

ННМП

БССР

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

БЕЛОРУССКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ

ИНСТИТУТ

ВЫПУСК

1

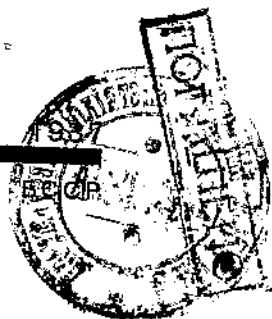
ДОЦЕНТ Н. В. ВЕДЕНИКОВ

КРИВОЙ БРУС

ПОД НАГРУЗКОЙ НОРМАЛЬНОЙ
К ПЛОСКОСТИ КРИВИЗНЫ

МИНСК

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО



Депозитарий

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

~~ав. 5454/2~~

~~629~~

~~В-29~~

Выпуск I

Доцент Н. В. ВЕДЕНИКОВ

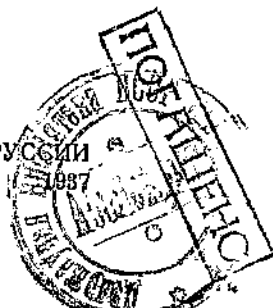
КРИВОИ БРУС

ПОД НАГРУЗКОЙ НОРМАЛЬНОЙ
К ПЛОСКОСТИ КРИВИЗНЫ

1305402

РЕСПУБЛИКАНСКОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
БИБЛИОТЕКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО БЕЛОРУССКИИ
МИНСК



ПРЕДИСЛОВИЕ.

В настоящей работе рассматривается исключительно однопролетный брус с круговой осью, жестко защемленный на опорах, работающий под нагрузкой, расположенной на оси бруса нормально к плоскости кривизны его.

Разобраны случаи несимметричного расположения нагрузок как сосредоточенной, так и равномерно распределенной.

Для случаев несимметричного расположения нагрузки использован известный прием разложения этой нагрузки на симметричную и антисимметричную.

В результате даются формулы для определения изгибающих и крутящих моментов в любых сечениях пролета и реактивных поперечных сил на опорах. Для случая нагрузки, равномерно распределенной по всему пролету, даны численные значения изгибающего и крутящего моментов на опоре и по середине пролета в зависимости от центрального угла и коэффициента жесткости.

Для этого же случая дан графический способ построения эпюр изгибающего и крутящего моментов, основанный на геометрической интерпретации закона изменения этих моментов по пролету бруса.

На стр. 65 и 66 указано на исключительно важное влияние высоких значений коэффициента жесткости на деформации бруса, что имеет место обычно в шведлерах и двутаврах. Напр., в двутавре высокого номера коэффициент жесткости достигает значения 500. В таких случаях при малом численном значении крутящего момента по сравнению с моментом изгибающим относительная угловая деформация от кручения во много раз может превзойти относительную угловую деформацию от изгиба, и, следовательно, напряжения, вызываемые крутящим моментом, не могут оставаться неучтенными.

На это обстоятельство указал проф. А. Феппл в 1921 г., и оно должно учитываться при расчете кривого бруса.

Минск, 1937 г.

Н. Ведениктов.

I. Общие соображения.

Определение внутренних усилий в кривом брусѣ, нагруженном любой нагрузкой, расположенной в плоскости его кривизны, относится к числу вопросов, с достаточной полнотой освещенных в литературе, и поэтому, затруднений не представляет даже для начинающих работу в области проектирования молодых инженеров, так как это входит в программу статики сооружений, изучаемой во ВТУЗ'ах.

Расчет же кривого бруса, находящегося под нагрузкой действующей нормально плоскости его кривизны, освещен в литературе недостаточно. Проф. С. П. Тимошенко даны расчетные формулы для частного случая: при центральном угле $= 180^\circ$ и нагрузке, равномерно распределенной по всему пролету¹.

Для произвольного центрального угла и для нагрузки, сосредоточенной и равномерно распределенной по части пролета, расчетных формул в литературе не имеется.

Между тем широкое применение такого рода кривых брусѣв в строительстве говорит о необходимости заполнить этот пробел.

Предлагаемые законченные решения задач с расчетными формулами для кругового бруса при произвольном центральном угле и любым образом расположенных нагрузках, сосредоточенной или равномерной, можно сказать с уверенностью, дадут проектирующему значительную экономию труда и времени.

II. Дифференциальные уравнения равновесия¹.

Координатная система.

Брусек AB , имеющий круговую ось, предполагается расположенным в горизонтальной плоскости AOB (черт. 1).

Опорные точки A и B жестко защемлены. Горизонтальные главные оси инерции поперечных сечений идут по радиусам круга.

Начало координат (полярных) находится в центре круга O . Углы отсчитываются от равноделящей OC в ту и другую сторону. Направление CA положительно, CB —отрицательно.

¹ Тимошенко. Теория упругости, изд. 1916 г., т. II, § 19.

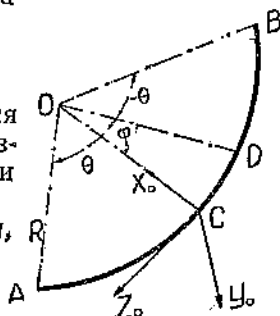
Предполагаем, что каждой точке D оси бруса принадлежит предназначенная только ей координатная система X_o, Y_o, Z_o , имеющая начало в этой точке. Ось X_o направлена по радиусу круга, Y_o —по вертикали и Z_o по касательной.

Правило знаков.

Поступательные перемещения считаются положительными, когда их направления совпадают с положительными направлениями осей координат.

Повороты считаются положительными, когда они имеют направления:

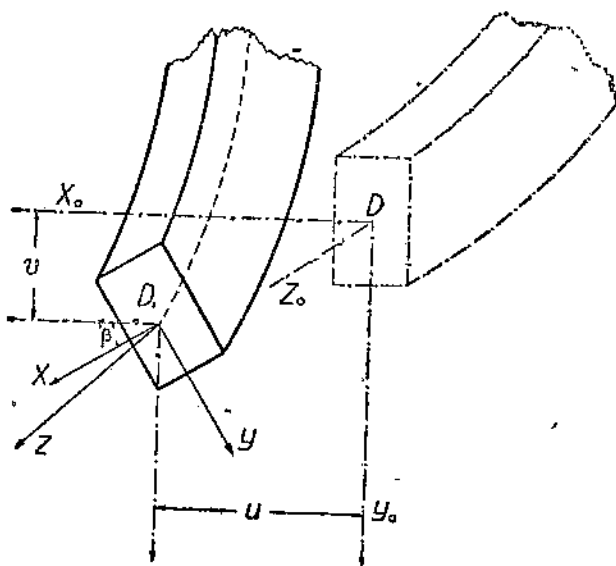
- от X_o к Y_o
- " Y_o " Z_o
- " Z_o " X_o



Черт. 1.

Определение перемещений.

Предположим, что точка D оси бруса переместилась в новое положение D_1 (черт. 2), которое она получила, скользя по



Черт. 2.

плоскости $X_o Y_o$. Перемещением в направлении оси бруса, по их малости, пренебрегаем. Деформированное состояние бруса определится двумя линейными перемещениями:

- U —по оси X_o
- V —по оси Y_o

и углом поворота β вокруг оси Z_o .

и ϕ соответствующим.

Зная U , V и β , мы сможем определить положение сечения после деформации.

Кривизна оси бруса.

Деформация бруса будет сопровождаться изменением первой кривизны K_0 , которая получит значение K_1 . Кроме того появится вторая кривизна K_2 .

Чтобы установить связь между основными элементами деформации U , V и β , а также первой и второй кривизной, надо связать элементы, характеризующие кривизну, с принятыми координатными системами.

До деформации первая кривизна бруса была

$$K_0 = \frac{1}{R}. \quad (1)$$

После деформации значение первой кривизны будет

$$K_1 = \frac{1}{\rho_1} \quad (2)$$

и, кроме того, появится вторая кривизна

$$K_2 = \frac{1}{\rho_2}. \quad (3)$$

Представим себе, что начало координат D (черт. 1) движется вдоль оси бруса со скоростью, равной единице, при чем оси X_0 , Y_0 и Z_0 при этом движении будут принимать принадлежащие им направления: ось X_0 — по радиусу круга, ось Z_0 — по касательной к дуге круга.

Очевидно, что координатная система X_0 , Y_0 , Z_0 будет вращаться вокруг оси Y_0 с угловой скоростью, равной $\frac{1}{R}$, так

как $\frac{ds}{dt} = 1$, $ds = dt$ и

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

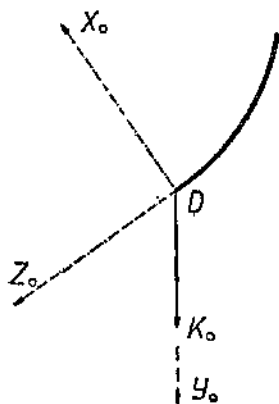
Отсюда следует, что значение кривизны мы можем изобразить, как скорость, вектором соответственным образом отложенным на оси Y_0 . На черт. 3 указано положительное направление K_0 .

После деформации точка D переместится в положение D_1 (черт. 2). По установленному принципу векториальности, значения кривизны K_1 и K_2 могут быть изображены векторами, отложенными на осях X и Y . Кроме того, вследствие кручения оси бруса, на оси Z появится вектор, изображающий

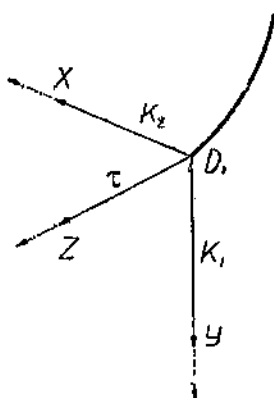
1 Тугомоучения τ (черт. 4).

Формулы, связывающие элементы деформаций и кривизну.

После этих предварительных замечаний относительно векториальности значений кривизны можно без труда установить

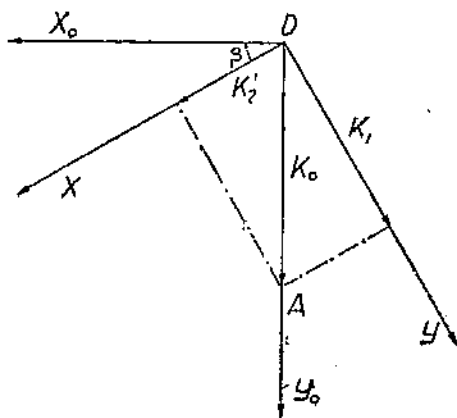


Черт. 3.



Черт. 4.

зависимость между K_0 , с одной стороны, и между K_1 и K_2 с другой, при повороте координатной системы XYZ вокруг оси Z на некоторый угол β (черт. 5).



Черт. 5

Исходя из соображений, что перемещения весьма малы, мы можем использовать принцип независимого влияния отдельных факторов на деформацию, рассматривая влияние каждого фактора в отдельности и считая остальные факторы отсутствующими.

Предположим, что перемещения U и V отсутствуют, а имеется только перемещение β —поворот сечения вокруг оси Z . Тогда ясно, что суммарная угловая скорость K_0 спроектируется на новые координатные оси в виде векторов K'_1 и K'_2 .

Из чертежа видно, что

$$K'_1 = K_0 \cos \beta$$

$$K'_2 = K_0 \sin \beta.$$

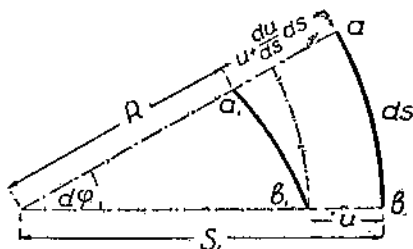
По малости угла β можно считать $\cos \beta = 1$ и $\sin \beta = \beta$ и переписать предыдущие выражения так:

$$K'_1 = K_0 \quad (4)$$

$$K'_2 = K_0 \beta. \quad (5)$$

Предположим теперь, что $\beta = 0$ и $V = 0$ и рассмотрим влияние перемещения U .

Очевидно, что перемещение в направлении радиуса не окажет влияния на кривизну K_2 . Для определения же значения K_1'' рассмотрим деформацию бесконечно малого элемента ab (черт. 6). Положим, что элементарная дуга $ab = ds$ после деформации займет положение $a_1 b_1$.



Черт. 6.

Из чертежа видно, что

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}; \quad K_1'' = \frac{1}{\rho_1} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{ds + \delta ds}$$

$$\delta d\varphi = \frac{du}{ds} + \frac{d^2 u}{ds^2} ds - \frac{du}{ds} = \frac{d^2 u}{ds^2} ds$$

$$\delta ds = ds - \left(ds + ds \frac{u}{R} \right) = -ds \frac{u}{R}.$$

Подставив эти значения в выражение K_1'' , получим:

$$K_1'' = \frac{d\varphi \pm \frac{d^2 u}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{u}{R} \right)}.$$

Отбросив величины высшего порядка малости, получим:

$$K_1'' = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{u}{R} + \frac{d^2 u}{ds^2}.$$

Вычтя отсюда $K_0 = \frac{d\varphi}{ds}$, найдем:

$$K_1'' - K_0 = \frac{d\varphi}{ds} \frac{u}{R} + \frac{d^2 u}{ds^2},$$

но так как $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = K_0$, то это выражение переписывается так:

$$K_1'' = K_0 + K_0^2 u + \frac{d^2 u}{ds^2}. \quad (6)$$

Перемещение U на K_2 и τ влияния не окажет.

Положим далее, что β и U отсутствуют, а имеется только перемещение V .

Это перемещение не повлияет на первую кривизну и вызовет только появление второй кривизны.

Так как центр кривизны будет лежать на отрицательной части оси Y , то эта кривизна будет отрицательной.

Пользуясь формулой (6), можем написать по аналогии

$$K_2'' = -\frac{d^2 v}{ds^2}. \quad (7)$$

Перемещение по оси V , как видно из чертежа 7, повлечет за собой образование угла между осями Z_0 и Z , который выразится производной $\frac{dv}{ds}$,

представляющей собой $\tan$ угла между касательными к оси бруса до и после деформации.

Представим себе, что координатная система XYZ движется по оси бруса со скоростью, равной единице, при чем ось бруса получила перемещение V . Очевидно, что при этом движении произойдет вращение вокруг оси X с угловой скоростью, равной K_2 , и вокруг оси Y — с угловой скоростью K_0 .

Таким образом, перемещение V вызовет угол кручения τ_1 , который определится как проекция угловой скорости K_0 на ось Z :

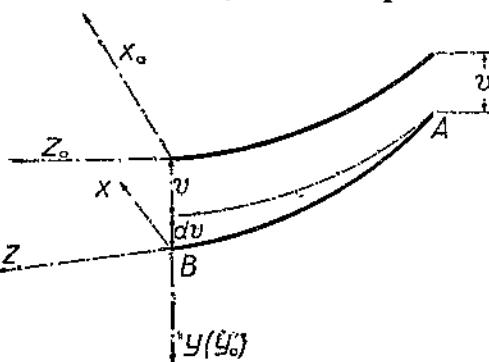
$$\tau_1 = K_0 \frac{dv}{ds}. \quad (8)$$

Обратившись к черт. 5, мы заметим, что поворот поперечного сечения бруса на угол β дает угол кручения

$$\tau_2 = \frac{d\beta}{ds}. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) получим полный угол кручения:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{d\beta}{ds} + K_0 \frac{dv}{ds} \quad (10)$$



Черт. 7.



Из формул (4) и (6) получим:

$$K_1 - K_0 = K_0^2 u + \frac{d^2 u}{ds^2}. \quad (11)$$

Из формул (5) и (7) найдем:

$$K_2 = K_0 \beta - \frac{d^2 v}{ds^2}. \quad (12)$$

Формулы (10), (11) и (12) являются основными формулами, выражающими зависимость между элементами деформаций: углом кручения, первой и второй кривизной. Теперь надо позаботиться о том, чтобы выразить угол кручения, кривизну первую и вторую через силовые факторы.

Обозначим момент, изгибающий брус в плоскости ZY , через M_1 и жесткость при изгибе в этой плоскости через B_1 .

Тогда мы можем написать:

$$\frac{M_1}{B_1} = K_2. \quad (13)$$

Если M_2 будет момент, изгибающий брус в плоскости XZ и B_2 соответствующая жесткость бруса при изгибе, то

$$\frac{M_2}{B_2} = K_1 - K_0. \quad (14)$$

Обозначая жесткость при кручении через C и через M_3 крутящий момент, мы можем написать

$$\frac{M_3}{C} = \tau. \quad (15)$$

Из (12) и (13) получим:

$$\frac{M_1}{B_1} = K_0 \beta - \frac{d^2 v}{ds^2}. \quad (16)$$

Из (11) и (14):

$$\frac{M_2}{B_2} = K^2 u + \frac{d^2 u}{ds^2}. \quad (17)$$

Из (10) и (15):

$$\frac{M_3}{C} = \frac{d\beta}{ds} + K_0 \frac{dv}{ds}. \quad (18)$$

Перейдем теперь к выводу уравнений равновесия элементарного участка бруса.

Дифференциальные уравнения равновесия.

Двумя бесконечно близкими сечениями, нормальными к оси бруса, выделим элемент длиной ds (черт. 8) и напомним условия равновесия этого элемента.

Выделенный элемент будет находиться в равновесии, если по сечениям m_1 , n_1 и m будут приложены усилия, эквивалентные усилиям, действовавшим на отброшенные части бруса.

Отложим на соответствующих осях:

T_2 —касательное усилие, действующее по оси Y .

M_1 —момент изгибающий в плоскости YZ .

M_3 —крутящий момент вокруг оси Z .

Касательное усилие T_1 в направлении оси X будет отсутствовать, а нормальным усилием и изгибающим моментом M_2 в плоскости XZ пренебрегаем.

Направления усилий будем считать положительными, когда они совпадают с положительным направлением координатных осей. Направления моментов считаем положительными тогда, когда они вращают координатную систему по часовой стрелке, т.е. момент M_1 положителен, когда он вращает в направлении от Y к Z , а M_3 —при вращении в направлении от X к Y .

Правило знаков моментов указано на черт. 9.

В дальнейшем мы будем считать брус нагруженным вертикальной нагрузкой с интенсивностью q весовых единиц на единицу длины бруса, при чем q будем считать постоянным.

Напишем условия равновесия выделенного элемента, пренебрегая влиянием деформаций. Проекция усилий на оси Y и Z будут отсутствовать.

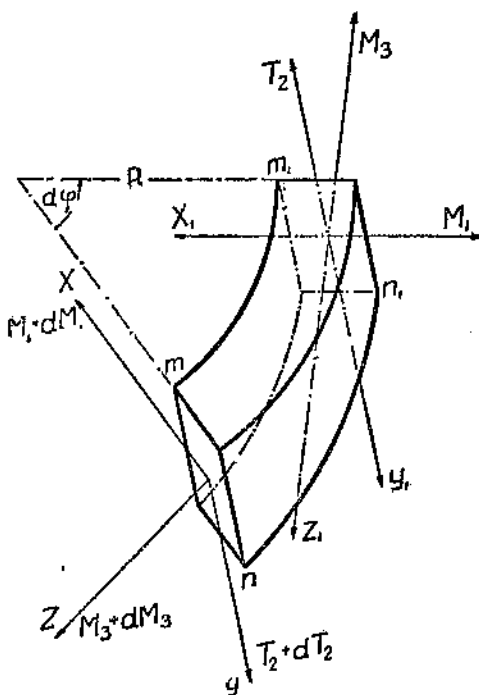
Проекция усилий на ось Y :

$$dT_2 + qds = 0.$$

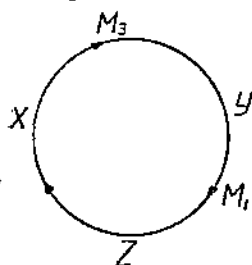
Предыдущее уравнение можно переписать в другом виде, заменив ds через $Rd\varphi$:

$$\frac{dT_2}{d\varphi} + qR = 0. \quad (19)$$

Перейдем к проекциям моментов.



Черт. 8.



Черт. 9.

Проекция на ось X :

$$M_1 + dM_1 - M_1 + (M_3 + dM_3)d\varphi - T_2 ds = 0.$$

Пренебрегая произведением $dM_3 \cdot d\varphi$, как величиной высшего порядка малости, получим:

$$dM_1 + M_3 d\varphi - T_2 ds = 0$$

или

$$T_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{dM_1}{d\varphi} + M_3 \right). \quad (20)$$

Проекция моментов на ось Y отсутствует.

Проекция на ось Z :

$$M_3 + dM_3 - M_3 - M_1 d\varphi = 0$$

или

$$\frac{dM_3}{d\varphi} = M_1. \quad (21)$$

III. Дифференциальное уравнение изогнутой оси и его интегрирование.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса может быть получено из условий равновесия (19, 20, 21) и из условий (16) и (18), связывающих моменты с деформациями.

Из условия (16) мы имеем:

$$\frac{M_1}{B_1} = K_0 \beta - \frac{d^3 v}{ds^2}$$

и из условия (18) —:

$$\frac{M_3}{C} = \frac{d\beta}{ds} + K_0 \frac{dv}{ds}.$$

Из (16) имеем:

$$K_0 \frac{d\beta}{ds} = \frac{dM_1}{ds} \frac{1}{B_1} + \frac{d^3 v}{ds^3},$$

а из (18) —:

$$K_0 \frac{d\beta}{ds} = \frac{K_0}{C} M_3 - K_0^2 \frac{dv}{ds}.$$

Приравняв оба эти выражения, получим:

$$\frac{1}{B_1} \frac{dM_1}{ds} + \frac{d^3 v}{ds^3} = \frac{K_0}{C} M_3 - K_0^2 \frac{dv}{ds}$$

или

$$\frac{K_0}{C} M_3 = \frac{1}{B_1} \frac{dM_1}{ds} + \frac{d^3 v}{ds^3} + K_0^2 \frac{dv}{ds}.$$

Приняв $\frac{B_1}{C} = n$ и подставив вместо ds его выражение через φ , получим:

$$nR^2 M_3 = R^2 \frac{dM_1}{d\varphi} + B_1 \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right).$$

Взяв производную этого выражения, найдем:

$$nR^2 \frac{dM_3}{d\varphi} = R^2 \frac{dM_1}{d\varphi} + B_1 \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right).$$

Заменив $\frac{dM_3}{d\varphi}$ через M_1 на основании формулы (21), получим:

$$nR^2 M_1 - R^2 \frac{d^2 M_1}{d\varphi^2} = B_1 \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right). \quad (22)$$

Из (20) имеем: $R \frac{dT^2}{d\varphi} = \frac{d^2 M_1}{d\varphi^2} + \frac{dM_3}{d\varphi}.$

Подставив сюда из (19) значение $\frac{dT^2}{d\varphi}$, а из (21)—значение $\frac{dM_3}{d\varphi}$, найдем:

$$\frac{d^2 M_1}{d\varphi^2} + M_1 + qR^2 = 0, \quad (23)$$

Полагая $M_1 = e^{m\varphi}$, перепишем это уравнение без свободного члена:

$$e^{m\varphi}(m^2 + 1) = 0,$$

откуда найдем:

$$m_1 = +i$$

$$m_2 = -i.$$

Следовательно общий интеграл уравнения (23) будет:

$$M_1 = A \cos \varphi + B \sin \varphi - qR^2. \quad (24)$$

Подставив в уравнение (22) значение $\frac{d^2 M_1}{d\varphi^2}$ из (23), получим:

$$nR^2 M_1 = M_1 R^2 + qR^4 = B_1 \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right)$$

или

$$M_1 = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - \frac{qR^4}{B_1} \right). \quad (25)$$

Подставив значение M_1 из (24), получим:

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi - qR^2 = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - \frac{qR^4}{B_1} \right).$$

Перепишем это выражение в другом виде:

$$\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{(n+1)R^2}{B_1} (A \cos \varphi + B \sin \varphi) + \frac{nqR^4}{B_1} = 0. \quad (26)$$

Это есть дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса. Полный интеграл этого уравнения найдем следующим образом: отыщем сначала полный интеграл предложенного уравнения

без второй части, а затем приступим к отысканию полного интеграла заданного уравнения.

Уравнение (26) без второй части напишется так:

$$\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0. \quad (27)$$

Полагая $V = e^{m\varphi}$, получим характеристическое уравнение:

$$m^4 + m^2 = 0$$

или

$$m^2(m^2 + 1) = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 0$$

$$m_3 = i$$

$$m_4 = -i.$$

Следовательно, полный интеграл уравнения (27) будет:

$$V = C_1' + C_2' \varphi + C_3' \cos \varphi + C_4' \sin \varphi. \quad (28)$$

Положив в уравнении (26)

$$\frac{A(n+1)R^2}{B_1} = C_5' \text{ и } \frac{B(n+1)R^2}{B_1} = C_6'.$$

Перепишем это уравнение в таком виде:

$$\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + C_5' \cos \varphi + C_6' \sin \varphi + \frac{nqR^4}{B_1}.$$

Применим способ вариации произвольных постоянных. Обозначим для краткости:

$$\frac{dC_1'}{d\varphi} = g_1; \quad \frac{dC_2'}{d\varphi} = g_2; \quad \frac{dC_3'}{d\varphi} = g_3 \text{ и } \frac{dC_4'}{d\varphi} = g_4.$$

Условия для нахождения g_1, g_2, g_3 и g_4 будут такие:

$$g_1 + g_2 \varphi + g_3 \cos \varphi + g_4 \sin \varphi = 0 \quad (\alpha)$$

$$g_3 - g_3 \sin \varphi + g_4 \cos \varphi = 0 \quad (\beta)$$

$$g_3 \cos \varphi + g_4 \sin \varphi = 0 \quad (\gamma)$$

$$g_3 \sin \varphi - g_4 \cos \varphi + C_5' \cos \varphi + C_6' \sin \varphi + \frac{nqR^4}{B_1} = 0. \quad (\delta)$$

Из (α) и (γ) находим:

$$g_1 + g_2 \varphi = 0$$

или

$$g_1 = -g_2 \varphi. \quad (\varepsilon_1)$$

Из (β) и (δ):

$$g_2 + C_5' \cos \varphi + C_6' \sin \varphi = 0$$

или

$$g_2 = -C_5' \cos \varphi - C_6' \sin \varphi - \frac{nqR^4}{B_1}. \quad (\varepsilon)$$

Из (ε_4) имеем после подстановки значения g_2 :

$$g_1 = C_5' \varphi \cos \varphi + C_6' \varphi \sin \varphi + \frac{nqR^4}{B_1} \varphi. \quad (8)$$

Затем, решив совместно (7) и (8), получим:

$$g_3 = -C_5' \cos \varphi \sin \varphi - C_6' \sin^2 \varphi - \frac{nqR^4}{B_1} \sin \varphi. \quad (9)$$

$$g_4 = C_5' \cos^2 \varphi + C_6' \sin \varphi \cos \varphi + \frac{nqR^4}{B_1} \cos \varphi. \quad (10)$$

Проинтегрируем выражения (e), (8), (9) и (10):

$$C_1' = C_1 + C_5' (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) + C_6' (-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{nqR^4 \varphi^2}{2}$$

$$C_2' = C_2 - C_5' \sin \varphi + C_6' \cos \varphi - \frac{nqR^4}{B_1} \varphi$$

$$C_3' = C_3 - C_5' \frac{\sin^3 \varphi}{2} + \frac{1}{2} C_6' (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi) + \frac{nqR^4}{B_1} \cos \varphi$$

$$C_4' = C_4 + \frac{1}{2} C_5' (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi) - C_6' \frac{\cos^2 \varphi}{2} + \frac{nqR^4}{B_1} \sin \varphi.$$

Подставив значения коэффициентов C_1' , C_2' , C_3' и C_4' в уравнение (28), получим полный интеграл заданного уравнения (26):

$$V = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + \\ + C_6 \varphi \sin \varphi - \frac{nqR^4 \varphi^2}{2B_1}. \quad (29)$$

Напишем производные этой функции:

$$\frac{dv}{d\varphi} = C_2 - C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi + C_5 (-\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) + \\ + C_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{nqR^4}{B_1} \varphi. \quad (30)$$

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = -C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi - C_5 (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi) - \\ - C_6 (\varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi) - \frac{nqR^4}{B_1}. \quad (31)$$

$$\frac{d^3 v}{d\varphi^3} = C_3 \sin \varphi - C_4 \cos \varphi + C_5 (\varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi) - \\ - C_6 (\varphi \cos \varphi + 3 \sin \varphi). \quad (32)$$

$$\frac{d^4 v}{d\varphi^4} = C_4 \cos \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 (\varphi \sin \varphi + 4 \sin \varphi) + \\ + C_5 (\varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi). \quad (33)$$

После подстановки значений производных в заданное дифференциальное уравнение не трудно видеть, что функция (29) удовлетворяет этому уравнению.

Подставив в выражение (25) полученные значения производных; найдем изгибающий момент:

$$M_1 = \frac{B_1}{(n+1)R^2} (2C_5 \sin \varphi - 2C_6 \cos \varphi). \quad (34)$$

Из (21) имеем:

$$M_3 = \int M_1 d\varphi + \text{const.}$$

Следовательно, по выраж. (25):

$$M_3 = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} - \frac{qR}{B_1} \varphi \right) + \text{const.}$$

Подставив сюда (30) и (32), найдем крутящий момент:

$$M_3 = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left(C_2 - 2C_5 \cos \varphi - 2C_6 \sin \varphi - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} \varphi \right). \quad (35)$$

Подставив полученные значения M_1 и M_3 в (20), найдем перерезывающую силу:

$$T_2 = \frac{B_1}{(n+1)R^3} \left[C_2 - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} \varphi \right]. \quad (36)$$

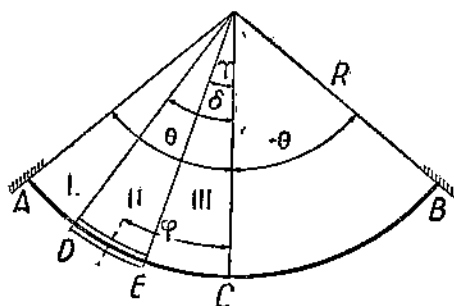
Перейдем теперь к определению M_1 , M_3 и T_2 для частных случаев загрузки балки:

1) балки загруженной равномерно распределенной нагрузкой по части пролета и

2) балки под нагрузкой сосредоточенной.

Для упрощения выкладок воспользуемся методом Андрэ — разложение нагрузок на прямо и косо симметричные.

IV. Балка под нагрузкой равномерно распределенной по части пролета.



Балка с круговой осью радиуса R и центральным углом 2θ загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $2q$, как указано на черт. 10.

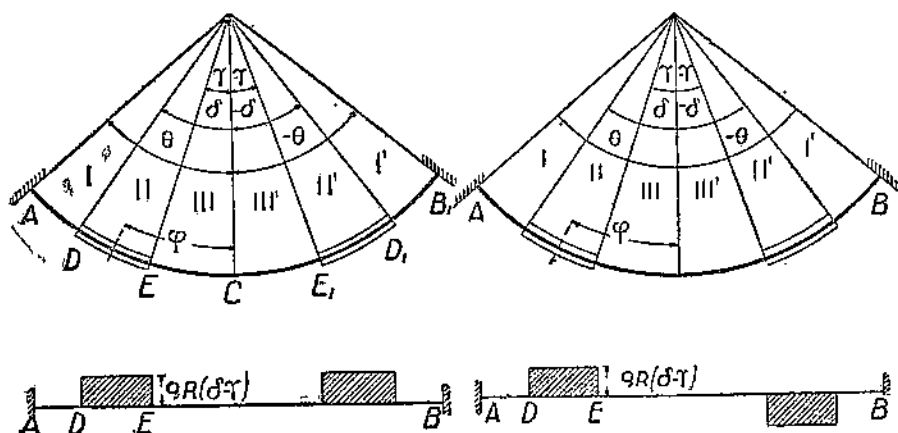
Вместо заданной нагрузки рассмотрим в отдельности симметричную нагрузку (чертеж 10 а) и антисимметричную (чертеж 10 б).

а) Нагрузка симметричная.

В этом случае необходимо рассмотреть каждый из участков балки I, II и III в отдель-

Черт. 10.

Постоянные коэффициенты, входящие в уравнение упругой линии и в выражения моментов, определяются из условий, имеющих на опорах, где прогиб, угол поворота сечения и угол



Черт. 10a.

Черт. 10b.

наклона касательной равны нулю, из условий непрерывности деформаций в сечениях пограничных между I—II и II—III участками и, наконец, из условия симметричности нагрузки.

I участок.

Уравнение упругой линии можно написать по (29) так:

$$V_1 = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi. \quad (37)$$

Соответственное значение производных:

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = C_2 - C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi - C_5 (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi) + C_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi). \quad (38)$$

$$\frac{d^2 v_1}{d\varphi^2} = -C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi - C_5 (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi) - C_6 (\varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi).$$

$$\frac{d^3 v_1}{d\varphi^3} = C_3 \sin \varphi - C_4 \cos \varphi + C_5 (\varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi) - C_6 (\varphi \cos \varphi + 3 \sin \varphi).$$

$$\frac{d^4 v_1}{d\varphi^4} = C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 (\varphi \cos \varphi + 4 \sin \varphi) + C_6 (\varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi).$$

Изгибающий момент:

$$M_1^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} (2C_5 \sin \varphi - 2C_6 \cos \varphi). \quad (39)$$

Крутящий момент:

$$M_{\delta}^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} (C_2 - 2C_5 \cos \varphi - 2C_6 \sin \varphi). \quad (40)$$

Перерезывающая сила по форм. (36) напишется так:

$$T_2^{\text{II}} = \frac{B_1 C_2}{(n+1)R^3}.$$

Вследствие симметричности нагрузки, реакция левой опоры будет равна половине нагрузки.

Следовательно:

$$T_2^{\text{II}} = \frac{B_1 C_2}{(n+1)R^3} = -qR(\delta - \gamma). \quad (41)$$

$$C_2 = -\frac{qR^4(n+1)(\delta - \gamma)}{B_1}. \quad (42)$$

Угол поворота сечения по форм. (16) выразится так:

$$R\beta_1 = \frac{M_1}{B_1} R^3 + \frac{d^2 v}{d\varphi^2}.$$

Подставив сюда значения M_1 и $\frac{d^2 v}{d\varphi^2}$, получим:

$$R\beta_1 = -C_3(n+1)\cos \varphi - C_4(n+1)\sin \varphi - C_5[(n+1)\varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + C_6[2n \cos \varphi - (n+1)\varphi \sin \varphi]. \quad (43)$$

II участок.

Уравнение упругой линии:

$$V_2 = D_1 + D_2 \varphi + D_3 \cos \varphi + D_4 \sin \varphi + D_5 \varphi \cos \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi - \frac{nqR^4}{2B_1} \varphi^2. \quad (44)$$

Производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_2}{d\varphi} &= D_2 - D_3 \sin \varphi + D_4 \cos \varphi - D_5(\varphi \sin \varphi - \cos \varphi) + \\ &\quad + D_6(\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{nqR^4}{B_1} \varphi \\ \frac{d^2 v_2}{d\varphi^2} &= -D_3 \cos \varphi - D_4 \sin \varphi - D_5(\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi) - \\ &\quad - D_6(\varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi) - \frac{nqR^4}{B_1} \\ \frac{d^3 v_2}{d\varphi^3} &= D_3 \sin \varphi - D_4 \cos \varphi + D_5(\varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi) - \\ &\quad - D_6(\varphi \cos \varphi + 3 \sin \varphi) \\ \frac{d^4 v_2}{d\varphi^4} &= D_3 \cos \varphi + D_4 \sin \varphi + D_5(\varphi \cos \varphi + 4 \sin \varphi) + \\ &\quad + D_6(\varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Изгибающий момент:

$$M_1^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[2D_6 \sin \varphi - 2D_6 \cos \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \right]. \quad (46)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[D_2 - 2D_5 \cos \varphi - 2D_5 \sin \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \varphi \right]. \quad (47)$$

Угол поворота:

$$R\beta_2 = -D_3(n+1) \cos \varphi - D_4(n+1) \sin \varphi - D_5[(n+1)\varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + D_6[(n+1)\varphi \sin \varphi + 2n \cos \varphi] - \frac{qR^4(n+1)^2}{B_1}. \quad (48)$$

Перерезывающая сила:

$$T_2^{\text{II}} = T_2^{\text{I}} + qR(\delta - \varphi) = -qR(\delta - \gamma) + qR(\delta - \varphi). \\ T_2^{\text{II}} = -qR(\varphi - \gamma). \quad (49)$$

Но так как по формуле (36)

$$T_2^{\text{II}} = \frac{B_1 D_2}{(n+1)R^3} - qR\varphi \quad (50)$$

и по формуле (41)

$$T_2^{\text{I}} = \frac{B_1 C_2}{(n+1)R^3}, \quad (51)$$

то выражение (49) после подстановки вместо T_2^{II} и T_2^{I} их значений из (50) и (51) перепишется так:

$$D_2 = C_2 + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \delta.$$

Подставив из (42) значение C_2 , найдем:

$$D_2 = \frac{qR^4(n+1)\gamma}{B_1}. \quad (52)$$

III участок.

Уравнение упругой линии напишется так:

$$V_3 = E_1 + E_2 \varphi + E_3 \cos \varphi + E_4 \sin \varphi + E_5 \varphi \cos \varphi + E_6 \varphi \sin \varphi.$$

Вследствие симметричности нагрузки кривая изогнутой оси на участке III и III' будет симметрична. Поэтому $E_2 \varphi + E_4 \sin \varphi + E_5 \varphi \cos \varphi = 0$ и на этом основании уравнение кривой напишется так:

$$V_3 = E_1 + E_3 \cos \varphi + E_6 \varphi \sin \varphi. \quad (53)$$

Тогда по формуле (34) изгибающий момент

$$M_1^{\text{III}} = -\frac{B_1(n+1)}{R^2} \cdot 2E_6 \cos \varphi \quad (54)$$

и по формуле (35)—крутящий момент

$$M_3^{\text{III}} = -\frac{B_1(n+1)}{R^2} \cdot 2E_6 \sin \varphi. \quad (55)$$

Угол поворота сечения по формуле (16):

$$R\beta_3 = -D_3(n+1)\cos\varphi + E_3[(n+1)\varphi\sin\varphi + 2n\cos\varphi]. \quad (56)$$

Перерезывающая сила:

$$T_2^m = 0.$$

Получив выражение моментов M_1 и M_3 для трех участков балки, мы можем сократить число произвольных постоянных, исходя из соображения, что в пограничных сечениях значения моментов должны иметь одинаковые числовые величины, по какой-бы формуле они ни были определены, по формуле правого или по формуле левого участка.

При $\varphi = \delta$; $M_1^I = M_1^{II}$ и $M_3^I = M_3^{II}$.

Из (39) и (46) имеем:

$$2C_5\sin\delta - 2C_6\cos\delta = 2D_5\sin\delta - 2D_6\cos\delta - \frac{qR^4(n+1)}{B_1}. \quad (57)$$

Из (40) и (47):

$$C_2 - 2C_5\cos\delta - 2C_6\sin\delta = D_2 - 2D_5\cos\delta - 2D_6\sin\delta - \frac{qR^4(n+1)}{B_1}\delta.$$

Подставив вместо D_2 его значение из (52), получим:

$$2C_5\cos\delta + 2C_6\sin\delta = 2D_5\cos\delta + 2D_6\sin\delta. \quad (58)$$

Решив совместно (57) и (58), найдем:

$$C_5 = D_5 + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1}\cos\delta. \quad (59)$$

$$C_6 = D_5 - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1}\sin\delta. \quad (60)$$

При $\varphi = \gamma$; $M_1^{II} = M_1^{III}$ и $M_3^{II} = M_3^{III}$.

Из (46) и (54) имеем при $\varphi = \gamma$:

$$2D_5\sin\gamma - 2D_6\cos\gamma - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} = -2E_5\cos\gamma. \quad (61)$$

Из (47) и (55):

$$D_2 - 2D_5\cos\gamma - 2D_6\sin\gamma - \frac{qR^4(n+1)}{B_1}\gamma = -2E_5\cos\gamma.$$

Подставив сюда значение D_2 из (52), получим:

$$2D_5\cos\gamma + 2D_6\sin\gamma = 2E_5\cos\gamma. \quad (62)$$

Решив совместно (61) и (62), найдем:

$$D_5 = \frac{qR^4(n+1)\sin\gamma}{2B_1}. \quad (63)$$

$$E_5 = D_5 + \frac{qR^4(n+1)\cos\gamma}{2B_1}. \quad (63')$$

Подставив значение D_5 в (60), получим:

$$C_6 = -\frac{qR^4(n+1)}{2B_1}(\sin\delta - \sin\gamma). \quad (64)$$

После подстановки значений C_2 и D_2 из (42) и (52), C_6 и C_6 из (59) и (64), D_6 и E_6 из (63) и (63') в соответствующие уравнения упругой линии, в выражения $R\beta$ и первые производные, т. е. $\frac{dv}{d\varphi}$, получим:

Для I участка.

Из 37:

$$V_1 = C_1 + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [\varphi \sin(\varphi - \delta) + \sin \gamma \varphi \cos \varphi] - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} (\delta - \gamma) \varphi. \quad (65)$$

Из (38):

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = -C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi + D_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [\varphi \cos(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \delta) + \sin \gamma (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)] - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} (\delta - \gamma). \quad (66)$$

Из (43):

$$R\beta_1 = -C_3(n+1) \cos \varphi - C_4(n+1) \sin \varphi + D_6[2n \cos \varphi - (n+1) \varphi \sin \varphi] + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \left\{ 2n \cos(\varphi - \delta) - (n+1) \varphi \sin(\varphi - \delta) - \sin \gamma [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] \right\}. \quad (67)$$

Для II участка.

Из (44):

$$V_2 = D_1 + D_3 \cos \varphi + D_4 \sin \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \sin \gamma \varphi \cos \varphi - \frac{qR^4 n}{2B_1} (\varphi - \gamma)^2. \quad (68)$$

Из (45):

$$\frac{dv_2}{d\varphi} = -D_3 \sin \varphi + D_4 \cos \varphi + D_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \frac{qR^4 n (\varphi - \gamma)}{B_1}. \quad (69)$$

Из (48):

$$R\beta_2 = -D_3(n+1) \cos \varphi - D_4(n+1) \sin \varphi + D_6[-(n+1) \varphi \sin \varphi + 2n \cos \varphi] - \frac{qR^4(n+1)^2}{B_1} - \frac{qR^4(n+1) \sin \gamma}{2B_1} [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi]. \quad (70)$$

Для III участка.

Из (53):

$$V_3 = E_1 + E_6 \cos \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \gamma \varphi \sin \varphi. \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_3}{d\varphi} = & -E_3 \sin \varphi + D_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \\ & + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \gamma (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi). \end{aligned} \quad (72)$$

Из (56):

$$\begin{aligned} R\beta_3 = & -E_3(n+1) \cos \varphi - D_6 [(n+1)\varphi \sin \varphi - 2n \cos \varphi] + \\ & + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \gamma [2n \cos \varphi - (n+1)\varphi \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (73)$$

При $\varphi = \delta$; $\frac{dv_1}{d\varphi} = \frac{dv_2}{d\varphi}$ и $\beta_1 = \beta_2$.

Из (66) и (69) имеем:

$$\begin{aligned} -C_3 \sin \delta + C_4 \cos \delta = & -D_3 \sin \delta + \frac{qR^4}{2B_1} [2(\delta - \gamma) - (n+1)\delta + \\ & + (n+1)\gamma \cos \gamma \cos \delta - 2(2n+1) \sin \gamma \cos \delta]. \end{aligned} \quad (74)$$

Из (67) и (70):

$$\begin{aligned} C_3 \cos \delta + C_4 \sin \delta = & D_3 \cos \delta + \frac{qR^4(2n+1)}{B_1} (1 - \sin \gamma \sin \delta) + \\ & + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \gamma \cos \gamma \sin \delta. \end{aligned} \quad (75)$$

Решив (74) и (75), получим:

$$C_3 = D_3 + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)\delta \sin \delta - 2(\delta - \gamma) \sin \delta + 2(2n+1) \cos \delta]. \quad (76)$$

$$\begin{aligned} C_4 = & \frac{qR^4}{2B_1} [2(\delta - \gamma) \cos \delta - (n+1)(\delta \cos \delta - \gamma \cos \gamma) + \\ & + 2(2n+1)(\sin \delta - \sin \gamma)]. \end{aligned} \quad (77)$$

При $\varphi = \gamma$; $\frac{dv_2}{d\varphi} = \frac{dv_3}{d\varphi}$ и $\beta_2 = \beta_3$.

Из (69) и (72) имеем:

$$E_3 \sin \gamma = D_3 \sin \gamma - D_4 \cos \gamma + \frac{(n+1)\gamma \cdot qR^4}{2B_1}. \quad (78)$$

Из (70) и (73):

$$E_3 \cos \gamma = D_3 \cos \gamma + D_4 \sin \gamma + 2(2n+1) \frac{qR^4}{2B_1}. \quad (79)$$

Решив (78) и (79), получим:

$$E_3 = D_3 + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)\gamma \sin \gamma + 2(2n+1) \cos \gamma]. \quad (80)$$

$$D_4 = \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)\gamma \cos \gamma - 2(2n+1) \sin \gamma]. \quad (81)$$

Из (65) и (68), после подстановки вместо C_3 его значения из (76), вместо C_4 его значения из (77) и вместо D_4 его значения из (81), найдем:

$$V_1 = C_1 + D_3 \cos \varphi + D_4 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\varphi - \delta) \sin(\varphi - \delta) + (n+1)\gamma \cos \gamma \sin \varphi + (n+1) \sin \gamma \varphi \cos \varphi + 2(2n+1) \cos(\varphi - \delta) - 2(2n+1) \sin \gamma \sin \varphi - 2(n+1)(\delta - \gamma)\varphi - 2(\delta - \gamma) \sin(\varphi - \delta)]. \quad (82)$$

$$V_2 = D_1 + D_3 \cos \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \sin \gamma \varphi \cos \varphi - n(\varphi - \gamma)^2 + (n+1)\gamma \cos \gamma \sin \varphi - 2(2n+1) \sin \gamma \sin \varphi]. \quad (83)$$

При $\varphi = \delta$; $V_1 = V_2$.

Подставив в (82) и (83) $\varphi = \delta$, получим:

$$D_1 = C_1 + \frac{qR^4}{2B_1} [2(2n+1) - 2(n+1)(\delta - \gamma) + n(\delta - \gamma)^2]. \quad (84)$$

Подставив в (71) вместо E_3 его значение из (80), получим:

$$V_3 = E_1 + D_3 \cos \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi + (n+1)\gamma \sin \gamma \cos \varphi + 2(2n+1) \cos \gamma \cos \varphi]. \quad (85)$$

При $\varphi = \gamma$; $V_2 = V_3$. Подставив $\varphi = \gamma$ в (83) и (84) получим:

$$E_1 = D_1 - \frac{qR^4}{B_1} (2n+1)$$

или, подставив сюда значение D_1 из (84), найдем:

$$E_1 = C_1 + \frac{qR^4}{2B_1} (\delta - \gamma) [n(\delta - \gamma) - 2(n+1)\delta]. \quad (86)$$

Пользуясь полученными значениями коэффициентов, мы можем во всех уравнениях деформаций (65)–(73) коэффициенты D_1 и E_1 заменить через C_1 ; C_3 и E_3 —через D_3 .

Выполнив это, получим такие уравнения:

Для I участка:

$$V_1 = C_1 + D_3 \cos \varphi + D_6 \varphi \sin \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\varphi - \delta) \sin(\varphi - \delta) + (n+1)\gamma \cos \gamma \sin \varphi + (n+1) \sin \gamma \varphi \cos \varphi + 2(2n+1) \cos(\varphi - \delta) - 2(2n+1) \sin \gamma \sin \varphi - 2(n+1)(\delta - \gamma)\varphi - 2(\delta - \gamma) \sin(\varphi - \delta)]. \quad (86')$$

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = -D_3 \sin \varphi + D_6(\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\varphi - \delta) \cos(\varphi - \delta) + (n+1)\gamma \cos \gamma \cos \varphi - (n+1) \sin \gamma \varphi \sin \varphi - (3n+1) \sin(\varphi - \delta) - (3n+1) \sin \gamma \cos \varphi - 2(n+1)(\delta - \gamma) + 2(\delta - \gamma) \sin(\varphi - \delta)]. \quad (87)$$

$$R\beta_1 = -D_3(n+1)\cos\varphi + D_6[2n\cos\varphi - (n+1)\varphi\sin\varphi] - \\ - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1}[2(\delta-\gamma)\sin(\varphi-\delta) + (n+1)(\varphi-\delta)\sin(\varphi-\delta) + \\ + (n+1)\sin\gamma\varphi\cos\varphi - 2(n+1)\sin\gamma\sin\varphi + 2(n+1)\cos(\varphi-\delta) + \\ + (n+1)\gamma\cos\gamma\sin\varphi]. \quad (88)$$

Для II участка:

$$V_2 = C_1 + D_3\cos\varphi + D_6\varphi\sin\varphi + \frac{qR^4}{2B_1}[(n+1)\sin\gamma\varphi\cos\varphi - n(\varphi-\gamma)^2 + \\ + (n+1)\gamma\cos\gamma\sin\varphi - 2(2n+1)\sin\gamma\sin\varphi + 2(2n+1)(\delta-\gamma)\delta + \\ + n(\delta-\gamma)^2]. \quad (89)$$

$$\frac{dv_2}{d\varphi} = -D_3\sin\varphi + D_6(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{qR^4}{2B_1}[(n+1)\gamma\cos\gamma\cos\varphi - \\ - 2n(\varphi-\gamma) - (n+1)\sin\gamma\varphi\sin\varphi - (3n+1)\sin\gamma\cos\varphi]. \quad (90)$$

$$R\beta_2 = -D_3(n+1)\cos\varphi + D_6[2n\cos\varphi - (n+1)\varphi\sin\varphi] - \\ - \frac{qR^4(n+1)^2}{2B_1}[2 + 2\sin\gamma\sin\varphi + \sin\gamma\varphi\cos\varphi + \gamma\cos\gamma\sin\varphi]. \quad (91)$$

Для III участка:

$$V_3 = C_1 + D_3\cos\varphi + D_6\varphi\sin\varphi + \frac{qR^4}{2B_1}[(n+1)\cos\gamma\varphi\sin\varphi + \\ + (n+1)\gamma\sin\gamma\cos\varphi + 2(2n+1)\cos\gamma\cos\varphi + n(\delta-\gamma)^2 - \\ - 2(n+1)\delta(\delta-\gamma)]. \quad (92)$$

$$\frac{dv_3}{d\varphi} = -D_3\sin\varphi + D_6(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{qR^4}{2B_1}[(n+1)\cos\gamma\varphi\cos\varphi - \\ - (n+1)\gamma\sin\gamma\sin\varphi - (3n+1)\cos\gamma\sin\varphi]. \quad (93)$$

$$R\beta_3 = -D_3(n+1)\cos\varphi + D_6[2n\cos\varphi - (n+1)\varphi\sin\varphi] - \\ - \frac{qR^4(n+1)^2}{2B_1}[\cos\gamma\varphi\sin\varphi + \gamma\sin\gamma\cos\varphi + 2\cos\gamma\cos\varphi]. \quad (94)$$

Если будут известны коэффициенты C_1 , D_3 и D_6 , то могут быть определены деформации для любой точки оси бруса.

Перейдем к определению коэффициентов C_1 , D_3 и D_6 .

При $\varphi = \pm 0$; $V_1 = 0$, $\frac{dv_1}{d\varphi} = 0$ и $\beta_1 = 0$.

Подставив в уравнения (87) и (88) $\varphi = \theta$, получим:

$$-D_3 \sin \theta + D_6 (\theta \cos \theta + \sin \theta) + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\theta - \delta) \cos(\theta - \delta) + (n+1) \gamma \cos \gamma \cos \theta - (n+1) \sin \gamma \theta \sin \theta - (3n+1) \sin(\theta - \delta) - (3n+1) \sin \gamma \cos \theta - 2(n+1)(\delta - \gamma) + 2(\delta - \gamma) \cos(\theta - \delta)] = 0. \quad (95)$$

$$-D_3(n+1) \cos \theta + D_6[2n \cos \theta - (n+1)\theta \sin \theta] - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [(n+1)(\theta - \delta) \sin(\theta - \delta) + (n+1) \sin \gamma \theta \cos \theta - 2(n+1) \sin \gamma \sin \theta + 2(n+1) \cos(\theta - \delta) + (n+1) \gamma \cos \gamma \sin \theta + 2(\delta - \gamma) \sin(\theta - \delta)] = 0. \quad (96)$$

Решив эти уравнения, получим:

$$D_6 = \left\{ \frac{(n+1)(\delta \cos \delta - \gamma \cos \gamma) - [(n-1) \cos^2 \theta + 2(n+1) (\sin \delta - \sin \gamma) + 2[(n+1) \cos \theta - \cos \delta](\delta - \gamma)]}{(n+1)\theta - (n-1) \sin \theta \cos \theta - \cos \delta} \right\} \frac{qR^4(n+1)}{2B_1}. \quad (97)$$

$$D_3 = \left\{ [(n+1)^2 \theta^2 - 2n(3n+1) \cos^2 \theta - 2(n+1)^2 \sin^2 \theta] (\sin \delta - \sin \gamma) + [2n(n+1) \cos^2 \theta + (n+1)^2 \sin^2 \theta] (\delta \cos \delta - \gamma \cos \gamma) + [2(n+1) \theta \sin \delta - 2(n+1)^2 \theta \sin \theta + 4n(n+1) \cos \theta - 2(n+1) \cos \delta - 2(n-1) \cos^2 \theta \cos \delta - 2(n-1) \sin \delta \cos \theta \sin \theta] (\delta - \gamma) + [(n^2 - 1) \sin \theta \cos \theta - (n+1)^2 \theta] \delta \sin \delta + 2(2n+1)[(n-1) \sin \theta \cos \theta - (n+1) \theta] \cos \delta \right\} \frac{qR^4}{2B_1} : \left\{ (n+1)\theta - (n-1) \sin \theta \cos \theta \right\}. \quad (98)$$

Что касается коэффициента C_1 , то его рекомендуется при числовых решениях определять после нахождения D_3 и D_6 путем подстановки значения D_3 и D_6 в уравнение (86), а именно, из следующего уравнения:

$$C_1 = -D_3 \cos \theta - D_6 \theta \sin \theta - \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\theta - \delta) \sin(\theta - \delta) + (n+1) \gamma \cos \gamma \sin \theta + (n+1) \sin \gamma \theta \cos \theta + 2(2n+1) \cos(\theta - \delta) - 2(2n+1) \sin \gamma \sin \theta - 2(n+1)(\delta - \gamma)\theta - 2(\delta - \gamma) \sin(\theta - \delta)]. \quad (99)$$

В общем виде значение этого коэффициента получает сложную форму, неудобную для пользования.

Перейдем к определению изгибающих и крутящих моментов. I участок.

Подставив в формулы (39) и (40) значения C_6 из (64), C_6 из (59) и C_2 из (42), получим изгибающий момент:

$$M_{1x} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ -2D_6 \cos \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} [\cos \delta \cos \varphi + (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \varphi] \right\},$$

крутящий момент:

$$M_3^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ -2D_6 \sin \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} [\cos \delta \sin \varphi - (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \varphi + \delta - \gamma] \right\}.$$

II участок.

После подстановки в формулы (46) и (47) вместо D_6 его выражения из (63) и D_2 из (53), найдем:

изгибающий момент:

$$M_1^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ -2D_6 \cos \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} [1 - \sin \gamma \sin \varphi] \right\}.$$

Крутящий момент:

$$M_3^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ -2D_6 \sin \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} [(\varphi - \gamma) + \sin \gamma \cos \varphi] \right\}.$$

III участок.

После подстановки в (54) и (55) вместо E_6 его значения из (63'), получим:

изгибающий момент:

$$M_1^{III} = -\frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[2D_6 \cos \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \cos \gamma \cos \varphi \right],$$

крутящий момент:

$$M_3^{III} = -\frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[2D_6 \sin \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \cos \gamma \sin \varphi \right].$$

Если принять в формуле (97)

$$B = -\frac{(n+1)(\delta \cos \vartheta - \gamma \cos \gamma) - [(n-1) \cos^2 \vartheta + 2(n+1)](\sin \delta - \sin \gamma) + 2[(n+1) \cos \vartheta - \cos \delta](\delta - \gamma)}{(n+1)\vartheta - (n-1)\sin \vartheta \cos \vartheta} \quad (99)$$

то можно (97) переписать так:

$$D_6 = -(B + \cos \delta) \frac{qR^4(n+1)}{2B_1}.$$

Подставив в предыдущие выражения моментов это значение D_6 , получим окончательные выражения моментов.

I участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = [B \cos \varphi - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \varphi] qR^2. \quad (100)$$

Крутящий момент:

$$M_3^I = [B \sin \varphi + (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \varphi - (\delta - \gamma)] qR^2. \quad (101)$$

II участок.
Изгибающий момент:

$$M_I^{II} = [B \cos \varphi + \cos \delta \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi - 1] q R^2. \quad (102)$$

Крутящий момент:

$$M_s^{II} = [B \sin \varphi + \cos \delta \sin \varphi - \sin \gamma \cos \varphi - (\varphi - \gamma)] q R^2. \quad (103)$$

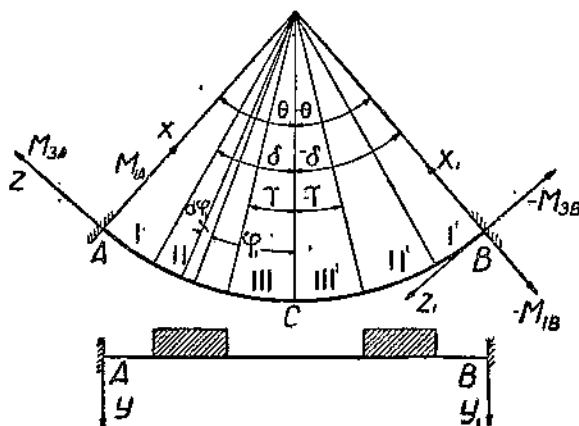
III участок.
Изгибающий момент:

$$M_I^{III} = [B \cos \varphi + (\cos \delta - \cos \gamma) \cos \varphi] q R^2. \quad (104)$$

Крутящий момент:

$$M_s^{III} = [B \sin \varphi + (\cos \delta - \cos \gamma) \sin \varphi] q R^2. \quad (105)$$

Перерезывающие силы находятся по (41) и (49).
Проверим правильность полученных значений моментов.



Черт. 11.

Выразим момент M_I в сечении II участка, определяемом углом φ , через изгибающий и крутящий моменты на опоре А (черт. 11):

$$M_I^{II} = M_{IA} \cos(\theta - \varphi) + M_{sA} \sin(\theta - \varphi) + q R^2 (\delta - \gamma) \sin(\theta - \varphi) - \\ - q R^2 \int_{\varphi}^{\delta} \sin(\varphi_1 - \varphi) d\varphi_1.$$

Здесь угол φ считаем постоянным, а угол φ_1 — переменным.

$$\begin{aligned} M_1^{III} &= [B \cos \theta - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \theta] q R^2 \cos(\theta - \varphi) + [B \sin \varphi + \\ &+ (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \theta - (\delta - \gamma)] q R^2 \sin(\theta - \varphi) - q R^2 [1 - \cos(\delta - \varphi)] + \\ &+ q R^2 (\delta - \gamma) \sin(\theta - \varphi) = \\ &= [B \cos \varphi + \cos \delta \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi - 1] q R^2. \end{aligned}$$

Получена, таким образом, формула (102).

Напишем теперь момент M_3^{II} :

$$\begin{aligned} M_3^{III} &= -M_{1A} \sin(\theta - \varphi) + M_{3A} \cos(\theta - \varphi) - q R^2 (\delta - \gamma) [1 - \cos(\theta - \varphi)] + \\ &+ q R^2 \int_{\delta}^{\varphi} [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi)] d\varphi_1 = -[B \cos \theta - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \theta] \times \\ &\times q R^2 \sin(\theta - \varphi) + [B \sin \varphi + (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \theta - (\delta - \gamma)] q R^2 \cos(\theta - \varphi) - \\ &- q R^2 (\delta - \gamma) + q R^2 \cos(\theta - \varphi) + q R^2 (\delta - \varphi) - q R^2 \sin(\delta - \varphi) = \\ &= [B \sin \varphi + \cos \delta \sin \varphi - \sin \gamma \cos \varphi - (\varphi - \gamma)] q R^2. \end{aligned}$$

Это есть формула (103).

Определяем момент M_{1B} на опоре B , взяв проекцию моментов на ось X_1 всех сил, лежащих левее этой опоры:

$$\begin{aligned} M_{1B} &= M_{1A} \cos 2\theta + M_{3A} \sin 2\theta + q R^2 (\delta - \gamma) \sin 2\theta - \\ &- q R^2 \left[\int_{\gamma}^{\delta} \sin(\theta + \varphi) d\varphi + \int_{\gamma}^{\delta} \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right] = [B \cos \theta - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \theta] \times \\ &\times q R^2 \cos 2\theta + [B \sin \varphi + (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \varphi - (\delta - \gamma)] q R^2 \sin 2\theta + \\ &+ q R^2 (\delta - \gamma) \sin 2\theta - 2 \sin \theta (\sin \delta - \sin \gamma) = \\ &= [B \cos \theta - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \theta] q R^2, \end{aligned} \quad (100')$$

т. е. изгибающий момент на опоре B такой же, как и на опоре A . Определим крутящий момент на опоре B , взяв проекцию моментов на ось Y_1 :

$$\begin{aligned} M_{3B} &= -M_{1A} \sin 2\theta + M_{3A} \cos 2\theta - q R^2 (\delta - \gamma) (1 - \cos 2\theta) + \\ &+ q R^2 \left[\int_{\gamma}^{\delta} [1 - \cos(\theta + \varphi)] d\varphi + q R^2 \int_{\gamma}^{\delta} [1 - \cos(\theta - \varphi)] d\varphi = \right. \\ &= \left\{ -B \cos \theta - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \theta \right\} \sin 2\theta + [B \sin \theta + (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \theta - \\ &- (\delta - \gamma)] \cos 2\theta - (\delta - \gamma) + (\delta - \gamma) \cos 2\theta + 2(\delta - \gamma) - 2 \cos \theta (\sin \delta - \sin \gamma) \} q R^2 = \\ &= -[B \sin \theta + (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \theta - (\delta - \gamma)]. \end{aligned} \quad (101'')$$

Как и надо было ожидать, крутящий момент на опоре B по абсолютному значению равен крутящему моменту на опоре A , но противоположен по знаку.

Эти проверки указывают на правильность выведенных формул.

Условия равновесия бруса соблюдены. Действительно: проекции внешних сил на оси X и Z равны нулю, так как действующие силы перпендикулярны плоскости XZ .

Проекция на вертикальную ось равна нулю, так как сумма реакций опор равна сумме нагрузок и противоположна им по знаку. Моменты по осям Y отсутствуют.

Проекция моментов на ось X_1 , как видно из (101'), равна нулю.

Проекция моментов на ось Y_1 тоже равна нулю, это следует из (101'').

Таким образом мы видим, что условия равновесия бруса выполнены.

Для частного случая, когда нагрузка расположена по всему пролету, т. е. для $\delta = 0$ и $\gamma = 0$ из (95) и (96) получим:

Изгибающий момент:

$$M_1 = \left[2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} \cos\varphi - 1 \right] qR^2. \quad (106)$$

Крутящий момент:

$$M_2 = \left[2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} \sin\varphi - \varphi \right] qR^2. \quad (107)$$

Когда угол $\theta = 90^\circ$,
изгибающий момент:

$$M_1 = \left(\frac{4}{\pi} \cos\varphi - 1 \right) qR^2. \quad (108)$$

Крутящий момент:

$$M_2 = \left(\frac{4}{\pi} \sin\varphi - \varphi \right) qR^2. \quad (109)$$

Из этих выражений видно, что при центральном угле $= 180^\circ$ коэффициент жесткости $\frac{B_1}{C} = n$ влияния на моменты не оказывает.

Вопросы о влиянии коэффициента жесткости „ n “ на изгибающий и крутящий моменты для случая равномерно распределенной нагрузки по всему пролету при разных углах разобран ниже в п. VII.

Теперь перейдем к рассмотрению антисимметричной нагрузки.

в) Нагрузка антисимметричная (черт. 10в).

Для этого случая уравнения упругой линии будут иметь для участков I и II тот же вид, что и для случая симметричной нагрузки:

$$V_1' = C_1' + C_2'\varphi + C_3'\cos\varphi + C_4'\sin\varphi + C_5'\varphi\cos\varphi + C_6'\varphi\sin\varphi. \quad (110)$$

$$V_2' = D_1' + D_2'\varphi + D_3'\cos\varphi + D_4'\sin\varphi + D_5'\varphi\cos\varphi + D_6'\varphi\sin\varphi. \quad (111)$$

¹⁾ Эти формулы даны в труде проф. Тимошенко—Теория упругости, изд. 1916 г., т. II, § 19.

Для середины пролета $M_1^{\text{III}} = 0$; угол поворота $\beta_s' = 0$ и, следовательно, по формуле (16) $\frac{d^2 v_2'}{d\varphi^2} = 0$.

$$V_3' = E_1' + E_2' \varphi + E_4' \sin \varphi + E_5' \varphi \cos \varphi - E_6' \varphi \sin \varphi$$

при $\varphi = 0$; $v_3 = 0$.

Следовательно:

$$E_1' + E_5' = 0. \quad (112)$$

$$\frac{d^2 v_3'}{d\varphi^2} = -E_3' \cos \varphi - E_4' \sin \varphi - E_5' (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi) - E_6' (\varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi),$$

$$\text{При } \varphi = 0; \frac{d^2 v_3'}{d\varphi^2} = 0.$$

Поэтому

$$E_3' + 2E_6' = 0. \quad (113)$$

По (34) имеем:

$$M_1^{\text{III}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} (2E_5' \sin \varphi - 2E_6' \cos \varphi)$$

при $\varphi = 0$, $M_1^{\text{III}} = 0$.

Следовательно:

$$E_6' = 0. \quad (114)$$

Из (112), (113), (114) имеем:

$$E_1' = E_3' = E_6' = 0.$$

Уравнение упругой линии для III участка, поэтому, пишется так:

$$V_3' = E_2' \varphi + E_4' \sin \varphi + E_5' \varphi \cos \varphi. \quad (115)$$

Выражения моментов по (34) и (35) будут таковы:

I участок:

$$M_1^{\text{I}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} [2C_5' \sin \varphi - 2C_6' \cos \varphi]. \quad (116)$$

$$M_3^{\text{I}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} [C_2' - 2C_5' \cos \varphi - 2C_6' \sin \varphi]. \quad (117)$$

II участок:

$$M_1^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[2D_5' \sin \varphi - 2D_6' \cos \varphi - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} \right]. \quad (118)$$

$$M_3^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[D_2' - 2D_5' \cos \varphi - 2D_6' \sin \varphi - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} \varphi \right]. \quad (119)$$

III участок:

$$M_1^{\text{III}} = -\frac{B_1}{(n+1)R^2} 2E_5' \sin \varphi. \quad (120)$$

$$M_3^{\text{III}} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} [E_2' - 2E_5' \cos \varphi]. \quad (121)$$

По формуле (20) перерезывающая сила:

$$T_2' = \frac{1}{R} \left(M_3 + \frac{dM_1}{d\varphi} \right).$$

Для I участка:

$$T_2^{(I)} = \frac{C_2' B_1}{(n+1)R^3}. \quad (122)$$

Для II участка:

$$T_2^{(II)} = \frac{D_2' B_1}{(n+1)R^3} - qR\varphi. \quad (123)$$

Для III участка:

$$T_2^{(III)} = \frac{E_2' B_1}{(n+1)R^3}, \quad (124)$$

но

$$T_2^{(III)} = T_2^{(II)} + qR(\delta - \varphi), \quad (125)$$

поэтому

$$\frac{D_2' B_1}{(n+1)R^3} - qR\varphi = \frac{C_2' B_1}{(n+1)R^3} + qR(\delta - \varphi).$$

Следовательно:

$$D_2' = C_2' + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \delta. \quad (125')$$

$$T_2^{(III)} = T_2^{(II)} + qR(\delta - \gamma). \quad (126)$$

Отсюда имеем после подстановки значений $T_2^{(II)}$ и $T_2^{(III)}$ из (122) и (124):

$$\frac{E_2' B_1}{(n+1)R^3} = \frac{C_2' B_1}{(n+1)R^3} + qR(\delta - \gamma)$$

или

$$E_2' = C_2' + q \frac{R^4(n+1)}{B_1} (\delta - \gamma). \quad (126')$$

Подставив значения D_2' и E_2' из (125') и (126') в выражения моментов M_3^{II} и M_3^{III} , получим:

$$M_3^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[C_2' - 2D_6' \cos \varphi - 2D_6' \sin \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} (\delta - \varphi) \right]. \quad (127)$$

$$M_3^{III} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[C_2' - 2E_6' \cos \varphi + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} (\delta - \gamma) \right]. \quad (128)$$

Для пограничных сечений, принадлежащих I—II и II—III участкам $M_1^I = M_1^{II}$; $M_3^I = M_3^{II}$; $M_1^{II} = M_1^{III}$ и $M_3^{II} = M_3^{III}$.

Напишем эти условия.

При $\varphi = \delta$; $M_1^I = M_1^{II}$ и $M_3^I = M_3^{II}$.

$$2C_6' \sin \delta - 2C_6' \cos \delta = 2D_6' \sin \delta - 2D_6' \cos \delta - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} \\ - 2C_6' \cos \delta - 2C_6' \sin \delta = - 2D_6' \cos \delta - 2D_6' \sin \delta.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$C_6' = D_6' + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \delta. \quad (129)$$

$$C_5' = D_5' - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \sin \delta. \quad (130)$$

При $\varphi = \gamma$; $M_1^I = M_1^{II}$ и $M_5^I = M_5^{II}$.

$$2D_5' \sin \gamma - 2D_6' \cos \gamma - \frac{qR^4(n+1)}{B_1} = 2E_5' \sin \gamma, \quad R\beta$$

$$2D_5' \cos \gamma + 2D_6' \sin \gamma = 2E_5' \cos \gamma. \quad +$$

Отсюда найдем:

$$E_5' = D_5' - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \sin \gamma, \quad (131)$$

$$D_6' = -\frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \gamma. \quad (132)$$

Из формулы (130):

$$C_6' = \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} (\cos \delta - \cos \gamma). \quad - (133)$$

Подставив в уравнение упругой линии, в ее первую производную и в выражение угла поворота β (43), значения D_2' и E_2' , выраженные через C_2' (125) и (126) и значения C_5' , C_6' , D_6' и E_5' из (130), (133), (132) и (131), получим для каждого участка балки следующие уравнения.

Для I участка:

$$V_1' = C_1' + C_2' \varphi + C_3' \cos \varphi + C_4' \sin \varphi + D_5' \varphi \cos \varphi + \\ + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [(\cos \delta - \cos \gamma) \varphi \sin \varphi - \sin \delta \varphi \cos \varphi] \quad \Pi$$

или

$$V_1' = C_1' + C_2' \varphi + C_3' \cos \varphi + C_4' \sin \varphi + D_5' \varphi \cos \varphi + \\ + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [\varphi \sin(\varphi - \delta) - \cos \gamma \varphi \sin \varphi]. \quad (134) \quad \varphi$$

$$\frac{dv_1'}{d\varphi} = C_2' - C_3' \sin \varphi + C_4' \cos \varphi + D_5' (-\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) + \\ \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [\varphi \cos(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \delta) - \cos \gamma (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi)] \quad (135) \quad \Gamma$$

и по формуле (16)

$$R\beta_1' = -C_3' (n+1) \cos \varphi - C_4' (n+1) \sin \varphi - D_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + \\ + 2n \sin \varphi] + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \left\{ 2n \cos(\varphi - \delta) - (n+1) \varphi \sin(\varphi - \delta) + \right. \\ \left. + \cos \gamma [(n+1) \varphi \sin \varphi - 2n \cos \varphi] \right\}. \quad (136) \quad \Gamma$$

Для II участка:

$$V_2' = D_1' + C_2' \varphi + D_3' \cos \varphi + D_4' \sin \varphi + D_5' \varphi \cos \varphi - \\ - \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi + n(\varphi - \delta)^2]. \quad (137) \quad 1$$

$$\frac{dv_2'}{d\varphi} = C_2' - D_3' \sin \varphi + D_4' \cos \varphi + D_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \\ - \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \cos \gamma (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + 2n(\varphi - \delta)]. \quad (138)$$

$$R\beta_2' = -D_3'(n+1) \cos \varphi - D_4'(n+1) \sin \varphi - D_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + \\ + 2n \sin \varphi] + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [(n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi - 2n \cos \gamma \cos \varphi] - \\ - \frac{qR^4(n+1)^2}{B_1}. \quad (139)$$

Для III участка:

$$V_3' = C_2' \varphi + E_4' \sin \varphi + D_5' \varphi \cos \varphi - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \sin \gamma \varphi \cos \varphi + \\ + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} (\delta - \gamma) \varphi. \quad (140)$$

$$\frac{dv_3'}{d\varphi} = C_2' + E_4' \cos \varphi + D_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \\ + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \sin \gamma (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{qR^4(n+1)}{B_1} (\delta - \gamma). \quad (141)$$

$$R\beta_3' = -E_4'(n+1) \sin \varphi - D_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + \\ + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \sin \gamma [2n \sin \varphi + (n+1) \varphi \cos \varphi]. \quad (142)$$

При $\varphi = \delta$; $\frac{dv_2'}{d\varphi} = \frac{dv_3'}{d\varphi}$. Подставив в уравнения (135) и (138) $\varphi = \delta$, получим:

$$C_3' \sin \delta - C_4' \cos \delta = -D_4' \cos \delta + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} [(n+1) \delta - \\ - (n+1) \gamma \sin \gamma \sin \delta - 2(2n+1) \cos \gamma \sin \delta - 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \sin \delta]. \quad (143)$$

При $\varphi = \delta$; $\beta_1' = \beta_2'$. Из уравнений (136) и (139) имеем:

$$-C_3' \cos \delta - C_4' \sin \delta = -D_4' \sin \delta + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \gamma \sin \gamma \cos \delta + \\ + 2(2n+1) \cos \gamma \cos \delta - 2(2n+1) + 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \cos \delta]. \quad (144)$$

Из (143) и (144) получим:

$$C_3' = D_3' + \frac{qR^4}{2B_1} [2(2n+1) \cos \delta + (n+1) \delta \sin \delta], \quad (145)$$

$$C_4' = D_4' + \frac{qR^4}{2B_1} [2(2n+1) \sin \delta - (n+1) \delta \cos \delta]. \quad (146)$$

При $\varphi = \gamma$; $\frac{dv_2'}{d\varphi} = \frac{dv_3'}{d\varphi}$ и $\beta_2' = \beta_3'$.

Из (138)–(141) и (139)–(142) имеем после подстановки $\varphi = \gamma$:

$$E_4' \cos \gamma = -D_8' \sin \gamma + D_4' \cos \gamma - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \gamma - \frac{qR^4(\delta - \gamma)}{B_1},$$

$$E_4' \sin \gamma = D_8' \cos \gamma - D_4' \sin \gamma - \frac{qR^4 2(2n+1)}{2B_1}.$$

Решив эти уравнения, найдем:

$$D_8' = -\frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)\gamma \sin \gamma + 2(2n+1) \cos \gamma + 2(\delta - \gamma) \sin \gamma], \quad (147)$$

$$E_4' = D_4' + \frac{qR^4}{2B_1} [2(2n+1) \sin \gamma - (n+1)\gamma \cos \gamma - 2(\delta - \gamma) \cos \gamma]. \quad (148)$$

Подставив значение D_8' в выражение (145), получим:

$$C_8' = \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\delta \sin \delta - \gamma \sin \gamma) + 2(2n+1)(\cos \delta - \cos \gamma)]. \quad (149)$$

При $\varphi = \delta$; $V_1' = V_2'$.

Из (134)–(137) после подстановки $\varphi = \delta$, найдем:

$$C_1' + C_8' \cos \delta + C_4' \sin \delta = D_1' + D_3' \cos \delta + D_4' \sin \delta.$$

Подставив сюда значения C_8' и C_4' из (149) и (146), определим C_1' :

$$C_1' = D_1' - \frac{qR^4}{B_1} (2n+1). \quad (150)$$

При $\varphi = \gamma$; $V_2' = V_3'$.

Из (137)–(140) после подстановки $\varphi = \gamma$, получим:

$$D_1' = \frac{qR^4}{2B_1} [2(2n+1) + n(\delta - \gamma)^2 + 2(n+1)(\delta - \gamma)\gamma]. \quad (151)$$

Подставив полученное значение D_1' в (150), найдем C_1' :

$$C_1' = \frac{qR^4}{2B_1} [n(\delta - \gamma)^2 + 2(n+1)(\delta - \gamma)\gamma]. \quad (152)$$

Таким образом, в первом участке определены значения C_1' , C_3' и C_6' в окончательной форме, а C_4' и C_5' выражены через D_4' и D_6' ; осталось невыясненным значение C_2' . Во втором участке определены значения D_1' , D_3' и D_6' . D_2' выражено через C_2' , а D_4' и D_5' еще неизвестны. В третьем участке E_2' выражено через C_2' , E_4' через D_4' и E_6' через D_6' . Остается, следовательно, определить значения C_3' , D_4' и D_6' .

Подставив в (134) значения C_1' из (152), C_3' из (149), C_4' из (146), C_6' из (130) и C_8' из (133), получим для I участка:

$$\begin{aligned} V_1' = & C_2' \varphi + D_4' \sin \varphi + D_6' \varphi \cos \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\varphi - \delta) \sin(\varphi - \delta) + \\ & + 2(2n+1) \cos(\varphi - \delta) + n(\delta - \gamma)^2 - (n+1)\gamma \sin \gamma \cos \varphi - \\ & - 2(2n+1) \cos \gamma \cos \varphi - (n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi - 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \cos \varphi + \\ & + 2(n+1)(\delta - \gamma)]. \end{aligned} \quad (153)$$

=γ

Отсюда получаем:

$$\frac{dv_1'}{d\varphi} = C_2' + D_4' \cos \varphi + D_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \times \\ \times (\varphi - \delta) \cos(\varphi - \delta) - (3n+1) \sin(\varphi - \delta) + (3n+1) \cos \gamma \sin \varphi + \\ + (n+1) \gamma \sin \gamma \sin \varphi - (n+1) \cos \gamma \varphi \cos \varphi + 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \sin \varphi]. \quad (154)$$

Из формулы (136), после тех же подстановок, найдем:

47)

$$R\beta_1' = -D_4' (n+1) \sin \varphi - D_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + \frac{qR^4 (n+1)}{2B_1} \times$$

48)

$$\times [(n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi - (n+1) (\varphi - \delta) \sin(\varphi - \delta) - 2(n+1) \cos(\varphi - \delta) + \\ + 2(n+1) \cos \gamma \cos \varphi + (n+1) \gamma \sin \gamma \cos \varphi + 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \cos \varphi]. \quad (155)$$

19)

Для второго участка, подставив в формулы (137), (138) и (139) вместо D_1' , D_2' , D_3' и D_6' их значения из (151), (125), (147) и (132), получим:

$$V_2' = C_2' \varphi - D_4' \sin \varphi + D_5' \varphi \cos \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [n(\delta - \gamma)^2 - n(\varphi - \delta)^2 + \\ + 2(2n+1) - (n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi - (n+1) \gamma \sin \gamma \cos \varphi - \\ - 2(2n+1) \cos \gamma \cos \varphi - 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \cos \varphi]. \quad (156)$$

10)

$$\frac{dv_2'}{d\varphi} = C_2' + D_4' \cos \varphi + D_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \frac{qR^4}{2B_1} [2(\delta - \gamma) \sin \gamma \sin \varphi - \\ - (n+1) \cos \gamma \varphi \cos \varphi - 2n(\varphi - \delta) + (n+1) \gamma \sin \gamma \sin \varphi + \\ + (3n+1) \cos \gamma \sin \varphi]. \quad (157)$$

1)

$$R\beta_2' = -D_4' (n+1) \sin \varphi - D_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + \\ + \frac{qR^4 (n+1)}{2B_1} [(n+1) \gamma \sin \gamma \cos \varphi + 2(n+1) \cos \gamma \cos \varphi + \\ + 2(\delta - \gamma) \sin \gamma \cos \varphi + (n+1) \cos \gamma \varphi \sin \varphi - 2(n+1)]. \quad (158)$$

2)

1я

е-

м

е-

е-

2-

3-

из

1-

1)

Для третьего участка после подстановки в (140), (141) и (142) вместо E_2' , E_4' и E_5' их значений из (126), (148) и (131)

$$V_3' = C_2' \varphi + D_4' \sin \varphi + D_5' \varphi \cos \varphi + \frac{qR^4}{2B_1} [2(n+1)(\delta - \gamma)(\varphi - \gamma) - \\ - (n+1) \sin \gamma \varphi \cos \varphi - (n+1) \gamma \cos \gamma \sin \varphi + 2(2n+1) \sin \gamma \sin \varphi - \\ - 2(\delta - \gamma) \cos \gamma \sin \varphi]. \quad (159)$$

$$\frac{dv_3'}{d\varphi} = C_2' + D_4' \cos \varphi + D_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1) \sin \gamma \varphi \sin \varphi + \\ + 2(n+1)(\delta - \gamma) - (n+1) \gamma \cos \gamma \cos \varphi + (3n+1) \sin \gamma \cos \varphi - \\ - 2(\delta - \gamma) \cos \gamma \cos \varphi]. \quad (160)$$

$$R\beta_3' = -D_4(n+1)\sin\varphi - D_5'[(n+1)\varphi\cos\varphi + 2n\sin\varphi] + \frac{qR^4}{2B_1} \times \\ \times [(n+1)\sin\gamma\varphi\cos\varphi + (n+1)\gamma\cos\gamma\sin\varphi - 2(n+1)\sin\gamma\sin\varphi + \\ + 2(\delta - \gamma)\cos\gamma\sin\varphi]. \quad (161)$$

Полученные девять уравнений дадут возможность в каждом из трех участков определить три элемента деформаций V' , $\frac{dv'}{d\varphi}$ и β' , если будут известны значения трех коэффициентов C_2' , D_4' и D_5' .

К нахождению этих коэффициентов послужат уравнения (153), (154), (155).

На опорах при $\varphi = \pm\theta$; $V_1' = 0$; $\frac{dv_1'}{d\varphi} = 0$ и $\beta_1' = 0$. Подставив $\varphi = \theta$ в уравнения (153), (154) и (155), получим следующие три уравнения:

$$C_2'\theta + D_4'\sin\theta + D_5'\theta\cos\theta + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\theta - \delta)\sin(\theta - \delta) + \\ + 2(2n+1)\cos(\theta - \delta) + n(\delta - \gamma)^2 - (n+1)\gamma\sin\gamma\cos\theta - \\ - 2(2n+1)\cos\gamma\cos\theta - (n+1)\cos\gamma\theta\sin\theta - 2(\delta - \gamma)\sin\gamma\cos\theta + \\ + 2(n+1)(\delta - \gamma)\gamma] = 0. \quad (162)$$

$$C_2' + D_4'\cos\theta + D_5'(\cos\theta - \theta\sin\theta) + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)(\theta - \delta)\cos(\theta - \delta) - \\ - (3n+1)\sin(\theta - \delta) + (3n+1)\cos\gamma\sin\theta + (n+1)\gamma\sin\gamma\sin\theta - \\ - (n+1)\cos\gamma\theta\cos\theta + 2(\delta - \gamma)\sin\theta] = 0. \quad (163)$$

$$-D_4'(n+1)\sin\theta - D_5'[(n+1)\theta\cos\theta + 2n\sin\theta] + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \times \\ \times [(n+1)\cos\gamma\theta\sin\theta - (n+1)(\theta - \delta)\sin(\theta - \delta) - 2(n+1)\cos(\theta - \delta) + \\ + 2(n+1)\cos\gamma\cos\theta + (n+1)\gamma\sin\gamma\cos\theta + 2(\delta - \gamma)\sin\gamma\cos\theta] = 0. \quad (164)$$

Исключив из уравнений (162) и (163) C_2' , получим:

$$D_4'(\theta\cos\theta - \sin\theta) - D_5'\theta^2\sin\theta + \frac{qR^4}{2B_1} [(n+1)\theta(\theta - \delta)\cos(\theta - \delta) - \\ - (3n+1)\theta\sin(\theta - \delta) + (n+1)\theta\gamma\sin\gamma\sin\theta + 2(2n+1)\theta\cos\gamma\sin\theta - \\ - (n+1)\theta\cos\gamma\cos\theta + 2(\delta - \gamma)\theta\sin\gamma\sin\theta - (n+1)(\theta - \delta)\sin(\theta - \delta) - \\ - 2(2n+1)\cos(\theta - \delta) - n(\delta - \gamma)^2 + (n+1)\gamma\sin\gamma\cos\theta + \\ + 2(2n+1)\cos\gamma\cos\theta + 2(\delta - \gamma)\sin\gamma\cos\theta - 2(n+1)(\delta - \gamma)\gamma] = 0. \quad (165)$$

Из уравнений (164) и (165) определяем:

$$D_5' = -\frac{qR^2(n+1)}{2B_1} \left\{ (n+1)\theta(\delta \sin \delta - \gamma \sin \gamma) + [2(n+1)\theta + \right. \\ \left. + 2n \sin \theta \cos \theta + (n-1)\theta \sin^2 \theta] (\cos \delta - \cos \gamma) - 2(\delta - \gamma)\theta \sin \gamma + \right. \\ \left. + n(\delta - \gamma)^2 \sin \theta + 2(n+1)(\delta - \gamma)\gamma \sin \theta \right\} : [(n+1)\theta^2 + \\ + (n-1)\theta \sin \theta \cos \theta - 2n \sin^2 \theta]. \quad (166)$$

Ввиду того, что окончательное выражение D_4' получает очень сложный вид, рекомендуется вначале определить D_6' по формуле (166), C_2' по формуле (167) и, подставив их значения в (162), определить D_4' , а затем из (146) найти C_4' .

Подставив значение D_6' в уравнения (162) и (163), определим C_2' , которое напишется так:

$$C_2' = -\frac{qR^2}{2B_1} \left\{ 2n[(n+1)\theta \cos \theta + (3n+1)\sin \theta] (\cos \delta - \cos \gamma) + \right. \\ \left. + 2n(n+1)\sin \theta (\delta \sin \delta - \gamma \sin \gamma) + [n(n-1)(\delta - \gamma)\sin \theta \cos \theta + \right. \\ \left. + (n+1)n(\delta - \gamma)\theta - 4n \sin \gamma \sin \theta + 2(n+1)\theta^2 \gamma + \right. \\ \left. + 4n(n+1)\gamma \sin \theta \cos \theta - 2(n+1)^2 \gamma \sin \theta \cos \theta] (\delta - \gamma) \right\} : [(n+1)\theta^2 + \\ + (n-1)\theta \sin \theta \cos \theta - 2n \sin^2 \theta]. \quad (167)$$

Перейдем к выяснению значений моментов для каждого из трех участков.

Изгибающий и крутящий моменты для первого участка получим из (116) и (117) после подстановки вместо C_5' и C_6' их значений из (130) и (133).

$$M_1^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ 2D_5' \sin \varphi - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} [\cos(\varphi - \delta) - \cos \gamma \cos \varphi] \right\}. \quad (168)$$

$$M_8^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ C_2' - 2D_5' \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} [\sin(\varphi - \delta) - \cos \gamma \sin \varphi] \right\}. \quad (169)$$

Для II участка из (118) и (119), после подстановки вместо D_2' и D_6' их значений (125) и (132), получим:

$$M_1^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ 2D_5' \sin \varphi - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} [1 - \cos \gamma \cos \varphi] \right\}. \quad (170)$$

$$M_8^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left\{ C_2' - 2D_5' \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} [(\varphi - \delta) - \sin \gamma \sin \varphi] \right\}. \quad (171)$$

Для III участка из (120) и (121), после подстановки вместо E_2' и E_5' их значений (126) и (131), найдем:

$$M_1^{III} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[2D_5' \sin \varphi - \frac{(n+1)qR^4}{B_1} \sin \gamma \sin \varphi \right]. \quad (172)$$

$$M_3^{III} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[C_2' - 2D_5' \cos \varphi + \frac{(n+1)qR^4}{B_1} \sin \gamma \cos \varphi \right]. \quad (173)$$

Реакция левой опоры по формуле (122):

$$A = T_2'^{(1)} = \frac{C_2' B_1}{(n+1)R^3}. \quad (174)$$

Подставив сюда значение C_2' из (167), получим значение реакции левой опоры:

$$A = -\frac{qR}{2(n+1)} \left\{ \frac{2n[(n+1)\theta \cos \theta + (3n+1)\sin \theta](\cos \delta - \cos \gamma) + 2n(n+1)\sin \theta(\delta \sin \delta - \gamma \sin \gamma) + [n(n-1)(\delta - \gamma)\sin \theta \cos \theta + n(n+1)(\delta - \gamma)\theta - 4n\sin \gamma \sin \theta + 2(n+1)^2 \theta \gamma + 4n(n+1)\gamma \sin \theta \cos \theta - 2(n+1)^2 \gamma \sin \theta \cos \theta](\delta - \gamma)}{[(n+1)\theta^2 + (n-1)\theta \sin \theta \cos \theta - 2n\sin^2 \theta]} \right\}. \quad (175)$$

Таким образом C_2' может быть выражено через реакцию левой опоры A :

$$C_2' = A \frac{(n+1)R^3}{B_1} \quad (176)$$

и подставлено в выражение моментов M_3 .

Кроме того, приняв в формуле (166)

$$C_0 = [(n+1)\theta(\delta \sin \delta - \gamma \sin \gamma) + \{2(n+1)\theta + 2n\sin \theta \cos \theta + (n-1)\theta \sin^2 \theta\}(\cos \delta - \cos \gamma) - 2(\delta - \gamma)\theta \sin \gamma + (\delta - \gamma)\sin \theta \{n(\delta - \gamma) + 2(n+1)\gamma\}] : [(n+1)\theta^2 + (n-1)\theta \sin \theta \cos \theta - 2n\sin^2 \theta],$$

напишем значение D_5' так:

$$D_5' = -\frac{qR^4(n+1)}{2B_1} C_0. \quad (177)$$

Подставив в выражения моментов (168)–(173) вместо C_2' его значение из (176), а вместо D_5' —(177), получим окончательные выражения M_1 и M_3 для I участка.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = [-C_0 \sin \varphi - \cos(\varphi - \delta) + \cos \gamma \cos \varphi] qR^3. \quad (178)$$

Крутящий момент:

$$M_s^I = [C_0 \cos \varphi - \sin(\varphi - \delta) + \cos \gamma \sin \varphi] q R^2 + AR. \quad (179)$$

Для II участка.

Изгибающий момент:

$$M_I^{II} = [-C_0 \sin \varphi + \cos \gamma \cos \varphi - 1] q R^2. \quad (179')$$

Крутящий момент:

$$M_s^{II} = [C_0 \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi - (\varphi - \delta)] q R^2 + AR. \quad (180)$$

Для III участка.

Изгибающий момент:

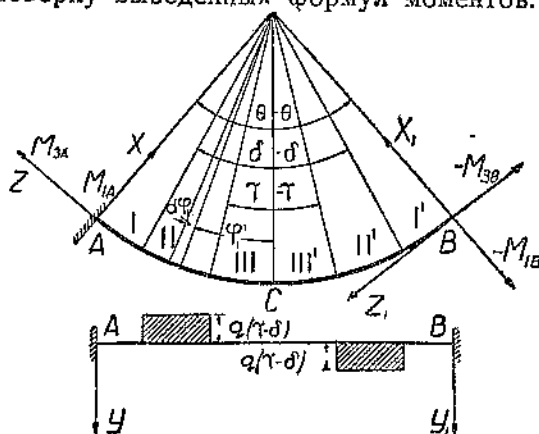
$$M_I^{III} = [-C_0 \sin \varphi - \sin \gamma \sin \varphi] q R^2. \quad (181)$$

Крутящий момент:

$$M_s^{III} = [C_0 \cos \varphi + \sin \gamma \cos \varphi] q R^2 + AR. \quad (182)$$

Перерезывающие усилия находятся по формулам (122), (125), (126) и (167).

Сделаем проверку выведенных формул моментов.



Черт. 12.

Выразим изгибающий момент в каком либо сечении участка II через изгибающий и крутящий моменты на опорах M_{1A} и M_{3A} , опорную реакцию A и нагрузку (черт. 12).

$$M_I^{II} = M_{1A} \cos(\theta - \varphi) + M_{3A} \sin(\theta - \varphi) - AR \sin(\theta - \varphi) - \\ - q R^2 \int_{\varphi}^{\theta} \sin(\varphi_1 - \varphi) d\varphi_1$$

(в этом уравнении φ рассматривается как постоянная величина).

$$\begin{aligned} & [-C_0 \sin \theta - \cos(\theta - \delta) + \cos \gamma \cos \theta] q R^2 \cos(\theta - \varphi) + [C_0 \cos \theta - \\ & - \sin(\theta - \delta) + \cos \gamma \sin \theta] q R^2 \sin(\theta - \varphi) + AR \sin(\theta - \varphi) - \\ & - AR \sin(\theta + \varphi) - q R^2 + q R^2 \cos(\delta - \varphi) = \\ & = [-C_0 \sin \varphi + \cos \gamma \cos \varphi - 1] q R^2. \end{aligned}$$

Получена формула (179').

Напишем крутящий момент для какого-либо сечения участка II:

$$\begin{aligned} M_{II}^B &= M_{3A} \cos(\theta - \varphi) - M_{1A} \sin(\theta - \varphi) + AR[1 - \cos(\theta - \varphi)] + \\ &+ q R^2 \int_{\gamma}^{\delta} [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi)] d\varphi_1 = [C_0 \cos \theta - \sin(\theta - \delta) + \\ &+ \cos \gamma \sin \theta] q R^2 \cos(\theta - \varphi) - [-C_0 \sin \theta - \cos(\theta - \delta) + \\ &+ \cos \gamma \cos \theta] q R^2 \sin(\theta - \varphi) + AR \cos(\theta - \varphi) + AR - AR \cos(\theta - \varphi) + \\ &+ q R^2[(\delta - \varphi) - \sin(\delta - \varphi)] = [C_0 \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi + \\ &+ (\delta - \varphi)] q R^2 + AR. \end{aligned}$$

Получена формула (180).

Определим опорные моменты на правой опоре, написав моменты относительно осей X_1 и Z_1 всех внешних сил, находящихся левее опоры B .

Момент относительно оси X_1

$$\begin{aligned} M_{1B} &= M_{1A} \cos 2\theta + M_{3A} \sin 2\theta - AR \sin 2\theta - q R^2 \int_{\gamma}^{\delta} \sin(\theta + \varphi) d\varphi + \\ &+ q R^2 \int_{\gamma}^{\delta} \sin(\theta - \varphi) d\varphi = [-C_0 \sin \theta - \cos(\theta - \delta) + \cos \gamma \cos \theta] q R^2 \cos 2\theta + \\ &+ [C_0 \cos \theta - \sin(\theta - \delta) + \cos \gamma \sin \theta] q R^2 \sin 2\theta + AR \sin 2\theta - AR \sin 2\theta + \\ &+ 2q R^2 \cos \theta (\cos \delta - \cos \gamma) = -[-C_0 \sin \theta - \cos(\theta - \delta) + \\ &+ \cos \gamma \cos \theta] q R^2. \end{aligned} \quad (178')$$

Как и следовало ожидать, изгибающий момент на правой опоре по абсолютной величине равен опорному моменту левой опоры, но с обратным знаком.

Определим крутящий момент на правой опоре, взяв момент относительно оси Z_1 :

$$\begin{aligned} M_{3B} &= -M_{1A} \sin 2\theta + M_{3A} \cos 2\theta + AR(1 - \cos 2\theta) + \\ &+ q R^2 \int_{\gamma}^{\delta} [1 - \cos(\theta + \varphi)] d\varphi - q R^2 \int_{\gamma}^{\delta} [1 - \cos(\theta - \varphi)] d\varphi = -[-C_0 \sin \theta - \\ &- \cos(\theta - \delta) + \cos \gamma \cos \theta] q R^2 \sin 2\theta + [C_0 \cos \theta - \sin(\theta - \delta) + \\ &+ \cos \gamma \sin \theta] q R^2 \cos 2\theta + AR \cos 2\theta - AR \cos 2\theta - 2q R^2 \sin \theta \times \\ &\times (\cos \delta - \cos \gamma) = [C_0 \cos \theta - \sin(\theta - \delta) + \cos \gamma \sin \theta] q R^2 + AR. \end{aligned} \quad (179'')$$

а) Крутящий момент на опоре B равен по величине крутящему моменту левой опоры и одного с ним знака.

Условия равновесия бруса соблюдены: реакции опор равны по величине и противоположны по направлениям, тоже и нагрузки. Следовательно, проекция их на ось Y_1 равна нулю.

Проекция сил на плоскость X_1Z_1 равна нулю, так как все силы перпендикулярны этой плоскости. Таким образом проекции на оси X_1 и Z_1 равны нулю.

Проекции моментов:

Все моменты действуют в плоскости X_1Z_1 , следовательно проекция моментов на ось Y_1 равна нулю.

Проекция моментов на ось X_1 тоже равна нулю по 178'.

Проекция моментов на ось Z_1 равна нулю по 179'.

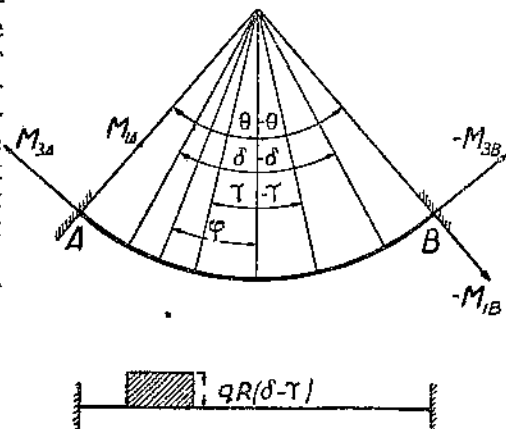
с) Нагрузка несимметричная.

При определении деформаций от нагрузки несимметричной, чтобы избежать очень сложных вычислений, рекомендуется разложить нагрузку на симметричную и антисимметричную и, определив деформации для каждой из них в отдельности, результирующие значения деформаций, от заданной нагрузки, получить путем алгебраического сложения. В общем виде уравнения деформаций для несимметричной нагрузки очень сложны, поэтому мы их не даем.

Для моментов же изгибающих и крутящих при нагрузке несимметричной мы даем общие формулы на основании результатов, полученных для нагрузок симметричной и антисимметричной.

Надо помнить, что суммарные моменты, которые будут получены из выведенных выше формул, надо помножить на коэффициент $\frac{1}{2}$, чтобы получить значения моментов, отвечающих интенсивности нагрузки $q \frac{\text{вес. ед.}}{\text{ед. длины}}$ (черт. 10).

Воспользуемся полученными уже значениями моментов для нагрузок симметричной и антисимметричной, а также теми соображениями, что для симметричной нагрузки изгибающие моменты будут одного знака для сечений симметрично расположенных относительно середины пролета (черт. 13), а крутящие моменты для этих же сечений — разных знаков.



Черт. 13.

При нагрузке же антисимметричной, наоборот, изгибающие моменты будут разных знаков, а крутящие—с одинаковыми.

Участки I и I'.

Изгибающий момент на основании (100) и (178):

$$M_1^I = [B \cos \varphi - (\sin \delta - \sin \gamma) \sin \varphi] \frac{qR^2}{2} \mp \left\{ C \sin \varphi + \cos(\varphi - \delta) - \cos \gamma \cos \varphi \right\} \frac{qR^2}{2}. \quad (183)$$

Крутящий момент по (101) и (179):

$$M_3^I = \pm [B \sin \varphi + (\sin \delta - \sin \gamma) \cos \varphi - (\delta - \gamma)] \frac{qR^2}{2} + \left\{ C \cos \varphi - \sin(\varphi - \delta) + \cos \gamma \sin \varphi \right\} \frac{qR^2}{2} + \left\{ \frac{AR}{2} \right\}. \quad (184)$$

Участки II и II'.

Изгибающий момент по (102) и (179):

$$M_1^{II} = [B \cos \varphi + \cos \delta \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi - 1] \frac{qR^2}{2} \pm \left\{ -C \sin \varphi + \cos \gamma \cos \varphi - 1 \right\} \frac{qR^2}{2}. \quad (185)$$

Крутящий момент по (103) и (180):

$$M_3^{II} = \pm [B \sin \varphi + \cos \delta \sin \varphi - \sin \gamma \cos \varphi - (\varphi - \gamma)] \frac{qR^2}{2} + \left\{ C \cos \varphi + \cos \gamma \sin \varphi - (\varphi - \delta) \right\} qR^2 + \left\{ \frac{AR}{2} \right\}. \quad (186)$$

Участки III и III'.

Изгибающий момент по (104) и (181):

$$M_1^{III} = [B \cos \varphi + (\cos \delta - \cos \gamma) \cos \varphi] \frac{qR^2}{2} \mp \left\{ C \sin \varphi + \sin \gamma \sin \varphi \right\} \frac{qR^2}{2}. \quad (187)$$

Крутящий момент по (105) и (182):

$$M_3^{III} = \pm [B \sin \varphi + (\cos \delta - \cos \gamma) \sin \varphi] \frac{qR^2}{2} + \left\{ C \cos \varphi + \sin \gamma \cos \varphi \right\} \frac{qR^2}{2} + \left\{ \frac{AR}{2} \right\}. \quad (188)$$

Верхние знаки для левых участков, а нижние—для правых. Выражения, стоящие в прямых скобках, относятся к симметричной нагрузке, а в фигурных—к антисимметричной.

Коэффициенты A , B и C находятся по формулам (175), (99) и (177). В формулах (183)—(188) принято $C=C_0$.

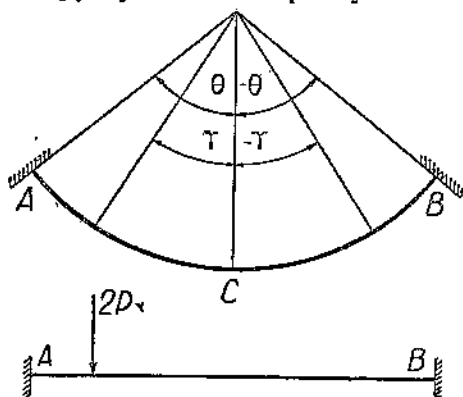
V. Балка под нагрузкой сосредоточенной несимметричной.

Так же, как было сделано при равномерно распределенной нагрузке, разложим заданную нагрузку на симметричную и антисимметричную (черт. 14, 14а и 14б) и рассмотрим эти два случая в отдельности.

а) Нагрузка симметричная (черт. 14а).

Дифференциальное уравнение упругой линии для этого случая нагрузки будет иметь такой вид:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0.$$



Черт. 14.

Следовательно, уравнения упругой линии для отдельных участков напишутся так:

Для I участка:

$$V_1 = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi \quad (189)$$

и для II участка:

$$V_2 = E_1 + E_2 \varphi + E_3 \cos \varphi + E_4 \sin \varphi + E_5 \varphi \cos \varphi + E_6 \varphi \sin \varphi.$$

V_2 будет четной функцией, а поэтому $E_3 = E_4 = E_5 = 0$.

Следовательно, предыдущее уравнение получит такой вид:

$$V_2 = E_1 + E_6 \cos \varphi + E_6 \varphi \sin \varphi. \quad (190)$$

Моменты, так же как и в случае равномерно распределенной нагрузки, напишутся в общем виде так:

I участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} (2C_3 \sin \varphi - 2C_6 \cos \varphi). \quad (191)$$

Крутящий момент:

$$M_3^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} (C_2 - 2C_5 \cos \varphi - 2C_6 \sin \varphi). \quad (192)$$

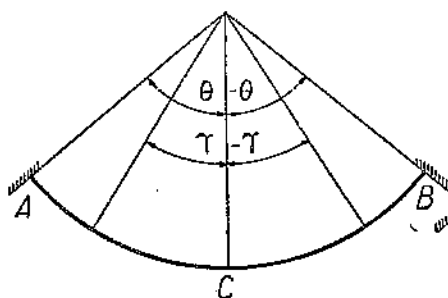
II участок.

Изгибающий момент:

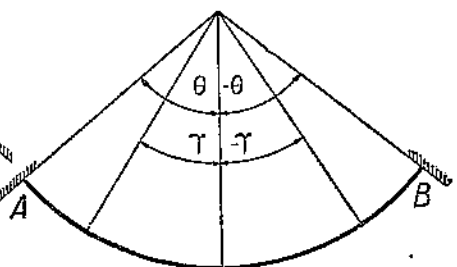
$$M_1^{\text{II}} = -\frac{2B_1}{(n+1)R^2} E_0 \cos \varphi. \quad (193)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{\text{II}} = -\frac{2B_1}{(n+1)R^2} E_0 \sin \varphi. \quad (194)$$



Черт. 14a.



Черт. 14b.

Реакция левой и правой опор:

$$A = B = -P. \quad (195)$$

Перерезывающая сила для I участка по (20)

$$T_2^I = A = \frac{C_2 B_1}{(n+1)R^2} = -P. \quad (196)$$

Отсюда

$$C_2 = -\frac{PR^2(n+1)}{B_1}. \quad (197)$$

Перерезывающая сила во II участке равна нулю.

Перейдем к определению постоянных коэффициентов, входящих в уравнение упругой линии.

При $\varphi = \gamma$, $M_1^I = M_1^{\text{II}}$.

Напишем эти условия, взяв выражения моментов из (191) — (194) и подставив в (192) значение C_2 из (197):

$$2C_5 \sin \gamma - 2C_6 \cos \gamma = -2E_0 \cos \gamma$$

$$2C_6 \cos \gamma + 2C_5 \sin \gamma + \frac{PR^2(n+1)}{B_1} = 2E_0 \sin \gamma.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$C_6 = -\frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos \gamma. \quad (198)$$

$$E_6 = C_6 + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma. \quad (199)$$

Не трудно заметить, что значение E_6 можно было бы получить из (59) и (63').

Действительно:

$$D_6 = C_6 - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \delta \quad (59)$$

$$D_6 = E_6 - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \gamma. \quad (63')$$

Отсюда имеем:

$$E_6 = C_6 - \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} (\cos \delta - \cos \gamma)$$

или:

$$E_6 = C_6 + \frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \int_{\gamma}^{\delta} \sin \gamma d\gamma.$$

Когда нагрузка сосредоточенная, можно считать, что

$$qRd\gamma = P \text{ и } \lim \delta = \gamma.$$

Тогда

$$E_6 = C_6 + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma.$$

Точно также по (64):

$$C_5 = -\frac{qR^4(n+1)}{2B_1} (\sin \delta - \sin \gamma).$$

При переходе на сосредоточенную нагрузку

$$C_5 = -\frac{qR^4(n+1)}{2B_1} \cos \gamma.$$

Подставив полученные значения C_3 , C_5 и E_6 из (197), (198) и (199) в (189), (191) и (192), получим:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= C_1 + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi - \\ &\quad - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (2\varphi + \cos \gamma \varphi \cos \varphi). \\ \frac{dv_1}{d\varphi} &= -C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi + C_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) - \\ &\quad - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [2 + \cos \gamma (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi)]. \\ \frac{d^2v_1}{d\varphi^2} &= -C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi + C_6 (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) - \\ &\quad - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos \gamma (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

$$M_1^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[-2C_6 \cos \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \cos \gamma \sin \varphi \right]. \quad (201)$$

$$M_3^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[-2C_6 \sin \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{B_1} (1 - \cos \gamma \cos \varphi) \right]. \quad (202)$$

Так как по (16):

$$R\beta = \frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2} + \frac{M_1}{B_1} R^3,$$

то из полученных значений $\frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2}$ и M_1 найдем:

$$R\beta_1 = -C_6(n+1) \cos \varphi - C_4(n+1) \sin \varphi + C_6[2n \cos \varphi - (n+1)\varphi \sin \varphi] + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos \gamma [(n+1)\varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi]. \quad (203)$$

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= E_1 + E_3 \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma \varphi \sin \varphi, \\ \frac{dv_2}{d\varphi} &= -E_3 \sin \varphi + C_6(\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi), \\ \frac{d^2 v_2}{d\varphi^2} &= -E_3 \cos \varphi + C_6(2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \\ &\quad + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma (2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

$$M_1^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[-2C_6 \cos \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \sin \gamma \cos \varphi \right] \quad (205)$$

$$M_3^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[-2C_6 \sin \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \sin \gamma \sin \varphi \right] \quad (206)$$

$$R\beta_2 = -E_3(n+1) \cos \varphi + C_6[2n \cos \varphi - (n+1)\varphi \sin \varphi] + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [2n \cos \varphi - (n+1)\varphi \sin \varphi]. \quad (207)$$

При $\varphi = \gamma$, $\frac{dv_1}{d\varphi} = \frac{dv_2}{d\varphi}$ и $\beta_1 = \beta_2$.

Подставив γ вместо φ во вторые уравнения (200) и (204), получим:

$$E_3 \sin \gamma = C_3 \sin \gamma - C_4 \cos \gamma + \frac{3}{2} \frac{PR^3(n+1)}{B_1}.$$

$$E_3 \cos \gamma = C_3 \cos \gamma + C_4 \sin \gamma - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \gamma.$$

Из этих уравнений получим:

$$1) \quad E_3 = C_3 + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (3\sin\gamma - \gamma\cos\gamma) \quad (208)$$

$$2) \quad \text{и} \quad C_4 = \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (3\cos\gamma + \gamma\sin\gamma). \quad (209)$$

Подставив значения C_4 во второе уравнение группы (200) и в (208), получим два уравнения с неизвестными коэффициентами C_3 и D_6 , которые определяются из условий:

При $\varphi = \theta$; $\frac{dv_1}{d\varphi} = 0$ и $\beta_1 = 0$.

После подстановки значения C_4 из (209) и замены φ через θ , получим следующие два уравнения:

$$3) \quad \begin{aligned} -C_3\sin\theta + C_6(\theta\cos\theta + \sin\theta) + \frac{PR^3}{2B_1} (2\cos\gamma\cos\theta + \cos\gamma\theta\sin\theta + \\ + \gamma\sin\gamma\cos\theta - 2) = 0. \\ -C_3(n+1)\cos\theta + C_6[2n\cos\theta - (n+1)\theta\sin\theta] + \\ + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [(n+1)\cos\gamma\theta\cos\theta - (n+3)\cos\gamma\sin\theta - \\ - (n+1)\gamma\sin\gamma\sin\theta] = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$C_6 = \frac{2(n+1)(\cos\theta - \cos\gamma) + (n-1)\cos\gamma\sin^2\theta - (n+1)\gamma\sin\gamma}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} \cdot \frac{PR^3(n+1)}{2B_1}. \quad (210)$$

$$C_3 = \left\{ (n+1)\theta^2\cos\gamma - 2(n+1)\theta\sin\theta + 4n\cos\theta - (n+3)\cos\gamma - \right. \\ \left. - (n+1)\gamma\sin\gamma - (n-1)\gamma\sin\gamma\cos^2\theta - 3(n-1)\cos\gamma\cos^2\theta \right\} \times \\ \times \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} : [(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta]. \quad (211)$$

При $\varphi = \gamma$; $V_1 = V_2$.

Подставив в уравнения V_1 и V_2 (200) и (204) значения E_3 и C_4 из (208) и (209), найдем после замены φ через γ :

$$E_1 = C_1 - \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \gamma. \quad (212)$$

После подстановки в уравнения (200), (203), (204) и (207) C_4 из (209), E_3 из (208) и E_1 из (212) уравнения деформаций получат такой вид:

В I участке:

$$V_1 = C_1 + C_3\cos\varphi + C_6\varphi\sin\varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [(3\cos\gamma + \gamma\sin\gamma)\sin\varphi - \\ - \cos\gamma\varphi\cos\varphi - 2\varphi]. \quad (213)$$

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = -C_3\sin\varphi + C_6(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [2\cos\gamma\cos\varphi + \\ + \cos\gamma\varphi\sin\varphi + \gamma\cos\gamma\sin\varphi - 2]. \quad (214)$$

$$R\beta_1 = -C_3(n+1)\cos\varphi + C_6[2n\cos\varphi - (n+1)\varphi\sin\varphi] + \\ + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \{ \cos\gamma[(n+1)\varphi\cos\varphi + 2n\sin\varphi] - \\ - (n+1)(3\cos\gamma + \gamma\sin\gamma)\sin\varphi \}. \quad (215)$$

Во II участке:

$$V_2 = C_1 + C_3\cos\varphi + C_6\varphi\sin\varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [\sin\gamma\varphi\sin\varphi + \\ + (3\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)\cos\varphi - 2\gamma] \quad (216)$$

$$\frac{dv_2}{d\varphi} = -C_3\sin\varphi + C_6(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [\sin\gamma(\varphi\cos\varphi + \\ + \sin\varphi) - (3\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)\sin\varphi]. \quad (217)$$

$$R\beta_2 = -C_3(n+1)\cos\varphi + C_6[2n\cos\varphi - (n+1)\varphi\sin\varphi] + \\ + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \{ \sin\gamma[2n\cos\varphi - (n+1)\varphi\sin\varphi] - \\ - (n+1)(3\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)\cos\varphi \}. \quad (218)$$

Чтобы определить деформации, надо в уравнения (213)–(218) подставить коэффициенты C_1 , C_3 и C_6 .

Значения C_3 и C_6 уже получены. См. (210) и (211). C_1 находим из (213), зная, что при $\varphi = \pm\theta$, $V_1 = 0$.

Подставив в (213) θ вместо φ , получим такое выражение для C_1 :

$$C_1 = -C_3\cos\theta - C_6\theta\sin\theta - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \times \\ \times [(3\cos\gamma + \gamma\sin\gamma)\sin\theta - \cos\gamma\theta\cos\theta - 2\theta]. \quad (219)$$

Напишем окончательные значения моментов.

Положив в формуле (210)

$$B_0 = -\frac{2(n+1)(\cos\theta - \cos\gamma) + (n-1)\cos\gamma\sin^2\theta - (n+1)\sin\gamma}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} \quad (220)$$

и соответственно с этим, подставив в (201), (202), (205) и (206):

$$C_6 = -B_0 \frac{PR^3(n+1)}{2B_1}, \quad (221)$$

получим следующие значения моментов:

I участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = (B_0\cos\varphi - \cos\gamma\sin\varphi)PR. \quad (222)$$

Крутящий момент:

$$M_2^I = (B_0\sin\varphi + \cos\gamma\cos\varphi - 1)PR. \quad (223)$$

II участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^{\text{II}} = (B_o \cos \varphi - \sin \gamma \cos \varphi) PR. \quad (224)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{\text{II}} = (B_o \sin \varphi - \sin \gamma \sin \varphi) PR. \quad (225)$$

Значения моментов для сосредоточенной нагрузки можно получить, не прибегая к уравнениям деформаций, а непосредственно из уравнений моментов, выведенных для симметричной равномерной нагрузки.

Например, изгибающий момент для симметричной нагрузки в пределах I участка по (100) напишется так:

$$M_1^{\text{I}} = BqR^2 \cos \varphi - (\sin \delta - \sin \gamma) qR^2 \sin \varphi,$$

или, подставив сюда значение B из (99), получим:

$$\begin{aligned} M_1^{\text{I}} = & - \frac{(n+1)(\delta \cos \delta - \gamma \cos \gamma) + [(n+1) \cos^2 \theta + 2(n+1)](\sin \delta - \sin \gamma) - 2[(n+1) \cos \theta - \cos \delta](\delta - \gamma)}{(n+1)\theta - (n-1)\sin \theta \cos \theta} \times \\ & \times qR^2 \cos \varphi - (\sin \delta - \sin \gamma) qR^2 \sin \varphi = \\ & - \frac{(n+1) \int_{\gamma}^{\delta} (\gamma \sin \gamma - \cos \gamma) d\gamma + [(n-1) \cos^2 \theta - 2(n+1)] \int_{\gamma}^{\delta} \cos \gamma \delta \gamma + 2[(n+1) \cos \theta - \cos \delta] \int_{\gamma}^{\delta} d\gamma}{(n+1)\theta - (n-1)\sin \theta \cos \theta} qR^2 \cos \varphi - \\ & - qR^2 \sin \varphi \int_{\gamma}^{\delta} \cos \delta d\gamma. \end{aligned}$$

При расположении нагрузки на участке длиной $Rd\gamma$ можно считать $qRd\gamma = P$ и $\delta = \gamma$.

Следовательно, для случая сосредоточенной нагрузки момент может быть написан так:

$$\begin{aligned} M_1^{\text{I}} = & - \frac{(n+1)(\cos \gamma - \gamma \sin \gamma) - [(n-1) \cos^2 \theta + 2(n+1)] \cos \gamma + 2[(n+1) \cos \theta - \cos \gamma]}{(n+1)\theta - (n-1)\sin \theta \cos \theta} PR \cos \varphi - \\ & - PR \cos \gamma \sin \varphi \end{aligned}$$

или, после приведения и некоторого преобразования:

$$M_1^{\text{I}} = \left[- \frac{2(n+1)(\cos \theta - \cos \gamma) + (n-1) \cos \gamma \sin^2 \theta - (n+1) \gamma \sin \gamma}{(n+1)\theta - (n-1)\sin \theta \cos \theta} \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi \right] PR.$$

Коэффициент при $\cos \varphi$, как видно из (220), равен B_o .

Поэтому

$$M_1^{\text{I}} [B_o \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi] PR.$$

Проверим правильность полученных формул для моментов II участка таким путем: выразим моменты II участка через

опорные моменты M_{1A} и M_{3A} , реакцию левой опоры и нагрузку (черт. 14а).

$$\begin{aligned} M_1^{\Pi} &= M_{1A} \cos(\theta - \varphi) + M_{3A} \sin(\theta - \varphi) + PR \sin(\theta - \varphi) - PR \sin(\gamma - \varphi) = \\ &= [B_o \cos \theta \cos(\theta - \varphi) - \cos \gamma \sin \theta \cos(\theta - \varphi) + B_o \sin \theta \sin(\theta - \varphi) + \\ &\quad + \cos \gamma \cos \theta \sin(\theta - \varphi)] PR + PR [\sin(\theta - \varphi) - \sin(\gamma - \varphi)] = \\ &= [B_o \cos \varphi - \sin \gamma \cos \varphi] PR. \end{aligned}$$

Получим, таким образом, формулу (224).

$$\begin{aligned} M_3^{\Pi} &= -M_{1A} \sin(\theta - \varphi) + M_{3A} \cos(\theta - \varphi) - PR[1 - \cos(\theta - \varphi)] + \\ &+ PR[1 - \cos(\gamma - \varphi)] = [-B_o \cos \theta \sin(\theta - \varphi) + \cos \gamma \sin \theta \sin(\theta - \varphi) + \\ &\quad + B_o \sin \theta \cos(\theta - \varphi) + \cos \gamma \cos \theta \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi)] + \\ &\quad + \cos(\theta - \varphi) - \cos(\gamma - \varphi) PR = (B_o \sin \varphi - \sin \gamma \sin \varphi) PR. \end{aligned}$$

Получена формула (225).

Напишем теперь моменты M_{1B} и M_{3B} , выразив их через M_{1A} и M_{3A} , реакцию левой опоры и нагрузки (черт. 14а):

$$\begin{aligned} M_{1B} &= M_{1A} \cos 2\theta + M_{3A} \sin 2\theta + PR \sin 2\theta - PR \sin(\theta + \gamma) - \\ &- PR \sin(\theta - \gamma) = [B_o \cos \theta \cos 2\theta - \cos \gamma \sin \theta \cos 2\theta + B_o \sin \theta \sin 2\theta + \\ &\quad + \cos \gamma \cos \theta \sin 2\theta - \sin 2\theta] PR + PR \sin 2\theta - 2PR \cos \gamma \sin \theta = \\ &= [B_o \cos \theta - \cos \gamma \sin \theta] PR. \end{aligned}$$

Как и надо было ожидать, получен момент $M_{1B} = M_{1A}$.

Отсюда следует, что сумма моментов относительно оси X_1 , проходящей через правую опорную точку оси бруса, равна нулю.

Напишем момент M_{3B} (черт. 14а).

$$\begin{aligned} M_{3B} &= -M_{1A} \sin 2\theta + M_{3A} \cos 2\theta - PR[1 - \cos 2\theta] + \\ &+ PR[1 - \cos(\theta + \gamma)] + PR[1 - \cos(\theta - \gamma)] = [-B_o \cos \theta \sin 2\theta + \\ &\quad + \cos \gamma \sin \theta \sin 2\theta + B_o \sin \theta \cos 2\theta - \cos 2\theta] PR + PR + \\ &\quad + PR \cos 2\theta - 2PR \cos \gamma \cos \theta. \end{aligned}$$

$$M_{3B} = -[B_o \sin \theta + \cos \gamma \cos \theta - 1] PR.$$

Крутящий момент на опоре А численно равен крутящему моменту на опоре В, но противоположен по знаку.

Проекция моментов на ось Z_1 , проходящую через левую опорную точку оси бруса, очевидно, будет равна нулю, так как к найденному выражению M_{3B} присоединится реактивный момент с обратным знаком.

Проекция внешних сил на ось Y_1 , очевидно, равна нулю, так как реакции равны и прямо противоположны нагрузкам. Таким образом, условия равновесия соблюдены.

б) Антисимметричная нагрузка (черт. 14б).

Уравнения упругой линии для I и II участков будут иметь такой вид:

$$V_1' = C_1' + C_2' \varphi + C_3' \cos \varphi + C_4' \sin \varphi + C_5' \varphi \cos \varphi + C_6' \varphi \sin \varphi \quad (226)$$

$$V_2' = E_1' + E_2' \varphi + E_3' \cos \varphi + E_4' \sin \varphi + \\ + E_5' \varphi \cos \varphi + E_6' \varphi \sin \varphi.$$

В соответствии с тем, что было получено для III участка при нагрузке антисимметричной равномерно распределенной по части пролета, коэффициенты $E_1' = E_3' = E_6' = 0$.

Поэтому

$$V_2' = E_2' \varphi + E_4' \sin \varphi + E_5' \varphi \cos \varphi. \quad (227)$$

Следовательно, моменты для I и II участков будут иметь следующие значения по формулам (116) и (117):

I участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} [2C_5' \sin \varphi - 2C_6' \cos \varphi]. \quad (228)$$

Крутящий момент:

$$M_3^I = \frac{B_1}{(n+1)R^2} [C_2' - 2C_5' \cos \varphi - 2C_6' \sin \varphi]. \quad (229)$$

II участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \cdot 2E_5' \sin \varphi. \quad (230)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} [E_2' - 2E_5' \cos \varphi]. \quad (231)$$

Выразим моменты M_1^{II} и M_3^{II} через M_{1A} , M_{3A} , реакцию левой опоры A_0 и нагрузку:

$$M_1^I = M_{1A} \cos(\theta - \varphi) + M_{3A} \sin(\theta - \varphi) - A_0 R \sin(\theta - \varphi) - \\ - PR \sin(\gamma - \varphi) = [2C_5' \sin \theta \cos(\theta - \varphi) - 2C_6' \sin \theta \cos(\theta - \varphi) + \\ + C_2' \sin(\theta - \varphi) - 2C_5' \cos \theta \sin(\theta - \varphi) - 2C_6' \sin \theta \sin(\theta - \varphi)] \times \\ \times \frac{B_1}{(n+1)R^2} - A_0 R \sin(\theta - \varphi) - PR \sin(\gamma - \varphi).$$

Но так как перерезывающая сила по (20):

$$T^{(0)} = A_0 = \frac{C_2' B_1}{(n+1)R^2}, \quad (232)$$



то, подставив это значение A_0 в предыдущее выражение M_1^{II} , получим после некоторых простых преобразований

$$M_1^{\text{II}} = \left[2C_5' \sin \varphi - 2C_6' \cos \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \sin(\gamma - \varphi) \right] \frac{B_1}{(n+1)R^3} \quad (233)$$

$$\begin{aligned} M_3^{\text{II}} = & -M_{1A} \sin(\theta - \varphi) + M_{3A} \cos(\theta - \varphi) + A_0 R [1 - \cos(\theta - \varphi)] + \\ & + PR [1 - \cos(\gamma - \varphi)] = [-2C_5' \sin \theta \sin(\theta - \varphi) + 2C_6' \cos \theta \sin(\theta - \varphi) + \\ & + C_2' \cos(\theta - \varphi) - 2C_5' \cos \theta \cos(\theta - \varphi) - 2C_6' \sin \theta \cos(\theta - \varphi)] \times \\ & \times \frac{B_1}{(n+1)R^3} + \frac{C_2' B_1}{(n+1)R^3} [1 - \cos(\theta - \varphi)] + PR [1 - \cos(\gamma - \varphi)] \cdot \\ & \cdot M_3^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^3} \left\{ C_2' - 2C_5' \cos \varphi - 2C_6' \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{PR^3(n+1)}{B_1} [1 - \cos(\gamma - \varphi)] \right\}. \end{aligned} \quad (234)$$

Из (231) найдем:

$$T_2'(\text{II}) = \frac{E_2' B_1}{(n+1)R^3},$$

но, с другой стороны,

$$T_2'(\text{II}) = T_2'(\text{I}) + P$$

$$\text{или} \quad E_2' = C_2' + \frac{PR^3(n+1)}{B_1}. \quad (235)$$

Подставив (235) в (231), получим:

$$M_3^{\text{II}} = \frac{B_1}{(n+1)R^3} \left[C_2' - 2E_5' \cos \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \right]. \quad (236)$$

Приравняв (230) и (233), а также (231) и (236), получим:

$$E_5' \sin \varphi = C_5' \sin \varphi - C_6' \cos \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos(\gamma - \varphi). \quad (237)$$

$$E_5' \cos \varphi = C_5' \cos \varphi + C_6' \sin \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos(\gamma - \varphi). \quad (238)$$

Решив (237) и (238), найдем:

$$E_5' = C_5' + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos \gamma \quad (239)$$

$$C_6' = -\frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma. \quad (240)$$

Подставив значения E_5' и C_6' в выражения моментов, получим:

Для I участка.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = \left[2C_5' \sin \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \sin \gamma \cos \varphi \right] \frac{B_1}{(n+1)R^2}. \quad (241)$$

Крутящий момент:

$$M_3^I = \left[C_2' - 2C_5' \cos \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \sin \gamma \sin \varphi \right] \frac{B_1}{(n+1)R^2}. \quad (242)$$

Для II участка.

Изгибающий момент:

$$M_1^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[2C_5' \sin \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \cos \gamma \sin \varphi \right]. \quad (243)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{II} = \frac{B_1}{(n+1)R^2} \left[C_2' - 2C_5' \cos \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{B_1} (1 - \cos \gamma \cos \varphi) \right]. \quad (244)$$

Подставив в уравнение (226) значение C_5' из (240), получим:

$$V_1' = C_1' + C_2' \varphi + C_3' \cos \varphi + C_4' \sin \varphi + C_5' \varphi \cos \varphi - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma \varphi \sin \varphi. \quad (245)$$

$$\frac{dv_1'}{d\varphi} = C_2' - C_3' \sin \varphi - C_4' \cos \varphi + C_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi).$$

$$\frac{d^2v_1'}{d\varphi^2} = -C_3' \cos \varphi - C_4' \sin \varphi - C_5' (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \sin \gamma (\varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi).$$

$$R\beta_1' = \frac{M_1}{B_1} R^2 + \frac{d^2v_1'}{d\varphi^2} = -C_3'(n+1) \cos \varphi - C_4'(n+1) \sin \varphi - C_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [(n+1) \varphi \sin \varphi - 2n \cos \varphi] \sin \gamma. \quad (246)$$

Подставив в уравнение (227) значения E_2' и E_5' из (235) и (239), получим:

$$V_2' = C_2' \varphi + E_4' \sin \varphi + C_5' \varphi \cos \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [2\varphi + \cos \gamma \varphi \cos \varphi].$$

$$\frac{dv_2'}{d\varphi} = C_2' + E_4' \cos \varphi - C_5' (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [2 - \cos \gamma (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi)] \times$$

$$\times \frac{d^2 v_2'}{d\varphi^2} = -E_4' \sin \varphi - C_5' (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi) - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \times \\ \times \cos \gamma (\varphi \cos \varphi + 2 \sin \varphi). \quad (247)$$

$$R\beta_3' = -E_4' (n+1) \sin \varphi - C_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] - \\ - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \cos \gamma [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi]. \quad (248)$$

$$\text{При } \varphi = \gamma; \frac{dv_1'}{d\varphi} = \frac{dv_2'}{d\varphi}; \beta_1' = \beta_2'.$$

После подстановки γ вместо φ в уравнения $\frac{dv_1}{d\varphi}$ и $\frac{dv_2}{d\varphi}$ (245) и (247), получим:

$$E_4' \cos \gamma = -C_3' \sin \gamma + C_4' \cos \gamma - \frac{3}{2} \frac{PR^3(n+1)}{B_1}. \quad (249)$$

Из уравнений (246) и (248) после такой же подстановки найдем:

$$E_4' \sin \gamma = C_3' \cos \gamma + C_4' \sin \gamma - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \gamma. \quad (250)$$

Из (249) и (250) получим:

$$C_3' = \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (\gamma \cos \gamma - 3 \sin \gamma). \quad (251)$$

$$E_4' = C_4' - \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (\gamma \sin \gamma + 3 \cos \gamma). \quad (252)$$

Имея значения C_3' и E_4' , мы можем найти C_1' из условия, что при $\varphi = \gamma$, $v_1 = v_2$.

Из уравнений v_1 и v_2 (245) и (247) после подстановки γ вместо φ найдем:

$$C_1' = \frac{PR^3(n+1)}{B_1} \gamma. \quad (253)$$

После подстановки в уравнение v_1' найденных значений C_1' и C_3' (251) и (253) в (245), (246), (247) и (248) получим для I участка.

$$V_1' = C_2' \varphi + C_4' \sin \varphi + C_5' \varphi \cos \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (2\gamma - 3 \sin \gamma \cos \varphi + \\ + \gamma \cos \gamma \cos \varphi - \sin \gamma \varphi \sin \varphi). \quad (254)$$

$$\frac{dv_1'}{d\varphi} = C_2' + C_4' \cos \varphi + C_5' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (2 \sin \gamma \sin \varphi - \\ - \gamma \cos \gamma \sin \varphi - \sin \gamma \varphi \cos \varphi). \quad (255)$$

$$R\beta_1' = -C_4' (n+1) \sin \varphi - C_5' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + \\ + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [(n+3) \sin \gamma \cos \varphi - (n+1) \gamma \cos \gamma \cos \varphi + \\ + (n+1) \sin \gamma \varphi \sin \varphi]. \quad (256)$$

Для II участка.

$$V_2' = C_2' \varphi + C_4' \sin \varphi + C_6' \varphi \cos \varphi + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} [2\varphi + \cos \gamma \varphi \cos \varphi - (\gamma \sin \gamma + 3 \cos \gamma) \sin \varphi]. \quad (257)$$

$$\frac{dv_2'}{d\varphi} = C_2' + C_4' \cos \varphi + C_6' (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \times \\ \times [2(1 - \cos \gamma \cos \varphi) - \cos \gamma \varphi \sin \varphi - \gamma \sin \gamma \cos \varphi]. \quad (258)$$

$$R\beta_2' = -C_4'(n+1) \sin \varphi - C_6' [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} \times \\ \times \{ (\gamma \sin \gamma + 3 \cos \gamma) \sin \varphi - \cos \gamma [(n+1) \varphi \cos \varphi + 2n \sin \varphi] \}. \quad (259)$$

Уравнения (254)–(259) послужат нам для определения деформаций, если будут известны коэффициенты C_2' , C_4' и C_6' .

Перейдем к определению этих коэффициентов.

Имеем на опоре A три условия:

При $\varphi = \pm \theta$,

$$V_1' = 0$$

$$\frac{dv_1'}{d\varphi} = 0$$

$$\beta_1' = 0.$$

Из уравнений (257) и (258) после исключения C_2' получим:

$$C_4'(\theta \cos \theta - \sin \theta) - C_6' \theta^2 \sin \theta + \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} (3 \sin \gamma \cos \theta - 2\gamma - \gamma \cos \gamma \cos \theta + 3\theta \sin \gamma \sin \theta - \theta \gamma \cos \gamma \sin \theta - \theta^2 \sin \gamma \cos \theta) = 0. \quad (260)$$

Из (256) после замены φ через θ получим второе уравнение:

$$-C_4'(n+1) \sin \theta - C_6' [(n+1) \theta \cos \theta + 2n \sin \theta] + \frac{PR^3}{2B_1} \times \\ \times [(n+1)(n+3) \sin \gamma \cos \theta - (n+1)^2 \gamma \cos \gamma \cos \theta + \\ + (n+1)^2 \sin \gamma \theta \sin \theta]. \quad (261)$$

Из (260) и (261) определяем C_4' и C_6' :

$$C_4' = [(n+1) \theta^2 \sin \gamma + (n+1) \theta \gamma \cos \gamma + (n-1) \theta \gamma \cos \gamma \sin^2 \theta + \\ + 2(n+1) \theta \gamma \cos \theta - 3(n-1) \theta \sin \gamma \sin^2 \theta - 3(n+1) \theta \sin \gamma + 4n \gamma \sin \theta - \\ - 6n \sin \gamma \sin \theta \cos \theta + 2n \gamma \cos \gamma \sin \theta \cos \theta] \frac{PR^3(n+1)}{2B_1} : [(n+1) \theta^2 + \\ + (n-1) \theta \sin \theta \cos \theta - 2n \sin^2 \theta]. \quad (262)$$

$$C_6' = \frac{2(n+1) (\theta \sin \gamma - \gamma \sin \theta) + 2n \sin \gamma \sin \theta \cos \theta - (n+1) \theta \gamma \cos \gamma - (n-1) \theta \sin \gamma \cos^2 \theta}{(n+1) \theta^2 + (n-1) \theta \sin \theta \cos \theta - 2n \sin^2 \theta} \cdot \frac{PR^3(n+1)}{2B_1}. \quad (263)$$

Получив значения C_5' и C_4' и подставив их в (254), из условия, что при $\varphi = \pm \theta$, $v_1' = 0$, найдем:

$$C_5' = \frac{-(n+1) \theta \gamma + n \theta \sin \gamma \cos \theta - n \gamma \cos \gamma \sin \theta - (n-1) \gamma \sin \theta \cos \theta + 2n \sin \gamma \sin \theta}{(n+1) \theta^2 + (n-1) \theta \sin \theta \cos \theta - 2n \sin^2 \theta} \cdot \frac{PR^3(n+1)}{B_1}. \quad (264)$$

Имея значение C_2' , из (232) получим:

$$A_o = \frac{-(n+1)\theta\gamma + n\theta\sin\gamma\cos\theta - n\gamma\cos\gamma\sin\theta - (n-1)\gamma\sin\theta\cos\theta + 2n\sin\gamma\sin\theta}{(n+1)\theta^2 + (n-1)\theta\sin\theta\cos\theta - 2n\sin^2\theta} PR. \quad (264)$$

Приняв для сокращения, что:

$$C_o = \frac{2(n+1)(\theta\sin\gamma - \gamma\sin\theta) + 2n\sin\gamma\sin\theta\cos\theta - (n+1)\theta\gamma\cos\gamma - (n-1)\theta\sin\gamma\cos^2\theta}{(n+1)\theta^2 + (n-1)\theta\sin\theta\cos\theta - 2n\sin^2\theta},$$

перепишем выражение (263) так:

$$C_6' = C_o \frac{PR^3(n+1)}{2B_1}.$$

Подставив это выражение в (241), (242), (243) и (244) и заменив в (242) и (244) C_2' через $\frac{A(n+1)PR^3}{B_1}$, по (232) получим окончательное значение моментов.

I участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = (C_o \sin\varphi + \sin\gamma\cos\varphi) PR. \quad (266)$$

Крутящий момент:

$$M_3^I = (-C_o \cos\varphi + \sin\gamma\sin\varphi) PR + A_o R. \quad (267)$$

II участок.

Изгибающий момент:

$$M_1^{II} = (C_o \sin\varphi + \cos\gamma\sin\varphi) PR. \quad (268)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{II} = (-C_o \cos\varphi - \cos\gamma\cos\varphi + 1) PR + A_o R. \quad (269)$$

Проверим эти формулы, выразив M_1^{II} и M_3^{II} через моменты M_{1A} и M_{3A} на опоре A, опорную реакцию и нагрузку.

Изгибающий момент во II участке (черт. 14b).

$$\begin{aligned} M_1^{II} &= M_{1A} \cos(\theta - \varphi) + M_{3A} \sin(\theta - \varphi) - A_o R \sin(\theta - \varphi) - \\ &- PR \sin(\gamma - \varphi) = [C_o \sin\theta \cos(\theta - \varphi) + \sin\gamma \cos\theta \cos(\theta - \varphi) - \\ &- C_o \cos\theta \sin(\theta - \varphi) + \sin\gamma \sin\theta \sin(\theta - \varphi)] PR - A_o R \sin(\theta - \varphi) - \\ &- PR \sin(\gamma - \varphi) = [C_o \sin\varphi + \cos\gamma \sin\varphi] PR. \end{aligned}$$

Получена формула (268).

Крутящий момент во II участке:

$$\begin{aligned} M_3^{\text{II}} = & -M_{1A} \sin(\theta - \varphi) + M_{3A} \cos(\theta - \varphi) + A_o R [1 - \cos(\theta - \varphi)] + \\ & + PR [1 - \cos(\gamma - \varphi)] = [-C_o \sin \theta \sin(\theta - \varphi) - \sin \gamma \cos \theta \sin(\theta - \varphi) - \\ & - C_o \cos \theta \cos(\theta - \varphi) + \sin \gamma \sin \theta \cos(\theta - \varphi)] PR + A_o R \cos(\theta - \varphi) + \\ & + A_o R - A_o R \cos(\theta - \varphi) + PR - PR \cos(\gamma - \varphi) = \\ & = [-C_o \cos \varphi - \cos \gamma \cos \varphi + 1] PR + A_o R. \end{aligned}$$

Получена формула (269).

Проекция моментов на ось X_1 , проходящую через опорную точку оси бруса, всех внешних сил, находящихся левее опоры B .

$$\begin{aligned} M_{1B} = & M_{1A} \cos 2\theta + M_{3A} \sin 2\theta - A_o R \sin 2\theta - PR \sin(\theta + \gamma) + \\ & + PR \sin(\theta - \gamma) = [C_o \sin \theta \cos 2\theta + \sin \gamma \cos \theta \cos 2\theta - C_o \sin \theta \sin 2\theta + \\ & + \sin \gamma \sin \theta \sin 2\theta] PR + A_o R \sin 2\theta - A_o R \sin 2\theta - 2PR \sin \gamma \cos \theta. \\ M_{1B} = & -[C_o \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta] PR. \end{aligned}$$

Изгибающий момент на опоре B равен по абсолютной величине моменту на опоре A , но противоположен по знаку.

Проекция моментов на ось X_1 , включая и реактивный момент, очевидно, будет равна нулю, так как реактивный момент будет равен и противоположен моменту M_{1B} .

Проекция моментов на ось Z_1 всех внешних сил, расположенных левее опоры B , напишется так:

$$\begin{aligned} M_{3B} = & -M_{1A} \sin 2\theta + M_{3A} \cos 2\theta + A_o R (1 - \cos 2\theta) + \\ & + PR [1 - \cos(\theta + \gamma)] - PR [1 - \cos(\theta - \gamma)] = PR [-C_o \sin \theta \sin 2\theta - \\ & - \sin \gamma \cos \theta \sin 2\theta - C_o \cos \theta \cos 2\theta + \sin \gamma \sin \theta \cos 2\theta] + AR \cos 2\theta + \\ & + AR - AR \cos 2\theta + 2PR \sin \gamma \sin \theta; \\ M_{3B} = & [-C_o \cos \theta + \sin \gamma \sin \theta] PR. \end{aligned}$$

Крутящий момент на правой опоре будет по абсолютному значению и по знаку равен крутящему моменту на левой опоре. Условие равенства нулю проекции моментов на ось Z_1 всех сил, действующих на брус, очевидно, соблюдено.

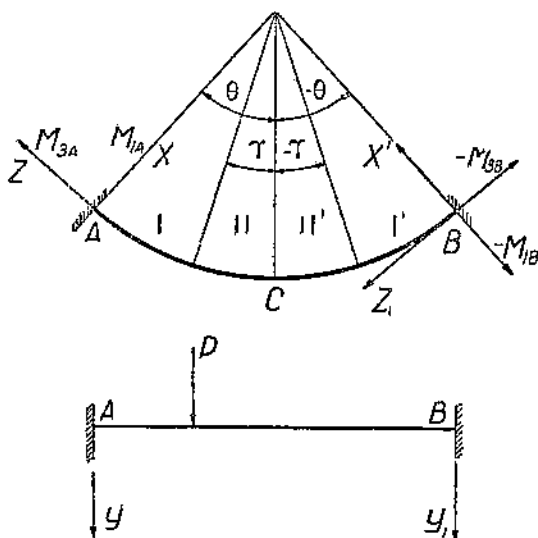
Таким образом, видим, что условия равновесия выполнены.

с) Нагрузка несимметричная.

Деформации при несимметричной нагрузке, чтобы избежать очень сложных вычислений, лучше определять по отдельности для симметричной и антисимметричной нагрузок и потом полученные результаты алгебраически суммировать. Ввиду сложности уравнений деформаций для несимметричной нагрузки, мы их не приводим.

Что же касается моментов, то даем их значения для случая несимметричной нагрузки, исходя из результатов, полученных для нагрузок симметричной и антисимметричной (черт. 15).

Ввиду того, что симметричная и антисимметричная нагрузки (черт. 14, 14а и 14б) приняты равными P , несимметричная нагрузка таким образом будет равна $2P$.



Черт. 15.

Чтобы получить результат, отвечающий нагрузке P , надо суммарные деформации, а также суммарные моменты, полученные от симметричной и антисимметричной нагрузок, уменьшить вдвое.

Изгибающие и крутящие моменты для нагрузки несимметричной на основании полученных результатов будут выражены так:

Для I и I' участков.

Изгибающий момент:

$$M_1^I = [B_o \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi] \frac{PR}{2} \pm \pm \left\{ C_o \sin \varphi + \sin \gamma \cos \varphi \right\} \frac{PR}{2}. \quad (270)$$

Крутящий момент:

$$M_3^I = \pm [B_o \sin \varphi - \cos \gamma \cos \varphi - 1] \frac{PR}{2} + + \left\{ -C_o \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi \right\} PR + \left\{ \frac{A_o R}{2} \right\}. \quad (271)$$

Для II и II' участков.
Изгибающий момент:

$$M_1^{\text{II}} = [B_o \cos \varphi - \sin \gamma \cos \varphi] \frac{PR}{2} \pm \pm \left\{ C_o \sin \varphi + \cos \gamma \sin \varphi \right\} \frac{PR}{2}. \quad (272)$$

Крутящий момент:

$$M_3^{\text{II}} = \pm [B_o \sin \varphi - \sin \gamma \sin \varphi] \frac{PR}{2} + + \left\{ -C_o \cos \varphi - \cos \gamma \cos \varphi + 1 \right\} PR + \left\{ \frac{A_o R}{2} \right\}. \quad (273)$$

Верхние знаки относятся к левым участкам (I и II), а нижние—к правым участкам (I' и II'). Кроме того, выражения, зависящие от симметричной нагрузки, взяты в прямые скобки, а от антисимметричной—в фигурные.

Значения коэффициентов можно найти под следующими номерами: A_o —(264); B_o —(220) и C_o —(265).

VI. Определение коэффициента жесткости n .

Коэффициентом жесткости мы называем отношение жесткости при изгибе к жесткости при кручении

$$n = \frac{B_1}{C} = \frac{EI}{C}.$$

Жесткость при кручении C может быть определена по приближенной формуле Сен-Венана

$$C = \frac{F^2 G}{40 I_p},$$

где G —модуль упругости 2 рода,

F —площадь поперечного сечения,

I_p —полярный момент инерции.

Применительно к железо-бетону модуль упругости E может быть принят $= 2,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, а $G = 90\,000 \text{ кг/см}^2$.

Тогда коэффициент жесткости для железо-бетона может быть выражен так:

$$n = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 40 I_p \cdot I}{9 \cdot 10^4 \cdot F^2} \cong 9,333 \frac{I_p I}{F^2}.$$

Для прямоугольных сечений эта формула дает:

$$n = 0,648 \left[1 + \left(\frac{h}{b} \right)^3 \right].$$

Помимо формулы Сен-Венана для определения жесткости при кручении C можно пользоваться следующими формулами, имеющимися в справочниках (напр. Ферстера).

1) Для прямоугольника при $\alpha = \frac{h}{b}$ больше 1 и меньше 4 (h —высота и b —основание):

$$C = \frac{h^4}{3} \left(\alpha - 0,630 + \frac{0,052}{\alpha^4} \right) G.$$

2) Для узкого прямоугольного сечения при $\alpha = \frac{h}{b} > 4$:

$$C = \frac{h^4}{3} (\alpha - 0,630) G.$$

3) Для двутаврового сечения с шириной полки b , толщиной полки t , толщиной вертикальной стенки d и высотой всего сечения h :

$$C = \frac{1}{3} \left[(2b - 1,26t)t^3 + (h - 1,67t + 1,76d)d^3 \right] G.$$

4) Для таврового сечения высотой h , с шириной полки b и толщиной стенки и полки d :

$$C = \frac{1}{3} (h + b - 1,78d)d^3 G.$$

5) Для несимметричного креста, прямоугольного, с толщиной стенок d и длинами сторон h и b , считая за длину сторон стороны описанного прямоугольника:

$$C = \frac{1}{3} (h + b - 0,15d)d^3 G.$$

VII. Балка с нагрузкой, равномерно распределенной по всему пролету.

Из отдела IV для случая равномерно распределенной нагрузки по всему пролету были даны значения изгибающего и крутящего моментов в таком виде:

Изгибающий момент:

$$M_1 = \left[2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} \cos\varphi - 1 \right] q R^2.$$

Крутящий момент:

$$M_2 = \left[2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} \sin\varphi - \varphi \right] q R^2.$$

При центральном угле $\theta = 90^\circ$ моменты получают следующие значения:

$$M_1 = \left(\frac{4}{\pi} \cos\varphi - 1 \right) q R^2 \text{ и } M_2 = \left(\frac{4}{\pi} \sin\varphi - \varphi \right) q R^2.$$

Изгибающие моменты $\frac{M_1}{qR^2}$ на опорах.

θ°	n	1	2	4	6	8	10	20	30	40	50	100	500	∞
15°		-0,02315	-0,02317	-0,02343	-0,02359	-0,02375	-0,02388	-0,02410	-0,02440	-0,02463	-0,02483	-0,02513	-0,02610	-0,02636
20°		-0,04160	-0,04190	-0,04244	-0,04290	-0,04330	-0,04367	-0,04497	-0,04563	-0,04637	-0,04678	-0,04785	-0,04917	-0,04945
25°		-0,06573	-0,06633	-0,06735	-0,06818	-0,06886	-0,06944	-0,07125	-0,07241	-0,07309	-0,07354	-0,07470	-0,07584	-0,07618
30°		-0,09599	-0,09712	-0,09889	-0,10022	-0,10128	-0,10213	-0,10469	-0,10600	-0,10679	-0,10889			-0,10997
35°		-0,13271	-0,13447	-0,13708	-0,13993	-0,14031	-0,14138	-0,14439	-0,14581	-0,14663	-0,14717			-0,14971
40°		-0,17619	-0,17871	-0,18245	-0,18450	-0,18614	-0,18737	-0,19064	-0,19207	-0,19288	-0,19341			-0,20346
45°		-0,22817	-0,23003	-0,23243	-0,23567	-0,23888	-0,23996	-0,24327	-0,24465	-0,24541				-0,24815
50°		-0,28467	-0,28659	-0,28934	-0,29311	-0,29791	-0,29914	-0,30234	-0,30361	-0,30439				-0,30660
55°		-0,35008	-0,35441	-0,35932	-0,36145	-0,36374	-0,36453	-0,36776	-0,36886					-0,37139
60°		-0,42300	-0,42742	-0,43211	-0,43457	-0,43610	-0,43708	-0,43951						-0,44247
65°		-0,50204	-0,50746	-0,51158	-0,51364	-0,51488	-0,51571	-0,51780						-0,51989
70°		-0,59085	-0,59427	-0,59751	-0,59907	-0,60000	-0,60060							-0,60354
75°		-0,68501	-0,68745	-0,68964	-0,69125	-0,69164	-0,70105							-0,69846
80°		-0,78518	-0,78687	-0,78789	-0,78821	-0,78851	-0,78870							-0,78958
85°		-0,88995	-0,89095	-0,89128	-0,89143	-0,89151	-0,89156							-0,89180
90°		-1,00000												

н е з а в и с и м о т в е л и ч и ы

Крутящие моменты левой опоры $\frac{M_x}{gR^3}$.

β°	1	2	4	6	8	10	20	30	40	50	100	500	γ
15°	-0,00005	-0,00007	-0,00013	-0,00017	-0,00021	-0,00026	-0,00031	-0,00039	-0,00045	-0,00050	-0,00058	-0,00084	-0,00091
20°	-0,00015	-0,00035	-0,00054	-0,00071	-0,00086	-0,00099	-0,00147	-0,00171	-0,00197	-0,00212	-0,00251	-0,00296	-0,00310
25°	-0,00038	-0,00095	-0,00143	-0,00181	-0,00218	-0,00240	-0,00337	-0,00379	-0,00410	-0,00431	-0,00516	-0,00554	-0,00554
30°	-0,00167	-0,00232	-0,00334	-0,00412	-0,00472	-0,00551	-0,00669	-0,00745	-0,00790	-0,00912	-0,00974	-0,00974	-0,00974
35°	-0,00358	-0,00431	-0,00564	-0,00794	-0,00890	-0,00995	-0,01176	-0,01275	-0,01333	-0,01370	-0,01382	-0,01382	-0,01382
40°	-0,00696	-0,00898	-0,01212	-0,01384	-0,01522	-0,01625	-0,01899	-0,02019	-0,02087	-0,02131	-0,02332	-0,02332	-0,02332
45°	-0,01216	-0,01540	-0,02084	-0,02229	-0,02418	-0,02536	-0,02866	-0,03005	-0,03081	-0,03081	-0,03345	-0,03345	-0,03345
50°	-0,02017	-0,02435	-0,03050	-0,03380	-0,03595	-0,03742	-0,04122	-0,04274	-0,04274	-0,04330	-0,04330	-0,04330	-0,04330
55°	-0,03176	-0,03794	-0,03995	-0,04377	-0,05126	-0,05296	-0,05701	-0,05857	-0,05857	-0,06219	-0,06219	-0,06219	-0,06219
60°	-0,04782	-0,05546	-0,06359	-0,06785	-0,07048	-0,07219	-0,07640	-0,07640	-0,07640	-0,08152	-0,08152	-0,08152	-0,08152
65°	-0,06658	-0,07891	-0,08704	-0,09147	-0,09412	-0,09530	-0,09994	-0,09994	-0,09994	-0,10479	-0,10479	-0,10479	-0,10479
70°	-0,09761	-0,10699	-0,11590	-0,12020	-0,12272	-0,12438	-0,12438	-0,12438	-0,12438	-0,12438	-0,12438	-0,12438	-0,12438
75°	-0,13345	-0,14253	-0,15073	-0,15140	-0,15674	-0,15818	-0,15818	-0,15818	-0,15818	-0,15818	-0,15818	-0,15818	-0,15818
80°	-0,17795	-0,18753	-0,19218	-0,19515	-0,19683	-0,19789	-0,19789	-0,19789	-0,19789	-0,19789	-0,19789	-0,19789	-0,19789
85°	-0,22095	-0,23720	-0,24093	-0,24262	-0,24355	-0,24416	-0,24416	-0,24416	-0,24416	-0,24416	-0,24416	-0,24416	-0,24416
90°	0,29756 — значения от вертикальных и												

Моменты правой опоры — положительные.

Изгибающие моменты $\frac{M_1}{qR^2}$ по среднему пролёту.

θ° \ n	1	2	4	6	8	10	20	30	40	50	100	∞
15°	0,01131	0,01128	0,01102	0,01085	0,01069	0,01054	0,01032	0,01001	0,00977	0,00957	0,00926	0,00798
20°	0,01921	0,01919	0,01902	0,01883	0,01810	0,01771	0,01632	0,01562	0,01484	0,01440	0,01326	0,01156
25°	0,03085	0,03019	0,02906	0,02815	0,02740	0,02678	0,02476	0,02348	0,02273	0,02124	0,02035	0,01932
30°	0,04365	0,04235	0,04051	0,03896	0,03775	0,03677	0,03381	0,03230	0,03139	0,02986		0,02771
35°	0,05677	0,05662	0,05343	0,05117	0,04949	0,04819	0,04451	0,04278	0,04178	0,04112		0,03801
40°	0,07542	0,07213	0,06724	0,06456	0,06242	0,06032	0,05655	0,05468	0,05362	0,05294		0,04922
45°	0,09853	0,08890	0,08126	0,07920	0,07667	0,07485	0,07018	0,06822	0,06714			0,06342
50°	0,11285	0,10675	0,09937	0,09506	0,09225	0,09034	0,08537	0,08339	0,08233			0,07874
55°	0,13310	0,12555	0,11669	0,11227	0,10928	0,10721	0,10227	0,10036				0,09594
60°	0,15399	0,14516	0,13577	0,13085	0,12781	0,12584	0,12098					0,11506
65°	0,17827	0,16544	0,15370	0,15081	0,14788	0,14592	0,14146					0,13611
70°	0,19627	0,18629	0,17680	0,17223	0,16955	0,16778						0,15918
75°	0,21701	0,20761	0,19912	0,19849	0,19290	0,19141						0,18440
80°	0,23710	0,22787	0,22265	0,21964	0,21793	0,21635						0,21175
85°	0,26258	0,25110	0,24755	0,24566	0,24472	0,24411						0,24134
90°												0,27324

0,27824 независимо от величин n

Примечание: Из этой таблицы можно получить значение коэффициента $A = 2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta}$ путем увеличения табличного числа на единицу.

Как видно из последних двух выражений, коэффициент жесткости n при центральном угле $2\theta = 180^\circ$ никакого влияния на моменты не оказывает.

Что касается вопроса о влиянии n на значения моментов при углах θ меньших 90° (углы больше 90° мы не рассматриваем), то из приведенных таблиц можно сделать некоторые выводы.

Мы будем говорить только об опорных моментах изгибающем и крутящем, как наибольших по абсолютному своему значению, и будем иметь в виду только их абсолютные значения. При возрастании n значения моментов возрастают. Чем меньше угол θ и чем меньше значение n , тем более резко сказывается изменение n .

Изгибающий момент реагирует на изменение n значительно спокойнее, чем момент крутящий.

При углах θ от 60° до 90° и при изменениях n в пределах от 1 до ∞ изгибающий момент меняет значение свое на 5—6 проц., поэтому для значений θ , не выходящих из этих пределов, можно для опорных изгибающих моментов пользоваться упрощенной формулой, где принято $n = \infty$:

$$M_{1A} = \left[\frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\theta - \sin \theta \cos \theta} \cos \theta - 1 \right] q R^2,$$

которая может служить для предварительного подбора сечения по изгибающему моменту.

Однако не следует думать, что по соответствующей упрощенной формуле может быть определен и крутящий момент. Его отношение к изменению n выражается более резко, чем момента изгибающего, и такое упрощение может вызвать большую ошибку.

При увеличении радиуса и уменьшении угла θ , но при сохранении длины бруса влияние коэффициента n падает и в пределе, при $R = \infty$ и $\theta = 0$, должно совершенно исчезнуть. В этом можно убедиться, определив значение M_{1A} , т. е. опорного момента (или какого-либо другого) при спрямлении оси бруса.

Положив $R = \frac{l}{2\theta}$, можно переписать формулу изгибающего момента так:

$$M_{1A} = \frac{q l^2}{4 \theta^2} \left[2 \frac{(n+1) \sin \theta - n \theta \cos \theta}{(n+1) \theta - (n-1) \sin \theta \cos \theta} \cos \theta - 1 \right]$$

или

$$M_{1A} = \frac{q l^2}{4} \frac{\frac{(3n+1)}{2} \sin 2\theta - 2n \theta \cos^2 \theta - (n+1) \theta}{(n+1) \theta^3 - \frac{n-1}{2} \sin 2\theta}.$$

При $\theta = 0$ значение момента $= \frac{0}{0}$.

Раскроем эту неопределенность.

Взяв первую производную числителя и знаменателя, получим:

$$\frac{ql^2(3n+1)\cos 2\theta - 2n\cos^2\theta + 2n\theta\sin 2\theta - (n+1)}{4 \cdot 3(n+1)\theta^2 - (n-1)\theta\sin 2\theta - (n-1)\theta^2\cos 2\theta}.$$

При $\theta=0$ эта дробь $= \frac{0}{0}$.

Берем вторую производную. Она дает:

$$\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{-2(3n+1)\sin 2\theta + 4n\sin 2\theta + 4n\theta\cos 2\theta}{6(n+1)\theta - (n-1)\sin 2\theta - 4(n-1)\theta\cos 2\theta + 2(n-1)\theta^2\sin 2\theta}.$$

Это выражение тоже дает неопределенность $\frac{0}{0}$ при $\theta=0$.

Наконец, третья производная даст:

$$\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{-4(3n+1)\cos 2\theta + 12n\cos 2\theta - 8n\theta\sin 2\theta}{6(n+1) - 6(n-1)\cos 2\theta + 8(n-1)\theta\sin 2\theta + 4(n-1)\theta^2\cos 2\theta}.$$

При $\theta=0$ это выражение дает:

$$\frac{ql^2}{4} \cdot \frac{-12n - 4 + 12n}{6n + 6 - 6n + 6} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Таким образом, при спрямленной дуге изгибающий момент:

$$M_{1A} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Между прочим, этот вывод является еще одним доказательством правильности формулы, выведенной для изгибающего момента.

Необходимо сказать еще о влиянии коэффициента n на деформации.

Относительный угол скручивания τ и относительный угол поворота при изгибе θ по принятым нами обозначениям напишутся так:

$$\tau = \frac{M_2}{C} = \frac{\text{крутящий момент}}{\text{жесткость кручения}}.$$

$$\theta = \frac{M_1}{B_1} = \frac{\text{изгибающий момент}}{\text{жесткость изгиба}}.$$

Отношения этих углов

$$\frac{\tau}{\theta} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{B_1}{C} = n \frac{M_2}{M_1}.$$

Как видно из таблиц, значение M_2 по сравнению с M_1 мало, в особенности при малых углах θ .

Однако, при большом значении n отношение $\frac{\tau}{\theta}$ может быть значительным.

Например: при $\theta = 20^\circ$ и $n = 500$, как видно из таблиц I и II, на опоре момент $M_1 = -0,049qR^2$ и $M_3 = -0,003qR^2$, т. е. $M_3 < M_1$ по абсолютному значению в 16 раз.

Однако, деформация, вызываемая крутящим моментом, больше деформации от изгиба почти в 30 раз.

$$\frac{\tau}{\theta} = n \frac{M_3}{M_1} = \frac{3 \cdot 500}{49} \cong 30.$$

Отсюда надо сделать такой вывод: пренебрегать малым крутящим моментом опасно и тем опаснее, чем больше n .

Геометрическое значение M_1 и M_3 .

Выведенные нами формулы для изгибающего и крутящего моментов, если положить

$$2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta} = A,$$

можно написать (при $qR^2 = 1$) так:

$$M_1 = A \cos\varphi - 1$$

$$M_3 = A \sin\varphi - \varphi.$$

Мы знаем, что уравнение укороченной циклоиды в параметрической форме пишется так:

$$X = -(r\varphi - p \sin\varphi)$$

$$Y = -(r - p \cos\varphi).$$

Приняв $p = Ar$, можно предыдущие уравнения переписать таким образом:

$$X = (A \sin\varphi - \varphi)r$$

$$Y = (A \cos\varphi - 1)r.$$

Если r примем $= 1$, то эти уравнения могут быть представлены в таком виде:

$$Y = A \cos\varphi - 1$$

$$X = A \sin\varphi - \varphi$$

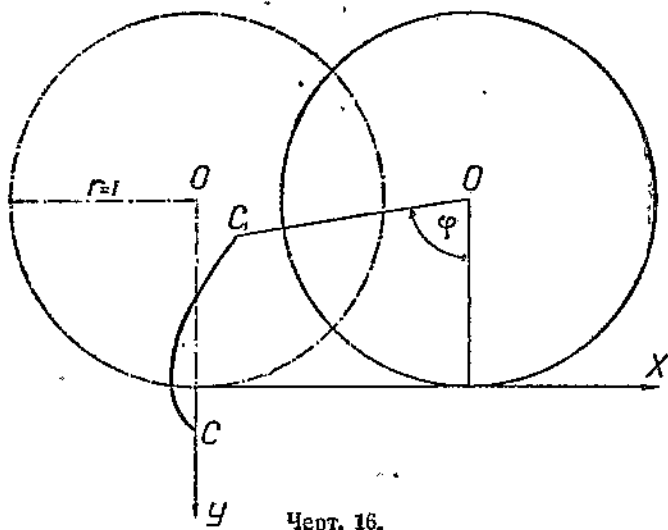
или

$$A \cos\varphi - 1 = M_1 = Y$$

$$A \sin\varphi - \varphi = M_3 = X.$$

Следовательно, значения $\frac{M_1}{qR^2}$ и $\frac{M_3}{qR^2}$ представляют собой координаты укороченной циклоиды для случая, когда $r = 1$, а коэффициент $A = 2 \frac{(n+1)\sin\theta - n\theta\cos\theta}{(n+1)\theta - (n-1)\sin\theta\cos\theta}$ является расстоянием описывающей точки C от центра круга (черт. 16).

Прежде чем перейти к изложению порядка построения укороченной циклоиды, укажем графический метод приближенного спрямления дуги окружности, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.



Черт. 16.

На диаметре $BH = 2r$ (черт. 17) от точки H откладываем отрезок $HG = \frac{3}{4}r$. Проведя радиус $OD \perp BH$, соединив точки D и G и продолжив прямую DG до пересечения с касательной BE в точке E , получим $BE =$ дуге BD , т. е. $\frac{1}{4}$ окружности.

Действительно,

$$BE = OD \frac{BG}{OG},$$

но

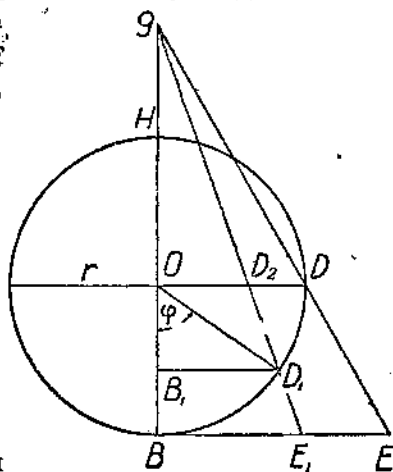
$$BG = \frac{11}{4}r; OG = \frac{7}{4}r \text{ и } OD = r.$$

Поэтому

$$BE = \frac{11}{7}r = 1,571r \cong \frac{\pi}{2}r.$$

Любая прямая GE_1 , отсекающая на окружности точку D_1 , а на прямой BE точку E_1 , дает:

$$\widehat{BE_1} \cong \widehat{BD_1}.$$



Черт. 17.

Каково это приближение, покажем на численном примере. Возьмем, например, $\varphi = 80^\circ$. Длина дуги для этого центрального угла $S = 1,396r$, длина же прямой BE_1 будет:

$$BE_1 = BG \frac{B_1 D_1}{B_1 G}; \quad BG = \frac{11}{4}r; \quad B_1 D_1 = r \sin 80^\circ = 0,985r;$$

$$B_1 G = (1,750 + \cos 80^\circ)r = (1,750 + 0,174)r = 1,924r.$$

Следовательно,

$$BE_1 = \frac{985}{1924} \cdot \frac{11}{4}r = 1,408r, \text{ а должно быть } 1,396r,$$

т. е. погрешность не превышает 1 проц.

При углах меньших, конечно, точность будет выше.

Предположим, что половина центрального угла, на который опирается круговая ось бруса, $= \theta$ и что нужно иметь значения M_1 и M_3 для ряда промежуточных равноотстоящих друг от друга m сечений.

Положим, что показанный на черт. 17 угол $\varphi = \theta$.

Следовательно, BE_1 будет равна дуге BD_1 .

Делим BE_1 на соответствующее заданное число равных частей точками $E_2, E_3, E_4 \dots$

Прямые $GE_2, GE_3, GE_4 \dots$ разделят дугу BD_1 на соответственное число равных частей.

Можно также разделить на равные части и отрезок OD_2 . Тогда отпадет надобность в точке G и вообще всей верхней части чертежа выше радиуса OD .

Построение уравнений

$$X = \frac{M_3}{qR^2} = A \sin \varphi - \varphi$$

и

$$Y = \frac{M_1}{qR^2} = A \cos \varphi - 1$$

производится так:

По заданному углу θ и заданному коэффициенту жесткости n находим коэффициент A . Затем в произвольно выбранном масштабе зачерчиваем две концентрических дуги радиусами, равными 1 и A с центральным углом θ (черт. 18). Затем откладываем в принятом масштабе на оси X от точки B длину $Bm = \widehat{BD}$. Через точки D и m проводим прямую линию до пересечения с горизонтальным радиусом в точке K_m .

Потом линии Bm и OK_m делятся на желаемое число равных частей m . Соответствующие точки делений соединяются прямыми линиями, которые отсекут на дуге BD соответственно m равных частей с центральными углами $\frac{\theta}{m}$.

Пусть одна из таких точек на дуге BD будет P_1 . Проведя радиус OP_2 , опустим перпендикуляр P_2P_3 на ось X .

Не трудно видеть, что

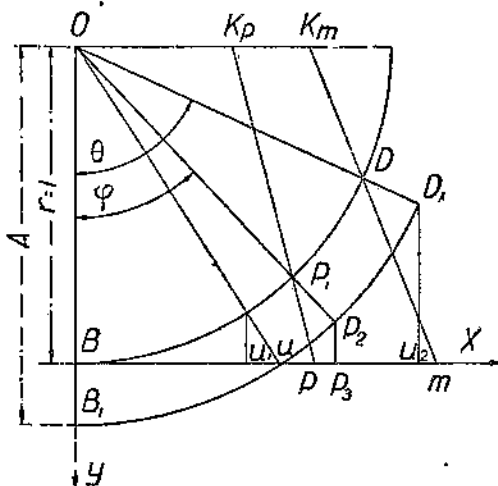
$$P_2 P_3 = A \cos \varphi - 1$$

$$P_2 P_3 = A \sin \varphi - \varphi.$$

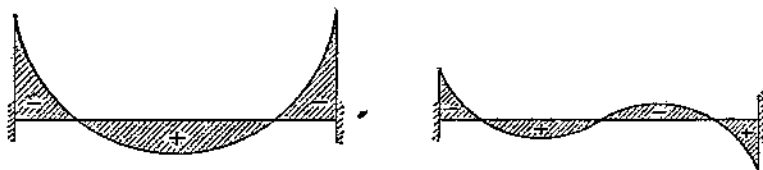
Относительно знаков моментов правило такое: если точка P_2 лежит выше P_3 , момент M_1 отрицательный. Если точка P_2 лежит правее P_3 , момент M_3 положительный.

Точка U , очевидно, отвечает нулевому изгибающему моменту и, следовательно, тах — у крутящего момента $M_3^{1)}$ (на чертеже UU_1). На опоре изгибающий момент, выразится ординатой $D_1 U_2$, а крутящий — отрезком $U_2 m$. Оба они отрицательны.

Таким образом, могут быть построены левая или правая половины эпюр, вторые же половины: для M_1 будет симметрична, а для M_3 — антисимметрична, как указано на черт. 19.



Черт. 18.



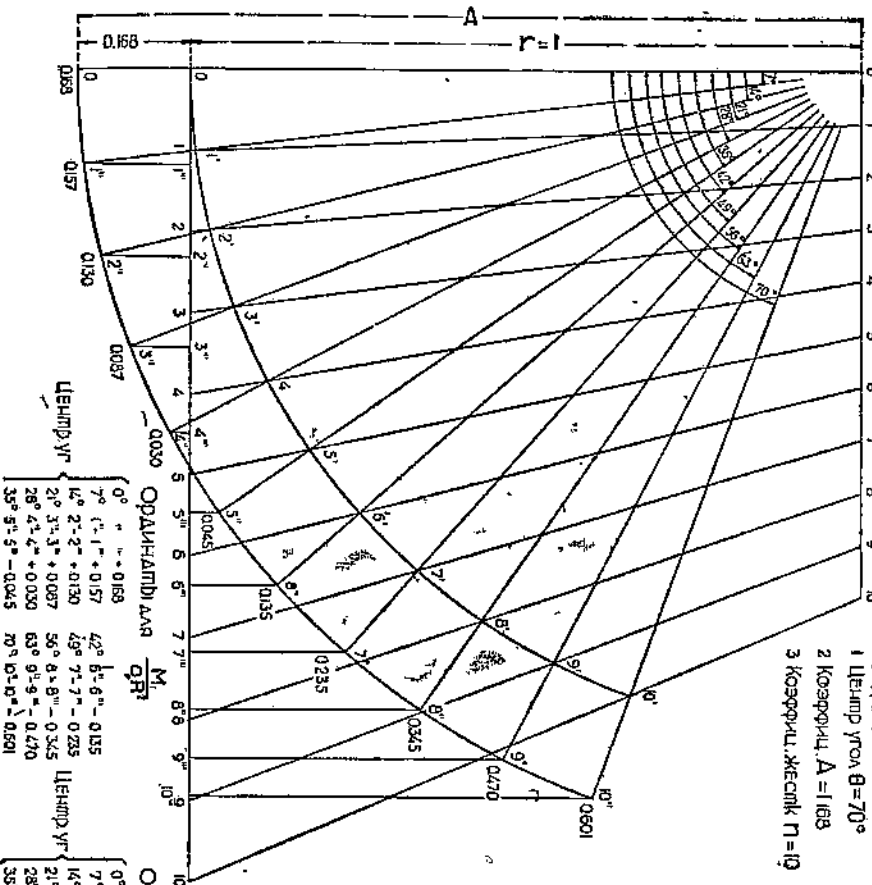
Черт. 19.

Построение эпюр дано на 70 странице.

1) $\frac{dM_3}{d\varphi} = M_1$.

Графический метод построения эпюр моментов при равномерно-распределенной нагрузке по всей длине

ЗАДАЧА:
1 Центр угла $\theta = 70^\circ$
2 Коэффициент $A = 1.168$
3 Коэффициент жесткости $\pi = 19$

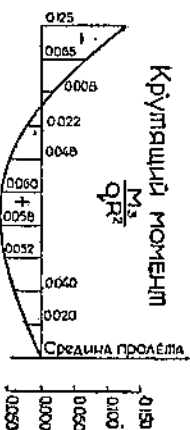


Ординаты для $\frac{M_1}{qR^2}$

θ°	θ'	θ''	θ'''
0	1	1	1
10	1.1	0.157	0.157
20	2	0.130	0.130
30	3	0.087	0.087
40	4	0.050	0.050
50	5	0.030	0.030
60	6	0.015	0.015
70	7	0.007	0.007
80	8	0.003	0.003
90	9	0.001	0.001

Ординаты для $\frac{M_2}{qR^2}$

θ°	θ'	θ''	θ'''
0	1	1	1
10	1.1	0.020	0.020
20	2	0.040	0.040
30	3	0.062	0.062
40	4	0.085	0.085
50	5	0.108	0.108
60	6	0.130	0.130
70	7	0.152	0.152
80	8	0.175	0.175
90	9	0.200	0.200



Эпюра крутящих моментов построена для левого полупролета для правого-она асимметричная.

Угловой момент $\frac{M_1}{qR^2}$

Эпюра построена для левого полупролета для правого она будет симметричная

