\},$$

так как $\wp(\omega_1)=0$, а $\overline{\wp}(0)=\infty$.

Положим:

$$\frac{\omega_1}{2}-a=\delta,\quad 2a=\omega_1-2\delta_1$$

и применим формулу

$$\zeta(\omega_1+2\delta)=\eta_1+\zeta(2\delta)+\frac{\wp'(2\delta)}{2\,[\wp(2\delta)-e_1]},$$

будем иметь

$$\frac{\partial W_4}{\partial a_1}=-\frac{I^2}{2\pi}\left\{\overbrace{2\zeta(2\delta)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta)-e_3}+\frac{1}{2}\frac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta)-e_1}-\frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}}^{P}\right\}$$

и, следовательно, движение вихря A_1 будет дано в виде

$$\frac{da}{dt}=0,\quad \frac{db}{dt}=\frac{I}{2\pi}\overbrace{\{2\zeta(2\delta)+\ \ldots\}}^{P}=\zeta_1(2\delta)+\zeta_3(2\delta)-\frac{4\eta_1\delta}{\omega_1},\tag{43}$$

где
$$\zeta_1(2\delta)=\zeta(2\delta)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta)-e_1},\ \zeta_3=\ldots$$

Отсюда непосредственно приходим к заключению, что конфигурация альтернированных вихрей будет неограниченно сохраняться во времени, находясь в поступательном равномерном движении параллельно Oy.

Заставляя неограниченно возрастать d или ω_1, но таким образом, чтобы δ оставалось конечным, приходим к результатам относительно двух цепочек альтернированных вихрей Бенара-

Кармана. Действительно, в этом случае ω_1 становится бесконечным; должны быть применены формулы Tannery и Molk'a (CXXII), именно:

$$\pi w = \left(1 - \frac{k_0}{4}\right) u \sqrt{e_1 - e_3},$$

$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left(1 + \frac{k_0}{4}\right) \sinh \pi w e^{-\frac{\pi^2 w^2}{6}},$$

$$\zeta u = \sqrt{e_1 - e_3} \left(-\frac{\pi w}{3} + \frac{\cosh \pi w}{\sinh \pi w}\right) \left(1 - \frac{k_0}{4}\right),$$

$$\wp u = (e_1 - e_3) \left(1 - \frac{k_0}{2}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sinh^2 \pi w}\right);$$

$$-i\omega_3 \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k_0}{4} + \ldots\right)$$

$$\left(k_0 = 1 - k; \quad k = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right).$$

k_0 очень мало, и в пределе имеем:

$$w = \frac{iu}{2\omega_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{i\pi}{2\omega_3},$$

$$\sigma u = \frac{2\omega_3}{i\pi} \sinh \frac{i\pi u}{2\omega_3} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24 \omega_3^2}},$$

. . . .

$$\zeta u = \frac{i\pi}{2\omega_3} \left[-\frac{i\pi u}{6\omega_3} + \operatorname{ctgh} \frac{i\pi u}{2\omega_3}\right], \quad \sigma_1 u = e^{\frac{\pi^2 u}{24 \omega_3^2}},$$

$$\wp u = -\frac{\pi^2}{4\omega_3^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\sinh^2 \frac{i\pi u}{2\omega_3}}\right], \sigma_3 u = \cosh \frac{i\pi u}{2\omega_3} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24 \omega_3^2}}.$$

Выражение P запишется:

$$P = \zeta(2\delta) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta) - e_3} + \zeta(\omega_1 + 2\delta) - \eta_1 - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}.$$

Но мы имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta) - e_3} = \zeta(2\delta + \omega_3) - \zeta(2\delta) - \eta_3.$$

Следовательно:

$$P = \zeta(2\delta + \omega_1) + \zeta(2\delta + \omega_3) - \eta_1 - \eta_3 - 4\frac{\eta_1\delta}{\omega_1} =$$

$$= \zeta_1(2\delta) + \zeta_3(2\delta) - 4\frac{\eta_1}{\omega_1}\delta. \tag{44}$$

При $u = \omega_1$, стремящемся к бесконечности, имеем:

$$\lim \frac{\zeta u}{u} = \lim \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{12\omega_3{}^2}.$$

С другой стороны,

$$\lim \zeta_1 u = \frac{\pi^2 u}{12\omega_3{}^2}$$

$$\lim \zeta_3 u = \frac{i\pi}{2\omega_3} \operatorname{tgh} \frac{i\pi u}{2\omega_3} + \frac{\pi^2 u}{12\omega_3{}^2},$$

откуда окончательно:

$$\lim P = \frac{i\pi}{2\omega_3} \operatorname{tgh} \frac{i\pi\delta}{\omega_3},$$

и, следовательно, $\left(\frac{\omega_3}{i} = \frac{d'}{2}\right)$, в этом предельном случае

$$\frac{db}{dt} = \frac{I}{2d'} \operatorname{tgh} \frac{2\pi\delta}{d'} = \frac{I}{2d'} \operatorname{tgh} \frac{\pi h}{d'},$$

где h есть расстояние между двумя альтернированными цепочками.

Это и есть формула, соответствующая вихрям Бенара в случае неограниченной жидкости. Изучение устойчивости системы альтернированных вихрей приведено в прекрасном мемуаре K. Rosenhead'a [The Karman Street of Vortices in a Channel of finite breath (Phil. Trans. of the Royal Society of London, A 228, p. 275, juin 1929], к которому мы и отсылаем читателя.

Вычисление сопротивления, испытываемого цилиндром, движущимся в канале, когда позади получаются альтернированные вихри. Используя выше полученные результаты, мы опять обратимся к изучению задачи, решенной в главе V, но предполагая теперь, что речь идет о цилиндре, движущемся в канале ширины ω_1 и перемещающемся со скоростью V. Предположим, что установился определенный режим с образованием позади альтернированных вихрей, так что на больших расстояниях позади конфигурация вихрей в точности соответствует изученной. Назовем скорость перемещения вихрей через v_0 и сохраним все обозначения предыдущего параграфа. Мы рассмотрим, что дают для среднего сопротивления, испытываемого единицей длины цилиндра, тот и другой методы, изложенные выше в случае неограниченной жидкости.

Первый метод. Согласно предшествующим результатам, комплексная скорость здесь дается формулой

$$2i\pi(u - iv) = 2i\pi w = 2i\pi \frac{d\chi}{dz} = \sum_2^4 I_k \left\{ (z - z_k) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z - z_k) \right\}; \quad (1)$$

стенки имеют уравнения $x=0$ и $x=\omega_1$; это непосредственно дает:

$$\frac{2i\pi}{I}(u-iv)=\zeta(z-a)-\zeta(z+a)+\zeta(z-a+\omega_2)-$$
$$-\zeta(z+a+\omega_2)+\frac{4\eta_1 a}{\omega_1}. \tag{2}$$

Для симметрии возьмем систему осей $O'x'y'$, у которой ось $O'y'$ находится на равном расстоянии от обеих стенок Δ и Δ'. Положим далее:

$$\delta=\frac{\omega_1}{2}-a,$$

где 2δ расстояние между двумя вихревыми цепочками; элементарный подсчет приводит к формуле:

$$\frac{2i\pi}{I}w=\frac{2i\pi}{I}(u-iv)=$$
$$=\zeta(z'+\delta)+\zeta_2(z'+\delta)-$$
$$-\zeta_1(z'-\delta)-\zeta_3(z'-\delta)-\frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}. \tag{3}$$

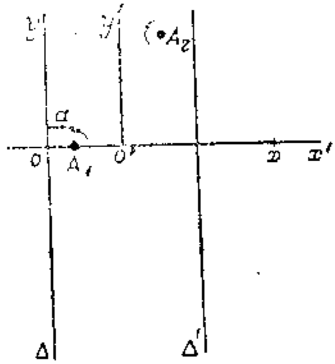

Рис. 26.

Прямое вычисление, или попросту интеграция этого уравнения по z' даст комплексный потенциал:

$$\frac{2i\pi}{I}\chi=\lg\frac{\sigma(z'+\delta)\,\sigma_2(z'+\delta)}{\sigma_1(z'-\delta)\,\sigma_3(z'-\delta)}-\frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}z', \tag{4}$$

формула, в которой очевидно можно пренебречь постоянной интегрирования. Функция тока ψ будет, следовательно, даваться соотношением:

$$-\frac{2\pi}{I}\psi=\lg\left|\frac{\sigma(z'+\delta)\,\sigma_2(z'+\delta)}{\sigma_1(z'-\delta)\,\sigma_3(z'-\delta)}\right|-\frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}x'. \tag{5}$$

Формулы XII из Traité des fonctions elliptiques Tannery и Molk'а позволят убедиться, что при всяком y' имеем:

$$\psi\left(\frac{\omega_1}{2},y'\right)\equiv\psi\left(-\frac{\omega_1}{2},y'\right). \tag{6}$$

(По поводу деталей этого вычисления и некоторых последующих отсылаем к нашему мемуару, помещенному в Annales de l'École Normale, 1929, p. 259.)

Положив это, применим теорему количеств движения по оси $O'y'$ в движении о т н о с и т е л ь н о осей $O'x'y'$, связанных с вихрем на некотором расстоянии позади (и перемещающихся, следовательно, с постоянной скоростью v_0). Применим названную теорему к жидкости, имеющей толщину 1 в направлении, нормальном к плоскости фигуры, и содержащейся в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 27). Мы поместим AB в точности посредине вертикального расстояния между двумя последовательными вихрями далеко позади, а CD поместим далеко впереди тела.

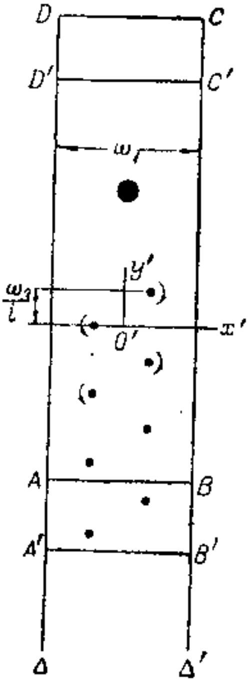

Рис. 27.

Наконец, интегрируем формулу между некоторым моментом τ и $\tau+T$, где T представляет время, необходимое, чтобы вихри каждой цепочки сместились в точности на один ранг, т. е. продвинулись на длину $\frac{2\omega_3}{i}$, имеем тогда:

$$T(V-v_0)=\frac{2\omega_3}{i}; \tag{7}$$

через время T, в силу периодичности, допущенной нами, конфигурация в целом примет точно тот же вид, что и в начальный момент, с точностью до поступательного перемещения.

Обозначая W_m среднее значение (в течение периода T) сопротивления, испытываемого единицей длины цилиндра, и применяя рассуждение, аналогичное изложенному в предыдущей главе, приходим к формуле:

разность между количеством движения в $ABCD$ в моменты τ и $\tau+T$ плюс количество движения, вышедшее за время T

$$=+\int_{\tau}^{\tau+T} dt \int_{\text{внешн. контур}} p\,dx' - TW_m. \tag{8}$$

Левая часть равна разности количеств движения, находящихся в прямоугольнике (который считается неподвижным) $ABCD$ в моменты времени τ и $\tau+T$, увеличенной на количество движения, вышедшее из прямоугольника за время T.

То же рассуждение, что и в главе V, показывает, что разность количеств движения, находящихся в $ABCD$ в два указанные момента, равна:

$$\rho\int\int_{ABA'B'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}-v_0\right)dx'dy'-\rho\int\int_{CDC'D'}(-v_0)\,dx'dy'=$$

$$=-\rho\int\int_{ABA'B'}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\,dx'dy'=-\rho\int_0^{\frac{2\omega_3}{\varepsilon}}\left[\psi\left(\frac{\omega_1}{2},y'\right)-\psi\left(-\frac{\omega_1}{2},y'\right)\right]dy_1';$$

она равна, следовательно, нулю в силу соотношения (6).

С другой стороны, количество движения (па $O'y'$), выходящее из контура в единицу времени, напишется (α, β относятся к внешней нормали, а u', v' — относительная скорость):

$$\int \rho (u'\alpha + v'\beta) v' ds = \rho \int v' (u' dy' - v' dx').$$

Наконец, перманентность относительного движения па больших расстояниях позволяет определить ρ из уравнения Бернулли, но это будет приближение, значение которого не будет определенным à priori. Допуская предварительно такой способ вычисления, видим, что подсчет, уже проведенный нами в V главе, приводит к уравнению:

$$W_m = \frac{\rho}{2} \int_{ABCD} (u'^2 - v'^2) dx' + 2u'v' dy'. \tag{9}$$

Если же перейти к абсолютным скоростям u, v по формулам:

$$u' = u, \quad v' = v - v_0,$$

то немедленно получаем:

$$W_m = \frac{\rho}{2} \Re \int_{ABCD} \left(\frac{d\chi}{dz'}\right)^2 dz' = \frac{\rho}{2} \Re \int_{ABCD} w^2 dz'. \tag{10}$$

Но на AD и BC u равно нулю, w^2 вещественно, и $\int w^2 dz'$ чисто мнимый. Следовательно, можно пренебречь сторонами AD и BC при вычислении интеграла (10). Также можно пренебречь стороной CD, так как вдали от тела впереди u и v равны нулю. Остается только рассмотреть AB, и мы видим, что, таким образом,

$$W_m = \frac{\rho}{2} \Re \int_B^A w^2 dx', \tag{11}$$

где w дано выражениями (2) и (3), так как на AB мы находимся вдали от тела, позади.

Правая часть (3), очевидно, периодическая функция с периодом $2\omega_3$; она допускает интегрирование по одной из двух прямых $y' = \pm \frac{\omega_3}{2i}$; таким образом, окончательно получим:

$$W_m = \rho \frac{I^2}{8\pi^2} \Re \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{\frac{\omega_1}{2}} S^2 dx', \tag{12}$$

где

$$S = \zeta\left(\frac{\omega_3}{2} + x' + \delta\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_3}{2} + x' - \delta\right) +$$
$$+ \zeta_2\left(\frac{\omega_3}{2} + x' + \delta\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_3}{2} + x' - \delta\right) - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}. \tag{13}$$

Все теперь сведено к вычислению эллиптической функции, что и производится классическими способами. Чтобы не вносить лишних осложнений, будем оперировать с переменной $z' = x' + \frac{\omega_3}{2}$ и разложим S^2 на простые элементы. Полюсы этой функции (двойные) в основном прямоугольнике с вершинами в точках: $-\omega_1$, ω_1, $\omega_1 + 2\omega_3$, $-\omega_1 + 2\omega_3$, будут иметь аффиксы $z' = -\delta$, $\delta - \omega_1$, $-\delta - \omega_2$, $\delta + \omega_3$; обозначив через h приращение, если исходить из какого-нибудь полюса, находим без труда, что член второго порядка в четырех случаях будет $\frac{1}{h^3}$ и что вычеты равны соответственно $2P$, $-2P$, $+2P$, $-2P$, где полагаем:

$$P = \zeta_1(2\delta) + \zeta_3(2\delta) - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1} = \frac{2\pi x_0}{I}. \tag{14}$$

Можем, следовательно, написать:

$$\begin{aligned} S^2 = \wp(z' + \delta) + \wp(z' - \delta + \omega_1) + \wp(z' + \delta + \omega_2) + \\ + \wp(z' - \delta - \omega_3) + 2P\{\zeta(z' + \delta) - \zeta(z' - \delta + \omega_1) + \\ + \zeta(z' + \delta + \omega_2) - \zeta(z' - \delta - \omega_3)\} + Q, \end{aligned} \tag{15}$$

где Q означает постоянную, значение которой находим, давая z_1 значение нуль; эта подстановка дает непосредственно:

$$\begin{aligned} \left(\zeta\delta + \zeta_1\delta + \zeta_2\delta + \zeta_3\delta - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}\right)^2 = \\ = \wp\delta + \wp(\omega_1 + \delta) + \wp(\omega_2 + \delta) + \wp(\omega_3 + \delta) + \\ + 2P[\zeta\delta + \zeta_1\delta + \zeta_2\delta + \zeta_3\delta - 2\eta_1] + Q. \end{aligned} \tag{16}$$

Но классическая формула (Tannery и Molk. XI, 3)

$$\sigma(2\delta) = 2\sigma\delta \cdot \sigma_1\delta \cdot \sigma_2\delta \cdot \sigma_3\delta$$

дает после диференцирования

$$2\zeta(2\delta) = \zeta\delta + \zeta_1\delta + \zeta_2\delta + \zeta_3\delta$$

и

$$4\wp(2\delta) = \wp\delta + \wp(\delta + \omega_1) + \wp(\delta + \omega_2) + \wp(\delta + \omega_3).$$

Уравнение (16) нам, следовательно, дает:

$$Q = 4\left\{\left[\zeta(2\delta) - \frac{2\eta_1\delta}{\omega_1}\right]^2 - \wp(2\delta) - P[\zeta(2\delta) - \eta_1]\right\}. \tag{17}$$

Нам надо вычислить интеграл

$$L = \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{\frac{\omega_1}{2}} S^2 dx' = \int_{\frac{\omega_3}{2} - \frac{\omega_1}{2}}^{\frac{\omega_3}{2} + \frac{\omega_1}{2}} S^2(z')\, dz'. \tag{18}$$

$S^2(z')$ есть функция от z', определенная формулой (15), а P и Q имеют значения (14) и (17). Неопределенный интеграл будет очевидно суммой трех следующих функций:

$$\alpha = -\zeta(z'+\delta) - \zeta(z'-\delta+\omega_1) - \zeta(z'+\delta+\omega_2) - \zeta(z'-\delta-\omega_3),$$

$$\beta = 2P\lg\frac{\sigma(z'+\delta)\,\sigma(z'+\delta+\omega_2)}{\sigma(z'-\zeta+\omega_1)\,\sigma(z'-\delta-\omega_3)},$$

$$\gamma = Qz'$$

и, следовательно, отмечая значком 1 определенные интегралы в пределах от $\frac{\omega_3-\omega_1}{2}$ до $\frac{\omega_3+\omega_1}{z}$,

$$L = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1.$$

Положив
$$\frac{\omega_1+\omega_3}{2} + \delta = \lambda$$

$$\frac{\omega_1-\omega_3}{2} + \delta = \mu,$$

находим сейчас же

$$\frac{1}{2}\alpha_1 = -\zeta\lambda + \zeta\mu + \zeta_1\lambda - \zeta_1\mu - 2\eta_1,$$

и так как λ и μ сопряженные мнимые числа, то следует, что

$$\Re\alpha_1 = -4\eta_1.$$

Преобразуем теперь β_1, введя числа λ и μ; имеем:

$$\beta_1 = 2P\lg\left[\frac{\sigma\lambda\,\sigma(\mu-\omega_1)}{\sigma(\lambda-\omega_1)\,\sigma(\mu-2\omega_1)}\right]^2 =$$
$$= 2P\left(\frac{\sigma\lambda\,.\,\sigma_1\mu}{\sigma\mu\,.\,\sigma_1\lambda}\,e^{\eta_1(\lambda+\mu-2\omega_1)}\right)^2.$$

Частные $\frac{\sigma\lambda}{\sigma\mu}$, $\frac{\sigma_1\lambda}{\sigma_1\mu}$ имеют модуль единицу, так как λ и μ сопряженные. Следовательно, вещественная часть β_1 дается формулой

$$\Re\beta_1 = 4P(\lambda+\mu-2\omega_1)\,\eta_1 = 4P\eta_1(2\delta-\omega_1).$$

Наконец имеем, очевидно:

$$\Re\gamma_1 = Q\omega_1.$$

Сумма $\Re(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)$ тогда известна и, следовательно, W_m будет дано уравнением (12) в виде:

$$W_m = \frac{\rho I^2}{8\pi^2}\,\Re(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1).$$

Можно показать (см. наш мемуар в Annales de l'École Normale, 1929), что если заставить расти неограниченно полупериод ω так, чтобы перейти от рассмотрения канала к рассмотрению неограниченной жидкости, то предшествующее выражение стремится к

$$\frac{\rho I^2}{2\pi l}\left(\frac{\pi h}{l}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\pi h}{l}-1\right),$$

где h предельная ширина 2δ и l предельное значение $\frac{2\omega_3}{i}$; видим, что это не есть выражение, полученное нами раньше прямым путем: отсутствует член $\frac{\rho Ih}{l}$. Однако можно показать, что наша теперешняя функция тока ψ стремится при бесконечном ω_1 к функции ψ_1, которая соответствует случаю бесконечной жидкости. Эта разница объясняется тем, как нами было установлено [свойство (6)], что разность

$$\psi\left(\frac{\omega_1}{2},\ y'\right)-\psi\left(-\frac{\omega_1}{2},\ y'\right)$$

тождественно равна нулю, тогда как в случае бесконечной жидкости разность

$$\psi_1(+\infty,\ y')-\psi_1(-\infty,\ y')$$

равна $\frac{Ih}{l}$. Мы увидим несколько дальше, что эта аномалия происходит от того, что примененный нами метод перестает для данного случая ограниченной жидкости давать достаточное приближение, имевшее место в случае неограниченной жидкости. Результаты следующего параграфа принадлежат L. Rosenhead'у, который в цитированном выше мемуаре получил их существенно отличным методом.

Результаты L. Rosenhead'a. Применим теперь к тому же вопросу метод I. L. Synge'a, изложенный в главе V. Пусть опять V — скорость тела и V_1 — скорость перемещения вихрей (далеко позади тела, где их расположение сделалось достаточно правильным).

Относительно осей, связанных с телом (которое мы теперь предположим неподвижным, предполагая жидкость впереди на больших расстояниях движущейся со скоростью $-V$), скорость вихрей будет равна V_1-V; составляющие скорости жидкости будут: $0, -V$ на больших расстояниях впереди; $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $-\frac{\partial\psi}{\partial x}-V$ на больших расстояниях позади. Заметим в виде проверки, что при этих условиях поступление (расход) будет одинаковым впереди обтекаемого тела и позади, в силу свойства (6) функции $\psi(x, y)$. Период движения T будет дан формулой

$$T(V-V_1)=\frac{2\omega_3}{i}, \tag{19}$$

ψ будет дано соотношением:

$$\frac{2\pi}{I}\psi = \lg\left|\frac{\sigma_1(Z-\delta)\sigma_3(Z-\delta)}{\sigma(Z+\delta)\sigma_2(Z+\delta)}\right| + \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}X$$

относительно осей, указанных на чертеже. Следуя в точности рассуждению I. L. Synge'а и применяя его здесь к контуру $\gamma = ABCD$ чертежа, где AB и CD взяты очень далеко с одной и с другой стороны тела, получим, что среднее сопротивление будет дано в виде:

$$T(X_m - iY_m) = -\rho\int\limits_\gamma [\bar\varphi]_0^T (dY + idX) - \frac{i\rho}{2}\int\limits_0^T dt\int\limits_0 \bar{w}^2\, dZ;$$

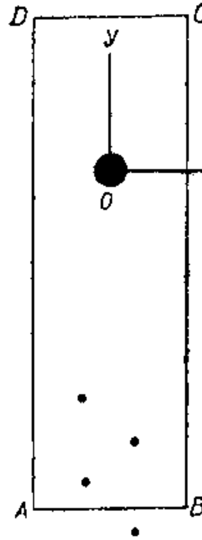

Рис. 28.

так как доказательство Synge'а велось с потенциалом φ — при движении **относительно тела**, то имеем здесь:

$$\bar\varphi = \varphi + iVX$$

и

$$\bar{w} = \frac{d\chi}{dz} + iV = w + iV,$$

что дает, между прочим, $[\bar\varphi]_0^T = [\varphi]_0^T$, и Y_m будет определено в виде

$$TY_m = \rho\int\limits_{AB+CD}[\varphi]_0^T dx + \frac{\rho}{2}\Re\int\limits_0^T dt\int\limits_\gamma \bar{w}^2 dz. \tag{20}$$

Вычислим оба члена в правой части этого равенства. Ясно, что первый член сводится к

$$\rho\int\limits_{AB}[\varphi]_0^T dx.$$

Но здесь путь интегрирования AB конечен и φ на AB отличается лишь бесконечно мало от того значения, которое получалось бы от наличия двух неопределенно простирающихся в обоих направлениях вихревых цепочек внутри канала. Но рассмотрение двух цепочек внутри канала равносильно рассмотрению бесчисленного множества параллельных цепочек, полученных уже известным нам путем последовательных отображений относительно стенок канала. Так как для единственного вихря I_n в z_n величина φ равна

$$\frac{1}{2\pi}I_n \arg(z - z_n),$$

то цепочка интенсивности I (например, левая цепочка в канале), внесет в выражение $[\varphi]_0^T$ величину

$$\frac{I}{2\pi}\sum \delta \arg (z - z_n),$$

и совершенно понятно, на основании проведенных выше рассуждений, что последняя будет равна:

$$\frac{I}{2\pi}(\varepsilon\pi),$$

где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от того, будет ли точка z находиться справа или слева от рассматриваемой цепочки. Для правой цепочки в канале, соответствующей вихрю интенсивности $- I_1$, соответственно величина, вносимая в $[\varphi]_0^T$ будет $-\frac{I}{2\pi}(\varepsilon\pi)$ в зависимости опять от местонахождения z относительно этой цепочки.

Легко приходим к заключению, что попарно цепочки, находящиеся справа и слева, дадут нуль для точки z, находящейся на AB, и остается рассмотреть только то, что происходит от тех двух цепочек, которые находятся внутри канала; последние дают нуль вне полосы, образуемой двумя цепочками, и I — внутри полосы. В результате имеем:

$$\rho \int\limits_{AB} [\varphi]_0^T dx = \rho I \cdot 2\delta. \tag{21}$$

Остается вычислить

$$\int\limits_{\gamma} \bar{w}^2 dz.$$

Но на BC и DA w чисто мнимое, так же как и dz, а $\bar{w}^2$ вещественно. Следовательно:

$$\Re \int\limits_{BC+DA} \bar{w}^2 dz = 0,$$

и мы сможем отбросить это выражение. На CD имеем $\bar{w} = iV$ и

$$\int\limits_{CD} \bar{w}^2 dz = - \int\limits_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} (-V^2)\, dx = \omega_1 V^2.$$

На AB имеем:

$$\int_{AB} \bar{w}^2 dz = \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{\frac{\omega_1}{2}} \left[-V^2 + 2iV \frac{d\chi}{dz} + \left(\frac{d\chi}{dz} \right)^2 \right] dx =$$

$$= V^2 \omega_1 + 2iV [\varphi]_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} - 2V [\psi]_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} + \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left(\frac{d\chi}{dz} \right)^2 dz.$$

Но член $2iV[\varphi]_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}}$ чисто мнимый, а $[\psi]_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_2}{2}}$ равно нулю, как это нами указывалось выше (уравнение 6). Следовательно, остается:

$$\Re \int_{\gamma} \bar{w}^2 dz = \Re \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left(\frac{d\chi}{dz} \right)^2 dx = -\frac{2W_m}{\rho}, \qquad (22)$$

причем W_m совпадает с выражением, полученным первым методом.

Внося результаты (21) и (22) в формулу (20), получаем окончательно:

$$Y_m = \frac{2\rho I\delta}{T} - W_m.$$

Если теперь мы предположим, что ширина канала $2\omega_1$ становится бесконечной, тогда как расстояние между цепочками $2\delta = h$ остается конечным, то, как видим, $\frac{2\rho I\delta}{T}$ принимает вид $\frac{\rho I h}{T}$, что и является первым членом в формуле Кармана. С другой стороны, мы видим, что второй член — W_m стремится ко второму члену формулы Кармана. Следовательно, в пределе между двумя формулами будет иметься полное соответствие.

Очевидно, что первый из изложенных методов дает приближение, степень которого нельзя оценить наперед. Поэтому предпочтительнее результат второго метода, который мы будем считать более правильным. Мы однако изложили оба способа, из которых первый приобретает законность благодаря второму, в случае неограниченной жидкости, но оказывается, напротив, необоснованным в случае канала конечной ширины. Заметим, что в вычислении стр. 138, касающемся интеграла от $[\varphi]_0^T$ вдоль AB, очень легко заменить части интеграла, относящиеся к фиктивным вихревым цепочкам, полученным посредством отображения вне канала, — аналогичными интегралами, построенными при помощи вихрей внутри канала, но с заменой пути интегрирования AB другим, выведенным из AB путем такого же рода отображения. В этом легко убедиться при помощи элементарного чертежа. Таким образом, все сводится к рассмотрению двух вихревых цепочек внутри канала, ведя интеграцию не по AB, но по неограниченной горизонтальной прямой, на которой лежит этот отрезок. Мы приходим тогда к вычислениям стр. 91 и следующих, результат которых (полученный посредством цепочек, неограниченно идущих в одном направлении) полностью узаконяет приближение, сделанное на стр. 137 (строка 8 снизу).

ГЛАВА VII

ПРОБЛЕМЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ВИХРЯМ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ, И КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Общие понятия. Пусть $z = x + iy$ плоскость, в которой происходит движение; предположим, что при этом движении имеются точечноизолированные вихри. Произведем конформное отображение данной фигуры в новую плоскость $Z = X + iY$, положив:

$$z = A(Z) \text{ [или обратно } Z = B(z)]. \tag{1}$$

Пусть φ и ψ потенциал и функция тока в плоскости z, φ определено лишь вне вихревых точек. Известно, что

$$f = \varphi + i\psi = F(z).$$

Следовательно, в силу (1) имеем:

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f[A(Z)] = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y).$$

Движение, которое в плоскости Z соответствует рассматриваемому движению в плоскости z, будет обладать потенциалом Φ и функцией тока Ψ, которые равны φ и ψ в соответствующих точках. Отсюда следует, что вихревым точкам одной плоскости соответствуют вихревые точки другой и что интенсивности вихрей сохраняются при преобразовании. В самом деле, циркуляция вдоль малого контура, заключающего вихрь, например, в плоскости z, будет, как известно, равна интегралу $\int d\varphi$, взятому вдоль контура, в положительном направлении. Ее значение, равное также интенсивности вихря, будет то же вдоль преобразованного контура в плоскости Z, так как значения φ по определению одинаковы на обоих контурах.

В этом смысле можно сказать, что конформное отображение *сохраняет вихри*. Но, естественно, что скорости перемещения вихрей не сохраняются. Мы сейчас увидим, как можно сравнивать скорости перемещения в обоих движениях.

Известно, что в плоскости z скорость в некоторой точке z (отличной от вихревого центра) дается в виде:

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dz}.$$

Если же взять вихревой центр z_1 интенсивности I, то достаточно в $\frac{df}{dz}$ отбросить член $\frac{I}{2\pi}\frac{1}{z-z_1}$, относящийся к данному вихрю, так что скорость (u_1, v_1) точки z_1 будет дана в виде:

$$u_1 - iv_1 = \lim_{z=z_1}\left[\frac{df}{dz} - \frac{I}{2i\pi}\frac{1}{z-z_1}\right].$$

Во второй плоскости будем иметь аналогичные результаты, так что можно написать для скорости U_1, V_1 точки Z_1, замечая, что функция f одинакова в обеих формулах, но выражена в различных переменных:

$$U_1 - iV_1 = \lim_{Z=Z_1}\left[\frac{df}{dZ} - \frac{I}{2i\pi}\frac{1}{Z-Z_1}\right],$$

или иначе можно написать:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \lim_{z=z_1}\frac{d}{dz}\left[f - \frac{I}{2i\pi}\lg(z-z_1)\right], \\ U_1 - iV_1 &= \lim_{Z=Z_1}\frac{d}{dZ}\left[f - \frac{I}{2i\pi}\lg(Z-Z_1)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Надо заметить, что в правых частях ни в коем случае нельзя переставлять знаки предела и диференцирования, так как может случиться, что пределы функций внутри скобок не будут более аналитическими функциями z_1 или Z_1.

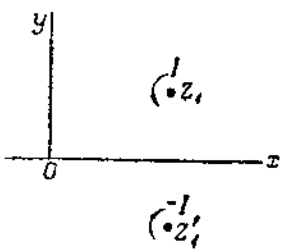

Рис. 29.

Возьмем, например, случай вихревого центра интенсивности I, движущегося в верхней z — полуплоскости, ограниченной твердой стенкой вдоль бесконечной оси Ox. Известно, что дело сведется к тому же, если уничтожить стенку, прибавляя к первому вихрю I другой, симметричный первому относительно Ox и противоположного знака. Предполагаем жидкость покоящейся на бесконечности: комплексный потенциал тогда будет дан уравнением

$$f = \frac{1}{2i\pi}\lg\frac{z-z_1}{z-z_1{}'},$$

где $z_1{}'$ число, сопряженное с $z_1\,(=x_1+iy_1)$. Имеем, следовательно,

$$f - \frac{1}{2i\pi}\lg(z-z_1) = -\frac{1}{2i\pi}\lg(z-z_1{}'),$$

выражение, предел которого, очевидно, равен:

$$-\frac{1}{2i\pi}\lg(2iy_1)$$

и не представляет аналитической функции от z_1.

Но в данном случае мы имеем:

$$\frac{d}{dz}\left[f-\frac{I}{2i\pi}\lg(z-z_1)\right]=-\frac{I}{2i\pi}\frac{1}{z-z_1'},$$

и скорость перемещения будет дана, согласно (2), после перехода к пределу в виде:

$$u_1-iv_1=\frac{I}{4\pi y_1};\tag{3}$$

следовательно, имеем $u_1=\frac{I}{4\pi y_1}$, $v_1=0$ (результат впрочем уже известный). Замечаем, что эту скорость можно рассматривать как происходящую от функции тока $\chi(x_1, y_1)$; полагая

$$\chi(x_1, y_1)=\frac{I}{4\pi}\lg y_1,\tag{4}$$

в самом деле, имеем:

$$u_1=\frac{\partial\chi}{\partial y_1},\quad v=-\frac{\partial\chi}{\partial x_1},$$

и возможными траекториями вихря будут линии

$$\chi=\text{const},$$

то есть $y_1=\text{const}$.

Замечаем также, что эта частная функция тока является половиной мнимой части предельной функции от

$$\left[f-\frac{I}{2i\pi}\lg(z-z_1)\right],$$

полученной раньше. Этот результат относится к общей теореме, которая будет изложена далее.

Вернемся теперь к уравнениям (2) общего случая. Ясно, что можем написать:

$$U_1-iV_1=\lim\left\{\frac{d}{dZ}\left[f-\frac{I}{2i\pi}\lg(z-z_1)\right]\right\}+$$
$$+\lim\frac{I}{2i\pi}\frac{d}{dZ}\lg\left(\frac{z-z_1}{Z-Z_1}\right),$$

или еще:

$$U_1-iV_1=(u_1-iv_1)\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1+\frac{I}{2i\pi}\lim\frac{d}{dZ}\lg\frac{z-z_1}{Z-Z_1}.$$

Но мы имеем:

$$\frac{z-z_1}{Z-Z_1}=\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1+\frac{Z-Z_1}{2}\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right)_1+\ldots$$

и, затем,

$$\lim\frac{d}{dZ}\lg\frac{z-z_1}{Z-Z_1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right)_1}{\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1}$$

и, следовательно, окончательно:

$$U_1-iV_1=(u_1-iv_1)\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1+\frac{I}{4i\pi}\left(\frac{d}{dZ}\lg\frac{dz}{dZ}\right)_1. \tag{5}$$

Из двух членов, стоящих в правой части (5), ясно, что второй член является аналитической функцией Z_1, но это не будет иметь место вообще и для первой функции, так как, очевидно, может случиться, что u_1-iv_1 не будет аналитической функцией z_1. Но выше приведенный пример (где $Z=z$) убеждает нас, что даже в этом случае может случиться, что вещественная часть и мнимая с измененным знаком от выражения $(u_1-iv_1)\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1$ получаются диференцированием функции тока $\chi(X_1, Y_1)$. Так как в последнем члене формулы (5) коэфициент при i под знаком $\frac{d}{dZ_1}$ есть $-\frac{1}{4\pi}\lg\left|\frac{dz}{dZ_1}\right|_1$, то отсюда заключаем, что скорость U_1, V_1 получается диференцированием функции тока

$$L(X_1,\ Y_1)=\chi(X_1,\ Y_1)-\frac{1}{4\pi}\lg\left|\frac{dz}{dZ}\right|_1, \tag{6}$$

по формулам

$$U_1=\frac{\partial L}{\partial Y_1},\quad V_1=-\frac{\partial L}{\partial X_1}.$$

Пример. Пусть мы изучаем движение вихревого центра внутри угла, ограниченного двумя полупрямыми, составляющими угол $\frac{\pi}{n}$, и занятого жидкостью, покоящейся на бесконечности. Конформное преобразование рассматриваемой области в плоскости Z на верхнюю полуплоскость Z очевидно совершается функцией

$$z=Z^n,$$

и в плоскости z функцией f будет хорошо известная функция

$$\frac{1}{2i\pi}\lg\frac{z-z_1}{z_1-z_1'};$$

отсюда заключаем, что

$$u_1 - iv_1 = \frac{I}{4\pi y_1};$$

имеем

$$\frac{dz}{dZ} = nZ^{n-1},$$

так что применяя формулу (5), опуская индекс и переходя, кроме того, к полярным координатам ($Z = \rho e^{i\omega}$), находим для части U', V' в вы-

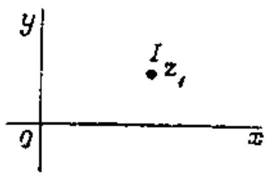

Рис. 30.

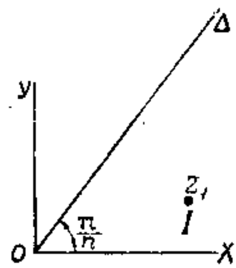

Рис. 31.

ражении скорости U, V вихря, получающейся от первого члена, следующее:

$$U' - iV' = \frac{In}{4\pi} \frac{e^{i(n-1)\omega}}{\rho \sin n\omega}.$$

Чрезвычайно просто установить, что определенные таким образом U', V' получаются диференцированием функции тока $\chi(X, Y)$. В самом деле, эта функция дается равенством:

$$d\chi = -V'dX + U'dY = \frac{In(\sin n\omega\, d\rho + \rho \cos n\omega\, d\omega)}{4\pi\rho \sin n\omega},$$

откуда

$$\chi = \frac{In}{4\pi} \lg \rho + \frac{I}{4\pi} \lg \sin n\omega.$$

Но

$$\left|\frac{dz}{dZ}\right| = n\rho^{n-1},$$

так что формула (6) дает сейчас же функцию тока для движения вихря в виде:

$$L = \chi - \frac{I}{4\pi} \lg (n\rho^{n-1}) = \frac{I}{4\pi} \lg (\rho \sin n\omega) + \text{const}.$$

Составляющие скорости U, V отсюда легко выводятся, и траекторией вихря будет служить кривая, заданная уравнением

$$\rho \sin n\omega = \text{const}.$$

Рассмотрим теперь движение единственного вихря z_1 в верхней z — полуплоскости, предполагая опять жидкость покоящейся на бесконечности, и приведем в соответствие этой полуплоскости односвязную область Δ с помощью формулы

$$z = A(Z).$$

Как и выше, будем иметь:

$$f = \frac{I}{2i\pi} \lg \frac{z - z_1}{z - z_1'} = \varphi + i\psi,$$

и скорость вихря Σ_1 сможет быть выражена на основании формул (2) в виде:

$$U_1 - iV_1 = \lim \frac{d}{dZ}\left[\frac{I}{2i\pi} \lg \frac{z(Z) - z_1}{z(Z) - z_1'} - \frac{I}{2i\pi} \lg (Z - Z_1)\right], \quad (7)$$

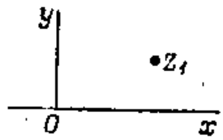

Рис. 32.

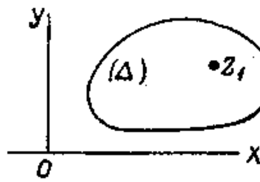

Рис. 33.

что можно переписать иначе:

$$U_1 - iV_1 = \lim \frac{d}{dZ}\left[\frac{I}{2i\pi} \lg \frac{z - z_1}{Z - Z_1} - \frac{I}{2i\pi} \lg (z - z_1')\right]. \quad (8)$$

Рассмотрим просто функцию, стоящую внутри последних квадратных скобок; отбрасывая несущественную постоянную, мы видим, что она стремится к

$$\frac{I}{2i\pi}\left[\lg \frac{dz}{dZ} - \lg y\right]_1, \quad (9)$$

так что мнимая часть этого выражения $\varphi^* + i\psi^*$ будет

$$\psi^* = \frac{I}{2\pi}\left[\lg y - \lg \left|\frac{dz}{dZ}\right|\right]_1. \quad (10)$$

Естественно, как мы уже заметили, $\varphi^* + i\psi^*$ не является уже аналитической функцией Z_1 и, следовательно, скорость вихря (U_1, V_1) не будет уже получаться из функции ψ^*, рассматриваемой как функция тока.

Но мы здесь отметим очень интересную теорему.

Теорема. Скорость u^*, v^*, выведенная из ψ^* применением обычных формул

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial X} \quad (11)$$

равна удвоенной скорости U_1, V_1 рассматриваемого вихря.

В самом деле, прежде всего скорость (U_1, V_1) получается из формулы (8), трактуемой, как это делалось выше, для аналогичного уравнения; получаем, таким образом:

$$U_1 - iV_1 = \frac{I}{2i\pi}\left[\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dZ^2}}{\frac{dz}{dZ}}\right)_1 - \frac{1}{2iy_1}\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1\right],$$

так как

$$\lim \frac{d}{dZ}\lg(z - z_1') = \frac{1}{2iy_1}\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1.$$

Вычислим теперь $u^* - iv^*$ посредством формул (11). Прежде всего в ψ^* имеется часть, происходящая от члена $\frac{I}{2i\pi}\lg\frac{dz}{dZ}$, который фигурирует в функции (9), этот член будет аналитической функцией от Z_1 и, следовательно, в выражение $u^* - iv^*$ он вносит член, равный

$$\frac{I}{2i\pi}\left(\frac{\frac{d^2z}{dZ^2}}{\frac{dz}{dZ}}\right)_1;$$

остается теперь рассмотреть, что произойдет от члена $\frac{I}{2\pi}\lg y_1$ в ψ^*. Этот член внесет в u^* и v^* выражения:

$$\frac{I}{2\pi y_1}\frac{\partial y_1}{\partial Y_1} \quad \text{и} \quad \frac{I}{2\pi y_1}\frac{\partial y_1}{\partial X_1},$$

а в $u^* - iv^*$:

$$\frac{I}{2\pi y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial Y_1} + i\frac{\partial y_1}{\partial X_1}\right).$$

Но в силу аналитичности $x_1 + iy_1$, как функции от Z, имеем:

$$\frac{\partial y_1}{\partial Y_1} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial y_1}{\partial Y_1} + i\frac{\partial y_1}{\partial X_1} = \frac{\partial(x_1 + iy_1)}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right)_1,$$

Следовательно, в $u^* - iv^*$ вносится член:

$$\frac{I}{2\pi y_1}\left(\frac{dz}{dZ}\right)_1,$$

и мы имеем окончательно:

$$u^* - iv^* = \frac{I}{2i\pi}\left(\frac{\frac{d^2z}{dZ^2}}{\frac{dz}{dZ}} + \frac{i}{y}\frac{dz}{dZ}\right)_1,$$

и значит, имеем:

$$u^* - iv^* = 2\,(U_1 - iV_1),$$

что и требовалось доказать.

Что касается вещественной части φ^* функции (9), то она имеет только отдаленное отношение к скорости вихря.

Можно также выразить полученный результат, сказав, что скорость вихря получается из функции тока

$$\frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi}\left(\lg y - \lg\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right). \tag{12}$$

Пример. Если мы возьмем снова уже рассмотренный случай вихря, находящегося внутри угла величиною $\frac{\pi}{n}$, то имеем:

$$y = \rho^n \sin n\omega,$$

$$\frac{dz}{dZ} = n\rho^{\,n-1} e^{(n-1)i\omega},$$

и функция $\frac{1}{2}\psi^*$ становится (с точностью до постоянной)

$$\frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi}\lg(\rho \sin n\omega).$$

Траектория вихря будет, следовательно, иметь уравнение

$$\rho \sin n\omega = \text{const}.$$

Это и есть результат, уже найденный выше.

Другой пример. Движущийся вихрь внутри полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми; жидкость покоится на бесконечности.

Пусть толщина полосы будет q; конформное отображение этой полосы на полуплоскость (z) совершается уравнением

$$z = e^{\frac{\pi z}{a}}.$$

Далее

$$f = \frac{I}{2i\pi}\lg\frac{z - z_1}{z - z_1'},$$

и ψ^* получается из уравнения (12).

Получаем

$$y = e^{\frac{\pi X}{a}} \sin \frac{\pi Y}{a}, \quad \left|\frac{dz}{dZ}\right| = \frac{\pi}{a} e^{\frac{\pi X}{a}},$$

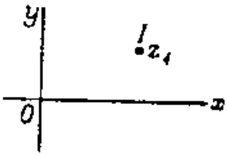

Рис. 34.

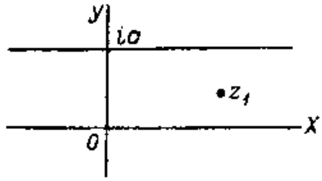

Рис. 35.

так что с точностью до постоянной имеем:

$$\frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi} \lg \sin \frac{\pi Y}{a}.$$

Скорость вихря, следовательно, параллельна границам и равна

$$\frac{I}{4a} \operatorname{ctg} \frac{\pi Y_1}{a};$$

это то, что уже нами было найдено, но совершенно иным путем.

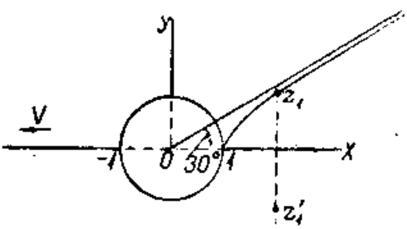

Рис. 36.

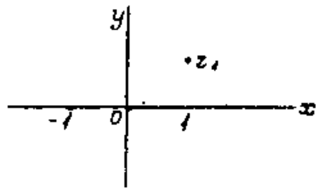

Рис. 37.

Также преобразование $z = i\,\dfrac{a - Z}{a + Z}$, переводящее верхнюю полуплоскость z в круг $|Z| \leqslant a$, даст нам без труда:

$$\frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi} \lg (a^2 - X^2 - Y^2),$$

что дает для скорости вихря, помещенного в z:

$$U_1 = -\frac{I}{2\pi}\,\frac{Y_1}{a^2 - X_1^2 - Y_1^2}, \quad V_1 = \frac{I}{2\pi}\,\frac{X_1}{a^2 - X_1^2 - Y_1^2},$$

результат, вполне совпадающий с уже нам известным.

Рассмотрим теперь более сложный пример поступательного перемещения кругового цилиндра со скоростью V параллельно OX, сопровождаемого образованием позади двух вихрей, симметрично расположенных относительно OX и имеющих противоположные интенсивности. Мы можем предположить цилиндр неподвижным, считая жидкость на бесконечности движущейся со скоростью, противоположной V. Далее мы поставим в соответствие верхней половине фигуры в плоскости Z верхнюю полуплоскость z путем классического преобразования (см., например, наши Leçons surl'Hydrodynamique (Chap. VI, p. 61, 1929, Gauthier-Villars, édit.)

$$z = \frac{1}{2}\left[Z + \frac{1}{Z}\right]. \tag{13}$$

Полуокружности радиуса 1 будет соответствовать прямолинейный отрезок -1, $+1$ в плоскости z. Приняв во внимание поступательное движение на бесконечности, напишем комплексный потенциал в плоскости z в виде:

$$f = \frac{I}{2i\pi}\lg\frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} + 2Vz, \tag{14}$$

где в последнем члене поставлен коэфициент $2V$, чтобы получить скорость V в плоскости Z.

Отсюда следует, что скорость вихря Z_1 получится в виде двух слагаемых:

1°) скорости, выведенной из функции тока

$$\frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi}\left[\lg y - \lg\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right];$$

2°) скорости, полученной из комплексного потенциала

$$2Vz = V\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = V\left(X + iY + \frac{X - iY}{X^2 + Y^2}\right).$$

Эти два слагаемые происходят соответственно от двух членов правой части (14).

Далее, находим:

$$y = \frac{Y}{2}\frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2}$$

$$\left|\frac{dz}{dZ}\right|^2 = \frac{(X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) + 1}{4(X^2 + Y^2)^2}.$$

Две скорости, написанные выше, будут, следовательно, получаться от двух функций тока

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi}\Big[\lg Y(X^2 + Y^2 - 1) -$$
$$- \frac{1}{2}\lg\left[(X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) + 1\right]\Big], \tag{15}$$
$$\psi_2 = V\left(Y - \frac{Y}{X^2 + Y^2}\right),$$

откуда скорость перемещения вихря:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial Y} + \frac{\partial\psi_2}{\partial Y}, \\ V_1 &= -\frac{\partial\psi_1}{\partial X} - \frac{\partial\psi_2}{\partial X} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(Мы не будем переписывать индекс 1 в правых частях.)

Найдем, какие условия должны иметь место, чтобы изучаемая конфигурация была перманентна относительно цилиндра; для этого необходимо и достаточно, чтобы U_1 и V_1 обращались в нуль, что дает нужные условия. Так как ψ_1 и ψ_2 содержат соответственно I или V множителями, то одно из двух рассматриваемых уравнений, например $V_1 = 0$, определит отношение $\frac{I}{V}$, и мы получим условие, независимое от I и V, путем исключения этого отношения из двух уравнений $U_1 = V_1 = 0$, т. е. написав

$$\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial X}}{\frac{\partial\psi_2}{\partial X}} = \frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial Y}}{\frac{\partial\psi_2}{\partial Y}}. \tag{17}$$

Это последнее уравнение, содержащее только X и Y, даст нам **геометрическое место точек**, где может быть помещен вихрь Z_1, если поставить требование, чтобы конфигурация была перманентной. Вычисление ведется легко в полярных координатах, если заметить, что уравнение (17) выражает, что две кривых $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$, проходящие через рассматриваемую точку, касаются в этой точке. [1]

Нужно, следовательно, только выразить условие касания кривых

$$\left.\begin{aligned} \rho^4 - 2\rho^2\cos 2\omega + 1 &= a^2\rho^2(\rho^2-1)^2(1-\cos 2\omega), \\ \sin\omega\,(\rho^2-1) &= b\rho \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(где a и b постоянные), в их общих точках. Для этого достаточно написать, что в такой точке значения $\frac{d\omega}{d\rho}$, взятые из обоих уравнений (18), равны. Элементарное же вычисление дает:

$$-\sin 2\omega\,\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\rho(\rho^2-1)\,[a^2(\rho^2-1)^3 + 2(\rho^2+1)]}{[a^2\rho^2(\rho^2-1)^2 - 2\rho^2]^2} -$$

$$+\cos\omega\,\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{b(\rho^2+1)}{(\rho^2-1)^2},$$

[1] Так как то же условие выражает, что функциональный определитель $\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(X,Y)}$ равен нулю, то оно эквивалентно также уравнению $\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(\rho,\omega)} = 0$, что, после записи ψ_1 и ψ_2 в полярных координатах, проводит нас непосредственно к уравнению (20).

и приравнивая оба значения $\frac{d\omega}{d\rho}$, имеем:

$$2\sin\omega = \frac{2\rho(\rho^2-1)^3[a^2(\rho^2-1)^3+2(\rho^2+1)]}{b(\rho^2+1)\rho^4[a^2(\rho^2-1)^2-2]^2}. \tag{19}$$

Остается только исключить a^2 и b из (18) и (19); имеем непосредственно, используя (18):

$$a^2(\rho^2-1)^2-2=\frac{(\rho^2-1)^2}{2\rho^2\sin^2\omega},$$

$$a^2(\rho^2-1)^3+2(\rho^2+1)=\frac{(\rho^2-1)^3+\gamma\rho^4\sin^2\omega}{2\rho^2\sin^2\omega}.$$

Внося эти значения, а также

$$b=\frac{\sin\omega(\rho^2-1)}{\rho}$$

в (19), имеем после приведений

$$(\rho^2-1)^2=4\rho^4\sin^2\omega,$$

что можно написать в виде:

$$\pm 2Y=\rho-\frac{1}{\rho}.$$

Нужно использовать только ту часть этой кривой, для которой $Y>0$, и $\rho>1$, так как рассматриваемый вихрь находится в верхней полуплоскости и вне цилиндра; следовательно, при сохранении только одного надлежащего знака, имеем кривую

$$2Y=\rho-\frac{1}{\rho}. \tag{20}$$

Эта кривая симметрична относительно оси OY. Она отходит справа от прямой OY из точки $X=1$, $Y=0$, имея касательную, наклоненную к оси OX под углом 45°; ветвь, изображенная на рис. 36, имеет асимптоту, проходящую через O, составляющую угол 30° с OX.

На этой кривой, или на симметричной с ней, надо поместить Z_1, чтобы получить перманентное движение.

Небезынтересно отметить один метод, принадлежащий Caldonazzo (Atti dei Lincei, mars-avril 1919; 5-e Serie, vol. XXVIII, p. 191, 301), который удачным преобразованием изложенного метода легко получил соответствующие результаты и в то же время выяснил вопрос об устойчивости рассматриваемых вихрей. Большой интерес имеют также статьи L. Föppl, Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder (Sitzungsberichte der kön. Bayerischen Akad. der Wiss. 1913, München) и Lagally, Ueber die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit (id. 1915).

Не имеет большого значения, идет ли речь о цилиндре вращения или о цилиндре какого угодно сечения, лишь бы только была симметрия относительно OX в плоскости Z и чтобы можно было ограничиться рассмотрением лишь половины картины движения со стороны положительных значений Y; достаточно суметь конформно отобразить эту область на верхнюю z — полуплоскость с помощью соотношения

$$z = A\,(Z). \tag{21}$$

Мы видели, что можно получить движения вихря Z_1, накладывая скорости, происходящие из двух функций тока ψ_1 и ψ_2, определенных уравнениями, аналогичными (15). ψ_1 будет представлять функцию $\frac{1}{2}\psi^*$, данную равенством (12). Что касается ψ_2, то это будет функция тока,

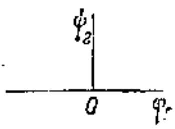

Рис. 38.

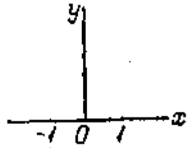

Рис. 39.

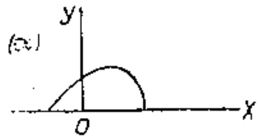

Рис. 40.

полученная из конформного отображения области жидкости (выше оси OX) на полуплоскость. Вообразим теперь **вспомогательное фиктивное движение без вихрей**, занимающее ту же область плоскости Z. Назовем $\varphi_2 + i\psi_2$ комплексный потенциал в этом фиктивном движении и выберем ψ_2 так, чтобы эта функция тока обращалаcь в нуль на границе плоскости XOY.

Положим:

$$f_2 = \varphi_2 + i\psi_2. \tag{22}$$

Приравнивая тогда

$$z = f_2, \tag{23}$$

получим через (21) конформное отображение области (A) плоскости Z на верхнюю z — полуплоскость. При этих условиях наша функция ψ_2 совпадает с функцией того же названия из (22).

(Ясно, что всегда можно видоизменить f_2 введением постоянного множителя, так чтобы скорость фиктивного движения на бесконечности равнялась любому выражению, но здесь совершенно бесполезно выяснять это условие в общем случае; при этих условиях скорость на бесконечности не будет входить в число данных величин в задаче, а будет определена в конце подсчета à posteriori.)

Назовем через V_2 скорость проекций (u_2, v_2) в фиктивном движении; тогда

$$w_2 = u_2 - iv_2 = \frac{df_2}{dZ} = \frac{dz}{dZ}, \tag{24}$$

и функция ψ, определенная (12), будет иметь выражение, которое можно написать в виде:

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\psi^* = \frac{I}{4\pi}\lg\frac{\psi_2}{V_2} \tag{25}$$

Скорость вихря, по крайней мере часть скорости, происходящая от функции ψ_1, будет тогда

$$U' = \frac{\partial\psi_1}{\partial Y}, \quad V' = -\frac{\partial\psi_1}{\partial X},$$

т. е.

$$U' = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{u_2}{\psi_2} - \frac{\partial \lg V_2}{\partial Y}\right), \quad V' = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{v_2}{\psi_2} + \frac{\partial \lg V_2}{\partial X}\right),$$

откуда получаем:

$$W' = U' - iV' = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{w_2}{\psi_2} - i\frac{d\lg w_2}{dZ}\right). \tag{26}$$

Но, как хорошо известно:

$$\lg w_2 = \lg V_2 - i\theta_2,$$

где θ_2 означает угол между направлением скорости V_2 и осью OX; так что

$$\frac{d\lg w_2}{dZ} = \frac{\partial(\lg V_2)}{\partial X} - i\frac{\partial\theta_2}{\partial X} = -\frac{\partial\theta_2}{\partial Y} - i\frac{\partial\theta_2}{\partial X},$$

и (26) запишется:

$$W' = \frac{I}{4\pi}\left[\frac{w_2}{\psi_2} - \frac{\partial\theta_2}{\partial X} + i\frac{\partial\theta_2}{\partial Y}\right]. \tag{27}$$

Эту формулу можно выразить словами, сказав, что скорость (U', V') является результирующей двух скоростей:

$$\frac{I}{4\pi\psi_2}u_2, \quad \frac{I}{4\pi\psi_2}v_2 \tag{28}$$

и

$$-\frac{I}{4\pi}\frac{\partial\theta_2}{\partial X}, \quad -\frac{I}{4\pi}\frac{\partial\theta_2}{\partial Y}. \tag{29}$$

Вычислим теперь составляющие обеих скоростей (28) и (29) по двум направлениям, касательному и нормальному к кривой фиктивного тока ($\psi_2 = \text{const}$), проведенной через данную точку. Вектор (28) имеет составляющими

$$\frac{IV_2}{4\pi\psi_2} \text{ и } 0$$

Вектор (29) дает составляющие

$$-\frac{I}{4\pi}\frac{d\theta_2}{ds_2}, \quad -\frac{I}{4\pi}\frac{d\theta_2}{dn_2},$$

из которых последняя равна также

$$\frac{I}{4\pi}\frac{d\lg V_2}{ds_2},$$

если считать, что направление dn_2 получается из ds_2 поворотом ds_2 в положительном направлении на прямой угол. Чтобы иметь полную скорость вихревых центров, достаточно прибавить к двум написанным выше векторам (происходящим, если вспомним, от функции тока ψ_1) скорость, полученную по функции ψ_2; эта последняя и есть V_2, направленная по касательной к фиктивной траектории.

В целом, мы найдем, следовательно, для истинной скорости вихря

$$\left.\begin{aligned} &\text{по касательной:} \quad && V_2 + \frac{IV_2}{4\pi\psi_2} - \frac{1}{4\pi}\frac{d\theta_2}{ds_2}, \\ &\text{по нормали:} \quad && \frac{1}{4\pi}\frac{d\lg V_2}{ds_2}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Те положения, в которые необходимо поместить вихрь I, чтобы он оставался в равновесии относительно данного твердого тела, будут охарактеризованы парой следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} V_2\left(\frac{1}{\psi_2} + \frac{4\pi}{I}\right) &= \frac{d\theta_2}{ds_2}, \\ \frac{d\lg V_2}{ds_2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Второе из этих соотношений определяет в плоскости линию L, которая является местом возможных положений, разумеется, в области A. Первое уравнение дает тогда значение I, которое надо взять в какой-нибудь точке этой кривой. Если в соседстве с рассматриваемой точкой M, на траектории вихря, проходящего через M, скорость стремится вернуть вихрь в M, мы скажем, что рассматриваемое положение устойчиво, в противном случае оно будет неустойчивым. Так как в рассматриваемой точке M траектория вихря касательна к линии $\psi_2 = \text{const}$, там проходящей, то для устойчивости необходимо, чтобы производная по s_2 от составляющей (30) по касательной была отрицательна. Траекторией вихря будет линия

$$\psi_1 + \psi_2 = \text{const};$$

имеем на этой линии, согласно (25):

$$\frac{I}{4\pi}\lg\frac{\psi_2}{V_2} + \psi_2 = \text{const},$$

т. е.

$$\frac{\psi_2}{V_2}e^{\frac{4\pi}{I}\psi_2} = \frac{1}{a}, \tag{32}$$

где a определенное число.

Таким образом, составляющая (30) по касательной может быть написана:

$$\sigma = \left(a e^{\frac{4\pi}{I}\psi_2} + \frac{4\pi}{I} V_2 - \frac{d\theta_2}{ds_2} \right) \frac{I}{4\pi}. \tag{33}$$

Если диференцировать по s_2, то перемещение происходит по касательной к линии $\psi_2 = \text{const}$, так что $\frac{d\psi_2}{ds_2} = 0$; на основании (32) имеем также $\frac{dV_2}{ds_2} = 0$ [это следует и из второго уравнения (31)], так что условие устойчивости можно записать:

$$I \frac{d^2\theta_2}{ds_2^2} > 0. \tag{34}$$

Применим все это к круговому цилиндру. Тогда мы будем иметь:

$$f_2 = z = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right),$$

(что сводится к допущению, что скорость на бесконечности равна единице); далее:

$$u_2 - i v_2 = e^{-\lg V_2 - i\theta_2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{Z^2}\right),$$

$$\lg V_2 = \lg \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{Z^2}\right|;$$

положив $Z = \rho e^{i\omega}$, легко находим:

$$\frac{\partial \lg V_2}{\partial X} = \frac{2\rho^3 \cos 3\omega - 2\rho\cos\omega}{\rho^6 - 2\rho^4 \cos 2\omega + \rho^2},$$

$$\frac{\partial \lg V_2}{\partial Y} = \frac{2\rho^3 \sin 3\omega - 2\rho\sin\omega}{\rho^6 - 2\rho^4 \cos 2\omega + \rho^2}.$$

Кроме того, имеем:

$$u_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial Y} = 1 - \frac{\cos 2\omega}{\rho^2},$$

$$v_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial X} = -\frac{\sin 2\omega}{\rho^2}.$$

Можно вычислить s_2 в направлении скорости V_2, уравнение

$$\frac{\partial \lg V_2}{\partial s_2} = 0$$

эквивалентно уравнению

$$u_2 \frac{\partial \lg V_2}{\partial X} + v_2 \frac{\partial \lg V_2}{\partial Y} = 0,$$

или еще:

$$-\rho^2 \cos 3\omega + 2\cos\omega - \frac{1}{\rho^2}\cos\omega = 0.$$

В силу формулы

$$\cos 3\omega = 4\cos^3\omega - 3\cos\omega,$$

последнее запишется в виде:

$$-4\rho^2\cos^2\omega + 3\rho^2 + 2 - \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

или

$$4X^2 = \frac{(\rho^2+1)(3\rho^2-1)}{\rho^2}.$$

Весьма легко проверить, что это именно та кривая, которая дается уравнением (20).

Неравенство (34) указывает природу устойчивости.

О задаче Д. Рябушинского. С рассмотрением предыдущего параграфа можно связать одну важную задачу, изученную Рябушинским (Thèse. Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 32) и в его заметке в Comptes rendus (t. 174, 1922, p. 1226). Предполагаем поток жидкости параллельным OX и встречающим два прямолинейных отрезка (сечения плоскостью XOY двух одинаковых тонких пластинок); эти два отрезка расположены, как указывает рисунок, один позади другого и ортогонально к потоку. Мы будем предполагать, что в происходящем движении устанавливаются два вихревых центра в I и I', в точках,

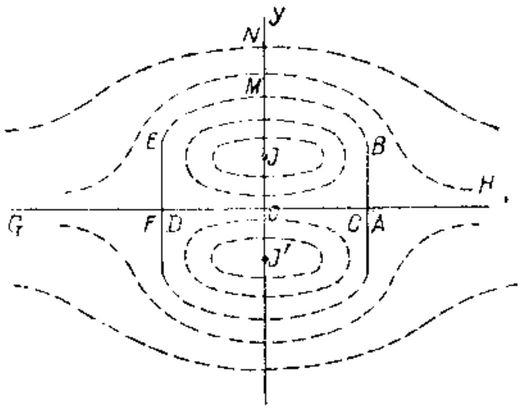

Рис. 41.

симметричных относительно OX и расположенных на OY, так что линии тока в этом движении дадут конфигурацию, указанную на чертеже пунктиром; кривые симметричны относительно OY; но только скорости в соответствующих точках отложены по симметричным прямым, но в противоположных направлениях.

Ясно, что достаточно заняться верхней частью плоскости XOY, и очевидно можно искать решение задачи по методам, изложенным нами ранее. Можно, в самом деле, совершить конформное преобразование полуплоскости, ограниченной линией $GFEDOCBAH$, на полуплоскость z, ограниченную Ox, и мы придем к известной задаче. Но мы в нескольких словах покажем, что такой путь требует применения редко встречающихся формул теории эллиптических функций и затем дает уравнения, с которыми трудно обращаться, так что мы придем к необходимости иначе подойти к вопросу. Заметим, что Рябушинский решил задачу методом, весьма отличным от проводимого здесь. По формуле Шварца (см. например наши Leçons sur l'Hydro-

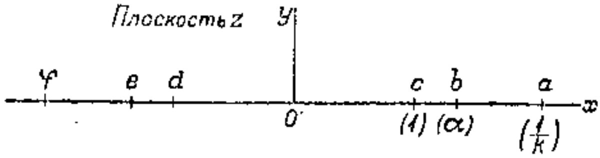

Рис. 42.

dynamique, p. 42) связь между полуплоскостями Z и z осуществляется соотношением вида

$$dZ = L \frac{z^2 - \alpha^2}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}\, dz \quad (L = \text{вещ. пост.}). \tag{1}$$

Замечая прежде всего, что точки (a, b, c) и (f, e, d) могут быть взяты на Ox попарно симметричными относительно O, и затем, что можно для абсциссы c взять значение 1; значение a тогда обозначим через $\frac{1}{k}$, считая $k > 1$, и тогда будем иметь:

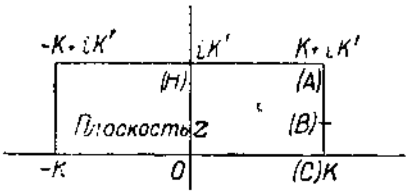

Рис. 43.

$$1 < \alpha < \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Если мы положим тогда

$$z = \operatorname{sn} \lambda, \tag{3}$$

где sn функция Якоби, соответствующая модулю k, то уравнение (1) запишется:

$$dZ = L(\operatorname{sn}^2 \lambda - \alpha^2)\, d\lambda.$$

Принимая обозначения по Traité des fonctions elliptiques Tannery и Molk'a, мы далее получим (формула CXV, 4):

$$Z = L\left[\frac{\lambda}{k^2} Z'(0) - \frac{1}{k^2}\frac{\Theta'(\lambda)}{\Theta(\lambda)}\right] - L\alpha^2\lambda. \tag{4}$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как $Z(\lambda) = \frac{\Theta'(\lambda)}{\Theta(\lambda)}$ обращается в нуль при $\lambda = 0$ (формула LXXIX), и наша полуплоскость z отображена в плоскости переменной λ на прямоугольник со сторонами $2K$ и K', как указывает рис. 43.

Для дальнейшего будет более удобным перейти к обозначениям Вейерштрасса, что легко сделать при помощи соотношения (LXXVIII, 4)

$$\zeta_3\left(\frac{\lambda}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)=\frac{\eta_1\lambda}{K}+\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\Theta'(\lambda)}{\Theta(\lambda)}=\frac{\eta_1\lambda}{K}+\sqrt{e_1-e_3}\,Z(\lambda).$$

Диференцируя по λ, полагая $\lambda=0$ и замечая, что ζ_3' обращается в нуль вместе со своим аргументом, находим:

$$\sqrt{e_1-e_3}\,Z'(0)=-\frac{\eta_1}{K};$$

имеем также (LX)

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3};$$

следовательно, (4) можно написать в виде:

$$Z=-L\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{e_2-e_3}\zeta_3\left(\frac{\lambda}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)-L\alpha^2\lambda. \qquad (5)$$

Теперь постоянная α, соответствующая точке B, должна быть выбрана так, чтобы формула (5) обеспечивала совпадение точек A и C в плоскости Z, то есть нужно, чтобы Z принимала одинаковые значения для $\lambda=K$ и для $\lambda=K+iK'$, или, иначе (согласно формулам LXXI, 1, 2), для

$$\frac{\lambda}{\sqrt{e_1-e_3}}=\omega_1 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\sqrt{e_1-e_3}}=\omega_1+\omega_3=-\omega_2.$$

Это дает условие:

$$\alpha^2\omega_3=\frac{1}{e_2-e_3}\,(\zeta_3\omega_1+\zeta_3\omega_2)=-\frac{\eta_3}{e_2-e_3},$$

откуда

$$\alpha^2=-\frac{\eta_3}{\omega_3(e_2-e_3)},$$

и

$$Z=\frac{L}{e_2-e_3}\left[\frac{\eta_3}{\omega_3}\,\lambda-\sqrt{e_1-e_3}\,\zeta_3\left(\frac{c}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)\right]. \qquad (6)$$

Совокупность уравнений (3) и (6) определяет искомое соотношение между z и Z. После всего этого остается рассмотреть в плоскости z уже известное движение, определяемое через

$$f=mz+\frac{I}{2i\pi}\lg\frac{z-z_1}{z-z_1'},$$

и отыскать в плоскости Z скорость перемещения вихря Z_1, соответствующего z_1, рассматривая его как результирующую двух векторов, выведенных соответственно из функции тока

$$\psi_1 = \frac{I}{4\pi}\left[\lg y - \lg\left|\frac{dz}{dZ}\right|\right]$$

и функции тока $\psi_2 = my$. Следует кроме того написать, что скорость остается конечной в B, т. е., что $\frac{df}{dz}$ обращается в нуль при $z = \alpha$, как легко убедиться. Но совершенно ясно, что вычисления будут очень трудными и что не так просто написать условие (необходимое и достаточное для существования самой рассматриваемой конфигурации), чтобы скорость перемещения вихря равнялась нулю. Однако, такой путь имеет то преимущество, что он останется в силе, если даже поместить вихри I и I' не на оси Oy.

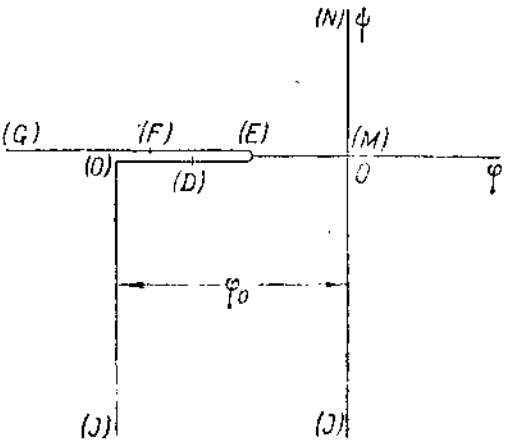

Рис. 44.

Мы приступим к этому вопросу несколько иным способом, что позволит сделать наши рассуждения более простыми.[1] Мы не будем рассматривать всю область жидкости, движущейся выше OX, а остановимся только на ее половине, беря во внимание лишь то, что происходит в квадранте $X'OY$ (откуда все остальное выведется по симметрии).

Назовем $f = \varphi + i\psi$ комплексный потенциал в изучаемом движении; мы можем предположить $\psi = 0$ вдоль линии тока $GFEMBAH$ и $\varphi = 0$ в точке M, f существует во всей рассматриваемой области, кроме точки I, вихревого центра. Скорость частицы будет, как и всегда

$$u - iv = \frac{df}{dZ} = e^{-i\Omega} = e^{-i\theta + \tau}, \tag{7}$$

положив $\Omega = \theta + i\tau$, так что θ есть угол между скоростью и осью OX.

Жидкой области $GFEDOIMN$, расположенной в квадранте $X'OY$, (рис. 41), будет соответствовать в плоскости f область, представленная на рис. 44, где в скобках указаны точки, соответствующие отмеченным точкам плоскости Z; выше точки I, полупрямая IY пере-

[1] См. Henri Villat, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 188, 1929, p. 597.

секает ортогонально (в силу симметрии) все встречаемые ею линии тока, так что имеем $\varphi = 0$ вдоль всей этой линии; ниже I, так как мы сделали полуоборот в направлении, противоположном току вокруг вихревого центра, значение φ будет постоянным и равным $-\varphi_0$, т. е. половине I — интенсивности вихря. Образованная таким образом полигональная область отображается конформно при помощи формулы Шварца на полуплоскость t (рис. 45), и мы получаем:

$$df = iL\frac{t+\alpha^2}{\sqrt{t}\,(t-\beta^2)}\,dt, \tag{8}$$

где L вещественная и положительная постоянная и где $-\alpha^2$ и β^2 представляют абсциссы точек, соответствующих E и I.

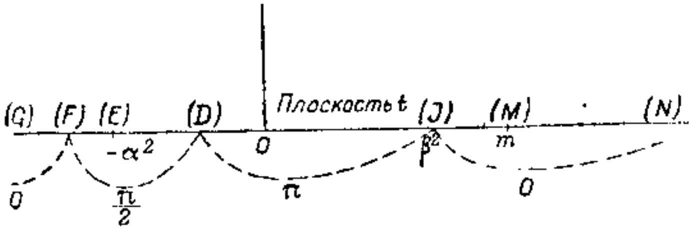

Рис. 45.

Полагая $t = \lambda^2$, получаем отсюда:

$$f = 2iL\lambda + \frac{iL}{\beta}(\alpha^2+\beta^2)\lg\frac{\lambda-\beta}{\lambda+\beta} - 2iL\sqrt{m} - \\ -\frac{iL}{\beta}(\alpha^2+\beta^2)\lg\frac{\sqrt{m_0}-\beta}{\sqrt{m_0}+\beta};$$

постоянная интегрирования вычислена так, чтобы точка $f = 0$ соответствовала точке M плоскости Z, т. е. точке, где $\lambda = \sqrt{m}$.

(Значение логарифма выбирается вещественное для λ вещественного и большего β.) Из формулы (9) заключаем сейчас же, что между I и O вещественная часть f равна

$$-\varphi_0 = -\frac{\pi L(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}, \tag{9}$$

и так как $I = -2\varphi_0$, то получаем условие:

$$2\pi L(\alpha^2+\beta^2) + I\beta = 0, \tag{10}$$

к которому мы вернемся несколько дальше.

Теперь надо связать переменную f и, далее, t с Z. Этот результат можно получить новым применением формулы Шварца, но мы к нему придем несколько иначе, воспользовавшись промежуточной переменной

$\Omega = \theta + i\tau$, введенной выше. Замечаем непосредственно, что угол θ между скоростью и OX оказывается равным на различных участках границы $GFEDOIK$ нулю, $\frac{\pi}{2}$ или π $\left(\frac{\pi}{2}\text{ на } FED, \pi \text{ на } DOI\right)$. Функция Ω, которая через посредство f является аналитической функцией t, имеет, следовательно, вещественную часть, известную на вещественной оси плоскости t. Допустим (что всегда можно сделать, меняя единицу времени), что скорость потока на бесконечности равна единице, тогда τ будет нуль, равно как и θ, а Ω будет дано хорошо известной формулой:

$$\Omega = \frac{1}{i\pi}\left[\int_f^d \frac{\pi}{2}\,\frac{d\mu}{\mu - t} + \int_d^{\beta^2} \pi\frac{d\mu}{\mu - t}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\lg\frac{d-t}{f-t} - i\lg\frac{\beta^2 - t}{d-t},$$

и, следовательно, согласно (7), имеем:

$$e^{i\Omega} = \frac{dZ}{df} = \frac{\beta^2 - t}{\sqrt{(d-t)(f-t)}}, \tag{11}$$

выбирая для радикала тот знак, при котором он положителен при $t = -\infty$.

Уравнения (8) и (11) позволят тогда выразить Z в функции t. Таким образом, имеем:

$$dZ = -2iL\frac{t + \alpha^2}{\sqrt{4t(d-t)(f-t)}}\,dt. \tag{12}$$

Мы пришли к эллиптическому интегралу, которым и займемся. Положим:

$$t = \mu + h, \tag{13}$$

где μ новая переменная и h постоянная, выбранная так, чтобы трем корням $t = 0$, a, f соответствовали три значения μ:

$$e_1 = -h, \quad e_2 = d - h, \quad e_3 = f - h, \tag{13'}$$

расположенные в порядке убывающих значений и сумма которых равна нулю. Это требует, чтобы

$$3h = d + f, \tag{14}$$

вследствие чего, положив $\mu = \wp s$, имеем:

$$dZ = -2iL(\wp s + h + \alpha^2)ds$$

и

$$Z = 2iL\zeta s - 2iL(h + \alpha^2)s + P. \tag{15}$$

Постоянная P определяется, если записать, что $Z=0$ для $t=0$, т. е. для $\wp = e_1$, $s=\omega_1$. Тогда

$$P = 2iL\,[(h+\alpha^2)\,\omega_1 - \eta_1]. \tag{16}$$

Замечая это, видим, какие условия надо наложить на произвольные постоянные L, α, β, d, f, которые фигурируют в наших результатах.

1°. Прежде всего нужно, чтобы при построении плоскости Z по формуле (15) две точки D и F совпали бы. Но эти точки соответствуют $t=d$ или f, т. е., $\wp = e_2$ или e_3, и, следовательно, $s=-\omega_2$ или ω_3. Это дает условие:

$$\zeta\omega_3 - (h+\alpha^2)\,\omega_3 = \zeta\,(-\omega_2) + (h+\alpha^2)\,\omega_2,$$

т. е., упрощая (так как $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$):

$$(h+\alpha^2)\,\omega_1 - \eta_1 = 0. \tag{17}$$

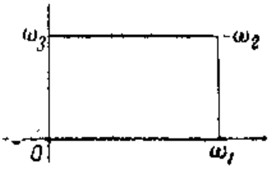

Рис. 46.

В силу (16) это нам дает, что постоянная P должна быть нулем. В силу известной формулы (Tannery и Molk, XXX, 1) можем записать (17) в виде:

$$\alpha^2\omega_1 = (\eta_1 + e_1\omega_1) = \frac{\pi^2}{2\omega_1}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right]; \tag{18}$$

последнее выражение является существенно положительным.

2°. Нужно, чтобы скорость в точке E была конечной. Это следует из (7) и (11): скорость остается везде конечной (кроме самой вихревой точки I) и обращается в нуль в D и F.

3°. Наконец, и это весьма существенный пункт, следует вычислить с к о р о с т ь п е р е м е щ е н и я вихря I и выразить, что э т а с к о р о с т ь р а в н а н у л ю, условие, необходимое для самого существования рассматриваемого нами перманентного движения.

Эта же скорость (u_1, v_1) задана, как мы знаем, формулой

$$u_1 - iv_1 = \lim_{Z=Z_1}\left(\frac{df}{dZ} - \frac{I}{2i\pi}\,\frac{1}{Z-Z_1}\right), \tag{19}$$

где Z_1 есть аффикс вихря, соответствующего, по (12) или (15), $t=\beta^2$. Мы разложим $\dfrac{dt}{dZ}$ и $\dfrac{1}{Z-Z_1}$ в окрестности этого значения, положив

$$t - \beta^2 = m. \tag{20}$$

Мы будем иметь, в силу (12):

$$dZ = -iL\,\frac{(\alpha^2+\beta^2+m)\,dm}{\sqrt{(m+\beta^2)(m+\beta^2-d)(m+\beta^2-f)}},$$

или:

$$dZ = -iL\frac{(\alpha^2+\beta^2)\,dm}{\beta\sqrt{(\beta^2-d)(\beta^2-f)}}\times$$

$$\times\left\{1+m\left[\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^2-d}+\frac{1}{\beta^2-f}\right)\right]+\ldots\right\},$$

и, следовательно,

$$Z-Z_1=-\frac{iL}{\beta\sqrt{(\beta^2-d)(\beta^2-f)}}\times$$

$$\times\left\{(\alpha^2+\beta^2)\,m+\left[1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^2-d}+\frac{1}{\beta^2-f}\right)\right]\frac{m^2}{2}+\ldots\right\}$$

и

$$\frac{1}{Z-Z_1}=\frac{i\beta}{L}\frac{\sqrt{(\beta^2-d)(\beta^2-f)}}{(\alpha^2+\beta^2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^2-d}+\frac{1}{\beta^2-f}\right)-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right]+O(m)\right\}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (11), из которого получаем:

$$\frac{df}{dZ}=\frac{\sqrt{(d-t)(f-t)}}{\beta^2-t}=\frac{\sqrt{(\beta^2-d+m)(\beta^2-f+m)}}{-m}=$$

$$=-\frac{\sqrt{(\beta^2-d)(\beta^2-f)}}{m}\left[1+\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\beta^2-d}+\frac{1}{\beta^2-f}\right)+O(m^2)\right].$$

Следовательно, в выражении $\frac{df}{dZ}-\frac{I}{2i\pi}\frac{1}{Z-Z_1}$ член с $\frac{1}{m}$ пропадет, если будет иметься соотношение

$$\beta I+2\pi L(\alpha^2+\beta^2)=0, \tag{21}$$

а это и есть уже написанное выше соотношение (10), которое определяет интенсивность вихря. (Последняя будет иметь отрицательный знак при сделанных предположениях, когда поток в плоскости Z идет слева.)

Это убеждает нас, что скорость перемещения вихря I не бесконечна. Чтобы она равнялась н у л ю, нужно записать, что в написанной выше разности отсутствует постоянный член. После приведений и использования уравнения (21), получаем условие:

$$\gamma\equiv\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^2-d}+\frac{1}{\beta^2-f}-\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}=0. \tag{22}$$

Итак, между пятью числами (L, α, β, d, f) имеем соотношения (18) и (22); остаются три параметра; роль постоянной L заключается лишь в том, что этот коэфициент пропорциональности преобразует фигуру в подобную.

Вместо параметров d и f можно ввести ω_1 и ω_3, что более просто при вычислениях. Тогда уравнение (18) дает α^2; уравнение (21) позволит узнать интенсивность I вихря, и уравнение (22) — где d и f выражены в функции чисел e_1, e_2, e_3, т. е., следовательно, ω_1 и ω_3 через (13′) и (14) — будет уравнением относительно β^2.

Как легко убедиться, это уравнение относительно β^2 имеет единственный положительный корень. Так как $d = e_2 - e_1$, $f = e_3 - e_1$, то отсюда следует, что $f < d < 0$, и без труда убеждаемся, что изменение γ как функции, данной уравнением (22), представлено кривой на

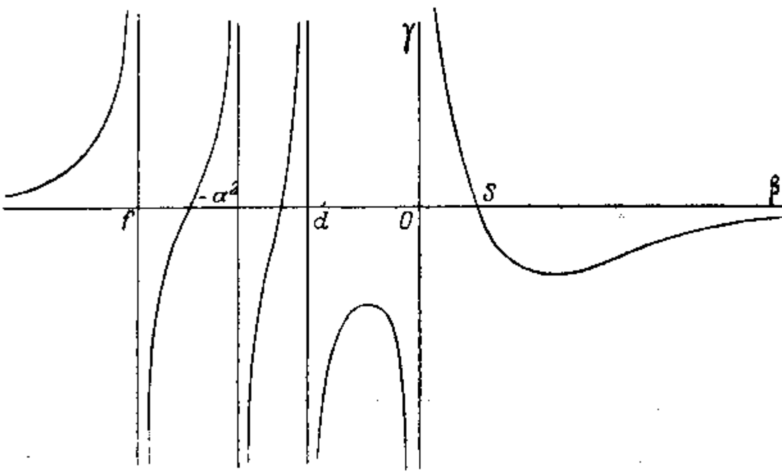

Рис. 47.

рис. 47. Следовательно, имеется только один положительный корень, представленный точкой S.

Мы не останавливаемся здесь на задаче действительного определения $\omega_1, \omega_3, \alpha, \beta, \overline{L}$, когда задаются размеры фигуры в плоскости Z. Однако, заметив, что величина α^2, определенная (18), попадет, как это необходимо, между $e_1 - e_2$ и $e_1 - e_3$, ибо это сводится к утверждению, что

$$\eta_1 + e_2\omega_1 > 0$$

и

$$\eta_1 + e_3\omega_1 < 0,$$

а последнее является следствием классических формул теории эллиптических функций (Tannery et Molk, XXX, 2 и 3):

$$\eta_1 + e_2\omega_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2},$$

$$\eta_1 + e_3\omega_1 = -\frac{\pi^2}{2\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

Формулы однородности эллиптических функций показывают без труда, что если умножить ω_1, ω_3 и s на n, то это сведется, согласно (15), к замене Z на $\frac{1}{n}Z$, следовательно, по существу, к изменению множителя L. Чтобы определить конфигурацию плоскости Z, остаются, следовательно, только два параметра L и $\frac{\omega_3}{\omega_1}$. С помощью этих параметров можно определить величину обтекаемых отрезков и их взаимное расстояние. Положение вихря I тогда определено. Любопытно заметить, что задача, по виду более простая — отыскать конфигурацию, аналогичную изученной выше, для двух вихрей позади единственной плоскости, нормальной к потоку, не дает перманентного приемлемого решения. Пусть, в самом деле, $A'OA$ — данный отрезок ширины $2a$ (рис. 48);

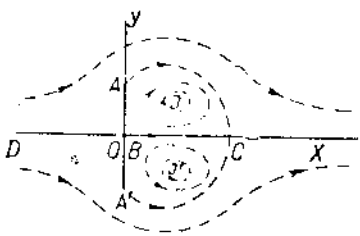

Рис. 48.

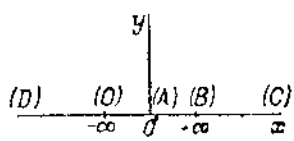

Рис. 49.

предположим, что скорость на бесконечности равна V_0, и предположим установившееся перманентное движение с двумя вихрями J и J' позади с интенсивностями I и $-I$. Мы сперва поставим в соответствие верхней части плоскости Z, ограниченной $DOABC$, верхнюю полуплоскость z (рис. 49) соотношением

$$Z = \sqrt{z^2 - a^2},$$

где a есть длина OA. Как и раньше, имеем тогда комплексный потенциал в плоскости z в виде

$$f = V_0 z + \frac{I}{2i\pi} \lg \frac{z - z_1}{z - z_1'},$$

где V_0 изображает скорость на бесконечности в двух плоскостях z и Z, так как $\left|\frac{dZ}{dz}\right| = 1$ на бесконечности.

Мы сначала выразим условие, что в точке A, конце обтекаемого отрезка, скорость остается конечной. Скорость же (u, v) выводится в точке, отличной от вихревой, из формулы:

$$u_1 - iv = \frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dZ} = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z}\left[V_0 + \frac{I}{2i\pi}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_1'}\right)\right];$$

мы видим, следовательно, что вообще правая часть бесконечна для $z=0$ $(Z=ia)$; исключение будет только в случае, если выполнено условие

$$V_0 - \frac{I}{2i\pi}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_1'}\right) = 0, \tag{1}$$

что даст **одно только уравнение** между вещественными количествами V_0, I, x_1, y_1, $(z_1 = x_1 + iy_1)$. Посмотрим теперь, может ли вихрь J оставаться неподвижным. Скорость его перемещения дается, как мы видели, равенством

$$u_1 - iv_1 =$$

$$= \lim_{z=z_1}\left\{\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\left[V_0 + \frac{I}{2i\pi}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_1'}\right)\right] - \frac{I}{2i\pi}\,\frac{1}{Z-Z_1}\right\},$$

но здесь

$$Z - Z_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1 - a^2}}(z-z_1) - \frac{a^2}{2(z_1^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}(z-z_1)^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{Z-Z_1} = \frac{\sqrt{z_1^2-a^2}}{z_1}\,\frac{1}{z-z_1} + \frac{a^2}{2z_1^2\sqrt{z_1^2-a^2}} + O(z-z_1)$$

и также

$$\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z} = \frac{\sqrt{z_1^2-a^2}}{z_1} + \frac{a^2}{z_1^2\sqrt{z_1^2-a^2}}(z-z_1) + \ldots,$$

$$\frac{1}{z-z_1'} = \frac{1}{z_1-z_1'} + O(z-z_1).$$

Без особого труда убеждаемся, что в пределе имеем:

$$u_1 - iv_1 = \frac{\sqrt{z_1^2-a^2}}{z_1}\left[V_0 - \frac{I}{2i\pi(z_1-z_1')}\right] + \frac{Ia^2}{4i\pi z_1^2\sqrt{z_1^2-a^2}}.$$

Надо, следовательно, написать, что это количество равно нулю. Условие, отсюда полученное, распадается на два, если отделить вещественную часть от мнимой, и мы находим:

$$\left(4\pi V_0 + \frac{I}{y_1}\right)(y_1^3 - 3x_1^2y_1 + a^2y_1) + Ia^2 = 0, \tag{2}$$

$$x_1^3 - 3x_1y_1^2 - a^2x_1 = 0. \tag{3}$$

С другой стороны, уравнение (1) после упрощения запишется:

$$\pi V_0(x_1^2 + y_1^2) + Iy_1 = 0. \tag{4}$$

Это уравнение нам показывает, что если $V_0 > 0$, то I должно быть отрицательным, что очевидно и a priori. Исключая отношение $\frac{I}{V_0}$ из (2) и (4), будем иметь два уравнения между x_1 и y_1, а именно уравнение (3) и следующее:

$$(3y_1^2 - x_1^2)(y_1^2 - 3x_1^2 + a^2) - a^2(x_1^2 + y_1^2) = 0.$$

Но легко убедиться, что эти уравнения не имеют иных решений, кроме $x_1 = y_1 = 0$. Этот результат очевидно неприемлем, так что поставленная задача не имеет решения.

Для аналогичной проблемы, относящейся к случаю цилиндра вращения, например, вместо пластинки AA', рассмотренной здесь, получим вещественное решение предшествующего параграфа. Основание этого различия результатов в обеих задачах, столь схожих с первого взгляда, основывается на том факте, что в случае пластинки мы имели одним условием больше, а именно, что скорость остается конечной на краях пластинки A и A'.

ГЛАВА VIII

ВИХРИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В настоящей главе мы начнем изучение вихрей конечных размеров. Мы изучим сперва, с целью выяснить их основные свойства, наиболее характерные простые случаи: кругового цилиндрического вихря, затем вихря эллиптического (тоже цилиндрического) Кирхгоффа и, наконец, сферического вихря Хилла. В следующей главе мы займемся общей проблемой вихревого кольца, прежде чем поставить совершенно общую задачу.

Трубки конечных размеров. Такие трубки образуются соединением бесконечно тонких трубок. Центром тяжести называют точку, определенную равенствами:

$$x_0 \int\int \zeta d\sigma = \int\int a\zeta d\sigma,$$

$$y_0 = \int\int \zeta d\sigma = \int\int b\zeta d\sigma$$

($I = 2\zeta d\sigma$; a, b координаты элементарной трубки интенсивности I).

В силу уже известных нам свойств, этот центр тяжести неподвижен, если жидкость покоится на бесконечности.

Однородная круговая цилиндрическая трубка в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности. Пусть имеется круговая трубка радиуса R, где ζ постоянна. Центр G неподвижен. Найдем распределение скоростей. В силу симметрии скорость в P нормальна к GP, является функцией одного z и не зависит от времени. Теорема о циркуляции дает:

$$2\pi r W = \int\int_{(C)} 2\zeta d\sigma.$$

1°. *Внешняя точка* относительно трубки: $r > R$, $\int\int_C 2\zeta d\sigma = 2\zeta\pi R^2$

$$W = \zeta \frac{R^2}{r}.$$

2°. *Внутренняя точка:* $\int\int_C 2\zeta d\sigma = 2\zeta\pi r^2$

$$W = \zeta z.$$

Следовательно, диск S вращается с угловой скоростью ζ. Имеется совпадение двух формул для $r = R$.

Потенциал и функция тока. Известно, что

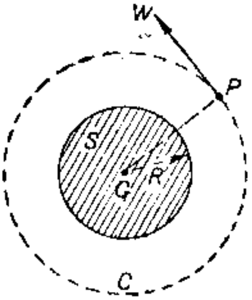

Рис. 50.

$$d\psi = u\,dy - v\,dx = -W\,dr,$$

следовательно,

$$\psi = \begin{cases} -\zeta R^2 \lg r \text{ — снаружи}, \\ -\frac{1}{2}\zeta r^2 \text{ — внутри}. \end{cases}$$

Только снаружи существует потенциал

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy = W r\,d\theta,$$

$$\varphi = \zeta R^2 \theta,$$

и имеем:

$$\varphi + i\psi = -i\zeta R^2 \lg(x + iy).$$

Вычисление давления. Движение, очевидно, перманентно.

Рассмотрим внешнее пространство относительно трубки, где $\zeta = 0$; тогда уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\eta w - 2\zeta v = X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} W^2\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \ldots$$

дадут здесь

$$\frac{1}{\rho} p = -\frac{1}{2} W^2 + \text{const},$$

т. е.

$$\frac{1}{\rho} p_e = -\frac{1}{2}\zeta^2 \frac{R^4}{r^2} + \frac{p_0}{\rho} =$$

где через p_0 обозначено значение p на больших расстояниях.

Внутри имеем $\zeta \neq 0$ и $\zeta =$ постоянному, и те же уравнения дают:

$$\frac{1}{\rho} dp = -\frac{1}{2} dW^2 + 2\zeta(v\,dx - u\,dy)$$

$$= -\frac{1}{2} dW^2 - 2\zeta d\psi,$$

$$\frac{p_i}{\rho} = -\frac{1}{2} W^2 - 2\zeta\psi + K = -\frac{1}{2}\zeta^2 r^2 + \zeta^2 r^2 + K,$$

$$\frac{p_i}{\rho} = \frac{1}{2}\zeta^2 r^2 + K = \frac{1}{2}\zeta^2 r^2 - \zeta^2 R^2 + \frac{p_0}{\rho}.$$

Постоянная определена из условия равенства давлений на обоих краях границы.

В случае трубки конечного сечения, достаточно предположить, что на бесконечности имеет место постоянное давление $p_0 > \rho\zeta^2R^2$, для того чтобы p было везде конечным и положительным.

Но предположим интенсивность трубки постоянной ($I = 2\pi\zeta R^2 =$ пост.) и радиус R очень малым. Давление снаружи сделается

$$\frac{p_e}{\rho} = -\frac{I^2}{8\pi^2 r^2} + \frac{p_0}{\rho},$$

видим тогда, что $p \to -\infty$, когда приближаемся к бесконечно тонкой трубке. Это позволяет думать, что такая бесконечно тонкая трубка физически невозможна. В дальнейшем придем к этому же результату для вихревого кольца.

Эллиптический вихрь Кирхгоффа. Кирхгофф доказал в своих Leçons de Mécanique, что может существовать конфигурация, где вихри заполняют пространство, имея постоянную интенсивность ζ внутри эллиптического цилиндра, который вращается равномерно (с угловой скоростью ω) вокруг своей оси, параллельной образующим и проходящей, очевидно, через центры поперечных сечений. Относительное движение будет кроме того перманентным и не зависящим от координаты z, параллельной образующим цилиндра.

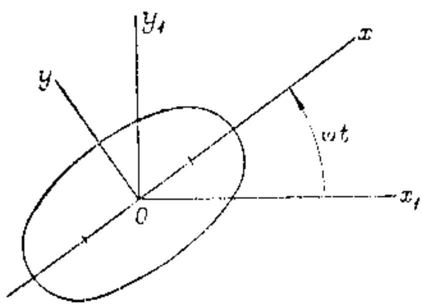

Рис. 51.

Задача, очевидно, плоская, мы легко построим ее синтетическое решение следующим образом.

В плоскости xOy (связанной с вращающимся цилиндром) возьмем эллиптические координаты, определенные формулой:

$$z = x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cosh\xi\cos\eta, \\ y &= c\sinh\xi\sin\eta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $2c$ междуфокусное расстояние рассматриваемого эллипса.

Координатные кривые $\xi = \text{const}$ или $\eta = \text{const}$, очевидно, софокусные эллипсы и гиперболы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{\cosh^2\xi} + \frac{y^2}{\sinh^2\xi} &= c^2, \\ \frac{x^2}{\cos^2\eta} - \frac{y^2}{\sin^2\eta} &= c^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Можно ограничиться условиями

$$0 < \xi < +\infty,$$

$$0 < \eta < 2\pi.$$

Пусть $\psi(x_1, y_1, t)$ функция тока, отнесенная к неподвижным осям (x_1, y_1). Будем иметь для абсолютной скорости:

$$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

и, обозначая через (u, v) проекции этой самой абсолютной скорости на Oxy, будем иметь:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{3}$$

после преобразования по формулам

$$x_1 = x\cos\omega t - y\sin\omega t,$$

$$y_1 = x\sin\omega t + y\cos\omega t.$$

Переносная скорость, спроектированная на Oxy, равна $-\omega y$, ωx.

Следовательно, относительная скорость будет:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + \omega y, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \omega x.$$

На стенке цилиндра S (ξ = соответствующему ξ_0) эта относительная скорость должна быть касательна к эллипсу, т. е. должна иметь на эллипсе:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \omega x\right) dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \omega y\right) dy = 0,$$

или

$$\psi + \frac{\omega}{2} r^2 = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Постоянная относительно x и y может зависеть от времени t.

Тогда надо определить ψ либо вне S, либо внутри, согласно этому условию, на границах, и в согласии с тем, что мы должны иметь:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\psi = 0 & \text{снаружи} \\ \Delta\psi = -2\zeta & \text{внутри} \end{array}\right\} \tag{5}$$

там, где имеются вихри. Кроме того снаружи, циркуляция по контуру, окружающему эллипс, должна быть во всякий момент равна $2(\pi ab)\zeta$.

Наконец, не надо забывать, что скорости должны оставаться непрерывными так же, как и давление при переходе через границу S.

Пространство вне цилиндра. Рассмотрим сначала, что происходит снаружи. Кирхгофф получил ψ, используя свойства логарифмического потенциала и преобразовывая известную формулу, дающую потенциал эллипсоида (одну из осей которого он устремляет к бесконечности). Мы получим результат быстрее, оперируя переменными (ξ, η), происходящими от конформного отображения (1); известно, что в этом случае имеет место формула:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right] \Delta_{xy}\psi = \Delta_{\xi\eta}\psi.$$

Все сводится, следовательно, к отысканию простых гармонических функций от ξ, η, удовлетворяющих высказанным условиям.

Положим:

$$\varphi + i\psi = Kie^{-2(\xi+i\eta)} = Kie^{-2\xi}(\cos 2\eta - i \sin 2\eta),$$

где φ потенциал, сопряженный с ψ в безвихревой части пространства.

Тогда имеем $\Delta\psi = 0$, и

$$\psi = Ke^{-2\xi}\cos 2\eta \quad (\text{при } \varphi = Ke^{-2\xi}\sin 2\eta). \tag{6}$$

С другой стороны,

$$x^2 + y^2 = c^2(\cosh^2\xi \cos^2\eta + \sinh^2\xi \sin^2\eta) =$$

$$= \frac{c^2}{2}(\cosh 2\xi + \cos 2\eta),$$

и условие на стенке S будет:

$$\cos 2\eta\left[Ke^{-2\xi} - \frac{\omega c^2}{4}\right] + \frac{\omega}{4}c^2\cosh 2\xi = \mathrm{const}$$

для $\xi = \xi_0$. Это условие будет удовлетворено, если взять

$$K = -\frac{\omega c^2}{4}e^{2\xi_0}. \tag{7}$$

Но полученное таким образом решение (6) не удовлетворяет всем условиям нашей задачи, так как дает равную нулю циркуляцию вокруг эллипса. Имеем, в самом деле, производя вычисление в плоскости xOy:

$$I = \oint u\,dx + v\,dy = \oint d\varphi.$$

Эта формула дает $I = 0$, если ее применить к функции $\varphi + i\psi$, соответствующей уравнению (6), так как после одного полного обхода эллипса ξ возвращается к своему начальному значению, η увеличивается на 2π, φ, следовательно, возвращается к своему первоначальному значению.

При этих условиях мы сейчас видоизменим нашу функцию $\varphi + i\psi$ прибавлением к ней члена вида

$$\varphi' + i\psi' = iH(\xi + i\eta) \quad (H = \text{веществ. пост.})$$

Так как мы имеем тогда $\varphi' = -H\eta$, то этот дополнительный потенциал не будет однозначным и даст циркуляцию, равную $-H \cdot 2\pi$. Выберем тогда H из условия

$$-H2\pi = 2\pi ab\zeta$$

и примем за определение ψ_e функцию:

$$-\psi_e = \frac{\omega c^2}{4} e^{2\xi_0} e^{-2\xi} \cos 2\eta + ab\zeta\xi, \tag{8}$$

обозначая через ψ_e функцию тока для внешнего пространства относительно эллиптического вихря. Так как функция $\psi' (= H\xi)$ остается постоянной на эллипсе $\xi = \xi_0$, то условие (4) на стенке продолжает выполняться функцией ψ_e. Наконец, совершенно ясно, что $\Delta\psi_e$ равно нулю, так как ψ_e образовано с помощью двух аналитических функций от $\xi + i\eta$.

Если мы обозначим через a и b полуоси нашего эллипса ξ_0, то имеем, согласно уравнениям (2):

$$a = c \cosh \xi_0, \quad b = c \sin \xi_0, \tag{9}$$

откуда

$$e^{\xi_0} = \frac{a+b}{c},$$

и, следовательно,

$$-\psi_e = \frac{\omega}{4} (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + ab\zeta\xi. \tag{10}$$

Пространство внутри цилиндра. Легко видеть, что можно удовлетворить условиям, касающимся ψ_i (функции тока внутри), положив:

$$-\psi_i = \zeta (Ax^2 + By^2),$$

считая A и B постоянными.

Уравнение $-\Delta\psi_i = 2\zeta$ будет удовлетворено, если положить

$$A + B = 1, \tag{11}$$

и условие на стенке

$$-\psi_i = \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) + \text{const}$$

примет вид:

$$(2A\zeta - \omega) x^2 + (2B\zeta - \omega) y^2 = \text{const на } S,$$

то есть, на

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Очевидно, отсюда следует:

$$(2A\zeta-\omega)\,a^2=(2B\zeta-\omega)\,b^2$$

или

$$Aa^2-Bb^2=\frac{\omega c^2}{2\zeta}. \tag{12}$$

Непрерывность скоростей. Теперь остается сообразовать наши результаты с условием непрерывности скоростей при переходе через S. Так как скорости (относительные в плоскости xOy) касательны к S, то достаточно удовлетвориться, что составляющие скорости по касательной к S одинаковы с двух сторон S. А это сводится, очевидно, к утверждению, что одна из составляющих абсолютной скорости, например, $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$, имеет одно значение с обеих сторон. Функция ψ_e здесь дана (10), а ψ_i равенством

$$-\psi_i=\zeta c^2\,(A\,\cos^2\eta\cosh^2\xi+B\sin^2\eta\sinh^2\xi).$$

Следовательно, будем иметь при $\xi=\xi_0$:

$$-\frac{\omega}{2}\,(a+b)^2\,e^{-2\xi_0}\cos 2\eta+ab\zeta=$$

$$=2\zeta c^2\sinh\xi_0\,\cosh\xi_0\left(A\,\frac{1+\cos 2\eta}{2}+B\,\frac{1-\cos 2\eta}{2}\right).$$

Отсюда обязательно

$$-\frac{\omega}{2}\,(a+b)^2\,e^{-2\xi_0}=\zeta c^2\,(A-B)\,\sinh\xi_0\cosh\xi_0,$$

$$ab\zeta=\zeta c^2\sinh\xi_0\cosh\xi_0.$$

Второе из условий выполняется само по себе [см. (9)], а первое сводится к

$$A-B=-\frac{\omega c^2}{2\zeta ab}. \tag{13}$$

Тогда (11), (12) и (13) дают:

$$Aa=Bb=\frac{ab}{a+b}, \tag{14}$$

$$\omega=\frac{2ab\zeta}{(a+b)^2}, \tag{15}$$

и, следовательно, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} -\psi_e &= \frac{ab\zeta}{2}\left[e^{-2\xi}\cos 2\eta + 2\xi\right] \\ -\psi_i &= \frac{\zeta c^2}{a+b}\left[b\cosh^2\xi\cos^2\eta + a\sinh^2\xi\sin^2\eta\right] = \\ &= \zeta(a-b)\left[b\cosh^2\xi\cos^2\eta + a\sinh^2\xi\sin^2\eta\right] \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Относительные траектории частичек, находящихся в вихре. Относительная скорость частицы, находящейся в эллипсе S, имеет проекции на Oxy

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y} + \omega y, \quad -\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - \omega x,$$

то есть

$$(\omega - 2B\zeta)\, y, \quad -(\omega - 2A\zeta)\, x,$$

или иначе, в силу написанных выше формул:

$$-\frac{2a^2\zeta}{(a+b)^2}\, y, \quad + \frac{2b^2\zeta}{(a+b)^2}\, x.$$

Эта относительная скорость равна также

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt};$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2a^2\zeta}{(a+b)^2}\, y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2b^2\zeta}{(a+b)^2}\, x,$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega a y}{b}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\omega b x}{a};$$

иначе говоря, если положить

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b},$$

то

$$X' = -\omega Y \quad Y' = \omega X,$$

откуда непосредственно

$$X = \lambda \cos(\omega t + \gamma),$$

$$Y = \lambda \sin(\omega t + \gamma), \quad (\lambda \text{ и } \gamma \text{ параметры})$$

то есть

$$x = a\lambda \cos(\omega t + \gamma),$$

$$y = b\lambda \sin(\omega t + \gamma).$$

Относительными траекториями являются эллипсы, подобные S. По формулам

$$x_1 = x \cos \omega t - y \sin \omega t,$$

$$y_1 = x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

имеем:

$$\frac{2}{\lambda} x_1 = a \left[\cos(2\omega t + \gamma) + \cos\gamma\right] - b \left[\cos\gamma - \cos(2\omega t + \gamma)\right] =$$

$$= (a + b) \cos(2\omega t + \gamma) + (a - b) \cos\gamma,$$

$$\frac{2}{\lambda} y_1 = (a + b) \sin(2\omega t + \gamma) - (a - b) \sin\gamma.$$

Абсолютными траекториями будут окружности, описываемые с угловой скоростью 2ω вокруг их центров.

Вычисление давления. *Непрерывность его.* Необходимо вычислить давление, потому что его непрерывность при переходе через S не обеспечена a priori, так как наше синтетическое решение не дает никаких гарантий в этом отношении. Самое простое здесь исходить из классических уравнений относительного движения. Возьмем эти уравнения **относительного** движения, по отношению к осям Oxy, связанным с вихрями. Пусть (u', v') означает относительную скорость; имеем классические уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y}\right) + \omega^2 x + 2\omega v', \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + u'\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y}\right) + \omega^2 y - 2\omega u'. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Но (u, v) суть проекции **абсолютной скорости** на подвижные оси Oxy, и мы имеем:

$$u' = u + \omega y$$

$$v' = v - \omega x.$$

Внося это в (17) и делая приведения, получаем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - \omega y\frac{\partial u}{\partial x} + \omega x\frac{\partial u}{\partial y} + \omega v,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - \omega y\frac{\partial v}{\partial x} + \omega x\frac{\partial v}{\partial y} - \omega u,$$

или иначе

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega v + (u + \omega y)\frac{\partial u}{\partial x} + (v - \omega x)\frac{\partial u}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \omega u + (u + \omega y)\frac{\partial v}{\partial x} + (v - \omega x)\frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Движение будет перманентным относительно осей Oxy; величины $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial t}$ не зависят от времени, и при отсутствии внешних сил формулы могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}W^2\right)}{\partial x}-2\zeta v+\omega y\frac{\partial u}{\partial x}-\omega x\frac{\partial u}{\partial y}-\omega v=0,\\
&\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}W^2\right)}{\partial y}+2\zeta u+\omega y\frac{\partial v}{\partial x}-\omega x\frac{\partial v}{\partial y}+\omega u=0.
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Введем теперь функцию тока так, чтобы

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

и образуем dp; имеем:

$$d\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}W^2\right)+(2\zeta+\omega)\,d\psi-$$
$$-\omega\left[\left(x\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)dx+\left(y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)dy\right]=0.$$

Будем различать два случая: когда мы находимся внутри или вне S.

Внешнее пространство. Имеем $\zeta=0$ и $\Delta\psi=0$, тогда квадратную скобку, коэфициент при $-\omega$, можно записать:

$$-\left(x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)dx-\left(x\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dy,$$

то есть:

$$-d\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+d\psi.$$

Тогда получим, обозначив через C_e постоянную:

$$\frac{p_e}{\rho}+\frac{1}{2}W_e^2=-\omega\left(x\frac{\partial\psi_e}{\partial x}+y\frac{\partial\psi_e}{\partial y}\right)+C_e.\tag{19}$$

Внутреннее пространство. Внутри $\zeta\neq 0$ и $-\Delta\psi=2\zeta$; квадратная скобка сделается равной величине $-2\zeta(xdx+ydy)$, увеличенной на выражение, найденное в предыдущем случае; имеем, следовательно:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p_i}{\rho}+\frac{1}{2}W_i^2=-(2\zeta+\omega)\psi_i-\zeta\omega r^2-\omega\left(x\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+y\frac{\partial\psi_i}{\partial y}-\psi_i\right)+C_i,\\
&\text{то есть:}\\
&\frac{p_i}{\rho}+\frac{1}{2}W_i^2=-2\zeta\psi_i-\omega\left(x\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+y\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\right)-\omega\zeta r^2+C_i.
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

Из сравнения (19) и (20) следует, что давления непрерывны при переходе через S. В самом деле, скорости там непрерывны, а, следовательно, и $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, а кроме того имеем на S

$$-\psi_i = \frac{\omega}{2} r^2 + \text{const}.$$

Следовательно, на S давления p_i и p_e по предшествующим формулам могут отличаться самое большее на постоянную. Выбирая соответствующим образом C_i и C_e, делаем давления равными с двух сторон на S.

Вычисление C_e *и* C_i в предположении $p = 0$ на бесконечности. Известно, что при конформном отображении, таком, как (1), имеем (E. Picard, Analyse, I, p. 431):

$$\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2.$$

Но во внешнем пространстве, где имеется потенциал, это уравнение выражает теорему о замене переменных в функциональном определителе; а именно, оно совпадает с равенством

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}.$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = c^2 (\sinh^2 \xi \, \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \, \sin^2 \eta) =$$

$$= \frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)$$

и (см. ур. 16)

$$\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial \eta}\right)^2 = a^2 b^2 \zeta^2 \; [(e^{-2\xi} \cos^2 \eta - 1)^2 + e^{-4\xi} \sin^2 2\eta] =$$

$$= a^2 b^2 \zeta^2 [e^{-4\xi} - 2e^{-2\xi} \cos^2 \eta + 1].$$

Элементарное вычисление дает:

$$-\left(x \frac{\partial \psi_e}{\partial x} + y \frac{\partial \psi_e}{\partial y}\right) = \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial \psi_e}{\partial \xi} - \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial \psi_e}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{ab\zeta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} [\sinh 2\xi (1 - e^{-2\xi} \cos 2\eta) + e^{-2\xi} \sin^2 2\eta].$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{p_e}{\rho} = - a^2 b^2 \zeta^2 \left[\frac{e^{-4\xi} - 2e^{-2\xi} \cos 2\eta + 1}{c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)}\right] +$$

$$+ \frac{ab\zeta\omega}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} [\sinh 2\xi (1 - e^{-2\xi} \cos 2\eta) + e^{-2\xi} \sin^2 2\eta] + C_e. \quad (21)$$

На бесконечности ξ равно положительной бесконечности; предположим, что p_e там нуль, следовательно, надо положить

$$0 = ab\zeta\omega + C_e;$$

то есть, в силу (15)

$$\left[\omega = \frac{2ab\zeta}{(a+b)^2}\right];$$

$$C_e = -\frac{2a^2b^2\zeta^2}{(a+b)^2}, \tag{22}$$

и на эллипсе S

$$\left(\cosh \xi_0 = \frac{a}{c}, \quad \sinh \xi_0 = \frac{b}{c}, \quad e^{\xi_0} = \frac{a+b}{c}\right)$$

будем иметь, после некоторых упрощений:

$$\left(\frac{p_e}{\rho}\right)_S = \frac{2a^2b^2\zeta^2}{(a+b)^3[a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2\eta]} \times$$
$$\times \left[\begin{array}{l} -(a+b)(a^2+b^2)+2(a-b)(a^2+b^2+ab)\cos 2\eta - \\ -(a-b)(a^2-b^2)\cos^2 2\eta. \end{array}\right] \tag{23}$$

Перейдем теперь к внутреннему пространству, чтобы согласовать давления. Образуем (20). Мы знаем, что все члены будут иметь те же значения, что и в $\frac{p_e}{\rho}$, но вместо C_e будет фигурировать комбинация:

$$C_i - \zeta(2\psi_i + \omega r^2)_S.$$

Следовательно, будем иметь:

$$C_i = C_e + \zeta(2\psi_i + \omega r^2)_S,$$

то есть, в силу (16):

$$C_i = C_e - 2\zeta^2(a-b)(b\cosh^2\xi_0\cos^2\eta + a\sinh^2\xi_0\sin^2\eta) +$$
$$+ \frac{2ab\zeta^2}{(a+b)^2}c^2(\cosh^2\xi_0\cos^2\eta + \sinh^2\xi_0\sin^2\eta) =$$
$$= C_e - \zeta^2\frac{ab}{a+b}[a(1+\cos 2\eta) + b(1-\cos 2\eta)] +$$
$$+ \zeta^2\frac{ab}{(a+b)^2}[a^2(1+\cos 2\eta) + b^2(1-\cos 2\eta)].$$

Очевидно, $\cos 2\eta$ исчезнет и мы получим:

$$C_i = C_e - \frac{2a^2b^2\zeta^2}{(a+b)^2} = -\frac{4a^2b^2\zeta^2}{(a+b)^2}.$$

Сферический вихрь. В этом параграфе мы будем рассматривать конфигурацию, изученную I. M. Hill'ом (Phil. transact. Roy. Soc. of London, 1894): жидкость предполагается неограниченной, и вихри расположены внутри сферы определенного радиуса, движущейся равномерно. Остальное пространство свободно от вихрей. Вихри внутри сферы имеют неравномерно распределенную интенсивность. Хотя можно сократить многие вычисления, прибегая к иным соображениям, но мы рассмотрим задачу, опираясь на общие теоремы.

Напишем сначала уравнения гидродинамики для случая, когда явление можно рассматривать как полученное вращением около оси Oz. Назовем через q и θ полярные координаты в плоскости xOy; обозначим через s и w составляющие скорости по радиусу-вектору OM' и по Oz; непосредственно находим следующие уравнения:

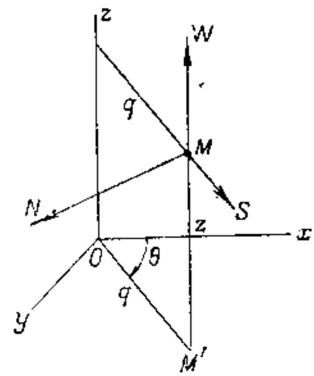

Рис. 52.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t}+s\frac{\partial s}{\partial q}+w\frac{\partial s}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q},\\ \frac{\partial w}{\partial t}+s\frac{\partial w}{\partial q}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\ \frac{\partial (qs)}{\partial q}+\frac{\partial (qw)}{\partial z}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

допуская при этом отсутствие внешних сил. Можно, следовательно, положить:

$$qs=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad qw=\frac{\partial\psi}{\partial q}. \tag{2}$$

Исключая давление p в двух первых уравнениях (1), получаем для функции тока ψ уравнение

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q}-\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}-\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right]=0. \tag{3}$$

Это же уравнение допускает очевидные частные решения, а именно, те, которые удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}-\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial q}=-\left(\frac{8k}{a^2}+\frac{2k}{c^2}\right)q^2,$$

где a, b и k постоянные. (Далее мы увидим те удобства, которые заставили нас ввести постоянную в правой части в таком виде.) Это последнее уравнение удовлетворяется функцией

$$\psi=-q^2\left\{\frac{k}{a^2}(q^2-a^2)+\frac{k}{c^2}\,[z-Z(t)]^2+f(t)\right\}. \tag{4}$$

Это можно легко проверить непосредственно. Соответствующие значения s и w будут:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{2k}{c^2}\, q\,(z-Z), \\ w &= -\frac{2k}{c^2}(z-Z)^2 - \frac{2k}{a^2}(2q^2-a^2) - 2f(t). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Жидкие поверхности. Рассмотрим теперь, каковы жидкие поверхности, то-есть, поверхности, содержащие с течением времени одни и те же частицы. Эти поверхности $\lambda = \text{const}$, как известно, являются решениями уравнения в частных производных

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + s\frac{\partial\lambda}{\partial q} + w\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq}{\frac{2k}{c^2}\, q\,(z-Z)} = \frac{dz}{-\frac{2k}{c^2}(z-Z)^2 - \frac{2k}{a^2}(2q^2-a^2) - 2f(t)}.$$

Как видим, легко образовать новое отношение, равное предыдущим, в виде:

$$\frac{-\frac{2k}{c^2}\, q^2(z-Z)\frac{dZ}{dt}dt + \left[\frac{2k}{c^2}\, q\,(z-Z)^2 + \frac{2k}{a^2}\, q\,(2q^2-a^2)\right]dq + \frac{2k}{c^2}\, q^2(z-Z)\,dz}{-\frac{2k}{c^2}\, q^2(z-Z)\left[\frac{dZ}{dt} + 2f(t)\right]},$$

то есть:

$$\frac{d\left\{q^2\left[\frac{k}{c^2}(z-Z)^2 + \frac{k}{a^2}(q^2-a^2)\right]\right\}}{-\frac{2k}{c^2}\, q^2(z-Z)\left[\frac{dZ}{dt} + 2f(t)\right]}.$$

Если в частности взять

$$f(t) = -\frac{1}{2}\frac{dZ}{dt}, \tag{6}$$

то среди жидких поверхностей окажутся те, уравнения которых

$$\psi \equiv kqg^2\left[\frac{q^2}{a^2} + \frac{(z-Z)^2}{c^2} - 1\right] = \text{const}$$

и, в частности, в том числе поверхность

$$\frac{q^2}{a^2} + \frac{(z-Z)^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Если положить $c = a$, то это будет сфера. Скорости и функция тока ψ будут даны уравнениями (4) и (5), учитывая при этом (6).

Вычисление давление p. Возвращаясь к уравнениям (1), видим, что они для рассматриваемых частных решений примут вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{4k^2}{a^2c^2}\, q\,(2q^2 - a^2);$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8k^2}{c^2}(z - Z) - \frac{8k^2}{c^4}(z - Z)^3 - Z'',$$

откуда получаем:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{2k^2}{a^2c^2}\left(q^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - (z - Z)\,Z'' - \frac{2k}{c^4}(z - Z)^4 + \\ + \frac{4k^2}{c^2}(z - Z)^2 + \frac{\pi(t)}{\rho},$$

где $\pi(t)$ функция от t.

Вихрь. Если вычисляем вихрь, то его значение Ω находим непосредственно

$$2\Omega = \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial q} = \left(\frac{8k}{a^2} + \frac{2k}{c^2}\right) q\,.$$

Кроме $k = 0$, вихрь будет отличен от нуля вне оси Oz. Движение, определенное всеми вышенаписанными формулами, будет, следовательно, вихревым. Мы его примем для д в и ж е н и я в н у т р и сферы радиуса a, положив во всех уравнениях $a = c$.

При этих условиях, на рассматриваемой сфере будем иметь для q, z, s, w, p следующие значения, которые мы отметим значком i:

$$q = a\sin\theta\,, \quad z - Z = a\cos\theta\,,$$

$$s_i = 2k\sin\theta\cos\theta, \quad w_i = Z' - 2k\sin^2\theta,$$

$$\frac{p_i}{\rho} = 2k^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}k^2 - aZ''\cos\theta + \frac{\pi(t)}{\rho}\,.$$

Теперь мы определим в н е ш н е е движение, безвихревое.

Движение вне сферы. Заметим, что уравнение $\Delta\varphi = 0$, которому удовлетворяет потенциал скоростей, здесь имеющихся, обладает частным решением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{q^2 + (z - Z)^2}}\,,$$

а, следовательно, также решением $\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial z}$, или еще

$$\varphi_e = -a^2 Z'\,\frac{(z - Z)}{2R^3} = -a^2 Z'\,\frac{\cos\theta}{2R^2}\,.$$

Этой функции φ_e соответствуют:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial q} = 3a^3 Z' q \, \frac{z-Z}{2R^5},$$

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial z} = a^3 Z' \, \frac{[3(z-Z)^2 - R^2]}{2R^5},$$

и, следовательно, по (1), принимая значения

$$s = \frac{\partial \varphi_e}{\partial q} \quad \text{и} \quad w = \frac{\partial \varphi_e}{\partial z},$$

заключаем, что

$$\frac{p}{\rho} = \frac{a^3}{2R^5}\{R^2[(z-Z)Z'' - Z'^2] + 3(z-Z)^2 Z'^2\} -$$

$$- \frac{a^6 Z'^2}{8R^8}[R^2 + 3(z-Z)^2] + \frac{T(t)}{\rho},$$

где $T(t)$ функция одного t.

На поверхности сферы ($R = a$) находим легко:

$$\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial q}\right)_a = \frac{3}{2} Z' \sin\theta \cos\theta,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial z}\right)_a = Z' \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right),$$

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_a = \frac{a}{2} Z'' \cos\theta - \frac{5}{8} Z'^2 + \frac{9}{8} Z'^2 \cos\theta + \frac{T}{\rho}.$$

Значение сопряженной с φ функции тока, посредством которой s и w выражаются формулами (2), есть

$$\psi_1 = -\frac{a^3 Z' q^2}{2R^3}.$$

Соответствующие жидкие поверхности $\lambda = \mathrm{const}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{1}{q}\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial \lambda}{\partial q} - \frac{1}{q}\frac{\partial \psi_1}{\partial q}\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

Это уравнение будет иметь частный интеграл вида:

$$\lambda = \psi_1 + \frac{q^2}{2} Z' = \frac{q^2}{2} Z' \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right),$$

если взять $Z'(t) = \mathrm{const}$. В самом деле, тогда

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -Z' \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial q} = \frac{\partial \psi_1}{\partial q} + qZ'; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}.$$

Внеся все это в уравнение относительно λ, производим непосредственную проверку. Следовательно, среди жидких поверхностей будет фигурировать сфера $R = a$. Мы видим, что центр этой сферы движется равномерно по Oz.

Непрерывность при переходе через сферу. Мы должны иметь на сфере с двух сторон поверхности одинаковые скорости и давления. Значения s с одной стороны и с другой суть:

$$s_i = 2k \sin\theta \cos\theta$$

$$s_e = \left(\frac{\partial\varphi_e}{\partial q}\right)_a = \frac{3}{2} Z' \sin\theta \cos\theta;$$

они совпадут при:

$$Z' = \frac{4}{3} k.$$

Значения w будут:

$$w_i = Z' - 2k \sin^2\theta,$$

$$w_e = \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial z}\right)_a = Z' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2\theta\right);$$

они также совпадают.

Наконец, видим, что давления также совпадут, если T и $\pi(t)$ связать соотношением

$$\frac{T}{\rho} = \frac{5}{9} Z'^2 + \frac{k^2}{2} + \frac{\pi(t)}{\rho}.$$

Таким образом, построено полное решение задачи. M. J. M. Hill очень изящным способом обобщил свое решение на случай эллипсоида вращения.

ГЛАВА IX

КОНФИГУРАЦИИ ВРАЩЕНИЯ. ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО

Общие понятия. Мы будем рассматривать неограниченную жидкость, в которой все вихревые линии являются окружностями с неподвижной осью Oz; предположим, что имеем конфигурацию вращения вокруг этой оси. Вдоль вихревой линии величина вихря остается неизменной. Если такая симметричная конфигурация существует в начальный момент t_0, если кроме того предположим отсутствие внешних сил и покой на бесконечности, то ясно, что эта симметрия вокруг Oz будет бесконечно сохраняться.

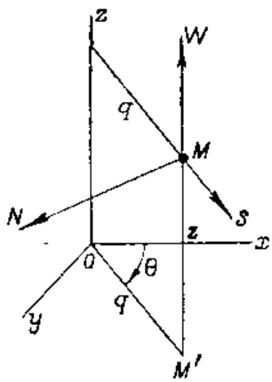

Рис. 53.

Можно тогда рассматривать жидкость как составленную из вихревых трубок, быть может окруженных безвихревой жидкостью. Эти трубки (торы) перемещаются, оставаясь все время параллельными плоскости xOy, их сечение может, менять форму — с соблюдением при этом общих теорем, касающихся интенсивности.

Естественно применить здесь цилиндрические координаты, которые мы обозначим через q, θ, z. Мы назовем через MN полупрямую, перпендикулярную меридианальной плоскости MQz, в направлении возрастающих θ. Скорость V частицы, помещенной в M, лежит в меридианальной плоскости, и ее составляющие будут s и w и отсчитываются положительно в направлении возрастающих q или z. Уравнения движения примут тогда вид, как мы это видели выше:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + s\,\frac{\partial s}{\partial q} + w\,\frac{\partial s}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial q}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + s\,\frac{\partial w}{\partial q} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial (qs)}{\partial q} + \frac{\partial (q\,w)}{\partial z} = 0; \tag{2}$$

последнее является уравнением неразрывности и легко может быть получено прямым путем из рассмотрения элементарного параллелепипеда, построенного на dq, $qd\theta$, dz в точке M.

Обозначая через Ω величину вихря на MN, имеем уравнение:

$$2\Omega = \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial q}. \qquad (3)$$

Ясно, что уравнение (2) позволяет написать

$$qs = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad qw = \frac{\partial \psi}{\partial q}, \qquad (4)$$

где ψ зависит от q, z, t и является функцией тока; это название происходит от того, что в момент t линии тока в плоскости меридиана qOz имеют, очевидно, уравнения:

$$\frac{dq}{s} = \frac{dz}{w},$$

т. е. $\psi = \text{const}$.

Скорости (s, w) выражаются, следовательно, в функции одной только ψ, которая удовлетворяет одному простому уравнению, которое мы встретим далее и которое может быть получено исключением p из двух уравнений (1). Общие теоремы главы II показывают, что эти скорости могут быть кроме того выражены в функции вихрей, и здесь, следовательно, посредством величины Ω. Мы увидим, как этот вопрос может быть связан с изучаемым нами, и дадим естественный способ вычисления функции тока ψ.

Случай единственного бесконечно тонкого кольца. Рассмотрим сперва случай единственного бесконечно-тонкого вихревого кольца, на высоте z', радиуса q' и интенсивности $I = 2\Omega' d\sigma'$, где $d\sigma'$ — сечение трубки. Так как общая конфигурация может всегда рассматриваться как образованная соединением таких элементарных колец, то очевидно простое суммирование позволит перейти к вычислению для общего случая.

Мы знаем, что скорости (u, v, w) получаются по формулам:

$$u = \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}, \qquad (5)$$

где

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int\int\int \frac{\xi' \, d\tau'}{r}, \ \ldots$$

а ξ', η', ζ' вихрь в точке x', y', z' кольца, $d\tau'$ элемент объема кольца $(d\tau' = q' \, d\sigma' \, d\theta')$ и r расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z'), т. е.

$$r = \sqrt{(z - z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\theta - \theta')}.$$

Ясно, что имеем:

$$\xi' = -\Omega' \sin\theta', \quad \eta' = \Omega' \cos\theta', \quad \zeta' = 0,$$

и что достаточно вычислить u, v, w для $\theta = 0$, в каком случае эти три числа сведутся к s, 0, w. Имеем тогда:

$$P_1^0 = -\frac{1}{2\pi} q'\Omega' d\sigma' \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta'\, d\theta'}{\sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\theta'}} = 0,$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{2\pi} q'\Omega' d\sigma' \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta'\, d\theta'}{r} = \frac{1}{\pi} q'\Omega' d\sigma' \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta'\, d\theta'}{r},$$

$$R_1 = 0.$$

Положим:

$$S_1 = \frac{1}{\pi} q'\Omega' d\sigma' \int_0^{\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon}}, \tag{6}$$

и, следовательно,

$$s = -\frac{\partial S_1}{\partial z}. \tag{7}$$

Теперь, так как переход от точки (x, y, z) к точке $(q, 0, z)$ совершается простым поворотом на угол θ, то ясно, что будем иметь для точки x, y, z

$$P_1 = -S_1 \sin\theta, \quad Q_1 = S_1 \cos\theta,$$

что, впрочем, можно проверить простым вычислением, и отсюда выводим:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial S_1}{\partial q}\sin^2\theta - \frac{S_1}{q}\cos^2\theta,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial S_1}{\partial q}\cos^2\theta + \frac{S_1}{q}\sin^2\theta,$$

и, следовательно,

$$w = \frac{\partial S_1}{\partial q} + \frac{S_1}{q}. \tag{8}$$

Общий случай. Если перейти теперь от бесконечно тонкого вихревого кольца к общей конфигурации, образованной соединением таких колец, мы получим, очевидно, что и выше (6, 7 и 8), но заменяя просто S_1 через сумму аналогичных выражений, а именно:

$$S = \frac{1}{\pi} \int\int q'\Omega' d\sigma' \int_0^{\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon}}, \tag{9}$$

где двойной интеграл распространен на все элементы $d\sigma'$ поперечного сечения вихревого объема какой-нибудь меридианальной плоскостью. Получаем:

$$s = -\frac{\partial S}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial S}{\partial q} + \frac{S}{q}. \tag{10}$$

Сравнение формул (4) и (10) нам дает непосредственно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = q\frac{\partial S}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q} = q\frac{\partial S}{\partial q} + S;$$

ψ определена лишь с точностью до постоянной, и, очевидно, мы можем положить

$$\psi = qS. \tag{11}$$

Наконец, отметим, что величины скоростей (10), внесенные в соотношение (3), определяющее Ω, дают для S уравнение:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{S}{q}\right) = -2\Omega,$$

которому соответствует для ψ уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - \frac{1}{q}\frac{\partial \psi}{\partial q} = -2q\Omega.$$

Теория бесконечно тонкого кольца. В случае бесконечно тонкого кольца, S сводится к S_1, данному уравнением (6), и после введения интенсивности трубки $I = 2\Omega' d\sigma'$ функция тока, полученная посредством (11), примет вид:

$$\psi = \frac{Iqq'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon}}, \tag{12}$$

после чего получим

$$s = -\frac{1}{q}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{q}\frac{\partial \psi}{\partial q}. \tag{13}$$

Эти уравнения дают для скоростей значения, всегда конечные вне кольца, но так как сечение кольца бесконечно мало, интенсивность I при этом предполагается конечной, то s и w делаются очень большими внутри самого кольца, q и z при этом близки к q' и z'. Эта трудность, естественно, проистекает из ф и к т и в н о с т и понятия бесконечно тонкого кольца.

Так как производная $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ очевидно содержит множителем $(z - z')$, то, как видим, s обращается в нуль во всей плоскости кольца (само кольцо оставляем в стороне). Отсюда следует, что радиус кольца остается неизменным; в противном случае соседние частицы, в плоскости $z = z'$, имели бы радиальную скорость s, отличную от нуля. Таким образом, кольцо переносится параллельно Oz, не меняя радиуса. Однако, форма бесконечно малого сечения $d\sigma'$ может очевидно меняться. Вторая формула (13) позволяет узнать w. Применяя эту формулу к самому центру кольца, находим легко $w_0 = \frac{I}{2q'}$, но вычисление (дающее неопределенность, проистекающую от частного значения $q = 0$) может быть избегнуто применением общих результатов. Всякий элемент объема $d\tau'$ кольца вносит в выражение скорости точки O по направлению Oz величину $\Omega' q' \frac{d\tau'}{2\pi q'^{3}}$. Скорость точки O, следовательно,

$$\frac{\Omega'}{2\pi q'^2} 2\pi q' \, d\sigma' = \frac{I}{2q'}.$$

Поставим задачу отыскать скорость перемещения кольца в направлении Oz. Для этого мы преобразуем выражение ψ. Ясно, что положив

$$\varepsilon = \pi - 2\varphi,$$

$$k^2 = \frac{4qq'}{(z-z')^2 + (q+q')^2} < 1,$$

будем иметь:

$$\psi = \frac{I\sqrt{qq'}}{2\pi} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \, d\varphi = \frac{I\sqrt{qq'}}{2\pi} H, \tag{14}$$

определяя H уравнением

$$H = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \, d\varphi. \tag{15}$$

Мы пришли к вычислениям с эллиптическими функциями с модулем k, только что определенным; дополнительный модуль k' получаем из соотношения:

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(z-z')^2 + (q-q')^2}{(z-z')^2 + (q+q')^2}, \tag{16}$$

и, следовательно, имеем:

$$k' = \frac{MA}{MB},$$

если обозначить через A и B точки пересечения кольца с плоскостью zOM.

Если поместиться вблизи вихря, то k' близко к нулю и k к единице, а интеграл H, данный (15), становится тогда очень большим. Легко образовать его главную часть, замечая, что если положить

$$\lambda = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \int_0^1 \frac{k\,dc}{\sqrt{k'^2+k^2c^2}} = -\lg k' + \lg(k+1), \qquad (17)$$

то разность

$$H-\lambda = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - \sin\varphi - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \qquad (18)$$

остается конечной при $k=1$, так как числитель подинтегральной функции обращается в нуль при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Но такой путь не дает полной гарантии. В самом деле, чтобы получить скорости, нам нужны главные части производных $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ для использования их в формуле (13), следовательно, мы должны больше заботиться о частных производных от H, чем о самой функции H. Мы легко убедимся, что выражение

$$H = -\lg k' + (\text{конечное количество при } k'=0) \qquad (19)$$

достаточно для правильного вычисления главных частей скоростей. Мы отметим в дальнейшем, насколько это рассуждение необходимо и как его результат мало очевиден на первый взгляд.

Введем здесь классические количества:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Простая комбинация дает

$$H = \left(\frac{2}{k}-k\right)K - \frac{2}{k}E.$$

Теория же эллиптических функций позволяет написать уравнения:

$$K = -\frac{k'^2}{4}\left(1+\frac{21}{32}k'^2+\ldots\right) + \left(1+\frac{k'^2}{4}+\frac{9}{64}k'^4+\ldots\right)\lg\frac{4}{k'},$$

$$E = 1-\frac{k'^2}{4}-\frac{13}{64}k'^4+\ldots+\frac{k'^2}{2}\left(1+\frac{3k'^2}{8}+\ldots\right)\lg\frac{4}{k'}$$

(см., например, Tannery и Molk, формулы CXXII, 11). Так как мы имеем

$$\frac{1}{k}=(1-k'^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}k'^2+\ldots,$$

то можем написать:

$$H=-\lg k'+\mu; \tag{20}$$

члены, заключенные в μ, содержат либо члены с k'^{2p}, либо члены с $k'^{2p+2}\lg k'$ (где p целое положительное число или нуль).

Имея все это, рассмотрим частные производные от μ. Непосредственно находим формулы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lg k'}{\partial z}&=\frac{4qq'(z-z')}{[(z-z')^2+(q-q')^2]\,[(z-z')^2+(q+q')^2]},\\ \frac{\partial \lg k'}{\partial q}&=\frac{q-q'}{(z-z')^2+(q-q')^2}-\frac{q+q'}{(z-z')^2+(q+q')^2},\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

показывающие, что произведения $k'\dfrac{\partial \lg k'}{\partial z}$, $k'\dfrac{\partial \lg k'}{\partial q}$ остаются конечными, когда точка $(z,\ q)$ приближается к $(z',\ q')$, т. е. когда k' стремится к нулю.

Отсюда следует, что члены, входящие в μ, будут вносить в H величины, которыми можно пренебречь сравнительно с тем, что произойдет от члена $-\lg k'$. Следовательно, вычисление, основанное на формуле (19), вполне приемлемо.

При условии принятого приближения мы видим, что для ψ, согласно (14), имеем

$$\psi=-\frac{I\sqrt{qq'}}{2\pi}\lg k'+\ldots \tag{22}$$

и получаем:

$$\left.\begin{aligned}s&=-\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{I}{2\pi}\sqrt{\frac{q'}{q}}\frac{\partial \lg k'}{\partial z}+\ldots\\ w&=\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial q}=-\frac{I}{4\pi q}\sqrt{\frac{q'}{q}}\lg k'-\frac{I}{2\pi}\sqrt{\frac{q'}{q}}\frac{\partial \lg k'}{\partial q}+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Применим эти формулы для нахождения скорости распространения вихревого кольца. Назовем через ε бесконечно малый радиус сечения и возьмем формулы (23) в точке $q=q'$, $z=z'+\varepsilon$, используя уравнения (21). Находим тотчас же, что k' эквивалентно $\dfrac{\varepsilon}{2q'}$, и получаем для скорости w

$$w_1=-\frac{I}{2\pi q'}\lg\left(\frac{\varepsilon}{2q'}\right)+\text{конечные члены.} \tag{24}$$

Мы находим, следовательно, что скорость распространения очень велика (положительна, одновременно с I). Это обстоятельство нам говорит, что давление будет бесконечно велико, отрицательно, в непосредственной близости кольца, предполагаемого очень тонким. Следовательно, бесконечно тонкое кольцо физически неосуществимо, и мы в дальнейшем должны развить теорию кольца **конечного сечения**, имея в виду вычислить давление и установить, при каких условиях последнее будет приемлемо.

Случай конечного сечения. Ради определенности мы будем предполагать, что имеем дело с единственным вихревым кольцом, сечение которого в меридианальной плоскости zOx представляет собой простую область D, ограниченную кривой C.

Формулы (1) дадут нам очевидно значение давления p. Не трудно, преобразовав слегка уравнения (1), (2) и (3), прийти к очень простому подсчету. Прежде всего, простое изменение записи позволяет представить формулы (1) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + 2\Omega w &= -\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(s^2+w^2)\right], \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2\Omega s &= -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(s^2+w^2)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Исключая p и используя уравнение неразрывности (2), получаем:

$$\frac{d\Omega}{dt} - \Omega\frac{s}{q} = 0,$$

но, по определению, $s = \frac{dq}{dt}$, следовательно:

$$q\frac{d\Omega}{dt} - \Omega\frac{dq}{dt} = 0;$$

отсюда

$$\Omega = Aq, \tag{26}$$

где A постоянная, отличная от нуля, одна и та же, для всех частиц внутри кольца, и равная нулю снаружи кольца, в безвихревой области.

После этого введение ψ при помощи формулы (4) дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(s^2+w^2) + 2A\psi\right], \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(s^2+w^2) + 2A\psi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Положим в вихревой области:

$$\Theta = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(s^2+w^2) + 2A\psi, \tag{28}$$

так что

$$\Theta = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(s^2 + w^2) \tag{28'}$$

вне кольца, и внесем значения (27) в уравнение неразрывности, продиференцированное (частным образом) по t, т. е. в уравнение:

$$\frac{\partial\left(q\frac{\partial s}{\partial t}\right)}{\partial q} + \frac{\partial\left(q\frac{\partial w}{\partial t}\right)}{\partial z} = 0;$$

тогда получим

$$\frac{\partial\left(q\frac{\partial\Theta}{\partial q}\right)}{\partial q} + \frac{\partial\left(q\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0. \tag{29}$$

Но это уравнение Лапласа

$$\Delta\Theta = 0, \tag{30}$$

для функции Θ, выраженной в цилиндрических координатах, в случае когда эта функция не зависит от угла θ.

Посмотрим, каким условиям подчинена эта функция Θ. На бесконечности, p постоянно (можно его выбрать равным нулю), скорость равна нулю, φ [определенное (9) и (11)] также, так что, пренебрегая при надобности постоянной, которая не играет никакой существенной роли, имеем Θ равным нулю на бесконечности. С другой стороны, согласно (28) и (28'), Θ испытывает конечный скачок, равный $2A\varphi$ при переходе через поверхность кольца: она возрастает на эту величину, если пройти извне внутрь. Наконец, легко убедиться, что производная по нормали $\frac{d\Theta}{dn}$ остается непрерывной на поверхности.

В самом деле, если мы обозначим по обыкновению через δm разность $m_i - m_l$ одной и той же функции в двух бесконечно близких точках с одной и другой стороны границы, то будем иметь (скорости предполагаются везде непрерывными):

$$\delta s = \delta w = 0;$$

следовательно,

$$\delta\frac{ds}{dt} = \delta\frac{dw}{dt} = 0,$$

и отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\delta\frac{\partial s}{\partial t} + s\delta\frac{\partial s}{\partial q} + w\delta\frac{\partial s}{\partial z} = 0, \\ &\delta\frac{\partial w}{\partial t} + s\delta\frac{\partial w}{\partial q} + w\delta\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Если теперь α и β означают направляющие косинусы нормали n (например, внутренней) в плоскости qOz, и если обозначить $d\tau$ элемент дуги, надлежаще ориентированный, то будем иметь, например:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds}{dn} &= \alpha\frac{\partial s}{\partial q} + \beta\frac{\partial s}{\partial z}, \\ \frac{ds}{d\tau} &= -\beta\frac{\partial s}{\partial q} + \alpha\frac{\partial s}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Но, так как s непрерывна на C, $\delta\frac{ds}{dt}$, очевидно, нуль и, следовательно, имеем:

$$\frac{\delta\frac{\partial s}{\partial q}}{\alpha} = \frac{\delta\frac{\partial s}{\partial z}}{\beta} = \delta\frac{ds}{dn}, \tag{33}$$

и также

$$\frac{\delta\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)}{\alpha} = \frac{\delta\frac{\partial w}{\partial z}}{\beta} = \delta\frac{dw}{dn}. \tag{33'}$$

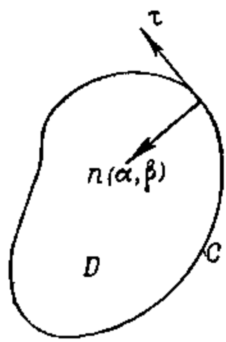

Рис. 54.

Уравнения (31) дают тогда:

$$\left.\begin{aligned} \delta\frac{\partial s}{\partial t} &= -(\alpha s + \beta w)\,\delta\frac{ds}{dn}, \\ \delta\frac{\partial w}{\partial t} &= -(\alpha s + \alpha w)\,\delta\frac{dw}{dn}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Теперь уравнение непрерывности в виде:

$$\frac{\partial s}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{s}{q} = 0$$

дает

$$\delta\frac{\partial s}{\partial q} + \delta\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

или, согласно (33) и (33′):

$$\alpha\delta\frac{ds}{dn} + \beta\delta\frac{dw}{dn} = 0.$$

Если помножить уравнения (34) на α и β и сложить, получим:

$$\alpha\delta\frac{\partial s}{\partial t} + \beta\delta\frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

т. е., вводя функцию Θ посредством уравнений (27):

$$\alpha\delta\frac{\partial\Theta}{\partial q} + \beta\delta\frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0,$$

или, наконец:

$$\delta \frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0.$$

Из всего этого следует, что Θ является **потенциалом двойного слоя**, плотности $\frac{2A\psi}{4\pi}$, расположенного на поверхности кольца. Обозначим через $d\Sigma$ элемент площади этой поверхности, тогда будем иметь:

$$\Theta = \frac{A}{2\pi} \iint\limits_{\Sigma} \psi \frac{d\frac{\Sigma}{r}}{dn_i} d\Sigma, \tag{35}$$

и, следовательно, давление p будет дано формулами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{A}{2\pi} \iint \psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\Sigma - \frac{1}{2}(s^2 + w^2) - 2A\psi \text{ (в кольце)}, \\ \frac{p}{\rho} &= \frac{A}{2\pi} \iint \psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} d\Sigma - \frac{1}{2}(s^2 + w^2) \text{ (вне кольца)}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Свойства потенциала двойного слоя обеспечивают нам непрерывность p при переходе через поверхность кольца.

Так как функция ψ была уже выражена в виде:

$$\psi = \frac{q}{\pi} \iint \Omega' q' \, d\sigma' \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\varepsilon \, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon}}, \tag{37}$$

то мы имеем в руках все необходимые элементы для окончания вычислений. Говоря физически, результаты будут приемлемы, если только полученные давления будут везде положительными.

Возвращение к кольцу малого сечения. Рассмотрим вихревое кольцо в виде тора, полумеридиан которого C имеет центром точку (a, b) плоскости xOz и радиус r_0, предположим r_0 малым сравнительно с a. Пусть I интенсивность кольца. В силу формул

$$I = \iint\limits_C 2\Omega' \, ds',$$

$$\Omega' = Aq',$$

ясно, что будем иметь в точности

$$I = 2A\pi a r_0^2,$$

так что, в силу (11) и (9), можно ψ представить в виде:

$$\psi = qS = \frac{qI}{2\pi^2 a r_0^2} \int\int q'^2 d\sigma' \int_0^\pi \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2+q^2+q'^2-2qq'\cos\varepsilon}}. \quad (38)$$

Но мы убедились выше, что вблизи кольца имеем (формулы 12, 14 и 19):

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2+q^2+q'^2-2qq'\cos\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{qq'}} H =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{qq'}} (-\lg k' + \text{конечное выражение}), \quad (39)$$

и положив

$$k'^2 = \frac{(z-z')^2+(q-q')^2}{(z-z')^2+(q+q')^2},$$

т. е. обозначив через r_1 расстояние

$$r_1 = \sqrt{(z-z')^2+(q-q')^2},$$

имеем:

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2+q^2+q'^2-2qq'\cos\varepsilon}} = -\frac{\lg r_1}{\sqrt{qq'}} + \gamma_1,$$

где γ_1 означает выражение, остающееся конечным, когда z и q близки к z' и q'.

Отсюда мы заключаем, что рассматриваемая нами теперь функция ψ выразится:

$$\psi = \frac{Iq}{2\pi^2 a r_0^2} \int\int_C \left(-q' \sqrt{\frac{q'}{q}} \lg r_1 + \gamma_1 q'^2\right) d\sigma'.$$

Но во всех точках круга, по площади которого мы интегрируем, имеем:

$$q' = a + \lambda\varepsilon_0, \text{ где } |\lambda| \leqslant 1;$$

отсюда заключаем, что для точек (z, q), близких к кольцу и внешних, имеем:

$$\psi = -\frac{I\sqrt{q}\sqrt{a}}{2\pi^2\varepsilon_0^2} \left\{ \int\int_C \lg r_1 d\sigma' + \int\int_C O(r_0) \lg r_1 d\sigma' \right\} +$$

$$+ \frac{Iq}{2\pi^2 a\varepsilon_0^2} \int\int_C \gamma_1 q'^2 d\sigma'.$$

Первый интеграл представляет логарифмический потенциал плотности 1, относящийся к диску C; как известно, он равен

$$\int\int \lg r_1 d\sigma' = \pi r_0^2 \lg l,$$

где через l обозначено расстояние точки (q, z) от центра (a, b) диска C. Это следует, впрочем, из того, что он зависит только от l и удовлетворяет уравнению Лапласа относительно q, z.

Отсюда следует, как это легко было предвидеть, что вблизи поверхности имеем:

$$\psi = -\frac{I\sqrt{q}\sqrt{a}}{2\pi}\lg\sqrt{(q-a)^2+(z-b)^2}+qh, \tag{40}$$

где величина h остается конечной вблизи кольца. Мы опять приходим к выражению (22) в первом приближении, и подсчет, проведенный аналогично прежнему, дает нам снова скорость переноса кольца с главной частью (24), т. е. $-\frac{I}{4\pi a}\lg r_0$, с точностью до конечной величины.

Применим формулы:

$$\left.\begin{aligned} s &= -\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{I\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{q}}\frac{z-b}{l^2} - \frac{\partial h}{\partial z} \\ w &= \frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{I\sqrt{a}}{4\pi q\sqrt{q}}\lg l - \frac{I\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{q}}\frac{q-a}{l^2} + \frac{h}{q} + \frac{\partial h}{\partial q}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

в точках, внешних и смежных с кольцом; рассмотрим, как меняется квадрат расстояния от центра диска

$$(q-a)^2+(z-b)^2,$$

т. е. рассмотрим производную по времени этого количества:

$$L = (q-a)\left(\frac{dq}{dt}-\frac{da}{dt}\right)+(z-b)\left(\frac{dz}{dt}-\frac{db}{dt}\right).$$

Но мы имеем:

$$\frac{da}{dt}\sim 0,\ \frac{db}{dt}\sim w_1 = -\frac{I\lg r_0}{4\pi a},$$

затем

$$\frac{dq}{dt} = s, \qquad \frac{dz}{dt} = w;$$

следовательно, делая замену, находим для L конечную величину, которая может быть принята за нуль лишь приближенно. Отсюда следует, как это мы уже предвидели раньше, что сечение C кольца, предполагаемое в начальный момент круговым, не может сохраняться без деформации. Изучение изменения его формы относится к общей задаче, которую мы будем рассматривать дальше. Вычислим теперь давление во внешних точках вблизи кольца; оно дается второй из формул (36). Мы легко убеждаемся, что член в $\psi\left(\sim -\frac{Ia}{2\pi}\lg r_0\right)$ дает в выражении для p величину порядка $Ar_0\lg r_0$, т. е. порядка $\frac{I\lg r_0}{r_0}$, так как

$$I = 2A\pi a r_0^2.$$

С другой стороны, формулы (41) показывают, что s и w становятся очень большими, порядка $\frac{1}{r_0}$, так что p становится очень большим отрицательным, что можно было предвидеть. Бесконечно тонкое кольцо является, следовательно, лишь математической фикцией, но формулы остаются такими же, как мы их получили, и выражения, касающиеся тонких колец, будут являться приближениями к реально возможным случаям и приближениями тем лучшими, чем ближе мы к случаям, когда давления делаются всюду положительными.

Замечание. Уместно отметить одно частное затруднение, встречающееся в изложенном здесь приближенном вычислении. Мы имели дело с интегралом

$$\mathfrak{M} = \int_0^\pi \frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\varepsilon,$$

где

$$r = \sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon'},$$

и взяли приближенное его значение вблизи кольца равным:

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{\sqrt{qq'}}\lg k' + \gamma \qquad \left(k'^2 = \frac{(z-z')^2 + (q-q')^2}{(z-z')^2 + (q+q')^2}\right)$$

или, иначе,

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{\sqrt{qq'}}\lg r_1 + \gamma_1,$$

где

$$r_1 = \sqrt{(z-z')^2 + (q-q')^2}.$$

J. Weingarten (Nachrichten zu Göttingen, 1906, p. 81—93), исходя из факта, что

$$2\mathfrak{M} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon d\varepsilon}{r}$$

является потенциалом линии плотности $\frac{\cos\varepsilon}{q'}$, распространенным на окружность радиуса q', к которой сводится кольцо, применяет общую формулу Риманна о потенциалах линии (Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnet., Abschn. I, § 17) и получает вблизи кольца выражение вида

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{q'}\lg r_1 + g,$$

где g, так же, как γ и γ_1, остается конечным и непрерывным при $z=z'$, $q=q'$. Исходя из этого выражения, он развертывает вычисления и находит для скорости переноса кольца в направлении Oz значение, удвоенное сравнительно с полученным нами выше. Отсюда он заключает: „писавшие ранее авторы находили лишь половину выражения, данного мною, что представляется мне неточным". Основанием такой двойственности служит то, что Вейнгартен не исследовал, можно ли пренебречь первыми частными производными функции g сравнительно с производными члена $-\frac{1}{q'}\lg r_1$, рассматриваемого как главный член. Мы провели выше для функции γ соответствующую проверку, каковая остается, очевидно, верной также для γ_1. Но очень легко убедиться, что: 1°) разность $g-\gamma_1$ остается конечной для $r_1=0$; 2°) что это не имеет места для разности производных

$$\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial \gamma_1}{\partial q}.$$

В самом деле, положив ради упрощения:

$$q=q'+r_1\cos\omega,$$
$$z=z'+r_1\sin\omega,$$

имеем:

$$g-\gamma_1=\frac{\cos\omega}{\sqrt{q}(\sqrt{q'}+\sqrt{q})\,q'}\,r_1\lg r_1,$$

что очевидно стремится к нулю вместе с r_1.

Находим легко, что разность $\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_1}{\partial z}$ сохраняет также конечное значение при этих условиях.

Но мы имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial \gamma_1}{\partial q}=\frac{\lg r_1}{2q\sqrt{q}\sqrt{q'}}+\frac{\cos^2\omega}{q'\sqrt{q}(\sqrt{q}+\sqrt{q'})},$$

и ясно, что эта разность становится бесконечно большой при $r_1=0$.

Это замечание показывает, что предосторожность, принятая выше, относительно поведения производных от γ, вовсе не была излишней. По этому поводу отсылаем к интересной статье R. Thiry (Congrès des Sociétés Savantes, 1921).

ГЛАВА X

ИЗЛОЖЕНИЕ ОБЩЕЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ. О НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К РАЗРЫВАМ

Общая задача. На предшествующих страницах мы изучили различные частные случаи вихревых конфигураций. Если для наиболее простых из них мы смогли выяснить, что вихревой объем перемещается, сохраняя свою форму, мы должны были констатировать, что в случае тора поверхность его, являясь поверхностью вращения, имеет меридианальное сечение, которое лишь приближенно сохраняет круговую форму. Мы поставим следующую общую задачу: предполагая известной в начальный момент t_0 конфигурацию неограниченной идеальной жидкости, содержащей одну (или несколько) вихревых областей, определить для момента $t > t_0$ новую конфигурацию жидкости и обстоятельства, сопровождающие перемещение и деформацию вихревых объемов.

Ради определенности мы предположим, что в момент t_0 имеется единственная односвязная вихревая область T_0, ограниченная поверхностью S_0; метод легко может быть обобщен, если имеется несколько таких областей. Объем T_0 может быть гомеоморфен сфере, тору или любому объему данного вида, односвязному или многосвязному.

Эта задача была предметом глубокого исследования Lichtenstein'a (Math. Zeitschrift. B. 23, 1925, p. 89—154), и вот в точности те гипотезы, которые мы примем, и результаты, к которым пришел ученый геометр.

Гипотезы. Мы будем предполагать жидкость идеальною и неограниченною. Могут быть в наличии внешние силы: тогда, допустим, они будут иметь потенциал $U(x, y, z, t)$, непрерывный, вместе со своими частными производными по x, y, z. Для $R\left(=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ бесконечного мы допустим, что частные производные стремятся к нулю как $\frac{1}{R^2}$.

На бесконечности давление будет задано как известная функция $t: p(t)$.

В момент t_0 частица (x, y, z) занимает положение (a, b, c).

Скорости $u(a, b, c, t_0)$, $v(a, b, c, t_0)$, $w(a, b, c, t_0)$ будут также данными функциями (a, b, c), мы их обозначим через u_0, v_0, w_0; они обязательно удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u_0}{\partial a}+\frac{\partial v_0}{\partial b}+\frac{\partial w_0}{\partial c}=0\,;$$

кроме того они предполагаются всюду непрерывными, но первые и вторые производные могут иметь разрывы на поверхности S_0. На бесконечности в момент t_0 жидкость покоится; u_0, v_0, w_0 обращаются там в нуль, как $\frac{1}{R^2}$, и их частные производные, первые и вторые, будут тоже там обращаться в нуль как $\frac{1}{R^3}$ и $\frac{1}{R^4}$. Рассматриваемые вторые производные удовлетворяют в объеме T_0+S_0 и снаружи условиям вида:

$$\left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\,(a+h,\ b+k,\ c+l)-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\,(a,\ b,\ c)\right| \leqslant C d_{12}^{\lambda},$$

где C и λ представляют две положительные постоянные, из которых вторая меньше 1 $(0<\lambda<1)$, и где d_{12} означает расстояние между двумя точками $(a,\ b,\ c)$ и $(a+h,\ b+k,\ c+l)$. Сокращенно эти условия обозначим C_λ. Если $(\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0)$ означает вихрь в $(a,\ b,\ c)$ в момент t_0, то, по предшествующему, в T_0+S_0 (там, где ξ_0, η_0, ζ_0 отличны от нуля) будут иметь место условия C_λ для первых производных $\frac{\partial \xi_0}{\partial a}, \ldots$

Наконец, мы допустим, что если $z=f(x,\ y)$ изображает поверхность S_0, то вторые производные f удовлетворяют также условиям C_λ, которые сводятся здесь к

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x+h,\ y+k)-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,\ y)\right| \leqslant C r_{12}^{\lambda}.$$

Как известно из формул Гельмгольца, если обозначить через r расстояние между двумя точками $(x,\ y,\ z)$ и $(x',\ y',\ z')$, то имеются между скоростями и вихрями в момент t_0 соотношения:

$$u_0=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_{T_0}\frac{1}{r}\,\eta_0' d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\iiint\limits_{T_0}\frac{1}{r}\,\zeta_0' d\tau'.$$

При всех этих допущениях мы докажем следующую теорему: Можно найти конечный интервал времени, от t_0 до t_0+t^*, в течение которого можно определить скорости $u(x,\ y,\ z,\ t)$, $v(x,\ y,\ z,\ t)$, $w(x,\ y,\ z,\ t)$, везде непрерывные и на бесконечности обращающиеся в нуль, как $\frac{1}{R^2}$, обладающие первыми и вторыми частными производными, непрерывными всюду, кроме некоторой поверхности S (имеющей тот же топологический характер, как и S_0); при переходе через эту поверхность S, рассматриваемые производные могут претерпевать скачки. Если T_i и T_e обозначают соответственно внутреннюю и внешнюю области по отношению к S, то вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$

удовлетворяют условию C_λ. Первые производные на бесконечности будут обращаться в нуль как $\frac{1}{R^3}$, вторые производные как $\frac{1}{R^4}$.

Всюду будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,.$$

При $t=t_0$ величины u, v, w обратятся в u_0, v_0, w_0. Поверхность S будет в каждый момент местом частиц, находившихся на S_0 в момент t_0. Это условие необходимо, так как мы знаем, что вихревая поверхность является жидкой поверхностью, которая не перестает быть вихревой поверхностью; поверхность же S_0, очевидно, является такой поверхностью.

Ясно, что траектория частицы, находившейся в (a, b, c) в момент t_0, может быть получена интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{dt}=u\,(x,\ y,\ z,\ t)\ \ldots. \tag{1}$$

с начальными условиями $x=a$, $y=b$, $z=c$, при $t=t_0$, и мы сможем выразить координаты частицы (x, y, z) в функции переменных Лагранжа a, b, c, t. Вводя вихрь, мы должны будем иметь уравнения:

$$\xi=\xi_0\,\frac{\partial x}{\partial a}+\eta_0\,\frac{\partial x}{\partial b}+\zeta_0\,\frac{\partial x}{\partial c}\,,\ \ldots\,, \tag{2}$$

которые очевидно будут представлять интерес только в объеме T_i. И мы будем иметь также уравнения

$$u=-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_{T_i}\frac{\eta' d\tau'}{r}+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial y}\iiint\limits_{T_i}\frac{\zeta' d\tau'}{r}\,. \tag{3}$$

Совершенно элементарен факт, что если найти x, y, z в функции (a, b, c, t), затем u, v, w и ξ, η, ζ, то достаточно определить p интегрированием соответствующего полного диференциала, чтобы удовлетворить всем уравнениям гидродинамики. В самом деле, мы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,,\ \ldots\ \text{и}\ p=p_1+\rho\,(U-Q),$$

что позволяет непосредственно перейти к уравнениям Эйлера и Лагранжа. Но что касается давления p, то должно ввести дополнительное условие, касающееся непрерывности при переходе через поверхности S, ограничивающие вихревые объемы. Мы освободимся от такого затруднения в отношении давления p, показав дальше совершенно общим способом, что требуемое при этом условие постоянно выполняется само собой. Пока скажем, что общая задача, поставленная выше, как мы выясним в дальнейшем, имеет решение и притом единственное.

Метод, которому мы будем следовать, относительно прост и представляет некоторые сложности лишь в деталях. Он будет состоять в преобразовании уравнений (1), (2), (3), с присоединением начальных условий

$$x=a,\ y=b,\ z=c, \text{ при } t=t_0. \tag{4}$$

и интегрировании системы (3) по t. Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= a+\int\limits_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_{T_i}\frac{\eta' d\tau'}{r} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. +\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\iiint\limits_{T_i}\frac{\zeta' d\tau'}{r}\right\}, \\ y &= b+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z &= c+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Получаем, таким образом, систему (2), (5), которая образует систему интегро-диференциальных уравнений для определения функций (x, y, z). Усложнение вычисления происходит оттого, что объем T_i неизвестен заранее, и его определение должно получаться в каждый момент из интегрирования самой системы.

Очевидно, эту систему можно исследовать методом последовательных приближений, с детальным применением которого мы встретимся в следующей главе.

В настоящий момент, после этого предварительного замечания, мы начнем с подготовительной работы, напомнив некоторые классические результаты, относящиеся к разрывам в несжимаемой жидкости; это нам позволит, между прочим, доказать общим способом теорему относительно непрерывности давления при переходе через поверхность S, ограничивающую вихревую область: мы встречали эти результаты в различных частных примерах, рассмотренных в предыдущих главах, и теперь важно доказать теорему в общем виде. Давление исключено из уравнений Коши и Гельмгольца, которые мы напомнили в виде (2) и (3). Но нам следует полностью определить давление, т. е. вернуться к уравнениям Эйлера или уравнениям, им эквивалентным, и непрерывность входящего туда давления представит физически необходимое условие.

Здесь существенно замечание, нами только что сделанное (см. L. Lichtenstein, loc. cit.). Почему мы, собственно, не берем вместо уравнений (2), (3) уравнения Эйлера, как основу наших рассуждений? Это объясняется тем, что в этих уравнениях

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

четыре неизвестных функции u, v, w, p не играют одинаковой роли. Здесь мы задаемся u, v, w для $t = t_0$, но p не дано в этот начальный момент во всей жидкости. Кроме того, уравнения могут быть разрешены относительно $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, тогда как четвертое уравнение не дает $\frac{\partial p}{\partial t}$.

Чтобы освободиться от этого несоответствия, мы приходим к исключению p, и это именно тот путь, которого мы придерживались в главе I, чтобы получить уравнения Коши и Гельмгольца, которые мы написали выше. Заметим еще, что если мы изучаем газ, а не жидкость, все примет совершенно иной вид, так как уравнение неразрывности представится в форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0\,.$$

В силу дополнительного уравнения (при допущении, например, что температура постоянна), p будет функцией ρ, и мы будем иметь четыре уравнения, разрешимых относительно $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Задача получит тогда совершенно иное решение, и то, что может быть высказано относительно жидкостей, не может быть перенесено, без глубоких изменений, на газы.

Некоторые классические свойства, относящиеся к разрывам. Здесь мы вкратце укажем различные результаты, сделавшиеся уже классическими после работ I. Hadamard'a (Leçons sur la propagation des ondes, Paris, 1903).

Пусть S есть рассматриваемая поверхность внутри жидкости в момент t. Пусть (x, y, z) будет положение жидкой частицы в этот момент; координаты x, y, z являются функциями начального положения a, b, c и времени t. Допустим, что эти функции, также как и все их частные производные по a, b, c, t до порядка $n-1$ включительно, непрерывны при переходе через S, но что одна, по крайней мере, из частных производных порядка n разрывна. При этих условиях S называется поверхностью разрыва или волной порядка n.

Мы обозначим через $\Phi(x, y, z, t) = 0$ уравнение такой поверхности и рассмотрим поверхность S_0, место начальных положений (a, b, c) в момент t_0 тех молекул, которые в момент t окажутся на S. Эта поверхность S_0 будет иметь уравнение вида

$$F(a,\ b,\ c,\ t) = 0,$$

которое зависит от t, так как во всякий момент вообще новые частицы будут составлять поверхность S. Обозначим значками *1* и *2* соответственно две стороны S; пусть MN нормаль в одной из точек S, направленная, например, в сторону *2*; направляющие косинусы этой нормали, очевидно, будут:

$$\alpha = \frac{1}{k}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \ \ldots, \qquad \text{где } k = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2},$$

знак k совпадает со знаком функции Φ в области 2. Если M' точка $(x+\alpha dn,\ y+\beta dn,\ z+\gamma dn)$ пересечения MN с поверхностью S_{t+dt}, т. е. с поверхностью разрыва, в которую перейдет S через промежуток времени dt, то уравнение

$$\Phi(x+\alpha dn,\ y+\beta dn,\ z+\gamma dn,\ t+dt) = 0$$

даст непосредственно:

$$kdn + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dt = 0,$$

откуда скорость перемещения волны в точке M будет равна

$$V = \frac{dn}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}}{k}.$$

То же вычисление, проделанное для поверхности S_0, позволит узнать скорость распространения волны для начального состояния

$$G = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{h}, \text{ где } h = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2} \ldots$$

Вполне понятно, что вообще $G \neq V$, даже если t совпадает с t_0, так как ясно, что нет оснований к тому, чтобы поверхности $S_0(t)$ и $S_0(t+dt)$ совпадали; действительно, поверхность $S_0(t+dt)$ представляет в момент t_0 место частиц, находящихся в момент $t+dt$ на поверхности $S(t+dt)$. Напомнив эти определения, рассмотрим функцию $f_1(x, y, z, t)$, вполне определенную в момент t, со стороны *1* поверхности S, непрерывную там вместе со своими первыми производными, и предположим, что f_1 и ее производные стремятся к определенным значениям, когда точка (x, y, z) стремится к какой-нибудь точке S, оставаясь со стороны *1*. При этих условиях Адамар отмечает тот существенный факт, что формула обычного диференцирования функции f_1, применимая, очевидно, в области *1* остается применимой и на самой поверхности S. Этот факт не очевиден a priori, так как, собственно говоря, на S нет частных производных.

Все сводится к тому, чтобы показать, что, обозначив через x_0, y_0, z_0 точку на S и через $\frac{\partial f_1}{\partial x_0}, \ldots$, предельные значения производных f_1, когда точка x, y, z стремится к x_0, y_0, z_0 со стороны *1*, имеем формулу:

$$\frac{df_1}{ds} = \frac{\partial f_1}{\partial x_0}\frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial y_0}\frac{dy_0}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0}\frac{dz_0}{ds},$$

где s означает переменную (например, дугу), определяющую положение точки M_0 по какому-нибудь пути, принадлежащему S. Но эта формула не отличается от формулы диференцирования сложной функции, и хорошо известный элементарный метод ее получения состоит в том, что мы берем две соседние точки M_0 и M'_0, принадлежащие рассматриваемому пути, и вводим вспомогательный путь, образованный отрезками, параллельными координатным осям; затем применяем теорему о конечных приращениях к каждому из отрезков. Но среди линий, определенных таким образом, найдется вообще, по крайней мере, одна, которая целиком лежит в рассматриваемой области *1* и которая позволяет, следовательно, применить классическое рассуждение. Отсюда и получается требуемый результат.

Как показал Адамар, можно связать эту теорему также с одним замечанием, сделанным Painlevé (Annales de l'École Normale sup., 1887, 1-re partie, Chap. II, n° 2), заменяя рассматриваемый путь на S близким путем, лежащим внутри области *1*, и проделывая затем непрерывный переход к поверхности S (см. Leçons Hadamard'a, p. 83).

Пусть тогда S поверхность разрыва первого порядка и S_0 ее отображение, взятое в момент t_0: уравнение S_0, как и выше, имеет вид:

$$F(a,\ b,\ c,\ t)=0.$$

По предположению x, y, z суть непрерывные функции a, b, c, t, но их частные производные разрывны, когда x, y, z проходит через S, или когда точка $(a,\ b,\ c)$ проходит через S_0. Пусть $\psi_1\ (a,\ b,\ c,\ t)$ и $\psi_2(a, b, c, t)$ две определенные функции, допускающие частные производные соответственно в областях *1* и *2*, отделенных поверхностью S_0 и совпадающие на S_0, в том смысле, что предельные значения ψ_1 и ψ_2 одинаковы, если приближаться к S_0 с той или с другой стороны.

При этих условиях разность

$$\delta\psi=\psi_2-\psi_1$$

везде равна нулю на S_0 и тоже для ее диференциала, который может быть вычислен обычным диференцированием в силу теоремы, которую мы только что напомнили. Мы имеем следующие формулы:

$$\frac{\partial\delta\psi}{\partial a}=\delta\frac{\partial\psi}{\partial a},\ \ldots$$

обе части этого равенства представляют, очевидно, разность

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial a}-\frac{\partial\psi_1}{\partial a}$$

в точках S_0.

Установив это, Адамар разделяет условия на две категории: условия тождественные и условия кинематической совместимости.

Тождественные условия. *1.* Рассмотрим момент t. По предположению функция $\psi = \psi_1$ или ψ_2, смотря по области, остается непрерывной при переходе через S_0 в этот момент. Имеем, следовательно, $d\delta\psi = 0$ везде на S_0, т. е.

$$\delta \frac{\partial\psi}{\partial a}\, da + \delta \frac{\partial\psi}{\partial b}\, db + \delta \frac{\partial\psi}{\partial c}\, dc = 0$$

при всяких da, db, dc, на S_0, т. е. удовлетворяющих условию:

$$\frac{\partial F}{\partial a}\, da + \frac{\partial F}{\partial b}\, db + \frac{\partial F}{\partial c}\, dc = 0.$$

Отсюда следует, что коэфициенты в обоих уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{\delta \frac{\partial\psi}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial a}} = \frac{\delta \frac{\partial\psi}{\partial b}}{\frac{\partial F}{\partial b}} = \frac{\delta \frac{\partial\psi}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial c}} = \frac{\theta}{h},$$

положив, как и выше:

$$h = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2},$$

и имея в виду ввести направляющие косинусы нормали к S_0. Эти формулы показывают, что разрывность вектора grad ψ есть разрывность нормальная. Взяв за ψ поочередно три функции x, y, z, видим, что три количества λ, μ, ν, играющие роль θ, будут достаточны, чтобы определить разрывы девяти частных производных по a, b, c. Вектор (λ, μ, ν), полученный таким образом, был введен Адамаром.

Условия кинематической совместимости. Пусть теперь меняется время t, и предположим, что разрывы распространяются в виде поверхности S. Попрежнему имеем $\delta\psi = 0$ и, следовательно,

$$d\delta x = 0,$$

даже если t переменное, и это для всех значений четырех переменных, удовлетворяющих условию

$$F\ (a, b, c, t) = 0.$$

Теперь, следовательно, имеем одновременно:

$$\delta \frac{\partial\psi}{\partial a}\, da + \delta \frac{\partial\psi}{\partial b}\, db + \delta \frac{\partial\psi}{\partial c}\, dc + \delta \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dt = 0$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial a}\, da + \frac{\partial F}{\partial b}\, db + \frac{\partial F}{\partial c}\, dc + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt = 0,$$

и, следовательно, в силу уже полученных условий:

$$\delta \frac{d\psi}{dt} = \frac{\theta}{h} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Принятое обозначение $\frac{d\psi}{dt}$, чтобы записать частную производную по t, объясняется тем, что эта производная берется при a, b, c постоянных, т. е. следуя за жидкой частицей x, y, z в ее движении.

Для $\psi = x$, y или z входящие сюда величины будут $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, т. е. проекции скорости u, v, w жидкой частицы. Будем, таким образом, иметь в этом случае:

$$\delta u = \frac{\lambda}{h} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \delta v = \frac{\mu}{h} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \delta = w \frac{\nu}{h} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Отношение двух векторов δu, δv, δw и λ, μ, ν, которые колинеарны равно $\frac{1}{h} \frac{dF}{dt}$, т. е. скорости распространения волны. Их направление есть направление разрывности в рассматриваемой точке; оно называется продольным или поперечным (трансверсальным), если оно нормально или касательно к S.

В случае жидкости вектор δu, δv, δw может быть только касательным к поверхности волны S, которая, таким образом, будет поверхностью скольжения.

В самом деле, рассмотрим маленький цилиндр, имеющий в основании элемент $d\sigma$ поверхности S и ограниченный поверхностью S' (положение S в момент $t + dt$). Так как плотность жидкости постоянна, то жидкая масса, содержащаяся в цилиндре, будет одна и та же в момент t и момент $t + dt$. Предположим, что наш цилиндр находится в области *2*; пусть V_1 скорость жидкой частицы в области *1*; V_2 скорость в области *2*; отметим индексом n нормальные составляющие. Вычислим изменение массы за время dt. Через основание $d\sigma$ на S вошла масса, равная $\rho(V_{1n} dt) d\sigma$, так как основание $d\sigma$ находится в области *1*; через верхнее основание вышла масса $\rho V_{2n} dt\, d\sigma$, по таким же соображениям. С другой стороны, в сечениях, параллельных $d\sigma$, тангенциальные скорости противоположны; изменение массы, происходящее от того, что вошло или вышло сбоку, ничтожно мало по сравнению с предшествующими величинами, если предположить отношение $\frac{dt}{d\sigma}$ достаточно малым (ср. Hadamard, p. 112). Следовательно, окончательно должны иметь

$$V_{1n} = V_{2n},$$

что и доказывает предложение: разрыв скорости может коснуться только тангенциальной составляющей.

Движение, когда скорости непрерывны. Скачок в ускорениях. Применим прежние результаты, предполагая, что функция ψ является

u — скоростью, спроектированной на ось Ox, или также v и w, и что эти скорости непрерывны, но их частные производные могут терпеть разрывы при переходе через S. Выше доказанные формулы дадут нам здесь

$$\delta \frac{du}{dt} = \frac{\lambda'}{h} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \delta \frac{dv}{dt} = \frac{\mu'}{h} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \delta \frac{dw}{dt} = \frac{\nu'}{h} \frac{\partial F}{\partial t},$$

где λ', μ' и ν' означает некоторый вектор, а $\frac{du}{dt}$, например, представляет производную от u по t, если рассматривать a, b, c как постоянные, т. е., следить за движением молекулы по ее траектории; $\frac{du}{dt}$, следовательно, представляет ускорение, спроектированное на Ox, и предшествующие формулы дают скачок ускорения. Предположим теперь, что поверхность разрыва S постоянно состоит из одних и тех же жидких частиц; это именно то, что происходило в случае, рассмотренном в начале настоящей главы, когда S было поверхностью вихрей, отделяющей пространство, занятое вихрями. В этом случае отображение ее S_0, $F(a, b, c, t) = 0$ будет независимо от t, по самому определению, и мы будем иметь $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Следовательно, в этом случае:

$$\delta \frac{du}{dt} = \delta \frac{dv}{dt} = \delta \frac{dw}{dt} = 0,$$

т. е. ускорения остаются непрерывными при переходе через S, если S жидкая поверхность.

Непрерывность давления в жидкости при прохождении поверхности, ограничивающей вихри. Теперь вообразим движение жидкости и запишем уравнения движения в форме Эйлера, т. е.,

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \ \ldots$$

или, вводя U — функцию внешних сил:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U - \frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \ldots, \tag{1}$$

обозначая через Q потенциал ускорений.

Но мы уже знаем, что коль скоро скорости предположены непрерывными, то ускорения остаются непрерывными и при переходе через поверхность разрыва S, если последняя одновременно является жидкой поверхностью; следовательно, ускорения непрерывны при переходе через поверхность S, ограничивающую вихревую область. Потенциал Q определен в двух областях T_i и T_e, внутренней и внешней к S — с точностью до постоянной, не зависящей от x, y, z, и надо только распорядиться этой постоянной так, чтобы Q имело одинаковые значения в одной точке S, рассматриваемой как принадлежащей T_i или T_e; тогда Q получит одинаковые значения с одной и с другой стороны на всей поверхности S.

Выбираем постоянную (могущую зависеть от t), входящую в Q для объема T_e, требуя, чтобы Q равнялось нулю на бесконечности; тогда имеем всюду

$$p = p_*(t) + \rho(U - Q). \tag{2}$$

Функция U непрерывна на S, так же как и Q, то же будем иметь и для p.

Давление остается, следовательно, непрерывным при переходе через поверхность S, ограничивающую вихри.

Другая форма этой теоремы. Видя важность этого результата, покажем, как можно связать его с классическими свойствами циркуляции. Без труда мы увидим, что мы дадим лишь другую интерпретацию тем же условиям, которыми мы уже пользовались.

Пусть AB дуга какой-нибудь кривой, рассматриваемой в жидкости в момент t. Пусть (u, v, w) скорость в точке M этой дуги. Следуя за частицей в ее движении, имеем, очевидно:

$$\frac{d}{dt}(u\delta x) = \frac{du}{dt}\delta x + u\delta u,$$

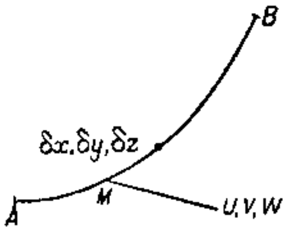

Рис. 55.

где δx, δy, δz означает элементарное перемещение на AMB и, следовательно, согласно (1):

$$\frac{d}{dt}(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \delta U - \frac{\delta p}{\rho} + u\delta u + v\delta v + w\delta w.$$

Следовательно, окончательно:

$$\frac{d}{dt}\int_A^B u\delta x + v\delta y + w\delta z = \left[-\frac{p}{\rho} + U + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right]_A^B.$$

Возьмем за A и B две бесконечно близкие друг к другу точки, с одной и другой стороны поверхности разрыва S. Скорости (u, v, w) везде непрерывны, интеграл $\int_A^B$ вдоль избранной кривой остается постоянным, когда линия перемещается как жидкая линия; тогда правая часть равенства равна нулю, а, следовательно, также левая; и так как мы предполагаем, что силовая функция непрерывна при переходе S, то оба значения p в A и B совпадают. Давление, следовательно, непрерывно.

Замечание. Могло бы показаться естественным отыскать доказательство этой теоремы о непрерывности давлений, основываясь на уравнениях Эйлера и на формулах Гельмгольца, которые дают скорости в функции вихрей. Небезинтересно наметить здесь соответствующее доказательство. Имеем, с одной стороны:

$$u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \ldots \tag{1}$$

и

$$P = \frac{1}{2\pi} \int\int\int_T \frac{\xi' d\tau'}{r}, \quad \ldots,$$

так как жидкость неограниченна.

С другой стороны, P, Q, R, являясь объемными потенциалами, непрерывны со своими первыми производными при переходе S. Чтобы выяснить разрывы вторых производных напишем:

$$2\pi \frac{\partial P}{\partial x} = \int\int\int_T \frac{x' - x}{r^3} \xi' d\tau' = -\int\int_S \frac{\xi'\alpha'}{r} d\sigma' + \int\int\int_T \frac{1}{r} \frac{\partial \xi'}{\partial x'} d\tau',$$

где (α, β, γ) направляющие косинусы внешней нормали.

Разрывы вторых производных происходят, следовательно, единственно из-за разрывов производных от потенциалов простого слоя, например,

$$V = \int\int_S -\frac{\xi'\alpha'}{r} d\sigma'.$$

Но хорошо известно, что только нормальная производная такого потенциала V разрывна и, как известно, имеем (см. Goursat, Analyse, III, p. 281):

$$\frac{dV_i}{dn_e} - \frac{dV_e}{dn_e} = 4\pi(-\xi\alpha).$$

Будем иметь, следовательно:

$$\delta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_e = \frac{1}{2\pi}[-4\pi\xi\alpha]\,\alpha,$$

т. е.

$$\delta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2\xi\alpha^2,$$

и также:

$$\delta \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -2\xi\alpha\beta,$$

$$\delta \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = -2\xi\alpha\gamma$$

и аналогичные формулы для Q и R.

Отсюда и из формул (1) ясно, что получается:

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \delta\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \delta\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} = 2\alpha(\gamma\eta - \beta\zeta),$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\beta(\gamma\eta - \beta\zeta),$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2\gamma(\gamma\eta - \beta\zeta)$$

. . . .

и, следовательно, так как u, v, w непрерывны:

$$\delta\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2(u\alpha + v\beta + w\gamma)(\gamma\eta - \beta\zeta).$$

Выясним теперь разрыв $\delta\frac{\partial u}{\partial t}$ и для этого рассмотрим производную $\frac{\partial P}{\partial t}$ и аналогичные, полученные в предположении, что x, y, z постоянные. Поверхность S, ограничивающая T, будет тогда двигаться, и мы получим:

$$2\pi\frac{\partial P}{\partial t} = \iiint\limits_T \frac{\frac{\partial \xi'}{\partial t}\,d\tau'}{r} + \iint\limits_S \frac{\xi' V_{n_e}\,d\sigma}{r},$$

где V_{n_e} нормальная скорость с внешней стороны в точке поверхности S

$$(V_{n_e} = \alpha u + \beta v + \gamma w).$$

Согласно (1), видим непосредственно, что

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 2\zeta V_{n_e}\beta - 2\eta V_{n_e}\gamma = 2(\beta\zeta - \gamma\eta)(\alpha u + \beta v + \gamma w),$$

и, следовательно, получаем:

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

т. е., что ускорение непрерывно и, следовательно, также $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, что приводит к тому же результату, что и выше.

Однако, это доказательство, кроме длинноты, имеет некоторое неудобство. Оно опирается, в самом деле, на теорему о разрывности производных потенциала простого слоя. Но, как известно, доказательство этой теоремы предполагает различные гипотезы относительно природы поверхности S и вида ее уравнения в соседстве с рассматриваемой точкой. Мы получаем, таким образом, менее общее доказательство теоремы, которую мы имели в виду для давлений.

ГЛАВА XI

ОБ ОСНОВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Общие понятия. Доказательство основной теоремы, изложенной в предшествующей главе, требует применения определенных неравенств, касающихся потенциалов и уточняющих характер их непрерывности. Так как эти неравенства будут играть существенную роль, мы посвятим настоящую главу их установлению. Теоремы, которые мы изложим, принадлежат A. Korn'у [Sur les équations de l'Élasticité (Annales de l'École Normale supérieure, 1907, p. 9] и Lichtenstein'у [Ueber einige Hilfsätze der Potentialtheorie (Math. Zeitschrift, B. 23, 1925, p. 72)]. С целью упростить язык и запись, мы сейчас сделаем ряд соглашений.

Соглашения и обозначения. Пусть имеем функцию f, зависящую от положения точки M [координаты которой, смотря по удобству, мы назовем (x, y, z) или (a, b, c)]; две точки M_1 и M_2 взяты в данной области на конечном расстоянии; предположим, что функция f удовлетворяет неравенству вида:

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| \leqslant N d_{12}^{\lambda},$$

где d_{12} представляет расстояние между точками M_1, M_2, λ—заданное положительное число, лежащее между 0 и 1, и N некоторая постоянная. Мы тогда скажем, что функция f удовлетворяет условию $(C_0|N)$.

Если функция f, в предположении, что она имеет производные, удовлетворяет совокупности условий:

$$|f| \leqslant \Omega_0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant \Omega_0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant \Omega_0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \leqslant \Omega_0,$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2\right| < \Omega_0 d_{12}^{\lambda}, \ \ldots \left|\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_2\right| \leqslant \Omega_0 d_{12}^{\lambda},$$

мы скажем, что f удовлетворяет условиям $(C_1|\Omega_0)$, причем индекс 1, присоединенный к C, указывает, что неравенства касаются функции и ее первых производных, а число Ω_0 указывает пределы, фигурирующие в правых частях неравенства. Также, если f удовлетворяет группе неравенств:

$$|f| \leqq \Omega, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqq \Omega, \ \ldots \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \leqq \Omega, \ \ldots$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_2\right| \leqq \Omega d_{12}^{\lambda}, \ \ldots \left|\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_2\right| \leqslant \Omega d_{12}^{\lambda},$$

где число условий, касающихся вторых производных, равно шести, мы скажем, что функция f удовлетворяет условиям $(C_2|_2)$, причем индекс 2 указывает, что эти условия распространяются на функцию и ее производные до второго порядка включительно. Таким же образом определяются условия $(C_3|_2)$ и так далее.

Совершенно понятно, что существование условий $(C_n|_2)$ влечет существование условий меньшего индекса, при соответствующих значениях коэфициентов, фигурирующих в правых частях.

Это следует с очевидностью из следующего замечания, для которого достаточно рассмотреть функцию лишь одного переменного.

Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $(C_1|_2)$ в ограниченном пространстве, а именно:

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2\right|\leqslant \Omega d_{12}^{\lambda},$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ остается тогда ограниченной; это одно из условий $\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant\Omega\right]$ из числа предположенных допущениями; это следует также (при коэфициенте Ω', поставленном на место Ω) из самого предыдущего неравенства, которое дает, в предположении, что x_1 постоянно:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_1+\Omega D^{\lambda}=A,$$

где D обозначает максимальное расстояние между двумя точками рассматриваемого ограниченного множества. Имеем далее:

$$f_1-f_2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_3(x_1-x_2)$$

и, следовательно,

$$|f_1-f_2|\leqslant Ad_{12}.$$

Следовательно:

$$|f_1-f_2|\leqslant Ad_{12}^{\lambda},$$

если d_{12} меньше 1; и в противном случае, так как

$$Ad_{12}=Ad_{12}^{\lambda}d_{12}^{1-\lambda},$$

можно еще написать:

$$|f_1-f_2|\leqslant(AD^{1-\lambda})\,d_{12}^{\lambda}=A'd_{12}^{\lambda},$$

f удовлетворяет, следовательно, условию $(C_0|A')$.

Приступим теперь к доказательствам теорем, которые мы имеем в виду.

Теоремы Корна. Мы начнем с установления предварительной леммы.

Лемма. Пусть T некоторый объем, ограниченный одной или несколькими поверхностями. Мы будем вести рассуждения для одной поверхности S. Пусть n_e (α, β, γ) внешняя нормаль к S. Обозначим через μ постоянную и через r расстояние между двумя точками (x, y, z) и (x', y', z'); если тройной интеграл будет иметь смысл, то имеем формулу:

$$\iiint_T \frac{d\tau'}{r^\mu} = \frac{1}{3-\mu} \iint_S \frac{\cos(rn_e)}{r^{\mu-1}}\, d\sigma'.$$

В самом деле, по определению имеем:

$$\cos(rn_e) = \alpha\frac{x'-x}{r} + \beta\frac{y'-y}{r} + \gamma\frac{z'-z}{r}.$$

Рассмотрим поверхностный интеграл:

$$\iint_S \frac{\cos rn_e}{r^{\mu-1}}\, d\sigma' = \iint_S \frac{\alpha(x'-x)+\beta(y'-y)+\gamma(z'-z)}{r^\mu}\, d\sigma'.$$

Из теоремы о расхождении известно, что это количество равно

$$\iiint_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{x'-x}{r^\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{y'-y}{r^\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z'-z}{r^\mu}\right] \right\} d\tau',$$

т. е.

$$\iiint_T \left\{ \frac{1}{r^\mu} - \mu\frac{x'-x}{r^{\mu+2}} + \ldots \right\} d\tau' = \iiint_T \frac{3-\mu}{r^\mu}\, d\tau',$$

а это и требовалось доказать.

Теорема I. Имеем потенциал, распространенный на конечный объем T (и целиком на конечном расстоянии)

$$U = \iiint_T \frac{\xi' d\tau'}{r},$$

где плотность ξ' (в точке x', y', z') предполагается ограниченной и интегрируемой. Известно, что U обладает непрерывными первыми производными. Обозначая через d_{12} расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ области T и через λ некоторую вещественную постоянную, взятую между 0 и 1, будем иметь неравенства:

$$\left| \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 \right| \leqslant A \times (\max|\xi|) \times d^\lambda_{12}$$

и аналогичные, где A надлежащая постоянная, которая зависит только от вида поверхности S и от λ. Иначе говоря, $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ удовлетворяет условию $(C_0|N)$.

В самом деле, построим сферу Σ, имеющую центр в O, середине отрезка M_1M_2 и радиуса d_{12} (рис. 56). Пусть T' внутренний объем этой сферы, Σ ее поверхность. В изучаемых интегралах мы разобьем объем T на T' и $T'' = T - T'$ и будем рассуждать, предполагая, что T' целиком внутри T; в противном случае, некоторые части интеграла по T' или Σ будут отсутствовать, что только усилит наши неравенства.

Производная $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \dfrac{x' - x}{r^3}$ по модулю меньше $\dfrac{1}{r^2}$, и ясно, что мы можем написать:

$$\left| \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_1^{(T')} - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_2^{(T')} \right| \leqslant 2 \max |\xi| \int\int\int_{T'} \frac{d\tau'}{r^2},$$

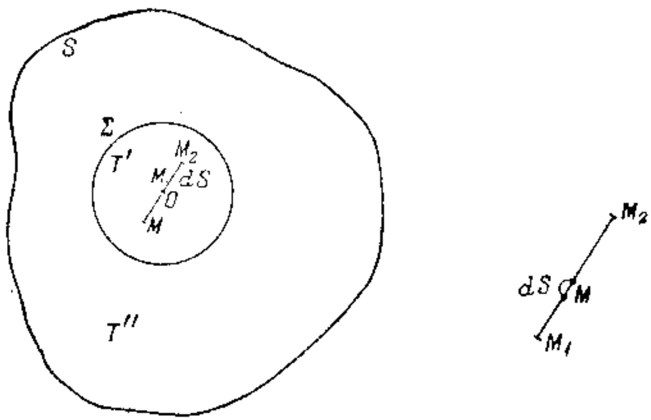

Рис. 56.

где r в правой части означает или расстояние подвижной точки M от точки M_1 или от M_2, что, очевидно, в обоих случаях дает одинаковый результат. Беря за r расстояние M_1M и переходя к полярным координатам r, θ, φ с центром в M_1, будем иметь:

$$\int\int\int_{T'} \frac{d\tau'}{r^2} = \int\int\int_{T'} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi < (\text{конечное число}) \times d_{12},$$

так как в объеме T', r меняется от 0 до $\dfrac{3}{2} d_{12}$.

Следовательно, часть, происходящая от T' в рассматриваемом выражении, дает неравенство:

$$\left| \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_1^{(T')} - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_2^{(T')} \right| \leqslant (\text{конечное число}) \times (\max |\xi|) \times d_{12}. \quad (1)$$

Перейдем к той части, которая происходит от T''. Очевидно, можем написать:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2^{T''} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1^{T''} = \int\limits_{M_1}^{M_2} dS \iiint\limits_{T''} \xi' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial S} d\tau',$$

где dS элемент прямой M_1M_2 (точка M здесь внешняя к объему T'', диференцирование под знаком суммы не вызывает опасений). И так как вторая производная $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial S}$ (линейная и однородная комбинация из производных $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}$) имеет порядок $\dfrac{1}{r^3}$ (и определенно меньше $\dfrac{6}{r^3}$), будем иметь:

$$\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2\right|^{T''} \leqslant (\text{конечн. пост.})\, d_{12} \times (\max|\xi|) \times$$
$$\times \left(\max \iiint\limits_{T''} \frac{d\tau'}{r^3} \text{ на } M_1, M_2\right). \tag{2}$$

Здесь мы должны опереться на предыдущую лемму. Мы, очевидно имеем, прежде всего:

$$\iiint\limits_{T''} \frac{d\tau'}{r^3} = \iiint\limits_{T''} \frac{1}{r^{1-\lambda}} \frac{d\tau'}{r^{2+\lambda}},$$

где λ число, заключенное между 0 и 1; и так как в T'' расстояние r остается больше $\dfrac{d_{12}}{2}$, когда точка $M(x, y, z)$ есть какая-нибудь точка отрезка M_1M_2, будем иметь

$$\frac{1}{r^{1-\lambda}} \leqslant \frac{2^{1-\lambda}}{d_{12}^{\,1-\lambda}};$$

следовательно

$$\iiint\limits_{T''} \frac{d\tau'}{r^3} \leqslant \frac{2^{1-\lambda}}{d_{12}^{\,1-\lambda}} \iiint\limits_{T''} \frac{d\tau'}{r^{2+\lambda}},$$

и в силу нашей леммы,

$$\left.\begin{aligned}&\leqslant \frac{2^{1-\lambda}}{d_{12}^{\ 1-\lambda}} \frac{1}{1-\lambda}\left\{\iint\limits_{S} \frac{\cos rn_e}{r^{1+\lambda}}\,d\sigma - \iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^{1+\lambda}}\,d\sigma\right\},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\leqslant (\text{конечн. пост.}) \times d_{12}^{\ \lambda-1}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как на всей S и $\sum$ величина r остается меньше некоторого заданного конечного количества R, то тогда имеем:

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^{1+\lambda}}\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} d\omega \cdot r^{1-\lambda},$$

где $d\omega$ — телесный угол, под которым виден из точки M элемент $d\sigma$, следовательно:

$$\left|\iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^{1+\lambda}}\,d\sigma\right| \leqslant 4\pi \times R^{1-\lambda} = \text{конечному количеству}.$$

Такое же совсем элементарное рассуждение распространяется на интеграл по S, если только сумма абсолютных значений телесных углов, под которыми видны все ее элементы, остается конечной.

Из (2) и (3) следует, что

$$\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2\right|^{T''} \leqslant \text{конечн. пост.} \times \max|\xi| \times d_{12}^{\ \lambda}, \tag{4}$$

и, следовательно, складывая (1) и (4):

$$\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2\right| \leqslant A \times \max|\xi|\, d_{12}^{\ \lambda},$$

что и требовалось доказать.

Можно тогда сказать, что U удовлетворяет условиям $(C_1|P)$ при подходящей постоянной P.

Теорема II. Если в потенциале $U = \iiint\limits_{T} \frac{\xi'\,d\tau'}{r}$ плотность (конечная) удовлетворяет неравенству $(C_0|B)$, т. е. неравенству вида:

$$|\xi(x_1, y_1, z_1) - \xi(x_2, y_2, z_2)| \leqslant B d_{12}^{\ \lambda}, \tag{5}$$

где B конечное количество и λ постоянная, заключенная между 0 и 1, то тогда вторые производные U удовлетворяют неравенству

$$\left|\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_2\right| \leqslant (c_1 B + c_2 \max|\xi|) \times d_{12}^{\ \lambda} \tag{6}$$

и аналогичным, где c_1 и c_2 две конечные постоянные, зависящие лишь от вида поверхности S и числа λ.

Для доказательства мы, как и прежде, разделим объем на две части с помощью той же сферы $\sum$ и положим кроме того:

$$U = \iiint_T \xi_1 \frac{d\tau'}{r} + \iiint_T (\xi' - \xi_1) \frac{d\tau'}{r} = U_1 + U', \tag{7}$$

где ξ_1 есть значение ξ в точке M_1.

Рассмотрим сперва второй интеграл U' и в нем часть, соответствующую области T'. Очевидно, будем иметь:

$$\Delta_1 = \left|\left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}\right)_2\right|^{T'} \leqslant \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iiint_{T'} (\xi' - \xi_1)\frac{d\tau'}{r}\right|_{(1)} +$$

$$+\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iiint_{T'} (\xi' - \xi_2)\frac{d\tau'}{r}\right|_{(2)} + |\xi_2 - \xi_1|\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iiint_{T'} \frac{d\tau'}{r}\right|_2 =$$

$$= P_1 + P_2 + P_3, \tag{8}$$

где через P_1, P_2 и P_3 обозначены, последовательно, три члена в правой части. Индексы 1 и 2 при знаках модуля указывают, что расстояния отсчитываются от точки M_1 или M_2.

Итак в P_1 r означает расстояние M_1M', и условие (5) позволяет нам утверждать, что

$$|\xi' - \xi_1| \leqslant Br^{\lambda},$$

и так как $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$ порядка $\dfrac{1}{r^3}$ и имеем даже $\left|\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right| < \dfrac{2}{r^3}$, то напишем:

$$P_1 \leqslant 2B \iiint_{T'} \frac{d\tau'}{r^{3-\lambda}}.$$

Первоначальная лемма позволяет преобразовать это неравенство:

$$P_1 \leqslant \frac{2B}{\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\cos rn_e\, d\sigma'}{r^{2-\lambda}}.$$

Но на $\sum$ имеем $r \leqslant \frac{3}{2} d_{12}$, следовательно ($\cos rn_e$ сохраняет постоянный знак):

$$P_1 \leqslant \frac{2B}{\lambda}\left(\frac{3}{2} d_{12}\right)^{\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^2}\, d\sigma$$

Интеграл этот представляет телесный угол, под которым видна сфера $\sum$ из точки M_1, он равен, следовательно 4π. Таким образом, окончательно:

$$P_1 \leqslant H_1 B d_{12}^{\lambda},$$

где H_1 означает постоянную; имеем также:

$$P_2 \leqslant H_2 B d_{12}^{\lambda}$$

(надо только поменять роли двух точек M_1 и M_2). Наконец, оценка члена P_3 не представляет никаких трудностей, так как

$$|\xi_2 - \xi_1| \leqslant B d_{12}^{\lambda}$$

и вторая производная, фигурирующая в нем, остается, как известно, конечной (она не будет иметь вид $\int\int\limits_{T'}\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, d\tau'$, но ее величина остается конечной; см. Appell, Mécanique, t. III, p. 75). Следовательно, P_3 удовлетворит условию, аналогичному предыдущим, и мы будем иметь:

$$\Delta_1 \leqslant H B d_{12}^{\lambda}. \tag{9}$$

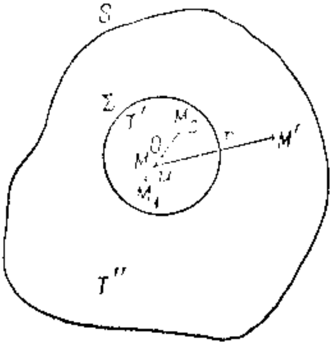

Рис. 57.

Перейдем теперь к той части U', которая соответствует области T''. Можно положить, как и при доказательстве теоремы I,

$$\Delta_2 = \left| \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2}\right)_2 \right|^{T''} = \left| \int\limits_{M_1}^{M_2} dS \frac{\partial}{\partial S} \int\int\limits_{T''}\int (\xi' - \xi_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, d\tau' \right|, \tag{10}$$

обозначая опять через dS линейный элемент на M_1M_2. Переход $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ под знаком интеграла здесь допустим, так как точка (x, y, z), расположенная на M_1M_2, находится вне объема T''. Мы сможем, следовательно, также написать:

$$\Delta_2 \leqslant \left| \int\limits_{M_1}^{M_2} \int\int\limits_{T''}\int [\,|\xi' - \xi| + |\xi - \xi_1|\,] \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^2 dS}\, d\tau' dS \right|,$$

или, обозначая через u расстояние M_1M и используя предположение (5):

$$\Delta_2 \leqslant \left| \int\limits_{M_1}^{M_2} \int\int\limits_{T''}\int (Br^{\lambda} + Bu^{\lambda}) \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^2 \partial S}\, d\tau' dS \right|,$$

и, следовательно, так как $\dfrac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^2 \partial S}$ величина порядка $\frac{1}{r^4}$ и u меняется от 0 до d_{12}, то

$$\Delta_2 < (\text{конечное число}) \cdot B \left\{ \int_{M_1}^{M_2} \iiint_{T''} \frac{d\tau'}{r^{4-\lambda}}\, dS + \right.$$

$$\left. + \int_{M_1}^{M_2} d_{12}{}^{\lambda} \iiint_{T''} \frac{d\tau'}{r^4}\, dS \right\}. \qquad (11)$$

Но в силу леммы, мы имеем:

$$\iiint_{T''} \frac{d\tau'}{r^4} = -\iint_{S+\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^3}\, d\sigma',$$

и

$$\iiint_{T''} \frac{d\tau'}{r^{4-\lambda}} = \frac{1}{\lambda - 1} \iint_{S+\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^{3-\lambda}}\, d\sigma'$$

и, например, так как на $\sum$ r все время $\geqslant \frac{d_{12}}{2}$, то

$$\iint_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^3}\, d\sigma' < \frac{2}{d_{12}} \iint_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^2}\, d\sigma' = \frac{8\pi}{d_{12}},$$

и также

$$\iint_{\Sigma} \frac{\cos rn_e}{r^{3-\lambda}}\, d\sigma' < \frac{8\pi}{d_{12}{}^{1-\lambda}},$$

откуда легко получаем:

$$\iiint_{T''} \frac{d\tau'}{r^{4-\lambda}} \leqslant (\text{конечное число}) \cdot d_{12}{}^{\lambda-1},$$

$$\iiint_{T''} \frac{d\tau'}{r^4} \leqslant (\text{конечное число}) \cdot d_{12}{}^{-1}.$$

Внося в (11) и замечая, что интегрирование по S введет множитель $2d_{12}$, мы видим, что окончательно

$$\Delta_2 < (\text{конечная постоянная}) \cdot B d_{12}{}^{\lambda}. \qquad (12)$$

Остается, наконец, рассмотреть количество

$$U_1 = \xi_1 \iiint_{T} \frac{d\tau'}{r}, \qquad (13)$$

входящее первым слагаемым в U (формула 7); здесь мы имеем:

$$\Delta_3 = \left| \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right)_2 \right| \leqslant (\text{конечное число}) \cdot \max |\xi| \cdot d_{12}^{\lambda}.$$

Чтобы это доказать, выразим $\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}$ через интеграл по поверхности. Непосредственно получаем:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} \iiint\limits_T \frac{d\tau'}{r} = -\xi_1 \iiint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau' =$$

$$= -\xi_1 \iint\limits_S \frac{\cos n_e x}{r} d\sigma',$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\xi_1 \iint\limits_S \cos n_e x \frac{x' - x}{r^3} d\sigma'.$$

Если теперь образовать разность $\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right)_2$, то, как видно, там имеется выражение:

$$\frac{x' - x_1}{r_1^3} - \frac{x' - x_2}{r_2^3},$$

которое обращается в нуль как d_{12}^{λ} при M_2, близком к M_1. Если, следовательно, мы образуем отношение этого выражения к d_{12}^{λ}, то это отношение будет оставаться конечным и ограниченным на S, и, следовательно, ясно, что мы сможем написать

$$\Delta_3 < (\text{конечное число}) \cdot \max |\xi| \cdot d_{12}^{\lambda}. \qquad (14)$$

Из формул (9), (12) и (14), касающихся Δ_1, Δ_2 и Δ_3 получаем, очевидно, путем сложения теорему, которую должны доказать. Тогда можно сказать, что U удовлетворяет условию $(C_2 | P)$ при соответствующем значении P.

Следствие. Присоединяя к гипотезам теоремы II аналогичные гипотезы, касающиеся первых производных ξ, именно:

$$\left| \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_2 \right| < A \cdot d_{12}^{\lambda}, \quad \ldots$$

т. е., если функция ξ удовлетворяет не только условиям $(C_0 | B)$, но и $(C_1 | A)$, можно доказать в точности, как и выше, что потенциал U удовлетворяет неравенствам, аналогичным (6), но касающимся на этот раз третьих производных. U удовлетворяет тогда условиям, которые можно обозначить $(C_3 \mid P)$.

Неравенства Лихтенштейна. Теоремы Корна дают нам ценные неравенства, касающиеся потенциалов, рассматриваемых, главным образом, как функции точки, в которой вычисляются эти потенциалы. Как показал Лихтенштейн (loc. cit.) другого рода неравенства будут играть существенную роль, а именно те, где область интегрирования является переменной: в частности представляет интерес характер зависимости потенциала от изменения области интегрирования. Мы здесь получим результаты, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Рассмотрим, в качестве исходного пункта, область T_0, в которой переменная точка обозначена через (a, b, c); пусть S_0 поверхность, ограничивающая эту область. Поставим в соответствие этой области две другие T_{l-1} и T_l, отвечающие T_0 однозначным образом и имеющие тот же топологический характер и ограниченные поверхностями S_{l-1} и S_l. Пусть $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$, (x_l, y_l, z_l) точки функции a, b, c, соответствующие точке (a, b, c), принадлежащей T_0+S_0.

Предположим, что разности $x_{l-1}-a$, $y_{l-1}-b$, $z_{l-1}-c$ и также x_l-a, y_l-b, z_l-c удовлетворяют условиям $(C_1 \mid \Omega)$ и что разности x_l-x_{l-1}, y_l-y_{l-1}, z_l-z_{l-1} удовлетворяют условиям $(C_2 \mid \Omega)$ при $\Omega \leqslant \frac{1}{2}\Omega_0$; постоянная λ, входящая во все формулы, есть как и раньше, постоянный показатель, выбранный между 0 и 1.

Мы будем обозначать во всем последующем через r расстояние между двумя точками (a, b, c), (a', b', c') первой области, через r_{l-1} и r_l расстояние между двумя точками $(x_{l-1}, \ldots)$, $(x'_{l-1}, \ldots)$ и $(x_l, \ldots)$, $(x_l', \ldots)$, соответствующими первым в пространствах индексов $l-1$ и l.

Положив это, рассмотрим потенциалы притяжения:

$$\left.\begin{aligned} U_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) &= \iiint\limits_{T_{l-1}} \frac{\xi'_{l-1}\, d\tau'_{l-1}}{r_{l-1}}, \\ U_l(x_l, y_l, z_l) &= \iiint\limits_{T_l} \frac{\xi_l'\, d\tau_l'}{r_l} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где плотности ξ_{l-1}, ξ_l являются функциями, полученными из функции ξ_0 (конечной), при помощи формул преобразования, переводящих область T_0 в две другие.

Мы допустим, что плотность ξ_0 удовлетворяет неравенству $(C_0 \mid N)$ и, следовательно, согласно сделанным уже предположениям, ξ_{l-1} и ξ_l удовлетворяют аналогичным неравенствам. При этих условиях мы докажем, что потенциалы U_{l-1} и U_l удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left.\begin{array}{c} |U_l - U_{l-1}| \leqslant A\Omega, \quad \left|\frac{\partial U_l}{\partial x_l} - \frac{\partial U_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right| \leqslant A\Omega, \ldots \\ \left|\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 U_{l-1}}{\partial x^2_{l-1}}\right| \leqslant A\Omega, \ldots \\ \left|\left(\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 U_{l-1}}{\partial x^2_{l-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 U^2_{l-1}}{\partial x^2_{l-1}}\right)_2\right| \leqslant A\Omega d_{12}^{\lambda}, \ldots \end{array}\right\} \tag{2}$$

где A означает соответствующую постоянную, зависящую только от рассматриваемых областей и, конечно, от функции ξ_0. Ради краткости мы будем обозначать условия (2) через $(H_2 | A\Omega)$. Очевидна их аналогия с условиями $(C_2 | A\Omega)$, от которых они отличаются тем, что диференцирования в левых частях касаются двух групп переменных $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ и (x_l, y_l, z_l) вместо одной.

Так как плотности ξ удовлетворяют условиям $(C_0 | N)$, то в силу теоремы Корна для V_l выполняются условия $(C_2 | P)$ и тоже для U_{l-1}. Следовательно, можно получить желаемые неравенства (2) или $(H_2 | A\Omega)$, и именно последнее простой записью аналогичных неравенств, касающихся разностей:

$$\left(\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l^2}\right)_2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^2 U_{l-1}}{\partial x^2_{l-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 U_{l-1}}{\partial x^2_{l-1}}\right)_2$$

и элементарной комбинацией этих неравенств, после замены двух коэфициентов правых частей наибольшим из них. Таким образом, можно более прямым путем привести эту теорему к доказательству Корна, при помощи изящного способа, принадлежащего Лихтенштейну.

Для этого мы рассмотрим непрерывную последовательность областей $T_\varepsilon + S_\varepsilon$, определенных формулами:

$$x_\varepsilon = x_{l-1} + \frac{\varepsilon}{\Omega}(x_l - x_{l-1}), \ \ldots, \tag{3}$$

где параметр ε меняется от 0 до Ω; мы исходим от области $(T_{l-1} + S_{l-1})$ для $\varepsilon = 0$ и кончаем на области $(T_l + S_l)$ для $\varepsilon = \Omega$. Мы назовем через ξ_ε значение ξ, определенное начиная с ξ_0 (или с ξ_{l-1}), по предыдущим формулам, и мы рассмотрим потенциал

$$U_\varepsilon = \iiint\limits_{T_\varepsilon} \xi_\varepsilon' \frac{d\tau_\varepsilon'}{r_\varepsilon}, \tag{4}$$

где смысл обозначений очевиден. Совершенно очевидно, что так как по (3) $(x_{l-1} - 1) \ldots$ и $(x_l - a)$ удовлетворяют неравенствам $(C_1 | \Omega_0)$, то мы будем иметь для $(x_\varepsilon - a)$ неравенства $(C_1 \mid 2\Omega_0)$, записывая просто в правых частях $2\Omega_0$ вместо Ω_0. И, очевидно, U_ε будет являться функцией от ε аналитической и регулярной для $0 < \varepsilon \leqslant \Omega_0$. Имея это в виду, рассмотрим, например, производные:

$$\frac{\partial U_{l-1}}{\partial x_{l-1}} = \iiint\limits_{T_{l-1}} \xi'_{l-1} \frac{\partial}{\partial x_{l-1}} \left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) d\tau'_{l-1},$$

$$\frac{\partial U_l}{\partial x_l} = \iiint\limits_{T_l} \xi'_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{r_l}\right) d\tau_l$$

и введем аналогичное выражение

$$V_\varepsilon = \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon} = \iiint\limits_{T_\varepsilon} \xi'_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} \left(\frac{1}{r_\varepsilon}\right) d\tau'_\varepsilon,$$

которое мы можем привести к интегралу по объему T_0, записав

$$V_\varepsilon = \iiint\limits_{T_0} \xi_0' \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} \left(\frac{1}{r_\varepsilon}\right) \frac{D(x_\varepsilon', y_\varepsilon', z_\varepsilon')}{D(a', b', c')} d\tau_0'.$$

Затем будем иметь, и это, в общем, путь, которым мы шли при доказательстве неравенства Корна:

$$U_l - U_{l-1} = \int\limits_0^\Omega \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \tag{5}$$

$$\frac{\partial U_l}{\partial x_l} - \frac{\partial U_{l-1}}{\partial x_{l-1}} = \int\limits_0^\Omega \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \tag{5'}$$

Здесь прибегнем к новому приему. Пусть Γ_0 окружность радиуса Ω_0 с центром в начале координат, в плоскости переменной ε. По теореме Коши, мы имеем в Γ_0 и a fortiori для $|\varepsilon| \leqslant \Omega \leqslant \frac{\Omega_0}{2}$

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{d\delta}{(\delta - \varepsilon)^2} U_\delta, \tag{6}$$

полагая $\delta = \Omega_0 e^{i\alpha}$, $0 < \alpha < 2\pi$ и определяя U_δ так же, как и U_ε [уравнение (4)]. В действительности, области $T_\delta + S_\delta$, введенные таким образом, вещественны лишь при $\alpha = 0$ или π, но мы будем всегда иметь неравенства $(C_1 \mid \Omega_0)$ для всех этих областей. Для всякой точки (a, b, c) в T_0 и S_0 и, следовательно, во всякой точке $(x_\delta, y_\delta, z_\delta)$

в $T_\delta + S_\delta$, U_δ будет обладать конечными частными производными первого порядка, $\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}$, … В силу условий $(C_0 | N)$, выполненных для ξ_0 и в силу теорем Корна, имеем одновременно для U_δ неравенства $(C_1 | c)$, т. е. неравенства вида:

$$\left.\begin{aligned} &|U_\delta| \leqslant c, \qquad \left|\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right| \leqslant c, \ \ldots \\ &\left|\left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right)_1 - \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_\delta}\right)_2\right| \leqslant c d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Факт, что δ мнимое, не меняет существа рассуждения, приведшего к теореме Корна.

Из (5) теперь следует:

$$|U_l - U_{l-1}| \leqslant \Omega \cdot \left(\text{mod. maximum } \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right).$$

Но из (6), принимая во внимание, что $|U_\delta| \leqslant c$ и что неравенства $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\Omega_0$ дают $(\delta - \varepsilon) \geqslant \frac{\Omega_0}{2}$, мы получаем:

$$\text{mod. max} \cdot \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \leqslant \frac{1}{2\pi} c 2\pi \Omega_0 \frac{4}{\Omega_0^2} = \frac{4c}{\Omega_0}.$$

Следовательно, получаем:

$$|U_l - U_{l-1}| \leqslant \frac{4c}{\Omega_0} \Omega = A'\Omega. \tag{8}$$

Рассуждая с V_ε и с уравнением (5′) вместо U_ε и (5), мы получим:

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2i\pi} \int_{T_0} \frac{d\delta}{(\delta - \varepsilon)^2} V_\delta, \tag{9}$$

и мы придем вместо (8) к неравенству:

$$\left|\frac{\partial U_l}{\partial x_l} - \frac{\partial U_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right| \leqslant A''\Omega, \tag{10}$$

где A'' новая постоянная.

Чтобы получить то из неравенств (2), которое касается

$$\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 U_{l-1}}{\partial x_{l-1}^2},$$

достаточно рассмотреть величину $W_\delta = \frac{\partial V_\delta}{\partial x_\delta}$ (вторую производную потенциала U_δ, с предосторожностью в применении для объема внутри) для $\delta=\Omega_0 e^{i\alpha}$ и определить его предел, после чего рассуждение заканчивается таким же образом, как и выше. Но теперь весьма легко распространить классические свойства объемного потенциала без малейшего изменения на потенциал (мнимый) U_ε и его производные.

Из существования формулы:

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{d\delta}{(\delta-\varepsilon)^2}\,V_\delta$$

следует аналогичная формула для $\dfrac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon \partial \varepsilon}$, V_ε и V_δ могут быть заменены W_ε и W_δ. Тогда вторые неравенства (7) и равенство, аналогичное (5), дадут:

$$\left|\frac{\partial V_l}{\partial x_l}-\frac{\partial V_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right|=\left|\int_0^\Omega \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_\varepsilon \partial \varepsilon}\,d\varepsilon\right|\leqslant A'''\Omega,$$

и, естественно, будем иметь совершенно аналогичные неравенства для производных по y_l и z_l. Наконец, комбинируя, как уже говорилось, неравенства, полученные для V_l и V_{l-1} с первой теоремой Корна, получим искомое неравенство вида:

$$\left|\left(\frac{\partial V_l}{\partial x_l}-\frac{\partial V_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)_1-\left(\frac{\partial V_l}{\partial x_l}-\frac{\partial V_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)_2\right|\leqslant A^{\mathrm{IV}}\Omega d_{12}^{\lambda}.$$

Беря за A наибольшее из чисел A', A'', A''', A^{IV} мы очевидно сможем получить все требуемые неравенства. И мы легко увидим, что все эти неравенства будут одновременно выполняться для всех ограниченных функций ξ_0, удовлетворяющих неравенствам $(C_0 \mid N)$ и для всех функций $(x_{l-1}, \ldots, x_l, \ldots)$, удовлетворяющих неравенствам $(C_1 \mid \Omega_0)$ и $(C_2 \mid \Omega)$.

Наконец, мы предполагали, что ξ_0, ξ_{l-1}, ξ_l — функции, определенные тем фактом, что две последние принимают те же значения, что ξ_0 в соответствующих точках. Легко заметить, что если плотность ξ меняется при переходе от T_{l-1} и T_l, то это не повлечет никаких специальных затруднений.

Добавим далее, что если предположить гипотезы, касающиеся $(x_{l-1}, \ldots, x_l, \ldots)$, более распространенными, примененными ко вторым производным, допуская, что функции $(x_{l-1}-a), \ldots, (x_l-a)$ удовлетворяют условиям $(C_2 \mid \Omega_0)$ и что кроме того плотность ξ_0 удовлетворяет условию $(C_1 \mid N)$, то будем иметь тогда кроме неравенств (2) аналогичные неравенства для третьих производных потенциала U, которые мы все в совокупности обозначим через $(H_3 \mid A\Omega)$.

ГЛАВА XII

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ЛИХТЕНШТЕЙНА

Доказательство теоремы. Мы теперь сможем приступить к доказательству общей теоремы L. Lichtenstein'а (Math. Zeitschrift, 1925, p. 89), с которой мы уже встречались в главе X и общий план доказательства которой мы сейчас изложим в главных чертах, отсылая за подробностями к детальному мемуару ученого геометра.

Мы знаем, что все сводится к доказательству, — при объясненных уже обозначениях, — существования трех функций:

$$x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t),$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$x(a, b, c, t_0) = a, \quad y(a, b, c, t_0) = b, \quad z(a, b, c, t_0) = c, \tag{1}$$

внутри объема T_0 и удовлетворяющих следующим неопределенным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iiint_T \frac{\eta' d\tau'}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iiint_T \frac{\zeta' d\tau'}{r}, \right. \\ y &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где T означает объем, соответствующий объему T_0, в момент t. Функции ξ, η, ζ, с другой стороны, должны удовлетворять соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \\ \eta &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

По предположению мы допускаем, что функции ξ_0, η_0, ζ_0, как функции от a, b, c, удовлетворяют условиям $((C_1 | N)$ при показателе λ (между 0 и 1), произвольно заданном наперед. Имеем, следовательно, неравенство:

$$\left| \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial a} \right)_1 - \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial a} \right)_2 \right| \leqslant N d_{12}^{\lambda}, \tag{4}$$

и аналогичные, где d_{12} означает расстояние между двумя точками (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2).

Мы будем применять метод последовательных приближений.

Сперва, в виде первого приближения, мы определим функции x_1, y_1, z_1 по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = a + \int\limits_{t_0}^{t} dt \Big\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial c}\iiint\limits_{T_0}\frac{1}{r}\eta_0' d\tau_0' + \\ + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\iiint\limits_{T_0}\frac{1}{r}\zeta_0' d\tau_0' \Big\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Из сделанных предположений и теорем, составивших содержание предшествующей главы, следует, что эти функции (x_1, y_1, z_1) обладают непрерывными первыми и вторыми частными производными и что они удовлетворяют условиям $(C_2 \,|\, A)$ и также неравенствам $(C_3 \,|\, B)$. Области T_0 эти формулы (5) ставят в соответствие область T_1 и поверхности S_0 — поверхность S_1; мы тогда положим:

$$\left.\begin{aligned} x_2 = a + \int\limits_{t_0}^{t} dt \Big\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\iiint\limits_{T_1}\frac{1}{r_1}\eta_1' d\tau_1' + \\ + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\iiint\limits_{T_1}\frac{1}{r_1}\zeta_1' d\tau_1' \Big\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

при

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = \xi_0 \frac{\partial x_1}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x_1}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x_1}{\partial c} \\ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

На основании (5) ясно, что ξ_1, η_1, ζ_1, рассматриваемые как функции a, b, c, будут иметь первые производные непрерывные и удовлетворяющие неравенствам (4) и аналогичным. Функции x_2, y_2, z_2 и их первые и вторые производные будут непрерывными и эти функции будут обладать свойствами, аналогичными свойствам x_1, y_1, z_1. Области T_1 и поверхности S_1, а следовательно, и T_0 и S_0 формулами (6) будут поставлены в соответствие объем T_2 и ограничивающая его поверхность S_2. Очевидно, можно продолжать так дальше и дальше, и после l подобных операций, а затем после $l+1$-ой будем иметь:

$$x_l = a + \int\limits_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial R_{l-1}}{\partial y_{l-1}} - \frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}} \right); \;\dots \quad (8)$$

$$x_{l+1} = a + \int\limits_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial R_l}{\partial y_l} - \frac{\partial Q_l}{\partial z_l} \right); \;\dots \quad (9)$$

полагая

$$\left.\begin{array}{l} \xi_l = \xi_0 \dfrac{\partial x_l}{\partial a} + \eta_0 \dfrac{\partial x_l}{\partial b} + \zeta_0 \dfrac{\partial x_l}{\partial c} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \qquad (10)$$

и записав, ради краткости:

$$\left.\begin{array}{l} P_{l-1} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iiint\limits_{T_{l-1}} \dfrac{\xi'_{l-1} d\tau'_{l-1}}{r_{l-1}}, \ \ldots \\ P_l = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iiint\limits_{T_l} \dfrac{\xi_l' d\tau_l'}{r_l}, \ \ldots \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Имея это, мы сейчас вместе с Лихтенштейном установим следующую теорему:

Теорема. Если предположить, что для значения l индекса n, функции $x_n - a$, $y_n - b$, $z_n - c$ удовлетворяют всем условиям $(C_2 \mid \Omega_0)$ и что разности $x_n - x_{n-1}$, $y_n - y_{n-1}$, $z_n - z_{n-1}$ удовлетворяют условиям $(C_2 \mid \Omega)$, где

$$\Omega \leqslant \frac{1}{2} \Omega_0,$$

то подобные же неравенства будут иметь также место для $n = l + 1$.

В самом деле, прежде всего формулы (10) позволяют написать:

$$\xi_l - \xi_0 = \xi_0 \frac{\partial (x_l - a)}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial (x_l - a)}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial (x_l - a)}{\partial c} \qquad (12)$$

и, следовательно (в силу условий, допущенных для ξ_0, η_0, ζ_0 и $x_l - a$), $\xi_l - \xi_0$ будет удовлетворять условиям $(C_1 \mid A\Omega)$, при соответствующем значении постоянной A. Это следует из тождества следующего и аналогичных:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left[\xi_0 \frac{\partial (x_l - a)}{\partial a} \right] \right\}_1 - \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left[\xi_0 \frac{\partial (x_l - a)}{\partial a} \right] \right\}_2 =$$

$$= [(\xi_0)_1 - (\xi_0)_2] \left[\frac{\partial^2 (x_l - a)}{\partial a^2} \right]_1 + (\xi_0)_2 \left\{ \left[\frac{\partial^2 (x_l - a)}{\partial a^2} \right]_1 - \left[\frac{\partial^2 (x_l - a)}{\partial a^2} \right]_2 \right\} +$$

$$+ \left\{ \left[\frac{\partial (x_l - a)}{\partial a} \right]_1 - \left[\frac{\partial (x_l - a)}{\partial a} \right]_2 \right\} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial a} \right)_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial (x_l - a)}{\partial a} \right]_2 \left[\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial a} \right)_1 - \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial a} \right)_2 \right].$$

Написав также:

$$\xi_l-\xi_{l-1}=\xi_0\frac{\partial(x_l-x_{l-1})}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial(x_l-x_{l-1})}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial(x_l-x_{l-1})}{\partial c}$$

и используя условия $(C_2|\Omega)$, справедливые для x_l-x_{l-1}, мы констатируем, что $\xi_l-\xi_{l-1}$ удовлетворяют условиям $(C_1|A'\Omega)$ при соответсвующем значении постоянной A'.

Эти неравенства и им аналогичные позволяют нам теперь утверждать, в силу теорем Корна, что, для $n=l$, функции P_n, Q_n, R_n удовлетворяют условиям $(C_3|A'')$, и в силу теорем Лихтенштейна, удовлетворяют условиям $(H_3|A'''\Omega)$. Эти последние позволяют, следовательно, написать:

$$\left|\frac{\partial P_l}{\partial y_l}-\frac{\partial P_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\right|\leqslant A'''\Omega,\quad\ldots,\qquad\left|\frac{\partial^3 P_l}{\partial y^3_l}-\frac{\partial^3 P_{l-1}}{\partial y^3_{l-1}}\right|\leqslant A'''\Omega,\quad\ldots,$$

$$\left|\left(\frac{\partial^3 P_l}{\partial y_l^3}-\frac{\partial^3 P_{l-1}}{\partial y_{l-1}^3}\right)_1-\left(\frac{\partial^3 P_l}{\partial y_l^3}-\frac{\partial^3 P_{l-1}}{\partial y_{l-1}^3}\right)_2\right|\leqslant A'''\Omega d_{12}^{\lambda},\quad\ldots,$$

и все прочие условия этого рода.

Имея это, остается почти простое переписывание, чтобы доказать высказанную теорему.

Рассмотрим сперва разности $x_{l+1}-x_l$. Формулы (8) и (9) позволяют их вычислить в виде:

$$x_{l+1}-x_l=\int_{t_0}^{t}dt\left\{\frac{\partial R_l}{\partial y_l}-\frac{\partial R_{l-1}}{\partial y_{l-1}}-\frac{\partial Q_l}{\partial z_l}+\frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right\}.\qquad(13)$$

Это количество само ограничено числом вида $B\Omega$. Рассмотрим производную $\dfrac{\partial(x_{l+1}-x_l)}{\partial a}$. Туда входит количество

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial z_l}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right),$$

которое, очевидно, может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial^2 Q_l}{\partial z_l\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial a}+\frac{\partial^2 Q_l}{\partial z_l\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial a}+\frac{\partial^2 Q_l}{\partial z_l^2}\frac{\partial z_l}{\partial a}-$$

$$-\frac{\partial^2 Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}-\frac{\partial^2 Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}\partial y_{l-1}}\frac{\partial y_{l-1}}{\partial a}-\frac{\partial^2 Q_{l-1}}{\partial z^2_{l-1}}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial a},$$

или еще:

$$\frac{\partial x_l}{\partial a}\left[\frac{\partial^2 Q_l}{\partial z_l\partial x_l}-\frac{\partial^2 Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}\partial x_{l-1}}\right]+\left(\frac{\partial x_l}{\partial a}-\frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\right)\frac{\partial^2 Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}\partial x_{l-1}}+\ldots$$

и, следовательно, неравенства, существующие для $x_l - x_{l-1}$, x_l и для Q_{l-1} и Q_l и их производных, дают ограничение вида

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial z_l}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right)\right| \leqslant A^{\mathrm{IV}}\,\Omega,$$

также доказываются неравенства вида

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial z_l} - \frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right)\right| \leqslant A^{\mathrm{IV}}\,\Omega$$

$$\left|\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial z_l} - \frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right)\right]_1 - \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial z_l} - \frac{\partial Q_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right)\right]_2\right| \leqslant A^{\mathrm{IV}}\,d_{12}^{\lambda}.$$

Рассуждения, тождественные с предыдущими, будут применимы для других членов, фигурирующих в выражении $x_{l+1} - x_l$ (формула 13); после интеграции между t_0 и t получаем неравенства вида:

$$\left.\begin{aligned} &|x_{l+1} - x_l| \leqslant A^{\mathrm{V}}\Omega\,|t - t_0|, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1} - x_l)\right| \leqslant A^{\mathrm{V}}\,\Omega\,|t - t_0|, \ldots, \\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right| \leqslant A^{\mathrm{V}}\,\Omega\,|t - t_0|, \ldots, \\ &\left|\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right]_1 - \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(x_{l+1} - x_l)\right]_2\right| \leqslant A^{\mathrm{V}}\,\Omega\,|t - t_0|\,d_{12}^{\lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где A^{V} коэфициент, зависящий от T_0, ξ_0, η_0, ζ_0 и от Ω, а это суть неравенства $(C_2 \,|\, \Omega')$. Если, следовательно, такие неравенства имеют место для некоторого значения l, то они будут иметь место для следующего значения индекса. Для l же, равного 1, имеем $x_{l-1} = a$, и рассуждение, проведенное нами, показывает, что неравенства будут справедливы для достаточно малых $(t - t_0)$. Сожмем теперь интервал $t - t_0$, налагая условие

$$|t - t_0| < \frac{1}{2A^{\mathrm{V}}},$$

тогда, как видим, сможем написать, шаг за шагом, в силу результата, даваемого первым неравенством (14):

$$|x_1 - a| < \Omega,\ |x_2 - x_1| < \frac{1}{2}\Omega, \ldots,$$

$$|x_{l+1} - x_l| < \left(\frac{1}{2}\right)^l \Omega,$$

откуда получаем:

$$|x_{l+1}-a| \leqslant |x_1-a|+|x_2-x_1|+\ldots+|x_{l+1}-x_l|$$
$$\leqslant \Omega\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^l\right] < 2\Omega < \Omega_0,$$

и совершенно подобные следствия будут существовать для первой и второй производных. Таким образом мы устанавливаем, что неравенства $(C_2 \mid \Omega_0)$, справедливые для $x_n-a,\ldots$, при индексе l, будут также справедливы при следующем значении индекса, $l+1$ — и, следовательно, для всякого значения индекса.

Высказанная теорема, следовательно, полностью доказана.

Определение x, y, z внутри области T_0+S_0. Ясно теперь, что если мы рассмотрим ряд:

$$x_1+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots \tag{15}$$

или его производные, первую и вторую по a, b, c, то будем иметь ряды, сходящиеся абсолютно и равномерно в T_0+S_0 при достаточно малых $(t-t_0)$. Будем называть через x сумму ряда (15) и через y и z суммы двух аналогичных рядов, писать которые излишне.

Равенство

$$x-a=(x_1-a)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots \tag{16}$$

даст нам, кроме того, в силу уже доказанных результатов, неравенства $(C_2 \mid \Omega_0)$ для $x-a$, $y-b$, $z-c$, а именно, например:

$$\left.\begin{array}{l} |x-a|,\ \ldots \left|\dfrac{\partial}{\partial a}(x-a)\right|,\ \ldots \left|\dfrac{\partial^2}{\partial a^2}(x-a)\right|,\ldots < \Omega_0 \\ \left|\left(\dfrac{\partial^2}{\partial a^2}(x-a)\right)_1-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial a^2}(x-a)\right)_2\right| \leqslant \Omega_0 d_{12}^{\lambda} \end{array}\right\} \tag{17}$$

Определенные так функции (x, y, z) до сих пор рассматривались в области T_0 пространства (a, b, c). Я утверждаю, что они там удовлетворяют уравнениям (2), которые подлежат решению.

В самом деле, из (16), (5) и (13) следует, что мы имеем, например:

$$x=a+\lim_{n=\infty}\int_{t_0}^{t} dt\left(\frac{\partial R^n}{\partial y_n}-\frac{\partial Q_n}{\partial z_n}\right). \tag{18}$$

Если же мы назовем ξ, η, ζ функции, определенные уравнениями (3):

$$\xi=\xi_0\frac{\partial x}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial x}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial x}{\partial c},\ \ldots,$$

где x, y, z функции, только что определенные выше; если назовем T и S область и граничную поверхность, соответствующие T_0 и S_0

при помощи тех же функций, и если, наконец, назовем P, Q, R функции, аналогичные P_n, Q_n, R_n, из них вытекающие, то сможем заключить, что, например:

$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right). \tag{19}$$

Не вникая в детали, ясно, что это следует из того, что когда x, y, z определены, как было сказано, то разности $x - x_n \ldots$, стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$; в самом деле, x_n является суммой $(n+1)$ первых членов ряда

$$a + (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n+1}) + \ldots$$

и мы имеем:

$$x - x_n = (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \ldots$$

и, следовательно:

$$|x - x_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \Omega \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right] \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Omega_0.$$

Из этого неравенства и аналогичных, касающихся первой и второй производных, очевидно, следует, в силу теорем Лихтенштейна, доказанных в конце прошлой главы, что разности типа $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial R_n}{\partial y_n}$ стремятся равномерно к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, так что равенство (18) влечет за собой (19).

Определение x, y, z вне T_0. Может случиться, что функции x, y, z, данные формулами (19), определены не только тогда, когда (a, b, c) лежит в области T_0, но также и во всем внешнем объеме. Мы, следовательно, имеем функции x, y, z, определенные везде.

Эти функции x, y, z образуют решение задачи.

В самом деле, беря полную производную по t от обеих частей уравнения (19), получаем сейчас же:

$$u = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iiint_T \frac{\eta' d\tau'}{r} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iiint_T \frac{\zeta' d\tau'}{r}, \ldots \tag{20}$$

Определенные таким образом скорости всюду непрерывны; частные производные существуют всюду, но могут претерпевать разрывы непрерывности при переходе через S. На больших расстояниях u, v, w обращаются в нуль как $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$. Из уравнений (20), очевидно, получаем уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

которое, как известно, эквивалентно

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = 1,$$

откуда, а также в силу формул Коши (3), легко получить:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0. \tag{21}$$

Тогда мы знаем, как мы видели в главе II, уравнения (20) и (21) дают:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

и другие уравнения того же типа.

Легко, наконец, показать, что (u, v, w) обладают первыми и вторыми производными, из которых последние удовлетворяют условиям $(C_0 | A)$. Это выводится просто применением теоремы Корна для производных, взятых только по координатам. Посмотрим, что происходит с производными, в которые входит t, и для этого остановимся, например, на ускорениях: возьмем $\frac{du}{dt}$.

Мы имеем:

$$2\pi u = -\iiint\limits_T \eta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau + \iiint\limits_T \zeta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau'. \tag{22}$$

При диференцировании по t мы должны учесть, с одной стороны, изменение под знаком интеграла и, с другой, изменение объема T интегрирования. Чтобы исключить эту вторую часть, приведем интегралы к новым, относящимся к неизменному объему T_0, выражая все под знаками интегралов в функции (a', b', c') вместо (x', y', z'). Так как речь идет о жидкости, то, как известно:

$$\frac{D(x', y', z')}{D(a', b', c')} = 1,$$

и, следовательно:

$$2\pi u = -\iiint\limits_{T_0} \eta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau_0' + \iiint\limits_{T_0} \zeta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau_0',$$

откуда легко получить:

$$2\pi \frac{du}{dt} = -\iiint\limits_{T_0} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\eta' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{d\eta'}{dt} \right\} d\tau_0' + $$
$$+ \iiint\limits_{T_0} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)\zeta' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\zeta'}{dt} \right\} d\tau_0',$$

что после перехода к переменным (x', y', z') примет вид:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi \frac{du}{dt} = -\iiint\limits_{T} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\eta' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{d\eta'}{dt} \right] d\tau' + \\ + \iiint\limits_{T} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)\zeta' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{d\zeta'}{dt} \right] d\tau'. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Эта формула показывает, что $\frac{du}{dt}$ обращается в нуль при бесконечном $R\left(=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, по крайней мере, как $\frac{1}{R^2}$. Можно даже заключить, что имеем одновременно

$$\left|\frac{du}{dt}\right| \leqslant \frac{A}{R^3}$$

для достаточно большого R. В самом деле, интегралы, входящие в (23) и содержащие $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)$ или $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)$, обращаются в нуль вместе с этими выражениями как $\frac{1}{R^3}$, так как имеем, например:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{z-z'}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right) +$$
$$+\frac{3}{2}\frac{(z-z')}{r^5}\frac{dz^2}{dt} = -\frac{w-w'}{r^3} + \frac{3(z-z')}{r^5}\{(x-x')(u-u')+\ldots\}.$$

Рассмотрим остающиеся количества. Так как

$$\eta = \xi_0\frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial y}{\partial c},$$

то имеем:

$$\frac{d\eta}{dt} = \zeta_0 \frac{\partial v}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial v}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial v}{\partial c}.$$

Можно написать, переходя от T к T_0:

$$\iiint\limits_T \frac{d\eta'}{dt}\, d\tau' = \iiint\limits_{T_0} \left(\xi'_0 \frac{\partial v'}{\partial a'} + \eta_0' \frac{\partial v'}{\partial b'} + \zeta'_0 \frac{\partial v'}{\partial c'}\right) d\tau_0',$$

или еще:

$$\iiint\limits_T \frac{d\eta'}{dt} d\tau' = \iiint\limits_T \left\{ \frac{\partial(\xi_0' v')}{\partial a'} + \frac{\partial(\eta_0' v')}{\partial b'} + \frac{\partial(\zeta_0' v')}{\partial c'} - \right.$$

$$\left. - v'\left(\frac{\partial \xi_0'}{\partial a'} + \frac{\partial \eta_0'}{\partial b'} + \frac{\partial \zeta_0'}{\partial c'}\right) d\tau_0', \right.$$

и так как уравнение (21) по предположению выполнено в начальный момент, то

$$\iiint\limits_T \frac{d\eta'}{dt}\, d\tau' = \iint\limits_{S_0} v'(\alpha'\xi_0' + \beta'\eta_0' + \gamma'\zeta_0')\, d\sigma',$$

где (α', β', γ') означают направляющие косинусы внешней нормали к S_0.

Так как S_0 вихревая поверхность, то

$$\alpha'\xi_0' + \beta'\eta_0' + \gamma'\zeta_0' = 0,$$

и, следовательно,

$$\iiint\limits_T \frac{d\eta'}{dt}\, d\tau' = 0.$$

Отсюда следует, согласно элементарным теоремам теории потенциала (см., например, P. Appell, Mécanique, t. III, p. 83), что для потенциала $\iiint\limits_T \frac{1}{r} \frac{d\eta'}{dt}\, d\tau'$, от массы, равной в сумме нулю, производная вида

$$\frac{\partial}{\partial z} \iiint\limits_T \frac{1}{r} \frac{d\eta'}{dt}\, d\tau'$$

обращается в нуль как $\frac{1}{R^3}$ при бесконечном R и совершенно так же

$$\frac{\partial}{\partial y} \iiint\limits_T \frac{1}{r} \frac{d\zeta'}{dt}\, d\tau',$$

откуда непосредственно следует высказанное предложение.

Применяя формулы (13) и неравенства для функций P_l, Q_l, R_l, легко показать, что, положив $u_n = \frac{dx_n}{dt}$, получаем ряды:

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots$$

и их производные первого и второго порядков, сходящиеся, когда (a, b, c) точка T_0 или вне T_0 — при достаточно малых $(t - t_0)$. Можно было бы доказать аналогичное для рядов:

$$\frac{du_1}{dt} + \ldots + \left(\frac{du_n}{dt} - \frac{du_{n-1}}{dt}\right) + \ldots$$

Мы не будем углубляться в эти детали, отсылая к прекрасному мемуару Лихтенштейна.

Взаимно однозначное соответствие между последовательностью областей. Мы неявно допускали во всем предшествующем, что последовательно рассматриваемые области, которыми мы пользовались, находились друг к другу во взаимно однозначном соответствии, что позволило сказать, что их топологический характер аналогичен. Легко проверить, что это будет именно так, по крайней мере, для достаточно малых $(t - t_0)$.

В самом деле, мы видели, что для всякой точки области T_0 и для всякого момента t в подлежащем интервале с началом t_0, имелись неравенства вида

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)\right| \leqslant \Omega_0, \tag{24}$$

где Ω_0 может быть взято произвольно малым, если сам интервал $(t - t_0)$ достаточно мал.

Затем, точке (a, b, c), принадлежащей T_0, мы ставим в соответствие точку (x_n, y_n, z_n) области T_n по формулам (8). Предположим, что, обратно, одной точке T_n соответствует больше, чем одна, пусть две точки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) в T_0, в один и тот же момент, взятый в указанном интервале. Тогда, следовательно, имеем:

$$x_n(a_1, b_1, c_1, \theta) = x_n(a_2, b_2, c_2, \theta),$$

или

$$[x_n(a_1, b_1, c_1, \theta) - a_1] - [x_n(a_2, b_2, c_2, \theta) - a_2] + a_1 - a_2 = 0.$$

Применяя формулу конечных приращений и отмечая штрихом производные, взятые при промежуточных значениях между (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2), запишем последнее равенство в виде:

$$(a_1 - a_2)\left\{1 + \frac{\partial'}{\partial a}(x_n - a)\right\} +$$
$$+ (b_1 - b_2)\frac{\partial'}{\partial b}(x_n - a) + (c_1 - c_2)\frac{\partial'}{\partial c}(x_n - a) = 0.$$

Это уравнение и два других, относящихся к y и z, составляют систему трех однородных уравнений для $(a_1 - a_2)$, $(b_1 - b_2)$, $(c_1 - c_2)$ с определителем, очевидно отличным от нуля, если количество Ω_0 из неравенств (24) достаточно мало. Отсюда заключаем, что $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, что и обеспечивает взаимную однозначность.

Единственность решения. Является ли решение (x, y, z), существование которого мы показали, единственным? Пусть $(t_0, t_0 + \theta)$, интервал, в котором решение определено, и предположим, что мы имеем другое решение нашей задачи, пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — при тех же условиях непрерывности, что и первое, и определенное в интервале $(t_0, t_0 + \theta')$, где θ' не обязательно равно θ. Я утверждаю, что эти решения тождественны во всем интервале, где они оба определены. В самом деле, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\bar{x} = a + \int_{t_0}^{t} dt \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iiint_{\bar{T}} \frac{\bar{\eta}' d\bar{\tau}'}{\bar{r}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \iiint_{\bar{T}} \frac{\bar{\zeta}' d\bar{\tau}'}{\bar{r}} \right],$$

. . . .

$$\bar{\xi} = \xi_0 \frac{\partial \bar{x}}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial \bar{x}}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial \bar{x}}{\partial c}, \ldots,$$

где обозначения понятны сами собой. Отсюда легко можно получить, что разности $(\bar{x} - a)$ и другие удовлетворяют условиям $(C_2' \mid \omega_0)$. Далее, образуем разности вида:

$$\bar{x} - x_n = \int_{t_0}^{t} dt \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iiint_{\bar{T}} \frac{\bar{\eta}' d\bar{\tau}'}{\bar{r}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \iiint_{\bar{T}} \frac{\bar{\zeta}' d\bar{\tau}'}{r} \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \iiint_{T_{n-1}} \frac{\eta'_{n-1} d\tau'_{n-1}}{r_{n-1}} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \iiint_{T_{n-1}} \frac{\zeta'_{n-1} d\tau'_{n-1}}{r_{n-1}} \end{aligned} \right\}.$$

Обращаясь с этим выражением, как это мы делали с $x_{l+1} - x_l$ в процессе доказательства теоремы, мы покажем, что $(\bar{x} - x_n)$ удовлетворяет условиям $(C_2 \mid \omega_n')$, где

$$\omega_n' = \alpha \mid t - t_0 \mid \omega'_{n-1},$$

где число α зависит только от T_0, ξ_0, η_0, ζ_0 и ω_0. Мы видим, что если ограничиться

$$\mid t - t_0 \mid < \frac{1}{\alpha},$$

то $\bar{x} - x_n$ будет стремиться к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Следовательно, единственность решения обеспечена в маленьком интервале t_0, t_1, где t_1 меньшее из чисел θ, θ', $\frac{1}{\alpha}$; оба решения (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ совпадают до момента t_1, включительно; последнее — в силу непрерывности. Беря тогда этот момент t_1 за новую отправную точку, и возобновляя рассуждение, докажем совпадение решений на новом интервале t_1, t_2 и так далее, пока оба решения одновременно определены. Процесс может остановиться только, если ряд

$$(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots$$

будет сходящимся и его сумма θ'' будет меньше чисел θ и θ'; тогда, казалось бы, мы не можем перейти через момент $t_0 + \theta''$. Но это не так. В момент $t_0 + \theta''$ наши оба решения совпадут в силу непрерывности. Начав опять наши рассуждения с момента $t_0 + \theta''$, как исходного, мы увидим, что оба решения будут совпадать еще на малом интервале, начиная с $t + \theta''$ и так далее, что и требовалось доказать.

ГЛАВА XIII

РАЗЛИЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ

Теорема и результаты Лихтенштейна могут быть обобщены в разных направлениях. Прежде всего заметим простое обобщение, на котором мы не будем останавливаться, для того случая, когда неограниченная жидкость содержит в начальный момент t_0 несколько вихревых объемов T_0, T_0', ... вместо одного.

Ограниченная жидкость. Менее проста задача, когда мы не имеем уже неограниченную жидкость, а жидкость заключена в сосуде, движение которого известно (и который целиком заполнен жидкостью). Строго говоря, сосуд может деформироваться, но несжимаемость жидкости требует, чтобы объем жидкости оставался постоянным. Предположим сосуд односвязным и пусть

$$\Phi(x, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

уравнение поверхности Σ, где Φ регулярная функция своих четырех аргументов. Чтобы избегнуть всяких добавочных затруднений, мы допустим, что эта поверхность не имеет особых точек и, наконец, предположим, что Φ становится положительной, если перемещаться от Σ внутрь жидкости. При этих условиях направляющие косинусы внутренней нормали n будут

$$\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}, \ldots,$$

причем для радикала взято его арифметическое значение; нормальная к поверхности скорость V_n (скорость перемещения поверхности разрыва) будет тогда

$$V_n = \frac{-\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}, \tag{2}$$

а условие несжимаемости, или, лучше сказать, постоянства объема жидкости внутри Σ запишется в виде:

$$\iint\limits_{\Sigma} V_n\, d\sigma = 0. \tag{3}$$

Наконец, условие того, что Σ постоянно остается жидкой поверхностью, т. е., что скорость u, v, w касательна к ней, налагает соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} + w\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

удовлетворяющееся на поверхности Σ.

Мы будем допускать, что для скоростей u_0, v_0, w_0 и вихрей ξ_0, η_0, ζ_0 в начальный момент t_0 соблюдаются все те условия, что и в прошлой главе, сохраняя притом те же обозначения; вихри предполагаются сосредоточенными внутри объема T_0 (односвязного для определенности), ограниченного поверхностью S_0.

При этих условиях мы покажем, что прежние результаты сохранятся, и что, по крайней мере, в течение некоторого промежутка времени, начиная с t_0, можно следить за деформацией заданной конфигурации, которая во все это время будет сохранять свой первоначальный топологический характер.

Лихтенштейн приводит задачу к интегро-диференциальным уравнениям, которые можно решать методом последовательных приближений, совершенно аналогичным описанному на предыдущих страницах.

Начнем с напоминания, отмеченного уже в главе II, что взяв, как и выше,

$$P = \frac{1}{2\pi}\int\int\limits_T\int \frac{\xi' \, d\tau'}{r}, \quad Q = \ldots, \quad R = \ldots, \tag{5}$$

где T означает вихревой объем в момент t и определив три функции A, B, C от x, y, z соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} + A = \bar{u} + A, \\ v &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} + B = \bar{v} + B, \\ w &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + C = \bar{w} + C, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

причем вектор $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ имеет своим вихрем ξ, η, ζ, мы придем к заключению, что вектор A, B, C должен иметь вихрь нуль; можно, следовательно, положить:

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{7}$$

и уравнение неразрывности требует, чтобы функция φ была гармонической

$$\Delta \varphi = 0. \tag{8}$$

Теперь ясно, что интегро-диференциальные уравнения, приводящие к решению задачи, будут иметь вид:

$$x = a + \int\limits_{t_0}^{t} u dt; \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} u = &-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_{T}\frac{\eta' \, d\tau'}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\iiint\limits_{T}\frac{\zeta' \, d\tau'}{r} + \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \bar{u} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = &\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w = &\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \\ \eta &= \dots\dots\dots\dots \\ \zeta &= \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти уравнения вполне аналогичны тем, которые встречались для неограниченной жидкости в решенной уже нами задаче, но здесь имеется на одну неизвестную больше, каковой является функция φ.

Но условие (4) позволит нам освободиться от этой дополнительной неизвестной. Заменяя, в самом деле, в (4) скорости их значениями (10), получаем на Σ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \dots = 0$$

или, вводя направляющие косинусы нормали n:

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\bar{V}_n - \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}. \tag{12}$$

Потенциал φ будет, следовательно, известен (по крайней мере, теоретически и, естественно, с точностью до постоянной) из решения задачи Неймана, так как нормальная его производная задана нам уравнением (12).

Эта задача Неймана имеет решение. Известно, в самом деле, что должно выполняться условие:

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 0. \tag{13}$$

Но мы имеем, с одной стороны,

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} d\sigma = 0,$$

в силу условия (3), присоединенного к определению (2); а с другой стороны, имеем, называя через Θ объем, заключенный в Σ,

$$\iint\limits_{\Sigma} \overline{V}_n d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} (\overline{u}\alpha + \overline{v}\beta + \overline{w}\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iiint\limits_{\Theta} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right) d\tau,$$

что равно нулю, так как $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ очевидно удовлетворяют условию несжимаемости:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0.$$

Функция φ определена, следовательно, с точностью до постоянной, которая может быть функцией времени t.

После этого, ход последовательных приближений будет, с точностью до незначительных деталей, совпадать с тем, который нам уже известен. Сперва положим:

$$x_1 = a + \int\limits_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial c} \iiint\limits_{T_0} \frac{\eta_0'\, d\tau_0'}{r_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b} \iiint\limits_{T_0} \frac{\zeta_0'\, d\tau_0'}{r_0} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial a} \right\},$$

$$y_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где φ_0 означает потенциал, определенный решением задачи Неймана:

$$\Delta\varphi_0 = 0,$$

$$\frac{d\varphi_0}{dn} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} - \overline{V}_{n0} \text{ на } \Sigma_0.$$

Второе приближение получится в виде:

$$x_2 = a + \int_{t_0}^{t} dt \left[-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\iiint_{T_0}\frac{\eta_1' d\tau_1'}{r_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\iiint_{T_0}\frac{\zeta_1' d\tau_1'}{r} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right],$$

$$y_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_1 = \xi_0\frac{\partial x_1}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial x_1}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial x_1}{\partial c},$$

$$\eta_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\zeta_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

где φ_1 удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_1 = 0$ при

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)}} - \overline{V}_{n_1} \quad \text{на} \quad \Sigma_1$$

и так далее. И метод, уже примененный в главе XII, покажет, что последовательности x_n, y_n, z_n сходятся, по крайней мере при достаточно малых $(t-t)_0$, к решению x, y, z предложенных уравнений, и притом единственному. Ясно, что члены, происходящие от функций φ_i, не вызовут никаких новых существенных трудностей.

Задача может, следовательно, рассматриваться как теоретически решенная.

Лихтенштейн также показал, что тот же метод применяется к случаю движения твердого тела, или даже нескольких твердых тел в неограниченной жидкости. Можно, впрочем, заменить твердые тела деформируемыми, но при условии постоянства объемов. Мы не будем излагать этих обобщений, но мы остановим внимание сейчас на некоторых частных приложениях, принадлежащих также Лихтенштейну, имея в виду обобщить на вихри конечных размеров некоторые простые результаты, уже известные нам для вихрей бесконечно тонких.

Перманентное движение, относящееся к двум цилиндрическим вихрям в неограниченной жидкости. Как мы знаем, два цилиндрических бесконечно тонких вихря, параллельной и равной интенсивности I, будут постоянно сохранять свое относительное расположение, равномерно вращаясь вокруг неподвижной оси, расположенной в плоскости обоих вихрей и находящейся на равном расстоянии от них (жидкость, понятно, предполагается покоящейся на бесконечности).

Попробуем обобщить этот результат. Очевидно, достаточно рассмотреть, что происходит в плоскости xOy, нормальной к рассматриваемым цилиндрам.

Предположим, что в некоторый момент t_0, вихри, — которые мы будем предполагать равномерно распределенными, с везде одинаковой составляющей ζ и, следовательно, постоянной во времени, — заключены внутри двух равных цилиндров, сечениями которых пусть будут площадки T_1 и T_2, имеющие контурами кривые S_1 и S_2. Предположим, наконец, что T_1 и T_2 симметричны друг с другом относительно оси Oy, и, в отдельности каждая, относительно оси Ox, как указано на рис. 58.

Общие теоремы главы II учат нас, что, в предположении покоя на бесконечности, центр тяжести вихревых поверхностей T_1 и T_2 будет оставаться неподвижным. С другой стороны, результаты прошлой главы позволяют нам изучать движение и деформацию двух вихревых цилиндров: во всяком случае, мы знаем, что конфигурация,

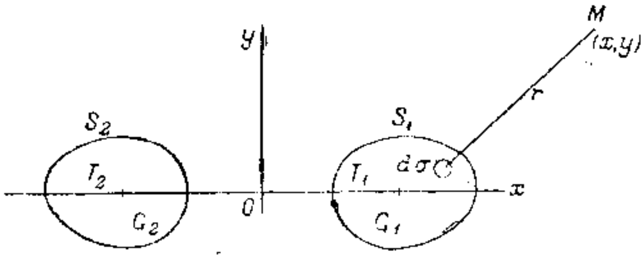

Рис. 58.

изменяясь, сохраняет свой общий вид и вихри (неизменной величины) остаются заключенными в двух цилиндрах, происходящих от деформации T_1 и T_2.

Возможно ли, чтобы д а л ь н е й ш е е д в и ж е н и е с в о д и л о с ь п р о с т о к в р а щ е н и ю в ц е л о м с постоянной угловой скоростью вокруг оси Oz в пространстве, т. е. вокруг точки O в плоскости xOy? Мы покажем, что м о ж н о о п р е д е л и т ь ф о р м у к р и в ы х S_1 и S_2 так, чтобы это было возможным.

Для этого достататочно (но не необходимо), чтобы, обозначив через D наибольшее взаимное расстояние между двумя точками T_1 и через L расстояние между центрами тяжести G_1 и G_2 площадок T_1 и T_2, иметь отношение $\frac{D}{L}$ достаточно малым.

Допуская неизменность формы наших двух цилиндров, присоединим к T_1 и T_2 систему подвижных осей xOy, которую предположим находящейся в равномерном вращении с угловой скоростью ω около точки O. Пусть x_1Oy_1 система н е п о д в и ж н ы х осей с тем же началом и предположим, что в рассматриваемый момент t обе системы осей совпадают. Назовем через (u, v) и (u_1, v_1) скорости, относительную и абсолютную, жидкой частицы. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=0 \tag{1}$$

и очевидные формулы

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1 + \omega y_1 \\ v &= v_1 - \omega x_1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

дают, между прочим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

так что можно положить

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1},$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Формулы (2) показывают нам, что имеется соотношение:

$$\psi = \psi_1 + \omega \int x\,dx + y\,dy = \psi_1 + \frac{\omega}{2} R^2, \tag{4}$$

где R есть расстояние $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Но кривые $\psi(x, y) = \text{const}$ являются, очевидно, относительными траекториями частиц; согласно общим уравнениям главы II, функция тока в абсолютном движении дается уравнением

$$\psi_1(x_1, y_1) = \frac{-\zeta}{\pi} \iint\limits_{T_1 + T_2} \lg r\,d\sigma,$$

где через r обозначено расстояние точки (x_1, y_1) от точки T_1 или T_2, и где $d\sigma$ — элемент поверхности. В самом деле, мы помним, что функция тока, происходящая от одного элемента интенсивности $I = 2\zeta\,d\sigma$, равна $-\frac{1}{2\pi} \lg r$. Следовательно, имеем:

$$\psi = -\frac{\zeta}{\pi} \iint\limits_{T_1 + T_2} \lg r\,d\sigma + \frac{\omega}{2} R^2. \tag{5}$$

Если мы теперь введем предположение, что движение относительно осей Oxy установившееся, то линии S_1 и S_2, ограничивающие вихревые области, будут, согласно теоремам Гельмгольца, постоянно образовываться одними и теми же частицами, это будут линии тока в относительном движении. Функция ψ должна быть, следовательно, постоянна на S_1 и S_2, и ясно, что это необходимое условие является также достаточным.

Следовательно, наша задача сведена к следующей: определить вид S_1 (и, следовательно, по симметрии S_2), таким образом, чтобы мы имели на S_1 и S_2

$$\frac{\zeta}{\pi} \iint\limits_{T_1 + T_2} \lg r\,d\sigma - \frac{\omega}{2} R^2 = \text{const}. \tag{6}$$

значение постоянной, очевидно, одинаково на S_1 и S_2 в силу предположенной симметрии. Но в точности это же уравнение (6), с простою лишь разницей в обозначениях, встречается в задаче равновесия для масс, притягивающихся по закону Ньютона. Вообразим наши два цилиндра с сечениями T_1 и T_2, заполненными однородной массой плотности k, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. Допустим, что эти два цилиндра образуют фигуру относительного равновесия, тогда как их поверхности вращаются равномерно с угловой скоростью ω' вокруг Oz. При этих условиях, полный потенциал действующих сил будет постоянным на S_1 и S_2. Что касается потенциала сил тяготения, то он равен (см. Appell, Mécanique rationelle, t. III, p. 116 и след.) логарифмическому потенциалу:

$$-2fk\int\int_{T_1+T_2}\lg r\,d\sigma,$$

где f универсальная постоянная тяготения. С другой стороны, потенциал центробежных сил равен $\frac{\omega'^2}{2}R^2$, и условие, которое должно выполняться на S_1 и S_2, примет вид:

$$2fk\int\int_{T_1+T_2}\lg r\,d\sigma-\frac{\omega'^2}{2}R^2=\text{const}, \tag{7}$$

а это уравнение совпадает с уравнением (6), если положить

$$\omega'^2=2\pi\frac{\omega fk}{\zeta}.$$

Лихтенштейн изучил уравнения этого рода и в своей работе о фигурах равновесия (Math. Zeitschrift, 1922, p. 201) подробно исследовал решение задачи, когда дело идет не о двух цилиндрах, но о двух объемах, мало отличающихся от сфер. Логарифмический потенциал, фигурирующий в (6) или (7), оказывается тогда замененным обыкновенным потенциалом масс в трех измерениях. Перенося рассуждения Лихтенштейна на данный случай, находим, что вращение ω и вид кривых S_1 и S_2 будут определены одним интегро-диференциальным уравнением, разрешимым методом последовательных приближений, по крайней мере, когда S_1 и S_2 достаточно мало отличаются от окружностей и когда отношение $\frac{D}{L}$ достаточно мало. Мы удовольствуемся здесь этими указаниями и отошлем для деталей к цитированным работам ученого геометра.

Изученная задача может легко быть обобщена на случай, когда сечения T_1 и T_2 двух цилиндров не будут больше равными и когда вихри будут иметь значения ζ_1 и ζ_2 постоянные, но различные в T_1 и T_2.

Особенно интересен тот частный случай, когда вихри в T_1 и T_2 противоположны. Мы знаем, что в случае двух бесконечно тонких трубок одинакового сечения, движение сводится к поступательному перемещению. Может ли быть то же самое, если две цилиндрические трубки имеют сечения S_1 и S_2, симметричные относительно двух осей Ox и Oy. В этом случае движение оказывается поступательным с постоянной скоростью v_0, параллельной Oy, и оси Oxy, связанные с цилиндрами, будут сами перемещаться с этой скоростью v_0. Обозначая через Ox_1y_1 неподвижные оси, параллельные прежним, и принимая те же обозначения, что и выше, будем иметь:

$$u = u_1, \quad v = v_1 - v_0,$$

так что если ψ и ψ_1 будут две функции тока, относительная и абсолютная, то мы будем иметь:

$$\psi = \psi_1 + v_0 x,$$

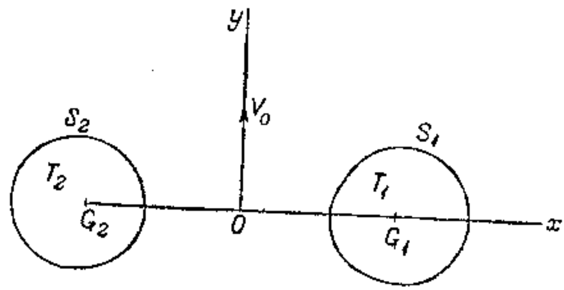

Рис. 59.

предполагая, что обе системы осей совпадают в рассматриваемый момент. В абсолютном движении мы имеем:

$$\psi_1 = -\frac{\zeta}{\pi}\iint\limits_{T_1} \lg r\, d\sigma + \frac{\zeta}{\pi}\iint\limits_{T_2} \lg r\, d\sigma,$$

и если мы хотим, чтобы движение относительно осей Oxy было перманентным, S_1 и S_2 должны быть линиями относительного тока и, следовательно, мы должны иметь:

$$\frac{\zeta}{\pi}\iint\limits_{T_1} \lg r\, d\sigma - \frac{\zeta}{\pi}\iint\limits_{T_2} \lg r\, d\sigma - v_0 x = \text{const}$$

на S_1 и S_2. Значения постоянной противоположны на S_1 и S_2. Это уравнение может трактоваться как предшествующее уравнение (6). Эта задача, очевидно, тождественна с задачей об одной цилиндрической вихревой трубке, перемещающейся в жидкости, ограниченной одной неограниченной плоской стенкой. Методом изображений можно также изучать такого рода задачи, касающиеся, например, цилиндрического вихря в канале, вихря в сосуде прямоугольного сечения, вихревые цепочки, аналогичные цепочкам Бенара-Кармана в канале, и тому подобное.

ГЛАВА XIV

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВИХРЯХ В ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ

Настоящий труд был бы неполон, если бы мы не сказали ни слова о теории вихрей в вязкой жидкости. Хорошо известно, что в вязкой жидкости теоремы Гельмгольца не будут существовать. Мы вкратце, пользуясь плодотворными результатами C. W. Oseen'а, покажем на конкретном примере, каким образом в несовершенной жидкости вихри уничтожаются, обобщая результаты на случай пространства (C. W. Oseen, Acta mathematica, t. 34; Hydrodynamik, § 8).

Мы ограничимся плоско-параллельными движениями, т. е. теми, которые приводятся к двум измерениям в плоскости xOy, и мы начнем с напоминания интегральных уравнений Oseen'а для медленного движения жидкости в плоскости, — уравнений, которые мы применим дальше для движения не медленного.

Предварительные данные. Известно, что уравнения медленного движения вязкой жидкости, если обозначить через μ коэфициент вязкости, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho X = 0, \\ &\mu\Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho Y = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Система, присоединенная к данной, будет:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\Delta U - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ &\mu\Delta V - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Будем искать решения присоединенной системы, которые будут вида:

$$U = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad V = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \tag{3}$$

что позволит взять для P выражение:

$$P = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\Delta\varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \tag{3'}$$

при условии, что φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\left(\mu\Delta\varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0. \tag{4}$$

Попытаемся взять за φ функцию, зависящую только от

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

и от t. Тогда

$$\Delta\varphi(r, t) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r}. \tag{5}$$

При этих условиях легко усмотреть, что, в частности, функция:

$$\varphi_1 = \int\limits_0^r \frac{1-e^{-\frac{\rho\alpha^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\alpha}\,d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\rho r^2}{4\mu(t_0-t)}} \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha \tag{6}$$

удовлетворяет уравнению (4). В самом деле, мы имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{1-e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t_0-t)}}}{r},$$

и, следовательно, согласно уравнению (5):

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\rho}{2\mu}e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t_0-t)}}\frac{1}{t_0-t};$$

но мы имеем также

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu(t_0-t)}}\right)\frac{1}{t_0-t}.$$

Следовательно:

$$\mu\Delta\varphi_1 + \rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{\rho}{2(t_0-t)}, \tag{7}$$

и потому

$$\Delta\left(\mu\Delta\varphi_1 + \rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Можно слегка преобразовать выражение (6) для φ_1, вводя функцию:

$$\Phi_1 = \int\limits_r^\infty e^{-\frac{\rho\alpha^2}{4\mu(t_0-t)}}\frac{d\alpha}{\alpha} + \lg r. \tag{8}$$

Действительно, введя некоторую постоянную A, например, $A=1$, можно написать:

$$\varphi_1 - \Phi_1 = \int_0^A \frac{1 - e^{-\frac{\rho\alpha^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\alpha} \, d\alpha - \int_A^{+\infty} e^{-\frac{\rho\alpha^2}{4\mu(t_0-t)}} \frac{d\alpha}{\alpha} - \int_r^A \frac{d\alpha}{\alpha} - \lg r,$$

и ясно, что эта разность постоянна; она, таким образом, не играет существенной роли. При помощи φ_1 (или Φ_1) можно, следовательно, образовать два решения:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= +\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}, \quad V_1 = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}, \quad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\Delta\varphi_1 + \rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) = 0, \\ U_2 &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \quad V_2 = +\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}, \quad P_2 = -\frac{\partial}{\partial y}(\ldots) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

из которых второе, по симметрии, выводится из первого.

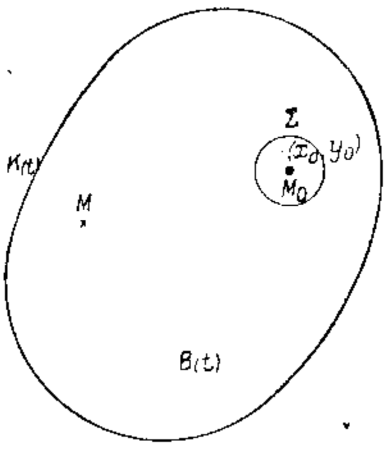

Рис. 60.

Из факта, что $(\lg r)$ гармоническая функция в плоскости, следует, что частным решением присоединенной системы (2) будет также:

$$\left.\begin{aligned} U_3 &= \frac{\rho\varepsilon^2 e^{-\frac{\rho\varepsilon^2}{4\mu(t_0-t)}}}{4\mu(t_0-t)^2} \cdot \frac{\partial \lg r}{\partial x}, \\ V_3 &= \frac{\rho\varepsilon^2 e^{-\frac{\rho\varepsilon^2}{4\mu(t_0-t)}}}{4\mu(t_0-t)^2} \cdot \frac{\partial \lg r}{\partial y}, \\ P_3 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho^2\varepsilon^2}{4\mu} \cdot \frac{e^{-\frac{\rho\varepsilon^2}{4\mu(t_0-t)}}}{(t_0-t)^2}\right) \lg r, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где ε постоянная.

Все эти решения регулярны по всей плоскости для $t < t_0$ с особенностью при $r = 0$. Пусть тогда $K(t)$ граница области $B(t)$, в которой решение (u, v, p) системы (1) регулярно при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, и пусть M_0 точка (x_0, y_0), находящаяся в B.

Простая комбинация уравнений (1) и (2) дает нам:

$$\mu\left[(u\Delta U - U\Delta u) + (v\Delta V - V\Delta v)\right] - \left(u\frac{\partial P}{\partial x} - U\frac{\partial p}{\partial x}\right) -$$
$$-\left(v\frac{\partial P}{\partial y} - V\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \rho\frac{\partial}{\partial t}(uU + vV) - \rho(UX + VY) = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение в области $B'(t)$, полученной из $B(t)$ удалением маленького круга $\sum$ с центром M_0 и радиусом ε. Преобразуем интеграл в криволинейный, пользуясь формулой

$$\iint\limits_{B'(t)} (u\Delta U - U\Delta u)\,d\sigma = \int\limits_{K(t)+\Sigma} \left(u\frac{dU}{dn_e} - U\frac{du}{dn_e}\right) ds$$

и аналогичными; в силу уравнения неразрывности:

$$\iint\limits_{B'(t)} \left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \iint \left[\frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(vP)}{\partial y}\right] d\sigma =$$
$$= \int\limits_{K+\Sigma} P(u\cos nx + v\cos ny)\,ds.$$

Результат интегрируем по t, между моментами 0 и t_0, и переходим к пределу, устремляя ε к нулю.

Если U_n означает скорость точки по нормали на границе K и если предположить, что мы оперируем с решением $(U_1, V_1, 0)$, то получаем, таким образом, интегральное уравнение Oseen'а (в цитированных выше мемуарах можно увидеть детали описанных только что операций):

$$2\pi\rho u(x_0, y_0, t_0) = \rho\iint\limits_{B(0)} (uU_1 + vV_1)_0\,d\sigma + \rho\int\limits_0^{t_0} dt \iint\limits_{B(t)} (U_1X + V_1Y)\,d\sigma -$$
$$-\int\limits_0^t dt \int\limits_{K(t)} \left[\mu\left(u\frac{dU_1}{dn_e} + v\frac{dV_1}{dn_e}\right) - U_1\left(\mu\frac{du}{dn} - p\cos nx + \rho uU_n\right) -\right.$$
$$\left. - V_1\left(\mu\frac{dv}{dn} - p\cos ny + \rho vU_n\right)\right] ds +$$
$$+\rho\int\limits_{K(t_0)} (u\cos nx + v\cos ny)_{t_0}\frac{x - x_0}{r^2}\,ds. \qquad (11)$$

Получаем аналогичную формулу, дающую $v(x_0, y_0, t_0)$, беря решение $(U_2, V_2, 0)$. Решение же (U_3, V_3, P_3) приводит к формуле для p:

$$2\pi p(x_0, y_0, t_0) = \rho \iint\limits_{B(t_0)} \left[X \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x} + Y \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y} \right]_{t_0} d\sigma -$$

$$- \int\limits_{K(t_0)} \left\{ \mu \left[u \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + v \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y} \right) \right] - \right.$$

$$- \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial x} \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \rho u U_n \right) -$$

$$\left. - \frac{\partial \lg \frac{1}{r}}{\partial y} \left(\mu \frac{dv}{dn} - p \cos ny + \rho v U_n \right) \right\} ds -$$

$$- \rho \frac{\partial}{\partial t_0} \int\limits_{K(t_0)} (u \cos nx + v \cos ny)_{t_0} \lg \frac{1}{r} \, ds. \tag{12}$$

Мы применим сейчас эти формулы к одной задаче о вихревом движении в плоскости, относящемся к вязкой жидкости.

Предположим, что в начальный момент $t = 0$, имеем круговой вихрь Ω_0 радиуса a, имеющий центром O и симметричный относительно O.

Будем искать дальнейшее движение для $t > 0$.

Выражение вихря

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{13}$$

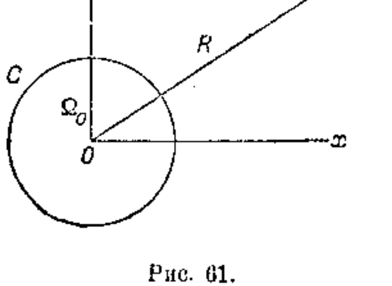

Рис. 61.

и, следовательно, оно равно нулю всюду при $t = 0$, кроме $R \leqslant a$; внутри этого круга мы будем предполагать ζ непрерывным и отличным от нуля, имеющим непрерывные первые производные; кроме того ζ зависит только от R в начальный момент и, следовательно, все время.

Чтобы найти уравнения движения, мы применим формулы (11) к **полным** уравнениям движения жидкости, а не к уравнениям медленного движения. Полные уравнения, при отсутствии внешних сил будут следующие:

$$\left.\begin{aligned} \mu\Delta u-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\\ \mu\Delta v-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \end{aligned}\right\}\tag{14}$$

так что это будут сами уравнения (1), при условии замены в них X и Y через

$$X=-\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad Y=-\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Но (14) можно также написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \mu\Delta u-\frac{\partial}{\partial x}\left[p+\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)\right]-\rho\frac{\partial u}{\partial t}+2\rho\zeta v=0,\\ \mu\Delta v-\frac{\partial}{\partial y}\left[\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\right]-\rho\frac{\partial v}{\partial t}-2\rho\zeta u=0. \end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Это будут те же уравнения (1), при условии замены в них p через $q=p+\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)$ и если положить

$$\left.\begin{aligned} X=2\zeta v,\\ X=-2\zeta u. \end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Можно, следовательно, получить, mutatis mutandis, формулы (11), и мы найдем:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho u(x_0,y_0,t_0)=\rho\iint\limits_{B(0)}(uU_1+vV_1)_0\,d\sigma+\rho\int\limits_0^{t_0}dt\iint\limits_{B(t)}2(U_1v-V_1u)\zeta\,d\sigma-\\ -\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{K(t)}\left\{\mu\left(u\frac{dU_1}{dn}+v\frac{dV_1}{dn}\right)-\right.\\ \left.-U_1\left(\mu\frac{du}{dn}-q\cos nx+\rho uU_n\right)-V_1(\ldots)\right\}ds+\\ +\rho\int\limits_{K(t_0)}(u\cos nx+v\cos ny)\frac{x-x_0}{r^2}\,ds, \end{aligned}\tag{17}$$

где U_1 и V_1 образованы с помощью функции Φ_1. Предположим, как это будет проверено в дальнейшем, что при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, имеем неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &|u, v| < \frac{A}{(1+\beta R)^{\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ \ldots, \ \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < \frac{A\beta}{(1+\rho R)^{1+\alpha}}, \\ &|p, q| < \frac{B}{(1+\beta R)^{\alpha}} \qquad (\alpha > 0), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

т. е., что движение остается **р е г у л я р н ы м** в смысле Oseen'а. Применим формулу (17) к кругу, радиус которого мы заставим расти неограниченно. Предположения (18) заставят исчезнуть в (17) интегралы по линиям, и мы получим, таким образом:

$$2\pi u(x_0, y_0, t_0) \underset{\text{(по всей плоскости)}}{\int\int} = (uU_1 + vV_1)_{t=0}\, d\sigma +$$

$$+ 2\int_0^{t_0} dt \underset{\text{(по вихр. области)}}{\int\int} (U_1 v - V_1 u)\zeta\, d\sigma. \tag{19}$$

Это выражение может быть упрощено; мы имеем, отбросив индекс при функции φ_1 или Φ_1

$$U_1 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad V_1 = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial y}.$$

Следовательно, можно написать:

$$\int\int (uU_1 + vV_1)_{t=0}\, d\sigma = \int\int \left(u\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - v\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right) d\sigma =$$

$$= \int\int \left[\frac{\partial\left(u\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(v\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial x} + 2\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] d\sigma =$$

$$= \int_{\text{(контур)}} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos ny - v\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos nx\right) ds + 2\int\int \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\, d\sigma.$$

Но интеграл по контуру (бесконечности) обращается в нуль, а интеграл по поверхности относится только к вихревой части, т. е. к кругу $R \leqslant a$ в момент $t = 0$. Следовательно,

$$\underset{\text{(по всей плоскости)}}{\int\int} (uU_1 + vV_1)_{t=0}\, d\sigma = \pm 2 \int\int_{\Omega_0} \left(\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{t=0} d\sigma. \tag{20}$$

Естественно, находим также:

$$\underset{\text{(по всей плоскости)}}{\int\int} (uU_2 + vV_2)_{t=0}\, d\sigma = -2 \int\int_{\Omega_0} \left(\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{t=0} d\sigma. \tag{20'}$$

Будем теперь рассматривать выражение $\int\int (vU_1 - uV_1)\zeta\, d\sigma$; мы имеем:

$$\int\int_{\Omega} (vU_1 - uV_1)\zeta\, d\sigma =$$

$$= \int\int_{\Omega} \left(v\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)\zeta\, d\sigma =$$

$$= \int\int_{\Omega} \zeta\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] d\sigma =$$

$$= \int\int_{\Omega} \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta v\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta u\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - v\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - u\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right\} d\sigma. \quad (21)$$

Заметим теперь, что очевидная симметрия вокруг точки O позволяет утверждать, что скорость во всякой точке перпендикулярна радиусу-вектору $(ux + vy = 0)$; кроме того, имеем:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial R}\frac{x}{R}, \ \ldots,$$

следовательно,

$$u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial R}(ux + vy) = 0.$$

Уравнение (21) дает нам:

$$\int\int_{\Omega} (vU_1 - uV_1)\zeta\, d\sigma = \int_{(\text{контур})} \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial y}(u\cos nx + v\cos ny)\, ds,$$

что, очевидно, равно нулю, так как на контуре (все время круговом, на конечном расстоянии) мы имеем $u\cos nx + v\cos ny = 0$, а если контур на бесконечности, то интеграл обращается там в нуль. Следовательно, формула (19) в силу (20) приводится, наконец, к виду:

$$2\pi u(x_0, y_0, t_0) = 2\int\int_{\Omega_0} \left(\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{t=0} d\sigma,$$

и также находим:

$$2\pi v(x_0, y_0, t_0) = -2\int\int_{\Omega_0} \left(\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{t=0} d\sigma.$$

Заменим теперь φ его значением (8)

$$\varphi = \int_r^{\infty} e^{-\frac{\rho\alpha^2}{4\mu(t_0 - t)}}\frac{d\alpha}{\alpha} + \lg r$$

или его значением (6).

Мы получим непосредственно:

$$
\left.\begin{aligned}
\pi u(x_0, y_0, t_0) &= -\iint\limits_{\Omega_0} \zeta(x, y, 0)\left(1 - e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}\right)\frac{y_0 - y}{r^2}\,d\sigma,\\
\pi v(x_0, y_0, t_0) &= \iint\limits_{\Omega_0} \zeta(x, y, 0)\left(1 - e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}\right)\frac{x_0 - x}{r^2}\,d\sigma.
\end{aligned}\right\} \qquad (22)
$$

Для функции q находим:

$$
\pi q(x_0, y_0, t_0) = \rho \iint \zeta\left(v\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial y}\right)\lg\frac{1}{r}\,d\sigma.
$$

Легко проверить, что u, v и q удовлетворяют неравенствам вида (18), допущенным в начале рассуждения.

Если μ стремится к нулю, то мы получим снова классические уравнения Гельмгольца. Теория Гельмгольца, следовательно, является предельным случаем, к которому мы приближаемся, когда μ стремится к нулю.

Пусть M_0 точка на большом расстоянии от точки O; тогда будем иметь приближенно $r = R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, и положив

$$
I_0 = \iint\limits_{\Omega_0} 2\zeta(x, y, 0)\,d\sigma,
$$

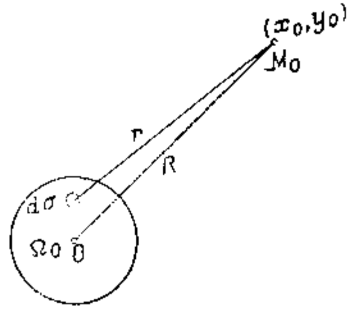

Рис. 62.

мы сможем написать:

$$
2\pi u(x_0, y_0, t_0) = -\frac{I_0 y_0}{R^2}\left(1 - e^{-\frac{\rho R^2}{4\mu t_0}}\right),
$$

$$
2\pi v(x_0, y_0, t_0) = \frac{I_0 x_0}{R^2}\left(1 - e^{-\frac{\rho R^2}{4\mu t_0}}\right),
$$

где I_0 интенсивность вихря в начальный момент.

Мы видим, что эти формулы очень близки к тем, которые уже нам известны для вихря, сводящегося к бесконечно тонкой трубке. Величина скорости во всякой точке будет равна:

$$
\frac{I_0}{2\pi R}\left(1 - e^{-\frac{\rho R^2}{4\mu t}}\right),
$$

при R заданном, она убывает, когда t растет. В момент t скорость достигает максимума для R, определенного из соотношения:

$$
1 + \frac{\rho R^2}{2\mu t} = e^{\frac{\rho R^2}{4\mu t}}.
$$

Расстояние R, соответствующее этому максимуму, следовательно, пропорционально $\sqrt{\frac{\mu t}{\rho}}$. Вихрь $2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ для R достаточно большого имеет значение

$$|2\zeta| = \frac{\rho |I_0|}{4\pi\mu t} e^{-\frac{\rho R^2}{4\mu t}};$$

он везде равен нулю, когда t бесконечно. Его наибольшие значения соответствуют начальному моменту или, по крайней мере, моменту, близкому к начальному.

Применяя тот же метод, можно также обобщить результаты Гельмгольца, относящиеся к случаю двух вихрей.

Можно получить эти результаты более прямым путем, делая их незав симыми от интегральных уравнений Oseen'a. Мы это сейчас покажем, воспользовавшись изящным методом, который I. Pérès любезно нам сообщил.

Вернемся, в самом деле, к единственному круговому вихрю, рассмотренному выше.

Очевидная комбинация из формул (15), с исключением давления p, показывает, что вихрь ζ удовлетворяет уравнению:

$$\mu\Delta\zeta = \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \tag{23}$$

мы уже отметили (стр. 258), что начальная симметрия, а потому и последующая, относительно точки O влечет соотношение:

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0;$$

отсюда следует, что функция ζ удовлетворяет здесь уравнению

$$\mu\Delta\zeta = \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{24}$$

Это последнее имеет присоединенным уравнение

$$\mu\Delta\theta + \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0; \tag{25}$$

частным решением (основным) оно, как легко видеть, будет иметь функцию:

$$\theta = \frac{1}{t_0 - t} e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu (t_0 - t)}}. \tag{26}$$

Из (24) и (25) мы получим:

$$\mu(\theta\Delta\zeta - \zeta\Delta\theta) = \rho \frac{\partial}{\partial t}(\theta\zeta),$$

где θ представляет функцию (26).

Проинтегрируем эту формулу по области S, заключенной между кривой C и маленькой окружностью с центром (x_0, y_0), радиус которой мы потом устремим к нулю; далее проинтегрируем результат по t между моментами 0 и t_0. Классические преобразования, примененные уже много раз, приводят к следующему результату:

$$4\pi\mu\zeta(x_0, y_0, t_0) = \rho \iint\limits_S \zeta(x, y, 0)\, \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0}\, d\sigma +$$

$$+ \mu \int\limits_0^t dt \int\limits_C \left(\theta \frac{d\zeta}{dn} - \zeta \frac{\partial\theta}{\partial n}\right) ds; \tag{27}$$

мы используем это уравнение таким же образом, как это мы сделали с уравнениями Oseen'а, рассмотренными выше.

В начальный момент $t = 0$ вихрь находится в круге Ω_0 радиуса a с центром в O и симметричен относительно O. Предположим, что в качестве C мы взяли окружность с центром в O, имеющую очень большой радиус; тогда тот член из (27), который содержит интеграл

$$\int\limits_C \left(\theta \frac{d\zeta}{dn} - \zeta \frac{\partial\theta}{dn}\right) ds,$$

в пределе исчезнет; это почти очевидно и проверяется без затруднений, коль скоро решение получено хоть один раз. Формула (27), следовательно, дает нам:

$$4\pi\mu\zeta(x_0, y_0, t_0) = \rho \iint\limits_{\Omega_0} \zeta(x, y, 0)\, \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0}\, d\sigma, \tag{28}$$

что дает нам выражение вихря ζ во всякий момент t_0, после начального и во всякой точке x_0, y_0.

Вычислим теперь функцию тока.

Совершенно так же, как в случае идеальной жидкости, уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

присоединенное к определению вихря

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

дает уравнение

$$\Delta\psi = -2\zeta,$$

где ψ функция тока т. е.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Имеем, следовательно, в точке $M'(x', y')$, положив $r' = M_0 M_1'$:

$$\psi(x', y', t_0) = \frac{1}{\pi} \underset{\substack{\text{по всей} \\ \text{плоскости}}}{\int\int} \zeta(x_0, y_0, t_0) \lg \frac{1}{r'} d\sigma_0,$$

и затем, согласно (28):

$$\psi(x', y', t_0) = \frac{\rho}{4\mu\pi^2} \int\int d\sigma \zeta(x, y, 0) \int\int \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0} \lg \frac{1}{r'} d\sigma_0. \tag{29}$$

Интеграл, который нужно вычислить прежде всего,

$$I = \int\int \frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0} \lg \frac{1}{r'} d\sigma_0,$$

вычисляется непосредственно: в самом деле мы здесь имеем логарифмический потенциал для масс, распределенных в плоскости с плотностью, зависящей только от $r = MM_0$. Положим $r'' = MM'$; известно (P. Appell, Mécanique, t. III, p. 125), что логарифмический потенциал однородной окружности постоянен внутри окружности и что его значение снаружи таково, как будто вся масса сосредоточена в центре окружности. Заметив это, выполним интегрирование I, разбивая плоскость на элементарные круговые колечки с общим центром M. Для колечек радиуса $r < r''$ соответствующая часть потенциала выразится так:

$$\left(\lg \frac{1}{r''}\right) 2\pi \int_0^{r''} \frac{r e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0} dr;$$

что же касается колечек радиуса больше r'', то их часть в выражении потенциала будет одинакова, вычисляем ли мы ее в M' или в M; она будет, следовательно,

$$2\pi \int_{r''}^{\infty} \frac{r e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0} \lg \frac{1}{r} dr,$$

откуда, окончательно:

$$I = 2\eta \left(\lg \frac{1}{r''}\right) \int_0^{r''} \frac{r e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0} dr + 2\pi \int_{r''}^{\infty} \frac{r e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0} \lg \frac{1}{r} dr.$$

Элементарное интегрирование дает:

$$\int_0^{r''} \frac{re^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0}\,dr = \frac{2\mu}{\rho}\left[1 - e^{-\frac{\rho r''^2}{4\mu t_0}}\right],$$

$$\int_{r''}^{\infty} \frac{re^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{t_0}\lg\frac{1}{r}\,dr = \left[-\frac{2\mu}{\rho}e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}\lg\frac{1}{r}\right]_{r''}^{\infty} +$$

$$+\frac{2\mu}{\rho}\int_{r''}^{\infty} e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}\left(-\frac{1}{r}\right)dr.$$

Делая замены и приведения в I, получаем:

$$I = \frac{4\mu\pi}{\rho}\lg\frac{1}{r''} - \frac{4\mu\pi}{\rho}\int_{r''}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{r}\,dr;$$

это же выражение отличается только на постоянную (которой, очевидно, можно пренебречь) от количества

$$I' = -\frac{4\mu\pi}{\rho}\int_0^{r''}\frac{1 - e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{r}\,dr.$$

Внося это в (29), заменяя при этом I через I', что изменяет ψ только на не имеющую значения постоянную, видим, что окончательно получим, слегка видоизменив обозначения:

$$\psi(x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{\Omega_0}\zeta(x, y, 0)\,d\sigma\int_0^r\frac{1 - e^{-\frac{\rho r^2}{4\mu t_0}}}{r}\,dr,$$

или иначе:

$$\psi(x_0, y_0, t_0) = -\frac{1}{\pi}\int\int_{\Omega_0}\zeta(x, y, 0)\,\varphi_1(r)\,d\sigma,$$

где $\varphi_1(r)$ функция, определенная равенством (6).

Из написанного равенства, с помощью формул

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

получаем значения u и v, очевидно, тождественные с полученными из формул (22). Мы видим, следовательно, что результаты применения обоих методов совпали. Однако, мы дали, прежде всего, применение интегральным уравнениям Oseen'a, чтобы сделать еще более очевидным большую мощь этих уравнений, столь существенных во многих вопросах [см. работы C. W. Oseen'a и наши лекции по гидродинамике (Leçons sur l'Hydrodynamique, Paris, Gauthier = Villars, 1929)].

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Глава I.

Общие классические понятия

Глава II.

Определение скоростей по заданным вихрям

Глава III.

Плоские движения. Бесконечно тонкие вихри. Канонические уравнения.

Глава IV.

Вихри Бенара-Кармана. Регулярная цепочка. Две симметричные цепочки. Две альтернированные цепочки. Устойчивость этих конфигураций.

Стр.

Беларускі Дзярж. ...
Погашено
Бібліятэка

СС — 11

Изд. № 2.
Отв. редактор *Н. В. Розе*. Техн. редактор *Р. В. Эмдина*.
Сдано в набор 23/I 1936 г. Подписано к печати 10/VII 1936 г.
Формат бумаги $62\times94^{1}/_{16}$. Бумажных листов $8^{5}/_{16}$. Тип. зн. в 1 бум. л. 106.636.
Ленгорлит № 14780. Тираж 3.000. Учетно-авторских листов 16,7. Заказ № 3088.

2-я типография ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

-392401-

1936

RLST
0000000502713
Депозитарий