

~~00-5918~~

ПОСОБИЯ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Д Е П

*Вид.
620.11.*

Проф. С. П. ТИМОШЕНКО

КУРС

СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

ДЕСЯТОЕ ИЗДАНИЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

11303016

*114/6
4332*

170 37.
ПОСЛЕДНЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1930 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Введение	15

ОТДЕЛ I. Растяжение и сжатие.

Глава I. Растяжение и сжатие в пределах упругости.

§	1. Основные понятия	21
§	2. Закон Гука	23
§	3. Упругое последствие	27
§	4. Энергия деформации при растяжении	28
§	5. Изменение поперечных размеров при растяжении	29

Глава II. Растяжение и сжатие за пределами пропорциональности.

§	6. Диаграмма растяжения	31
§	7. Влияние времени на удлинения	33
§	8. Повышение критической точки	35
§	9. Испытание металлов на разрыв	38
§	10. Работа, затрачиваемая на разрыв	41
§	11. Сжатие	43
§	12. Влияние температуры	47

Глава III. О напряжениях при растяжении и сжатии.

§	13. Напряжения в случае простого растяжения	52
§	14. Распределение напряжений в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям	54
§	15. Эллипс напряжений	55
§	16. Способ Mohr'a для изображения напряжений	56
§	17. Связь между деформацией и напряжением в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям	57
§	18. Распределение напряжений в случае растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям	58
§	19. Деформации в случае растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям	60

Глава IV. Приложения полученных результатов.

§	20. Коэффициент безопасности	61
§	21. Действие внезапно приложенной нагрузки	63
§	22. Усталость металлов	64
§	23. Опыты Wöhler'a	65

	Стр.
24. Опыты С. Reynolds'a и I. H. Smith'a	63
25. Опыты О. Stanton'a и Bairstow'a	70
26. Допускаемые напряжения при переменных усилиях	71
27. Причины явления усталости металлов	74
28. Растяжение и сжатие стержней переменного сечения	77
29. Разрыв брусков переменного сечения	80
30. Влияние собственного веса. Брус равного сопротивления при растяжении	82
31. Расчет гибких нитей	85
32. Влияние температуры	87
33. Расчет проволоочных канатов	88
34. Задачи статически неопределенные	89
35. О напряжениях в стенках сосудов	92
36. Различные теории прочности	97
37. Сжатие шаров и цилиндров	101

ОТДЕЛ II. Сдвиг и кручение.

Глава V. Сдвиг.

38. Чистый сдвиг	105
39. Потенциальная энергия сдвига	107
40. О допускаемых напряжениях при сдвиге	108
41. Приложения	109

Глава VI. Кручение.

42. Скручивание круглого стержня	112
43. Скручивание стержней прямоугольного и перпендикулярного сечения	116
44. Другие формы поперечных сечений	117
45. Приложения	119
46. Энергия деформации при кручении	123
47. Расчет винтовых рессор	124

ОТДЕЛ III. Изгиб прямых стержней.

Глава VII. Моменты инерции плоских фигур.

48. Простейшие задачи	127
49. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей	130
50. Главные оси	130
51. Эллипс инерции	132
52. Нахождение главных осей инерции	134
53. Графический способ нахождения моментов инерции	135

Глава VIII. Внутренние силы упругости при изгибе призматических стержней.

54. Понятие об изгибе	138
55. Опытные данные	139
56. О напряжениях в случае чистого изгиба	142
57. Косой изгиб	145

	Стр.
§ 58. Изгиб балки силами перпендикулярными оси	148
§ 59. Касательные напряжения при изгибе	150
§ 60. Распределение касательных напряжений при круговом сечении	155
§ 61. Распределение касательных напряжений при двутавровом сечении	157
§ 62. Главные напряжения при изгибе	158
§ 63. О местных напряжениях	164

Глава IX. Расчет балок.

§ 64. Определение опорных реакций	167
§ 65. Эпюра изгибающих моментов и линия суммы сил	170
§ 66. Определение расчетных напряжений	177
§ 67. Расчет клепаных двутавровых балок	180
§ 68. Расчет составных деревянных балок	183
§ 69. Расчет обрешетин	185
§ 70. Основная нагрузка	187
§ 71. Сравнение форм поперечных сечений	188

Глава X. Изогнутая ось балки.

§ 72. Уравнение изогнутой оси	195
§ 73. Изгиб балки с одним заделанным, другим свободным концом	196
§ 74. Изгиб балки с опертыми концами	198
§ 75. Изгиб балки, опертой по концам, равномерно распределенной нагрузкой	203
§ 76. Сложение действия сил	204
§ 77. Построение изогнутой оси балки, как веревочной кривой	207
§ 78. Графо-аналитический метод исследования изгиба балок	210
§ 79. Брусья равного сопротивления при изгибе	216
§ 80. Влияние способа распределения нагрузок на величину изгибающего момента и стрелку прогиба балок	223
§ 81. Влияние касательных напряжений на прогиб балок	227

Глава XI. Статически неопределенные случаи изгиба балок.

§ 82. Лишние закрепления	231
§ 83. Изгиб равномерно распределенной нагрузкой балки с одним заделанным и другим опертым концом	232
§ 84. Изгиб сосредоточенной силой балки с одним заделанным, другим опертым концом	235
§ 85. Изгиб балки с заделанными концами	239
§ 86. Балки с упруго заделанными концами	244
§ 87. Балка на трех опорах	249
§ 88. Влияние повышения или понижения промежуточной опоры	251
§ 89. Теорема о трех моментах	252
§ 90. Частные случаи нагрузки балки	257
§ 91. Теорема о двух моментах	259
§ 92. Влияние загрузения одного пролета	262
§ 93. Невыгоднейшее загрузение балки	265
§ 94. Линии влияния для неразрезных балок	266

	Стр.
§ 95. Неразрезные балки переменного сечения	269
§ 96. Изгиб балок, лежащих на упругом основании	270
§ 97. Изгиб балок, лежащих на упругих опорах	276

Глава XII. Изгиб балок, материал которых не следует закону Гука.

§ 98. Определение нормальных напряжений аналитическим способом	281
§ 99. Приближенный способ определения нормальных напряжений	283
§ 100. Графический метод нахождения нормальных напряжений	285
§ 101. Определение нормальных напряжений в железобетонных балках	287
§ 102. Распределение касательных напряжений	289

Глава XIII. Сложное сопротивление.

§ 103. Растяжение или сжатие и изгиб	291
§ 104. Ядро сечения	295
§ 105. Одновременное действие изгиба и кручения	298
§ 106. Расчет коленчатого вала	301

ОТДЕЛ IV. Работа внутренних сил упругости.

Глава XIV. Общие методы расчета статически неопределимых систем.

§ 107. Статически неопределимые системы	306
§ 108. Количество потенциальной энергии	307
§ 109. Потенциальная энергия изгиба	309
§ 110. Обобщенные координаты и обобщенные силы	311
§ 111. Общее выражение потенциальной энергии упругих тел	314
§ 112. Исключительные случаи	317
§ 113. Теорема Кастилиано	321
§ 114. Начало наименьшей работы	325
§ 115. Теорема о взаимности перемещений	333
§ 116. Приложение теоремы о взаимности перемещений к расчету неразрезных балок	336
§ 117. Линии влияния для шпренгельной балки	339
§ 118. Применение теоремы о взаимности перемещений к расчету статически неопределимых ферм	341
§ 119. Способ Мора	343
§ 120. Применение способа Мора к расчету статически неопределимых ферм	347
§ 121. Применение способа Мора к определению перемещений	349
§ 122. Применение способа Мора к исследованию статически неопределимых случаев изгиба балок	351
§ 123. Первоначальные напряжения в статически неопределимых системах	352
§ 124. Температурные напряжения в статически неопределимых системах	354

Глава XV. Приближенный способ исследования изгиба стержней.

§ 125. Основной метод	357
§ 126. Изгиб балок с опертыми концами	359

	Стр.
§ 127. Одновременное действие растяжения или сжатия и изгиба	363
§ 128. Изгиб балок с заделанными концами	369
§ 129. Случай, когда продольные силы неизвестны	373
§ 130. Расчетные формулы в случае одновременного действия изгиба и сжатия	376
§ 131. Изгиб балок, лежащих на упругом основании	377
§ 132. Расчет перекрестных балок	382

ОТДЕЛ V. Кривые брусья.

Глава XVI Кривые брусья.

§ 133. Распределение напряжений	388
§ 134. Частные случаи изгиба кривых брусьев	394
§ 135. Задача Ляме	399
§ 136. Расчет проушин и звеньев цепей	403
§ 137. Деформация кривого бруса	407
§ 138. Расчет кругового кольца	413
§ 139. Двухшарнирная арка	416
§ 140. Линии влияния для двухшарнирной арки	419
§ 141. Невыгоднейшее нагружение арки	421
§ 142. Арка с заделанными концами	422
§ 143. Параболическая арка с заделанными концами	429

ОТДЕЛ VI. Изгиб тонких пластинок.

Глава XVII. Изгиб тонких пластинок.

§ 144. Изгиб пластинки по цилиндрической поверхности	432
§ 145. Расчет длинных прямоугольных пластинок	434
§ 146. Чистый изгиб пластинок	443
§ 147. Температурные напряжения в пластинках	445
§ 148. Дифференциальное уравнение равновесия для симметрично нагруженной круглой пластинки	447
§ 149. Изгиб круглой пластинки равномерно распределенной нагрузкой	450
§ 150. Изгиб круглой пластинки силой, приложенной в центре	453
§ 151. Изгиб круглой пластинки с отверстием в центре	455
§ 152. Пределы применимости выведенных формул	456
§ 153. Потенциальная энергия изогнутой пластинки	458
§ 154. Приближенный метод исследования изгиба пластинок	460
§ 155. Расчет тонких оболочек	464

ОТДЕЛ VII. Задачи динамики в сопротивлении материалов.

Глава XVIII. Влияние сил инерции.

§ 156. О напряжениях в движущихся стержнях	469
§ 157. Напряжения в быстро вращающемся кольце	472
§ 158. Напряжения в быстро вращающихся дисках	473
§ 159. Диск равного сопротивления	476
§ 160. Напряжения в ободе махового колеса	478

	Стр.
Глава XIX. О колебаниях упругих систем.	
§ 161. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	482
§ 162. Приближенное вычисление периода основных колебаний сложных систем	485
§ 163. Колебания в сопротивляющейся среде	489
§ 164. Вынужденные колебания	491
165. Практическое значение явления резонанса	496
166. Колебания кручения	499
§ 167. Колебание балки под действием подвижной нагрузки	503
§ 168. Критическая скорость для гибкого вала Лаваля	506
§ 169. Критическая угловая скорость для ненагруженного вала	510
§ 170. О напряжениях при ударе	512
§ 171. Влияние массы стержня на величину напряжений при ударе	516
§ 172. Разрушение от удара	519

ОТДЕЛ VIII. Об устойчивости упругих систем.

Глава XX. Об устойчивости упругих систем.

§ 173. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия	521
§ 174. Задача Эйлера	523
§ 175. Пределы применимости полученных формул	527
§ 176. Влияние эксцентриситета и первоначальной кривизны на величину критической силы	533
§ 177. Приближенный метод решения вопросов устойчивости	535
§ 178. О продольном изгибе стержней в упругой среде	538
§ 179. О продольном изгибе составных стержней	543
§ 180. Замечания относительно закрепления концов и ослабления поперечных сечений сжатых стержней	548
§ 181. Об устойчивости кругового кольца и цилиндрической трубки	551
§ 182. Об устойчивости сжатых пластинок	554
§ 183. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок	560

ДОПОЛНЕНИЕ.

О концентрации напряжений у отверстий и выкружек.

1. Общие замечания	568
2. Аналитические решения:	
а. Круглое отверстие	568
б. Круговое отверстие с усиленным краем	573
в. Эллиптическое отверстие	575
3. Исследование напряжений при помощи поляризованного света:	
Описание метода	576
О распределении напряжений у выкружек	578
4. Применение линий Людерса к исследованию концентрации напряжений	581
5. Практические приложения	583

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании введен автором ряд дополнений. Они даны в § 12. Влияние температуры, в § 27. Причины явления усталости металлов, в § 36. Различные теории прочности, в § 45. Приложения (Глава VI. Кручение) и к § 115. Теорема о взаимности перемещений. Кроме того, в конце книги помещена статья: „О концентрации напряжений у отверстий и выкружек“.

В перечисленных дополнениях автором приводятся важнейшие из новейших работ и освещаются главные достижения в области сопротивления материалов.

По поручению автора внесение дополнений в текст предыдущего издания выполнено Н. А. Шошиным.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ.

Новое издание выходит без существенных дополнений. По сравнению с III изданием несколько расширен параграф о расчете арок с заделанными пятнами. Дано построение линий влияния для распора арки, а также для изгибающего момента и перерезывающей силы в ключе арки. В отделе динамики приведены некоторые новые результаты, относящиеся к определению критической угловой скорости для быстро вращающегося гибкого вала. Кроме того, в различных местах приведены указания на новые работы, появившиеся за последние два года.

Корректura книги выполнена инженером Петром Эдуардовичем Заиончковским, которому приношу здесь мою глубокую благодарность.

С. Тимошенко.

Тессели
1917-г. 14 июня

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящий курс сопротивления материалов представляет собой переработанное и несколько дополненное издание моих лекций, читанных в Киевском политехническом институте и появившихся в литографированном виде в 1908—1910 годах. В эту книгу вошли общеобязательные лекции по сопротивлению материалов, читанные для студентов всех технических отделений института (три семестровых часа), дополнительные статьи, обязательные для студентов механического и инженерного отделений (три семестровых часа) и некоторые главы из необязательных курсов, предназначавшихся главным образом для студентов, выбравших своей специальностью строительную механику¹⁾.

Дополнительные необязательные курсы давали возможность при изложении предмета идти несколько дальше тех элементов, которые обыкновенно находят место в курсах сопротивления материалов, и развить некоторые отделы, представляющие интерес для лиц, занимающихся расчетами разного рода металлических конструкций. Так, например: I) Мы нашли возможным ввести в элементарный курс понятия о различных теориях прочности и рассмотрели, как принятие той или иной теории отражается на виде расчетных ф-л и на величине допускаемых напряжений. II) Изложили приближенный метод исследования изгиба стержней и пластинок, основанный на начале возможных перемещений, и применили этот метод к исследованию одновременного действия на балку изгибающих и сжимающих или растягивающих усилий и к расчету перекрестных балок. III) Довольно много места уделили вопросам динамики, приобретающим особое практическое значение в связи с некоторыми задачами современного машиностроения. IV) Наконец, привели решения ряда задач, относящихся к исследованию устойчивости упругих систем. Нами даны формулы для расчета сжатых поясов открытых мостов и для расчета на продольный изгиб составных стержней, а также приведены таблицы для проверки на устойчивость пластинок и двутавровых балок.

Задачам и упражнениям отведено в этой книге немного места. Чтобы по возможности сократить объем книги, я ограничивался лишь примерами, необходимыми для выяснения отдельных вопросов теории. Материалы для самостоятельных упражнений в решении задач по сопротивлению материалов

¹⁾ Дипломный проект для этих студентов заменяют дипломной работой теоретического или экспериментального характера.

пришлось издать в виде двух выпусков ¹⁾. Это дало возможность расширить число задач и снабдить большинство этих задач решениями.

Появлению настоящей книги в печатном виде содействовал целый ряд лиц, и я считаю своим приятным долгом принести здесь глубокую благодарность моим товарищам — преподавателям института — М. А. Воропаеву и Э. К. Гарфу, прочитавшим в рукописи некоторые главы курса и сделавшим немало ценных замечаний, студенту П. Э. Заиончковскому и технику М. М. Уткину, исполнившим чертежи, П. Э. Заиончковскому, читавшему корректуры, и фирме Л. Идзиковского, принявшей на себя издание книги.

С. Тимошенко.

Рахны, Под. губ.
5 августа 1911 г.

¹⁾ Сборник задач по сопротивлению материалов. Выпуск I и II, Киев, 1910 г.

ВВЕДЕНИЕ.

При проектировании инженерных сооружений и машин вопрос о выборе прочных размеров отдельных частей играет весьма важную роль. Для решения этой задачи приходится прежде всего выяснить те внешние силы, которые на сооружения будут действовать, и потом по этим силам нужно разыскать внутренние усилия, возникающие в частях сооружений и машин. Для обеспечения прочности и долговечности сооружения нужно выбрать размеры частей так, чтобы внутренние усилия не превосходили известных норм, устанавливаемых для различных строительных материалов на основании опытного исследования их прочности.

Совокупность аналитических методов, служащих для определения внутренних усилий, и тех приемов, которыми пользуются при экспериментальном исследовании прочности строительных материалов, составляет предмет науки сопротивления материалов. При изложении предмета можно отдавать предпочтение или теоретической или экспериментальной части в зависимости от той цели, которую преследует курс, но в общем развитии науки эти два отдела являются равноценными. Теоретические исследования, раз они не опираются на опыты, могут оказаться бесплодными. Точно также и разрозненные опыты без теоретического обобщения не дадут возможности вывести нужные законы и не послужат к дальнейшему развитию науки.

Тесная связь между различными отделами строительного искусства и „сопротивления материалов“, обеспечивающая этой науке все новые области применения и вносящая в жизнь рациональные методы расчета, возникла лишь недавно, в связи с широким развитием современной техники. В древности обходились без расчетов. При выборе размеров шли ощупью, путем чистого эмпиризма. Постройки обыкновенно сводились к копированию. Типы сооружений видоизменялись медленно, и сами сооружения являлись как бы объектами для опытов. Если сооружение оказывалось прочным, оно служило образцом для дальнейшего строительства. Вопрос экономичности сооружения не играл особой роли, и потому нужная прочность всегда могла быть достигнута надлежащим увеличением размеров. Делали излишне толстые стены, ставили массивные колонны и столбы и не считались с количеством потребляемых строительных материалов, с количеством человеческого труда и с тем временем, которое требовалось для возведения сооружения.

Первые научные положения, послужившие началом науки сопротивления материалов, принадлежат знаменитому Галилею и относятся к первой половине семнадцатого века. Галилей обратил внимание на то, что механики твердого тела недостаточно для решения вопросов прочности, необходимо идти дальше и принять во внимание физические свойства материалов, их прочность и способность под действием внешних сил изменять отчасти форму. В связи с строительной деятельностью, у Галилея возникли вопросы о прочности балок, и этой задаче он посвятил особое внимание; ему удалось решить задачу об изгибе балки, заделанной одним концом в стену и нагруженной на свободном конце. Дальнейшее развитие важной для практических приложений теории изгиба балок принадлежит французскому ученому Кулону. Многие результаты, полученные этим ученым, не потеряли своего значения и поныне. До сих пор пользуются его формулами при исследовании кручения круглых стержней и при изучении давления сыпучих тел на подпорные стенки.

Развитие теории сопротивления материалов в восемнадцатом веке было обусловлено, главным образом, трудами знаменитых математиков. Даниил и Яков Бернулли, Эйлер и Лангранж интересовались теорией изгиба призматических стержней. Их занимала математическая сторона вопроса, и внимание было обращено на интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, на рассмотрение различных возможных форм равновесия изогнутых стержней. Практическая важность затронутых вопросов осталась без рассмотрения, и полученные математиками результаты оказались неиспользованными и почти неизвестными для техников. Особенно интересна судьба задачи, решенной Эйлером. Эйлер исследовал вопрос об устойчивости длинного стержня, сжимаемого продольными силами, приложенными по концам. Известно, что под действием таких сил стержень может потерять свою первоначальную прямолинейную форму и выпучиться. Таким образом, сжимающие силы вызовут изгиб оси стержня, известный под названием продольного изгиба. Эйлер нашел выражение для той сжимающей силы, при которой возможно выпучивание стержня, но его формула вначале осталась без практического приложения. Применяя формулу там, где ее прилагать нельзя, инженеры очень скоро убедились в „неверности теории“, и при решении задач о прочности сжатых стержней начали пользоваться различного рода эмпирическими формулами. Лишь в сравнительно недавнее время, в связи с расчетом длинных стержней, применяемых при сооружении металлических мостов, возник вопрос о правильности формулы Эйлера. Были вычислены пределы применимости этой формулы, и в настоящее время она нашла себе широкое распространение в технике. Понадобилось полтора столетия, чтобы привести к согласованию теорию и практику.

Развитие теории сопротивления материалов в первой половине девятнадцатого века было обеспечено, главным образом, трудами французских инженеров. Франция первая положила в основание высшего технического образования широкую математическую подготовку, и это знание математики дало возмож-

ность французским инженерам успешно разрабатывать различные отделы технической науки. В это время появляется не потерявшая до сих пор своего значения книга Navier: „Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées“ (1834), представляющая собою полный курс сопротивления материалов, кладется начало общей теории равновесия упругих тел, развившейся дальше в науку „теории упругости“.

Сближение теории и техники особенно способствовало дальнейшему развитию науки сопротивления материалов. Мостовое дело, железнодорожное строительство и современное машиностроение выдвигают все новые и новые задачи. От исследования прочности отдельных стержней пришлось перейти к изучению систем, составленных из стержней. Эти системы приобрели особое практическое значение в связи с постройкой металлических мостов. Для расчета мостов были выработаны особые графические методы, играющие в настоящее время весьма важную роль. Современное машиностроение, допускающее иногда весьма большие скорости движения частей, заставило обратить особое внимание на влияние сил инерции. Оказалось, что эти силы вызывают иногда значительные напряжения в частях машин и могут даже повлечь за собою разрушение машин. Нередки, например, случаи разрывов маховых колес и быстро вращающихся дисков паровых турбин. В связи с увеличением скоростей движения возрастает и значение возникающих при этом колебаний. При некоторых условиях колебания могут вызвать весьма вредные дополнительные напряжения и привести машину к разрушению. Этим удалось объяснить поломки длинных паровых валов. Часто случающиеся поломки валов дизель-моторов, вероятно, также связаны с возникающими во время работы толчками и колебаниями. С теми же вопросами относительно влияния колебаний и ударов на внутренние усилия мы встречаемся и при расчете железнодорожных мостов. Опыты и многочисленные теоретические исследования показывают, что под действием движущихся по мосту грузов возникают напряжения гораздо больше тех, которые можно наблюдать при спокойной нагрузке.

Мы не будем перечислять целого ряда новых задач сопротивления материалов, поставленных на очередь современной техникой. Заметим только, что решение различных вопросов прочности во многих случаях усложняется еще дополнительными условиями относительно экономичности сооружения. Современный инженер должен строить не только прочно, но и дешево. Приходится создавать прочные долговечные сооружения при условии наименьшей затраты материалов, человеческого труда и времени. Много творческой энергии затрачивается в настоящее время в этом направлении, и техника достигла больших успехов, создала большое количество новых типов сооружений поразительной легкости.

Благодаря быстрой смене типов сооружений и большому разнообразию строительных материалов, нельзя теперь при выборе размеров частей идти путем чистого эмпиризма, нет времени ждать от практики указаний относительно

действительных условий работы отдельных конструкций. Все должно быть предвидено и учтено заранее. Такое предвидение может дать только предварительный расчет, построенный на научных основаниях, и мы видим, что, действительно, с развитием строительной техники, с повышением ценности человеческого труда и с усовершенствованием качеств строительных материалов роль теоретических расчетов все возрастает; от расчетов требуют все большей точности, постепенно вводят в круг исследования дополнительные условия, которыми находили возможность пренебрегать при первоначальных сравнительно грубых расчетах.

Параллельно возрастанию роли теоретического исследования повышается также и значение лабораторий. Первоначальной задачей механических лабораторий было исследование прочности и упругих свойств различных строительных материалов. Теперь деятельность их шире; наряду с испытанием материалов приходится исследовать целые конструкции и даже модели целых сооружений. Иногда такие опыты носят лишь проверочный характер: проверяют данные предварительных теоретических исследований, но часто они имеют и самостоятельное значение.

Задачи техники, выдвигаемые насущной необходимостью, не всегда могут ждать полного теоретического разрешения, и в тех случаях, когда теория не дает непосредственного решения, когда не могут быть учтены все обстоятельства, усложняющие задачу, приходится прибегать к опытам. На моделях исследуют прочность конструкций и таким путем дают практике необходимый ответ. Роль такого типа опытов особенно возросла в последнее время, в связи с сооружением громадных металлических мостов. Необычные размеры сооружений заставили проектирующих инженеров значительно уклониться от общепринятых конструкций. Полное выяснение прочности таких конструкций могло быть осуществлено только путем специальных опытов.

Сближение между теорией и техникой, отмеченное нами в области сопротивления материалов, наблюдается и в других отделах технической науки. Значение теории и роль научного исследования в технике возрастает, что, конечно, влияет на требования, предъявляемые к современному инженеру, и должно отразиться на постановке высшего технического образования. Теперь недостаточно ремесленной выучки, подготавливающей инженера к шаблонной работе в какой-либо узкой специальности, требуются также инженеры-теоретики с широкой научной подготовкой, с навыками к лабораторным исследованиям. Спрос на инженеров такого типа особенно заметен в странах, стоящих впереди по своему промышленному развитию, где напряженная борьба за существование заставляет отдельные предприятия постоянно работать над дальнейшими усовершенствованиями своих изделий. Чтобы удовлетворить этому требованию, в некоторых германских политехниках введен целый ряд необязательных курсов математического содержания, дающих возможность желающему получить серьезную математическую подготовку, не уступающую по объему университет-

ской. Установлена ученая степень доктора-инженера, присуждаемая за научную разработку технических задач, и нередко случаи, когда частные предприятия, учитывая значение научной подготовки, командировывают своих инженеров в учебные заведения для слушания дополнительных курсов и для получения докторской степени. В некоторых германских университетах также замечается стремление сблизить теорию с техникой. Для этого учреждаются кафедры по техническим предметам, устраиваются инженерные и технические лаборатории, организуются семинарии, в которых могут совместно работать теоретики и инженеры. Как пример можно привести Göttingen'ский университет, где во главе этого движения стоят такие известные ученые, как P. Klein, C. Runge и L. Prandtl. Благодаря энергии этих лиц, организованы постоянные лекции технического характера, учреждены технические лаборатории, и студенты математического факультета могут прослушать целый ряд курсов по прикладной математике и прикладной механике, могут принять участие в семинариях, посвященных современным техническим задачам, например, различным отделам электротехники, гидравлики, статике сооружений и воздухоплавания.

Такая совместная работа теоретиков и инженеров способствует глубокой научной разработке технических вопросов и, выдвигая новые задачи, содействует дальнейшему развитию чистой науки. В этом единении залог будущих великих успехов науки и техники.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ.

§ 1. Основные понятия.

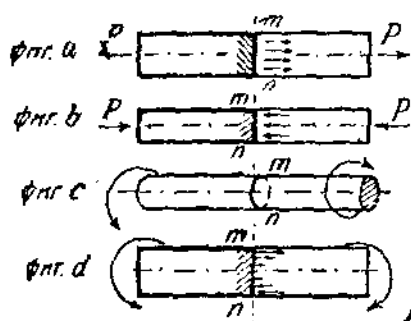
В теоретической механике считают тела абсолютно твердыми: предполагают, что расстояние между отдельными точками тела не меняется при действии внешних сил. Такое представление является как бы первым приближением, им можно пользоваться при исследовании целого ряда вопросов статики, динамики и астрономии, но, когда мы переходим к изучению условий прочности построек и машин, то встречаемся с более сложными задачами, где приходится принимать во внимание свойство твердых тел отчасти изменять свою форму под действием внешних сил. И здесь условия статики идеально твердого тела являются необходимыми условиями равновесия, но их недостаточно, необходимы дополнительные исследования относительно физических свойств тел. Обычно в основание кладут молекулярную гипотезу — тела представляют составленными из весьма малых частиц, относительно перемещению которых препятствуют внутренние междучастичные силы. При сближении частиц появляются отталкивательные силы взаимодействия, при удалении частиц друг от друга — притягательные силы.

Если к такому телу приложить систему сил взаимно уравновешивающихся, то под действием этой системы тело изменяет свою форму, деформируется, отдельные частицы перемещаются до тех пор, пока не наступит равновесие между внешними и внутренними силами. При этих перемещениях внешние силы совершают работу, обращаящуюся в потенциальную энергию деформированного тела. Как пример накопления энергии можно привести случай изогнутой рессоры или часовой пружины. Если начать уменьшать силы, вызвавшие деформацию, то тело стремится в большей или меньшей степени вернуться к первоначальной форме, и при этом возвращается отчасти работа, затраченная на деформацию.

Свойство тел возвращать к первоначальной форме и, следовательно, накапливать в себе потенциальную энергию в обратимой форме называют „упругостью“. Если вся затраченная на деформацию работа возвращается назад, и тело

вполне принимает первоначальную форму, то его называют совершенно упругим. При неполном восстановлении формы степень упругости тела измеряют отношением возвращенной работы к работе, затраченной на деформацию. Многие строительные материалы в значительных пределах являются совершенно упругими, и задача конструктора заключается в выборе таких размеров, при которых деформации частей не выходят из пределов упругости. При таких условиях сооружения могут долговременно исполнять свое назначение. С удалением внешних сил они всегда будут возвращаться к первоначальной форме.

Общая теория равновесия упругих тел является предметом теории упругости. В курсах сопротивления материалов ограничиваются простейшими задачами, имеющими наибольшее практическое значение. Главное внимание отводится исследованию деформаций призматических стержней. Предполагая поперечные размеры стержня малыми по сравнению с длиной его, мы можем во многих случаях упростить задачу и получить решение ее элементарным путем. Общий метод, которым в дальнейшем всегда будем пользоваться при разыскании внутренних сил, возникающих при деформации, состоит в том, что мы мысленно рассекаем деформированное тело на две части и рассматриваем условия равновесия одной из этих частей. Если все тело находилось в равновесии, то будет в равновесии и рассматриваемая часть его, нужно только по поверхности сечения приложить усилия, заменяющие действие отброшенной части тела на рассматриваемую. Усилия эти сплошным образом распределяются по произведенному сечению: они представляют собой систему сил, уравнивающую внешние силы, приложенные к рассматриваемой части тела. В случае призматических стержней мы будем брать плоские сечения, обыкновенно, нормальные к оси стержня. Если внешние силы, приложенные к одной части стержня, приводятся к одной силе, действующей по оси, то мы будем иметь явление



Черт. 1.

растяжения или сжатия (фиг. а и фиг. б, черт. 1). На чертеже мы рассматриваем левую часть стержня, и усилия, приложенные по сечению mn , представляют действие правой части на левую. В тех случаях, когда внешние силы, приложенные к одной половине стержня, приводятся к паре сил, и плоскость пары перпендикулярна к оси стержня, будем иметь дело с явлением скручивания (фиг. с). Наконец, в тех случаях, когда приложенные к стержню силы стремятся искривить его перво-

начально прямую ось, будем иметь явление изгиба (фиг. d).

Во всех приведенных примерах мы при помощи статики можем без затруднения найти равнодействующую усилий, приложенных по сечению mn . В слу-

чае растяжения или сжатия усилия эти приведутся к одной силе, действующей по оси стержня. При кручении они дадут пару сил, и плоскость пары будет перпендикулярна к оси стержня. Наконец, в случае изгиба пара сил, к которой приводятся усилия, распределенные по сечению *пл*, лежит в плоскости, проходящей через ось стержня.

При суждении о прочности недостаточно этих заключений, получаемых на основании ур-ий статики твердого тела, необходимо также знать закон распределения усилий по плоскости произведенного сечения. Оказывается, что тело прочно сопротивляется внешним силам, пока интенсивность этих усилий нигде не превосходит известного предела. Простейшую задачу будем иметь в том случае, когда усилия равномерно распределяются по сечению и везде имеют одно и то же направление. Разделяя равнодействующую усилий на площадь произведенного сечения, найдем силу, приходящуюся на каждую единицу площади сечения. Величина эта вполне характеризует интенсивность внутренних сил упругости, действующих по плоскости взятого сечения, мы ее в дальнейшем условимся обозначать термином *напряжение*. В общем случае распределение усилий по сечению будет неравномерным, как неравномерно, например, давление жидкости на стенки сосуда, в который она налита.

Для суждения об интенсивности внутренних сил упругости в каждой точке сечения, обобщим введенное выше понятие о напряжении. Положим, нас интересует какая-либо точка *O* сечения. Выделим у этой точки из сечения весьма малую площадку δF и найдем равнодействующую приложенных к ней усилий. Пусть δP величина этой равнодействующей, тогда предел отношения:

$$\left(\frac{\delta P}{\delta F} \right) \quad (1)$$

при уменьшении площадки δF будет характеризовать интенсивность внутренних сил упругости. Величину этого предела мы назовем напряжением в точке *O* по площадке δF . Эта величина имеет измерение $\frac{\text{сила}}{(\text{длина})^2}$, и мы условимся измерять ее в килограммах на квадратный сантиметр. Согласно этому определению, напряжение, соответствующее давлению жидкости на стенки сосуда, будет в каждой точке пропорционально глубине *h*, на которой расположена рассматриваемая точка, и равно весу столба жидкости, основание которого 1 см² и высота *h*.

§ 2. Закон Гука.

При исследовании растяжения или сжатия призматических брусков задача заключается в том, чтобы установить зависимость между величиной действующих усилий и соответствующими этим усилиям изменениями длины стержня. Предположим, что брусок (черт. 2) растягивается силами, равномерно распре-

деленными по верхнему и нижнему основанию. Под действием этих сил стержень удлиняется на какую-то величину λ .

Если представить себе брусок составленным из продольных элементов mn , то все эти элементы окажутся в одних и тех же условиях, все они удлинятся на одну и ту же величину.

Рассечем брусок плоскостью OO , перпендикулярной направлению растягивающих сил. Если отбросить нижнюю часть, то для равновесия верхней придется приложить по сечению OO усилия, равнодействующая которых равна P и направлена вертикально вниз. Так как усилия эти должны заменять действие нижней части бруска на верхнюю, и все продольные элементы находятся в одинаковых условиях, то естественно предположить равномерное распределение усилий по плоскости поперечного сечения. В таком случае величина



$$p = \frac{P}{F} \quad (2)$$

представит собой растягивающее усилие, приходящееся на единицу поперечного сечения, т. е. значение напряжения для данного сечения.

Для определения деформации бруска мы, вместо удлинения λ , будем пользоваться отвлеченной величиной

$$e = \frac{\lambda}{l} \quad (3),$$

Черт. 2. представляющей относительное удлинение бруска и не зависящее от длины l .

Многочисленные опыты над растяжением и сжатием брусков, изготовленных из различных строительных материалов, показывают, что для большинства материалов, пока внешние силы не превзошли известных пределов, напряжения p можно с достаточной точностью считать пропорциональными относительному удлинению e , т. е.

$$p = Ee \text{ или } e = \frac{p}{E} \quad (4).$$

Эта простая зависимость между напряжением и соответствующим ему удлинением формулирована впервые английским ученым Гуком 1676 г. Он нашел, что удлинение бруска пропорционально растягивающей силе, пропорционально длине бруска и обратно пропорционально площади его поперечного сечения; следовательно,

$$\lambda = \frac{Pl}{EF} \quad (5).$$

Коэффициент E носит название *модуля упругости* при растяжении. Величина его будет, конечно, различна для различных материалов. Для одного и того же материала модуль упругости также не представляется совершенно постоянной величиной и несколько колеблется в зависимости от различных примесей и первоначальной обработки. Есть и такие материалы, у которых

Величина модуля упругости зависит от направления растяжения. Например, при растяжении кристаллов величина E будет меняться в зависимости от того, по какой из осей направлено растяжение. Мы в дальнейшем будем заниматься деформацией лишь таких тел, у которых упругие свойства одинаковы по всем направлениям. Их называют изотропными.

Ряд значений E приводим ниже.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ E .

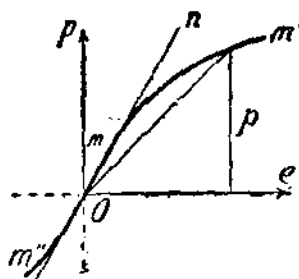
М а т е р и а л	E kg/cm ²
Сварочное железо	$1,9 \cdot 10^8$ до $2,1 \cdot 10^8$
Литое железо и сталь	$2,0 \cdot 10^8$ до $2,2 \cdot 10^8$
Алюминий тянутый	$7,5 \cdot 10^8$
Алюминий литой	$6,6 \cdot 10^8$
Медь тянутая	$1,2 \cdot 10^8$
Медь литая	$1,1 \cdot 10^8$
Никель	$2,2 \cdot 10^8$
Цинк тянутый	$4,1 \cdot 10^8$
Дуб вдоль волокон	$10,8 \cdot 10^4$
Сосна вдоль волокон	$9,2 \cdot 10^4$
Чугун серый	$8,9 \cdot 10^8$ до $1,05 \cdot 10^9$

Простая пропорциональность между напряжением p и относительным удлинением e имеет место, как мы уже отмечали, лишь в известных пределах. То значение p , при котором начинаются заметные отклонения от закона Гука, называют пределом пропорциональности. Величина эта зависит не только от рода материала, но также и от предварительной обработки, которой он подвергался. Для некоторых материалов предел пропорциональности весьма высокий, например, для железа он равен примерно 2000 kg/cm^2 (для стали он еще выше), для других же материалов уже при небольших напряжениях заметны отклонения от закона Гука.

Кроме предела пропорциональности, при опытах на растяжение иногда отмечают и другую величину, характеризующую упругие свойства материала, это так называемый предел упругости. Совершенно упругими телами мы называли такие, которые по удалении внешних сил вполне возвращаются к первоначальной форме. Суждение об этом можно получить лишь на основании измерений на поверхности тела. Чем точнее приборы, которыми производится измерение, тем раньше можно заметить отклонения от совершенной упругости и измерить остающиеся деформации. В виду этого под пределом упругости обыкновенно разумеют напряжение, при котором остающаяся (не исчезающая

деформация составляет определенную часть от полного растяжения. Поэтому величина эта имеет лишь условное значение.

Такие материалы, как камень, цемент и чугун имеют весьма низкий предел пропорциональности. Сравнительно при небольших напряжениях уже заметны отклонения от закона Гука ¹⁾. Чтобы наглядно представить зависимость между удлинениями и соответствующими им напряжениями, мы будем пользоваться графическим изображением. По оси абсцисс будем откладывать удлинения, а по ординатам — соответствующие им напряжения, тогда каждое состояние растягиваемого бруска представится в плоскости pe особой точкой, а весь процесс растяжения изобразится некоторой кривой Om' . Пока не превзойден предел пропорциональности, удлинения пропорциональны напряжениям, процесс растяжения представится участком прямой линии Om . Дальше для



Черт. 3.

таких материалов, как чугун, деформация начинает расти быстрее напряжений, и мы получаем кривую линию mm' , направленную выпуклостью вверх. Если от растяжения перейти к сжатию, то мы получим нижнюю ветвь кривой Om'' . Для чугуна она будет иметь вид, представленный на черт. 3. Участок Om'' обращен выпуклостью вниз. У точки O обе ветви кривой имеют общий прямолинейный участок. Кривая $m'm''$ может быть в каждом частном случае найдена опытным путем. Иногда желательно иметь для нее также и аналитическое выражение. Имеется не мало ф-л ²⁾, которые с большей или меньшей точностью устанавливают зависимость между p и e . Общий вид этих ф-л такой:

$$e = f(p).$$

Во все эти ф-лы входят некоторые постоянные величины, определяемые из опыта. Чем больше таких постоянных, тем, очевидно, с большей точностью ф-ла может представлять действительную зависимость между напряжениями и соответствующими им удлинениями или укорочениями. В настоящее время для чугуна и камней довольно часто пользуются такой ф-лой:

$$e = \alpha p^m \quad (6).$$

В случае $m=1$, ф-ла эта дает нам закон Гука, и α представляет собой величину, обратную модулю упругости. Для $m > 1$ получаем кривую, направленную выпуклостью вверх, как это имеет место в случае растяжения чугуна.

¹⁾ Исследования, произведенные над растяжением чугуна, показывают, что при небольших напряжениях (напряжения менялись от 0 до 9 kg/cm²) материал этот хорошо следует закону Гука.

Grüneisen, Berichte d. Deutsch. phys. Gesellschaft, 1906 г.

²⁾ R. Mehmke, Zum Gesetz der elastischen Dehnungen, Z. f. Math. u. Phys., 1897 г. Подробный указатель литературы по этому вопросу имеется в «Технической энциклопедии», см.: Закон упругости.

При $m < 1$ кривая обращена выпуклостью вниз, напряжения растут быстрее деформаций. С такого рода явлением мы встречаемся, например, при растяжении ремней.

В качестве примера приводим несколько ф-л из опытов Bach'a:

$$e = \frac{1}{1338000} p^{1,083} \text{ для растяжения чугуна,}$$

$$e = \frac{1}{250000} p^{1,132} \text{ для сжатия гранита,}$$

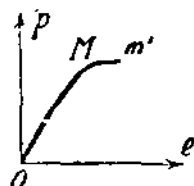
$$e = \frac{1}{415} p^{0,7} \text{ для растяжения ремня.}$$

Опыты показали ¹⁾, что при значительных напряжениях ф-ла (6) вполне удовлетворительна и при надлежащем выборе постоянных α и m зависимость между e и p с большой точностью соответствует действительности ²⁾.

§ 3. Упругое последствие.

До сих пор предполагалось, что каждому определенному значению растягивающего напряжения соответствует свое относительное удлинение e . Более точные опыты показывают, что даже в тех пределах, где деформацию можно считать совершенно упругой, на величину ее оказывает влияние время. При приложении определенной растягивающей силы брусок не сразу получает соответствующее удлинение, деформация растет со временем.

Если зависимость между p и e представить диаграммой (черт. 4) и предположить, что мы постепенной нагрузкой довели брусок до состояния, определяемого точкой M , то по истечении некоторого промежутка времени удлинение возрастает на некоторую величину Mm' . Это явление называют упругим последствием. Оно играет значительную роль при деформации тел органического происхождения, например, в канатах, ремнях и т. п. В металлах при тех напряжениях, какие допускаются в строительной практике, роль упругого последствия ничтожна, и инженеру с ним не приходится считаться. Гораздо большее значение имеет это интересное явление в области физики, где ему посвящена обширная литература ³⁾. Исследования показывают, что роль упругого последствия тем меньшая, чем однороднее материал, и, например, для кристаллов кварца, если и есть упругое последствие, то оно настолько мало, что не превосходит погрешностей при самом точном измерении деформаций. Конечно, и в этом случае имеется нали-



Черт. 4.

¹⁾ С. Bach, Elastizität und Festigkeit, V изд., стр. 81, 1905 г., Berlin. Schüle, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1898 г., стр. 855.

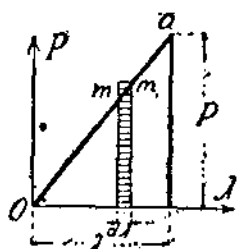
²⁾ Неудовлетворительность ф-лы (6), в случае весьма малых напряжений, выяснена в выше цитированной статье Grüneisen'a.

³⁾ A. Winkelmann, Handbuch der Physik, I Bd., 1908 г., стр. 796.

некоторое изменение удлинения с временем, но величина этого кажущегося упругого последствия и характер его изменения с временем вполне объясняется, если принять во внимание термические и электрические изменения тела при деформации ¹⁾.

§ 4. Энергия деформации при растяжении.

Представим себе призматический стержень вертикально закрепленным в верхнем сечении и будем прилагать к нижнему концу постепенно возрастающую нагрузку, тогда зависимость между приращением длины λ и величиной силы P , в пределах применимости закона Гука, представится прямой линией Oa (черт. 5).



Черт. 5.

Остановимся на каком-либо состоянии бруска, определяемом точкой m . Если растягивающей силе, соответствующей этому состоянию, дадим весьма малое приращение, то брусок получит дополнительное удлинение $d\lambda$, растягивающая нагрузка опустится на ту же величину и совершит при этом работу, равную произведению из величины нагрузки на опускание. На черт. 5 работа эта представится площадью заштрихованного элемента. Переходя последовательно от одного состояния к состоянию, бесконечно близкому, мы можем вычислить полную работу T , совершаемую нагрузкой при ее изменении от нуля и до некоторого конечного значения P . На черт. 5 работа эта изобразится площадью треугольника и будет, очевидно, равна:

$$T = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P\lambda}{2EF} = \frac{\lambda^2 Ef}{2l} \quad (7).$$

Чтобы получить результат, не зависящий от размеров испытуемого бруска, вычислим работу, отнесенную к единице объема. Принимая во внимание, что объем бруска равен Fl , найдем:

$$\frac{T}{Fl} = \frac{1}{2} \frac{P}{F} \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2} p\varepsilon = \frac{p^2}{2E}.$$

Работа эта, очевидно, обращается в потенциальную энергию деформированного стержня, и если тело совершенно упруго, то при уменьшении нагрузки потенциальная энергия деформации опять превратится в работу. При этом мы не принимаем во внимание термические и электрические изменения, которые сопровождают деформацию бруска. Явления эти не имеют особого практического значения ²⁾. Чтобы судить о том, какое количество энергии может быть

¹⁾ A. Joffé, *Elastische Nachwirkung im kristallinen Quarz*, Annalen der Physik, Vierte Folge, Bd. 20, 1906 г. См. также А. Ф. Иоффе, *Упругие и электрические свойства кварца*, Изв. Петр. политех. инст. 1915 г. (т. XXIV).

²⁾ Этому вопросу посвящена в технической литературе интересная книжка С. Кримерга: *Einführung in die energetische Baustatik*, Berlin, 1911 г.

См. также *Encyclopädie d. Math. Wiss.*, Bd. IV, 2^{te}, Gröning, стр. 436.

накоплено в растягиваемом бруске в пределах применимости закона Гука, возьмем случай растяжения железа. Полагая предел пропорциональности равным 2000 kg/cm^2 и модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, найдем, на основании ф-лы (7), что в одном кубическом сантиметре может быть накоплено $1 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ энергии. В случае каучука, можно положить $E = 10 \text{ kg/cm}^2$, предел упругости равен 20 kg/cm^2 , следовательно, энергия, приходящаяся на 1 cm^3 , будет $20 \text{ kg} \cdot \text{cm}$.

§ 5. Изменение поперечных размеров при растяжении.

Растяжение брусков сопровождается уменьшением их поперечных размеров, и, чтобы охарактеризовать вполне упругие свойства изотропного тела, недостаточно знать модуль упругости E , нужно иметь также и величину, определяющую поперечное сжатие при растяжении.

Если через ϵ обозначить относительное удлинение при растяжении, то величина относительного поперечного сжатия составит лишь некоторую часть от ϵ и равна $\sigma \epsilon$, где σ правильная дробь, меняющаяся в пределах от 0 до 0,5. Величину этой дроби называют Пуассоновым отношением — по имени французского математика Пуассона, определявшего σ аналитическим путем, на основании молекулярной гипотезы строения вещества. Вычисления привели Пуассона к заключению, что σ должно быть для всех изотропных тел постоянным и равным 0,25. Позднейшие многочисленные опыты не подтвердили заключений Пуассона и показали, что σ для различных материалов различно. Величину эту приходится принимать как вторую постоянную, характеризующую упругие свойства материала. Значение σ для некоторых материалов мы приводим ниже.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ σ .

Материал	σ	Материал	σ
Железо	0,28	Цинк	0,27
Сталь	0,29	Бронза	0,36
Медь	0,34	Пробка	0,00
Никель	0,33	Каучук	0,47
Алюминий	0,26	Парафин	0,50

Имея значение σ , можно судить об изменении объема бруска при растяжении в пределах пропорциональности. Представим себе брусок прямоугольного

¹⁾ Приведены средние значения из данных, помещенных у Winkelmanna.

Весьма точные опыты по определению σ произведены Williams'ом, Phil. Mag., 1912 г., декабрь.

поперечного сечения. При растяжении длина бруска увеличивается в отношении $(1 + e):1$, поперечные размеры уменьшаются в отношении $(1 - \sigma e):1$. Объем бруска после растяжения относится к первоначальному объему, как $(1 + e)(1 - \sigma e)^2:1$. Пренебрегая малыми высшего порядка, можно положить

$$(1 + e)(1 - \sigma e)^2 = 1 + e(1 - 2\sigma),$$

и, следовательно, отношение приращения объема при растяжении бруска к его первоначальному объему равно:

$$[1 + e(1 - 2\sigma) - 1]:1 = e(1 - 2\sigma).$$

Для тех материалов, у которых σ близко к 0,5, изменение объема при растяжении весьма мало. Невероятно, чтобы существовали тела, у которых $\sigma > 0,5$, так как в таком случае растяжение тела сопровождалось бы уменьшением его объема. Если от растяжения перейти к сжатию брусков, то будем иметь поперечное расширение, при чем в пределах пропорциональности σ имеет то же значение, что и при растяжении.

Для таких материалов, как железо и сталь, величина относительного удлинения в пределах пропорциональности весьма мала, а потому изменением поперечного сечения можно пренебрегать при вычислении напряжений p и величины модуля E и все расчеты относить к первоначальной площади поперечного сечения. Для материалов, сильно деформирующихся, как каучук, приходится при вычислении E принимать во внимание и изменение сечения, что значительно усложняет расчеты ¹⁾.

О. Frank, Die Analyse endlicher Dehnungen und die Elastizität des Kautschuks, Annalen d. Phys., 1906 г., стр. 602.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

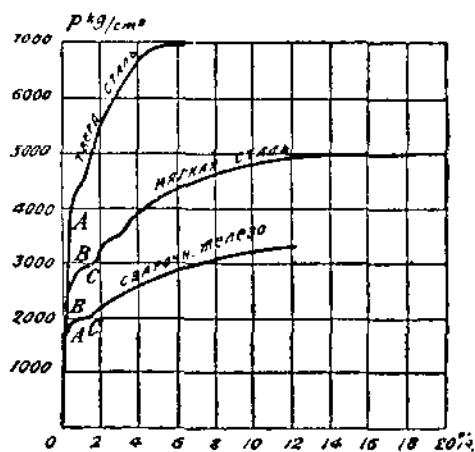
* РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ.

§ 6. Диаграмма растяжения.

До сих пор мы занимались изучением растяжения и сжатия в пределах пропорциональности. При дальнейшем возрастании деформации закон Гука уже не имеет места. Между растяжениями и соответствующими им усилиями существует более сложная зависимость, различная для различных материалов. Зависимость эту обыкновенно выражают графически. По оси абсцисс откладывают величины, пропорциональные удлинениям, по ординатам — соответствующие значения растягивающей силы. Получаемую таким образом кривую называют диаграммой. В машинах, предназначенных для испытания материалов на разрыв, обыкновенно имеются приборы, которые чертят диаграмму автоматически. Диаграмма довольно полно характеризует свойства материала, и потому мы остановимся несколько подробнее на рассмотрении ее формы для железа и стали — материалов, с которыми чаще всего приходится иметь дело при расчете.

На черт. 6 представлены такие кривые для сварочного железа, мягкой и твердой стали. Все три диаграммы имеют прямолинейный участок, весьма мало наклоненный к оси ординат. В пределах этого участка материалы следуют закону Гука.

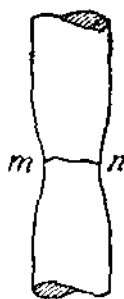
За пределом пропорциональности (на кривой для сварочного железа предел этот обозначен буквой *A*) деформации начинают расти быстрее усилий, мы получаем кривую, направленную выпуклостью кверху. У точки *B* на некотором протяжении происходит растяжение материала без возрастания растягивающей силы. На диаграмме это растяжение выражается почти горизонтальной пло-



Черт. 6.

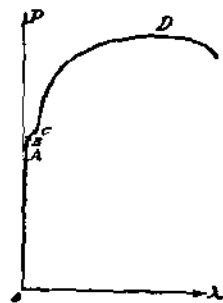
щадкой¹⁾. При дальнейшей нагрузке материал опять приобретает способность сопротивляться растяжениям, и ординаты диаграммы начинают возрастать. Возрастание это продолжается, пока на испытуемом бруске не появится местное сужение поперечного сечения (шейка) *mn* (черт. 7). С этого момента деформация сосредоточивается у места сужения. Так как при этом поперечное сечение значительно уменьшается, то растяжение происходит при уменьшающейся растягивающей силе. Полная диаграмма получит вид, представленный на черт. 8.

В диаграмме приходится отмечать три точки: точка *A* соответствует пределу пропорциональности, точку *B* называют критической точкой, наконец, точка *D* соответствует максимальному усилию, которое должно быть приложено, чтобы довести испытуемый брусок до разрыва. Нами ранее было введено понятие о пределе упругости (см. § 1). Под ним мы подразумевали то растягивающее напряжение, при котором остающаяся деформация достигает некото-



Черт. 7.

рого заданного предела. Так как в железе и стали до точки *A* величина остающихся деформаций мала, то очень часто под пределом упругости подразумевают предел пропорциональности. Критическая точка лежит выше предела упругости. Отклонения от закона Гука на протяжении участка *AB* диаграммы объясняют обыкновенно неоднородностью строения материала и неравномерностью распределения напряжений по плоскостям поперечных сечений растягиваемого бруска²⁾. Вследствие этих при-



Черт. 8.

чин, получаются местные перенапряжения, сопровождающиеся местными остающимися деформациями. Чем совершеннее материал, тем участок *AB* меньше, тем ближе лежит предел пропорциональности и критическая точка.

Явления, соответствующие критической точке, указывают на то, что в этот момент в материале происходят сильные изменения. Если поверхность растягиваемого железного бруска отполировать, то при приближении к критической точке можно на ней наблюдать появление линий, наклонных к оси бруска. Линии

¹⁾ Более подробные исследования показывают, что у этой точки возможно даже падение растягивающей силы, и это падение тем больше, чем осторожнее подходить к критической точке. Интересные результаты получены в этой области А. М. Драгомировым. Точная запись диаграммы у критической точки фотографическим путем была произведена проф. W. E. Dalbey, *Load-Extension diagrams obtained Photographically*, Engineering, 1902 г., стр. 503.

²⁾ А. М. Smith, *The elastic breakdown of non-ferrous metals*, Engineering, 1909 г., стр. 593.

Много экспериментальных данных имеется в книге Hartman, *Phénomènes qui accompagnent la déformation permanente*, 1900 г.

См. также W. Mason, *Proc. of Phys. Soc., London*, 23 (1911), стр. 305.

сти носят название линий Людерса — по имени ученого, впервые их наблюдавшего. Для изучения природы этих линий пользуются особым микроскопом. Можно заметить, что в последние годы применение микроскопа при изучении свойств металлов привлекло всеобщее внимание и привело к целому ряду интересных открытий. Совокупность методов, применяемых при этих исследованиях, относится к области металлографии ¹⁾.

Изучение с помощью микроскопа показывает, что такие материалы, как железо, состоят из кристаллических зерен, разделенных веществом другого состава, и линии Людерса, представляющиеся невооруженному глазу в виде бороздок и валиков на полированной поверхности бруска, представляют собой совокупность кристаллов, претерпевших сдвиги по плоскостям спайности ²⁾. Первые линии Людерса в виде отдельных штрихов или тонких линий появляются сейчас же после перехода за пределы пропорциональности и являются весьма чувствительным признаком этого перехода ³⁾. При дальнейшем растяжении появляются две системы взаимно пересекающихся линий или полосок, составляющих один и тот же угол с осью бруска. Угол этот является вполне определенным для каждого металла ⁴⁾. Кроме линий Людерса, на появление остаточных деформаций указывает изменение температуры бруска. Пока явление происходит в пределах пропорциональности, растяжение, как и следовало, конечно, ожидать, сопровождается понижением температуры бруска. Это понижение весьма мало, и его можно отметить, пользуясь термо-элементом и чувствительным гальванометром. Появление остаточных деформаций сопровождается резким повышением температуры ⁵⁾. Очевидно, сдвиги, характеризующие появление остаточных деформаций, сопровождаются преодолением сил „внутреннего трения“. Теплота, развивающаяся при этом, идет отчасти на повышение температуры бруска, отчасти обращается в скрытую теплоту ⁶⁾.

Появление остаточных деформаций может быть замечено также по резкому изменению магнитной проницаемости ⁷⁾.

§ 7. Влияние времени на удлинения.

При рассмотрении растяжения в пределах пропорциональности мы уже отмечали, что удлинение несколько возрастает с временем, и назвали это явление упругим последствием.

¹⁾ В Киев. пол. инст. этот курс читается в связи с механическими свойствами металлов.

²⁾ I. A. Ewing, The strength of materials: Ewing and Roschain, Phil. Trans. Roy. Soc., V. 353 A, 1930 г.

³⁾ М. А. Воронаев, Об определении напряжений и деформаций в брусках большой кривизны, Мех. лаб. Киев. пол. инст.; Изв. Киев. пол. инст., 1910 г.

⁴⁾ Reyt, Innere Reibung, 1897 г.

⁵⁾ А. Динник, Определение предела упругости по изменению температуры тела, Мех. лаб. Киев. пол. инст., 1909 г.

⁶⁾ Hort, Zeit. d. Ver. deutsch. Ing., 1906 г., стр. 1831.

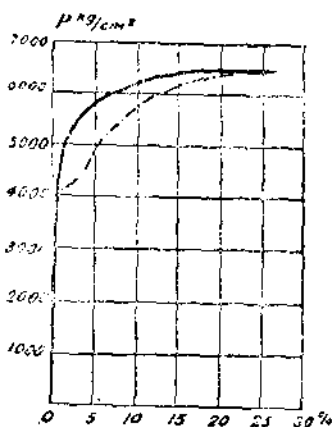
⁷⁾ L. Fraichet, Revue d'artillerie, Fevr. 1904 г.

С переходом растяжения за предел пропорциональности влияние времени гораздо более значительно. Если определять удлинения с помощью обыкновенного зеркального прибора, дающего увеличение деформаций в 500 раз, то можно наблюдать, как возрастает величина удлинения при постоянной нагрузке. В этом случае говорят, что материал течет. Если нагрузка перешла известный предел, то такое удлинение бруска с временем может закончиться разрывом.

Особенно сильно влияние времени для таких материалов, как цинк и свинец. Для них огромное значение имеет то обстоятельство, с какой скоростью изменяется нагрузка.

Интересные опыты сделал в этом направлении Лешателье. Он растягивал цинковые стержни, и оказалось, что если опыт растяжения вести быстро, например, разорвать брусок на протяжении одной минуты, то для разрушения нужен груз в 2400 kg на один квадратный сантиметр поперечного сечения. При медленном опыте, продолжающемся час, для разрыва такого же бруска нужно всего 1150 kg/cm². Если увеличить продолжительность опыта, то можно еще несколько уменьшить величину разрушающего груза. Заметим, что влияние времени особенно значительно в первый момент после приложения нагрузки, и по истечении некоторого промежутка времени приращение удлинения становится незаметным.

Для таких материалов, как железо и сталь, влияние времени не так велико, но все же диаграммы растяжения будут меняться в зависимости от того, как



Черт. 9.

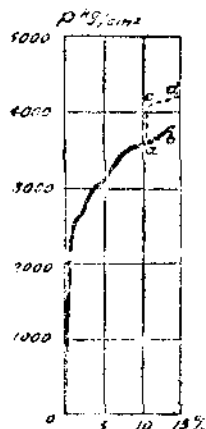
быстро менялась при опыте нагрузка. На черт. 9 представлены диаграммы, соответствующие испытанию на разрыв железной проволоки ¹⁾. Сплошной линией показаны результаты для случая разрыва в продолжение пяти минут, пунктиром показана диаграмма для того случая, когда опыт производился, примерно, в пять тысяч раз медленнее. Влияние времени здесь не так велико, как в случае цинка, и без значительных погрешностей можно считать, что удлинения, полученные железным бруском, через несколько минут после приложения нагрузки уже не возрастают и равняются, следовательно, полному удлинению.

Если брусок растянуть за критическую точку и заставить растягивающую нагрузку действовать в продолжение значительного промежутка времени, то, кроме возрастания удлинения, можно отметить еще весьма существенное влияние времени на свойства материала. Оказывается, что под действием такой нагрузки железо становится более жестким, для доведения

¹⁾ I. A. Ewing, The strength of materials.

бруска до разрыва понадобится большая нагрузка, полное же удлинение, которое получает брусок до разрыва, уменьшается.

На черт. 10 представлены результаты двух опытов, произведенных с отожженной железной проволокой ¹⁾. Сплошной линией представлены результаты для случая почти непрерывного возрастания нагрузки. При втором опыте нагрузка была доведена до состояния, соответствующего точке *a* диаграммы. Под действием этой нагрузки проволока находилась в продолжение 45½ часов. При дальнейшем возрастании нагрузки на диаграмме получился участок *acd*, обозначенный пунктиром. Таким образом, вместо продолжения диаграммы по *ab*, получается резкое повышение, свидетельствующее об уменьшении пластичности материала. Чтобы дать представление о влиянии продолжительного действия нагрузки на величину удлинения, припомним результаты одного опыта, произведенного над мягкой сталью ²⁾. При обычном испытании на разрыв разрушающая нагрузка, отнесенная к 1 см² площади поперечного сечения, получилась равной 6,14, при чем приращение длины разорванного бруска составило 20% от его первоначальной длины. Второй брусок из того же материала был разорван в пять приемов. После каждой нагрузки брусок нагревался до 100° и потом подвергался вторичному растяжению большей нагрузкой. Оказалось, что при таком ведении опыта для доведения бруска до разрыва понадобилось 7,8 т/см², при этом окончательное растяжение составило лишь 12% от первоначальной длины.



Черт. 10.

§ 8. Повышение критической точки.

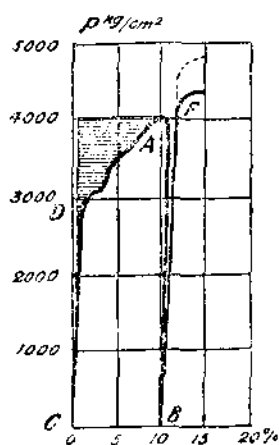
Переход за критическую точку, как мы видели, сопровождается значительными изменениями материала, и для практики весьма существенно выяснить влияние этих изменений на упругие свойства и на прочность материала. Первые опыты в этом направлении были произведены Герстнером. Им было показано, что упругое удлинение, составляющее с переходом за критическую точку лишь небольшую часть полного удлинения, возрастает все время пропорционально нагрузке.

Если брусок, растянутый до точки *A* (черт. 11), начать разгружать, то при обратном ходе деформации получим, примерно, прямую линию *AB*, параллельную первоначальной прямой *DC*. Получивший такое удлинение брусок оказывается по своим свойствам значительно измененным. При повторной нагрузке

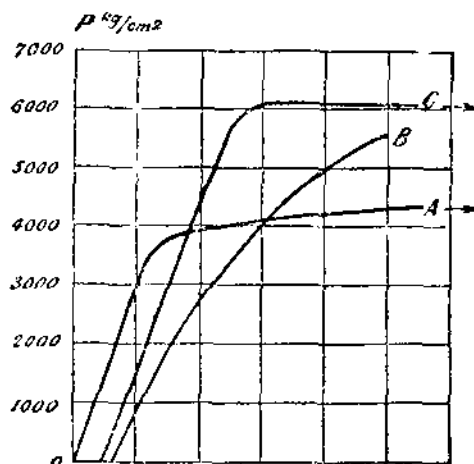
¹⁾ I. A. Ewing, On Certain Effects of Stress on soft Iron Wires, Proc. Roy. Soc., 1880.

²⁾ L. Muir, Phil. Roy. Soc., 1899 г.

самые незначительные усилия вызывают остаточные удлинения, на величину которых оказывает сильное влияние время. Такое понижение предела упругости особенно заметно, если повторная нагрузка производится сейчас же после предварительного растяжения. Если же брусу дать отдохнуть и повторное испытание на растяжение произвести через значительный промежуток времени (например, через месяц после первого опыта), то можно заметить, что упругие свойства снова возвращаются материалу — он начинает с достаточной точностью следовать закону Гука. При этом предел пропорциональности оказывается значительно повышенным, он достигает того напряжения, до которого материал



Черт. 11.

Черт. 12¹⁾.

был растянут при предварительном опыте. На диаграмме это растяжение представится прямой BF . Начиная с точки F , мы получаем кривую, являющуюся как бы продолжением кривой A . Резкое изменение в удлинениях, происходящее у точки F , имеет такой же характер, как в предварительном опыте у точки C (черт. 6). Производя значительные удлинения бруска, мы получаем, таким образом, повышение критической точки ²⁾.

Если предварительно вытянутый брусок подвергать сотрясениям или несколько нагреть (до 100°C), то оказывается, что упругие свойства восстанавливаются значительно скорее. Для иллюстрации приводим результаты опытов, произведенных над стальным бруском ³⁾. На черт. 12 диаграмма A представляет предварительный опыт на растяжение, диаграмма B представляет повторное растяжение бруска, произведенное 10 минут спустя после первого опыта. При

¹⁾ Для ясности чертежа начальные точки диаграмм сдвинуты одна относительно другой.

²⁾ Выяснение механизма этого явления можно найти в интересной книге W. Rosenhain, An introduction to the Study of Physical Metallurgy, 2 изд. 1915 г., стр. 247.

³⁾ I. Muir, Phil. Trans. Roy. Soc., 1899 г

незначительных нагрузках заметно отклонение от закона Гука. Кривая С голущена для того же бруска, но после нагревания его в продолжение четырех минут при температуре 100°C . Такое нагревание, как видно из диаграммы, вполне возвратило материалу его упругие свойства.

Предварительное растяжение бруска за критическую точку, повышая предел пропорциональности, уменьшает растяжимость материала, как бы закаливает его. С таким обстоятельством приходится на практике считаться, так как нередко железные части подвергаются холодной обработке и при этом получают значительные остающиеся деформации. Например, резание листов ножницами закаляет и делает более жесткими подвергнутые обработке края листа. При изгибе такого листа по краям могут получиться трещины, так как потерявшие свою пластичность части листа не могут получить значительных растяжений. То же явление закаливания можно наблюдать при пробивании дыр и заклепочных отверстий в железных листах. Края отверстий становятся более жесткими, чем остальная масса листа. При растяжении полосы, снабженной пробитыми отверстиями, закаленная часть материала не может следовать за деформацией остальной массы полосы, на нее начинают передаваться большие усилия, и потому у краев появляются легко трещины и разрывы.

Чтобы избежать вредного влияния пробивки дыр, пробивку заменяют сверлением. Если же дыры пробивают, то делают их меньшего диаметра, чем требуется, и потом доводят до проектных размеров путем рассверливания; таким образом удаляют закалившуюся часть материала.

Свойством железа закаливаться при значительных растяжениях нередко пользуются в технике. Например, предварительно вытягивают проволоку, предназначенную для телеграфных проводов, вытягивают приводные ремни, цепи и канаты подъемных машин. Цилиндры гидравлических прессов подвергают иногда предварительному внутреннему давлению, значительно превосходящему то наибольшее давление, при котором цилиндр находится в работе. Этим способом обеспечивается дальнейшая неизменяемость диаметра цилиндра и плотное прикосновение поршня. Нужно заметить, что подобное предварительное растягивание достигает цели и увеличивает прочность конструкции лишь в том случае, если подвергнутая предварительному растяжению часть и в работе испытывает только растяжение. Опыты показывают¹⁾, что вытянутый за критическую точку железный брусок при сжатии выказывает признаки слабости, при небольших нагрузках заметны отклонения от закона Гука, и появляются остаточные деформации.

Следовательно, в тех случаях, когда предварительной деформацией желают обеспечить неизменяемость конструкции, нужно, чтобы эти изменения формы были того же рода, как те деформации, которым изготовляемая часть подвергается во время работы, т.-е. часть нужно подвергнуть значительному первоначальному растяжению, если она предназначается для выдерживания лишь

¹⁾ Bauschinger, Mitteil. aus dem Mech.-tech. Lab. in München. 1886 г.

растягивающих усилий, и первоначальному сжатию, если в дальнейшем она работает на сжатие.

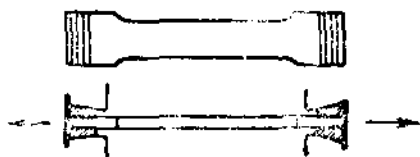
Железу, получившему остаточные деформации, можно вернуть его первоначальные пластические свойства путем отжига. Для этого растянутый за критическую точку брусок нужно нагреть до температуры красного каления, примерно 700° , продержать при этой температуре около получаса и после этого медленно охладить. Оказывается, что таким путем восстанавливается первоначальная форма кристаллов, претерпевших сдвиги при переходе за критическую точку. При обыкновенных условиях прокатки прокатываемые сорта железа и стали оставляют машину при столь высокой температуре, что влияние обработки на высоту критической точки сказывается мало. Обыкновенно рыночное железо после отжига ведет себя, примерно, так же, как и в своем естественном состоянии. Иное дело холодная обработка железа, она всегда сопровождается значительным повышением критической точки. Чтобы избежать вредных последствий от жесткости материала, на практике прибегают часто к отжигу частей, подвергавшихся холодной обработке.

§ 9. Испытание металлов на разрыв ¹⁾.

Испытание на разрыв является основным при исследовании прочности металлов. Испытуемым брускам придают круглую (черт. 13) или плоскую (черт. 14) форму. Наиболее существенным при этих опытах является центральная передача растягивающего усилия.



Черт. 13.



Черт. 14.

В круглых брусках это достигается с помощью особого шарового вкладыша. В плоских образцах, захватываемых обыкновенно с помощью клиньев, передача усилий является менее совершенной. К брускам такой формы приходится прибегать лишь в тех случаях, когда изготовление круглых брусков затруднительно, например: при испытании листового и некоторых сортов фасонного железа. Чтобы обеспечить более равномерное распределение усилий по площади поперечного сечения и создать условия, при которых разрыв происходил бы в среднем участке бруска, толщину бруска увели-

чивают в направлении от середины к концам. Средняя призматическая часть бруска сопрягается с головкой при помощи конической и утолщенной цилиндрической части. Чтобы при испытании получать сравнимые результаты, принята

¹⁾ Описание машин, при помощи которых производится испытание прочности строительных материалов, имеется в книге Н. Н. Митинского — Строительная механика. См. также Martens, Materialienkunde.

определенная форма нормального образца. Средняя цилиндрическая часть бруска берется 22 см длины и 2 см в диаметре. При опытах измерения производят на среднем участке длиной 20 см — это является *расчетной длиной*. Избыток длины цилиндрической части служит для того, чтобы концы исследуемого участка бруска несколько удалить от мест изменения размеров поперечного сечения и этим обеспечить равномерное распределение напряжений по плоскости поперечного сечения. Отношение расчетной длины к диаметру в нормальном образце равно 10. Эту зависимость можно представить так:

$$l = 10d = 11,3 \sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} = 11,3 \sqrt{F} \quad (8).$$

Последней ф-лой пользуются при вычислении надлежавшей расчетной длины в тех случаях, когда приходится брать брусок не круглого сечения.

При испытании на разрыв отмечают:

- 1) нагрузку, соответствующую критической точке;
- 2) наибольшую нагрузку, которую нужно приложить, чтобы разорвать брусок;
- 3) приращение расчетной длины бруска при разрыве;
- 4) сужение поперечного сечения в месте образования шейки.

Наибольшее усилие, необходимое при опыте, называют разрушающим грузом, а величину этого усилия, деленную на первоначальную площадь поперечного сечения, — *временным сопротивлением* материала разрыву. Величина эта характеризует прочность материала; она колеблется даже для одного и того же материала в довольно широких пределах.

Средние значения этой величины для нескольких наиболее важных материалов мы приводим в нижеследующей таблице (стр. 40).

Чтобы судить о степени пластичности материала, измеряют те удлинения, которые получаются при разрыве. Расчетную длину бруска делят предварительно на сантиметры. По этим делениям можно видеть, что при разрыве удлинения отдельных участков далеко не одинаковы, наиболее растянутыми оказываются деления у места разрыва.

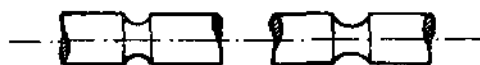
Относительное удлинение обыкновенно принято выражать в процентах от первоначальной длины. Если l_1 длина расчетной части бруска после разрыва и l ее первоначальная длина, то удлинение в процентах представится такой ф-лой:

$$\frac{l_1 - l}{l} \cdot 100.$$

Чтобы иметь возможность сравнивать материалы, нужно брать одинаковой формы бруски. Если же это невозможно, то, по крайней мере, нужно сохранять определенное соотношение между расчетной длиной и поперечными размерами [см. ф-лу (8)].

М а т е р и а л	Врем. сопротив. разрыву kg/cm^2	Удлинение %
Сварочное железо для болтов и заклепок	3500—4000	12—20
„ листовое железо вдоль прокатки	3300—4000	8—20
Литое железо	3300—4500	25—28
Литая сталь	4400—6500	23—27
Тигельная сталь	5000—5500	20—25
	5500—6000	20
Никелевая сталь	5500—6500	22—27
Никелевая сталь закаленная	11000—11500	8
Хромо-никелевая сталь	6500—7000	16—18
„ „ твердая	11000—13000	8—10
Чугун	1200—1800	—
Листы красной меди	2000—2300	38
Бронза	2000	6
Фосфористая бронза	4000	6
Дельта металл, литье	3400—3700	6
Алюминий литой	1000—1200	3

Отклонение от этого правила может оказать значительное влияние на величину определяемого процентного удлинения. Дело в том, что не все участки бруска оказываются одинаково удлиненными, наибольшее удлинение падает на участок, соответствующий шейке. Чем длина этого участка больше по сравнению с общей расчетной длиной, тем больше будет получаться и процентное удлинение. Наоборот, причины, затрудняющие образование шейки, влекут за



Черт. 15.

собой уменьшение процентного удлинения. Например, бруски с выточкой (черт. 15) менее вытягиваются, чем бруски постоянного сечения. Влияние выточек тем значительнее, чем меньшее протяжение по длине бруска они

занимают. Разрыв происходит по ослабленному сечению. Образованию шейки при этом препятствуют соседние утолщенные части бруска.

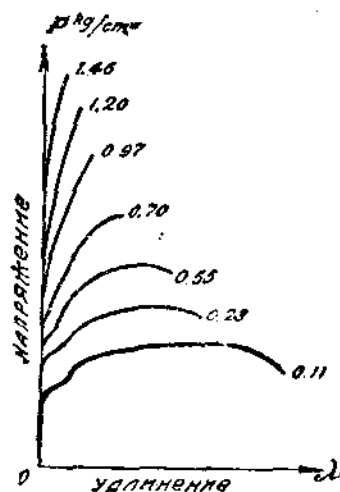
Для суждения о пластичности материала, кроме процентного удлинения, измеряют также и сужение поперечного сечения в месте разрыва.

Если F — первоначальная площадь сечения и F_1 — та же площадь после разрыва, то уменьшение сечения в процентах представится так:

$$\frac{F - F_1}{F} \cdot 100.$$

Пластичность является весьма ценным свойством материала в тех случаях, когда, кроме статических нагрузок, какая-либо конструкция подвергается действию ударов и сотрясений. Хрупкий материал при этих условиях может повести к совершенно неожиданным катастрофам.

При приемках больших партий железа и стали обыкновенно устанавливаются те технические условия ¹⁾, которым материал должен удовлетворять. Ставят определенные требования относительно величины временного сопротивления и процентного удлинения материалов. Например, для мостов требуется железо, дающее не менее 16% — 20% удлинения. Для котлов требуется еще более мягкое железо. Удлинение и временное сопротивление железа и стали стоят между собой в довольно тесной связи. Оказывается, что увеличением содержания углерода можно повысить временное сопротивление, но такое увеличение прочности сопровождается уменьшением пластичности материала. Для иллюстрации мы приводим на черт. 16 ряд диаграмм, относящихся к растяжению железа и стали. Содержание углерода в процентах отмечено на каждой из диаграмм.



Черт. 16.

§ 10. Работа, затрачиваемая на разрыв.

Ранее было показано (см. § 4), что площадь, заключенная между кривой диаграммы, осью абсцисс и крайней ординатой, представляет работу, затраченную на растяжение. Величина этой площади всегда может быть представлена в такой форме (черт. 17):

$$T = \eta \cdot OH \cdot CD,$$

где OH удлинение, полученное бруском при разрыве, CD — наибольшее значение растягивающей силы, η — так называемый „коэффициент полноты“. Величина эта, очевидно, меньше единицы и, как показали опыты ²⁾, довольно постоянна для одного и того же материала. Чтобы получить величину, независимую от размеров бруска, разделим работу T на объем бруска. Полученная этим путем „удельная работа“ представится так:

$$\frac{T}{VF} = \eta \cdot \frac{OH}{l} \cdot \frac{CD}{F} = \eta e p_{\max},$$

где e относительное удлинение и $p_{\max}$ — наибольшее растягивающее напряже-

¹⁾ См. Hütte, Справочная книга для инженеров.

²⁾ L. Tetmayer, Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt am schweiz Polytechnikum.

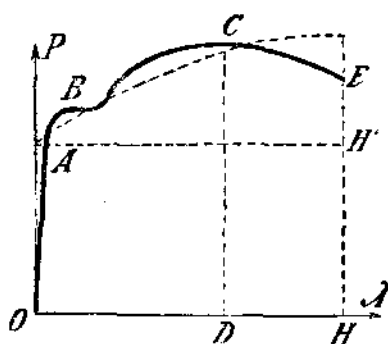
ние. Величина эта может до некоторой степени характеризовать свойства материала, главным образом, его способность сопротивляться ударам. Материал будет тем лучше, чем соответствующая ему „удельная работа“ больше. Например, из двух сортов железа, имеющих одинаковое временное сопротивление, лучше будет сопротивляться ударам тот материал, которому соответствует большее процентное удлинение.

Принято допускать в сооружениях железо с меньшим временным сопротивлением, если это обстоятельство компенсируется увеличением процентного удлинения.

Практически возможность такой компенсации выражается особыми ф-лами, в которые входят как временное сопротивление R , так и относительное удлинение при разрыве e . Например, при поставках железа для мостов требуют, чтобы было соблюдено условие:

$$R + 2e \geq 85.$$

Здесь R берется в килограммах на квадратный миллиметр и e в процентах. Следовательно, для железа, дающего 20% удлинения, временное сопротивление разрыву должно быть не меньше 45 kg/mm².



Черт. 17.

В тех случаях, когда не имеется диаграммы, работу, затраченную на разрыв бруска, можно определить по величине удлинения OH , величине нагрузки OA , соответствующей пределу упругости, и величине DC наибольшей нагрузки. Для этого можно воспользоваться такой ф-лой:

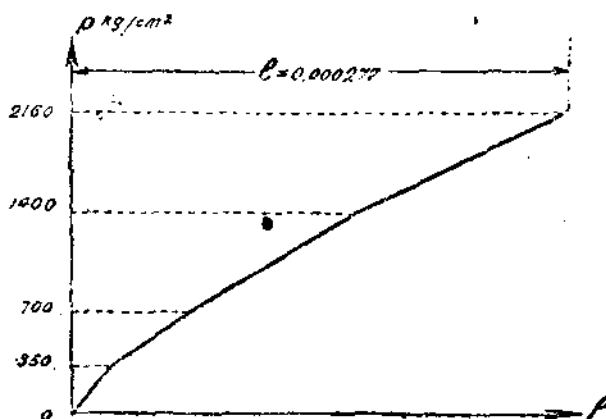
$$T = OH \cdot OA + \frac{2}{3} OH (DC - OA).$$

Это равносильно предположению, что диаграммная площадь (черт. 17) составлена из площади прямоугольника $OAHH$ и площади параболического сегмента, имеющего высоту $(DC - OA)$ и основание OH . Значение удельной работы для некоторых материалов приводим ниже:

М а т е р и а л ы	Уд. раб. в $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{cm}^2}$
Сварочное железо	2—7
Литое железо	6—8
Мягкая сталь	8 и более.

§ 11. Сжатие.

В пределах пропорциональности зависимость между сжатием бруска и величиной сжимающих сил вполне определяется модулем упругости E . Величина эта берется одной и той же как для растяжения, так и для сжатия. За пределами пропорциональности связь между деформациями и усилиями становится более сложной, ее обыкновенно представляют графически с помощью диаграммы. Вид диаграмм бывает различный, в зависимости от того, испытываем ли мы на сжатие хрупкий или пластичный материал. Для материалов хрупких, как чугун, камень, цемент и т. д., диаграмма представится в виде кривой, направленной выпуклостью в сторону положительных ординат (черт. 18)¹⁾. (В направлении положительных ординат придется здесь откладывать величины сжимающих напряжений.) Для таких кривых, как мы видели



Черт. 18.

(см. § 2), удобно пользоваться степенной ф-лой (6). Например, для цементных кубиков закон сжатия с достаточной точностью можно представить такими ф-лами²⁾:

чистый цемент
$$\epsilon = \frac{1}{250 \cdot 10^3} p^{1.09},$$

при отношении количества цемента к количеству песка 1:3,

$$\epsilon = \frac{1}{315 \cdot 10^3} p^{1.15},$$

для гранита
$$\epsilon = \frac{1}{250 \cdot 10^3} p^{1.13}.$$

Величины постоянных, входящих в эти ф-лы, значительно колеблются даже для одного и того же материала, поэтому расчеты, построенные на приведенных ф-лах, не могут претендовать на большую точность.

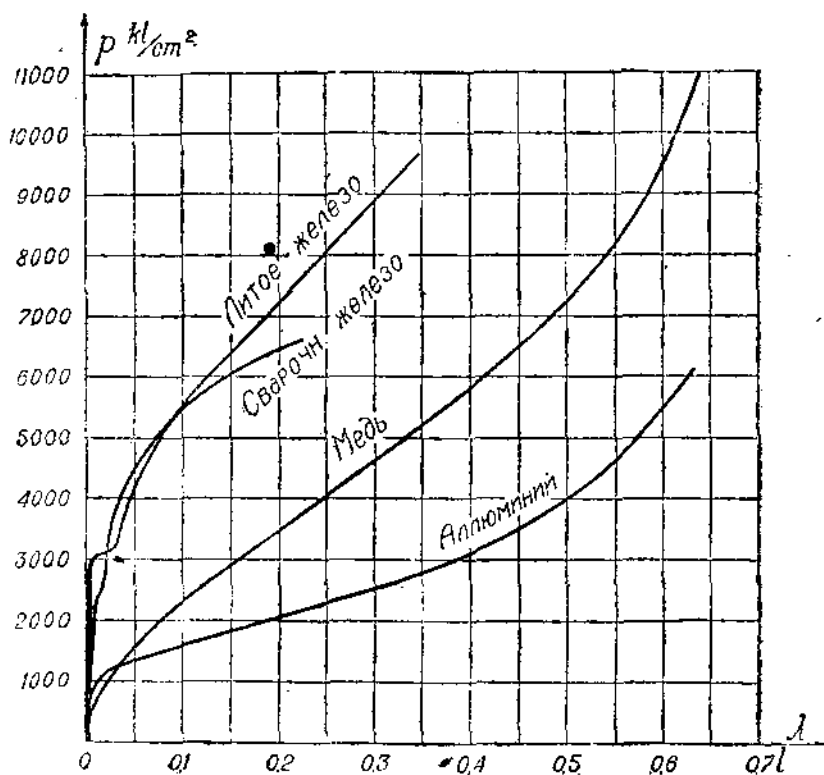
Несколько диаграмм для пластических материалов представлено на черт. 19. Для железа мы и здесь получаем ясно выраженную критическую точку, отмеченную горизонтальной площадкой. Соответствующие критической точке на-

¹⁾ На чертеже представлена диаграмма для сжатия гранита.

²⁾ См. С. Вагх, *Elastizität und Festigkeit*, V изд. 1905 г., Berlin, стр. 67.

пряжения имеют примерно то же значение, что и при растяжении ¹⁾. Далее, диаграмма начинает опять подниматься и получает в некоторых случаях точку перегиба.

Такое как бы увеличение прочности материала получается потому, что сжимаемый брусок раздается в стороны, при чем сильно возрастает площадь поперечного сечения.



Черт. 19.

Если производить повторные опыты на сжатие, то, как и при растяжении, можно отметить повышение критической точки, закаливающее влияние продолжительного действия нагрузки и влияние времени при нагрузках за критической точкой.

При постановке опытов на сжатие мы встречаемся с целым рядом затруднений. Чтобы обеспечить равномерное распределение усилий по плоскости поперечного сечения, желательно наблюдаемый участок сжимаемого бруска по возможности удалить от концов; для этого следовало бы подвергать сжатию,

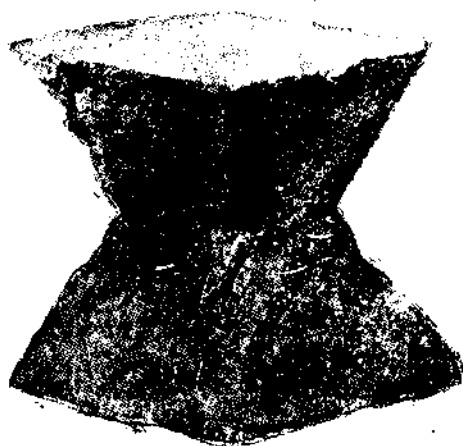
¹⁾ См. Moore, Bulletin University of Illinois, No. 68.

сравнительно длинные бруски, но в таком случае всякая неточность в приложении силы влечет за собой изгиб бруска. При сжатии коротких брусков мы встречаемся с другим неудобством. Чтобы произвести опыт, брусок нужно зажать между двумя плоскостями — досками пресса. При сжатии поперечные размеры увеличиваются, но у концов такое расширение встречает препятствия. По плоскостям соприкосновения, кроме сжимающих напряжений, будут действовать еще силы трения, и вместо простого сжатия мы получим у концов бруска более сложное явление. Вследствие этих затруднений металлы обыкновенно на сжатие не испытывают. Для суждения о прочности и упругих свойствах пользуются данными опытов на растяжение и полагают, что для железа, стали и других металлов предел пропорциональности и критическая точка при сжатии соответствуют таким же напряжениям, как и при растяжении.

Что касается временного сопротивления при раздавливании, то для пластических материалов трудно дать какие-либо определенные величины, так как при опытах не получается ясно выраженного момента разрушения. Для хрупких материалов, как чугун, камни и цемент, а также для дерева, испытание на раздавливание является нормальным.

Сжатие производят над образцами кубической формы различных размеров. Например для чугуна берут кубики размерами $3 \times 3 \times 3$ см, для прочных камней $5 \times 5 \times 5$ см, для более слабых пород камня, для цемента и для дерева нормальным является испытание кубиков размерами $7 \times 7 \times 7$ см. Для испытания очень неоднородных материалов, например, бетона, приходится прибегать к кубикам значительно больших размеров. При вычислении временного сопротивления величину разрушающего груза делят на первоначальную площадь поперечного сечения. Получаемые таким путем величины временных сопротивлений не представляют истинного сопротивления материала раздроблению, так как при кубической форме испытуемого образца роль трения по поверхностям соприкосновения значительна, и потому нельзя считать, что сжимающие усилия распределяются равномерно. Получаемые путем раздробления числа для временных сопротивлений могут иметь только условное значение; на основании их можно заключать лишь об относительной прочности различных материалов.

О влиянии сил трения можно судить по характеру разрушения кубиков. Обычный вид разрушившегося от сжатия цементного кубика представлен на ри-



Черт. 20.

сунке 20. Грани, находящиеся в непосредственном соприкосновении с досками пресса, остаются целыми. При раздавливании происходит выкрашивание с боков и в заключение из кубика остается лишь часть, составленная как бы из двух пирамид, сложенных вершинами. Если устранить трение, то характер разрушения будет совсем иной. Интересные опыты в этом направлении были произведены с цементными кубиками, верхняя и нижняя грань которых смазывалась парафином ¹⁾. Оказывается, что в этом случае при разрушении кубик разделяется на несколько частей плоскостями, параллельными одной из боковых граней. При этом временное сопротивление получается значительно меньшим, чем при обычных опытах на сжатие. Такой результат отчасти приходится приписать тому обстоятельству, что выдавливаемый парафин, благодаря вязкости, вызывает по поверхностям соприкосновения кубика усилия, как раз противоположные тем, что получают в обычных опытах, благодаря трению. Усилия эти будут стремиться разорвать кубик. Влияние трения иногда пытаются устранить путем введения особых прокладок из более мягкого материала или путем перехода к брускам большей длины. Особенный интерес представляет серия опытов, произведенных над цилиндрическими образцами, изготовленными из мрамора ²⁾. Оказывается, что разрушению предшествует появление системы линий, трещинок, по которым происходят сдвиги. Линии эти наклонны к направлению действия силы.

В заключение приводим таблицу значений временного сопротивления при раздроблении для некоторых материалов:

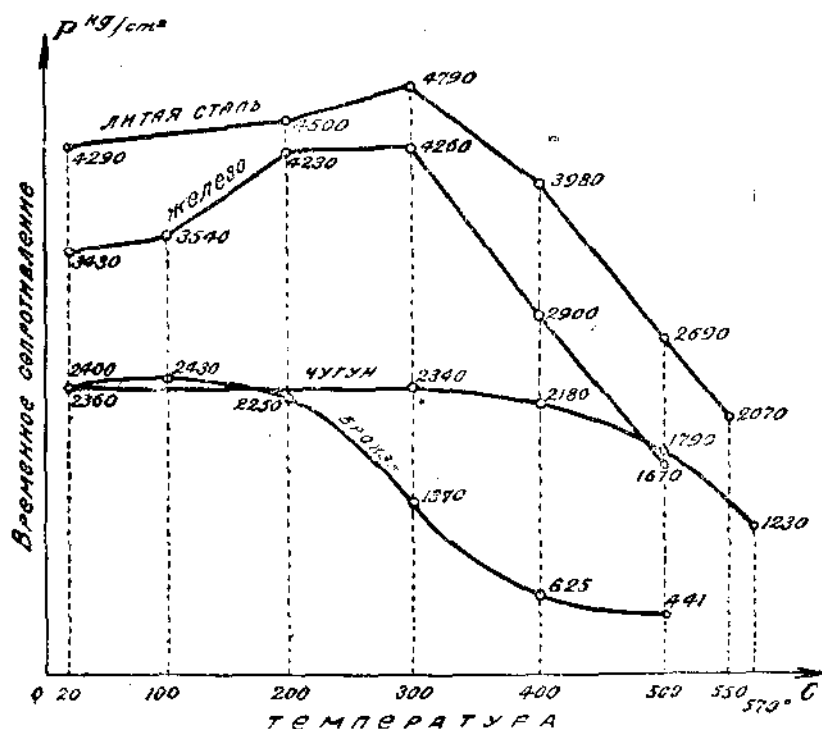
Чугун	5000—8000 kg/cm ²
Гранит	800—2000 .
Базальт	1000—3200 .
Песчаник	500—1800 .
Известняк	400—2000 .
Кирпич	150— 300 .
Чистый цемент	250— 270 .
Цемент с примесью 3-х частей песка	160 .
Сосна	245 .
Дуб } вдоль волокон	355 .
Бук }	320 .

¹⁾ F ö p p l, Mitteilungen aus dem Mech.-tech. Lab. in München, Heft. 27.

²⁾ L. Prandtl und Rinne, Neues Jahrbuch f. Mineralogie, 1907 г., «Vergleichende Untersuchungen über die Methoden zur Bestimmung der Druckfestigkeit von Gesteinen».

§ 12. Влияние температуры.

Приведенные ранее результаты относительно прочности различных строительных материалов получены при условии испытания в обычной комнатной температуре. На практике иногда приходится оценивать прочность того или иного материала при высокой температуре. Например, с этой задачей мы встре-

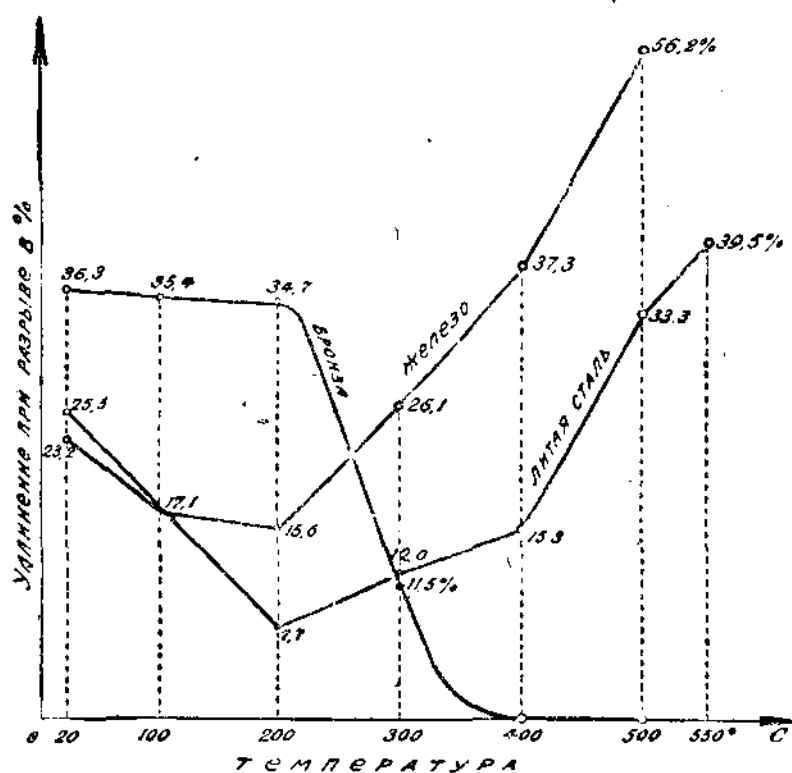


Черт. 21

чаемся при проектировании частей паровых котлов, газовых двигателей и т. д. Произведенные в этом направлении опыты ¹⁾ показывают, что значительное повышение температуры понижает временное сопротивление разрыву ²⁾ и особенно вредно влияет на растяжимость материалов. Например, для образцов из сталь-

¹⁾ R. Baumann, Die Festigkeitseigenschaften der Metalle in Wärme und Kälte—1907 г.; F. Hauser, Über die Abhängigkeit der Bruchfestigkeit von der Temperatur, Diss. 1912 г.

²⁾ Из приложенных ниже диаграмм видно, что для железа и стали при температуре 200—300° временное сопротивление разрыву несколько возрастает.



Черт. 22.

Материал	Температура °C	Времен. сопротив. разрыву kg/cm ²	Удлинение %	Сужение сечения %
Железо	-80	4270	23,8	32,6
	-20	4170	26,2	34,9
	+20	3970	27,7	39,9
Мягкая сталь	-80	4520	23,4	61,9
	-20	4360	33,3	61,6
	+20	4040	32,8	62,7
Рессорн. сталь	-80	8410	10,9	23,8
	-20	8420	14,0	24,1
	+20	7720	16,0	28,8
Никелев. сталь	+20	8800	10,7	60,8
	+200	9100	8,7	60,0
	+400	7300	7,0	74,0

ной отливки процентное удлинение при температуре около 200° уменьшается почти вдвое. Для бронзы процентное удлинение, начиная с 400° , падает почти до нуля. Такое уменьшение пластичности материала, конечно, весьма вредно влияет на прочность конструкций, подвергающихся высоким температурам, что должно быть учитываемо при проектировании. На черт. 21 и 22 приведены диаграммы, наглядно представляющие изменение прочности и пластичности некоторых материалов с возрастанием температуры.

Понижение температуры до -80°C , как показывают опыты, сопровождается увеличением временного сопротивления разрыву и уменьшением процентного удлинения. Результаты нескольких опытов приводим в вышеупомянутой таблице ¹⁾ (стр. 48).

За последнее время, в связи с повышением давления и температуры в паровых турбинах, приобрел большое практическое значение вопрос о прочности металлов при высоких температурах. Этим вопросом занимается сейчас целый ряд лабораторий ²⁾. Кривые черт. 22а дают представление об изменениях временного сопротивления различных металлов, в связи с изменениями в температуре. Кривые черт. 22б дают изменения предела пропорциональности различных металлов с температурой и, наконец, черт. 22с дает изменения с температурой модуля упругости.

Эти данные получены путем опытов на растяжение брусков, заключенных в электрическую печь, при чем весь опыт растяжения продолжается около получаса. Такие опыты недостаточны для суждения о деформациях, которые могут протекать в материале, если он будет подвергнут долговременному действию нагрузки. Образцы, показывающие значительное временное сопротивление при сравнительно быстром опыте на растяжение, могут быть разрушены меньшей нагрузкой, если только эта нагрузка действует достаточно долгий промежуток времени.

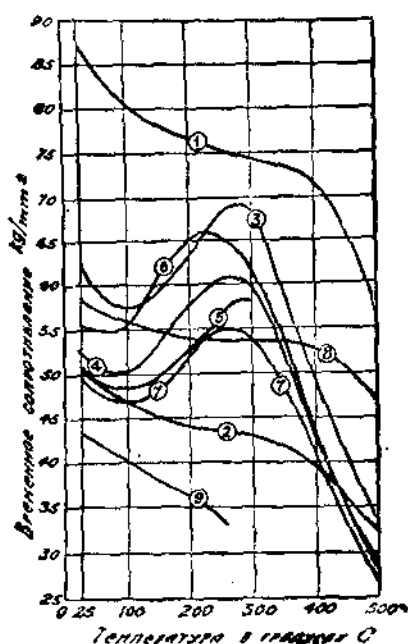
Для проектирующего инженера нужно знать то предельное напряжение, которое данный материал может выдерживать при данной температуре неопределенно долгое время без непрерывного нарастания деформации. Опыты для установления таких пределов (Creep Limit) ведутся сейчас несколькими лабораториями, в том числе National Physical Laboratory Teddington, England ³⁾, Bureau of Standards, U. S. A. ⁴⁾, лаборатория Westinghouse El. and

¹⁾ Ряд новых данных можно найти в статье F. C. Lea, Engineering, 1914 г. стр. 487.

²⁾ Литература по этим исследованиям перечислена в: „Symposium on Effect of Temperature upon the Properties of Metals“, Proceedings, American Soc. for Testing Materials, Vol. 24, Part II, p. 142, 1924.

³⁾ См. H. G. Tapsell, Engineering, Nov. 1925.

⁴⁾ French H. J., Proceedings, American Soc. for Testing Materials, Vol. 26, Part II, 1926.



Черт. 22a 1).

2) Кривые черт. 22a, б и с относятся к следующим металлам:

1 — Нержавеющее хромо-никелевое литее железо (Si — 0,47; Ni — 0,52; Cr — 12,32%), закаленное в масле при 955°, отпущенное при 565° и остуженное в масле.

2 — То же, отожженное при 790° С.

3 — Углеродистая сталь (0,37% С), закаленная в воде при 850° С, отпущенная при 600° С и остуженная в горне.

4 — То же, нормализованная при 875° С трехчасовым нагревом до этой температуры и остуженная на воздухе.

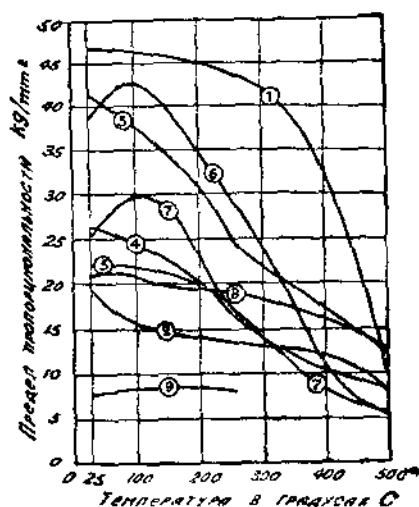
5 — То же прокатная.

6 — 5% никелевое литее железо (0,10% С), закаленное в масле при 785° С, отпущенное при 620° и остуженное в масле.

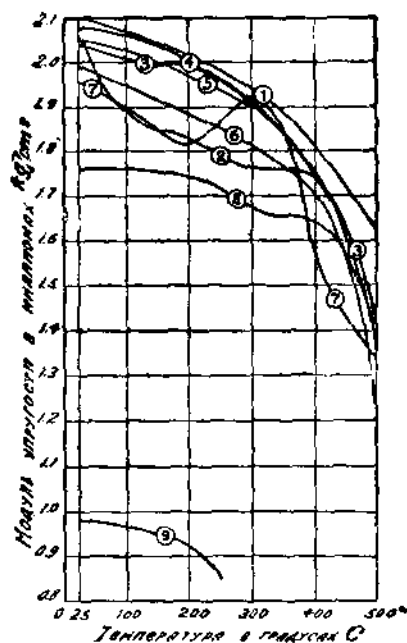
7 — То же (0,09 % С), нормализованное при 815° С и остуженное на воздухе.

8 — Манганный сплав (Cu — 28,71, Ni — 67,15%) горячей прокатки.

9 — Литая марганцевая бронза (Cu — 3,84, Zn — 39,0%) в литье.



Черт. 22b.



Черт. 22c.

Mlg Co, U. S. A. ¹⁾ Они показывают, что для стали при температуре 400° C предельное напряжение, при котором деформация перестает непрерывно возрастать, может быть принято равным пределу упругости стали при обычном растяжении и при температуре 400°.

Некоторые данные для предельных напряжений при высоких температурах могут быть найдены также в интересной статье F. C. Lea, читанной на декабрьском собрании 1924 года The Institute of Mechanical Engineers в Лондоне.

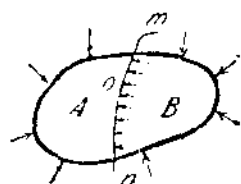
¹⁾ R. B. Wilhelm, Trans. Amer. Soc. of Mech. Engineers, Vol. 46 (1924), p. 489.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

О НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ.

§ 13. Напряжение в случае простого растяжения.

Общий способ для определения напряжений в данной точке O деформированного тела такой. Проводим через O поверхность mn (черт. 23), разделяющую данное тело на две части A и B , и рассматриваем равновесие одной



Черт. 23.

из этих частей, например, A . Кроме внешних сил, к выделенной части будут приложены по поверхности mn усилия, заменяющие действие отброшенной части B на оставленную часть A . Распределение этих усилий по поверхности mn , вообще говоря, будет неравномерным, и, чтобы судить об интенсивности их в какой-либо точке, возьмем у точки O бесконечно малый элемент δF , принадлежащий поверхности mn ; он, очевидно, совпадает с плоскостью, касательной к mn в точке O . Усилия, приходящиеся на элемент δF , можно привести к одной равнодействующей δP . Тогда под величиной напряжений, в данной точке O и по данной площадке δF , мы будем подразумевать предел отношения:

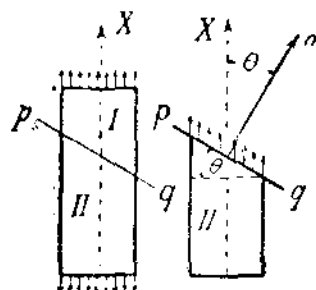
$$\frac{\delta P}{\delta F}.$$

За направление напряжения примем направление равнодействующей δP . Через заданную точку O можно провести бесчисленное множество различно направленных элементарных площадок. Каждой из них будет соответствовать свое напряжение. Чтобы вполне определить напряженное состояние в данной точке, нужно установить закон изменения напряжения в зависимости от направления площадки. Применим эти общие соображения к простейшим случаям: к растяжению и сжатию призматических брусков. Мы уже рассмотрели (см. § 1) распределение напряжений по плоскости поперечного сечения, перпендикулярного к оси бруска. Возьмем теперь напряжения по сечению pq , наклоненному к оси бруска (черт. 24).

Отбрасываем верхнюю часть и рассматриваем равновесие нижней части бруска. Направление сечения определяем углом θ между осью бруска (осью X -ов) и внешней (имеющей направление наружу по отношению к рассматриваемой части II) нормалью n , отсчитываемым по часовой стрелке. Площадь сечения

pq равна $\frac{F}{\cos \theta}$. Усилия, заменяющие действие отброшенной части бруска на часть II, приводятся к силе P , направленной снизу вверх. По сечению pq усилия распределяются равномерно, так как каждый продольный элемент бруска претерпевает одинаковое удлинение. Напряжение p_θ в любой точке по сечению pq получим, разделяя сумму P всех усилий на величину площади pq , следовательно:

$$p_\theta = \frac{P \cos \theta}{F}.$$



Черт. 24.

Величина напряжения зависит от направления плоскости сечения pq . Направление напряжения, очевидно, совпадает с направлением оси X -ов.

Рассмотрим теперь отдельно нормальную и тангенциальную составляющие напряжения по сечению pq . Вводя для них обозначения p_n и p_t , найдем, на основании черт. 25, что

$$p_n = p_\theta \cos \theta = \frac{P}{F} \cos^2 \theta = p \cos^2 \theta \quad (9).$$

$$p_t = p_\theta \sin \theta = \frac{P}{F} \sin \theta \cos \theta = \frac{P}{2F} \sin 2\theta = \frac{p}{2} \sin 2\theta$$

Следовательно, нормальные напряжения достигают наибольшей величины по сечениям нормальным к оси бруска, а тангенциальные напряжения имеют наибольшее значение по сечениям, наклонным к оси бруска под углом $\theta = 45^\circ$. При этом, как легко

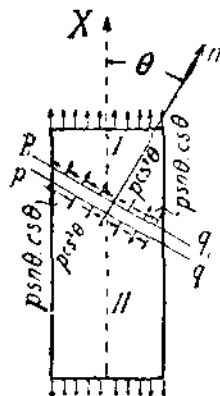
видеть из ф-л (9):

$$(p_n)_{\max} = 2(p_t)_{\max} = \frac{P}{F} = p.$$

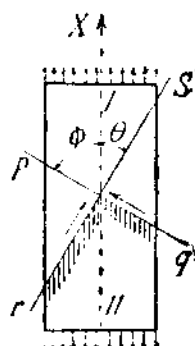
Если растягиваемый брусок представить себе пересеченным бесконечно близкими параллельными плоскостями p_1q_1 и pq (черт. 26) и по сечению p_1q_1 приложить усилия, заменяющие действие части I на часть II, а по сечению pq — усилия, заменяющие действие части II на часть I, то бесконечно тонкий слой p_1q_1pq будет находиться под действием этих усилий в равновесии. Нормальные напряжения, как видно из чертежа, стремятся раздвинуть сечения p_1q_1 и pq . Тангенциальные напряжения сдвигают сечение p_1q_1 относительно pq (поэтому тангенциальные напряжения иногда называют сдвигающими или срезающими напряжениями).

Сравним напряжения по сечениям pq и rs , определяемым углами θ и Φ , при чем (черт. 27)

$$\theta + \Phi = 90^\circ.$$



Черт. 26.



Черт. 27.

Вставляя в ф-лы (9), вместо θ , величину $270^\circ + \theta$, найдем, что по плоскости rs действуют напряжения:

$$p'_n = p \cos^2(270^\circ + \theta) = p \sin^2 \theta$$

$$p'_t = \frac{p}{2} \sin(180^\circ + 2\theta) = -\frac{p}{2} \sin 2\theta.$$

Следовательно:

$$p'_n + p_n = p;$$

$$p'_t = -p_t.$$

Тангенциальные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по абсолютному значению. Направление их указано на черт. 27 стрелками (стрелки указывают направление действия верхней на заштрихованную нижнюю часть).

В заключение отметим, что при $\theta = 90^\circ$, т.-е., когда площадка проходит через направление растягивающих усилий,

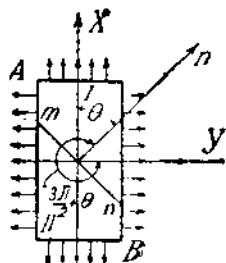
$$p_n = p_t = 0;$$

следовательно, продольные элементы бруска при удлинении не оказывают друг на друга никакого давления. Выводы, сделанные нами для растягивающих сил P , применимы также и к случаю сжатия. Придется изменить лишь направление напряжений.

В дальнейшем условимся растягивающие напряжения считать за положительные и сжимающие — за отрицательные.

§ 14. Распределение напряжений в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Брусок AB (черт 28), имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, растягивается усилиями, равномерно распределенными по граням, перпендикулярным к осям X и Y ; P_x и P_y — равнодействующие усилий, параллельных осям. Площади соответствующих граней параллелепипеда обозначим через F_x и F_y . Напряжения по сечениям бруска, перпендикулярным к осям X и Y , очевидно, будут нормальными, и величина их определится по ф-ле:



Черт. 28.

$$p_x = \frac{P_x}{F_x} \text{ и } p_y = \frac{P_y}{F_y}.$$

Найдем теперь напряжения по сечению mn , перпендикулярному к плоскости чертежа и определяемому углом θ . При этом будем рассматривать действие верхней части бруска на нижнюю. Полные напряжения, очевидно, получим, суммируя напряжения от растяжения по оси X -ов с напряжениями от растя-

жения по оси Y -ов. Выражения для первых напряжений нами были получены выше (см. ф-лы 9). Нужно только, вместо P и F , вставить величины P_x и F_x . Для получения напряжений от растяжения в направлении оси Y -ов придется в ф-лы (9) поставить, вместо θ , величину $\frac{3\pi}{2} - \theta$ и, вместо P и F , — величины P_y и F_y . Суммируя напряжения от растяжений по осям X и Y , получим для нормальной и тангенциальной составляющих полного напряжения по плоскости mn выражения:

$$p_n = p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta \quad (10);$$

$$p_t = \frac{p_x}{2} \sin 2\theta - \frac{p_y}{2} \sin 2\theta = \frac{p_x - p_y}{2} \sin 2\theta \quad (11)$$

На основании полученных ф-л заключаем, что для сечений, перпендикулярных плоскости XU , наибольшие касательные напряжения соответствуют площадкам, наклоненным к осям X и Y под углом 45° . Величина наибольшего касательного напряжения будет:

$$(p_t)_{\max} = \frac{p_x - p_y}{2} \quad (12).$$

Что касается нормальных напряжений p_n , то, составляя производную по θ от правой части ф-лы (10) и приравняв ее нулю, найдем, что $\max$ или $\min$ p_n наступает при $\theta = 0$ или $\theta = 90^\circ$; следовательно $(p_n)_{\max}$ равно p_x или p_y .

Легко показать, как и в предыдущем параграфе, что касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по абсолютному значению.

Мы рассмотрели напряжения по площадкам, перпендикулярным плоскости XU . Если брать площадки, параллельные оси X -ов или Y -ов, то напряжения по ним будут определяться по тем же ф-лам, что и для простого растяжения, так как растягивающее усилие, параллельное плоскости сечения, не будет в нем вызывать никаких напряжений. Все выводы были сделаны в предположении растягивающих усилий. Если одно или оба усилия сжимающие, то придется только соответственно изменить знаки p_x и p_y .

§ 15. Эллис напряжений.

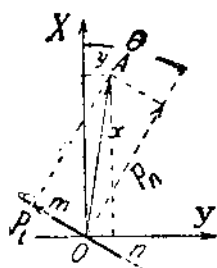
Закон изменения напряжений в зависимости от угла θ , выраженный ф-ми (10) и (11), может быть наглядно представлен графически.

Для каждой площадки mn , перпендикулярной плоскости XU и проходящей через точку O , строим отрезок OA , представляющий по величине и направлению напряжение по площадке mn . При изменении направления площадки, конечно, меняется величина и направление соответствующего напряжения, и точка A при этом описывает некоторую кривую.

Из черт. 29 видим:

$$x = p_n \cos \theta + p_t \sin \theta,$$

$$y = p_n \sin \theta - p_t \cos \theta;$$



Черт. 29.

подставляя p_n и p_t из ф-л (10) и (11), получаем:

$$x = p_x \cos \theta,$$

$$y = p_y \sin \theta.$$

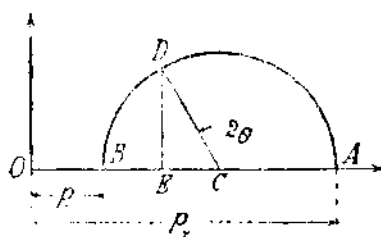
Исключая из этих выражений величину θ (для этого возведем оба выражения в квадрат и складываем их, разделив предварительно на p_x^2 и p_y^2), получаем ур-ие искомой кривой в таком виде:

$$\frac{x^2}{p_x^2} + \frac{y^2}{p_y^2} = 1;$$

следовательно, конец отрезка, представляющего по величине и направлению напряжение по площадке mn , при вращении площадки чертит эллипс, полуосями которого будут напряжения p_x и p_y . Получаемый таким образом эллипс называют „эллипсом напряжений“. В том случае, когда одно из растяжений, например, p_y обращается в нуль, мы приходим к простому растяжению по оси X -ов; эллипс обращается в отрезок прямой линии. Если $p_x = p_y$, т.-е., когда имеем равные растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям, эллипс обращается в круг, напряжения по всем площадкам одинаковы и нормальны к площадке. Тангенциальная составляющая напряжения в этом случае, как видно из ф-лы (11), обращается в нуль.

§ 16. Способ Mohr'a для изображений напряжений.

Прием Mohr'a дает возможность по наклону площадки, определяемому углом θ , найти графически величину нормальной и тангенциальной составляющей соответствующего напряжения. Сущность приема сводится к графическому построению ф-л (10) и (11). Для этого по оси абсцисс откладываем от начала координат O отрезки OA и OB , представляющие в некотором масштабе напряжения p_x и p_y . На черт. 30 принято $p_x > p_y > 0$.



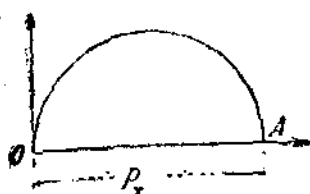
Черт. 30.

На отрезке AB , как на диаметре, описываем полуокружность. Координаты точек этой полуокружности определяют величины напряжений p_n и p_t . Возьмем площадку mn (см. черт. 29), внешняя нормаль к которой составляет с осью X угол θ . Для получения

напряжений по этой площадке способом Mohr'a, проводим на черт. 30 радиус OD , составляющий угол 2θ с положительным направлением оси абсцисс. Ордината DE даст величину p_t , абсцисса OE — величину p_n . В самом деле:

$$DE = DC \sin 2\theta = \frac{p_x - p_y}{2} \sin 2\theta;$$

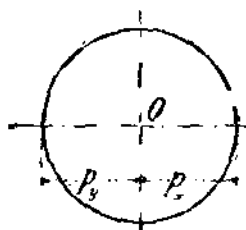
$$OE = OC - CE = \frac{p_x + p_y}{2} - \frac{p_x - p_y}{2} \cos (180^\circ - 2\theta) = p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta.$$



Черт. 31.

Полученные результаты совпадают с ф-ми (10) и (11).

Если одно из напряжений, например, p_y обращается в нуль, мы получаем случай простого растяжения по оси X -ов. Напряженное состояние по Mohr'y определяется



Черт. 32.

полукругом, касательным в точке O (черт. 31).

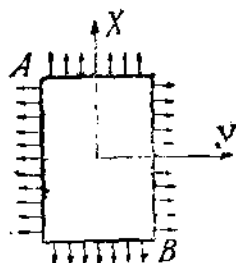
Если одно из напряжений, например, p_y будет сжимающим, его придется отложить в отрицательном направлении оси абсцисс. На черт. 32 представлен тот частный случай, когда

$$p_x = -p_y.$$

§ 17. Связь между деформацией и напряжением в случае растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Предположим, что брусок AB (черт. 33), имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, подвергается растяжению по направлению осей X и Y . Пусть p_x и p_y напряжения по сечениям, нормальным к соответствующим осям.

Если бы действовало лишь растяжение по оси X -ов, то соответствующее ему относительное удлинение было бы $\frac{p_x}{E}$, где E — модуль упругости при растяжении. Растяжение в направлении оси Y -ов, очевидно, вызовет поперечное сжатие, а, следовательно, уменьшение удлинения по оси X -ов. Это уменьшение будет равно $\sigma \frac{p_y}{E}$, где σ — коэф-



Черт. 33.

фициент поперечного сжатия (Пуассоново отношение). Окончательно относительное удлинение по оси X -ов определится ф-лой:

$$e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \frac{p_y}{E} \quad (13).$$

Совершенно таким же образом найдем удлинение по оси Y -ов:

$$e_y = \frac{p_y}{E} - \sigma \frac{p_x}{E} \quad (14).$$

В том частном случае, когда имеем два равных растяжения, т.-е., при

$$p_x = p_y = p,$$

$$e_x = e_y = \frac{p}{E} (1 - \sigma).$$

Выражая при помощи ф-л (13) и (14) напряжения через деформации, получим:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{E}{1-\sigma} (e_x + \sigma e_y) \\ p_y &= \frac{E}{1-\sigma} (e_y + \sigma e_x) \end{aligned} \quad (15).$$

С помощью полученных ф-л (15) легко решить такую задачу. Каковы должны быть напряжения p_y , чтобы поместить брусок, растягиваемому по оси X -ов, сжиматься в направлении оси Y -ов? Раз силы p_y подобраны так, что сжатия в направлении оси Y -ов нет, то, следовательно:

$$e_y = 0.$$

Подставляя это в ф-лы (15), найдем:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} e_x, \quad p_y = \sigma \frac{E}{1-\sigma^2} e_x;$$

следовательно,

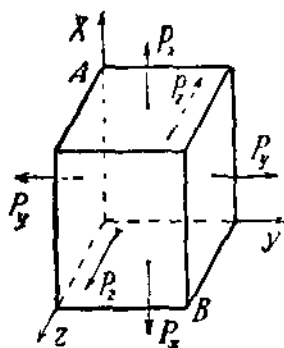
$$p_y = \sigma p_x.$$

§ 18. Распределение напряжений в случае растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Предположим, что брусок AB (черт. 34), имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, растягивается в направлении осей X , Y и Z усилиями, равномерно распределенными по граням бруска. Соответствующие растягивающие напряжения по сечениям, перпендикулярным к координатным осям, будут:

$$p_x = \frac{P_x}{F_x}, \quad p_y = \frac{P_y}{F_y}, \quad p_z = \frac{P_z}{F_z}.$$

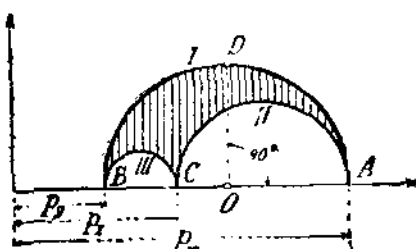
Если брать сечения бруска плоскостями, параллельными одной из координатных осей, например, оси Z -ов, то напряжения, действующие по этим плоскостям, будут обусловлены в данном случае лишь усилиями P_x и P_y . Усилие P_z , как параллельное проведенному сечению, никаких напряжений в нем не вызывает. В таком случае, для нормального и касательного напряжений по взятому сечению, остаются в силе ф-лы (10) и (11) (см. § 14). Изменение этих напряжений при вращении сечения относительно оси Z -ов представится соответствующим кругом Мора I (чертеж 35), построенным на отрезке AB .



Черт. 34.

Рассуждая подобным же образом, найдем, что напряжения для площадок, параллельных осям Y и X , представятся кругами II и III, построенными на отрезках

АС и ВС. Этим путем мы легко можем исследовать напряжения для трех серий площадок. Относительно площадок, пересекающих все три координатные оси, заметим, что напряжения по ним выражаются графически координатами точек, лежащих между тремя полукругами, построенными на черт. 35¹⁾ (площадь эта на чертеже заштрихована). Мы выполнили построение, предполагая, что $p_x > p_z > p_y > 0$. В таком случае наибольшее нормальное напряжение, соответствующее наибольшей абсциссе, равно p_x .



Черт. 35.

Наибольшее касательное напряжение измеряется наибольшей ординатой и соответствует точке D на круге I. Из построения круга I следует, что площадка, по которой действует наибольшее касательное напряжение, параллельна оси Z-ов и делит пополам угол между X и Y. Величина наибольшего касательного напряжения равна OD, или

$$(p_t)_{\max} = \frac{p_x - p_y}{2},$$

т.е., равна полуразности между наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями. В частном случае, когда

$$p_x = p_y = p_z = p,$$

точки A, B и C сливаются, и радиусы всех трех кругов обращаются в нуль. Точка, в которой слились A, B и C, определяет вполне напряженное состояние. Так как она лежит на оси абсцисс, то касательные напряжения для любой площадки в этом случае обращаются в нуль, нормальные напряжения равны абсциссе, т.е., p . Мы будем иметь равномерное всестороннее растяжение.

§ 19. Деформация в случае растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Для получения относительного удлинения по направлению одной из координатных осей, например, оси X-ов, нам придется принять во внимание не только удлинение $\frac{p_x}{E}$, обусловленное напряжениями p_x , но и относительные укорочения $\sigma \frac{p_y}{E}$ и $\sigma \frac{p_z}{E}$, обусловленные растяжениями по осям Y и Z. Общее удлинение по оси X выразится ф-лой:

$$e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \left(\frac{p_y}{E} + \frac{p_z}{E} \right).$$

¹⁾ Доказательство этого положения можно найти, например, в книге Фёрри'я Techn. Mech., Bd. V.

Подобные же ф-лы мы получим для удлинений по двум другим осям:

$$e_y = \frac{p_y}{E} - \sigma \left(\frac{p_x}{E} + \frac{p_z}{E} \right)$$

$$e_z = \frac{p_z}{E} - \sigma \left(\frac{p_x}{E} + \frac{p_y}{E} \right) \quad (16).$$

В случае равномерного всестороннего растяжения или сжатия, т.-е., при

$$p_x = p_y = p_z = \pm p,$$

$$e = e_x = e_y = e_z = \pm \frac{p}{E} (1 - 2\sigma).$$

Если v_0 — объем тела до деформации, v — после ее, то

$$v = v_0 (1 + e)^3 = v_0 (1 + 3e),$$

следовательно, относительное объемное расширение и сжатие равно:

$$3e = \pm \frac{3p}{E} (1 - 2\sigma).$$

При растяжении мы назвали модулем упругости (модулем Юнга) отношение растягивающего напряжения к величине вызываемого им относительного удлинения. Аналогично этому, модулем упругости при всестороннем равномерном растяжении и сжатии будем называть отношение напряжения p к соответствующему ему объемному расширению или сжатию:

$$\frac{3p}{E} (1 - 2\sigma).$$

Величину этого модуля обозначим через k , тогда:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

§ 20. Коэффициент безопасности.

При расчете брусков на растяжение и сжатие приходится встречаться с задачами двух родов. В одном случае требуется найти, какую наибольшую нагрузку, растягивающую или сжимающую, можно допустить для бруска заданных размеров и заданного материала. Во втором случае задается нагрузка, и задача состоит в том, чтобы подобрать прочные размеры бруска. Для решения этих двух задач нужно заранее выяснить вопрос: какое наибольшее сжимающее или растягивающее напряжение можно допустить для бруска данного материала. Из предварительных опытов на растяжение и сжатие можно найти предел пропорциональности, напряжение, соответствующее критической точке, и временное сопротивление для данного материала. По этим результатам можно установить, какое напряжение для материала можно считать допустимым, т. е., обеспечивающим прочную и долговременную службу проектируемой конструкции. Мы видели, что с переходом напряжений за предел пропорциональности, такие материалы, как железо и сталь, могут получить значительные остающиеся деформации; эти деформации возрастают с временем и могут повести к значительным изменениям формы. Это обстоятельство заставляет подбирать размеры частей так, чтобы напряжения не превосходили предела пропорциональности. Вообще, допускаемое напряжение составляет лишь некоторую часть от временного сопротивления. Если через R' обозначим временное сопротивление для известного материала, а через R соответствующее ему допускаемое напряжение, то

$$R = \frac{R'}{n},$$

где n есть так называемый „коэффициент безопасности“. Выбор надлежащего значения для n , а, следовательно, и надлежащей величины допускаемого напряжения представляет весьма важную задачу, так как прочность и экономичность сооружения зависят не только от того, насколько точно произведен расчет, но также и от более или менее удачного выбора допускаемых напряжений. Выбрав излишне высокие допускаемые напряжения, мы можем получить в результате недостаточно прочную конструкцию. При малых же допускаемых напряжениях прочность, конечно, будет обеспечена, но конструкция получится тяжелой, не экономичной.

При том разнообразии условий, в которых приходится работать частям сооружений и машин, и при колебаниях в свойствах одного и того же материала, нет возможности дать какие-либо определенные раз навсегда нормы допускаемых напряжений. В каждом отделе строительного искусства и машиностроения можно встретить свои нормы, в значительной мере выработанные практикой. Здесь мы приведем лишь несколько общих соображений, которые приходится иметь в виду при выборе надлежащего коэффициента безопасности.

При наших исследованиях мы предполагали тела однородными и изотропными, поэтому наши заключения будут тем точнее, чем данный материал ближе подходит к принятым условиям. Для железа и стали наши выводы окажутся более точными, чем, например, для дерева или камня. Следовательно, коэффициент безопасности, величина которого в значительной степени зависит от степени точности расчетов, должен быть меньшим в случае железа и стали и большим для менее совершенных строительных материалов. На практике часто берут в первом случае четверной запас прочности, т.е., $n = 4$, во втором же случае полагают $n = 8$ или $n = 10$.

На выбор величины допускаемых напряжений влияет в значительной степени точность, с которой определены внешние силы, действующие на рассчитываемую часть. Иногда эти силы могут быть оценены лишь приблизительно, и, очевидно, чем с меньшей достоверностью силы известны, тем большим приходится брать коэффициент безопасности, очень метко названный англичанами коэффициентом незнания (factor of ignorance).

Способ действия внешней силы также имеет огромное влияние на прочность бруска. В ранее приведенных опытах мы предполагали, что нагрузка постепенно возрастает от нуля до конечного своего значения. На практике часто приходится иметь дело с нагрузками, внезапно прилагаемыми к бруску, и с переменными нагрузками.

Мы ниже постараемся оценить влияние этих обстоятельств на прочность материала, теперь же предположим, что допускаемое напряжение R нами выбрано, и решим обе основные задачи, встречающиеся при расчете брусков на растяжение и сжатие. Если задана площадь поперечного сечения F , то допускаемая нагрузка P , очевидно, определится из ф-лы:

$$P = FR \quad (17).$$

Если задана нагрузка P , то надлежащую площадь поперечного сечения найдем по ф-ле:

$$F = \frac{P}{R} \quad (18).$$

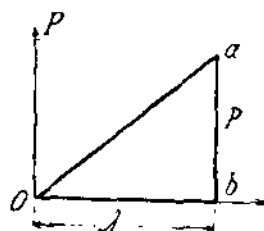
Формулы (17) и (18), выведенные для призматических брусков, при условии равномерного распределения усилий по концам бруска, применяются часто к брускам переменной сечения и к тем случаям, где усилия неравномерно распределены по концам. Дальше мы увидим, что это обстоятельство может повести к большим ошибкам при определении напряжений.

§ 21. Действие внезапно приложенной нагрузки.

При постепенном возрастании нагрузки зависимость между удлинениями λ и силой P в пределах пропорциональности представится прямой линией Oa (черт. 36). Для каждого значения λ находим из чертежа соответствующее значение P . Площадь треугольника Oab , как было показано (см § 4), представляет собой потенциальную энергию, накапливаемую в бруске при деформации. Каждому значению λ соответствует вполне определенное количество энергии V :

$$V = \frac{P\lambda}{2} = \frac{\lambda^2}{2l} EF, \quad \text{т. к.} \quad \frac{P}{F} = \frac{\lambda}{l} E.$$

Если нагрузка возрастает постепенно, то между внешними и внутренними силами всегда имеется равновесие. Работа, совершаемая нагрузкой, полностью превращается в энергию деформации. При внезапном приложении нагрузки часть работы силы тяжести в начале деформации обращается в кинетическую энергию движущегося груза. Нагрузка приобретает некоторую скорость и, благодаря этому, переходит положение, соответствующее равновесию. Брусок в первый момент получает удлинение большее, чем при постепенном возрастании нагрузки, и дальше возникают колебания. Подробнее мы рассмотрим это явление в отделе динамики, здесь же определим величину наибольшего удлинения, что возможно сделать на основании самых элементарных соображений. Наибольшее удлинение брусок получит в тот момент, когда скорость опускающегося груза, а, следовательно, и его кинетическая энергия обращается в нуль. В этот момент работа опускающегося груза целиком обратится в потенциальную энергию деформированного бруска. Если через λ обозначим величину наибольшего растяжения, то работа опустившегося груза P будет равна



Черт. 36.

$$P\lambda.$$

Значение потенциальной энергии написано выше. Приравнявая одно другому, получим:

$$P\lambda = \frac{\lambda^2 EF}{2l},$$

откуда

$$\lambda = \frac{2Pl}{EF},$$

или относительное удлинение

$$e = \frac{2p}{E}, \quad \text{где} \quad p = \frac{P}{F}. \quad (19).$$

Таким образом, при внезапном приложении нагрузки P относительное удлинение, а, следовательно, и напряжение вдвое больше тех значений этих величин, которые получаются при постепенном возрастании силы.

Для определения прочных поперечных размеров бруска, подвергающегося действию внезапно приложенной нагрузки P , нужно пользоваться ф-лой:

$$F = \frac{2P}{R}$$

Если, кроме внезапно действующей нагрузки P , имеется постоянная нагрузка P_0 , то площадь поперечного сечения бруска найдется из ф-лы:

$$F = \frac{P_0 + 2P}{R}$$

§ 22. Усталость металлов.

При проектировании инженерных сооружений и машин очень часто приходится иметь дело с переменными нагрузками. При этом усилия в частях могут испытывать значительные колебания. Так, например, при проходе поезда значительно меняются усилия в частях железнодорожного моста. При работе паровой машины усилия в поршневом штоке и шатуне меняют не только свою величину, но и знак: эти части попеременно работают то на растяжение, то на сжатие. Усилия в цепях и канатах подъемных машин также испытывают во время работы машины значительные колебания. Переменным усилиям подвергаются различного рода рессоры, оси экипажей и вагонов, валы паровых машин и т. д.

Практика показывает, что колебания в величине усилий оказывают весьма вредное влияние на прочность материала, и что части машин и сооружений, подвергающиеся действию переменных нагрузок, разрушаются иногда при напряжениях значительно меньших временного сопротивления и даже меньших предела пропорциональности для данного материала. Явление это, указывающее на значительное уменьшение прочности металлов при действии переменных нагрузок, носит название усталости металлов. Обычных испытаний на разрыв, описанных раньше (§ 9), недостаточно для суждения о том, насколько прочным окажется материал при переменных усилиях. Если железный брусок, подвергавшийся продолжительному действию переменных усилий и уже близкий к разрушению, испытать обычным образом на разрыв, то мы не откроем в нем никаких изъянов. Оказывается, что повторные нагрузки, постепенно приближая брусок к разрушению, не оказывают никакого влияния на временное сопротивление и на пластические свойства материала. Процентное удлинение и сужение поперечного сечения получаются обычной величины. Иной результат получается, если брусок довести до разрушения повторными нагрузками. Характер излома в этом случае будет такой, как для совершенно хрупкого материала.

Вредное влияние переменных усилий было уже давно замечено инженерами, и они это старались учесть, умножая при расчетах значения переменных усилий на некоторый множитель, больший единицы. Первые опыты, относящиеся

к исследованию явления усталости металлов, принадлежат W. Fairbairn'у, подвергаемому повторным нагрузкам клепаные балки. Более полное освещение получил этот вопрос, благодаря многочисленным исследованиям Wöhler'a ¹⁾).

§ 23. Опыты Wöhler'a.

Наиболее существенные результаты, к которым пришел Wöhler после десятилетней работы (1860—1870 гг.), следующие:

1) такие материалы, как железо и сталь, могут быть разрушены напряжениями меньшими временного сопротивления, найденного обычным путем, если только менять напряжения большое число раз;

2) число перемен напряжений, которое должно быть произведено, чтобы довести материал до разрушения, зависит не только от величины максимального напряжения, но также и от разности напряжений, между которыми колебания происходят;

3) чем меньше эта разность, тем большее число колебаний нужно произвести, чтобы довести материал до разрушения;

4) можно найти такое предельное значение разности между наибольшим и наименьшим напряжениями, при котором материал может прочно выдержать какое угодно число колебаний;

5) это предельное значение разности между наибольшим и наименьшим напряжениями убывает с возрастанием значения наибольшего напряжения.

Чтобы показать, как меняется число необходимых колебаний при изменении разности между наибольшим и наименьшим напряжениями, приводим таблицу для случая, где напряжения от растяжения переходили к равному ему сжатию ²⁾).

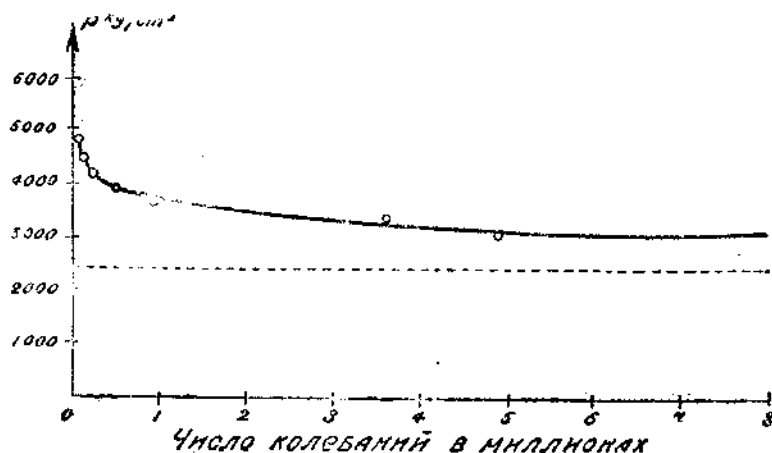
Максимум напряжен. (растяжение)	Минимум напряжен. (сжатие)	Разность напряжений	Число колебаний до разрушения
+ 2400 kg/cm ²	— 2400 kg/cm ²	4800 kg/cm ²	56 430
2250 "	2250 "	4500 "	99 000
2100 "	2100 "	4200 "	183 140
1940 "	1940 "	3880 "	479 490
1810 "	1810 "	3620 "	909 840
1650 "	1650 "	3300 "	3 632 588
1510 "	1510 "	3020 "	4 917 992
1350 "	1350 "	2700 "	19 186 791
1200 "	1200 "	2400 "	132 250 000 (не сломался)

1) Wöhler. Über die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl, Zeitschr. f. Bauw., 1870 г. См. также В. Л. Кирпичев, В. о-ва технологов 1914 г.

2) Результаты эти получены из опытов на изгиб стержней круглого сечения, непосредственное испытание на растяжение и сжатие были произведены О. Reu-polds'ом (см. § 24).

Опыты эти произведены над брусками из сварочного железа, изготовленного фирмой Phoenix Co¹⁾. Временное сопротивление этого железа, при обычном испытании на разрыв оказалось равным 3600 kg/cm^2 , удлинение, примерно, 20%.

Для большей ясности результаты этих опытов представлены графически (черт. 37). По оси абсцисс отложено число перемен напряжения в миллионах,



Черт. 37.

по ординатам — соответствующие значения разности напряжения в kg/cm^2 . Оказывается, что точки, полученные опытом и отмеченные на чертеже кружками, приблизительно лежат на одной кривой, имеющей своей асимптотой прямую, параллельную оси абсцисс и соответствующую предельной разности напряжений, т. е., 2400 kg/cm^2 .

Таким образом, для исследуемого материала, при условии колебания усилий между положительным и равным ему отрицательным значениями, нужно считать, что напряжение в 1200 kg/cm^2 является предельным. Величина эта меньше обычного предела пропорциональности для сварочного железа и почти в три раза меньше временного сопротивления разрыву. Если усилие не меняет знака, и напряжения колеблются между нулем и некоторым положительным значением (растяжение), то для доведения бруска до разрушения требуются большие напряжения.

Полученные опытные результаты для прежнего материала в этом случае указаны в таблице, помещенной вверху на стр. 67.

Предельным напряжением в данном случае придется принять величину 2400 kg/cm^2 . Если низший предел больше нуля, как это имеет место в двух последних опытах таблицы, то высший предел соответственно должен быть повышен. Разность между наибольшим и наименьшим напряжениями при этом уменьшается.

Выпишем те предельные значения напряжений, при которых брусок может выдерживать сколько угодно большое число колебаний.

¹⁾ Числа взяты из книги Unwin, Testing of Materials of construction.

Максимальные напряжения	Минимальные напряжения	Разность напряжений	Число колебаний до разрушения
+ 3600 kg/cm ²	0	3600 kg/cm ²	800
3300 "	0	3300 "	106 910
3000 "	0	3000 "	340 853
2700 "	0	2700 "	409 481
2400 "	0	2400 "	10 141 645
3300 "	+ 1500 kg/cm ²	1800 "	2 373 424
3300 "	1800 "	1500 "	4 000 000 (не сломался)

Род нагрузки	Предельное наибольшее напряжение	Предельная разность напряжений
От растяжения к равному ему сжатию	1200	2400
От растяжения до нуля	2400	2400
Временное сопротивление	3600	0

Таким образом, при переходе от растяжения к равному ему сжатию, предельное напряжение составляет треть временного сопротивления. При колебаниях от нуля и до наибольшего значения предельное напряжение составляет две трети временного сопротивления.

Если взять более жесткий материал, то там получаются несколько иные соотношения. Приводим результаты Wöhler'a для литой стали Круппа. Временное сопротивление при обычном испытании на разрыв 7700 kg/cm², удлинение 12%.

Род нагрузки	Предельное наибольшее напряжение	Предельная разность напряжений
От растяжения к равному ему сжатию	2250 kg/cm ²	4500 kg/cm ²
От растяжения до нуля	3750 "	3750 "
Временное сопротивление	7700 "	0 "

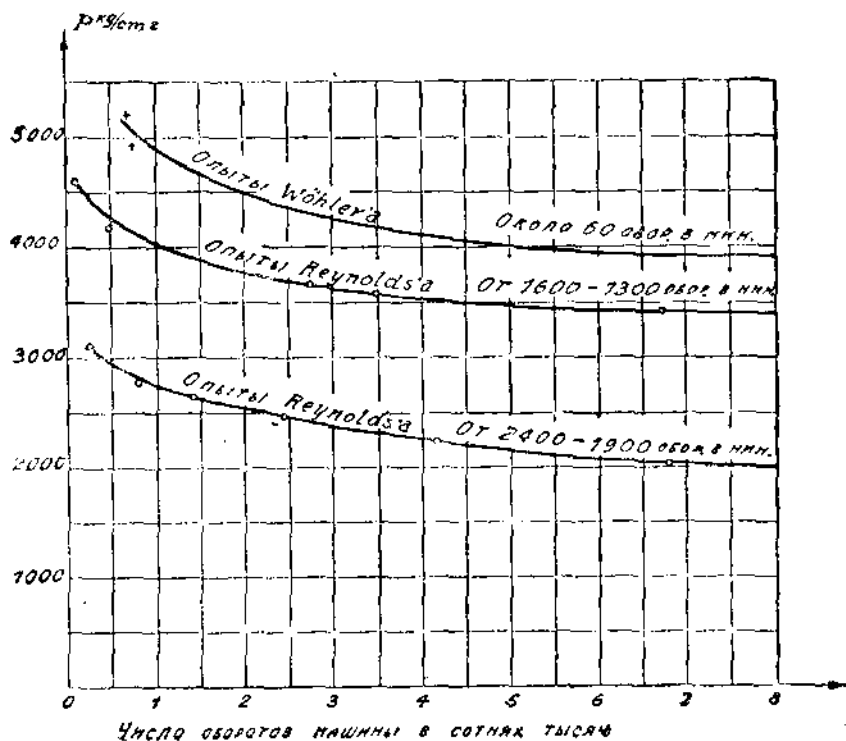
Предельное напряжение при изменении усилия от растяжения к равному ему сжатию составляет в данном случае 29% от временного сопротивления материала.

При изменении усилий от нуля и до наибольшего значения предельное напряжение составляет, примерно, 49% от временного сопротивления.

В 1874 году опыты Wöhler'a были повторены Spangenberg'ом, получившим, примерно, такие же результаты. Такими же машинами и приемами пользовались также В. Baker и Bauschinger. Первоначальные опыты Bauschinger'a ¹⁾ подтвердили результаты Wöhler'a. Дальнейшие же его исследования, опубликованные Föppl'ем ²⁾, дали для того случая, когда напряжение от растяжения переходит к равному ему сжатию, значительно большие величины предельных напряжений, чем то получено Wöhler'ом.

§ 24. Опыты O. Reynolds'a и I. H. Smith'a ³⁾.

В этих опытах бруски подвергались попеременно то растяжению, то сжатию силами инерции движущегося вверх и вниз груза. При этом соотношение между растяжением и сжатием, зависящее от скорости хода машины, колебалось в пределах от 1,12 до 1,18.



Черт. 38.

Важнейшим результатом этих опытов является выяснение влияния частоты колебаний усилия на прочность материала. Wöhler и его последователи производили испытание

¹⁾ Bauschinger, Mitteilungen aus dem Mech.-tech. Laboratorium in München, Heft XIII.

²⁾ Föppl, Mitteilungen aus dem Mech.-tech. Laboratorium in München, Heft 25.

³⁾ Osborne Reynolds and I. H. Smith, On a Throw-Testing Machine for Reversals of Mean Stress, Phil. Trans. Roy. Soc., 1902 г.

на усталость при сравнительно небольшой частоте: машины делали от 60 до 80 оборотов в минуту, столько же перемен усилия получили и испытуемые бруски. В машине О. Reynolds'a число оборотов колебалось от 1300 до 2400, при чем оказалось, что такая большая частота колебаний весьма вредно отзывается на прочности материала. Для сравнения с опытами Wöhler'a на черт. 38 приведены результаты испытаний, относящиеся к литому железу с временным сопротивлением 4000 kg/cm^2 и удлинением 29% ¹⁾. По оси абсцисс отложены числа колебаний, необходимые для разрушения, по ординатам — разность напряжений. Оказывается, что при больших скоростях предельная разность напряжений значительно меньше той, что получалась в опытах Wöhler'a ²⁾. Особенно вредно влияет большая частота колебаний на жесткие материалы. Для сравнения приводим результаты опытов, произведенных над литым железом с временным сопротивлением 3800 kg/cm^2 , удлинением 29% и критической точкой 2700 kg/cm^2 и над литой сталью с временным сопротивлением 9100 kg/cm^2 , удлинением $3,8\%$ и критической точкой 6200 kg/cm^2 .

ЛИТОЕ ЖЕЛЕЗО.

Разность напряжений, необх. для излома после 1 миллиона колебаний	Число колебаний в минуту	Отнош. разности напряж. к напряжен., соответств. критической точке
3800 kg/cm^2 (Wöhler)	60—80	—
3300 "	1337	1,22
3000 "	1516	1,12
2400 "	1744	0,89
1940 "	1917	0,72

ЛИТАЯ СТАЛЬ.

Разность напряжений, необх. для излома после 1 миллиона колебаний	Число колебаний в минуту	Отнош. разности напряж. к напряжен., соответств. критической точке
4270 kg/cm^2 (Wöhler)	60—80	—
3150 "	1320	0,50
2880 "	1660	0,45
2630 "	1820	0,42
2060 "	1990	0,33

В противоположность опытам Wöhler'a оказывается, что при большой частоте колебаний жесткий материал с весьма высоким временным сопротивлением не прочнее литого железа, имеющего в два с лишним раза меньшее временное сопротивление.

¹⁾ А. Morley, Strength of materials, 1908 г., стр. 75.

²⁾ Это заключение не подтвердилось дальнейшими опытами. См. работу The Endurance of Metals, les Messrs Eden, Rose and Cunningham, Institution of Mechanical Engineers, October 20, 1911 г.

§ 25. Опыты Stanton'a и Bairstow'a ¹⁾.

Испытанию подвергались сорта железа и стали, обычно встречающиеся на практике. Машина, служившая для опытов, была построена на таком же принципе, как и машина O. Reynolds'a, и делала нормально 800 оборотов в минуту. Оказалось, что при такой частоте результаты ближе подходят к опытам Wöhler'a, чем к опытам O. Reynolds'a. На основании этого можно заключить, что изменение частоты от 60 до 800 в минуту не оказывает существенного влияния на предельную разность напряжений. Благодаря особым приспособлениям, при опытах возможно было менять соотношение между наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим усилиями в пределах от 1,40 до 0,72. Оказалось, что при этих изменениях предельная разность напряжений остается постоянной. Соотношения между предельной разностью напряжений и пределом пропорциональности приведены для нескольких материалов в нижеследующей таблице.

Материал	Предел пропорцион.	Критич. точка	Временное сопротивление	Процентное удлинение	Отношение предельной разн. напр. к пределу пропорцион.
Бессем. сталь № 3	4340 kg/cm ²	4560 kg/cm ²	7470 kg/cm ²	12,9%	1,13
„ „ № 2	3930 „	4400 „	6860 „	17,0%	1,21
„ „ № 1	3360 „	3730 „	4480 „	22,8%	1,25
Литое железо № 2	2250 kg/cm ²	2480 kg/cm ²	4440 kg/cm ²	24,6%	1,80
„ „ № 1	1670 „	2100 „	3430 „	28,0%	1,76
Свар. железо № 2	2100 kg/cm ²	2300 kg/cm ²	4020 kg/cm ²	23,8%	1,44
„ „ № 1	2240 „	2580 „	3730 „	27,0%	1,51

При условии перехода от растяжения к равному ему сжатию получим такие соотношения между предельным наибольшим напряжением и временным сопротивлением материалов (см. табл. на стр. 71).

В самое последнее время ряд весьма интересных опытов с действием повторных нагрузок при большой частоте колебаний произведен В. Норкинсоном ²⁾. При помощи электромагнита ему удалось получить до 7000 колебаний в минуту, при чем оказалось, что предельная разность между наибольшим растягивающим напряжением и равным ему сжимающим напряжением при такой частоте колебаний значительно большая, чем при частоте, соответствующей 1000—2000 колебаний в минуту. Результат этот В. Норкинсон связывает с тем обстоятельством, что при весьма быстром приложении нагрузки предел упругости материала выше, чем в случае статического действия силы ³⁾.

¹⁾ T. Stanton and L. Bairstow, On the Resistance of Iron and Steel to Reversals of Direct Stress, Minutes of Proc. Civil. Engin., 1906 г.

²⁾ См. Proceedings of the Royal Society, A., Vol. 86, 1912 г.

³⁾ Hopkinson, Roy. Soc. Proc., Vol. 74. стр. 498.

М а т е р и а л	Наибольшее напряжение	Отношение наибольш. напряжен. к времен. сопротивлению
Бессемеровая сталь № 3	2450 kg/cm ²	0,33
„ „ № 2	2370 „	0,35
Литое железо № 2	2025 kg/cm ²	0,46
„ „ № 1	1470 „	0,43
Сварочное железо № 2	1510 kg/cm ²	0,37
„ „ № 1	1690 „	0,45

§ 26. Допускаемые напряжения при переменных усилиях.

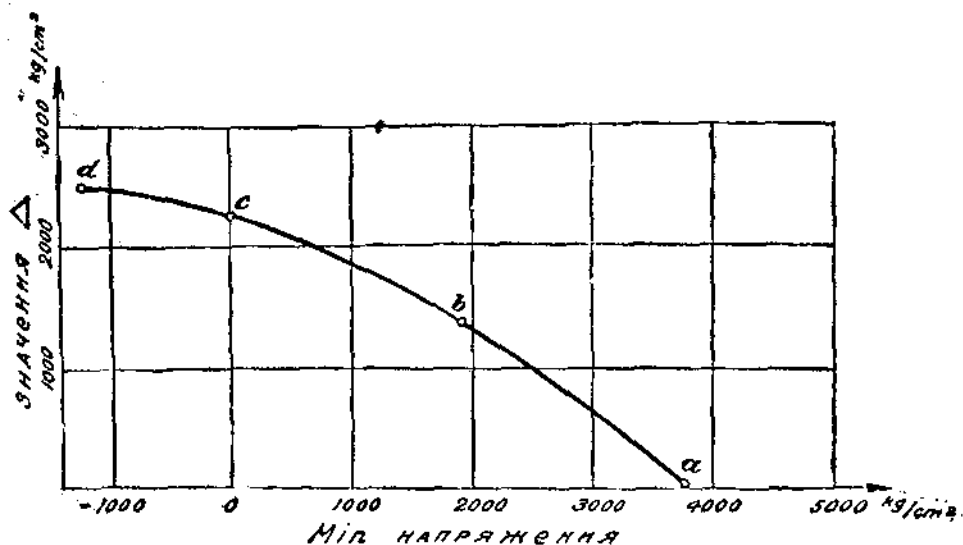
Как видно из перечисленных опытов, при исследовании явления усталости металлов останавливались, главным образом, на двух следующих соотношениях между наибольшим и наименьшим напряжениями. В первом случае напряжение изменялось от нуля до некоторого положительного значения (растяжение), во втором случае менялся знак напряжения, величина же растягивающего напряжения равнялась величине сжимающего.

На практике приходится иметь дело с самыми разнообразными соотношениями между наибольшим и наименьшим напряжениями и, чтобы при расчетах воспользоваться опытными данными, приходится сделать некоторую гипотезу относительно изменения предельной разности между крайними напряжениями в зависимости от величины одного из этих напряжений. Обозначим через $p_{\max}$ и $p_{\min}$ предельные величины наибольшего и наименьшего напряжения и через Δ — разность между ними. Задача заключается в том, чтобы, на основании опытных данных, установить по возможности простую зависимость между этими тремя величинами. Зависимость эту удобнее всего представить графически. Будем по оси абсцисс откладывать величины $p_{\min}$, а по ординатам — соответствующие значения Δ (черт. 39). Соединяя полученные таким путем точки по возможности плавной кривой, найдем искомую зависимость между $p_{\min}$ и Δ .

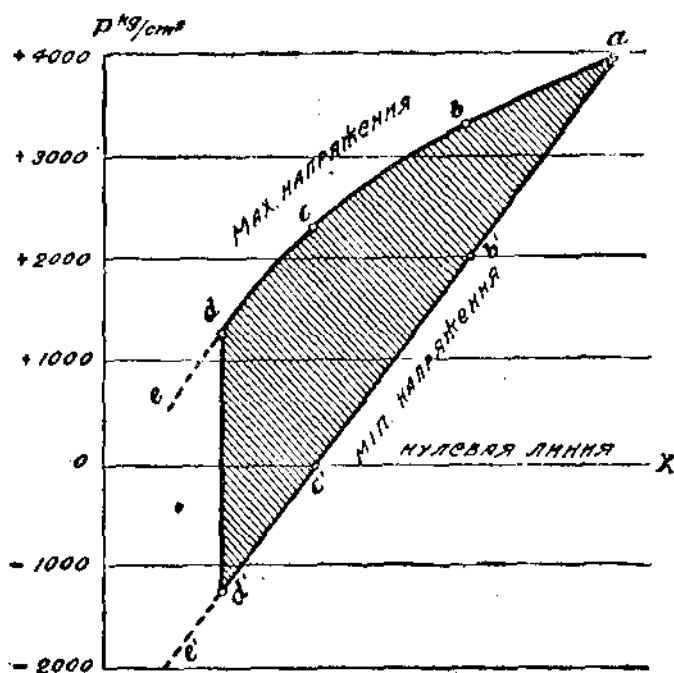
На основании опытов Wohler'a, Gerber нашел, что зависимость эта может быть представлена параболической кривой:

$$p_{\max} = \frac{\Delta}{2} + \sqrt{(R' - n\Delta)R'},$$

где R' временное сопротивление и n постоянный коэффициент, зависящий от рода материала. Если известно R' из опыта на разрыв и найдено предельное значение Δ для какого-либо соотношения между $p_{\max}$ и $p_{\min}$, то величина n может быть вычислена и, следовательно, построена парабола.



Черт. 39



Черт. 40.

Чтобы нагляднее представить ту область, в которой должны мы выбирать наибольшее и наименьшее напряжения при условии, что брусок подвергается сколь угодно большому

числу колебаний напряжений, поступают так ¹⁾. Берут наклонную прямую $e'a$ (черт. 40) и ординаты ее считают равными $p_{\min}$. От каждой точки этой прямой по вертикальному направлению откладывают предельные значения Δ , тогда получится некоторая кривая $abcd$. Точки a, b, c и d взяты из опытов Wöhler'a.

Метод определения способности материала выдерживать повторные нагрузки по опытам небольшой продолжительности дан Strohmeуег'ом, см. Engineering, 1914 г., стр. 421.

Имея такую кривую для какого-либо материала, можно в каждом частном случае по величине наименьшего напряжения сказать, какое наибольшее напряжение может быть допущено при условии сколь угодно большого числа колебаний нагрузки. Брусok будет прочен, если точка, определяющая колебание напряжений, лежит внутри заштрихованной площади $add'a$.

Так как вид кривых $abcd$ вообще мало исследован, то на практике часто пользуются еще более простым соотношением между $p_{\max}$, $p_{\min}$ и временным сопротивлением R' , именно, полагают:

$$p_{\max} = \frac{2}{3} R' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \right) \quad (20).$$

В том случае, когда $p_{\min} = p_{\max}$, т.-е., когда нагрузка не подвергается колебаниям, предельным напряжением явится временное сопротивление материала, и из ф-лы (20) мы найдем:

$$p_{\max} = R'.$$

Когда $p_{\min} = 0$, т.-е., когда напряжения меняются между нулем и некоторым положительным значением, ф-ла (20) дает:

$$p_{\max} = \frac{2}{3} R',$$

и, наконец, в том случае, когда от растяжения переходим к равному ему сжатию, будем иметь $p_{\max} = -p_{\min}$ и, на основании ф-лы (20),

$$p_{\max} = \frac{1}{3} R'.$$

Полученные соотношения совпадают с тем, что нашел Wöhler опытным путем. Для трех способов действия нагрузки предельные напряжения относятся между собой как 3:2:1. Очевидно, такое же соотношение должно быть и между допускаемыми напряжениями. Если R —допускаемое напряжение при статической нагрузке, то при изменении усилия от нуля до некоторого положительного значения приходится брать допускаемое напряжение равным $\frac{2}{3} R$. При изменении напряжения от растяжения до равного ему сжатия допускаемое напряжение должно быть равным $\frac{1}{3} R$. На основании этих соображений составлена нижеследующая таблица допускаемых напряжений, применяемая при расчетах машинных деталей ²⁾.

¹⁾ A. Morley, Strength of materials, 1908 г., стр. 79.

²⁾ C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 1908 г.

М а т е р и а л	Допускаемые напряжения		
	Постоянное усилие	Колебания от 0 до —	Колебания от — до +
Сварочное железо	900 kg/cm ²	600 kg/cm ²	300 kg/cm ²
Литое железо	900—1200 "	600 — 800 "	300—400 "
Литая сталь	1200—1500 "	800—1000 "	400—500 "
Чугун	300 "	200 "	100 "
Стальное литье	600— 900 "	400— 600 "	200—300 "
Рессорная сталь	7500 "	5000 "	

Приведенные нормы допускаемых напряжений представляют собою некоторые средние значения, от которых в специальных случаях могут быть сделаны значительные отступления. Более подробные данные относительно допускаемых напряжений можно найти в специальных курсах по различным отделам машиностроения ¹⁾.

При проектировании инженерных сооружений обыкновенно берут более высокие нормы допускаемых напряжений. Например, по новым немецким данным, допускаются напряжения в железе в стропильных фермах до 1600 kg/cm², в мостах — до 1400 kg/cm². Такие высокие нормы объясняются тем, что в инженерных сооружениях усилия в частях подвержены меньшим колебаниям. Кроме того, сравнительная простота сооружений дает возможность применять расчетные ф-лы с большей точностью.

§ 27. Причины явления усталости металлов.

Несмотря на многочисленные опыты, явление усталости металлов и причины преждевременного разрушения брусков, подвергающихся переменным усилиям, являются не вполне исследованными. Самую существенную роль играет здесь, конечно, то обстоятельство, что даже самые совершенные строительные материалы, как железо и сталь, не являются идеально упругими телами и при устранении нагрузки не возвращаются в первоначальное свое состояние. Отклонения эти от совершенной упругости, мало заметные при статическом испытании на растяжение, постепенно накапливаются и проявляют себя при большом числе колебаний нагрузки.

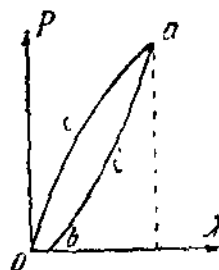
То обстоятельство, что при постоянных изменениях не только величины, но и знака напряжений, разрушения, в конце концов, происходят при напряжениях значительно меньших предела пропорциональности, объясняют тем, что

¹⁾ Много данных относительно допускаемых напряжений для материалов, употребляемых в машиностроении, можно найти в книге P. Stephan, Die Festigkeitseigenschaften der Konstruktionsmaterialien des Maschinenbaues, Berlin, 1911 г.

в материалах, подвергающихся обработке, предел пропорциональности несколько повышен. Чтобы постоянные колебания усилий между некоторым положительным и равным ему отрицательным значениями не привели брусок к разрушению, соответствующие напряжения не должны превосходить „естественного предела упругости“. Под естественным пределом упругости подразумевают тот предел пропорциональности, который устанавливается после многократного перехода от растяжения к сжатию бруска ¹⁾.

В весьма близкой связи с усталостью металлов стоит явление гистерезиса. Точные исследования показывают, что даже при небольших деформациях, не выходящих за пределы пропорциональности, происходят некоторые процессы необратимого характера, как будто каждое действие сил оставляет свой след на качестве бруска, и его свойства в известный момент являются функцией от всех тех состояний, в которых брусок находился раньше. К таким необратимым процессам принадлежат изменения магнитных и термо-электрических свойств ²⁾, а также тепловые явления. При деформации меняется температура тела, и начинается обмен тепла между испытуемым бруском и окружающей средой. Такой процесс, обыкновенно, бывает необратимым и сопровождается рассеянием тепловой энергии. Кроме перечисленных причин, необратимость обусловлена несовершенной упругостью материала и теми первоначальными напряжениями, которые в материале явились результатом предварительной обработки.

Для определения энергии, теряющейся при деформации, удобнее всего воспользоваться диаграммой (черт. 41).



Черт. 41.

Оказывается, что при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности, замечаются небольшие отклонения от линейной зависимости между напряжениями и соответствующими удлинениями, и линия диаграммы Oac получается не прямой. При разгрузке получаем кривую $ac'b$. Принимая во внимание, что площадь, заключенная между кривой диаграммы, крайней ординатой и осью абсцисс, является меркой работы, затраченной на деформацию, найдем, что площадь $Oac'b$ между кривой нагрузки и кривой разгрузки дает нам энергию, затраченную в необратимой форме. Это явление поглощения энергии в необратимой форме называется гистерезисом. Чем площадь гистерезиса меньше, тем материал по своим свойствам ближе к идеально упругим телам, тем меньшее влияние на него должны иметь повторные нагрузки.

На этом основании были сделаны попытки судить о способности мате-

¹⁾ Bauschinger, Mitteilungen aus dem Mech.-tech. Laboratorium in München, Heft XIII.

T. Stanton and L. Bairstow, On the Resistance of Iron and Steel to Reversals of Direct Stress, Minutes of Proc. Civil engin., 1906 r.

²⁾ J. A. Ewing, The strength of materials, стр. 55.

риала выдерживать повторные нагрузки по диаграмме, соответствующей нагрузке и разгрузке бруса ¹⁾.

Еще более ясное представление об энергии, теряемой при деформациях, мы получим, наблюдая явление колебания. Если вызвать колебания бруса, то по истечении некоторого промежутка времени размахи (амплитуда) колебаний уменьшатся, колебания постепенно „затухают“. Это затухание колебаний не может быть объяснено только внешними сопротивлениями, оно замечается при самой идеальной постановке опытов. Наблюдения над затуханием колебаний может пролить некоторый свет и на явление усталости металлов ²⁾. Лорд Кельвин заметил, что если заставить стержень колебаться в течение значительного промежутка времени, например, несколько дней, то затухание колебаний идет значительно быстрее, — как будто возрастает внутреннее трение, обуславливающее потерю энергии в необратимой форме. То же самое явление, т.е. потерю энергии на внутреннюю работу в материале бруса, мы будем иметь и при повторных нагрузках.

Чем эта работа больше, чем энергичнее затухания колебаний, тем скорее она приведет материал к разрушению, тем резче проявляются признаки усталости.

Выяснению явления усталости металлов много помогло применение микроскопического исследования. Оказалось, что во многих случаях неожиданные поломки частей, подвергавшихся действию переменных усилий, могут быть объяснены наличием в материале микроскопических трещин ³⁾. Эти трещины обуславливают неравномерное распределение напряжений по плоскости поперечного сечения. Они постепенно развиваются и, в конце концов, приводят брусок к разрушению.

Процесс постепенного разрушения кристаллов железа под действием переменных усилий был подробно исследован проф. J. A. Ewing'ом ⁴⁾. Опыты производились над шведским железом временным сопротивлением 3700 kg/cm² и удлинением 27%. Для осуществления колебаний напряжения от растяжения к равному ему сжатию был применен такой же прием, как и в старых опытах

¹⁾ Фроловский, Гистерезис.

B. Hopkinson, The elastic Hysteresis of steel, Engineering, 1912 г., стр. 827.

²⁾ H. Le Chatelier, Sur l'essai des métaux par amortissement des mouvements vibratoires, Revue d. Métallurgie, 1909 г.

M. A. Güller, Intervention de l'amortissement dans l'essais des fers, Revue d. Métallurgie, 1909 г.

³⁾ T. Andrews, Microscopic internal flaws inducing fracture in Steel, Engineering 1896 г., стр. 35.

⁴⁾ J. A. Ewing and I. C. W. Hymfrey, On the fracture of metals under repeated alternations of stress, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1903 г.

См. также В. Л. Кирпичев, Об усталости металлов, в связи с их кристаллическим строением, Вестник о-ва технологов, 1914 г. и

M. A. Воропаев, Об усталости чугуна, Изв. Киев. политех. инст., 1914 г.

Stromeyer, Engineering, 1914 г., стр. 421.

Wöhler'a. При помощи микроскопа наблюдались изменения, происходящие в отдельных кристаллах при колебании напряжений. Уже при сравнительно небольших напряжениях $\pm 1100 \text{ kg/cm}^2$ можно было заметить, после достаточного числа колебаний, что некоторые кристаллы, в наиболее напряженных частях бруска, покрывались черточками. Микроскопическое исследование показало, что эти черточки суть не что иное, как сдвиги, происходящие в отдельных кристаллах по плоскостям спайности. Продолжая подвергать наблюдаемый элемент действию переменных усилий, можно видеть, как некоторые из этих сдвигов постепенно обращаются в трещинки. При дальнейших повторениях нагрузки и разгрузки работа, затрачиваемая в необратимой форме, идет, главным образом, на разрушение материала у образовавшейся трещинки. Об этом можно судить по продуктам разрушения — мельчайшей пыли, появляющейся у краев трещины. То обстоятельство, что вся работа разрушения сосредоточивается в определенном сечении, объясняет, почему не меняются пластические свойства остальной массы бруска, и почему характер излома, обусловленный развитием первоначальной трещинки, такой, как у хрупких материалов.

Вопрос об усталости металлов представляет большой практический интерес, так как в случае проектирования машинных частей, подвергающихся действию переменных усилий, допускаемые напряжения приходится назначать не по величине временного сопротивления при разрыве, а по величине предельного напряжения при переменных нагрузках. Большое количество опытного материала накоплено главным образом благодаря трудам английских и американских лабораторий. Наиболее крупными исследованиями в этом направлении являются:

1. Gough, Some experiments on the Fatigue of Materials, Aeronautical Res. Comm. Rep. № 743, 1922.

2. Moore and Jasper, An Investigation of the Fatigue of Metals, Univ. of Illinois, Bull. 136, 142.

3. Влияние переменных напряжений весьма большой частоты (500 циклов в одну секунду) исследовано проф. Jenkin, Report of Brit. Assoc. for the advancement of Science (Toronto), 1924.

4. Исследование усталости металлов при одновременном действии изгиба и кручения было сделано проф. Lea, Engineering, 1926.

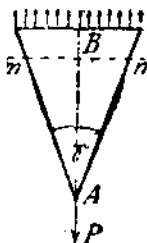
5. Много внимания было уделено за последнее время исследованию усталости металлов в связи с внутренним трением, которое может быть измерено по затуханию колебаний испытуемых брусков. Результаты, полученные этим путем, собраны в интересной книжке: Ernst Lehr, Die Abkürzungsverfahren zur Ermittlung der Schwingungsfestigkeit von Materialien, Stuttgart (Dissertation), 1925.

§ 28. Растяжение и сжатие стержней переменного сечения.

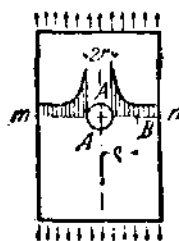
Расчетные ф-лы (17) и (18), выведенные для случая растяжения и сжатия призматических брусков, применяют часто при расчете брусков переменного

сечения. Получаемые при этом результаты будут удовлетворительны, если нет резких изменений в величине поперечных сечений. В противном случае, в местах перехода от одного сечения к другому, необходимо сделать дополнительные исследования относительно распределения напряжений. Задача эта весьма сложная и не допускает элементарного решения. Мы ограничимся тем, что приведем лишь окончательные результаты для нескольких простейших случаев. Результаты эти позволяют нам сделать ряд общих заключений, имеющих большое практическое значение.

В качестве первого примера рассмотрим растяжение бруска AB (черт. 42), ширина которого меняется по линейному закону, а толщина сохраняет постоянное значение. Если взять какое-либо поперечное сечение mn , то растягивающие напряжения по этому сечению распределяются далеко не равномерно, и степень этой неравномерности будет зависеть от величины угла γ . Некоторое представление о законе распределения напряжений можно получить, наблюдая деформацию. Для этого нужно изготовить брусок AB из резины и на боковых поверхностях нанести систему линий, параллельных mn . При растяжении силой P линии эти искривятся, и расстояния между ними увеличатся различно в различных точках. Наибольшие деформации, соответствующие наибольшим растягивающим напряжениям, будут по оси бруска, наименьшие — у краев. Точные исследования показывают, что при $\gamma = 10^\circ$ разность между наибольшим напряжением и его средним значением, получаемым путем деления растягивающей силы P на площадь соответствующего поперечного сечения, не превосходит 1,3%. Следовательно, с достаточной точностью можно пользоваться ф-лами, выведенными для призматических брусков. При $\gamma = 30^\circ$ разность между наибольшим напряжением и его средним значением 13%. Дальнейшее увеличение γ влечет за собой еще большую неравномерность в распределении напряжений.



Черт. 42.



Черт. 43.

В качестве второго примера рассмотрим растяжение полосы, ослабленной посредине круглым отверстием (черт. 43). Напряжения по плоскости поперечного сечения mn , проходящего через центр отверстия, распределяются неравномерно.

Если диаметр $2r$ отверстия мал по сравнению с шириной полосы, то, обозначая через p среднее значение растягивающего напряжения, можем вычислить напряжение p' в какой-либо точке B горизонтальной плоскости mn в расстоянии ρ от центра отверстия по такой ф-ле ¹⁾:

$$p' = \frac{p}{2} \left[2 + \frac{r^2}{\rho^2} + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right].$$

¹⁾ Kirsch, Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing., 1898 г.

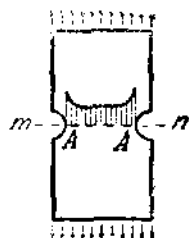
С. Тимошенко, О влиянии круглых отверстий на распределение напряжений в пластинках, Изв. Киев. пол. инст., 1907 г.

На чертеже закон распределения напряжений представлен заштрихованной площадью; у краев отверстия, где $r = \rho$, будем иметь:

$$\rho' = 3\rho.$$

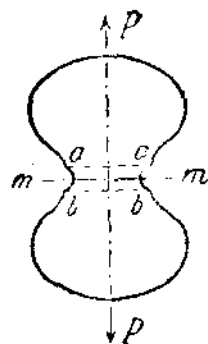
Наибольшие напряжения втрое больше того напряжения, которое получается по обычным ф-лам, выведенным для растяжения призматических брусков. Если, вместо круглого, возьмем эллиптическое отверстие и большую ось направим перпендикулярно растягивающей силе, то перенапряжение у краев отверстия будет еще больше. Степень неравномерности в распределении напряжений возрастает с возрастанием отношения между большой и малой осями эллипса ¹⁾. На основании этого заключаем, что узкая щель, перпендикулярная к направлению силы, вызывает громадные перенапряжения в материале, если же щель совпадает с направлением силы, то она не влияет на распределение напряжений.

Предположим теперь, что ослабление полосы произведено полукруглыми вырезами по краям (черт. 44). Приблизительное распределение напряжений по сечению mn представлено заштрихованной площадью. Если радиус выкружек мал по сравнению с шириной полосы, то напряжения в точках AA втрое больше среднего значения напряжения ²⁾. Изменяя форму вырезов, придавая им вид, вытянутый в направлении, перпенди-



Черт. 44.

кулярном действию силы, можно получить еще большие перенапряжения материала.



Черт. 45.

С резкими изменениями поперечного сечения очень часто приходится иметь дело на практике. На пример, при испытании на разрыв цемента берут бруски в форме восьмерки. Для получения временного сопротивления разрыву делят разрушающий груз на площадь суженного поперечного сечения mn (черт. 45). Конечно, получаемое таким образом временное сопротивление значительно меньше истинного значения этой величины. Благодаря резкому изменению поперечного сечения, напряжения по mn распределяются далеко неравномерно, и разрушение начнется в перенапряженных местах, у краев суженного сечения.

Чтобы судить, насколько неравномерно распределение напряжений по mn , можно произвести опыт с резиновой моделью. Две параллельные линии aa и bb , проведенные на боковой поверхности бруска, при растяжении искривятся в прямо противоположные стороны. Деформации у краев бруска окажутся значительно больше, чем деформации

¹⁾ С. Е. Inglis, Engineering, 1913 г., стр. 415.

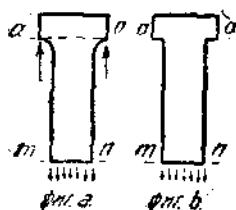
Г. Колосов, Плоская задача теории упругости, 1909 г.

²⁾ A. Leon. Über die Spannungsverteilung in der Umgebung einer halbkreisförmigen Kerbe, Mittell. Mech.-techn. Laborat., Wien, 1908 г.

по оси. Förppl¹⁾, производивший эти опыты, нашел следующие соотношения. Если через 100 обозначить деформации в расстоянии 0,5 мм. от краев сечения, то деформации в других точках представятся таблицей:

ширина сечения 24 мм,				
расстояние от оси бруска =	0	4	8	11,5 мм,
растяжение =	24	34	53	100.

Интересные опыты с растяжением образца, представленного на черт. 45, произвел Coker²⁾. Он изготовил образец из стекла и исследовал распределение напряжений в нем при помощи поляризованного света. Оказалось, что наибольшие напряжения у краев суженного сечения составляют, примерно, 1,75 от среднего значения напряжения.



Черт. 46.

С тем же явлением перенапряжения мы встречаемся при растяжении обыкновенного болта (черт. 46, фиг. а). В сечении *mm*, удаленном от места приложения силы, можно предполагать равномерное распределение напряжений, для сечения же *aa* у головки болта такое предположение будет весьма далеко от истины. Наибольшие напряжения получатся у краев сечения, наименьшие — в его центре. Степень неравномерности в распределении напряжений будет зависеть от кривизны поверхностей, сопрягающих головку телом болта. Чем кривизна больше, тем большие будут и перенапряжения. Когда совсем нет сопрягающей кривой (фиг. б), то теоретическое решение дает бесконечные напряжения по краям сечения³⁾. Как общее заключение, можем высказать такое положение: изменения в величине поперечного сечения всегда вызывают неравномерное распределение напряжений; степень неравномерности тем большая, чем резче изменение сечений.

Подробнее о местных перенапряжениях см. в конце книги дополнение „О концентрации напряжений у отверстий и выкружек“.

§ 29. Разрыв брусков переменного сечения.

Заключения относительно влияния резких изменений сечения на распределение напряжений справедливы лишь до тех пор, пока материал следует закону Гука. Как только в каком-либо месте напряжение переходит за предел пропорциональности, закон распределения напряжений меняется. Вообще, с появлением остающихся деформаций напряжения начинают распределяться более равномерно, и, в конце концов, влияние резких изменений сечения на величину разрушающего груза будет различно, в зависимости от способности материала получать пластические деформации. В случае материалов, дающих большие

¹⁾ Förppl, Festigkeitslehre, 1905 г., стр. 9.

²⁾ Coker, Engineering, 1902 г.

³⁾ Filon, Phil. Trans. Roy. Soc., London, vol. 198.

удлинения, например, для железа, меди, мягкой стали и т. д., резкие уменьшения сечения повышают временное сопротивление (под временным сопротивлением мы подразумеваем здесь частное от деления растягивающей силы на площадь наименьшего поперечного сечения), что легко объяснить, если иметь в виду два обстоятельства, различно влияющие на величину временного сопротивления:

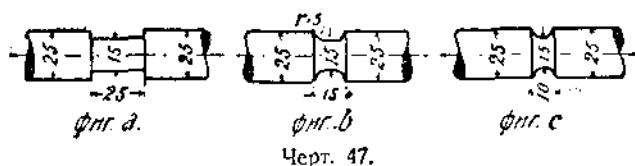
1) благодаря наличности резких сужений поперечного сечения, распределение напряжений в ослабленном месте будет неравномерное,

2) при растяжении бруска до разрыва сужение сечения (образование шейки), играющее существенную роль в случаях таких материалов, как железо и медь, будет затруднено наличием у места разрыва утолщенных частей бруска.

Первое обстоятельство должно вызывать уменьшение разрушающего груза, но в случае пластических материалов влияние его невелико. С переходом за пределы пропорциональности в перенапряженных местах, напряжения будут расти медленнее деформаций, и с дальнейшим растяжением неравномерности в распределении напряжений постепенно сглаживаются.

Второе обстоятельство должно способствовать увеличению временного сопротивления, и, как показывают опыты, оно играет преобладающее значение при разрыве железных и медных брусков.

В качестве примера мы приводим результаты опытов Bachi'a, произведенных над железными брусками с выточками (черт. 47).



Форма бруска	Времен. сопротивл. kg/cm ²	Сужение попер. сеч. %
Цилиндрическая	4250	66
фиг. а	4420	63
фиг. б	5020	55
фиг. с	5890	50

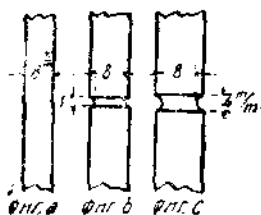
Иные результаты мы получим при разрыве брусков из хрупких материалов. Здесь преобладающее значение играет первая причина. Материал не получает значительных остающихся деформаций, и потому неравномерность в распределении напряжений сохраняется до момента разрушения. Интересные опыты в этом направлении произведены А. Леон'ом¹⁾. Оказывается, что для стеклян-

¹⁾ А. Леон, Über d. Zerstörungen in tunnelartig gelochten Gesteinen, Mitteil' an. d. Mechan.-techn. Laborat., Wien, 1910 г.

А. Леон, Kerbgrösse und Kerbwirkung, Wien, 1912.

ных брусков с круглым отверстием (черт. 43) временное сопротивление составляет лишь 60% от того, что получается для брусков призматических.

На основании всех имеющихся опытных данных можно заключить, что резкие уменьшения сечения бруска, вызывающие значительные перенапряжения материала, не оказывают вредного влияния на прочность, если нагрузка сохраняет постоянное значение, и материал не очень хрупок. К совершенно иному выводу мы придем, если брусок подвергается действию переменных усилий. В этом случае, как известно, разрушение может произойти при напряжениях, меньших предела пропорциональности, когда все заключения относительно неравномерности в распределении напряжений остаются в силе. Опыты, произведенные в этом направлении Föppl'em¹⁾, показали, что резкие уменьшения поперечного сечения значительно уменьшают сопротивление брусков повторным нагрузкам.



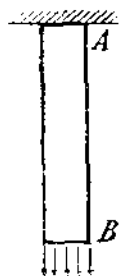
Черт. 48.

Оказалось, например, что прочность брусков, представленных на черт. 48 и сломавшихся после одного и того же числа колебаний нагрузки, весьма различна. Если прочность цилиндрического бруска принять равной 100, то брусок, представленный на фиг. б, имеет прочность 70 и брусок фиг. в — прочность 89. Это соотношение получилось при сравнительно небольшом числе колебаний. Если напряжения подобрать так, чтобы разрушение брусков произошло после нескольких миллионов колебаний, то разность между прочностями получится еще большая.

Интересно отметить, что такое же соотношение между прочностями получается при статическом разрыве брусков тех же размеров, но изготовленных из стекла. Следовательно, в случае повторных нагрузок, роль выкружек такая же, как при совершенно хрупких материалах, — они значительно уменьшают прочность брусков.

§ 30. Влияние собственного веса. Брус равного сопротивления при растяжении.

До сих пор при вычислении напряжений мы принимали во внимание только внешние растягивающие или сжимающие силы, но иногда существенную роль играет и собственный вес. Предположим, что брусок AB (черт. 49) концом A закреплен, а к концу B приложена равномерно распределенная нагрузка P . В нижнем сечении мы получим напряжение, если силу P разделим на площадь поперечного сечения F :



Черт. 49

$$p = \frac{P}{F},$$

но в верхнем сечении A напряжения, очевидно, будут большими: они должны уравновешивать не только силу P , но и собственный

¹⁾ Föppl, Mitteil. aus dem Mech.-tech. Laborator., München, Heft 31.

вес бруска. Если через γ назовем вес единицы объема, то напряжение в верхнем сечении будет:

$$p_1 = \frac{P + lF\gamma}{F}.$$

При проверке на прочность, очевидно, нужно рассчитывать верхнее сечение — там опасное место. Для обеспечения прочности необходимо, чтобы напряжение в верхнем сечении не превосходило допускаемого; следовательно:

$$\frac{P + lF\gamma}{F} = R.$$

Отсюда можем вычислить необходимую площадь сечения бруска, если известна сила P , длина бруска и уд. вес материала; очевидно:

$$F = \frac{P}{R - l\gamma} \quad (21).$$

Из полученного видно, что с увеличением длины стержня увеличивается и значение собственного веса. При $l\gamma = R$, получим $F = \infty$.

Этот результат указывает на невозможность изготовления бруска призматической формы, удовлетворяющего поставленным условиям относительно напряжений.

Если $l\gamma = R'$, где R' — временное сопротивление материала, то брусок разорвется от действия собственного веса.

Чтобы оценить, при каких размерах влияние собственного веса имеет практическое значение, вычислим ту предельную длину, при которой, например, железный брусок может выдерживать безопасно только свой вес. Если принять безопасное напряжение $R = 1000 \text{ kg cm}^2$, удельный вес железа 7,6, то

$$l = \frac{R}{\gamma} = \frac{1000}{0,0076} \text{ cm} = 1316 \text{ m}.$$

На практике иногда приходится рассчитывать длинные части, например, подъемные краны, штанги рудничных насосов. Длина их часто достигает нескольких сотен метров, и влияние собственного веса здесь очень велико. Чтобы уменьшить это влияние, канаты или штанги постепенно утолщаются кверху.

Вычислим удлинение стержня под действием собственного веса. Так как напряжение от собственного веса в различных сечениях различное, то различна также и величина соответствующего относительного удлинения. Выделим элемент длиной dx по оси стержня (черт. 50).



Растягивающее напряжение в данном элементе можно считать постоянным, так как dx мало. Величина напряжения, очевидно, будет:

$$p_x = \frac{x\gamma}{F} = x\gamma.$$

Приращение длины, при условии, что предел пропорциональности не превзойден, будет:

$$\delta dx = \frac{p_x}{E} dx = \frac{\gamma}{E} x dx.$$

Полное удлинение всего стержня от собственного веса мы получим, если сложим удлинения отдельных элементов:

$$\lambda = \int_0^l \frac{\gamma}{E} x dx = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Ql}{2EF},$$

где Q — вес всего стержня. Следовательно, удлинение бруска под действием собственного веса вдвое меньше того, которое вызывает груз Q (равный весу бруска), приложенный к концу невесомого стержня. Теоретически можно найти такую форму бруска, чтобы в каждом сечении было напряжение, как раз равное допускаемому, — очевидно, это будет наивыгоднейший случай: брусок будет иметь наименьший вес. Посмотрим, по какому закону придется менять площадь сечения. Если P растягивающая сила, приложенная к концу бруска, то площадь нижнего сечения будет:

$$\frac{P}{R} = F_0.$$

Положим, что площадь сечения в расстоянии x от конца равна F_x . Так как напряжение в каждом сечении равно R , то, следовательно:

$$F_x R = P + Q_x \quad (a)$$

(где Q_x — вес нижней части бруска). Переходя от взятого сечения к сечению бесконечно близкому, будем иметь:

$$(F_x + dF_x) R = P + Q_x + F_x \gamma dx \quad (b).$$

Последний член в правой части представляет вес заштрихованного элемента (черт. 51). Вычитая из равенства (b) равенство (a), найдем:

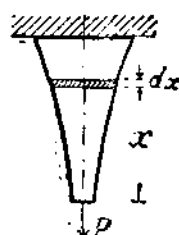
$$R dF_x = F_x \gamma dx, \text{ или } \frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{R} dx.$$

Интегрируя, найдем:

$$\ln F_x = \frac{\gamma}{R} x + C, \text{ или } F_x = e^{\frac{\gamma}{R} x + C} = C_0 e^{\frac{\gamma}{R} x}.$$

Произвольная постоянная $C_0 = e^C$ должна быть подобрана так, чтобы было удовлетворено условие на конце. При $x = 0$, $F_x = F_0$, следовательно, $C_0 = F_0$, и, окончательно, для определения площади любого поперечного сечения, получим:

$$F_x = F_0 e^{\frac{\gamma}{R} x} \quad (22).$$



Черт. 51.

Получаемая таким путем форма бруска носит название формы равного сопротивления растяжению, так как во всех поперечных сечениях напряжение как раз равно допускаемому. Для большей простоты выполнения форму равного сопротивления заменяют ступеньчатой (черт. 52). При определении последовательных площадей поперечных сечений легко составить общую ф-лу. Площадь сечения F_1 мы находим, рассматривая нижний участок, как призматический брусок, заделанный верхним концом. На основании ф-лы (21), получим:

$$F_1 = \frac{P}{R - l_1 \gamma}.$$

Переходя ко второму снизу участку, мы, для определения F_2 , можем пользоваться той же ф-лой, но растягивающей силой здесь будет сила, передающаяся через верхнее сечение нижнего участка, т.е. сила $F_1 R$, следовательно,

$$F_2 = \frac{F_1 R}{R - l_2 \gamma} = \frac{PR}{(R - l_1 \gamma)(R - l_2 \gamma)}.$$

Черт. 52.

Продолжая рассуждать таким же образом, найдем общую формулу:

$$F_n = \frac{F_{n-1} R}{R - l_n \gamma} = \frac{PR^{n-1}}{(R - l_1 \gamma)(R - l_2 \gamma) \dots (R - l_n \gamma)}.$$

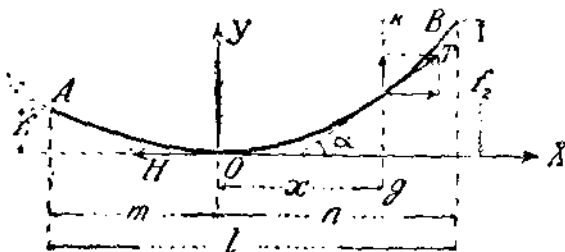
Если $l_1 = l_2 = \dots = \frac{L}{m}$, то

$$F_n = \frac{P}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{L \gamma}{mR}\right)^n} \quad (23).$$

Вычисление поперечных сечений отдельных участков не представляет теперь никаких затруднений. При беспредельном увеличении числа ступеней ф-ла (23) совпадает с ф-лой (22).

§ 31. Расчет гибких нитей ¹⁾.

Тяжелая гибкая нить постоянного поперечного сечения прикреплена в точках A и B (черт. 53). Найдем форму кривой провисания и зависимость между натяжением нити и провисанием. За начало координат возьмем низшую точку O .



Черт. 53.

¹⁾ Много литературных указаний и таблицы для расчета электрических проводов имеются в книге R. Weill'a: Beanspruchung und Durchhang von Freileitungen, 1910 г.

Горизонтальную касательную примем за ось X -ов. Ось Y -ов направим вертикально вверх. Сечениями OY и kg выделим часть гибкой нити и напишем условия ее равновесия. Если через H обозначим натяжение нити в самой низкой точке и через T — натяжение в сечении kg (оба натяжения считаем направленными по касательной к кривой провисания), то, проектируя все силы на ось X -ов, будем иметь:

$$H = T \cos \alpha \quad (a).$$

При составлении проекции всех сил на ось Y -ов придется принять во внимание и собственный вес выделенной части нити. Если через q обозначим вес погонной единицы, то, в случае пологой кривой, с достаточной точностью можно принять вес выделенной части нити равной qx (вместо длины дуги, берем длину ее проекции). Проектируя все силы на ось Y -ов, получим:

$$qx = T \sin \alpha \quad (b).$$

Разделяя (b) на (a), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H},$$

откуда, выполняя интегрирование:

$$y = \frac{qx^2}{2H} + C.$$

Произвольную постоянную нужно положить равной нулю, так как при $x = 0$,

$$y = 0;$$

в таком случае

$$y = \frac{qx^2}{2H}.$$

Полагая $x = -m$ и $x = n$, т.е., беря точки привеса нити, будем иметь:

$$f_1 = \frac{qm^2}{2H}; \quad f_2 = \frac{qn^2}{2H}.$$

Если точки привеса находятся на одной высоте, то

$$f_1 = f_2 = f \text{ и } m = n = \frac{l}{2};$$

в таком случае

$$f = \frac{ql^2}{8H} \quad (24).$$

Пользуясь этой ф-лой, легко вычислить натяжение нити по стрелке провисания. Если точки привеса A и B не лежат на одной высоте, то, обозначая $f_2 - f_1$ через h , получим:

$$h = \frac{q}{2H} (n^2 - m^2) = \frac{ql}{2H} (n - m),$$

так как, кроме того, $m + n = l$, то, следовательно:

$$n = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}; \quad m = \frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql}$$

Подставляя полученные значения для m и n в ф-лы для f_1 и f_2 , будем иметь возможность вычислить натяжение H при заданном значении h .

§ 32. Влияние температуры.

При очень пологих кривых провисания огромное влияние на величину натяжения нити будут иметь колебания температуры. С подобной задачей приходится на практике встречаться при определении усилий в электрических проводах. Поставим себе задачу так: известна стрелка провисания f_0 провода при температуре t_0 , требуется найти провисание и натяжение провода при какой-либо новой температуре t . Выведем предварительно ф-лу для определения длины нити по ее хорде и стрелке. В случае пологой кривой мы получили (см. § 31) $y = \frac{qx^2}{2H}$ или на основании ф-лы (24): $y = \frac{4fx^2}{P}$. Длина дуги s вычисляется по ф-ле (предполагаем точки привеса на одной высоте):

$$s = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + \left(\frac{8fx}{P}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

или, разлагая подынтегральную ф-ию в ряд и пренебрегая малыми высших порядков, найдем:

$$s = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{8fx}{P}\right)^2 \right] dx = 2 \left[\frac{l}{2} + \frac{4f^2}{3l} \right] = l \left[1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right] \quad (25).$$

Полученной ф-лой нам придется пользоваться и в дальнейшем, при исследовании изгиба балок.

Переходя к вопросу о влиянии температуры, составим выражение для длины провода в зависимости от начальной стрелки провисания f_0 :

$$s_0 = l \left[1 + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right].$$

Пусть температура повысилась от t_0 до t , такому повышению будет соответствовать удлинение провода

$$\delta l_1 = \alpha l (t - t_0),$$

где α — коэффициент линейного расширения для материала провода. Так как удлинение сопровождается увеличением стрелки провисания, то натяжение провода должно уменьшиться от H_0 до некоторого H (через H мы обозначили натяжение в самой низкой точке, но при малых стрелках с большой точностью можно считать натяжение по длине провода постоянным). Длина провода при новой температуре t выразится так:

$$s = s_0 + \alpha l (t - t_0) + \frac{H - H_0}{EF} l.$$

Последний член в полученной ф-ле дает нам укорочение провода от уменьшения натяжения. Вставляя вместо s и s_0 , H и H_0 их выражение через стрелки провисания f и f_0 , будем иметь:

$$l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right) = l \left(1 + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right) + \alpha l (t - t_0) + \frac{qf^3}{8EF} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0} \right),$$

откуда получаем кубическое ур-ие:

$$f^3 - f \left\{ \frac{8f_0^2}{3l^2} + \alpha (t - t_0) - \frac{qf^2}{8EF f_0} \right\} - \frac{3}{8} \frac{P}{f_0} + \frac{3}{64} \frac{ql^4}{EF} = 0 \quad (26).$$

Решая это ур-ие, найдем стрелку f , а, следовательно, и натяжение H при изменившейся температуре.

Иногда удобнее величину f получить не в виде ф-ии от первоначальной стрелки f_0 , а в ф-ии от первоначального натяжения H_0 . В таком случае, на основании (24), преобразуем ур-ие (26) так:

$$f^3 - f \left[\frac{1}{24} \frac{q^2 l^2}{H_0^2} + \alpha (t - t_0) - \frac{H_0}{EF} \right] \frac{3}{8} l^2 - \frac{3}{64} \frac{q l^4}{EF} = 0 \quad (27).$$

Полученное ур-ие возможно еще несколько упростить, введя, вместо первоначального натяжения H_0 , первоначальное напряжение $p_0 = \frac{H_0}{F}$ и, вместо веса погонной единицы q — вес единицы объема $\gamma = \frac{q}{F}$, тогда

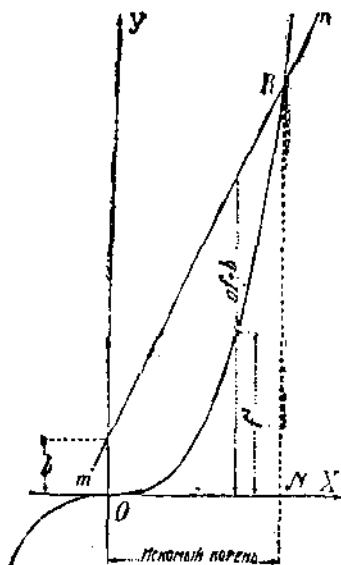
$$f^3 - f \left[\frac{1}{24} \frac{\gamma^2 l^2}{p_0^2} + \alpha (t - t_0) - \frac{p_0}{E} \right] \frac{3}{8} l^2 - \frac{3}{64} \frac{\gamma l^4}{E} = 0 \quad (27')$$

Подобным же образом может быть решена задача о нахождении натяжения провода при изменениях нагрузки (например, от ветра, льда и т. д.), приходящейся на единицу длины провода.

Уравнения (27) и (27') имеют вид:

$$f^3 = af + b,$$

где a и b заданные величины. Нахождение корней этого ур-ия проще всего выполнить графически (черт. 54). По оси абсцисс откладываем значение f и строим кривую OR : $y = f^3$ и наклонную прямую mn , определяемую ур-ием $y = af + b$. Точка пересечения R построенных линий определит искомое значение ON стрелки f . То же ур-ие легко решается при помощи логарифмической линейки.

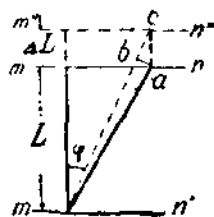


Черт. 54.

§ 33. Расчет проволочных канатов.

С расчетом проволочных канатов приходится иметь дело в канатных дорогах, подъемных машинах, передачах и т. д. Вопрос о прочности этих канатов обыкновенно решается на основании опытных данных, хотя некоторые указания относительно распределения усилий между отдельными проволоками можно получить

путем весьма простых соображений ¹⁾. Мы ограничимся простейшим случаем, когда канат состоит из осевой прямой проволоки и навитых на нее наружных проволок. Предположим, что всякое плоское поперечное сечение каната после растяжения остается плоским, тогда, пренебрегая поперечным сжатием при растяжении.



Черт. 55.

¹⁾ Н. Benndorf, Beiträge zur Theorie der Drahtseile, Zeitschr. Öster. Ing., 1904 г.

легко найдем зависимость между относительным удлинением осевой и наружных проволок. Дважды смежными поперечными сечениями mn и $m'n'$ (черт. 55) выделим элемент каната длиной L . Соответствующий элемент какой-либо из наружных проволок будет $\frac{L}{\cos \varphi}$, где φ угол между осью каната и осью наружной проволоки. При растяжении каната сечение mn переместится в $m'n'$, точка a переместится в c , при чем ac параллельно оси каната, так как мы пренебрегаем поперечным сжатием. Из треугольника abc найдем удлинение bc элемента наружной проволоки; очевидно:

$$bc = ac \cos \varphi = \Delta L \cos \varphi$$

(изменением угла φ при растяжении каната можно пренебречь). Относительные удлинения осевой и наружных проволок представятся так:

$$e = \frac{\Delta L}{L}; e_1 = \Delta L \cos \varphi : \frac{L}{\cos \varphi} = \frac{\Delta L}{L} \cos^2 \varphi.$$

Если все проволоки изготовлены из одного и того же материала и имеют одно и то же поперечное сечение F , то растягивающие усилия в средней и наружных проволоках, на основании закона Гука, представятся ф-ми:

$$S_0 = EF \frac{\Delta L}{L}; S_1 = EF \frac{\Delta L}{L} \cos^2 \varphi.$$

Для нахождения этих усилий воспользуемся ур-нем статики. Рассечем мысленно канат на две части и рассмотрим равновесие одной из них. Проектируя все усилия на направление растягивающей силы P и обозначая через n число наружных проволок, будем иметь:

$$S_0 + nS_1 \cos \varphi = EF \frac{\Delta L}{L} (1 + n \cos^2 \varphi) = P,$$

откуда

$$EF \frac{\Delta L}{L} = S_0 = \frac{P}{1 + n \cos^2 \varphi}; S_1 = \frac{P \cos^2 \varphi}{1 + n \cos^2 \varphi}.$$

Соответствующие напряжения представятся ф-ми:

$$p_0 = \frac{P}{F} \cdot \frac{1}{1 + n \cos^2 \varphi}; p_1 = \frac{P}{F} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{1 + n \cos^2 \varphi}.$$

На основании этих результатов можно заключить, что проволочный канат обладает меньшей прочностью, чем сумма прочностей составляющих его проволок, так как при обычных условиях:

$$\frac{P}{F(n+1)} < p_1 < p_0.$$

Прочность зависит от угла φ и убывает с возрастанием этого угла. Опытные данные относительно удлинения канатов и их временного сопротивления с достаточной точностью подтверждают результаты теоретического рассмотрения.

Уменьшение прочности проволок в канате, в зависимости от способа изготовления каната, колеблется по опытам Тетмайера¹⁾ в пределах от 8,4% до 13,7%.

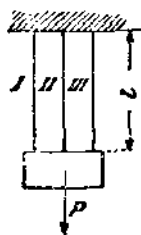
§ 34. Задачи статически неопределенные.

При расчетах брусков на растяжение и сжатие иногда приходится встречаться с задачами, где усилие в бруске неизвестно и не может быть определено при помощи ур-ий статики — это так называемые статически неопре-

¹⁾ Tetmajer, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 1905 г.

ленные задачи. Для решения их приходится принимать во внимание деформации брусков, и потому окончательные значения усилий будут, вообще говоря, зависеть от размеров и упругих свойств брусков.

В качестве примера рассмотрим случай, представленный на черт. 56. Нужно рассчитать стержни I, II и III, на которых подвешен груз P .



Черт. 56.

Для определения растягивающих усилий в стержнях статика дает лишь два уравнения; чтобы составить недостающее третье уравнение, нужно перейти к рассмотрению деформаций. Предположим для простоты, что вся система симметрична относительно линии действия силы P , тогда удлинения всех трех брусков будут одинаковы, и усилия выразятся ф-ми:

$$S_1 = \frac{\delta l}{l} E_1 F_1; S_2 = \frac{\delta l}{l} E_2 F_2; S_3 = \frac{\delta l}{l} E_3 F_3,$$

или

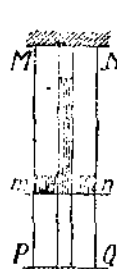
$$S_1 : S_2 : S_3 = E_1 F_1 : E_2 F_2 : E_3 F_3.$$

Принимая во внимание, что, в силу симметрии, $F_1 = F_3$, и, проектируя все силы на вертикальное направление, получим при $E_1 = E_2 = E_3$:

$$2S_1 + S_2 = P.$$

Зная сумму усилий и соотношение между ними, легко найти и самые усилия.

Таким же приемом можно пользоваться при расчете брусков, составленных из различных материалов, например, при расчете железобетонных колонн.



Черт. 57.

Предположим, что бетонная цилиндрическая колонна с железным стержнем, расположенным по оси (черт. 57), сжимается между плоскостями MN и PQ . Сделаем допущение, что поперечные сечения при этой деформации остаются плоскими, тогда относительные укорочения железа и бетона будут одинаковы, напряжения же будут различны, так как различны модули упругости. Принимая во внимание закон Гука, получим:

$$p_{ж} = \epsilon E_{ж}; p_б = \epsilon E_б, \text{ откуда } p_{ж} : p_б = E_{ж} : E_б$$

(значок ϵ относится к железу, а δ — к бетону).

Таким образом, соотношение между напряжениями в железе и бетоне не зависит совершенно от площадей поперечных сечений колонны и железного прута, а только от соотношения между модулями упругости. Закон распределения сжимающих напряжений по какому-либо поперечному сечению mn представлен на чертеже заштрихованной площадью.

При выводе мы предположили, что железный стержень, заключенный внутри колонны, испытывает простое сжатие. Это будет совершенно правильно только в том случае, если бетон не препятствует поперечному расширению железа, т.е., если Пуассоновое отношение для железа и бетона одинаково. На практике боковыми давлениями на стержень, обыкновенно, пренебрегают.

В статически неопределимой системе длина какого-либо стержня не может меняться независимо от длины других стержней, поэтому неправильности в длине, допущенные при изготовлении, или изменения длины вследствие колебания температуры могут вызвать значительные внутренние усилия при отсутствии внешних сил. Возвратимся к прежнему нашему примеру (черт. 56) и предположим, для простоты рассуждения, что все стержни изготовлены из одного и того же материала и имеют одинаковые размеры. Если средний стержень ошибочно изготовлен несколько большей длины, то при сборке системы его придется предварительно сжать и потом только вставить на место. Стремясь принять свою первоначальную длину, сжатый стержень II будет вызывать растягивающие усилия в стержнях I и III.

Если через X обозначим сжимающее усилие в стержне II, то растягивающие усилия в стержнях I и III будут равны $\frac{X}{2}$. Величину усилия X найдем на основании таких соображений. Пусть δl ошибка в длине среднего стержня, допущенная при изготовлении, тогда после сжатия длина этого стержня, на основании закона Гука, представится так:

$$l + \delta l - \frac{Xl}{EF}.$$

Длина же крайних стержней после установки среднего будет:

$$l + \frac{Xl}{2EF},$$

так как после происшедших деформаций длины всех стержней выравнялись, то для определения X получим ур-ие:

$$l + \delta l - \frac{Xl}{EF} = l + \frac{Xl}{2EF},$$

откуда найдем, что сжимающее напряжение в среднем стержне, обусловленное неточностью изготовления, будет:

$$p_x = \frac{X}{F} = \frac{2}{3} \frac{\delta l}{l} E.$$

Чтобы судить о величине дополнительных напряжений, предположим, что стержни железные, и ошибка в длине среднего стержня равна 0,001 проектной длины, тогда:

$$p_x = \frac{2}{3} \cdot 0,001 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2 = 1333 \text{ kg/cm}^2.$$

В крайних стержнях получатся растягивающие напряжения вдвое меньшей величины. Эти напряжения придется сложить с напряжениями, вызываемыми действием груза P .

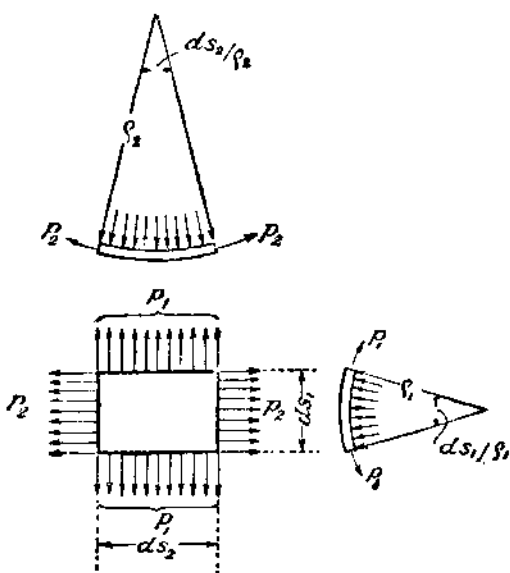
Совершенно такую же задачу мы будем иметь, если температура среднего стержня повысится с t_0 до t градусов. Свободному расширению стержня помешают другие стержни, и в результате стержень II окажется сжатым, а I и

III вытянутыми. Для определения температурных напряжений можно воспользоваться предыдущими выводами, нужно только вместо δl вставить удлинение стержня от повышения температуры: $\alpha(t - t_0)l$, где α коэффициент линейного расширения.

Сильное влияние ошибок в размерах и колебаний температуры на величину напряжений вызывает большие затруднения при сборке и понижает степень достоверности расчетов. Это приходится компенсировать переходом к более низким нормам допускаемых напряжений для статически неопределенных систем.

§ 35. О напряжениях в стенках сосудов ¹⁾.

Мы здесь займемся лишь такими задачами, где толщина стенки весьма мала по сравнению с размерами сосуда и радиусами кривизны наружной поверхности. Задачи эти возникают при расчете резервуаров для воды, газгольдеров, паровых котлов и т. д. Резервуарам этим придают форму тел вращения и выбирают размеры так, чтобы деформации от действия давлений на стенки были малы. В таком случае можно пренебрегать изменениями кривизны стенок, их изгибом и считать, что напряжения распределяются по толщине стенки равномерно. [Те места, где это предположение не применимо, будут отмечены ниже (см. гл. XVII).]



Черт. 58.

Условимся обозначить через δ толщину стенки сосуда, через q интенсивность давления, т. е. давление, приходящееся на единицу поверхности стенки, через ρ_1 и ρ_2 главные радиусы кривизны, при чем за ρ_2 будем принимать радиус кривизны, соответствующий меридиональному сечению. Для

составления основного уравнения равно-

весия выделим из стенки бесконечно малый элемент двумя меридиональными сечениями и двумя плоскостями, нормальными к меридиану (черт. 58). Пусть ds_2 и ds_1 — длины сторон выделенного элемента, считая по меридиану и по перпен-

¹⁾ L. Forchheimer, Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden, Berlin, 1909 г.

Brauer, Festigkeitslehre, стр. 138.

F. Bleich, Die Eisenkonstruktionen im städtischen Gaswerk Wien-Leopoldau, Eisenbau 1913 г., стр. 51.

H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre, стр. 26.

дикулярному к нему направлению. Углы между проведенными сечениями соответственно будут равны $\frac{ds_1}{\rho_1}$ и $\frac{ds_2}{\rho_2}$. По боковым граням выделенного элемента будут приложены равномерно распределенные нормальные напряжения (по меридиональным сечениям в силу симметрии не должно быть касательных напряжений). Обозначим через p_1 величину напряжения по граням, соответствующим меридиональным сечениям, и через p_2 — напряжения по граням, им перпендикулярным. Направление p_2 совпадает, следовательно, с направлением касательной к меридиану и p_1 — с касательной к параллельному кругу. На основании принятых обозначений усилия, приложенные к боковым граням элемента, представятся так:

$$p_2 ds_1 \delta \text{ и } p_1 ds_2 \delta.$$

Кроме того, к верхней поверхности элемента приложено усилие $q ds_1 ds_2$, соответствующее давлению воды, пара или газа, заключенного в сосуде. Напишем условие равновесия выделенного элемента (весом элемента пренебрегаем), для чего проектируем все силы на направление нормали к поверхности сосуда. При принятых на чертеже направлениях усилий, условие равновесия напишется так:

$$p_2 ds_1 \delta \frac{ds_2}{\rho_2} + p_1 ds_2 \delta \frac{ds_1}{\rho_1} = q ds_1 ds_2,$$

откуда получаем:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{q}{r}. \quad (28).$$

Применим полученное уравнение к нескольким частным примерам.

Шаровой сосуд подвергается действию внутреннего равномерно распределенного давления q . При этом, конечно, стенки сосуда несколько растянутся, но форма шара сохранится. В силу симметрии заключаем, что

$$p_1 = p_2 = p,$$

и на основании ф-лы (28) получим:

$$p = \frac{rq}{2\delta} \quad (29).$$

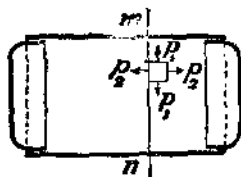
Пользуясь этой ф-лой, всегда можно подобрать толщину стенки так, чтобы растягивающие напряжения не превосходили заданной нормы.

Если шаровой сосуд подвергается действию равномерного внешнего давления q , то нужно изменить знак q в ф-ле (29). Вместо растягивающих, получим в стенке сжимающие напряжения.

Цилиндрический котел (черт. 59) подвергается действию внутреннего равномерно распределенного давления q . Рассмотрим отдельно напряжения в точках, соответствующих цилиндрической части котла, и отдельно напряжения в днищах, при чем будем предполагать, что рассматриваемые точки удалены

от места сопряжения днищ с цилиндрической частью котла. Для точек цилиндрической части, $\rho_2 = \infty$ и ур-ие (28) даст нам:

$$\rho_1 = \frac{\rho_1 q}{\delta} \quad (30),$$



Черт. 59.

где ρ_1 , очевидно, представляет собой радиус цилиндра. Напряжения ρ_1 стремятся разорвать котел вдоль образующей цилиндра. Для нахождения растягивающих напряжений ρ_2 представим себе цилиндр рассеченным плоскостью mn , перпендикулярной оси котла, и рассмотрим условия равновесия одной половины. Растягивающие на-

пряжения ρ_2 равномерно распределяются по кольцевой площади сечения цилиндрической стенки котла и в сумме дадут силу:

$$P = 2\pi\rho_1\delta\rho_2.$$

Сила эта должна уравновешивать давление пара на днище котла. На основании этого, получим ур-ие:

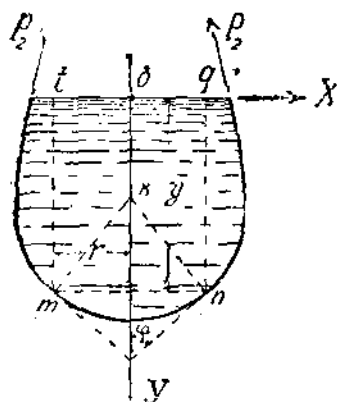
$$2\pi\rho_1\delta\rho_2 = \pi\rho_1^2q,$$

откуда:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 q}{2\delta} \quad (31),$$

т.е. напряжения, стремящиеся разорвать котел по mn , вдвое меньше ранее найденных напряжений ρ_1 .

Что касается напряжений в днище, то, в случае сферической формы, можно пользоваться непосредственно ф-лой (29), выведенной для шарового сосуда. При иной форме днища придется идти общим путем, который будет показан на следующем примере.



Черт. 60.

Переходим теперь к случаям, где интенсивность давления меняется по поверхности сосуда. Пусть черт. 60 представляет меридиональное сечение сосуда, наполненного водой. Сосуд поддерживается усилиями ρ_2 , распределенными по его свободному краю. Направление этих усилий совпадает с направлениями касательных к меридиональному сечению. Определим напряжения, соответствующие точкам какого-либо параллельного круга mn . Радиус круга r , расстояние плоскости круга от поверхности воды y . Величину

растягивающих напряжений ρ_2 мы найдем так же, как и в предыдущей задаче. Проведем по параллельному кругу mn нормальное сечение конической поверхностью mnh . Растягивающие напряжения ρ_2 будут равномерно распределяться

по произведенному сечению стенки и приведутся к одной силе, действующей в направлении оси OY . Величина силы будет:

$$P = 2\pi r p_2 \cos \varphi.$$

Сила эта должна равняться весу Q объема воды, ограниченного цилиндрической поверхностью mnq и дном данного сосуда. Нетрудно видеть, что этот вес представится так:

$$Q = 2\pi \gamma \int_0^r y x dx,$$

где γ — вес единицы объема воды; следовательно:

$$p_2 = \frac{\gamma}{\delta \cos \varphi} \frac{1}{r} \int_0^r y x dx,$$

откуда по ур-ию меридионального сечения можем определить величину p_2 . Для нахождения p_1 пользуемся ур-ием (28).

Применим эти общие соображения к простейшему случаю. Сосуд имеет форму конуса (черт. 61). Определим напряженное состояние в точках параллельного круга mn на глубине y . Один из главных радиусов кривизны обращается в бесконечность, другой будет равен:

$$ln = \frac{h-y}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha.$$

Основное ур-ие переписется так:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma l}{\delta}, \text{ откуда } p_1 = \rho_1 \gamma \frac{\gamma}{\delta} = \gamma (h-y) \frac{1}{\delta} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Напряжения p_1 стремятся разорвать конический сосуд по образующей. При $y=0$ и $y=h$, т.е. на уровне воды и в вершине конуса, напряжения эти обращаются в нуль. В промежуточных сечениях напряжения меняются по закону параболы и достигают наибольшего значения при

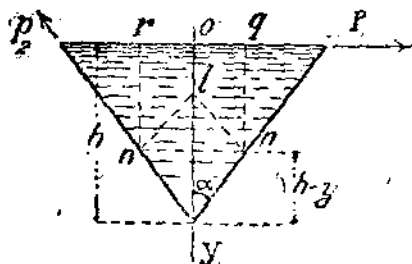
$$y = \frac{h}{2}, \text{ когда } p_1 = \frac{h^2}{4} \frac{\gamma}{\delta} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Определим теперь величину напряжений p_2 , действующих по сечениям, нормальным к образующим конуса. Напряжения эти имеют направление образующих, и величина их для параллельного круга mn найдется из условия равновесия объема воды $Ynrqn$. Пользуясь вышенайденной ϕ -лой, получим:

$$p_2 = \frac{\gamma}{\delta \cos \alpha} \frac{1}{r} \int_0^r x (h - x \operatorname{ctg} \alpha) dx = \frac{\gamma}{\delta \cos \alpha} r \left(\frac{h}{2} - \frac{r}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Принимая во внимание, что r радиус круга mn определяется ϕ -лой:

$$r = (h-y) \operatorname{tg} \alpha,$$



получим.

$$p_2 = \frac{\gamma}{6\delta} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} (h - y)(h + 2y),$$

следовательно, и это напряжение меняется с глубиной, по закону параболы; при $y = h$, т.е. в вершине конуса напряжение обращается в нуль. Легко найти ту глубину, которой соответствует $(p_2)_{\max}$. Это будет:

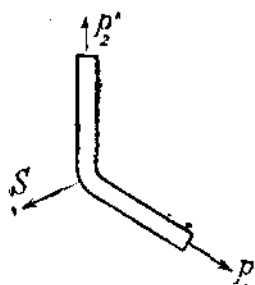
$$\text{при } y = \frac{h}{4}; (p_2)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{\gamma}{\delta} h^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Когда форма сосуда такова, что меридиональное сечение имеет излом (черт. 62), то радиус кривизны p_2 обращается при этом в нуль, и основное уравне (28) получает вид:

$$\frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{0} = \frac{q}{\delta};$$

если при этом p_2 в нуль не обращается, то $p_1 = \infty$.

Результат этот указывает на то, что равновесие в рассматриваемом месте при сделанном предположении относительно напряжений в стенке сосуда возможно только в том случае, если по параллельному кругу, соответствующему перелому в меридиональном сечении, будут приложены некоторые усилия S . Если таких усилий нет, то у места излома получатся значительные де-

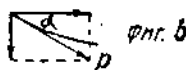
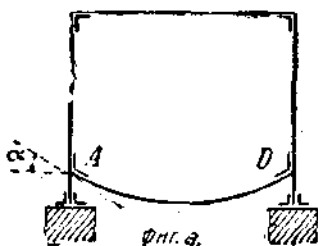


Черт. 62.

формации, сопровождающиеся изгибом стенки. На практике, чтобы избежать этих деформаций, излом в меридиональном сечении обыкновенно подкрепляют особым кольцом.

В качестве примера на черт. 63 представлен обычный тип резервуара, устанавливаемого в железнодорожных водоемных зданиях. Дно, имеющее сферическую поверхность, соединяется с цилиндрической стенкой резервуара посредством уголков, показанных в разрезе в точках A и D . Уголки эти образуют сплошное кольцо, препятствующее значительным деформациям. Дадим приближенный расчет опорного кольца, основанный на предположении, что изгиба нет, и стенки работают лишь на растяжение. Растягивающие напряжения p , возникающие в днище под действием давления воды, наклонены у опорного кольца под углом α и могут быть разложены на горизонтальную и вертикальную составляющие (фиг. б). Вертикальная составляющая передается непосредственно на кладку стены; что же касается горизонтальных составляющих, то они вызовут сжатие опорного кольца. На единицу длины кольца будет приходиться давление

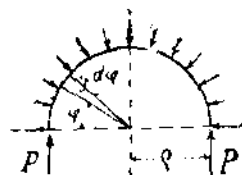
$$S = p \delta \cos \alpha.$$



Черт. 63.

Для определения сжимающих напряжений в кольце рассечем его по диаметру и рассмотрим равновесие одной половины (черт. 64). На каждый элемент кольца, соответствующий углу $d\varphi$, приходится внешнее давление $p \delta \cos \alpha \varphi d\varphi$. Если через P обозначить сжимающее усилие, заменяющее действие нижней части кольца на верхнюю, то, проектируя все силы на вертикальное направление, найдем:

$$2P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} S \varphi \sin \varphi d\varphi = 2S \rho,$$



Черт. 64.

откуда

$$P = S \rho = p \delta \cos \alpha \varphi.$$

Разделяя величину сжимающего усилия P на площадь поперечного сечения кольца, найдем искомые сжимающие напряжения.

Вопрос об устойчивости кольца, находящегося под действием внешних давлений, будет разобран в отделе, посвященном устойчивости упругих систем.

§ 36. Различные теории прочности.

При расчете брусков на растяжение или на сжатие вопрос о прочности решается без особых затруднений. Имеется достаточно опытных данных относительно предела пропорциональности, критической точки и временного сопротивления различных строительных материалов, имеются также указания относительно предельных напряжений при повторных нагрузках. По этим данным приходится назначать в каждом частном случае величину допускаемых напряжений R . Переходя к более сложным задачам растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям, как это мы имели при расчете стенок сосудов ¹⁾, или к еще более общему случаю растяжения и сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям (черт. 34), приходится прежде всего отметить возможность бесчисленного множества различных соотношений между напряжениями p_x , p_y , и p_z . Чтобы судить о прочности в этих случаях, нужно было бы, строго говоря, для каждого определенного соотношения между напряжениями p_x , p_y и p_z произвести особые опыты и установить опасные пределы: предел пропорциональности, критическую точку и временное сопротивление. Несмотря на всю важность таких исследований, до сих пор имеется очень немного опытных данных, и потому в случаях сложного напряженного состояния о прочности приходится судить по опытам растяжения и сжатия.

¹⁾ Вырезанный из стенки сосуда элемент, кроме напряжений p_1 и p_2 , подвергается действию давлений q , но этими давлениями можно пренебречь. Для тонкостенных сосудов q всегда мало по сравнению с p_1 и p_2 .

Условимся считать в дальнейшем два какие-либо случая напряженного состояния равнопрочными, если при пропорциональном увеличении напряжений оба они в один и тот же момент достигают опасного предела. Под опасным пределом можно подразумевать или критическую точку или момент разрушения. Мы будем в дальнейшем предполагать первый предел ¹⁾. Для таких материалов, как железо и мягкая сталь, переход за критическую точку сопровождается резким возрастанием остающихся деформаций, недопустимых в сооружениях.

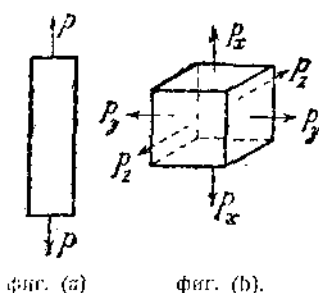
На черт. 65 представлены два случая напряженного состояния. В первом случае простое растягивающее напряжение p , во втором — одновременное действие растягивающих или сжимающих напряжений p_x , p_y и p_z , при чем пред-

полагается, что $p_x > p_y > p_z$. Согласно вышесказанному условию, мы эти два напряженных состояния будем считать равнопрочными, если для достижения критической точки напряжение p (фиг. а) и напряжения p_x , p_y и p_z (фиг. б) нужно увеличить в одно и то же число раз.

Мы имеем достаточно данных для суждения о прочности бруска, представленного на фиг. (а); что же касается бруска фиг. (б), то, не имея нужных опытных данных, приходится принять какую-либо гипотезу относительно того, какой

фактор играет решающую роль в появлении деформаций, соответствующих критической точке. Наиболее простое предположение, это — допустить, что состояние, соответствующее критической точке, определяется величиной наибольшего (в рассматриваемом случае растягивающего) напряжения, и, следовательно, оба бруска фиг. (а) и фиг. (б) достигнут критической точки при одном и том же максимальном растягивающем напряжении ($p = p_x$). Предположение это высказывалось еще Галилеем, основателем науки сопротивления материалов, и в позднейшее время его разделял целый ряд крупных авторитетов в области теории упругости и сопротивления материалов. Приняв эту гипотезу, мы, как следствие, получаем, что для обеспечения равной прочности допускаемые растягивающие напряжения в первом и втором бруске должны быть одинаковы, и, вообще, все расчеты нужно вести по наибольшему напряжению. Конечно, такое предположение значительно упрощает расчеты, но, как показывают опыты, прочность, соответствующая известному напряженному состоянию, не может быть вполне определена величиной наибольшего напряжения. В качестве примера приведем случай простого сжатия кубика и сжатия такого же кубика по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Оказы-

¹⁾ В материалах, не имеющих ясно выраженной критической точки, под опасным пределом будем подразумевать предел пропорциональности.



Черт. 65.

вается ¹⁾, что при всестороннем равномерном давлении кубик выдерживает напряжения во много раз большие временного сопротивления при простом сжатии.

Параллельно первой высказанной гипотезе, нашедшей распространение, главным образом, среди английских и американских инженеров, уже давно возникла и развилась другая теория прочности, согласно которой *достижение опасного предела обусловлено не величиной наибольшего напряжения, а величиной наибольших удлинений*. С точки зрения этой теории два бруска (черт. 65) придется считать равнопрочными, если у них величины наибольших удлинений одинаковы. Если мы для простого растяжения установили допускаемое напряжение R , то тем самым определяется величина допускаемого относительного удлинения $e = R/E$. Величина наибольшего удлинения для бруска фиг. (b) представится ф-лой:

$$e_x = \frac{1}{E} [p_x - \sigma(p_y + p_z)].$$

Чтобы брусок фиг. (b) был равнопрочен с бруском фиг. (a), нужно на основании второй гипотезы положить:

$$e = e_x, \text{ или } p_x - \sigma(p_y + p_z) = R \quad (32).$$

Величину $p_x - \sigma(p_y + p_z)$ называют *приведенным напряжением*.

Если $p_y + p_z$ положительно, то, как видно из полученной ф-лы, $p_x > R$. Растяжение в известном направлении становится менее опасным, если к нему присоединить меньшие по величине растягивающие напряжения в направлении перпендикулярном.

На основании этих заключений следовало бы заключить, что допускаемые напряжения в цилиндрической стенке котла могут быть больше напряжения R , допускаемого при простом растяжении. Величина допускаемого значения для p_1 (§ 35) определится из ф-лы:

$$p_1 - \sigma p_2 = R,$$

или, принимая во внимание, что для цилиндрической части котла $p_1 = 2p_2$, найдем: $p_1 = \frac{2R}{2-\sigma}$. При $\sigma = \frac{1}{3}$ получается возрастание допускаемых напряжений на 20%. Опытами эти заключения не подтверждаются ²⁾, и мы на второй теории остановились лишь потому, что она нашла широкое применение среди инженеров и принята в большинстве курсов и справочных книг по сопротивлению материалов. Чтобы облегчить читателю понимание общепринятых расчетных ф-л, мы, в дальнейшем, при рассмотрении частных случаев напряженного состояния, будем приводить ф-лы, построенные на второй теории, но

¹⁾ Föppl, Abhängigkeit der Bruchgefahr von der Art des Spannungszustandes. Mitteilungen aus d. Mech.-techn. Laborat. München, 1910 г.

²⁾ Wehage, Mitteil. d. techn. Versuchsanstalten zu Berlin, 1888 г., стр. 69.

параллельно с этим будем давать и новые ф-лы, выведенные на основании третьей теории. Эта теория является в настоящее время наиболее обоснованной, ее подтверждают опыты*, произведенные, главным образом, над материалами, способными получать значительные пластические удлинения ¹⁾).

В случае таких материалов, как железо и мягкая сталь, третья теория ²⁾ сводится к предположению, что *достижение опасного предела обусловлено величиной наибольших касательных напряжений*. Предположение это соответствует результатам, полученным при исследовании природы явлений, сопровождающих появление остаточных деформаций. При растяжении отполированных железных брусков, с переходом за предел пропорциональности, появляются наклонные полосы (линии Людерса), представляющие ни что иное, как группы кристаллов железа, претерпевших микроскопические сдвиги.

С точки зрения третьей теории два бруска, представленные на черт. 65, будут равнопрочными, если величины наибольших касательных напряжений в обоих случаях одинаковы. Если для простого растяжения принято напряжение R , то тем самым допущены касательные напряжения, наибольшее значение которых равно $0,5 R$ (см. § 13). Что касается напряжений в бруске, представленном на фиг. (b), то нами были рассмотрены три серии площадок, проходящих через три направления p_x , p_y и p_z . Напряжения по этим площадкам, как мы видели (§ 18), могут быть представлены координатами точек, лежащих на трех кругах. Величина наибольших касательных напряжений соответствует наибольшей ординате и равняется радиусу наибольшего круга, т.-е. полуразности между наибольшим и наименьшим напряжениями. Эти напряжения действуют по площадке, проходящей через направление среднего по величине напряжения и делящей пополам угол между направлениями наибольшего и наименьшего напряжений. Условие для равной прочности брусков фиг. (a) и фиг. (b) представится так:

$$\frac{R}{2} = \frac{p_x - p_z}{2} \quad (33).$$

¹⁾ J. J. Guest, On the Strength of ductile materials under combined Stress, Phil. Mag., 1900 г., V. 50, стр. 69.

C. A. Smith, Some experiments on solid steel bars under combined Stress, Engineering, V. LXXXVIII, стр. 238.

W. A. Schofle, Ductile materials under combined Stress, Phil. Mag., 1906 г. — декабрь, 1910 г. — январь.

L. B. Turner, The elastic breakdown of materials submitted to compound Stresses, Engineering, V. LXXXVI, стр. 169.

T. Kármán, Festigkeitsversuche unter allseitigem Drucke, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1911 г. стр. 1749.

²⁾ Mohr, Zeitschrift d. Ver. d. Ing., 1900 г., стр. 1524.

С. П. Тимошенко. Формулы сложного сопротивления с точки зрения различных теорий прочности, Изв. Петерб. политех. инст., 1905 г.

Перевод статей Mohr'a Kármán'a и Roth'a помещается в книге „Теории прочности“ — Новые идеи в технике, Сборник № 1. 1915 г.

Отсюда заключаем, что в случае сложного напряженного состояния разность между наибольшим и наименьшим нормальными напряжениями должна равняться напряжению, допускаемому при простом растяжении. При растяжении по двум взаимно перпендикулярным направлениям, как это имеет место в стенках сосудов, наименьшее напряжение p обращается в нуль, и расчетная ф-ла напишется так:

$$\frac{R}{2} = \frac{p_1 - 0}{2}, \text{ откуда } p_1 = R.$$

Следовательно, для данного случая расчетные ф-лы, построенные на I и III теориях, совпадают.

За последнее время сделан был целый ряд исследований в направлении проверки различных теорий прочности. Опыты эти показывают, что с достаточной для практики точностью можно пользоваться в случае металлов, способных получать значительную пластическую деформацию, теорией наибольших касательных напряжений. Еще лучшее совпадение с экспериментами получается, если в основание теории прочности положить величину энергии деформации в единице объема материала (теория Huber'a). Назовем следующие работы, посвященные этому вопросу:

1. M. Roß und Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H., Zürich, 1926.

2. W. Lode, Versuche über den Einfluss der Mittleren Hauptspannung auf die Fließsgrenze, Z. für angewandte Math. und Mech., Vol. 5, 1925.

3. F. Schleicher, Der Spannungszustand an der Fließsgrenze, Z. für angewandte Math. und Mech., Vol. 6, 1926.

4. Haigh, The Strain Energy Funktion and the Elastic Limit, Rep. of Brit. Assoc. for Advancement of Science, p. 324, 1921.

§ 37. Сжатие шаров и цилиндров.

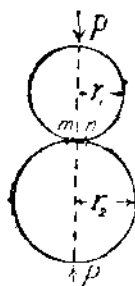
С явлением сжатия шаров и цилиндров приходится иметь дело как в машиностроении при расчете подшипников, подъемных механизмов и т. д., так и в инженерных сооружениях, где встречаются подвижные опоры на цилиндрических катках, шарниры и т. д. Закон распределения напряжений вблизи точек приложения давлений весьма сложен ¹⁾ и не может быть получен элементарным путем. Мы ограничимся тем, что дадим окончательные ф-лы, которыми и можно будет пользоваться при расчетах ²⁾.

Если два шара нажимать один на другой с силою P (черт. 66), то вследствие деформаций получается соприкосновение по некоторой поверхности *тл*, ограниченной круговым контуром. Условимся эту поверхность называть поверхностью давления. В случае сжатия шаров из твердого материала, например, из стали, радиус a контура поверхности:

¹⁾ Н. Herz, Gesamte Werke, Bd. I, Über Berührung fester elastischer Körper und über die Härte.

²⁾ Вывод ф-л имеется в Курсе теории упругости, ч. I, стр. 221, изд. 1914 г.

давления весьма мал по сравнению с размерами шаров, и для вычисления его можно пользоваться формулой:



Черт. 66.

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad (34).$$

При выводе этой ф-лы предположено, что Пуассоново отношение $\sigma = 0,3$. По поверхности соприкасания давления распределяются неравномерно и достигают наибольшего значения в центре поверхности давления. Величина этого наибольшего давления может быть вычислена по ф-ле

$$p_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right)^2} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2} \quad (35).$$

От полученных ф-л легко перейти к случаю сжатия шара и плоскости, нужно только положить радиус одного из шаров равным бесконечности, тогда будем иметь:

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P}{E} r} \quad (34'),$$

$$p_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}} \quad (35').$$

Вид ф-лы (35') существенно отличается от того, что мы получали прежде. В ранее исследованных случаях напряжения всегда являлись линейной функцией от внешних сил, и, если мы получали напряжение p_1 от силы P_1 и p_2 — от силы P_2 , то при одновременном действии P_1 и P_2 напряжение равнялось $p_1 + p_2$, т.е. действия сил складывались. При сжатии твердых тел, как видно из вышеполученных ф-л, такого сложения уже не будет. Если вдвое увеличить силу, прижимающую шар к плоскости, то напряжения при этом возрастут в отношении $1 : \sqrt[3]{2}$, вообще они растут медленнее силы.

Для пояснения приводим таблицу, вычисленную по ф-ле (35'), в предположении, что модуль упругости материала (закаленная сталь) $E = 2,12 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

$P \text{ kg} =$	d^3	$2 d^3$	$3 d^3$	$4 d^3$	$5 d^3$	$10 d^3$	$50 d^3$	$100 d^3$
$p_{\max} \text{ kg/cm}^2 =$	10160	12810	14660	16140	17380	21900	37450	47180

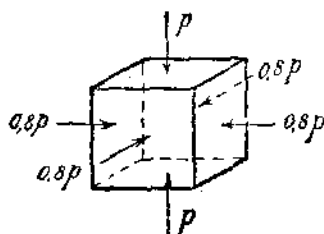
Здесь через d обозначен диаметр шара в сантиметрах.

Если задаться определенным значением для давления $p_{\max}$ в центре поверхности соприкасания, то тем самым определяется и величина отношения $P : d^3$. Следовательно, напряжения при сжатии шара и плоскости будут получаться одинаковыми, если силу P менять пропорционально квадрату диаметра шара. На практике при расчете шариков пользуются этим обстоятельством: не исследуют распределения давлений по поверхности

соприкасания, а задаются определенным соотношением между P и d^2 , выведенным на основании опытных данных¹⁾, другими словами, ведут расчет по такой простой ф-ле:

$$P = kd^2.$$

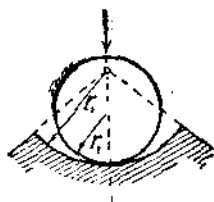
По опытам Stribeck'a, для шариков из лучшей закаленной стали можно принять $k = 50$. Как видно из вышеприведенной таблицы, такому значению k соответствует громадное напряжение 37450 kg/cm^2 в центре поверхности давления. Способность материала выдерживать в данном случае столь высокие напряжения можно объяснить, если при суждении о прочности исходить из предположения, что достижение опасного предела обусловлено величиной касательных напряжений (III теория прочности). Вырежем в центре поверхности давления бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, так, чтобы его верхняя грань совпадала с поверхностью давления. Если p величина сжимающих напряжений по этой грани, то, как показывает точное решение задачи, по боковым граням будут действовать сжимающие напряжения, равные, примерно, $0,8p$ (черт. 67). Согласно третьей теории прочности, предел пропорциональности в рассматриваемом случае будет достигнут тогда, когда разность между наибольшим и наименьшим сжимающими напряжениями сделается равной пределу пропорциональности при простом сжатии. Для твердой закаленной стали можно положить, что предел пропорциональности соответствует напряжению 10000 kg/cm^2 . Тогда величина p , при которой можно ожидать появления остаточных деформаций в центре поверхности соприкасания, определится из условия:



Черт. 67.

$$p - 0,8p = 0,2p = 10000 \text{ kg/cm}^2, \quad \text{откуда } p = 50000 \text{ kg/cm}^2.$$

В более неблагоприятных условиях оказываются точки, лежащие у контура поверхности давления. Здесь разность между наибольшим и наименьшим напряжениями равна $0,267 p$ ²⁾, и потому предельное напряжение будет:



Черт. 68.

$$p = \frac{1}{0,267} 10000 \approx 37500 \text{ kg/cm}^2.$$

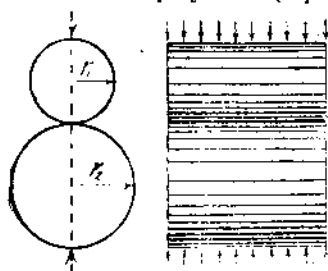
Полученное напряжение соответствует $k = 50$, т.е. той предельной нагрузке, которую устанавливает Stribeck на основании своих опытов. Если шар лежит в шаровой впадине (черт. 68), то для определения поверхности давления и нахождения напряжений можно воспользоваться ф-ми (34) и (35), заменив в них величину $r_1 + r_2$ величиной $r_1 - r_2$. Легко видеть, что в этом случае шарик может выдерживать большие давления.

¹⁾ tr es, gel er für beliebige Belastungen, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1901 г., стр. 73.

Schwinning, 'Versuche über zulässige Belastung von Kugel- und Kugellagern, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1901 г., стр. 332.

²⁾ Подробное исследование распределения напряжений при сжатии, произведенное А. Н. Динником (Изв. Киевск. пол. инст., 1909 г., книга 4), указывает, что внутри сжимаемых тел, примерно, на глубине, равной половине радиуса a , имеются точки, где разность между наибольшим и наименьшим напряжениями еще большая. В них прежде всего должны появиться остаточные деформации.

При рассмотрении сжатия цилиндров ограничимся случаем, когда цилиндры касаются вдоль образующей (черт. 69). Нагрузку, приходящуюся на единицу длины цилиндров, обозначим через P' , тогда ширина полоски соприкосновения, образующейся при надавливании цилиндров друг на друга, определится по ф-ле:



Черт. 69.

$$b = 3,04 \sqrt{\frac{P'}{E} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad (36)$$

Наибольшие давления получаются по середине полоски соприкосновения. Величина их будет:

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{P'E \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}} \quad (37)$$

Чтобы перейти к случаю сжатия цилиндра и плоскости, нужно в ф-лах (36) и (37) положить один из радиусов равным бесконечности, тогда будем иметь:

$$b = 3,04 \sqrt{\frac{P'}{E} r} \quad (36')$$

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{P'E}{r}} \quad (37')$$

Задаваясь определенным значением для $p_{\max}$, можем по нагрузке P' найти надлежащий радиус цилиндра. Для катков из лучшей стали допускают в мостовых опорах давления 6000—7000 kg/cm^2 . Из ф-лы (37') видно, что напряжения $p_{\max}$ будут для различных катков одинаковы, если $P':r = \text{const}$ или, что все равно, если нагрузка, отнесенная к единице площади диаметрального сечения катка, сохраняет постоянное значение. Вышеприведенным значениям $p_{\max}$ (6000—7000 kg/cm^2) соответствует давление 50—70 kg/cm^2 диаметрального сечения. В России для мостовых катков допускают 30—35 kg/cm^2 диаметрального сечения.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

ГЛАВА ПЯТАЯ.

СДВИГ.

§ 38. Чистый сдвиг.

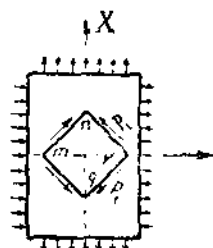
При рассмотрении одновременного действия растяжения и сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям были получены ф-лы (10) и (11) для напряжений p_n и p_t по площадке, определяемой углом θ . Остановимся на том частном случае, когда

$$p_x = -p_y = p,$$

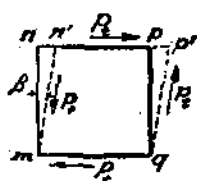
т.-е., когда имеем растягивающее напряжение в направлении оси X -ов и равное ему сжимающее напряжение по оси Y -ов. Наибольшие касательные напряжения имеют место по площадкам, наклоненным к осям X и Y под углом 45° . Если мы такими площадками вырежем из бруска элемент $mnpq$ (черт. 70) и заменим действие остальных частей бруска на элемент силами, то по граням будут действовать только касательные напряжения. Нормальные напряжения, как видно из ф-лы (10), обращаются в нуль. Величина касательных напряжений будет:

$$p_t = \frac{p_x - p_y}{2} = p.$$

Она равна величине растягивающего напряжения по оси X -ов и сжимающего по оси Y -ов. То напряженное состояние, в котором находится элемент $mnpq$, обозначают термином *чистый сдвиг*. Под действием касательных напряжений, приложенных по граням, прямые углы элемента $mnpq$ искажаются. Если первоначально основание $mnpq$ было квадратным, то после деформации оно примет вид ромба. Вертикальная диагональ nq удлинится, горизонтальная mp укоротится на ту же величину, и, так как мы рассматриваем лишь малые удлинения и укорочения, то длина сторон ромба (пренебрегая малыми высшего порядка) будет равна первоначальной длине стороны квадрата $mnpq$. Путь $mnpq$ (черт. 71) квадратное основание элемента до деформации и $m'n'p'q'$ — ромб,



Черт. 70.



Черт. 71.

получающийся из квадрата $mnpq$ под действием касательных напряжений p_t , соответствующих чистому сдвигу. Ромб этот повернут на чертеже таким образом, что одна из его сторон совпадает со стороной mq квадрата $mnpq$. Отрезок nn' называется *абсолютным сдвигом* грани np по отношению к грани mq . Отношение

$$\frac{nn'}{mn} = \operatorname{tg} \beta$$

называют *относительным сдвигом*. Так как мы будем иметь дело с малыми деформациями, то угол β — малая величина, и можно положить

$$\operatorname{tg} \beta = \beta,$$

т.е. относительный сдвиг равен уменьшению β первоначально прямого угла. Величиной β вполне определяется изменение формы, соответствующее „чистому сдвигу“. Подобно тому, как при простом растяжении была установлена связь между удлинением и соответствующим ему растягивающим напряжением, установим зависимость между относительным сдвигом β и соответствующим сдвигающим напряжением p_t .

При рассмотрении растяжения и сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям нами была установлена связь между напряжениями p_x и p_y и соответствующими деформациями e_x и e_y :

$$e_x = \frac{p_x}{E} - \sigma \frac{p_y}{E}; \quad e_y = \frac{p_y}{E} - \sigma \frac{p_x}{E}.$$

В случае чистого сдвига

$$p_x = -p_y = p_t,$$

и, следовательно:

$$e_x = -e_y = e = \frac{p_t}{E}(1 + \sigma).$$

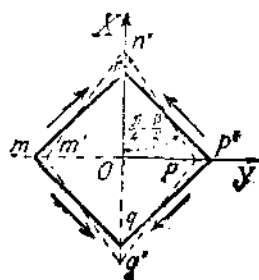
Для установления искомой связи между β и p_t нужно только выразить β через e . Из черт. 72 находим:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{Op'}{On'} = \frac{Op(1-e)}{On(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}.$$

Если принять во внимание, что β и e малые величины, то, пренебрегая малыми высших порядков, можно написать:

$$\frac{1-e}{1+e} = 1 - 2e,$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{\beta}{2}} = 1 - \beta;$$



Черт. 72.

следовательно,

$$1 - \beta = 1 - 2e$$

и

$$\beta = 2e \quad (38).$$

т.е. относительный сдвиг по абсолютному значению вдвое больше относительного растяжения по оси X -ов и сжатия по оси Y -ов. Если вместо e поставить его выражение через p_t , то получим:

$$\beta = \frac{2p_t}{E} (1 + \sigma).$$

Полученная ф-ла дает искомую связь между касательным напряжением при чистом сдвиге и величиной относительного сдвига. Относительный сдвиг пропорционален сдвигающему напряжению. Вводя обозначение:

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (39),$$

получим:

$$\beta = \frac{p_t}{G} \quad (40).$$

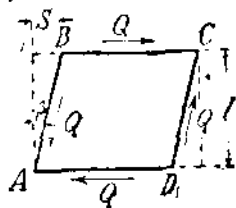
Для определения относительного сдвига приходится сдвигающее напряжение делить на величину G . Величину эту называют *модулем упругости при сдвиге*. Если известны величины E и σ , то G находится по ф-ле (39):

$$\text{при } \sigma = \frac{1}{3}, \quad G = \frac{3}{8} E.$$

Как мы дальше увидим, величина G легко может быть найдена из опытов на кручение, и тогда величина σ , непосредственное определение которой затруднительно, найдется из ф-лы (39).

§ 39. Потенциальная энергия сдвига.

Предположим, что имеется брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Основание AD бруска удерживается неподвижно. К боковым граням приложены касательные усилия, непрерывно возрастающие от нуля и до некоторого значения Q , не вызывающего напряжений, превышающих предел упругости. Под действием этих усилий брусок перекашивается, основание его принимает форму ромба $ABCD$ (черт. 73). При этом внешние силы совершают работу, обращаемую в потенциальную энергию деформации. Для вычисления энергии проще всего поступить так, как это мы сделали в случае простого растяжения (см. § 4). Будем по оси абсцисс откладывать абсолютный сдвиг S грани BC относительно грани AD , а по оси ординат —



Черт. 73.

соответствующие значения сдвигающих усилий. В пределах упругости мы получим линейную зависимость между этими величинами. Работа усилий, приложенных к грани BC , представится, как и при растяжении, площадью треугольника и будет равна

$$T = \frac{QS}{2}.$$

Что касается усилий, приложенных к боковым граням, то работа их при перекашивании бруска равна нулю, так как перемещения перпендикулярны к направлению усилий.

Если принять во внимание, что абсолютный сдвиг

$$S = \beta l = \frac{Ql}{FG}$$

(здесь через F обозначена площадь грани AD), то работа внешних сил при сдвиге может быть представлена в следующих двух видах:

$$T = \frac{Q^2 l}{2FG} = \frac{\beta^2 FG l}{2}.$$

Если мы этот результат разделим на объем бруска, то найдем потенциальную энергию сдвига, отнесенную к единице объема. Эта *удельная энергия* будет равна:

$$\frac{T}{Fl} = \frac{p_t^2}{2G}, \quad \text{или} \quad \frac{T}{Fl} = \frac{\beta^2 G}{2}. \quad (41).$$

§ 40. О допускаемых напряжениях при сдвиге.

Величина допускаемых напряжений и коэффициент безопасности в значительной мере зависят от степени надежности расчетов и от способа действия внешних сил, поэтому нельзя здесь дать какие-либо определенные величины допускаемых напряжений для различных материалов. Таким нормам приходится отводить место в соответствующих отделах машиностроения и строительного искусства. В общем же курсе сопротивления материалов, на основании опытных данных и построенных на них теорий прочности, можно ответить лишь на вопрос: какое должно быть соотношение между допускаемыми напряжениями при простом растяжении и при чистом сдвиге, если напряжения в том и другом случае определены с одинаковой степенью надежности. Приняв за основание первую теорию прочности (см. § 36), найдем, что для обеспечения равной прочности при чистом сдвиге должны быть допускаемы касательные напряжения, равные нормальным напряжениям при простом растяжении.

Такое заключение опытами не подтверждается, и на практике обыкновенно берут для сдвигающих напряжений меньшие нормы, чем для растяжения.

Если за основание расчетов принять величину наибольших удлинений (II гипотеза), то величина допускаемых напряжений найдется из уравнения:

$$\frac{R_t (1 + \sigma)}{E} = \frac{R}{E}.$$

Здесь через R_t обозначены допускаемые напряжения при сдвиге и через R — допускаемые напряжения при растяжении. Из условия равенства наибольших растяжений получаем:

$$R_t = \frac{R}{1 + \sigma} \quad (42).$$

При изменении σ от 0,25 до 0,33 допускаемые напряжения на сдвиг колеблются в пределах

$$\text{от } R_t = 0,8 R \text{ до } R_t = 0,75 R.$$

Эти соотношения являются на практике общепринятыми и даются во всех справочных книжках.

Мы уже отмечали, что наиболее полно согласуются с опытами результаты, получаемые на основании третьей теории прочности. Теория эта кладет в основание расчетов разность между наибольшим и наименьшим напряжениями. Чистый сдвиг сводится к растягивающему напряжению p_x в направлении оси X -ов и равному ему сжимающему напряжению p_y в направлении оси Y -ов. Разность между наибольшими и наименьшими напряжениями будет:

$$p_x - p_y = p_t - (-p_t) = 2p_t.$$

Допускаемое напряжение R_t в случае чистого сдвига найдется из ур-ня

$$2R_t = R,$$

откуда

$$R_t = 0,5 R \quad (43).$$

Это соотношение следовало бы принимать при выборе допускаемых напряжений для таких материалов, как железо, сталь и медь. В случае чугуна выбор надлежащего значения для R_t усложняется тем обстоятельством, что сопротивление чугуна растяжению в несколько раз меньше сопротивления сжатию. Для таких материалов, как дерево, весьма существенно знать, в какой плоскости действуют сдвигающие напряжения, так как известно, что вдоль волокон сопротивление дерева сдвигающим напряжениям не велико.

§ 41. Приложения.

Явление чистого сдвига в таком виде, как мы предполагали до сих пор, на практике не встречается и не может быть осуществлено на опыте, так как не удастся приложить к граням бруска равномерно распределенные касательные напряжения, не вызывая при этом нормальных напряжений. Практический интерес к чистому сдвигу связывается отчасти с деформациями кручения и изгиба, которые будут рассмотрены ниже, отчасти с расчетами некоторых деталей, служащих для соединения частей машин и инженерных сооружений. Хотя эти расчеты с теоретической точки зрения весьма несовершенны, но мы все же остановимся на нескольких примерах, часто встречающихся на практике

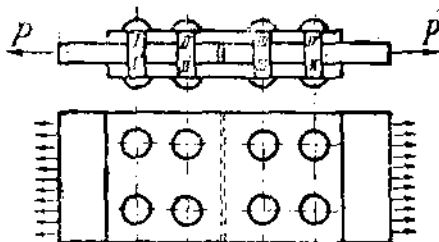
Расчет болтового соединения. Под действием растягивающих сил $2P$ (черт. 74) болт AB может разрушиться по сечениям mn и $m'n'$. Такой вид разрушения называют срезыванием. При расчете приходится диаметр болта d подбирать таким образом, чтобы величина наибольших касательных (срезающих) напряжений не превосходила известной нормы R_t . Задача эта является по существу весьма сложной, так как касательные напряжения по mn и $m'n'$ распределяются неравномерно, но при обычных расчетах пользуются грубым приближением: берут равномерное распределение напряжений и определяют d из ур-ия:

$$P: \frac{\pi d^2}{4} \leq R_t.$$

Черт. 74.

Точное решение некоторых задач теории упругости показывает ¹⁾, что распределение касательных напряжений при срезывании далеко не равномерное. Особенно значительны эти напряжения у мест приложения срезающих сил, в нашем случае у точек m, m', n и n' ²⁾. Задача усложняется еще тем обстоятельством, что под действием приложенных сил болт AB несколько изгибается, и по плоскостям mn и $m'n'$ будут действовать не только касательные, но и нормальные напряжения. Все эти усложняющие обстоятельства пропускают при обычных расчетах и исходят при определении d из вышенаписанного ур-ия. Грубость такого расчета компенсируется введением уменьшенных значений для R_t .

Расчет заклепок. Под действием растягивающих сил P заклепки могут срезаться по плоскостям I—IV и I'—IV' (черт. 75). Здесь задача еще сложнее предыдущей. Не только неизвестен закон распределения напряжений по сечению заклепки, но неизвестно также и распределение усилия P между отдельными заклепками. При обычных расчетах предполагают, что сила P распределится между заклепками равномерно; в таком случае диаметр заклепки определится из ур-ия:



Черт. 75.

$$P: n \frac{\pi d^2}{4} \leq R_t.$$

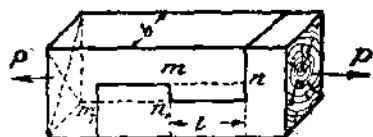
Здесь n число плоскостей, по которым должен произойти срез при разрушении. В примере, представленном на черт. 75, срезаться должны четыре

¹⁾ См. Filon, Phil. Trans. Roy. Soc. (ser. A), Vol. 201, 1903 г.

²⁾ При элементарных приемах расчета, изложенных ниже в главе об изгибе в этих местах касательные напряжения обращаются в нуль.

заклепки, каждая по двум плоскостям, следовательно, n в данном случае равняется восьми. Такой элементарный способ расчета, конечно, не учитывает всей сложности явления; в нем, например, совершенно не принято во внимание трение между соединяемыми листами, а это трение играет первенствующую роль. Заклепки ставятся на места в горячем состоянии и при остывании сильно сжимают соединяемые листы¹⁾. Соответствующие этому сжатию силы трения по поверхностям соприкосновения обыкновенно вполне достаточны, чтобы уравновесить силы P . Заклепочное соединение работает правильно лишь при наличии этих сил трения²⁾.

Расчет врубок на скалывание. С вопросом о сопротивлении дерева касательным (скалывающим) напряжениям приходится иметь дело, при расчете различного рода врубок. Возьмем в качестве примера соединение, представленное на черт. 76. Под действием сил P может произойти скалывание по плоскости m или m_1n_1 . Касательные напряжения распределяются далеко не равномерно, но при обычных расчетах с этим не считаются, принимают равномерное распределение и размеры врубки находят из ф-лы:



Черт. 76.

$$\frac{P}{lb} \leq R_t$$

¹⁾ Bach, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1912 г.

²⁾ См. Rudelloff, Versuche mit Nietverbindungen und Brückenteilen, Berlin, 1912 г.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

КРУЧЕНИЕ.

§ 42. Скручивание круглого стержня.

При экспериментальном исследовании кручения, обыкновенно, закрепляют стержень одним концом, а к другому прилагают пару сил, действующую в плоскости, перпендикулярной к оси стержня. Опыт показывает, что пока скручивающая пара не превзошла некоторого предела, угол закручивания, т.е. угол поворота свободного конца стержня, относительно закрепленного, пропорционален моменту пары. Если увеличивать длину стержня, то угол закручивания увеличивается в той же пропорции. С увеличением диаметра угол закручивания круглого стержня быстро уменьшается. Как показали опыты Wertheim'a, угол закручивания обратно пропорционален четвертой степени диаметра. Результаты опытов можно представить одной ф-лой. Если обозначим через φ — угол закручивания, через l — длину стержня, M — скручивающий момент и d — диаметр, то

$$\varphi = k \frac{Ml}{d^4}.$$

Коэффициент k зависит от упругих свойств материала. Ф-ла для угла закручивания, в случае стержней кругового поперечного сечения, может быть легко получена и аналитически.

Мы будем исходить из вполне вероятного предположения, что круговые поперечные сечения стержня при кручении сохраняют между собой первоначальные расстояния, остаются плоскими, и радиусы, проведенные в этих сечениях, не искривляются. При этих условиях отдельные элементы скручиваемого стержня будут испытывать *чистый сдвиг*. Для выяснения этого представим себе на боковой поверхности скручиваемого стержня сетку из бесконечно малых квадратиков, образованных системой параллельных кругов и образующих (черт. 77). Возьмем на поверхности бесконечно-малый элемент, основанием которого служит квадратик $mnpq$. Измерение элемента в радиальном направлении будем считать бесконечно малым. При кручении грань mn элемента сдвигается относительно грани pq и занимает новое положение $m'n'$. Абсолютная величина сдвига будет mm' , относительный сдвиг β определится ф-лой:

$$\beta = \frac{mm'}{dx}.$$

Если через φ условимся обозначать угол поворота какого-либо поперечного сечения при кручении, то разность углов поворота двух бесконечно близких сечений ab и $a'b'$ будет $d\varphi$, а относительный сдвиг выразится ϕ -лой:

$$\phi = r \frac{d\varphi}{dx},$$

где r — радиус поперечного сечения. Если вместо элемента на поверхности стержня взять элемент внутри стержня на цилиндрической поверхности радиуса $\rho < r$, concentрической с поверхностью стержня, то легко показать, что и этот элемент при кручении также будет претерпевать чистый сдвиг. Так как радиусы кругового поперечного сечения стержня при кручении остаются прямыми, то величина относительного сдвига для этого нового элемента, очевидно, будет:

$$\phi_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

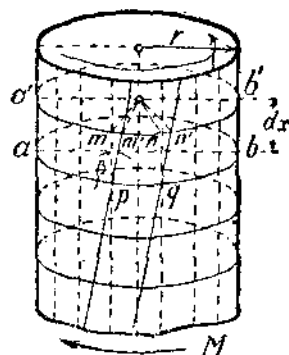
Зная величину относительного сдвига, можем получить и величину соответствующих этому сдвигу касательных напряжений p_t . Для этого нужно только относительный сдвиг помножить на модуль упругости G ; следовательно:

$$p_t = G \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

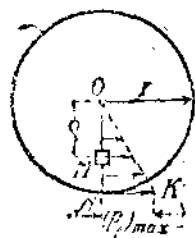
Напряжения эти будут действовать как по граням элемента, совпадающим с поперечными сечениями ab и $a'b'$ стержня, так и по граням, лежащим в плоскостях, проходящих через ось стержня. Пусть черт. 78 представляет сечение ab скрученного стержня. Напряжение по какой-либо площадке AF , лежащей в плоскости этого сечения, имеет направление, перпендикулярное к соответствующему радиусу ON , так как именно в этом направлении происходит сдвиг. Величина напряжения, как показывает вышеполученная ϕ -ла, пропорциональна расстоянию ρ взятой элементарной площадки от оси стержня. Наибольшие напряжения в плоскости поперечного сечения, очевидно, соответствуют площадкам, лежащим у контура сечения, для них:

$$(p_t)_{\max} = G r \frac{d\varphi}{dx}.$$

Если для каждой точки какого-либо радиуса ON поперечного сечения отложить по величине и направлению соответствующее напряжение, то концы полученных таким образом отрезков будут лежать на одной прямой OK . Таким образом, на основании рассмотрения деформаций стержня, мы нашли закон распределения напряжений по плоскости поперечного сечения. Для определения



Черт. 77.



Черт. 78.

величины напряжений нужно воспользоваться уравнением статики. Так как внешние силы, приложенные к концу скручиваемого стержня, приводятся к паре сил M , и плоскость этой пары перпендикулярна оси стержня, то силы упругости по плоскости какого-либо поперечного сечения ab , представляющие действие верхней части стержня на нижнюю, должны также приводиться к паре, и момент пары должен быть равен по величине и противоположен по знаку моменту M внешних сил. Имея общее выражение для напряжений в любой точке сечения, можно вычислить момент сил упругости относительно центра O кругового сечения ab . Момент усилия, приходящегося на элементарную площадку dF , расположенную в расстоянии ρ от центра O , очевидно, будет:

$$dF \cdot \rho \frac{d\varphi}{dx} G \cdot \rho.$$

Для получения момента всех сил упругости, действующих в плоскости сечения ab , придется суммировать элементарные выражения, изменяя ρ в пределах от 0 до r . Для упрощения этого суммирования поступим таким образом: выделим все элементарные площадки, заключенные между двумя концентрическими кругами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. При вычислении момента придется величину каждой из этих площадок умножить на направление $G\rho \frac{d\varphi}{dx}$ и на расстояние ρ до центра O . Пропе на эти величины помножить сразу всю площадь $2\pi\rho d\rho$ выделенного элементарного кольца. Момент усилий, приходящихся на это кольцо, будет:

$$2\pi\rho^3 G \frac{d\varphi}{dx} d\rho.$$

Для получения момента всех сил упругости придется взять интеграл от полученного выражения в пределах от 0 до r . Окончательно для величины момента получим:

$$M = \int_0^r 2\pi\rho^3 G \frac{d\varphi}{dx} d\rho = 2\pi G \frac{d\varphi}{dx} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} G \frac{d\varphi}{dx},$$

откуда:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{G \frac{\pi r^4}{2}}.$$

Интегрированием получаем выражение для угла поворота:

$$\varphi_x = \frac{Mx}{G \frac{\pi r^4}{2}} + C.$$

Условимся отсчитывать x от закрепленного сечения, тогда $\varphi = 0$ при $x = 0$; следовательно, $C = 0$. Если вместо x подставить длину скручиваемого стержня l , то для угла закручивания получим формулу:

$$\varphi_l = \frac{Ml}{G \frac{\pi r^4}{2}} = \frac{Ml}{GJ_p} \quad (44).$$

Величину $\frac{\pi r^4}{2}$ называют *полярным моментом инерции* круга и обозначают одной буквой J_p (см. стр. 128). Из вывода видно, что J_p получается путем суммирования элементарных произведений вида $2\pi r dr \cdot \rho^2$. Каждое из этих произведений находится умножением элементарной площадки $2\pi r dr$ на квадрат расстояния до центра сечения. Подставляя найденное значение $\frac{d\varphi}{dx}$ в ф-лу для ρ , получим общее выражение для напряжений:

$$\rho_i = \frac{M \rho}{\frac{\pi r^4}{2}}$$

при $\rho = r$

$$(\rho_i)_{\max} = \frac{2M}{\pi r^3} = \frac{16M}{\pi d^3} \quad (45).$$

Ф-ми (44) и (45) приходится пользоваться при расчете круглых валов. Ф-ла (44) дает возможность решать две важные технические задачи:

I. По заданному скручивающему моменту и размерам вала найти угол закручивания.

II. По наблюдаемому углу закручивания и заданным размерам поперечного сечения найти величину скручивающего момента.

С этой задачей приходится встречаться при определении по углу кручения вала мощности машины¹⁾.

Та же ф-ла (44) дает возможность определить опытным путем модуль упругости при сдвиге G . Нужно определить размеры цилиндрического стержня и потом наблюдать угол закручивания, соответствующий заданному моменту скручивающей пары. Применяя для измерения угла закручивания зеркальный прибор, можно определить G довольно точно.

Ф-ла (44) для угла закручивания легко может быть распространена на случай кольцевого сечения. Мы видели, что часть материала вала у оси мало напряжена, следовательно, выгодно сделать вал полым. На практике полые валы встречаются в больших паровых машинах, где диаметр их нередко достигает 0,5 м, а также в авиационных двигателях и двигателях Дизеля. При выводе основной ф-лы придется изменить только пределы интегрирования. Если r_1 и r_0 наружный и внутренний радиусы вала, то

$$M = 2\pi G \frac{d\varphi}{dx} \int_{r_0}^{r_1} \rho^3 d\rho,$$

откуда:

$$M = G \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{\pi r_1^4}{2} - \frac{\pi r_0^4}{2} \right).$$

¹⁾ Литературные указания относительно приборов, служащих для определения углов закручивания валов, имеются в журнале. Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1914 г., стр. 615.

Для напряжений в случае полых валов получаем:

$$(p_t)_{\max} = - \frac{Mr_1}{\frac{\pi r_1^4}{2} - \frac{\pi r_0^4}{2}}.$$

§ 43. Скручивание стержней прямоугольного поперечного сечения.

Задача об определении касательных напряжений при скручивании стержней прямоугольного поперечного сечения не может быть точно решена элементарным путем.

Усложнения получаются благодаря тому, что в данном случае первоначально плоские поперечные сечения искривляются, как то видно из прилагаемой фотографии (черт. 79). По перекашиванию сетки квадратов, нанесенной на боковых гранях стержня, можно судить о величине касательных напряжений в различных точках. Квадратики, лежащие у ребер стержня, не перекашиваются — здесь касательные напряжения обращаются в нуль. Наибольшее искажение квадратов соответствует средним точкам боковых граней бруска — здесь касательные напряжения достигают своего максимального значения. Мы не будем здесь излагать приближенных способов вычисления этих напряжений и ограничимся результатами точного решения, приводимого в курсах теории упругости ¹⁾. На черт. 80 представлено поперечное сечение бруска. Наибольшие касательные напряжения соответствуют точкам A и B, серединам длинных сторон прямоугольника. Величина этих напряжений может быть вычислена по ф-ле:

$$(p_t)_{\max} = \frac{M}{\mu b c^2} \quad (46).$$

Здесь μ коэффициент, зависящий от соотношения между сторонами прямоугольного сечения. Несколько значений для μ дано в нижеприведенной таблице A (стр. 117).

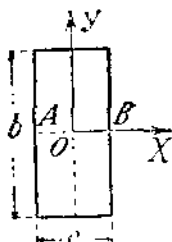
Результаты, получаемые на основании этой таблицы, с достаточной точностью могут быть представлены приближенной ф-лой:

$$(p_t)_{\max} = \frac{M(3b + 1.8c)}{b^2 c^2}.$$

Для вычисления угла закручивания стержня можно пользоваться такой ф-лой:

$$\varphi = \frac{Ml}{G \mu b c^3} \quad (47).$$

Значения множителя μ для разных соотношений между сторонами прямоугольника приведены в таблице A.



Черт. 81.

¹⁾ Решение это принадлежит знаменитому французскому ученому Barré de Saint-Venant¹⁾; см. приложение к § 156 курса La résistance des corps solides par Navier, 1864 г.

ТАБЛИЦА А.

$\frac{b}{c}$	1	1,5	1,75	2	2,50	3	4	10	∞
μ	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,312	0,333
α	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,312	0,333
γ	1	0,572	0,469	—	0,307	—	0,186	0,074	0

Иногда придется вычислять касательные напряжения в различных точках контура прямоугольного сечения. Для этого можно воспользоваться числовыми результатами, полученными S.-Venant'ом. Напряжение в точке, соответствующей середине коротких сторон прямоугольника, найдется при помощи нижней строчки в таблице А. Через γ обозначено отношение этого напряжения к максимальному, определенному по Фле (46). Напряжения в нескольких точках длинной стороны прямоугольника найдутся при помощи таблицы В, и в точках короткой стороны — при помощи таблицы С.

В таблицах этих дано отношение напряжения в рассматриваемой точке к напряжению в середине соответствующей стороны.

ТАБЛИЦА В.

$\frac{b}{c}$	1	2	4
0	1	1	1
0,1	0,975	0,984	0,997
0,2	0,896	0,932	0,984
0,3	0,751	0,820	0,937
0,4	0,506	0,592	0,770
0,5	0	0	0

ТАБЛИЦА С.

$\frac{b}{c}$	1	2	4
0	1	1	1
0,1	0,975	0,973	0,973
0,2	0,896	0,889	0,889
0,3	0,751	0,737	0,736
0,4	0,506	0,489	0,489
0,5	0	0	0

§ 44. Другие формы поперечных сечений.

Кроме случая прямоугольного поперечного сечения, S.-Venant'ом разрешена задача кручения для других контуров. Решения эти особого практического значения не имеют, и мы ограничимся лишь результатами простейшего случая, когда контур поперечного

сечения представляет собою эллипс. Если a и b большая и малая полуоси эллипса, то ф-ла для угла закручивания стержня напишется так:

$$\varphi = \frac{Ml(a^2 + b^2)}{G\pi a^3 b^3} = \frac{4\pi^2 Ml J_p}{F^2 G} \quad (48),$$

здесь $F = \pi ab$ представляет площадь поперечного сечения стержня, $J_p = \frac{\pi ba^3}{4} + \frac{\pi ab^3}{4}$ есть полярный момент инерции эллипса, т.-е. интеграл вида $\int_F \rho^2 dF$. Вычисление J_p

будет приведено в следующей главе. Наибольшие касательные напряжения получаются в точках, лежащих на контуре и соответствующих концам малой полуоси. Величина этих напряжений найдется по ф-ле:

$$(\rho_t)_{\max} = \frac{2M}{\pi ab^2} \quad (49).$$

Когда $a = b$, мы получаем ф-лы, выведенные для кругового сечения.

Относительно других форм поперечного сечения заметим, что угол закручивания всегда может быть представлен в таком виде:

$$\varphi = \frac{Ml}{C},$$

где C постоянная величина, зависящая от упругих свойств материала, а также от размеров и формы поперечного сечения. Дальше условимся называть эту величину *жесткостью кручения*. S.-Venant показал для целого ряда контуров, что C получается с достаточной точностью, если заданное сечение заменить эллиптическим, имеющим ту же площадь и тот же момент инерции J_p . Угол закручивания для различных форм сечения находится в таком случае по ф-ле (48) ¹⁾.

Что касается распределения касательных напряжений, то некоторую картину этого распределения можно получить при помощи аналогии, установленной проф. Prandtl'ем ²⁾.

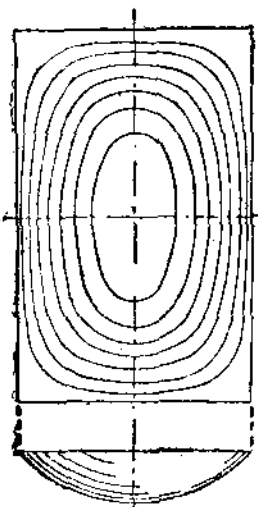
Если в пластинке вырезать отверстие, контур которого такой же, как и контур поперечного сечения скручиваемого стержня, затянуть это отверстие мембраной так, чтобы растягивающие усилия распределялись равномерно по контуру мембраны, и подвергнуть мембрану равномерному гидростатическому давлению, то поверхность, по которой мембрана выпучится под действием давлений, может служить для изучения закона распределения касательных напряжений по плоскости поперечного сечения.

Если эту поверхность пересечь системой равноудаленных плоскостей, параллельных плоскости контура, то получаемая таким образом система горизонталей обладает следующими свойствами:

1) касательная, проведенная к горизонтали в какой-либо точке, дает направление касательного напряжения в соответствующей точке поперечного сечения;

¹⁾ Этот прием вычисления приложим лишь в случае простых контуров. Для кольцевых поперечных сечений, получающихся при трубчатых стержнях, приближенный способ вычисления φ может повести к грубым ошибкам.

²⁾ Jahresbericht d. deutsch. Math. Vereinigung, 1904 г., стр. 32.



Черт. 81.

2) густота горизонталей, характеризующая уклон поверхности мембраны, пропорциональна величине касательных напряжений;

3) объем V , заключающийся между плоскостью контура и поверхностью мембраны, пропорционален жесткости стержня при кручении C , именно:

$$C = \frac{4GS}{\rho} V.$$

Здесь через S обозначено натяжение мембраны, приходящееся на единицу контура ρ — давление на единицу поверхности мембраны. Эти три положения дают возможность экспериментальным путем установить закон распределения напряжений при самых разнообразных контурах поперечного сечения ¹⁾. На черт. 81 представлены горизонталы для прямоугольного сечения. Наибольшая густота горизонталей соответствует серединам длинных сторон. Здесь, как мы видели, касательные напряжения достигают наибольшего значения. В выступающих углах напряжения обращаются в нуль ²⁾.

§ 45. Приложения.

Формулы, выведенные нами для круглого стержня, применяются при расчете валов. Здесь обыкновенно вместо величины скручивающего момента M дают количество работы, передаваемой валом в 1 секунду (мощность машины). Связь между мощностью машины и скручивающим моментом легко может быть установлена, если задано число оборотов вала в минуту. Для этого рассмотрим, какую работу совершает пара сил при повороте на угол φ (черт. 82). Путь, проходимый каждой силой, будет $r\varphi$, и работа пары

$$T = 2 Pr\varphi = M\varphi$$

равна произведению из момента пары на угол поворота.

Если через n обозначим число оборотов машины в 1 ми-

нуту, то угол поворота в секунду будет равен $\frac{2\pi n}{60}$. Положим, что вал передает N лошадиных сил, тогда мощность машины в $\text{kg}\cdot\text{m}$ будет $75N \text{ kg}\cdot\text{m}$, и скручивающий момент определится из ф-лы:

$$M \frac{2\pi n}{60} = 75N \text{ kg}\cdot\text{m} = 75 \cdot 100 N \text{ kg}\cdot\text{cm}.$$

Вставляя это значение M в ф-лу (45), найдем:

$$(\rho)_{\max} = \frac{N \cdot 75 \cdot 30 \cdot 100}{\frac{\pi^2 n r^3}{2}} = \frac{N}{n} \cdot \frac{36 \cdot 10^3}{\pi^2 d^3} \text{ kg/cm}^2.$$

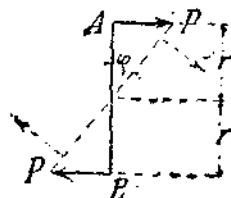
Здесь через d обозначен диаметр рассчитываемого вала. Размеры вала должны

¹⁾ См. Anther, Dinglers polyt. Journal, 1906 г., стр. 342.

²⁾ Определение напряжений при скручивании стержней трубчатого сечения рассмотрено в статье R. Bredt, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1896 г.

См. также H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre, стр. 101.

С. Тимошенко, Курс теор. упруг., ч. I, стр. 162, изд. 1914 г.



Черт. 82.

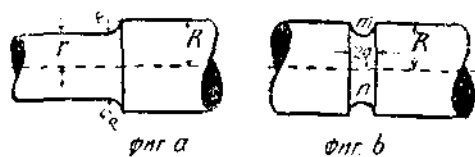
быть подобраны таким образом, чтобы наибольшие касательные напряжения не превосходили допускаемого напряжения R_t . Вставляя вместо $(p_t)_{\max}$ величину R_t , найдем:

$$d \cong \sqrt[3]{\frac{N}{n} \cdot \frac{36 \cdot 10^5}{\pi^2 R_t}} \cong \sqrt[3]{\frac{N}{n} \cdot \frac{36 \cdot 10^5}{R_t}} \quad (50)$$

По этой ф-ле приходится рассчитывать валы, если они работают только на кручение.

Что касается величины допускаемых напряжений, то она в большой степени зависит от способа действия внешних сил, от степени постоянства скручивающего момента. Постоянный скручивающий момент нужно рассматривать как исключение. Обыкновенно, благодаря неравномерности хода машин и силам инерции насаженных на валу шкивов, скручивающий момент сильно меняется, при чем действительные напряжения могут значительно отклоняться от вычисленных на основании ф-лы (45). Вопрос этот подробнее будет рассмотрен в отделе задач динамики (отд. VII). Здесь отметим только, что допускаемые напряжения при переменном моменте приходится значительно понижать.

Кроме динамических причин, величину допускаемых напряжений заставляют понижать перенапряжения материала в местах изменения диаметра вала. Если на поверхности вала имеется выточка (черт. 83, фиг. б), или два участка вала



Черт. 83.

радиусов r и R сопряжены выкружкой радиуса ρ (фиг. а), то в переходном сечении, несмотря на круговой контур, распределение напряжений весьма значительно может отклониться от того, что мы получили для вала постоянного

сечения. Это обстоятельство имеет большое практическое значение, так как в обычных валах очень часто приходится иметь дело с резкими изменениями сечения, и тогда величина наибольших напряжений в большой степени будет зависеть от радиуса ρ сопрягающей кривой. Профессор Förppl¹⁾, первый обративший внимание на роль выкружек при сопряжении участков вала различных диаметров, указал, что в случае, представленном на фиг. а, работает главным образом наружная часть материала. Расчет у переходного сечения сводится к определению напряжений в трубчатом вале, наружный диаметр которого равен $2r$ и толщина стенки равна $1,5\rho$. Дальнейшая разработка этой задачи, принадлежит Willers'у²⁾.

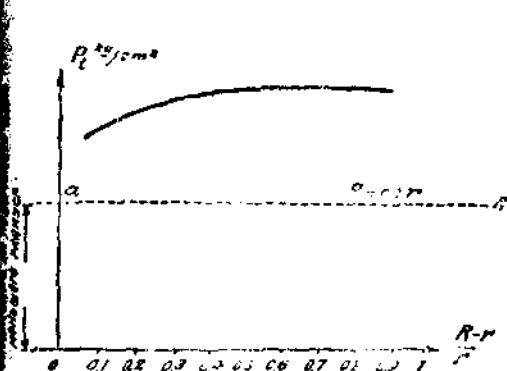
Пользуясь графическим методом, Willers разобрал целый ряд случаев и указал, что правило расчета, предложенное Förppl'ем, не вполне точно. Мы ограничимся приведением следующих результатов. Для выточки, представленной на фиг. б, наибольшие

¹⁾ Zeitschr. d. Verein. deutsch. Ing., 1906 г., стр. 1032.

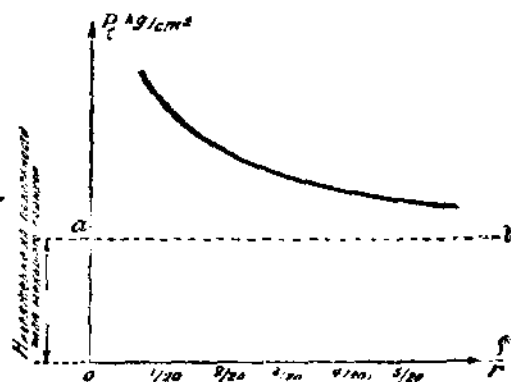
²⁾ Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1907 г., стр. 325.

См. также A. Timpe, Math. Annalen, B. 71, стр. 480, 1911 г.

напряжения получаются в местах m и n , где радиус вала равен $R - r$. Если r мало по сравнению с R , то эти напряжения вдвое больше тех, что получаются для вала постоянного сечения радиуса R на поверхности. В случае сопряжения двух участков вала различных радиусов r и R , представленного на фиг. а (черт. 83), задача усложняется тем, что величина максимальных напряжений зависит и от соотношения между радиусом r и R , и от радиуса ρ сопрягающей кривой. Чем этот радиус меньше, чем резче переход от одного сечения вала к другому, тем большие перенапряжения материала мы будем иметь. Наиболее существенные результаты приведены на диаграммах черт. 84 и 85.



Черт. 84.



Черт. 85.

В первой из этих диаграмм по оси абсцисс отложены отношения $(R - r) : r$. По ординатам отложена величины наибольших касательных напряжений, вычисленные в предположении, что радиус сопрягающей кривой $\rho = 0,1 r$. На той же диаграмме ординаты прямой ab дают величину наибольших касательных напряжений для участка вала радиуса r в местах, удаленных от переходного сечения. Из чертежа видно, что, сохраняя постоянные значения для r и для радиуса сопрягающей выкружки ρ , мы будем получать тем большее перенапряжение материала, чем больше R . Величина наибольшего напряжения при этом асимптотически приближается к значению, соответствующему сопряжению вала с диском, когда R весьма велико по сравнению с r . На второй диаграмме даны величины наибольших касательных напряжений для постоянного соотношения $r : R = 3 : 4$, но для различных значений $\rho : r$, т.е. для изменяющегося радиуса выкружки. Как и нужно было ожидать, уменьшение радиуса выкружки сопровождается увеличением перенапряжения материала в переходном сечении.

На основании произведенных вычислений, Willers приходит к заключению, что при обычных размерах выкружки можно принять величину наибольших касательных напряжений в переходном сечении равной 1,75 от величины наибольших касательных напряжений в участке вала радиуса r . Для вычисления этих напряжений придется пользоваться формулой:

$$(p_t)_{\max} = 1,75 \frac{M}{\pi r^2} \quad (51).$$

Кроме резких изменений диаметра, причиной перенапряжения в валах могут быть вырезы, идущие вдоль образующих вала. Эти вырезы вносят резкие изменения в контур поперечного сечения. На черт. 86 фиг. а и фиг. б представлены поперечные сечения для

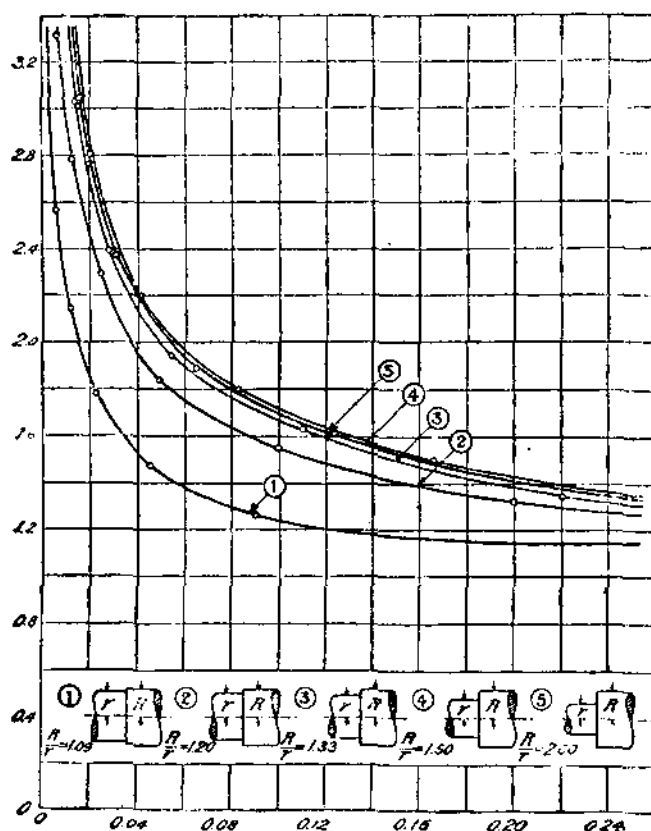
тех случаев, когда продольные желобки, сделанные на поверхности вала, имеют полу-круглое или прямоугольное поперечное сечение. Последний случай имеем как раз в местах устройства шпонок. Исследования показывают¹⁾,



Черт. 86.

что в случае, представленном на фиг. а, напряжения у дна желобка вдвое больше тех, что получаются по обычной ф-ле на поверхности вала (радиус желобка предполагается малым по сравнению с радиусом вала). При наличии входящих углов, как то имеет место в случае, представленном на фиг. б, напряжения в точках, соответствующих вершинам этих углов, обращаются в бесконечность. Повышение напряжений может получиться также благодаря пустотам, идущим вдоль вала. На фиг. б у точки *m* представлено поперечное сечение цилиндрической полости малого кругового поперечного сечения. Благодаря наличности этой полости, напряжения в соседних точках удваиваются.

Все перечисленные случаи перенапряжения имеют чисто местный характер, и их трудно наблюдать при обычных статических испытаниях стержней на кручение.



Черт. 86а.

¹⁾ Larmour, Phil. Mag., Jan. 1892 г., стр. 76.

G. Filon, Lond. Phil. Trans., Vol. 193, 1900 г., стр. 309.

Если испытуемый стержень сделан из железа, мягкой стали или другого какого-либо материала, способного получать значительные пластические деформации, то при кручении в перенапряженных местах получаются прежде всего остаточные деформации, и при дальнейшем увеличении скручивающего момента распределение напряжений не будет значительно отличаться от теоретического. Этим обстоятельством объясняется, почему факторы, вызывающие сильные местные перенапряжения материала, не влияют существенно на временное сопротивление скручиваемых стержней ¹⁾. Чтобы отметить перенапряжения, нужно брать стержни из материала хрупкого, например, из стекла ²⁾, или производить опыты с повторными нагрузками ³⁾. При переменных усилиях в перенапряженных местах может начаться разрушение, благодаря усталости материала. Это последнее обстоятельство имеет особенное практическое значение, так как с переменными усилиями почти всегда приходится считаться при проектировании машинных частей.

Вопрос о напряжениях у выкружек в валах переменного сечения (см. черт. 83, фиг. а) представляет большое практическое значение, и в настоящее время имеется сравнительно простой метод экспериментального определения распределения напряжений у выкружек ⁴⁾. Результаты этих экспериментов даны 5 кривыми на черт. 86а — для пяти различных соотношений $\frac{R}{r}$.

При оси абсцисс отложены отношения $\frac{p}{r}$ где p — радиус выкружки и r — радиус вала меньшего диаметра. По оси ординат отложены отношения наибольших касательных напряжений у выкружек к наибольшим напряжениям, вычисленным для вала радиуса r по обычной формуле:

$$(p)_{\max} = M : \frac{\pi r^3}{2}.$$

Пользуясь этими кривыми, можно легко найти коэффициент концентрации напряжений для любых пропорций вала.

§ 46. Энергия деформации при кручении.

Если представить себе один конец стержня закрепленным, а к другому приложить постепенно все возрастающую скручивающую пару сил, то при деформации в пределах упругости силы эти совершат работу, обращаящуюся в потенциальную энергию деформированного стержня. Для определения потенциальной энергии воспользуемся прежним приемом (см. § 4). По оси абсцисс будем откладывать углы закручивания φ , по ординатам — соответствующие значения

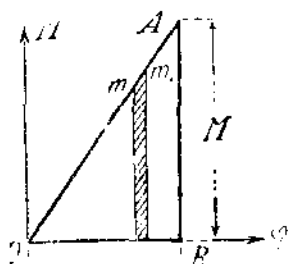
¹⁾ H. Moore. University of Illinois bulletin, Vol. VII. 1909 г., № 42.

²⁾ Alfons Leon. Kerbgrösse und Kerbwirkung, 10 Mitteil. aus d. Mech.-techn. Labor., Wien, 1910 г.

³⁾ A. Föppel. Mitteilungen aus d. Mech.-techn. Lab., München, Heft 31, 1909 г.

⁴⁾ Этот метод разработан в лаборатории Westinghouse'a инженером Lydik S. Jacobsen'ом, см. The American Soc. of Mechanical Engineers Transactions, Vol. 47, 1926 г., p. 619.

скручивающего момента. Диаграмма представится наклонной прямой OA (черт. 87) (предполагается, конечно, что при деформации напряжения нигде не выходят за предел пропорциональности). Возьмем какое-либо промежуточное состояние стержня, определяемое точкой m . Чтобы перейти от этого состояния к бесконечно близкому ему состоянию m_1 , нужно скручивающему моменту дать некоторое приращение dM , при чем угол закручивания возрастет на некоторую величину $d\varphi$. Работа внешних сил при этом поворачивании на угол $d\varphi$ пред-



Черт. 87.

ставится площадкой, заштрихованной на черт. 87. Полная работа внешних сил при изменении угла закручивания от 0 до φ представится площадью треугольника OAB и равна, следовательно,

$$\frac{M\varphi}{2},$$

как и при растяжении, в ф-лу вошел множитель $\frac{1}{2}$.

Объясняется это тем обстоятельством, что момент M приложен не сразу, а возрастал постепенно от 0 до окончательного своего значения. Пользуясь зависимостью между φ и M , можно потенциальную энергию выразить или через φ или через M . Вставляя в вышенapisанное выражение для работы внешних сил, вместо φ , его значение (44), получим для случая круглого стержня:

$$V = \frac{M^2}{2G_p} \quad (52).$$

В зависимости от φ потенциальная энергия представится так:

$$V = \frac{\varphi^2 GJ_p}{2l} \quad (53).$$

Для любой формы поперечного сечения имеем:

$$\varphi = \frac{Ml}{C},$$

и энергия кручения напишется так:

$$V = \frac{M^2 l}{2C} \quad (54).$$

В каждом частном случае придется только вставлять соответствующее значение C .

§ 47. Расчет винтовых рессор.

Предположим, что ось рессоры представляет винтовую линию, лежащую на круговом цилиндре радиуса R . Верхний конец рессоры будем считать закрепленным, к нижнему приложим растягивающую силу P (черт. 88). При расчете представляет интерес не только величина наибольших напряжений, но также деформации рессоры, опускание точки привеса груза P . Для упрощения

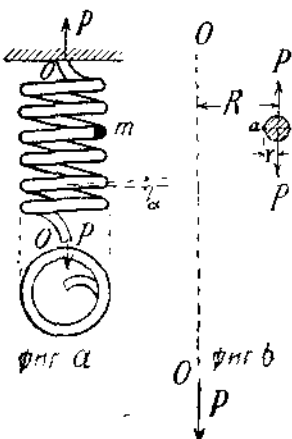
решения этих вопросов будем пренебрегать углом α , составляемым касательной к винтовой линии с горизонтом ¹⁾. В таком случае напряжения будут обусловлены, главным образом, деформацией кручения. В этом легко убедиться путем таких рассуждений. Разсечем рессору у точки m на две части плоскостью, проходящей через OO , и рассмотрим условие равновесия верхней половины. Чтобы равновесие не нарушалось, необходимо по плоскости произведенного сечения приложить усилия, которые заменяли бы действие нижней отброшенной части на верхнюю. На нижнюю часть рессоры действует только одна сила P , лежащая в плоскости произведенного сечения в расстоянии R от его центра. Мы не изменим условия равновесия, если в центре сечения приложим еще две равных и прямо противоположных силы P (см. фиг. б)²⁾; тогда действие нижней части рессоры на верхнюю сведется к силе P , приложенной в центре произведенного сечения, и к паре сил $P \cdot R$, действующей в плоскости сечения, приблизительно перпендикулярной к винтовой линии. Напряжения, вызываемые этой парой, будут такие же, как при скручивании призматического стержня; они могут быть определены по ранее найденным ф-лам. Что касается силы P , то она вызовет касательные напряжения, которые для простоты будем считать равномерно распределенными по плоскости сечения. Если предположить сечение круговым, как это взято на нашем чертеже, то наибольшее напряжение будет иметь место в точке a ; здесь напряжения от кручения и от силы P складываются и представятся такой ф-лой:

$$\frac{PR}{\pi r^3} + \frac{P}{\pi r^2} = \frac{P}{\pi r^2} \left(\frac{2P}{r} + 1 \right).$$

Так как R в несколько раз превосходит r — радиус сечения, то вторым членом в скобках обыкновенно пренебрегают и рассчитывают рессору только на кручение.

Подобным же образом могут быть рассчитаны и конические винтовые рессоры ³⁾. Несколько численных примеров имеется в нашем сборнике задач ³⁾.

При определении опускания точки привеса груза P , „осадки“ рессоры, воспользуемся выражением потенциальной энергии. Пока напряжения не пре-



Черт. 88.

¹⁾ Экспериментальная проверка приближенных ф-л для расчета винтовых рессор имеется в работе Zacharia's'a, Untersuchungen an Zylindrischen Schraubenfedern. Mitteil. d. Forschungsarbeiten, Heft 106.

²⁾ См. V Meyer. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1900 г., стр. 1791.
См. также Engineering, 1912 г., стр. 207.

³⁾ 4-е изд. 1928 г.

взошли предела пропорциональности, осадка рессоры будет пропорциональна растягивающей силе, и работа внешних сил, как и в ранее рассмотренных случаях, может быть представлена на диаграмме площадью некоторого треугольника. Если через P обозначим окончательное значение растягивающей силы и через λ — соответствующую осадку рессоры, то работа внешних сил при растяжении будет равна:

$$\frac{P\lambda}{2}.$$

Эта работа обращается в потенциальную энергию рессоры. При составлении выражения для этой энергии примем во внимание лишь деформацию кручения. В таком случае можно воспользоваться ф-лой (52), выведенной для кручения круглого стержня. Величина скручивающего момента равна $P \cdot R$; что же касается длины l , то ее можно приблизительно выразить ф-лой:

$$l = 2\pi Rn,$$

где n число витков рессоры. Вставляя это в ф-лу (52) и приравнявая результат работе внешних сил, получим ур-ие:

$$\frac{P\lambda}{2} = \frac{P \cdot R^2 2\pi Rn}{2GJ_p},$$

откуда найдем:

$$\lambda = P \frac{4nR^3}{Gr^4} \quad (55).$$

Мы предполагали контур поперечного сечения круговым. Иногда приходится иметь дело с прямоугольным (буферные рессоры) или квадратным поперечным сечением; тогда при вычислении растяжения λ придется при составлении выражения потенциальной энергии воспользоваться общей ф-лой (54). После изготовления рессоры обыкновенно закаливают, и, так как закаленная сталь обладает весьма высоким пределом пропорциональности, то допускаемые напряжения для рессор берут весьма высокими: R , колеблется в пределах от 4000 kg/cm² до 8000 kg/cm².

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

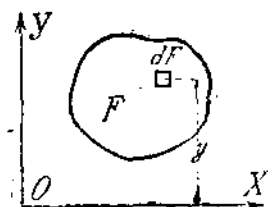
МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР.

§ 48. Простейшие задачи.

При исследовании изгиба стержней приходится часто встречаться с несколькими определенными интегралами, величины которых зависят только от размеров поперечного сечения стержня. Эти новые понятия чисто геометрического характера мы здесь и рассмотрим.

Моментом инерции плоской фигуры относительно какой-либо оси X (черт. 89), лежащей в плоскости фигуры, называется интеграл:

$$J_x = \int_F y^2 dF,$$



Черт. 89.

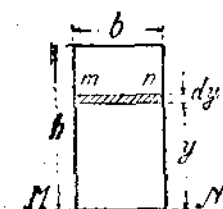
распространенный на всю площадь фигуры. Величина этого интеграла может быть получена или аналитически — путем интегрирования, или графически, или, наконец, механически — с помощью особого прибора „интегратора“. В случае простых фигур аналитическое определение момента инерции может быть выполнено без всяких затруднений.

Возьмем, например, *прямоугольник* (черт. 90) и найдем его момент инерции относительно основания (ось MN). Для этого разобьем нашу фигуру на бесконечно малые элементы линиями, параллельными основанию. Пусть mn один из этих элементов, взятый в расстоянии y от оси MN . Площадь этого элемента будет:

$$dF = b \, dy.$$

Вычисление момента инерции сведется к нахождению интеграла:

$$\int_F y^2 b \, dy.$$

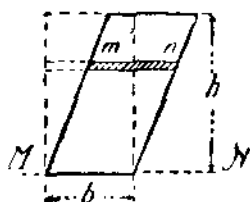


Черт. 90.

Чтобы интегрирование распространить на всю площадь прямоугольника, нужно y менять от 0 до h , следовательно:

$$J_x = \left| \frac{by^3}{3} \right|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Формулу, выведенную для прямоугольника, можно применить и к *параллелограмму* (черт. 91), так как, очевидно, момент инерции фигуры не изменится, если каждый элемент площади переместить параллельно оси, относительно которой моменты вычисляются. Зная момент инерции прямоугольника, легко вычислить моменты инерции для плоских фигур, составленных из прямоугольников.



Черт. 91.

Для вычисления момента инерции *треугольника* относительно основания (черт. 92) можно так же, как и в случае прямоугольника разбить фигуру на бесконечно малые элементы линиями, параллельными оси. Площадь какого-либо элемента m выразится, очевидно, так:

$$dF = \frac{b(h-y)}{h} dy,$$

и искомый момент инерции будет:

$$J_x = \int_0^h \frac{b(h-y)}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

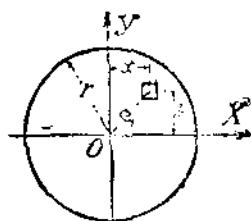
Если бы треугольник ABC дополнили, как то указано на черт. 92, пунктиром до параллелограмма,

то момент инерции полученного параллелограмма равнялся бы $\frac{bh^3}{3}$, следовательно, момент инерции треугольника BDC относительно оси AC , проходящей через вершину и параллельной основанию BD , будет:

$$J = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{4}.$$

Рассмотрим теперь моменты инерции простейших фигур с криволинейными контурами.

По симметрии заключаем, что моменты инерции *круга* (черт. 93) относительно всех осей, проходящих через центр, одинаковы, следовательно:



Черт. 93.

$$J_x = J_y = \frac{J_x + J_y}{2}.$$

Из определения момента инерции следует:

$$J_x + J_y = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F \rho^2 dF.$$

Интеграл $\int_F \rho^2 dF$ называют *полярным моментом инерции* (см. стр. 115) и обозначают через J_p . Для круга было найдено:

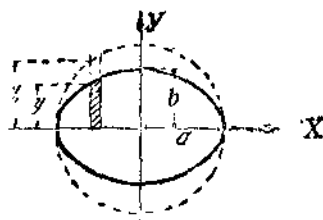
$$J_p = \frac{\pi r^4}{2};$$

следовательно:

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Момент инерции эллипса относительно оси X проще всего получить путем сравнения с кругом, намеченным на черт. 94 пунктиром. Эллипс можно рассматривать, как проекцию круга. В таком случае между соответствующими ординатами круга и эллипса будет иметь место такое соотношение:

$$y : y_1 = b : a.$$



Черт. 94.

Моменты инерции элементарных прямоугольников с высотами y и y_1 будут относиться, как $y^3 : y_1^3$, или как $b^3 : a^3$. Такое соотношение, очевидно, будет и между моментами инерции эллипса и круга. Для круга момент инерции равен $\frac{\pi a^4}{4}$, для эллипса получим:

$$J_x = \frac{\pi a^4}{4} \frac{b^3}{a^3} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Подобным же образом найдем:

$$J_y = \frac{\pi b a^3}{4}.$$

Пользуясь этими результатами, находим полярный момент инерции для эллипса:

$$J_p = J_x + J_y = \frac{\pi b a^3}{4} + \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2).$$

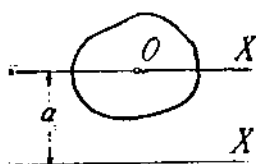
Этой ф-лой мы пользовались при исследовании кручения стержней эллиптического сечения [см. ф-лу (48)].

§ 49. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей.

Положим, нам известен момент инерции $J_{x'}$ фигуры относительно оси X' , проходящей через центр тяжести, и нам нужно найти момент инерции J_x относительно оси X , параллельной X' и проходящей в расстоянии a от нее (черт. 95). Если через y будем обозначать расстояние какого-либо элемента площади от оси X (положительная ось Y направлена вертикально вверх), а через y' — расстояние от оси X' , то, очевидно:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_F (y' + a)^2 dF = \int_F y'^2 dF + \int_F a^2 dF + 2 \int_F a y' dF.$$

Первый из этих интегралов есть не что иное, как момент инерции фигуры относительно оси X' ; что касается последнего члена, то он, очевидно, обращается в нуль; $\int_F y' dF$ есть *статический момент* фигуры относительно оси X' . Величина эта равна нулю, так как ось X' проходит через центр тяжести фигуры. Окончательно мы находим:



Черт. 95.

$$J_x = J_{x'} + a^2 F \quad (56).$$

Полученная ф-ла дает возможность легко находить момент инерции фигуры относительно любой оси в плоскости фигуры, если известен момент инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести фигуры. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться нахождением моментов инерции фигур относительно осей, проходящих через центр тяжести.

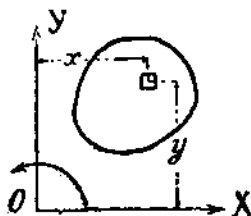
§ 50. Главные оси.

Если мы разобьем площадь фигуры на бесконечно малые элементы, умножим каждый элемент на произведение координат и составим сумму:

$$\int_F xy dF,$$

где интегрирование распространено на всю площадь фигуры, то получим *центробежный момент инерции* фигуры относительно осей X и Y . Величину эту обозначают через J_{xy} .

Всегда можно систему прямоугольных осей повернуть таким образом, чтобы центробежный момент инерции обратился в нуль. В самом деле, пусть для выбранного направления осей величина J_{xy} положительна. Если оси поворачивать около начала координат, то координаты x и y меняют свою величину, изменяется величина J_{xy} . Положим, что мы повернули оси на 90° в направлении, указанном стрелкой (черт. 96); пусть x' и y' новые координаты какого-либо элемента площади, очевидно:



Черт. 96.

$$x' = y; \quad y' = -x.$$

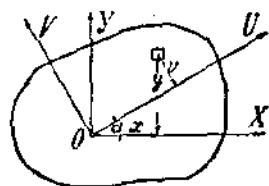
В таком случае каждый элемент в интеграле $\int_F xy dF$ изменяет свой знак, сохраняя прежнюю абсолютную величину, и, следовательно:

$$J_{x'y'} = -J_{xy}.$$

Так как при повороте осей величина J_{xy} меняется непрерывно, то, при переходе от положительных значений к отрицательным, она должна пройти через нуль. Те направления координатных осей, для которых центробежный момент инерции обращается в нуль, называют *главными направлениями* и соответствующие оси — *главными осями инерции*. В дальнейшем мы будем определять момент инерции фигур относительно осей, проходящих через центр тяжести. Главные оси, проходящие через центр тяжести, будем называть *главными центральными осями инерции*. Если известны моменты инерции относительно главных осей, то легко могут быть вычислены моменты инерции для осей, любым образом наклоненных к главным.

Пусть оси X и Y (черт. 97) — главные, и нам известны

$$J_x = \int_F y^2 dF \quad \text{и} \quad J_y = \int_F x^2 dF.$$



Черт. 97.

Чтобы составить момент инерции фигуры относительно какой-либо оси U , наклоненной под углом α к оси X , нам придется вычислить сумму:

$$J_u = \int_F v^2 dF,$$

где через v обозначено расстояние какого-либо элемента до оси U . Из чертежа видно, что:

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

следовательно:

$$\begin{aligned} J_u &= \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F xy dF. \end{aligned}$$

Последний член в правой части полученного равенства должен равняться нулю, так как оси X и Y — главные. Окончательно будем иметь:

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha \quad (57).$$

Полученная ф-ла дает возможность вычислить J_u для любого α .

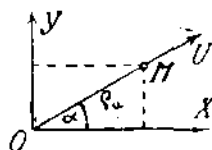
§ 51. Эллипс инерции.

Для наглядного представления изменения момента инерции фигуры в зависимости от направления оси, введем новое понятие. Назовем *радиусом инерции* для какой-либо оси U величину

$$r_u = \sqrt{\frac{J_a}{F}},$$

тогда, разделяя на F ф-лу (57), найдем;

$$r_u^2 = r_x^2 \cos^2 \alpha + r_y^2 \sin^2 \alpha \quad (58).$$



Черт. 98.

Возьмем произвольную точку O (черт. 98) и будем по направлению каждой оси откладывать величину ρ_u , обратно пропорциональную соответствующему радиусу инерции:

$$\rho_u = \frac{m^2}{r_u},$$

где m — длина некоторого, пока произвольного, отрезка.

Соответственно этому по оси X отложим величину:

$$\rho_x = \frac{m^2}{r_x},$$

по оси Y — величину:

$$\rho_y = \frac{m^2}{r_y}.$$

Ур-ие (58) в таком случае приобретет вид:

$$\frac{1}{\rho_u^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_y^2} \quad (58').$$

Если M конец ρ_u , то, очевидно, координаты этой точки будут:

$$x = \rho_u \cos \alpha; \quad y = \rho_u \sin \alpha.$$

Вставляя это в ур-ие (58'), получим между координатами x и y такую зависимость:

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1,$$

т.е., конец отрезка ρ_u при изменении угла α перемещается по эллипсу, полуосями которого будут величины ρ_x и ρ_y . Длину m для определения отрезка ρ_u мы выбрали совершенно произвольно; изменяя ее, можно получить ряд эллипсов. Особенно удобно для m выбрать длину, определяемую ур-ием:

$$m^2 = r_x r_y;$$

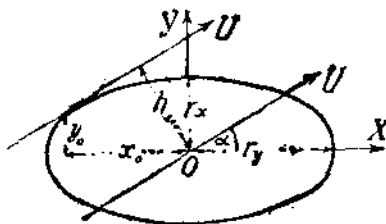
в таком случае:

$$\rho_x = \frac{m^2}{r_x} = r_y; \quad \rho_y = \frac{m^2}{r_y} = r_x.$$

Следовательно, полуосями эллипса будут служить радиусы инерции, причем по оси X -ов откладывается радиус инерции r_y , а по оси Y -ов — r_x . По-

строенный на этих полуосях эллипс будем называть эллипсом инерции (черт 99). Он дает возможность легко определять радиус инерции для оси U наклоненной под любым углом α к оси X -ов. Для этого нужно только провести линию U' , параллельную U и касательную к эллипсу инерции. Расстояние h от центра O до касательной U' будет величина радиуса инерции, соответствующего оси U , так как для эллипса:

$$h^2 = r_y^2 \sin^2 \alpha + r_x^2 \cos^2 \alpha.$$



Черт. 99.

Это свойство эллипса можно легко доказать таким образом.

Ур-ие прямой U' в нормальном виде будет:

$$h = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Так как U' есть касательная к эллипсу в точке с координатами x_0 и y_0 то ур-ие ее может быть представлено и в таком виде:

$$\frac{x_0 x}{r_y^2} + \frac{y_0 y}{r_x^2} = 1.$$

Сравнивая это с вышенаписанным ур-ием, получим:

$$\frac{\frac{x_0}{r_y^2}}{-\sin \alpha} = \frac{\frac{y_0}{r_x^2}}{\cos \alpha} = \frac{1}{h},$$

или, возведя в квадрат, найдем:

$$\frac{\frac{x_0^2}{r_y^2}}{r_y^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{y_0^2}{r_x^2}}{r_x^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{h^2},$$

откуда:

$$\frac{\frac{x_0^2}{r_y^2} + \frac{y_0^2}{r_x^2}}{r_y^2 \sin^2 \alpha + r_x^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{r_y^2 \sin^2 \alpha + r_x^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{h^2},$$

следовательно:

$$h^2 = r_y^2 \sin^2 \alpha + r_x^2 \cos^2 \alpha.$$

§ 52. Нахождение главных осей инерции.

Нахождение направления главных осей инерции сводится к определению тех направлений, для которых центробежный момент заданной фигуры обра-

падает в нуль. Пусть X и Y представляют систему прямоугольных координат, для которых известны моменты инерции:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF$$

и центробежный момент:

$$J_{xy} = \int_F xy dF.$$

Нам нужно найти такое значение для угла α , чтобы центробежный момент относительно новых осей U и V :

$$J_{uv} = \int_F uv dF = 0.$$

Из черт. 100 имеем:

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha; \quad u = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

следовательно:

$$J_{uv} = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) dF =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \int_F (y^2 - x^2) dF + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F xy dF = (J_x - J_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

Для того, чтобы оси U и V были главными, необходимо:

$$J_{uv} = 0, \text{ т.е. } (J_x - J_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} + J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \quad (59).$$

Подставляя в полученную ф-лу вместо J_x , J_y и J_{xy} известные величины найдем для α два значения, отличающиеся одно от другого на 90° . Эти значения α определяют положение главных осей U и V . Раз α найдено, то легко найти J_u и J_v . В самом деле:

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

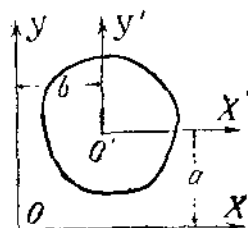
$$J_v = \int_F u^2 dF = \int_F (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dF = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Составляя сумму и разность выражений, полученных для J_u и J_v , найдем более удобные для вычислений ф-лы:

$$J_u + J_v = J_x + J_y; \quad J_u - J_v = (J_x - J_y) \cos 2\alpha - 2J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Последней из этих ф-л можно пользоваться для определения J_{xy} , если J_u и J_v известны. В некоторых случаях вычисление J_{xy} может быть значительно упрощено при помощи следующей теоремы. Если известен центробежный момент инерции $J_{x'y'}$ относительно осей X' и Y' , проходящих через центр тяжести, то центробежный момент инерции J_{xy} относительно параллельных им осей X и Y (черт. 101) может быть вычислен по ф-ле:

$$J_{xy} = J_{x'y'} + Fab \quad (60).$$



Черт. 101.

В самом деле:

$$\begin{aligned} J_{xy} = \int_F xy dF &= \int_F (x' + b)(y' + a) dF = \int_F x'y' dF + \int_F ab dF + \\ &+ \int_F by' dF + \int_F ax' dF. \end{aligned}$$

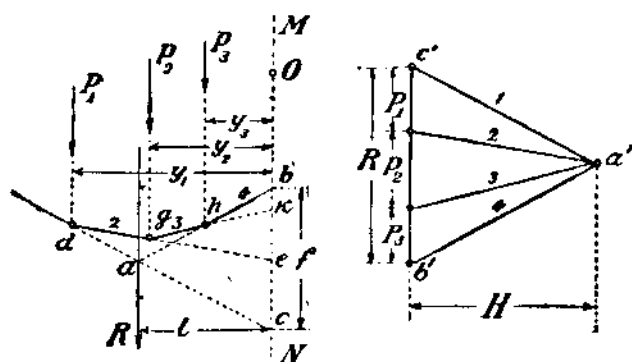
Последние два члена обращаются в нуль, так как $\int_F y' dF$ и $\int_F x' dF$ представляют собой статические моменты площади F относительно осей X' и Y' , а эти оси по условию проходят через центр тяжести. Приняв это во внимание, придем к ф-ле (60).

§ 53. Графический способ нахождения моментов инерции.

При вычислении момента инерции плоской фигуры относительно данной оси, приходится фигуру разбивать на элементарные площадки, составлять произведения из величин этих площадок на квадрат расстояний их до оси и вычислять сумму полученных таким образом произведений. Все эти операции могут быть приведены путем графических построений к нахождению известной площади. Для этого придется воспользоваться известным построением, применяемым в графической статике при определении момента системы параллельных сил. Положим, дана система сил P_1 , P_2 и P_3 (черт. 102). Для нахождения момента этих сил относительно данной точки O нужно равнодействующую сил R помножить на соответствующее плечо L . Если вычертить для заданной системы сил веревочный многоугольник $dghb$ и принять во внимание, что $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ подобны (стороны треугольников параллельны), то можно написать:

$$R:f = H:l, \quad \text{откуда } RI = fH.$$

Т.-е. для определения момента системы параллельных сил относительно заданной точки нужно через эту точку провести прямую, параллельную силам, взять отрезок прямой f , заключенный между крайними сторонами веревочного



Черт. 102.

Если нужно найти, например, момент силы P_1 , то для этого продолжаем соответствующие стороны 1 и 2 веревочного многоугольника до пересечения с осью MN . Произведение отрезка ec на полюсное расстояние H даст искомый момент. Легко доказать, что это произведение равно $P_1 y_1$. Рассмотрим теперь, какое значение имеет площадь Δdec .

$$\text{Площадь } \Delta dec = \frac{(ec)y_1}{2} = \frac{P_1 y_1^2}{2H}.$$

Подобные же выражения можно получить и для треугольников, относящихся к силам P_2 и P_3 :

$$\text{площадь } \Delta gke = \frac{(ke)y_2}{2} = \frac{P_2 y_2^2}{2H},$$

$$\text{площадь } \Delta hbk = \frac{(bk)y_3}{2} = \frac{P_3 y_3^2}{2H}.$$

Окончательно для площади S многоугольника $dghbc$ получаем выражение:

$$S = \Delta dec + \Delta gke + \Delta hbk = \frac{1}{2H} (P_1 y_1^2 + P_2 y_2^2 + P_3 y_3^2),$$

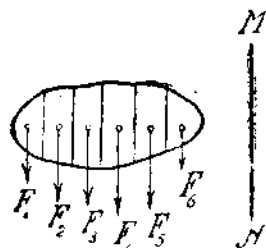
откуда:

$$P_1 y_1^2 + P_2 y_2^2 + P_3 y_3^2 = 2HS \quad (a).$$

Этим результатом можно воспользоваться при нахождении моментов инерции плоских фигур.

Положим, нужно найти момент инерции фигуры, представленной на черт. 103, относительно оси MN . Разобьем фигуру на площадки $F_1, F_2, \dots$ и пусть $y_1, y_2, y_3, \dots$ расстояния центров тяжести этих площадок от оси MN , тогда сумма:

$$F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \dots + F_6 y_6^2 \quad (b)$$



Черт. 103.

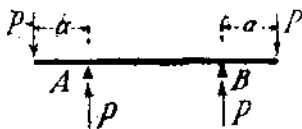
представит собой приближенное значение момента инерции фигуры. Точность будет тем большая, чем на большее число площадок фигура будет разбита. Для составления выражения (b) нужно поступить так же, как это мы делали с силами $P_1, P_2 \dots$ при составлении выражения (a). Придется только при построении многоугольника сил откладывать в известном масштабе площади $F_1, F_2, \dots$. Полюсное расстояние в таком случае тоже будет представлять известную площадь, а произведение $2HS$ будет иметь измерение (длина)⁴, что соответствует измерению момента инерции плоской фигуры.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ УПРУГОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ.

§ 54. Понятие об изгибе.

Явление изгиба характеризуется тем, что поперечные сечения бруска, первоначально параллельные, при деформации наклоняются друг к другу, при чем искривляется ось бруска. При определении внутренних сил упругости при изгибе будем следовать прежнему методу. Рассекаем изгибаемый брусок на две части и рассматриваем условия равновесия одной из них. При этом, конечно, действие отброшенной части на оставленную придется заменить усилиями, распределенными по сделанному сечению. В случае растяжения усилия эти имели своей равнодействующей силу, направленную вдоль оси бруска. При сдвиге усилия приводились к силе, лежащей в плоскости поперечного сечения. При рассмотрении кручения мы все усилия, действующие в плоскости произведенного сечения, приводили к паре сил, при чем плоскость пары была перпенди-



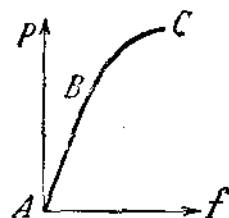
Черт. 101.

кулярна оси скручиваемого бруска. При исследовании изгиба обыкновенно получается более сложная система сил, но мы пока ограничимся простейшим случаем: явлением „чистого“ изгиба, когда усилия, приложенные к каждой части бруска, приводятся к паре сил, действующей в плоскости, проходящей через ось бруска. При этом, конечно, и усилия, распределенные по плоскости произведенного сечения, также приведутся к паре. Осуществить этот случай можно так, как это показано на черт. 104. Балка со свешивающимися концами нагружена силами P . По симметрии заключаем, что давления, передаваемые на опоры, также равны P . Тогда для любого сечения бруска в промежутке между опорами найдем, что в каждой части его приложена пара сил Pa . Мы можем еще упростить нашу задачу, предположив, что поперечное сечение симметрично, и что плоскость чертежа, в которой действуют изгибающие пары, является плоскостью симметрии для балки. При таком условии изгиб будет происходить в той же плоскости, и усилия, распределенные по поперечному сечению, приведутся к паре сил, действующей в плоскости чертежа. Что касается закона распределения усилий по сечению, то этот вопрос не может быть разрешен при помощи одной статики, приходится делать дополнительные

предположения, которые отчасти основаны на опыте, отчасти на некоторых допущениях. Справедливость этих допущений следует из того, что построенные на них выводы опытом подтверждаются. Подтверждаются эти допущения также и точными исследованиями изгиба стержней, излагаемыми в курсах теории упругости.

§ 55. Опытные данные.

При опытном исследовании изгиба можно наблюдать перемещения (прогибы) отдельных точек и деформации отдельных продольных волокон. При определении прогибов зависимость между ними и величиною внешних сил удобнее всего представлять графически — с помощью диаграммы. Откладывая по оси абсцисс величины прогибов f , а по ординатам — соответствующие значения изгибающих сил P , найдем, что в известных пределах для материалов, следующих закону Гука, имеет место линейная зависимость между f и P . Диаграмма представится отрезком наклонной прямой линии AB (черт. 105). При дальнейшем возрастании сил получают остающиеся деформации, диаграмма представится кривой BC , выпуклость которой направлена вверх. Как и при растяжении за пределы упругости, здесь можно отметить явление повышения предела пропорциональности и влияние повторных нагрузок. Повторные нагрузки обуславливают явление усталости материала и могут произвести разрушение конструкции при напряжениях, меньших временного сопротивления. С этим обстоятельством мы встретимся при рассмотрении вопроса о допускаемых напряжениях, теперь же перейдем к исследованию деформаций отдельных элементов изгибаемой балки, при чем ограничимся пока рассмотрением изгиба в пределах упругости. Одного взгляда на изогнутую балку уже достаточно, чтобы сделать заключение, что при изгибе продольные волокна бруска у выпуклой стороны mn растянуты, у вогнутой $m'n'$ — сжаты (черт. 106). Это совершенно очевидное положение далеко не сразу вошло в теорию изгиба. Знаменитый Галилей, основатель теории сопротивления материалов ¹⁾, при исследовании изгиба совершенно не принимал во внимание изменения формы балки и рассматривал балку, как идеально твердое тело. Позднейшими исследованиями было замечено, что на выпуклой стороне продольные волокна изгибаемой балки растягиваются, и только значительно позднее был выяснен вопрос о сжатии элементов балки с вогнутой стороны. Решающее значение здесь имел следующий опыт, произведенный Дюгамелем. Опертый по концам деревянный



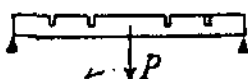
Черт. 105.



Черт. 106.

¹⁾ История развития науки сопротивления материалов и теории упругости интересно и элементарно изложена S. Venant'ом в предисловии к книге Navier: *Re-sumé des leçons de la résistance des corps solides*, Paris, 1864 г.

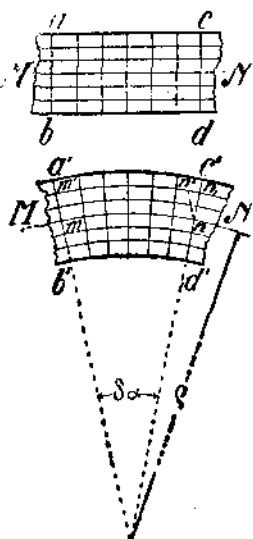
брусок изгибался силой, приложенной по середине пролета (черт. 107). С верхней стороны брусок был снабжен прорезами, доходящими до половины высоты балки. В эти прорезы плотно забивались деревянные дощечки. Если бы отдельные волокна изгибаемого бруска работали только на растяжение, то, очевидно, прорезы значительно ослабили бы брусок, — он выдерживал бы при изгибе гораздо меньшие нагрузки, чем брусок цельный. Если же в тех местах, где произведены надрезы, происходит



Черт. 107.

сжатие, то, при плотном заполнении надрезов, влияние их на прочность бруска не должно сказываться. Это последнее и было доказано опытами Дюгамеля.

Установивши положение относительно растяжения волокон со стороны выпуклой и сжатия со стороны вогнутой, исследуем изменение этих деформаций по высоте балки. Если взять балку прямоугольного поперечного сечения, поставить в условия, представленные на черт. 104 и нанести на боковой поверхности сетку (черт. 108), то при изгибе можно наблюдать, что прямые ab и cd , перпендикулярные оси балки, остаются прямыми и нормальными к изогнутой оси. Элементарные прямоугольники сетки искажаются, но прямые углы остаются прямыми. Допустим, что такие же деформации происходят и внутри балки. Тогда отдельные поперечные сечения, например, сечения, соответствующие прямым ab и cd , остаются при деформации плоскими, и явление изгиба



Черт. 108.

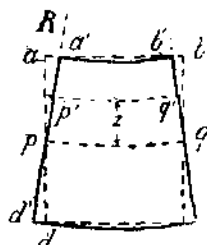
будет состоять в том, что одно сечение поворачивается относительно другого на некоторый малый угол $\delta\alpha$. При этом верхние волокна растягиваются, нижние — сжимаются. Можно найти промежуточный слой, где волокна не изменяют при изгибе своей длины. Этот слой называют *нейтральным*. На чертеже сечение этого слоя с плоскостью чертежа представлено линией MN . Сделанных допущений достаточно, чтобы составить закон изменения деформаций по высоте балки. Пусть p — радиус кривизны линии mn и ds — расстояние между сечениями ab и cd до изгиба. Волокно mn , лежащее на нейтральном слое, не меняет своей длины при изгибе; что касается волокна $m'n'$, находящегося в расстоянии z от нейтрального слоя (z считаем положительным в направлении выпуклости), то его удлинение можно выразить в зависимости от z и p таким образом. Проведем через n линию nn' , параллельную mm' , тогда отрезок n_1n' представит приращение длины волокна. Легко видеть из чертежа, что $n_1n' = z\delta\alpha$. Первоначальная длина того же волокна равна ds , или равна $pd\alpha$. Принимая это во внимание, можно относительное удлинение ϵ_z волокна, находящегося в расстоянии z от нейтрального слоя, представить так:

$$e_z = \frac{n_1 n'}{m \pi} = \frac{z \delta_2}{\rho \delta \alpha} = \frac{z}{\rho} \quad (61).$$

Относительные удлинения и укорочения волокон получаются пропорциональными расстояниям до нейтрального слоя. Если расстояния до наиболее удаленных от нейтрального слоя верхнего и нижнего волокон обозначим через h_1 и h_2 , то наибольшее относительное растяжение будет $\frac{h_1}{\rho}$ и наибольшее сжатие $\frac{h_2}{\rho}$. Величины этих удлинений и укорочений соответствуют верхней и нижней поверхности балок и могут быть точно измерены при опытах. Они, очевидно, относятся между собой, как расстояния h_1 и h_2 , что дает возможность экспериментальным путем установить положение нейтрального слоя. Многочисленные опыты, произведенные в этом направлении, указывают, что нейтральный слой проходит через центры тяжести поперечных сечений.

Мы до сих пор рассматривали удлинения и укорочения элементарных продольных волокон изгибаемых брусков. Известно, что эти деформации сопровождаются изменениями поперечных размеров. При растяжении мы имеем поперечное сжатие, при сжатии — поперечное расширение. Чтобы решить важный вопрос относительно того, находятся ли продольные волокна изгибаемой балки в состоянии простого растяжения или сжатия, необходимо выяснить, какие изменения поперечных размеров волокон происходят при изгибе, и как эти изменения влияют на искажение формы поперечного сечения изгибаемого бруска. Сделанные в этом направлении опыты указывают, что изменение формы поперечного сечения имеет место. Со стороны растянутых волокон имеем поперечное сжатие, со стороны сжатых — поперечное расширение. Если $abcd$ представляет первоначальное прямоугольное поперечное сечение бруска (черт. 109), то $a'b'c'd'$ будет вид того же сечения после изгиба. Размер pq , соответствующий нейтральному слою, не изменяется. Длина $p'q'$ уменьшается, при чем относительное укорочение ее равно $\sigma \frac{z}{\rho}$, т. е., как раз такое же, как нужно было ожидать при простом растяжении, соответствующем удлинению $\frac{z}{\rho}$. На основании этого можем сделать заключение, что при изгибе балки продольные волокна не дают друг на друга и испытывают простое растяжение или сжатие.

При рассмотрении продольных удлинений и укорочений мы нашли, что результатом этих деформаций является искривление бруска в плоскости чертежа (черт. 108); радиус кривизны мы обозначили через ρ . В поперечном сечении закон изменения удлинений и укорочений элементов, параллельных нейтральному слою pq , будет также линейный, но только величина этих деформаций меньше в отношении σ , т. е. составляет, примерно, 0,3 от соответствующих продольных удлинений и укорочений. Отсюда ясно, что соответствующий радиус кривизны R (черт. 109) должен быть, приблизительно, в $3\frac{1}{3}$ раза



Черт. 109.

больше ρ . Так как удлинениям в продольном направлении соответствуют укорочения в направлении поперечном, то искривление в поперечном направлении, очевидно, обращено выпуклостью в сторону, противоположную той, что имеет место в продольном направлении ¹⁾. Искажения поперечных сечений удобно наблюдать при изгибе брусков из сильно деформирующихся материалов, например, каучука. При изгибе металлических балок искажение сечения можно определить с помощью точных зеркальных приборов.

§ 56. О напряжениях в случае чистого изгиба.

Сделав допущение, что поперечные сечения бруска при чистом изгибе остаются плоскими (*гипотеза плоских сечений*), и выяснив то обстоятельство, что продольные волокна не оказывают друг на друга бокового давления, мы явление изгиба привели к растяжению и сжатию продольных элементов балки. Имея выражение (ф-ла 61) для относительного удлинения ϵ_z , мы можем получить соответствующие напряжения. Для этого нужно только ϵ_z помножить на величину модуля упругости E ; получим:

$$\rho_z = E \frac{z}{\rho} \quad (62).$$

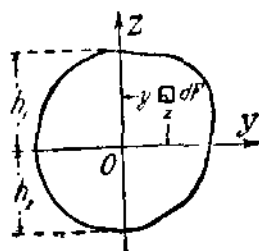
Напряжения эти нормальны к плоскости поперечного сечения и, как видно из полученной ф-лы, меняются по линейному закону. На черт. 110



Черт. 110.

графически представлен закон распределения напряжений в случае прямоугольного и треугольного сечений. Заметим, что положительные значения z мы отсчитывали от нейтрального слоя в направлении от центра кривизны.

Найдя закон распределения нормальных напряжений по плоскости поперечного сечения, покажем, что величина этих напряжений может быть подобрана таким образом, чтобы были удовлетворены условия статики. Пусть черт. 111 представляет одно из поперечных сечений балки. Поместим начало координат в центре тяжести сечения и направим ось X -ов по оси балки, ось



Черт. 111.

Z -ов расположим в плоскости действия сил, ось Y -ов направим перпендикулярно к этой плоскости. Мы предположили, что ось Z -ов есть ось симметрии для попе-

¹⁾ Соотношение между ρ и R может быть с большой точностью найдено с помощью оптической методики: см. опыты Корню, Comptes Rendus, 1869 г., т. 64, стр. 333. Корню нашел, что отношение $\rho : R$ равно Пуассонову отношению σ .

Интересные опыты по определению искажения поперечного сечения бруска при изгибе имеются в работе Williams'a, Phil. Mag., 1912 г.

речного сечения (§ 54), и, следовательно, плоскость ZX , в которой действуют изгибающие пары, является плоскостью симметрии балки. По симметрии заключаем, что изгиб будет происходить в плоскости ZX , при этом отдельные поперечные сечения будут поворачиваться относительно осей OY . Ось OY представит собой пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения. Условимся называть эту ось *нейтральной линией*. Внешние силы, приложенные к рассматриваемой части бруска, приводятся к паре сил, действующей в плоскости ZX . Для равновесия необходимо, чтобы внутренние силы, распределенные по произведенному сечению, приводились к паре такой же величины, но противоположного знака. Обозначим через dF элемент площади поперечного сечения; тогда усилие, приходящееся на этот элемент, представится так:

$$p_z dF = E \frac{z}{\rho} dF.$$

Проекции всех усилий на координатные оси будут:

$$X = \int p_z dF = \frac{E}{\rho} \int z dF; \quad Y = 0; \quad Z = 0.$$

Чтобы усилия по плоскости поперечного сечения приводились к паре сил, нужно положить

$$\int z dF = 0.$$

Следовательно, приняв гипотезу плоских сечений, мы из условий статики заключаем, что *нейтральная линия* должна проходить через центр тяжести сечения. Заключение это подтверждается опытами. Докажем теперь, что пара сил, к которой приводятся усилия по сечению, лежит в плоскости ZX , и, следовательно, моменты усилий, распределенных по сечению относительно осей X и Z , обращаются в нуль. Равенство нулю момента относительно оси X -ов следует из того, что усилия параллельны оси X -ов. Для составления моментов относительно оси Z -ов придется каждое элементарное усилие $E \frac{z}{\rho} dF$ умножить на соответствующее плечо y и составить сумму таких элементарных произведений. Искомый момент будет равен:

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int zy dF = - \frac{E J_{zy}}{\rho}.$$

По предположению ось Z -ов есть ось симметрии; следовательно, оси Y и Z — главные оси инерции, и $J_{yz} = 0$. Вместе с тем равен нулю и момент усилий относительно оси Z -ов. Таким образом доказано, что внутренние силы приводятся к паре, и плоскость пары совпадает с плоскостью ZX действия внешних сил. Прежде чем переходить к определению напряжений, расширим несколько наше доказательство. Мы для упрощения вопроса исходили из предположения, что ось Z -ов является осью симметрии для поперечного сечения балки. Это дало нам возможность заключить, что плоскость изгиба совпадает с плоскостью

действия сил, и, следовательно, нейтральная линия OY перпендикулярна к этой плоскости. Условие перпендикулярности нейтральной линии к плоскости действия сил может быть доказано для более общего случая изгиба. Если проследить предыдущий вывод, то легко видеть, что условием симметрии мы воспользовались только один раз: мы приняли его во внимание при составлении момента M_z и доказали, что M_z равен нулю, так как $J_{yz} = 0$. Но центробежный момент J_{yz} обращается в нуль не только для симметричных сечений, а также для сечений любой формы, если только оси Z и Y главные оси инерции поперечного сечения. На основании этого заключаем, что при действии изгибающих пар в плоскости ZX , проходящей через одну из главных осей инерции поперечного сечения, нейтральной линией будет служить другая главная ось, так как только при этом предположении внутренние силы упругости приведутся к паре, действующей в плоскости ZX , и могут уравновесить внешнюю пару сил M . Плоскости, проходящие через ось балки и через одну из главных осей инерции поперечного сечения (в дальнейшем всегда предполагается, что направление главных осей не меняется по длине балки), условимся называть *главными плоскостями*. На основании вышеприведенных доказательств высказываем такое положение: „При действии изгибающих пар в одной из главных плоскостей балки, изгиб происходит в той же плоскости“. Этот случай изгиба имеет наибольшее практическое значение. Задача об изгибе балки парами сил, плоскость которых наклонна к главным плоскостям, будет рассмотрена ниже.

Для определения напряжений p_z воспользуемся тем условием, что момент внутренних сил упругости относительно оси Y должен равняться моменту внешних сил M . Чтобы найти момент внутренних сил, придется каждое элементарное усилие $E \frac{z}{\rho} dF$ множить на соответствующее плечо z . Окончательно получим уравнение:

$$\int \frac{Ez^2}{\rho} dF = M,$$

или, принимая во внимание, что

$$\int z^2 dF = J_y,$$

найдем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_y} \quad (63).$$

Формула эта дает возможность по величине M и по размерам балки найти значение ρ . Кривизна $\frac{1}{\rho}$ обратно пропорциональна величине EJ_y . В дальнейшем условимся величины EJ_y и EJ_z называть *главными жесткостями* балки и будем обозначать их через B_y и B_z . Подставляя найденное значение кривизны в ф-лу (62) для напряжений, получим:

$$p_z = \frac{Mz}{J_y} \quad (64).$$

Наибольшие напряжения будут, очевидно, соответствовать наиболее удаленным волокнам. Если через h_1 и h_2 будем обозначать их расстояния от нейтрального слоя (черт. 111), то получим:

$$\rho_{\max} = \frac{Mh_1}{J_y}; \quad \rho_{\min} = -\frac{Mh_2}{J_y} \quad (65).$$

Такие материалы, как железо и сталь, одинаково хорошо сопротивляются и растяжению и сжатию, поэтому сечения выбирают такой формы, чтобы

$$\rho_{\max} = -\rho_{\min};$$

для этого нужно положить $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$, где h — высота балки.

Формула для наибольших напряжений переписывается так:

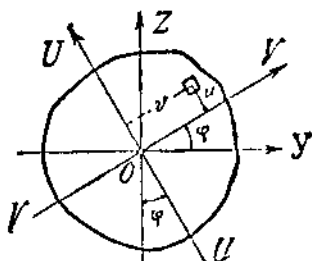
$$\rho_{\max} = \frac{Mh}{2J_y}.$$

Величину отношения $J_y : \frac{h}{2}$ называют *моментом сопротивления* и обозначают одной буквой W ; тогда наибольшие напряжения при изгибе представляются такой ф-лой:

$$\rho_{\max} = \frac{M}{W} \quad (66).$$

§ 57. Косой изгиб.

Косым изгибом называют тот случай изгиба, когда плоскость изгибающих пар не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки. Докажем прежде всего, что при этом условии плоскость изгиба не будет совпадать с плоскостью действия сил, и, следовательно, нейтральная линия не будет перпендикулярна плоскости сил. На черт. 112 представлено поперечное сечение балки. Расположим начало координат в центре тяжести сечения, ось X -ов направим по оси балки, а оси Y и Z — по главным осям инерции поперечного сечения. Пусть UU представляет линию пересечения плоскости чертежа с плоскостью изгибающих пар. Допустим, что и в данном случае плоскость изгиба совпадает с плоскостью действующих сил, тогда нейтральной линией будет линия VV , перпендикулярная UU . Если сделанное предположение правильно, то соответствующие ему внутренние силы упругости должны приводиться к паре сил, лежащей в плоскости UU , и момент их относительно UU должен равняться нулю. Найдем выражение для этого момента.



Черт. 112.

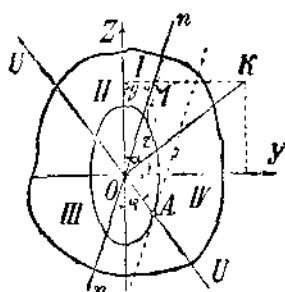
На основании ф-лы (62) усилие, приходящееся на элементарную площадку dF , расположенную в расстоянии u от нейтральной линии VV , будет:

$$E \frac{u}{\rho} dF.$$

Для составления момента M_u придется каждое элементарное усилие умножить на соответствующее плечо v и потом суммировать полученные таким путем произведения, получим:

$$M_u = \frac{E}{\rho} \int uv dF = \frac{E}{\rho} J_{uv}.$$

Величина эта не обращается в нуль, так как оси U и V не являются главными осями инерции (см. § 50) поперечного сечения. Следовательно, наше предположение, что нейтральная линия перпендикулярна плоскости действия сил, не соответствует действительности.



Черт. 113.

Обозначим через α угол, составляемый нейтральной линией nn с осью Y (черт. 113), и через φ угол между UU (плоскостью действующей пары) и осью Z . Пусть направление изгибающего момента таково, что сжимающие напряжения в сечении балки получаются по правую сторону от nn , растягивающие — по левую. Изгибающая пара M , представленная на чертеже линейным моментом OK ,

перпендикулярным к плоскости UU , может быть разложена на составляющие:

$$M_z = M \sin \varphi; \quad M_y = M \cos \varphi.$$

Составляющие эти действуют в плоскостях XY и XZ , являющихся главными плоскостями для изгибаемой балки, и потому напряжения, вызываемые M_y и M_z , могут быть вычислены по ф-лам предыдущего параграфа (ф-ла 64). Полное напряжение в какой-либо точке сечения найдем путем суммирования напряжений, отдельно вычисленных для M_y и M_z . При этом суммировании, конечно, нужно принимать во внимание и знак напряжений. На основании сделанного предположения относительно направления момента M заключаем, что M_y вызывает растягивающие напряжения в I и II квадрантах, и — сжимающие напряжения в III и IV квадрантах. Момент M_z вызывает во II и III квадрантах растяжение и сжатие — в квадрантах I и IV. Полное напряжение в какой-либо точке M с координатами y и z будет:

$$\frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} = M \left(\frac{z \cos \varphi}{J_y} - \frac{y \sin \varphi}{J_z} \right).$$

Напряжение представилось линейной ф-ией от координат точки.

Если в каждой точке сечения изобразить напряжение вектором, перпендикулярным плоскости поперечного сечения, то концы этих векторов будут

лежать в одной плоскости. Линия пересечения этой плоскости с плоскостью поперечного сечения явится нейтральной линией, так как ей будут соответствовать точки с нулевыми напряжениями. Уравнение нейтральной линии, очевидно, получим, приравнявая нулю найденное выше выражение для напряжений; оно напишется так:

$$\frac{z \cos \varphi}{J_y} - \frac{y \sin \varphi}{J_z} = 0 \quad (67)$$

Угол наклона этой линии к оси Y определится из ур-ия:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{y} = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi \quad (68).$$

Если

$$J_y = J_z,$$

т.е., когда эллипс инерции обращается в круг, и всякая пара взаимно перпендикулярных осей может быть принята за главные оси,

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi,$$

плоскость изгиба совпадает с плоскостью действия изгибающих пар.

Пользуясь эллипсом инерции (см. § 51), можно вывести удобное *правило для построения нейтральной линии* *ни*. Пусть r_y и r_z главные радиусы инерции поперечного сечения, тогда:

$$J_y = F r_y^2; \quad J_z = F r_z^2.$$

Ур-ие (68) переписывается так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_y^2}{r_z^2} \operatorname{tg} \varphi \quad (68').$$

Ур-ие касательной к эллипсу инерции, проведенной к какой-либо точке с координатами y_0 и z_0 , будет:

$$\frac{z z_0}{r_y^2} + \frac{y y_0}{r_z^2} = 1.$$

Тангенс угла наклона этой линии к оси Y равен:

$$= -\frac{y_0}{z_0} \cdot \frac{r_y^2}{r_z^2}.$$

Проведем касательную к эллипсу инерции в точке A (черт. 113) пересечения его с прямой UU ; для этой точки

$$\frac{y_0}{z_0} = -\operatorname{tg} \varphi,$$

и, следовательно, тангенс угла наклона касательной к оси Y будет:

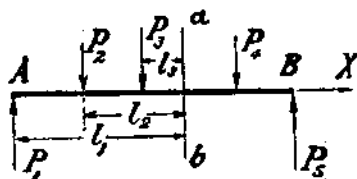
$$\frac{r_y^2}{r_z^2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Сравнивая полученный результат с ф-лой (68'), заключаем, что нейтральная

линия nn параллельна касательной, проведенной к эллипсу в точке пересечения его с направлением UU ; следовательно, линии nn и UU являются сопряженными диаметрами эллипса инерции поперечного сечения. Теорема найдена одновременно Bress'ом и S.-Venant'ом. Она дает возможность легко определять направление нейтральной линии графически. Из черт. 113 легко видеть, что чем больше разнятся по величине радиусы инерции r_y и r_z , чем более вытянут эллипс инерции, тем больше приближается плоскость изгиба к плоскости наименьшей жесткости¹⁾ балки. Что касается наибольших растягивающих и сжимающих напряжений, то они, очевидно, будут соответствовать точкам наиболее удаленным от нейтральной оси. Величина напряжений получится путем суммирования напряжений от составляющих моментов M_y и M_z .

§ 58. Изгиб балки силами, перпендикулярными оси.

Мы остановимся здесь на наиболее часто встречающемся случае, когда изгибающие силы лежат в одной из главных плоскостей балки и перпендикулярны ее оси. Положим, что к балке (черт. 114) приложена система взаимно уравновешивающихся сил $P_1, P_2, \dots, P_5$. При определении внутренних сил упругости будем пользоваться общим методом. Рассечем балку по плоскости ab и рассмотрим условия равновесия одной половины, например, правой. Чтобы равновесие не нарушалось, необходимо по произведенному сечению ab приложить



Черт. 114.

усилия, заменяющие действие отброшенной части балки на оставленную. Усилия эти, очевидно, представляют собой систему, эквивалентную системе сил P_1, P_2 и P_3 , приложенных к отбрасываемой левой части балки. Ее можно привести к вертикальной силе, приложенной в центре тяжести сечения ab , и к паре сил. Для этого будем поступать таким образом: приложим в центре

тяжести сечения ab две равные и прямо противоположные вертикальные силы P_1 , что, конечно, не нарушит равновесия системы. Таким путем мы вместо одной силы P_1 , приложенной к точке A , будем иметь силу P_1 , приложенную в сечении ab и направленную вертикально вверх, и пару сил $P_1 l_1$, действующую в плоскости чертежа. Поступая таким же образом с силами P_2 и P_3 , мы в заключение приведем систему, приложенную к левой части балки, к силе:

$$Q = P_1 - P_2 - P_3 \quad (a),$$

приложенной в центре тяжести сечения, и к паре сил:

$$M = P_1 l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3.$$

За положительное направление силы мы приняли направление снизу вверх. За положительное направление момента принято то, которому со-

¹⁾ Плоскостью наименьшей жесткости, очевидно, будет та из главных плоскостей в которой лежит наименьший радиус инерции поперечного сечения.

ответствует вращение левой части балки по часовой стрелке. Это правило знаков мы сохраним во всех дальнейших выводах. Силу Q условимся в дальнейшем называть *поперечной* или *перерезывающей силой*. Она представляет собой алгебраическую сумму всех вертикальных сил, лежащих по одну сторону от произведенного сечения. Величину M будем называть *изгибающим моментом* в сечении ab . Легко видеть, что изгибающий момент есть не что иное, как момент относительно центра тяжести рассматриваемого сечения всех сил, лежащих по одну сторону сечения. При выводе мы рассматривали силы, лежащие по левую сторону сечения. Если бы мы взяли силы, лежащие справа от сечения, то нашли бы, что они также приводятся к силе и к паре сил, при чем и сила и пара имеют те же величины, что и для левой половины, но направление их прямо противоположное. Это следует из того, что все силы, приложенные к балке, взаимно уравниваются, следовательно, сумма всех сил и момент всех сил относительно любой точки равны нулю. Сохраняя наше правило знаков, мы должны будем при рассмотрении правой половины балки брать за положительное направление перерезывающей силы направление сверху вниз, за положительное направление изгибающего момента направление против часовой стрелки. Мы нашли, что действие одной половины балки на другую может быть приведено к паре сил M и к силе Q , лежащей в плоскости поперечного сечения. Что касается пары сил, то вызываемые ею растягивающие и сжимающие напряжения могут быть найдены на основании ф-л, выведенных раньше. Сила Q , очевидно, вызовет касательные напряжения по сечению ab . Для определения этих напряжений статика дает только одно уравнение: сумма проекций всех касательных усилий на вертикальную ось должна равняться поперечной силе Q . Закон распределения касательных напряжений по сечению можно будет найти на основании некоторых допущений. Этому мы посвятим следующий параграф, здесь же мы выведем одну зависимость между M и Q , которая играет важную роль при расчете балок.

Переместим сечение ab (черт. 114) в направлении оси X -ов на бесконечно малую величину dx . Если над сечением не было сосредоточенной силы, то такое перемещение не вызовет изменения суммы сил, лежащих по одну сторону (мы рассматриваем левую сторону), величина же изгибающего момента изменится, так как плечо каждой силы получает приращение dx . Приращение момента, будет, очевидно, равно:

$$dM = P_1 dx - P_2 dx - P_3 dx = Q dx,$$

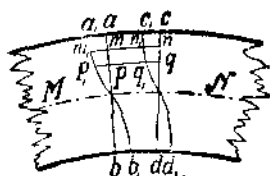
откуда

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad (69),$$

т.е. поперечная сила равна производной от момента по x .

§ 59. Касательные напряжения при изгибе.

Для получения закона распределения касательных напряжений, обратимся к рассмотрению соответствующих деформаций. Мы знаем, что касательные напряжения, приложенные к граням элемента, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, вызывают искажение прямых углов — элемент перекашивается. Эти перекашивания обуславливают то, что продольные волокна mn и pq изгибаемого бруска (черт. 115), первоначально нормальные к плоскостям поперечных сечений ab и cd , составляют после изгиба с соответствующими площадками поперечных сечений углы, отличные от прямого. Элемент $mnpq$ получает форму $m_1n_1p_1q_1$. Так как перекашивание углов в различных точках сечения различно, то, очевидно, оно должно сопровождаться искривлением сечения. На



Черт. 115.

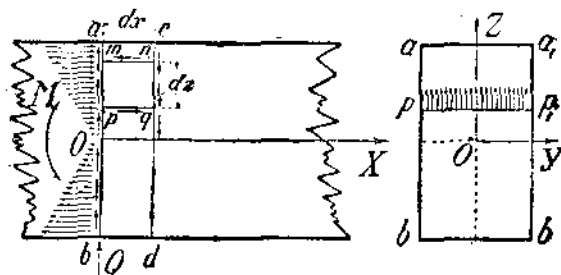
черт. 115 линии a_1b_1 и c_1d_1 представляют примерный вид этих искривленных сечений. Мы видим, что наибольшее искривление элементов происходит у нейтральной линии. На верхней и нижней гранях бруска в точках a_1, c_1 и b_1, d_1 никакого перекашивания нет. Описанное явление легко наблюдать, если изгибать бруски из каучука. Нужно только предварительно на боковой поверхности бруска нанести сетку из квадратиков.

Для таких материалов, как железо и сталь, искривления сечений весьма малы, и на них долго не обращали никакого внимания: считали, что во всех случаях изгиба сечения остаются плоскими, как при „чистом изгибе“. Только изучивши искривления поперечных сечений, S.-Venant'у удалось установить закон распределения касательных напряжений. Оказалось, что искривления сечений не влияют на величины удлинений и укорочений продольных волокон бруска. Элементы mn и pq , получающие растяжения при повороте сечения ab относительно cd , при искривлении поперечных сечений не меняют своей длины, а занимают лишь новые положения m_1n_1 и p_1q_1 . Поэтому растягивающие и сжимающие напряжения, обусловленные поворотом сечений ab и cd и зависящие от величины изгибающего момента, не изменятся при искривлении сечений, зависящем от величины касательных усилий, а значит и от суммы сил.

При элементарном выводе закона распределения касательных напряжений будем предполагать поперечное сечение прямоугольным. Далее вывод можно будет распространить и на другие виды сечений. Пусть ab — поперечное сечение балки (черт. 116). Левая часть балки отброшена, и ее действие на правую часть заменено силами упругости. Нормальные (сжимающие и растягивающие напряжения) эквивалентны изгибающему моменту M , касательные же напряжения должны быть эквивалентными силе Q , и потому мы будем предполагать их параллельными оси Z -ов. Сделаем еще такое допущение: положим, что величина касательного напряжения в какой-либо точке поперечного сечения

зависит только от расстояния этой точки до нейтральной линии OY . В таком случае касательные напряжения для всех элементов, лежащих на какой-либо прямой pp_1 , параллельной OY , будут величиной постоянной, а, следовательно, будет постоянным и перекашивание углов для тех же элементов, т.е. поперечное сечение при искривлении обратится в цилиндрическую поверхность. Образующие этой поверхности будут параллельны оси Y -ой. Сделанные нами допущения относительно направления и распределения касательных напряжений, как показывает точное решение той же задачи в теории упругости, весьма близки к действительности. В случае квадратного поперечного сечения отклонения не превосходят 6%, в случае прямоугольного сечения с отношением высоты к основанию, равным 2, — ошибка не более 2%. При более узких прямоугольниках ошибка еще меньше. Заметим, что определение касательных напряжений имеет наибольшее практическое значение именно для узких поперечных сечений.

Покажем, что касательные напряжения в плоскости поперечного сечения обуславливают появление касательных напряжений по площадкам, параллельным нейтральному слою. Для этого между



Черт. 116.

двумя близкими сечениями ab и cd (черт. 116) выделим во всю ширину балки прямоугольный параллелепипед $mnpq$; его грани mn и pq будут параллельны нейтральному слою. Рассмотрим касательные напряжения, действующие по поверхности выделенного элемента. По грани mp действует касательное напряжение p , направленное вверх, оно заменяет действие левой отсеченной части балки на правую; по грани nq касательное напряжение будет иметь прямо противоположное направление, так как оно представляет собой уже действие правой части балки на левую. Величина же этого напряжения весьма мало отличается от напряжения по грани mp , так как сечения ab и cd взяты весьма близко друг к другу. При беспрдельном сближении этих сечений, очевидно, напряжения по граням mp и nq должны привести к действию и равному ему противодействию. Касательные усилия по граням mp и nq приведут к паре сил:

$$b \cdot p \cdot dx \cdot dz.$$

Здесь мы через b обозначили размер выделенного прямоугольного параллелепипеда в направлении оси Y , т.е. ширину балки. Для того, чтобы выделенный элемент был в равновесии, необходимо допустить, что по граням mn и pq , параллельным нейтральному слою, также действуют касательные напря-

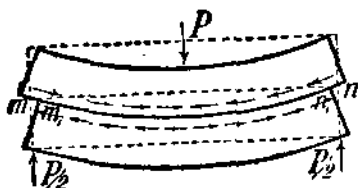
жения, параллельные оси X -ов. Если p'_t величина этих напряжений, то момент их будет:

$$b \cdot p'_t \cdot dx \cdot dz.$$

Для равновесия выделенного элемента необходимо положить:

$$bp_t dx dz = bp'_t dx dz, \text{ откуда } p_t = p'_t,$$

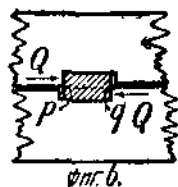
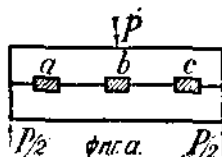
т.е., касательное напряжение по какой-либо элементарной площадке поперечного сечения равно касательному напряжению по площадке, проходящей через ту же точку и параллельной нейтральному слою.



Черт. 117.

В существовании касательных напряжений по площадкам, параллельным нейтральному слою, можно убедиться путем опыта. Если два равных бруска прямоугольного поперечного сечения сложить и изгибать силой, приложенной посредине, то при искривлении каждый брусок деформируется самостоятельно:

нижние волокна каждого бруска растягиваются, верхние — сжимаются, концевые поперечные сечения брусков, лежавшие первоначально в одной плоскости, повернутся, как показано на черт. 117. По плоскостям соприкосновения mn и m_1n_1 , очевидно, при этом происходит скольжение одного бруска по другому. Чтобы помешать этому скольжению и заставить бруски работать как одно целое, необходимо по плоскости соприкосновения приложить касательные усилия. Направление их показано на чертеже. Практически связь между брусками достигается помощью особых клиньев, шпонок, представленных на черт. 118. При изгибе шпонки подвергаются действию сил, стремящихся произвести срез. (На черт. 118 фиг. b показаны силы Q , действующие на шпонку c . Эти силы стремятся срезать шпонку по плоскости pq .) После этих предварительных замечаний можно без особых затруднений найти закон распределения касательных напряжений по плоскости поперечного сечения.

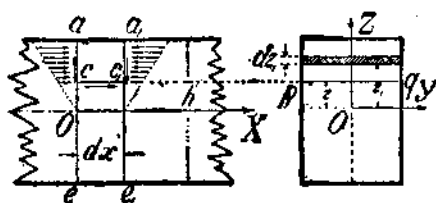


Черт. 118.

Возьмем какое-либо поперечное сечение ae бруска (черт. 119). Пусть

M — величина изгибающего момента для этого сечения. Найдем касательные напряжения для точек сечения, лежащих в расстоянии z от нейтрального слоя; pq — прямая, на которой лежат эти точки. Напряжения эти по величине будут такие же, как и по плоскости cc_1 , параллельной нейтральному слою и находящейся в расстоянии z от него. Для нахождения их величины, рассмотрим условие равновесия элемента aa_1cc_1 , ограниченного двумя бесконечно близкими

поперечными сечениями ae и a_1e_1 , площадью cc_1 и наружной поверхностью бруска. Если по наружной поверхности бруска между сечениями a_1e_1 и ae никаких внешних сил не приложено, то нам придется рассматривать лишь усилия, действующие по граням ac , a_1c_1 и cc_1 деленного элемента. По граням ac и



Черт. 119.

a_1c_1 будут действовать как нормальные напряжения, зависящие от величины изгибающего момента M , так и касательные напряжения. По грани cc_1 действуют лишь касательные напряжения p_t , величину которых мы и ищем. Составим проекцию всех сил, приложенных к элементу aa_1cc_1 , на ось X -ов. Касательные усилия, действующие по плоскости cc_1 , параллельны оси X , они при проектировании дадут силу:

$$b \cdot dx \cdot p_t,$$

где b ширина бруска. Касательные усилия по граням ac и a_1c_1 дадут при проектировании нуль, так как искривление сечений при изгибе мало, и, следовательно, направление этих усилий можно считать перпендикулярным к оси X -ов. Что касается нормальных напряжений по тем же граням, то закон их распределения нам известен. Для какой-либо точки сечения ae , лежащей в расстоянии от нейтрального слоя, будем иметь:

$$p_{z_1} = -\frac{Mz_1}{J_y}.$$

Минус получили мы потому, что при выбранном на чертеже направлении оси Z -ов положительному M и положительному z_1 соответствует сжимающее напряжение p_{z_1} . Если мы на грани ac выделим полоску ширины dz_1 , то приходящееся на нее нормальное сжимающее усилие равно по величине

$$\frac{Mz_1}{J_y} b dz_1.$$

Проектируя нормальные усилия, действующие по грани ac , на ось X ов, получим силу:

$$\frac{M}{J_y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_1 b dz_1.$$

Совершенно таким же образом мы найдем проекцию на ось X -ов нормальных усилий по грани a_1c_1 . Если величину изгибающего момента в сечении a_1e_1 , близком к ae , обозначим через $M + dM$, то величина проекций этих усилий будет:

$$-\frac{M + dM}{J_y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_1 b dz_1.$$

На основании этих результатов условие равновесия элемента aca_1c_1 напишется так:

$$-\frac{M + dM}{J_y} \int_z^{\frac{h}{2}} z_1 b dz_1 + \frac{M}{J_y} \int_z^{\frac{h}{2}} z_1 b dz_1 + b p_t dx = 0,$$

следовательно, величина p_t будет:

$$p_t = \frac{dM}{dx} \frac{\int_z^{\frac{h}{2}} z_1 b dz_1}{J_y b} = \frac{Q S_z}{J_y b} \quad (70).$$

Мы воспользовались ф-лой (69) и, кроме того, для упрощения величину $\int_z^{\frac{h}{2}} z_1 b dz_1$, представляющую статический момент относительно нейтральной линии части сечения выше pq , мы обозначили одной буквой S_z . Для прямоугольника

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Вставляя это в ф-лу (70), найдем, что величина касательных напряжений по плоскости сечения изменяется по параболическому закону:

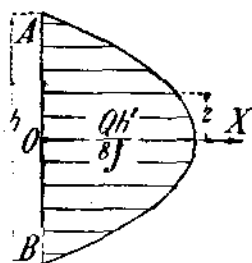
$$p_t = \frac{Q}{J_y b} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) = \frac{Q}{2J_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (70a).$$

Наибольшего значения эти напряжения достигают по нейтральному слою, где $z = 0$:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Q h^2}{8 J_y} = \frac{Q h^2}{8 b h^3} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \quad (71).$$

где $F = bh$ — площадь прямоугольного поперечного сечения.

Из ф-лы (71) заключаем, что наибольшая величина касательного напряжения в $1\frac{1}{2}$ раза больше его среднего значения. В наиболее удаленных элементах сечения, т.е. при $z = \pm \frac{h}{2}$, $p_t = 0$.



Черт. 120.

Если взять вертикальный отрезок $AB = h$ (высота сечения балки), и по горизонтальному направлению в каждой точке его отложить отрезок, равный соответствующему значению p_t , то мы, очевидно, получим параболу (черт. 120.) Ось OX будет осью симметрии. Площадь этой параболы, умноженная на ширину балки b , даст сумму всех касательных усилий. Эта

сумма должна равняться поперечной силе Q , что легко проверить. Площадь параболы будет равна:

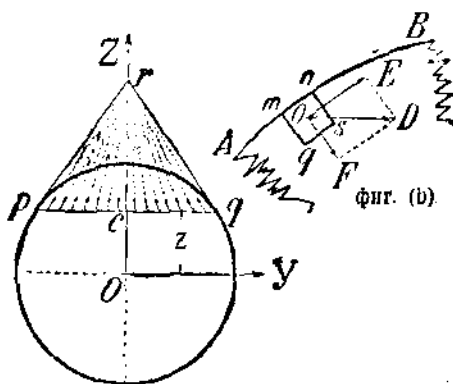
$$\frac{Qh^2}{8J_y} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{Q}{b}$$

Умножая эту величину на b , получим Q .

§ 60. Распределение касательных напряжений при круговом сечении.

В случае кругового поперечного сечения нет никакого основания полагать, что касательные напряжения имеют направление оси OZ , лежащей в плоскости действия изгибающих сил. Если взять прямую pq (черт. 121), удаленную на z от нейтральной линии, то в различных точках этой прямой наклон касательных напряжений к оси OZ будет различен. Из

условия симметрии можно заключить, что для точки c направление касательного напряжения совпадает с направлением OZ . В точках p и q касательные напряжения должны иметь направление касательных pr и qr . В самом деле: пусть $mnpq$ (фиг. б) бесконечно малый элемент площади поперечного сечения, взятый у контура AB . Выделим из бруска элементарный прямоугольный параллелепипед, для которого $mnpq$

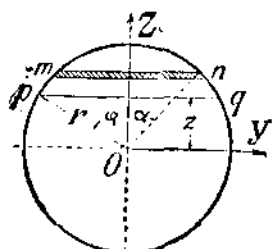


фиг. (а).

Черт. 121.

является основанием, боковая же грань mn совпадает с наружной поверхностью балки. Если бы касательное напряжение по площадке $mnpq$ имело направление OD , не совпадающее с направлением mn , касательной к контуру сечения, то его можно было бы разложить на две составляющие: OE , параллельную mn , и OF , перпендикулярную mn . Мы уже не раз убеждались из рассмотрения равновесия элементарного прямоугольного параллелепипеда (см. стр. 151), что существование касательного напряжения p_t по какой-либо площадке влечет за собой существование касательных напряжений той же величины по площадке, нормальной к p_t . Переходя к рассматриваемому нами случаю, можно, следовательно, утверждать, что существование напряжения OF требует существования такого же напряжения по грани mn , совпадающей с наружной поверхностью балки. Если наружная поверхность балки свободна от усилий, то OF должна равняться нулю, и, следовательно, касательные напряжения у точек контура должны иметь направление касательного напряжения в точках p , q и c . Эти три направления сходятся в одной точке. Относительно направления напряжений в других точках прямой pq делают предположение, что они проходят через

ту же точку r . Для определения величины напряжений приходится сделать еще одно допущение, аналогичное тому, что было принято для прямоугольного сечения, именно: полагают, что вертикальные составляющие касательных напряжений для всех точек прямой pq — величина постоянная, зависящая только от расстояния z . Сделавши это допущение, мы без затруднения можем теперь найти величину вертикальной составляющей напряжений, идя тем же путем, что и в случае прямоугольного сечения. Выведенное там уравнение равновесия остается в силе, сохранит свое значение также и формула (70) для величины напряжений, только она будет давать не величину всего напряжения, а величину его вертикальной составляющей. Горизонтальная составляющая, а, следовательно, и полная величина касательного напряжения, легко могут быть найдены, так как направление напряжения известно. Чтобы показать, насколько правдоподобны сделанные выше допущения, заметим, что величина наибольших касательных напряжений, вычисленная на основании этих допущений для круглого сечения, отличается от результатов точного решения теории упругости на 5%. Такую точность для практических целей можно считать достаточной.



Черт. 122.

Вычислим величину касательных напряжений для точек прямой pq (черт. 122). Вертикальная составляющая напряжений, на основании формулы (70), будет:

$$\frac{QS_z}{J_y(pq)} \quad (70')$$

Здесь (pq) пришлось поставить вместо ширины балки b ; S_z — статический момент части сечения, лежащей выше pq , относительно нейтральной линии. Для вычисления S_z разобьем часть сечения выше pq на элементы линиями, параллельными pq ; пусть mn одна из элементарных площадок. Для удобства вычисления возьмем за независимую переменную угол α , тогда длина элементарной полоски mn будет: $2r \sin \alpha$, ширина равна $d(r \cos \alpha) = r \sin \alpha \, d\alpha$, расстояние площадки от оси OY будет $r \cos \alpha$, следовательно:

$$S_z = \int_0^{\varphi} 2r \sin \alpha \cdot r \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot r \cos \alpha = 2r^3 \int_0^{\varphi} \sin^2 \alpha \, d(\sin \alpha) = \frac{2r^3}{3} \frac{\sin^3 \varphi}{3}.$$

Вставляя это в формулу (70') и принимая во внимание, что $(pq) = 2r \sin \varphi$, найдем для вертикальной составляющей касательного напряжения величину

$$\frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3J_y} = \frac{Qr^2 (1 - \cos^2 \varphi)}{3J_y} = \frac{Q(r^2 - z^2)}{3J_y} \quad (72).$$

Горизонтальная составляющая касательного напряжения в различных точках линии pq будет различна. Наибольшего значения (черт. 121) она

достигнет в p и q , где ее величина, очевидно, будет [на основании ф-лы (72)]:

$$\frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3J_y} \operatorname{ctg} \varphi;$$

следовательно, полное значение касательного напряжения в точках p и q будет:

$$\frac{Qr^2 \sin^2 \varphi}{3J_y} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{Qr^2 \sin \varphi}{3J_y}.$$

Наибольшего значения касательные напряжения достигают по нейтральной оси OY , где $\varphi = \frac{\pi}{2}$, следовательно:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Qr^2}{3J_y} = \frac{Qr^2}{\frac{3 \cdot F^2}{4}} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}. \quad (73).$$

Здесь F площадь поперечного сечения. Как видно из полученной ф-лы, наибольшая величина касательного напряжения равна $\frac{4}{3}$ среднего его значения.

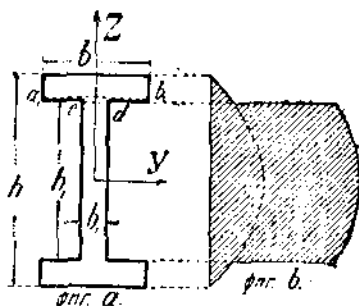
§ 61. Распределение касательных напряжений при двутавровом сечении.

Железным балкам часто придают двутавровое поперечное сечение (черт. 123). Выгодность такого сечения будет выяснена ниже. При определении касательных напряжений пользуются теми же допущениями, что и в случае прямоугольного сечения: полагают, что эти напряжения параллельны оси Z и что они одинаковы для всех точек, равноудаленных от оси Y . Для величины напряжений у нас получится ф-ла:

$$p_t = \frac{QS_z}{J_y \cdot (\text{ширина сечения})}.$$

Если мы вычисляем напряжение для какой-либо точки в узкой части сечения (стенка двутавровой балки), то придется брать ширину b_1 , для расширенной части сечения (полка балки) нужно брать ширину b .

Отметим, что вышенаписанная ф-ла дает весьма точные результаты для точек, удаленных от полок балки, для точек же, лежащих вблизи сопряжения стенки и полок балки, эта ф-ла совершенно неудовлетворительна. В самом деле: вычисляя напряжения для точек прямой a_1b_1 (черт. 123), лежащей несколько выше места сопряжения, придется брать ширину полки b , для точек же близкой к ней линии cd , лежащей ниже места сопряжения, придется в ф-лу подставить для ширины сечения значение b_1 , — таким образом, теоретически получается резкое изменение в величине напряжений. В действительности напряжения меняются постепенно, и закон их распределения в этом месте значительно отличается от того, что дает ф-ла.



Черт. 123

Если закон изменения касательных напряжений по высоте сечения представить графически, как то мы делали для прямоугольного сечения, то получим фиг. в черт. 123. Закон изменения касательных напряжений в полках балки получается такой же, как для прямоугольника [ф-ла (70a)]:

$$p_t = \frac{Q}{2J_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Соответствующий параболический закон показан на фиг. в пунктиром. Для точек стенки двутавровой балки касательные напряжения определяются по ф-ле:

$$p_t = \frac{QS_z}{b_1 J_y} = \frac{Q}{b_1 J_y} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \left(1 - \frac{b_1}{b} \right) - b_1 \frac{z^2}{2} \right],$$

т.е. закон изменения напряжений по высоте будет параболический, как и при прямоугольном сечении. Наибольшее и наименьшее касательные напряжения в стенке балки получим, полагая:

$$z = 0 \text{ и } z = \pm \frac{h_1}{2},$$

тогда:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Qbh^2}{8b_1 J_y} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{b_1}{b} \right) \right],$$

$$(p_t)_{\min} = \frac{Qbh^2}{8b_1 J_y} \left(1 - \frac{h_1^2}{h^2} \right).$$

Когда b_1 мало по сравнению с b , величины $p_{\max}$ и $p_{\min}$ не очень сильно разнятся между собой. Отметим еще одно обстоятельство, имеющее практическое значение. Как видно из черт. 123 и из ф-л для касательных напряжений, полки балки принимают на себя лишь незначительную часть перерезывающей силы Q , большая ее часть передается стенке балки. Если взять, например:

$b = 12 \text{ см}$, $b_1 = 1,2 \text{ см}$, $h = 30 \text{ см}$, $h_1 = 26 \text{ см}$, $J_y = 11\,200 \text{ см}^4$,
то оказывается для стенки балки

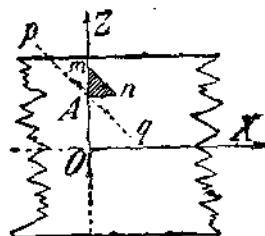
$$(p_t)_{\max} = 0,0326 Q, \quad (p_t)_{\min} = 0,0250 Q.$$

Всего на стенку передается $0,94 Q$.

§ 62. Главные напряжения при изгибе.

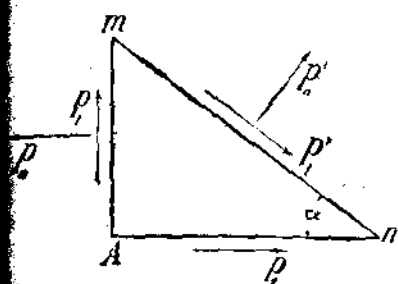
Пользуясь ф-лами предыдущих параграфов, мы можем найти величину нормальных и касательных напряжений в плоскости любого поперечного сечения изгибаемой балки. В практических расчетах обыкновенно этим и ограничиваются: по величине найденных таким образом напряжений судят о прочности рассчитываемой балки. Однако есть случаи, где такого расчета недостаточно, и требуется разыскать направление тех площадок, которым соответствуют наибольшие напряжения, а также и величину этих наибольших напряжений. Пусть нас интересует напряженное состояние в точке A (черт. 124). Мы без затруднения находим напряжения по площадке Am , лежащей в плоскости поперечного

сечения, и по площадке Am , параллельной нейтральному слою. Если мы через ту же точку A будем проводить площадки, наклонные к Am и Al и перпендикулярные плоскости ZX , то напряжения по этим площадкам как нормальные, так и касательные, будут зависеть от направления площадки. Пусть pq — одна из этих площадок. Вместо того, чтобы искать напряжения по этой площадке, мы можем перейти к бесконечно близкой параллельной ей площадке mn . Так как



Черт. 124.

напряжения в балке непрерывно меняются от точки к точке, то напряжения по pq и по mn можем считать равными. Напряжения по площадке mn могут быть найдены из условий равновесия элементарной трехгранной призмы с основанием Amn . Что касается высоты элементарной призмы, то ее можем принять равной ширине балки. Пусть Amn (черт. 125) представляет в увеличенном



Черт. 125.

масштабе выделенный нами элемент, p_n и p_t — напряжения по площадке Am и Al . Указанные на чертеже направления мы примем за положительные. Если в каком-либо частном случае эти напряжения будут иметь противоположное направление, то в ф-ле их придется аставить с обратным знаком. Неизвестные напряжения по грани mn обозначим: нормальное через p'_n и тангенциальное через p'_t . Пусть F площадь грани mn и α ее

угол наклонения к грани Al , тогда площади граней Am и Al соответственно будут $F \sin \alpha$ и $F \cos \alpha$. Величины усилий, приходящихся на каждую из граней, мы получим, умножая величины напряжений на соответствующие площадки.

По грани mn будем иметь усилие нормальное, равное $p'_n F$, и тангенциальное $p'_t F$; по грани Al нормальное усилие, равное нулю, и тангенциальное $p_t F \cos \alpha$; по грани Am нормальное усилие, равное $p_n F \sin \alpha$, и тангенциальное $p_t F \sin \alpha$. Мы имеем две неизвестных: p'_n и p'_t . Для их определения можно составить два ур-ия. Проекция всех сил на две взаимно перпендикулярные оси равна нулю. Мы будем проектировать силы на направления неизвестных напряжений p'_n и p'_t , тогда каждое из полученных ур-ий будет заключать лишь одну неизвестную. Проектируя на направление p'_n , получим

$$p'_n F + p_t F \cos \alpha \sin \alpha + p_t F \sin \alpha \cos \alpha - p_n F \sin^2 \alpha = 0;$$

проектирование на направление p'_t дает нам:

$$p'_t F + p_t F \cos^2 \alpha - p_t F \sin^2 \alpha - p_n F \sin \alpha \cos \alpha = 0;$$

откуда получаем:

$$\left. \begin{aligned} p_n' &= p_n \sin 2\alpha - p_t \sin 2\alpha = \frac{p_n}{2} (1 - \cos 2\alpha) - p_t \sin 2\alpha \\ p_t' &= p_n \frac{\sin 2\alpha}{2} - p_t \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (74).$$

Мы видим, что и нормальное напряжение p_n' и тангенциальное p_t' меняется с изменением угла α . Пользуясь ф-ми (74) возможно найти нормальное и тангенциальное напряжение для любого угла наклона.

Поставим себе задачей разыскание наибольших напряжений. Идя общим путем, получим:

$$\frac{dp_n'}{d\alpha} = p_n \sin 2\alpha - 2p_t \cos 2\alpha.$$

Приравнявая производную нулю, получаем ур-ие для определения угла α , которому соответствует наибольшее нормальное напряжение:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2p_t}{p_n} \quad (75).$$

Для α находим два решения, отличающихся одно от другого на 90° , потому что, если 2α корень ур-ия (75), то $180^\circ - 2\alpha$ также будет корнем того же ур-ия. Одно из решений будет соответствовать максимум'у, второе минимум'у, так как вторая производная:

$$\frac{d^2 p_n'}{d\alpha^2} = 2p_n \cos 2\alpha + 4p_t \sin 2\alpha$$

меняет знак при изменении α на 90° . Пользуясь ур-ием (75), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{2p_t}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} \\ \cos 2\alpha &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \pm \frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} \end{aligned} \right\} \quad (76).$$

Выбирая при $\sin$ и $\cos$ сначала знак $-$, а потом знак $+$ и вставляя в первую из ф-л (74), получим наибольшее и наименьшее значения нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} p_{\max} &= \frac{p_n}{2} \left(1 + \frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} \right) + \frac{2p_t^2}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \\ p_{\min} &= \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \end{aligned} \right\} \quad (77).$$

Напряжения $p_{\max}$ и $p_{\min}$ называют *главными напряжениями*, а соответствующие им напряжения, определяемые ур-ием (75), *главными направлениями*. Сравнивая выражение производной $\frac{dp_n}{d\alpha}$ со вторым из ур-ий равновесия (74), находим, что по площадкам, где p_n max или min, нет касательных напряжений. Если бы

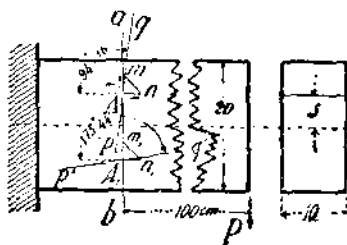
мы у точки A изгибаемой балки вырезали элемент, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и грани элемента взяли параллельными найденным главным направлениям, то по этим граням действовали бы лишь нормальные напряжения. Элемент находился бы в условиях одновременного действия растяжения и сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Отсюда сразу можно заключить, что наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным к главным направлениям под углом 45° (см. § 14). Величина наибольших касательных напряжений будет равна полуразности главных напряжений, т.е. на основании ф-лы (77):

$$(p_t)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \quad (78).$$

Чтобы показать, как определяется величина и направление главных напряжений, проделаем численный пример.

Брусек прямоугольного сечения 10×20 см² изгибается силой $P = 1000$ кг, приложенной у свободного правого конца (черт. 126). Найдем величину и направление главных напряжений в точке A , удаленной от нейтрального слоя на $\frac{h}{4} = 5$ см и от силы P на 1 м. Нормальные напряжения по площадке Am будут:

$$p_n = \frac{Mz}{J} = \frac{1000 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 12}{10 \cdot 20^3} = 75 \text{ кг/см}^2.$$



Черт. 126.

Касательные напряжения по площадкам Am и Al определяются из ф-лы:

$$p_t = \frac{QS_z}{Jb} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 7,5 \cdot 12}{10 \cdot 10 \cdot 20^3} = 5,63 \text{ кг/см}^2;$$

p_n и p_t придется взять с знаком $+$, так как направление их (на черт. 126 указано стрелками), как легко видеть из условий равновесия правой части балки, совпадает с тем, что принято нами при выводе ф-л (75) и (77);

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2p_t}{p_n} = \frac{2 \cdot 5,63}{75} = 0,1501,$$

откуда:

$$2\alpha = 8^\circ 32', \text{ или } 2\alpha = 188^\circ 32',$$

следовательно:

$$\alpha = 4^\circ 16', \text{ или } \alpha = 94^\circ 16'.$$

Находим две взаимно перпендикулярные площадки, которым соответствуют главные напряжения. Величины главных напряжений будут:

$$\sigma_{\max} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} = 37,5 + \frac{1}{2} \sqrt{75^2 + 4 \cdot 5,63^2} = 75,42 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} = -0,42 \text{ кг/см}^2.$$

Чтобы определить, какое напряжение к какой из вышенайденных площадок относится, заметим, что $p_{\max}$ при выводе мы получили, полагая:

$$\sin 2\alpha = -\frac{2p_t}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}}; \quad \cos 2\alpha = -\frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}}$$

Так как p_t и p_n при наших данных положительные величины, то соответствующий угол 2α будет лежать в III четверти ($\sin$ и $\cos$ отрицательны), и, значит, найденное напряжение $p_{\max} = 75,42 \text{ kg/cm}^2$ будет действовать по площадке, наклоненной под углом $\alpha = 94^\circ 16'$; очевидно, угол α придется отсчитывать так, как это было принято при выводе основных ф-л (на черт. 126 эта площадка pq построена, и показано, как отсчитывался угол α).

Найдем теперь направления и величины главных напряжений в точке A_1 , лежащей на 5 см ниже нейтрального слоя. Величина и знак p_t остаются, знак p_n меняется на противоположный:

$$p_n = -75 \text{ kg/cm}^2; \quad p_t = +5,63 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot 5,63}{75} = -0,1501; \quad 2\alpha = 180^\circ - 8^\circ 32' = 171^\circ 28',$$

или

$$2\alpha = 360^\circ - 8^\circ 32' = 351^\circ 28',$$

следовательно:

$$\alpha = 85^\circ 44' \quad \text{или} \quad \alpha = 175^\circ 44'.$$

$$p_{\max} = -\frac{75}{2} + \sqrt{\left(\frac{75}{2}\right)^2 + (5,63)^2} = +0,42 \text{ kg/cm}^2.$$

Это напряжение соответствует площадке, для которой:

$$\sin 2\alpha = -\frac{2p_t}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} = -\frac{5,63}{37,9},$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}} = +\frac{37,5}{37,9}.$$

Так как $\sin 2\alpha$ отрицателен, а $\cos 2\alpha$ положителен, то угол 2α в IV четверти, соответствующее значение $\alpha = 175^\circ 44'$. Площадка $p'q'$, отвечающая этому углу, построена на черт. 126.

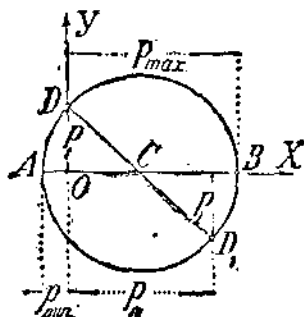
Величины наибольших касательных напряжений в точках A и A_1 одинаковы и равны:

$$(p_t)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{75}{2}\right)^2 + (5,63)^2} = 37,9 \text{ kg/cm}^2.$$

Если взять точки, наиболее удаленные от нейтрального слоя, то для них касательные напряжения обращаются в нуль, и, следовательно, нормальное напряжение p_n будет одним из главных напряжений, второе главное напряжение

обращается в нуль. В точках, лежащих по нейтральному слою, нормальные напряжения p_n обращаются в нуль. Главные напряжения, как то легко видеть из ф-лы (77), будут равны по величине и противоположны по знаку, следовательно, в этих точках будем иметь напряженное состояние, соответствующее чистому сдвигу.

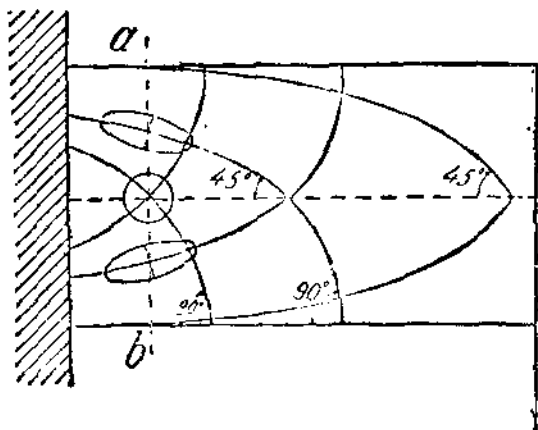
Величины главных напряжений возможно получить и графически, пользуясь построением Mohr'a. Если известны нормальное и касательное напряжения, то мы можем построить две точки круга Mohr'a, соответствующие напряжениям по двум взаимно перпендикулярным площадкам. Пусть D и D_1 — эти точки (черт. 127). Так как они изображают напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам, то радиусы, проведенные к ним из центра круга Mohr'a, должны составлять между собой угол 180° , т. е. точки D и D_1 должны лежать на диаметре круга. Соединяя эти точки прямой, получим в пересечении с осью абсцисс точку C — центр круга Mohr'a. Описывая из C круг радиусом DC , получим на оси абсцисс отрезки OA и OB , по величине равные главным напряжениям $p_{\max}$ и $p_{\min}$.



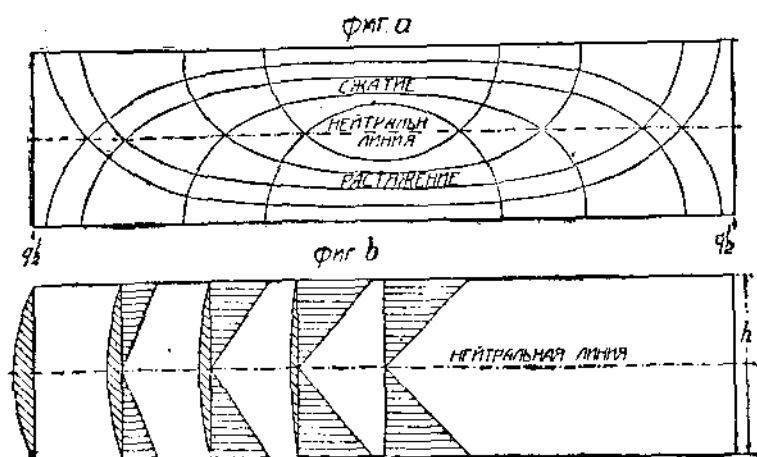
Черт. 127.

Найдя для какой-либо точки $p_{\max}$ и $p_{\min}$ и отложив от этой точки отрезки, представляющие по величине и направлению $p_{\max}$ и $p_{\min}$, мы можем построить на этих отрезках соответствующий эллипс напряжений. На черт. 128 изображены в искаженном масштабе эллипсы напряжений для нескольких точек сечения ab . Эллипсы напряжений для самой верхней и самой нижней точек обращаются в отрезки прямых линий, так как одно из главных напряжений обращается в нуль. По нейтральному слою, где главные напряжения равны по величине, эллипс обращается в круг. В различных точках изгибаемой балки направления главных напряжений различны. Можно представить себе две такие системы кривых линий, чтобы касательные к кривым одной системы давали направления растягивающих главных напряжений, а касательные к кривым другой системы давали направления сжимающих главных напряжений в точке касания. Несколько кривых такого рода нанесено на черт. 128. Кривые эти называются *траекториями напряжений*. На черт.

129 представлено распределение



Черт. 128.



Черт. 129.

напряжений в случае изгиба балки прямоугольного поперечного сечения, опертой по концам и изгибаемой равномерно распределенной нагрузкой ql . На фиг. б представлен линейный закон изменения нормальных напряжений и параболический закон изменения касательных напряжений в различных сечениях балки. Нормальные напряжения растут к середине пролета, касательные напряжения, наоборот — достигают максимума на опорах. На фиг. а представлены траектории напряжений для той же балки ¹⁾.

§ 63. О местных напряжениях.

Формулы, полученные выше для нормальных напряжений при изгибе, можно считать вполне удовлетворительными для точек, удаленных от места приложения внешних сил на расстояния, не меньшие наибольшего размера поперечного сечения балки ²⁾. Поэтому все дальнейшие выводы будут тем надежнее, чем меньше поперечные размеры по сравнению с длиной бруска. Вблизи точек приложения силы вызывают *местные* напряжения, которые в значительной степени могут видоизменить ранее выведенный нами закон распределения напряжений. Если силы сосредоточенные, то исследование местных напряжений представляет сложную задачу и не может быть выполнено элементарным путем. Некоторое представление относительно распределения напряжений у места приложения сосредоточенной силы может дать решение задачи о распределении напряжений в таком случае: к тонкой пластинке неограниченных размеров, с прямолинейным краем ab , приложена сила P , действующая в плоскости пластинки (черт. 130). Точное решение показывает, что в данном случае имеет место радиальное распределение сжимающих напряжений. В каждой точке пластинки имеется простое сжатие в направлении

¹⁾ Несколько интересных построений имеется в статье J. Wagner, Kurven reiner Schubbeanspruchung der geraden Balkenträger mit rechteckigem Querschnitt, Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver., 1911 г., 615 стр.

²⁾ См. И. Левин, Вестник Инженеров, 1915 г.

радиуса, соединяющего рассматриваемую точку с точкой O , где приложена сила P . Величина напряжения может быть вычислена по ф-ле

$$\rho = -\frac{2P \cos \theta}{\pi b r} \quad (79).$$

Здесь через r обозначено расстояние рассматриваемой точки от точки приложения силы, b обозначает толщину пластинки и θ — угол, составляемый радиусом r с направлением силы P . Напряжения, как видно из приведенной ф-лы, быстро падают с удалением от места приложения силы.

При изгибе балок распределенной нагрузкой дополнительные напряжения вблизи действия нагрузок можно приблизительно оценить на основании элементарных соображений. На черт. 131 представлен участок балки прямоугольного поперечного сечения, изгибаемой равномерно распределенной нагрузкой. Нагрузка прижимает продольные волокна балки друг к другу, благодаря чему появляются дополнительные сжимающие напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки.

Определим величину этих напряжений по площадке pq , находящейся в расстоянии z от нейтрального слоя; для этого рассмотрим условия равновесия элемента $mnpq$, заключенного между двумя близкими сечениями ab и a_1b_1 . Верхняя грань mn этого элемента совпадает с поверхностью балки.

к ней приложена сплошная нагрузка. Если q — величина нагрузки, приходящейся на единицу длины балки, то нагрузка на грань mn будет qdx . По граням mp и nq будут действовать и нормальные и касательные напряжения. В дальнейшем мы будем проектировать все усилия, действующие на элемент, на вертикальную ось OZ , поэтому

нам нужно рассмотреть лишь касательные условия, действующие по граням mp и nq . Обозначим через Q сумму сил в сечении ab и предположим, что она имеет направление оси OZ , тогда в сечении a_1b_1 сумма сил будет $Q - qdx$. Если мы возьмем на гранях mp и nq по элементарной площадке в расстоянии z_1 от нейтрального слоя, то касательные напряжения по этим площадкам, на основании ф-лы (70), соответственно будут:

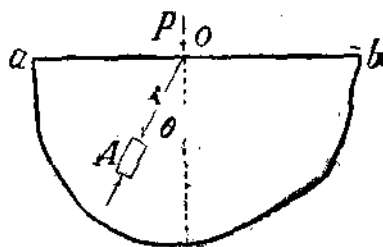
$$\frac{QS_{z_1}}{J_y b} \text{ и } \frac{(Q - qdx) S_{z_1}}{J_y b}.$$

Все касательное усилие по грани mp будет:

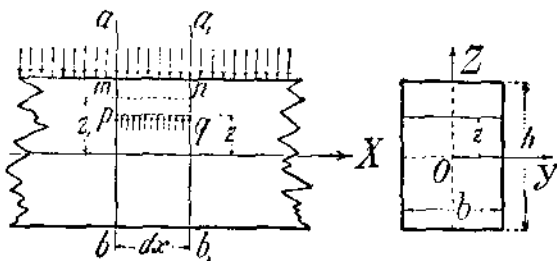
$$+ \frac{Q}{J_y b} \int_z^{\frac{h}{2}} b S_{z_1} dz_1.$$

и по грани nq :

$$- \frac{Q - qdx}{b} \int_z^{\frac{h}{2}} b S_{z_1} dz_1.$$



Черт. 130.



Черт. 131.

Знак + взят для усилий, имеющих направление оси OZ . По грани pq будут действовать касательные напряжения (мы их оставим без рассмотрения: при проектировании на ось Z -ов они дадут нуль) и нормальные напряжения, величину p_z' которых мы ищем. Если предположить, что усилия эти равномерно распределяются по грани pq , то сила, нормальная к pq , будет: $p_z' b dx$.



Черт. 132.

Составляя теперь проекцию на ось OZ всех сил, приложенных к элементу $trpq$, получим уравнение:

$$-q dx - \frac{Q - qdv}{J_y b} \int_z^{\frac{h}{2}} b S_{z_1} dz_1 + \frac{Q}{J_y b} \int_z^{\frac{h}{2}} b S_{z_1} dz_1 + p_z' b dx = 0,$$

откуда:

$$p_z' = \frac{q}{b} \left(1 - \frac{1}{J_y} \int_z^{\frac{h}{2}} S_{z_1} dz_1 \right).$$

Подставляя вместо статического момента S_{z_1} его значение:

$$S_{z_1} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right)$$

и выполняя интегрирование, найдем:

$$p_z' = \frac{q}{b} \left[1 - \frac{b}{2J_y} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right) \right] = \frac{q}{2b} \left(1 + 3 \frac{z}{h} - 4 \frac{z^3}{h^3} \right) \quad (80)$$

Если закон изменения напряжений p_z' по высоте сечения изобразить графически, то получится кривая, представленная на черт. 132.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ. РАСЧЕТ БАЛОК.

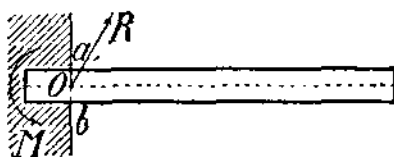
§ 64. Определение опорных реакций.

Изложив методы определения напряжений в изгибаемых балках, перейдем к практическим приложениям. Расчет изгибаемой балки приходится начинать с определения действующих на балку сил. Силы эти будем разделять на активные и пассивные. Активные силы — это те нагрузки, которые балка должна выдерживать. Нагруженная балка передает давление на опоры и, в свою очередь, подвергается действию опорных *реакций*, равных и прямопротивоположных опорным давлениям. Опорные реакции будем называть пассивными силами. Активные силы обыкновенно задаются. Для определения пассивных сил (опорных реакций) приходится пользоваться ур-иями статики; когда этих условий недостаточно, то устанавливают дополнительные ур-ия на основании рассмотрения деформации балки. Мы начнем с более простых случаев, когда условий статики достаточно для нахождения опорных реакций (случаи статически определимые). На практике чаще всего встречается случай, когда все силы, приложенные к балке, лежат в одной плоскости. При этом условии статика дает три ур-ия ¹⁾:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0,$$

из которых могут быть определены три неизвестные. Для статической определенности нужно, чтобы опорные реакции сводились к трем неизвестным величинам. Будем различать три рода закрепления концов балки.

Заделанным концом (черт. 133) будем называть тот случай, когда поперечное сечение *ab*, соответствующее плоскости заделки, сохраняет свое положение и направление при изгибе балки. Система усилий, распределенных по сечению *ab* и препятствующих перемещению и поворачиванию этого сечения, может быть приведена к одной силе *R*, приложенной в центре тяжести опорного сечения, и к паре сил *M*. Таким образом, опреде-

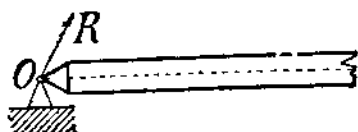


Черт. 133.

¹⁾ В дальнейшем за плоскость действия сил принята плоскость *X*, ось *X*-ов направлена по оси балки и ось *Y*-ов — вертикально вверх.

ление опорных реакций, в случае заделанного конца, сводится к нахождению трех элементов: 1) величины реактивного момента M , 2) величины реактивной силы R , 3) направления силы R . Вместо определения величины и направления силы R , можно определить, конечно, величины проекций силы R на координатные оси.

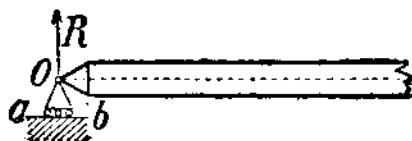
Неподвижно опертым концом (черт. 134) будем называть такой случай закрепления, когда конец O оси балки не может перемещаться, но может свободно поворачиваться, при изгибе. Опорные реакции, в данном случае, представляются одной силой R , проходящей через точку O . Неизвестными являются: 1) величина R , 2) направление силы R .



Черт. 134.

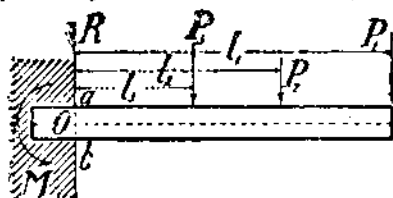
Подвижно опертым концом будем называть случай, представленный на черт. 135.

Опора располагается на цилиндрических катках, могущих перемещаться по плоскости ab . При таком закреплении возможно не только свободное поворачивание конца балки при изгибе, но и перемещение этого конца по направлению параллельному ab . Опорная реакция R , очевидно, должна проходить через точку O , направление ее перпендикулярно направлению ab . Трением катков на практике обыкновенно пренебрегают. При определении опорной реакции в этом случае мы имеем один неизвестный элемент — величину реакции R .



Черт. 135.

Из рассмотрения способов закрепления концов ясно, что могут быть лишь три следующих статически определимых случая изгиба балок:



Черт. 136.

I. Балка с одним заделанным и другим свободным концом (черт. 136). Реактивный момент для равновесия должен быть равен по величине и противоположен по знаку моменту внешних активных сил относительно точки O . Из ур-ий статики найдем:

$$M = -(P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3).$$

Проекция реактивной силы R на координатные оси равны по величине и противоположны по знаку сумме проекций активных сил на те же оси. Для взятого нами случая вертикальных нагрузок сила R направлена вертикально вверх, ее величина будет равна:

$$R = P_1 + P_2 + P_3.$$

II. Балка с опертыми концами, один конец подвижной (черт. 137). В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что линия скольжения ab — гори-

горизонтальна. В таком случае, на основании уравнения:

$$\sum X = 0$$

заключаем, что вертикальным нагрузкам будут соответствовать и вертикальные опорные реакции. Для определения величины опорных реакций удобнее всего пользоваться таким приемом. Положим, нужно найти опорную реакцию B , тогда составляем момент всех активных и пассивных сил относительно конца A балки. Из уравнения $\sum M = 0$ будем иметь:

$$Bl = -(P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3),$$

откуда:

$$B = -\frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{l}.$$

Знак минус указывает, что направление B противоположно направлению заданных сил P . Заметим здесь, что только в случае балок большой длины делают специальные приспособления для подвижности одной из опор. Балки небольших пролетов кладут на неподвижные опоры. При изгибе таких балок системой вертикальных нагрузок появятся не только вертикальные реакции A и B , но и горизонтальные реакции H (черт. 138), препятствующие сближению концов изгибаемой балки. Вызываемые этими силами продольные растягивающие напряжения, при обычных размерах балок, малы, и ими можно пренебречь по сравнению с напряжениями от изгиба. В этом можно убедиться путем таких рассуждений. Если бы одна из опор балки была подвижной, то при изгибе опоры сблизились бы на величину, равную разности между длиной изогнутой оси балки и длиной ее проекции на горизонтальное направление. При малых прогибах можно изогнутую ось принять за параболу. Обозначая через f прогиб и через l пролет балки, можем в этом случае представить сближение опор δl в такой форме (ф-ла 25):



Черт. 138

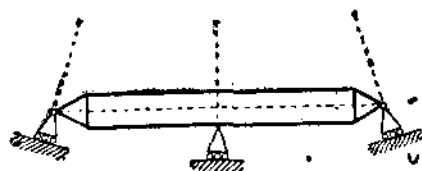
$$\delta l = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}.$$

При неподвижных опорах продольные силы, очевидно, должны иметь такую величину, чтобы вызываемое ими удлинение балки как раз равнялось вышенайденному сближению опор. Относительное удлинение и растягивающее напряжение выразятся ф-ми:

$$\epsilon = \frac{\delta l}{l} = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2}; \quad p = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} E.$$

В железных конструкциях обыкновенно не допускают прогибов больших $\frac{1}{500}l$. Вставляя это в ф-лу для напряжений и полагая для железа $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, найдем $\rho \approx 21 \text{ kg/cm}^2$.

Величина эта, по сравнению с обычно допускаемыми напряжениями, мала, и потому продольными усилиями при расчете балок можно пренебрегать. Но, как мы видим дальше, в случае изгиба тонких стержней и листов роль этих усилий может быть значительна.



Черт. 139.

III. Балка на трех подвижных опорах (черт. 139). Каждая опорная реакция представляет один неизвестный элемент — величину реакции. Для определения трех реакций имеем три уравнения статики. Если направление плоскостей скольжения опор выбрано так, что все опорные реакции

пересекаются в одной точке, или все реакции параллельны между собой, то закрепление будет подвижным.

Равновесие возможно лишь в том случае, если равнодействующая активных сил проходит через точку пересечения опорных реакций.

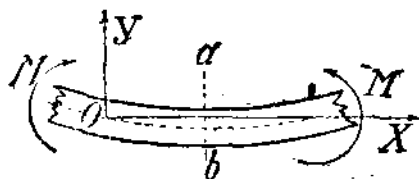
§ 65. Эпюра изгибающих моментов и линия суммы сил.

При расчете балок приходится определять величины касательных и нормальных напряжений в различных поперечных сечениях. Для этого, как уже было показано, нужно знать величину изгибающего момента M и величину поперечной силы или суммы сил Q в соответствующих сечениях. Чтобы упростить разыскание опасных сечений, т.е. тех сечений, где нормальные или касательные напряжения имеют наибольшую величину, удобно графически представить изменение изгибающего момента и суммы сил по длине балки. Для этого принимают ось балки за ось абсцисс и строят кривые, ординаты которых для любой точки оси балки дадут соответствующие значения M и Q . Кривые эти мы будем называть:

а) эпюрой изгибающих моментов, в) линией суммы сил.

Построение и вид этих линий удобнее всего проследить на частных примерах.

Изгибающий момент в каком-либо сечении балки условимся считать положительным, если он стремится левую отсеченную часть балки вращать по часовой стрелке, т.е., если соответствующее ему искривление оси направлено выпуклостью вниз (черт. 140). Сумму сил Q будем считать положительной, если для левой отсеченной части балки она имеет направление снизу вверх, т.е. направление оси Y .

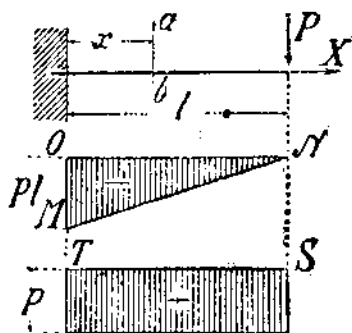


Черт. 140.

Балка с одним свободным, другим заделанным концом изгибается силой, приложенной у свободного конца. Изгибающий момент M в каком-либо сечении ab (черт. 141), отстоящем на x от заделанного конца, будет:

$$M = -P(l - x).$$

Знак — взят на том основании, что момент M стремится вращать правую часть балки по часовой стрелке и придает оси балки в сечении ab кривизну, направленную выпуклостью вверх. Если для каждой точки оси балки вертикально вниз (вниз потому, что изгибающий момент отрицателен) отложить в каком-либо масштабе соответствующую величину M , то получим прямую линию MN , представляющую эпюру изгибающих моментов. Наибольшее значение изгибающий момент получает в плоскости заделки, при $x = 0$. Величина его измеряется отрезком MO и равняется $-Pl$. Сумма сил для любого поперечного сечения будет величина постоянная, равная $+P$. Знак $+$ взят потому, что для правой части балки сумма сил направлена сверху вниз. Линия суммы сил будет прямая TS , параллельная оси балки. То же значение поперечной силы мы получили бы на основании ф-лы (69).



Черт. 141.

Если к балке приложено несколько сил (черт. 142), то выражение изгибающего момента в каждом участке будет различно. Попреем же через x будем обозначать расстояние рассматриваемого сечения от плоскости заделки, тогда изгибающий момент в каком-либо сечении I участка представится так:

$$M_I = -P_1(l_1 - x),$$

во II участке:

$$M_{II} = -P_1(l_1 - x) - P_2(l_2 - x),$$

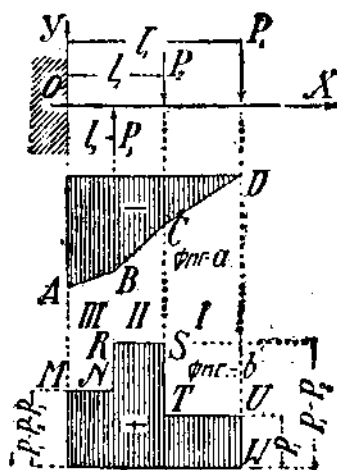
в III участке:

$$M_{III} = -P_1(l_1 - x) - P_2(l_2 - x) + P_3(l_3 - x).$$

На протяжении каждого участка изгибающий момент меняется по закону прямой линии. При переходе от одного участка к другому наклон прямой линии меняется, и эпюра изгибающих моментов представится ломаной линией $ABCD$.

И в этом случае легко проверить ф-лу (69),

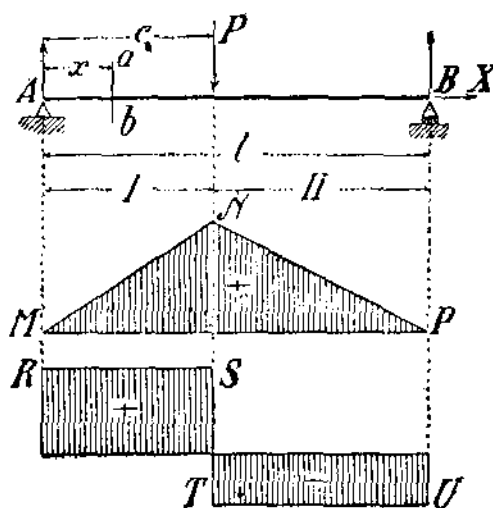
дифференцируя выражения для изгибающих моментов в различных участках. Заметим, что величина этих производных дает tg угла наклона для



Черт. 142.

соответствующего участка эпюры изгибающих моментов. Линия суммы сил для рассматриваемого случая представится ступеньчатой линией $MNRSTUW$. Заметим, что в местах приложения сосредоточенных сил изменяются аналитические выражения для изгибающих моментов, и производные, дающие величину перерезывающей силы, претерпевают здесь разрыв. Распределение напряжений в этих местах [см. ф-лу (79)] не может быть определено на основании обычных ф-л для касательных и нормальных напряжений.

Рассмотрим случай балки, лежащей на двух опорах и нагруженной сосредоточенной силой P в одном из промежуточных сечений (черт. 143).



Черт. 143.

Составляя момент всех сил, приложенных к балке, относительно левого и правого конца балки, найдем величины опорных реакций; очевидно:

$$A = \frac{P(l-c)}{l}; \quad B = \frac{Pc}{l}.$$

Изгибающий момент для какого-либо сечения в I участке балки представится ф-лой:

$$M_I = + \frac{P(l-c)}{l} x.$$

Во II участке изгибающий момент будет:

$$\begin{aligned} M_{II} &= + \frac{P(l-c)}{l} x - P(x-c) = \\ &= + \frac{Pc}{l} (l-x). \end{aligned}$$

Изгибающий момент везде положителен и меняется в каждом участке по закону прямой линии. Наибольшее значение он получает непосредственно под грузом P . Величину момента в этом месте можно получить из вышенаписанных ф-л, полагая в них $x=c$;

$$M_{\max} = \frac{Pc(l-c)}{l}.$$

Эпюра изгибающих моментов представится ломаной линией MNP . Сумма сил во всех сечениях I участка будет положительна и равна левой опорной реакции:

$$Q_I = \frac{P(l-c)}{l}.$$

При переходе из участка I в участок II величина суммы сил меняет сразу величину и знак, так как от величины левой опорной реакции придется отнять силу P ; будем иметь:

$$Q_{II} = \frac{P(l-c)}{l} - P = - \frac{Pc}{l}.$$

Изменение суммы сил представится ломаной линией $RSTU$.

Если к балке, опертой по концам, приложено несколько грузов (черт. 144), то, идя тем же путем, легко найдем закон изменения изгибающего момента. Эпюра моментов в данном случае представится ломаной линией $ACDEB$, а сумма сил представится ступеньчатой линией $MNPQRSTU$. Наибольшее значение изгибающего момента будет под одним из грузов (в нашем случае наибольшее значение момента получилось под грузом P_2). Тому сечению, где M достигает maximum'a, соответствует перемена знака у суммы сил (линия суммы сил пересекает ось балки). Это является следствием того, что сумма сил:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

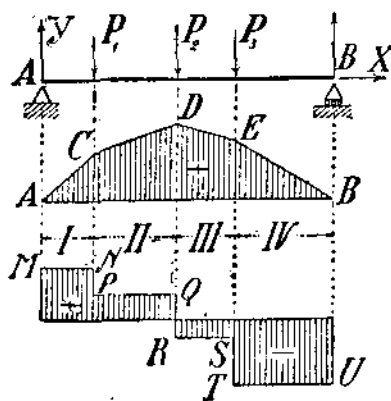
При переходе изгибающего момента через наибольшее значение, очевидно, $\frac{dM}{dx}$ должно менять знак. Пользуясь этим, можно значительно упростить нахождение опасного сечения. Нужно только построить линию суммы сил. В том сечении, где эта линия пересекается с осью балки, изгибающий момент имеет наибольшее или наименьшее значение.

Мы до сих пор рассматривали случаи сосредоточенных сил. Теми же приемами можно построить эпюру изгибающих моментов и линию суммы сил для нагрузок, непрерывно распределенных по длине. Возьмем простейший случай.

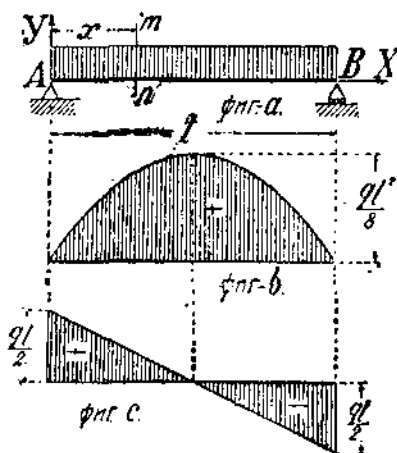
Балка, опертая по концам, нагружена сплошной равномерно-распределенной нагрузкой (черт. 145). Если через q обозначим нагрузку, приходящуюся на единицу длины балки (интенсивность нагрузки), то вся нагрузка, изгибающая балку, будет равна ql . Опорные реакции, очевидно, равны между собой. Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении mn балки мы найдем, если возьмем момент всех сил, лежащих по одну сторону (например, по левую) от рассматриваемого сечения. Момент опорной реакции A , относительно центра тяжести сечения mn , будет:

$$+ \frac{ql}{2} x.$$

Для определения момента сплошной нагрузки, лежащей на протяжении x , разобьем этот участок балки на бесконечно-малые



Черт. 144.



Черт. 145.

элементы. Пусть $q d\xi$ — нагрузка на один элемент балки, лежащий в расстоянии ξ от сечения m , тогда искомый момент представится интегралом:

$$- \int_0^x q \xi d\xi$$

и при постоянном q будет равен

$$-\frac{qx^2}{2}.$$

Очевидно, тот же результат мы получили бы, если бы всю нагрузку, лежащую на протяжении x , заменили равнодействующей qx , приложенной в расстоянии $\frac{x}{2}$ от сечения m .

Окончательно для величины изгибающего момента в сечении m будем иметь:

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(l-x)}{2}.$$

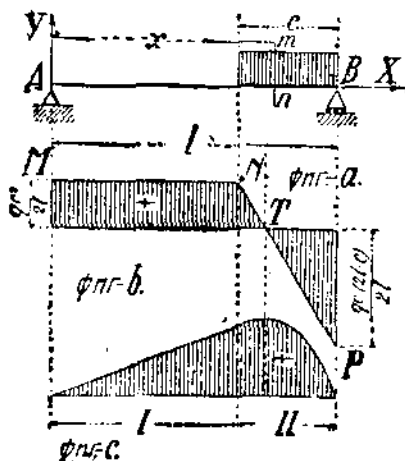
Эпюра изгибающих моментов представится параболой (фиг. б). Наибольшее значение момент будет иметь по середине пролета. В этом легко убедиться, найдя максимум выражения для M . Величину его в этом сечении получим, полагая $x = \frac{l}{2}$:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Если бы распределенную нагрузку заменить такой же величины сосредоточенным грузом, приложенным по середине пролета, то для $M_{\max}$ мы получили бы вдвое большее значение. Сумма сил в сечении m , очевидно, будет:

$$Q = \frac{ql}{2} - qx.$$

Линия суммы представится прямой (фиг. с), пересекающей ось балки по середине пролета, т.е., в сечении, где $M_{\max}$.



Черт. 146.

Если сплошная, равномерно распределенная нагрузка q кг/м занимает только часть пролета (черт. 146), то положение опасного сечения проще всего найти, построив линию суммы сил. Составляя момент относительно правого конца оси балки, найдем опорную реакцию:

$$A = \frac{qc^2}{2l}.$$

Правая опорная реакция будет:

$$B = qc - A = qc - \frac{qc^2}{2l} = \frac{qc}{2l}(2l - c).$$

Сумма сил для незагруженного участка балки будет, очевидно, равна левой опорной

реакции. Соответствующая часть линии суммы сил представится отрезком прямой MN , параллельной оси балки. Для какого-либо сечения mn , лежащего в загруженной части балки, величина суммы сил будет:

$$Q = \frac{qc^2}{2l} - q(x + c - l).$$

Соответствующий участок линии суммы сил представится наклонной линией NP (фиг. б). Точка T пересечения этой прямой с осью балки определит положение сечения, которому соответствует $M_{\max}$. Что касается эпюры изгибающих моментов, то на протяжении ненагруженного участка балки она представится отрезком наклонной прямой, так как изгибающий момент меняется по закону:

$$M_I = Ax = \frac{qc^2}{2l} x.$$

В загруженной части балки изгибающий момент будет изменяться по параболическому закону:

$$M_{II} = Ax - \frac{q(x+c-l)^2}{2}.$$

Сечение, которое соответствует наибольшему изгибающему моменту, найдем из условия:

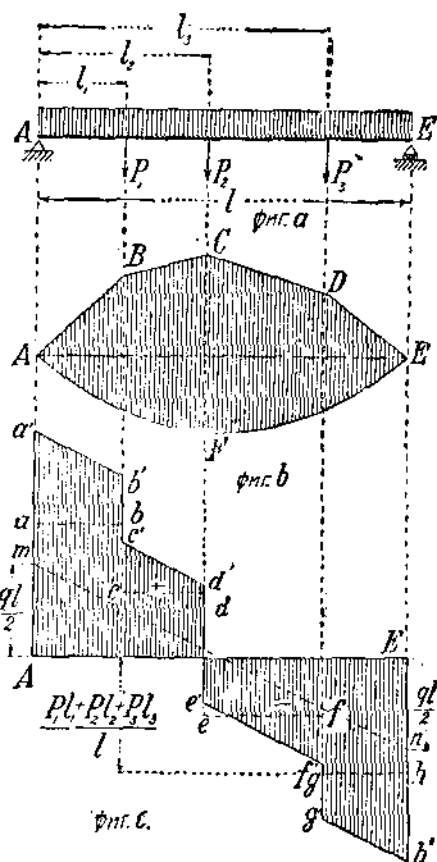
$$\frac{dM_{II}}{dx} = \frac{qc^2}{2l} - q(x+c-l) = 0,$$

откуда

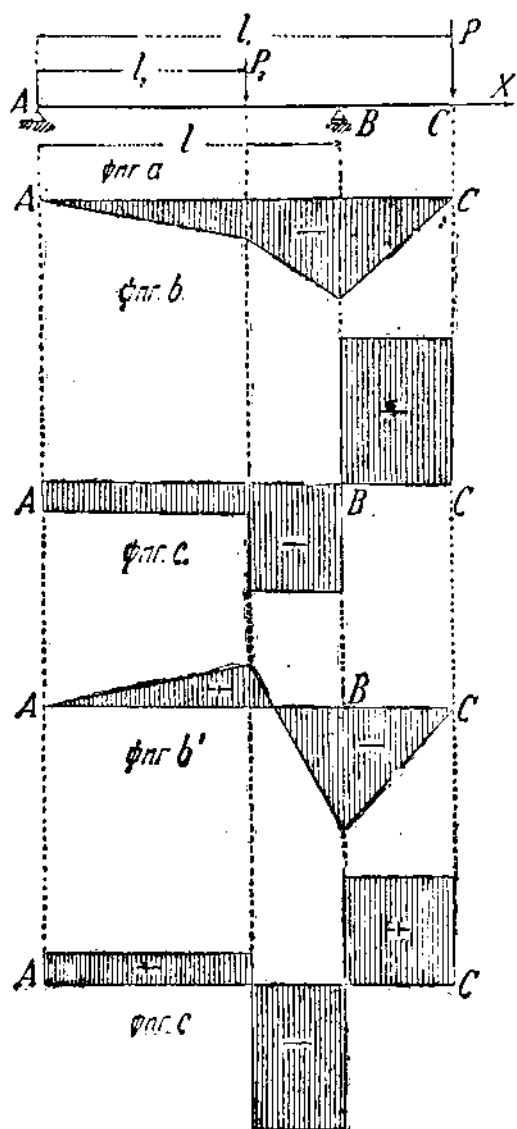
$$x = \frac{(l-c)^2 + l^2}{2l}.$$

Общий вид эпюры изгибающих моментов представлен на фиг. с (черт. 146).

Если на балку действует и сплошная равномерно распределенная нагрузка и сосредоточенные вертикальные силы, то для графического изображения изменения изгибающего момента по длине балки удобнее отдельно построить эпюру изгибающих моментов от сплошной нагрузки и отдельно от сосредоточенных сил. Откладывая ординаты первой эпюры вниз, а второй вверх от оси балки (черт. 147, фиг. б), получим площадь $ABCDEF$, дающую изменение изгибающего момента по длине балки. Для построения линии суммы сил тоже



Черт. 147.



Черт. 148.

можно отдельно построить ступенчатую линию $abcdefgh$ для сосредоточенных сил и наклонную прямую mn , представляющую линию суммы сил для сплошной, равномерно распределенной нагрузки. Складывая ординаты обеих этих линий, получим линию суммы сил $a'b'c'd'e'f'g'h'$ для совместного действия обоих видов нагрузки. Если опоры балки расположены не по концам, а в промежуточных сечениях, то определение опорных реакций и построение эпюры моментов и линии суммы сил может быть выполнено в прежнем порядке.

Приводим, для примера, случай балки с консолью, нагруженной двумя сосредоточенными силами (черт. 148). Правую опорную реакцию найдем, составляя момент всех сил относительно левого конца A оси балки. Легко видеть, что реакция B направлена вверх и величина ее равна:

$$B = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2}{l};$$

что касается реакции A , то величина ее определится из условия:

$$\begin{aligned} A &= P_1 + P_2 - B = \\ &= \frac{P_1 (l - l_1) + P_2 (l - l_2)}{l}, \end{aligned}$$

она может получиться и положительной и отрицательной, в зависи-

мости от величины и расположения сил. В последнем случае направление ее будет сверху вниз. Эпюра изгибающих моментов и линия суммы сил для этого последнего случая, представлены на фиг. б и фиг. с. Наибольшее значение изгибающего момента соответствует точке B , где линия суммы сил пересекает ось балки. На фиг. б' и фиг. с' представлены эпюра изгибающих моментов и линия суммы сил для того случая, когда левая опорная реакция получается положи-

тельной, направлена вверх. Линия суммы сил дважды пересекает ось балки. Эти точки пересечения, соответствуют наибольшему положительному и наименьшему отрицательному значениям момента.

§ 66. Определение расчетных напряжений.

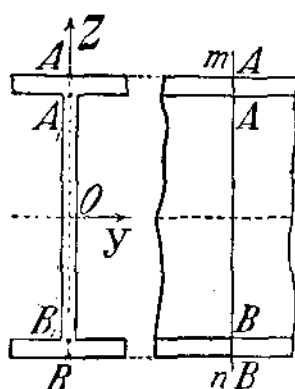
При выборе прочных размеров балки приходится подбирать поперечное сечение ее с таким расчетом, чтобы напряжения нигде не выходили из пределов, устанавливаемых нормами допускаемых напряжений. Имея эпюру изгибающих моментов и линию суммы сил, мы легко находим те сечения, где можно ожидать особенно больших напряжений, и где поэтому следует произвести проверку на прочность. Очевидно, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения будут получаться в сечениях, где имеет наибольшее значение изгибающий момент. Наибольшие касательные напряжения соответствуют сечениям с максимальным значением поперечной силы Q . При технических расчетах обыкновенно ограничиваются рассмотрением нормальных и касательных напряжений по площадкам, совпадающим с плоскостью поперечного сечения, и, задавшись формой сечения балки, выбирают размеры так, чтобы эти напряжения не превосходили определенных норм. В таком случае расчетные ф-лы имеют вид:

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq R; \quad \frac{Q_{\max} S}{Jb} \leq R_t,$$

где J и W относятся к главной оси инерции сечения, совпадающей с нейтральной линией, b — ширина балки.

Для допускаемого напряжения R придется брать ту же величину, что и при простом растяжении. Что касается допускаемого касательного напряжения R_t , то, полагая в основание третью (§ 36) теорию прочности, следует брать $R_t = 0,5 R$. Если имеет место действие переменных нагрузок, то должно быть произведено соответствующее изменение допускаемых напряжений, при чем приходится руководствоваться соображениями, высказанными при рассмотрении явления усталости металлов.

В тех случаях, когда ширина сечения балки резко изменяется по высоте, например, в случае тавровых **I** и двутавровых **I** балок, касательные напряжения распределяются по сечению весьма неравномерно: они претерпевают резкие изменения в местах перемены ширины сечения и могут вызвать значительные перенапряжения материала. При составлении условий прочности в таких случаях недостаточно вычисления напряжений по площадкам, совпадающим с плоскостью поперечного сечения. Приходится делать более подробные исследования напряженного состояния и вычислять главные напряжения. Возьмем, для примера, двутавровую балку (черт. 149). Наибольшие нормальные напряжения



Черт. 149.

в плоскости какого-либо поперечного сечения mn будут, очевидно, соответствовать точкам, наиболее удаленным от нейтральной линии OY . С приближением к нейтральному слою нормальные напряжения убывают по линейному закону, но в то же время возрастают касательные напряжения. При переходе из точки A в A_1 величина нормальных напряжений мало изменяется, так как толщина полки обыкновенно мала по сравнению с высотой сечения, между тем касательные напряжения, благодаря резкому изменению ширины сечения, приобретают сразу большое значение, вследствие чего главные напряжения в этих местах, вычисляемые по ф-лам (§ 62):

$$p_{\max} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}; \quad p_{\min} = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2},$$

могут превосходить по величине напряжения p_n в наиболее удаленных точках A и B .

Положим, для примера, что в сечении mn рассматриваемой балки изгибающий момент и сумма сил имеют значения:

$$M = 5 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{см}; \quad Q = 15 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

В таком случае величина наибольшего напряжения в точке A будет (размеры сечения взяты из § 61 (стр. 158), в точке A предполагается растяжение, в B — сжатие):

$$p_n = \frac{M}{W} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 15}{11200} \approx 670 \text{ кг/см}^2.$$

Для точки A_1 нормальное и касательное напряжения имеют значения:

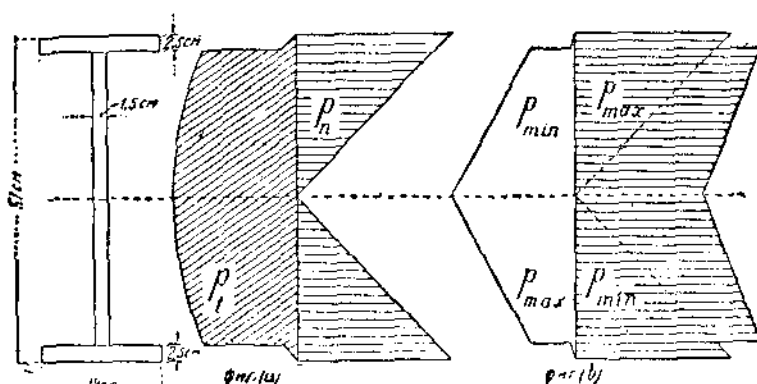
$$p_n = \frac{670 \cdot 13}{15} \approx 580 \text{ кг/см}^2; \quad p_t = 375 \text{ кг/см}^2.$$

Главные напряжения для этой точки, вычисленные по вышенаписанным ф-лам, имеют следующие значения:

$$p_{\max} = \frac{580}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{580^2 + 4 \cdot 375^2} \approx +764 \text{ кг/см}^2.$$

$$p_{\min} = \frac{580}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{580^2 + 4 \cdot 375^2} \approx -184 \text{ кг/см}^2.$$

Найденное значение $p_{\max}$ больше напряжения p_n в точке A , следовательно, расчет нужно вести для точки A_1 . На черт. 150, фиг. а графически представлено изменение нормальных и касательных напряжений по высоте двутаврового сечения при условии, что $Q = 40 \cdot 10^3 \text{ кг}$ и $M = 203 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}$. На фиг. б представлено изменение по высоте сечения наибольшего и наименьшего по абсолютному значению напряжений. Очевидно, для верхней половины балки наибольшее напряжение будет растягивающее, оно соответствует $p_{\max}$,



Черт. 150.

для нижней половины балки наибольшее напряжение будет сжимающим и соответствует $p_{\min}$. В этом случае главные напряжения достигают наибольшего значения в местах сопряжения полки со стенкой балки.

Расчетные ф-лы при более подробном рассмотрении напряженного состояния напишутся различно, в зависимости от того, какую из теорий прочности принять в основание расчета. Если принимать во внимание лишь величину максимальных напряжений (первая теория прочности), то размеры балки придется выбирать так, чтобы

$$p_{\max} \cong R \quad (81).$$

Выбрав за мерку прочности величину наибольших деформаций (вторая теория прочности), мы придем к такой расчетной ф-ле:

$$p_{\max} - \sigma p_{\min} \cong R.$$

Вставляя вместо $p_{\max}$ и $p_{\min}$ их значения и полагая $\sigma = 0,3$, найдем:

$$0,35p_n + 0,65\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \cong R \quad (82).$$

Формула эта нашла большое распространение в технике, хотя основания, на которых она построена, не подтверждаются опытными исследованиями (см. § 36).

Более достоверную и более удобную для приложений ф-лу мы получим, исходя из третьей теории, взяв за основание расчетов разность между наибольшим и наименьшим главными напряжениями. Условие прочности в этом случае напишется так

$$\sigma_{\max} - p_{\min} = \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \cong R \quad (83).$$

При выводе всех полученных ф-л мы совершенно не принимали во внимание сжимающих напряжений в направлении, перпендикулярном оси балки. Напря-

жения эти, в случае прямоугольного сечения, могут быть вычислены по ф-ле (80). Они могут оказать существенное влияние на величину $p_{\max}$ в случае мостовых балок со сплошной стенкой ¹⁾.

Заметим в заключение, что при расчете высоких двутавровых балок нельзя ограничиваться проверкой на прочность, приходится особое внимание обращать на степень устойчивости конструкции. Недостаточная устойчивость заставляет понижать иногда допускаемые напряжения. К этому вопросу мы еще вернемся при общем исследовании устойчивости упругих систем.

§ 67. Расчет клепаных двутавровых балок.

В инженерных сооружениях, особенно часто в мостах, приходится рассчитывать составные двутавровые балки, склепанные из вертикального листа, уголков и одной или нескольких пар горизонтальных листов. Склепка производится при высокой температуре, и при остывании заклепки настолько сильно стягивают соединяемые части, что балка работает, как цельная. Однако, наличие заклепочных отверстий в значительной мере может видоизменить закон распределения напряжений по сечению, полученный нами для цельной балки. У заклепочных отверстий, как показывают теоретические и опытные исследования, величина напряжений может значительно возрасти. При растяжении, как мы видели (стр. 68), круглые отверстия увеличивают напряжения втрое (§ 28), при чистом сдвиге, который имеет место в точках нейтрального слоя, напряжения у краев круглого отверстия возрастают в четыре раза ²⁾. Эти заключения относятся к незаполненным отверстиям. При наличии в отверстиях заклепки распределение будет, конечно, иное. Особенно вредное влияние на прочность балки оказывают отверстия, вытянутые в направлении оси балки и расположенные на уровне нейтрального слоя ³⁾. Кроме отверстий, большое влияние на напряжения оказывают надрезы на поверхности изгибаемого бруска. Некоторое представление о получающихся при этом перенапряжениях можно составить себе на основании того, что было раньше сказано о растяжении брусков с выточками. Перенапряжения эти особенно вредны при повторных нагрузках и в случае брусков, изготовленных из хрупких материалов ⁴⁾. На практике до сих пор мало считаются с перечисленными случаями перенапряжения материала и учитывают влияние ослабления сечения самым грубым образом, например, при определении нормальных напряжений по ф-ле:

$$\sigma_z = \frac{M_z}{J_v}$$

¹⁾ Н. Н. Митинский. О расчете напряжений и проверке прочности балок.

²⁾ См. нашу работу: О влиянии круглых отверстий..., Изв. Киев. пол. инст., 1907 г.

³⁾ Pfeleiderer, Der Einfluss von Löchern oder Schlüthen..., Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 97, 1911 г.

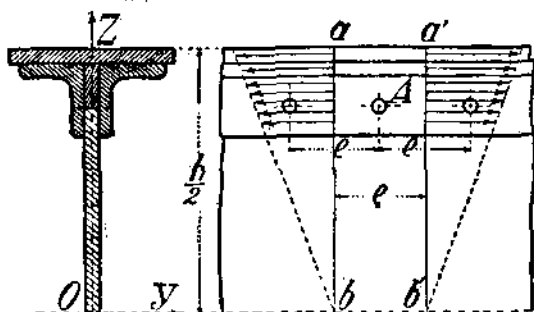
⁴⁾ Leon, Kerbgrösse und Kerbwirkung, 10 Mitteil. aus d. Mech.-techn. Laborat., Wien, 1910 г.

берут момент инерции netto, т.е. вычитают из полного момента инерции brutto сечения момент инерции площадей, соответствующих заклепочным отверстиям (на черт. 151 эти площади не заштрихованы). Что касается тангенциальных напряжений, то наличие ряда отверстий в вертикальной стенке увеличит их значение. Мы видели (§ 61), что при изгибе двутавровой балки почти вся перерезывающая сила Q передается на стенку, и, так как ряд заклепочных отверстий уменьшает площадь сечения стенки в отношении $\frac{e-d}{e}$, где e расстояние между центрами заклепок, d — их диаметр, то среднее значение касательных напряжений возрастает в отношении $\frac{e}{e-d}$. Поэтому при определении наибольших касательных напряжений пользуются для клепаных балок ф-лой:

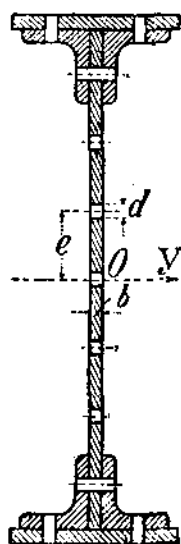
$$(p_t)_{\max} = \frac{QS}{Jb} \frac{e}{e-d} \quad (84).$$

В этой ф-ле J — момент инерции всего сечения, S — статический момент полусечения относительно оси OY ; S и J в данном случае обыкновенно вычисляют, не принимая во внимание ослаблений заклепочными отверстиями.

Покажем теперь те приближенные способы, которыми на практике пользуются для определения диаметра заклепок и расстояния между их центрами. Рассчитаем заклепки, служащие для прикрепления уголков к стенке двутавровой балки (поясные заклепки) (черт. 152). При этом расчете предполагают самые невыгодные условия, именно: допускают, что между уголками и стенкой балки нет никакого трения, и, следовательно, перемещению уголков относительно стенки балки мешают только заклепки, которые в таком случае работают на перерезывание. Определим величину силы, стремящейся срезать заклепку. Для этого возьмем два сечения ab и $a'b'$, проходящих по середине между заклепками. При изгибе балки на заклепку A будет передаваться разность нормальных усилий (мы взяли усилия растягивающие), приходящихся на площадь уголков и горизонтального листа по сечениям ab и $a'b'$. Разность эту мы без затруднения вычислим, пользуясь таким же приемом, как при нахождении величины касательных напряжений¹⁾. Возьмем



Черт. 152.



Черт. 151.

¹⁾ Мы предполагаем, что сечения остаются плоскими, и линейный закон распределения нормальных напряжений сохраняется. Допущения эти равносильны предположению, что работающие на пере-

в сечениях ab и $a'b'$ две элементарные площадки dF в расстоянии z от нейтральной линии OY . Разность усилий, приходящихся на эти площадки, очевидно, будет:

$$\frac{(M - M_1)z dF}{J_y},$$

где M и M_1 значения изгибающих моментов в сечениях ab и $a'b'$. Чтобы получить силу T , передающуюся на заклепку, нам придется суммировать элементарные разности, полученные выше, при чем суммирование должно быть распространено на всю площадь уголков и горизонтального листа, следовательно:

$$T = \frac{M - M_1}{J_y} \int z dF = \frac{M - M_1}{J_y} S'.$$

Через S' мы обозначили статический момент площади сечения уголков и горизонтального листа относительно нейтральной оси OY . Если принять во внимание, что $\frac{dM}{dx} = Q$, то при отсутствии нагрузки между сечениями ab и $a'b'$ будем иметь:

$$M - M_1 = Qe$$

и, окончательно, для T получим ф-лу:

$$T = \frac{QeS'}{J_y} \quad (85).$$

При перемещении уголков относительно стенки заклепка должна срезаться по двум плоскостям, найденная сила T распределится по двум сечениям заклепки. Принимая равномерное распределение, найдем срезающее напряжение:

$$p_t = \frac{T}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2QeS'}{J_y d^2} \quad (86).$$

Имея эту ф-лу, можно по данному диаметру заклепки d и по допускаемому напряжению на срез найти расстояние между центрами заклепок (шаг заклепок).

При расчете цельных двутавровых балок мы уже указывали на важность определения главных напряжений в точках сечения, соответствующих линии сопряжения полки и стенки двутавровой балки. С тем же самым обстоятельством приходится считаться и при расчете клепаных балок. Здесь в наихудших условиях окажутся точки, лежащие на высоте поясных заклепок, так как, по нашим предположениям (пренебрегая трением уголков по стенке), здесь через посредство заклепок передаются стенке силы T . Силы эти, параллельные

разрывание заклепки совершенно не деформируются, и, следовательно, относительные перемещения склепанных частей балки не имеют места. Если принять во внимание деформацию заклепок, то найдем, что клепаная балка слабее цельной. Это ослабление при обычных размерах не превосходит 6% (см. Aronovic, Zeitschr. f. Architekt. u. Ingenieurwesen, 1910 г., стр. 57).

нейтральному слою, стремятся срезать стенку по плоскости, проходящей через центры заклепок. Допуская на протяжении между двумя заклепками равномерное распределение срезающих усилий, найдем для касательных напряжений в стенке, обусловленных силами T , выражение:

$$p_t' = \frac{T}{(e-d)b},$$

или, подставляя вместо T его значение (ф-ла 85), найдем:

$$p_t' = \frac{QS'}{Jb} \frac{e}{e-d}.$$

К вычисленным касательным напряжениям p_t' придется присоединить напряжения p_t'' , соответствующие стремлению сдвигаться по линии центров поясных заклепок верхней части вертикальной стенки балки. Эти напряжения определяются по ф-ле:

$$p_t'' = \frac{QS''}{Jb} \frac{e}{e-d}.$$

Здесь S'' статический момент относительно нейтральной линии части сечения стенки, лежащей выше центров заклепочных отверстий (эта часть стенки на черт. 152 густо заштрихована). Складывая p_t' и p_t'' , получим для касательных напряжений на высоте поясных заклепок ф-лу:

$$p_t = p_t' + p_t'' = \frac{QS}{Jb} \frac{e}{e-d} \quad (87).$$

Здесь $S = S' + S''$ представляет статический момент относительно нейтральной линии густо заштрихованной части сечения. Величину p_t , определяемую из ф-лы (87), придется брать при вычислении главных напряжений по ф-ле:

$$p_{\max} = \frac{p_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_n}{2}\right)^2 + p_t^2}.$$

Из приведенного расчета ясно, что в случае составных балок приходится делать целый ряд дополнительных предположений. Предположения эти в значительной мере понижают надежность наших расчетов, что приходится иметь в виду при назначении допускаемых напряжений ¹⁾.

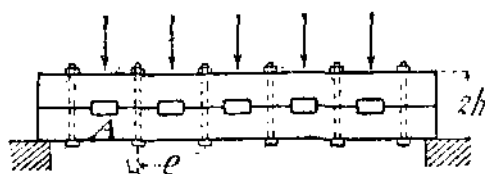
§ 68. Расчет составных деревянных балок.

В случае составных деревянных балок соединение достигается с помощью шпонок (черт. 153). При изгибе балки шпонки мешают относительным перемещениям брусьев по плоскости соприкосновения и принимают на себя всю ту

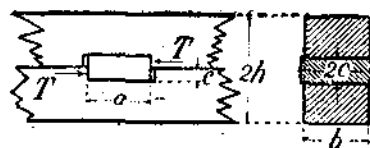
¹⁾ Опыты, произведенные над двутавровыми балками, показывают, что разрушение их обыкновенно происходит вследствие недостаточной устойчивости сжатого пояса или неустойчивости сравнительно тонкой вертикальной стенки.

См. F. Moore, University of Illinois Bulletin 68, 1913 г.

касательную силу, которая в цельной балке сплошным образом распределяется по нейтральному слою на протяжении e , равному расстоянию между центрами шпонок. Если через b обозначим ширину брусьев, а через $2h$ — высоту балки



Черт. 153.



Черт. 154.

(черт. 154), то при цельной балке касательные напряжения по нейтральному слою будут:

$$p_t = \frac{QS}{Jb} = \frac{3}{2} \frac{Q}{2bh}.$$

Сила T , стремящаяся сколоть шпонку, будет:

$$T = p_t e = \frac{3}{2} \frac{Qe}{2h} \quad (88).$$

Направление силы T в каждом частном случае может быть определено. На черт. 154 представлено направление срезающих сил для шпонки A (черт. 153) у левой опоры при действии нагрузок, направленных вертикально вниз. При расчете шпонок, обыкновенно, задаются глубиной врубки (3—4 см), по ней определяют ширину шпонки a таким образом, чтобы сопротивление врубки смятию равнялось сопротивлению шпонки скалыванию. Зная размеры шпонки, а, следовательно, и ту силу T , которую шпонка может безопасно выдержать, можем, по вышенайденной ф-ле, найти расстояние e между осями шпонок. Расстояние это будет переменным по длине балки, так как меняется сумма сил Q . Врубка шпонки, очевидно, ослабляет поперечное сечение и при определении нормальных напряжений p_n по ф-ле:

$$(p_n)_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

придется для момента сопротивления взять величину:

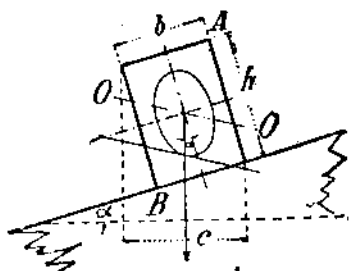
$$W = \left[\frac{b(2h)^3}{12} - \frac{b(2c)^3}{12} \right] : h.$$

В местах расположения соединительных болтов также придется принимать во внимание ослабление сечения болтовыми отверстиями. При назначении допускаемых напряжений следует иметь в виду, что составная балка всегда слабее цельной балки таких же размеров ¹⁾. Обыкновенно допускают лишь 70% от того напряжения, которое принято для цельных балок.

¹⁾ Интересные опыты с составными деревянными балками произведены проф. E. K. d. well, Michigan, College of Mines. При дубовых шпонках прочность составной балки составляет 75% от прочности соответствующей цельной балки. При металлических шпонках прочность больше и может быть оценена в 80% от цельной.

§ 69. Расчет обрешетин.

Обрешетинами называются бруски, перекрывающие стропильные фермы и поддерживающие кровлю. Они располагаются параллельно коньку крыши и представляют собой балки, опертые по концам. Действующие на обрешетину вертикальные нагрузки, вообще говоря, не совпадают с главными плоскостями балки, и потому при расчете приходится иметь дело с косым изгибом. Положение нейтральной линии и опасных точек может быть найдено способом, указанным раньше (§ 57). Для определения величины напряжений проще всего задачу привести к изгибу в двух главных плоскостях. Положим, что обрешетина имеет прямоугольное поперечное сечение $b \times h$ (черт. 155). Пусть l длина бруска, равная расстоянию между стропильными фермами и α угол наклона ската крыши к горизонту. Изгибающие силы: вес кровли и давление снега, будем считать вертикальными. Зная нагрузку q , приходящуюся на погонный метр обрешетины, найдем наибольший изгибающий момент — он соответствует середине пролета и равен:



Черт. 155.

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}.$$

Пользуясь эллипсом инерции сечения, легко графически нанести положение нейтральной линии OO' . Проверка на прочность должна быть произведена в точках A — на сжатие и в B — на растяжение, так как эти точки являются наиболее удаленными от нейтрального слоя. Рассматривая изгиб балки в каждой из главных плоскостей, нетрудно показать, что величина сжимающего напряжения в точке A определится по формуле:

$$p_A = - \frac{6M \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6M \sin \alpha}{hb^2}.$$

Если вынести за скобки множитель $\frac{6M}{h^2b^2}$ и принять во внимание, что величина

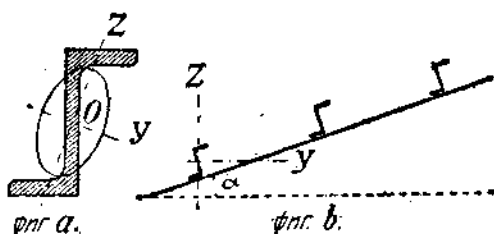
$$b \cos \alpha + h \sin \alpha = c$$

представляет проекцию поперечного сечения на горизонтальную ось, то получим:

$$p_A = - \frac{6Mc}{h^2b^2}.$$

Наиболее невыгодный случай будем иметь, когда одна из диагоналей поперечного сечения занимает горизонтальное положение (в этом случае $c = \max$).

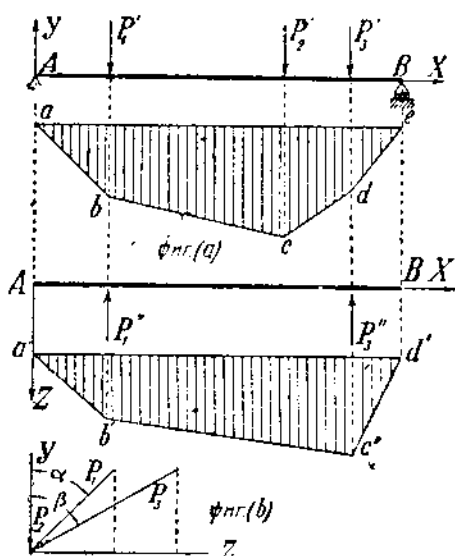
При железных стропилах часто берут обрешетины железные — зето-образного поперечного сечения (черт. 156); на крыше эти обрешетины ставят, как показано на



Черт. 156.

фиг. б. При таком расположении главная ось инерции сечения, ось OZ , лежащая в плоскости наибольшей жесткости балки, будет занимать положение, близкое к вертикальному, и, следовательно, вертикальные нагрузки (снег, собственный вес) изгибают балку в плоскости наибольшей жесткости, — мы будем иметь наиболее выгодные условия для работы обрешетины.

Пользуясь приемом разложения сил на направления главных осей инерции поперечного сечения, легко разрешить задачу об изгибе призматических брусков силами, не лежащими в одной плоскости и пересекающимися ось бруска под прямым углом. Каждую силу можно будет разложить на две составляющие, лежащие в главных плоскостях бруска, и отдельно исследовать изгиб бруска в каждой из этих плоскостей. Положим, дан брусок AB (черт. 157, фиг. а), опертый по концам и изгибаемый силами P_1, P_2, P_3 . Пусть XY и XZ — плоскости главных жесткостей бруска. Зная углы наклона $\alpha, \beta, \dots$ (фиг. б) заданных сил к плоскости XY , легко найти составляющие этих сил. Изгиб бруска



Черт. 157.

в плоскости XY обусловлен силами $P_1' = P_1 \cos \alpha, P_2' = P_2 \cos (0) = P_2, P_3' = P_3 \cos \beta, \dots$; в плоскости XZ изгибающими силами будут:

$$P_1'' = P_1 \sin \alpha, P_2'' = P_2 \sin (0) = 0, P_3'' = P_3 \sin \beta, \dots$$

По этим силам легко построить эпюры изгибающих моментов $abcde$ и $a'b'c'd'$. Опасное сечение, очевидно, совпадает с местом приложения одной из сил, но может не совпадать с сечением, где изгибающий момент достигает своего наибольшего значения, так как напряжения зависят не только от величины момента, но и от угла, составляемого плоскостью изгибающего момента с главными плоскостями. При определении напряжений

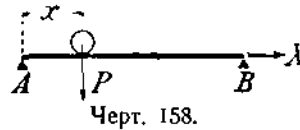
нужно суммировать напряжения от изгиба в каждой из главных плоскостей. Если M_x и M_y моменты в плоскостях XY и XZ , то величина нормального напряжения p в какой-либо точке поперечного сечения будет:

$$p = \frac{M_x y}{J_x} \pm \frac{M_y z}{J_y}.$$

Знак придется выбрать в зависимости от направления моментов.

§ 70. Подвижная нагрузка.

В тех случаях, когда на балку действуют не только постоянные силы, но и подвижные нагрузки, как это имеет место в мостах, подъемных кранах и т. д., задача усложняется тем, что приходится предварительно выяснять, какое расположение подвижной нагрузки является самым невыгодным. В простейших случаях вопрос этот может быть разрешен без всяких затруднений аналитическим путем. Возьмем, например, балку пролетом l с опертными концами и изгибаемую подвижным грузом P (черт. 158). При всяком положении груза эпюра изгибающих моментов будет иметь вид треугольника. Вершина треугольника, соответствующая $\max$ изгибающего момента, лежит под грузом, и величина момента определится по ф-ле:



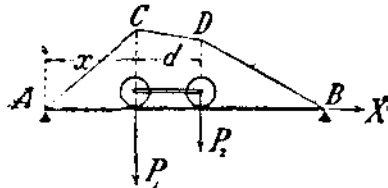
Черт. 158.

$$M_{\max} = \frac{Px(l-x)}{l}.$$

При перемещении груза величина $M_{\max}$ меняется по закону параболы и достигает своего наибольшего значения при $x = \frac{l}{2}$. Следовательно, для получения наибольших нормальных напряжений нужно груз расположить по середине пролета. Касательные напряжения достигают наибольшей величины, когда поперечная сила Q получает максимальное значение. В рассматриваемом случае поперечная сила на каждом участке балки сохраняет постоянное значение и равна по величине соответствующей опорной реакции. Чтобы получить наибольшее значение для опорной реакции, нужно груз придвинуть к одной из опор; мы получим: $Q_{\max} = P$.

При действии на балку двух связанных между собой грузов (черт. 159) эпюр изгибающих моментов имеет вид ломаной линии $ACDB$. Положим, что $P_1 > P_2$, тогда самым невыгодным будет то положение, которому соответствует $\max$ момента под грузом P_1 . Если x расстояние этого груза от левой опоры, то момент под ним имеет значение:

$$M = \frac{x}{l} [P_1(l-x) + P_2(l-x-d)].$$



Черт. 159.

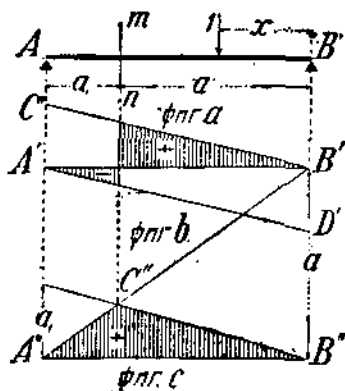
Приравнявая производную от M по x нулю, найдем:

$$x = \frac{1}{2} \left(l - d \frac{P_2}{P_1 + P_2} \right).$$

Вставляя это значение x в выражение для M , найдем величину наибольшего изгибающего момента. Для получения наибольшего значения поперечной силы придется, очевидно, придвинуть грузы к левой опоре, так как $Q_{\max}$ будет равняться наибольшему значению левой опорной реакции.

Аналитический метод может быть применен к разысканию наиболее невыгодных расположений и в том случае, когда система состоит из большого числа грузов, но более простое и наглядное решение мы получим, применяя здесь графический метод. Мы наметим на балке ряд сечений и для каждого из них выясняем те положения нагрузки, при которых Q и M получают наибольшее значение. Положим, нас интересует сечение m (черт. 160). Чтобы решить вопрос, как должно располагать грузы для получения в этом сечении $Q_{\max}$, рассмотрим сначала действие груза, равного единичной. При расположении, указанном на чертеже, поперечная сила в сечении m равна левой опорной реакции

$\frac{1 \cdot x}{l}$. Закон ее изменения при перемещении груза представится ординатами наклонной прямой $C'B'$ (фиг. б), отсекающей у левой опоры ординату, равную единице. Когда груз, равный единице, расположен слева от сечения mn , то поперечная сила в этом сечении получится, если из левой опорной реакции вычесть единицу. На фиг. б это вычитание выполнено графически проведением линии $A'D'$ параллельной $C'B'$. Отрицательные ординаты этой линии, на протяжении левой части балки, дадут изменение поперечной силы в сечении mn при перемещении груза единицы на левом участке балки. Полная картина изменения поперечной силы в сечении mn представится заштрихованными площадями (фиг. б), при этом знаки выбраны согласно принятому правилу. Отрезки линий $C'B'$ и $A'D'$, относящиеся к заштрихованным площадям, представляют собой линию влияния (инфлюэнтную линию) для поперечной силы в сечении mn . Эта линия позволяет легко вычислить Q для любой системы грузов. Если имеется один груз P , расположенный в каком-либо сечении балки, нужно измерить ординату линии влияния для этого сечения и величину ее u ,



Черт. 160.

представляющую поперечную силу от груза, равного единице, умножить на величину груза P . Если имеется система грузов $P_1, P_2, \dots$ то поперечная сила представится такой суммой:

$$Q = P_1 u_1 + P_2 u_2 + P_3 u_3 + \dots \quad (a).$$

Для получения наибольшего положительного значения Q нужно загружать только правую часть пролета и располагать грузы так, чтобы сумма (а) имела наибольшее значение. Наибольшее отрицательное значение Q найдем, загрузив только левую часть пролета.

Построим линию влияния для изгибающего момента в сечении mn . Если груз единица расположен в правой части балки (фиг. а), то момент в сечении mn будет: $\frac{1 \cdot x}{l} a_1$. Для каждого положения груза он представится соответствующей ординатой линии $B''C'$, отсекающей у опоры A'' отрезок a_1 . С переходом груза на левую часть балки момент в mn будет: $\frac{1 \cdot (l-x)}{l} a$ и представится ординатами прямой $A''C''$, отсекающей у опоры B'' отрезок a . Линия влияния $A''B''C''$ дает закон изменения момента в mn при перемещении груза равного единице. Если имеется система грузов $P_1, P_2, \dots$ то, измеряя соответствующие ординаты и составляя сумму:

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots \quad (b),$$

найдем величину изгибающего момента. При проверке на прочность в сечении mn нужно грузы располагать так, чтобы сумма (b) получила наибольшее значение.

§ 71. Сравнение форм поперечных сечений.

Раз известны изгибающие силы и размеры поперечного сечения балки, мы можем определить величины напряжения в любой точке балки и, следовательно, можем судить о степени ее прочности. При проектировании приходится,

обыкновенно, решать обратную задачу: нужно подобрать поперечное сечение для балки и подобрать так, чтобы не только удовлетворить условию прочности, но и условию экономичности, т.-е. при заданных свойствах материала нужно придать такую форму поперечному сечению, чтобы балка, удовлетворяющая условию прочности, имела возможно меньший вес. В различных областях строительного искусства практика выработала наиболее подходящие типы поперечных сечений. Мы здесь укажем на главнейшие свойства наиболее употребительных из них. При подборе сечения должны быть выполнены условия прочности относительно наибольших растягивающих и сжимающих нормальных напряжений. Если h_1 и h_2 расстояния от нейтрального слоя до наиболее удаленных растянутого и сжатого волокон, то:

$$\frac{Mh_1}{J} \equiv R_1 \text{ и } \frac{Mh_2}{J} \equiv R_2,$$

где R_1 и R_2 — допускаемые напряжения на растяжение и сжатие. Если материал балки одинаково хорошо сопротивляется как растяжению, так и сжатию, то сечение выбирают так, чтобы его центр тяжести лежал на середине высоты балки. В таком случае $h_1 = h_2$, наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения равны между собой по абсолютной величине. С рассмотрением таких сечений мы и начнем. Обозначая

$$\frac{J}{h_1} = \frac{J}{h_2} = W,$$

постараемся выяснить связь между моментом сопротивления W и площадью поперечного сечения в некоторых частных случаях.

Прямоугольное поперечное сечение ширины b и высоты h ; $W = \frac{bh^2}{6}$, $F = bh$. Сечение это будет тем выгоднее, чем больше будет момент сопротивления W при одной и той же площади сечения. Степень выгодности мы можем выразить величиной $\frac{W}{F}$. В данном случае отношение это равно:

$$\frac{W}{F} = \frac{h}{6} = 0,167 h,$$

следовательно, с возрастанием высоты сечения возрастает и его выгодность. Однако, есть пределы, дальше которых не следует увеличивать высоту, иначе получаются балки, у которых одна из главных жесткостей (см. § 56) весьма мала по сравнению с другой. Такие балки при изгибе их в плоскости наибольшей жесткости могут оказаться недостаточно устойчивыми.

Круглое сечение; $W = \frac{\pi r^3}{4}$, $F = \pi r^2$, следовательно: $\frac{W}{F} = \frac{r}{4} = 0,125 d$.

Сравним относительную выгодность квадратного и кругового сечения. Сторона h квадрата, равновеликого площади круга с диаметром d , будет:

$$h = \frac{d\sqrt{\pi}}{2}.$$

Момент сопротивления для такого квадрата будет:

$$W = \frac{Fh}{6} = F \frac{0,167 \sqrt{\pi}}{2} d = 0,147 dF.$$

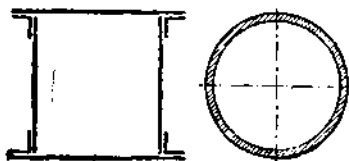
Сравнивая это с ф-лой для кругового сечения, находим, что квадратное сечение является более выгодным.

Прямоугольное и круглое сечения встречаются, главным образом, в случае деревянных балок. Балкам железным придают более рациональные поперечные сечения. При изгибе наиболее напряженными будут наиболее удаленные от нейтральной линии волокна. Материал у нейтрального слоя является мало использованным. Следовательно, при проектировании сечения нужно, по возможности, удалить главную часть материала от нейтральной линии. Если бы весь материал был отнесен к верхней и нижней грани балки высоты h , то теоретически это был бы наиболее выгодный случай. Момент инерции J для этого случая будет $F \left(\frac{h}{2}\right)^2$, а момент сопротивления $W = J : \frac{h}{2} = \frac{Fh}{2}$. Отношение $\frac{W}{F}$ получается равным $0,5h$. Практически верхняя и нижняя часть сечения должны быть соединены между собой стенкой, и толщина стенки должна быть достаточна, чтобы выдерживать касательные напряжения, получающиеся при изгибе. (Мы видели, что почти вся перерезывающая сила передается стенке балки.) Таким образом, мы приходим к двутавровому сечению.

Двутавровые балки бывают клепаные и прокатные. В последнем случае между их моментом сопротивления и площадью имеется довольно постоянное соотношение:

$$\frac{W}{F} = \text{от } 0,31 h \text{ до } 0,30 h.$$

Соотношение это легко установить, пользуясь таблицей изготавливаемых двутавровых балок. В этой таблице приведены W , F и h . Двутавровые балки имеют то преимущество перед высокими прямоугольниками, что они обладают большей жесткостью в направлении перпендикулярном к плоскости стенки, и потому могут выдерживать и боковые усилия.



Черт. 161.

Трубчатые поперечные сечения. Стремление уменьшить количество материала у оси балки и отнести главную часть материала к периферии приводит к балкам трубчатого сечения (черт. 161). Выгодность применения трубчатых балок была замечена давно — еще

Галилей обратил на это внимание. Первые большие мосты из железа строились в виде трубчатых балок. Впоследствии сплошные стенки трубок стали заменять решетками и пришли к существующим типам так называемых сквозных ферм.

Геометрически подобные поперечные сечения.

Если менять поперечные размеры балки так, чтобы получались геометрически подобные профили, то при этом площадь сечения F , момент сопротивления W и момент инерции J будут соответственно меняться, как квадрат, как куб и как четвертая степень линейных размеров поперечного сечения. Обозначая через F_0 , W_0 и J_0 величины, относящиеся к определенному профилю, будем иметь при увеличении линейного размера профиля в n раз такие величины:

$$F = n^2 F_0; \quad W = n^3 W_0; \quad J = n^4 J_0.$$

На основании этого можно сделать несколько заключений, имеющих практическое значение. Предположим, например, что балка изгибается нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности. Как изменятся напряжения при пропорциональном увеличении всех размеров балки, если интенсивность нагрузки остается без изменения? Величина всей нагрузки, очевидно, при этом возрастает как квадрат линейных размеров, и, следовательно, изгибающий момент будет расти пропорционально кубу линейных размеров. Так как момент сопротивления поперечного сечения балки возрастает в том же отношении, то, очевидно, что максимальные напряжения изгиба при этом не меняются. Геометрически подобные балки при указанной нагрузке будут равнопрочными.

Если нагрузка растет пропорционально кубу линейных размеров (такой нагрузкой является, например, собственный вес балки), то изгибающий момент при пропорциональном увеличении всех размеров будет расти, как четвертая степень размера, тогда как момент сопротивления растет пропорционально кубу размера. Следовательно, напряжения, вызываемые собственным весом, возрастают в случае геометрически подобных балок пропорционально пролету. Роль напряжения от собственного веса возрастает с размерами сооружения. Для балки определенного типа, при заданной прочности материала, можно легко найти ту предельную длину, при которой напряжения от собственного веса достигают значения допускаемых напряжений для взятого материала. Дальнейшее увеличение пролета становится возможным лишь с повышением прочности материала.

Те громадные величины пролетов, которые теперь встречаются в практике мостового строительства, и большие длины современных крупных судов являются возможными лишь при условии применения материалов высокого качества, например, стали повышенной прочности.

Если поперечные сечения балок геометрически подобны, то между площадью поперечного сечения и моментом сопротивления его будет иметь место зависимость:

$$F = \alpha (W)^{\frac{2}{3}} \quad (a)$$

Величина коэффициента α зависит лишь от формы сечения и остается постоянной при геометрически подобных профилях. При выборе поперечных размеров мы исходим из ф-лы:

$$W = \frac{M}{R},$$

где M величина наибольшего изгибающего момента и R — допускаемое напряжение. В таком случае площадь поперечного сечения, на основании (а), представляется так:

$$F = \alpha \left(\frac{M}{R} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Для собственного веса балки получаем выражение:

$$Fl\gamma = \alpha l \gamma \left(\frac{M}{R} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Здесь через γ обозначен вес единицы объема материала. В случае геометрически подобных профилей вес балок одинакового пролета растет пропорционально $(M)^{\frac{2}{3}}$.

Если мы балку, несущую равномерную нагрузку и лежащую на двух опорах, подразделим пополам и добавлением промежуточной опоры перейдем к двум балкам вдвое меньшего пролета, то от этого изгибающий момент уменьшится в 4 раза, и вес двух балок будет меньше веса цельной балки в $(4)^{\frac{2}{3}} = 2,52$ раза.

Если нам нужно перекрыть какое-либо прямоугольное в плане помещение системой равноудаленных балок, параллельных одной из сторон прямоугольника, и нагрузка, передающаяся на балки, равномерно распределена по площади перекрываемого помещения, то при уменьшении числа балок в n раз, мы во столько же раз увеличиваем нагрузку, приходящуюся на каждую балку, а, следовательно, и величину изгибающего момента. Вес каждой балки возрастет в отношении $(n)^{\frac{2}{3}}$, но так как число балок уменьшилось в n раз, то общий вес балок уменьшится в отношении $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

При подборе сечений часто приходится руководствоваться не только условием прочности, но и условием достаточной жесткости балки, характеризуемой величиной EI . Нередко ограничивают ту наибольшую стрелу прогиба, которую балка может получить под действием приходящейся на нее нагрузки. Нетрудно показать, что, удовлетворяя условию прочности, мы далеко не всегда удовлетворим и второму поставленному условию. При одних и тех же наибольших нормальных напряжениях балки различных поперечных сечений будут прогибаться весьма различно. Если ρ — радиус кривизны балки в опасном сечении и h — ее высота, то величина наибольших продольных растяжений и сжатий, а, следовательно, и величина соответствующих напряжений определяется отношением $\frac{h}{2} : \rho$ [Ф-ла (61)]. При постоянном значении этого отношения, т. е., при постоянном наибольшем нормальном напряжении величина радиуса кривизны будет тем больше, а, следовательно, прогибы тем меньше, чем большая будет высота балки h .

Рассмотрим теперь некоторые сечения, не симметричные относительно нейтральной линии.

Сечение рельса (черт. 162), хотя и несимметричное относительно нейтральной оси, но размеры обыкновенно бывают так подобраны, что расстояние от центра тяжести до поверхности головки и подошвы рельса одинаковы. Наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения равны, и проверку придется сделать по ф-ле (69).

Сечение тавровое и тавробимсы (черт. 163) часто употребляются при постройке судов. Эти сечения уже значительно менее выгодны, так как расстояние до наиболее удаленных волокон сжатых и вытянутых не равны, а, следовательно, не равны и наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения. Если за мерку достоинства этих сечений выбрать прежнее отношение момента сопротивления к площади, то для встречающихся на практике тавробимсов это соотношение будет:

$$\frac{W}{F} = \text{от } 0,23 h \text{ до } 0,22 h.$$

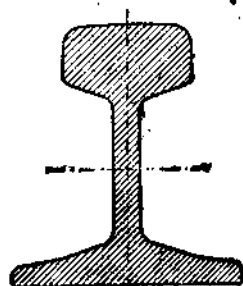
Выбор подобных поперечных сечений для железа определяется только конструктивными соображениями.

Когда приходится иметь дело с такими материалами, сопротивляемость которых растяжению и сжатию различна (например, чугун оказывает разрыву гораздо меньшее сопротивление, нежели сжатию), то формы, несимметричные относительно нейтральной линии, будут вполне целесообразными. Очевидно, формы эти нужно подбирать так, чтобы соотношение между наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями равнялось отношению между допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие.

Возьмем, для примера, *корытообразное сечение* (черт. 164). При размерах, указанных на чертеже, центр тяжести сечения отстоит на 3 см от оси OO . Если нижним точкам сечения соответствует растяжение, а верхним — сжатие, то наибольшие сжимающие напряжения будут относиться к наибольшим растягивающим, как 7 : 3. Изменяя размеры ребер и стенки коробчатой балки, можно подобрать любое соотношение между наибольшими растягивающим и сжимающим напряжениями.

В заключение, отметим еще одно обстоятельство, имеющее иногда практическое значение. Момент сопротивления поперечного сечения W определяет величины наибольших нормальных напряжений при изгибе. Важно показать,

Курс сопротивления материалов.



Черт. 162.

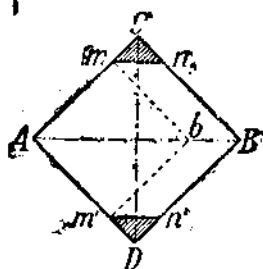


Черт. 163



Черт. 164.

что не всегда момент сопротивления уменьшается с уменьшением площади поперечного сечения: бывают случаи, когда отрезанием некоторых частей сечения можно увеличить W . Поясним это на частном примере. Возьмем *квадратное сечение* (черт. 165); положим, что балка так расположена, что с плоскостью изгибающих сил совпадает одна из диагоналей квадрата. Легко показать, что срезыванием углов C и D можно увеличить момент сопротивления поперечного сечения. Если a сторона квадрата, то момент инерции его относительно AB будет:



Черт. 165.

$$J = \frac{a^4}{12} \text{ и момент сопротивления } W = \frac{J\sqrt{2}}{a} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Срежем сечениями mn и $m'n'$ углы балки; положим $mC = Cn = m'D = n'D = \alpha a$. Получим новое сечение, состоящее из квадрата $Ambm'$ и из двух параллелограммов $mnbV$ и $bVm'n'$. Момент инерции полученного таким образом сечения будет:

$$J_1 = \frac{a^4(1-\alpha)^3}{12} (1+3\alpha),$$

момент сопротивления:

$$W = \frac{a^3(1-\alpha)^3(1+3\alpha)\sqrt{2}}{12\alpha(1-\alpha)}.$$

Приравняв производную $\frac{dW}{d\alpha}$ нулю, найдем, что $W_{\max}$ будет при $\alpha = \frac{1}{9}$.

Если подставить найденное значение α в выражение для W , то получим момент сопротивления на 5% больший, чем в случае несрезанных углов. Таким образом, мы достигли увеличения W . Это явление станет понятным, если обратить внимание на то, что W получится как результат деления J на $\frac{h}{2}$. Срезывая углы C и D , мы уменьшаем J , но еще в большей степени уменьшаем высоту балки — частное увеличивается. То, что мы показали для квадрата, имеет место и в других случаях.

В *круглом сечении* можно увеличить момент сопротивления на 0,007 его первоначальной величины срезанием двух сегментов высотой 0,022 r .

В случае *треугольного* поперечного сечения также можно срезыванием увеличить момент сопротивления. Произведенные на этот случай опыты доказали большую прочность брусков со срезанным углом.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ. ИЗОГНУТАЯ ОСЬ БАЛКИ.

§ 72. Уравнение изогнутой оси.

При расчетах часто приходится определять не только величину напряжений, которые в балке будут иметь место при действии заданных нагрузок, но и величину соответствующих деформаций. Иногда ставится требование, чтобы наибольший прогиб балки не превосходил известной части ее длины l . С вопроса о форме изогнутой оси балки приходится начинать решение тех задач, где условий статики недостаточно для нахождения опорных реакций. Лишние закрепления налагают дополнительные условия на форму изгиба балки, и этими условиями пользуются для определения опорных реакций. Условимся ось X -ов направлять по оси балки, а ось Y -ов направим вертикально вверх. Искривленная форма балки будет вполне определена, если для каждого x мы найдем соответствующее значение прогиба y . Для получения ур-ия изогнутой оси балки воспользуемся установленной нами ранее зависимостью между кривизной оси балки и величиной изгибающего момента в каком-либо сечении балки [Ф-ла (63)] ¹⁾:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}.$$

Если мы, вместо $\frac{1}{\rho}$, вставим его выражение, то получим дифференциальное ур-ие изогнутой оси балки в такой форме ²⁾:

$$\pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EJ} \quad (89).$$

¹⁾ Ф-ла эта получена нами для случая чистого изгиба. Насколько изменяется кривизна оси от касательных напряжений, будет выяснено ниже (см. § 81). Влияние касательных напряжений, обыкновенно, не велико, и им пренебрегают при решении практических задач.

²⁾ Если взять элемент балки длиной ds , то кривизна, соответствующая ему, будет: $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$. Заметим, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, следовательно:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{dy}{dx} \right)}{ds} = \frac{d \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{dy}{dx} \right)}{dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

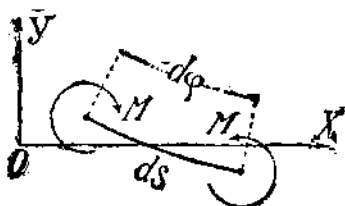
Произведя дифференцирование, придем к вышенаписанной Ф-ле.

Ур-ие это может быть значительно упрощено, если принять во внимание, что на практике допускаются лишь незначительные прогибы: y мало по сравнению с длиной балки. Величина $\frac{dy}{dx}$, представляющая при нашем расположении координат tg угла, составляемого касательной к изогнутой оси балки с осью X -ов, также есть величина малая, и ее квадратом, по сравнению с единицей, можно пренебречь. Тогда ур-ие изогнутой оси представится в таком виде:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \mp M \quad (90).$$

Относительно знаков заметим, что изгибающий момент мы условились (§ 58) считать положительным, если он левую отсеченную часть балки стремится вращать по часовой стрелке. Этот момент, очевидно, вызывает в рассматриваемом сечении искривление, направленное выпуклостью в сторону отрицательных Y -ов (черт. 166). При таком искривлении значение производной $\frac{dy}{dx}$ возрастает с возрастанием x , следовательно, вторая производная положительна, и в нашем ур-ии (90) нужно брать знак плюс.

При изменении расположения координатных осей, или правила знаков для изгибающего момента, может измениться и знак в ур-ии (90), поэтому при решении частных задач лучше знак установить каждый раз особо, выбирая его таким образом, чтобы обе части ур-ия (90) были одного знака.



Черт. 166.

§ 73. Изгиб балки с одним заделанным, другим свободным концом.

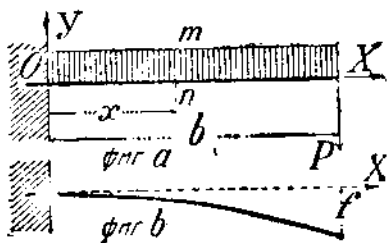
Пусть на балку действует сосредоточенная сила P и равномерно распределенная по длине сплошная нагрузка (черт. 167). Величину этой нагрузки, приходящуюся на единицу длины балки, обозначаем через q . Изгибающий момент в сечении mn будет:

$$M = -P(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}.$$

Здесь знак выбран на основании ранее принятого правила знаков (§ 65). Ур-ие изогнутой оси напишется таким образом:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = -P(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}.$$

Легко видеть, что знаки в этом ур-ии выбраны правильно. В самом деле: правая часть ур-ия имеет по всей длине балки отрицательное значение; что касается знака второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$, то он также отрицателен: ось балки



Черт. 167.

изогнется так, как это показано на черт. 167 фиг. б; следовательно $\frac{dy}{dx}$ отрицательно и по абсолютному значению возрастает с возрастанием x . Интегрируя написанное ур-ие, получим:

$$EJ \frac{dy}{dx} = -P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{q}{2} \left(lx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C \quad (a)$$

Буквою C мы обозначили произвольную постоянную интегрирования. Она легко может быть определена из условий закрепления конца балки. В рассматриваемом случае левый конец балки предполагается заделанным, он при изгибе не поворачивается, и потому искривленная ось бруска будет касательна к оси OX в точке O , следовательно:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Чтобы это условие было соблюдено, необходимо в ур-ии (a) положить $C = 0$. Подставляя в ур-ие (a) различные значения для x , мы можем вычислить соответствующие значения $\frac{dy}{dx}$. Вычислим наклон касательной в правом конце балки. Для этого вместо x поставим l , тогда:

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=l} = -\frac{Pl}{2EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \quad (91)$$

Первый член дает нам угол наклона касательной от действия силы P , второй — от сплошной нагрузки ql . Чтобы получить значение прогиба y балки, нужно произвести интегрирование ур-ия (a). Принимая во внимание, что $C = 0$, получим:

$$EJy = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{lx^3}{2} - \frac{1}{3} \frac{x^4}{4} \right) + D \quad (b)$$

Здесь D — новая производная постоянная. Ее мы определим из того условия, что левый заделанный конец балки при изгибе не перемещается, следовательно:

$$y = 0 \text{ при } x = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому условию, нужно положить, очевидно, $D = 0$. Ур-ие (b) дает возможность определить величину прогиба y в любом сечении — это есть ур-ие изогнутой оси. Наибольший прогиб будет соответствовать правому концу балки; его мы найдем, полагая $x = l$:

$$[EJy]_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8},$$

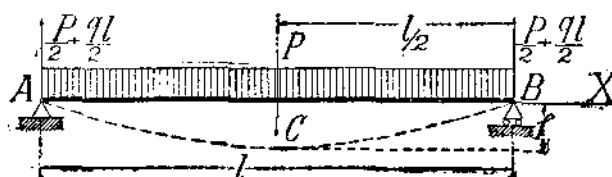
откуда:

$$[y]_{x=l} = -\frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{ql^4}{8EJ} \quad (92)$$

Первый член в этом выражении представляет прогиб от сосредоточенной силы P , а второй — от сплошной нагрузки ql . Если $P = ql$, то прогибы эти относятся, как 8 : 3. Знак для прогиба мы получили отрицательный, так как балка изгибается в сторону отрицательных Y -ов.

§ 74. Изгиб балки с опертыми концами.

Если балка AB изгибается силой P , приложенной по середине пролета, и равномерно распределенной нагрузкой ql , то наибольший прогиб получится под грузом (черт. 168). Величину этого прогиба можно найти, воспользовавшись результатами предыдущего параграфа. Кривая изгиба, очевидно, симметрична относительно середины C , и потому касательная к изогнутой оси в этой



Черт. 168.

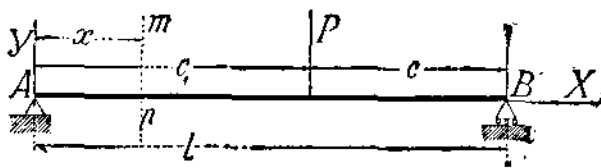
точке будет параллельна оси X . Каждая половина балки находится совершенно в таких же условиях, как ранее рассмотренная балка с одним заделанным концом. Возьмем участок балки BC ;

его можно рассматривать как балку, конец которой C заделан, к концу B приложена направленная снизу вверх сила $\frac{P}{2} + \frac{ql}{2}$, представляющая собою опорную реакцию для балки AB ; кроме того, на балке имеется равномерно распределенная нагрузка, действующая сверху вниз. Вызываемый этими силами прогиб конца B определится на основании ф-лы (92):

$$= \frac{\left(\frac{P}{2} + \frac{ql}{2}\right) \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} - \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EJ} = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{5ql^4}{384EJ} \quad (93).$$

Прогиб балки AB в сечении C , очевидно, выразится той же ф-лой (93), только придется изменить знак на противоположный. Первый член этой ф-лы представляет собой прогиб от силы P , а второй — от равномерно распределенной нагрузки.

Если сосредоточенная сила расположена не по середине пролета (черт. 169), то определение ур-ия изогнутой оси несколько сложнее. В зависимости



Черт. 169.

от того, по какую сторону от груза P мы выбираем сечение, получаются различные аналитические выражения для изгибающего момента, и потому приходится для каждой части балки составлять

свое дифференциальное ур-ие. Для левой части балки ур-ие изогнутой оси будет:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pc}{l} x.$$

Произведя интегрирование, найдем закон изменения угла наклона касательной:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} + D,$$

где D произвольная постоянная интегрирования. Вторичное интегрирование дает нам ур-ие изогнутой оси балки для левой половины:

$$EJy = \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} + Dx + D_1.$$

Новая произвольная постоянная D_1 легко может быть определена из того условия, что левый конец балки оперт, т.-е. прогиб там равен нулю; следовательно $y=0$ при $x=0$.

Чтобы удовлетворить этому требованию, нужно положить $D_1=0$. Определение постоянной D возможно лишь после рассмотрения ур-ия изогнутой оси в правой половине балки.

Определение произвольных постоянных может быть значительно упрощено, если воспользоваться следующим приемом. При составлении изгибающего момента в правой части балки будем брать силы, лежащие по левую сторону от рассматриваемого сечения, тогда дифференциальное ур-ие изогнутой оси в правой половине балки примет такой вид:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pc}{l} x - P(x - c_1).$$

При $x=c_1$ ур-ие совпадает с тем, что мы имели для левой половины балки.

Результат первого интегрирования мы напомним в такой форме:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} - \frac{P(x - c_1)^2}{2} + C.$$

Ур-ие изогнутой оси можем представить так:

$$EJy = \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x - c_1)^3}{6} + Cx + C_1.$$

Мы получили четыре произвольных постоянных: D и D_1 для левого участка балки и C и C_1 для правого, но форма, в которой представлено ур-ие изогнутой оси балки на протяжении правого участка, дает возможность сразу привести число произвольных постоянных к двум. В самом деле, в месте приложения силы P , т.-е. при $x=c_1$, оба участка изогнутой оси балки должны иметь общую касательную и общий прогиб, следовательно:

$$\left| \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} + D \right|_{x=c_1} = \left| \frac{Pc}{l} \frac{x^2}{2} - \frac{P(x - c_1)^2}{2} + C \right|_{x=c_1}$$

$$\left| \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} + Dx + D_1 \right|_{x=c_1} = \left| \frac{Pc}{l} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x - c_1)^3}{6} + Cx + C_1 \right|_{x=c_1},$$

откуда следует, что

$$C = D \text{ и } C_1 = D_1.$$

Число произвольных постоянных сводится к двум, и мы их сможем найти из условий на концах балки. Из условия на левом конце следует, как мы видели, что $D_1 = C_1 = 0$. На правом конце прогиб равен нулю, следовательно, полагая $x = l$ в ур-ии изогнутой оси для правой половины балки, получим, для определения постоянных C и D , ур-ие:

$$\frac{Pc}{l} \frac{l^3}{6} - \frac{P(l-c)^3}{6} + Cl = 0.$$

Принимая во внимание, что $l - c_1 = c$, найдем:

$$C = D = \frac{Pc(c^2 - l^2)}{6l}.$$

Следовательно, ур-ие изогнутой оси для левой части балки напишется так:

$$EJy = \frac{Pcx}{6l} (x^2 + c^2 - l^2) \quad (94).$$

Указанный прием может быть распространен на тот случай, когда балка изгибается несколькими сосредоточенными силами. Составляя для каждого участка балки между двумя сосредоточенными силами соответствующее дифференциальное ур-ие и выполняя интегрирование, найдем, что общее число произвольных постоянных равно удвоенному числу участков. Представляя результаты интегрирования в такой форме, как это было сделано выше для случая изгиба балки одной сосредоточенной силой, можем число произвольных постоянных привести к двум. В самом деле, пусть R левая опорная реакция, $P_1, P_2, P_3, \dots$ изгибающие силы, $c_1, c_2, c_3, \dots$ их расстояния от левого конца и, наконец, l — пролет балки, тогда дифференциальные ур-ия для изогнутой оси в последовательных участках, считая от левой опоры, представятся так:

- I. $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Rx,$
- II. $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Rx - P_1(x - c_1),$
- III. $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Rx - P_1(x - c_1) - P_2(x - c_2),$
-

Первые интегралы этих ур-ий представим в таком виде:

- I. $EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} + C,$
- II. $EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{P_1(x - c_1)^2}{2} + C_1,$
- III. $EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{P_1(x - c_1)^2}{2} - \frac{P_2(x - c_2)^2}{2} + C_2,$
-

Для вторых интегралов получим выражения:

- I. $EJy = \frac{Rx^3}{6} + Cx + D_1$

$$\text{II. } Ely = \frac{Rx^3}{6} - \frac{P_1(x-c_1)^3}{6} + C_1x + D_1,$$

$$\text{III. } Ely = \frac{Rx^3}{6} - \frac{P_1(x-c_1)^3}{6} - \frac{P_2(x-c_2)^3}{6} + C_2x + D_2,$$

Из того условия, что на границе I и II участков, т.е. при $x = c_1$, изогнутая ось балки имеет общий прогиб и общую касательную, заключаем:

$$C = C_1 \text{ и } D = D_1.$$

Таким же образом, из равенства прогибов и углов наклона касательных при $x = c_2$ на границе II и III участков, найдем:

$$C_1 = C_2 \text{ и } D_1 = D_2.$$

Повторяя эти рассуждения для каждой пары смежных участков, найдем:

$$C = C_1 = C_2 = C_3 = \dots; D = D_1 = D_2 = D_3 = \dots$$

Задача сводится к определению только двух произвольных постоянных, для чего мы можем воспользоваться условиями на концах балки. При опертых концах будем иметь:

$$D = D_1 = D_2 = \dots = 0 \text{ и } C = C_1 = C_2 = \dots = \frac{1}{l} \left[-\frac{Rl^3}{6} + \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{P_n(l-c_n)^3}{6} \right].$$

Результаты эти получаем, приравнявая нулю прогибы на левом и правом концах балки. Определив произвольные постоянные, мы находим уравнение изогнутой оси для каждого участка балки. Этим приемом можно воспользоваться также в том случае, когда, кроме сосредоточенных сил, на балку действует сплошная нагрузка. Нужно только, чтобы закон изменения нагрузки по длине представлялся одной и той же функцией от x во всех участках балки. Как пример, можно указать случай равномерной нагрузки, или нагрузки, меняющейся по линейному закону.

Возвратимся опять к изгибу балки одной сосредоточенной силой и подробнее остановимся на уравнении (94).

При нашем расположении нагрузки ($c < c_1$), очевидно, наибольший прогиб балки будет иметь место в левом участке. Приравнявая производную выражения (94) нулю, найдем, что место наибольшего прогиба отстоит от левой опоры на расстояние:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3} (l^2 - c^2)} \quad (95),$$

соответствующее значение прогиба будет:

$$y_{\max} = -\frac{Pc}{9lEJ} (l^2 - c^2) \sqrt{\frac{1}{3} (l^2 - c^2)} \quad (96).$$

Отметим здесь, что положение сечения, в котором имеет место наибольший прогиб, всегда близко к середине пролета балки. Если груз P приложен по середине балки, то максимальный прогиб совпадает с точкой приложения груза. Отодвигая P от середины, мы в пределе получим $c = 0$, и соответствующее положение сечения с наибольшим прогибом определится абсциссой [ф-ла (95)]:

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 l.$$

Таким образом, наибольшее расстояние сечения максимального прогиба от середины балки будет 0,077*l*. Если принять во внимание, что у места наибольшего прогиба изменения прогиба с изменением абсциссы *x* малы (ф-ия медленно меняется у места *max* или *min*), то можно высказать такое заключение: в случае действия на балку сосредоточенной силы, можно с достаточной точностью полагать, что прогиб балки по середине пролета равен наибольшему прогибу; погрешность, как мы дальше увидим, в худшем случае не превосходит 2,5%. Подставляя в ур-ие (94) вместо *x* величину $\frac{l}{2}$, получим прогиб в середине балки; он представится ф-лой:

$$[y]_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Pc}{48EJ}(3l^2 - 4c^2) \quad (97).$$

Кроме прогиба балки, иногда приходится определять углы поворота концевых поперечных сечений. Так как эти углы малы, то их будем принимать равными абсолютным значениям производной $\frac{dy}{dx}$ для концов балки. Мы имеем ур-ие (94) изогнутой оси балки для левого участка; пользуясь им, сейчас же находим угол поворота θ_1 левого конца балки из ур-ия:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Pcx^2}{2l} - \frac{Pc(l^2 - c^2)}{6l},$$

полагая в нем *x* = 0, найдем:

$$\theta_1 = -\frac{Pc(l^2 - c^2)}{6lEJ} \quad (98).$$

θ_1 получилось отрицательным, так как при выбранном расположении координат



Черт. 170.

значение производной $\frac{dy}{dx}$ отрицательно. В дальнейшем мы условимся отсчитывать угол θ_1 от оси *OX* по часовой стрелке (черт. 170), и потому в ф-ле (98) будем опускать знак минус.

Угол поворота θ_2 получим из ф-лы (98), если вместо *c* поставим *l* - *c*, тогда:

$$\theta_2 = \frac{Pc(l - c)(2l - c)}{6lEJ} \quad (99).$$

θ_2 отсчитывается от оси балки против часовой стрелки. Когда груз расположен по середине, т.-е. $c = \frac{l}{2}$:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EJ} \quad (100)$$

Рассмотрим теперь подробнее предельный случай, когда *c* стремится к нулю и сила *P* приближается к правой опоре. Если при этом силу *P* увеличивать по такому закону, чтобы *Pc* оставалось постоянным, то мы в пределе получим

изгиб балки парю сил $M = Pc$, приложенной к правому концу балки. Ур-ие изогнутой оси для этого случая найдем, полагая в выражении (94) $c = 0$ и $Pc = M$:

$$EJy = \frac{Mx}{6l}(x^2 - l^2) \quad (101).$$

Угол наклона касательной определим, дифференцируя ур-ие (101):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{6lEJ}(3x^2 - l^2) \quad (102).$$

Наибольший прогиб соответствует тому сечению, где касательная горизонтальна, т.-е., где

$$\frac{dy}{dx} = 0, \text{ или } 3x^2 - l^2 = 0, \text{ откуда } x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 l.$$

Вставляя найденное значение для x в выражение (101), получим наибольший прогиб:

$$f_{\max} = \frac{Mp}{9\sqrt{3}EJ} = 0,0641 \frac{Mp}{EJ}.$$

Прогиб по середине равен:

$$\frac{Mp}{16EJ} = 0,0625 \frac{Mp}{EJ} \quad (103).$$

Разность между этими прогибами составляет 2,5% от $f_{\max}$.

Вставляя в выражение (102) значения $x = 0$ и $x = l$, получим углы наклона концевых касательных:

$$\theta_1 = \frac{Ml}{6EJ} \text{ и } \theta_2 = \frac{Ml}{3EJ} \quad (104).$$

Полученными ф-ми нам придется часто пользоваться при рассмотрении статически неопределенных случаев изгиба балок.

§ 75. Изгиб балки, опертой по концам, равномерно распределенной нагрузкой.

Если q — нагрузка, приходящаяся на единицу длины балки, то опорные реакции будут:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

Изгибающий момент в каком-либо сечении ml равен:

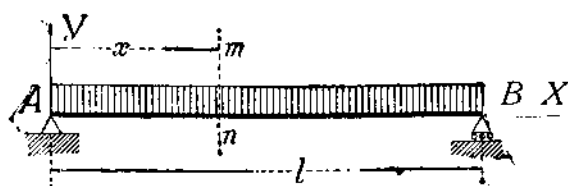
$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Дифференциальное ур-ие изогнутой оси будет:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Произведя интегрирование, получим:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{qx^3}{6} + C \quad (a).$$



Черт. 171.

Произвольную постоянную C можно определить из таких соображений: кривая изогнутой оси балки, очевидно, будет симметрична относительно середины, в таком случае касательная, проведенная

к изогнутой оси в середине пролета, будет горизонтальна:

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\frac{l}{2}} = 0,$$

откуда для определения C имеем ур-ие:

$$\frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} + C = 0; \quad C = -\frac{ql^3}{24}.$$

Подставляя полученное значение C в ур-ие (а) и выполняя вторичное интегрирование, найдем:

$$EJy = \frac{qlx^3}{12} = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3x}{24} + C_1.$$

Произвольная постоянная C_1 должна быть равна нулю, так как при $x=0$ прогиб на левой опоре равен нулю, т.-е. $y=0$.

Окончательно ур-ие изогнутой оси балки для данного случая напишется таким образом:

$$y = -\frac{ql^3}{24EJ} \left(x - 2x \frac{x^2}{l^2} + x \frac{x^3}{l^3} \right) \quad (b).$$

Наибольший прогиб, очевидно, будет иметь место по середине пролета, и найдется из ур-ия (b), полагая в нем $x = \frac{l}{2}$:

$$v_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \quad (c).$$

Найдем теперь углы поворота концевых поперечных сечений балки.

Углы эти по величине будут равны, и мы их определим из ур-ия (а), полагая:

$$C = -\frac{ql^3}{24} \text{ и } x=0; \text{ в таком случае: } \theta_1 = \frac{ql^3}{24EJ}.$$

(Знак минус опускаем, так как угол θ_1 отсчитываем по часовой стрелке от оси балки.)

§ 76. Сложение действия сил.

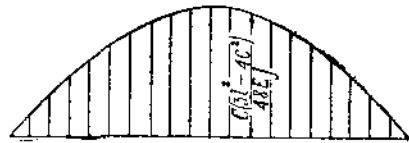
Мы рассмотрели случаи действия на балку сосредоточенной силы, равномерно распределенной нагрузки и пары сил. Пользуясь полученными результатами, можно находить величины прогибов и углы поворота концов балки при действии более сложных систем нагрузок, для этого придется воспользоваться

принципом сложения действия сил. Пока деформации малы и расположение сил таково, что их действие не зависит от деформаций¹⁾, можно перемещение каждой точки деформируемого тела получить как сумму перемещений, вызываемых отдельными силами. Применяя это к изгибу балок, мы можем легко находить прогибы при любой системе нагрузок.

Положим, на балку действует система сосредоточенных сил. При вычислении прогиба по середине можно воспользоваться ф-лой (97). Для всех сил, лежащих на правой половине балки, c будет обозначать расстояние от правой опоры. Для сил левой половины балки c будет расстояние от левой опоры. Полный прогиб получится путем суммирования прогибов от отдельных нагрузок. В случае подвижного груза прогиб по середине будет тем больше, чем ближе груз к середине. Если над осью балки построить кривую так, чтобы для каждого положения груза в правой половине пролета ордината равнялась [см. ф-лу (97)]:

$$\frac{c}{48EJ}(3l^2 - 4c^2),$$

т.е. принять груз равным единице, и симметрично продолжить кривую на левую часть пролета, то вычисление прогиба, вызываемого в среднем пролете системой заданных сил, значительно упрощается. Каждую из сил придется умножить на соответствующую ординату построенной кривой (черт. 172). Ордината ее в расстоянии c от правой опоры дает, в принятом масштабе, прогиб середины балки при действии груза, равного единице и помещенного в расстоянии c от той же опоры. Такого рода кривые мы в дальнейшем будем называть *линиями влияния* для прогиба балки.



Черт. 172.

От системы сосредоточенных сил легко перейти к *сплошной равномерно распределенной нагрузке*. Если $q \cdot dc$ нагрузка, приходящаяся на элемент балки длины dc , расположенной в расстоянии c от правой опоры ($0 < c < \frac{l}{2}$), то прогиб, соответствующий этой элементарной нагрузке (принимая ее за сосредоточенную), будет:

$$\frac{cq \, dc}{48EJ}(3l^2 - 4c^2).$$

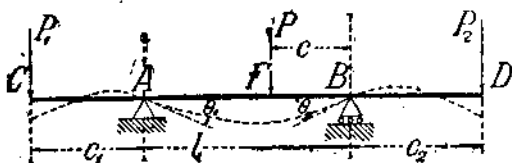
Полный прогиб найдется путем суммирования прогибов от отдельных элементов нагрузки. Таким образом, найдем;

$$f = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(qdc)c}{48EJ} (3l^2 - 4c^2) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

¹⁾ Те случаи, когда перемещения точек стержня при деформации оказывают существенное влияние на действие сил, будут рассмотрены в гл. XV.

Если равномерно распределенная нагрузка занимает лишь часть пролета, то для вычисления прогиба нужно только изменить соответствующим образом пределы интегрирования.

В качестве более сложного примера, рассмотрим изгиб балки со свешивающимися концами (консольной) сосредоточенными силами P_1 , P и P_2 (черт. 173). Предположим, нужно найти прогиб балки в конце C и по середине пролета в точке F . При решении задачи общим способом пришлось бы для каждого участка балки (сосредоточенная сила P и реакции A и B разделяют балку на 4 участка; в каждом участке свое выражение



Черт. 173.

для изгибающего момента) написать свое дифференциальное уравнение, потом интегрировать эти уравнения и определять произвольные постоянные из граничных условий. Мы упростим решение, если воспользуемся принципом сложения действия сил. Рассмотрим прогиб в точке F , для этого выделим среднюю часть балки AB . Действие на нее консолей можно заменить силами P_1 и P_2 , приложенными в сечениях A и B , и парами сил P_1c_1 и P_2c_2 ; что касается сил, то они передадутся непосредственно на опоры и не вызовут деформаций в средней части балки. Пары сил изогнут балку выпуклостью вверх. Для определения прогиба, вызываемого каждой из пар, можно воспользоваться ф-лой (103). Прогиб от силы P найдем по ф-ле (97). Суммируя прогибы от отдельных причин и принимая во внимание знаки их получим для полного прогиба точки F выражение:

$$f = \frac{Pc}{48EJ} (3l^2 - 4c^2) - \frac{P_1c_1l}{16EJ} - \frac{P_2c_2l}{16EJ}.$$

При помощи ф-л (98) и (104) находим без затруднения угол θ_1 наклона касательной к изогнутой оси в точке A :

$$\theta_1 = -\frac{Pc(l - c^2)}{6EJ} - \frac{P_1c_1l}{3EJ} - \frac{P_2c_2l}{6EJ}.$$

Для определения прогиба точки C нужно рассмотреть изгиб консоли AC . Если бы касательная к изогнутой оси балки в точке A была горизонтальна, то искомый прогиб выразился бы ф-лой:

$$\frac{P_1c_1^3}{3EJ}.$$

Благодаря поворачиванию сечения A , точки консоли совершат дополнительное перемещение. Для C это перемещение равно $c_1\theta_1$, и, следовательно, полный прогиб точки C равен:

$$\frac{P_1c_1^3}{3EJ} - c_1\theta_1.$$

Остается только вместо θ_1 вставить вышенайденное его значение.

Ряд примеров применения принципа сложения действия сил мы будем еще иметь при рассмотрении статически неопределенных случаев изгиба.

§ 77. Построение изогнутой оси балки, как веревочной кривой.

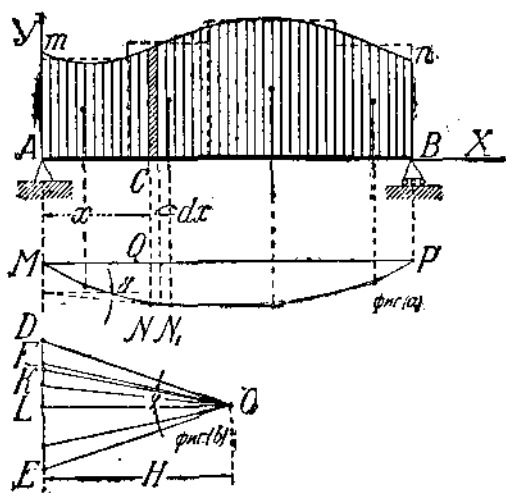
При нахождении изогнутой оси балки приходится, как мы видели, интегрировать ур-ие:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M.$$

Интегрирование это может быть выполнено графическим путем. Для выяснения графического метода приведем построение, которым пользуются при нахождении изгибающих моментов в балке, несущей сплошную нагрузку.

Пусть AB изгибаемый брусок, mn — соответствующая грузовая линия.

Ординаты q этой линии выбраны таким образом, что для любого сечения произведение $q \cdot dx$ (q откладывается в определенном масштабе) представляет величину нагрузки, приходящейся на элемент длины dx . Для нахождения изгибающих моментов, разбиваем грузовую площадь несколькими ординатами на участки (на черт. 174 они показаны пунктиром). Сплошную нагрузку, соответствующую каждому участку, заменяем сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести этого участка. Для полученной таким образом системы сосредоточенных сил можем построить веревочный многоугольник. Увеличивая число участков, на которые подразделяется грузовая площадь, мы будем увеличивать и число сторон соответствующего веревочного многоугольника. В пределе веревочный многоугольник обратится в веревочную кривую. Пусть MNP (черт. 174) представляет эту кривую, ODE — соответствующий многоугольник сил. Для нахождения изгибающего момента в каком-либо сечении C балки нужно измерить в масштабе длины соответствующий отрезок QN между веревочной кривой и замыкающей MP и помножить это на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе сил (§ 53).



Черт. 174.

Составим дифференциальное ур-ие для полученной веревочной кривой. Касательная к кривой в какой-либо точке N составляет с осью X угол φ . Проводим в многоугольнике сил соответствующий луч OF ; тогда для угла наклона касательной получим:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{FL}{OL} \quad (OL — \text{горизонтальный луч}) \quad (a).$$

При переходе от точки N к бесконечно близкой точке N_1 касательная меняет свое направление. Пусть луч OK соответствует касательной в N_1 , тогда можно написать для $\text{tg}'а$ угла наклона касательной в N_1 выражение:

$$\frac{dy}{dx} + d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{KL}{OL} \quad (b).$$

Вычитая из (b) равенство (a), получим ¹⁾:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{FK}{OL} = \frac{qdx}{H}.$$

Дифференциальное ур-ие веревочной кривой будет:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad (105).$$

Графическое построение упругой линии основано на полном совпадении полученного дифференциального ур-ия веревочной кривой и ур-ия изогнутой оси балки $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M$. Интенсивности нагрузки q соответствует в ур-ии упругой линии величина M изгибающего момента, полюсному расстоянию H — величина жесткости балки при изгибе EJ . Для построения упругой линии нужно себе представить балку загруженной некоторой фиктивной сплошной нагрузкой, меняющейся по тому же закону, что и изгибающий момент M , и построить для этой фиктивной нагрузки веревочную кривую, приняв за полюсное расстояние величину EJ . При этом построении придется разбивать грузовую площадь на участки, вычислять площадь каждого участка и величину этой площади, в известном масштабе, откладывать на многоугольнике сил. Так как измерение ординат грузовой линии в данном случае будет: сила $\times$ длина (момент), то площади будут иметь измерение: сила $\times$ [длина]² — то же измерение, что имеет и жесткость балки EJ . Нам придется взять определенный масштаб для величин, имеющих измерение: сила $\times$ [длина]². В этом масштабе откладываем, как элементы грузовой площади на многоугольнике сил, так и полюсное расстояние. Дифференциальное ур-ие получаемой для такого многоугольника сил веревочной кривой будет совпадать с дифференциальным ур-ием изогнутой оси балки. Для получения с помощью этой кривой прогибов балки нужно построить замыкающую линию и отсчитывать координаты от этой замыкающей. Замыкающая линия должна быть проведена так, чтобы удовлетворить условиям на концах балки. Поясним это на частных примерах.

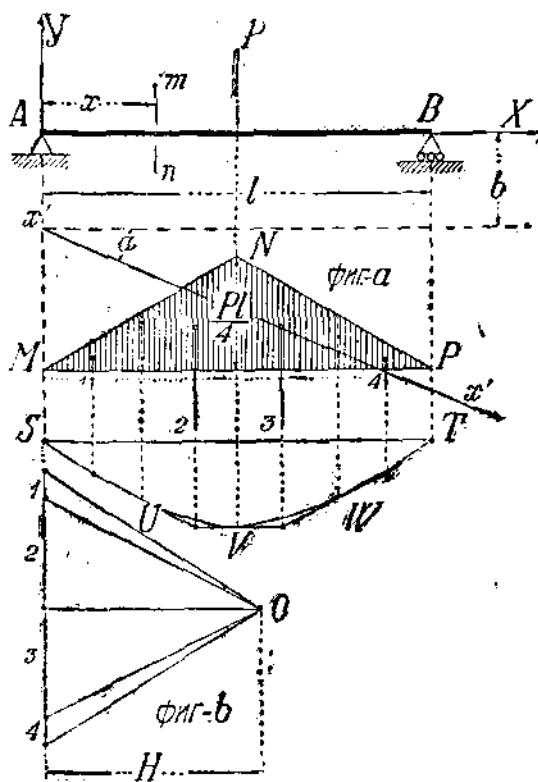
1. *Балка оперта по концам.* При действии силы P по середине пролета эпюра изгибающих моментов имеет вид равнобедренного треугольника MNP (черт. 175, фиг. а). Принимаем MNP за грузовую линию воображаемой

¹⁾ $FK = qdx$, так как отрезок между двумя лучами в многоугольнике сил должен равняться равнодействующей всех сил между соответствующими сторонами веревочного многоугольника. В рассматриваемом случае эта равнодействующая равна сплошной нагрузке qdx между сечениями, проходящими через N и N_1 .

сплошной нагрузки и строим для нее веревочную кривую $SUVWT$ [грузовая площадь разбита на 4 участка, площади этих участков 1, 2, 3, 4 отложены в определенном масштабе на многоугольнике сил (фиг. б) в том же масштабе отложено и полюсное расстояние $H = EJ$]. Дифференциальное ур-ие для левой части этой кривой будет:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M = \frac{P}{2} x \quad (c).$$

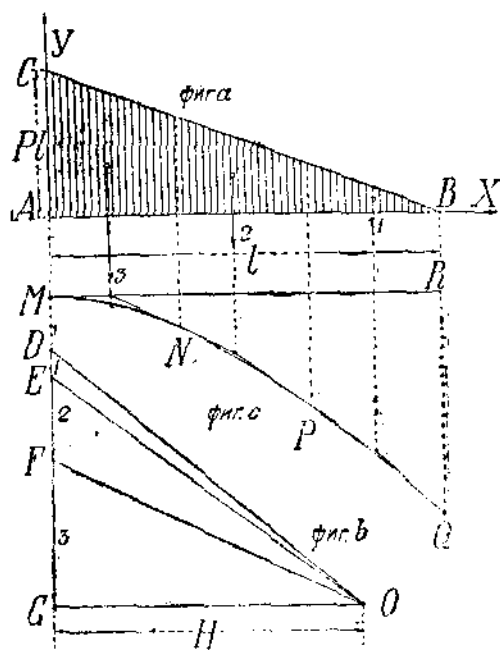
Если мы вместо того, чтобы отсчитывать ординаты y от оси X -ов, будем их отсчитывать от любой прямой $x'x'$ (фиг. а) в плоскости XY , то ур-ие (с) не нарушится. Изменение положения оси, от которой производятся отсчеты, равносильно подстановке в ур-ие (с), вместо величины y , некоторой новой величины $y_1 = y - ax - b$. Очевидно, y_1 будет удовлетворять ур-ию (с), если y этому ур-ию удовлетворяет. Чтобы получать прогибы балки, будем отсчитывать ординаты веревочной кривой от замыкающей линии ST , соединяющей точки S и T пересечения веревочной кривой с вертикалями, проходящими через опоры A и B балки. При таком выборе замыкающей мы не только удовлетворим ур-ию (с), но и условиям на концах балки: y будет обращаться в нуль при $x = 0$ и $x = l$, а, следовательно, в промежуточных сечениях y будет



Черт. 175.

давать действительный прогиб балки. Заметим, что при построении многоугольника сил мы для полюсного расстояния приняли тот же масштаб, что и для отрезков 1, 2, 3, 4, представляющих участки грузовой площади, поэтому изогнутая ось балки у нас получится в неискаженном виде. Между величиной прогиба и пролетом балки на чертеже получится то же отношение, что и в действительности. Так как действительные допускаемые прогибы весьма малы ($\frac{1}{500} - \frac{1}{2000}$ пролета), то получаемая на чертеже веревочная кривая будет очень мало отклоняться от замыкающей линии, вследствие чего определение прогибов

по такому чертежу было бы весьма неточным. Указанное неудобство будет устранено, если мы исказим чертеж, преувеличив ординаты прогиба. Делается это так: на многоугольнике сил, вместо полюсного расстояния $H = EJ$, берут величину меньшую, например, $0,01 EJ$, тогда ординаты прогиба получатся в 100 раз большими ¹⁾. При переходе от чертежа к числам нужно принять во внимание это искажение чертежа и, измерив прогиб в масштабе длины, т.-е. в том же масштабе, в каком отложен пролет балки, полученную величину уменьшить в 100 раз.



Черт. 176.

линии MR — касательной к веревочной кривой к точке M . При таком выборе замыкающей линии будут удовлетворены условия на конце балки, именно: у левой опоры будет:

$$y = 0 \text{ и } \frac{dy}{dx} = 0,$$

т.-е. прогиб равен нулю, и касательная сохраняет направление, совпадающее с направлением неизогнутой оси балки.

§ 78. Графо-аналитический метод исследования изгиба балок.

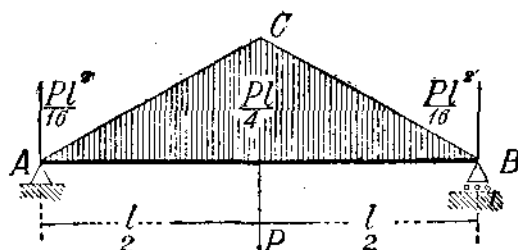
В предыдущем параграфе было показано, что прогиб балки в каком-либо сечении получается измерением в соответствующем масштабе ординаты между замыкающей и веревочной кривой. Так как длина этой ординаты, умноженная

¹⁾ Это следует из того, что произведение полюсного расстояния на вертикальный отрезок между замыкающей и веревочной кривой есть постоянная величина, равная изгибающему моменту от воображаемой нагрузки.

на полюсное расстояние EJ , есть не что иное, как изгибающий момент в рассматриваемом сечении от фиктивной сплошной нагрузки, то прогибы можно вычислять и аналитически, не производя самого построения. Способ вычисления удобнее всего выяснить на отдельных примерах.

1. Балка AB свободно лежит на двух опорах и нагружена силой P по середине (черт. 177).

Для получения прогибов нужно эпюру изгибающих моментов ACB принять за грузовую линию. В таком случае площадь треугольника ACB , равная $\frac{Pl^2}{8}$, даст величину фиктивной нагрузки. Опорные реакции от фиктивной нагрузки будут равны между собой, и каждая из



Черт. 177.

них равна $\frac{Pl^2}{16}$. Чтобы получить прогиб балки в каком-либо сечении, нужно только вычислить изгибающий момент M от фиктивной нагрузки в этом сечении и разделить его на жесткость балки EJ :

$$y = \frac{M}{EJ} \quad (106).$$

Для середины пролета

$$M = \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{32} = \frac{Pl^2}{48},$$

и, следовательно, прогиб по середине будет:

$$f = \frac{1}{EJ} \frac{Pl^2}{48}.$$

Получаем известную ф-лу [см. ф-лу (93)] для балки, нагруженной по середине. Если прогиб y выражается через момент от фиктивной нагрузки, то производная от прогиба $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ или tg угла наклона касательной выразится через производную от момента, т.е., через перерезывающую силу Q [см. ф-лу (66)] от фиктивной нагрузки:

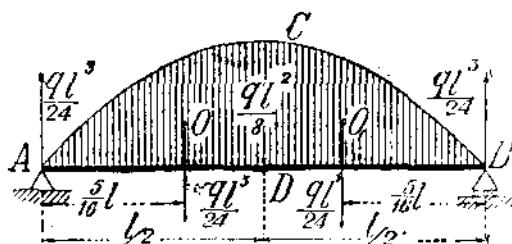
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \frac{dM}{dx} = \frac{Q}{EJ} \quad (107).$$

Воспользуемся этим замечанием для нахождения углов θ_1 и θ_2 наклона касательных к упругой линии у концов балки. Перерезывающая сила здесь по величине равна опорным реакциям $\frac{Pl^2}{16}$, следовательно, искомые углы будут равны:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Чтобы значения углов и по знаку совпадали с опорными реакциями от вообра-

жаемой нагрузки, условимся считать за положительные: поворот левого конца балки по часовой стрелке и правого — против часовой стрелки.

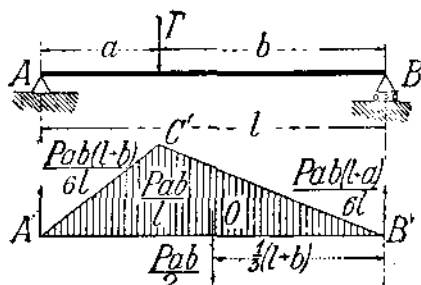


Черт. 178.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l$. Опорные реакции равны между собою и равны $\frac{ql}{2}$. Углы наклона концевых касательных, на основании ф-лы (107), будут равны:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{ql^3}{24EJ} \quad (108).$$

Для определения прогиба балки по середине заметим, что вертикальные линии, проходящие через O и O_1 — центры тяжести параболических отрезков ACD и BCD , удалены от концов A и B на расстояние $\frac{5}{16}l$ ¹⁾. В таком случае изгибающий момент от воображаемой нагрузки в сечении D будет:



Черт. 179.

$$M = \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{3l}{16} = \frac{5}{384} ql^4$$

и прогиб

$$f = \frac{M}{EJ} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

III. Брусок AB , свободно лежащий на двух опорах, изгибается сосредоточенной силой P (черт. 179).

Эпюра изгибающих моментов представится линией $A'C'B'$. Для нахождения прогибов примем эту линию за грузую.

Величина фиктивной сплошной нагрузки будет равна площади треугольника $A'C'B'$. Для нахождения опорных реакций от фиктивной нагрузки опре-

¹⁾ По известной ф-ле координат центра тяжести плоской фигуры имеем:

$$x_c = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx}{\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx} = \frac{5}{16} l.$$

делим положение центра тяжести O треугольника $A'C'B'$. Расстояние вертикали, проходящей через O от правого конца B' , будет равно $\frac{1}{3}(l+b)$ ¹⁾. Опорные реакции будут:

$$A' = \frac{Pab}{2} \frac{l+b}{3} \frac{1}{l} = \frac{Pab(l+b)}{6l}$$

$$B' = \frac{Pab}{2} \frac{l+a}{3} \frac{1}{l} = \frac{Pab(l+a)}{6l}.$$

Углы поворота определяются ф-ми:

$$\theta_1 = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ} ; \quad \theta_2 = \frac{Pab(l+a)}{6lEJ}.$$

Прогиб под грузом найдем, если составим для соответствующего сечения момент M от фиктивной нагрузки:

$$M = \frac{Pab(l+b)}{6l} a - \frac{Pa^2b}{2l} \frac{a}{3} = \frac{Pa^2b^2}{3l}, \text{ откуда } f = \frac{Pa^2b^2}{3lEJ}.$$

Прогиб для какого-либо сечения в левой части балки, в расстоянии x от левой опоры, будет:

$$y_1 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{Pab(l+b)}{6l} x - \frac{Px^2b}{2l} \frac{x}{3} \right] = \frac{Pbx(l^2 - b^2 - x^2)}{6lEJ}.$$

Для какого-либо сечения в правой части балки прогиб, в расстоянии x_1 от правой опоры, будет:

$$y_2 = \frac{Pax_1(l^2 - a^2 - x_1^2)}{6lEJ}.$$

Полученные результаты легко привести к совпадению с тем, что было раньше найдено путем интегрирования дифференциального ур-ня.

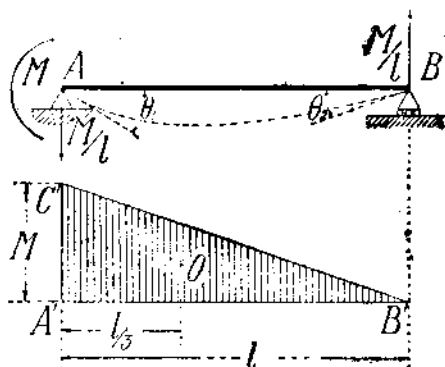
IV. Пользуясь графо-аналитическим методом, легко получить ф-лы для углов θ_1 и θ_2 (черт. 180) при изгибе балки AB парой сил, приложенных на конце.

Опорные реакции в этом случае будут:

$$A = -\frac{M}{l}; \quad B = +\frac{M}{l}.$$

Эпюра изгибающих моментов представится площадью треугольника $A'C'B'$. Эту площадь принимаем за грузовую, тогда опорные реакции от фиктивной нагрузки будут:

$$A' = \frac{2}{3} \frac{MI}{2} \text{ и } B' = \frac{1}{3} \frac{MI}{2},$$



Черт. 180.

¹⁾ При разыскании центра тяжести Δ можно его вес распределить поровну в трех вершинах.

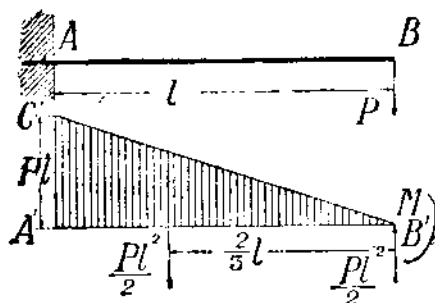
и искомые углы поворота касательных определяются из ф-л:

$$\theta_1 = \frac{Ml}{3EJ}, \quad \theta_2 = \frac{Ml}{6EJ}.$$

V. До сих пор мы рассматривали случаи изгиба балки с опертыми концами. Прогибы на концах равны нулю, а, следовательно, в этих сечениях должны обращаться в нуль и моменты от фиктивной нагрузки. Опорные реакции от фиктивной нагрузки мы определяли так же, как для балки с опертыми концами. При решении более сложных задач нужно иметь в виду, что надлежащий выбор опорных реакций от фиктивной нагрузки равносителен проведению замыкающей при графическом решении задачи, или определению произвольных постоянных — при аналитическом решении. Опорные реакции от фиктивной нагрузки должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись заданные условия на концах балки. Поясним сказанное примерами.

Балка АВ заделана одним концом и изгибается силой Р, приложенной к другому концу (черт. 181).

Эпюра изгибающих моментов представится наклонной прямой В'С'. Для нахождения прогибов и углов наклона касательной к упругой линии, представим себе брусок загруженный сплошной нагрузкой, меняющейся по тому же закону. При определении опорных реакций от фиктивной нагрузки нужно иметь в виду, что момент от фиктивной нагрузки пропорционален прогибу, и перерезывающая сила пропорциональна tg'у угла наклона касательной [см. ф-лы (106) и (107)]. Так как в плоскости заделки, в сечении А и прогиб и tg угла наклона касательной равны нулю, то опорная реакция от фиктивной на-



Черт. 181.

грузки, и изгибающий момент в этом сечении должны быть нулями. Балка А'В', нагруженная фиктивной сплошной нагрузкой, будет поддерживаться:

$$\text{опорной реакцией } B' = \frac{Pl^2}{2} \text{ и опорным моментом } M = \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2l}{3},$$

приложенными на конце В'.

Прогиб на конце будет:

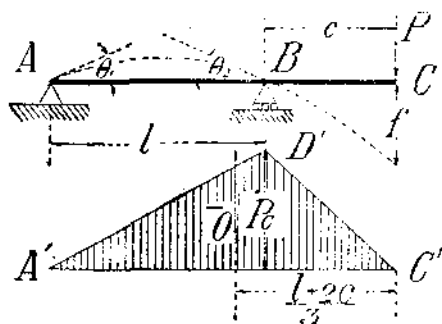
$$f = \frac{M}{EJ} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Тангенс угла наклона касательной равен:

$$\frac{B'}{EJ} = \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{1}{EJ}.$$

VI. В качестве более сложного примера рассмотрим изгиб консольной балки ABC (черт. 182).

При действии силы P моментная площадь представится треугольником $A'D'C'$ ¹⁾ — его примем за грузовую площадь для балки $A'C'$. Рассмотрим, как должны быть выбраны опорные реакции от фиктивной нагрузки, чтобы удовлетворить заданным условиям (прогиб должен равняться нулю в точках A и B). Опорные реакции могут быть приложены лишь в точках A' и C' . (Если бы мы приложили опорную реакцию в какой-либо промежуточной точке, то поперечная сила от фиктивной нагрузки претерпевала бы в этом месте резкое изменение, чему соответствовал бы в изогнутой оси балки перелом; на самом деле изогнутая ось балки представляет плавную кривую.) Так как в точке A прогиб равен нулю, то в A' должна быть приложена только реактивная сила. Что касается C' , то здесь будет действовать и реактивная сила и пара сил, так как в точке C : и прогиб не нуль, и касательная не горизонтальна. После этих предварительных замечаний перейдем к определению величины реакций.



Черт. 182.

Величина реакции A' найдется из того условия, что изгибающий момент от фиктивной нагрузки в сечении B равен нулю (здесь прогиб нуль), т.е.,

$$A'l = -\frac{Pcl}{2} \frac{l}{3}, \quad \text{откуда:} \quad A' = -\frac{Pcl}{6};$$

тогда опорная реакция C' найдется из ур-ия:

$$A' + C' = -\frac{Pc(l+c)}{2}, \quad \text{следовательно:} \quad C' = -Pc \left(\frac{l}{3} + \frac{c}{2} \right).$$

Опорный момент M в точке C' найдем, составляя момент всех фиктивных сил, приложенных к балке $A'C'$, относительно точки C' :

$$M = \frac{Pc(l+c)}{2} \frac{l+2c}{3} - \frac{Pcl}{6} (l+c) = \frac{Pc^2(l+c)}{3}.$$

Найдя опорные реакции от фиктивной нагрузки, можем без затруднения определить прогибы и углы наклона касательных в различных сечениях балки. Разделяя, например, на EJ величины A' и M , получим:

$$\theta_1 = -\frac{Pcl}{6EJ}; \quad f_c = \frac{Pc^2(l+c)}{3EJ}.$$

Те же результаты можно проще получить, пользуясь принципом сложения действия сил.

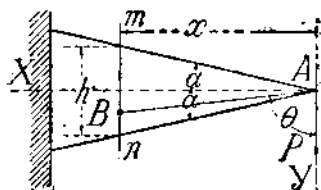
¹⁾ Для площади принят знак —, так как момент отрицателен по длине балки: сплошная фиктивная нагрузка будет действовать снизу вверх.

§ 79. Бруска равного сопротивления при изгибе.

До сих пор предполагалось, что изгибаемый стержень имеет призматическую форму. Размеры бруска мы выбирали таким образом, чтобы в опасном сечении, т.-е., в сечении, где изгибающий момент получает наибольшее значение, было удовлетворено условие прочности. Очевидно, что размеры поперечных сечений, выбранные по наибольшему моменту, будут для всех сечений бруска, исключая опасное сечение, излишне велики. Мы без ущерба для прочности могли бы их уменьшить. Уменьшение это нужно вести таким образом, чтобы размеры каждого сечения определялись по величине наибольшего момента и наибольшей перерезывающей силы, которые могут иметь место именно в этом сечении. В таком случае, при наиболее невыгодных условиях, в каждом сечении получаются напряжения, равные допускаемым, и дальнейшее уменьшение размеров уже невозможно. Получаемая таким образом форма называется формой равногo сопротивления при изгибе. Общее условие, которому эти формы должны удовлетворять, можем вывести из основной ф-лы:

$$\frac{M}{W} = R.$$

M — меняется по длине бруска, по тому же закону нужно менять и W — момент сопротивления поперечного сечения. При этом предполагается, что ф-лу можно с достаточной точностью применять к брускам переменного сечения ¹⁾. Это справедливо до тех пор, пока сечения меняются постепенно. Резкие изменения сечения, как мы видели, влекут за собой значительные местные перенапряжения материала.



Черт. 183.

В качестве примера приводим точное решение задачи для случая, представленного на черт. 183. Клин, толщина которого в направлении перпендикулярном плоскости чертежа принята равной единице, изгибается силой P , приложенной на конце. Для какой-либо точки B , взятой в сечении mn , нормальные и касательные напряжения по площадке, совпадающей с плоскостью сечения, представляются такими ф-ми ²⁾:

$$p_n = \frac{My}{J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta ; \quad p_t = \frac{Py^2}{J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta.$$

Через J обозначим момент инерции сечения mn , θ — угол, составляемый направлением вектора AB с направлением силы. При малых значениях угла α множитель $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta$ мало отличается от единицы, и потому распределение напряжений p_n приблизительно следует линейному закону. Что касается напряжений p_t , то они обращаются в нуль по нейтральному слою и достигают наибольших значений в верхней и нижней точках

¹⁾ J. Rèsal, Résistance des matériaux, 1898 г., стр. 393.

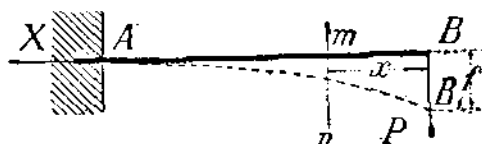
²⁾ См. наш Курс теории упругости, ч. I, изд. 1914 г., стр. 180.

сечения, т.-е., при $y = \pm \frac{n}{2}$; здесь величина их приблизительно равна $\frac{3P}{F}$, т.-е. в три раза больше среднего значения.

Рассмотрим некоторые частные случаи брусков равного сопротивления.

Балка одним концом заделана, к другому приложена сосредоточенная сила P (черт. 184). Изгибающий момент в каком-либо сечении m будет — Px . Для получения бруса равного сопротивления должно быть выполнено условие:

$$\frac{Px}{W} = \text{const} = R \quad (a).$$



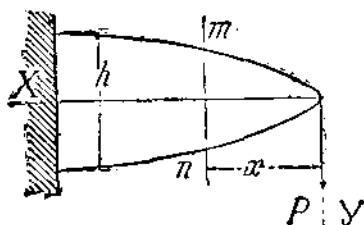
Черт. 184.

Одного этого ур-ия недостаточно, чтобы определить форму сечения, — нужно дать дополнительные условия. Рассмотрим такие частные случаи: положим, мы желаем иметь брусок прямоугольного сечения постоянной ширины. Тогда в нашем распоряжении остается только одна переменная — высота сечения, ее мы уже можем найти из ур-ия (a). Если b — ширина бруска, y — его переменная высота, то ур-ие (a) переищется так:

$$\frac{M}{W} = \frac{6Px}{by^2} = R = \frac{6Pl}{bh^2}$$

(где h — высота сечения в плоскости закрепления), откуда:

$$\frac{x}{y^2} = \frac{l}{h^2}; \quad y^2 = \frac{h^2}{l} x.$$



Черт. 185.

Мы видим, что для данного случая высота бруска должна меняться по закону параболы (черт. 185). Так как площадь параболы равна $\frac{2}{3}hl$, то, следовательно, найденная форма равного сопротивления дает 33% экономии в материале.

Найдем, как велик прогиб этой балки на конце. При этом будем пользоваться ф-ми, выведенными для призматических брусков. Происходящая от этого ошибка невелика, если сечения изменяются не очень резко, т.-е. углы, составляемые касательными к меридиональным сечениям балки с осью балки, невелики. Сделав эту оговорку, можем написать:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Px.$$

Здесь J уже не постоянная величина, а функция от x , именно:

$$J = \frac{bh^3 \left(\frac{x}{l} \right)^{3/2}}{12};$$

следовательно:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12Px l^{3/2}}{Ebh^3 x^{3/2}} = \frac{12Pl^{3/2} x^{-1/2}}{Ebh^3}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{12Pl^{3/2}}{Ebh^3} 2x^{1/2} + C.$$

Произвольную постоянную C определим из того условия, что при $x=l$ угол наклона касательной равен нулю, следовательно:

$$C = -\frac{24Pl^2}{Ebh^3} = -\frac{2Pl}{EJ_0}$$

($J_0 = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции сечения, соответствующего плоскости закрепления). Вторичное интегрирование дает нам:

$$y = \frac{12Pl^{3/2}}{Ebh^3} \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{24Pl^2}{Ebh^3} x + C_1.$$

Произвольная постоянная C_1 найдется из того условия, что при $x=l$, $y=0$; следовательно,

$$C_1 = \frac{8Pl^3}{Ebh^3}.$$

Величиной C_1 определяется прогиб на конце бруска.

$$\text{При } x=0, \quad f = \frac{2Pl^3}{3EJ_0}.$$

Прогиб этот вдвое больше, чем для бруска постоянного сечения bh . Экономия в материале сопровождается уменьшением жесткости бруска.

Рассмотрим ту же задачу в предположении, что высота прямоугольного сечения остается постоянной, равной h , ширина же меняется. Обозначая переменную ширину через y , получим [на основании ур-ия (а)]:

$$\frac{6Px}{yh^3} = \frac{6Pl}{bh^3} = \text{const}$$

(b — ширина сечения в плоскости закрепления), откуда:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{l}.$$

т.е. в случае бруса равного сопротивления ширина меняется по закону прямой линии. Количество материала, которое пойдет на данный брус равного сопротивления, будет вдвое меньше, чем для бруса постоянного сечения ширины b и высоты h .

Исследуем теперь кривую изгиба:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = Px, \quad \text{где } J = \frac{yh^3}{12} = \frac{bh^3x}{12l} = J_0 \frac{x}{l}; \quad EJ_0 \frac{d^2y}{dx^2} = Pl.$$

Следовательно, кривизна $\frac{d^2y}{dx^2}$ постоянна по длине бруска — брус прогибается по дуге круга:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{Pl}{EJ_0}.$$

Наибольший прогиб на конце (черт. 186) определится из ур-ия ¹⁾:

$$2\rho f = l^2, \quad \text{или } f = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{Pl^3}{2EJ_0},$$

т.е. прогиб в $1\frac{1}{2}$ раза больше чем для бруска постоянного сечения с моментом инерции J_0 .

Только-что рассмотренную нами форму бруса равного сопротивления применяют в листовых рессорах. Положим, ABC —вид на брусок сверху (черт. 187). При значительной изгибающей силе ширина бруска AC в плоскости закрепления будет очень велика, и в таком виде применить его как рессору неудобно. Можно разрезать брусок на полоски, как показано на чертеже, и сложить полоски одна на другую. Если пренебречь трением, которое будет иметь место между отдельными полосками, то условие работы бруска от указанного перемещения его частей не изменится. Этим можно воспользоваться для приблизительного расчета обычной вагонной рессоры. Раз известна действующая сила P и длина рессоры l , вычисляем, какова должна быть, при заданном напряжении и заданной толщине листа h , ширина AC . Полученный брусок ABC разрезаем на полоски и из них составляем рессору. Чем тоньше лист мы возьмем, тем большие прогибы будет давать рессора, тем она будет мягче. Ф-лу для прогиба мы найдем таким образом:

$$f = \frac{Pl^3}{2EJ_0}, \quad J_0 = \frac{W_0 h}{12} = \frac{Plh}{2R},$$

где R — допускаемое напряжение. Подставляя значение J_0 , найдем:

$$f = \frac{Rl^3}{Eh}.$$

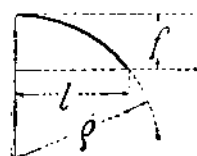
Таким образом, при одном и том же допускаемом напряжении и при постоянной длине рессоры, осадка ее обратно пропорциональна толщине листов, из которых она составлена ²⁾.

Найдем форму равного сопротивления для балки, опертой по концам и несущей равномерную нагрузку.

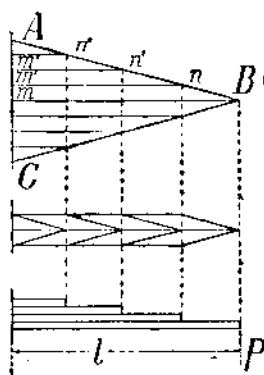
¹⁾ Это ур-ие получим из черт. 186, если примем во внимание, что квадрат перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр, равняется произведению отрезков диаметра. Отрезками будут величины f и $2\rho - f$. Припавая во внимание, что f мало, можем, пренебрегая f^2 , написать

$$f \cdot 2\rho = l^2.$$

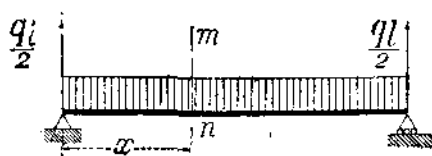
²⁾ Несколько интересных задач, относящихся к балкам переменного сечения, рассмотрено в статье Н. Blasius, Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe grösster Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch, Z. f. Math. u. Phys., Bd. 62, стр. 182.



Черт. 186.



Черт. 187.



Черт. 188.

Сечение балки прямоугольное, ширины b . Изгибающий момент в каком-либо сечении m будет (черт. 188):

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}.$$

Если переменную высоту балки обозначим через y , то для определения ее получим уравнение

$$\frac{6}{by^3} \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) = \text{const} = \frac{6ql^2}{8bh^3},$$

где h высота сечения по середине пролета; следовательно:

$$y^3 = \frac{4h^3}{l^2} (lx - x^2).$$

Высота балки меняется по эллиптическому закону.

При выборе формы бруса равного сопротивления мы не принимали до сих пор во внимание касательные напряжения. Этим объясняется, что, например, для брусков, заделанных одним концом в стену, получились формы, у которых площади поперечных сечений, соответствующих месту приложения сосредоточенной силы, обращались в нуль. Если принять во внимание возможность срезывания, то придется поперечному сечению придать конечные размеры. Эти размеры должны быть определены так, чтобы наибольшее напряжение не превышало допускаемого.

В инженерных сооружениях часто приходится иметь дело с расчетом двутавровых балок переменного сечения. Практически здесь невозможно непрерывно менять поперечное сечение. Приходится прибегать к резким изменениям. Поясним это примером. Клепаная двутавровая балка, пролетом 10 м, поддерживает равномерно распределенную нагрузку 5000 кг/м. Определим размер балки с таким расчетом, чтобы наибольшие нормальные напряжения не превышали 1000 кг/см².

Изгибающий момент по длине балки изменяется по закону параболы. Эпюра моментов представлена на черт. 189. Подберем сечение для середины балки — здесь изгибающий момент достигает наибольшего значения: $M_{\text{max}} = \frac{5 \cdot 10^2}{8} \text{ т} \cdot \text{м} = 625 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}$; $W = \frac{M}{R} = 6250 \text{ см}^3$. Чтобы удовлетворить условию

- прочности, нужно взять сечение, представленное на фиг. б. При трех горизонтальных листах момент сопротивления, за вычетом заклепочных отверстий, будет: $W_1 = 6250 \text{ см}^3$. Изгибающий момент, который может быть допущен при этом сечении, будет равен: $M_1 = 6250 \cdot 1000 = 625 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}$.

Если снять по одному горизонтальному листу, то получим поперечное сечение, момент сопротивления которого равен: $W_2 = 4980 \text{ см}^3$. Допускаемый изгибающий момент при таком сечении равен: $M_2 = 4980 \cdot 1000 = 498 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}$. При одном горизонтальном листе: $W_3 = 3640 \text{ см}^3$, и соответствующий момент.

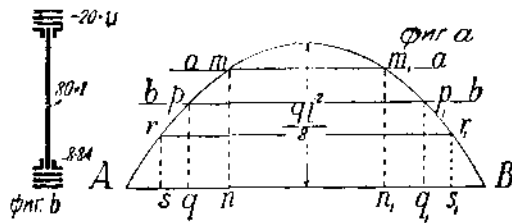
$M_3 = 364 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}$. Сечение, состоящее из стенки и четырех уголков, имеет: $W_4 = 2280 \text{ cm}^3$, и соответствующий момент:

$$M_4 = 228 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

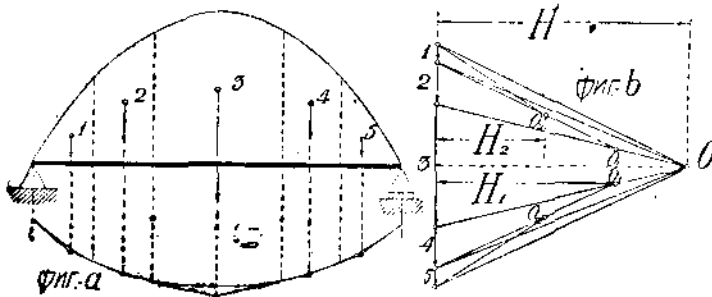
Для средней части необходимо, следовательно, взять сечение с тремя горизонтальными листами. Чтобы определить те сечения, где достаточно только двух листов, можно поступить так. Проведем (черт. 189) линию aa , параллельную оси балки AB , в расстоянии, равном в масштабе моментов моменту $M_2 = 498 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}$. Точки пересечения этой линии с параболой — эпюрой моментов, определяют те сечения mn и m_1n_1 , где становится достаточным только два горизонтальных листа. Подобным же способом определяются сечения pq и p_1q_1 , где становится достаточным сечение с одним горизонтальным листом и т. д.

При практическом выполнении обыкновенно приходится горизонтальные листы делать несколько длиннее, чтобы иметь участок для присоединения вновь наклепываемого листа к прежним. Таким образом, вместо непрерывно изменяющегося поперечного сечения, мы получаем резкие изменения, но полученная форма представляет значительное приближение к теоретическому брусу равного сопротивления: мы имеем значительную экономию в материале, но зато прогиб балки будет больше, чем для балки постоянного сечения. Вид упругой линии и величину прогиба, конечно, можно было бы определить аналитически, стоило бы только разбить балку на участки с постоянными поперечными сечениями и к каждому участку применить обычное уравнение упругой линии. Проще эту же задачу можно решить графическим путем, приемом, изложенным в § 77, придется только при построении менять полюсное расстояние соответственно изменению момента инерции поперечного сечения.

Положим, участки 1 и 5 (черт. 190 фиг. а) соответствуют сечению с одним горизонтальным листом, участки 2 и 4 — с двумя горизонтальными



Черт. 189.



Черт. 190.

листами, участок 3 — с тремя листами. Откладываем на многоугольнике сил (фиг. б) отрезки 1, 2, 3, 4, 5 в известном масштабе, представляющие площади 1, 2, 3, 4, 5. Возьмем полюс в расстоянии H , соответствующем наибольшей жесткости балки, из него придется провести лучи только к концу и началу силы 3, соответствующей участку балки с тремя листами. Для проведения следующих лучей возьмем полюса O_1 , O_1 в расстоянии H_1 , равном жесткости балки при двух горизонтальных листах. Из этих полюсов проведем лучи к началу силы 2 и к концу силы 4. Далее придется выбрать полюса O_2 , O_2 в расстоянии H_2 , равном жесткости балки при одном горизонтальном листе. Построив по проведенным лучам соответствующий веревочный многоугольник, будем иметь касательные к искомой упругой линии. Если все полюсные расстояния уменьшим в n раз, во столько же раз увеличатся прогибы. Таким способом обыкновенно определяют прогибы мостов со сплошной стенкой.

Можно построение изогнутой оси вести и иным путем, вводя, вместо изменения полюсного расстояния, преобразование грузовой площади. В самом деле, дифференциальное ур-е изогнутой оси может быть представлено так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (b).$$

Изменение полюсного расстояния при построении изогнутой оси соответствует изменениям жесткости EI . Но ур-е (b) не изменится, если мы, вместо увеличения EI в известном отношении, будем уменьшать в том же самом отношении величину M . Это обстоятельство дает возможность исследование изгиба балки переменного сечения привести к изгибу призматической балки, нужно только надлежащим образом преобразовать грузовую площадь. Покажем это на том же примере клепаной балки, рассмотренной выше (черт. 189). Обозначим через J_1 , J_2 , J_3 и J_4 моменты инерции в отдельных участках балки (черт. 191) и приведем задачу к изгибу балки постоянной жесткости EJ_1 .



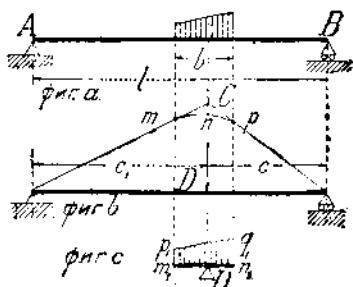
Черт. 191.

На протяжении среднего участка балки жесткости EJ_1 грузовая линия остается без изменения. На участке с жесткостью EJ_2 придется, как видно из основного ур-я (b), увеличить M в отношении $J_1 : J_2$; в том же отношении нужно увеличить соответствующие ординаты грузовой площади (черт. 191). На участках

с жесткостями EJ_3 и EJ_4 придется ординаты увеличить в отношениях $J_1 : J_3$ и $J_1 : J_4$. Преобразованную таким образом площадь будем рассматривать, как фиктивную нагрузку. Прогибы найдутся или графически, путем построения веревочной кривой, или графо-аналитически, путем вычисления моментов от фиктивной нагрузки. Способом преобразования грузовой линии мы дальше воспользуемся при расчете коленчатых валов.

§ 80. Влияние способа распределения нагрузок на величину изгибающего момента и стрелку прогиба балок.

При расчетах балок часто приходится нагрузку, распределенную на небольшой части пролета, заменять какой-либо иной нагрузкой, статически эквивалентной первоначальной нагрузке. Часто, например, мы нагрузку, распределенную на небольшом протяжении b , заменяем одной сосредоточенной силой (черт. 192), приложенной в центре тяжести грузовой площади. Как сказывается такая замена на величине наибольшего изгибающего момента, на величине прогиба и углах поворота концов балки? Для решения этого вопроса удобнее всего воспользоваться графо-аналитическим приемом. Замена сплошной нагрузки сосредоточенной силой сопровождается изменением эпюры изгибающих моментов лишь на протяжении b загруженного участка (фиг. б). Вместо ломаной линии $m_1 C p$, соответствующей сосредоточенной силе, мы, при сплошной нагрузке на участке длины b , будем иметь криволинейное очертание $m_1 n_1$. Разности моментов при двух различных способах нагрузки, очевидно, будут меняться по такому же закону, как изгибающие моменты для балочки $m_1 n_1$ (фиг. с) пролета b , опертой в точке D , расположенной под центром тяжести грузовой площади $m_1 p, q, n_1$. Наибольшая разность моментов при нагрузках одного направления получится для точки D .



Черт. 192.

Если сплошная нагрузка распределена по участку b равномерно, то

$$qb = P,$$

и величина наибольшей разности моментов равна:

$$\frac{qb^2}{8} = \frac{Pb}{8}. \quad (a).$$

Изменение разностей моментов представлено на черт. 193. Принимая во внимание, что $m_1 p$ и $p n_1$ — представляют собой дуги парабол, касательных в m_1 и n_1 , найдем, что заштрихованная на чертеже моментная площадь равна:

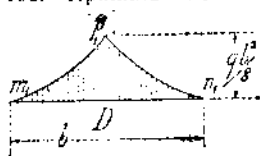
$$\frac{1}{3} \frac{qb^2}{8} b = \frac{qb^3}{24} = \frac{Pb^2}{24}. \quad (b).$$

Если сплошная нагрузка на протяжении b меняется по закону треугольника (черт. 194), то

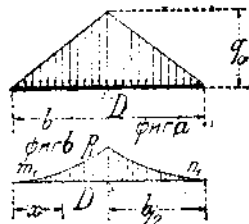
$$P = \frac{q_0 b}{2}.$$

Разности моментов на протяжении загруженного участка представятся изгибающими моментами для балочки $m_1 D n_1$ пролета b , загруженной нагрузкой, изображенной на фиг. а. Наибольшая разность соответствует точке D и равна:

$$\frac{q_0 b}{4} \frac{b}{6} = \frac{Pb}{12}. \quad (c).$$



Черт. 193.

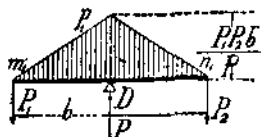


Черт. 194.

Моментная площадь, заштрихованная на фиг. b, равна:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2q_0 x}{b} \frac{x}{2} \frac{x}{3} dx = \frac{q_0 b^3}{96} = \frac{P b^2}{48} \quad (d).$$

Если мы предположим, что все силы на протяжении участка b (черт. 192) имеют одно и то же направление, то наибольшие разности в моментах при переходе от сосредоточенной нагрузки к другой системе сил, распределенных на протяжении b , мы получим в том случае, когда дуга mnp (фиг. b, черт. 192) обратится в прямую линию, т.е., когда сила P заменяется двумя силами P_1 и P_2 , приложенными по концам участка b . Изменения разностей по длине участка b представляются при этом изгибающими моментами для балки, изображенной на черт. 195.



Черт. 195.

Наибольшая разность соответствует точке D и равняется $\frac{P_1 P_2 b}{P}$. При

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$

будем иметь разность, равную

$$\frac{Pb}{4} \quad (e).$$

и соответствующую моментную площадь, заштрихованную на черт. 195, равную

$$\frac{Pb^2}{8} \quad (f).$$

Подобным же образом могут быть исследованы разности в моментах, вызываемые всякими другими заменами нагрузок на участке b нагрузками, им статически эквивалентными, и в самом общем случае величина наибольшей погрешности в величине изгибающего момента, вызываемая таким перераспределением, может быть представлена ф-лой

$$\delta M = k \frac{Pb}{4} \quad (g).$$

где P — сумма нагрузок на участке b и k — коэффициент, зависящий от распределения грузов. При замене сосредоточенной силы P двумя равными силами, этот коэффициент равен единице. В случае замены силы P равномерной нагрузкой qb , тот же коэффициент равен половине. Наконец, при нагрузке по закону треугольника (черт. 194).

$$k = \frac{1}{3}.$$

Для оценки относительной погрешности в величине изгибающих моментов сравним найденные выше значения δM с величиной момента под грузом P , приложенным в точке D (черт. 192). Величина этого момента равна $\frac{Pcc_1}{l}$, и, следовательно, относительная погрешность в моменте может быть представлена ф-лой:

$$k \frac{Pb}{4} : \frac{Pcc_1}{l} = \frac{kb!}{4cc_1} \quad (h).$$

Если участок b расположен не близко к опорам и длины c и c_1 такого же порядка, как и пролет балки l , то относительная погрешность будет порядка $\frac{b}{l}$.

Рассмотрим теперь, как эти замены нагрузок скажутся на величине прогибов балки. Для получения прогибов балки, опертой по концам, нужно представить себе эту балку загруженной моментной площадью. Изгибающий момент от полученной таким путем фиктивной нагрузки, деленный на жесткость балки EJ , даст нужный нам прогиб в любом сечении балки.

Если на участке балки b (черт. 192) имеется равномерная нагрузка, то, при замене ее сосредоточенной силой P в точке D , мы уменьшаем моментную площадь на величину $\frac{Pb^2}{24}$ (ф-ла b). Левая опорная реакция от фиктивной нагрузки уменьшится на

$$\frac{Pb^2}{24} \frac{c}{l},$$

что вызовет уменьшение изгибающего момента от фиктивной нагрузки в точке D , примерно, на величину

$$\frac{Pb^2}{24} \frac{cc_1}{l}.$$

Деля этот результат на EJ , получим уменьшение прогиба, обусловленное заменой сосредоточенной силы равномерной нагрузкой на участке b .

Заменяя сосредоточенную силу нагрузкой по треугольнику (черт. 194), мы уменьшаем моментную площадь на величину $\frac{Pb^2}{48}$ (ф-ла d). Этому соответствует уменьшение прогиба, равное

$$\frac{Pb^2}{48} \frac{cc_1}{EJ}.$$

Заменяя сосредоточенную силу двумя равными силами

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2},$$

будем иметь уменьшение моментной площади, равное

$$\frac{Pb^2}{8},$$

чему соответствует уменьшение прогиба, равное

$$\frac{Pb^2}{8} \frac{cc_1}{EJ}.$$

В самом общем случае это уменьшение может быть представлено ф-лой:

$$\delta f = k_1 \frac{Pb^2}{8} \frac{cc_1}{EJ} \quad (i)$$

Сравнивая этот результат с прогибом под силой, равным

$$f = \frac{Pc^2c_1^2}{24EJ},$$

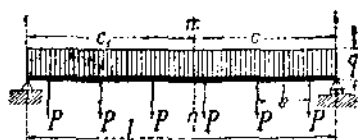
найдем для относительной погрешности выражение:

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{3k_1}{8} \frac{b^2}{cc_1} \quad (j).$$

Если c и c_1 такого же порядка, как и l , то относительная погрешность в прогибе будет порядка $\frac{b^2}{l^2}$. С приближением точки приложения силы P к одной из опор, относительная

погрешность (j) возрастает, приближаясь к величине порядка $\frac{b}{l}$.

Пользуясь полученными результатами, легко оценить влияние на прогиб балки замены какой-либо нагрузки, покрывающей весь пролет балки или значительную часть его, какой-либо другой нагрузкой.



Черт. 196.

Возьмем в качестве примера балку, равномерно нагруженную (черт. 196). Заменяя на протяжении каждого участка длины b равномерную нагрузку сосредоточенной силой

$$P = qb,$$

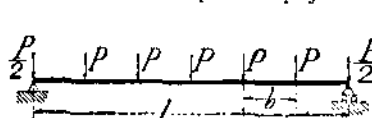
мы увеличиваем моментную площадь на величину $\frac{Pb^2}{24} \frac{l}{b}$ (ф-ла б). Опорные реакции от соответствующей фиктивной нагрузки увеличатся на величину

$$\frac{Pb^2}{24} \frac{l}{2b}.$$

Составляя выражение для соответствующего изменения изгибающего момента от фиктивной нагрузки и деля его на EJ , найдем, для изменения прогиба в каком либо сечении mf , такое выражение:

$$\delta f = \left(\frac{Pb^2}{24} \frac{l}{2b} c_1 - \frac{Pb^2 c_1 c_2}{24 b} \right) \frac{1}{EJ} = \frac{ql^4}{48 EJ^2} \frac{b^2 c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \quad (к).$$

Если бы мы равномерную нагрузку qb на каждом участке заменили двумя силами



Черт. 197.

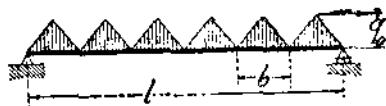
$\frac{P}{2}$, приложенными по концам, то пришли бы к нагрузкам, представленным на черт. 197. Такая замена сопровождается уменьшением моментной площади, а, следовательно, и уменьшением прогибов. На основании ф-л (б) и (г) заключаем, что

уменьшение моментной площади равно:

$$\left(\frac{Pb^2}{8} - \frac{Pb^2}{24} \right) \frac{l}{b} = \frac{Pb^2}{12} \cdot \frac{l}{b},$$

и, следовательно, ф-ла (к) для данного случая напишется так:

$$\delta f = - \frac{ql^4}{24 EJ} \frac{b^2 c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \quad (л).$$



Черт. 198.

В качестве второго примера рассмотрим нагрузку балки, представленную на черт. 198. При замене этой сплошной нагрузки сосредоточенными силами

$$P = \frac{q_0 b}{2},$$

приложенными в центре тяжести каждого из треугольников, получим увеличение моментной площади на величину $\frac{Pb^2}{48} \frac{l}{b}$ (см. Ф-лу д), следовательно, ф-ла (к) в этом случае представится так:

$$\delta f = \frac{q_0 l^4}{12 EJ} \frac{b^2 c_1}{l} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \quad (м).$$

При замене нагрузки, представленной на черт. 198, равномерной нагрузкой

$$q = \frac{q_0}{2}$$

получим уменьшение моментной площади, а следовательно и уменьшение прогибов. На основании ф-л (b) и (d) уменьшение моментной площади равно:

$$\left(\frac{Pb^3}{24} - \frac{Pb^3}{48} \right) \frac{1}{b}.$$

Следовательно, ф-ла (k) напишется в этом случае так:

$$\delta f = - \frac{q_0 l^4}{192 E J} \frac{b^2 c_1}{b} \left(1 - \frac{c_1}{l} \right).$$

Подобным способом могут быть исследованы и другие случаи замены одной нагрузки другою, ей статически эквивалентной.

§ 81. Влияние касательных напряжений на прогиб балок.

При выводе основного дифференциального уравнения для изогнутой оси балки (ф-ла 90) мы принимали во внимание лишь действие изгибающего момента M . Искривление оси балки являлось следствием растяжения продольных волокон по одну сторону нейтрального слоя и сжатия их по другую сторону. При этом предположении поперечные сечения балки остаются при изгибе плоскими и нормальными к изогнутой оси балки. В более общем случае изгиба балки, кроме продольных растягивающих и сжимающих напряжений, будут действовать по плоскости поперечного сечения касательные напряжения. Вызываемые этими напряжениями сдвиги могут, при некоторых условиях, оказывать существенное влияние на прогиб балки. Для оценки этого влияния поступим следующим образом. Обозначим через y_1 прогибы, обусловленные только действием изгибающих моментов, и через y_2 прогибы от поперечной силы, тогда полный прогиб в каком либо сечении представится так:

$$y = y_1 + y_2.$$

Для кривизны изогнутой оси балки будем иметь выражение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 y_2}{dx^2}.$$

Первый член в правой части выражения представляет собой ту кривизну, которая входит в уравнение (90), второй член дает нам кривизну, обусловленную сдвигами. Так как нас интересует кривизна оси балки, то при вычислении сдвигов нужно брать касательные напряжения по площадкам, выделенным из поперечных сечений у их центров тяжести. Относительный сдвиг β по этим площадкам может быть представлен ф-ой:

$$\beta = \frac{kQ}{FG} = \frac{k}{FG} \frac{dM}{dx},$$

где k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (см. ф-лы 71 и 73). Если β постоянно по длине балки, то сдвиги, очевидно, не вызовут искривления оси, и дополнительный прогиб y_2 выразится линейной ф-ной от x . Кривизна $\frac{d^2 y_2}{dx^2}$ обусловлена изменением сдвига β вдоль оси балки, и нужная для дальнейших выводов связь между кривизной оси, получающейся от касательных напряжений и сдвигами, при нашем расположении координат представится так ¹⁾:

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} = - \frac{d^2 y_2}{dx^2}.$$

¹⁾ Положительному значению производной $\frac{d^2 \beta}{dx^2}$, очевидно, будет соответствовать изгиб оси балки выпуклостью вверх.

Если вместо β вставить вышенapisанное выражение и принять во внимание связь между y_1 и M , устанавливаемую основным ур-нем (90), то получим:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{k}{FG} \frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{kEJ}{FG} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} \right),$$

и дифференциальное ур-е для изогнутой оси балки напишется так:

$$EJ \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right) = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M - \frac{kEJ}{FG} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (a).$$

Рассмотрим, в качестве примера, изгиб балки с одним заделанным концом силой, приложенной к свободному концу, и равномерно распределенной нагрузкой (черт. 167). Изгибающий момент в этом случае выражается так:

$$M = -P(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}.$$

Дифференциальное ур-е изогнутой балки (ф-ла а) будет иметь вид:

$$EJ \frac{d^2 p}{dx^2} = -P(l-x) - \frac{(ql-x)^2}{2} + \frac{kEJ}{FG} q;$$

интегрируя его получим:

$$EJy = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + \frac{kEJqx^2}{FG} + Cx + D.$$

Произвольная постоянная D равна нулю, т. к. в заделанном конце прогиб равен нулю. Что касается произвольной постоянной C , то она равна по величине углу наклона касательной к изогнутой оси балки у заделанного конца с осью X -ов. Этот угол равен нулю, если закрепление конца таково, что элемент оси балки у закрепленного сечения не поворачивается при изгибе, и равен $k \frac{P+ql}{FG}$, если закрепление не допускает поворачивания элементарной площадки, выделенной из поперечного сечения у его центра тяжести.

В последнем случае элемент оси балки у закрепленного сечения составит с осью X -ов угол, равный смугу от поперечной силы $P+ql$, и, следовательно:

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = -k \frac{P+ql}{FG}.$$

Ур-е изогнутой оси балки, в зависимости от способа закрепления, будет иметь один из следующих двух видов:

$$EJy = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + k \frac{EJqx^2}{FG}$$

$$EJy = -P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + k \frac{EJqx^2}{FG} - kEJ \frac{(P+ql)}{FG} x.$$

В случае действия только сосредоточенной нагрузки P , полный прогиб балки при втором способе закрепления представится ф-лой:

$$f = \frac{P l^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3kE}{G} \frac{l^2}{F} \right),$$

где l^2 — квадрат радиуса инерции сечения. Второй член в скобках соответствует прогибу, обусловленному действием поперечной силы. Для таких сечений, как прямоугольник и круг, этот дополнительный прогиб не велик, и им можно пренебрегать.

Например, для балки прямоугольного поперечного сечения с отношением высоты к пролету

$$\frac{h}{l} = 0,1 \text{ будем иметь: } \frac{r^2}{I^2} = \frac{k^2}{12I^2} = \frac{1}{1200}; \quad k = 1,5; \quad \frac{E}{G} = 2(1 + \nu) \approx 2,6.$$

Дополнительный прогиб составляет меньше 1% прогиба от изгибающего момента. Для двутаврового сечения влияние касательных напряжений может быть, как мы покажем на следующем примере, значительно большим.

В случае балки с опертыми концами, при изгибе равномерно распределенной нагрузки, дифференциальное ур-ие для изогнутой оси (ф-ла а) напишется так:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + \frac{kEJ}{FG} q.$$

Интеграл этого ур-ия будет:

$$EJ y = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{12} + \frac{kEJ}{FG} \frac{qx^2}{2} + Cx + D.$$

Из того условия, что прогибы по концам балки (при $x=0$ и $x=l$) обращаются в нуль, находим

$$D = 0; \quad C = -\frac{ql^3}{24} = \frac{kEJ}{FG} \frac{ql}{2}.$$

Дополнительный прогиб, обусловленный касательными напряжениями, представляется так:

$$y_2 = \frac{k}{FG} \left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} \right) = -\frac{kM}{FG}.$$

т.е. стрелки дополнительного прогиба пропорциональны ординатам эпюры изгибающих моментов. Это заключение справедливо и для других случаев нагрузки балки с опертыми концами. Исключение представляет изгиб балки парой, приложенной на концы. При изгибе парой сил M_0 , сдвиг определится ф-лой:

$$\beta = \frac{k}{FG} \frac{M_0}{l}.$$

Он остается постоянным по длине балки. Следовательно, касательные напряжения в этом случае оси балки не искривляют, и, так как концы ее лежат на неподвижных опорах, то мы не будем иметь дополнительного прогиба от касательных напряжений.

Вернемся теперь к балке равномерно нагруженной.

Прогиб балки по середине пролета будет равняться:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{k}{FG} \frac{ql^2}{8}.$$

Второй член в этом выражении представляет дополнительный прогиб от касательных напряжений. Выясним, какова будет величина этого дополнительного прогиба для двутавровой балки, подобранной таким образом, что максимальные касательные и максимальные нормальные напряжения как раз равны допускаемым напряжениям R_t и R . При этом условии:

$$\frac{kQ_{\max}}{F} = \frac{kql}{2F} = R_t \quad \text{и} \quad \frac{M_{\max}}{W} = \frac{ql^2 h}{8 \cdot J \cdot 2} = R,$$

тогда

$$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{5}{24} \frac{Rl^2}{Eh} \quad \text{и} \quad \frac{k}{FG} \frac{ql^2}{8} = \frac{R_t l}{4G}.$$

Отношение стрелки прогиба от сдвигающих напряжений к стрелке от момента будет равно:

$$f_2:f_1 = \frac{R_1 l}{4G} : \frac{5 R p}{24 E h} = \frac{6 R_1 E h}{5 R G l}.$$

При $R_1 = 0,5R$ и $E = 2,6G$ это отношение равно:

$$f_2:f_1 = 1,56 \frac{h}{l}.$$

Таким образом, при коротких балках влияние касательных напряжений на прогиб значительно, и им не следует пренебрегать ¹⁾. Заметим, что на практике приходится, обыкновенно, брать толщину стенки балки большей, чем то следует из расчетов на касательные напряжения, для того, чтобы обеспечить стенке достаточную устойчивость. Сечение поясов балки уменьшают по направлению от середины пролета к опорам. Оба эти обстоятельства уменьшают отношение $f_2:f_1$ и несколько оправдывают обычный способ расчета прогибов, при котором величиной f_2 пренебрегают по сравнению с f_1 .

¹⁾ Более подробное исследование вопроса о влиянии касательных напряжений на обстоятельства изгиба можно найти в курсе И. Г. Бубнова, Строительная механика корабля, ч. I, стр. 308

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАИ ИЗГИБА БАЛОК.

§ 82. Лишние закрепления.

При рассмотрении различных типов опор мы выяснили, при каких условиях уравнений статики достаточно для определения опорных реакций. Если число неизвестных реакций больше, чем число уравнений статики, задача становится статически неопределенной: для нахождения реакций приходится обращаться к рассмотрению деформаций балки. В случае балок, лежащих на двух опорах, возможны два таких статически неопределенных способа закрепления.

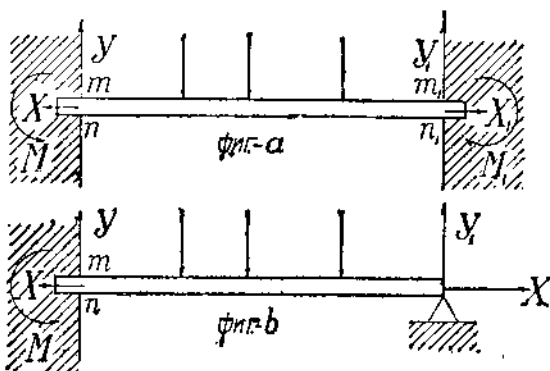
I. Оба конца заделаны (черт. 199, фиг. а), и, следовательно, сечения m и n_1 при изгибе балки не могут поворачиваться.

II. Один конец заделан, другой оперт (фиг. б). В этом случае не может поворачиваться только левый конец и соответствующее ему сечение.

При первом способе закрепления нахождение опорных реакций сводится к определению шести неизвестных величин: двух реактивных пар M и M_1 , препятствующих поворачиванию концов балки, двух вертикальных реакций Y и Y_1 и горизонтальных реакций X и X_1 .

Во втором случае имеем пять неизвестных элементов опорных реакций ($M_1 = 0$).

При действии вертикальных нагрузок условия статики приводят нас к заключению, что $X = -X_1$: горизонтальные реакции равны по величине и противоположны по знаку. Мы уже раньше доказали (§ 64), что при малых прогибах, допускаемых в балках инженерных сооружений, роль продольных сил X не велика: ими можно пренебречь и считать, что вертикальным нагрузкам соответствуют и вертикальные реакции Y и Y_1 . В таком случае при первом



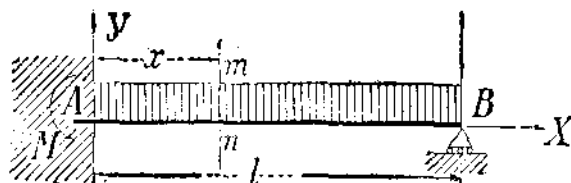
Черт. 199.

способе закрепления будем иметь четыре неизвестных величины: M , M_1 , Y и Y_1 и два уравнения статики, следовательно, две величины будут статически неопределенными, или, как мы условимся дальше называть, *лишними неизвестными*. При втором способе закрепления мы будем иметь одну лишнюю неизвестную величину.

Лишние неизвестные являются результатом добавочных закреплений. В рассмотренных случаях I и II добавочными закреплениями будут те, которые препятствуют концам балки поворачиваться. Если эти закрепления устранить, то получим балку с опертными концами — статически определенный случай изгиба. Вводя добавочные закрепления, мы тем самым налагаем на изгиб балки дополнительные условия, которыми можно воспользоваться при нахождении лишних неизвестных. Например, вводя закрепление, препятствующее концу балки поворачиваться, мы тем самым вводим лишнюю неизвестную величину — реактивную пару. Для определения этой пары можно воспользоваться условием, налагаемым на деформацию балки добавочным закреплением. Если конец не может поворачиваться, то касательная к изогнутой оси балки в закрепленном сечении должна совпадать с первоначальным направлением оси. Таким образом, мы при рассмотрении статически неопределенных случаев изгиба всегда можем составить столько дополнительных уравнений, сколько имеется лишних неизвестных. Эти дополнительные уравнения проще всего составлять на основании принципа сложения действия сил. Мы будем пользоваться именно этим способом. Ход расчета балки с лишними закреплениями будет такой. Сначала устраняем все лишние закрепления и данную задачу приводим к задаче статически определенной. Для такого случая легко найти прогиб балки и угол наклона касательной в любом сечении. После этого выбираем лишние неизвестные так, чтобы удовлетворить условиям закрепления.

§ 83. Изгиб равномерно распределенной нагрузкой балки с одним заделанным и другим опертным концом.

Определение опорных реакций сводится к нахождению реактивных сил A и B и реактивной пары M (черт. 200), препятствующей поворачиванию



Черт. 200.

левого конца балки. Примем за лишнюю неизвестную реактивную пару M . Для нахождения величины воспользуемся наметченным выше общим приемом. Отбрасывая лишнее закрепление, соответствующее выбранной лишней неизвестной, получим балку, опертую по концам и несущую равномерно распределенную нагрузку. Уравнение изогнутой оси будет (§ 75):

$$y = -\frac{ql^3}{24EI} \left(x - 2x \frac{x^2}{l^2} + x \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Углы поворота концов равны:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{q l^3}{24 E J}.$$

Теперь отдельно выясним действие пары сил M , приложенной к левому концу; для этого можно воспользоваться найденными ранее ф-ми (101) и (104), нужно только вместо x вставить $l - x$. Ур-ие изогнутой оси напишется так:

$$y = \frac{M}{E J} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} - \frac{lx}{3} \right),$$

и угол поворота в направлении действия пары левого конца балки будет:

$$\theta_1' = \frac{Ml}{3EJ}.$$

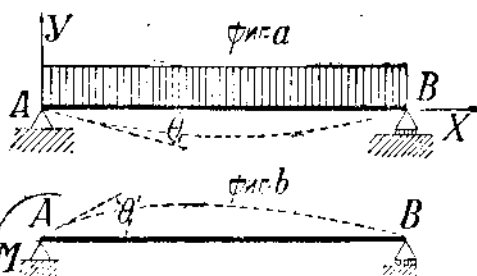
Таким образом, мы разобрали два элементарные случая изгиба, представленные на фиг. а и на фиг. б черт. 201. Остается теперь подобрать M так, чтобы было удовлетворено условие закрепления левого конца. Концы этот не поворачивается следовательно, угол θ_1 , обусловленный сплошной нагрузкой, должен быть равен по величине и противоположен по знаку углу θ_1' . Сравнивая полученные выше значения этих углов, найдем:

$$\frac{q l^3}{24 E J} = - \frac{Ml}{3 E J},$$

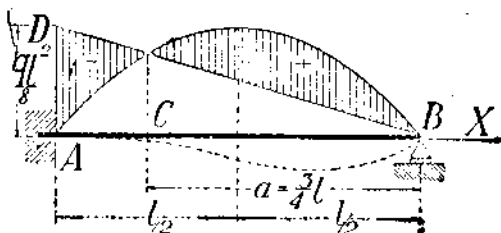
откуда:

$$M = - \frac{q l^2}{8} \quad (109).$$

Закон изменения изгибающего момента по длине балки получим, если из ординат параболы, представляющей эпюру изгибающих моментов от равномерной нагрузки, вычтем ординаты треугольника ABD , являющегося моментной площадью при действии реактивной пары M . Разность ординат представлена на черт. 202 заштрихованной площадью. Наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента, равное $\frac{q l^2}{8}$, имеет место в плоскости заделки. Здесь должна быть произведена проверка на прочность при расчете балки. Опорные реакции A и B получим, суммируя реакции от сплошной нагрузки с реакциями от пары сил M . Первой системе нагрузок соответствуют равные опорные реакции величины $\frac{q l}{2}$, направленные снизу вверх. При действии пары сил



Черт. 201.



Черт. 202.

опорные реакции будут для левой опоры $-\frac{M}{l} = \frac{ql}{8}$ и для правой опоры $-\frac{ql}{8}$. Окончательно будем иметь:

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8}ql; \quad B = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{3}{8}ql \quad (110).$$

В сечении C , где изгибающий момент обращается в нуль, кривизна меняет знак: мы будем иметь точку перегиба. Положение точки C определится из того условия, что изгибающий момент, вызываемый в этом сечении реактивной парой M , равен по величине и противоположен по знаку изгибающему моменту от сплошной нагрузки. Изгибающий момент в сечении C от реактивной пары равен $-\frac{qla}{8}$ и от сплошной нагрузки $\frac{qla}{2} - \frac{qa^2}{2}$. Величина a найдется из ур-ня:

$$\frac{qla}{8} = \frac{qla}{2} - \frac{qa^2}{2}, \text{ откуда: } a = \frac{3}{4}l.$$

Для определения прогибов балки также пользуемся принципом сложения и суммируем, принимая во внимание знаки, прогибы от сплошной нагрузки с прогибами от пары сил. Окончательно найдем:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{ql^3}{24EJ} \left(x - 2x \frac{x^2}{l^2} + x \frac{x^3}{l^3} \right) - \frac{ql^2}{8EJ} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} - \frac{lx}{3} \right) = \\ &= \frac{ql^4}{24EJ} \left(-\frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} + \frac{5}{2} \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4} \right). \end{aligned}$$

Для определения места наибольшего прогиба, приравняем нулю производную $\frac{dy}{dx}$, получим:

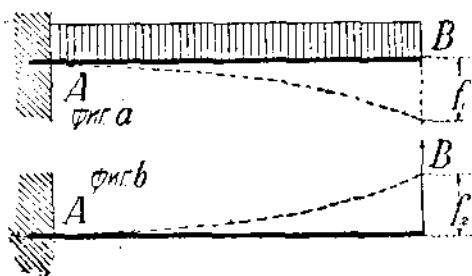
$$x^2 - \frac{15}{8}lx + \frac{3}{4}l^2 = 0, \text{ откуда: } x = \frac{l}{16}(15 - \sqrt{33}) = 0,579l.$$

Подставляя это в выражение для y , найдем наибольший прогиб:

$$f = \frac{ql^4}{185EJ}.$$

При решении задачи мы за „лишнюю неизвестную“ приняли реактивную пару. Соответствующим „лишним закреплением“ у нас было то закрепление, которое препятствует левому концу поворачиваться. Мы могли бы идти иным путем,

именно: принять за лишнюю неизвестную опорную реакцию, соответствующую правому концу балки, тогда лишним закреплением нужно было бы считать то, которое препятствует этому концу перемещаться. Отбрасывая лишнее закрепление, мы приходим к статически определенному случаю изгиба, именно: к изгибу балки, заделанной одним концом (черт. 203,



Черт. 203.

фиг. а). Под действием равномерно распределенной нагрузки конец балки B прогнется на величину:

$$f_1 = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

В действительности, конец B оперт, и его перемещение равно нулю, следовательно, опорная реакция B должна быть такой величины, чтобы вызываемый ею прогиб (фиг. б):

$$f_2 = \frac{B l^3}{3EJ}$$

был равен по величине f_1 . Тогда, при совместном действии сплошной нагрузки и опорной реакции B , перемещение конца B будет равно нулю. Для определения B получим уравнение:

$$\frac{ql^4}{8EJ} = \frac{B l^3}{3EJ}, \text{ откуда } B = \frac{3}{8} ql,$$

что совпадает с предыдущим результатом (110). Найдя реакцию B из рассмотрения деформации балки, мы остальные неизвестные — реактивную пару и реакцию A — найдем из уравнений статики.

Решим ту же задачу, принимая во внимание влияние касательных напряжений на прогиб. Отбрасывая правую опору и заменяя действие ее силой B , направленной снизу вверх, подбираем эту силу так, чтобы окончательный прогиб правого конца балки был равен нулю. Если считать, что в заделанном сечении не поворачивается элемент сечения, и, следовательно, элемент оси поворачивается на угол

$$\frac{k(ql - B)}{FG},$$

то прогиб конца балки, при совокупном действии силы B и сплошной нагрузки ql , представится так (см. § 81):

$$\frac{B l^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3kF l^2}{G J} \right) - \frac{ql^4}{8EJ} \left(1 + \frac{4kE l^2}{G J} \right).$$

Приравняв этот прогиб нулю и вводя, для сокращения письма, обозначение:

$$\delta = \frac{kE l^2}{G J},$$

придем к такому выражению для правой опорной реакции:

$$B = \frac{3}{8} ql \frac{1 + 4\delta}{1 + 3\delta}.$$

§ 84. Изгиб сосредоточенной силой балки с одним заделанным, другим опертым концом.

За „лишнюю неизвестную“ примем реактивную пару M , препятствующую поворачиванию левого конца. Если отбросить „лишнее закрепление“, то полу-

чим случай изгиба балки, опертой по концам (черт. 204, фиг. б). Левый конец при этом повернется на угол (ф-ла 98):

$$\theta_1 = \frac{Pc(l-c^2)}{6EJ}$$

Так как в действительности левый конец балки не поворачивается, то реактивная пара должна быть такой величины, чтобы вызываемый ею угол поворота

$$\theta_1' = \frac{Ml}{3EJ}$$

Черт. 204.

был равен по величине и противоположен по знаку углу θ_1 . Для определения M получим ур-ие:

$$\frac{Ml}{3EJ} = -\frac{Pc(l-c^2)}{6EJ},$$

откуда:

$$M = -\frac{Pc(l-c^2)}{2l} \quad (111).$$

Найя выражение для реактивной пары, из рассмотрения деформации балки, мы можем величины опорных реакций A и B найти из условий статики: например, опорную реакцию B найдем, составляя момент всех сил относительно A ; получим ур-ие:

$$Bl - P(l-c) = -\frac{Pc(l-c^2)}{2l},$$

откуда:

$$B = \frac{P(l-c)^2(2l+c)}{2l^2} \quad (112)$$

Ур-ие упругой линии получится, если к прогибам, вызываемым сосредоточенной силой, присоединить прогибы от реактивной пары. Из выражения (111) видно, как меняется величина реактивной пары M с изменением c , т.е. с изменением положения нагрузки: при $c=0$ и при $c=l$ реактивная пара обращается в нуль. Легко также найти то значение c , при котором M достигает наибольшей величины, для этого придется производную $\frac{dM}{dc}$ приравнять нулю; получим ур-ие:

$$l^2 - 3c^2 = 0, \text{ откуда } c = \frac{\sqrt{3}}{3}l = 0,577 l.$$

Вставляя это в выражение (111), найдем:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{3\sqrt{3}} = 0,192 Pl \quad (113).$$

Если для каждого значения c по ординатам отложить величину $\frac{c(P^2 - c^2)}{2P}$, то полученная таким образом кривая (черт. 205) даст возможность легко находить величину реактивной пары для системы сосредоточенных нагрузок. Пусть нам даны нагрузки P_1, P_2, P_3, P_4 ; положим, y_1 ордината построенной кривой, соответствующая грузу P_1 , тогда произведение:

$$y_1 P_1 = - \frac{P_1 (P^2 - c^2)}{2P}$$

есть не что иное, как величина реактивной пары, вызываемой грузом P_1 . При совместном действии грузов $P_1, P_2, \dots$ реактивная пара будет:

$$M = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots = \Sigma P y.$$

Кривая ACB есть линия влияния для реактивной пары M . Как видно из построения, ордината кривой для любого сечения балки даст в известном масштабе величину реактивной пары при действии груза, равного единице силы в рассматриваемом сечении. Пользуясь этой кривой, легко найти величину реактивной пары и для случая сплошной равномерно распределенной нагрузки. Пусть q — величина нагрузки, приходящаяся на единицу длины балки. Возьмем в расстоянии c от правой опоры элемент балки длиной dc . Сплошную нагрузку qdc , приходящуюся на этот элемент, можем заменить сосредоточенной силой, тогда реактивная пара dM , вызываемая этой элементарной нагрузкой, будет:

$$dM = - \frac{qdc(P^2 - c^2)}{2P}.$$

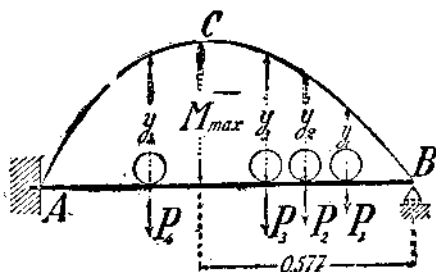
Для получения пары M от нагрузки, покрывающей весь пролет, придется сложить действия отдельных элементарных нагрузок; будем иметь:

$$M = - \int_0^l \frac{qdc(P^2 - c^2)}{2P} = - \frac{qP^3}{8}.$$

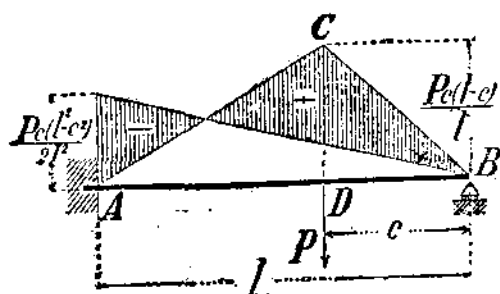
Легко видеть, что величина реактивной пары равна площади, ограниченной линией ACB и осью балки, умноженной на q .

Рассмотрим теперь изменение изгибающего момента по длине балки. Для этого придется моменты, обусловленные действием силы P , складывать с моментами от реактивной пары M . Принимая во внимание знаки моментов, легко видеть, что закон их изменения по длине балки представится заштрихованной площадью (черт. 206). Из этой эпюры изгибающих моментов видно, что наибольший момент будет иметь место или у закрепленного конца, где:

$$M = - \frac{Pc(P^2 - c^2)}{2P},$$



Черт. 205.



Черт. 206.

или под грузом, где:

$$M_c = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{c}{l} \frac{Pc(l-c)^2}{2l} = \frac{Pc}{2l} (l-c)^2 (2l+c) \quad (114).$$

Если груз расположен по середине пролета, то $c = \frac{l}{2}$,

$$M = -\frac{3}{16} Pl;$$

$$M_c = \frac{3}{16} Pl \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{5}{32} Pl.$$

Опасное сечение в данном случае совпадает с плоскостью закрепления. Приравняв нулю производную $\frac{dM_c}{dc}$, найдем то значение

$$c = \frac{1}{2} l (\sqrt{3} - 1) = 0,366 l,$$

которому соответствует

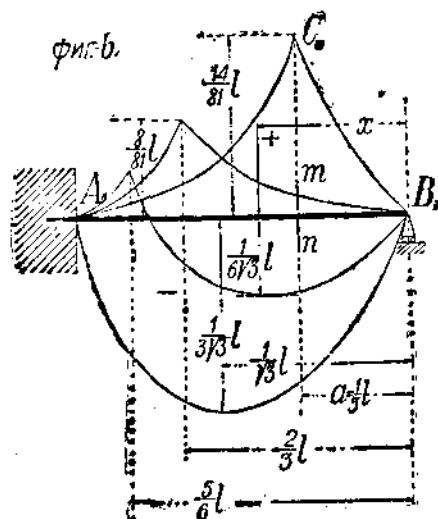
$$(M_c)_{\max} = \frac{3}{8} (2\sqrt{3} - 3) Pl = 0,174 Pl.$$

В случае действия подвижной нагрузки удобнее всего пользоваться при расчете линиями влияния. Если от оси AB (черт. 207) отложить по ординатам величины (ф-ла 112)¹⁾:

$$\frac{1 \cdot (l-x)^2 (2l+x)}{2l^2},$$

то полученная таким образом кривая AB_1 представляет собой линию влияния для опорной реакции B. Ордината ее в каком-либо сечении равна реакции B от груза единицы, приложенного в том же сечении.

Поперечная сила в сечении mn , при действии груза в левой части балки, равна по величине опорной реакции B, следовательно, часть линии AB_1 слева от сечения mn может служить линией влияния для поперечной силы в mn . С переходом груза на правую сторону балки, для получения поперечной силы, придется из опорной реакции вычитать единицу. Вычитание выполнено на чертеже проведением линии A_1B в расстоянии единицы от AB_1 . Заштрихованная на чертеже площадь будет служить для опреде-



Черт. 207.

¹⁾ В этом и следующих ур-нях для линий влияния x определяет положение груза и отсчитывается от правой опоры.

ления Q в сечении m при действии на балку любой системы грузов $P_1, P_2, \dots$, нужно только составить сумму $P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots$, соблюдая правило знаков.

Построим теперь линию влияния для изгибающего момента в сечении m . Пока груз находится слева от сечения m , изгибающий момент равняется моменту опорной реакции B и представится такой ф-лой:

$$\frac{1 \cdot (l-x)^2 (2l+x)}{2l^3} a \quad (a).$$

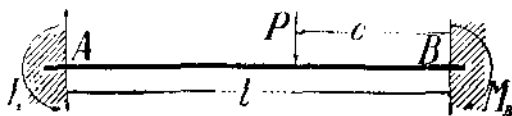
С переходом груза на правую сторону, момент будет равен:

$$\frac{1 \cdot (l-x)^2 (2l+x)}{2l^3} a - 1 \cdot (a-x) = \frac{x}{3l^3} (2l^3 - a(3l^2 - x^2)) \quad (b).$$

Кривые $A''C''$ и $C''B''$ (фиг. б), определяемые ур-ями (а) и (б), представляют собой линию влияния для момента в сечении m . На фиг. б представлены такие линии влияния моментов для сечения, отстоящих от опорного конца на расстояния $\frac{1}{3}l, \frac{2}{3}l$ и $\frac{5}{6}l$. Масштаб для ординат, представляющих те длины, на которые множится единица силы для получения соответствующего изгибающего момента от груза, равного единице, принят втрое большим масштаба для абсцисс.

§ 85. Изгиб балки с заделанными концами.

При таком закреплении имеем две статически неопределенные величины. За „лишние неизвестные“ примем величины реактивных пар M_A и M_B (черт. 208), препятствующих поворачиванию концов балки при изгибе. Если отбросить соответствующие „лишние закрепления“, то будем иметь статически определенный случай изгиба балки, опорой по концам.



Черт. 208.

Под действием сосредоточенной силы P , левый конец балки поворачивается на угол (ф-ла 98):

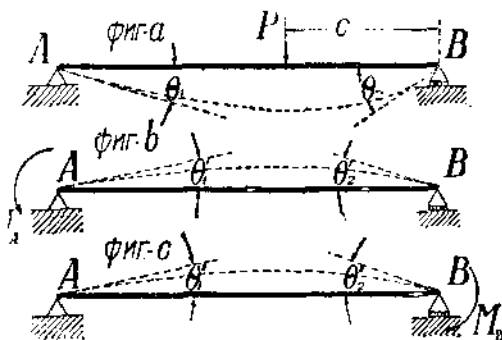
$$\theta_1 = \frac{Pc(P-c^2)}{6IEJ}.$$

Так как по условию этот конец балки заделан, то, следовательно, величины реактивных пар M_A и M_B (фиг. б и фиг. с черт. 209) должны быть таковы, чтобы вызываемые ими углы поворота (ф-ла 104):

$$\theta_1' = \frac{M_A l}{3EI} \quad \text{и} \quad \theta_1'' = \frac{M_B l}{6EI}$$

в сумме давали угол, равный и прямо противоположный углу θ_1 . На основании этого получаем ур-е:

$$\frac{Pc(P-c^2)}{6IEJ} = -\frac{l}{6EI} (2M_A + M_B).$$



Черт. 209.

Таким же приемом мы можем составить и другое ур-ие, относящееся к правому концу балки (ф-ла 99):

$$\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6EI} = -\frac{l}{6EI}(2M_B + M_A).$$

Из написанных ур-ий найдем:

$$M_A = -\frac{Pc^2(l-c)}{2}; \quad M_B = -\frac{Pc(l-c)^2}{2} \quad (115).$$

Найдя величины реактивных пар M_A и M_B из условий деформации балки, мы величины опорных реакций A и B определим из условий статики. Составляя момент всех сил относительно конца B , получим:

$$Al = -M_A + Pc + M_B.$$

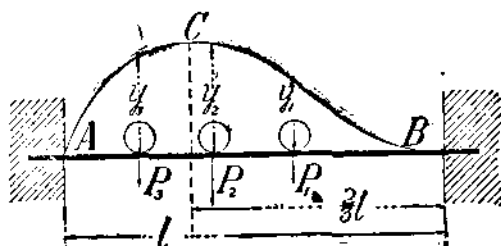
В этом ур-ии знаки соответствуют предположению, что опорные моменты M_A и M_B положительны, т.е. гнут балку выпуклостью вниз. В действительности эти моменты отрицательны, и если мы их значения (ф-ла 115) вставим в ур-ие, то получим такие значения опорных реакций:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Pc}{l} + \frac{-M_A + M_B}{l} = \frac{Pc}{l} + \frac{Pc(l-c)(2c-l)}{2} \\ B &= P - A = \frac{P(l-c)}{2} - \frac{Pc(l-c)(2c-l)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (116).$$

Если груз находится по середине пролета, то $c = \frac{l}{2}$, $A = B = \frac{P}{2}$,

$$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8} \quad (117).$$

Пользуясь ф-ми (115), легко графически представить зависимость между опорными моментами и положением груза. Построим кривую для изменения момента M_A . Для этого в каждом сечении балки по ординате отложим величину $c^2(l-c)/2$, получим линию влияния для опорного момента M_A (черт. 210).



Черт. 210.

Наибольшее значение опорный момент получает, когда $c = 0,667 l$. Пользуясь линией влияния, легко найти опорный момент M_A от системы грузов, $P_1, P_2, P_3, \dots$. Очевидно, в данном случае:

$$M_A = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3.$$

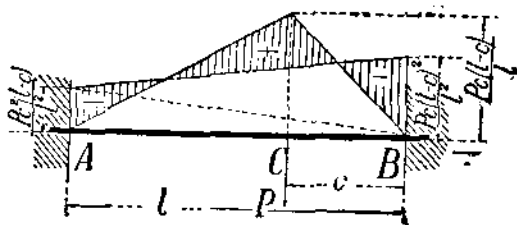
Если балка нагружена сплошной, равномерно распределенной нагрузкой q kg на единицу длины, то опорные моменты $M_A = M_B$, и величина их найдется умножением на q площади ACB . В самом деле опорный момент dM_A от действия элемента сплошной нагрузки qdc , расположенного в расстоянии c от правой опоры, будет:

$$dM_A = -\frac{qdc c^2(l-c)}{2}.$$

Момент M_A от всей нагрузки найдется суммированием элементов dM_A :

$$M_A = -q \int_0^l \frac{c^2(l-c)}{l^2} dc = -\frac{ql^2}{12} \quad (118).$$

Изменение изгибающего момента по длине балки при определенном положении груза найдется, если моменты, обусловленные силой P , сложить с моментами, соответствующими реактивным парам M_A и M_B . Принимая во внимание знаки моментов, заключаем, что изменение момента по длине определяется заштрихованной площадью (черт. 211). Наибольшее отрицательное значение изгибающего момента соответствует одной из опор. Наибольшее положительное значение имеет место под грузом P . Величина момента под грузом легко определяется из чертежа:



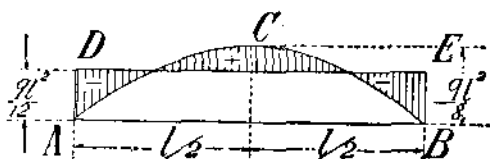
Черт. 211.

$$M_c = \frac{Pc(l-c)}{l} - \frac{Pc(l-c)^2}{l^2} \frac{l-c}{l} - \frac{Pc^3(l-c)}{l^2} \frac{c}{l} = \frac{2Pc^2(l-c)^2}{l^3} \quad (119).$$

Наибольшее его значение будет при $c = \frac{l}{2}$:

$$(M_c)_{\max} = +\frac{Pl}{8} \quad (120).$$

Изменение изгибающего момента по длине балки, при действии равномерно распределенной нагрузки, представится заштрихованной площадью (черт. 212). Парабола ACB , с наибольшей ординатой $\frac{ql^2}{8}$, дает величины изгибающих моментов от сплошной нагрузки для случая опертых концов, прямая DE , параллельная оси балки и отсекающая на оси ординат отрезок $\frac{ql^2}{12}$, представляет собой эпюру изгибающих моментов от реактивных пар (ф-ла 118). Так как по знаку эти моменты отрицательны, то ординаты прямой DE приходится вычитать из ординат параболы ACB .

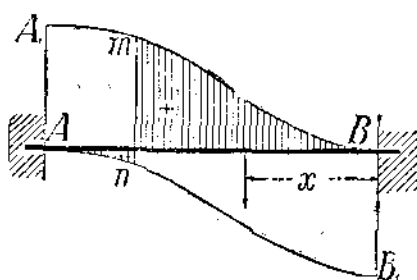


Черт. 212.

При действии подвижной нагрузки расчет балки удобнее всего вести по линиям влияния. Если от оси балки AB отложить по ординатам величины:

$$\frac{1 \cdot x}{l} + \frac{1 \cdot x(l-x)(2x-l)}{l^2},$$

то получим кривую BA_1 (черт. 213), представляющую линию влияния для опорной реакции A (ф-ла 116). Поперечная сила Q в каком-либо сечении m равна реакции A .



Черт. 213.

пока груз единица расположен в правой части балки. С переходом груза на левую сторону сечения, придется при вычислении Q вычитать из реакции A груз равный единице, поэтому линия влияния для Q представится отрезками двух кривых. В правой части придется пользоваться кривой A_1B , в левой части — кривой AB_1 , получаемой путем вычитания из ординат A_1B единицы. Чтобы построить линию влияния для изгибающего момента в каком-либо сечении m , заметим, что пока груз находится в правой части балки, момент в сечении m равен:

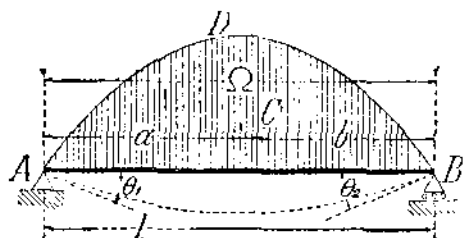
$$M_A + Aa_1 = a_1 \left[\frac{1 \cdot x}{l} + \frac{1 \cdot x(l-x)(2x-l)}{l^2} \right] - \frac{1 \cdot x^2(l-x)}{l^2}.$$

Когда груз находится в левом участке балки, изгибающий момент в сечении m равен $Ba + M_B$. На черт. 214 построены линии влияния для сечений, расположенных в рас-

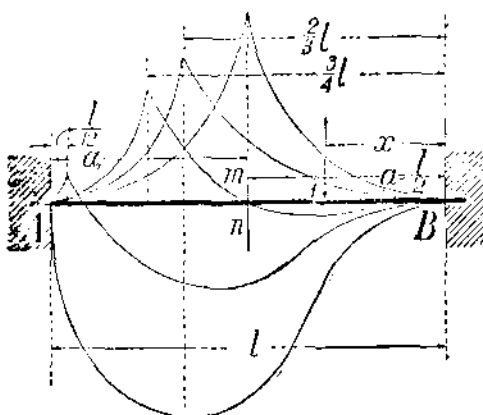
стоянии $\frac{l}{2}$, $\frac{2}{3}l$, $\frac{3}{4}l$, $\frac{11}{12}l$ и l от правого конца. Масштаб для ординат, представляющих те длины, на которые множится единица силы для получения соответствующего момента от груза, равного единице, принят в четыре раза большим масштаба для абсцисс ¹⁾.

Если на балке имеется какая-либо сложная нагрузка, то определение опорных моментов проще всего выполнить при помощи графоаналитического метода. Отбрасываем лишние закрепления и исследуем изгиб балки с опертными концами. Пусть ADB

(черт. 215) представляет эпюру изгибающих моментов для заданной нагрузки. Если через Ω обозначим моментную площадь и через C — центр тяжести этой



Черт. 215.



Черт. 214.

площади, то углы поворота концов определяются ф-ми:

$$\theta_1 = \frac{\Omega b}{EJ} \text{ и } \theta_2 = \frac{\Omega a}{EJ};$$

они получаются делением опорных реакций от фиктивной нагрузки Ω на жесткость балки EJ . Опорные моменты M_A и M_B должны быть подобраны таким

¹⁾ Подробные таблицы линий влияния для балки с заделанными концами имеются в книжке А. Legerer, *Analyt. Ermitt. u. Anwend. v. Einflusslinien*.

чтобы вызываемые ими повороты концов были равны и прямо противоположны значениям для θ_1 и θ_2 . Пользуясь готовыми формулами изгиба балки моментом, приложенным на конце, получим такие

$$\frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B}{6EJ} = -\frac{\Omega b}{lEJ}; \quad \frac{M_B l}{3EJ} + \frac{M_A}{6EJ} = -\frac{\Omega a}{lEJ},$$

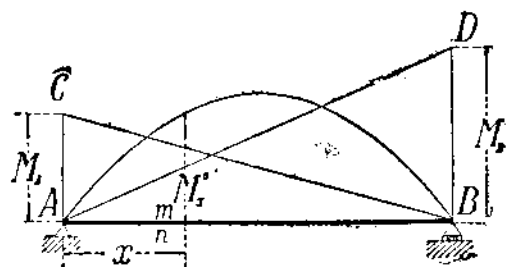
$$M_A = -\frac{2\Omega}{l^2} (2b - a); \quad M_B = -\frac{2\Omega}{l^2} (2a - b) \quad (121).$$

таким образом „лишние неизвестные“, мы легко найдем остальные изгиба, пользуясь принципом сложения действия сил.

Нятый метод решения задачи легко может быть распространен и на балок переменного сечения. Было показано (§ 79), что изгиб балки того сечения приводится к изгибу призматического бруска, нужно указать ординаты моментной площади: вместо M отложить по ординате $\frac{MJ_0}{J}$, где J момент инерции рассматриваемого сечения балки,

который постоянный момент инерции. Загрузив балку искаженной такой моментной площадью, мы найдем углы поворота концов, деля на EJ_0 реакции от фиктивной на-

грузки как по условию концов, так и по условию опор. Если же, как по условию концов, так и по условию опор, то нужно отнять от фиктивной нагрузки нулю. Получим два уравнения, две неизвестные величины M_A и M_B . Составим общий вид. Если через M_x^0 обозначим момент только от на-



Черт. 216.

грузки на балке (черт. 216), обратим внимание, что моментные площади, соответствующие моментам представляются треугольниками ACB и ADB , то полный изгибающий момент в каком-либо сечении mn представится так:

$$M_x = M_x^0 + M_A \frac{(l-x)}{l} + M_B \frac{x}{l}.$$

искаженной моментной площади определяются формулой:

$$\frac{J_0}{J} \left[M_x^0 + M_A \frac{(l-x)}{l} + M_B \frac{x}{l} \right].$$

реакция B от фиктивной нагрузки будет;

$$B = \frac{J_0}{J} \left[\int_0^l \frac{M_x^0 x dx}{J} + \frac{M_A}{l} \int_0^l \frac{(l-x)x dx}{J} + \frac{M_B}{l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{J} \right] \quad (122).$$

Такого же вида выражение можно получить и для реакции A . Вставляя вместо J его выражение, выполняя интегрирование и приравнявая полученные для A и B результаты нулю, найдем искомые ур-ня для определения M_a и M_b .

§ 86. Балки с упруго заделанными концами.

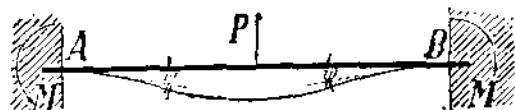
Мы разобрали два типа закреплений концов:

- 1) опертые концы — свободно поворачиваются при изгибе балки,
- 2) заделанные концы — не поворачиваются вовсе.

Из разобранных выше примеров видна выгоду заделки концов. Благодаря этой заделке уменьшается прогиб балки, уменьшаются, обыкновенно, и напряжения. Чтобы ф-лы, выведенные для балок с заделанными концами, можно было применять с полной уверенностью в каком-либо случае, необходимо выяснить, действительно ли закрепление концов таково, что не допускает никакого вращения при изгибе балки. В тех случаях, когда при действии внешних сил концы хотя немного поворачиваются, эффект закрепления уменьшается, и балка по условиям работы приближается к балке с опертыми концами ¹⁾. Если закрепления балки таковы, что углы поворота концов пропорциональны действующим в них моментам, и если по удалении внешних сил деформации исчезают, то говорят, что концы заделаны упруго. Обозначим через φ угол поворота конца, через M — соответствующий ему изгибающий момент. Тогда при упругой заделке $\varphi = Mk$. Коэффициент k характеризует степень жесткости заделки. Когда k обращается в нуль, мы будем иметь абсолютно заделанный конец, при $k = \infty$, конец оперт. Если величина k известна,

задача об изгибе балки с упруго заделанными концами решается вполне.

В качестве примера найдем величину опорных моментов для случая, представленного на



Черт. 217.

черт. 217. Сосредоточенная сила P приложена посредине пролета балки, упруго закрепленной в A и B . Под действием силы P концы балки отчасти повернутся на один и тот же угол ψ ²⁾. Обозначим через M величину появляющихся при этом опорных моментов, тогда будем иметь:

$$M = \frac{\psi}{k}.$$

Если бы концы балки были оперты и могли вращаться совершенно свободно, то при действии силы P они повернулись бы на угол:

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EI} \text{ и, очевидно, } \theta > \psi.$$

¹⁾ Относительно различных способов закрепления железных балок и степени жесткости этих закреплений, имеются некоторые указания в книге F. Pietzker'a, *Festigkeit der Schiffe*, Berlin, 1911 г., стр. 21.

²⁾ Степень жесткости заделки для обоих концов предполагается одинаковой.

Разность $\theta - \psi = \varphi$ есть как раз тот угол, на который поворачиваются концы, благодаря действию опорных моментов M . Так как эти моменты равны и прямо противоположны, то углы поворота концов будут:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{MI}{3EI} + \frac{MI}{6EI} = \frac{MI}{2EI} \quad (123),$$

и потому для φ можем написать:

$$\theta - \psi = -\frac{MI}{2EI}.$$

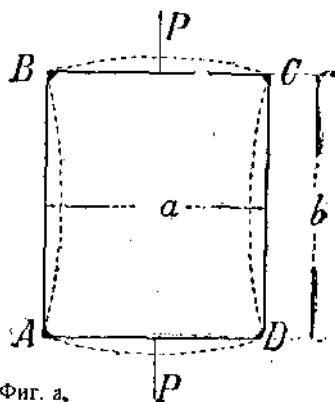
Подставляя сюда вместо ψ и θ их значения, получим:

$$\frac{PP}{16EI} - kM = -\frac{MI}{2EI}.$$

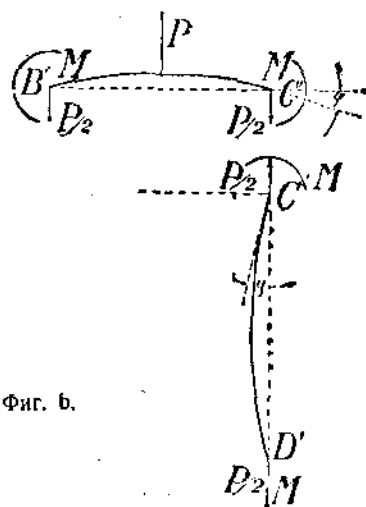
При $k=0$ получим $M = -\frac{Pl}{8}$, т.е. такое же значение момента, как и в случае абсолютно выделанных концов, при $k=\infty$ получим $M=0$, т.е. концы свободно поворачиваются.

Особенно просто находится степень жесткости заделки и определяется величина коэффициента k в том случае, когда концы изгибаемого стержня прикреплены к стержням известных размеров. Такого типа задачи мы встречаем при расчете рам с жесткими узлами ¹⁾.

Возьмем такой пример. Прямоугольная рама $ABCD$ (черт. 218) растягивается силами P , приложенными посредине стержней BC и AD . Найдем моменты, действующие в B и C . Под действием сил P рама искривится так, как это показано на фиг. а, черт. 218 пунктиром. В точках A, B, C и D имеются жесткие соединения, благодаря которым прямые углы рамы и после искривления остаются прямыми. Для упрощения будем полагать, что стержни BC и AD одинакового сечения, стержни AB и CD также одного сечения. Выделим стержень BC . Его можно рассматривать как балку, лежащую на двух опорах и нагруженную посредине. Концы придется считать упруго заделанными, так как свободно поворачиваться им мешают



Фиг. а.



Фиг. б.

Черт. 218.

¹⁾ Подробное исследование различного типа рам можно найти в книжке Björnstad'a, Die Berechnung v. steifen Ramen. См. также посвященную тому же вопросу книгу Kleinogel'я.

Несколько интересных примеров по расчету рам имеется в статьях:

W. André, Zeitschr. f. Brückenbau 1915 г. стр. 35 и 105.

Herzka, Eisenbau 1915 г., стр. 27.

G. Kaufmann, Eisenbau 1913 г., стр. 266.

стержни AB и CD . Обозначим через M величину тех моментов, которые противодействуют вращению концов стержня BC . Эти самые моменты будут изгибать вертикальные стержни AB и CD (направление моментов показано на фиг. б. черт. 218). Благодаря жестким соединениям в узлах, концы сходящихся в каком-либо узле двух стержней должны повернуться в одну сторону на один и тот же угол φ . Этим обстоятельством мы и воспользуемся для нахождения неизвестного пока момента M . Возьмем конец C стержня BC . Под действием силы P он повернется по часовой стрелке на угол $\frac{Pa^2}{16EJ}$, моменты M повернут тот же конец в противоположную сторону на угол $\frac{Ma}{2EJ}$, окончательный угол поворота будет:

$$\varphi = \frac{Pa^2}{16EJ} - \frac{Ma}{2EJ}.$$

Если мы возьмем теперь вертикальный стержень CD , то он будет искривляться только под действием моментов M ¹⁾, приложенных по концам, и потому угол поворота концевых сечений будет:

$$\varphi_1 = \frac{Mb}{2EJ_1}.$$

Благодаря жесткости соединения должно быть $\varphi = \varphi_1$, откуда получаем ур-ие:

$$\frac{Pa^2}{16EJ} - \frac{Ma}{2EJ} = \frac{Mb}{2EJ_1}; \quad M = \frac{Pa}{8} \frac{1}{1 + \frac{b}{a} \frac{J}{J_1}} \quad (124).$$

Направление M отмечено на чертеже, и, если для стержня BC сохранять то же правило знаков, что и для балок, то опорный момент следует считать отрицательным. Если увеличивать J_1 , т.е. поперечные размеры вертикальных стержней, то вместе с тем увеличивается и жесткость заделки концов стержня BC . Дробь $\frac{1}{1 + \frac{a}{b} \frac{J}{J_1}}$ приближается в та-

ком случае к единице, и опорный момент стремится к величине $\frac{Pa}{8}$, т.е. к величине, которую мы получаем в случае абсолютно заделанных концов. При гибких вертикальных стержнях дробь $\frac{1}{1 + \frac{a}{b} \frac{J}{J_1}}$ мала, следовательно, и опорный момент M также

мал. Определив величину опорных моментов, мы без труда можем вычислить прогибы стержней и величины напряжений.

Разберем еще одну задачу, с которой приходится иметь дело при расчете мостов. Прямоугольная рама $ABCD$, опертая в точках A и D , изгибается горизонтальной силой H (черт. 219). Размеры рамы, жесткости отдельных стержней и приблизительный вид искривления нанесены на чертеже. Благодаря жестким соединениям, в узлах будут действовать моменты M и M_1 , направление которых отмечено стрелками. Если сделать дополнительное предположение, что сила H распределяется поровну между узлами B и C ²⁾, то тогда все силы, действующие на каждый стержень, будут выяснены. Распорка BC

¹⁾ В случае длинных и тонких стержней может заметную роль играть продольная растягивающая или сжимающая сила $\frac{P}{2}$. Этот вопрос будет в дальнейшем подробно разобран.

²⁾ Этот результат мы получим, если пренебрежем сжатием распорки и сближением ее концов при изгибе, по сравнению с перемещениями точек B и C .

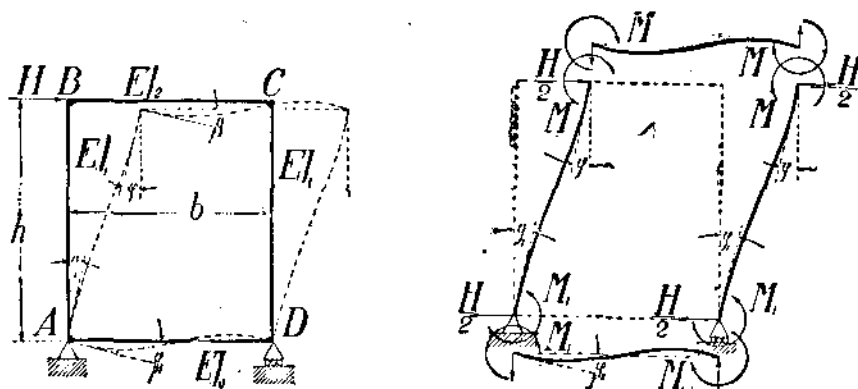
будет изгибаться, как балка, опертая по концам. На основании известных ф-л найдем, что угол поворота левого конца равен:

$$\varphi = \frac{Mb}{3EJ_2} - \frac{Mb}{6EJ_1} = \frac{Mb}{6EJ_2}$$

Точно также из рассмотрения изгиба распорки AD найдем:

$$\varphi_1 = \frac{M_1 b}{6EJ_0}$$

Рассматривая стержень AB как брусок, закрепленный в нижнем конце, можем установить связь между углами φ и φ_1 . Угол φ поворота верхнего конца обусловлен тремя



Черт. 219.

причинами: а) поворотом стержня в плоскости закрепления на угол φ_1 , б) изгибом стержня силой $\frac{H}{2}$, приложенной у верхнего конца, что вызывает поворот конца на угол $\frac{H}{2} \frac{h^2}{2EI_1}$, и, наконец, с) действием изгибающего момента M , вызывающим поворот верхнего конца в противоположную сторону на угол $\frac{Mh}{EI_1}$ ¹⁾. Окончательно будем иметь:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{Hh^2}{4EI_1} - \frac{Mh}{EI_1}$$

или, вставляя вместо φ и φ_1 их значения, получим:

$$\frac{Mb}{6EJ_2} = \frac{M_1 b}{6EJ_0} + \frac{Hh^2}{4EI_1} - \frac{Mh}{EI_1} \quad (a)$$

Составляя момент всех сил, приложенных к стержню AB , найдем второе ур-е, связывающее M и M_1 :

$$M + M_1 = \frac{Hh}{2} \quad (b)$$

¹⁾ Результат этот получим, если примем во внимание, что пара сил, приложенная к стержню с одним заделанным концом, вызывает изгиб по дуге круга. Кривизна будет равна $\frac{M}{EI_1}$. Угол получается умножением кривизны на длину дуги h .

Из полученных ур-ий (а) и (b) найдем:

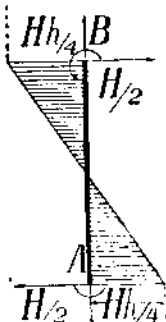
$$M = \frac{H \left(\frac{hb}{6EJ_0} + \frac{h^2}{2EJ_1} \right)}{\frac{b}{3EJ_2} + \frac{b}{3EJ_0} + \frac{2h}{EJ_1}} \quad (125).$$

Если нижняя распорка весьма жестка, то полагая $EJ_0 = \infty$, получим:

$$M = \frac{Hh}{4} \frac{1}{1 + \frac{b}{6h} \frac{J_1}{J_2}} \quad (126).$$

Величина момента M зависит от соотношения $J_1 : J_2$. При $J_2 = 0$, т.е. при весьма гибкой верхней распорке, $M \rightarrow 0$. Каждая из стоек будет в условиях бруса с нижним заделанным концом. Если верхняя распорка весьма жестка по сравнению со стойками, то можно положить $J_2 = \infty$, тогда:

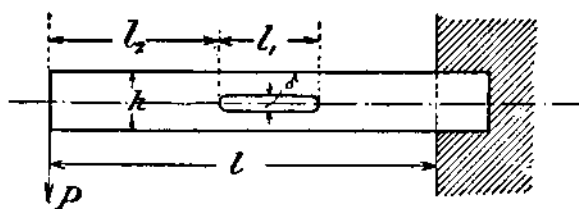
$$M = \frac{Hh}{4} \quad (127).$$



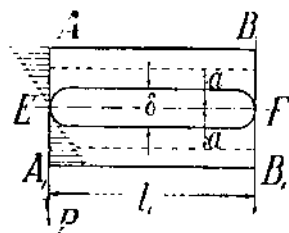
Черт. 220.

Стойка будет находиться в условиях, представленных на черт. 220. Точка перегиба соответствует тому сечению, где изгибающий момент обращается в нуль, и будет лежать на середине высоты стоек. Кроме изгиба, стойка будет испытывать растяжение силой $\frac{2M}{b}$, являющейся опорной реакцией для распорки BC.

Последним результатом (127) можно воспользоваться для приблизительной оценки влияния продолговатых отверстий, вырезанных у нейтрального слоя изгибаемых балок. На черт. 221 представлена балка с одним заделанным концом, изгибаемая силой P . По нейтральному слою имеется продолговатое отверстие длины l_1 и ширины δ . Вырежем элемент балки, соответствующий отверстию (черт. 222). Действие левой отброшенной части балки на выделенный элемент приводится к паре сил $M_0 = Pl_2$, вызывающей по



Черт. 221.



Черт. 222.

сечению растягивающие и сжимающие напряжения, и к силе P . Действие этой силы можно оценить, пользуясь ф-ми, выведенными для рамы с абсолютно жесткими распорками. Части $ABEF$ и A_1B_1EF будут подвергаться дополнительному изгибу моментами $\frac{Pl_2}{4}$,

приложенными по концам, и действию продольных сил, равных $2 \frac{Pl_1}{4} = 2a$. Мы предположили сечение балки симметричным относительно нейтральной линии, и через a обозначили расстояние от нейтрального слоя до осей элементов $ABEF$ и A_1B_1EF . Обозначим, кроме того, через W момент сопротивления поперечного сечения балки, через W_1 и F — момент сопротивления и площадь поперечного сечения каждого из элементов $ABEF$

и A_1B_1EF , тогда величина наибольших напряжений, обусловленная действием силы P , представится ф-лой:

$$p_1 = \frac{Pl_1}{4aF} + \frac{Pl_1}{4W_1}.$$

К этому нужно присоединить напряжения, обусловленные изгибом всей балки пар II сил M_0 . В виду того, что отверстие вносит значительное влияние на распределение этих напряжений, мы в запас прочности при суммировании будем брать максимальные напряжения

$$p_2 = \frac{M_0}{W}.$$

Полученная таким путем ф-ла для полных напряжений

$$p = \frac{M_0}{W} + \frac{Pl_1}{4} \left(\frac{1}{aF} + \frac{1}{W_1} \right) \quad (123)$$

с достаточной точностью подтверждена опытами ¹⁾.

§ 87. Балка на трех опорах.

Балки, имеющие более двух опорных точек и перекрывающие несколько пролетов, называются неразрезными. Мы будем одну из опор балки считать неподвижной, остальные могут перемещаться по направлению оси балки. Опоры устроены таким образом, что допускают поворачивание соответствующих поперечных сечений, но не позволяют перемещаться этим сечениям в направлении, перпендикулярном оси балки. При таком устройстве опор вертикальным нагрузкам будут соответствовать и вертикальные опорные реакции. Статика в данном случае дает нам два условия равновесия, из которых могут быть определены две неизвестные, остальные неизвестные являются „лишними“, и для их нахождения можно пользоваться тем приемом, который был применен для нахождения опорных моментов при изгибе балок с заделанными концами. Начнем с простейшего случая, когда балка лежит на трех опорах. За „лишнюю неизвестную“ примем вертикальную реакцию средней опоры. Эта лишняя неизвестная является результатом лишнего закрепления, не позволяющего определенному поперечному сечению балки перемещаться по вертикальному направлению. Если мы отбросим лишнее закрепление, то получим балку, свободно лежащую на двух опорах. Для такой балки мы без затруднения найдем прогиб от заданной нагрузки в любом поперечном сечении, а, следовательно, и в сечении, соответствующем промежуточной опоре. Потом отдельно изучим, какие прогибы вызывает в балке вертикальная сила, приложенная в сечении, соответствующем промежуточной опоре, и так подберем величину этой силы, чтобы она переместившееся сечение, соответствующее промежуточной опоре, вернула в его первоначальное положение. Определенная таким образом сила и даст нам искомую величину промежуточной опорной реакции.

¹⁾ См. вышецитированную (стр. 180) статью Pfeleiderer'a.

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда балка перекрывает два равных пролета и несет равномерно распределенную нагрузку q kg/m. Если отбросить среднюю опору B (черт. 223), то соответствующее сечение балки прогнется на величину (ф-ла 93):

$$f = \frac{5}{384} \frac{q(2l)^4}{EJ}.$$

Если мы в сечении B приложим вертикальную силу B , действующую снизу вверх, то она вызовет изгиб балки в противоположном направлении, и величина прогиба в точке приложения силы будет:

$$f_1 = \frac{B(2l)^3}{48EJ}.$$

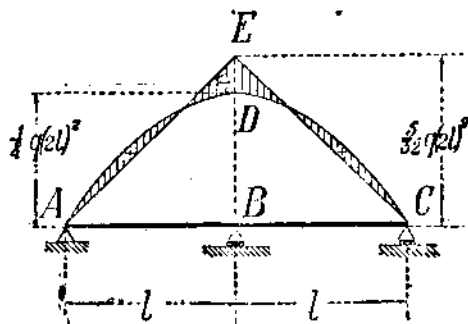
Нам остается теперь подобрать для B такое значение, чтобы она уничтожила прогиб, вызванный сплошной нагрузкой; для этого положим:

$$\frac{5}{384} \frac{q(2l)^4}{EJ} = \frac{B(2l)^3}{48EJ}, \quad \text{откуда} \quad B = \frac{5}{8} 2ql = \frac{5}{8} Q \quad (129),$$

где через Q обозначена вся нагрузка, лежащая на балке. Подбранная таким образом сила B и даст нам величину промежуточной опорной реакции. Крайние опорные реакции по симметрии будут равны между собой, и каждая из них, очевидно, равна:

$$\frac{1}{2} \left(Q - \frac{5}{8} Q \right) = \frac{3}{16} Q.$$

Найдя промежуточную опорную реакцию, мы без затруднения можем построить



Черт. 223.

эпюру изгибающих моментов. Эпюра изгибающих моментов от сплошной нагрузки (при отсутствии промежуточной опоры) представится параболой ADC . Эпюра изгибающих моментов, соответствующих действию только опорной реакции, представится в виде треугольника AEC . При совместном действии сплошной нагрузки и опорной реакции изменения изгибающего момента представляются разностью ординат параболы и треугольника (на черт. 223 соответствующие площади заштрихованы). Изгибающий момент для какого-либо сечения, в расстоянии x от левой опоры, определится из ф-лы:

$$M = \frac{3}{16} Qx - \frac{qx^2}{2}.$$

Наибольшее положительное значение момент получает при $x = \frac{3}{8} l$:

$$M_{\max} = \frac{9}{128} ql^2 \quad (130).$$

Над средней опорой момент получает наибольшее отрицательное значение:

$$M_{\min} = -\frac{qP}{8} \quad (131).$$

Возьмем теперь вместо сплошной нагрузки сосредоточенную силу P , приложенную в каком-либо сечении правого пролета балки, в расстоянии b от правой опоры (черт. 224). Для большей общности вывода предположим, что пролеты не равны. Если отбросить „лишнюю“ промежуточную опору, то под действием силы P сечение B опустится.

Соответствующий прогиб f определится ф-лой (94):

$$f = Pbl \frac{(l + l_1)^2 - b^2 - l^2}{6EI(l + l_1)}.$$

Подберем теперь для промежуточной опорной реакции такую

величину B , чтобы она уничтожила прогиб, вызванный силой P . Прогиб, вызываемый силой B в точке ее приложения, будет (§ 78, пример III).

$$f_1 = \frac{BPl_1^2}{3(l + l_1)EJ}.$$

Для определения B получим ур-ие:

$$\frac{BPl_1^2}{3(l + l_1)EJ} = \frac{Pbl[(l + l_1)^2 - b^2 - l^2]}{6EJ(l + l_1)},$$

откуда:

$$B = \frac{Pb(2l + l_1)l_1 - b^2l}{2l_1^2} \quad (132);$$

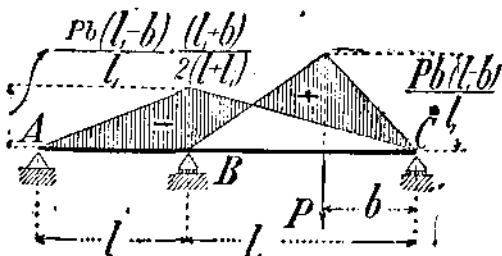
$$\text{при } l = l_1: \quad B = \frac{Pb}{2l} (3l^2 - b^2) \quad (133).$$

Имея реакцию для средней опоры, мы легко найдем другие элементы изгиба, пользуясь принципом сложения действия сил.

Изменение изгибающего момента по длине балки представлено на черт. 224 заштрихованной площадью. При построении эпюры моментов предварительно построена треугольная эпюра для пролета BC , как для балочки с опертыми концами, и потом вычтены изгибающие моменты, вызванные моментом, действующим по сечению B .

§ 88. Влияние повышения или понижения промежуточной опоры.

При выводах предыдущего параграфа мы предполагали, что все три опоры точно расположены на одной высоте. Здесь на простых примерах покажем, насколько сильное влияние на наши расчеты может оказать понижение или повышение промежуточной



Черт. 224.

опоры. Опять возьмем случай двух равных пролетов и сплошную, равномерно распределенную нагрузку. Допустим, что средняя опора ниже крайних на величину δ , тогда уравнение для определения B напишется так:

$$\frac{5}{384} \frac{Q(2l)^3}{EJ} = \frac{B(2l)^3}{48EJ} + \delta$$

откуда

$$B = \frac{5}{8} Q - \frac{6EJ}{l^3} \quad (134).$$

Крайне опорные реакции будут равны:

$$\frac{3}{16} Q + \frac{3EJ}{l^3}.$$

Изгибающий момент на средней опоре, вследствие понижения этой опоры, уменьшится и будет равен:

$$M = \left(\frac{3}{16} Q + \frac{3EJ}{l^3} \right) l - \frac{q l^2}{2} = -\frac{q l^2}{8} \left(1 - \frac{3 \cdot 8EJ}{q l^4} \right) \quad (135).$$

Второй член в скобках представляет собой влияние осадки δ на величину опорного момента M . Выясним это влияние на частном примере. Возьмем железную балку ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$), высота которой h составляет 0,11. Положим, что наибольшие напряжения в балке, вычисленные в предположении равномерно распределенной нагрузки и расположения опор на одной высоте, равны:

$$p_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{q l^2}{8J} \frac{h}{2} = 800 \text{ kg/cm}^2;$$

в таком случае

$$\frac{3 \cdot 8EJ}{q l^4} = \frac{3Eh}{2p_{\max} l^2} = \frac{300}{8} \frac{\delta}{h}.$$

Мы видим, что достаточно промежуточной опоре опуститься на $\delta = 0,01h$, чтобы напряжения изменялись почти на 40%. Это обстоятельство в значительной мере понижает достоверность всех расчетов, относящихся к неразрезным балкам, и заставляет в таких случаях понижать нормы допускаемых напряжений.

§ 89. Теорема о трех моментах ¹⁾.

Способ, принятый выше для определения промежуточной реакции в случае балки, лежащей на трех опорах, может быть применен при каком угодно числе промежуточных опор. Например, в случае балки на четырех опорах придется поступить так: мы отбросим две промежуточные опоры и найдем, какие про-

¹⁾ Теорема эта впервые доказана инженером Bertot — Comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils, 1855 г., стр. 278. Дальнейшее развитие теории неразрезных балок принадлежит, главным образом, следующим лицам:

Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete d. techn. Mechanik;

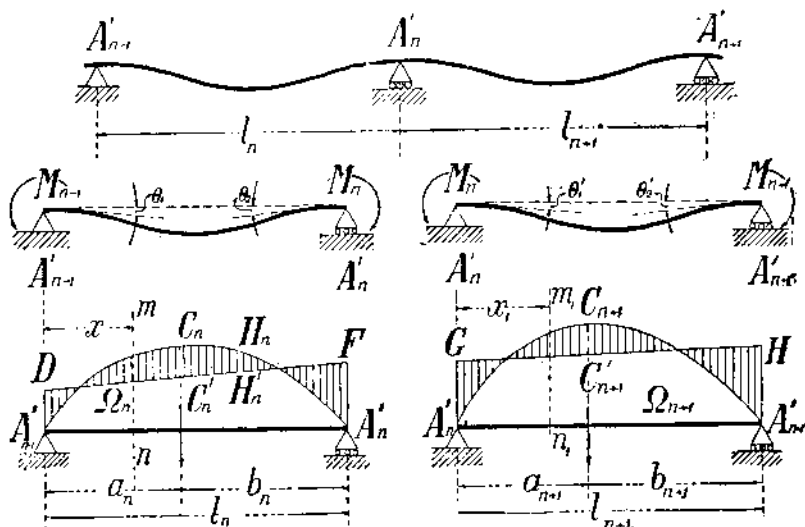
Winkler, Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger, Zivilingenieur 1862 г.;

Weyrach, Allgemeine Theorie der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig, 1873 г.;

Мюллер-Бреслау, Графическая статика сооружений, т. II, ч. 2-ая, русский пер. Г. Г. Кривошеина.

гибы получаются в соответствующих им сечениях под действием заданных нагрузок. Потом нужно будет в местах опор приложить две силы такой величины, чтобы они уничтожили прогибы, получившиеся от заданных нагрузок. Эти силы и будут искомые опорные реакции. Изложенный способ при большом числе опор неудобен, так как в каждое полученное таким путем уравнение войдут все неизвестные реакции.

Задача упрощается, если за „лишние неизвестные“ выбрать не опорные реакции, а величины изгибающих моментов в сечениях балки, соответствующих опорам (*опорные моменты*). На черт. 225 представлены два последовательных пролета неразрезной балки. Через $A_0', A_1', A_2' \dots$ будем обозначать по-



Черт. 225.

следовательные опоры, через $l_1, l_2, \dots$ — длины пролетов. Представим себе, что наша многопролетная балка разрезана сечениями над опорами, тогда каждый пролет можно рассматривать отдельно, как балку, лежащую на двух опорах. Возьмем, например, n -ый пролет. Чтобы условия его работы, благодаря воображаемым разрезам над опорами, не изменились, необходимо по концевым сечениям A_{n-1}' и A_n' приложить усилия, заменяющие действие отброшенных частей неразрезной балки. В случае вертикальных нагрузок действие всех сил, лежащих по правую сторону от опоры A_n' , может быть заменено системой им эквивалентной, состоящей из вертикальной силы, приложенной в центре тяжести сечения A_n' , и из пары сил M_n . Подобным же образом можно заменить действие всех левых отброшенных пролетов вертикальной силой и парой M_{n-1} , приложенными к левому концу A_{n-1}' . Силы, приложенные в центрах тяжести опорных сечений A_{n-1}' и A_n' , очевидно, передадутся непосредственно на опоры, и никакого влияния на изгиб выделенного пролета $A_{n-1}' - A_n'$ не окажут.

Нам придется в дальнейшем считаться с нагрузкой, непосредственно лежащей на рассматриваемом пролете, и с неизвестными пока опорными моментами M_{n-1} и M_n . Если удастся найти величины опорных моментов, то дальнейшее решение задачи может быть выполнено без затруднений; мы легко найдем для любого сечения величину изгибающего момента и величину перерезывающей силы, просто найдутся также и величины опорных реакций. Пусть кривая $A_{n-1}''C_nA_n''$ представляет эпюру изгибающих моментов от нагрузки, лежащей на выделенном пролете. Эпюра изгибающих моментов, соответствующая опорным моментам M_{n-1} и M_n , представится трапецией $A_{n-1}''DFA_n''$, и, так как опорные моменты обыкновенно производят изгиб, противоположный изгибу от заданных нагрузок, то, при графическом определении изгибающего момента в каком-либо сечении, приходится брать разность ординат кривой $A_{n-1}''C_nA_n''$ и трапеции $A_{n-1}''DFA_n''$. Изменение изгибающих моментов по длине n -го и $n+1$ -го пролетов представится заштрихованной площадью. Величина изгибающего момента в каком-либо сечении n -го пролета, в расстоянии x от левой опоры A_{n-1}'' , будет ¹⁾:

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n} \quad (136).$$

Здесь через M_x^0 обозначен изгибающий момент от нагрузки, лежащей на взятом пролете. Его мы определяем так же, как для балки с опертыми концами. Величина перерезывающей силы в каком-либо сечении mn будет:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{dM_x^0}{dx} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (137).$$

Здесь через Q_x^0 обозначена перерезывающая сила от нагрузки, лежащей на рассматриваемом пролете. Величина эта вычисляется так же, как для балки, свободно лежащей на двух опорах. Введем обозначения:

$$[Q_x^0]_{x=0} = A_n; \quad [Q_x^0]_{x=l_n} = -B_n.$$

Очевидно, A_n и B_n не что иное, как опорные реакции для простой балки, опертой по концам и нагруженной нагрузкой, лежащей на n -ом пролете. Тогда перерезывающая сила у концов n -го пролета будет [ф-ла (137)]:

$$[Q_x]_{x=0} = A_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}; \quad [Q_x]_{x=l_n} = -B_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (138).$$

Полученные ф-лы можно применить к любому пролету, вставив соответствующее значение для n . Воспользуемся ими для нахождения реакции опоры A_n' . Перерезывающая сила, непосредственно слева от этой опоры, будет:

$$[Q_x]_{x=l_n} = -B_n + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

¹⁾ При выборе знаков моментов мы руководствуемся прежним правилом: опорные моменты M_{n-1} и M_n берем с положительным знаком, если они изгибают балку выпуклостью вниз.

Перерезывающая сила справа будет:

$$[Q_x]_{x=0} = R_{n+1} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}.$$

Так как перерезывающая сила есть сумма всех сил, лежащих по одну сторону сечения, то разность перерезывающих сил в вышеуказанных двух бесконечно близких друг к другу сечениях, очевидно, даст нам силу, приложенную на опоре, т.е. опорную реакцию (если, конечно, нет грузов, стоящих непосредственно над опорой). Величина этой опорной реакции будет:

$$A_n' = [Q_x]_{x=0}^{n+1} - [Q_x]_{x=l_n}^n = A_{n+1} + B_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (139).$$

Если есть какой-либо груз, непосредственно стоящий над опорой A_n' , то его придется прибавить к реакции, вычисленной по ф-ле (139).

Пользуясь ф-ми (136), (137) и (139), мы можем все необходимые для расчетов элементы выразить через опорные моменты. Дальнейшая наша задача будет заключаться в том, чтобы составить достаточное число ур-ий для нахождения этих моментов. Для упрощения выкладок будем считать, что балка имеет постоянное поперечное сечение, и все опоры расположены на одной высоте. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что каждые два смежных участка неразрезной балки на их общей опоре имеют общую касательную. Это дает нам столько ур-ий, сколько имеется промежуточных опор, а значит и неизвестных опорных моментов. (Предполагаем, что концы неразрезной балки, соответствующие крайним опорам, оперты, а потому крайние опорные моменты обращаются в нуль.) При составлении ур-ий воспользуемся графоаналитическим методом (§ 78). Было показано, что для нахождения углов наклона касательных к упругой линии нужно представить себе балку загруженной сплошной нагрузкой, меняющейся по тому же закону, что и изгибающий момент. Опорные реакции от фиктивной нагрузки, деленные на жесткость балки EJ , дают углы поворота концов балки при изгибе. Применяя это к правому концу n -го пролета (см. черт. 225), найдем:

$$\theta_2 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_n l_n}{3} + \frac{M_{n-1} l_n}{6} + \frac{\Omega_n a_n}{l_n} \right).$$

Здесь через Ω_n обозначена моментная площадь $A_{n-1}''C_n A_n''$ (черт. 225), соответствующая нагрузке, лежащей на n -ом пролете, a_n — координата центра тяжести этой площади. Подобным же образом для левого конца $n+1$ -го пролета получим:

$$\theta_1' = \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_n l_{n+1}}{3} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Для того, чтобы оба участка имели над опорой A_n общую касательную, необходимо положить: $\theta_2 = -\theta_1'$ или

$$\frac{M_n l_n}{3} + \frac{M_{n-1} l_n}{6} + \frac{\Omega_n a_n}{l_n} = - \frac{M_n l_{n+1}}{3} - \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} - \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

откуда:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (140).$$

Мы получили ур-ие, заключающее величины трех последовательных опорных моментов. Составляя подобное ур-ие для каждой пары смежных пролетов, получим столько ур-ий, сколько промежуточных опор и сколько, следовательно, неизвестных опорных моментов ¹⁾.

Если один или оба конца неразрезной балки заделаны, то к ур-иям вида (140) нужно присоединить условия закрепления. Положим, например, что левый конец балки не может поворачиваться, тогда соотношение между моментом M_0 в плоскости заделки и опорным моментом M_1 найдется из того условия, что угол θ_1 равен нулю. Пользуясь графоаналитическим приемом, представим это условие в таком виде:

$$\theta_1 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_1 l_1}{6} + \frac{M_0 l_1}{3} + \frac{\Omega_1 b_1}{l_1} \right) = 0.$$

Такое же ур-ие может быть составлено и для случая правого заделанного конца. Ур-ия эти совместно с ур-ями (140) послужат для определения опорных моментов в плоскостях заделки.



Черт. 226.

Ур-ия, связывающие три последовательные опорные моменты, легко распространить на тот случай, когда опоры расположены не на одной высоте. Пусть β_n и β_{n+1} — углы наклона линий, соединяющих опорные точки в n -ом и $n+1$ -ом пролетах (черт. 226); тогда углы, образуемые

концевыми касательными с горизонтом, будут зависеть не только от нагружения пролета и опорных моментов, но также и от величин $\beta_n, \beta_{n+1}, \dots$. Ф-ла для θ_2 — угла, составляемого касательной в точке A_{n+1} с горизонтом, напишется так:

$$\theta_2 = \frac{1}{EJ} + \left(\frac{M_n l_n}{3} + \frac{M_{n+1} l_n}{6} + \frac{\Omega_n a_n}{l_n} \right) - \beta_n.$$

Точно таким же образом для левого конца $n+1$ -го пролета получим:

$$\theta_1' = \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_n l_{n+1}}{3} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) + \beta_{n+1}.$$

Полагая $\theta_2 = -\theta_1'$, придем к ур-ию:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} + 6EJ(\beta_n - \beta_{n+1}) \quad (141).$$

Величина опорных моментов зависит от расположения опор. Влияние понижения опоры тем большее, чем больше жесткость балки EJ .

¹⁾ По поводу упрощений при решении этой системы ур-ий см. P. M. Frandsen, Eisenbau, 1913 г., 440 стр.

Мы здесь предполагали, что расположения опор, а, следовательно, и углы β_n, β_{n+1} нам заданы, но выводы легко распространяются и на тот случай, когда разность высот опор обусловлена их упругой осадкой под действием соответствующих опорных давлений. Предположим, что степень жесткости всех опор одинакова и такова, что оседание опоры на единицу длины происходит под действием давления D . В таком случае осадка n -ой опоры, под действием приходящегося на нее давления (ф-ла 139), представится так:

$$h_n = \frac{A_n}{D} = \frac{1}{D} \left(A_{n+1} + B_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \right) \quad (a).$$

Подобные выражения мы можем составить для всех опор, и если первоначально опоры располагались на одной высоте, то будем иметь для углов β , входящих в ур-ие (141), такие выражения:

$$\beta_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{l_n}; \quad \beta_{n+1} = \frac{h_{n+1} - h_n}{l_{n+1}}.$$

Вставляя эти значения углов в ур-ие (141) и заменяя в них осадки опор h соответствующими выражениями (а), придем к ур-ям для неразрезной балки, лежащей на упругих опорах. Легко видеть, что ур-ия эти будут связывать между собой уже не 3, а 5 последовательных опорных моментов ¹⁾.

§ 90. Частные случаи нагрузки балки.

Пользуясь теоремой о трех моментах, мы сводим расчет многопролетной балки к решению системы линейных ур-ий. Решение задачи можно еще упростить, если иметь заранее вычисленные выражения $\frac{\Omega_n a_n}{l_n}$ и $\frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$ для наиболее часто встречающихся случаев нагрузки ²⁾. Сделаем эти вычисления в простейших случаях.

1. Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой q кг/м. В таком случае моментные площади $\Omega_n, \Omega_{n+1}, \dots$ будут площадями парабол. Вершины этих парабол и центры тяжести площадей Ω будут лежать над серединами соответствующих пролетов. Величина площади Ω_n определится ф-лой:

$$\Omega_n = \frac{2}{3} q \frac{l_n^2}{8} l_n$$

и ур-ие (140) примет вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{q}{4}(l_n^3 + l_{n+1}^3) \quad (142).$$

В случае двух равных пролетов и открытых концов

$$M_0 = M_2 = 0.$$

Момент над средней опорой, на основании ур-ия (142), будет:

$$M = -\frac{ql^2}{8}.$$

¹⁾ Приложения этих ур-ий к расчету неразрезных продольных мостовых балок и к расчету pontonных мостов в книге Мюллер-Бреслау; см. русский пер., т. II, ч. 2.

²⁾ Для нагрузок, меняющихся по закону треугольника, трапеции и параболы, соответствующие ф-лы даны в Beton u. Eisen, 1915 г., стр. 209.

Результат этот уже раньше был нами получен иным путем (ф-ла 131). В случае трех равных пролетов:

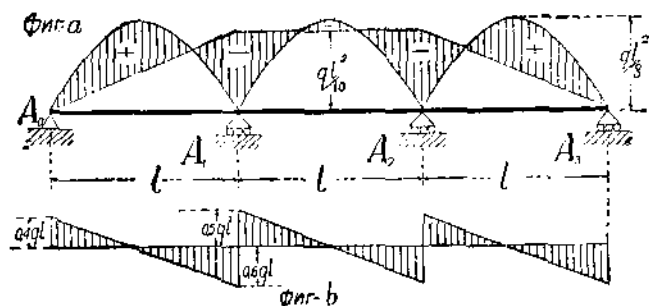
$$M_0 = M_3 = 0; \quad M_1 = M_2 = M.$$

Величину M найдем из ур-я:

$$2M \cdot 2l + Ml = -\frac{q}{4} 2l^3, \quad \text{откуда } M = -\frac{ql^2}{10}.$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на черт. 227. Пользуясь ф-лой (139), сейчас же найдем и величины опорных реакций:

$$A_1 = A_2 = ql - \frac{ql}{10} = \frac{9}{10} ql; \quad A_0 = A_3 = \left(3ql - 2 \frac{11}{10} ql \right) = 0,4ql.$$



Черт. 227.

Для построения линии суммы сил пользуемся ф-лой (137); получим закон, представленный на фиг. б. Если число опор велико, пролеты одинаковы и нагрузка постоянна по всей длине балки, то для промежуточных опор, удаленных от концов, опорные моменты можно считать одинаковыми, т.е. положить:

$$M_{n-1} = M_n = M_{n+1} = M,$$

тогда из ур-я (142) получим:

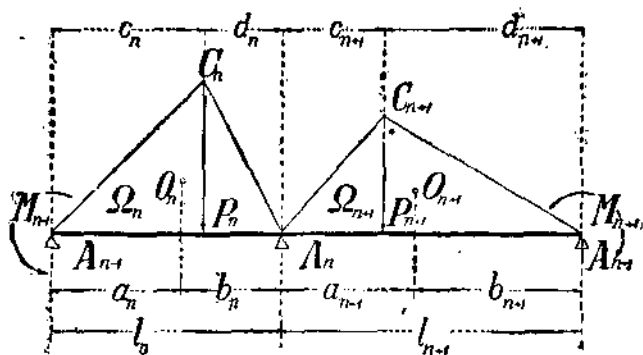
$$6Ml = -\frac{ql^3}{2}; \quad M = -\frac{ql^2}{12}.$$

Опорные моменты имеют ту же величину, что и для балки с заделанными концами. (Это объясняется тем, что предположение равенства опорных моментов равносильно допущению, что касательная к упругой линии на опоре горизонтальна, и, следовательно, опорные сечения при изгибе не поворачиваются.) Для случая равномерно распределенной нагрузки имеются таблицы значений моментов и опорных реакций ¹⁾. Пользуясь ими, можно без затруднения производить расчеты многопролетных балок.

¹⁾ См. Hütte ч. I, стр. 623, (10 изд 1921 г.).

Более подробные таблицы имеются в книге A. Cart et L. Portes, Calcul des ponts métalliques par la méthode des lignes d'influence.

II. Если в n -ом и $n+1$ -ом пролетах имеются сосредоточенные силы P_n и P_{n+1} , то в этом случае моментные площади Ω_n и Ω_{n+1} имеют вид треугольников $A_{n-1}C_nA_n$ и $A_nC_{n+1}A_{n+1}$ (черт. 228).



Черт. 228.

Ординаты, соответствующие вершинам этих треугольников, будут:

$$\frac{P_n c_n d_n}{l_n} \text{ и } \frac{P_{n+1} c_{n+1} d_{n+1}}{l_{n+1}},$$

и, следовательно, площади определяются ф-ми:

$$\Omega_n = \frac{1}{2} P_n c_n d_n; \quad \Omega_{n+1} = \frac{1}{2} P_{n+1} c_{n+1} d_{n+1}.$$

Положения центров тяжести O_n и O_{n+1} этих площадей определятся координатами:

$$a_n = \frac{1}{3} (l_n + c_n); \quad b_{n+1} = \frac{1}{3} (l_{n+1} + d_{n+1}).$$

Ур-ие (140) представится в форме:

$$\begin{aligned} & M_{n-1} l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = \\ & = - \frac{P_n c_n d_n (l_n + c_n)}{l_n} - \frac{P_{n+1} c_{n+1} d_{n+1} (l_{n+1} + d_{n+1})}{l_{n+1}} \end{aligned} \quad (143).$$

§ 91. Теорема о двух моментах ¹⁾.

Пользуясь теоремой о трех моментах, мы сводим расчет неразрезной балки к решению системы линейных ур-ий. Решение это является удобоисполнимым лишь в случае небольшого числа промежуточных опор. С возрастанием числа опор, а, следовательно, и числа ур-ий, трудности практического выполнения расчета быстро возрастают, и приходится искать приемы, упрощающие задачу. Наиболее быстро ведет к цели способ, основанный на так называемой теореме о двух моментах. Способ этот исключает необходимость решения системы

¹⁾ Теорема эта установлена Maurice'ом L é v y, см. La statique graphique, II partie, Paris, 1866 г.

ур-ий. При его применении всегда придется иметь дело лишь с решением отдельных ур-ий с одной неизвестной. Обратимся к эпюре изгибающих моментов для неразрезной балки (черт. 225). Момент в любом сечении какого-либо пролета может быть найден, если известны изгибающие моменты в двух каких-либо точках этого пролета. В самом деле, моментная площадь Ω может быть нанесена на чертеже по известной нагрузке, расположенной на пролете. Из ординат площади Ω придется вычитать ординаты, соответствующие опорным моментам. Это вычитание на чертеже приводится к проведению некоторой прямой, для чего нужно знать положение двух точек этой прямой. Знание полного изгибающего момента в двух сечениях рассматриваемого пролета дает возможность найти две такие точки и построить искомую прямую. На черт. 225 это построение исполнено для n -го пролета в предположении, что известны изгибающие моменты в сечениях, соответствующих точкам C_n и H_n . По известной нагрузке построена кривая $A_{n-1}''C_nA_n''$. От точек C_n и H_n отложены по ординатам отрезки C_nC_n' и H_nH_n' , равные заданным моментам. Прямая DF , проходящая через полученные точки C_n' и H_n' , определит закон изменения изгибающего момента по длине пролета. Исполнив это построение для n -го пролета, мы можем продолжить его на соседний $(n+1)$ -й пролет, если для него известен изгибающий момент лишь в одном каком-либо сечении; другим известным моментом явится опорный момент M_n , общий для n -го и $(n+1)$ -го пролета. Переходя таким образом от пролета к пролету, мы можем исследовать изменение изгибающего момента по всей длине балки. Для построения нужно знать изгибающие моменты в двух сечениях одного какого-либо пролета и в одном сечении каждого из остальных пролетов. Для определения этих величин и служит теорема о двух моментах, устанавливающая связь между изгибающими моментами в соответствующих сечениях двух последовательных пролетов. Найдем зависимость между M_x и M_{x_1} для сечения m и m_1 n -го и $(n+1)$ -го пролетов (черт. 225). На основании ф-лы (136) можем написать:

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l}; \quad M_{x_1} = M_{x_1}^0 + M_n \frac{l_{n+1} - x_1}{l_{n+1}} + M_{n+1} \frac{x_1}{l_{n+1}}.$$

Определяя отсюда опорные моменты M_{n-1} и M_{n+1} и вставляя их значения в ур-ие трех моментов:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

получим:

$$\frac{(M_x - M_x^0)l_n^2}{l_n - x} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0)l_{n+1}^2}{x_1} + M_n \left[2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x l_n}{l_n - x} - \frac{(l_{n+1} - x_1)l_{n+1}}{x_1} \right] = -\frac{6 \Omega_n a_n}{l_n} - \frac{6 \Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

В полученное ур-ие, кроме моментов M_x и M_{x_1} , входит еще опорный момент M_n . Его можно исключить, выбрав величины x и x_1 так, чтобы

коэффициент при M_n обращался в нуль, т.е., чтобы было удовлетворено ур-ие:

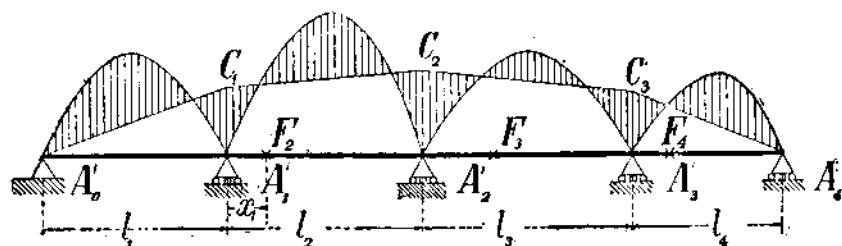
$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x l_n}{l_n - x} - \frac{(l_{n+1} - x) l_{n+1}}{x_1} = 0 \quad (144),$$

тогда получается такая зависимость между M_x и M_{x_1} :

$$\frac{(M_x - M_x^0) l_n^2}{l_n - x} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0) l_{n+1}^2}{x_1} = -\frac{6\Omega_n \alpha_n}{l_n} - \frac{6\Omega_{n+1} \beta_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (145).$$

Это и есть ур-ие двух моментов. В него вовсе не входят опорные моменты; моменты M_x^0 и $M_{x_1}^0$ являются величинами известными, они определяются как для балки, опертой по концам. Положение сечений, к которым относятся моменты M_x и M_{x_1} , определяются величинами x и x_1 . Эти величины связаны ур-ием (144). Задаваясь положением сечения в каком-либо пролете, мы из ур-ия (144) находим положение „соответствующего“ сечения в смежном пролете.

В случае неразрезной балки с опертими концами, мы имеем два сечения, где изгибающий момент известен: это крайние опоры, где опорные моменты



Черт. 229.

обращаются в нуль. Мы начнем с левой опоры A'_0 (черт. 229). Соответствующее сечение во втором пролете найдется при помощи ур-ия (144). Полагая в нем $x=0$, найдем:

$$2(l_1 + l_2) - \frac{l_2(l_2 - x_1)}{x_1} = 0,$$

следовательно, точка F_2 , соответствующая A'_0 , делит второй пролет в отношении:

$$\frac{l_2 - x_1}{x_1} = k_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} \quad (146).$$

Вставляя найденное таким образом значение x_1 в ур-ие (145) и полагая в нем $x=0$ и $M_x=0$, определим величину M_{x_1} момента в сечении F_2 . От сечения F_2 переходим к соответствующему сечению F_3 в третьем пролете. Положение сечения опять определим при помощи ур-ия (144). Принимая во внимание, что для второго пролета отношение $(l_n - x):x$ обозначено через k_2 , и обозначая через k_3 отношение отрезков, на которые подразделяет точка F_3 третий пролет, мы можем переписать ур-ие (144) в таком виде:

$$2(l_2 + l_3) - \frac{l_3}{k_2} - k_3 l_3 = 0, \quad \text{откуда } k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right) \quad (147).$$

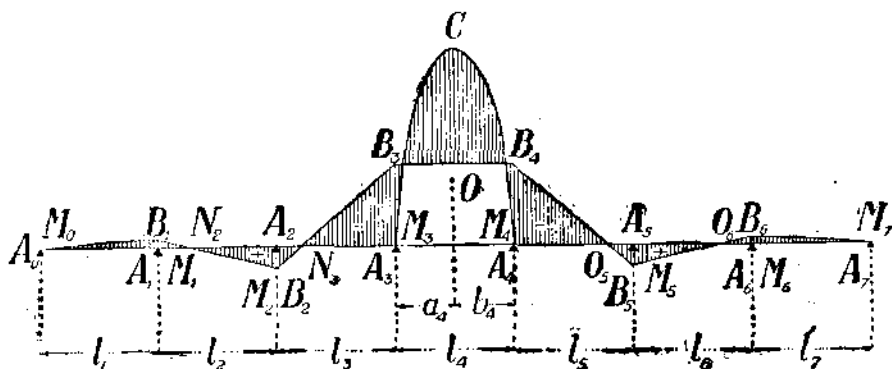
Определив таким образом положение F_3 и вставив в ур-ие (145) вместо M_x величину момента в F_2 , найдем момент в сечении F_3 . Пользуясь тем же приемом дальше, мы найдем моменты в сечениях $F_4, F_5, \dots$. При переходе от сечения F_n к F_{n+1} мы определим положение F_{n+1} отношением k_{n+1} . Величина k_{n+1} связана с k_n ур-ием (144), которое может быть переписано в таком виде:

$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{l_n}{k_n} - l_{n+1}k_{n+1} = 0, \text{ откуда: } k_{n+1} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right) \quad (148).$$

Нахождение изгибающего момента в каждом новом пролете требует решения двух ур-ий, из которых каждое заключает только по одной неизвестной. Таким путем мы избегаем решения сложной системы ур-ий, к которой зачастую приводит пользование ур-ием трех моментов. Найдя изгибающие моменты в $F_2, F_3, F_4, \dots$ и приняв во внимание, что по концам балки моменты нули, мы будем иметь величины моментов в двух сечениях правого пролета (сечения A_4' и F_4 на черт. 229) и в одном сечении каждого из остальных пролетов. Этого, как было показано, достаточно для проведения ломаной линии $A_0'C_1C_2C_3A_4'$, а, следовательно, и для построения эпюры изгибающих моментов неразрезной балки.

§ 92. Влияние загрузки одного пролета.

Если на каком-либо пролете не имеется нагрузки, то соответствующая моментная площадь Ω обращается в нуль, и эпюра изгибающих моментов для этого пролета представится прямой линией. Возьмем случай балки, перекрывающей 7 пролетов, и предпо-



Черт. 230.

ложим, что нагрузка имеется на IV, среднем пролете (черт. 230). Концы балки предполагаем опертными, и потому опорные моменты

$$M_0 = M_7 = 0.$$

Для определения остальных опорных моментов будем применять ур-ие (140) к каждой паре смежных пролетов, начиная от левой опоры A_0 . Для первых двух пролетов получим

$$2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = 0, \text{ или } \frac{M_2}{M_1} = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -k_2.$$

Следовательно, опорные моменты M_2 и M_1 имеют противоположные знаки. Эпюра моментов для II пролета представится наклонной прямой B_1B_2 , пересекающей ось балки в точке N_2 . Положение точки N_2 вполне определяется соотношением соответствующих опорных моментов и не зависит совершенно от того, как будет нагружен какой-либо из пролетов, лежащих правее рассматриваемых. Для любой нагрузки правых пролетов изгибающий момент в N_2 равен нулю, и мы будем иметь там точку перегиба. Заметим, что полученная точка N_2 совпадает с точкой F_2 , найденной нами при применении теоремы о двух моментах. Чтобы убедиться в этом, нужно только соотношение $\frac{M_2}{M_1}$ сравнить с ф-лой (146). Рассмотрим теперь пролеты II и III. Для них ур-е (140) представится в такой форме:

$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_1 + l_3) + M_3 l_3 = 0.$$

Откуда, принимая во внимание найденное отношение $M_2 : M_1$, получим:

$$\frac{M_3}{M_2} = -\frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} + \frac{l_2}{l_3} \frac{l_2}{2(l_1 + l_2)} = -k_3 \text{ и } k_3 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right).$$

Так как $-k_2$, очевидно, величина отрицательная, то M_3 и M_2 — разных знаков. Эпюра моментов для III пролета представится наклонной прямой B_3B_4 . Точка N_3 есть точка перегиба для III пролета при любой нагрузке всех справа лежащих пролетов. Положение ее вполне определяется величиной k_3 ; оно совпадает с ранее найденной точкой F_3 (ф-ла 147). Таким же путем мы найдем постоянные точки $N_4, N_5, \dots$, являющиеся точками перегиба при расположении нагрузки правее рассматриваемого пролета. Величины $k_2, k_3, k_4, \dots$ не зависят от вида нагрузки и вполне определяются соотношением между длинами пролетов балки. Значение какого-либо k_{n+1} выражается через k_n при посредстве общей ф-лы (148). Для случая равных пролетов легко найдем, что:

$$k_2 = 4; \quad k_3 = 3,75; \quad k_4 = k_5 = \dots 3,73.$$

Если бы мы пошли от правого конца балки, то совершенно тем же способом нашли бы постоянные точки $O_6, O_5, O_4, \dots$, являющиеся точками перегиба при загрузении балки слева от рассматриваемого пролета. Вводя для этого случая обозначение:

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} =: k_n',$$

мы для определения k_n' получим общее ур-е:

$$k_n' = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k_{n+1}}\right) \quad (148').$$

Определив положение постоянных точек $N_2, N_3, \dots, O_6, O_5, \dots$, мы можем легко построить эпюру изгибающих моментов, если известны опорные моменты M_3 и M_4 , соответствующие загруженному пролету. Для этого придется через постоянные точки провести ломаные линии $B_3B_2B_1A_0$ и $B_4B_5B_6A_7$. Чтобы найти M_3 и M_4 , составим ур-я трех моментов, рассматривая сначала III и IV пролеты, а потом IV и V пролеты. Ур-я эти напишутся так:

$$M_3 l_3 + 2 M_2 (l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6 \frac{\Omega_4 b_4}{l_4},$$

$$M_2 l_4 + 2 M_1 (l_4 + l_5) + M_5 l_5 = -6 \frac{\Omega_5 a_5}{l_5}.$$

Их легко привести к такому виду:

$$M_4 l_4 + M_3 l_4 \left[2 + \frac{l_3}{l_4} \left(2 + \frac{M_2}{M_3} \right) \right] = -6 \frac{\Omega_4 b_4}{l_4},$$

$$M_3 l_4 + M_1 l_4 \left[2 + \frac{l_5}{l_4} \left(2 + \frac{M_5}{M_4} \right) \right] = -6 \frac{\Omega_4 a_4}{l_4}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{k_3} \text{ и } \frac{M_5}{M_4} = -\frac{1}{k_5},$$

и пользуясь ф-ми (148) и (148'), мы можем представить ур-ия эти в более простом виде:

$$M_4 l_4 + M_3 l_4 k_4 = -\frac{6 \Omega_4 b_4}{l_4}, \quad M_3 l_4 + M_1 l_4 k_4' = -\frac{6 \Omega_4 a_4}{l_4},$$

откуда:

$$M_3 = -\frac{6 \Omega_4 (b_4 k_4' - a_4)}{l_4^2 (1 - k_4 k_4')}, \quad M_4 = -\frac{6 \Omega_4 (a_4 k_4 - b_4)}{l_4^2 (1 - k_4 k_4')}.$$

В самом общем виде, при загрузении n -го пролета, будем иметь для соответствующих опорных моментов выражения:

$$M_{n-1} = -\frac{6 \Omega_n (b_n k_{n-1}' - a_n)}{l_n^2 (1 - k_n k_{n-1}')}, \quad M_n = -\frac{6 \Omega_n (a_n k_n - b_n)}{l_n^2 (1 - k_n k_{n-1}')} \quad (149).$$

Таким образом, расчет неразрезной балки при загрузении одного пролета сводится к определению постоянных $k_2, k_3, \dots, k_2', k_3', \dots$ на основании ф-л (148) и (148') и к вычислению M_{n-1} и M_n по ф-лам (149). Величины $k_2, k_3, \dots, k_2', k_3', \dots$ всегда больше двух, поэтому опорные моменты быстро убывают с удалением от загруженного пролета.

Положим, например, что все пролеты балки, представленной на черт. 230, одинаковы, и на среднем пролете расположена равномерная нагрузка q кг/м, тогда:

$$k_2 = 4; \quad k_3 = 3,75; \quad k_4 = 3,73; \quad k_5 = 4; \quad k_5' = 3,75; \quad k_4' = 3,73.$$

$$\frac{6 \Omega_4 b_4}{l_4} = \frac{1}{4} q l^2.$$

На основании ф-л (149) получим:

$$M_3 = M_4 = -\frac{1}{18,9} q l^2; \quad \text{далее:} \quad M_2 = M_5 = -\frac{1}{3,75} M_3; \quad M_1 = M_6 = +\frac{1}{4 \cdot 3,75} M_3.$$

Такое быстрое убывание опорных моментов дает возможность при расчете многопролетных балок совершенно не принимать во внимание удаленных пролетов. Если бы в выше-рассмотренном примере мы взяли только пролеты, непосредственно прилежащие к загруженному IV пролету, то получили бы

$$M_2 = M_5 = 0 \text{ и } M_3 = M_4 = -\frac{1}{20} q l^2.$$

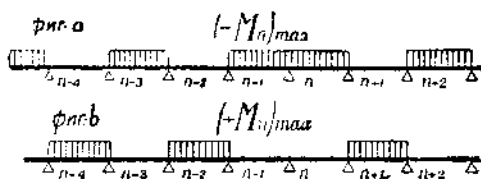
Значения M_3 и M_4 отличаются лишь на 5% от того, что было найдено выше. Если отбросить только первый и последний пролеты и рассматривать пятипролетную балку, то найдем:

$$M_3 = M_4 = -\frac{1}{19} q l^2.$$

Величина эта отличается от действительной, примерно, на 1/2%.

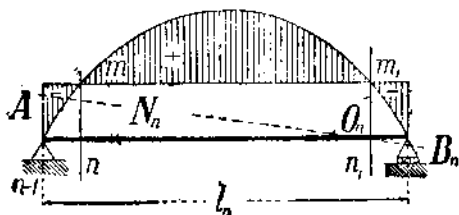
§ 93. Невыгоднейшее нагружение балки.

Если на неразрезную балку, кроме постоянных сил, действует еще подвижная нагрузка, то при расчете является задача о выборе наиболее невыгодного расположения нагрузки. В расчетах мостовых балок часто заменяют подвижные грузы эквивалентной сплошной нагрузкой, равномерно распределенной на отдельных пролетах балки. Выбор тех пролетов, которые в каждом частном случае должны быть загружены, легко произвести, если иметь в виду результаты предыдущего параграфа относительно влияния загрузки одного пролета. Начнем с рассмотрения того расположения нагрузки, которому соответствует наибольшее значение изгибающего момента. Пусть сечение совпадает с опорой n . Для получения наибольшего отрицательного значения M_n нужно загрузить n -ый и $(n+1)$ -ый пролеты, дальнейшие пролеты должны быть загружены через один, как то показано на фиг. а черт. 231. Такой способ нагружения станет ясным, если примем во внимание, что от загрузки какого-либо пролета на концах его получаются отрицательные опорные моменты, знаки же дальнейших опорных моментов чередуются. Для получения наибольшего положительного значения для M_n нужно нагрузку расположить так, как показано на фиг. б. Рассмотрим теперь различные сечения на протяжении n -го пролета балки. Черт. 232 представляет эпюру изгибающих моментов, соответствующую загрузке этого пролета (остальные пролеты свободны от нагрузки). Мы будем различать три участка.

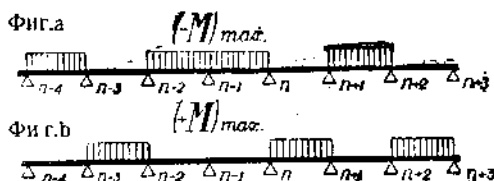


Черт. 231.

Если рассматриваемое сечение лежит между опорой $n-1$ и сечением m (черт. 232) то нагрузка, покрывающая n -ый пролет, вызывает в нем отрицательный изгибающий



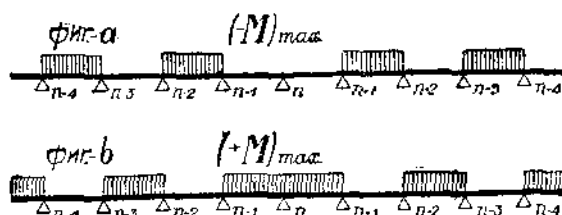
Черт. 232.



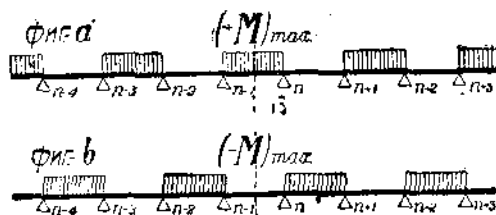
Черт. 233.

момент. Того же знака момент получается в сечении также от загрузки всех тех пролетов, которым соответствует отрицательный опорный момент M_{n-1} . Для получения наибольшего отрицательного значения в рассматриваемом сечении придется расположить нагрузку, как показано на фиг. а черт. 233. Наибольшему положительному моменту соответствует расположение нагрузки, представленное на фиг. б. Рассмотрим теперь сечение, расположенное между постоянной точкой N_n (см § 92) и сечением m . Нагрузка, расположенная на n -ом пролете, вызовет в таком сечении положительный изгибающий момент. Для получения наибольшего отрицательного момента придется не загружать вовсе n -ый пролет. Что касается других пролетов, то придется загрузить те из них, которым соответствует отрицательный опорный момент M_{n-1} . Распределение нагрузки представлено на фиг. а черт. 234. На фиг. б представлено распределение нагрузок, соответствующее наибольшему положительному изгибающему моменту в том же

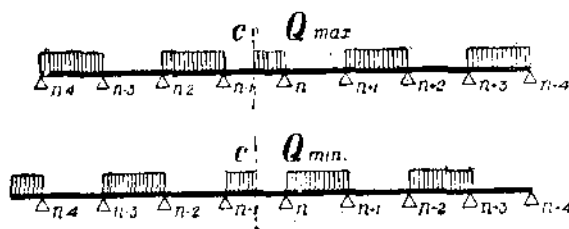
сечении. Возьмем теперь сечение между постоянными точками N_n и O_n . Нагрузка n -го пролета вызывает в таком сечении положительный изгибающий момент. Чтобы получить



Черт. 234.



Черт. 235.



Черт. 236.

максимальное значение этого момента, придется кроме n -го пролета загрузить слева все те пролеты, которым соответствует положительное значение опорного момента M_{n-1} . Справа нужно загрузить те пролеты, которым соответствует положительное значение M_n . Расположение нагрузок представлено на фиг. а черт. 235. Для получения наибольшего отрицательного значения изгибающего момента придется нагрузки распределить согласно фиг. б.

Иследуем теперь вопрос о расположении нагрузок для получения наибольшего положительного и наибольшего отрицательного значения перерезывающей силы Q в каком либо сечении s n -го пролета. На основании ф-лы (137) заключаем, что на n -ом пролете приходится нагрузку располагать так, как это делается в случае балки на двух опорах. Что касается остальных пролетов, то для получения Q_{max} нужно загрузить те из них, которым соответствуют положительные значения M_n и отрица-

§ 94. Линии влияния для неразрезных балок.

Замена подвижных грузов эквивалентной сплошной нагрузкой значительно упрощает расчет неразрезных балок, но, пользуясь этим методом, иногда можно получить значительные погрешности в максимальных значениях определяемых величин. Чтобы точнее получить действие отдельных подвижных грузов, приходится пользоваться "линиями влияния". В качестве примера рассмотрим построение этих линий для простейшего случая, для балки на трех опорах с равными пролетами (черт. 237).

Начнем с линии влияния для опорного момента M_1 , соответствующего опоре A_1 . Располагая груз единицу в левом пролете и применяя общую ф-лу (143), найдем:

$$M_1 = - \frac{1 \cdot x(l-x^2)}{4l^2} \quad (150).$$

Откладывая по ординатам для каждого значения x соответствующее значение M_1 , получим линию влияния для M_1 на протяжении левого пролета. Для правого пролета получим такую же кривую, симметрично расположенную относительно A_1 (черт. 237). Так как M_1 отрицателен, то ординаты линий влияния отложим вниз.

Приравняв производную $\frac{dM_1}{dx}$ нулю,

найдем, что наибольшая ордината соответствует $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Построим теперь линию влияния для изгибающего момента в каком-либо сечении первого пролета в расстоянии a от левой опоры. На основании ф-лы (136) будем иметь:

$$M_a = M_a^0 + M_1 \frac{a}{l}.$$

Линия влияния для первого пролета будет иметь две ветви. Пока груз находится слева от рассматриваемого сечения ($x < a$).

$$M_a^0 = \frac{1 \cdot (l-x)a}{l} - 1 \cdot (a-x) = \frac{l-x(l-a)}{l}.$$

С переходом груза на правую половину пролета, получаем:

$$M_a^0 = \frac{1 \cdot (l-x)a}{l}.$$

Соответственно этому уравнению линии влияния в левой половине первого пролета будет:

$$M_a = \frac{1 \cdot x(l-a)}{l} - \frac{1 \cdot x(l^2-x^2)}{4l^2} \frac{a}{l} = x \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{l} \right) + \frac{x^3}{4l^2} \frac{a}{l}.$$

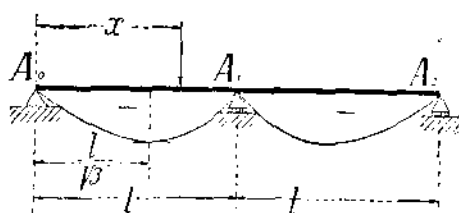
Для правой половины пролета получим:

$$M_a = \frac{1 \cdot (l-x)a}{l} - \frac{1 \cdot x(l^2-x^2)}{4l^2} \frac{a}{l} = \frac{a}{l} \left(l - \frac{5}{4}x + \frac{x^3}{4l^2} \right).$$

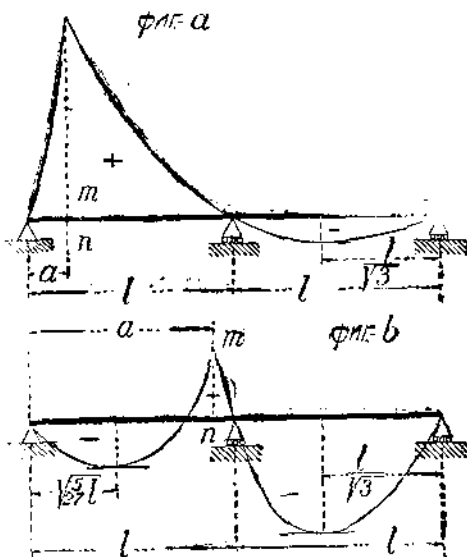
На фиг. а и фиг. б (черт. 238) представлены линии влияния для двух положений сечения. В первом случае $a < \frac{4}{5}l$, линия влияния не пересекает ось X -ов; все ординаты в левом пролете положительны. Во втором случае линия влияния пересекает ось X -ов. Положение точки пересечения найдется из ур-ня:

$$M_a = x \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{l} \right) + \frac{x^3}{4l^2} \frac{a}{l} = 0.$$

Имея такие линии влияния, нетрудно выбрать то положение нагрузки в первом пролете, которому соответствует $M_{\max}$ в данном сечении. При расположении



Черт. 237.



Черт. 238.

груза в правом пролете изгибающий момент в рассматриваемом сечении левого пролета будет иметь значение:

$$M_a = M_1 \frac{a}{l},$$

следовательно, линия влияния во втором пролете будет такого же вида как для опорного момента M_1 , придется только все ординаты уменьшить в отношении $\frac{a}{l}$.

Построим теперь линию влияния для левой опорной реакции A_0' . Величина этой реакции будет:

$$A_0' = A_0 + \frac{M_1}{l},$$

где A_0 опорная реакция, вычисленная как для простой балки на двух опорах. Пока груз единица расположен в левом пролете в расстоянии x от левой опоры, будем иметь:

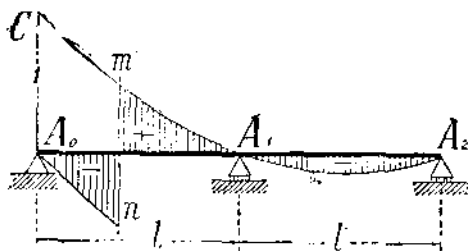
$$A_0' = \frac{1 \cdot (l-x)}{l} - \frac{1 \cdot x(l-x)^2}{4l^3}.$$

Соответствующая кривая A_1C нанесена на черт. 239. С переходом груза на правый пролет получаем:

$$A_0' = \frac{M_1}{l}.$$

Линия влияния будет такого же вида, как для M_1 . Для построения ее нужно только ординаты линии влияния для M_1 , измеренные в масштабе моментов, разделить на длину l .

Пользуясь линией влияния для реакции A_0' , легко построить линию влияния для поперечной силы в каком-либо сечении mn . Пока груз единица находится справа от сечения mn , поперечная сила равна опорной реакции A_0' . С переходом груза на левую сторону от сечения mn , для получения поперечной силы придется из левой опорной реакции вычитать единицу. На черт. 239 изменение поперечной силы в сечении mn представлено заштрихованной площадью.



Черт. 239.

В случае многопролетных балок расчет приходится начинать с вычисления величин k и k' , определяющих постоянные точки N и O . Далее, разделяем каждый пролет балки на несколько равных частей и помещаем груз единицы поочередно в каждом делении. Установив груз, вычисляем ближайшие опорные моменты по ф-лам (149). Остальные опорные моменты вычисляются при помощи величин k и k' . Изгибающий момент и поперечная сила в каждом сечении могут быть теперь определены при помощи ф-л (136) и (137). Когда все эти вычисления проделаны для определенного положения груза, мы перемещаем груз в следующее сечение и повторяем расчет. Выполнив вычисления для всех намеченных сечений балки, мы будем иметь достаточно данных для построения линий влияния. При расчетах можно работу сильно упростить, если пользоваться готовыми таблицами¹⁾, дающими значения ординат линий влияния в различных сечениях балки.

¹⁾ Для балок на 3-х и 4-х опорах с равными пролетами имеются подробные таблицы, составленные Lederer'ом, *Analytische Ermittlung und Anwendung v. Einflusslinien*.

Многочисленные таблицы для балок на большом числе опор имеются в ранее цитированной книжке A. Cart et L. Portes и в статье Dupuy et Guenot, *Andages des ponts et chaussées*, 1887 г., 3-me trimestre.

§ 95. Неразрезные балки переменного сечения.

Во всех наших выводах мы предполагали до сих пор, что жесткость балки EJ постоянна по длине. На практике сплошь и рядом приходится иметь дело с балками переменного сечения. Для упрощения расчетов обыкновенно предполагают и в этих случаях EJ постоянным. Происходящие от этого погрешности, как можно заключить на основании подробных расчетов, сделанных для нескольких частных случаев ¹⁾, вообще говоря, не велики. Если желательно получить большую точность, то приходится перейти к расчету неразрезной балки переменного сечения. Общий ход расчета такой. По заданным нагрузкам и длинам пролетов вычисляем опорные моменты и опорные реакции, как для балки постоянного сечения. По этим величинам подбираем размеры поперечных сечений. Для получившейся таким образом балки переменного сечения, очевидно, опорные моменты будут не те, что нами были приняты, и потому придется повторить расчет, принимая во внимание выбранные размеры. На полученных вторичным расчетом опорных моментах можно остановиться и подобрать по ним окончательные размеры поперечных сечений. Дальнейшего повторения расчетов делать не приходится, так как последующие подсчеты вносят весьма малые изменения в результаты второго расчета. При вторичном расчете приходится, как мы видим, определять опорные моменты и опорные реакции для балки переменного сечения. Это можно сделать, или выбирая за „лишние неизвестные“ опорные реакции, как это мы сделали в случае двухпролетной балки (§ 87), или пользуясь теоремой о трех моментах, которая должна быть обобщена на случай балки переменного сечения. Как и в случае балки постоянного сечения, мы найдем зависимость между тремя последовательными опорными моментами, если примем во внимание, что два смежных пролета на промежуточной опоре имеют общую касательную. Если θ_2 — угол поворота правого конца n -го пролета и θ_1' — угол поворота левого конца $(n+1)$ -го пролета, то уравнение трех моментов напишется так:

$$\theta_2 = -\theta_1' \quad (a).$$

Углы θ_2 и θ_1' проще всего получить графоаналитически, определяя их как опорные реакции от фиктивной сплошной нагрузки, меняющейся по закону $\frac{M}{EJ}$. Вставляя вместо M его значение, найдем для n -го пролета:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{M_n^0}{EJ} + \frac{M_{n-1}(l_n - x)}{EJl_n} + \frac{M_n x}{EJl_n}.$$

Для $(n+1)$ -го пролета получим:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{M_{n+1}^0}{EJ} + \frac{M_n(l_{n+1} - x)}{EJl_{n+1}} + \frac{M_{n+1} x}{EJl_{n+1}}.$$

¹⁾ См. Koechlin. Applications de la statique graphique, 1889 г., стр. 343.

Давление на промежуточную опору A_n от фиктивной нагрузки левого пролета будет:

$$\theta_2 = \frac{1}{l_n} \left[\int_0^{l_n} \frac{M_{n-1}^0 x dx}{EJ} + \frac{M_{n-1}}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{(l_n - x) x dx}{EJ} + \frac{M_n}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{x^2 dx}{EJ} \right].$$

Давление на ту же опору от фиктивной нагрузки первого пролета равно:

$$\theta_1' = \frac{1}{l_{n+1}} \left[\int_0^{l_{n+1}} \frac{M_{n+1}^0 (l_{n+1} - x) dx}{EJ} + \frac{M_n}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{(l_{n+1} - x)^2 dx}{EJ} + \right. \\ \left. + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} \frac{x (l_{n+1} - x) dx}{EJ} \right].$$

И в первом и во втором случае x отсчитывается от левого конца соответствующего пролета. Выполняя интегрирование и вставляя результаты в ур-ие (а), получим искомую связь между тремя последовательными опорными моментами ¹⁾.

§ 96. Изгиб балок, лежащих на упругом основании.

В целом ряде технических задач приходится иметь дело с изгибом балок, лежащих по всей своей длине на упругом основании ²⁾. В таких, примерно, условиях будут железнодорожные шпалы (баластный слой способен претерпевать почти вполне упругие деформации), прогоны, лежащие на упругих настилах или на системе поперечных балок и т. д. Чтобы получить в каждом из этих случаев определенное решение, необходимо точно знать упругие свойства основания: нужно установить зависимость между давлениями и соответствующими им оседаниями упругого основания. Мы будем допускать, что понижение основания в какой-либо точке пропорционально давлению, которое в этой точке имеет место. Такое допущение является простейшим и, повидимому, дает удовлетворительные результаты ³⁾. Будем предполагать также, что изгибаемый стержень прикреплен к основанию, и поэтому между стержнем и основанием возможно

¹⁾ Расчету неразрезных балок переменного сечения посвящена книга Suter, Berlin, 1916 г.

²⁾ Изгиб балок на упругом основании впервые был разработан Winkler'ом в его книге: *Lehre v. der Elastizität und Festigkeit*, Praga, 1867 г.

См. также Мюллер-Бреслау, *Графическая статика*, т. II, ч. 2-я, стр. 229.

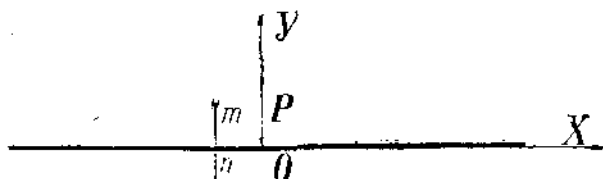
См. наш Курс теории упругости, ч. II, стр. 4, изд. 1916 г.

Ряд задач, относящихся к расчету верхнего строения железнодорожного пути, имеется в книге Zimmermann'a: *Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues*, 1888 г. Изложение результатов Zimmermann'a на русском языке имеется в книжке Толстого, Циммермановский метод, Москва, 1905 г.

³⁾ Föppl, *Mitteilungen aus dem Mech.-tech. Laboratorium, München*, Heft 27, 1900 г.

появление не только сжимающих, но и растягивающих усилий. Начнем с такой задачи. Очень длинный стержень изгибается сосредоточенной силой P , приложенной посередине (черт.

240). Расположим начало координат в месте приложения силы. Ось X -ов направим вправо по оси стержня, ось Y -ов — вертикально вверх. Под действием силы P стержень



Черт. 240.

изогнется так, что у точки O упругая линия выпуклостью будет обращена в сторону отрицательных Y -ов. Ур-ие изогнутой оси стержня будет:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M.$$

Возьмем поперечное сечение mn , и пусть p будет приходящееся на единицу длины давление, передаваемое в этом месте от стержня упругому основанию. Если Q перерезывающая сила в сечении mn , то в соседнем сечении, отстоящем на dx от Qn , перерезывающая сила будет:

$$Q + dQ = Q + p dx, \text{ откуда: } \frac{dQ}{dx} = p.$$

Дифференцируя два раза ур-ие изогнутой оси балки и принимая во внимание, что

$$\frac{dM}{dx} = Q \text{ и } \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = p,$$

получим

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = p \quad (151).$$

Согласно основному допущению, давление p в любой точке пропорционально оседанию основания или, что все равно, пропорционально прогибу стержня. Обозначая через k коэффициент пропорциональности, можем переписать ур-ие (151) в такой форме:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (151').$$

Знак — во второй части ур-ия получаем потому, что положительным прогибам y соответствуют отрицательные, направленные вниз реакции. Мы получили линейное дифференциальное ур-ие с постоянными коэффициентами. Общий его интеграл должен заключать четыре произвольные постоянные, определяемые из условий на концах стержня. Если ввести обозначение:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (152),$$

то общий интеграл может быть представлен в таком виде ¹⁾:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \quad (153)$$

В поставленной нами задаче стержень предполагается очень длинным. Величина $e^{\alpha x}$ для очень удаленных сечений правой половины балки будет весьма большим числом, тогда как прогибы y всех точек на большом расстоянии от места приложения силы P , очевидно, должны обращаться в нуль. Этому условию мы удовлетворим, положив в общем интеграле

$$C_1 = C_2 = 0,$$

в таком случае ур-ие изогнутой оси для правой половины балки напишется так:

$$y = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

Для определения постоянных C_3 и C_4 воспользуемся условиями в точке приложения груза P . Здесь, в силу симметрии, касательная горизонтальна, следовательно:

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (a)$$

Перерезывающая сила непосредственно справа от места приложения силы P будет, очевидно, равна $-\frac{P}{2}$, откуда:

$$\left[EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=0} = -\frac{P}{2} \quad (b)$$

Так как

$$y' = \alpha e^{-\alpha x} [-C_3 (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + C_4 (\cos \alpha x - \sin \alpha x)],$$

то из условия (a) следует:

$$C_3 = C_4,$$

и y может быть представлен в такой форме:

$$y = C e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x);$$

далее дифференцированием получаем:

$$y' = -2 C \alpha e^{-\alpha x} \sin \alpha x,$$

$$y'' = 2 C \alpha^2 e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x), \quad y''' = 4 C \alpha^3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x.$$

¹⁾ В самом деле: $\sqrt[4]{-\frac{k}{EJ}} = \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \sqrt[4]{-1}$. Получаем четыре корня: $\alpha(1+i)$, $\alpha(1-i)$, $\alpha(-1+i)$, $\alpha(-1-i)$. Частные интегралы ур-ия (151') будут: $e^{\alpha(1+i)x}$, $e^{\alpha(1-i)x}$, $e^{\alpha(-1+i)x}$, $e^{\alpha(-1-i)x}$. Принимая во внимание, что $e^{\alpha xi} + e^{-\alpha xi} = 2 \cos \alpha x$ и $e^{\alpha xi} - e^{-\alpha xi} = 2i \sin \alpha x$, придем к общему интегралу (153).

Пользуясь выражением для третьей производной, можем, на основании условия (б), написать:

$$4Cx^3 = -\frac{P}{2EJ}, \quad C = -\frac{P}{8EJ} \frac{1}{x^3}.$$

Для упругой линии изогнутого стержня окончательно получаем ур-е:

$$y = -\frac{P}{8EJ} \frac{1}{x^3} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = -\frac{P}{8EJx^3} \eta_1 \quad (154)$$

Пользуясь выражениями для y'' и y''' , легко составляем ф-лы для изгибающего момента M и перерезывающей силы Q в любом сечении балки. Ф-лы эти имеют вид:

$$M = -\frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \frac{P}{4\alpha} \eta_1$$

$$Q = -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{P}{2} \eta_2.$$

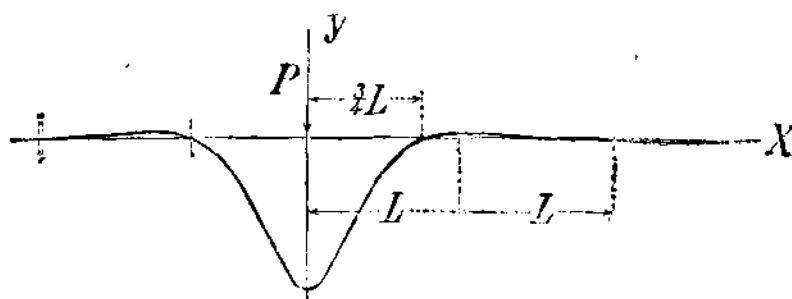
Наибольший прогиб при $x=0$ будет:

$$f = \frac{P}{8EJ} \frac{1}{x^3} = \quad (154').$$

Из ф-лы (154) видно, что упругая линия имеет волнообразную форму. Длина волны соответствует изменению угла αx на 2π и представится ф-лой:

$$2L = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ}{k}} \quad (155).$$

Высота волн, благодаря все убывающему множителю $e^{-\alpha x}$, быстро уменьшается с удалением от места приложения груза. На черт. (241) представлен



Черт. 241.

вид изогнутой оси. В нижеследующей таблице даны значения ф-ий η , η_1 и η_2 , определяющих изменения прогиба, момента и перерезывающей силы по длине балки (см. таблицу на стр. 274).

Таблица значений функций η , η_1 и η_2 .

αx	η	η_1	η_2	αx	η	η_1	η_2
0,0	1,0000	1,0000	-1,0000	3,5	-0,038 87	-0,017 69	0,028 28
0,1	0,9907	0,8100	-0,9003	3,6	-0,036 59	-0,012 41	0,024 50
0,2	0,9651	0,6398	-0,8024	3,7	-0,034 07	-0,007 87	0,020 97
0,3	0,9267	0,4888	-0,7077	3,8	-0,031 38	-0,004 01	0,017 70
0,4	0,8784	0,3564	-0,6174	3,9	-0,028 62	-0,000 77	0,014 69
0,5	0,8231	0,2415	-0,5323	$\frac{3}{4}\pi$	-0,027 86	0,000 00	0,013 93
0,6	0,7628	0,1431	-0,4530	4,0	-0,025 83	0,001 89	0,011 97
0,7	0,6997	0,0599	-0,3798	4,1	-0,023 09	0,004 03	0,009 53
$\frac{1}{4}\pi$	0,6448	0,0000	-0,3224	4,2	-0,020 42	0,005 72	0,007 35
0,8	0,6354	-0,0093	-0,3131	4,3	-0,017 87	0,006 99	0,005 44
0,9	0,5712	-0,0657	-0,2527	4,4	-0,015 46	0,007 91	0,003 77
1,0	0,5083	-0,1108	-0,1988	4,5	-0,013 20	0,008 52	0,002 34
1,1	0,4476	-0,1457	-0,1510	4,6	-0,011 12	0,008 86	0,001 13
1,2	0,3899	-0,1716	-0,1091	4,7	-0,009 21	0,008 98	0,000 11
1,3	0,3355	-0,1897	-0,0729	$\frac{5}{4}\pi$	-0,008 98	0,008 98	0,000 00
1,4	0,2849	-0,2011	-0,0419	4,8	-0,007 48	0,008 92	-0,000 72
1,5	0,2384	-0,2068	-0,0158	4,9	-0,005 93	0,008 70	-0,000 11
$\frac{1}{2}\pi$	0,2079	-0,2079	0,0000	5,0	-0,004 55	0,008 37	-0,001 91
1,6	0,1959	-0,2077	0,0059	5,1	-0,003 34	0,007 95	-0,002 30
1,7	0,1576	-0,2047	0,0235	5,2	-0,002 29	0,007 46	-0,002 59
1,8	0,1234	-0,1985	0,0376	5,3	-0,001 39	0,006 92	-0,002 77
1,9	0,0932	-0,1899	0,0484	5,4	-0,000 63	0,006 36	-0,002 87
2,0	0,0667	-0,1794	0,0563	$\frac{3}{2}\pi$	0,000 00	0,005 79	-0,002 90
2,1	0,0439	-0,1675	0,0618	5,5	0,000 01	0,005 78	-0,002 90
2,2	0,0244	-0,1548	0,0652	5,6	0,000 53	0,005 20	-0,002 87
2,3	0,0080	-0,1416	0,0668	5,7	0,000 95	0,004 64	-0,002 79
$\frac{5}{4}\pi$	0,0000	-0,1340	0,0670	5,8	0,001 27	0,004 09	-0,002 68
2,4	-0,0056	-0,1282	0,0669	5,9	0,001 52	0,003 56	-0,002 54
2,5	-0,0166	-0,1149	0,0658	6,0	0,001 69	0,003 07	-0,002 38
2,6	-0,0254	-0,1019	0,0636	6,1	0,001 80	0,002 61	-0,002 21
2,7	-0,0320	-0,0895	0,0608	6,2	0,001 85	0,002 19	-0,002 02
2,8	-0,0369	-0,0777	0,0573	$\frac{7}{4}\pi$	0,001 87	0,001 87	-0,001 87
2,9	-0,0403	-0,0666	0,0534	6,3	0,001 87	0,001 81	-0,001 84
3,0	-0,0423	-0,0563	0,0493	6,4	0,001 84	0,001 46	-0,001 65
3,0	-0,042 26	-0,056 32	0,049 29	6,5	0,001 79	0,001 15	-0,001 47
3,1	-0,043 14	-0,046 88	0,045 01	6,6	0,001 72	0,000 87	-0,001 29
π	-0,043 21	-0,043 21	0,043 21	6,7	0,001 62	0,000 63	-0,001 13
3,2	-0,043 07	-0,038 31	0,040 69	6,8	0,001 52	0,000 42	-0,000 97
3,3	-0,042 24	-0,030 60	0,036 42	6,9	0,001 41	0,000 24	-0,000 82
3,4	-0,040 79	-0,023 74	0,032 27	7,0	0,001 29	0,000 09	-0,000 69
3,5	-0,038 87	-0,017 69	0,028 28	$\frac{9}{4}\pi$	0,001 20	0,000 00	-0,000 66

Пользуясь этой таблицей и принципом сложения действия сил, легко можно рассчитать длинную балку, лежащую на сплошном упругом основании и нагруженную любой системой сил. Нужно только, чтобы силы были достаточно удалены от концов балки.

Чем больше жесткость балки и чем более податливо то основание, на котором она лежит, тем большая получается длина волны $2L$, тем большей длины должен быть стержень, чтобы его можно было считать бесконечно длинным. *

Разобранная задача в смысле определения произвольных постоянных является простейшей, и полученные результаты с достаточной точностью можно применить, если длина стержня $l > 4L$. В случае коротких стержней придется несколько изменить условия, из которых определяются произвольные постоянные. Здесь уже нельзя будет опускание основания у концов стержня считать равным нулю, и придется принять во внимание, что на свободных концах стержня изгибающий момент и перерезывающая сила обращаются в нуль. Окончательно условия для определения произвольных постоянных будут следующие:

$$\begin{aligned} 1) y'' = 0 \text{ при } x = \frac{l}{2}; & \quad 2) y''' = 0 \text{ при } x = \frac{l}{2}; \\ 3) y' = 0 \text{ при } x = 0; & \quad 4) y''' = -\frac{P}{2E} \text{ при } x = 0. \end{aligned}$$

Результатами этой задачи можно пользоваться, например, при изучении распределения давлений между металлической опорной подушкой и каменной кладкой. Степень неравномерности в распределении давлений стержня на основание возрастает с увеличением длины стержня. Когда

$$l = \frac{\pi}{\alpha},$$

давление и прогиб у концов обращаются в нуль. Прогиб посредине равен ¹⁾:

$$1,09 \frac{P\alpha}{2k} \quad (156).$$

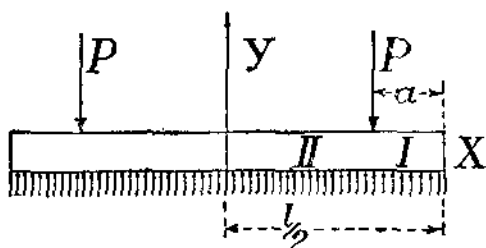
Подобным же образом решается задача о распределении давлений на грунт в случае сплошных бетонных оснований ²⁾.

Более сложной является задача об изгибе железнодорожной шпалы (черт. 242). Здесь придется рассматривать два участка упругой линии: один

¹⁾ См. Winkler, Theorie d. Brücken, стр. 184.

²⁾ Приложение теории к расчету оснований доков, см. Zeitschr. f. Bauwesen 1908 г., стр. 477.

от $x = \frac{l}{2}$ до $x = \frac{l}{2} - a$ и другой участок между грузами P . В каждом участке имеет место общий интеграл (ф-ла 153), но произвольные постоянные для каждого участка должны быть определены особо. Нужно, следовательно, составить 8 ур-ий для нахождения восьми произвольных постоянных. На конце шпалы изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, следовательно, можно написать два таких ур-ия:



Черт. 242.

$$y'' = 0 \text{ и } y''' = 0 \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$

По середине шпалы, в силу симметрии нагрузки, касательная к упругой линии горизонтальна, « перерезывающая сила равна нулю, — получим еще два ур-ия такого рода:

$$y' = 0; y''' = 0 \text{ при } x = 0.$$

Остальные 4 ур-ия могут быть составлены на основании условий в месте сопряжения двух участков. Здесь, очевидно, оба участка упругой линии имеют: 1) одинаковый прогиб y , 2) общую касательную, следовательно, одинаковые значения для y' , 3) одинаковое значение для изгибающего момента, следовательно одинаковые y'' , 4) перерезывающая сила при переходе от одного участка к другому меняется сразу на величину P , следовательно:

$$[y''' - y'']_{x = \frac{l}{2} - a} = \frac{P}{EJ}.$$

Мы составили все 8 ур-ий для определения произвольных постоянных. Решение их не представляет принципиальных затруднений, но требует довольно длинных вычислений ¹⁾.

§ 97. Изгиб балок, лежащих на упругих опорах.

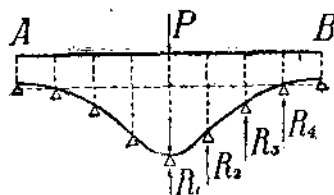
Пользуясь предыдущими результатами, можно дать приближенное решение для случая изгиба балки, лежащей на ряде упругих опор.

Предположим, что балка AB (черт. 243) лежит на равноотстоящих друг от друга упругих опорах одинаковой жесткости, например, на системе поперечных балок одинаковой длины и одинакового поперечного сечения. При

¹⁾ Подробное рассмотрение этой задачи имеется в вышецитированной книге Zimmernann'a.

Сматкже Д. Бобылев, Сборн. инст. инж. пут. сообщ., 1902 г.

достаточной густоте распределения опор давление, получаемое балкой AB от какого-либо сосредоточенного груза P , распределится на несколько поперечин, и условия изгиба балки будут, примерно, такие же, как и в случае сплошного упругого основания. Чтобы иметь возможность применять ранее полученные ф-лы (154') и (156) для прогиба, нужно выяснить значение величины k , характеризующей жесткость основания. Пусть $R_1, R_2, \dots$ давления, передаваемые балкой AB отдельным поперечинам.

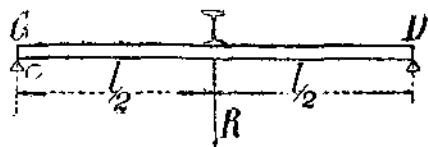


Черт. 243.

Давления эти будут пропорциональны соответствующим прогибам, и коэффициент пропорциональности может быть без затруднения найден в каждом частном случае.

Предположим, например, что поперечины оперты по концам, и продольная балка опирается на середины поперечин (черт. 244). Осадка поперечины под продольной балкой будет равна:

$$f = \frac{RP}{48EJ'}$$



Черт. 244.

Здесь через l обозначена длина поперечины и через EJ' — жесткость ее.

Если каждую поперечину CD пересекают две продольные балки, несущие одинаковую нагрузку (черт. 245) (с подобным случаем мы встречаемся при расчете мостовых поперечин), то прогиб поперечин под продольными балками будет:

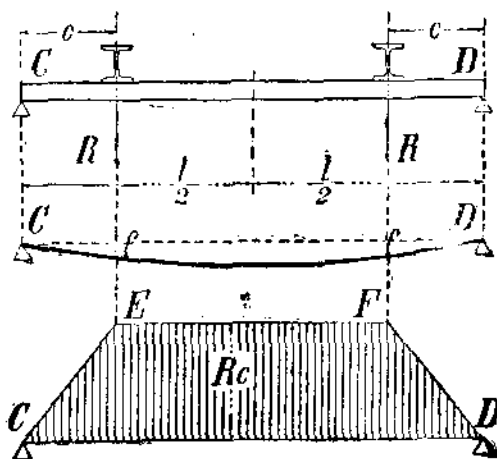
$$f = \frac{c^2(3l - 4c)}{6EJ'} R.$$

В этом проще всего убедиться при помощи графоаналитического метода. Представим себе поперечину загруженной моментной площадью $CEFD$. Опорные реакции от этой фиктивной нагрузки будут:

$$C = D = \frac{Rc(l - c)}{2}.$$

Изгибающий момент от фиктивной нагрузки под продольными балками определится из ф-лы:

$$\begin{aligned} M_c &= \frac{Rc(l - c)}{2} c - \frac{Rc^2}{2} \frac{c}{3} = \\ &= \frac{c^2(3l - 4c)R}{6}. \end{aligned}$$



Черт. 245.

Разделяя этот результат на жест-

кость балки EJ , придем к вышенаписанному выражению для прогиба. Из выражений для прогиба найдем:

$$\text{для первого случая} \quad R = f \frac{48EJ}{l^3},$$

$$\text{для второго случая} \quad R = f \frac{6EJ}{c^2(3l - 4c)}.$$

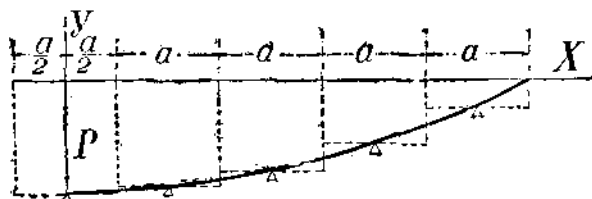
Сосредоточенное давление R , воспринимаемое продольной балкой от какой-либо опоры, заменим равномерно распределенной нагрузкой

$$p = \frac{R}{a},$$

расположенной на протяжении a , равном расстоянию между опорами (черт. 246). Тогда балка будет находиться под действием сплошной нагрузки, представленной ступенчатой грузовой линией. Чем больше число опор, на которые распре-

ляется давление от груза P , тем ближе будет эта нагрузка к нагрузке, непрерывно меняющейся по закону:

$$p = \frac{R}{a} = -ky.$$



Черт. 246.

(—у есть прогиб продольной балки в рассматриваемом сечении). Для вышерассмотренных частных случаев коэффициент k представится так:

$$\text{I) } k = \frac{48EJ}{l^3a}, \quad \text{II) } k = \frac{6EJ}{c^2(3l - 4c)a} \quad (157).$$

Определив k и приведя таким образом нашу задачу к изгибу балки на упругом основании, мы можем величину прогиба под грузом определять по ф-лам (154') или (156). От прогиба легко перейти к тому давлению, которое передается продольной балкой на какую-либо поперечину. Для этого придется интенсивность давлений $-ky$ помножить на длину a , равную расстоянию между опорами. Вставляя вместо y величину наибольшего прогиба [ф-лы (154') и (156)], получим:

$$R_{\max} = \frac{Pa a}{2} \quad (158)$$

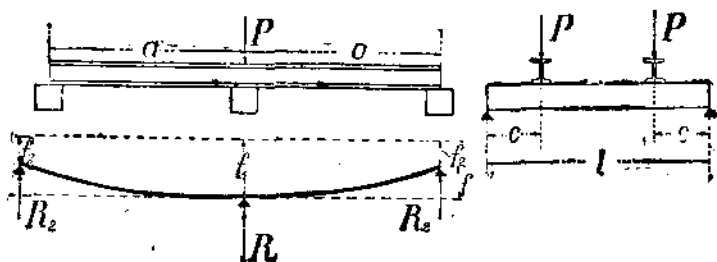
для того случая, когда продольная балка скреплена с поперечинами, и

$$R_{\max} = 1,09 \frac{Pa a}{2} \quad (158')$$

в том случае, когда концы изгибаемой продольной балки могут свободно подниматься.

Если давление от продольной балки передается на небольшое число поперечин, для определения давлений R можно воспользоваться тем обстоятель-

ством, что в местах соприкосновения продольная и поперечная балки имеют общий прогиб. Общий ход расчета поясним на простейшем примере. Две продольные балки лежат на трех поперечинах и нагружены силами P посередине (черт. 247).



Черт. 247.

Вследствие симметричности нагрузки, крайние опорные реакции будут равны между собой, и на основании статiki можно написать:

$$P = R_1 + 2R_2 \quad (a),$$

кроме того, из ранее выведенной ф-лы следует:

$$f_1 = \frac{c^2(3l - 4c)}{6EJ} R_1, \quad f_2 = \frac{c^2(3l - 4c)}{6EJ} R_2,$$

откуда:

$$f = f_1 - f_2 = \frac{c^2(3l - 4c)}{6EJ} (R_1 - R_2).$$

Ту же самую величину f мы можем найти другим путем, из рассмотрения изгиба продольной балки. Вследствие симметрии упругая линия изогнувшейся продольной балки будет иметь над средней опорой горизонтальную касательную, и потому каждую половину балки можно рассматривать как балку, заделанную одним концом и изгибаемую силой R_2 , приложенной к другому концу. В таком случае:

$$f = f_1 - f_2 = \frac{R_2 a^3}{3EJ}.$$

Здесь a — расстояние между поперечинами, EJ — жесткость продольной балки. Из сравнения двух выражений для $f_1 - f_2$ получим:

$$R_1 - R_2 = 2\gamma R_2 \quad (b),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{a^3}{3EJ} \frac{6EJ}{c^2(3l - 4c)}.$$

Решая совместно ур-ия (a) и (b), находим:

$$R_1 = \frac{1 + 2\gamma}{3 + 2\gamma} P; \quad R_2 = \frac{1}{3 + 2\gamma} P \quad (159).$$

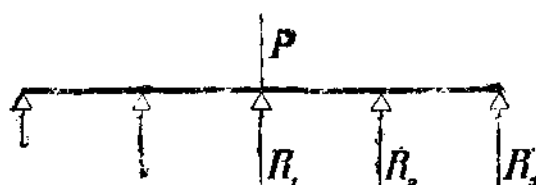
Подобным же путем легко решить задачу о распределении давлений на 5 поперечин (черт. 248). Ф-лы для определения реакций будут следующие:

$$R_1 = \frac{1+18\gamma+7\gamma^2}{5+34\gamma+7\gamma^2}, \quad R_2 = \frac{1+11\gamma}{5+34\gamma+7\gamma^2}, \quad R_3 = \frac{1-3\gamma}{5+34\gamma+7\gamma^2} \quad (160).$$

При $\gamma > \frac{1}{3}$ R_3 получается отрицательным, и если рельсы не связаны с поперечиной, то давление передается только на 3 поперечины. При увеличении числа поперечин, на которые передается давление, указанный путь решения является довольно длинным ¹⁾.

Для сравнения двух методов расчета возьмем такой численный пример. Рельс, жесткость которого $EJ = 2 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, распределяет давление на 3 деревянные поперечины, имеющие жесткость $E'J' = 10^5 \cdot 23 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$. Расстояние между осями поперечин $a = 50 \text{ cm}$, длина поперечины $l = 210 \text{ cm}$, расстояние между рельсами $l - 2c = 170 \text{ cm}$.

На основании найденных ф-л мы получили бы:



$$\gamma = \frac{a^3 E' J'}{E J c^2 (3l - 4c)} = 0,653;$$

$$R_1 = P \frac{1+2\gamma}{3+2\gamma} = 0,53P.$$

Черт. 248.

Если бы мы сосредоточенные реакции заменили распределенными давлени-

ями и вычислили среднюю опорную реакцию из ф-лы (158'), то имели бы: $k = 1250 \text{ kg/cm}^2$; $\alpha = 0,0199$, $R_1 = 0,54P$. Если рельсы той же жесткости передают давление от груза P на 5 поперечин жесткости $E'J' = 10^5 \cdot 12 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, удаленных на $a = 40 \text{ cm}$ друг от друга, то $k = 819 \text{ kg/cm}^2$; $\alpha = 0,0179$; ф-ла (158') для реакции средней опоры нам даст $R_1 = 0,39P$. Если произвести вычисление этой реакции по ф-ле (160), то мы получим тот же результат $R_1 = 0,39P$. Из приведенных примеров видно, что ф-ла (158') даже при небольшом числе опор дает вполне удовлетворительные результаты, и ею следует пользоваться при расчете мостовых поперечин. К тому же заключению мы приходим, применяя приближенный способ к расчету рельс ²⁾.

¹⁾ См. Проскураков, Строительная механика, ч. I, 1926 г., стр. 227.

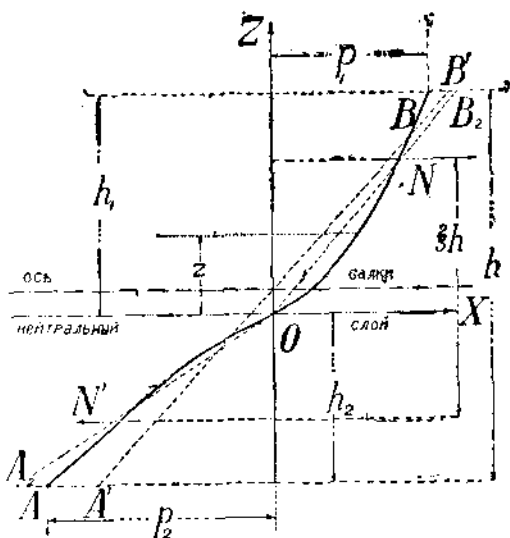
²⁾ См. С. Тимошенко, К вопросу о прочности рельсов. Сборник инст. инж. путей сообщ., 1915 г.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ.

ИЗГИБ БАЛОК, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ НЕ СЛЕДУЕТ ЗАКОНУ ГУКА.

§ 98. Определение нормальных напряжений аналитическим способом.

При выводе основных ф-л изгиба мы исходили из предположения, что плоские поперечные сечения стержня и после изгиба остаются плоскими. В таком случае удлинения и укорочения продольных элементов изгибаемого бруска пропорциональны расстоянию от нейтрального слоя. Сделав допущение, что материал следует закону Гука, мы от деформаций перешли к напряжениям и нашли, что они меняются по линейному закону. Полученные таким путем результаты с большой точностью можно применять при расчете железных и стальных балок, если только деформации не выходят за пределы упругости. Для таких материалов, как чугун, камень или цемент, закон Гука не имеет места, и вопрос о распределении напряжений значительно усложняется. Опыты показывают, что и в этом случае плоские поперечные сечения при изгибе остаются плоскими ¹⁾, но линейному распределению деформаций соответствует более сложный закон распределения напряжений. Для нахождения этого закона нужно предварительно из опытов на растяжение и сжатие установить зависимость между деформациями и напряжениями. Мы знаем, что для таких материалов, как чугун и камень, напряжения растут медленнее деформаций, и потому линия, представляющая изменение нормальных



Черт. 249.

напряжений по высоте балки, будет иметь вид AOB (черт. 249). Вместо прямой $A'B'$, соответствующей распределению напряжений при наличии закона Гука,

¹⁾ См. интересную работу Eugen Meyer, Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt, Phys. Zeitschrift, 1907 г.

мы получаем S-образную кривую, пересекающую ось Z-ов ниже центра тяжести сечения (предполагается, что верхние волокна работают на растяжение, нижние — на сжатие). Определение положения точки O, соответствующей нейтральной линии сечения, и вычисление напряжений можно произвести, если предварительно аналитически выразить связь между деформациями и напряжениями.

Положим в основание степенной закон ¹⁾ (ф-ла б), тогда зависимость между деформациями и растягивающими напряжениями для верхних волокон и сжимающими для нижних, представляется ф-лами:

$$\left. \begin{aligned} \text{для верхних волокон:} \quad e &= \alpha_1 p^{m_1} = \frac{z}{\rho} \quad \text{откуда} \quad p = \left(\frac{z}{\rho \alpha_1} \right)^{\frac{1}{m_1}} \\ \text{для нижних волокон:} \quad -e &= \alpha_2 p^{m_2} = \frac{-z}{\rho}, \quad \text{откуда} \quad p = \left(-\frac{z}{\rho \alpha_2} \right)^{\frac{1}{m_2}} \end{aligned} \right\} \quad (a).$$

Здесь через $\alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2$ обозначены величины, характеризующие упругие свойства материала, ρ — соответствующий радиус кривизны, под p подразумеваем абсолютное значение напряжения. Если вместо z взять расстояние h_1 и h_2 до наиболее удаленных волокон, то, на основании вышесказанного, получим для наибольших растягивающих напряжений p_1 и для наибольших сжимающих напряжений p_2 такие ф-лы:

$$p_1 = \left(\frac{h_1}{\rho \alpha_1} \right)^{\frac{1}{m_1}} \quad \text{и} \quad p_2 = \left(\frac{h_2}{\rho \alpha_2} \right)^{\frac{1}{m_2}} \quad (b),$$

откуда

$$\frac{p_1^{m_1}}{\rho_1^{m_1}} = \frac{h_1}{\alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{p_2^{m_2}}{\rho_2^{m_2}} = \frac{h_2}{\alpha_2} \quad (161).$$

Сравнивая ф-лы (a) и (b), найдем:

$$\frac{p^{m_1}}{\rho_1^{m_1}} = \frac{z}{h_1} \quad \text{и} \quad \frac{p^{m_2}}{\rho_2^{m_2}} = \frac{z}{h_2} \quad (c).$$

т.е. m -ые степени растягивающих и сжимающих напряжений относятся как расстояния до нейтрального слоя.

При $m_1 = m_2 = 1$ приходим к линейному закону распределения напряжений.

После этих предварительных замечаний, выясняющих закон распределения напряжений по высоте балки, перейдем к определению положения нейтральной линии и величин p_1 и p_2 . Для этого воспользуемся ур-иями статики. При изгибе бруска парами сил M , внутренние силы упругости также должны привести к паре, следовательно проекции всех нормальных усилий на ось X-ов равны нулю, и момент их равен M (для упрощения предполагаем, что плоскость действующих сил совпадает с одной из главных плоскостей балки): получаем ур-ия:

$$\int_0^{h_1} p dF = \int_0^{h_2} p dF; \quad \int_0^{h_1} p dF \cdot z + \int_0^{h_2} p dF (-z) = M \quad (d)$$

¹⁾ Построенные на этом законе исследования изгиба произведены впервые Bach'ом, *Elastizität und Festigkeit*, 1905 г., стр. 224; см. также:

W. Schüle, *Dingler's pol. Journ.*, 1902 г., стр. 149,

Pinegin, *Mitteilung. über Forschungsarb.*, Bd. 48, стр. 43,

H. Herbert, *Diss. Göttingen*, 1909 г.,

Тираспольский, *Бюллетень полит. об-ва*, 1902 г.,

J. Petermann, *Berlin*, 1914 г., диссертация.

Вставляя сюда вместо p их значения из (с) и присоединяя ур-ие (161) и ур-ие:

$$h_1 + h_2 = h,$$

будем иметь достаточно условий для нахождения h_1 , h_2 , p_1 и p_2 .

Рассмотрим подробнее частный случай прямоугольного сечения ширины b . Ур-ия (d) переписутся таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{h_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{h_1} z^{\frac{1}{m_1}} dz - \frac{p_2}{h_2^{\frac{1}{m_2}}} \int_0^{h_2} z^{\frac{1}{m_2}} dz &= 0 \\ \frac{p_1 b}{h_1^{\frac{m_1}{m_1}+1}} \int_0^{h_1} z^{\frac{m_1+1}{m_1}} dz + \frac{p_2 b}{h_2^{\frac{m_2}{m_2}+1}} \int_0^{h_2} z^{\frac{m_2+1}{m_2}} dz &= -M \end{aligned} \right\} \quad (d').$$

После выполнения квадратур, первое из этих ур-ий напишется так:

$$\frac{m_1}{m_1+1} p_1 h_1 - \frac{m_2}{m_2+1} p_2 h_2 = 0 \quad (162).$$

Задаваясь каким-либо определенным значением p_1 , мы, на основании ф-лы (161), найдем выражение для p_2 . Вставляя его в ур-ие (162), получим возможность найти отношение $\frac{h_1}{h_2}$ и тем определить положение нейтральной линии. Для нахождения значения M воспользуемся вторым из ур-ий (d'). Выполняя квадратуры, получим:

$$\frac{m_1}{2m_1+1} b p_1 h_1^2 + \frac{m_2}{2m_2+1} b p_2 h_2^2 = M \quad (163).$$

Так как величины h_1 и h_2 уже определены, то полученное ур-ие дает возможность по величине p_1 найти соответствующее значение M . Если материал следует закону Гука, то

$$m_1 = m_2 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad h_1 = h_2 = \frac{h}{2},$$

и ур-ие (163) переписывается так:

$$\frac{b p h^2}{12} + \frac{b p h^2}{12} = M, \quad \text{откуда} \quad p = M : \frac{b h^2}{6}.$$

Приходим к известной ф-ле для нахождения наибольших напряжений. Совокупность ур-ий (161), (162) и (163) вполне решает поставленную задачу. Подобным же образом возможно найти нормальные напряжения и в том случае, когда вместо степенного закона взята какая-либо другая зависимость между напряжениями и деформациями.

§ 99. Приближенный способ определения нормальных напряжений.

Приближенный способ вычисления нормальных напряжений заключается в том, что вместо распределения напряжений, представленного кривой AOB (черт. 249), предполагают и в растянутой и в сжатой части балки распределение напряжений по линейному закону, определяемому прямыми OB_2 и OA_2 . Такое предположение равносильно допущению, что и при растяжении и при сжатии материал следует закону Гука, но модуль упругости при растяжении не равен модулю упругости при сжатии. Пусть E_1

и E_2 значения этих модулей. Тогда, на основании гипотезы плоских сечений, получим для наибольших растягивающих и наибольших сжимающих напряжений ф-лы:

$$\rho_1 = \frac{E_1 h_1}{\rho} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{E_2 h_2}{s} \quad (a).$$

Проведем вычисление этих напряжений для прямоугольного поперечного сечения ширины b . Легко показать, что в этом случае сумма всех растягивающих и сумма всех сжимающих усилий представится ф-ми:

$$N = \frac{\rho_1 b h_1}{2} \quad \text{и} \quad N' = \frac{\rho_2 b h_2}{2}.$$

Так как все усилия, распределенные по сечению, приводятся к паре сил, то, следовательно, должно иметь место равенство:

$$N = N', \quad \text{или} \quad \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (b).$$

Вставляя вместо ρ_1 и ρ_2 их выражения (а), найдем:

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2, \quad \text{откуда} \quad \frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{E_2}{E_1}.$$

Принимая во внимание, что $h_1 + h_2 = h$, найдем:

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}, \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (164).$$

Эти ф-лы определяют положение нейтральной линии в том случае, когда известно соотношение между модулями упругости при растяжении и при сжатии. Составим теперь момент всех усилий, распределенных по сечению. Так как усилия эти приводятся к паре сил, то момент их найдем, умножая сумму всех растягивающих усилий N на плечо пары, равное, как видно из чертежа, $\frac{2}{3}h$; получим:

$$M = N \cdot \frac{2}{3}h = \frac{\rho_1 b h_1 h}{3} = \frac{\rho_1 b h^2}{3} \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} \quad (c),$$

откуда:

$$\rho_1 = \frac{3M}{b h^2} \left(1 + \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right) \quad (165).$$

Пользуясь этой формулой, можем по заданному моменту внешних сил найти величину наибольших растягивающих напряжений. Если положить $E_1 = E_2$, мы придем к ф-ле (66), выведенной для материалов, следующих закону Гука. В дальнейшем нам еще понадобится зависимость между M и радиусом кривизны ρ . Ее мы проще всего получим, вставляя в ур-е (с), вместо ρ_1 , его выражение (а); будем иметь:

$$M = \frac{E_1 h_1 h^2 b}{3\rho} \frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}} = \frac{1}{\rho} \frac{b h^3}{12} \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (166).$$

Полученная ф-ла может быть приведена в соответствие с ф-лой (63), выведенной для материалов, следующих закону Гука; нужно только вместо модуля упругости E вставить приведенный модуль упругости

$$E' = \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2},$$

и мы будем иметь:

$$\frac{E' b h^3}{\rho \cdot 12} = M \quad (166').$$

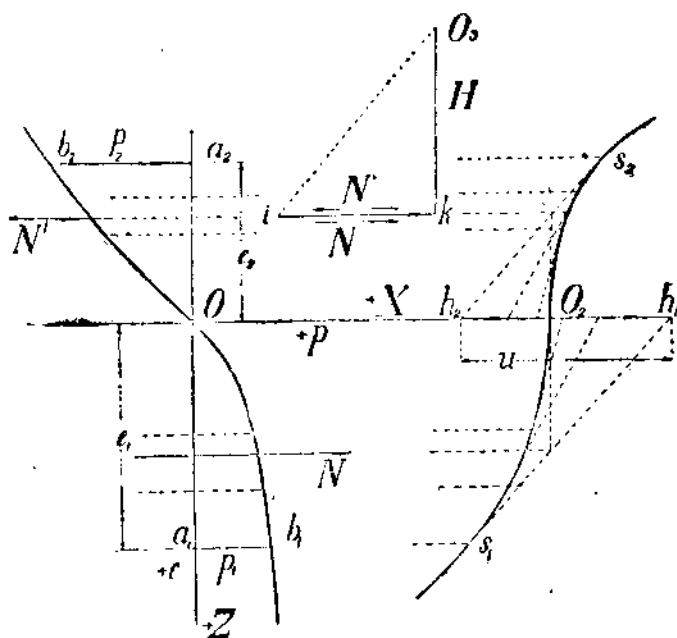
Величина E' зависит от соотношения $E_1:E_2$; для $E_1:E_2=0,5$, $E'=0,68 E_2$; для $E_1:E_2=0,1$, $E'=0,23 E_2$.

§ 100. Графический метод нахождения нормальных напряжений.

Если аналитическая зависимость между напряжениями и деформациями неизвестна, но из предварительных опытов мы имеем диаграммы для растяжения и сжатия данного материала, то распределение нормальных напряжений при изгибе может быть без затруднений найдено графическим путем. Исходя из гипотезы плоских сечений найдем, что удлинение пропорционально расстоянию от нейтрального слоя:

$$e = \frac{z}{\rho} = e_0 z,$$

где e_0 по абсолютному значению равно удлинению в расстоянии единицы длины от нейтрального слоя. Если по оси Z -ов отложить величины удлинений, а по горизонтальному направлению — соответствующие значения напряжений p , взятые из диаграмм предварительных опытов, то получим кривую $b_1 O b_2$, представляющую закон изменения нормаль-



ных напряжений по высоте балки (черт. 250) (растягивающие напряжения соответствуют нижней части чертежа). При определении величины нормальных напряжений и положения нейтральной линии будем исходить из ур-ий (д) [§ 98]. Если принять во внимание, что

$$z = \frac{e}{e_0} \quad \text{и} \quad dz = \frac{de}{e_0},$$

то ур-я эти для прямоугольного поперечного сечения примут такой вид:

$$\int_0^{e_1} p de = \int_0^{e_2} p de \quad (a),$$

$$b \int_0^{e_1} p e de + \int_0^{e_2} p e de = M \quad (b).$$

Первое из этих ур-ий представляет не что иное, как условие равенства площадей Oa_1b_1 и Oa_2b_2 ; пользуясь им, можно найти положение нулевой линии. Для этого поступаем таким образом: задаемся величиной наибольших растягивающих напряжений p_1 ; этим определяется величина наибольшего удлинения e_1 , а следовательно, и величина площади a_1Ob_1 . Для определения p_2 нужно так провести горизонтальную линию a_2b_2 , чтобы было выполнено равенство

$$a_1Ob_1 = a_2Ob_2.$$

Найдя таким образом величины e_1 и e_2 , мы для определения расстояний h_1 и h_2 наиболее удаленных волокон от нейтрального слоя, будем иметь:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{e_1}{e_2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{h_1}{h_2 + h_2} = \frac{h_1}{h} = \frac{e_1}{e_1 + e_2},$$

$$h_1 = h \frac{e_1}{e_1 + e_2} \quad \text{и} \quad e_0 = \frac{e_1}{h_1} = \frac{e_1 + e_2}{h} \quad (c).$$

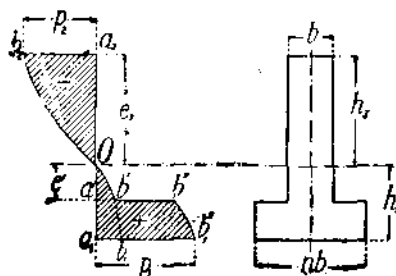
Для определения момента внутренних сил упругости воспользуемся ур-ием (b). Легко видеть, что множитель, заключенный в скобки, есть не что иное, как статический момент площадей Oa_1b_1 и Oa_2b_2 ¹⁾ относительно оси X . Определение этого момента легко выполнить графически (§ 53). Для этого строим соответствующую веревочную кривую $s_1O_1s_2$ (черт. 250). Касательные в точках s_1 и s_2 , соответствующих крайним ординатам a_1b_1 и a_2b_2 , отрезут на оси X -ов длину u , пропорциональную искомому статическому моменту. Чтобы получить величину этого момента, нужно отрезок u , измеренный в том же масштабе, в каком мы откладывали e , умножить на полюсное расстояние H , измеренное в масштабе, выбранном для величины N , равной площади a_1Ob_1 . Так как e имеет измерение отвлеченного числа, то площадь a_1Ob_1 , а следовательно, и величина $H \cdot u$ имеют измерение напряжения, т. е. $\frac{\text{сила}}{\text{длина}^2}$. Вставляя найденное значение статического момента в ур-ие (b) и принимая во внимание выражение (c), получим:

$$\frac{bh^2}{(e_1 + e_2)^2} Hu = M.$$

Изложенный способ исследования распределения напряжений можно легко распространить на сечения, составленные из прямоугольников, например, на сечения тавровое или двутавровое. В случае таврового сечения (черт. 251) основное ур-ие (a) представится в такой форме:

$$\int_0^{e_1} p de + \int_{e'}^{e_2} p de = \int_0^{e'} p de.$$

Здесь мы через e' обозначили удлинение, со-



Черт. 251.

¹⁾ Статические моменты обеих площадей входят с положительным знаком.

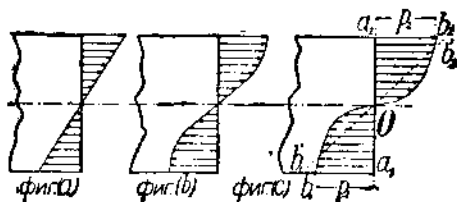
ответствующее сопряжению полки и стенки тавровой балки, и через n — отношение ширины полки к толщине стенки. Написанное уравнение выражает собой равенство площадей a_2Ob_2 и $a_1Ob''b''b_1''$. На протяжении $a'a_1$ ординаты кривой $Ob'b_1$ увеличены в n раз. В случае таврового сечения мы можем выбрать толщину полки $h_1 - h'$ ($h' = 0a'$) таким образом, чтобы между наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениями было определенное соотношение. На основании опытных данных строим кривую b_1Ob_2 и по ней кривую $b''b_1''$, имеющую в n раз большие ординаты. Задаемся величинами p_1 и p_2 , тогда на чертеже определится площадь сжатия $0a_2b_2$. Теперь остается только провести прямую $a'b''$ так, чтобы площадь растяжения равнялась площади сжатия. Принимая во внимание, что

$$a'a_1 = e_1 - e' = e_0(h_1 - h'),$$

найдем искомую толщину полки

$$h_1 - h' = \frac{e_1 - e'}{e_0} = h \frac{e_1 - e'}{e_1 + e_2}.$$

Графический метод дает возможность исследовать изгиб железных брусков за пределами упругости. Положим, имеется брусок, прямоугольного поперечного сечения. Пока величина наибольших растягивающих напряжений не превосходит предела пропорциональности, нормальные напряжения распределяются по линейному закону (фиг. а, черт. 252). С возрастанием изгибающего момента появляются остаточные деформации сначала в наиболее удаленных от нейтрального слоя элементах (фиг. б); потом область остаточных деформаций все возрастает, и в заключение распределение нормальных напряжений по высоте сечения представится кривой b_1Ob_2 (фиг. с).



Черт. 252.

Величина напряжений p_1 и p_2 , очевидно, будет меньшая, чем то получается из обычной ф-лы, соответствующей распределению напряжений по линейному закону $b_1'Ob_2'$.

Имея величины наибольших деформаций e_1 и e_2 и принимая во внимание, что

$$e_1 + e_2 = \frac{h}{\rho},$$

мы можем определить ρ и таким образом перейти к исследованию изогнутой оси балки. Благодаря сложному закону распределения напряжений за пределами упругости, определение прогибов бруска, даже при простейших способах загрузки, требует довольно больших вычислений¹⁾.

§ 101. Определение нормальных напряжений в железобетонных балках.

Известно, что бетон и цемент выдерживают при сжатии гораздо большие напряжения, чем при растяжении, и поэтому при изгибе бетонной балки прямоугольного поперечного сечения разрушение начинается со стороны растянутых элементов. Конструкция может быть сделана значительно более прочной, если в части балки, испытывающей растяжение, проложить продольные железные прутья AB (черт. 253). Благодаря прочному сцеплению железа с бетоном, получается железобетонная балка, отдельные части которой не могут перемещаться одна относительно другой. Значительная прочность

¹⁾ См. вышесчитываемую (§ 98) работу Е. Меуега.

таких балок, сравнительная дешевизна и сопротивляемость их атмосферным влияниям являются причинами быстрого распространения железобетонных конструкций

в строительном деле. В настоящее время железобетон составляет особую область строительного искусства, имеется обширная специальная литература, где излагаются методы расчетов как отдельных конструкций, так и целых сооружений из железобетона. Мы, конечно, не можем здесь входить в подробности расчета железобетонных балок и ограничимся лишь простейшей задачей, чтобы на примере выяснить основные положения, на которых строится расчет. При определении нормальных напряжений исходят из гипотезы плоских сечений. В таком случае деформации будут пропорциональны расстояниям до нейтральной линии nn , и, следовательно, напряжение в железе так относится к напряжениям в бетоне, непосредственно прилегающем к железу, как модуль упругости железа относится к модулю упругости бетона. Чтобы по возможности использовать сопротивляемость железа, допускают в нем настолько значительные напряжения, что уже нельзя рассчитывать на прочное сопротивление бетона разрыву. Заранее предполагается, что в бетоне, лежащем в области растяжения, могут появиться трещины, и потому при расчете принимают во внимание лишь часть бетона, работающую на сжатие. Тогда мы приходим к распределению напряжений, представленному на черт. 253. В виду того, что площадь сечения железа $F_{ж}$ невелика, можно пренебречь изменением напряжений в железе по высоте сечения и считать это напряжение равным постоянной величине $p_{ж}$. Обозначим, кроме того, через c расстояние от нижней поверхности балки до железа, и через h_2 — величину, определяющую положение нейтрального слоя. Так как все нормальные усилия должны приводиться к паре сил, то должно быть исполнено условие:

$$p_6 \frac{bh_2}{2} = p_{ж} F_{ж} \quad (a),$$

которым мы воспользуемся для определения положения нейтрального слоя. Обозначая через E_6 и $E_{ж}$ модули упругости бетона и железа, мы, на основании гипотезы плоских сечений, получим:

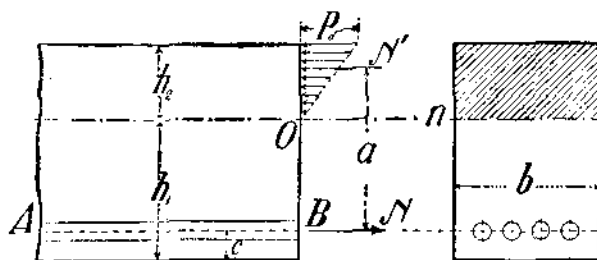
$$p_6 = \frac{E_6 h_2}{\rho}; \quad p_{ж} = \frac{E_{ж} (h_1 - c)}{\rho} = \frac{E_{ж} (h - h_2 - c)}{\rho};$$

вставляя это в ур-ие (a), найдем для h_2 значение:

$$h_2 = \frac{F_{ж}}{\beta b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta b}{F_{ж}} (h - c)} \right] \quad (167).$$

Здесь для краткости введено обозначение $\beta = \frac{E_6}{E_{ж}}$. Определив положение нейтрального слоя, мы найдем плечо пары, к которой приводятся внутренние силы упругости:

$$a = \frac{2}{3} h_2 + h_1 - c.$$



Черт. 253.

Момент этой пары будет:

$$M = \frac{bh_0}{2} p_0 a = p_{ж} F_{ж} a,$$

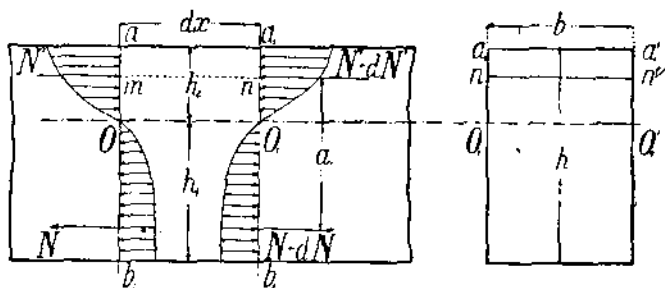
откуда:

$$p_0 = \frac{2M}{bh_0 a}; \quad p_{ж} = \frac{M}{F_{ж} a} \quad (163).$$

Ф-лы (167) и (168) решают вопрос о величине напряжений в данной железобетонной балке при том условии, что площадь сечения железа не велика.

§ 102. Распределение касательных напряжений.

Выяснив вопрос относительно распределения нормальных напряжений по высоте балки, мы легко можем вычислить также и касательные напряжения. Если ab и a_1b_1 два бесконечно близких поперечных сечения (черт. 254), между которыми к балке не приложено никаких внешних сил, то касательная сила, действующая по грани mn элемента



Черт. 254.

$atna_1$, равна разности нормальных усилий, приходящихся на грани at и a_1t того же элемента. Наибольшие касательные напряжения, очевидно, будут соответствовать нейтральному слою OO_1 ; величина их равна:

$$(p_t)_{\max} = \frac{dN'}{bdx}.$$

Принимая во внимание, что

$$a dN' = dM = Q dx,$$

где Q поперечная сила, найдем:

$$(p_t)_{\max} = \frac{Q}{ab} \quad (169).$$

Эта ф-ла годится также для вычисления касательных напряжений по нейтральному слою железобетонных балок (черт. 253). Принимая во внимание, что в этом случае

$$a = h - \frac{h_2}{3} - c,$$

получим:

$$(p_t)_{\max} = \frac{3Q}{b(3h - 3c - h_2)} \quad (170).$$

Кроме этих напряжений, при расчете железобетонных балок играют большую роль касательные напряжения по поверхности соприкосновения железа с бетоном. Если взять, как

Курс сопротивления материалов.

это мы делали выше, два бесконечно близкие поперечные сечения балки, то разность натяжений железных стержней будет равна:

$$dN = \frac{Qdx}{a}$$

Обозначая через S поверхность железных прутьев, приходящуюся на единицу длины балки, и предполагая касательные напряжения равномерно распределенными по этой поверхности, получим:

$$(p_t)_{ж.б.} S dx = \frac{Qdx}{a},$$

откуда:

$$(p_t)_{ж.б.} = \frac{Q}{aS} = \frac{3Q}{(3h - 3c - h_2)S} \quad (171).$$

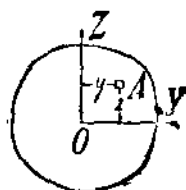
Отношение касательных напряжений по нейтральному слою к касательным напряжениям по поверхности железа равно:

$$\frac{(p_t)_{\max}}{(p_t)_{ж.б.}} = \frac{S}{b} \quad (172).$$

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.

§ 103. Растяжение или сжатие и изгиб.

До сих пор мы имели дело с такими случаями изгиба, где внешние силы пересекали ось бруска под прямым углом. При этом внутренние силы упругости, действующие по какому-либо поперечному сечению, приводятся к паре сил и к поперечной силе, лежащей в плоскости сечения. Рассмотрим теперь более общую задачу, когда действующие на брусок силы пересекают его ось под любыми углами. Каждую из сил мы можем разложить на две составляющие: одну из составляющих направить по оси бруска, а другую — перпендикулярно к ней. Поперечные силы изгибают брусок; что же касается продольных сил, то они будут вызывать главным образом растяжение или сжатие. Их влияние на изгиб будет ничтожно, пока поперечные размеры стержня не малы по сравнению с его длиной ¹⁾. Пренебрегая влиянием продольных сил на изгиб, мы можем получить напряжение в какой-либо точке A поперечного сечения бруска, суммируя напряжения от растяжения или сжатия с напряжениями от изгиба поперечными силами. Если обозначим через P сумму всех продольных сил, лежащих по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения, а через M_y и M_z — моменты внешних сил, приложенных к рассматриваемой половине балки, относительно осей Y и Z (черт. 255), то нормальное напряжение в точке A будет:



Черт. 255.

$$p = \frac{P}{F} \pm \frac{M_y z}{J_y} \pm \frac{M_z y}{J_z} \quad (173).$$

Знаки в этой ф-ле придется выбрать в зависимости от направления моментов.

Остановимся подробнее на том случае, когда одновременное явление изгиба и сжатия или изгиба и растяжения обусловлено действием двух взаимно-противоположных эксцентрично приложенных продольных сил. Положим, призматический брусок растягивается двумя взаимно-противоположными силами P . Точку приложения силы A (черт. 256) возьмем на главной оси инерции OY

¹⁾ Влияние продольных сил на изгиб тонких и гибких стержней будет рассмотрено в главе XV.

поперечного сечения. Через e обозначим расстояние точки приложения силы от центра тяжести сечения. Приложим к центрам тяжести концевых поперечных сечений по две равные и противоположные силы P . Тогда заданная система сил заменится системой ей эквивалентной, состоящей из двух растягивающих сил, действующих по оси бруса, и из двух взаимно-противоположных пар сил. Величина пар, очевидно, будет $P \cdot e$. Пары эти вызовут изгиб в плоскости XU . Напряжение в какой-либо точке B поперечного сечения представится при взятом расположении координатных осей $ф$ -лой:



$$\rho = \frac{P}{F} + \frac{M_z y}{J_z} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{ey}{r_z^2} \right) \quad (174),$$

где r_z соответствующий радиус инерции. Напряжения, как видно из полученной $ф$ -лы, меняются по закону прямой линии.

Если взять прямоугольное поперечное сечение (черт. 257), то наибольшее и наименьшее напряжения получим, полагая в $ф$ -ле (174)

$$y = \pm \frac{b}{2}$$

$$\rho_{\max/\min} = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{be}{2r_z^2} \right).$$

Подставляя вместо r_z его значение:

Черт. 256.

$$r_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{ab^3}{12ab}} = \frac{b}{2\sqrt{3}},$$

найдем:

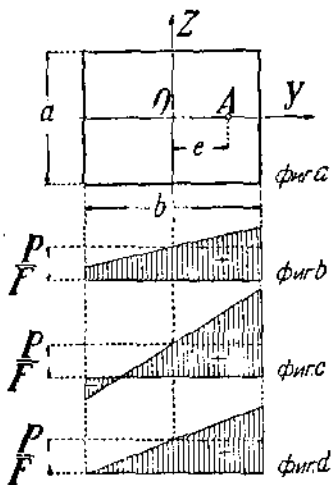
$$\rho_{\max/\min} = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{6e}{b} \right) \quad (175).$$

Пока $e < \frac{b}{6}$, — по всему сечению действуют напряжения одного знака, их рас-

пределение представлено на фиг. б. При $e > \frac{b}{6}$ напряжения $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$ разных знаков, их распределение изображено на фиг. с. В том случае, когда

$$e = \frac{b}{6}, \quad \rho_{\max} = \frac{2P}{F} \quad \text{и} \quad \rho_{\min} = 0,$$

т.е. максимальное значение напряжения вдвое больше того, которое получается при центральном приложении силы P . Распределение напряжений представится треугольником (фиг. д). Все сказанное выше относительно растяжения силами, приложенными с эксцентриситетом, можно перенести и на случай сжатия. Пока сжимающая сила приложена в центре тяжести сечения, напряжения распределяются по сечению равномерно; чем



Черт. 257.

дальше отодвигать точку приложения силы от центра сечения, тем большая разность получается между наибольшим и наименьшим напряжениями. В случае прямоугольного сечения, при перемещении силы по направлению одной из главных осей инерции, возрастает напряжение в той грани, к которой приближается точка приложения силы. При эксцентриситете $e = \frac{b}{6}$ напряжение, соответствующее ближайшей грани, будет $\frac{2P}{E}$; в удаленной грани напряжение обращается в нуль. При дальнейшем перемещении силы появятся в удаленной грани растягивающие напряжения. На это обстоятельство приходится обращать внимание при употреблении материалов слабо сопротивляющихся разрыву, например, в случае каменной кладки. Чтобы не получались в кладке растягивающие напряжения, необходимо, например, размеры каменных стен брать такими, чтобы равнодействующая сила не выходила из средней трети сечения (черт. 258), при этом $e \leq \frac{b}{6}$.

Мы пока предполагали, что точка приложения силы лежит на одной из главных осей инерции. Перейдем теперь к более общему случаю. Пусть Y и Z (черт. 259) — главные оси инерции поперечного сечения. Сжимающая сила P приложена в точке A с координатами (m, n) . Если по оси бруска представить себе приложенными две равные и противоположные силы P , то действие полученной таким образом системы можно привести к действию сжимающей осевой силы P и к паре сил, действующей в плоскости OA . Эту пару можно разложить на составляющие, действующие в плоскостях главных жесткостей балки, проходящих через OZ и OY . Величины этих пар соответственно будут равны Pn и Pm . Напряжение по какой-либо элементарной площадке dF мы получим, как результат наложения простого сжатия на изгиб в двух главных плоскостях. Если y и z координаты выбранной площадки, то сжимающее напряжение будет равно:

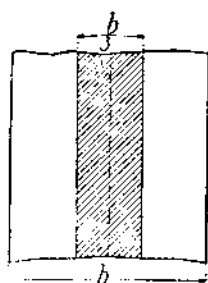
$$p = \frac{P}{F} + \frac{Pmy}{J_z} + \frac{Pnz}{J_y}.$$

Вставляя вместо моментов инерции их выражения через соответствующие радиусы инерции, приведем выражение для p к такому виду:

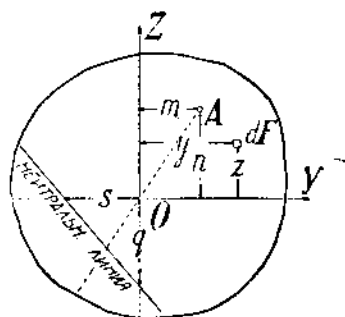
$$p = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{my}{r_z^2} + \frac{nz}{r_y^2} \right).$$

Нетрудно найти и нейтральную линию поперечного сечения — нужно только выражение для напряжений приравнять нулю, и мы получим:

$$\frac{my}{r_z^2} + \frac{nz}{r_y^2} + 1 = 0. \quad (176).$$



Черт. 258.



Черт. 259.

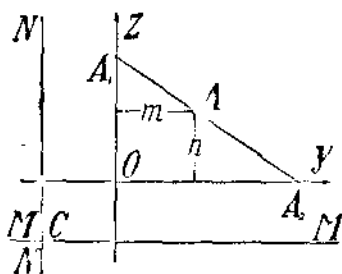
Положение этой линии можно определить помощью отрезков s и q , которые она отсекает на осях Y и Z . Чтобы получить отрезок q на оси Z -ов, положим $y = 0$, тогда из ур-ия (176) найдем:

$$q = -\frac{r_z^2}{m}.$$

Подобным же образом получаем отрезок:

$$s = -\frac{r_y^2}{m}.$$

Легко видеть, что между координатами m и n точки приложения сжимающей силы и отрезками s и q , отсекаемыми нейтральной линией, имеется такого рода связь: если для точки приложения сжимающей силы выбрать координатами s и q , то нейтральная линия отсекает на координатных осях отрезки m и n . Мы можем для каждой точки A (условимся называть ее полюсом) найти соответствующую нулевую (нейтральную) линию. Будет перемещаться полюс, — перемещается и соответствующая ему нулевая линия.



Черт. 260.

Покажем, что если полюс перемещается по прямой линии, то соответствующая нулевая линия вращается около неподвижной точки, являющейся полюсом для прямой, по которой перемещаем точку приложения сжимающей силы. Пусть точка приложения силы перемещается по линии A_1A_2 (черт. 260). Для всякого положения точки A на этой линии сжимающая сила P может быть заменена двумя силами ей параллельными, приложенными в точках A_1 и A_2 , лежащих на главных осях инерции поперечного сечения. Нулевая

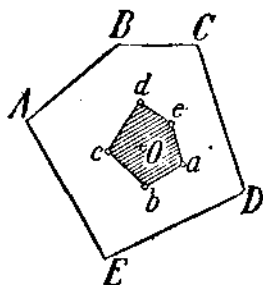
линия MM , соответствующая полюсу A_1 , будет параллельна оси Y -ов. Ее расстояние от оси будет:

$$q = -\frac{r_y^2}{OA_1}.$$

Подобным же образом найдем нулевую линию NN , соответствующую полюсу A_2 . В точке C пересечения линий NN и MM напряжение будет нулем при любом положении точки A на прямой A_1A_2 , следовательно, через эту точку пройдут нулевые линии, соответствующие всем положениям полюса A на линии A_1A_2 т.е., при перемещении полюса по прямой — нулевая линия вращается около неподвижной точки C . Координаты точки C определяются по тем же ф-лам, что и координаты полюса, соответствующего линии A_1A_2 , следовательно, можно сделать такое заключение: если нулевая линия вращается около некоторой неподвижной точки, то соответствующий полюс перемещается по прямой, являющейся нулевой линией для точки вращения.

§ 104. Ядро сечения.

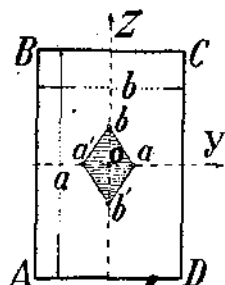
На частных примерах уже было показано, что, отодвигая точку приложения сжимающей силы от центра тяжести сечения, можно вызвать в плоскости поперечного сечения бруска растягивающие напряжения. В некоторых случаях, например, в сооружениях из кирпичной и каменной кладки, является нежелательным появление растягивающих напряжений, так как этим напряжениям кладка слабо сопротивляется. Практически представляет большой интерес для различных форм поперечных сечений установить тот контур, из которого не должна выходить точка приложения сжимающей силы, если не желательно появление растягивающих напряжений. Ограниченная таким контуром часть сечения называется *ядром сечения*. Заметим, что в том случае, когда нулевая линия пересекает поперечное сечение, она разделяет его на части с напряжениями различных знаков: если по одну сторону нулевой линии будет сжатие, то по другую найдем растяжение. Если желательно по всему сечению иметь напряжения одного знака (сжимающие), то крайними положениями нулевых линий должны быть те, которые совпадают с касательными к контуру поперечного сечения. Если для системы касательных¹⁾ к контуру поперечного сечения построить соответствующие полюса, то геометрическое место этих точек определит собою очертание ядра сечения. Когда точка приложения сжимающей силы выйдет за пределы полученного ядра, соответствующая нулевая линия из касательной обратится в секущую, — в плоскости поперечного сечения получатся напряжения разных знаков. Если контур сечения какой-либо многоугольник, то легко показать, что контур соответствующего ядра сечения будет также многоугольником. Пусть $ABCDE$ данное поперечное сечение (черт. 261). Каждой стороне сечения мы можем найти соответствующий полюс. Пусть a, b, c, d, e — полюса, соответствующие сторонам $AB, BC, \dots$. Если точка приложения сжимающей силы совпадает, например, с a , то нулевая линия совпадает со стороной AB ; помещая силу в b , найдем, что нулевая линия совпадает со стороной BC . Для того, чтобы перейти из положения AB в положение BC , нулевая линия должна вращаться относительно точки B . Такому вращению нулевой линии, как мы показали, соответствует перемещение полюса по прямой линии; мы знаем конечные точки a и b этой прямой. Соединяя a и b прямой, найдем часть контура ядра, соответствующую переходу нулевой линии из AB в BC , т.е. вращению около B . Таким же образом можно получить и остальные стороны ядра. Вершинам контура сечения будут соответствовать стороны контура ядра. Поясним сказанное примерами.



Черт. 261.

¹⁾ При этом берут те касательные, которые нигде не пересекаются с контуром поперечного сечения.

Для прямоугольника было показано, что при перемещении точки приложения силы по оси OY нулевая линия параллельна оси OZ . Когда расстояние точки a приложения силы от центра O (черт. 262) равно

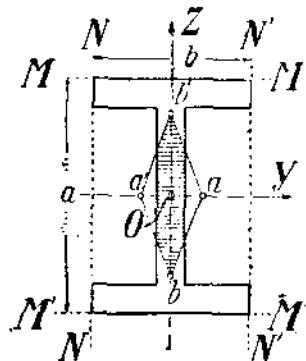


Черт. 262.

$e = \frac{b}{6}$, нулевая линия совпадает со стороной сечения AB .

Точка a будет одной из вершин ядра сечения; по симметрии заключаем, что точка a' ($oa' = oa$) также будет вершиной ядра, соответствующей стороне прямоугольника CD . Таким же способом найдем и две другие вершины b и b' ядра ($ob = ob' = \frac{a}{6}$). Соединяя полученные вершины прямыми, получим ромб $aba'b'$, представляющий ядро заданного прямоугольного сечения.

В случае двутаврового сечения (черт. 263) крайними положениями нулевых линий будут линии MM , $M'M'$ и NN , $N'N'$. Линии, совпадающие с другими сторонами контура сечения, должны быть исключены из рассмотрения, так как они пересекают сечение.



Черт. 263.

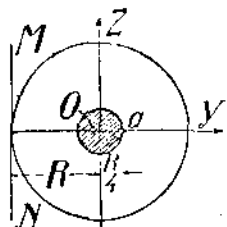
Чтобы построить ядро, нужно найти полюс для каждой из четырех названных выше линий. По симметрии заключаем, что полученные таким образом полюсы лежат в вершинах ромба. Чтобы определить, например, точку a , воспользуемся ф-лой (174); так как для этой точки линия MM' является нулевой, то ф-ла (174) должна давать нуль при подстановке вместо y величины $-\frac{b}{2}$, откуда следует:

$$\frac{eb}{2r_z^2} = 1, \text{ или } e = Oa = \frac{2r_z^2}{b}.$$

Таким же образом найдем положение точки b :

$$Ob = \frac{2r_y^2}{a}.$$

Для кругового поперечного сечения (черт. 264) ядро сечения должно быть кругом. Возьмем одну из касательных к кругу, например, MN , параллельную OZ . Положение соответствующего полюса a определится длиной Oa . На основании ф-лы (174), имеем:



Черт. 264.

$$Oa = e = \frac{r_z^2}{R},$$

где R — радиус заданного круга, так как для круга

$$r_z^2 = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2} = \frac{R^2}{4}, \text{ то } Oa = \frac{R}{4}$$

По симметрии заключаем, что ядро сечения — круг радиуса $\frac{R}{4}$.

В случае *кольцевого сечения*, как это имеет место в дымовых трубах, ядро сечения также будет кругом. Радиус его найдется по тем же ф-лам, что и в предыдущем случае, — придется только вместо радиуса инерции r_z вставить новую величину. Если R_n — величина наружного, а R_b — величина внутреннего радиуса кольцевого сечения, то момент инерции сечения будет:

$$\frac{\pi (R_n^4 - R_b^4)}{4}.$$

Соответствующий радиус инерции определится из ф-лы:

$$r_z^2 = \frac{\pi (R_n^4 - R_b^4)}{4\pi (R_n^2 - R_b^2)} = \frac{R_n^2 + R_b^2}{4}.$$

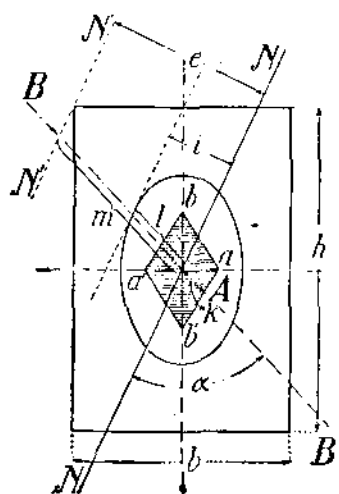
Радиус ядра сечения будет:

$$e = \frac{r_z^2}{R_n} = \frac{R_n^2 + R_b^2}{4R_n},$$

при $R_b = 0$ получаем: $e = \frac{R_n}{4}$, при $R_b = R_n$, т.-е. для весьма узкого кольца:

$$e = \frac{R_n}{2}.$$

Ядром сечения удобно пользоваться при вычислении напряжений в случае *косого изгиба* (§ 57). Возьмем прямоугольное поперечное сечение (черт. 265).



Черт. 265

На чертеже показан соответствующий эллипс инерции и ядро сечения $aba'b'$. Если изгибающий момент действует в плоскости, пересекающей поперечное сечение по BB , то нейтральная линия NN найдется как диаметр эллипса инерции, сопряженный с направлением BB . Напряжения меняются по закону плоскости, и, если мы через p_1 обозначим величину напряжения в наиболее удаленных точках, в расстоянии e от нейтральной линии, то в расстоянии z от нейтрального слоя нормальные напряжения будут:

$$p_z = \frac{p_1 z}{e}.$$

Если через M обозначить величину изгибающего момента в рассматриваемом сечении и через α — угол между плоскостью момента и нейтральным слоем, то, составляя моменты всех внешних и внутренних сил относительно NN , придем к ур-ию:

$$M \sin \alpha = \frac{p_1}{e} \int z z dF = \frac{p_1}{e} J_N,$$

откуда:

$$p_1 = \frac{M e \sin \alpha}{J_N} \quad (177).$$

Через J_N обозначен момент инерции сечения относительно нейтральной линии. Вычисление p_1 можно упростить, если воспользоваться свойством ядра сечения. Поместим в точке A сжимающую силу P , тогда изгибающий момент $M = Pk$. Нейтральной линией будет линия $N'N'$ параллельная NN . Для точек линии $N'N'$ растягивающие напряжения от изгиба, вычисляемые по ф-ле (177), равны сжимающим напряжениям $\frac{P}{F}$ от центрально приложенной сжимающей силы P , следовательно:

$$\frac{P}{F} = \frac{Pke \sin \alpha}{J_N},$$

откуда:

$$\frac{e \sin \alpha}{J_N} = \frac{1}{Fk}.$$

Вставляя это в ф-лу (177), получим:

$$p_1 = \frac{M}{Fk} \quad (178).$$

Этот результат может быть представлен в более простом и удобном для вычислений виде, если обобщить понятие о моменте сопротивления. Будем называть моментом сопротивления поперечного сечения в каком-либо направлении произведение из площади на длину радиуса ядра сечения, имеющего то же направление; тогда:

$$W = Fk \text{ и } p_1 = \frac{M}{W} \quad (178').$$

Такое обобщение не противоречит ранее принятому определению W , в чем легко убедиться, расположив точку приложения силы на одной из главных осей сечения. Если в рассматриваемом случае приложить сжимающую силу в b' , то $k = \frac{h}{6}$, и, следовательно,

$$W = Fk = \frac{bh^2}{6}.$$

Приходим к известному значению момента сопротивления, соответствующему изгибу в главной плоскости ¹⁾.

§ 105. Одновременное действие изгиба и кручения.

С этим видом деформации особенно часто приходится встречаться в машиностроении при расчете валов. Здесь, кроме сил, пересекающих ось вала (как, например, вес вала, вес шкивов, насаженных на вал), действуют такие силы, как натяжение передаточных ремней, давления, передающиеся от головки шатуна кривошипного механизма, и т. д. Направление этих сил не пересекает оси вала,

¹⁾ Пользование ф-лой (178) могло бы быть значительно упрощено, если бы в каждый поперечный профиль нормального сортамента поместить чертеж соответствующего ядра.

и потому изгиб будет сопровождаться скручиванием. Черт. 266 представляет один из шкивов передаточного вала. Обозначим через $2P$ натяжение в набегающей части AB ремня и через P — натяжение в части CD . Возьмем натяжение в части CD . Мы можем, не меняя условий работы вала, представить себе в плоскости шкива, в центре сечения вала O , приложенными две силы P — равные и прямо противоположные. Линию действия этих сил возьмем параллельной CD ; тогда действие натяжения в части CD ремня можно заменить действием изгибающей силы P , приложенной в центре тяжести O сечения вала и скручивающей пары $M_1 = PR$, стремящейся вращать шкив против часовой стрелки. Поступая точно так же с силой $2P$, действующей по AB , можем привести ее к силе $2P$, приложенной в O и к паре сил $M_2 = 2PR$, действующей по часовой стрелке. Таким образом, действие натяжений обеих частей ремня приводится к силе $P + 2P = 3P$, изгибающей вал, и к паре $M = PR$, стремящейся вращать вал по часовой стрелке. Если на валу имеется несколько шкивов, то, поступая вышеописанным способом, мы всегда придем к системе сил, пересекающих ось вала под прямым углом, и к скручивающим парам сил. Для определения натяжений в каком-либо сечении вала придется найти величину изгибающего и величину скручивающего момента. Изгибающие силы могут лежать не в одной плоскости, поэтому придется отдельно определять изгибающие моменты в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через ось вала. Если M_1 и M_2 величины их в этих плоскостях для рассматриваемого сечения, то полный момент будет:

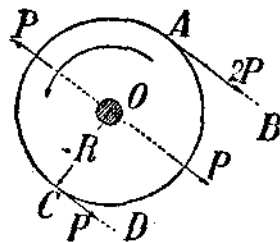
$$M_{1,2} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Для кругового сечения вала каждая ось является главной, поэтому изгиб будет происходить в плоскости момента $M_{изг}$, и величина наибольших нормальных напряжений по плоскости поперечного сечения от изгиба будет:

$$p_{\max} = \frac{M_{изг} r}{J} = \frac{4 M_{изг}}{\pi r^3} \quad (a),$$

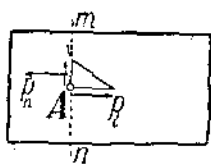
где r — радиус вала. Кроме нормальных напряжений по плоскости поперечного сечения вала, будут действовать касательные напряжения как от перерезывающих сил, так и от скручивающего момента. В валах преобладающее значение имеют касательные напряжения от кручения. Напряжения эти достигают максимальной величины по наружному контуру сечения, где их значение будет:

$$(p_0)_{\max} = \frac{M_{кр} r}{J_0} = \frac{2 M_{кр}}{\pi r^3} \quad (b).$$



Черт. 266.

Если на поверхности вала в рассматриваемом сечении *mn* взять точку *A*, соответствующую наибольшему нормальному напряжению (черт. 267), то по площадке, проходящей через *A* и совпадающей с плоскостью сечения *mn*, будут действовать и нормальные напряжения, определяемые ф-лой (а), и касательные напряжения, вычисляемые по ф-ле (б). По площадке, проходящей через *A* и совпадающей с плоскостью меридионального сечения вала, будут действовать лишь касательные напряжения. Совершенно таким же способом, как и при определении наибольших напряжений при изгибе, здесь можно разыскать две площадки, проходящие через *A* и обладающие тем свойством, что по ним будут действовать лишь нормальные напряжения. Мы их назовем главными площадками; соответствующие им напряжения — главными напряжениями. Величина этих напряжений, на основании ф-л (77), будет:



Черт. 267.

$$p_{\max} = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2}; \quad p_{\min} = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{p_n^2 + 4p_t^2};$$

или, подставляя вместо p_n и p_t их значения из ф-л (а) и (б), получим:

$$p_{\max}^{\min} = \frac{M_{\text{изг}}}{2W} \pm \frac{1}{2W} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \frac{1}{2W} \left(M_{\text{изг}} \pm \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} \right) \quad (179).$$

Здесь через W обозначен момент сопротивления поперечного сечения. Таким образом величина наибольших напряжений при одновременном действии изгиба и кручения в круглых валах такова, как если бы действовал некоторый фиктивный изгибающий момент величины:

$$M = \frac{M_{\text{изг}} + \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{2}.$$

Определив величину наибольшего и наименьшего напряжений и задавшись, на основании условий работы вала, величиной допускаемых напряжений R , мы можем перейти к составлению расчетной ф-лы, служащей для определения диаметра вала. Вид ф-лы будет различен, в зависимости от того, какая теория прочности положена в основание выводов. Если меркой прочности выбрать величину наибольших растяжений (II теория), то размеры вала должны быть выбраны так, чтобы:

$$p_{\max} - \sigma p_{\min} \leq R,$$

или, вставляя вместо $p_{\max}$ и $p_{\min}$ их значения (179) и полагая $\sigma = 0,3$, получим:

$$\frac{1}{W} \left(0,35 M_{\text{изг}} + 0,65 \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} \right) \leq R \quad (180).$$

Ф-ла эта, носящая название ф-лы S.-Venant'a, часто применяется при расчете машинных валов. По поводу ее в последнее время делалось не мало возражений, особенно со стороны английских инженеров, и практика постепенно

переходит к ф-ле, построенной на третьей теории прочности, определяющей размеры конструкций по величине наибольших касательных напряжений. Пользуясь выражениями для $p_{\max}$ и $p_{\min}$, можем нужную нам ф-лу представить так:

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{1}{W} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} \leq R \quad (181).$$

Этой ф-лой и следует пользоваться при назначении размеров валов, так как она построена на более достоверной гипотезе.

Относительно выбора величины R следует повторить то, что было сказано в главе о кручении. Величина допускаемых напряжений зависит от способа действия внешних сил и от способа сопряжения частей вала различных диаметров. Чем резче меняются сечения вала, тем с большими перенапряжениями материала приходится иметь дело.

§ 106. Расчет коленчатого вала.

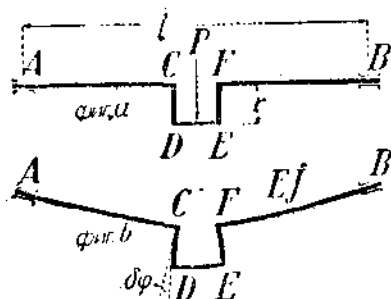
Несмотря на громадную практическую важность, задача об определении напряжений в коленчатом валу до сих пор не получила вполне удовлетворительного решения. До сих пор не имеется надежных данных относительно распределения давлений по длине подшипников, нет ф-л для определения тех перенапряжений материала, которые получаются в местах сопряжения отдельных участков вала. При обычных расчетах задачу упрощают, полагая: 1) что опоры вала совпадают с серединами подшипников, 2) что углы, составляемые осями различных участков вала, при деформации не меняются, и применяют к каждому участку расчетные ф-лы, выведенные для призматических стержней¹⁾. Построенное на таких предположениях решение является, конечно, лишь первым приближением, но дальнейшее усовершенствование расчетов чисто теоретическим путем вряд ли возможно. При тех размерах валов, с какими мы встречаемся на практике, огромную роль должны играть различные случайные причины, как, например, неточности в расположении опор, неправильный износ подшипников и т. д., и более ясное представление о характере и величине напряжений мы можем получить только на основании опытных исследований²⁾.

Если вал расположен на двух подшипниках, то, делая вышеуказанные допущения, мы без затруднения найдем опорные реакции и определим для каждого поперечного сечения величину изгибающего и крутящего моментов. Определение размеров вала¹⁾ может быть выполнено при помощи ф-л (180) или (181). В случае вала, лежащего на трех и более подшипниках, задача об определении опорных реакций является статически неопределенной, и для ее

¹⁾ См. работы G. Duffing'a, Beiträge zur Bestimmung der Formänderungen gekrümmter Kurbelwellen, Berlin, 1906 г.

²⁾ См. М. А. Воропаев, Излом коренных валов двигателей. Изв. Киев. пол. инст., 1911 г.

решения необходимо исследовать деформации вала, что проще всего выполнить при помощи графоаналитического метода. Возьмем простейший пример. Коленчатый вал $ACDEFB$ (черт. 268) постоянной жесткости изгиба EJ лежит



Черт. 268.

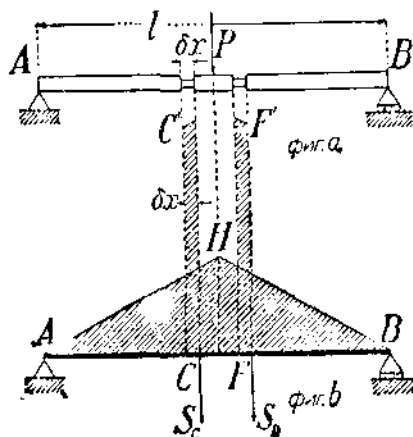
на двух опорах A и B и изгибается силой P , действующей в плоскости колена $CDEF$, принятой за плоскость чертежа. Изогнутая ось вала будет иметь вид, представленный на фиг. б. На протяжении AC , DE и FB изгибающий момент, а, следовательно, и кривизна изогнутой оси будут такие же, как и для прямого стержня длины l и жесткости EJ , нагруженного в соответствующем сечении силой P . Что касается участков CD и FE , то на протяжении каждого из них изгибающий момент

$$R = \frac{EJ}{M_C},$$

остается постоянным. Возьмем, например, участок CD . Для каждого поперечного сечения на этом участке изгибающий момент будет равен опорной реакции A , умноженной на плечо AC . Благодаря действию постоянного момента, ось вала на протяжении CD изогнется по дуге круга радиуса

$$(\varphi)_C = \frac{l}{R} = \frac{M_C l}{EJ} \quad (a).$$

Вследствие изгиба колен CD и FE участок DE изогнутой оси вала, если его поднять на высоту CF , не представит плавного продолжения участков AC и FB . В точках C и F мы будем иметь



Черт. 269.

изломы оси, соответствующие резким изменениям угла наклона касательных на величины $(\delta\varphi)_C$ и $(\delta\varphi)_F$. Благодаря этим изломам, вал прогнется больше, чем соответствующий стержень той же жесткости, и для получения величины прогиба нужно вал сравнивать с стержнем, у которого в точках C и F имеются резкие ослабления сечения (черт. 269). Благодаря этим ослаблениям, у точек C и F сильно возрастут кривизны изогнутой оси стержня. Уменьшая протяжение ослабленных участков и величину соответствующей им жесткости,

мы в пределе придем к излому упругой линии ¹⁾. Размеры ослаблений всегда могут быть подобраны так, чтобы углы изломов получились равными $(\delta\varphi)_C$ и $(\delta\varphi)_D$, тогда прогибы стержня и вала будут одинаковы. Если через EJ_1 обозначить жесткость изгиба в ослабленном месте, то ур-ие изогнутой оси стержня на протяжении ослабления будет:

$$EJ_1 \frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

и угол между касательными, проведенными к изогнутой оси по концам ослабленного участка, определится такой ф-лой:

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M\delta x}{EJ_1}.$$

Чтобы влияние ослаблений было эквивалентно влиянию изгиба колен CD и EF , нужно положить:

$$\frac{M_C \delta x}{EJ_1} = \frac{M_C r}{EJ} \quad \text{и} \quad \frac{M_D \delta x}{EJ_1} = \frac{M_D r}{EJ},$$

откуда находим:

$$\delta x = r \frac{EJ_1}{EJ} \quad (b).$$

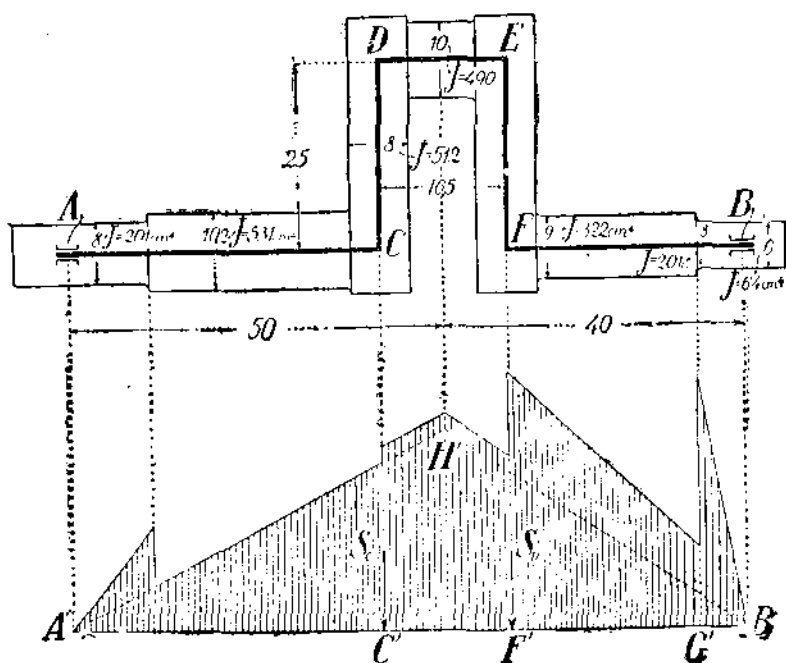
Чем меньше EJ_1 , тем меньше и длина ослабленных участков. Приведа таким образом изгиб вала к изгибу ослабленного стержня, мы можем найти прогиб графоаналитическим путем. Для этого представим себе балку нагруженной фиктивной нагрузкой, меняющейся по закону треугольника AHB , представляющего собой моментную площадь для силы P . На протяжении ослабленных участков ординаты моментной площади должны быть, очевидно, увеличены в отношении $EJ:EJ_1$. Уменьшая длину δx , мы должны в том же отношении уменьшить и EJ_1 (ф-ла b), при этом площади CC' и FF' остаются без изменения, они равны:

$$S_C = \delta x \cdot CC' = r \frac{EJ_1}{EJ} M_C \frac{EJ}{EJ_1} = M_C r \quad \text{и} \quad S_D = \delta x \cdot FF' = M_D r \quad (c).$$

В пределе эти площади можно заменить фиктивными сосредоточенными силами, определяемыми ф-ми (с), тогда прогиб в каком-либо сечении вала будет пропорционален изгибающему моменту в этом сечении от фиктивной сплошной нагрузки AHB и от сосредоточенных фиктивных сил S_C и S_D (черт. 269). Мы для упрощения рассуждений предполагали сечение вала постоянным по всей длине. В случае переменного сечения, мы все участки можем привести к некоторой постоянной по длине жесткости EJ_0 , нужно только в моментной площади ординаты на протяжении каждого участка изменить в отношении $\frac{EJ_0}{EJ}$, где EJ жесткость, соответствующая рассматриваемому участку. То же самое придется проделать и с величиной фиктивных сосредоточенных сил.

¹⁾ Предполагается, что явление происходит в пределах упругости.

На черт. 270 представлен коленчатый вал, расположенный на двух подшипниках. Размеры и моменты инерции сечений даны в сантиметрах. При определении прогиба вал приведен к постоянному сечению, имеющему диаметр $d = 10,2$ см ($J = 531$ см⁴). Для этого на протяжении $C'F'$ ординаты момент-

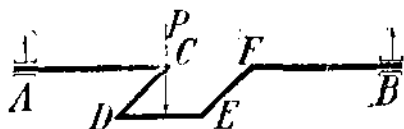


Черт. 270.

ной площади увеличены в отношении 531:490. На участке $F'G'$ увеличение ординат меняется от $\frac{531}{322}$ до $\frac{531}{201}$. На участке $G'B'$ ординаты увеличены в отношении 531:64. Что касается фиктивных сосредоточенных сил S_C и S_D , то они вычисляются по ф-лам:

$$S_C = M_C 25 \frac{531}{512} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \text{ и } S_D = M_D 25 \frac{531}{512} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

В том случае, когда изгибающая сила направлена перпендикулярно к плоскости колена $CDEF$ (черт. 271), прогибы вала могут быть найдены тем же способом. Нужно только принять во внимание, что участки CD и EF будут в этом случае испытывать изгиб и кручение. Величиной скручивания определяются углы перелома $(\varphi)_C$ и $(\varphi)_D$. Принимая во внимание, что моменты, скручивающие участки CD



Черт. 271.

и EF , как раз равны изгибающим моментам M_C и M_D , фигурировавшим в предыдущей задаче, мы получим:

$$(\delta\varphi)_C = \frac{M_C r}{C} \text{ и } (\delta\varphi)_D = \frac{M_D r}{C}.$$

Все отличие от результатов предыдущей задачи состоит в том, что вместо жесткости изгиба войдет жесткость кручения C для участков CD и EF . Имея эти результаты, легко решить задачу об изгибе коленчатого вала при любом наклоне силы к плоскости $CDEF$, нужно только эту силу разложить на две составляющие и исследовать изгиб отдельно от каждой составляющей.

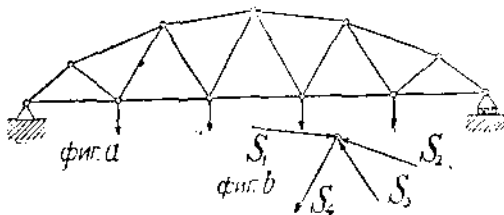
В случае расположения вала на трех и более подшипниках, мы тем же способом, что и раньше, можем привести задачу к изгибу прямого стержня с ослабленными сечениями. За лишние неизвестные удобнее всего принять промежуточные опорные реакции. Мы сначала отбрасываем промежуточные подшипники и исследуем изгиб вала на двух опорах, потом подбираем лишние неизвестные так, чтобы они уничтожали прогибы вала в сечениях, соответствующих серединам промежуточных подшипников.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ¹⁾.

§ 107. Статически неопределимые системы.

Статически неопределимыми мы называем системы, где условий статики недостаточно для определения внутренних усилий или опорных реакций. К этому классу относятся ранее разобранные случаи изгиба многопролетных балок и балок с лишними закреплениями, а также, при некоторых условиях, и системы, составленные из стержней. Стержневые системы нашли особенно широкое распространение в мостах и металлических покрытиях. При их расчете, обыкновенно, предполагают, что стержни в узлах соединены между собой идеальными шарнирами без трения. В таком случае, при условии приложения сил лишь в узлах системы (черт. 272), отдельные стержни будут работать на растяжение или сжатие. Если мы выделим какой-либо узел (фиг. b), то, при расположении стержней в одной плоскости, статика дает 2 ур-ия равновесия, в общем случае 3 ур-ия. Следовательно, для системы, имеющей n узлов, можно написать $2n$ или $3n$ ур-ий, в зависимости от того, имеем ли мы дело с плоской



Черт. 272.

или пространственной системой. Если число ур-ий равняется числу неизвестных

¹⁾ При изложении настоящей главы мы пользовались следующими сочинениями:

В. Л. Кирпичев, Лишние неизвестные в строительной механике.

O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik.

A. Föppel, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. II, III u. V.

Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 1904 г.

A. Castigliano, Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

Литература предмета и история развития методов расчета статически неопределимых систем подробно изложена в статье M. Grüning, Encyklopädie d. Math. Wissensch., Bd. IV—2 II, стр. 419.

усилий (неизвестными будут как величины усилий в отдельных стержнях, так и значения опорных реакций), и система геометрически не изменяема, то все неизвестные могут быть найдены из условий статики. Расчет таких систем излагается в курсах графической статики. Когда число неизвестных больше числа уравнений, мы получим систему статически неопределимую. Для нахождения усилий в „лишних“ стержнях, или для определения „лишних“ опорных реакций, придется к уравнениям статики присоединять дополнительные условия, устанавливаемые на основании рассмотрения деформаций системы. Еще более сложные статически неопределимые системы мы получим, если примем во внимание, что стержни в узлах соединены жестко. В таком случае, к неизвестным продольным растягивающим или сжимающим усилиям стержней придется присоединить неизвестные изгибающие моменты, и число „лишних“ неизвестных значительно возрастет, что сильно усложняет решение задачи. В дальнейшем нам придется иметь дело с весьма разнообразными задачами, и за „лишние“ неизвестные придется выбирать самые различные величины. Чтобы обобщить наши выводы и сделать возможным их приложение во всех случаях, мы будем пользоваться самым общим началом статики: началом возможных перемещений и общим свойством угрутых систем — способностью накапливать при деформации энергию в обратимой форме.

§ 108. Количество потенциальной энергии.

Упругие системы, какими являются, обыкновенно, инженерные сооружения, деформируются под действием нагрузок. Работа, совершаемая при этом внешними силами, обращается в потенциальную энергию системы. Количество энергии вполне определяется окончательным изменением формы и не зависит от того, по какому закону деформации нарастали. Для вычисления количества запасенной в упругой системе энергии мы будем пользоваться таким приемом. Предположим, что нагрузки, вызывающие деформацию системы, возрастают постепенно от нуля до окончательного своего значения. При медленном возрастании сил, скорости перемещений отдельных частей системы будут весьма малы, и потому можно будет пренебрегать силами инерции движущихся масс. При этих условиях мы за все время деформации системы будем иметь равенство между внутренними силами упругости и внешними силами. Вся работа внешних сил обратится в потенциальную энергию системы. (Предполагается, что в тех случаях, когда деформации сопровождаются перемещениями опор, эти перемещения совершаются без трения.) Задача об определении энергии деформации сводится, таким образом, к вычислению работы внешних сил. Что касается внутренних сил упругости, то при медленной деформации они все время уравновешивают внешние нагрузки, следовательно, их работа равна по величине и противоположна по знаку работе внешних сил и потенциальной энергии, накопленной при деформации системы. Мы ранее рассмотрели случаи растяжения, сдвига и кручения призматических стержней и показали, что окончательное

значение энергии, накапливаемой в стержне при деформации, равно половине произведения из окончательного значения силы на перемещение точки приложения силы в направлении линии ее действия (см. §§ 4; 21; 39; 46). Этот результат, являющийся следствием закона Гука, можно получить и в общем случае. Представим себе, что все силы, приложенные к системе, возрастают постепенно от нуля и до конечного своего значения так, что в каждый момент соотношение между силами то же самое, что и между окончательными их значениями. Если материал системы следует закону Гука, и действия силы независимы, то при таком способе приложения в каждый момент перемещения точек приложения сил будут пропорциональны силам, и работа каждой из сил получится равной половине произведения из конечного значения силы на соответствующее перемещение (см. §§ 21; 46 и 47). Результат этот был получен еще Кляпейроном, нашедшим также общее выражение для потенциальной энергии деформированного тела. Ляме в своем курсе теории упругости¹⁾ подчеркивает особое значение, которое должна получить теорема Кляпейрона в строительной механике, и применяет эту теорему к расчету стержневых систем. Если в каком-либо узле системы приложен груз Q , то при постепенном возрастании нагрузки работа ее будет равна:

$$T = \frac{Qf}{2},$$

где f перемещение точки приложения силы. С другой стороны работа эта будет равняться потенциальной энергии системы. Если через S_i , F_i и l_i обозначим усилие, площадь поперечного сечения и длину какого-либо стержня системы, то потенциальная энергия этого стержня (ф-ла 7) будет:

$$\frac{S_i^2 l_i}{2EF_i}$$

и полная энергия системы представится ф-лой:

$$V = \sum \frac{S_i^2 l_i}{2EF_i} \quad (182),$$

где суммирование должно быть распространено на все стержни системы. Приравняв это значение потенциальной энергии работе внешних сил, Ляме получил ур-не:

$$Qf = \sum \frac{S_i^2 l_i}{EF_i},$$

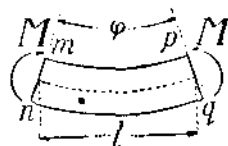
из которого может быть найдено f , если, на основании ур-ий статики, раньше найдены значения S_i .

¹⁾ См. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité, 2-е изд., 1886 г., стр. 79.

§ 109. Потенциальная энергия изгиба.

Исследуем сначала случай чистого изгиба, когда изгибающий момент постоянен по длине бруска. Под действием моментов M (черт. 273) сечение pq повернется относительно mn на угол, определяемый ф-лой:

$$\varphi = \frac{l}{\rho} = \frac{IM}{EJ}.$$



Черт. 273.

Представим себе, что при деформации сечение mn остается неподвижным, и что момент, приложенный в сечении pq , возрастает постепенно от нуля и до конечного своего значения M , тогда работа момента будет равна потенциальной энергии изогнутого стержня (§ 46):

$$V = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M^2 l}{2EJ} = \frac{\varphi^2 MJ}{2l}. \quad (183).$$

В общем случае изгиба момент меняется по длине бруска, и мы будем иметь, кроме нормальных, еще и касательные напряжения. Влияние касательных напряжений значительно лишь в случае коротких брусков, и потому при вычислении энергии изгиба, обыкновенно, этими напряжениями пренебрегают. Выделим элемент бруска двумя поперечными сечениями, проведенными в расстоянии dx друг от друга. На таком расстоянии можно считать изгибающий момент постоянным и применять ф-лу (183). Энергия, накапливаемая в одном элементе бруска, будет:

$$dV = \frac{M^2 dx}{2EJ}, \text{ или } dV = \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Угол между двумя бесконечно близкими сечениями равен:

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} dx.$$

Вставляя это в выражение для dV и производя суммирование, найдем потенциальную энергию всего бруска:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}, \text{ или } V = \int_0^l \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (184).$$

Здесь M будет величиной переменной, зависящей от расположения внешних сил.

В качестве примера рассмотрим случай изгиба балки силой P , приложенной на конце (черт. 274). Для сечения mn , находящегося в расстоянии x от нагруженного конца, изгибающий момент по абсолютной величине равен:

$$M = Px.$$



Черт. 274.

Вставляя это в первую из ф-л (184), найдем:

$$V = \frac{P^2 l^3}{6EJ}.$$

Если это выражение приравнять работе силы P , то получим ур-ие для нахождения прогиба f в точке B :

$$\frac{Pf}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EJ},$$

откуда получаем для f известное выражение (ф-ла 92).

Формулы (184) могут быть применены и в том случае, когда сечение бруска меняется по длине. Вместо жесткости EJ придется вставить в таком случае соответствующую ф-ию от x .

Оценим теперь влияние на прогиб касательных напряжений, для чего составим предварительно соответствующее значение потенциальной энергии. Выражение для энергии сдвига, накапливаемой в одном элементе, нами было найдено раньше (ф-ла 41). Им мы воспользуемся и вычислим энергию в части балки, заключенной между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Если dx расстояние между сечениями и p_t касательное напряжение, то искомое выражение представится таким интегралом:

$$dV_1 = \int_F \frac{p_t^2 dx dF}{2G}.$$

Интегрирование должно быть распространено на всю площадь поперечного сечения. Вместо p_t можно вставить его выражение (ф-лу 70) через поперечную силу Q , тогда вся энергия сдвига, накапливаемая в балке, представится такой ф-лой:

$$V_1 = \int_0^l dx \int_F \left(\frac{QS}{Jb} \right)^2 \frac{dF}{2G}.$$

В случае прямоугольного поперечного сечения величина S для какой-либо точки, лежащей в расстоянии z от нейтрального слоя, равна (§ 59):

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Здесь через h обозначена высота сечения и через b — ширина его. Вставляя это в вышенаписанную ф-лу и полагая

$$dF = b dz,$$

мы, после интегрирования, найдем:

$$V = \frac{3}{5} \int_0^l \frac{Q^2 dx}{bh G} \quad (185).$$

Подобным же образом можно найти выражение энергии сдвига и для других форм поперечного сечения. В общем случае это выражение напишется так:

$$V = k' \int_0^l \frac{Q^2}{2F} \frac{dx}{G} \quad (186).$$

где k' постоянный множитель, зависящий от формы сечения.

Для прямоугольника мы нашли $k' = 1,2$. В случае прокатной балки двутаврового сечения k' меняется от 2 (для балки высотой 50 см) до 2,4 (для балки высотой 8 см).

Полное выражение для потенциальной энергии мы получим, складывая значение энергии, соответствующее действию изгибающего момента, с выше-найденным выражением для энергии сдвига, тогда

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + k' \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2F G} \quad (187).$$

Возможность такого сложения является следствием независимости действия момента и поперечной силы. Благодаря действию касательных напряжений отдельные элементы балки, заключенные между двумя поперечными сечениями, перекашиваются, но при этом перекашивании усилия, нормальные к сечению, очевидно, никакой работы не производят. Следовательно, поперечная сила не вызывает никаких изменений в работе, произведенной изгибающим моментом. В случае сложного напряженного состояния, например, при одновременном действии изгиба и кручения или изгиба и сжатия, для определения полной энергии деформации вычисляем отдельно энергию, соответствующую каждому виду деформации, и потом суммируем полученные результаты. Допустимость такого сложения следует из того, что при малых деформациях работа внешних сил, соответствующая деформации одного какого-либо типа, не меняется с появлением деформации другого типа¹⁾.

§ 110. Обобщенные координаты и обобщенные силы.

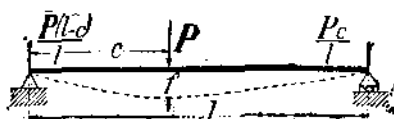
Из понятия об упругом теле следует, что потенциальная энергия, накапливаемая при деформации, зависит от получившегося окончательного изменения формы тела и вполне определяется этим изменением. Как бы мы ни деформировали упругое тело, но раз в конце наблюдения оно вернулось к начальной форме, окончательное значение потенциальной энергии одинаково с начальным.

¹⁾ Исключительные случаи, когда такое сложение невозможно, будут рассмотрены ниже.

Независимые величины, определяющие изменения формы тела, условимся называть координатами, тогда потенциальная энергия будет вполне определенной ф-ией от этих координат. В различных частных случаях за координаты могут быть приняты различные величины. Так, например, при исследовании растяжения брусков деформация вполне определяется удлинениями λ —эту величину мы приняли за координату и в зависимости от нее составили выражение для потенциальной энергии. При рассмотрении кручения изменение формы может быть определено углом закручивания φ —эта величина и была принята за координату. Относительный угол поворота концевых поперечных сечений был принят нами за координату также и в случае чистого изгиба (§ 109). Мы перечислили несколько простейших случаев, где изменение формы определялось одной величиной, одной координатой. Часто приходится иметь дело с несколькими координатами и в самом общем случае — с бесчисленным множеством координат. Вводя в таком обобщенном виде понятие о координатах, приходится пользоваться и обобщенным понятием силы. Во многих случаях удобно рассматривать не каждую силу в отдельности, а некоторые группы сил. Например, часто встречаются пары сил. Величина их вполне определяется моментом. Иногда приходится иметь дело с нагрузкой, равномерно распределенной по длине балки. Действие внешних сил в данном случае вполне определяется интенсивностью нагрузки, т.-е. количеством нагрузки, приходящимся на единицу длины балки. При исследовании изгиба балки, лежащей на двух опорах, приходится иметь дело с изгибающей силой и соответствующими ей опорными реакциями. Эта система, состоящая из трех сил, вполне определяется величиной изгибающей силы, и потому всю группу сил можно рассматривать, как одну обобщенную силу. В примерах, разобранных ранее, мы уже пользовались обобщенными силами и выражали энергию тела в виде ф-ии от этих сил. Например, при растяжении бруска мы имели дело не с одной силой, а с двумя равными и прямо противоположными растягивающими силами. При кручении и чистом изгибе мы имели дело с двумя равными и прямо противоположными парами сил. Эта группа сил определяется величиной момента пары M , и энергия деформации была представлена в виде ф-ии от обобщенной силы M . При выборе обобщенных координат и обобщенных сил должно быть принято во внимание определенное соответствие между этими величинами. Координата может иметь измерение длины, иногда измерение отвлеченного числа, площади и т. д. Каждому типу координаты соответствует определенный тип обобщенной силы. Как понимать это соответствие, удобнее всего выяснить на примерах. Когда мы рассматривали простое растяжение, за обобщенную координату было принято удлинение бруска λ . Обобщенная сила представится в виде двух взаимно противоположных сил P . Если координате λ дать бесконечно-малое приращение $\delta\lambda$, то внешние силы совершат при этом работу $P\delta\lambda$, равную произведению из обобщенной силы на приращение координаты. При кручении и чистом изгибе мы имели координату φ и обобщенную силу M . Работа

внешних сил при изменении координаты на величину $\delta\varphi$ будет $M\delta\varphi$, т.е. опять представляется произведением силы на приращение координаты. Этим и определяется упомянутое выше соответствие между обобщенными силами и обобщенными координатами. Раз выбрана известная система координат, то соответствующие обобщенные силы должны быть выбраны таким образом, чтобы произведение из внешних сил на приращении координат давали работу внешних сил. Приведем еще несколько примеров.

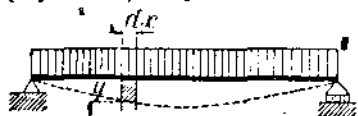
Балка, опертая по концам, изгибается сосредоточенной силой P (черт. 275). Группу,



Черт. 275.

состоящую из силы P и соответствующих реакций, примем за обобщенную силу. Работа этих сил при деформации балки вполне определяется изменением величины прогиба f , поэтому прогиб в данном случае должен быть принят за обобщенную координату.

Рассмотрим теперь изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой (черт. 276). Кроме заданной нагрузки, на балку будут действовать еще и опорные реакции. Вся эта группа сил определяется



Черт. 276.

интенсивностью нагрузки q . Эту величину мы и примем за обобщенную силу. Что же в таком случае должно быть принято за обобщенную координату? Чтобы ответить на этот вопрос,

найдем выражение работы внешних сил при отклонении балки от положения равновесия. Если через y обозначить прогиб балки в каком-либо сечении, а через δy — бесконечно-малое изменение этого прогиба, то работа элемента сплошной нагрузки, лежащей на протяжении dx , будет: $q dx \delta y$. Работа всей нагрузки представится так:

$$\int_0^l q dx \delta y = q \int_0^l dx \delta y \quad (a).$$

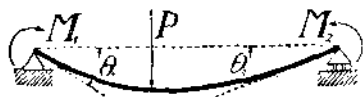
Если принять в внимание, что $\int_0^l y dx$ есть не что иное, как площадь F ,

заклученная между линией, соединяющей опорные точки, и изогнутой осью балки, то выражение (a) представится в виде: $q \delta F$, где δF приращение площади F , соответствующее изменению прогибов δy . За обобщенную координату, согласно высказанному определению, нужно принять величину F .

Возьмем еще пример где изменение формы бруска определяется несколькими координатами.

Балка изгибается силой P и парами сил M_1 и M_2 , приложенными по концам (черт. 277). Будем различать здесь три независимые группы ил. Одна из этих групп состоит из силы P и вызываемых ею опорных реакций. Две другие группы представлены парами M_1 и M_2 и соответствующими им

опорными реакциями. Примем эти группы сил за обобщенные силы и определим их величинами P , M_1 и M_2 . Чтобы найти соответствующие обобщенные



Черт. 277.

координаты, рассмотрим работу внешних сил при весьма малом отклонении балки от положения равновесия. Пары сил M_1 и M_2 производят работу лишь в том случае, если меняются углы поворота θ_1 и θ_2 . Сила P работает при изменении прогиба f под грузом.

Обозначим через $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ и δf приращения θ_1 и θ_2 и f при отклонении балки от положения равновесия, тогда работа внешних сил, соответствующая этим отклонениям, будет:

$$M_1 \delta\theta_1 + M_2 \delta\theta_2 + P \delta f,$$

следовательно, величины θ_1 , θ_2 и f будут обобщенными координатами в данном случае.

§ 111. Общее выражение потенциальной энергии упругих тел.

В рассмотренных нами примерах (см. § 109) потенциальная энергия могла быть представленной или в виде ф-ии от внешних сил, или в виде ф-ии от координат. В том и другом случае получалась однородная ф-ия второй степени. Переходя от частных примеров к общему случаю, выясним прежде всего, при каких условиях энергия деформации выражается однородной ф-ией второй степени. Для этого воспользуемся началом возможных перемещений. В теоретической механике им пользуются для исследования равновесия систем, составленных из абсолютно твердых тел, но его легко распространить и на упругие системы. Выделим из упругой системы одну материальную точку; на нее, кроме внешних сил, будут действовать внутренние силы упругости, заменяющие действие системы на выделенную точку. Для равновесия выделенной точки необходимо, чтобы работа внешних и внутренних сил, приложенных к точке, на всяком возможном перемещении, равнялась нулю. Если через δT обозначим работу внешних сил, а через δJ — работу сил внутренних, то высказанное условие напишется так

$$\delta T + \delta J = 0 \quad (188).$$

Подобное выражение может быть написано для каждой точки системы. Складывая эти ур-ия и распространяя суммирование на все точки системы, найдем:

$$\sum \delta T + \sum \delta J = 0 \quad (189).$$

Первый член представляет собой работу всех внешних сил на возможном перемещении, а второй — работу сил внутренних. Принимая во внимание, что работа внутренних сил равна по величине и противоположна по знаку потенциальной энергии системы, и обозначая через δV изменение потенциальной

энергии, соответствующее принятому возможному перемещению, мы можем основное ур-ие равновесия написать в таком виде:

$$\Sigma \delta T - \delta V = 0 \quad (190).$$

Выражение для работы внешних сил может быть представлено в ином виде, если воспользоваться понятием об обобщенных силах. Условимся обобщенные силы обозначать большими буквами $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$, а соответствующие им координаты — малыми буквами $\varphi, \psi, \theta, \dots$, тогда работа внешних сил на каком-либо возможном перемещении будет равна:

$$\Phi \delta \varphi + \Psi \delta \psi + \Theta \delta \theta + \dots,$$

где $\delta \varphi, \delta \psi, \delta \theta, \dots$ изменения обобщенных координат, соответствующие принятому возможному перемещению. Основное ур-ие (190) переписывается так:

$$\Phi \delta \varphi + \Psi \delta \psi + \Theta \delta \theta + \dots = \delta V \quad (a).$$

Потенциальная энергия V является ф-ней координат $\varphi, \psi, \theta, \dots$, и потому изменение ее может быть представлено так:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial V}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial V}{\partial \theta} \delta \theta + \dots$$

Вставляя это в ур-ие (a) и перенося все члены в левую часть, найдем:

$$\left(\Phi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi + \left(\Psi - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right) \delta \psi + \left(\Theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \delta \theta + \dots = 0 \quad (b).$$

Обобщенные координаты $\varphi, \psi, \theta, \dots$ представляют собой независимые величины, и их приращения $\delta \varphi, \delta \psi, \delta \theta, \dots$ также совершенно независимы. Чтобы при этих условиях ур-ие (b) всегда было удовлетворено, необходимо положить коэффициенты при приращениях координат $\delta \varphi, \delta \psi, \dots$ равными нулю, тогда:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \Phi; \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \Psi; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Theta \quad (191).$$

Внешние силы представляются производными от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

При выводе этой теоремы мы пользовались самым общим началом статики: началом возможных перемещений, и потому полученный результат справедлив для всех систем, где внутренние силы имеют потенциал. Перейдем теперь к упругим телам, следующим закону Гука. Рассмотрение элементарных случаев деформации показывает, что для этих тел изменения формы пропорциональны внешним силам, и, следовательно, координаты являются линейными ф-циями от внешних сил. Это утверждение остается в силе и в самом общем случае деформации, если только форма тела и расположение сил таковы, что деформации, вызываемые одной какой-либо системой сил, не вносят изменений в действия других сил, т.е., когда имеет место принцип независимости действия

сил. В таком случае действия отдельных сил складываются, и каждая координата линейно зависит от сил. Для обобщенных координат $\varphi, \psi, \theta, \dots$ получим выражения:

$$\begin{aligned}\varphi &= a_1 \Phi + b_1 \Psi + c_1 \Theta + \dots \\ \psi &= a_2 \Phi + b_2 \Psi + c_2 \Theta + \dots \\ \theta &= a_3 \Phi + b_3 \Psi + c_3 \Theta + \dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\quad (192).$$

Здесь $a_1, \dots, b_1, \dots, c_1, \dots$ постоянные величины, зависящие от свойств упругой системы. Постоянные члены не входят в выражение (192), так как мы отсчитываем наши координаты от ненапряженного состояния, и, следовательно, $\varphi, \psi, \theta, \dots$ должны равняться нулю, когда обращаются в нуль обобщенные силы $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$. Решая уравнения (192) относительно $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$, выразим обобщенные силы через координаты. Выражения эти будут линейными функциями координат:

$$\begin{aligned}\Phi &= A_1 \varphi + B_1 \psi + C_1 \theta + \dots \\ \Psi &= A_2 \varphi + B_2 \psi + C_2 \theta + \dots \\ \Theta &= A_3 \varphi + B_3 \psi + C_3 \theta + \dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\quad (193).$$

Вставляя это в равенства (191), найдем, что частные производные от потенциальной энергии по координатам являются линейными функциями координат; так как эти ф-ии не включают постоянных членов, то потенциальная энергия системы представится однородной функцией второй степени от координат. Вставляя вместо координат выражения (192), найдем, что потенциальная энергия может быть представлена также в виде однородной функции второй степени от внешних сил.

Возьмем в качестве примера *изгиб балки с опертыми концами парами сил, приложенными по концам*. За обобщенные координаты примем углы θ_1 и θ_2 поворота концевых касательных, тогда соответствующими обобщенными силами будут моменты M_1 и M_2 . Система уравнений (192) примет в этом случае вид (§ 78):

$$\theta_1 = \frac{M_1 l}{3EJ} + \frac{M_2 l}{6EJ}; \quad \theta_2 = \frac{M_2 l}{3EJ} + \frac{M_1 l}{6EJ} \quad (a).$$

Решая эти уравнения относительно обобщенных сил, найдем выражения, соответствующие системе (193):

$$M_1 = \frac{2EJ}{l} (2\theta_1 - \theta_2) \quad \text{и} \quad M_2 = \frac{2EJ}{l} (2\theta_2 - \theta_1).$$

Принимая во внимание, что [ф-ла (191)]:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = M_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = M_2,$$

получим выражение для потенциальной энергии в виде такой однородной ф-ии второй степени от координат:

$$V = \frac{2EJ}{l} (\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 + \theta_2^2).$$

Если вместо координат θ_1 и θ_2 вставить их выражения через обобщенные силы M_1 и M_2 [ф-ла (а)], то получим:

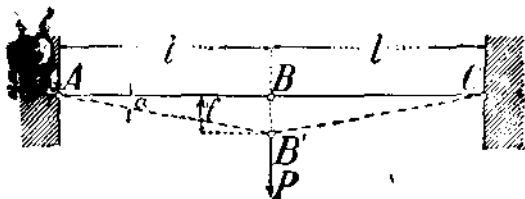
$$V = \frac{l}{6EJ} (M_1^2 + M_1M_2 + M_2^2).$$

Для упрощения иногда выбирают обобщенные координаты таким образом, чтобы в выражении потенциальной энергии пропадали члены, заключающие произведения координат. Координаты, выбранные таким образом, называют *главными* или *нормальными* координатами. Они играют важную роль в теории колебаний. Мы в дальнейшем воспользуемся ими при исследовании изгиба балок.

§ 112. Исключительные случаи.

При составлении общего интеграла для энергии деформации мы предположили, что материал следует закону Гука, и что имеет место принцип сложения действия сил. Если система такова, что ее деформация существенно меняет действие приложенных сил, принцип сложения уже не имеет места, энергия не будет выражаться однородной ф-ией второй степени. Выясним это обстоятельство на отдельных примерах.

Предположим, что два невесомых призматических стержня соединены между собой шарниром B и шарнирно закреплены в точках A и C (черт. 278). Под действием силы P стержни растягиваются, и шарнир B перейдет в B' . Деформация системы вполне определяется перемещением f точки B . Эту величину мы примем за обобщенную координату. Соответствующей обобщенной силой будет груз P



Черт. 278.

и вызываемые им реакции в шарнирах A и C . Найдем выражение для потенциальной энергии деформированной системы. Если через α обозначить угол между направлениями стержней после деформации и прямой AC , то удлинение стержней будет:

$$\lambda = \frac{l}{\cos \alpha} - l = \frac{la^2}{2}.$$

Здесь принято во внимание, что α малый угол и вместо $\cos \alpha$ вставлена величина $1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Вместо $\sin \alpha$ будем в дальнейшем писать α . Из условия равно-

весия шарнира B' найдем, что растягивающее усилие в стержнях равно $\frac{P}{2\alpha}$. В таком случае удлинение их будет: $\frac{P}{2\alpha} \frac{l}{EF}$. Приравнявая это вышенайденному значению λ , получим:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Pl}{EF}},$$

и, следовательно, растягивающее усилие в стержнях равно:

$$S = \frac{P}{2\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{P^2 EF}.$$

Потенциальная энергия, накопленная в системе при растяжении стержней, будет:

$$V = \frac{S^2 l}{EF} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} \quad (a).$$

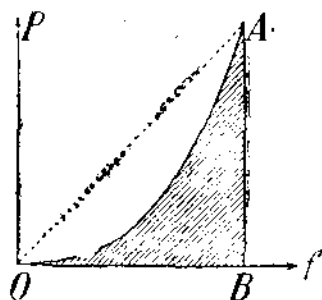
Мы не получили ф-ии второй степени от внешних сил, чего и нужно было ожидать, так как координата f не является линейной ф-ией силы P . В самом деле:

$$f = l\alpha = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}} \quad (194).$$

При помощи последней ф-лы потенциальная энергия системы (a) может быть представлена в таком виде

$$V = \frac{Pf}{4}.$$

Этот результат отличается от тех, которые мы получили в ранее разобранных примерах. Пока перемещения были пропорциональны силам, потенциальная энергия получалась равной половине произведения из окончательного значения P на соответствующие координаты.



Черт. 279.

В данном случае энергия равна лишь четверти этого произведения. Сущность этого результата наглядно может быть выяснена при помощи диаграммы (черт. 279). Если по оси абсцисс откладывать перемещения f , а по ординатам — соответствующие значения P , то мы не получим прямой, как это бывало раньше, а некоторую кривую. Кривая эта может быть построена по точкам на основании ф-лы (194). Площадь, заключенная между кривой, осью абсцисс и край-

ней ординатой, представляет собой работу силы P при деформации (предполагается, что сила P растет постепенно от нуля и до конечного своего значения) и является меркой потенциальной энергии, накопленной в системе. Эта площадь меньше площади треугольника OAB , который получился бы при линейной зависимости между силой P и перемещением.

Если вместо P вставить его выражение через f из ф-лы (194), то потенциальная энергия представится в таком виде:

$$V = \frac{EF}{4l^3} f^4 \quad (b).$$

Сюда координата вошла в четвертой степени. Путем дифференцирования находим:

$$\frac{dV}{df} = \frac{EF}{l^3} f^3 = P.$$

Тем обстоятельством, что производная от потенциальной энергии по координате равна соответствующей силе, можно воспользоваться для решения задачи, и тем упростить нахождение зависимости между f и P . Все вычисление тогда сводится к следующему. Из черт. 278 находим, что удлинение стержня равно:

$$\lambda = \sqrt{l^2 + f^2} - l = \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{l}.$$

Здесь принято во внимание, что f мало по сравнению с l , и, следовательно:

$$\sqrt{l^2 + f^2} = l \left(1 + \frac{f^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} = l \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{l^2} \right).$$

Потенциальная энергия системы будет:

$$V = \frac{\lambda^2 EF}{l} = \frac{EF}{4l^3} f^4.$$

Приравнявая производную от потенциальной энергии по координате f соответствующей силе, найдем искомую зависимость между f и P .

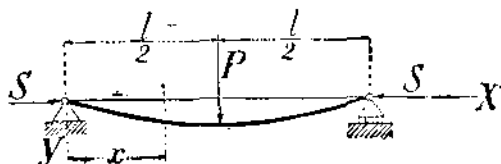
В качестве второго примера рассмотрим простейший случай одновременного действия изгиба и сжатия (черт. 280). Кроме поперечной силы P , приложенной по середине пролета, на брусok действуют продольные сжимающие силы S . Принцип сложения действия сил в данном случае не применим, — силы S вызывают не только сжатие, но влияют также и на изгиб стержня. Нужно ожидать, что потенциальная энергия изогнутого бруска не будет однородной ф-ией второй степени. Дифференциальное уравнение равновесия напишется в данном случае так:

$$EJy'' = -\frac{P}{2}x - Sy.$$

Общий интеграл у-ия будет:

$$y = A \sin ax + B \cos ax - \frac{Px}{2S}.$$

(Здесь принято обозначение $a = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$.)



Черт. 280.

В этом легко убедиться путем подстановки. Произвольные постоянные A и B выберем так, чтобы были удовлетворены условия на концах:

при $x = 0$ должно быть $y = 0$; при $x = \frac{l}{2}$ должно быть $y' = 0$.

Первое условие дает нам $B = 0$, из второго — находим:

$$A = -\frac{P}{2aS \cos \frac{al}{2}}.$$

Окончательное уравнение изогнутой оси для левой половины бруска напишется так:

$$y = -\frac{P}{2aS \cos \frac{al}{2}} \sin ax - \frac{Px}{2S} \quad (с).$$

Вставляя вместо x величину $\frac{l}{2}$, найдем прогиб по середине пролета:

$$f = \frac{P}{2aS} \left(\operatorname{tg} \frac{al}{2} - \frac{al}{2} \right).$$

Результат этот может быть представлен в более удобной форме, если вместо S вставить его значение $a^2 EJ$. После простых преобразований получаем:

$$f = \frac{P l^3}{48 EJ} \frac{\operatorname{tg} \frac{al}{2} - \frac{al}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{al}{2} \right)^3} = f_0 \mu \quad (195).$$

Здесь через f_0 обозначен прогиб, получающийся при действии только поперечной силы P . Коэффициент μ зависит от размеров бруска и величины продольной силы ¹⁾, прогиб f линейно зависит от силы P . Зависимость его от продольной силы, входящей в выражение для a , более сложная. Составим теперь выражение для энергии изгиба стержня. Вставляя вместо прогиба y найденное выше выражение (с), получим:

$$V = EJ \int_0^{\frac{l}{2}} (y'')^2 dx = \frac{P^2 l \left(1 - \frac{\sin al}{al} \right)}{16 S \cos^2 \frac{al}{2}} \quad (196).$$

Присоединяя к этому энергию сжатия $\frac{S^2 l}{2 EF}$, найдем полную энергию изогнутого бруска. Как и в предыдущем случае, выражение энергии не представляет собой однородной функции второй степени от внешних сил.

В качестве последнего примера укажем еще на задачу о сжатии шаров и цилиндров (§ 37). Здесь величина вдавливания не будет пропорциональна

¹⁾ Дальше будет показано (глава XV), что для стержней, поперечные размеры которых не очень малы по сравнению с длиной, коэффициент μ близок к единице. В таком случае можно пренебречь влиянием продольной силы на прогиб и пользоваться, как это мы делали раньше, принципом сложения действия сил.

давлению, и потому для потенциальной энергии мы и в этом случае не получим однородной ф-ии второй степени. Рассмотренные случаи являются исключением.

Задачи об одновременном действии изгиба и растяжения, или изгиба и сжатия, чуть ли не единственные примеры, имеющие практическое значение, где принцип сложения действия сил не применим. Поэтому дальнейшие теоремы, в основание вывода которых положено допущение, что потенциальная энергия — однородная ф-ия второй степени от координат, находят в различных отделах сопротивления материалов самое широкое применение.

§ 113. Теорема Кастилиано.

Было показано, что производная от потенциальной энергии по какой-либо координате равна соответствующей силе [(ф-ла (191))]. Теорема Кастилиано представляет полное соответствие с этой теоремой. Оказывается, что производная от потенциальной энергии по какой-либо силе равна соответствующей координате. Для приложения теоремы Кастилиано нужно потенциальную энергию представить в виде ф-ии от независимых внешних сил, и эта ф-ия должна быть однородной ф-ией второй степени. Справедливость теоремы Кастилиано легко проверить на ранее рассмотренных частных случаях, можно доказать ее в общем виде. Чтобы составить производную от потенциальной энергии по какой-либо обобщенной силе, например, Φ , нужно этой силе дать весьма малое приращение, и найти соответствующее приращение потенциальной энергии V . Мы знаем, что при наличии закона Гука и принципа сложения действия сил, каждая из координат $\varphi, \psi, \theta, \dots$ является линейной ф-ией от обобщенных сил $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ (ф-лы 192), и если силе Φ будет дано приращение $\delta\Phi$, то этому будут соответствовать такие приращения координат:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} \delta\Phi; \quad \delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} \delta\Phi; \quad \delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\Phi} \delta\Phi; \dots \quad (a).$$

При этом изменении координат внешние силы, приложенные к системе, совершат некоторую работу, которая обратится в потенциальную энергию системы и сообщит ей некоторое приращение δV . Из понятия об обобщенных силах и обобщенных координатах следует такое выражение для работы внешних сил на перемещениях $\delta\varphi, \delta\psi, \delta\theta, \dots$:

$$\delta T = (\Phi + \delta\Phi) \delta\varphi + \Psi \delta\psi + \Theta \delta\theta + \dots$$

Приравнявая это приращение потенциальной энергии и отбрасывая малую величину высшего порядка $\delta\Phi \delta\varphi$, мы, на основании равенства (a), получим:

$$\delta V = \Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} \delta\Phi + \Psi \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} \delta\Phi + \Theta \frac{\partial\theta}{\partial\Phi} \delta\Phi + \dots$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi} = \text{пред.} \left(\frac{\delta V}{\delta\Phi} \right) = \Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} + \Psi \frac{\partial\psi}{\partial\Phi} + \Theta \frac{\partial\theta}{\partial\Phi} + \dots \quad (b).$$

Воспользуемся теперь теоремой Кляпейрона, согласно которой потенциальная энергия системы равна половине произведений из сил на соответствующие им координаты (§ 108). При наших обозначениях она напишется так:

$$2V = \Phi \varphi + \Psi \psi + \Theta \theta + \dots$$

Составляя производную от обеих частей по Φ , найдем:

$$2 \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi + \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} + \Psi \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} + \Theta \frac{\partial \theta}{\partial \Phi} + \dots \quad (c).$$

При этом дифференцировании принимаем во внимание, что $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ независимые величины, а координаты $\varphi, \psi, \theta, \dots$ могут, вообще говоря, зависеть от всех сил $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$. Сравнивая (b) и (c), получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = \varphi \quad (197).$$

Следовательно, производная от потенциальной энергии по какой-либо силе дает соответствующую координату. В этом и состоит теорема Кастилиано. Она дает очень удобный способ для определения перемещений; нужно только помнить, что потенциальная энергия должна быть представлена в виде Φ -ия от независимых внешних сил, и эта Φ -ия должна быть однородной Φ -ией второй степени. В тех случаях, где принцип сложения действия сил не применим, пользование теоремой Кастилиано может привести к неверным результатам, в чем легко убедиться, применяя теорему к выше рассмотренным исключительным случаям (§ 112).

Выгодность применения теоремы Кастилиано удобнее всего выяснить на частных примерах.

Возьмем случай растяжения винтовой рессоры ¹⁾ силами P (черт. 88). Потенциальная энергия системы будет (ф-ла 52):

$$V = \frac{M^2 l}{2 G J_p} = \frac{P^2 R^2 \cdot 2\pi R \cdot n}{2 G J_p}.$$

Координатой, соответствующей обобщенной силе P , будет искомое растяжение рессоры λ . На основании теоремы Кастилиано получим:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{P R^3 2\pi n}{G J_p},$$

что совпадает с ранее полученным результатом (ф-ла 55).

Найдем теперь прогиб балки, одним концом заделанной в стену и нагруженной на другом конце силой P . Потенциальную энергию выразим в виде

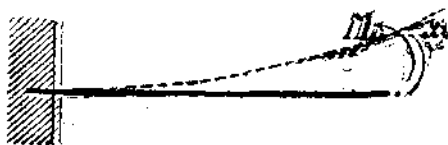
¹⁾ Вопрос о деформации различных рессор подробно разобран в книге Castigliano: Theorie der Biegungs- und Torsions-Federn.

ф-ии от силы P , тогда координата, соответствующая выбранной силе, будет очевидно, прогиб f конца балки. Пренебрегая энергией от сдвига, будем иметь:

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}; \quad M = Px; \quad f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Рассмотрим изгиб той же балки парой сил M_0 (черт. 281). Потенциальную энергию представим в виде ф-ии от M_0 . Соответствующая выбранно обобщенной силе координата будет угол поворота конца балки φ . По теореме Кастилиано имеем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{\partial}{\partial M_0} \int_0^l \frac{M_0^2 dx}{2EJ} = \\ &= \frac{\partial}{\partial M_0} \frac{M_0^2 l}{2EJ} = \frac{M_0 l}{EJ}. \end{aligned}$$



Черт. 281.

Иногда важно найти величину таких перемещений, которым нет соответствующих внешних сил, тогда приходится пользоваться введением фиктивных нагрузок. Положим, что в только-что разобранном примере нас интересует не угол φ , а вертикальный прогиб конца балки. Вводим фиктивную вертикальную силу P , приложенную на конце балки. Соответствующее введенной силе перемещение и будет искомый прогиб f . На основании теоремы Кастилиано:

$$f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}.$$

Здесь

$$M = M_0 + Px; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x$$

(вертикальную силу P направим вверх, чтобы прогиб получить с положительным знаком), следовательно:

$$f = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M_0 + Px) x dx = \frac{M_0 l^2}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Так как сила P на самом деле отсутствует, то в полученном результате нужно положить $P = 0$; будем иметь:

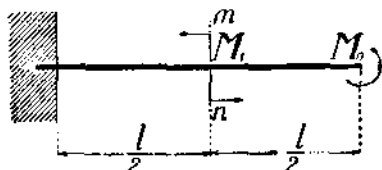
$$f = \frac{M_0 l^2}{2EJ}.$$

Это и есть искомый прогиб балки под действием пары сил, приложенной на конце.

Положим теперь, что в том же случае изгиба балки парой сил нам нужно найти угол поворота φ_1 какого-либо промежуточного сечения, например, сечения m по середине пролета (черт. 282). Приложим тогда к нашему бруску в сечении m фиктивную пару сил M_1 . Соответствующая

введенной фиктивной паре координата и будет интересующий нас угол φ_1 .

Потенциальная энергия в данном случае будет:



Черт. 282.

$$V = \frac{M_0^2 \frac{l}{2}}{2EJ} + \frac{(M_0 + M_1)^2 \frac{l}{2}}{2EJ},$$

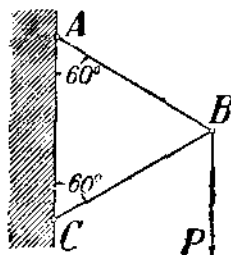
следовательно:

$$\varphi_1 = \frac{\partial V}{\partial M_1} = \frac{(M_0 + M_1)l}{2EJ}.$$

Так как в действительности пары сил M_1 нет, то в полученном результате нужно положить $M_1 = 0$, тогда:

$$\varphi_1 = \frac{M_0 l}{2EJ}.$$

Рассмотрим теперь систему из двух стержней AB и BC равной длины и одинакового поперечного сечения, связанных между собой шарниром B и прикрепленных шарнирами A и C к стене (черт. 283). Найдем, пользуясь теоремой Кастилиано, перемещение шарнира B под действием вертикальной нагрузки P . Благодаря шарнирам, стержни будут работать только на растяжение и на сжатие. При выбранных углах наклона растягивающие усилия стержня AB и сжимающие — стержня BC равны P , следовательно:



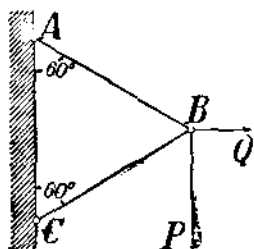
Черт. 283.

$$V = 2 \frac{Pl}{2EF},$$

и вертикальное перемещение шарнира B равно:

$$f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{2Pl}{EF}.$$

Для получения перемещения точки B по горизонтальному направлению придется ввести фиктивную горизонтальную силу Q (черт. 284). Усилия в стержнях при одновременном действии сил P и Q будут: для стержня AB растяжение $P + \frac{Q}{\sqrt{3}}$, для стержня BC сжатие $P - \frac{Q}{\sqrt{3}}$,



Черт. 284.

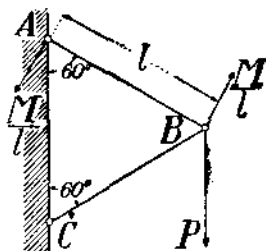
$$V = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2EF} + \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2EF},$$

следовательно, горизонтальное перемещение h для точки B будет равно:

$$h = \frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right) l}{\sqrt{3} EF} - \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right) l}{\sqrt{3} EF} = \frac{2Ql}{3EF}.$$

Так как силы Q в действительности нет, то в результате, полученном для перемещения h , нужно положить $Q=0$, откуда следует $h=0$.

Если бы нужно было найти угол поворота какого-либо стержня, например, стержня AB , под действием силы P , то пришлось бы ввести фиктивную обобщенную силу, для которой угол поворота стержня AB является координатой. Такой обобщенной силой, очевидно, будет пара сил M , приложенная, согласно черт. 285. Силы, величины $\frac{M}{l}$, направлены перпендикулярно к оси стержня. Работа их при удлинении стержня равна нулю. При повороте стержня на угол φ работа тех же сил будет $M\varphi$. Для составления потенциальной энергии системы, при одновременном действии силы P и пары M , нужно найти усилия в стержнях AB и BC . Растягивающее усилие в стержне AB будет:



Черт. 285.

$$P - \frac{M}{l} \lg 30^\circ = P - \frac{M}{l\sqrt{3}}.$$

Сжимающее усилие в стержне BC будет:

$$P - \frac{M}{l \cos 30^\circ} = P - \frac{2M}{l\sqrt{3}}.$$

Угол поворота φ найдем, применяя теорему Кастилиано:

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial M} = - \frac{\left(P - \frac{M}{l\sqrt{3}}\right) l}{l\sqrt{3} EF} - \frac{2 \left(P - \frac{2M}{l\sqrt{3}}\right) l}{l\sqrt{3} EF} = - \frac{3Pl}{l\sqrt{3} EF} + \frac{5Ml}{3l\sqrt{3} EF}.$$

Так как в действительности пары сил нет, то в полученном результате нужно положить $M=0$, тогда

$$\varphi = - \frac{P\sqrt{3}}{EF}.$$

Отрицательный знак получили потому, что под действием силы P стержень AB вращается в направлении, противоположном направлению пары сил M .

Мы взяли систему, состоящую только из двух стержней, чтобы упростить выкладки. Теорема Кастилиано с успехом может быть применена к системе с большим числом стержней. Пользуясь ею, можно находить не только перемещения узлов, но также углы поворота отдельных стержней и изменение углов между стержнями.

§ 114. Начало наименьшей работы.

Начало наименьшей работы дает весьма удобный способ для разыскания „лишних неизвестных“ в статически неопределимых системах. Оно является

непосредственным следствием теоремы Кастилиано¹⁾, и для его применения необходимо предварительно представить потенциальную энергию деформированной системы в виде Φ -ии от сил. Среди этих сил будут как заданные нагрузки, так и искомые „лишние неизвестные“. Для большей ясности мы отдельно рассмотрим приложение начала наименьшей работы к определению лишних опорных реакций, а потом применим его к нахождению неизвестных внутренних усилий системы. Лишние опорные реакции являются следствием лишних закреплений. При расчете мы эти закрепления отбрасываем, и влияние их на систему заменяем неизвестными пока силами $X, Y, Z, \dots$. Таким образом, приходим к статически определенной системе, на которую, кроме заданных нагрузок, будут действовать неизвестные силы $X, Y, Z, \dots$. Мы можем потенциальную энергию системы представить в виде Φ -ии от этих сил²⁾, тогда, согласно теореме Кастилиано, производные:

$$\frac{\partial V}{\partial X}, \quad \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{\partial V}{\partial Z}, \dots$$

представляют собой перемещения, соответствующие силам $X, Y, Z, \dots$ (Здесь мы, конечно, и перемещения и силы понимаем в обобщенном смысле.) Нам придется иметь дело с опорами двух категорий: с опорами неподвижными и подвижными. В первом случае перемещения равны нулю, и мы для определения „лишних неизвестных“ получаем систему линейных ур-ий:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0; \dots \quad (198).$$

В случае подвижных опор мы будем предполагать, что перемещения совершаются без трения. При этом условии реактивные силы $X, Y, \dots$ нормальны к направлению перемещения, и ур-ия (198) также сохраняют свое значение. Следовательно, в обоих случаях определение „лишних неизвестных“ равносильно подысканию для $X, Y, Z, \dots$ таких значений при которых потенциальная энергия системы приобретает значение $\max$ и $\min$. Нетрудно показать, что в данном случае имеет место $\min$ имум. В самом деле потенциальная энергия является однородной Φ -ией второй степени от внешних сил и имеет, следовательно, вид:

$$V = A\Phi^2 + B\Psi^2 + C\Theta^2 + A\Phi\Psi + B'\Psi\Theta + \dots$$

Величина эта всегда положительна, поэтому коэффициенты $A, B, C, \dots$ имеют

1) Начало наименьшей работы найдено Л. Е. Мэнбрéа, представившим свое исследование Туринской академии наук в 1857 г., значительно ранее появления работы Кастилиано: Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici, в которой имеется доказательство его знаменитой теоремы.

2) Необходимые опорные реакции при посредстве ур-ий статики выражаются через внешние силы и лишние неизвестные $X, Y, \dots$ и в выражение для потенциальной энергии самостоятельно не войдут.

положительное значение¹⁾, положительны также и вторые производные от V по силам, что является условием для минимума. Отсюда получаем такое правило: для нахождения неизвестных реакций $X, Y, Z, \dots$ нужно величину их подобрать таким образом, чтобы потенциальная энергия системы получила свое наименьшее значение. В этом и заключается начало наименьшей работы. Применим его к нескольким частным примерам.

Балка постоянного сечения одним концом заделана, другим — оперта и нагружена равномерно распределенной нагрузкой q кг/м (черт. 286). За лишнюю неизвестную примем правую опорную реакцию X . Если пренебречь влиянием скалывающих сил, то для V получим выражение:



Черт. 286.

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}, \text{ где } M = Xx - \frac{qx^2}{2} \text{ и } \frac{\partial M}{\partial X} = x.$$

На основании начала наименьшей работы получим:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial X} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0, \text{ откуда } X = \frac{3}{8} ql.$$

Этот результат мы получили раньше (§ 83) иным путем. Если бы под влиянием нагрузки опора B осела на величину δ , то, на основании теоремы Кастилиано, мы получили бы для нахождения X уравнение:

$$\frac{1}{EJ} \left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = -\delta.$$

Знак минус для перемещения δ взят потому, что перемещение совершается в направлении, противоположном направлению силы.

Вместо реактивной силы мы можем за лишнюю неизвестную взять реактивную пару M_0 , препятствующую поворачиванию сечения A . Отбрасывая соответствующее лишнее закрепление, мы получим балку с опертыми концами, на которую, кроме сплошной нагрузки, действует момент M_0 . Изгибающий момент в каком-либо сечении $m-n$ будет:

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \frac{x}{l} \text{ и } \frac{\partial M}{\partial M_0} = + \frac{x}{l}.$$

Перемещение, соответствующее M_0 (поворот сечения A), равно нулю, следовательно:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} + \frac{M_0 x}{l} \right) \frac{xdx}{l} = 0.$$

¹⁾ Если бы какой-либо из этих коэффициентов был отрицательным, то, полагая все силы, кроме той, на квадрат которой множится рассматриваемый коэффициент, равными нулю, мы получили бы для V отрицательное значение.

дятся путем построения соответствующей диаграммы Кремоны. Полная энергия системы, при совместном действии нагрузки P и сил X , будет:

$$V = \sum \frac{(S_0 + S_1 X)^2}{2EF} \quad (b).$$

Суммирование должно быть распространено на все стержни системы. Ур-ие для определения X представится в таком виде:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \sum \frac{S_1(S_0 + S_1 X)}{EF} = 0,$$

откуда ¹⁾

$$X = - \frac{\sum \frac{S_1 S_0}{F}}{\sum \frac{S_1^2}{F}} \quad (c).$$

Произведения $\frac{S_1 S_0}{F}$ и $\frac{S_1^2}{F}$ приведены в таблице. Пользуясь ею, легко найти X :

$$X = \frac{216}{247} P = 0,88 P.$$

Мы для упрощения решения взяли простейшую ферму, состоящую только из пяти стержней. Ход расчета остается тот же и в более сложных случаях.

Применим теперь начало наименьшей работы к определению усилий в лишних стержнях и, вообще, для определения лишних внутренних напряжений в системе. Предположим сначала, что в заданной системе имеется только один лишний стержень. Выделим лишний стержень и его действие на систему заменим двумя равными и прямо противоположными силами X . Для оставшейся системы силы X будут внешними, и мы можем составить выражение для потенциальной энергии в ф-ии от X и от заданных нагрузок. Обозначим эту потенциальную энергию через V_1 . Выделенный стержень будет находиться под действием сил $-X$. Величину его потенциальной энергии обозначим через V_2 . Полная энергия всей системы будет:

$$V = V_1 + V_2 \quad (d).$$

Применяя теорему Кастилиано к выделенному стержню, найдем для изменения его длины δ выражение:

$$\frac{\partial V_2}{\partial (-X)} = \delta.$$

Ту же самую величину δ найдем, применяя теорему Кастилиано к оставшейся части фермы:

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} = \delta.$$

Принимая во внимание равенство (d), будем иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial X} = 0$$

¹⁾ E принято постоянным для всех стержней.

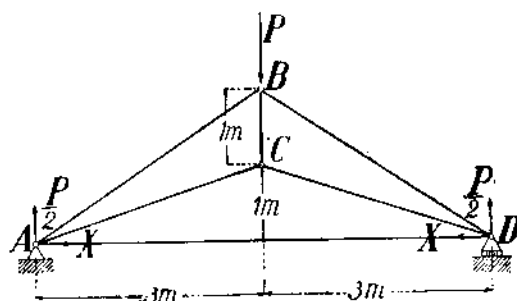
Если бы у нас было несколько лишних стержней, то, называя усилия в них через $X, Y, Z, \dots$, получим для определения их ур-ия:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0; \quad \dots$$

Величина лишних неизвестных должна быть выбрана так, чтобы потенциальная энергия системы имела значение minimum.

Для примера возьмем простую ферму, состоящую всего лишь из шести стержней (черт. 288). От ранее рассмотренной системы она отличается затяжкой AD . Одна из опор предполагается подвижной, и потому относительно опорных реакций взятая ферма статически определима, но она статически

неопределима относительно усилий в стержнях: имеется 4 узла и 6 стержней (число необходимых стержней $2 \cdot 4 - 3 = 5$), следовательно, один стержень лишний. За лишний стержень примем затяжку AD . Пусть X усилие в затяжке при действии силы P . Составим выражение для потенциальной энергии системы. Потенциальная энергия затяжки AD будет:



Черт. 288.

$$V_1 = \frac{X^2 L}{2EF_0},$$

где F_0 площадь поперечного сечения затяжки и L — ее длина.

Для составления выражения потенциальной энергии V_2 фермы без затяжки, нужно влияние затяжки заменить двумя силами X , тогда, пользуясь выражением (b) ранее рассмотренной задачи, получим:

$$V_2 = \sum \frac{l(S_0 + S_1 X)^2}{2EF}, \quad \text{следовательно: } V = \frac{X^2 L}{2EF_0} + \sum \frac{l(S_0 + S_1 X)^2}{2EF}.$$

Для определения неизвестного усилия X в затяжке получаем ур-ие

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{XL}{EF_0} + \sum \frac{l(S_0 + S_1 X)S_1}{EF} = 0,$$

откуда:

$$X = - \frac{\sum \frac{lS_0 S_1}{F}}{\frac{L}{F_0} + \sum \frac{lS_1^2}{F}} \quad (e).$$

Здесь суммирование распространяется на все необходимые стержни системы. Если будем увеличивать площадь F_0 сечения затяжки, то растяжение ее будет убывать, в пределе при $F_0 = \infty$ решение (e) совпадает с результатом (c), полученным для абсолютно неподвижных опор. С убыванием F_0 до нуля усилие X также стремится к нулю, а взятая ферма по своим свойствам будет приближаться к ферме с одной подвижной и другой неподвижной опорой. Возьмем для длин стержней и площадей их поперечных сечений прежние величины (см. стр. 328). Площадь сечения затяжки F_0 возьмем равной 50 cm^2 , тогда

$$X = \frac{216 P}{12 + 247} = 0,836 P.$$

Если бы мы взяли площадь сечения затяжки в десять раз меньшей, т.е. 5 см², то получили бы

$$X = \frac{216 P}{120 + 247} = 0,59 P.$$

При абсолютно неподвижных опорах мы нашли:

$$X = 0,88 P.$$

Мы разобрали случай, когда имеется один лишний стержень. Ход расчета остается тот же при каком угодно числе лишних стержней. Заменяя лишние стержни силами $X, Y, Z, \dots$ и находя усилия в остальных стержнях фермы (эти усилия представляются в форме $S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots$), получим энергию системы в такой форме:

$$V = \frac{X^2 l_1}{2EF_1} + \frac{Y^2 l_2}{2EF_2} + \frac{Z^2 l_3}{2EF_3} + \dots + \sum \frac{(S_0 + S_1 X + S_2 Y + S_3 Z + \dots)^2 l}{2EF}.$$

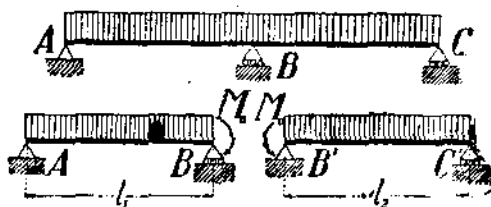
Составляя производные $\frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z}, \dots$ и приравнявая их нулю, найдем столько ур-ий, сколько неизвестных усилий. Ур-ия эти линейны и дают однозначное решение для неизвестных.

До сих пор мы предполагали, что лишняя неизвестная есть усилие в лишнем стержне. Действие лишнего стержня на остальную систему мы заменили обобщенной силой X , состоящей из двух взаимно противоположных сил. Рассуждения наши и основное ур-ие (а) останутся в силе для лишних неизвестных любого типа, когда X будет представлять собой какую-либо иную комбинацию сил, например, систему из двух равных взаимно противоположных пар сил. Поясним это примером. Возьмем двухпролетную балку ABC (черт. 289), нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q кг/м. Балка эта статически неопределима относительно опорных реакций. Мы выберем за лишнюю неизвестную не величину опорной реакции, а величину M_0 опорного момента в сечении B . Рассекаем нашу балку на две части сечением B . Каждая половина представит собой балку, опертую двумя концами, т.е. случай статически определимый. Левая половина балки, кроме равномерной нагрузки, будет изгибаться парой сил M_0 , принятой за лишнюю неизвестную, правая половина балки изгибается равномерной нагрузкой и парой сил — M_0 . Пусть V_1 и V_2 — потенциальная энергия для левой и правой половины балки. Тогда, на основании теоремы Кастigliано:

$$\frac{\partial V_1}{\partial M_0} = \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_2}{\partial (-M_0)} = \varphi,$$

где φ угол поворота сечения B по направлению часовой стрелки, следовательно:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{\partial V_1}{\partial M_0} + \frac{\partial V_2}{\partial M_0} = 0 \quad (1).$$



Черт. 289.

Полученное ур-ие послужит для определения лишней неизвестной M_0 . Пренебрегая работой сдвигающих напряжений, будем иметь:

$$V_1 = \int_0^{l_1} \frac{M^2 dx}{2EJ},$$

$$M = \frac{ql_1}{2} x + \frac{M_0 x}{l_1} - \frac{qx^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = + \frac{x}{l_1},$$

где

$$\frac{\partial V_1}{\partial M_0} = \frac{1}{EJ} \int_0^{l_1} M \frac{x}{l_1} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql_1^3}{6} + \frac{M_0 l_1}{3} - \frac{ql_1^3}{8} \right).$$

Подобным же образом:

$$\frac{\partial V_2}{\partial M_0} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql_2^3}{6} + \frac{M_0 l_2}{3} - \frac{ql_2^3}{8} \right).$$

Подставляя это в ур-ие (f), найдем:

$$M_0 (l_1 + l_2) = - \frac{1}{8} q (l_1^3 + l_2^3).$$

Это ур-ие можно было бы, конечно, сразу написать, применяя теорему о трех моментах.

В качестве второго примера рассмотрим изгиб рамы $ABCD$ (черт. 290) с неподвижными шарнирами A и B . При действии равномерно распределенной нагрузки стержень CD будет изгибаться, как балка с упруго заделанными концами. Выберем за лишнюю неизвестную величину M_0 изгибающего момента в сечениях C и D . Тогда изгибающий момент в каком-либо сечении стержня CD , в расстоянии x от C , будет:

$$M_1 = \frac{qb}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_1}{\partial M_0} = +1.$$

Изгибающий момент для стоек AC и BD , в расстоянии x от нижнего конца, будет:

$$M_2 = - \frac{M_0 x}{h} \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_2}{\partial M_0} = - \frac{x}{h}.$$

Изменение изгибающих моментов показано на чертеже заштрихованными площадями. На основании начала наименьшей работы получаем для определения M_0 ур-ие:

$$\frac{\partial V}{\partial M_0} = \frac{1}{EJ} \int_0^b M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M_0} dx + \frac{2}{EJ_1} \int_0^h M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M_0} dx = 0.$$

*) Здесь знак для M_0 выбран в том предположении, что опорный момент положительным.

Вставляя вместо M_1 и M_2 их значения и выполняя интегрирование, найдем:

$$M_0 = - \frac{q b^2}{12 \left(1 + \frac{2h EJ}{3b EJ_1} \right)}$$

§ 115. Теорема о взаимности перемещений.

Пользуясь началом наименьшей работы, мы без затруднений можем определять „лишние неизвестные“ статически неопределимых систем, подвергающихся действию постоянной нагрузки. При расчете ферм задача, как мы видели, сводится к построению двух диаграмм Кремоны: одной для нахождения усилий S_0 и другой — для нахождения усилий S_1 . В случае подвижной нагрузки, как то бывает при расчете мостов, кранов и др., пользование началом наименьшей работы не удобно, так как пришлось бы делать определение лишних неизвестных для каждого положения нагрузки. Для упрощения решения таких задач мы воспользуемся линиями влияния. Построение их значительно облегчается, если применить теорему о взаимности перемещений, являющуюся следствием того, что потенциальная энергия системы представляется однородной ф-ией второй степени от координат $\varphi, \psi, \theta, \dots$. Положим:

$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\theta^2 + \dots + a'\varphi\psi + b'\varphi\theta + c'\psi\theta + \dots \quad (a).$$

Соответствующие обобщенные силы $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2a\varphi + a'\psi + b'\theta + \dots \\ \Psi &= \frac{\partial V}{\partial \psi} = 2b\psi + a'\varphi + c'\theta + \dots \\ \Theta &= \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2c\theta + b'\varphi + c'\psi + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (b).$$

Полученными выражениями воспользуемся для доказательства теоремы о взаимности перемещений. Будем рассматривать два состояния упругого тела. I состояние пусть определяется координатами $\varphi_1, \psi_1, \theta_1, \dots$, и соответствующие ему силы будут $\Phi_1, \Psi_1, \Theta_1, \dots$, II состояние определяется координатами $\varphi_2, \psi_2, \theta_2, \dots$, ему соответствующие силы будем обозначать $\Phi_2, \Psi_2, \Theta_2, \dots$. Представим себе, что силы, соответствующие I состоянию, совершили перемещения $\varphi_2, \psi_2, \theta_2, \dots$, относящиеся ко II состоянию. Этому перемещению будет соответствовать работа:

$$\begin{aligned} \Phi_1\varphi_2 + \Psi_1\psi_2 + \Theta_1\theta_2 + \dots &= 2a\varphi_1\varphi_2 + a'(\psi_1\varphi_2 + \varphi_1\psi_2) + 2b\psi_1\psi_2 + \\ &+ b'(\theta_1\varphi_2 + \varphi_1\theta_2) + 2c\theta_1\theta_2 + c'(\psi_1\theta_2 + \psi_2\theta_1) + \dots \end{aligned}$$

Здесь мы при помощи равенств (b) выразили силы $\Phi_1, \Psi_1, \Theta_1, \dots$ через координаты $\varphi_1, \psi_1, \theta_1, \dots$. Полученное выражение симметрично относительно

координат I и II состояний. Отсюда следует, что мы получили бы совершенно такую же работу, если бы заставили силы II состояния $\Phi_2, \Psi_2, \Theta_2, \dots$ совершить перемещения $\varphi_1, \psi_1, \theta_1, \dots$, соответствующие I состоянию, т.е.:

$$\Phi_1\varphi_2 + \Psi_1\psi_2 + \Theta_1\theta_2 + \dots = \Phi_2\varphi_1 + \Psi_2\psi_1 + \Theta_2\theta_1 + \dots \quad (199).$$

В этом и заключается теорема взаимности перемещений. Частный случай этой теоремы был открыт Максвеллом¹⁾ в 1864 г. В самом общем виде она была доказана итальянским ученым Бетти²⁾ и английским физиком лордом Рейлейем³⁾.

Возьмем простейший случай, когда приходится иметь дело только с двумя обобщенными силами, например, с силами Φ и Ψ . Положим, что для I состояния тела сила Ψ обращается в нуль и действует только сила Φ_1 . Значение координат, соответствующих силам Φ и Ψ для этого состояния, будут φ_1 и ψ_1 . За II состояние примем то, когда сила Φ обращается в нуль и действует только сила Ψ_2 . Координаты, соответствующие этому состоянию, назовем через φ_2 и ψ_2 ; тогда, на основании теоремы взаимности (ф-ла 199), можем написать:

$$\Phi_1\varphi_2 = \psi_1\Psi_2,$$

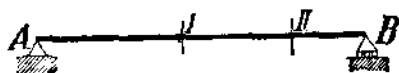
откуда

$$\frac{\Phi_1}{\Psi_2} = \frac{\psi_1}{\varphi_2} \quad (200).$$

Если $\Phi_1 = \Psi_2$, будем иметь $\psi_1 = \varphi_2$.

Полученный результат можно формулировать так: если имеются две равных по численному значению обобщенных силы, то изменение координаты, соответствующей II силе под действием силы I, будет такое же, как и изменение координаты, соответствующей I силе, под действием II силы. Поясним сказанное примерами.

Возьмем брусок с опертными концами и нагрузим его один раз силой P , приложенной к сечению I (черт. 291), и второй раз той же силой P , приложенной в сечении II. Координатами для



Черт. 291.

этих способов загрузки будут прогибы в сечениях I и II. Положим, что при действии силы P в сечении I получаются в сечениях I и II прогибы f_1 и f_2 .

Пусть f_1' и f_2' прогибы в тех же сечениях при действии силы P в сечении II тогда, на основании ф-лы (200):

$$f_2 = f_1',$$

т.е. при перенесении силы из I в II прогиб сечения II переносится в сечение I.

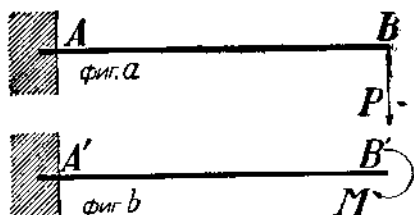
¹⁾ C. Maxwell, On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames Philosophical Magazine, том 27, стр. 294.

²⁾ E. Betti, Il nuovo Cimento (ser. 2), том 7 и 8, 1872 г.

³⁾ Lord Rayleigh, Scientific Papers, том I, стр. 179.

Прогиб в сечении II от силы P , приложенной в сечении I, равен прогибу в сечении I от силы P , приложенной в сечении II.

В качестве второго примера возьмем брусок, заделанный одним концом в стену (черт. 292). Рассмотрим два случая изгиба этого бруска: первый случай соответствует изгибу силой P , приложенной на конце (фиг. а). Второй случай — изгибу парой сил M (фиг. б). Координатами, соответствующими этим типам нагрузок, будут прогиб конца балки и угол поворота конечного сечения. Если сила P и момент M равны по численному значению, то, на основании ф-лы (200), можем сказать, что



Черт. 292.

угол поворота конечного поперечного сечения под действием силы P (фиг. а) равен по численному значению прогибу конца бруска под действием момента M (фиг. б). Это заключение легко проверить, пользуясь известными ф-ми. Угол поворота конечного сечения под действием силы P будет:

$$\varphi = \frac{Pl^3}{2EI}.$$

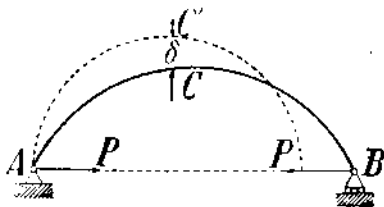
Прогиб бруска под действием пары сил определяется ф-лой:

$$f = \frac{Ml^3}{2EI}.$$

В том случае, когда P и M численно равны, имеем:

$$\varphi = f.$$

Возьмем кривой брусок, имеющий в A неподвижный и в B подвижной шарнир. Пусть под действием двух взаимно противоположных сил P брусок изгибается так, как это пунктиром показано на черт. 293. Какая-либо точка бруска C перемещается в C' и δ — вертикальная составляющая этого перемещения. На основании теоремы о взаимности перемещений можно утверждать, что вертикальная сила P , приложенная к C , заставит подвижной шарнир переместиться по линии AB на ту же величину δ .



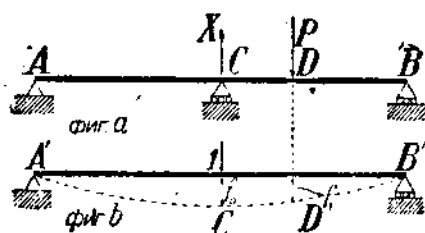
Черт. 293

Пользуясь началом взаимности перемещений и выбирая надлежащим образом два сравниваемые состояния системы, мы всегда можем составить достаточное количество ур-ий для определения „лишних неизвестных“. Порядок расчета удобнее всего выяснить на частных примерах.

На этой теореме основано экспериментальное определение лишних неизвестных при помощи исследования деформаций модели сооружения. Описание одного из таких экспериментальных методов можно найти в интересной заметке G. Beggs'a, профессора Принстонского университета ¹⁾.

§ 116. Приложение теоремы о взаимности перемещений к расчету неразрезных балок.

Начнем с простейшего случая — двухпролетной балки (черт. 294). За лишнюю неизвестную берем реакцию промежуточной опоры. Найдем величину этой реакции при действии одной силы P . Отбросим промежуточную опору, ее



Черт. 294.

влияние заменим направленной снизу вверх силой X (сила X должна быть так подобрана, чтобы в сечении, соответствующем промежуточной опоре, прогиб равнялся нулю), и рассмотрим изгиб бруска AB , опертго по концам. За I состояние возьмем изгиб бруска силами P и X , за II состояние возьмем изгиб того же бруска силой, равной единице, приложенной в сечении C (фиг. b). Пусть

f_0 и f_1 — прогибы в точках C и D , соответствующие второму случаю загрузки-ния; тогда, применяя начало взаимности перемещений, получим:

$$Pf_1 - Xf_0 = 1 \cdot 0 \quad (a);$$

f_0 взято со знаком минус, так как прогиб совершается в направлении, противоположном направлению X . Силу единицы в правой части равенства (a) приходится множить на нуль, так как соответствующее ей перемещение (прогиб на промежуточной опоре C) при первом способе загрузки равняется нулю. Неизвестная опорная реакция X найдется на основании (a):

$$X = \frac{Pf_1}{f_0} \quad (b).$$

При перемещении груза по балке знаменатель f_0 остается постоянным, и, следовательно, опорная реакция будет пропорциональна прогибу f_1 . В случае нескольких нагрузок, опорная реакция получится суммированием выражений, подобных выражению (b); будем иметь:

$$X = \frac{\sum Pf}{f_0} \quad (c).$$

Каждый из грузов I состояния приходится множить на соответствующий прогиб II состояния; следовательно, кривая изгиба бруска AB , под

¹⁾ См. Journal of the Franklin Institute, 1927, стр. 375.

действием груза единица, приложенного в сечении C , играет роль линии влияния для промежуточной опорной реакции. Имея эту кривую, легко вычислить промежуточную реакцию по ф-ле (b) при любом распределении грузов.

Если бы мы за лишнюю неизвестную приняли крайнюю опорную реакцию B , то линия влияния получилась бы как изогнутая ось для балки, опёртой

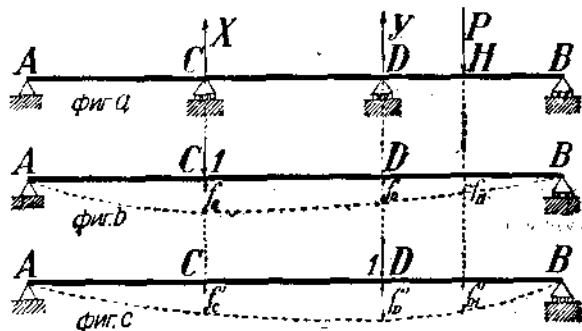


Черт. 295.

в A и C и нагруженной грузом единица в точке B (черт. 295). Для вычисления искомой реакции остается в силе прежняя ф-ла (c).

Рассмотрим теперь случай балки на четырех опорах (черт. 296). Найдем величины опорных реакций при действии одной сосредоточенной силы P . Отбросим промежуточные опоры, их действия на балку заменим направленными снизу вверх силами X и Y .

(эти силы должны быть определены так, чтобы прогибы в C и D обращались в нуль), и рассмотрим изгиб балки AB силами X , Y и P (фиг. а). Кроме этого состояния, соответствующего действительным нагрузкам, рассмотрим еще изгиб бруска AB силой единица, приложенной в точке C (фиг. б), и силой единица, приложенной в точке D



Черт. 296.

(фиг. c). Пусть f_C , f_D , f_H , и f'_C , f'_D , f'_H , — прогибы в точках C , D и H соответствующие двум последним случаям нагрузки. Применим начало взаимности перемещений сначала к I и II случаям нагрузки (фиг. а и фиг. б) потом к I и III случаям (фиг. а и фиг. c), получим ур-ия:

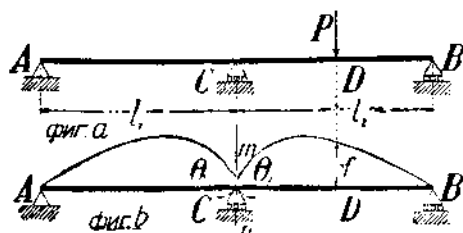
$$Pf_H - Xf_C - Yf_D = 1 \cdot 0; \quad Pf'_H - Xf'_C - Yf'_D = 1 \cdot 0,$$

откуда:

$$X = P \frac{f_H f'_D - f'_H f_D}{f_C f'_D - f'_C f_D}; \quad Y = P \frac{f_H f'_C - f'_H f_C}{f_D f'_C - f'_D f_C} \quad (d).$$

Знаменатели полученных для X и Y выражений не зависят от положения груза P . Величины числителей определяются, если известны f_H и f'_H для любого положения груза P . Для этого, очевидно, нужно найти вид упругой линии для II и III случаев нагрузки (фиг. б и фиг. c). Имея эти кривые, легко вычислить значения коэффициентов при P в выражениях (d) для любого положения груза, по ним сейчас же можно построить линии влияния для обеих опорных реакций.

Построим теперь линию влияния для опорного момента M_C двухпролетной балки AB (черт. 297). За I состояние примем действительное состояние балки, когда на нее действует сосредоточенный груз P . При II состоянии внешняя сила отсутствует, и вместо искомой лишней неизвестной M_C действует



Черт. 297.

обобщенная сила соответствующего типа, равная единице. Чтобы осуществить II состояние, разрежем балку сечением mn и к каждой из полученных таким образом балок AC и CB приложим, в произведенном сечении, изгибающий момент, равный единице (фиг. б). Эта группа, из двух взаимно противоположных пар сил и соответствующих им опорных реакций, пред-

ставляет собой обобщенную силу того же типа, что и искомая величина M_C . Балки AC и CB оперты по концам, и мы без затруднения найдем их прогибы. Углы поворота концов определяются известными ϕ -ми:

$$\theta_1 = \frac{1 \cdot l_1}{3EJ}; \quad \theta_2 = \frac{1 \cdot l_2}{3EJ}.$$

Применим теперь теорему о взаимности перемещений. Для I состояния мы имеем силу P и неизвестную обобщенную силу M_C . Соответствующие им перемещения II состояния будут прогиб f точки D и угол $\theta_1 + \theta_2$. Во II состоянии мы будем иметь обобщенную силу, состоящую из двух взаимно противоположных пар сил и соответствующих им опорных реакций. Соответствующее этой обобщенной силе перемещение в I состоянии равно нулю, так как в действительности нет разреза по сечению mn , и относительный поворот концов балок AC и CB невозможен — над опорой оба участка изогнутой оси балки имеют общую касательную. Теорема о взаимности перемещений дает нам

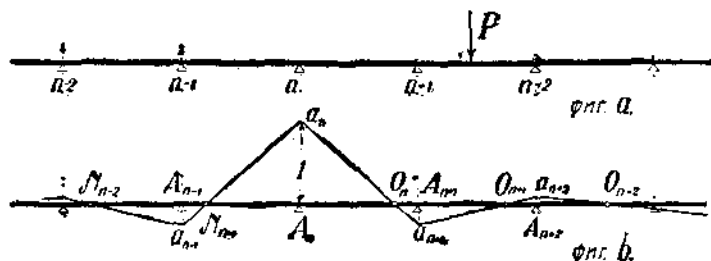
$$-Pf + M_C(\theta_1 + \theta_2) = 1 \cdot 0, \quad \text{откуда} \quad M_C = \frac{Pf}{\theta_1 + \theta_2}.$$

Знаменатель этой ϕ -лы не зависит от положения груза, и потому при перемещении точки приложения силы P опорный момент M_C меняется по такому же закону, как и прогибы f , получающиеся при действии сил II состояния. Следовательно, изогнутые оси балок AC и CB (фиг. б) являются искомыми линиями. При действии на балку AB системы подвижных грузов $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ опорный момент вычисляется по ϕ -ле:

$$M_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i f_i}{\theta_1 + \theta_2}.$$

Таким же способом можно построить линию влияния для какого-либо опорного момента M_n в случае многопролетной неразрезной балки (черт. 298).

За I состояние принимаем действительное состояние балки, представленной на фиг. а. Для получения II состояния разрежем балку над n -ой опорой и приложим там две равные и прямо противоположные пары сил, равные еди-

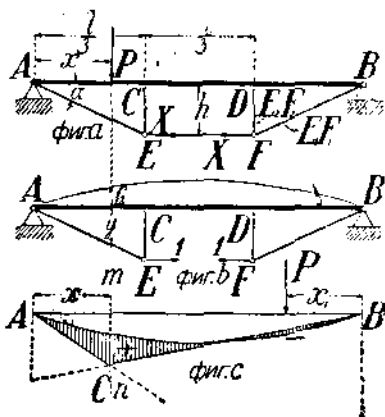


Черт. 298.

нице. Ординатами линии влияния для M_n будут служить прогибы балки, соответствующие II состоянию, и величина M_n определится по той же ф-ле, что и в предыдущем случае. Вычисление углов θ_1 и θ_2 , а также прогибов f не представит затруднений, так как участки неразрезной балки, на протяжении каждого пролета, можно рассматривать, как балки с опертыми концами, изгибаемые парами сил, приложенными по концам. Величины этих изгибающих пар найдутся проведением ломанной линии $a_{n-1} a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$ через постоянные точки $N_{n-2}, N_{n-1}, O_{n+2}, O_{n+1} \dots$ (фиг. б). Построив линии влияния для опорных моментов, мы остальные линии влияния сможем построить при помощи ф-л (136) и (137).

§ 117. Линии влияния для шпренгельной балки.

Балка AB (черт. 299), несущая груз P , подкреплена с помощью стоек CE и DF и тяг AE , EF и FB . Все размеры заданы. Обозначим через EJ жесткость при изгибе балки AB , через E_1 и F_1 — модуль упругости материала и площадь поперечного сечения для тяг, через E_2 и F_2 — модуль упругости материала и площадь поперечного сечения для стоек. Хотя балка имеет четыре опорных точки, но при расчете придется иметь дело с одной лишь неизвестной, потому что усилия в стойках, как легко видеть из условия равновесия узлов E и F (натяжение EF должно получиться одним и тем же, независимо от того, рассматриваем ли мы узел E или узел F , а это возможно лишь в том случае, если в стойках усилия одинаковы), всегда равны между собой. За лишнюю неизвестную выберем натяжение X тяги EF , тогда сжимающие усилия в стойках будут равны $X \operatorname{tg} \alpha$, и растягивающие усилия в тягах AE и FB равны $\frac{X}{\cos \alpha}$. Все силы, приложенные к балке



Черт. 299

AB , выразятся через P и X . Определим X , пользуясь теоремой о взаимности перемещений. За I состояние примем действительное состояние системы, когда на нее действует сила P и силы X , заменяющие тягу EF . II состояние представлено на фиг. б. Внешние силы отброшены, и вместо лишней неизвестной X приложены силы, равные единице. Силам P и X I состояния соответствует во II состоянии перемещение f_x и сближение δ точек E и F . Перемещение I состояния, соответствующее силам II состояния, есть, очевидно, удлинение тяги EF , равное $\frac{Xl}{3E_1F_1}$. После этих предварительных замечаний легко написать, на основании теоремы о взаимности перемещений, такое ур-е:

$$-Pf_x + X\delta = -1 \cdot \frac{Xl}{3E_1F_1}, \text{ откуда}$$

$$X = -\frac{Pf_x}{\frac{1 \cdot l}{\delta} + \frac{Pf_x}{3E_1F_1}} = -\frac{Pf_x}{k} \quad (201).$$

Знаменатель в ф-ле (201), обозначенный для краткости одной буквой k , не зависит от положения груза P , и при перемещении груза сила X будет меняться по такому же закону, как и прогиб балки AB во II состоянии (фиг. б). Изогнутая ось для этого состояния будет служить линией влияния для искомой величины X . Построение линии влияния сводится таким образом к нахождению прогибов f_x и сближения δ для II состояния балки. Прогибы найдутся как для простой балки, опертой в A и B и нагруженной в точках C и D силами $1 \cdot \lg \alpha$, равными усилиям в стойках. Что касается сближения δ , то его удобнее всего найти, пользуясь теоремой Кастеляно. Обозначая для ясности через S силы, равные единице, найдем для потенциальной энергии растянутых тяг AE и EB , сжатых стоек и изогнутой балки, выражения:

$$V_1 = \frac{S^2 l}{3 \cos^3 \alpha E_1 F_1}; \quad V_2 = \frac{S^2 \lg^2 \alpha h}{E_2 F_2}; \quad V_3 = \frac{5}{18} \frac{S^2 h^2 l}{EJ}.$$

Выражение для V_3 легко получается, если воспользоваться ф-лой для прогибов балки, нагруженной двумя равными, симметрично расположенными, силами (см. § 97).

Складывая V_1 , V_2 и V_3 , составляя от полученной суммы производную по S и полагая в этой производной $S=1$, найдем искомое сближение:

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{l}{E_1 F_1 \cos^3 \alpha} + \frac{2 h \lg^2 \alpha}{E_2 F_2} + \frac{5}{9} \frac{h^2 l}{EJ}.$$

Имея линию влияния для натяжения X , можем легко построить линию влияния для изгибающего момента в любом сечении балки. Возьмем сечение mn и расположим нагрузку, как показано на фиг. с. К концу балки A будет приложено, кроме вертикальной реакции $\frac{Px_1}{l}$, усилие тяги AE , и потому момент в сечении mn составит из двух частей: из момента, вычисленного как для простой балки на двух опорах, и из момента усилия в тяге. Обозначая через y ординату, заключенную между осью балки и осью тяги в сечении mn , получим:

$$M_1 = \frac{Px_1 x}{l} - Xy = P \left(\frac{xx_1}{l} - \frac{f_{xy}}{k} \right) \quad (202).$$

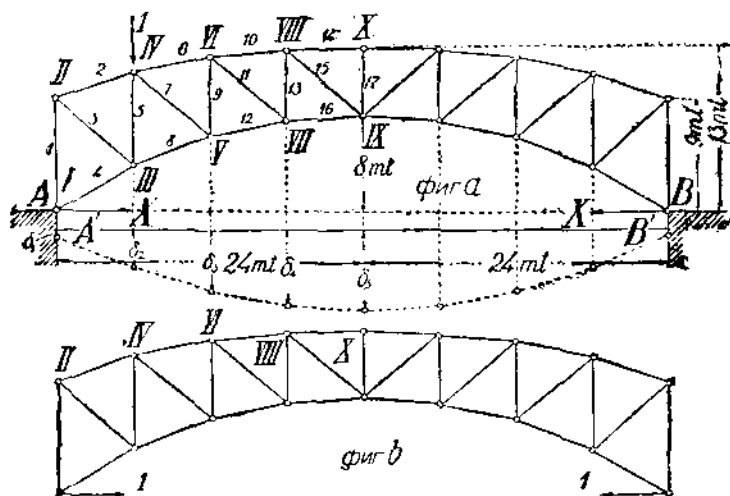
Эта ф-ла сохранит свое значение и для средней части балки, где y имеет постоянное значение, равное h . Первый член в скобках представляет ординаты линии влияния ACB , построенной как для балки с опертыми концами. Второй член представляет собой влияние натяжения X — он может быть построен умножением ординат ранее построенной

линии влияния для X на ординату y . Путем вычитания получаем ординаты искомой линии влияния. На фиг. с соответствующая инфлюэнтная площадь (площадь, ограниченная линиями влияния) заштрихована.

Из этого чертежа ясно видно, какие изменения в условиях работы балки происходят благодаря шпренгельному подкреплению.

§ 118. Применение теоремы о взаимности перемещений к расчету статически неопределимых ферм.

Теорема о взаимности перемещений дает в этом случае удобный способ для определения лишних неизвестных при действии подвижных нагрузок. Особенно просто решаются те задачи, где имеется только одна лишняя неизвестная. Рассмотрим отдельно случай, когда лишняя неизвестная есть реакция неподвижной опоры, и когда она представляет собой напряжение лишнего стержня. В качестве первого примера возьмем двухшарнирную арку (черт. 300). Обе опоры предполагаются шарнирными неподвижными.



Черт. 300.

ными, и потому система является статически неопределимой относительно опорных реакций. Для каждой опоры будем иметь две неизвестных — величину и направление опорной реакции. Статика дает нам в этом случае три ур-ия — следовательно, одна из неизвестных является „лишней“. Мы будем рассматривать действие вертикальных нагрузок. В таком случае горизонтальные составляющие опорных реакций (распор арки) одинаковы. Величину их X мы примем за лишнюю неизвестную. Предположим, что подвижная нагрузка передается только верхним узлам фермы. В таком случае для построения линии влияния нужно груз, равный единице, последовательно помещать в каждом из верхних узлов, определять для каждого такого положения соответствующее значение распора и откладывать эти значения или величины, им пропорциональные, от горизонтальной линии $A'B'$ по соответствующей вертикали. Ломаная линия, соединяющая полученные таким образом точки, и будет искомой линией влияния. Покажем, как могут быть найдены ординаты $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_5$ линии влияния при помощи теоремы о взаимности перемещений. Поместим груз, равный единице, над одним из узлов (черт. 300,

фиг. а). Вертикальные составляющие опорных реакций, для данного случая нагрузки, найдутся обычным путем, горизонтальные составляющие обозначим через X . Состояние системы, соответствующее этому способу нагрузки, будем считать I. За II состояние примем то, которое соответствует нагрузке, представленной на фиг. б — на ферму по линии, соединяющей опорные шарниры, действуют две взаимно-противоположные силы, равные единице. Обозначим через h сближение опорных шарниров, соответствующее этому случаю нагрузки, и через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_5$ — вертикальные перемещения узлов II, IV, VI, VIII, X. Перемещения эти могут быть найдены построением диаграммы Williot's¹⁾. Применяя теорему о взаимности перемещений к I и II состояниям, найдем:

$$Xh - 1 \cdot \delta_2 = 0, \text{ откуда } X = \frac{1 \cdot \delta_2}{h}.$$

Следовательно, распор от груза единица, помещенного в каком-либо из верхних узлов, пропорционален вертикальному перемещению этого узла при действии сил, представленном на фиг. б. Если мы от прямой $A'B'$ по ординатам, соответствующим верхним узлам, отложим найденные выше перемещения и полученные точки соединим ломаной линией, то ордината этой линии, для любого положения груза единица, даст величину, пропорциональную соответствующему распору. Следовательно, построенная ломаная линия может служить линией влияния для определения распора. Если будет несколько вертикальных нагрузок P_i , то, измеряя ординаты δ_i , соответствующие каждой из этих нагрузок, получим для величины распора значение:

$$X = \frac{\sum P_i \delta_i}{h}.$$

Покажем теперь, как построить линию влияния для усилия в лишнем стержне. Возьмем ту же ферму, что и в предыдущем примере, но один из опорных шарниров сделаем подвижным, кроме того, соединим опорные шарниры затяжкой AB . У нас будет при 18 узлах 34 стержня, следовательно, один стержень „лишний“ ($18 \cdot 2 - 3 = 33$). За лишний стержень примем затяжку AB и усилие в ней обозначим через X . Настоящая задача отличается от предыдущей только тем, что опорные шарниры могут перемещаться один относительно другого. Изменения расстояния между шарнирами, очевидно, будут равняться изменению длины затяжки. Если L — первоначальная длина, F — площадь поперечного сечения, X — растягивающее усилие в затяжке, то расстояние между опорными шарнирами увеличится на величину $\frac{XL}{EF}$. За I состояние системы примем слу-

чай действия силы единица в одном из верхних узлов и сил X , заменяющих влияние затяжки. За II состояние примем случай действия двух взаимно-противоположных сил, равных единице и направленных по линии AB (черт. 300, фиг. б). Пусть h — сближение опорных шарниров и $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_5$ — вертикальные перемещения верхних узлов II, IV, VI, VIII, X, соответствующие II типу загрузки; тогда, применяя теорему взаимности перемещений, получим:

$$-1 \cdot \delta_2 + Xh = \frac{-1 \cdot XL}{EF}.$$

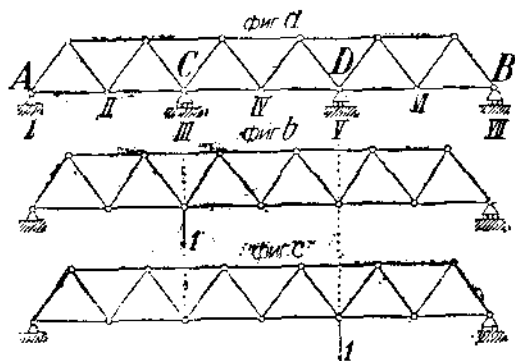
Знаки минус взяты в тех членах, где перемещения и силы имеют противоположные направления. Величина распора от груза единица, поставленного в узле IV, будет:

$$X = \frac{1 \cdot \delta_2}{h + \frac{1 \cdot L}{EF}}$$

¹⁾ Способ построения этой диаграммы можно найти в курсе графической статики В. Л. Кирпичева.

Полученное выражение отличается от распора при неподвижных опорах только величиной знаменателя. Следовательно, ранее построенная линия влияния будет годна и для этого случая — придется только изменить коэффициент пропорциональности. Мы за лишнюю неизвестную приняли затяжку AB . Рассуждения остались такими же, если бы за лишнюю неизвестную было принято усилие любого из стержней заданной фермы.

Как пример системы с двумя „лишними неизвестными“ можно взять случай неразрезной сквозной фермы на четырех опорах (черт. 301). Подвижная нагрузка передается в нижних узлах фермы. Левую опору возьмем неподвижной, остальные — подвижными. За лишние неизвестные удобнее всего взять вертикальные реакции промежуточных опор. Для построения линии влияния придется найти перемещения нижних узлов фермы при нагрузках, показанных на фиг. b и фиг. c. При определении ординат линии влияния, соответствующих нижним узлам II, III, IV, V, V, можно пользоваться Φ -лами (d) (§ 116), полученными для балок сплошного сечения.



Черт. 301.

§ 119. Способ Мора.

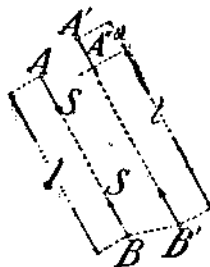
Способ расчета статически неопределимых систем, предложенный Мором ¹⁾, основан на применении начала возможных перемещений. Пусть упругая система находится в равновесии под действием обобщенных внешних сил $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$, и пусть $T, U, \dots$ соответствующие внутренние усилия в системе. Представим себе, что при постоянных значениях внешних и внутренних сил отдельные точки совершат бесконечно-малые перемещения, возможные для данной системы. Обозначим через $\delta\phi, \delta\psi, \delta\theta, \dots$ и, соответственно, через $\delta t, \delta u, \dots$ — изменения координат внешних и внутренних сил, соответствующие этим перемещениям, тогда основное ур-е равновесия (ф-ла 189) представится в таком виде:

$$\Phi\delta\phi + \Psi\delta\psi + \Theta\delta\theta + \dots + T\delta t + U\delta u + \dots = 0 \quad (203).$$

Оно будет справедливо для всех возможных перемещений. Выбирая для $\delta\phi, \dots, \delta u, \dots$ различные значения, мы будем получать все новые ур-ия равновесия, и задача заключается в том, чтобы выбрать из них уравнения, наиболее удобные для определения неизвестных. Для большей ясности начнем с частного случая и рассмотрим стержневые системы с идеальными шарнирами в узлах. Предположим, что внешние силы приложены в узлах фермы, тогда отдельные

¹⁾ См. статьи Mohr'a: Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger и Beitrag zur Theorie des Fachwerks, напечатанные в журнале Zeitschr. d. Archit. u. Ing. Vereins, 1874—1875 и 1885 гг.

стержни будут работать только на растяжение или на сжатие, и действие каждого стержня на узлы, между которыми он закреплен, может быть заменено



Черт. 302.

двумя равными и прямо противоположными силами. На черт. 302 взят растянутый стержень AB , его действие на шарниры A и B можно заменить силами S , направленными от узлов. Положим, что после перемещения узлы фермы A и B заняли положение A' и B' . При этом совершается работа: $-S \cdot \delta l$, где δl удлинение стержня. Ф-ла эта будет годиться и для сжатых стержней, нужно только сжимающие усилия S брать со знаком минус. Что касается δl , то мы его считаем положительным при возрастании длины стержня и отрицательным в противоположном случае. После этих общих замечаний относительно

работы внутренних усилий, ур-ие (203) может быть представлено при расчете стержневых систем в таком виде:

$$\Phi \delta \varphi + \Psi \delta \psi + \Theta \delta \theta + \dots = \sum S \delta l \quad (204).$$

Здесь суммирование должно быть распространено на все стержни системы.

Применим полученное ур-ие сначала к статически определенной системе. Если в такой системе выбросить один стержень, то она обращается в подвижной механизм: мы можем сдвинуть или сблизить или раздвинуть узлы, между которыми был вставлен отброшенный стержень, и вместо отброшенного поместить стержень иной длины. На основании этого заключаем, что приращения δl , которые мы придаем длинам отдельных стержней, чтобы получить возможное перемещение системы, являются, в случае статически определимых ферм, совершенно произвольными величинами, они должны иметь только бесконечно-малые значения. Мы можем положить удлинения всех стержней, кроме одного, равными нулю. В таком случае ур-ие (204) будет заключать только одно неизвестное усилие, и мы его найдем из ф-лы:

$$S = \frac{\Phi \delta \varphi + \Psi \delta \psi + \Theta \delta \theta + \dots}{\delta l}.$$

Числитель ф-лы представляет работу, которую совершают внешние силы при перемещениях, соответствующих удлинению рассматриваемого стержня.

В курсах графической статики излагаются приемы для более простого вычисления этой работы. Мы на этом здесь останавливаться не будем и перейдем к системам статически неопределимым.

Положим, что система, кроме необходимых стержней, обеспечивающих ее геометрическую неизменяемость, имеет еще „лишние“ стержни. Необходимыми стержнями вполне определяются геометрические размеры системы, и для установки лишнего стержня между двумя какими-либо узлами необходимо, чтобы длина стержня точно соответствовала расстоянию между этими узлами. Если мы дадим длинам необходимых стержней какие-либо приращения, то этим

вполне определяются перемещения всех узлов системы и изменения длин лишних стержней. Таким образом, в статически неопределимых системах мы не можем задаваться произвольно удлинениями стержней и должны выбирать величины δl так, чтобы были удовлетворены некоторые чисто геометрические условия. Пользуясь приемом Мора, мы эту геометрическую задачу разрешаем путем сравнения двух состояний системы, как это делалось в случае применения теоремы о взаимности перемещений, и составляем всякий раз работу системы усилий, соответствующих одному состоянию, на перемещениях другого состояния.

Для выяснения хода расчета, рассмотрим простейшую задачу, когда система имеет только один лишний стержень. Пусть X усилие в этом стержне. Отбрасывая лишний стержень и заменяя его действие на ферму силами X , мы получим статически определенную систему, в которой, кроме заданных нагрузок, приложены неизвестные пока силы X . Это состояние будем называть I. Соответствующие этому состоянию усилия в стержнях составятся из двух частей: из усилий, вызванных заданными нагрузками, и из усилий, обусловленных действием двух взаимно-противоположных сил X . Мы сначала строим диаграмму Кремоны для нашей системы в предположении, что действуют только заданные нагрузки. Пусть S_0^i — усилие в каком-либо стержне от этих нагрузок. Изучим теперь влияние на тот же стержень сил X . Для этого отбрасываем все внешние силы и вместо сил X возьмем силы, равные единице. Пусть S_1^i — усилие, полученное при таких условиях в рассматриваемом стержне, тогда усилие в стержне, при одновременном действии заданных нагрузок и сил X , представится ф-лой:

$$S_i = S_0^i + S_1^i X.$$

Соответствующее удлинение стержня будет:

$$\delta l_i = \frac{(S_0^i + S_1^i X) l_i}{EF_i}.$$

Удлинение лишнего стержня, в котором действует усилие X , очевидно, равно $\frac{Xl}{EF}$.

За II состояние примем то, когда внешних сил нет, и вместо усилий X на систему действуют две равные и противоположные силы, равные единице. Соответствующие усилия в стержнях мы обозначили через S_1^i . Усилия эти в каждом из узлов фермы представляют собой систему сил взаимно уравновешивающихся, поэтому работа сил S_1^i на всяком возможном перемещении равна нулю. Мы возьмем перемещения, соответствующие первому, действительному, состоянию системы, тогда получим ур-не:

$$-1 \cdot \frac{Xl}{EF} - \sum_{i=1, 2, 3, \dots} S_1^i \frac{(S_0^i + S_1^i X) l_i}{EF_i} = 0 \quad (205).$$

Первый член представляет собой работу силы единицы II состояния на перемещении, соответствующем удлинению лишнего стержня в I состоянии. Суммирование во втором члене ур-ия (205) распространяется на все необходимые стержни системы. Для лишней неизвестной X получим выражение:

$$X = - \frac{\sum \frac{S_0^i S_1^i l_i}{EF_i}}{\sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i} + \frac{1 \cdot l}{EF}} \quad (206).$$

Если принять модуль упругости материала постоянным для всех стержней, то ф-ла (206) совершенно совпадает с ф-лой (е) (§ 114), полученной нами при помощи начала наименьшей работы.

Все наши рассуждения применимы и в том случае, когда лишней неизвестной является опорная реакция. Отличие только то, что перемещение, соответствующее этой реакции, равно нулю. Поэтому пропадает первый член в ур-ии (205), и выражение для лишней неизвестной получается в такой форме:

$$X = - \frac{\sum \frac{S_0^i S_1^i l_i}{EF_i}}{\sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (207),$$

что совершенно совпадает с ф-лой (с) (§ 114).

Если система имеет несколько лишних неизвестных, то, заменяя их соответствующими силами $X, Y, Z, \dots$, получим статически определимую систему. Усилия в необходимых стержнях выразятся ф-ми вида:

$$S_i = S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots$$

Это состояние будем считать I. За II состояние будем брать случай, когда отброшены все внешние силы и все лишние неизвестные, а вместо одного из лишних стержней приложены две прямо противоположные силы, равные единице. Заставляя усилия каждого из этих состояний совершать перемещения, соответствующие I состоянию, получим для определения лишних неизвестных такую систему ур-ий:

$$\begin{aligned} -1 \cdot \frac{X l_x}{EF_x} - \sum \frac{S_1^i (S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots) l_i}{EF_i} &= 0 \\ -1 \cdot \frac{Y l_y}{EF_y} - \sum \frac{S_2^i (S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots) l_i}{EF_i} &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (208)$$

Ур-ия эти будут линейны относительно неизвестных $X, Y, Z, \dots$, и число их равно числу лишних неизвестных.

§ 120. Применение способа Мора к расчету статически неопределимых ферм.

Общий ход расчета по способу Мора, изложенный в предыдущем параграфе, поясним частными примерами. В качестве первого примера возьмем квадратную раму $ABCD$ с двумя диагоналями, и определим усилия в стержнях при действии горизонтальной силы H (черт. 303). Одну из опор считаем неподвижной, другую — подвижной. В таком случае система будет статически определимой относительно опорных реакций и статически неопределимой относительно усилий в стержнях. Имеем 4 узла и 6 стержней, следовательно, один стержень лишний. Мы примем за лишний стержень диагональ AC . Пусть X растягивающее усилие в этой диагонали. Действительное состояние системы, представленное на фиг. а, примем за I состояние, II состояние, представленное на фиг. б, получим, выбрасывая лишний стержень и вставляя вместо него две силы, равные единице. Для определения X воспользуемся ф-лой (206). Для большего удобства величины S_0^i , S_1^i , $S_1^i S_0^i l_i$, $(S_1^i)^2 l_i$, входящие в эту ф-лу, выписаны в отдельную таблицу (см. ниже). Площади поперечных сечений стержней взяты, для упрощения расчетов, одинаковыми. Путем суммирования находим:

$$\sum S_1^i S_0^i l_i = -aH \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right);$$

$$\sum (S_1^i)^2 l_i = a(2 + \sqrt{2}).$$

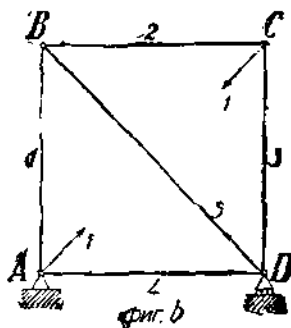
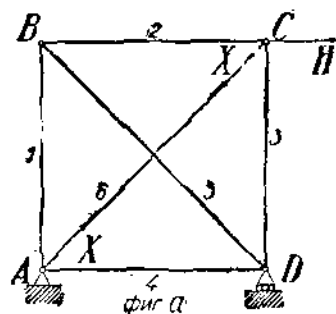
Вставляя это в ф-лу (206), найдем:

$$X = \frac{H(3 + 2\sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, весь расчет приводится к решению двух весьма простых задач статики, к определению усилий S_0^i и S_1^i в статически определенной системе, что проще всего может быть выполнено путем построения соответствующих диаграмм Крестона.

ТАБЛИЦА к черт. 303.

№ стержня	Длина l	S_0	S_1	$S_1 S_0 l$	$S_1^2 l$
1	a	H	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aH}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	H	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aH}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$
4	a	H	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aH}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-H\sqrt{2}$	+1	$-2aH$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$				



Черт. 303.

Применим теперь способ Мора к определению лишней опорной реакции. Предположим, что на двухшарнирную арку (черт. 300) действуют вертикальные силы, приложенные к верхним узлам. Так как обе опоры неподвижны, то под действием вертикальных нагрузок появятся не только вертикальные, но и горизонтальные реакции. Что касается вертикальных реакций, то они определяются таким же способом, как и в случае балки. Горизонтальные реакции будут равны по величине и противоположны по знаку. Для определения этих реакций условий статики недостаточно, и мы воспользуемся способом Мора. Отбросим лишнее закрепление, препятствующее раздвижению опор арки, и действие его заменим силами X . Это состояние фермы назовем I. За II состояние примем тот случай, когда внешние нагрузки отсутствуют, и вместо сил X приложены две взаимно-противоположные силы, равные единице (фиг. б). Так как после отбрасывания лишнего закрепления система обратилась в статически определенную, то, мы, построением двух диаграмм Кремоны, можем найти усилия S_0 , соответствующие задан-

ТАБЛИЦА к черт. 300.

№ стержня	l см	F см ²	S_0 кг	S_1	$\frac{S_0 S_1 l}{EF}$	$\frac{S_1^2 l}{FE}$
1	900	115	— 4000	+ 0,59	— 9,25 · 10 ⁻³	1,360 · 10 ⁻⁶
2	630	118	— 3000	+ 0,50	— 4,10 „	0,667 „
3	810	89,9	+ 3900	— 0,65	— 11,45 „	1,900 „
4	720	115	0	— 1,16	0	4,230 „
5	730	89,9	— 3800	+ 0,47	— 7,27 „	0,895 „
6	610	118	— 6200	+ 1,00	— 16,00 „	2,580 „
7	770	89,9	+ 3950	— 0,64	— 10,80 „	1,750 „
8	650	115	+ 3150	— 1,60	— 14,25 „	7,250 „
9	600	89,9	— 2750	+ 0,30	— 2,75 „	0,300 „
10	600	118	— 8600	+ 1,43	— 31,20 „	5,200 „
11	750	89,9	+ 3200	— 0,55	— 7,31 „	1,260 „
12	620	115	+ 6200	— 2,05	— 34,30 „	11,300 „
13	530	89,9	— 1150	+ 0,03	— 0,10 „	0,027 „
14	600	118	— 9700	+ 1,60	— 39,40 „	6,500 „
15	770	89,9	+ 1400	— 0,23	— 1,38 „	0,226 „
16	600	115	+ 8600	— 2,43	— 54,50 „	15,400 „
17	500	89,9	— 250	— 0,14	+ 0,05 „	6,028 „

ным нагрузкам, и усилия S_i^I , вызываемые в стержнях системы силами, представленными на фиг. в. Имея эти величины, можем составить выпепомешенную таблицу, где приведены размеры стержней и усилия, вычисленные в том предположении, что ко всем верхним узлам, кроме крайних, приложены силы $1t$, в крайних узлах приложено $0,5t$. авляя данные этой таблицы в ф-лу (207), найдем:

$$X = \frac{243,9 \cdot 10^{-8}}{60,87 \cdot 10^{-6}} \approx 4000 \text{ kg.}$$

§ 121. Применение способа Мора к определению перемещений.

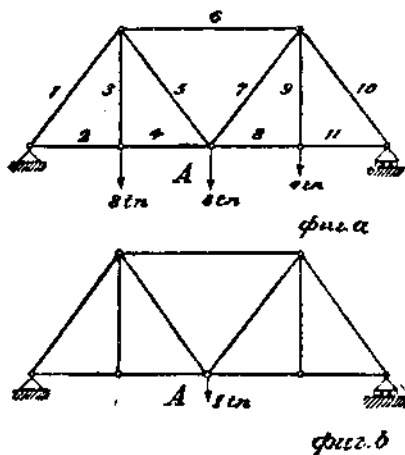
Когда усилия в стержнях определены, мы можем вычислить соответствующие значения δl_i , и дальнейшее исследование деформации фермы сводится к чисто геометрической задаче: нужно по известным изменениям длин стержней найти перемещения узлов фермы. Задачу эту Мор решает при помощи начала возможных перемещений. Как и при разыскании, лишних неизвестных, здесь приходится всякий раз сравнивать два состояния системы. За I мы будем принимать действительное состояние системы, для которого разыскиваем перемещения. Для получения II состояния отбрасываем все данные нагрузки и лишние неизвестные, если система статически неопределима, и прилагаем к системе обобщенную силу, равную единице, соответствующую искомому перемещению. Приравнявая нулю работу сил II состояния на перемещениях, соответствующих I состоянию, получим ур-е для определения искомой величины. Если через x обозначим искомое перемещение, через δl_i — удлинения стержней, соответствующие I состоянию, и через S_i — усилия в стержнях при II состоянии, то ур-е для нахождения x напишется так:

$$1 \cdot x - \sum S_i \delta l_i = 0 \quad (209).$$

Применим это к частному примеру, представленному на черт. 304. Статически определенная система подвергается действию вертикальных нагрузок, приложенных к нижним узлам фермы. Размеры стержней и усилия S_i^I приведены в нижеследующей таблице. Предположим, что требуется найти вертикальное перемещение среднего нижнего узла A. Силой, соответствующей этому перемещению, будет вертикальная сила, приложенная в узле A, поэтому за II состояние системы нужно принять случай нагрузки, представленный на фиг. в. Усилия S_i для второго случая нагрузки также даны в таблице, там же приведены значения произведений ¹⁾:

$$ES \delta l_i = S_i \frac{S_i^I l_i}{F_i}.$$

¹⁾ Для модуля упругости E принято значение $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.



Черт. 304.

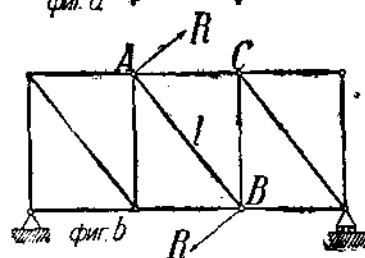
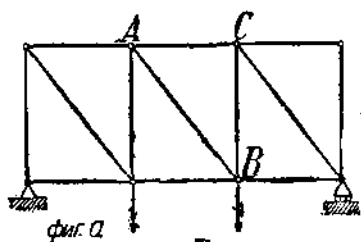
Вставляя данные этой таблицы в ур-ие (209), найдем:

$$x = \sum S M_i = \frac{822}{2000} \approx 0,41 \text{ см.}$$

ТАБЛИЦА к черт. 304.

№ стержня.	l см	F см ²	$S_o^i t$	$S_i t$	$ES_i b l_i$
1	500	30	-13,75	-0,625	143
2	300	15	+ 8,25	+0,375	62
3	400	10	+ 8,00	0	0
4	300	15	+ 8,25	+0,375	62
5	500	10	+ 3,75	+0,625	117
6	500	20	-10,50	-0,750	24
7	500	10	+ 6,25	+0,625	195
8	300	15	+ 6,75	+0,375	51
9	400	10	+ 4,00	0	0
10	500	30	-11,25	-0,625	117
11	300	15	+ 6,75	+0,375	51

Таким же способом могут быть найдены перемещения в случае статически неопределимой системы. Мы отбрасываем лишние закрепления и лишние стержни и действие их на систему заменяем соответствующими усилиями, найденными одним из ранее указанных способов. Этим путем система обращается в статически определенную, и при вычислении перемещений придется иметь дело только с необходимыми стержнями.



Черт. 305.

Мы показали, как, пользуясь способом Мора, можно вычислить перемещение какого-либо узла фермы в заданном направлении. При расчетах иногда приходится определять углы поворота отдельных стержней фермы, иногда нужно находить изменение углов между стержнями. Задачи эти без затруднений могут быть разрешены, если надлежащим образом выбрать силу, соответствующую II состоянию системы. Мы уже отмечали, что между нагрузками II состояния и искомым перемещением должно быть такое же соответствие, как между обобщенной силой и соответствующей ей координатой. Если нас интересует, например, угол поворота

стержня AB (черт. 305), то за II состояние нужно принять нагрузку, представленную на фиг. 5. К концам стержня нужно приложить силы R , перпендикулярные оси и составляющие пару сил.

$$R \cdot l = 1.$$

При повороте стержня AB на угол $\delta\varphi$ пара эта совершит работу $1 \cdot \delta\varphi$. Если через S_0^i обозначим усилия, соответствующие действительной нагрузке фермы, и через S_i — усилия для II состояния системы, то начало возможных перемещений даст нам ур-ие:

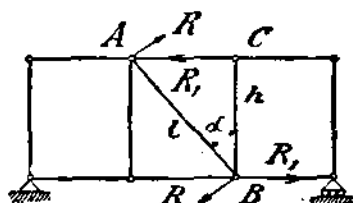
$$1 \cdot \delta\varphi - \sum_{EF_i} S_0^i l_i S_i = 0,$$

откуда может быть найдено искомое вращение стержня AB . Если желательно найти изменение угла α между стержнями AB и BC , то за II состояние нужно принять случай нагрузки, представленный на чертеже 306. При чем силы R и R_1 должны быть подобраны так, чтобы

$$Rl = R_1 h = 1.$$

Изменение угла α найдется из ур-ия:

$$1 \cdot \delta\alpha - \sum_{EF_i} S_0^i l_i S_i = 0.$$



Черт. 306

§ 122. Применение способа Мора к исследованию статически неопределимых случаев изгиба балок.

Способ Мора может быть применен также к исследованию статически неопределимых случаев изгиба балок. В отличие от предыдущих задач мы здесь будем иметь дело с бесчисленным числом координат, так как прогибу в каждом сечении балки можно дать любое приращение, лишь бы было соблюдено условие непрерывности. При выборе координат такой системы поступим следующим образом: разделим балку рядом поперечных сечений на элементы бесконечно малой длины dx . Энергия изгиба каждого такого элемента вполне определится соответствующей величиной изгибающего момента M^1 . Координатой для этого момента будет служить угол относительного поворота двух бесконечно близких сечений:

$$\delta\varphi = \frac{M dx}{EJ}.$$

Как и при исследовании деформаций ферм, нам придется сравнивать два состояния системы. За I состояние будем принимать действительное состояние системы, когда, кроме заданных внешних нагрузок, действуют лишние неизвестные усилия $X, Y, Z, \dots$, заменяющие лишние закрепления. II состояние будем получать, отбрасывая все внешние нагрузки и лишние неизвестные и прилагая вместо одной из этих неизвестных силу, равную единице. Приравнявая нулю работу сил II состояния на перемещениях I, получим нужное нам ур-ие. Если через M_1 обозначим изгибающий момент для II состояния и через x — перемещение I состояния, соответствующее искомой лишней неизвестной X , то ур-ие равновесия напишется так:

$$1 \cdot x - \int_0^l \frac{M dx}{EJ} M_1 = 0 \quad (210)$$

¹⁾ Касательными напряжениями мы пренебрегаем.

Применим это к изгибу балки с одним заделанным, другим опертым концом (черт. 307). За лишнюю неизвестную примем правую опорную реакцию X . Изгибающий момент в сечении m для I состояния будет:

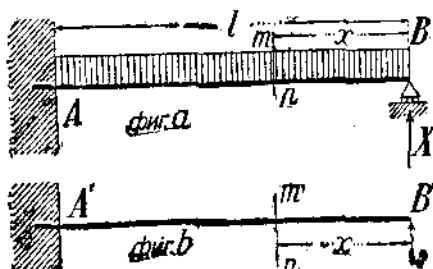
$$M = Xx - q \frac{x^2}{2}.$$

Для II состояния тот же момент равен:

$$M_1 = 1 \cdot x.$$

Величина X найдется из ур-ня:

$$\int_0^l \frac{(Xx - q \frac{x^2}{2}) x dx}{EJ} =$$



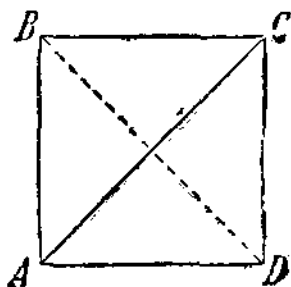
Черт. 307.

Первый член из ур-ня (210) пропадает, так как мы считаем, что опора B не перемещается в вертикальном направлении. Выполняя интегрирование, приходим к известному значению X .

§ 123. Первоначальные напряжения в статически неопределимых системах.

Мы уже отмечали, что в статически определимых системах изменение длины какого-либо стержня, или изменение расположения опорных точек, не вызывает дополнительных напряжений. В иных условиях находятся системы „с лишними стержнями“ и „лишними опорными закреплениями“. Геометрические размеры системы вполне определяются „необходимыми“ стержнями и закреплениями, и, чтобы какой-либо добавочный стержень не вызывал в системе напряжений, необходимо длину стержня выбрать равной расстоянию между соответствующими узлами. Добавочная опора, чтобы не вызывать в системе напряжений, должна иметь строго определенное положение. Поясним примерами.

Система $ABCD$ (черт. 308) имеет один лишний стержень — диагональ BD . Если длина диагонали BD не соответствует расстоянию между узлами B и D ,



Черт. 308.

то для установки ее на место придется произвести предварительное сжатие или растяжение. Вставивши в напряженном состоянии диагональ BD , мы, очевидно, вызовем усилия в остальных стержнях системы. Эти усилия не будут иметь ничего общего с усилиями, вызываемыми в стержнях внешними силами. Они будут зависеть только от того, насколько первоначальная длина диагонали BD отличалась от расстояния между узлами B и D . Эти напряжения будут существовать и в том случае, когда никакие внешние силы на систему не действуют.

Возьмем неразрезную балку (черт. 309). Промежуточная опора является „лишней“, и, если ее расположить выше или ниже линии AC , соединяющей

крайние опоры, то этим мы вызовем в балке дополнительные напряжения, не зависящие от действующих на балку внешних сил.

Покажем теперь на частных при-

мерах, как, пользуясь выведенными общими теоремами, можно определить дополнительные напряжения, обусловленные несоответствиями в расположении опор, или в длинах „лишних стержней“. Эти задачи имеют практическое значение, так как иногда делают сознательные отступления от геометрических размеров частей и тем создают первоначальные напряжения, суммирующиеся с напряжениями от внешних сил. Таким путем иногда удается достигнуть более выгодного распределения напряжений в системе. Возьмем двухшарнирную арку (черт. 310). Обе опоры имеют неподвижные шарниры, одно из закреп-

лений является „ришним“. Если расстояние между узлами фермы A и B строго соответствует расстоянию между опорами, то ферма может быть свободно установлена на опорах — у нас не будет в системе никаких начальных напряжений. Положим теперь, что расстояние между узлами A и B больше расстояния между опорами на величину δ . Чтобы установить ферму на место, придется приложить силы X , которые предварительно сблизили бы узлы A и B на величину δ . При такой установке фермы на место в стержнях возник-

нут усилия, соответствующие силам X . Для нахождения X удобнее всего воспользоваться теоремой Кастилиано. Определим усилия S_i' , которые получатся в стержнях нашей фермы, если вместо сил X приложить силы, равные единице (усилия эти легко найти построением диаграммы Кремона). Тогда, при действии сил X , в стержнях получатся усилия $S_i'X$. Потенциальная энергия системы будет:

$$V_1 = \sum \frac{(S_i')^2 X^2 l_i}{2EF_i}.$$

На основании теоремы Кастилиано будем иметь:

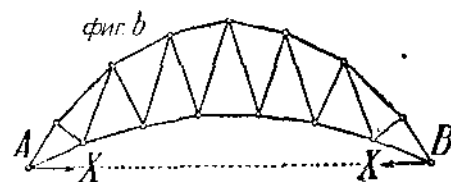
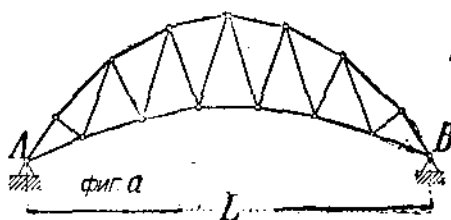
$$\frac{\partial V}{\partial X} = \sum \frac{(S_i')^2 X l_i}{EF_i} = \delta,$$

откуда

$$X = \frac{\delta}{\sum \frac{(S_i')^2 l_i}{EF_i}} \quad (211)$$

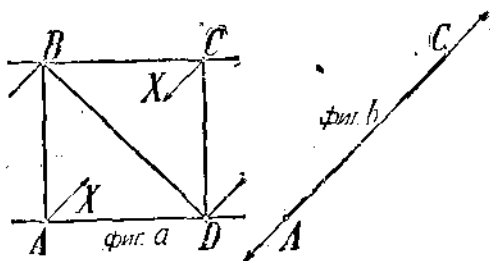


Черт. 309.



Черт. 310.

Таким же способом можно найти усилия в неразрезной балке при расположении опор не на одной высоте. Возьмем теперь случай, когда длина какого-либо стержня системы „с лишними стержнями“ не соответствует расстоянию между узлами. Пусть стержень AC (черт. 311) короче расстояния между узлами A и C на величину δ . Для установки такого стержня придется его предварительно растянуть, и потом в таком напряженном состоянии скрепить с узлами A и C . Очевидно, предварительно растянутый стержень будет стремиться сблизить узлы. Явление будет такое же, как если бы мы к ферме в A и C по линии AC приложили некоторые



Черт. 311.

силы X . Для нахождения этих сил воспользуемся теоремой Кастилиано. Пусть $S_1^i X$ — усилия в стержнях фермы при действии сил X , тогда потенциальная энергия системы будет:

$$V_1 = \sum \frac{(S_1^i)^2 X^2 l_i}{2EF_i}, \text{ и } \frac{\partial V_1}{\partial X} = X \sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}$$

дает нам сближение узлов A и C под действием сил X . Энергия выделенного нами бруска AC (фиг. б) будет:

$$V_2 = \frac{X^2 l}{2EF}, \text{ и } \frac{\partial V_2}{\partial X} = \frac{Xl}{EF}$$

даст нам удлинение этого стержня под действием сил X . Ясно, что сближение узлов A и C , сложенное с удлинением стержня AC , должно дать величину δ . Для получения X получим ур-ие.

$$X \sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i} + X \frac{l}{EF} = \delta,$$

откуда

$$X = \frac{\delta}{\frac{l}{EF} + \sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (212).$$

§ 124. Температурные напряжения в статически неопределимых системах.

Рассмотрим стержневые системы, у которых отдельные элементы работают только на растяжение или на сжатие. При наличии лишних стержней или лишних закреплений изменение длины отдельных элементов не может быть совершенно произвольным, поэтому повышение или понижение температуры

вызывает обыкновенно в таких системах дополнительные напряжения. Величина этих напряжений в некоторых случаях может быть весьма значительной, и при расчетах их приходится присоединять к напряжениям, вызываемым заданными нагрузками. Определение температурных напряжений может быть выполнено при помощи ранее доказанных общих теорем. *Ход расчета выясним на частных примерах.*

Возьмем двухшарнирную арку, представленную на черт. 310. Если температура всех стержней повысится на t^0 , то при свободном расширении каждый из стержней удлинился бы на величину $\alpha l t$, где α — коэффициент линейного расширения, l — длина стержня. Первоначальный пролет арки L увеличился бы на величину:

$$\delta = \alpha l t.$$

Так как опорные шарниры неподвижны, то появятся усилия X , препятствующие увеличению пролета, и, очевидно, величина этих усилий такова, что они уничтожают приращение пролета δ , получившееся от повышения температуры. Для определения X можно воспользоваться ф-лой (211) предыдущего параграфа. Подставляя вместо δ его значение, будем иметь:

$$X = \frac{\alpha l t}{\sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (213).$$

Для определения напряжений, которые получаются при повышении температуры одного какого-либо стержня, можно пользоваться ф-лой (212) предыдущего параграфа. В самом деле, повышение температуры какого-либо стержня на величину t равносильно тому, что длина стержня больше расстояния между соответствующими узлами на величину $\delta = \alpha l t$. В таком случае стержень должен быть предварительно сжат, и после установки будет стремиться раздвинуть соответствующие узлы. Получающееся благодаря этому усилие в нагретом стержне, на основании ф-лы (212), будет:

$$X = - \frac{\alpha l t}{\frac{l}{EF} + \sum \frac{(S_1^i)^2 l_i}{EF_i}} \quad (214).$$

Если приходится иметь дело с повышением температуры целого ряда стержней, то удобнее всего воспользоваться способом Мора. Удлинения стержней от совместного действия нагрузок и повышения температуры представляется ф-ми вида

$$\delta l_i = \alpha l_i t_i + \frac{(S_0^i + S_1^i X + S_2^i Y + S_3^i Z + \dots) l_i}{EF_i}$$

Это состояние системы будем считать I, II состояние выбираем так, как это мы делали раньше: отбрасываем все нагрузки и все лишние неизвестные

и вместо одной из этих неизвестных прикладываем силы, равные единице. Приравнявая нулю работу сил II состояния на перемещениях, соответствующих I состоянию, получим достаточное число ур-ий для определения лишних неизвестных. В случае системы с одним лишним стержнем, ур-ие примет вид:

$$-1 \cdot \left(a l l + \frac{X l}{E F} \right) - \sum_{i=1,2,3,\dots} S_i l \left(\frac{S_0 l + S_i l X}{E F l} + a l l_i \right) = 0 \quad (215),$$

откуда может быть определено X .

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ ¹⁾.

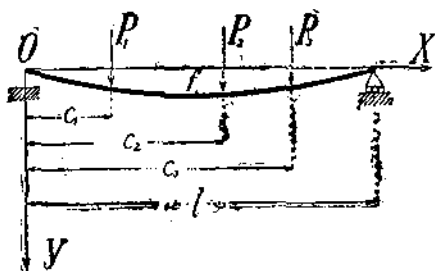
§ 125. Основной метод.

Исследование изгиба стержней, основанное на интегрировании известного дифференциального ур-ия (см. § 75), не представляет никаких затруднений, пока применим принцип сложения действия сил, или в статически неопределимых случаях, пока число лишних неизвестных не велико. Уже исследование одно-временного действия изгиба и сжатия, или изгиба и растяжения (§ 112), приводит к более сложным ф-лам, не удобным для практического приложения, а исследование тех случаев изгиба, где приходится иметь дело с большим числом лишних неизвестных, может привести к весьма утомительной, а иногда прямо-таки невыполнимой работе, состоящей в решении системы большого числа ур-ий. Во многих случаях решение таких задач можно упростить и получить приближенный результат с достаточной для практических приложений точностью, не прибегая к интегрированию соответствующих ур-ий. Приближенный метод основан на пользовании началом возможных перемещений, и мы будем исходить из основного ур-ия (190).

Возьмем случай действия на балку системы вертикальных нагрузок P_i (черт. 312). Принимая во внимание, что работа каждой из сил на каком-либо возможном перемещении равна $P_i \delta u_i$, где δu_i приращение прогиба под силой P_i , мы можем ур-ие (190) представить в таком виде:

$$\sum_{i=1,2,3,\dots} P_i \delta u_i - \delta V = 0 \quad (216).$$

Работа внешних сил на всяком возможном отклонении изогнутой оси балки от положения равновесия равна соответ-



Черт. 312.

¹⁾ Более полное изложение этого вопроса имеется в нашей работе: Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок, Изв. Киев. пол. инст., 1910 г.

См. также наш Курс теории упругости, ч. II, стр. 50.

ставящему приращению потенциальной энергии. Так как при возможных перемещениях силы P_i сохраняют свою величину, то ур-ие (216) может быть представлено еще в таком виде:

$$\delta \left(\sum_{i=1,2,3,\dots} P_i y_i - V \right) = 0 \quad (217),$$

т.е. приращение заключенной в скобки разности на всяком возможном отклонении от положения равновесия равно нулю, и, следовательно, эта разность для положения равновесия достигает своего максимального или минимального значения. Это заключение дает нам способ для разыскания изогнутой оси балки. Из всех возможных форм нужно выбрать такую, которой соответствует максимум или минимум выражения:

$$\sum P_i y_i - V = U \quad (218).$$

Эта ф-ла и будет искомой формой равновесия изогнутой оси балки. Для определения формы изгибаемого упругого стержня необходимо задать бесконечное число координат, так как прогиб в каждой точке является произвольной величиной. Придется иметь дело с системой с бесконечным числом степеней свободы, и разыскание минимума выражения (218) является задачей вариационного исчисления.

Мы можем упростить решение и найти приближенное выражение для искомой формы равновесия элементарным путем, если воспользуемся тем обстоятельством, что приблизительный вид изогнутой оси при заданных нагрузках и при заданных условиях на концах известен. Можно положить

$$y = \varphi(x)$$

и подобрать вид ф-ии $\varphi(x)$ так, чтобы были удовлетворены условия на концах, и чтобы определяемая ею кривая подходила к искомой форме прогиба. Удовлетворить последнему условию мы можем, выбрав для $\varphi(x)$ выражение, заключающее несколько произвольных параметров. Меняя величины этих параметров, будем получать различные формы изгиба. Чтобы найти форму наиболее подходящую к действительной, выберем для произвольных параметров те значения, при которых выражение (218) имеет значение максимума или минимума. Так как теперь мы имеем дело с конечным числом переменных, то задача сводится к отысканию обыкновенного max или min. Нужно составить производные от выражения (218) по каждому из параметров и приравнять их нулю. Ур-ия эти и послужат для определения надлежащих значений параметров. Чем большее число параметров мы возьмем, тем ближе наша кривая подойдет к искомой, тем большую точность будет иметь приближенное решение. Дальше, при рассмотрении частных задач, увидим, что, ограничиваясь только одним произвольным параметром, можно при удачном выборе ф-ии $\varphi(x)$ получить вполне удовлетворительный результат.

§ 126. Изгиб балок с опертыми концами.

Применим метод, изложенный в предыдущем параграфе, к исследованию изгиба балок с опертыми концами под действием системы вертикальных нагрузок, направленных в одну сторону (черт. 312). В этом случае ось балки изогнется по кривой без перегибов, и место наибольшего прогиба будет близко к середине пролета. В качестве первого приближения положим, что балка гнется по синусоиде, тогда:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Легко видеть, что эта форма изгиба удовлетворяет условиям на концах. В самом деле: при $x = 0$ и $x = l$ величины y и y'' обращаются в нуль, следовательно, на опорах равны нулю прогибы и изгибающие моменты, что вполне соответствует опертым концам. Прогиб балки в расстоянии c_i от левого конца будет равен:

$$y_i = f \sin \frac{\pi c_i}{l}.$$

Наибольший прогиб, соответствующий середине пролета, равен, очевидно, f . Выражение (218) в данном частном случае напишется так:

$$f \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} - V.$$

Составляя производную от этого выражения по f и приравнявая ее нулю получим уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \quad (219),$$

из которого может быть найдено значение параметра f . Нужно только вместо V вставить его выражение, в зависимости от прогиба. На основании ранее полученных результатов (ф-ла 184), имеем для энергии изгиба такое выражение:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EJ f^2 \pi^4}{2 l^3} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} f^2 \quad (220).$$

Вставляя это в уравнение (219), получим:

$$f = \frac{2 l^3}{EJ \pi^4} \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \quad (221).$$

Чтобы составить представление о точности этой ф-лы, применим ее к нескольким частным случаям. Если на балке имеется один груз P , прогиб по середине будет:

$$f = \frac{2 l^3}{EJ \pi^4} P \sin \frac{\pi c}{l}.$$

При $c = \frac{l}{2}$, т.е. при расположении нагрузки по середине пролета:

$$f = \frac{2P^3}{EJ\pi^4} = \frac{P^3}{48,7 EJ}.$$

Результат этот отличается от точной ф-лы:

$$f = \frac{P^3}{48 EJ},$$

примерно, на 1,5%.

Если мы будем уменьшать расстояние c и при этом увеличивать P с таким расчетом, чтобы произведение Pc сохраняло постоянное значение M , то в пределе придем к изгибу балки парой сил, приложенной на конце. Принимая во внимание, что при малых значениях c :

$$\sin \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi c}{l},$$

мы получим для прогиба по середине выражение:

$$f = \frac{2P^3}{EJ\pi^4} P \frac{\pi c}{l} = \frac{2M^3}{EJ\pi^3} = \frac{MP^3}{15,5 EJ}$$

— величину, отличающуюся от точного решения, примерно, на 30%. Следовательно, даже для такого предельного положения нагрузки приближенная ф-ла дает вполне удовлетворительный результат.

От изгиба сосредоточенными силами легко перейти к сплошной нагрузке, распределенной по любому закону. Обозначим через q интенсивность нагрузки. В общем случае она будет некоторой ф-ией от x . Если мы выделим один элемент нагрузки qdx в расстоянии x от левой опоры, то вызываемый этим элементом прогиб по середине пролета будет:

$$\delta f = \frac{2P^3}{EJ\pi^4} qdx \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Складывая действия отдельных элементов нагрузки, найдем полный прогиб в такой форме:

$$f = \frac{2P^3}{EJ\pi^4} \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx \quad (22).$$

В частном случае, когда нагрузка распределена по пролету равномерно, q — постоянная величина, и мы получим:

$$f = \frac{2qP^3}{EJ\pi^4} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = \frac{4qP^3}{EJ\pi^3} = \frac{qP^3}{76,5 EJ}$$

Точное решение для этого случая будет:

$$f = \frac{5}{384} \frac{qP^3}{EJ} = \frac{qP^3}{76,8 EJ}.$$

Таким образом, погрешность составляет меньше 1/2%.

Чтобы получить большую точность, нужно, как мы говорили, увеличивать число произвольных параметров, входящих в выражение для изогнутой оси. В рассматриваемом случае увеличение это может быть достигнуто путем наложения отдельных синусоид. Положим, например:

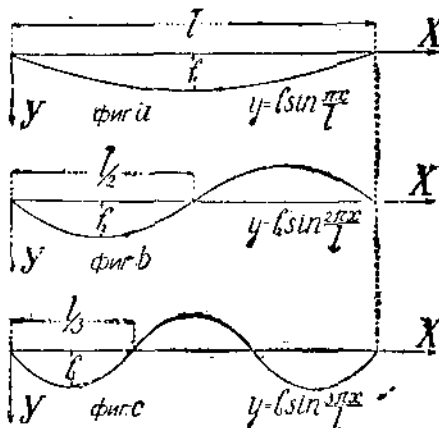
$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (223).$$

Каждому члену этого ряда будет соответствовать своя синусоида (черт. 313). Каждая из них удовлетворяет условиям на концах, и, чтобы путем сложения синусоид получить форму, возможно более близкую к искомой, нужно величины $f_1, f_2, f_3, \dots$ подобрать так, чтобы выражение (218) приобретало значение max или min. Вставим в это выражение значение y (ф-ла 223), тогда получим:

$$\sum P_i \left(f_1 \sin \frac{\pi c_i}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi c_i}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi c_i}{l} + \dots \right) - V = 0.$$

Составляя производные по произвольным параметрам $f_1, f_2, f_3, \dots$ и приравнявая их нулю, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial f_1} &= \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}, \\ \frac{\partial V}{\partial f_2} &= \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l}, \end{aligned} \quad (224).$$



Черт. 313.

Для определения величин $f_1, f_2, \dots$ нужно в эти ур-ия вместо V вставить его выражение:

$$\begin{aligned} V &= \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} \int_0^l \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 2^2 f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + 3^2 f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx = \\ &= \frac{EJ\pi^4}{4l^3} (f_1^2 + 2^4 f_2^2 + 3^4 f_3^2 + \dots) \end{aligned} \quad (225).$$

Тогда ур-ия (224) переищутся в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{EJ\pi^4}{2l^3} f_1 &= \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}, \\ \frac{EJ\pi^4}{2l^3} 2^4 f_2 &= \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l}, \\ &\dots \end{aligned}$$

1) Результат этот легко получается, если принять во внимание, что выражение под знаком интеграла, после возведения в квадрат, будет заключать члены двух видов:

$$2n^2 f_n \sin \frac{n\pi x}{l} m^2 f_m \sin \frac{m\pi x}{l} \text{ и } n^4 f_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \text{ и } m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\text{и что } \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \text{ при } m \neq n; \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

откуда:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2P}{EJ\pi^4} \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}, \\ f_2 &= \frac{1}{2^4} \frac{2P}{EJ\pi^4} \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l}, \\ f_3 &= \frac{1}{3^4} \frac{2P}{EJ\pi^4} \sum P_i \sin \frac{3\pi c_i}{l}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Для получения прогиба нужно только эти значения $f_1, f_2, \dots$ вставить в выражение (223) для y .

Возьмем, например, случай действия силы P по середине пролета, тогда

$$c = \frac{l}{2}, \sin \frac{\pi c}{l} = 1; \sin \frac{2\pi c}{l} = 0; \sin \frac{3\pi c}{l} = -1; \dots,$$

и мы будем иметь:

$$f_1 = \frac{2P}{EJ\pi^4} P; f_2 = 0; f_3 = -\frac{1}{3^4} \frac{2P}{EJ\pi^4} P; \dots$$

Выражение для изогнутой оси (ф-ла 223) напишется таким образом:

$$y = \frac{2P^2}{EJ\pi^4} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right).$$

Чтобы найти прогиб по середине, нужно положить $x = \frac{l}{2}$, тогда

$$f = \frac{2P^2}{EJ\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

Если ограничиться только одним первым членом ряда, мы приходим к ранее рассмотренному первому приближению. Два первых члена ряда дают нам второе приближение:

$$f = \frac{2P^2}{EJ\pi^4} \left(1 + \frac{1}{81} \right) = \frac{PP}{48,1EJ},$$

отличающееся от точного решения меньше, чем на $1/4\%$. В дальнейшем мы обыкновенно будем ограничиваться первым приближением, дающим точность, вполне достаточную для практических приложений.

Если воспользоваться понятиями „обобщенная координата“ и „обобщенная сила“, то ур-ия (219) и (224), которыми мы пользовались для нахождения параметров $f, f_1, f_2, \dots$, приобретают весьма простой смысл. Возьмем, например, ур-ие (219). Допустив, что наша балка гнется по синусоиде:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

мы тем самым обратили ее в систему с одной степенью свободы. Для определения всех элементов изгиба: прогиба, угла наклона касательной и кривизны в любом сечении, достаточно знать величину f . Мы эту величину примем за обобщенную координату системы. Что же будет в таком случае обобщенной силой? Чтобы решить этот вопрос, дадим нашей координате весьма малое приращение δf и найдем соответствующую этому приращению работу. Мно-

житель, на который нужно помножить δf , чтобы получить работу, и будет, согласно ранее принятому определению, искомой обобщенной силой. Приращению координаты δf соответствует перемещение точки приложения сил P_i на величину $\delta f \sin \frac{\pi c_i}{l}$, при этом будет совершена работа $P_i \delta f \sin \frac{\pi c_i}{l}$. Работа всех нагрузок, действующих на балку, представится суммой:

$$\delta f \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l},$$

следовательно, $\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}$ есть не что иное, как обобщенная сила, соответствующая координате f . После этих соображений ур-ие (219) может быть получено сразу, путем приравнивания производной от потенциальной энергии по координате, соответствующей обобщенной силе. То же самое можно сказать и относительно ур-ий (224). Величины $f_1, f_2, f_3, \dots$ являются обобщенными координатами системы, а стоящие в правой части этих ур-ий суммы будут соответствующими обобщенными силами. В выражении для V (ф-ла 225) входят только квадраты величин $f_1, f_2, \dots$, следовательно, они являются „главными“ или „нормальными“ координатами системы.

§ 127. Одновременное действие растяжения или сжатия и изгиба.

Пока поперечные размеры бруска не малы по сравнению с длиной, можно, при одновременном действии продольных и поперечных сил, пользоваться принципом сложения действия сил и суммировать напряжения изгиба с напряжениями от продольных сил. В случае гибких стержней такое сложение может привести к большим погрешностям, так как продольные силы, кроме растяжения или сжатия, вызывают при некоторых условиях значительные изменения в напряжениях изгиба. Исследование вопроса о влиянии продольных сил на прогиб сводится к интегрированию дифференциального ур-ия изогнутой оси балки, и окончательное выражение для прогиба, даже в простейших случаях ¹⁾, представляется довольно сложными ф-ми, неудобными для вычислений (§ 112). Приближенный метод в этих случаях оказывается особенно удобным. Пользуясь им, мы получаем для прогиба весьма простые ф-лы, наглядно указывающие, как изменяется влияние продольных сил на прогиб, в зависимости

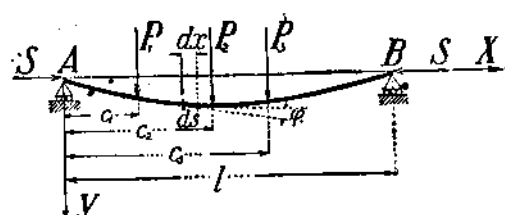
¹⁾ Ряд задач этого рода рассмотрен в работах А. П. Фан-дер-Флита, помещенных в Изв. собр. инж. лут. сообщ., 1900—1903 гг., и в Изв. Петерб. политех. инст., 1904 г. В этих статьях приведены подробные таблицы, значительно облегчающие расчеты. Решение тех же задач имеется в моем Курсе теории упругости, ч. II, стр. 27.

См. также след. работы: Tolle, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1897 г., стр. 855.

Forchheimer, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1906 г., стр. 58.

Вопрос о допустимых напряжениях, в случае одновременного действия изгиба и сжатия, подробно рассмотрен в работе К. С. Завриева, см. Вестник о-ва технологий, 1913 г. В этой работе даны таблицы, значительно упрощающие расчеты.

от размеров стержня. Положим, балка AB , изгибаемая поперечными силами $P_1, P_2, \dots$, подвергается действию продольной сжимающей силы S (черт. 314).



Черт. 314.

В качестве первого приближения допустим, что балка гнется по синусоиде:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

и примем величину f за обобщенную координату. Чтобы найти соответствующую обобщенную силу,

дадим координате f бесконечно малое приращение δf и определим соответствующее значение работы внешних сил. Что касается вертикальных нагрузок, то их работа, как мы видели, представится так:

$$\delta f \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}.$$

Работу продольных сил мы найдем, вычислив сближение концов изгибаемой балки. Это сближение, очевидно, будет равно разности между длиной дуги изогнутой оси и длиной соответствующей хорды AB . Разность между длиной элемента ds (черт. 314) и длиной его проекции dx равна:

$$ds - dx = ds(1 - \cos \varphi) = 2 ds \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

При малых искривлениях можно в полученном результате положить

$$ds = dx \text{ и } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} y',$$

тогда сближение концов балки при изгибе представится такой ϕ -лой:

$$\delta l = \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \frac{1}{2} (y')^2 dx \quad (226).$$

Если балка гнется по синусоиде, то

$$\delta l = \frac{f^2 \pi^2}{2l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \quad (227).$$

Давая прогибу f бесконечно малое приращение, мы тем самым вызываем дополнительное сближение концов балки, равное:

$$\frac{\partial \delta l}{\partial f} \delta f = \frac{\pi^2 f}{2l} \delta f,$$

при чем продольные силы S совершают работу:

$$S \frac{\pi^2 f}{2l} \delta f.$$

Присоединяя это к работе вертикальных нагрузок, найдем:

$$\left(\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + S \frac{\pi^2 f}{2l} \right) \delta f.$$

Заклученный в скобки множитель есть обобщенная сила, соответствующая координате f .

Приравнявая производную от потенциальной энергии по координате, соответствующей силе, получим ур-ие:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + S \frac{\pi^2 f}{2l},$$

откуда, вставив вместо V его выражение (220), находим:

$$f = \frac{2l^3 \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}}{EJ\pi^4 \left(1 - \frac{Sl^2}{EJ\pi^2} \right)}$$

Если сравнить этот результат с выражением для прогиба (221), найденным при действии только вертикальных нагрузок, и для краткости обозначить этот прогиб через f_0 , то получим такую ф-лу:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}} \quad (228)$$

Вторым членом в знаменателе оценивается влияние продольной силы на прогиб.

В случае коротких стержней, отношение $S: \frac{EJ\pi^2}{l^2}$ мало, и роль продольной силы ничтожна. Влияние это возрастает с увеличением гибкости стержня т.е. с увеличением длины l или уменьшением жесткости изгиба EJ .

Когда продольная сила делается равной $\frac{EJ\pi^2}{l^2}$, знаменатель в ф-ле (228) обращается в нуль, и, следовательно, весьма малая поперечная сила может вызвать большой прогиб. Это значение продольной силы будем называть *критическим*.

Отношение $S: \frac{EJ\pi^2}{l^2}$ обозначим одной буквой α^2 , тогда:

$$f = \frac{f_0}{1 - \alpha^2} = \mu' f_0. \quad (229).$$

Влияние продольной силы на прогиб вполне определится ее отношением к критическому значению силы.

Для суждения о точности полученной ф-лы, вычислим несколько значений коэффициента μ' и сравним их с значениями μ , определенными по точной ф-ле (195) для случая изгиба балки силой, приложенной по середине пролета. Результат вычислений даем в нижеследующей таблице. Из этой таблицы видно, как возрастает влияние продольной силы на прогиб с увеличением α^2 . При

$\frac{\pi^2 \alpha^2}{4} = 0,5$, т.е., когда продольная сила составляет одну пятую часть критического значения, влияние ее на прогиб оценивается в 25%, при вдвое большей силе — дополнительный прогиб составит 68% от f_0 .

ТАБЛИЦА.

$\frac{\pi^2 \alpha^2}{4}$	Прибл. ф-ла μ'	Точная ф-ла μ
0	1,00	1,00
0,2	1,09	1,09
0,5	1,25	1,25
1,0	1,68	1,67
1,5	2,55	2,53
2,0	5,27	5,22

Разность между точной и приближенной ф-лой весьма не велика — для случаев, приведенных в таблице, она нигде не достигает 1%. Такая точность, конечно, вполне достаточна для практических приложений. Если желательно получить дальнейшие приближения, то нужно взять для прогиба u общее выражение (ф-ла 223) и соответствующее значение потенциальной энергии (ф-ла 225). С переходом к сплошной нагрузке точность приближенной ф-лы (228) возрастает. При равномерно распределенной нагрузке погрешность, в худшем случае, не превосходит 1/2%, В случае распределения нагрузки по параболическому закону погрешность еще меньше. Следовательно, на практике, при вычислении наибольшего прогиба, мы всегда можем пользоваться приближенной ф-лой (228), если только все вертикальные силы имеют одно направление. Та же ф-ла применима и при изгибе балки парами сил, приложенными по концам, если только обе пары гнут балку в одну и ту же сторону.

От продольной сжимающей силы мы легко переходим к случаю растягивающей силы, нужно только изменить знак S . Прогиб по середине пролета, если ограничиться первым приближением, будет равен:

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \quad (230),$$

где α^2 сохраняет прежнее значение. В случае растяжения гибких стержней, α^2 может быть больше единицы (на практике α^2 , обыкновенно, не превосходит 10), и, как показывает вычисление следующих приближений, точность ф-лы (230) убывает с увеличением α^2 . Для сосредоточенных сил уже при $\alpha^2 = 2$ погрешность приближенной ф-лы достигает 4,3%. В случае равномерно распределенной нагрузки точность значительно большая, и, например, для $\alpha^2 = 10$ погрешность не превосходит 1,7%.

Вычислив по приближенным ф-лам прогиб, мы легко найдем величину изгибающего момента, обусловленного действием продольных сил. Для середины пролета этот момент равен:

$$\pm Sf = \pm \frac{Sf_0}{1 \pm \alpha^2}.$$

Знак придется выбрать в зависимости от того, имеем ли мы дело с растягивающей или сжимающей силой S .

Возьмем, например, случай одновременного действия сжатия силами S и изгиба силой P , приложенной по середине пролета. Изгибающий момент по середине пролета имеет наибольшее значение. Его величина равна:

$$M = \frac{Pl}{4} + Sf = \frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{0,823x^2}{1-a^2} \right).$$

Здесь мы вместо f_0 вставили его значение $\frac{P\beta}{48EJ}$.

В случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , изгибающий момент по середине пролета равен:

$$M = \frac{q\beta^2}{8} + Sf = \frac{q\beta^2}{8} \left(1 + \frac{1,028x^2}{1-a^2} \right).$$

Эти ф-лы для наибольших изгибающих моментов дают, в случае сжимающих сил достаточно точный результат. При растягивающих силах, когда a^2 становится отрицательным, наибольший момент будет получаться как разность двух чисел. При больших a^2 когда влияние продольных сил особенно велико эти числа близки одно к другому, и потому момент, вычисляемый по разности, может получиться с значительной погрешностью. Поэтому при $a^2 > 3$ ¹⁾ следует для вычисления изгибающего момента воспользоваться дальнейшим приближением

Для получения дальнейших приближений нужно взять для y общее выражение:

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

Сближение концов балки при изгибе представится в этом случае такой ф-ой:

$$\begin{aligned} \delta l &= \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \left(f_1 \cos \frac{\pi x}{l} + 2f_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + 3f_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4l} \left(f_1^2 + 2^2 f_2^2 + 3^2 f_3^2 + \dots \right)^2. \end{aligned}$$

Примем $f_1, f_2, \dots$ за обобщенные координаты и выясним соответствующие значения обобщенных сил. Дадим одной из координат f_m приращение δf_m , тогда прогиб балки получит приращение:

$$\delta y = \delta f_m \sin \frac{m\pi x}{l},$$

и сближение δl изменится на величину

$$\frac{\partial \delta l}{\partial f_m} \delta f_m = \frac{m^2 \pi^2}{2l} f_m \delta f_m.$$

1) При $a^2 = 3$ погрешность в $M_{\max}$ для равномерной нагрузки составляет около 2,5%.

2) Результат этот легко получаем, если примем во внимание, что

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Здесь m и n целые, не равные числа.

Поперечные силы совершат при этом работу:

$$\sum P_i \sin \frac{m\pi c_i}{l} \delta f_m.$$

Работа, совершаемая продольными силами S , представится таковой ф-лой:

$$\pm S \frac{m^2 \pi^2}{2l} f_m \delta f_m,$$

причем знак $+$ соответствует сжимающей силе и $-$ растягивающей. Следовательно, обобщенная сила, соответствующая координате f_m , будет:

$$\sum P_i \sin \frac{m\pi c_i}{l} \pm f_m S \frac{m^2 \pi^2}{2l}.$$

Приравнявая производную от потенциальной энергии (ф-ла 225) по какой-либо координате соответствующей силе, будем получать ур-ня вида:

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} m^4 f_m = \sum P_i \sin \frac{m\pi c_i}{l} \pm f_m S \frac{m^2 \pi^2}{2l}.$$

откуда находим:

$$f_m = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \frac{\sum P_i \sin \frac{m\pi c_i}{l}}{m^2(m^2 \mp \alpha^2)},$$

где α^2 имеет прежнее значение.

Вставляя полученные таким образом значения координат $f_1, f_2, \dots$ в общее выражение для u , найдем:

$$v = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1^2(1^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2(2^2 \mp \alpha^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\sum P_i \sin \frac{3\pi c_i}{l} \sin \frac{3\pi x}{l}}{3^2(3^2 \mp \alpha^2)} + \dots \right] \quad (a).$$

Этим результатом можно воспользоваться также и в том случае, когда на балку действует сплошная нагрузка. Обозначим через q интенсивность сплошной нагрузки. (В общем случае q некоторая ф-ия от c .) Сплошную нагрузку qdc , приходящуюся на элемент длины dc , можно заменить сосредоточенной силой. Пользуясь ф-ой (a) и суммируя действие отдельных элементов сплошной нагрузки, получим:

$$v = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\int_0^l q \sin \frac{\pi c}{l} dc}{1^2(1^2 \mp \alpha^2)} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\int_0^l q \sin \frac{2\pi c}{l} dc}{2^2(2^2 \mp \alpha^2)} \sin \frac{2\pi x}{l} + \right. \\ \left. + \frac{\int_0^l q \sin \frac{3\pi c}{l} dc}{3^2(3^2 \mp \alpha^2)} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right] \quad (b).$$

В случае равномерно распределенной нагрузки $-q$ постоянно, и выражение для прогиба перепишется так:

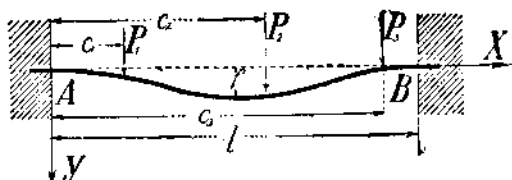
$$v = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3(1^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3(3^2 \mp \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^3(5^2 \mp \alpha^2)} + \dots \right] \quad (c).$$

§ 128. Изгиб балок с заделанными концами.

В случае заделанных концов, прогибы на опорах и углы наклона соответствующих касательных равны нулю. При действии вертикальных сил одного направления изогнутая ось имеет две точки перегиба, и максимум прогиба будет недалеко от середины пролета (черт. 315). Мы удовлетворим всем этим условиям и получим подходящий вид кривой, если для изогнутой оси балки возьмем ур-ие:

$$y = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Легко проверить, что при $x=0$ и $x=l$ обращается в нуль y и y' . Наибольший прогиб соответствует середине пролета и равняется f . Выбрав таким обра-



Черт. 315.

зом форму кривой, мы тем самым обратили нашу балку в систему с одной степенью свободы. За обобщенную координату возьмем величину f . Если координате f дать бесконечно малое приращение δf , то точка приложения какого-либо груза P_i переместится на величину:

$$\delta y_i = \frac{\delta f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right).$$

При этом вертикальные силы $P_1, P_2, P_3, \dots$ совершат работу:

$$\delta f \frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right).$$

Обобщенной силой, соответствующей координате f , будет выражение:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right).$$

Ур-ие для определения f напишется так:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right) \quad (231).$$

Значение потенциальной энергии в данном случае будет:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = EJ \frac{2f^2 \pi^4}{l^3} \int_0^l \cos^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{EJ \pi^4 f^2}{l^3} \quad (232).$$

Оставляя это в ур-ие (231), найдем:

$$f = \frac{l^3 \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l} \right)}{4EJ \pi^4} \quad (233).$$

В частном случае, когда имеется один груз P по середине пролета, получим:

$$f = \frac{P\ell^3}{2EJ\pi^4} = \frac{P\ell^3}{194,8EJ}$$

вместо точного решения: $\frac{P\ell^3}{192EJ}$. Погрешность составляет, примерно, 1,5%.

В случае распределенной сплошной нагрузки придется суммирование заменить интегрированием. Ф-ла для прогиба напишется так:

$$f = \frac{\ell^3}{4EJ\pi^4} \int_0^l q \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) dx \quad (233')$$

Для равномерной нагрузки q постоянно, и мы будем иметь:

$$f = \frac{q\ell^3}{4EJ\pi^4} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) dx = \frac{q\ell^4}{4EJ\pi^4}.$$

И для этого случая погрешность не превосходит 1,5%.

Рассмотрим теперь, каково влияние на прогиб продольной силы. Пусть на балку AB , кроме вертикальных нагрузок, действует еще продольное сжимающее усилие S . Сохраним прежнее выражение для u и выясним значение обобщенной силы, соответствующей координате f . При изменении координаты будут совершать работу не только вертикальные нагрузки, но также и продольные силы S . Работа поперечных нагрузок выразится той же ф-лой, что и в предыдущем случае. Для вычисления работы продольных сил составим выражение для сближения концов изгибаемой балки. На основании ф-лы (226) имеем:

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{2\ell^3} \int_0^l \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4\ell} \quad (234).$$

Давая координате f приращение δf , найдем, что сближение концов изменяется на величину:

$$\frac{\partial \delta l}{\partial f} \delta f = \frac{\pi^2 f}{2\ell} \delta f,$$

и соответствующая работа сил S равна:

$$S \frac{\pi^2 f}{2\ell} \delta f.$$

Присоединяя к этому работу поперечных сил $P_1, P_2, \dots$, найдем для искомой обобщенной силы выражение:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right) + S \frac{\pi^2 f}{2\ell}.$$

Ур-не для определения f напишется так:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{1}{2} \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right) + S \frac{\pi^2 f}{2\ell}.$$

Вставляя вместо V его значение (232), найдем для прогиба f -лу:

$$f = \frac{l^3 \sum P_i \left(1 - \cos \frac{2\pi c_i}{l}\right)}{4EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{Sl^2}{4EJ\pi^2}}.$$

Если через f_0 обозначить прогиб при действии только поперечных нагрузок и сохранить обозначение

$$S: \frac{EJ\pi^2}{l^2} = \alpha^2,$$

то вышеполученная f -ла переписывается так:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \quad (235).$$

В случае продольных растягивающих сил нужно только изменить знак S , и мы получим:

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha^2}{4}} \quad (236).$$

Сравнивая это с результатами предыдущего параграфа, заключаем, что в случае заделанных концов роль продольных сил не так велика, как при опертых концах, и влиянием этих сил на прогиб часто можно совершенно пренебрегать.

Формулы (235) и (236) приходится рассматривать как первое приближение. Для получения более точного значения прогибов и для вычисления опорных моментов, можно воспользоваться таким приемом. Отбрасываем предварительно лишние закрепления, препятствующие поворачиванию концов балки, и находим для полученной таким образом балки с опертymi концами прогиб и углы поворота концов. После этого подбираем опорные моменты так, чтобы они возвратили повернувшиеся концы балки в их первоначальное положение. Для решения этой задачи нам понадобятся f -лы, выражающие прогиб и углы поворота концов балки под действием опорных моментов. Получим эти f -лы путем интегрирования дифференциального ур-ия изогнутой оси балки. Предположим, что балка AB изгибается под действием момента M , приложенного к левому концу, и сжимающих сил S . Дифференциальное ур-ие изогнутой оси будет



Черт. 316.

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(l-x)}{l} - Sy.$$

Общий интеграл его представится в таком виде:

$$y = A \cos \frac{\pi x}{l} + B \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{M(l-x)}{lS}, \text{ где } \alpha^2 = \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}.$$

Произвольные постоянные найдутся из условий на концах. В нашем случае y обращается в нуль при $x=0$ и при $x=l$. Получаем для определения A и B два таких ур-ия

$$A + \frac{M}{S} = 0; A \cos \pi + B \sin \pi = 0$$

откуда:

$$A = -\frac{M}{S}; \quad B = \frac{M}{S} \operatorname{ctg} \alpha\pi,$$

следовательно:

$$y = \frac{M}{S} \left[\operatorname{ctg} \alpha\pi \sin \frac{\alpha\pi x}{l} - \cos \frac{\alpha\pi x}{l} + \frac{l-x}{l} \right] = \frac{Ml^2}{\alpha^2 EJ\pi^2} \left[\frac{\sin \frac{\alpha\pi(x-l)}{l}}{\sin \alpha\pi} + 1 - \frac{x}{l} \right].$$

Составляя производную $\frac{dy}{dx}$ и полагая в ней $x=0$ и $x=l$, получим ф-лы для углов поворота концов балки (знаки взяты, согласно условию § 74):

$$\theta_1 = \frac{Ml}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\alpha\pi} - \operatorname{ctg} \alpha\pi \right); \quad \theta_2 = \frac{Ml}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha\pi} - \frac{1}{\alpha\pi} \right) \quad (237).$$

Легко проверить, что при малых значениях $\alpha\pi$, т.е. при малых значениях продольной силы полученные ф-лы совпадают с найденными ранее ф-лами (104).

Если балка изгибается двумя моментами M_1 и M_2 , приложенными по концам, и сжимается силой S , то для углов поворота получаем ф-лы:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{M_1 l}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\alpha\pi} - \operatorname{ctg} \alpha\pi \right) + \frac{M_2 l}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha\pi} - \frac{1}{\alpha\pi} \right) \\ \theta_2 &= \frac{M_2 l}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\alpha\pi} - \operatorname{ctg} \alpha\pi \right) + \frac{M_1 l}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha\pi} - \frac{1}{\alpha\pi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (237').$$

При $M_1 = M_2 = M$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Ml}{EJ\alpha\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha\pi \right) = \frac{Ml}{EJ} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} \quad (238).$$

Если вместо сжимающей у нас будет продольная растягивающая сила, то придется изменить знак α^2 и поставить везде, вместо α , величину $i\alpha$. Тогда ф-ла (238) перепишется так:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Ml}{EJ} \frac{\operatorname{tg} \ln \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} \quad (238').$$

Имея ф-лы (237) и (238), мы без затруднения можем решать задачи об изгибе балки с заделанными концами.

Возьмем, например, случай изгиба балки равномерно распределенной нагрузкой. Отбрасывая закрепления концов, найдем для прогиба выражение [ф-ла (с) § 127]:

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3(1^2 + \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3(3^2 + \alpha^2)} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^3(5^2 + \alpha^2)} + \dots \right].$$

Составляя производную по x и полагая x равным нулю, получим для углов поворота концов ф-лу:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{4ql^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{1}{1^2(1^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 + \alpha^2)} + \dots \right].$$

Так как по условию закрепления концы балки не поворачиваются, то, следовательно, опорные моменты поворачивают концы балки на углы равные и прямо противополо-

ложные тем, которые получаются от сплошной нагрузки. Для определения M будем иметь ур-ия:

$$\frac{Ml}{EJ} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} = \frac{4qR^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{1}{1^2(1^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 - \alpha^2)} + \dots \right]$$

— в случае сжимающей продольной силы, и

$$\frac{Ml}{EJ} \frac{\operatorname{tg} h \frac{\alpha\pi}{2}}{\alpha\pi} = \frac{4qR^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{1}{1^2(1^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 + \alpha^2)} + \dots \right]$$

— в случае продольной растягивающей силы.

Принимая во внимание, что ¹⁾:

$$\frac{1}{1^2(1^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 - \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 - \alpha^2)} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^3},$$

$$\frac{1}{1^2(1^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{3^2(3^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{5^2(5^2 + \alpha^2)} + \dots = -\frac{\pi^4}{96} \frac{\operatorname{tg} h \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^3}$$

получим для опорных моментов ф-лы:

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{qR^3}{12} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} \quad \text{— в случае сжимающей силы} \\ M &= \frac{qR^3}{12} \frac{\operatorname{tg} h \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}}{\frac{1}{3} \operatorname{tg} h \frac{\alpha\pi}{2} \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} \quad \text{— в случае растягивающей силы.} \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

По этим ф-лам легко могут быть вычислены опорные моменты, если известна продольная сила.

§ 129. Случай, когда продольные силы неизвестны ²⁾.

В рассмотренных выше случаях продольные силы S считались заданными. На практике чаще всего приходится встречаться с задачами, где продольные силы неизвестны и являются следствием дополнительного закрепления концов. Обыкновенно опоры устроены так, что концы балки при изгибе не могут сближаться. В таком случае изгиб сопровождается появлением горизонтальных

¹⁾ Равенство это проще всего получить, сравнивая прогиб, определяемый по ф-ле (195), с прогибом, получаемым из общей ф-лы (а) § 127, при действии одной силы P по середине пролета.

²⁾ Более подробное рассмотрение этой задачи см. Курс теории упругости, ч. II, стр. 45.

сил, вызывающих растяжение оси балки. Величина этих сил легко может быть найдена, если мы воспользуемся выведенными выше приближенными ф-ми (230) и (236). Если концы балки совершенно не перемещаются, то разность между длиной дуги и длиной хорды AB (черт. 314) должна равняться тому удлинению, которое получает ось балки под действием возникающих при изгибе продольных растягивающих сил S . Пользуясь выражением для δl (ф-ла 227), получим ур-ие:

$$\frac{\pi^2 f^2}{4l} = \frac{Sl}{EF},$$

где через F обозначена площадь поперечного сечения балки. Если принять во внимание, что

$$S = \alpha^2 \frac{EJ\pi^2}{l^2},$$

и вместо f вставить приближенное выражение (230), то получим ур-ие:

$$f_0^2 \frac{1}{(1 + \alpha^2)^2} = 4r^2 \alpha^2 \quad (240).$$

Здесь через r обозначен соответствующий радиус инерции поперечного сечения. Ур-ие (240) включает только одну неизвестную величину α^2 . Найдя ее, мы без затруднений можем вычислить S . Для решения удобнее всего ур-ие (240) представить в таком виде:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = \frac{f_0^2}{4r^2} \quad (240').$$

Правая часть может быть вычислена, раз даны размеры балки и вертикальная нагрузка. После этого α^2 легко находится при помощи таблицы квадратов чисел или при помощи логарифмической линейки. Возьмем такой численный пример.

Железный брусок с опертыми концами квадратного поперечного сечения $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ и длины $l = 80 \text{ см}$ изгибается равномерно распределенной нагрузкой $q = 0,5 \text{ кг/см}$. При этих размерах:

$$F = 1 \text{ см}^2; \quad J = \frac{1}{12} \text{ см}^4; \quad r^2 = \frac{1}{12} \text{ см}^2;$$

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} = 1,6 \text{ см}; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Ур-ие (240') напишется так:

$$\alpha^2 (1 + \alpha^2)^2 = 7,68, \text{ откуда } \alpha^2 \approx 1,37,$$

и, следовательно:

$$S = \alpha^2 \frac{EJ\pi^2}{l^2} \approx 352 \text{ кг}.$$

Прогиб по середине равен:

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} = \frac{1,6}{2,37} = 0,67 \text{ см}.$$

Величина наибольшего изгибающего момента будет:

$$M = \frac{q l^2}{8} - S f = \frac{q l^2}{8} \left(1 - \frac{1,028 \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) = 0,4 \frac{q l^2}{8} = 160 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Для наибольших растягивающих напряжений получаем значение:

$$p_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = 352 + \frac{160}{\frac{1}{6}} = 1310 \text{ kg/cm}^2.$$

Решим ту же задачу в предположении заделанных концов. Для этого случая:

$$f_0 = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EJ} = 0,32 \text{ cm и } f = \frac{f_0}{1 + \frac{1}{4}}.$$

Ур-ие для определения α^2 напишется так:

$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^2 = \frac{f_0^2}{4 f^2} = 0,307,$$

откуда

$$\alpha^2 \approx 0,27, S = \alpha^2 \frac{E J \pi^2}{l^2} = 69 \text{ kg и } f = \frac{0,32}{1 + \frac{0,27}{4}} = 0,30 \text{ cm}.$$

Изгибающий момент M в плоскости заделки можно определить по приближенной ф-ле ¹⁾:

$$M = \frac{q l^2}{12} = \frac{S f}{2} \approx 256 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Величина наибольших растягивающих напряжений определится по ф-ле:

$$p_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W} = 69 + 1536 \approx 1605 \text{ kg/cm}^2.$$

Отметим здесь весьма существенное обстоятельство. Мы нашли, что величина наибольших напряжений в случае бруска с заделанными концами больше, чем при опертых концах. Такой результат объясняется тем, что в случае заделанных концов продольная сила, уменьшающая величину наибольшего момента, получается меньшей, чем при опертых концах.

Во всех предыдущих выводах мы предполагали, что изгибающие силы действуют в одной из главных плоскостей балки. Если плоскость действия сил не совпадает с одной из главных плоскостей, то силы придется разложить на два взаимно перпендикулярных направления по главным осям инерции поперечного сечения. Пользуясь выведенными ф-лами, мы без затруднений найдем изгиб в каждой главной плоскости, а, следовательно, и полный прогиб.

¹⁾ При малых значениях α^2 результат, получаемый по этой приближенной ф-ле очень мало отличается от того, что дает ф-ла (239). При $\alpha^2 = 1$ эта погрешность несколько больше 1% и при $\alpha^2 = 2$ погрешность около 2,5%. Когда α^2 велико, можно продольную силу определить на основании приближенных ф-л, а для вычисления опорного момента воспользоваться ф-лой (239).

§ 130. Расчетные формулы в случае одновременного действия изгиба и сжатия.

Пользуясь приближенным методом, изложенным выше, мы можем оценить влияние продольной силы на прогиб и вычислить те максимальные напряжения, которые возникают при одновременном действии изгиба и сжатия. Напряжения эти будут линейно зависеть от величины поперечных сил, влияние продольной силы выражается более сложно, и в тех случаях, когда продольная сила близка по величине к критическому значению, небольшие изменения силы могут значительно отражаться на величине прогиба, а, следовательно, и на величине напряжений. Это обстоятельство приходится учитывать при выборе допускаемых напряжений в случае одновременного действия изгиба и сжатия.

Обозначим через R допускаемое напряжение при простом растяжении. Пусть оно составляет $\frac{1}{k}$ часть от предела упругости материала R_1 . При таком выборе допускаемого напряжения растягиваемый брусок достигает опасного напряженного состояния и может получить остающиеся деформации лишь в том случае, если растягивающая сила возрастает в k раз. Благодаря линейной зависимости между силами и напряжениями у нас получается между безопасной нагрузкой и нагрузкой, с которой начинаются остающиеся деформации, такое же соотношение, как между допускаемым напряжением и напряжением, соответствующим пределу упругости. Выбирая известный запас прочности в напряжениях, мы будем иметь тот же запас и в нагрузках. Иной результат получается при одновременном действии изгиба и сжатия или изгиба и растяжения.

Возьмем, например, тот случай, когда опертый по концам стержень сжат силой S и изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Наибольший изгибающий момент соответствует середине пролета и определяется ф-лой (см. § 127):

$$M = \frac{q l^2}{8} \left(1 + \frac{1,028 \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right), \quad \text{где } \alpha^2 = \frac{S l^2}{E J \pi^2}.$$

Обозначая через F площадь поперечного сечения и через W его момент сопротивления, получим для наибольших сжимающих напряжений выражение:

$$\frac{S}{F} + \frac{q l^2}{8 W} \left(1 + \frac{1,028 \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) \quad (a).$$

При увеличении внешних сил будут возрастать не только S и q , но также и α^2 , поэтому напряжения, определяемые по ф-ле (а), будут возрастать быстрее, чем силы, и тем быстрее, чем ближе α^2 к единице. Если бы мы подобрали размеры бруска так, чтобы напряжения, определяемые ф-лой (а), равнялись напряжению R , допускаемому при простом растяжении, то при увеличении всех внешних сил в k раз, напряжения превзойдут предел упругости, и брусок получит остающиеся деформации. Следовательно, запас прочности будет в рас-

смаатриваемом случае меньшим, чем при простом растяжении, и если α^2 близко к единице, то небольшое возрастание продольной силы может повлечь за собой разрушение бруска.

Для обеспечения в рассматриваемом случае такого же запаса прочности, как и в простом растяжении, нужно выбрать размеры бруска так, чтобы при увеличении всех внешних сил в k раз максимальные напряжения, определяемые на основании ф-лы (а), достигали значения, соответствующего пределу упругости. Для расчета бруска получаем условие:

$$\frac{kS}{F} + \frac{kqI^2}{8W} \left(1 + \frac{1,028 k\alpha^2}{1 - k\alpha^2} \right) \leq R_1,$$

или, разделяя все на k , получим окончательную ф-лу в таком виде:

$$\frac{S}{F} + \frac{qI^2}{8W} \left(1 + \frac{1,028 k\alpha^2}{1 - k\alpha^2} \right) \leq R \quad (б).$$

Введением множителя k в левую часть ф-лы (б) мы увеличиваем значение продольной силы и таким образом вводим в расчет то обстоятельство, что при одновременном действии продольных и поперечных сил напряжения не являются линейной ф-ией от величины продольной силы.

На основании рассмотренного частного случая можем сделать такое общее заключение: при расчете брусков, подвергавшихся действию продольных и поперечных сил, можно взять для допускаемого напряжения такую же величину, как и при простом растяжении, но для обеспечения надлежащего запаса прочности нужно в таком случае, при оценке влияния продольной силы на величину изгибающего момента, умножить эту силу на коэффициент больший единицы, равный отношению предела упругости материала к допускаемому напряжению при простом растяжении. Легко видеть, что при таком способе расчета максимальные напряжения, в случае действия продольной сжимающей силы, будут получаться меньшими, чем R , и в случае растягивающей силы они будут больше R ¹⁾.

§ 131. Изгиб балок, лежащих на упругом основании.

Решение этой задачи путем интегрирования соответствующего дифференциального ур-ия приводит, как мы видели (§ 96), к довольно сложному выражению для изогнутой оси, и определение прогибов в различных частных случаях требует не мало вычислительной работы. Вычисления эти в некоторых случаях могут быть значительно упрощены, если воспользоваться приближенным методом. Метод этот особенно выгоден, когда возможно ограничиться первым приближением.

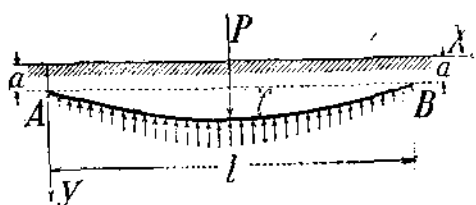
¹⁾ Вопрос о допускаемых напряжениях, в случае одновременного действия изгиба и сжатия, подробно рассмотрен в работе Завриева, см. Вестн. о-ва технологов, 1913 г. В этой статье имеется ряд таблиц, облегчающих расчеты.

Мы рассмотрим здесь две задачи: а) изгиб балки со свободными концами силой, приложенной по середине, и б) изгиб балки с опертыми концами. В обоих случаях предполагается, что балка по всей длине связана с упругим основанием.

Случай, когда длина стержня l очень велика, был нами рассмотрен раньше, и оказалось, что под действием сосредоточенной силы ось стержня изгибается по волнообразной кривой, при чем длина волны зависит от степени податливости основания и от жесткости стержня при изгибе. Сделав допущение, что на каждую единицу длины прогнувшегося стержня приходится реакция основания, равная $k y$, мы нашли для длины полуволны выражение (ф-ла 155, § 96):

$$L = \frac{\pi}{\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

Если мы возьмем сравнительно короткий стержень, длина которого l меньше длины полуволны L , то, под действием сосредоточенной силы, приложенной



Черт. 317.

по середине, он прогнется по кривой без перегибов (черт. 317), при чем концы бруска опустятся на некоторую величину a , и наибольший прогиб, соответствующий середине пролета, будет равен $a + f$. Для определения a и f воспользуемся приближенным методом. Предположим,

что стержень гнется по синусоиде ¹⁾, тогда прогиб в каком-либо сечении определится из ур-ния:

$$y = a + f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (a).$$

В это выражение входят два параметра a и f , их примем за координаты системы. Если дать координате a приращение δa , то сила P совершит работу $P \delta a$, следовательно, P есть обобщенная сила, соответствующая координате a . Также точно убедимся, что и координате f соответствует сила P ; в таком случае

$$\frac{\partial V}{\partial a} = P \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial f} = P \quad (b).$$

Для определения a и f нужно в полученные ур-ия вместо V вставить его значение. Потенциальная энергия системы в данном случае составит из двух частей: из энергии изгиба стержня V_1 , для которой мы можем воспользоваться выражением (220), и из энергии деформации основания V_2 . Реакция основа-

¹⁾ Более подробное решение задачи об изгибе балки, лежащей на сплошном упругом основании, и рассмотрение приближенного метода на случай балок переменного сечения см. наш Курс теории упругости, ч. II, стр. 20.

См. также работу студ. Н. В. Красноперова, Изв. Петрогр. пол. инст. 1916 г.

ния, приходящаяся на элемент балки длиной dx , равна $kydx$. При изгибе эта реакция возрастает от нуля и до конечного своего значения, при чем прогиб изменяется пропорционально реакции от нуля до y , следовательно, работа, затраченная на деформацию основания и равная V_2 , может быть представлена так:

$$V_2 = \int_0^l kydx \frac{y}{2} = \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx.$$

Вставляя вместо y его значение (а) и выполняя интегрирование, найдем:

$$V_2 = \frac{kl}{2} \left(a^2 + \frac{4af}{\pi} + \frac{f^2}{2} \right),$$

и вся энергия системы представится так:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{EJ\pi^4 f^2}{4l^3} + \frac{kl}{2} \left(a^2 + \frac{4af}{\pi} + \frac{f^2}{2} \right).$$

После подстановки, ур-ия (b) будут иметь такой вид:

$$kla + \frac{2klf}{\pi} = P; \quad \frac{EJ\pi^4 f}{2l^3} + \frac{klf}{2} + \frac{2kla}{\pi} = P.$$

Первое из этих ур-ий дает нам:

$$a = \frac{P}{kl} - \frac{2f}{\pi} \quad (c).$$

Вставляя это во второе ур-ие, получим для прогиба f выражение:

$$f = \frac{\pi - 2}{\pi} \cdot \frac{P}{\frac{EJ\pi^4}{2l^3} + \frac{kl}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right)} = \frac{\pi - 2}{\pi} \cdot \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right)} \quad (d).$$

Применим полученные ф-лы к частному случаю. Железный брусок квадратного поперечного сечения $6 \text{ см} \times 6 \text{ см}$, длиной 80 см лежит на упругом основании и поддерживает груз $P = 1000 \text{ kg}$, приложенный по середине пролета. Коэффициент k , характеризующий жесткость основания, равен 240 kg/cm^2 , и модуль $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Подставляя эти данные в ф-лу (d), найдем, что

$$f = P \cdot 10^{-4} \cdot 0,148 \text{ см},$$

тогда из ф-лы (c) получим:

$$a = P \cdot 10^{-4} \cdot 0,427 \text{ см},$$

и, следовательно, наибольший прогиб равен:

$$a + f = P \cdot 10^{-4} \cdot 0,575 \text{ см}.$$

Отношение прогиба посредине балки к прогибам на концах будет:

$$(a + f) : a = 0,575 : 0,427 = 1,35.$$

Такое же соотношение будет и между давлениями на основание. Чтобы найти величину давления, приходящуюся на единицу длины в каком-либо сечении балки, нужно прогиб умножить на коэффициент k . Давление на единицу поверхности получим, разделяя это произведение на ширину балки. Обозначая через p_0 интенсивность давления у концов балки, получим:

$$p_0 = P \cdot 0,427 \cdot 10^{-4} k = 10,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Для середины балки найдем:

$$p_1 = 1,35 p_0 = 13,9 \text{ kg/cm}^2.$$

Если эту задачу решить путем интегрирования дифференциального уравнения, то получим ¹⁾:

$$p_0 = 10,3 \text{ kg/cm}^2; p_1 = 14,0 \text{ kg/cm}^2.$$

Таким образом приближенный метод и здесь дает вполне достаточную точность. Решение задачи сводится к подстановке числовых данных в готовые формулы (с) и (д), тогда как при пользовании точным способом приходится всякий раз сначала определять все произвольные постоянные интегрирования, что требует в данном случае немало труда.

Рассмотрим теперь изгиб балки с опертыми концами. Если длина балки l меньше длины полуволны L , соответствующей заданному упругому основанию, то мы можем, применяя приближенный метод, ограничиться первым приближением, — предположить, что изгиб происходит по синусоиде:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

и воспользоваться результатами, полученными ранее при исследовании изгиба балок с опертыми концами (§ 126). Чтобы учесть влияние упругого основания, нужно в уравнение (219) вставить соответствующее значение потенциальной энергии, составляющееся в данном случае из двух частей: из энергии изгиба V_1 и энергии деформации основания V_2 . Значение V_1 нам известно, а V_2 определится так:

$$V_2 = \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{k f^2 l}{4},$$

следовательно:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{E J \pi^4}{4 l^3} f^2 + \frac{k l}{4} f^2,$$

и уравнение (219) переписывается в таком виде:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = f \left(\frac{k l}{2} + \frac{E J \pi^4}{2 l^3} \right) = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l},$$

¹⁾ Результат этот взят из курса Форм'я, 3-ье изд., стр. 244.

откуда:

$$f = \frac{2l^3 \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l}}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}} \quad (241).$$

Тот же результат для прогиба можно получить и иным путем, рассматривая изгиб балки с опертыми концами под действием сосредоточенных сил $P_1, P_2, \dots$ и сплошной нагрузки, интенсивность которой меняется по закону:

$$q = -ky = -kf \sin \frac{\pi x}{l},$$

На основании ф-л (221) и (222), найдем:

$$f = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left(\sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx \right),$$

откуда, вставляя вместо q его значение, получим для f вышенайденную ф-лу (241).

От изгиба балки сосредоточенными силами легко перейти к сплошной нагрузке. Вместо суммы конечного числа слагаемых, входящих в ф-лу (241), мы получим интеграл, распространенный на всю длину балки, и выражение для прогиба напишется так:

$$f = \frac{2l^3 \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}} \quad (241').$$

При равномерно распределенной нагрузке q постоянно, и мы будем иметь:

$$f = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{kl^4}{EJ\pi^4}} \quad (242).$$

Если желательно получить большую точность ¹⁾, то нужно вычислить дальнейшие приближения, для чего придется воспользоваться общим выражением для u (ф-ла 223) и соответствующим значением (225) для потенциальной энергии. На балку, кроме сил $P_1, P_2, \dots$, будет действовать сплошная нагрузка, соответствующая реакции упругого основания. Интенсивность этой нагрузки меняется по закону:

$$q = -ky = -k \left(f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + f_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right).$$

Для ф-лы (224), в случае действия и сосредоточенных сил и сплошной нагрузки, пишутся так

$$\frac{\partial V}{\partial f_i} = \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} + \int_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx,$$

¹⁾ Первое приближение не достаточно точно при расположении сосредоточенной силы вблизи одной из опор или при изгибе балки парой сил, приложенной на конце.

$$\frac{\partial V}{\partial f_2} = \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} + \int_0^l q \sin \frac{2\pi x}{l} dx,$$

.....

Подставляя вместо V и q их значения и выполняя интегрирование, найдем:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{2P^3}{EJ\pi^4} \sum P_i \sin \frac{\pi c_i}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k l^4}{EJ\pi^4}}, \\ f_2 &= \frac{1}{2^4} \frac{2P^3}{EJ\pi^4} \sum P_i \sin \frac{2\pi c_i}{l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k l^4}{2^4 EJ\pi^4}}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (e).$$

Вставляя эти значения $f_1, f_2, \dots$ в выражение для y , найдем ур-не изогнутой оси. В случае действия силы по середине пролета, $c = \frac{l}{2}$, мы получим:

$$y = \frac{2P^3}{EJ\pi^4} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \frac{k l^4}{EJ\pi^4}} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 \left(1 + \frac{k l^4}{3^4 EJ\pi^4}\right)} + \dots \right].$$

При действии равномерно распределенной нагрузки интенсивности q придется, вместо

$$\sum P_i \sin \frac{n\pi c_i}{l},$$

в ур-нях (e) вставить величину:

$$\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2lq}{n\pi}$$

для n нечетного и 0 для n четного.

Ур-не изогнутой оси балки напишется так:

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \frac{k l^4}{EJ\pi^4}} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^5 \left(1 + \frac{k l^4}{3^4 EJ\pi^4}\right)} + \dots \right] \quad (243).$$

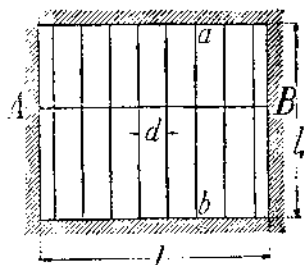
На основании этих общих выражений для изогнутой оси можно составить себе представление относительно погрешностей, которые мы допускаем, ограничиваясь первым приближением.

§ 132. Расчет перекрестных балок.

При расчетах инженерных сооружений нередко приходится встречаться с вопросом о прочности плоских стенок, подвергающихся действию сплошной нагрузки. Примерами таких стенок могут служить водонепроницаемые переборки в судах и шлюзные ворота, выдерживающие давление воды. Обыкновенно переборку составляют из железных листов, подкрепленных системой связей или перекрестных балок, идущих в двух взаимно

перпендикулярных направлениях параллельно сторонам стенки. К расчету этих перекрестных балок и применим приближенный метод¹⁾.

Возьмем такую задачу (черт. 318). Железные листы водонепроницаемой переборки прикреплены к системе одинаковых и равно удаленных друг от друга вертикальных балочек. Для большей жесткости балочки эти поддерживаются горизонтальной балкой AB . Требуется рассчитать вертикальные и горизонтальную балки. Предположим, что давление воды равномерно распределяется между вертикальными балками, и каждая из этих балок несет, следовательно, сплошную нагрузку Q , меняющуюся по закону треугольника или трапеции. Нагрузка эта отчасти передается на опоры, отчасти на перекрестную балку AB . Давление на перекрестную балку, очевидно, будет зависеть от ее жесткости.



Черт. 318.

Если балка AB абсолютно жестка и не гнется под действием передающихся на нее давлений, то каждая вертикальная балка представляет собой неразрезную двухпролетную балку на неподвижных опорах. Давление на среднюю опору будет равно αQ , где α — коэффициент, зависящий от расположения перекрестной балки. Если она пересекает балочки по середине высоты, то для распределения нагрузки по треугольнику или трапеции $\alpha = \frac{5}{8}$. Вообще α для каждого частного случая действия нагрузки и расположения опор может быть найдено ранее изложенными способами, и весь расчет балок не представит затруднений.

В действительности задача значительно сложнее, так как изгибом перекрестной балки обыкновенно пренебрегать нельзя, и при расчете вертикальных балочек нужно принять во внимание понижение средней опоры, равное соответствующему прогибу y перекрестной балки. Это понижение вызовет уменьшение средней опорной реакции на некоторую величину γy , где γ — коэффициент, зависящий от жесткости вертикальной балки и от расположения средней опоры (§ 88). При двух равных пролетах:

$$\gamma = \frac{48E_1J_1}{l_1^3} \quad (a),$$

где E_1J_1 жесткость вертикальной балки и l_1 ее длина. Давление, передающееся перекрестной балке, представится ф-лой:

$$R = \alpha Q - \gamma y \quad (b).$$

Для упрощения исследования изгиба перекрестной балки заменим сосредоточенные давления распределенной нагрузкой, для чего каждую силу R распределим равномерно на протяжении d , равном расстоянию между вертикальными балками. При значительном числе вертикальных балок (если число их не меньше 5), можно полученное таким образом ступенчатое распределение нагрузки (черт. 216) заменить непрерывным, тогда интенсивность нагрузки в любом сечении перекрестной балки представится ф-лой:

$$\frac{\alpha Q}{d} - \frac{\gamma y}{d} = q - ky \quad (c).$$

Перекрестная балка оказывается в таких условиях, как стержень с опертыми концами, лежащий на упругом основании и изгибаемый равномерно распределенной нагрузкой

¹⁾ Более подробное рассмотрение изгиба перекрестных балок имеется в Курсе теории упругости, ч. II, стр. 16.

интенсивности q . Для определения прогибов можно воспользоваться или общим выражением (ф-ла 243) или ограничиться первым приближением (ф-ла 242). Что касается вертикальных балочек, то крайние из них будут находиться в условиях, близких к условиям неразрезной балки на неподвижных опорах. Для средней балочки понижение промежуточной опоры наибольшее ¹⁾, оно равно прогибу f перекрестной балки по середине пролета. При некоторых условиях прогиб этот может быть настолько значительным, что реакция R , определяемая по ф-ле (б), получает отрицательное значение. В таком случае перекрестная балка не только не приносит никакой пользы, но оказывается прямо-таки вредной: она увеличивает напряжения в средних вертикальных балочках. Избежать этого можно только надлежащим выбором поперечных размеров перекрестной балки. Для этого обратимся к ф-ле (б). Вставляя в нее вместо u приближенное значение прогиба (ф-ла 242) для середины перекрестной балки, получим выражение промежуточной опорной реакции для средней вертикальной балки в таком виде:

$$R = \alpha Q - \gamma f = \alpha Q - \gamma \frac{4q l^4}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k l^4}{EJ\pi^4}},$$

или, принимая во внимание, что в данном случае

$$q = \frac{2Q}{d}; \quad k = \frac{\gamma}{d},$$

найдем:

$$R = \alpha Q \left[1 - \gamma \frac{4 l^4}{d E J \pi^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma l^4}{d E J \pi^4}} \right] = \alpha Q \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{\beta}{1 + \beta} \right) \quad (д),$$

где для сокращения введено обозначение:

$$\beta = \frac{\gamma l^4}{d E J \pi^4} \quad (е).$$

В том случае, когда перекрестная балка подразделяет вертикальные балочки пополам,

$$\beta = \frac{48}{\pi^4} \frac{E_1 J_1}{E J} \left(\frac{l}{l_1} \right)^3 \frac{l}{d} \quad (е').$$

Если размеры балок известны, то мы можем найти β и тогда при помощи ф-лы (д) выяснить условия работы средней вертикальной балки. Перекрестная балка становится бесполезной, когда реакция R обращается в нуль, т.е., когда

$$1 - \frac{4}{\pi} \frac{\beta}{1 + \beta} = 0,$$

откуда

$$\beta = \frac{\pi}{4 - \pi} \approx 3,6 \quad (244).$$

На практике приходится размеры перекрестной балки подбирать так, чтобы соответствующее значение β было значительно меньше величины, определяемой по ф-ле (244). Возьмем в качестве примера переборку с квадратным контуром, составленную из девяти равноудаленных вертикальных балочек, подразделенных пополам перекрестной балкой. Для вычисления коэффициента β придется пользоваться ф-лой (е'), положивши в ней:

$$l:d = 10 \text{ и } l = l_1.$$

¹⁾ Мы здесь не останавливаемся на тех случаях, когда перекрестная балка так гибка, что образует при искривлении несколько полуовалов.

Если для вертикальных балочек взять коробчатое сечение № 10 ($J_1 = 213 \text{ см}^4$), а для перекрестной балки взять двутавровое сечение № 40 ($J = 26100 \text{ см}^4$), то $\beta = 0,040$, и опорная реакция (Ф-ла d)

$$R = 0,95\alpha Q = 0,594 Q.$$

В данном случае изгибом перекрестной балки можно пренебречь и рассчитывать вертикальные балочки в предположении неподвижных опор. Если уменьшить жесткость перекрестной балки, взять, например:

$$J = 2020 \text{ см}^4, \text{ то } \beta = 0,520 \text{ и } R = 0,565 \alpha Q.$$

Здесь, благодаря изгибу перекрестной балки, промежуточная опорная реакция средней стойки уменьшилась по сравнению с предыдущим случаем, примерно, на 40%. Взяв перекрестную балку того же сечения, что и стойки, мы получили бы для промежуточной реакции средней стойки отрицательное значение. При таких условиях перекрестная балка становится вредной.

Без всяких затруднений приближенный метод может быть распространен и на тот случай, когда концы перекрестной балки заделаны. Приняв в качестве первого приближения изгиб перекрестной балки по кривой:

$$y = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right),$$

мы найдем величину прогиба f по середине пролета, воспользовавшись Ф-лой (233') и вставив в нее вместо q интенсивность нагрузки, определяемую Ф-лой (с). После простых пределок найдем:

$$f = \frac{q l^4}{4 E J \pi^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 k l^4}{16 E J \pi^4}}.$$

Результат этот отличается от Ф-лы (242), которой мы пользовались при опертых концах перекрестной балки, тем, что вместо величины

$$\frac{k l^4}{E J \pi^4} = \beta$$

входит величина

$$\frac{3}{16} \frac{k l^4}{E J \pi^4} = \beta' \quad (245).$$

Ф-ла для определения промежуточной опорной реакции средней стойки напишется так:

$$R = \alpha Q \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\beta'}{1 + \beta'} \right) \quad (246).$$

Весь ход расчета такой же, как и в предыдущем случае.

Если система вертикальных стоек поддерживается двумя перекрестными балками, то, обозначая прогибы их через y_1 и y_2 , легко найдем для промежуточных опорных реакций стоек выражения:

$$R_1 = \alpha_1 Q - \gamma_1 y_1 - \gamma_1' y_2; \quad R_2 = \alpha_2 Q - \gamma_2 y_1 - \gamma_2' y_2.$$

Постоянные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \gamma_2'$ могут быть найдены из рассмотрения изгиба балки на четырех опорах и влияния на этот изгиб осадки промежуточных опор. Заменяв, как и в предыдущем случае, сосредоточенные силы непрерывно распределенной нагрузкой,

найдем, что каждая из перекрестных балок несет сплошную нагрузку, меняющуюся по закону:

$$\text{для первой балки } q = \frac{R_1}{d} = q_1 - k_1 y_1 - k_1' y_2,$$

$$\text{для второй балки } q = \frac{R_2}{d} = q_2 - k_2 y_2 - k_2' y_1.$$

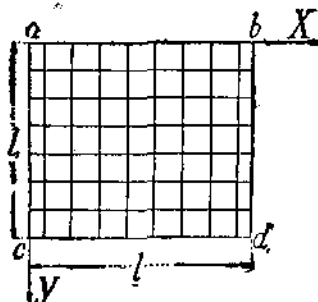
Ограничиваясь первым приближением, мы можем положить:

$$y_1 = f_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad y_2 = f_2 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для определения прогибов f_1 и f_2 воспользуемся Ф-лой (241'). В нее нужно вместо q подставить вышенаписанные значения для интенсивности сплошной нагрузки. Выполняя интегрирование, получим для определения f_1 и f_2 такие ур-ия:

$$f_1 = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{2l}{\pi} q_1 - \frac{k_1 f_1 l}{2} - \frac{k_1' f_2 l}{2} \right); \quad f_2 = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{2l}{\pi} q_2 - \frac{k_2 f_2 l}{2} - \frac{k_2' f_1 l}{2} \right).$$

Определив отсюда f_1 и f_2 , мы можем перейти к исследованию изгиба вертикальных балок и к определению R_1 и R_2 .



Черт. 319.

Если имеется много перекрестных балок (черт. 319), то указанный выше способ расчета становится неудобным, и для получения приближенного решения мы поступим так. Сплошную нагрузку, действующую на непроницаемую переборку, сосредоточим в точках пересечения горизонтальных и вертикальных балок — этим мы устраним местный изгиб балок на протяжении между двумя узлами, но общий характер изогнутой поверхности переборки останется прежним. Если контур переборки не очень отличается от квадрата, то в качестве первого приближения можно допустить, что сечения изогнутой поверхности переборки горизонтальной и вертикальной плоскостями представляют

собой синусоиды. Обозначив прогиб переборки через w , мы можем аналитически представить изогнутую поверхность таким образом:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} \quad (247).$$

Полагая $x = \text{const} = c$, мы находим сечение поверхности вертикальной плоскостью. Ур-ие соответствующей кривой будет:

$$w = f \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1}.$$

Точно также можно найти любое сечение горизонтальной плоскостью. Этим путем мы изгиб всех балок системы определяем одной величиной f — получаем систему с одной степенью свободы.

Выберем f за координату и найдем соответствующее значение обобщенной силы. Приращению координаты δf соответствует дополнительный прогиб переборки:

$$\delta w = \delta f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1}.$$

При этом изменении прогиба сплошная нагрузка интенсивности q совершит работу:

$$\delta f \int_0^l \int_0^{l_1} q \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} dx dy.$$

Множитель при δf и будет искомой обобщенной силой.

Выражение для определения f напишется так:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \int_0^l \int_0^{l_1} q \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} dx dy \quad (248)$$

Остается найти только выражение для потенциальной энергии V в виде функции от f , что не представит никаких затруднений, так как каждая из балок гнется по вполне определенной синусоиде. Определив из уравнения (248) величину f и найдя таким образом первое приближение для изогнутой поверхности переборки, мы можем перейти к вычислению дополнительных напряжений от местного изгиба балок, что легко сделать, воспользовавшись теорией неразрезных балок. Подсчеты показывают, что полученное таким образом первое приближение дает вполне удовлетворительные результаты. Если нужна большая точность, то, конечно, можно воспользоваться и дальнейшими приближениями. В случае гидростатического давления, для второго приближения можно взять выражение:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l_1} + f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l_1}$$

и примем во внимание влияние неравномерности распределения давления по высоте стенки ¹⁾.

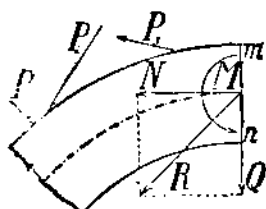
¹⁾ Этот прием более подробно рассмотрен в нашем Курсе теории упруг., ч. II,

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ.

КРИВЫЕ БРУСЬЯ.

§ 133. Распределение напряжений.

Задачу об изгибе кривых брусьев мы ограничим теми случаями, когда ось бруска представляет собой плоскую кривую. Будем предполагать, что все внешние силы лежат в плоскости кривизны, и что в той же плоскости лежит одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения бруска¹⁾. Тогда искривление оси бруска, которое мы предполагаем весьма малым, будет происходить в плоскости действия сил. При изучении распределения напряжений будем пользоваться прежним методом. Кривой брус, находящийся в равновесии под действием известных сил $P_1, P_2, \dots$, рассекаем на две части каким либо сечением mn , нормальным к изогнутой оси, и рассматриваем условия равновесия одной из этих частей, например, левой (черт. 320). Внешние силы, приложенные к этой части, можно привести к одной силе R , действующей в центре тяжести сечения, и к паре сил M .



Черт. 320.

Эти силы уравниваются усилиями, распределенными по сечению mn и заменяющими действие отброшенной части бруска на оставленную. Начнем с того случая, когда $R = 0$, т.-е. когда все силы, лежащие по одну сторону сечения mn , приводятся к паре сил M . Из условий равновесия заключаем, что и внутренние усилия, действующие по плоскости mn , должны приводиться к паре, равной и прямо противоположной M . Чтобы найти закон распределения этих усилий по сечению, будем исходить из гипотез, уже ранее нами принятых при исследовании изгиба призматических брусьев (§ 59). Предположим, что при действии изгибающей пары M в плоскости поперечного сечения получаются только нормальные напряжения,

¹⁾ Изгиб кривого бруска с круговой осью силами, перпендикулярными к плоскости кривизны, рассмотрен в работе К. Federhofer'a, Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers, Z. f. Math. u. Phys., 1913 г., 62 Bd. См. также Курс теор. упруг., ч. II, стр. 88.

и распределение их таково, что сечение при изгибе остается плоским. Результаты, получаемые на основании этих гипотез, подтверждаются с достаточной точностью и теоретическими исследованиями и опытными данными, приводимыми ниже ¹⁾. Выделим из бруска двумя бесконечно близкими сечениями элемент $abcd$ (черт. 321). Под действием изгибающих пар M сечение cd поворачивается относительно ab на некоторый угол $\delta d\varphi$ и займет положение $c'd'$. При этом верхние волокна получают растяжение, нижние — сжатие. По поверхности mn мы будем иметь промежуточный нейтральный слой, где первоначальная длина волокон, равная ds , остается неизменной. Обозначим через r первоначальный радиус кривизны, соответствующий дуге mn и через $d\varphi$ — первоначальный угол между сечениями ab и cd , тогда

$$ds = r d\varphi.$$

Первоначальная длина какого-либо волокна pq , находящегося в расстоянии z от нейтрального слоя, будет равна $(r + z) d\varphi$. При изгибе это волокно получит удлинение

$$qq' = z \delta d\varphi,$$

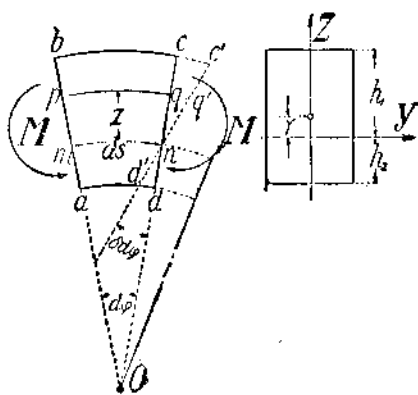
и относительное его удлинение представится формулой:

$$e = \frac{z \delta d\varphi}{(r + z) d\varphi}.$$

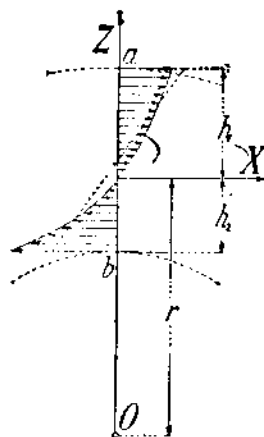
Считая, что продольные волокна не нажимают друг на друга, мы от удлинений легко переходим к соответствующим напряжениям:

$$p = E \frac{z \delta d\varphi}{d\varphi} \frac{z}{r + z} \quad (249).$$

Если полученный закон распределения нормальных напряжений представить графически (черт. 322) (из



Черт. 321.



Черт. 322.

¹⁾ Теория изгиба кривых брусьев, основанная на гипотезе плоских сечений, разработана главным образом в трудах: Winkler'a, Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, Der Civilingenieur, 1858 г., стр. 232, Elasticität und Festigkeit, 1867 г., стр. 253, и Grashof'a, Theorie d. Elasticität und Festigkeit, 1878 г., стр. 251.

каждой точки сечения ab по нормали отложить отрезок x , равный соответствующему напряжению), то получим кривую:

$$x = A \frac{z}{r+z},$$

где A — некоторый постоянный множитель. Напряжения меняются по гиперболическому закону, при чем гипербола имеет своей асимптотой линию, перпендикулярную к ab и проходящую через центр кривизны O . В ф-лу (249) входят две, пока нам неизвестные, величины: r и $\frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$. Для их определения воспользуемся ур-иями статики. Сумма всех усилий, распределенных по сечению ab и приводящихся к паре сил, должна равняться нулю, а момент их равняется изгибающему моменту M , следовательно:

$$\int_F p dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{z dF}{r+z} = 0 \quad (a),$$

$$\int_F pz dF = E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{z^2 dF}{r+z} = M \quad (b).$$

Заметим, что

$$\int \frac{z^2 dF}{r+z} = \int \left(z - \frac{rz}{r+z} \right) dF = \int z dF - r \int \frac{z dF}{r+z}.$$

Второй интеграл, на основании ур-ия (a), обращается в нуль, тогда:

$$\int_F \frac{z^2 dF}{r+z} = \int_F z dF = S = F\gamma \quad (250),$$

где через S обозначен статический момент поперечного сечения относительно нейтральной линии, и через γ — расстояние нейтральной линии от центра тяжести сечения (черт. 321). Вставляя это в ур-ие (b), получим:

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{S} \quad (251),$$

и ф-ла (249) перепишется так:

$$p = \frac{M}{S} \frac{z}{r+z} \quad (249').$$

Для наибольшего и наименьшего напряжений получим ф-лы:

$$p_{\max} = \frac{M}{S} \frac{h_1}{r+h_1} \text{ и } p_{\min} = -\frac{M}{S} \frac{h_2}{r-h_2} \quad (252).$$

Таким образом вычисление напряжений при изгибе кривого бруса требует предварительного нахождения величины S , т.е. определения положения нейтральной линии. Это, как мы увидим ниже, может быть в каждом частном случае выполнено без особых затруднений.

Если поперечные размеры бруска малы по сравнению с радиусом кривизны, то величиной z можно пренебречь по сравнению с r . Ур-ие (а) в этом случае напишется так:

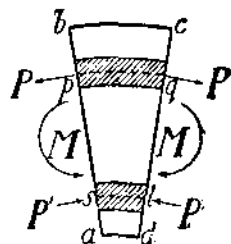
$$\int_F z dF = 0,$$

следовательно, нейтральная линия пройдет через центр тяжести. Из ур-ия (b) получим:

$$E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{rM}{J}, \text{ или } \delta d\varphi = \frac{Mds}{EJ} \quad (253),$$

и ф-ла (249) для напряжений получит такой же вид, как и в случае изгиба призматических брусков (ф-ла 64). Далее, при рассмотрении частных случаев, мы выясним, при каких значениях поперечных размеров можно без значительных погрешностей заменять гиперболической закон распределения напряжений линейным. Такая замена, конечно, значительно упрощает расчеты.

При выводе основной ф-лы для распределения нормальных напряжений мы предположили, что продольные волокна при изгибе не оказывают друг на друга давлений. В действительности такие давления в кривом бруске существуют, в чем легко убедиться путем следующих элементарных соображений. Выделим из элемента бруска $abcd$ (черт 323), заключенного между двумя поперечными сечениями ab и cd , продольное волокно pq . При действии изгибающих моментов M волокно это будет растягиваться. Пусть P — величина соответствующих растягивающих усилий. Усилия эти нормальны к плоскостям поперечных сечений и при геометрическом сложении дадут равнодействующую, направленную к нейтральному слою. Совершенно таким же образом можно убедиться, что сжимающие усилия P' , приложенные к концам волокна st , взятого в сжатой части бруска, также дадут равнодействующую, направленную к нейтральному слою. Силы эти обуславливают давления продольных волокон друг на друга, при чем эти давления возрастают по мере приближения к нейтральному слою. Влияние этих усилий на распределение нормальных напряжений по плоскости поперечного сечения не велико ¹⁾, и мы его в дальнейшем не будем принимать в расчет. Оставим также без рассмотрения вопрос о влиянии на распределение нормальных напряжений искажения поперечного сечения бруска ²⁾.



Черт. 323.

¹⁾ См. Pfeleiderer, Die Beanspruchung stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1907 г., стр. 209.

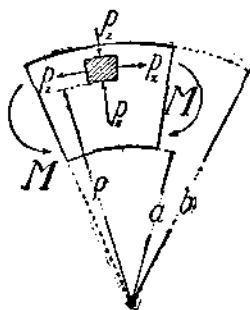
²⁾ Задача эта впервые была решена проф. И. Евневичем; см. Руководство к изучению законов сопротивлений строительных материалов, 1868 г., стр. 131.

Тот же вопрос затронут и в некоторых иностранных сочинениях; см.:

Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, третье издание, стр. 208.

E. S. Andrews, Theory of stresses in crane and coupling hooks, Drapers Company Research Memoirs, 1 (1904 г.).

Точное решение задачи о распределении напряжений по плоскости поперечного сечения кривого бруса имеется лишь для того случая, когда сечение представляет собой вытянутый прямоугольник ¹⁾. Обозначим через b и a наружный и внутренний радиусы очертаения кривого бруса (черт. 324), через p_x — нормальные напряжения, действующие по плоскости сечения, и через p_z — нормальные напряжения, являющиеся следствием надавливания продольных элементов друг из друга. Тогда точное решение представится в таком виде ²⁾;



Черт. 324.

$$p_x = \frac{4M}{C} \left(b^2 - a^2 - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right) \quad (254)$$

$$p_z = \frac{4M}{C} \left(-a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

Вычисления показывают, что в тех случаях, когда высота сечения мала по сравнению с радиусом кривизны

$$\left[(b-a) < \frac{1}{4} \frac{b+a}{2} \right],$$

разность между точным решением (ф-ла 254) и приближенным (ф-ла 249') ничтожна, и влияние поперечных давлений p_z невелико. Эта разность возрастает с увеличением высоты сечения, но при этом вообще падает достоверность наших расчетов: и точная и приближенная ф-лы выведены в том предположении, что рассматриваемое сечение удалено от места приложения сил, и что поперечные размеры бруска малы по сравнению с его длиной. С возрастанием высоты сечения оба эти условия оказываются не выполненными, и приобретают большое значение местные напряжения, появляющиеся у точек приложения внешних сил и вносящие значительные изменения в распределение напряжений, найденное раньше ³⁾.

При таких условиях большое значение должна иметь опытная проверка полученных ф-л. При первых опытах, произведенных над кривыми брусками, испытываемые образцы доводились до излома, и определялась величина разрушающего груза ⁴⁾, таким путем можно найти прочность образца, но нельзя получить представления о распределении напряжений при обычных условиях работы кривого бруса, так как материал при высоких напряжениях, предшествующих излому, не следует закону Гука, и найденные выше теоретические ф-лы не применимы. Дальнейшие опытные исследования были направлены на то, чтобы проверить ф-лы для напряжений путем наблюдения над дефор-

¹⁾ В теории упругости первые исследования о распределении напряжений в кривых брусках принадлежат проф. Х. Головину; см. Изв. СПб. техн. инст., 1881 г.

Случаи изгиба брусков парой сил и поперечной силой были разрешены L. Prandtl'ем, см. курс Фöpp'l'я, т. 5, стр. 72, и позднее: A. Timpe, Zeit. f. Math. u. Phys., 1905 г., стр. 348.

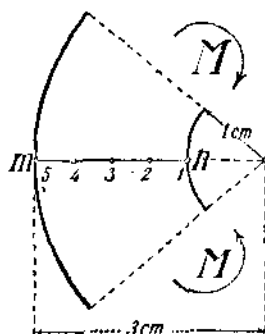
В русской литературе имеются сочинения: Н. Митинского, Об изгибе кривых брусков, Сб. инст. инж. пут. сообщ., 1900 г.; С. Белзеского, Плоская задача теории упругости в цилиндрических координатах. Изв. собр. инж. пут. сообщ., 1906 г., стр. 146.

²⁾ См. Курс теории упругости, ч. I, стр. 110, 1914 г.

³⁾ Влияние местных напряжений рассмотрено нами в работе: О распределении напряжений в круговом кольце, Изв. Киев. пол. инст., 1908 г.

⁴⁾ См. С. Bach, Elastizität und Festigkeit, 3-е изд., стр. 476. и Föpp'l, Mitteilungen aus dem mech.-techn. Labor., München 1898 г., стр. 36.

маниями кривого бруса ¹⁾. Пока материал изгибаемого бруса работает в пределах упругости, деформации следуют закону Гука. Отклонение от этого закона указывает момент появления остаточных деформаций в наиболее напряженном месте бруса. Определяя для этого места величину напряжений по выведенным выше ф-лам и зная из предварительных опытов величину предела упругости для испытуемого материала, можно судить о степени точности теоретических ф-л. Того же результата можно достигнуть, если производить опыты над брусками с полированной боковой поверхностью и судить о переходе материала за предел упругости по моменту появления линий Людерса ²⁾. Более подробную картину распределения напряжений мы получим, производя опыты над кривыми брусками, изготовленными из прозрачного материала, например, из стекла. Оптическим путем можно установить в этом случае положение нейтрального слоя ³⁾ и найти разность напряжений $p_x - p_z$ для любой точки. Суждение о том, насколько опытные данные совпадают с теорией, можно составить на основании приводимых ниже результатов опыта ⁴⁾, произведенного над стеклянным бруском прямоугольного поперечного сечения (черт. 325). В таблице А приведены на-



Черт. 325.

ТАБЛИЦА А.

ТАБЛИЦА Б.

	Гипотеза		Точное решение.			Результ.
	плоск. сеч.	лин. распр.	p_x	p_z	$p_x - p_z$	опыт.
1	-0,463 kg/mm ²	-0,302 kg/mm ²	-0,435 kg/mm ²	-0,000 kg/mm ²	-0,435 kg/mm ²	-0,435 kg/mm ²
2	-0,121 "	-0,151 "	-0,115 "	-0,086 "	-0,029 "	0,000 "
3	+0,050 "	0,000 "	+0,046 "	-0,071 "	+0,117 "	+0,109 "
4	+0,155 "	+0,151 "	+0,145 "	-0,034 "	+0,179 "	+0,163 "
5	+0,224 "	+0,302 "	+0,219 "	0,000 "	+0,219 "	+0,217 "

¹⁾ См. выше цитированную работу E. S. Andrews'a.

Подробное исследование распределения напряжений в крюках имеется в экспериментальной работе Preuss'a, Zeit. d. Ver. deutsch. Ing., 1911 г. См. также Mitteilungen d. Forschungsarb., № 126.

²⁾ См. М. А. Воропаев, Определение напряж. и деформ. в брусках большой кривизны, Изв. Киев. пол. вист., 1910 г.

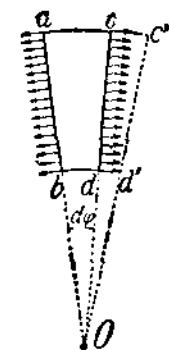
³⁾ См. Coker, The Optical Determination of Strees, Phil. Mag., 1910 г., стр., 740.
Engineering, 1911 г., стр. 565.

Основы оптической методы исследования напряженного состояния в прозрачных телах изложены в работе В. Л. Кирпичева, см. Вестн. об-ва технологов, 1913 г.

⁴⁾ Числа заимствованы из работы I. Aue, Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmten Stäben unter Anwendung der optischen Methode, 1910 г.

пряжения, вычисленные для пяти различных точек сечения mn по ф-ле (249') (гипотеза плоских сечений) и по ф-ле, применяемой при изгибе призматических стержней (гипотеза линейного распределения напряжений). В таблице В помещены результаты вычислений по точным ф-лам (254) и приведены данные произведенных опытов. Полученные опытом величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений почти совпадают с результатами вычислений по точным ф-лам. Гипотеза плоских сечений также дает для величины наибольших напряжений удовлетворительные результаты. Что же касается гипотезы линейного распределения напряжений, то полученные на основании ее значения напряжений, при взятых соотношениях между высотой сечения и радиусом кривизны бруска, значительно отклоняются от точного решения и от опытных данных.

До сих пор мы исследовали вопрос о напряжениях для того случая, когда все внешние силы, лежащие по одну сторону рассматриваемого сечения, приводятся к паре сил M . Предположим теперь, что *кроме пары имеется еще сила R , приложенная в центре тяжести сечения* (черт. 320). Эту силу мы разложим на составляющие N , нормальную к сечению, и Q , лежащую в плоскости сечения. Продольная сила N равномерно распределится по сечению и вызовет относительное удлинение волокон, равное: $\frac{N}{EF}$. Элемент бруска, за-



Черт. 326.

ключенный между двумя поперечными сечениями ab и cd (черт. 326) растянется, сечение cd займет положение $c'd'$, и, так как приращение длины продольных волокон пропорционально расстоянию от центра кривизны O , то направление $c'd'$ пройдет через точку O . Радиус кривизны бруска при такой деформации не меняется, а угол $d\varphi$ между двумя поперечными сечениями получает приращение $\delta d\varphi$. Относительное увеличение угла равно, очевидно, относительному удлинению продольных волокон, следовательно:

$$\delta d\varphi = d\varphi \frac{N}{EF} \quad (255).$$

Поперечная сила Q вызовет касательные напряжения. Роль этих напряжений при изгибе кривых брусков не велика, и ими, обыкновенно, при расчетах пренебрегают. В тех случаях, когда касательные напряжения нужно ввести в расчет, предполагают, что закон распределения их по плоскости поперечного сечения такой же, как и в случае призматических брусков.

§ 134. Частные случаи изгиба кривых брусков.

Вычисление нормальных напряжений по ф-ле (249), выведенной на основании гипотезы плоских сечений, требует, как мы видели, предварительного определения положения нейтральной линии, для чего служит ур-ие (а):

$$\int \frac{zdF}{r+z} = 0 \quad (a).$$

Ход вычислений по определению расстояния r нейтральной линии от центра кривизны покажем на частных примерах.

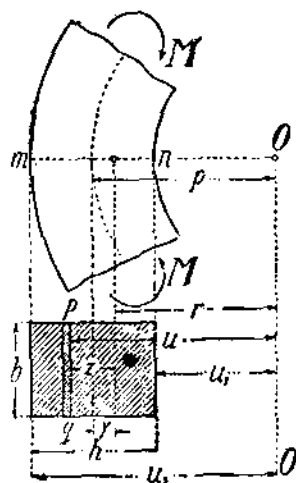
Прямоугольное сечение. Разбивая прямоугольник (черт. 327) на элементарные площадки линиями, параллельными OO , и обозначая через u расстояние каждой такой площадки pq от оси OO , можем представить ур-ие (а) в таком виде:

$$b \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r) du}{u} = b \int_{u_1}^{u_2} \left(1 - \frac{r}{u}\right) du = 0.$$

Выполняя интегрирование, получим для r выражение:

$$r = \frac{u_2 - u_1}{\ln u_2 - \ln u_1} = \frac{h}{\ln \frac{u_2}{u_1}} \quad (256),$$

откуда, при помощи таблицы натуральных логарифмов, легко найти величину r , а, следовательно, и расстояние γ нейтральной линии от центра тяжести сечения. Легко показать, что нейтральная линия перемещается от центра тяжести сечения по направлению к центру кривизны O , и это перемещение возрастает с уменьшением отношения $\rho:h$, где ρ — расстояние от центра тяжести сечения до центра кривизны. Ниже мы помещаем таблицу значений наибольших растягивающих и наибольших сжимающих напряжений для различных значений отношения $\rho:h$, вычисленных по ф-лам (252), и для сравнения приводим величины тех же напряжений, вычисленных на основании ф-лы для призматических брусков. Из таблицы видно, что, благодаря гиперболическому закону распределения напряжений, разность между абсолютными значениями $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$, при малых величинах отношения $\rho:h$, весьма значительна, и что величина наибольшего по абсолютному значению напряжения для кривого бруса больше, чем в случае призматического бруска того же сечения. С возрастанием $\rho:h$ разность между распределениями напря-



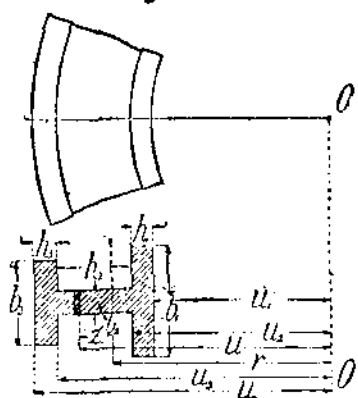
Черт. 327.

ТАБЛИЦА.

$\frac{\rho}{h}$	Гипотеза плоского сечения	Гипотеза линейного распр
1	$\rho_{\max} = + 4,4 \frac{M}{F\rho}$ $\rho_{\min} = - 9,2 \quad "$	$+ 6 \frac{M}{F\rho}$ $- 6 \quad "$
2	$\rho_{\max} = + 10,25 \quad "$ $\rho_{\min} = - 14,4 \quad "$	$+ 12 \quad "$ $- 12 \quad "$
3	$\rho_{\max} = + 16,1 \quad "$ $\rho_{\min} = - 20,2 \quad "$	$+ 18 \quad "$ $- 18 \quad "$
4	$\rho_{\max} = + 22,2 \quad "$ $\rho_{\min} = - 26,2 \quad "$	$+ 24 \quad "$ $- 24 \quad "$
10	$\rho_{\max} = + 58 \quad "$ $\rho_{\min} = - 62 \quad "$	$+ 60 \quad "$ $- 60 \quad "$

женный для кривого и призматического брусков падает: при $\rho:h=4$ отклонения не превосходят 9%, а при $\rho:h=10$ это отклонение составляет лишь 3%. Если ограничиться точностью в 10%, то, начиная с $\rho:h=4$, можно кривые брусья рассчитывать по ф-лам, выведенным для призматических брусков¹⁾. Такие брусья в дальнейшем условимся называть „брусьями малой кривизны“. С ними приходится иметь дело, главным образом, при расчете инженерных сооружений, например, арок, арочных мостов, сводов и т. д. Брусья, у которых $\rho:h < 4$, встречаются довольно часто в машинных деталях; с ними приходится иметь дело при расчете крюков, проушин, звеньев подъемных цепей и т. д. Такие брусья условимся называть „брусьями большой кривизны“ и будем их рассчитывать при помощи ф-мул, выведенных на основании гипотезы плоских сечений.

Двутавровое сечение. Совершенно так же, как для прямоугольника, можно определить положение нейтральной линии и для сечений, составленных из прямоугольников. Возьмем, например, двутавровое сечение, часто применяемое в станинах клепальных машин. Упр-ие (а) при размерах, указанных на черт. 328, представится в таком виде:



Черт. 328.

$$\int_F \frac{z'}{u} + \int_F \frac{(u-r) dF}{u} = b_3 \int_{u_3}^{u_4} \frac{(u-r) du}{u} + \\ + b_2 \int_{u_2}^{u_3} \frac{(u-r) du}{u} + b_1 \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r) du}{u} = 0.$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$r = \frac{b_3 h_3 + b_2 h_2 + b_1 h_1}{b_3 \ln \frac{u_4}{u_3} + b_2 \ln \frac{u_3}{u_2} + b_1 \ln \frac{u_2}{u_1}} \quad (257).$$

При заданных размерах поперечного сечения вычисление величины r не представит никаких затруднений. Можно размеры подобрать таким образом, что величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений будут равны между собою. Для этого, как видно из ф-л (252), должно быть выполнено условие:

$$\frac{u_4 - r}{u_4} = \frac{r - u_1}{u_1}.$$

Задавшись величинами u_4 и u_1 , определив r , мы из ф-лы (257) найдем необходимое соотношение между остальными размерами. В тех случаях, когда центр тяжести сечения расположен по середине высоты, величина напряжений на вогнутой поверхности бруса больше, чем на выпуклой. Чтобы сравнять эти напряжения и заставить материал одинаково работать на растяжение и сжатие, нужно центр тяжести сечения приблизить к центру кривизны оси бруска. В случае двутаврового сечения этого можно достигнуть, выбирая $b_1 > b_3$.

¹⁾ По поводу получающихся при этом погрешностей см. Weuglich, Bogenträger, 2-е изд. 1911 г., стр. 32.

Трапециoidalное сечение применяется часто в подъемных крюках (черт. 32). Ур-ие для определения r напишется так:

$$\int_F \frac{(u-r) dF}{u} = 0, \text{ откуда } r = - \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}} \quad (b).$$

Принимая во внимание, что ширина сечения при наших обозначениях равна:

$$v = b_2 + (b_1 - b_2) \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \text{ и } dF = v du,$$

получим из ур-ия (b):

$$r = \frac{F}{\left[b_2 + \frac{u_2(b_1 - b_2)}{u_2 - u_1} \right] \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)} \quad (258).$$

Заметим, что в рассчитываемом сечении mn крюка, кроме изгибающего момента, будет действовать продольная сила N , равная весу поднимаемого крюком груза. Напряжения от продольной силы, равномерно распределенные по сечению, придется присоединить к напряжениям, обусловленным действием изгибающего момента.

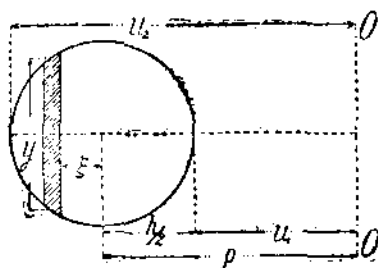
Полагая в полученной выше ф-ле $b_1 = 0$, мы определим положение нейтральной линии для треугольного сечения.

Круговое сечение. Ширина сечения в расстоянии ξ от центра (черт. 230) равна

$$y = 2 \sqrt{\frac{h^2}{4} - \xi^2}.$$

Ур-ие (b) для определения r напишется так:

$$\begin{aligned} r &= \frac{F}{\int_F y \frac{du}{u}} = \frac{F}{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\left(\sqrt{\frac{h^2}{4} - \xi^2} \right) d\xi}{\rho + \xi}} = \\ &= \frac{F}{2\pi \left(\rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{h^2}{4}} \right)} \quad (259). \end{aligned}$$



Черт. 330

Во всех рассмотренных случаях расстояние нейтральной линии от центра тяжести сечения определяется, как разность

$$\gamma = \rho - r.$$

Если r близко к ρ , то такой способ вычисления может привести к значительным погрешностям в величине γ . Это неудобство может быть устранено таким образом. Вместо расстояний z от нейтрального слоя введем расстояния

$$z' = z - \gamma$$

от линии, проходящей через центр тяжести сечения и параллельной нейтральной линии. Тогда ур-ие для определения нейтральной линии переписывается таким образом:

$$\int_F \frac{z dF}{\rho + z} = \int_F \frac{(z' + \gamma) dF}{\rho + z'} = \int_F \frac{z' dF}{\rho + z'} + \gamma \int_F \frac{dF}{\rho + z'} = 0 \quad (c).$$

Введем обозначение:

$$\int_F \frac{z' dF}{\rho + z'} = -\varphi F \quad (260),$$

где F — площадь сечения, тогда:

$$\int_F \frac{dF}{\rho + z'} = \frac{1}{\rho} \int_F \frac{\rho dF}{\rho + z'} = \frac{1}{\rho} \int_F \left(1 - \frac{z'}{\rho + z'}\right) dF = \frac{1}{\rho} F (1 + \varphi).$$

Вставляя это в вышенаписанное ур-ие (с), получим:

$$\gamma = \frac{\rho \varphi}{\rho + \varphi} \quad (261).$$

Величина φ может быть найдена и аналитически и графически. При аналитическом определении воспользуемся разложением:

$$\int_F \frac{z' dF}{\rho + z'} = \frac{1}{\rho} \int_F z' \left(1 - \frac{z'}{\rho} + \frac{z'^2}{\rho^2} - \dots\right) dF.$$

Получаемый таким путем ряд быстро сходится, и при вычислениях можно ограничиться небольшим числом членов.

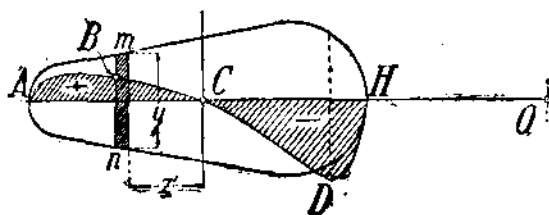
Возьмем, в качестве примера, *прямоугольное поперечное сечение высоты h и ширины b* ; тогда:

$$-\varphi F = \frac{1}{\rho} \int_F z' \left(1 - \frac{z'}{\rho} + \frac{z'^2}{\rho^2} - \dots\right) dF = \frac{b}{\rho} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z' \left(1 - \frac{z'}{\rho} + \frac{z'^2}{\rho^2} - \dots\right) dz',$$

откуда:
$$\varphi = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^6 + \dots$$

Подобным же образом для кругового сечения найдем:

$$\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^6 + \dots$$



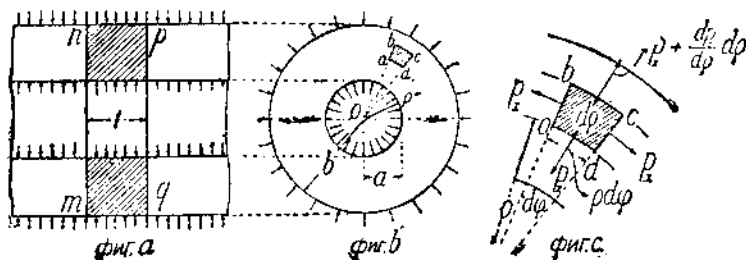
Черт. 331.

При сложных контурах (черт. 331) определение φ может быть выполнено графически. Заметим, что при вычислении интеграла ф-лы (260) каждая элементарная площадка dF уменьшается в отношении $\frac{z'}{\rho + z'}$. На чертеже этого

уменьшения можно достигнуть, оставляя ширину каждой элементарной полоски mn неизменной и уменьшая длину полоски y в отношении $z' : (p + z')$. Откладывая от прямой AN по ординатам уменьшенные длины полосок, получим кривую $ABCDH$. Алгебраическая сумма площадей $ABCA$ и $CHDC$ равна, очевидно, $-\varphi F$. Пользуясь планиметром, легко найдем значение φ .

§ 135. Задача Ляме.

Под этим названием известна задача о распределении напряжений в круговом кольце прямоугольного поперечного сечения, подвергающемуся действию равномерно распределенных внутренних и наружных давлений. Это кольцо можно представить себе вырезанным из цилиндрической трубки двумя поперечными сечениями mn и pq (черт. 332, фиг. а). Так как под действием



Черт. 332.

равномерно распределенных давлений деформации и напряжения для всех поперечных сечений трубки одинаковы, то мы можем ограничиться рассмотрением кольца, размер которого в направлении оси трубки равен единице. Обозначим через b и a величину наружного и внутреннего радиуса и через p_n и p_e — интенсивности соответствующих давлений.

Для определения напряженного состояния в какой-либо точке, в расстоянии r от центра кольца, выделим у этой точки бесконечно малый элемент $abcd$ (фиг. б) двумя concentricкими цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$ и двумя меридиональными сечениями, составляющими между собой угол $d\varphi$. Из условий симметрии заключаем, что при деформации отдельные точки кольца перемещаются в радиальном направлении, и эти перемещения одинаковы для всех точек, равноудаленных от центра кольца. В таком случае прямые углы выделенного элемента $abcd$ останутся прямыми, и по боковым граням его не будут действовать касательные напряжения.

Нормальные напряжения по граням ab и cd , совпадающим с меридиональными сечениями, будут, в силу симметрии, одинаковы; мы их обозначим через p_x . Нормальное напряжение по грани ad , соответствующей цилиндрической поверхности радиуса r , обозначим через p_r , тогда напряжение по

параллельной ей грани bc , отстоящей от центра кольца на $\rho + d\rho$, будет равняться $p_z + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho$ ¹⁾.

Между напряжениями p_x и p_z можно установить зависимость, написав уравнение равновесия для выделенного элемента $abcd$. Для этого проектируем приложенные к элементу силы на направление радиуса Ob и приравняем сумму проекций нулю. По граням ab и cd действуют нормальные к ним силы, равные $p_x \cdot d\rho \cdot 1$. Проектируя их на Ob , получим

$$-p_x d\rho \cdot 1 \cdot d\varphi \quad (a).$$

По грани ad действует сила $p_z \cdot \rho d\varphi \cdot 1$ и по грани bc — в противоположную сторону — сила ²⁾:

$$\left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi \cdot 1 = p_z \rho d\varphi \cdot 1 + p_z d\rho d\varphi \cdot 1 + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho \rho d\varphi \cdot 1.$$

Проектируя эти силы на направление радиуса Ob , получим:

$$p_z d\rho d\varphi \cdot 1 + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} d\rho \rho d\varphi \cdot 1 \quad (b).$$

Нужное нам уравнение равновесия на основании (a) и (b) напишется так:

$$p_z + \frac{\partial p_z}{\partial \rho} \rho - p_x = 0 \quad (c).$$

Второе уравнение, необходимое для определения напряжений p_x и p_z , получим, приняв во внимание деформации кольца. Обозначим через u радиальное перемещение какой-либо точки, находящейся в расстоянии ρ от центра кольца. Величина эта будет некоторой функцией от ρ . Если мы возьмем бесконечно близкую точку, в расстоянии $\rho + d\rho$ от центра, то ее перемещение в радиальном направлении будет:

$$u + \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho,$$

и, следовательно, элемент радиуса длиной $d\rho$ получает приращение $\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho$. Относительное удлинение в радиальном направлении представится формулой:

$$e_z = \frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Кроме радиального удлинения элемент $abcd$ получит удлинение e_x в направлении действия напряжений p_x . Величина этого удлинения найдется из таких соображений. Все точки, лежащие до деформации на окружности радиуса ρ ,

¹⁾ Напряжения p_x и p_z мы приняли на чертеже растягивающими. Если в результате вычислений получим для какого-либо из этих напряжений отрицательное значение, то это будет указывать на то, что напряжение — сжимающее.

²⁾ Членом $\frac{\partial p_z}{\partial \rho} (d\rho)^2 d\varphi \cdot 1$ — высшего порядка малости пренебрегаем.

расположатся после деформации на окружности радиуса $\rho + u$. Длина окружности возрастает в таком же отношении, как и длина радиуса, следовательно, относительное удлинение окружности, равное e_x , представится ф-лой:

$$e_x = \frac{u}{\rho}.$$

Имея значения удлинений e_x и e_z , мы можем выразить напряжения p_x и p_z через одну и ту же величину u . В самом деле (§ 17):

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_x + \sigma e_z) = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{u}{\rho} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \\ p_z &= \frac{E}{1-\sigma^2} (e_z + \sigma e_x) = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \sigma \frac{u}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (d).$$

Вставляя эти выражения в ур-ие (с), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0.$$

Ур-ие это может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) = 0, \quad \text{следовательно} \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} = \text{const.}$$

Этому условию мы удовлетворим, положив:

$$u = A\rho + \frac{B}{\rho},$$

где A и B произвольные постоянные величины. Чтобы определить их, нужно обратиться к выражениям для напряжений (d). Вставляя вместо u его значение, найдем:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A(1+\sigma) + \frac{B}{\rho^2}(1-\sigma) \right], \\ p_z &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left[A(1+\sigma) - \frac{B}{\rho^2}(1-\sigma) \right]. \end{aligned} \right\}$$

На наружной поверхности кольца, т.-е. при $\rho = b$, напряжение p_z обращается в наружное давление и равно, следовательно, $-p_n$. На внутренней поверхности кольца то же напряжение равно $-p_s$. Эти условия дают нам два таких ур-ия для определения произвольных постоянных A и B :

$$\left. \begin{aligned} A(1+\sigma) - \frac{B}{b^2}(1-\sigma) &= -p_n \frac{(1-\sigma^2)}{E}, \\ A(1+\sigma) - \frac{B}{a^2}(1-\sigma) &= -p_s \frac{(1-\sigma^2)}{E}, \end{aligned} \right\}$$

откуда:

$$A = \frac{1-\sigma}{E} \frac{a^2 p_s - b^2 p_n}{b^2 - a^2}; \quad B = \frac{1+\sigma}{E} \frac{(p_s - p_n) a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Определив произвольные постоянные, мы представим выражения для напряжений в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{a^2 p_s - b^2 p_n}{b^2 - a^2} + \frac{(p_s - p_n) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)} \\ p_z &= \frac{a^2 p_s - b^2 p_n}{b^2 - a^2} - \frac{(p_s - p_n) a^2 b^2}{\rho^2 (b^2 - a^2)} \end{aligned} \right\} \quad (262).$$

В частном случае, когда *наружного давления нет*, $p_n = 0$, и ф-лы для напряжений напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{p_s a^2 (b^2 + \rho^2)}{\rho^2 (b^2 - a^2)} = \frac{p_s a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{\rho^2} + 1 \right) \\ p_z &= - \frac{p_s a^2 (b^2 - \rho^2)}{\rho^2 (b^2 - a^2)} = - \frac{p_s a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{\rho^2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (263).$$

Напряжения p_x для всех точек растягивающие. Наибольшего значения они достигают на внутренней поверхности кольца: при $\rho = a$, наименьшего — при $\rho = b$:

$$\left. \begin{aligned} (p_x)_{\max} &= \frac{p_s (b^2 + a^2)}{b^2 - a^2}; \quad (p_x)_{\min} = \frac{2p_s a^2}{b^2 - a^2} \\ (p_x)_{\max} : (p_x)_{\min} &= \frac{b^2 + a^2}{2a^2} \end{aligned} \right\} \quad (264).$$

Чем меньше толщина кольца, тем равномернее распределение напряжений p_x . Напряжения p_z получаются для всех точек сжимающими. Они обращаются в нуль на наружной поверхности и равны p_s на внутренней поверхности кольца.

Найдем теперь величину перемещений:

$$u = A\rho + \frac{B}{\rho} = \frac{1-\sigma}{E} \frac{a^2 p_s - b^2 p_n}{b^2 - a^2} \rho + \frac{1+\sigma}{E} \frac{(p_s - p_n) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \rho}.$$

В частном случае, когда $p_n = 0$, увеличение внутреннего радиуса будет:

$$\delta_1 = \frac{p_s a}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \sigma \right) \quad (265).$$

При действии только наружного давления ф-лы для напряжений напишутся так:

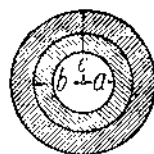
$$p_x = - \frac{p_n b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right); \quad p_z = - \frac{p_n b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \quad (266).$$

Уменьшение наружного радиуса от наружного давления равно:

$$\delta_2 = \frac{b p_n}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \sigma \right) \quad (267).$$

Пользуясь выражениями для δ_1 и δ_2 , легко решить задачу о распределении напряжений в стенках составных цилиндрических трубок. Такие трубки применяют при высоком внутреннем давлении, чтобы получить более выгодное распределение напряжений p_x по толщине стенки трубки. Из ф-лы (264) видно, что при цельной стенке

величина $(p_x)_{\max}$ ни в коем случае не может быть меньше p_0 , и увеличение толщины стенки дальше известного предела оказывает на величину максимальных напряжений весьма малое влияние. Мы можем лучше использовать материал, если составим стенку из двух цилиндрических трубок (черт. 333) и выберем размеры трубок так, чтобы в стенках их при сборке получились некоторые начальные напряжения. Для этого возьмем внутренний радиус наружной трубки несколько меньшим, чем наружный радиус внутренней трубки. Вложить одну трубку в другую можно будет после предварительного нагревания наружной трубки. При остывании размеры наружной трубки будут сокращаться, и по поверхности соприкосновения трубок появится давление p , сжимающее внутреннюю трубку. Это давление вызовет сокращение наружного радиуса внутренней трубки, определяемое ф-лой (267) для δ_2 , и увеличит внутренний радиус наружной трубки на величину, определяемую ф-лой (265) для δ_1 . Если через δ обозначим разность между радиусами, принятую при изготовлении трубок, то величина неизвестного пока давления p определится из условия:



Черт. 333.

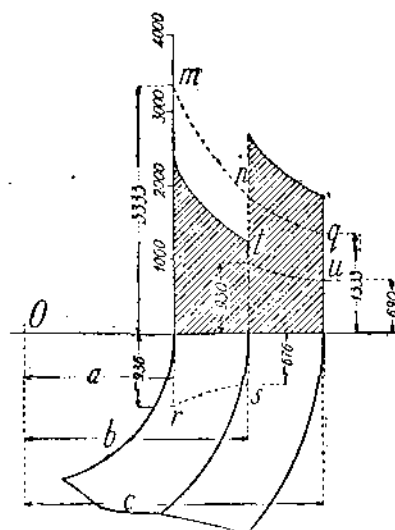
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{pb}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \sigma \right) + \frac{pb}{E} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \sigma \right) = \frac{pb}{E} \frac{2b^2(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

откуда:

$$p = \frac{E\delta}{b} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)} \quad (268).$$

На черт. 334 графически представлено распределение напряжений p_x для случая, когда $a = 10$ см; $b = 15$ см; $c = 20$ см; $\delta = 0,012$ см и $p_0 = 2000$ кг/см². Принимая для железных трубок модуль упругости равным $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², найдем из ф-лы (268), что $p = 260$ кг/см². Под действием давления p во внутренней трубке возникнут сжимающие напряжения p_x , закон распределения которых по толщине представлен пунктирной кривой rs . Во внешней трубке получаются первоначальные растягивающие напряжения p_x , изменение которых представлено кривой tu . Если составную трубку подвергнуть внутреннему давлению, то возникающие при этом растягивающие напряжения определяются по ф-ле (263). На чертеже закон их изменения по толщине стенки представлен кривой mnq .

Суммируя эти напряжения с вышенайденными первоначальными напряжениями, получим распределение, указанное на чертеже заштрихованной площадью. Из этого примера наглядно видно, как, вызывая искусственно первоначальные напряжения, можно лучше использовать материал наружной трубки.

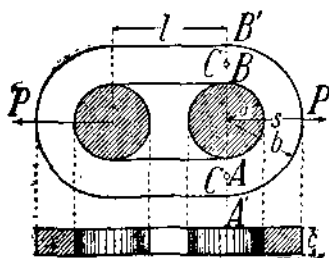


Черт. 334.

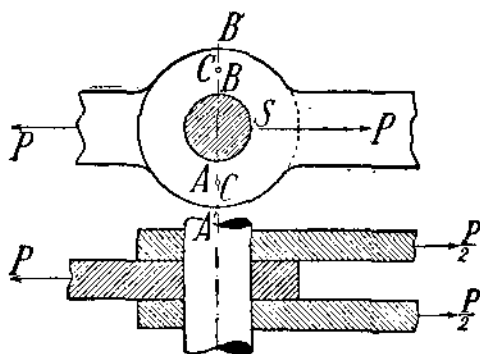
§ 136. Расчет проушин и звеньев цепей.

Результатами предыдущего параграфа можно воспользоваться для приближенного расчета проушин и звеньев цепей. Главное затруднение при определении напряжений в конструкциях, представленных на черт. 335 и 336,

возникает благодаря тому, что неизвестен закон распределения давлений, передаваемых о цилиндра ASB внутренней поверхности проушины или звена



Черт. 335.



Черт. 336.

Распределение давлений будет зависеть и от точности изготовления и от деформаций проушины и цилиндра. При расчетах часто довольствуются самыми грубыми допущениями и при определении напряжений рассматривают часть проушины $B'BSAA'$, как балку, опоры которой помещены в точках C . Нагрузку P предполагают или сосредоточенной по середине пролета, или равномерно распределенной на протяжении AB .

Некоторые позднейшие авторы ¹⁾ предлагают рассчитывать такие детали, как кривые брусья, но самую существенную задачу — вопрос о распределении давлений, передающихся на проушину или звено, решают совершенно произвольно и предполагают или сосредоточенное давление в точке S , или давление, равномерно распределенное по AB . Приняв одно из этих допущений, можно легко найти ту силу P , при которой должны появиться остаточные деформации, и проверить этот результат экспериментальным путем. В этом направлении были произведены многочисленные опыты ²⁾ с различного рода проушинами и звеньями. Наблюдения над моментом появления линий Людерса на боковой полированной поверхности растягиваемого образца дают возможность установить положение опасного сечения и определить нагрузку, соответствующую моменту появления остаточных деформаций. Эти опыты указали на полное несовпадение теоретических расчетов с действительностью и заставили искать более удовлетворительных приемов расчета.

Ряд экспериментов над проушинами, изготовленными из резины, выяснил, что в месте соприкосновения с цилиндром проушина не изгибается, а деформируется, как стенка цилиндрической трубки, подвергающейся равномерно распределенному внутреннему давлению. Поэтому вполне уместно при расчетах воспользоваться ф-лой Ляме (264).

¹⁾ См. Blumenfeld, Berechnung von gekrümmten Stäben, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1907 г.; Baumann, Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing., 1908 г., стр. 397.

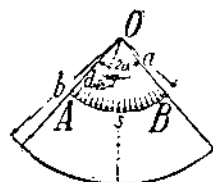
²⁾ См. вышецитированную работу М. А. Ворожаева, стр. 393.

Величина p_a , входящая в эту формулу, может быть найдена таким образом. Пусть 2α — центральный угол, соответствующий поверхности соприкосновения (черт. 337), и c — толщина проушины в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Давление на элемент поверхности, соответствующий углу $d\varphi$, равно $p_a c d\varphi$. Проектируя эти элементарные давления на направление Os и приравнявая сумму проекций растягивающей силе P , найдем:

$$P = 2 \int_0^\alpha p_a c d\varphi \cos \varphi = 2 p_a c \sin \alpha,$$

откуда

$$p_a = \frac{P}{2ac \sin \alpha}.$$



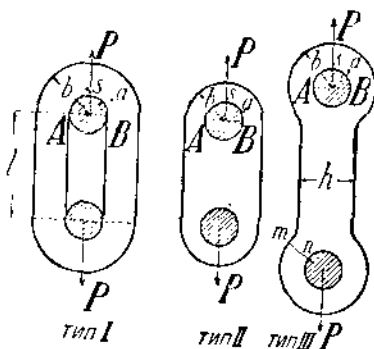
Черт. 337

На практике обыкновенно приходится иметь дело с случаем, когда $\alpha = 90^\circ$, при этом условии:

$$p_a = \frac{P}{2ac}.$$

Вставляя полученное таким образом значение p_a в ф-лу (264), найдем величину наибольших растягивающих напряжений и можем определить то значение P , которому должно соответствовать появление остаточных деформаций и линий Людерса.

Чтобы дать представление о том, насколько этот прием расчета соответствует действительным условиям работы проушины, приводим результаты опытов над образцами, представленными на черт. 338 (см. табл. на стр. 406).



Черт. 338.

В таблице даны те значения растягивающих сил P , при которых замечалось появление линий Людерса во время опытов, а также значения P , вычисленные наперед: 1) по ф-ле Ляме, 2) в предположении сосредоточенной

силы в точке s и 3) равномерно распределенной нагрузки по диаметру цилиндра AB . В обоих последних случаях проушина рассматривалась, как кривой брус, и напряжения определялись на основании гипотезы плоских сечений.

Толщина c для всех образцов равна 1 см.

Приведенная таблица ясно показывает, что из всех приемов расчета наиболее близкие к действительности результаты дает пользование ф-лой Ляме. Ф-ла эта дает удовлетворительные значения для максимальных напряжений даже в тех случаях, когда имеется неплотное соприкосновение цилиндра с внутренней поверхностью проушины, что иногда бывает на практике при не вполне точном изготовлении детали 1).

1) При уменьшении наружного радиуса b и ширины h , в случае проушины типа III, можно придти к такой форме, когда более напряженной окажется часть про-

ТАБЛИЦА

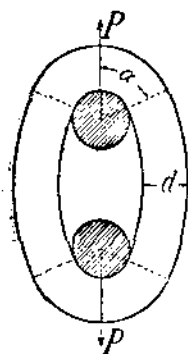
Типы проушин	Нагрузка, соответствующая моменту появления остаточных деформаций								Предел упругости в кг/см²
	<i>a</i> см	<i>b</i> см	<i>l</i> см	<i>h</i> см	Сосредот. сила кг	Равном. нагрузка кг	Формула Ляме кг	Данные опытов кг	
I.	1	2	5,5	—	420	658	2400	2600	2000
	1	3	5,5	—	1120	1500	3200	3600	2000
	2	5	5	—	1600	2590	5800	6400	2000
II.	1	2	—	4	353	526	2400	2600	2000
III.	1	3	—	2,5	680	910	2720	3000	1700
	1	2,5	—	3	590	870	2900	3300	2000

При расчете звеньев цепей (черт. 339) мы встречаемся с прежним затруднением — с полной неопределенностью относительно распределения давлений в месте соприкосновения отдельных звеньев. Задача усложняется здесь еще тем обстоятельством, что поперечное сечение звеньев круговое, а не прямоугольное. Ряд опытов, произведенных над растяжением цепей, показал, что и в этом случае для определения силы, соответствующей моменту появления остаточных деформаций, можно воспользоваться прежним приемом. Для этого круговое сечение заменим прямоугольным той же площади. Высоту прямоугольника примем равной диаметру d , тогда ширина его будет равна:

$$c = \frac{\pi d^2}{4} : d = \frac{\pi d}{4}.$$

Интенсивность давлений p_s , входящая в ф-лу. Ляме, определится так

$$p_s = \frac{P}{2ac \sin \alpha} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin \alpha} = \frac{P}{F \sin \alpha},$$



Черт. 339.

ушины, не находящаяся в соприкосании с цилиндром. Опасными местами при этих условиях явятся сечения mn у места сопряжения проушины с прямой частью. Для определения опасных напряжений нужно в этом случае проушины рассматривать, как кривой брус, и совершенно пренебречь деформациями той части ее, которая находится в соприкосании с цилиндром.

тогда, на основании ф-лы (264), получим:

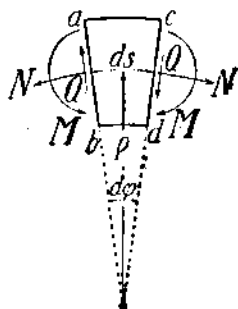
$$(p_x)_{\max} = \frac{p_a(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = \frac{1,25 P}{F \sin \alpha} \quad (269).$$

Этот искусственный прием расчета, конечно, не дает представления о действительном распределении напряжений в растянутом звене, но полученный результат не лишен практического значения, так как окончательная ф-ла хорошо согласуется с опытными данными.

§ 137. Деформация кривого бруса.

Перемещения отдельных точек кривого бруса под действием внешних сил проще всего находятся при помощи теоремы Кастилиано. Для этого нужно иметь выражение потенциальной энергии бруса в виде ф-ии от внешних сил. Найдем энергию, накапливаемую при деформации в элементе кривого бруса, заключенном между двумя бесконечно близкими сечениями ab и cd (черт. 340). В самом общем случае на этот элемент будут действовать изгибающие моменты M , продольная сила N и поперечная сила Q . Составим выражения для работы этих сил при постепенном их возрастании от нуля до окончательного значения. Момент M вызовет приращение угла $d\varphi$ на величину $\delta d\varphi$, определяемую ф-лой (251), и совершит при этом работу:

$$\frac{M^2 d\varphi}{2} = \frac{M^2 ds}{2EF\rho} = \frac{M^2 ds}{2SE\rho} \quad (a).$$



Черт. 340.

Продольная сила вызовет удлинение элемента по оси бруса. Соответствующая энергия растяжения равна:

$$\frac{N^2 ds}{2EF} \quad (b)$$

Кроме того, продольная сила изменит угол $d\varphi$ на величину, определяемую ф-лой (255). При этом ранее приложенные к элементу моменты M совершат работу:

$$M \frac{N}{EF} d\varphi = \frac{MN ds}{EF\rho} \quad (c).$$

Что касается работы поперечной силы Q , то она будет такая же, как и для призматического бруса (ф-ла 186), так как мы приняли тот же закон распределения касательных напряжений.

Суммируя, находим искомое выражение для энергии, накопленной в элементе бруса:

$$dV = \frac{M^2 ds}{2SE\rho} + \frac{N^2 ds}{2EF} + \frac{MN ds}{EF\rho} + \frac{k' Q^2 ds}{2FG}.$$

На основании этого потенциальная энергия всего бруска представится ф-лой:

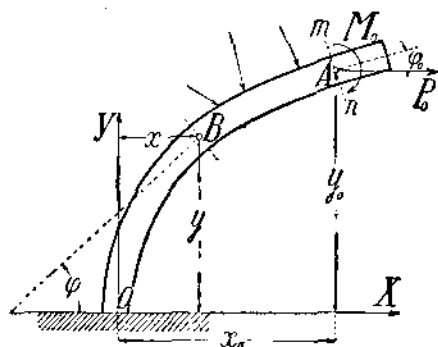
$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF\rho} + \frac{k'Q^2}{2FG} \right) ds \quad (270)$$

На практике с вопросом о деформациях приходится встречаться главным образом при расчете брусьев „малой кривизны“. Для таких брусьев возможны значительные упрощения в общем выражении для потенциальной энергии. Без больших погрешностей можно пренебречь двумя последними членами в скобках ф-лы (270) и, кроме того, в первом члене той же ф-лы можно величину $S\rho$ заменить близкой по значению величиной момента инерции поперечного сечения ¹⁾. Тогда ф-ла V напишется так:

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EJ} + \frac{N^2}{2EF} \right) ds \quad (271).$$

Ниже в частном примере мы выясним влияние этих упрощений на точность результата.

Искривление бруска будет вполне определено, если для каждого поперечного сечения известны перемещения его центра тяжести и угол поворота.



Черт. 341.

Положим, требуется исследовать деформации бруска OBA , закрепленного нижним концом (черт. 341). Выведем ф-лы для перемещений любого поперечного сечения mn .

Чтобы найти угол поворота этого сечения под действием внешних сил, нужно к заданным нагрузкам присоединить фиктивный момент M_0 , приложенный в сечении mn , и составить производную от потенциальной энергии бруска по M_0 . Положив в окончательном результате $M_0 = 0$, найдем искомый поворот $\delta\varphi_0$. Потенциальная энергия бруска напишется в этом случае так:

$$V = \int_0^s \left[\frac{(M + M_0)^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{(M + M_0)N}{EF\rho} + \frac{k'Q^2}{2FG} \right] ds.$$

Здесь через M обозначен изгибающий момент, обусловленный заданными внешними силами, M_0 — приложенный нами фиктивный момент. Интегрирование должно быть распространено на часть кривого бруска между плоскостью

¹⁾ Это следует из того, что при $\frac{z}{r} = 0$ ф-ла (249) должна совпасть с ф-лой (64) для прямого бруска.

закрепления и взятым сечением, так как только деформация этой части оказывает влияние на искомое перемещение.

Применяя теорему Кастилиано, получим:

$$\delta\varphi_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0=0} = \int_0^s \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) ds \quad (272').$$

Если бы мы воспользовались приближенным выражением для потенциальной энергии, то искомый угол поворота представился бы в таком виде:

$$\delta\varphi_0 = \int_0^s \frac{M ds}{EJ} \quad (272).$$

Этим последним результатом обыкновенно и пользуются при расчетах.

Чтобы найти перемещение центра тяжести сечения m в направлении оси X -ов, нужно к заданным нагрузкам присоединить фиктивную силу P_0 . Вследствие этого изгибающий момент в какой-либо точке B оси бруса возрастет на величину $P_0(y_0 - y)$, и продольная сила увеличится на $P_0 \cos \varphi$. Приближенная ф-ла (271) для потенциальной энергии бруса напишется так:

$$V = \int_0^s \left\{ \frac{[M + P_0(y_0 - y)]^2}{2EJ} + \frac{(N + P_0 \cos \varphi)^2}{2EF} \right\} ds.$$

Составляя производную от этого выражения по P_0 и полагая в окончательном результате $P_0 = 0$, получим ф-лу для искомого перемещения:

$$\delta x_0 = \int_0^s \frac{M(y_0 - y) ds}{EJ} + \int_0^s \frac{N \cos \varphi ds}{EF} = y_0 \int_0^s \frac{M ds}{EJ} - \int_0^s \frac{My ds}{EJ} + \int_0^s \frac{N dx}{EF} \quad (273).$$

Подобным же образом можно составить ф-лу для перемещения точки A в направлении оси Y -ов:

$$\delta y_0 = -x_0 \int_0^s \frac{M ds}{EJ} + \int_0^s \frac{M x ds}{EJ} + \int_0^{y_0} \frac{N dy}{EF} \quad (274).$$

Полученные ф-лы вполне решают вопрос о перемещениях изгибаемого кривого бруса, и определение величин $\delta\varphi_0$, δx_0 , δy_0 сводится таким образом к вычислению нескольких интегралов, что может быть сделано или аналитическим или графическим путем ¹⁾.

В частном случае, когда первоначально ось кривого бруса очерчена по дуге круга, можно, вместо перемещений отдельных точек, найти ур-не искривленной оси стержня, аналогичное тому, что мы имели при изгибе балок. Пусть AB — первоначальная ось бруса (черт 342), изогнутая по дуге круга,

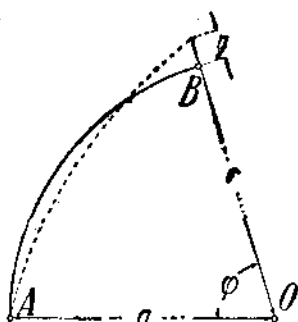
¹⁾ См. Baumann, Einfaches Verfahren zur Ermittlung der Formänderung eben gekrümmter stabförmiger Körper, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1910 г., стр. 1677.

a — соответствующий радиус. Вид изогнутой оси после деформации представлен на чертеже пунктиром. Малые радиальные перемещения отдельных точек оси при деформации бруса обозначим через y . Углы оси после искривления представим в полярных координатах, тогда

$$r = f(\varphi), \text{ где } r = a + y \quad (d).$$

Радиус кривизны для изогнутой оси в полярных координатах представляется такой ф-лой:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}.$$



Черт. 342.

Подставляя вместо r его значение (d) и отбрасывая в окончательном результате члены, заключающие малые величины высшего порядка:

$$y^2, \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2, y \frac{d^2 y}{d\varphi^2}, \dots,$$

получим:

$$\rho = \frac{a^3 + 3a^2 y}{a^2 + 2ay - a \frac{d^2 y}{d\varphi^2}}.$$

Приращение кривизны оси бруса будет равно:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = - \frac{y + \frac{d^2 y}{d\varphi^2}}{a^2 + 3ay}.$$

Если в полученном результате пренебречь членом $3ay$ по сравнению с a^2 , то окончательное выражение для приращения кривизны можно написать так:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = - \frac{y}{a^2} - \frac{d^2 y}{a^2 ds^2} \quad (e),$$

где

$$ds = a d\varphi.$$

С другой стороны, из рассмотрения деформации элемента бруса, заключенного между двумя поперечными сечениями, можно получить:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\delta d\varphi}{ds}.$$

Для брусьев „малой кривизны“, пренебрегая влиянием продольной силы, получим (ф-ла 253):

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = \frac{\delta d\varphi}{a d\varphi} = \frac{M}{EJ},$$

и ур-ие (е) для искривленной оси бруска напишется так ¹⁾:

$$EJ \left(\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y}{a^2} \right) = -M \quad (275).$$

При $a = \infty$ ур-ие это совпадает с тем, что мы имели в случае изгиба призматических стержней (ф-ла 90).

На практике иногда приходится иметь дело с изгибом слегка искривленных стержней, у которых начальные стрелки прогиба малы по сравнению с пролетом. При действии на такой брусок поперечных сил в основном ур-ии (275) можно отбросить второй член в левой части и разыскивать прогибы так же, как и в случае призматических стержней. Если, кроме поперечных изгибающих сил, на слегка искривленный брусок действуют продольные растягивающие или сжимающие силы, то начальное искривление может иметь существенное влияние на прогиб, и для оценки этого влияния удобнее всего воспользоваться приближенным приемом, изложенным в главе XV ²⁾. Обозначим через y_0 первоначальные прогибы стержня и через y_1 — приращения этих прогибов при изгибе. Тогда полный прогиб в каком-либо сечении стержня после деформации будет равен:

$$y = y_0 + y_1.$$

Предположим, что мы имеем стержень с опертыми концами длины l , и начальное искривление представлено в виде тригонометрического ряда:

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (f).$$

Искривление при изгибе можно представить в такой форме:

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (g).$$

Величины $a_1, a_2, \dots$ примем за обобщенные координаты, определяющие деформацию стержня. Представим потенциальную энергию изгиба и сближение концов стержня при изгибе в виде ф-ий от выбранных координат. На основании ф-лы (225) получим для потенциальной энергии изгиба выражения:

$$V = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1,2,3,\dots} n^4 a_n^2.$$

¹⁾ Ур-ие это впервые получено J. Boussinesq, см. Comptes Rend., T. 97, стр. 843, 1883 г.

Решение целого ряда задач, относящихся к изгибу кривых стержней с круговой осью, имеется в работе R. Mauey'a, см. Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1913 г., Bd. 61, стр. 246. См. также Курс теор. упр., ч. II, стр. 78.

Изгиб стержней с круговой осью силами, перпендикулярными плоскости кривизны, рассмотрен в работе Saint-Venant'a, см. Comptes Rend., T. 17, 1843 г.

См. также Kanneberger, Österreich. Wochenschrift. f. d. öffent. Baud., 1912 г.

²⁾ См. нашу работу: Об изгибе слегка искривленных стержней, Вест. о-ва технологов, 1913 г.

Сближение концов стержня при изгибе, на основании общей ф-лы (226), представится так:

$$\begin{aligned} \delta l &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{d(y_1 + y_0)}{dx} \right]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{dy_0}{dx} \frac{dy_1}{dx} dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4l} \sum n^2 a_n^2 + \frac{\pi^2}{2l} \sum n^2 a_n b_n \end{aligned} \quad (h).$$

Предположим, что на наш стержень действует равномерно распределенная нагрузка q и продольная растягивающая сила S . Если мы какой-либо координате a_n дадим приращение δa_n , то внешние силы совершат при этом работу:

$$\delta a_n \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - S \frac{d\delta l}{da_n} \delta a_n = \delta a_n \left[\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - S \frac{\pi^2}{2l} n^2 (a_n + b_n) \right].$$

Множитель при δa_n представляет собой обобщенную силу соответствующую координате a_n . Приравнявая производную от потенциальной энергии системы по обобщенной координате, соответствующей обобщенной силе, получим ур-ие:

$$-\frac{EJ\pi^4 n^4}{2l^3} a_n = \int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx - S \frac{\pi^2}{2} n^2 (a_n + b_n)$$

откуда, вводя прежнее обозначение:

$$a^2 = -\frac{Sp^2}{EJ\pi^2},$$

получим:

$$a_n = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \frac{\int_0^l q \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{n^2(n^2 + a^2)} - \frac{a^2 b_n}{n^2 + a^2}.$$

Выполняя интегрирование и вставляя полученные таким образом значения координат в общее выражение для прогиба, получим:

$$y_1 = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^3(1^2 + a^2)} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^3(3^2 + a^2)} + \dots \right) - \left(\frac{a^2 b_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{1^2 + a^2} + \frac{a^2 b_2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2 + a^2} + \dots \right) \quad (k).$$

Первый член этого выражения совпадает вполне с тем, что мы получали раньше для прогиба призматических брусков [см. ф-ла (с) § 127]. Вторым членом оценивается влияние первоначальной кривизны на действие продольной силы.

Применим полученную формулу (к) к частному случаю. Предположим, что опертый по концам стальной стержень длины $l=150$ см квадратного поперечного сечения $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изгибается под действием собственного веса и продольной растягивающей силы $S=100 \text{ kg}$. Начальные прогибы, измеренные в сантиметрах, определяются ур-ием ¹⁾:

$$v_0 = -0,8 \sin \frac{\pi x}{l} - 0,3 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

¹⁾ Положительное направление оси Y совпадает с направлением веса. Начальный прогиб имеет отрицательное значение.

Полагая $E = 2,2 \cdot 10^6$ кг/см² и $ql = 1,2$ кг, найдем:

$$\alpha^2 = \frac{Sl^2}{EJ\pi^2} = 1,25, \quad \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} = 0,289 \text{ см.}$$

Подставляя это в ф-лу (к) для прогиба, получим:

$$y_1 = \left(0,129 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,001 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots\right) + \left(0,444 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,071 \sin \frac{2\pi x}{l}\right).$$

Первая сумма представляет собой прогибы призматического стержня. Вторая сумма, состоящая из двух членов, дает нам прогибы, обусловленные начальной кривизной.

Если увеличить продольную силу в 10 раз, то получим $\alpha^2 = 12,5$, и ф-ла (к) даст нам:

$$y_1 = \left(0,021 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,0005 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots\right) + \left(0,740 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,227 \sin \frac{2\pi x}{l}\right).$$

Мы видим, что здесь продольная сила имеет преобладающее значение, она устраняет большую часть начального прогиба стержня.

Продольная сжимающая сила стремится увеличить начальное искривление. Для получения прогибов можно пользоваться прежней ф-лой (к). Нужно только изменить знак α^2 .

Рассмотрим теперь случай, когда продольная сила не задана наперед, а является, как следствие того, что концы изгибаемого стержня не могут сближаться или раздвигаться. Предположим, что начальное искривление стержня произведено по синусоиде:

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

Под действием равномерно распределенной нагрузки прогиб возрастет, и появится продольная растягивающая сила, препятствующая сближению концов. Ограничиваясь главными членами в ф-ле (к), получим для прогиба выражение:

$$y_1 = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2 b_1}{1 + \alpha^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Неизвестную пока величину α^2 найдем из того условия, что сближение концов стержня от изгиба равно удлинению, вызванному продольной силой. На основании ф-лы (h) для сближения, получим ¹⁾:

$$\frac{(f_0 - \alpha^2 b_1)^2}{(1 + \alpha^2)^2} + \frac{2b_1(f_0 - \alpha^2 b_1)}{1 + \alpha^2} = 4\alpha^2 r^2 \quad (1)$$

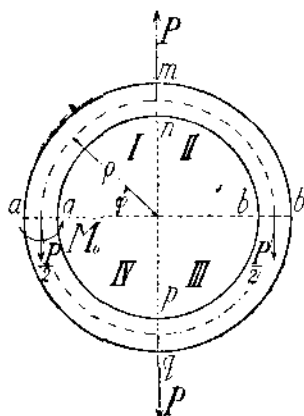
Определяя из этого ур-ия α^2 , найдем продольную растягивающую силу и, следовательно, сможем найти прогиб и напряжение в стержне.

§ 138. Расчет кругового кольца.

Вопрос об определении деформаций кривого бруса приобретает практическое значение в связи с решением задач, где имеются „лишние неизвестные“ внутренние усилия, или опорные реакции.

¹⁾ Здесь $f_0 = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5}$ представляет приближенное выражение для прогиба бруса при отсутствии продольной силы; r — радиус инерции поперечного сечения. Более подробное рассмотрение этой задачи см. Курс теории упруг., ч. II, стр. 62.

В качестве первого примера возьмем круглое кольцо постоянного поперечного сечения, растягиваемое двумя взаимно противоположными силами P (черт. 343). В таких, примерно, условиях будут находиться круговые звенья растягиваемой цепи. Переменив направление сил P , мы получим ф-лы, годные для расчета стенок цилиндрических труб, сжимаемых между двумя параллельными плоскостями.



Черт. 343.

В силу симметрии можно утверждать, что поперечные сечения aa и bb , соответствующие горизонтальному диаметру кольца, а также вертикальные сечения mm и pp сохранят свое положение после деформации, и все четыре квадранта будут находиться в совершенно одинаковых условиях.

Рассмотрим квадрант I. Сечение mm будем считать заделанным, а к сечению aa приложим силы, заменяющие действие нижней части кольца на верхнюю. Из условий симметрии заключаем, что это действие можно привести к силе $\frac{P}{2}$ и к моменту неизвестной пока величины M_0 . Величину M_0 найдем из условий деформации взятого нами квадранта.

Сечение aa сохраняет свое положение, следовательно, угол поворота $\delta\varphi$ для него обращается в нуль. На основании ф-лы (272) получим ур-ие:

$$\delta\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M}{ES\rho} + \frac{N}{EF\rho} \right) \rho d\varphi = 0.$$

Изгибающий момент и продольная сила для какого-либо сечения кольца, наклоненного под углом φ к горизонтальному диаметру, представятся такими ф-лами:

$$M = \frac{P\rho}{2}(1 - \cos\varphi) + M_0, \quad N = \frac{P}{2}\cos\varphi \quad (a).$$

Вставляя это в вышенapisанное ур-ие и выполняя интегрирование, получим:

$$M_0 = -\frac{P\rho}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) - \frac{P}{\pi} \frac{S}{F},$$

или, принимая во внимание, что $S = F\gamma$,

$$M_0 = -\frac{P\rho}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (6).$$

Если бы мы пренебрегли влиянием продольной силы и исходили из приближенной ф-лы (272'), то нашли бы:

$$M_0 = -\frac{P\rho}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = -0,182 P\rho \quad (277).$$

Из сравнения полученных результатов заключаем, что влияние продольной силы и перемещения нейтральной линии на статически неопределенную величину M_0 значительно лишь в случае брусьев большой кривизны. Погрешности приближенной ф-лы для случая прямоугольного поперечного сечения, при различных значениях отношения $\rho : h$, приведены в нижеследующей таблице.

ТАБЛИЦА

$\frac{\rho}{h}$	$\frac{\gamma}{\rho}$	Погрешности
1	0,090	15,8%
1,5	0,038	6,7%
2	0,021	3,7%
3	0,009	1,6%

Мы нашли для M_0 отрицательное значение, следовательно, в сечении aa изгибающий момент имеет направление, противоположное выбранному при расчете. Это можно было и заранее предвидеть, если принять во внимание, что под действием растягивающих сил P радиус кривизны кольца в сечениях aa и bb возрастает. Определив M_0 , легко найти изгибающий момент в любом сечении кольца при помощи общего

выражения (а). Полагая $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и вставляя, вместо M_0 , его приближенное значение (ф-ла 277), получим изгибающий момент M_1 для сечений mn и pq :

$$M_1 = 0,318 P\rho$$

В этих сечениях нормальные напряжения от изгиба приобретают наибольшее значение.

Чтобы найти растяжение кольца по вертикальному диаметру, воспользуемся теоремой Кастиллиано.

Полное выражение для потенциальной энергии и в этом случае равно (ф-ла 270):

$$V = 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M^2}{2ES\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF\rho} + \frac{k'Q^2}{2FG} \right) d\varphi.$$

Вставляя, вместо M , N и Q , их значения:

$$M = \frac{P\rho}{2} \left(\frac{2}{\pi} - \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \frac{\gamma}{\rho} \right); \quad N = \frac{P}{2} \cos \varphi; \quad Q = \frac{P}{2} \sin \varphi$$

и составляя производную от потенциальной энергии по P , найдем искомое увеличение вертикального диаметра кольца:

$$\delta = \frac{P\rho^3}{ES\rho} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right) + \frac{2\gamma}{\rho} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma}{\rho} \right) - \frac{\pi}{8} \right] + \frac{k'E}{2G} \frac{\gamma}{\rho} \pi \right\}.$$

Если пренебречь действием продольной силы N , поперечной силы Q и перемещением нейтральной линии γ , то получим для δ простую ф-лу:

$$\delta = \frac{P\rho^3}{EJ} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0,149 \frac{P\rho^3}{EJ}.$$

Этот результат можно получить также путем интегрирования ур-ия (275). Для данного случая оно напишется так:

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{y}{\rho^2} = -\frac{\rho P}{EJ} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{2} \right), \text{ или: } \frac{d^2y}{d\varphi^2} + y = -\frac{\rho^3}{EJ} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{2} \right).$$

Путем подстановки легко проверить, что общий интеграл этого ур-ия такой:

$$y = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{\rho^3}{4EJ} \varphi \sin \varphi - \frac{\rho^3}{EJ\pi}.$$

Произвольные постоянные A и B определим так, чтобы $\frac{dy}{d\varphi}$ обращалось в нуль при $\varphi=0$ и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так как горизонтальному и вертикальному диаметрам кольца соответствуют небольшие радиальные перемещения; тогда:

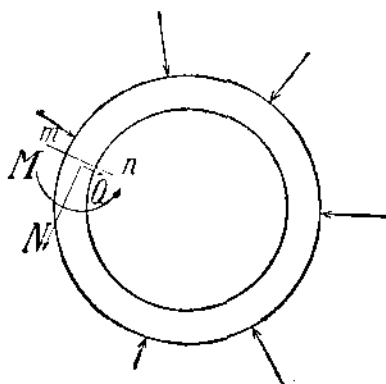
$$y = \frac{\rho^3}{4EJ} \cos \varphi + \frac{\rho^3}{4EJ} \varphi \sin \varphi - \frac{\rho^3}{EJ\pi}.$$

Уменьшение горизонтального диаметра равно:

$$-2[y]_{\varphi=0} = \frac{\rho^3}{EJ} \left(\frac{4}{2\pi} - \frac{\pi}{2\pi} \right) = 0,137 \frac{\rho^3}{EJ}.$$

Увеличение вертикального диаметра:

$$2[y]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho^3}{EJ} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0,149 \frac{\rho^3}{EJ}.$$



Черт. 344.

Результат этот совпадает с ранее полученной приближенной ф-лой.

Рассмотренный случай изгиба кругового кольца представляет собой простейшую задачу. Благодаря симметрии, пришлось иметь дело с одной лишней неизвестной — M_0 . При произвольном расположении нагрузок (черт. 344) мы будем иметь три лишние неизвестных, которые проще всего определить, пользуясь началом наименьшей работы. Разрежем кольцо по m . Действие нижней части на верхнюю в самом общем случае можно заменить силами N и Q и парой M . Если эти три величины мы определим, то вычисление изгибающего момента, продольной и поперечной силы

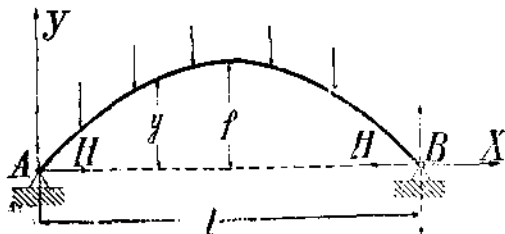
в любом сечении кольца не представит затруднения. Приняв M , N и Q за лишние неизвестные, мы можем составить выражение для потенциальной энергии кольца, в зависимости от этих величин, и определить их из ур-ий:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial N} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Q} = 0.$$

§ 139. Двухшарнирная арка.

Предположим, что кривой брус, подвергающийся действию вертикальной нагрузки, шарнирно прикреплен к неподвижным опорам A и B , расположенным на одной высоте (черт. 345). Разлагая каждую из опорных реакций на

вертикальную и горизонтальную составляющие, мы можем вертикальные составляющие A и B определить совершенно таким же способом, как в случае балки с одной неподвижной и другой подвижной опорами. Для определения горизонтальных реакций статика дает только одно ур-ие: проекция всех сил на горизонтальную ось равна нулю. При наличии только вертикальных нагрузок мы из этого ур-ия заключаем, что горизонтальные реакции равны по величине и противоположны по знаку. Для нахождения их общей величины H , которую примем за



Черт. 345.

лишнюю неизвестную, воспользуемся теоремой Кастилиано. Принимая во внимание, что при расчете арок мы имеем дело с брусками малой кривизны, возьмем для потенциальной энергии системы приближенное значение (ф-ла 271), тогда:

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \int_0^s M \frac{\partial M}{\partial H} \frac{ds}{EJ} + \int_0^s N \frac{\partial N}{\partial H} \frac{ds}{EF} = \delta l \quad (a),$$

где δl — перемещение, соответствующее обобщенной силе H , т.е. сближение опор. В частном случае абсолютно неподвижных опор $\delta l = 0$, и мы для определения H получим ур-ие:

$$\int_0^s M \frac{\partial M}{\partial H} \frac{ds}{EJ} + \int_0^s N \frac{\partial N}{\partial H} \frac{ds}{EF} = 0 \quad (a'),$$

где интегрирование должно быть распространено на всю длину арки. Изгибающий момент M в каком-либо сечении арки отличается от соответствующего момента M_0 для балки, того же пролета l и так же нагруженной, только тем, что к вертикальным силам присоединяется горизонтальная сила H . Обозначая через y ординаты оси арки, можем написать:

$$M = M_0 - Hy \quad (b).$$

Что касается продольной силы N , то мы, не внося значительных погрешностей в окончательный результат, можем положить ее постоянной по всей длине арки и равной распуру H . Вставляя значения M и N в ур-ие (a'), получим:

$$-\int_0^s \frac{M_0 y ds}{EJ} + H \int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} + H \int_0^s \frac{ds}{EF} = 0,$$

откуда:

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y ds}{EJ}}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{ds}{EF}} \quad (278).$$

В случае *арки постоянного сечения* значение H представится в более простой форме:

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y ds}{\int_0^s y^2 ds + r^2 s} \quad (278'),$$

где r — радиус инерции сечения и s — длина оси арки.

Для *не очень пологих арок* r мало по сравнению с y , и вторым членом в знаменателе ф-лы (278') можно пренебречь, тогда:

$$H = \frac{\int_0^s M_0 y ds}{\int_0^s y^2 ds} \quad (278'').$$

Применим последнюю ф-лу к тому частному случаю, когда *ось арки представляет собой параболу*, определяемую ур-ием:

$$y = x(l - x) \frac{4f}{l^2},$$

и нагрузка равномерно распределяется по горизонтальной проекции арки. Тогда:

$$M_0 = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2} x(l - x).$$

Сравнивая выражение для M_0 и y , получаем:

$$M_0 = \frac{ql^2}{8} \frac{y}{f}.$$

Вставляя это в ф-лу (278''), найдем для распора выражение:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \quad (279).$$

Этой ф-лой можно пользоваться для приблизительного определения H не только для параболической арки, но и для арок других очертаний.

Возвратимся теперь к более общему ур-ию (а) и воспользуемся им для *определения тех усилий, которые возникают в арке при колебании температуры*. Пред-

положим равномерное возрастание температуры арки на t°). Если бы одна из опор арки была подвижной, то такое повышение температуры сопровождалось бы увеличением расстояния между опорными шарнирами на величину:

$$\delta l = \alpha t l,$$

где α — коэффициент линейного расширения материала арки. Чтобы вернуть перемещившуюся опору на место, нужно приложить горизонтальные силы H_1 , величина которых легко найдется при помощи теоремы Кастилиано. Полагая в ур-ии (а):

$$\delta l = \alpha t l, N = H_1 \text{ и } M = -H_1 y,$$

найдем:

$$H_1 = \frac{\alpha t l}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{ds}{EF}}$$

Полное значение распора H при действии вертикальных нагрузок и при повышении температуры представится такой ф-лой:

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_0 y ds}{EJ} + \alpha t l}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{ds}{EF}} \quad (280).$$

Вычисление интегралов, входящих в ф-лы для распора, может быть заменено графическим построением. Величины

$$\int_0^s \frac{M_0 y ds}{EJ} \text{ и } \int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ}$$

определяются, как статические моменты относительно какой-либо точки оси X -ов горизонтальной сплошной нагрузки, интенсивности $\frac{M_0}{EJ}$ и $\frac{y}{EJ}$, приложенной вдоль оси арки.

Величина

$$\int_0^s \frac{ds}{EF} \approx \int_0^s \frac{dx}{EF}$$

представит собой площадь, ограниченную кривой, ординаты которой равны $\frac{1}{EF}$.

§ 140. Линии влияния для двухшарнирной арки.

При действии на арку системы подвижных грузов удобнее всего вести расчет при помощи линий влияния. Исследуем прежде всего влияние положения груза P (черт. 346)

¹⁾ Вопрос о температурных напряжениях, в связи с постройкой бетонных и железобетонных арочных мостов больших пролетов приобретает для наших климатических условий серьезное значение, и потому приходится обращаться к более подробному исследованию распределения температуры по толщине арки. Некоторые опытные данные по этому вопросу можно найти в интересной статье С. Н. Paul and Mayhew, см. Trans. Amer. Civil Engin., v. 79, 1915 г.

на величину вызываемого им распора H . Сечение арки предположим постоянным и воспользуемся ф-лой (278'). Вертикальные опорные реакции при взятом расположении груза P будут:

$$A = \frac{Pb}{l} \quad \text{и} \quad B = \frac{Pa}{l},$$

следовательно:

$$M_0 = \frac{Pb}{l} x - \text{для левой части арки, и}$$

$$M_0 = \frac{Pa}{l} (l - x) - \text{для правой части арки.}$$

Выражение для распора напишется так (ф-ла 278'):

$$H = \frac{\frac{Pb}{l} \int_a^c xy \, ds + \frac{Pa}{l} \int_c^b (l-x) y \, ds}{\int_0^l y^2 ds + r^2 s}$$

Для упрощения дальнейших вычислений положим

$$ds = dx,$$

заменим длину элемента дуги длиной соответствующей горизонтальной проекции ее. Такая замена, как показывают более подробные вычисления, вносит лишь незначительные погрешности в окончательное значение H . Ф-ла для распора получает такой вид:

$$H = \frac{\frac{Pb}{l} \int_0^a xy \, dx + \frac{Pa}{l} \int_a^l (l-x) y \, dx}{\int_0^l y^2 dx + r^2 l} \quad (281).$$

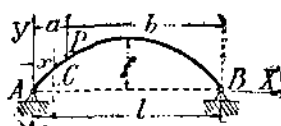
В случае параболической арки (§ 139):

$$y = x(l-x) \frac{4f}{l^2}.$$

Вставляя это значение y в ф-лу (281) и выполняя интегрирование, получим:

$$H = \frac{5}{8} P \frac{a(l-a) \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} \right)}{lf \left(1 + \frac{15r^2}{8f^2} \right)} \quad (282).$$

При $P=1$ полученное выражение дает нам искомое ур-ие линии влияния. Задавая различные значения a , можно эту кривую построить по точкам. Наибольшая ордината будет соответствовать середине пролета. Изменение ее, в зависимости от отношения $f:l$, видно из таблицы¹⁾. Ур-ие линии влияния для распора может быть значительно упро-



Черт. 346.

¹⁾ При вычислении принято $r^2 = 0,0004f^2$. См. таблицу на стр. 421.

щено, если принять во внимание, что множитель $\frac{5}{8} \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ мало меняется при изменении a от 0 до $\frac{l}{2}$ [величина его меняется в пределах от $\frac{5}{8}$ до $\frac{25}{32}$], и положить его равным некоторому постоянному числу k [для $\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$ полагают $k = 0,78$, для более пологих арок берут $k = 0,75$], тогда получим:

$$H = kP \frac{\alpha(l-a)}{lf \left(1 + \frac{15}{8} \frac{a^2}{f^2}\right)} \quad (283).$$

Линия влияния для H представится параболой. Линию влияния для изгибающего момента M в каком-либо сечении m арки (черт. 347) легко построим, если примем во внимание, что

$$M = M_0 - Hy_a.$$

Ординаты искомой линии влияния получатся, как разность ординат треугольника ACB (фиг. б), представляющего линию влияния для M_0 и величин Hy_a . Последние получаются умножением ординат линии влияния для распора H на постоянный множитель y_a . Поперечная сила Q в каком-либо сечении арки представится ф-лой:

$$Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi,$$

где через Q_0 обозначена поперечная сила для простой балки такого же пролета, как и арка. Ординаты линии влияния для поперечной силы получатся для правой части арки, как разность ординат прямой BC (черт. 348) и величин $H \sin \varphi$. Последние величины получаются умножением ординат линии влияния для H на $\sin \varphi$. Для левой части арки нужно брать разность ординат прямой AD и величин $H \sin \varphi$. Также просто может быть построена и линия влияния для продольной силы N , если принять во внимание, что

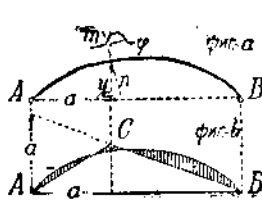
$$N = Q_0 \sin \varphi + H \cos \varphi.$$

§ 141. Невыгоднейшее нагружение арки.

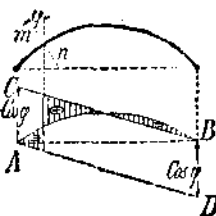
При решении вопроса о том, как должна быть расположена нагрузка на арке, чтобы в каком-либо сечении m (черт. 349) получились наибольшие растягивающие или сжимающие напряжения, вместо построения линий влияния, можно воспользоваться „линией опорных сопротивлений“. Линия эта определяется как геометрическое место точек

ТАБЛИЦА.

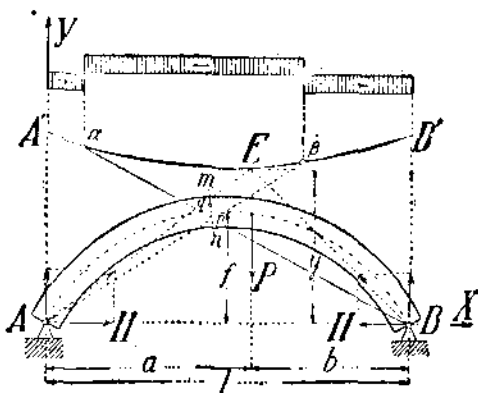
$\frac{f}{l} =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
При $P = 1$, $H_{\max} =$	0,58	0,77	0,96



Черт. 347.



Черт. 348.



Черт. 349.

величины при помощи начала наименьшей работы. Благодаря закреплениям, точка при деформации не перемещается, и сечение A не поворачивается, следовательно:

$$\frac{\partial V}{\partial M_A} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial H} = 0 \quad (a).$$

Для потенциальной энергии мы можем взять упрощенное выражение (ф-ла 271). Входящие в него величины M и N легко представить в виде ф-ий от лишних неизвестных и внешних сил:

$$M = M_A + Ax - Hy - M'; \quad N = -A \sin \varphi - H \cos \varphi + N'.$$

В этих выражениях через M' обозначен момент относительно центра тяжести взятого сечения mn заданных нагрузок, приложенных к левой части арки, и через N' — проекция этих нагрузок на направление нормали к сечению mn . Вставляя написанные значения M и N в ур-ия (а), получим, после сокращения на постоянный множитель E :

$$\left. \begin{aligned} M_A \int_0^s \frac{ds}{J} + A \int_0^s \frac{x ds}{J} - H \int_0^s \frac{y ds}{J} &= \int_0^s \frac{M' ds}{J} \\ M_A \int_0^s \frac{x ds}{J} + A \int_0^s \frac{x^2 ds}{J} - H \int_0^s \frac{xy ds}{J} + A \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{F} + H \int_0^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{F} &= \\ &= \int_0^s \frac{M' x ds}{J} + \int_0^s \frac{N' \sin \varphi ds}{F} \\ A \int_0^s \frac{y ds}{J} + A \int_0^s \frac{xy ds}{J} - H \int_0^s \frac{y^2 ds}{J} - A \int_0^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{F} - H \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{F} &= \\ &= \int_0^s \frac{M' y ds}{J} + \int_0^s \frac{N' \cos \varphi ds}{F} \end{aligned} \right\} (284).$$

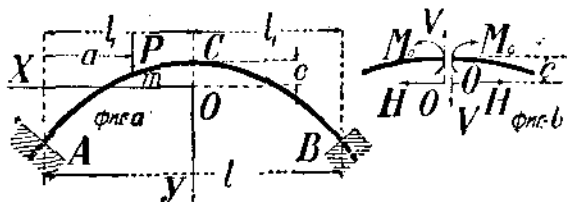
Определение лишних неизвестных M_A , A и H сводится, таким образом, к решению трех линейных ур-ий. Главное затруднение при дальнейшем решении задачи заключается в большом количестве вычислительной работы, связанной с нахождением определенных интегралов, входящих в вышенаписанные ур-ия. При расчете количество интегралов можно значительно сократить надлежащим выбором координат ¹⁾, и можно заменить утомительную вычислительную работу графическими построениями. Приемы эти, имеющие большое практическое значение, главным образом, при расчете каменных и бетонных сводов, излагаются в курсах статике сооружений, где исследуется также весьма важный вопрос о выборе наивыгоднейшего очертания арки или свода ²⁾.

Мы выясним здесь некоторые из упрощений для случая действия на симметричную арку одной вертикальной сосредоточенной силы (черт. 351). Имея решение этой задачи, мы можем легко построить линии влияния для статически неопределенных величин и при помощи этих линий решим вопрос о напряжениях, возникающих в арке, в случае действия

¹⁾ E. Mörsch. Berechnung von eingespannten Gewölben, Schweizerische Bauztg., т. XLVII, Nr. 7 и 8. R. Schönhöfer, Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken, 1908 г.

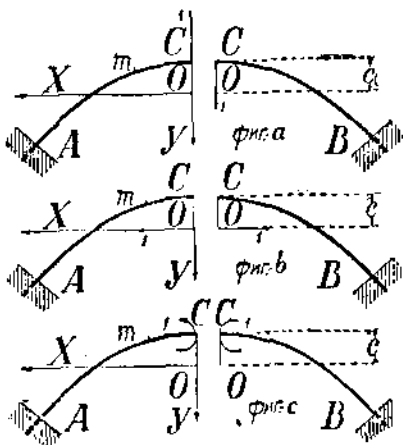
²⁾ В русской литературе этому вопросу посвящена работа С. Белзевского, Рациональные формы сплошных упругих арок, 1905 г.

подвижной системы связанных между собой грузов. Именно эту задачу приходится решать при расчете каменных и бетонных мостов. При построении линий влияния особенно выгодно пользоваться теоремой о взаимности перемещений. За лишние неизвестные примем силы, определяющие напряжения в ключевом шве C . Совокупность усилий, действующих по сечению C , можно привести к одной силе и паре сил. Точку приложения силы расположим в расстоянии c от вершины C оси арки, при чем c



Черт. 351.

будем в дальнейшем подбирать таким образом, чтобы построение линии влияния по возможности упрощалось. Разлагая силу на горизонтальную и вертикальную составляющие и выбирая для сил и момента направления, указанные на фиг. б, сводим расчет к построению линии влияния для H , V и M_0 . При пользовании теоремой о взаимности перемещений будем действительное состояние системы, представленное на черт. 351, сравнивать с одним из состояний, представленных на черт. 352. Для получения этих фиктивных состояний мы отбрасываем лишние неизвестные V , H и M_0 , обращаем таким образом арку в два отдельных кривых бруска, заделанных нижними концами в A и B и сгибаемых силами, равными единице, приложенными к верхним концам. При пользовании теоремой о взаимности перемещений нам понадобятся перемещения верхних концов C наших кривых брусков и перемещение точки m , соответствующей месту приложения вертикальной силы P (черт. 352). Перемещения мы будем понимать в обобщенном смысле. Так, например, обобщенной силе V действительного состояния системы (черт. 351) соответствующим перемещением будет вертикальное смещение точек C одной относительно другой для каждого из случаев, представленных на черт. 352. Перемещения эти обозначим через δ_{vv} , δ_{vh} , δ_{vm} . Первый из значков указывает, что мы имеем перемещение, соответствующее силе V . Второй значек указывает на то, какого типа силой, равной единице, это перемещение вызвано. Силе H действительного состояния будут соответствовать



Черт. 352.

в фиктивных состояниях увеличения расстояний между точками O , которые предполагаются неизменно связанными с концевыми сечениями C наших брусков. Перемещения эти обозначаются так: δ_{hv} , δ_{hh} , δ_{hm} . Обобщенной силе M_0 действительного состояния будет соответствовать относительный поворот концевых сечений C для фиктивных состояний. Обозначим эти повороты через δ_{mv} , δ_{mh} , δ_{mm} . Наконец, вертикальное перемещение точки m для фиктивных состояний (черт. 352, фиг. а, фиг. б, фиг. с) обозначим соответственно через f_v , f_h , f_m .

Применим теперь теорему о взаимности перемещений к действительному состоянию системы и фиктивному состоянию, представленному на фиг. а черт. 352. Так как в действительном состоянии по сечению C не происходит ни разрыва ни сдвига, то

перемещения действительного состояния, соответствующие силам фиктивного состояния, будут равны нулю. Работа сил фиктивного состояния на соответствующих перемещениях действительного состояния обращается в нуль. Следовательно, и работа сил действительного состояния на соответствующих перемещениях фиктивного состояния также обратится в нуль, и мы получим

$$M_0 \delta_{mv} + H \delta_{nv} + V \delta_{vv} + P f_v = 0.$$

Подобным же образом, сравнивая действительное состояние с фиктивными состояниями представленными на фиг. b и c (черт. 352), получим:

$$M_0 \delta_{mn} + H \delta_{nn} + V \delta_{vn} + P f_n = 0;$$

$$M_0 \delta_{mm} + H \delta_{nm} + V \delta_{vm} + P f_m = 0.$$

Если воспользоваться условиями симметрии, то сразу можно показать, что некоторые из перемещений обращаются в нуль, и этим упростить полученные выше у-рия для определения лишних неизвестных. Обратимся к фиктивному случаю, представленному на фиг. а. Левый брусек отличается от правого лишь направлением действующей силы, поэтому перемещения соответствующих точек этих двух брусков будут всегда равны по величине, но направления этих перемещений по отношению к соответствующему бруску будут противоположны. В таком случае перемещение δ_{vv} , представляющее относительное вертикальное смещение точек C, будет равно удвоенному прогибу в сечении C левого бруска, перемещения δ_{mv} и δ_{nv} будут равны нулю, так как горизонтальное расстояние между точками O в данном случае остается неизменным, и относительный поворот сечений C равен нулю. Таким образом, для фиктивного случая (а) будем иметь (см. ф-лы 272', 273, 274 для перемещений):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{vv} &= 2 \int_0^s \frac{x M ds}{EJ} + 2 \int_0^s \frac{N dy}{EF} = 2 \int_0^s \frac{x^2 ds}{EJ} + 2 \int_0^s \frac{\sin \varphi dy}{EF} \\ \delta_{mv} &= 0 \\ \delta_{nv} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a).$$

Подобным же образом для фиктивных случаев (b) и (c) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{vn} &= \delta_{nv} = 0 \\ \delta_{nn} &= 2 \int_0^s \frac{M ds}{EJ} = 2 \int_0^s \frac{y ds}{EJ} \\ \delta_{nn} &= 2 \int_0^s \frac{(c+y) M ds}{EJ} - 2 \int_0^s \frac{N dx}{EF} - 2c \int_0^s \frac{M ds}{EJ} = 2 \int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} + 2 \int_0^s \frac{\cos \varphi dx}{EF} \end{aligned} \right\} \quad (b).$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{vm} &= \delta_{mv} = 0 \\ \delta_{mm} &= \delta_{mn} = 2 \int_0^s \frac{y ds}{EJ} \\ \delta_{mm} &= 2 \int_0^s \frac{1 \cdot ds}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (c).$$

На основании этого, ур-ия для определения лишних неизвестных напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} V\delta_{vv} + Pf_v &= 0 \\ M_0\delta_{mn} + H\delta_{nn} + Pf_n &= 0 \\ M_0\delta_{mm} + H\delta_{nm} + Pf_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d).$$

Первое из ур-ий (d) дает нам

$$V = -P \frac{f_v}{\delta_{vv}}.$$

Следовательно, линия вертикальных прогибов ¹⁾ для фиктивного случая (a) представляет линию влияния для неизвестной V .

Построение линий влияния для двух других неизвестных M_0 и H может быть значительно упрощено надлежащим выбором расстояния s , которое мы до сих пор оставляли неопределенным. Возьмем для s такую величину, чтобы перемещение δ_{nn} обращалось в нуль, тогда

$$\int_0^s \frac{y ds}{EJ} = 0,$$

т.е., начало координат O лежит в центре тяжести оси арки, если эту ось представить себе весомой и допустить, что вес единицы длины в каждом сечении определяется ф-лой

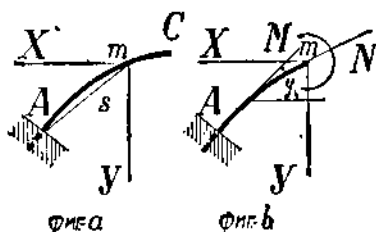
$$q = \frac{1}{EJ}.$$

При таком выборе расстояния s второе и третье ур-ия системы (d) дадут нам

$$H = -P \frac{f_n}{\delta_{nn}}; \quad M_0 = -P \frac{f_m}{\delta_{nm}}.$$

Таким образом, построение линий влияния для H и M_0 сводится к определению вертикальных прогибов для фиктивных случаев, представленных на фиг. b и c черт. 352. Прогибы эти могут быть вычислены при помощи общей ф-лы (274) для вертикальных перемещений. Располагая начало координат в точке m , прогиб которой мы

ищем, и выбирая направления для осей, сил и моментов, указанные на черт. 353, получим для вертикального перемещения в направлении оси Y такое выражение:



Черт. 353.

$$f = - \int_0^s \frac{xM ds}{EJ} - \int_0^s \frac{N ds \sin \varphi}{EF} \quad (e).$$

Первый член ф-лы представляет прогиб от изгибающего момента, а второй от продольной силы. Определение прогиба может быть выполнено аналитическим или графическим путем. В первом слу-

чае задача сводится к приближенному вычислению определенных интегралов, во втором случае интегрирование может быть выполнено графически. При графическом решении мы можем воспользоваться тем, что первый член в ф-ле (e) представляет собой момент

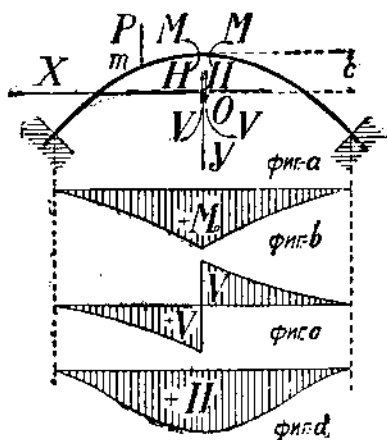
¹⁾ Прогибы положительны, когда они совпадают с направлением оси Y .

относительно точки m непрерывно распределенной по оси свода вертикальной сплошной нагрузки интенсивности $\frac{M}{EJ}$.

Если мы разделим полусвод AC на ряд клиньев длиной по оси, равной δs , в центре тяжести каждого клина приложим вертикальную сосредоточенную силу $\frac{M\delta s}{EJ}$ и построим для этой системы параллельных сил веревочный многоугольник, то ординаты полученной таким путем моментной площади дадут нам в известном масштабе ¹⁾ значения прогибов от момента M . Прогибы от продольной силы, определяемые вторым членом ф-лы (е), найдутся как равнодействующая непрерывно распределенных по дуге Am вертикальных усилий интенсивности

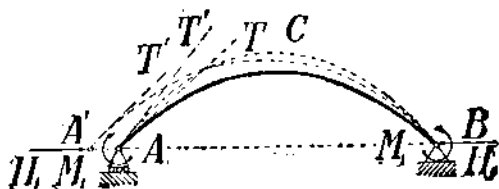
$$\frac{N \sin \varphi}{EF}.$$

Для вычисления перемещений δ_{vv} , δ_{nn} и δ_{mm} пользуемся ф-лами (а), (b) и (с). Определенные интегралы, входящие в эти формулы, всегда могут быть с достаточной для практики точностью вычислены приближенно по ф-лам Симпсона или Котеса. Таким образом определяются все элементы, по которым могут быть построены линии влияния для выбранных нами лишних неизвестных V , H и M_0 . Общий вид этих линий представлен на черт. 354. Заметим, что, вырезывая модели арок и подвергая их изгибу парами M_0 и силами H и V , можно получить линии влияния экспериментальным путем, что может представить интерес в случае сложных сооружений, например, при выяснении участия надсводного строения в общей работе арки.



Черт. 354.

Наметим теперь общий ход решения задачи о напряжениях, возникающих в арках с заданными концами при повышении температуры. Температурные напряжения проще всего разыскать при помощи теоремы Кастилиано. Освободим нашу арку от лишних закреплений, у правой опоры поместим неподвижный и у левой опоры — подвижной шарниры (черт. 355). При повышении температуры арка будет деформироваться, но напряжений при этом никаких не возникает, так как опоры могут свободно раздвигаться. Увеличение расстояния между опорными шарнирами будет равно lat , где t — повышение температуры. Подберем теперь систему сил, которую нужно приложить, чтобы установить опорные сечения арки в первоначальное



Черт. 355.

¹⁾ Величины $\frac{M\delta s}{EJ}$, с которыми мы поступаем, как с силами, представляют собой отвлеченные числа, которые мы изображаем отрезками. Если в том же масштабе полюсное расстояние принято равным единице, то прогибы получатся в масштабе чертежа свода. Уменьшая полюсное расстояние в n раз, во столько же раз увеличим прогибы.

положение. Приложением горизонтальных сил мы можем вернуть в первоначальное положение шарнир A . При этом ось арки искривится и займет положение ACB . Касательная к оси в точке A из положения $A'T'$, параллельного первоначальному положению AT , перейдет в положение AT'' . Такой же поворот касательной будет иметь место и у правой опоры. Чтобы при сближении шарниров A и B под действием горизонтальных сил H_1 помешать поворачиванию концов арки, необходимо приложить моменты M_1 . В случае симметричной формы арки эти моменты будут равны, и при их действии в точках A и B не возникнет вертикальных опорных реакций. Напряжения в любом сечении арки определятся величинами моментов M_1 и горизонтальных сил H_1 . Для изгибающего момента и продольной силы будем иметь выражения:

$$M = M_1 - H_1 y; \quad N = -H_1 \cos \varphi.$$

В зависимости от этих величин может быть представлена и потенциальная энергия системы. Принимая во внимание, что при совместном действии M_1 и H_1 перемещение, соответствующее обобщенной силе H_1 , равно $l\alpha$, и перемещение, соответствующее M_1 , равно нулю (окончательное направление касательной AT параллельно $A'T'$), получим два ур-ия:

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial H_1} = l\alpha.$$

Вставляя в выражение для потенциальной энергии значения M и N , найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \int_0^s \frac{ds}{EJ} - H_1 \int_0^s \frac{y ds}{EJ} &= 0 \\ M_1 \int_0^s \frac{y ds}{EJ} - H_1 \int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} - H_1 \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF} &= -l\alpha \end{aligned} \right\} (285).$$

Из этих ур-ий найдутся величины опорных моментов и распора, вызванных повышением температуры арки.

Для проверки выведем те же ур-ия способом Мора. За первое состояние возьмем действительное состояние системы, когда под влиянием повышения температуры возникают опорные моменты M_1 и распор H_1 . Соответствующие этому состоянию деформации каждого элемента арки, заключенного между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, определятся изменением угла:

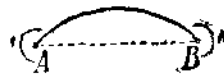
$$\delta d\varphi = \frac{Md}{EJ} = \frac{(M_1 - H_1 y) ds}{EJ}$$

и удлинением элемента

$$\delta ds = \alpha ds - \frac{H_1 \cos \varphi}{EF} ds.$$

За второе состояние примем то, когда опоры отброшены и по концам приложены две прямо противоположные пары сил, равные единице (черт. 356). Изгибающий момент в каждом поперечном сечении арки будет равен единице, и работа сил второго состояния на перемещениях, соответствующих первому состоянию, представится такой ф-лой:

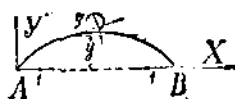
$$\int_0^s \frac{(M_1 - H_1 y) ds}{EJ} \cdot 1.$$



Черт. 356.

Эту величину, на основании начала возможных перемещений, нужно приравнять к нулю. Таким образом, мы получаем первое из ур-ий (285).

Для составления второго ур-ия будем действительное состояние системы сравнивать с тем, когда опоры отброшены и по концам приложены две взаимно противоположные горизонтальные силы, равные единице (черт. 357). Изгибающий момент для любого сечения равен $-1 \cdot y$ и продольная сила равна $-1 \cdot \cos \varphi$. Работа сил этого состояния на перемещениях первого состояния определится ф-лой:



Черт. 357.

$$-\int_0^s \frac{y(M_1 - H_1 y)}{EJ} ds - \int_0^s x t \cos \varphi ds + \int_0^s \frac{H_1 \cos^2 \varphi ds}{Et}.$$

Приравняв эту работу нулю, получим второе из ур-ий (285).

§ 143. Параболическая арка с заделанными концами.

В случае пологой параболической арки постоянного сечения общие ур-ия (284) для определения лишних неизвестных можно упростить, положив:

$$ds = dx; \quad \cos \varphi = 1; \quad \sin \varphi = 0; \quad N' = 0;$$

тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{ds}{J} &= \int_0^l \frac{dx}{J} = \frac{l}{J}; \quad \int_0^s \frac{ds}{J} x = \int_0^l \frac{dx}{J} x = \frac{l^2}{2J}; \\ \int_0^s \frac{x^2 ds}{J} &= \int_0^l \frac{x^2 dx}{J} = \frac{l^3}{3J}; \quad \int_0^s \frac{y ds}{J} = \int_0^l \frac{y dx}{J} = \frac{2}{3} \frac{fl}{J}; \\ \int_0^s \frac{ds}{J} yx &= \int_0^l \frac{y dx}{J} x = \frac{fl^2}{3J}; \quad \int_0^s \frac{y^2 ds}{J} = \int_0^l \frac{y^2 dx}{J} = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{J}. \end{aligned}$$

Вставляя эти результаты в ур-ия (284), получим:

$$M_A + A \frac{l}{2} - \frac{2}{3} Hf = \frac{1}{l} \int_0^l M' dx.$$

$$M_A + \frac{2}{3} Al - \frac{2}{3} Hf = \frac{2}{l^2} \int_0^l M' x dx.$$

$$M_A + A \frac{l}{2} - H \left(\frac{4}{5} f + \frac{3}{2} \frac{r^2}{J} \right) = \frac{3}{2fl} \int_0^l M' y dx.$$

Вычитая третье ур-ие из первого, получим выражение для распора:

$$\frac{2}{15} H \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{J^2} \right) fl = f \int_0^l M' dx - \frac{3}{2} \int_0^l M' y dx.$$

Вычитая из второго ур-ия первое, получим:

$$\frac{Al^3}{6} = 2 \int_0^l M' x dx - l \int_0^l M' dx.$$

Наконец, для момента M_A получаем выражение¹⁾:

$$M_A = \frac{9}{l} \int_0^l M' dx - \frac{6}{l^2} \int_0^l M' x dx - \frac{15}{2fl} \int_0^l M' y dx.$$

В частном случае, когда на арку действует одна вертикальная сила P , приложенная в расстояниях a и b от опорных шарниров A и B , величина M' равна нулю для левой части арки и $P(x-a)$ — для правой ее части, тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^l M' dx &= P \int_a^l (x-a) dx = \frac{1}{2} P b^2, \\ \int_0^l M' x dx &= P \int_a^l (x-a) x dx = \frac{1}{6} P (l-a)^2 (2l+a), \\ \int_0^l M' y dx &= \frac{4Pf}{f^2} \int_a^l (l-x)(x-a) x dx = \frac{(l-a)^3 (l-a) f P}{3f^2}. \end{aligned}$$

Вставляя эти значения в вышенайденные выражения для лишних неизвестных, получим:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{15}{4} \frac{a^2(l-a)^2 P}{f l^3 \left(1 + \frac{45}{4} \frac{f^2}{l^2}\right)} = \frac{2a^2 b^2 P}{f^3} \cdot \frac{15}{8f \left(1 + \frac{45}{4} \frac{f^2}{l^2}\right)} \\ A &= \frac{(l-a)^2 (l+2a) P}{f^3} = \frac{P - 3a^2 l + 2a^3}{f^3} P \\ M_A &= - \frac{a(l-a)^2 (2l-5a)}{2f^3} P = - \frac{P a b^2}{f^3} \left(1 - \frac{5a}{2l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (286).$$

Эти ф-лы дают возможность построить линии влияния для лишних неизвестных. Пользуясь ими, можно построить также линии влияния для M , N и Q .

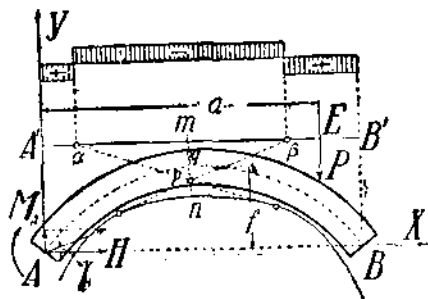
Для определения невыгоднейшего нагружения арки удобно пользоваться кривой опорных сопротивлений. Ордината y_1 какой-либо точки E (черт. 358) этой кривой определится из того условия, что левая опорная реакция проходит через эту точку. Левая реакция приводится к моменту M_A и силам A и H , приложенным к точке A , следовательно:

$$M_A + Aa - Hy_1 = 0,$$

откуда:

$$y_1 = \frac{M_A + Aa}{H}.$$

1) Членами, заключающими множитель $\frac{f^2}{l^2}$, пренебрегаем.



Черт. 358.

Вставляя сюда значения M_A и A , найденные нами для параболической арки, получим:

$$y_1 = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f \quad (287).$$

Кривая опорных сопротивлений представляет собой в данном случае прямую $A'B'$, параллельную оси X -ов. В случае заделанных концов точки приложения опорных реакций не совпадают с концами оси арки A и B , и мы, получив точку E , через которую проходит левая опорная реакция, для построения этой реакции примем во внимание, что $\operatorname{tg} \gamma$ угла, составляемого ею с осью X -ов, равен:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{H} = \frac{4}{15} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f \frac{l+2a}{a^2}.$$

Ур-ие линии действия левой опорной реакции напишется так:

$$\begin{aligned} y = y_1 + (x-a) \operatorname{tg} \gamma &= \frac{6}{5} \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f + \frac{4}{15} (x-a) \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right) f \frac{l+2a}{a^2} = \\ &= \frac{2 \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right)}{15} f \left[\frac{2lx}{a^2} - \frac{2(l-2x)}{a} + 5 \right] \end{aligned} \quad (a).$$

При перемещении груза меняется a , и мы получим семейство прямых (а). Объемлемую кривую для этих прямых найдем, исключая a из ур-ия (а) и ур-ия:

$$0 = \frac{2 \left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right)}{15} f \left[-\frac{4lx}{a^3} + \frac{2(l-2x)}{a^2} \right],$$

получаемого из (а) путем дифференцирования по a . Результат исключения получается такой

$$y = \frac{\left(1 + \frac{45}{4} \frac{r^2}{f^2} \right)}{15} f \left[10 - \frac{(l-2x)^2}{lx} \right] \quad (288).$$

Это и есть ур-ие объемлемой кривой. Начертив такую кривую для заданной арки и имея кривую опорных сопротивлений, мы для каждого положения груза легко построим направление опорных реакций. Для этого нужно только из точки E — пересечения направления силы P с кривой опорных сопротивлений провести касательные к объемлемой кривой.

Рассмотрим напряжения по какому-либо поперечному сечению mn . Пусть p и q — нижняя и верхняя точки ядра сечения. Проводим через p линии $p\beta$ и px — касательные к объемлемой кривой и пересекающие кривую опорных сопротивлений в точках β и α . Для всякого груза, приложенного правее точки β , левая опорная реакция пройдет ниже p , и вызовет в верхних волокнах сечения mn растягивающие напряжения. То же самое можно повторить и относительно грузов, лежащих левее точки α . Следовательно, для получения наибольших растягивающих напряжений в верхних волокнах сечения mn нужно загрузить арку на участках $A'\alpha$ и $\beta B'$. Загрузка участка $\alpha\beta$ вызовет в тех же волокнах наибольшие сжимающие напряжения. Чтобы решить вопрос о распределении нагрузок для получения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в нижних волокнах сечения mn , нужно провести касательные к объемлемой кривой через верхнюю точку q ядра сечения.

Этим мы ограничим наше изложение по вопросу об изгибе арок. Дальнейшие подробности по расчету арок и сводов могут быть найдены в специальных исследованиях. ¹⁾

¹⁾ Winkler, Die Lehre d. Elasticität..., 1867 г., стр. 293. Weyrauch, Theorie d. elastischen Bogenträger. Mehrtens, Statik d. Baukonstruktionen..., том III.

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

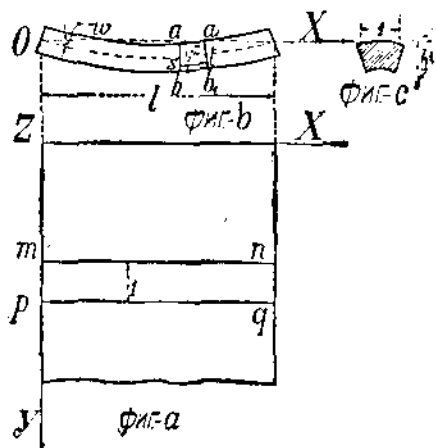
ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ.

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК.

§ 144. Изгиб пластинки по цилиндрической поверхности.

Элементарная теория изгиба пластинок имеет много общего с ранее изложенной теорией изгиба стержней. В основание выводов положены некоторые допущения, дающие возможность элементарным путем находить величины прогибов пластинки и возникающих при этом напряжений для нескольких частных случаев, имеющих большое практическое значение. Мы будем рассматривать пластинки постоянной толщины h . Величину h считаем малой по сравнению с длиной и шириной пластинки. Плоскость, делящую пополам расстояние между верхней и нижней поверхностями пластинки, назовем „срединной плоскостью“. В теории изгиба пластинок она играет ту же роль, что нейтральный слой при изгибе стержней. Прогибы пластинки считаем малыми по сравнению с h ¹⁾ и полагаем, что каждый прямолинейный элемент, перпендикулярный к срединной плоскости, после изгиба остается прямолинейным и нормальным к искривленной срединной поверхности пластинки. Допущение это соответствует гипотезе плоских сечений в теории изгиба стержней. Координатные оси X и Y условимся располагать в срединной плоскости пластинки и ось Z -ов направим перпендикулярно к этой плоскости.

Рассмотрим случай, когда пластинка постоянной ширины l и неограниченной длины в направлении оси Y -ов (черт. 359) изгибается по цилиндрической поверхности, образующие которой



Черт. 359.

¹⁾ При изгибе по цилиндрической поверхности это ограничение отпадает.

параллельны оси Y . При этом условии прогибы пластинки и возникающие при изгибе напряжения будут зависеть только от координаты x , и мы можем ограничиться рассмотрением изгиба элементарной полоски *мпрq* шириной единица (фиг. а). В силу сделанных выше допущений поперечные сечения ab и a_1b_1 этой полоски (фиг. б) при изгибе остаются плоскими, и удлинение какого-либо продольного элемента st , взятого в расстоянии z от срединной плоскости, будет равно (ф-ла 61):

$$e = \frac{z}{\rho},$$

где ρ — соответствующий радиус кривизны.

Выражение для удлинений такое же, как в случае изгиба стержней, но значение соответствующих напряжений будет иное. Это происходит по следующей причине. При изгибе бруска поперечное сечение искажается, как это показано на фиг. с. При изгибе полоски такого искажения не будет — ему препятствуют соседние части изгибаемой пластинки. Продольные волокна при растяжении или сжатии не получают соответствующего поперечного сужения или расширения и, следовательно, испытывают некоторые напряжения по боковой поверхности.

Обозначим через p_x нормальные напряжения по площадкам, перпендикулярным оси X -ов, и через p_y — нормальные напряжения по площадкам, перпендикулярным оси Y -ов. Для определения этих напряжений воспользуемся общими ф-ми (15):

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_x + \sigma e_y); \quad p_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_y + \sigma e_x).$$

Принимая во внимание, что в данном случае:

$$e_x = \frac{z}{\rho} \quad \text{и} \quad e_y = 0,$$

получим:

$$p_x = \frac{Ez}{(1-\sigma^2)\rho}; \quad p_y = \frac{\sigma Ez}{(1-\sigma^2)\rho}.$$

Момент нормальных усилий, распределенных по поперечному сечению рассматриваемой полоски, будет равен:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{Ez^2 dz}{(1-\sigma^2)\rho} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \frac{1}{\rho}. \quad (289).$$

Сравнивая этот результат с тем, что мы имели при рассматривании изгиба стержней (ф-ла 63), находим разницу лишь в том, что вместо момента инерции поперечного сечения, равного $\frac{1 \cdot h^3}{12}$, входит в ф-лу (289) несколько большая величина:

$$\frac{1 \cdot h^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Благодаря связи с соседними частями пластинки, полоска *тпрq* оказывается более жесткой, чем брусок того же сечения.

Для упрощения ф-л введем обозначение:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} = C \quad (290).$$

Величина C играет в изгибе пластинок такую же роль, как величина жесткости изгиба B в теории изгиба стержней (см. стр. 144). В дальнейшем условимся величину C называть жесткостью пластинки при цилиндрическом изгибе или, короче, *цилиндрической жесткостью* пластинки. При этом обозначении ф-ла для кривизны напишется так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{C} \quad (289'),$$

где M — изгибающий момент, приходящийся на поперечное сечение элементарной полоски шириной единица. Вставляя найденное значение для кривизны в ф-лы для напряжений, получим:

$$p_x = \frac{12 Mz}{h^3} \quad \text{и} \quad p_y = \sigma \frac{12 Mz}{h^3}.$$

Напряжения p_x будут такие же, как и в бруске прямоугольного поперечного сечения $1 \times h$. Кроме того, имеются напряжения p_y , препятствующие искажению поперечного сечения. Эти напряжения должны быть приложены по боковым граням полоски *тпрq*, чтобы она гнулась по цилиндрической поверхности ¹⁾.

§ 145. Расчет длинных прямоугольных пластинок.

Если сплошная нагрузка, изгибающая длинную прямоугольную пластинку, не меняет своей интенсивности в направлении длины пластинки, то в местах, удаленных от коротких сторон пластинки, поверхность изгиба можно без больших погрешностей принять за цилиндрическую. Выделяя, как это мы делали в предыдущем параграфе, элементарную полоску шириной единица, мы можем напряжения p_x для этой полоски находить совершенно так же, как для балки. При вычислении прогибов придется принять во внимание увеличение жесткости полоски, благодаря влиянию соседних частей пластинки. Обозначая через w прогиб (черт. 359), мы можем дифференциальное уравнение изогнутой оси полоски написать так (ф-ла 90):

$$C \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M \quad (291).$$

Если края изгибаемой пластинки могут свободно сближаться, вычисление всех элементов изгиба не представит никаких затруднений.

¹⁾ Вид поверхности полоски в том случае, когда напряжения p_y нет, рассмотрен в интересной книжке Searle'я, *Experimental Elasticity*, стр. 50.

Остановимся на том случае, когда сближению краев препятствуют дополнительные закрепления. Эта задача имеет большое практическое значение, так как обыкновенно края изгибаемого листа скрепляют с опорным контуром. При этом условии выделенная элементарная полоска, кроме поперечных нагрузок, будет испытывать действие продольных растягивающих сил, препятствующих сближению концов. Для определения этих сил воспользуемся некоторыми результатами, полученными при рассмотрении одновременного действия на балку продольных и поперечных сил (§ 127). Пусть S — величина растягивающей силы, приходящаяся на элементарную полоску, ширина которой равна единице и $p = \frac{S}{h}$ величина соответствующего растягивающего напряжения. Обозначим, как мы это делали при рассмотрении изгиба стержней, отношение продольной силы S к „критической силе“ через α^2 (см. стр. 365 и 371). Принимая во внимание выражение для цилиндрической жесткости, будем иметь:

$$\alpha^2 = \frac{12(1-\sigma^2)}{Lh^2} \frac{S l^2}{\pi^2} = \frac{p}{E} \frac{l^2}{h^2} \frac{12(1-\sigma^2)}{\pi^2} \quad (292).$$

Величина наибольшего прогиба, в зависимости от закрепления концов, найдется по одной из следующих ф-л:

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha^2} \text{ для опертых концов (ф-ла 230),}$$

или

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha^2}{4}} \text{ для заделанных концов (ф-ла 236),}$$

где через f_0 обозначен прогиб полоски при действии только поперечных нагрузок; он в каждом частном случае может быть легко найден путем интегрирования ур-ня (291).

Например, в случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , имеем:

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{C} \text{ — для опертых концов}$$

и

$$f_0 = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{C} \text{ — для заделанных концов.}$$

Величина наибольшего изгибающего момента для случая опертых концов и равномерно распределенной нагрузки определится из ф-лы (§ 127):

$$M = \frac{q l^2}{8} \left(1 - \frac{1,028 \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) \quad (293).$$

В случае заделанных концов момент на опоре, приблизительно ¹⁾, равен:

$$M = \frac{q l^2}{12} - \frac{S f}{2} = \frac{q l^2}{12} \left[1 - \frac{\pi^2 \alpha^2}{64 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)} \right] \quad (294).$$

¹⁾ При значениях $\alpha^2 > 2$ лучше пользоваться при определении опорного момента ф-лой (239).

Таким образом, задача об изгибе пластинки в случае закреплений, препятствующих свободному сближению краев, сводится к разысканию величины α^2 . При исследовании изгиба стержней мы определяли α^2 из ур-ия (240'):

$$\alpha^2(1 + \alpha^2)^2 = \frac{f_0^2}{4l^2}.$$

Ур-ие это выведено в предположении, что концы стержня соединены с абсолютно неподвижными точками, и, следовательно, сближение концов $\frac{\pi^2 f^2}{4l}$ (ф-ла 227), обусловленное изгибом оси стержня, как раз равняется удлинению стержня от продольной силы. Этим ур-ием можно пользоваться в том случае, когда продольные края пластинки при изгибе могут свободно поворачиваться, но совершенно не сближаются.

Распространим наши выводы на те способы закрепления, где возможно некоторое сближение продольных краев пластинки. Предположим, что такому сближению препятствуют упругие распорки. В таком случае, при изгибе продольная сила S , растягивающая выделенную нами элементарную полоску, явится сжимающей силой для распорок. Если через F_1 обозначим площадь распорок, приходящуюся на полоску шириной единица, то сжатие распорок будет равно:

$$\frac{Sl}{EF_1}.$$

Ур-ие для определения α^2 получим, приравнявая сближение концов полоски, обусловленное изгибом, растяжению полоски, сложенному с сжатием распорок; будем иметь:

$$\frac{\pi^2 f^2}{4l} = \frac{Sl(1 - \alpha^2)}{E \cdot l \cdot h} + \frac{Sl}{EF_1}.$$

Первый член во второй части написанного ур-ия снабжен множителем $(1 - \alpha^2)$, так как предполагается, что растяжение срединной поверхности пластинки в направлении оси X -ов не сопровождается поперечным сжатием по оси Y -ов. Вставляя вместо S и f их выражение через α^2 , получим ¹⁾:

$$\alpha^2(1 + \alpha^2)^2 = \frac{3f_0^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{F_1(1 - \alpha^2)}{F_1(1 - \alpha^2)}} = \frac{3f_0^2}{h^2} k \quad (295).$$

Дополнительный множитель k , входящий во вторую часть полученного ур-ия, называют „коэффициентом распора“. С увеличением жесткости распорок

¹⁾ Без особых затруднений может быть составлено ур-ие для определения α^2 и в том случае, когда пластинка, кроме изгиба, подвергается еще действию растягивающих усилий S_0 , равномерно распределенных по продольным сторонам ее. Если S обозначает, как и раньше, растягивающее усилие в пластинке после изгиба, то сжимающее усилие для распорки равно $S - S_0$ и соответствующее сжатие распорки определится из ф-лы $\frac{S - S_0}{EF_1}$. Величина S найдется из условия:

$$\frac{\pi^2 f^2}{4l} = \frac{Sl(1 - \alpha^2)}{Eh} + \frac{(S - S_0)l}{EF_1}.$$

величина эта приближается к единице. При $k=1$ ур-ие (295) совпадает с ранее выведенным ур-ием (240'). Совершенно таким же способом для пластинок с заделанными продольными сторонами получим:

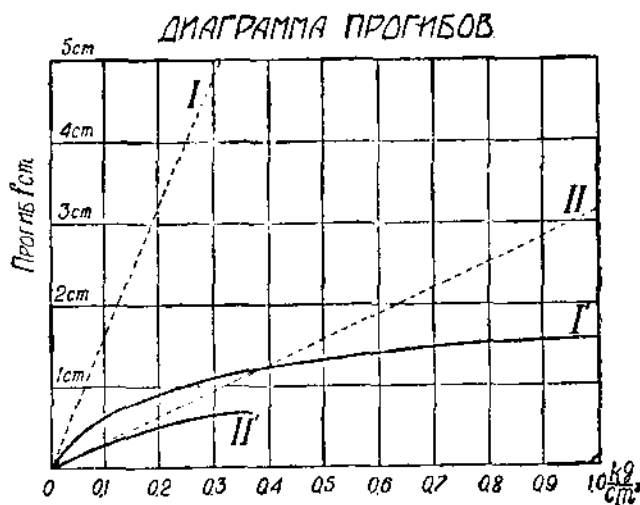
$$\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^2 = \frac{3f_0^2}{h^2} k \quad (296).$$

Величина продольной силы S пропорциональна α^2 и, как видно из полученных ур-ий (295) и (296), возрастает с увеличением f_0 . Чем меньше жесткость пластинки и чем больше отношение $l:h$, тем больше влияние продольной силы на прогиб и на величину напряжений. Заделка продольных краев пластинки в несколько раз уменьшает f_0 , что сильно отражается на величине продольной силы S .

В виде примера на черт. 360 представлено графически возрастание прогибов при увеличении интенсивности q сплошной равномерно распределенной нагрузки от 0 до 1 kg/cm^2 . Прогибы вычислены для длинной прямоугольной пластинки, имеющей ширину $l=122 \text{ cm}$ и жесткость $C=185 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$.

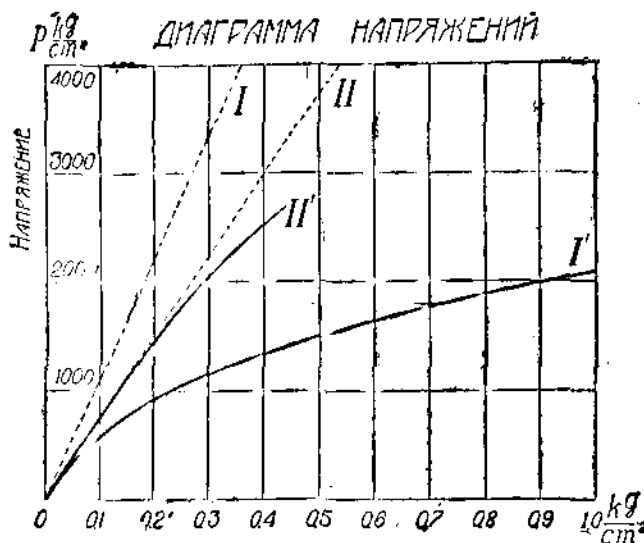
Прямые линии I и II, показанные на чертеже пунктиром, дают нам возрастание прогибов пластинки для открытых и заделанных краев при отсутствии продольных сил S . Сплошные линии I' и II' представляют возрастание прогибов пластинки при наличии продольных сил. Величины S вычислены в том предположении, что продольные края пластинки при изгибе совершенно не смещаются, и, следовательно, коэффициент распора k равен единице. При свободно поворачивающихся краях (линии I и I') уже при малых нагрузках заметно влияние продольной силы, и это влияние быстро растет. В случае заделанных краев (линии II и II') роль продольной силы не так значительна.

Еще резче представится влияние продольной силы при разных способах закрепления краев, если мы проследим изменения наибольших напряжений, появляющихся при изгибе той же пластинки. На черт. 361 прямые линии I и II представляют возрастание наибольших напряжений при открытых и



Черт. 360.

заделанных краях в том случае, когда нет продольных растягивающих сил. Благодаря наличности продольной силы, возрастание максимальных напряжений идет медленнее, и для рассматриваемой пластинки оно представится кривой I'—при опертых краях и кривой II'—в случае заделанных краев. При заделанных краях почти до предела упругости влияние продольной силы не велико, но в случае опертых краев она играет весьма существенную роль. Благодаря ее действию напряжения растут гораздо медленнее, чем при смещающихся краях, и мы получаем, в конце концов, результат прямо противоположный тому, что мы имели при рассмотрении изгиба балок. Оказывается, что в отношении напряжений пластинки с заделанными



Черт. 361.

краями находятся в худших условиях, чем пластинки, продольные края которых могут свободно поворачиваться.

Для облегчения расчетов длинных прямоугольных пластинок, подвергающихся действию равномерно распределенной нагрузки q kg/cm^2 , приведены таблицы ¹⁾ I и II. Таблица I относится к случаю пластинки с опертymi краями. В ней даны растягивающие напряжения p_1 от продольной силы и наибольшие поперечные напряжения p_2 от совместного действия изгиба и растяжения. Величины p_1 и p_2 представляют собой приведенные напряжения, полученные умножением соответствующего удлинения на модуль упругости материала (при составлении таблицы принято $E = 2,2 \cdot 10^6$ kg/cm^2 , $\sigma = 0,3$). Это те напряжения, с которыми приходится иметь дело в случае расчетов на основании второй теории прочности. Для получения действительных напряжений нужно числа таблицы разделить на $1 - \sigma^2$. Из ур-ий (295) и (296) легко видеть, что величина σ^2 зависит, при определенной нагрузке и определенном способе закрепления, лишь от отношения $\frac{l}{h}$. То же

¹⁾ Таблицы эти заимствованы из литографированного курса И. Г. Бубнова, Строительная механика корабля.

Таблицы, составленные применительно к расчету плоских мостовых настилов, имеются в статье Н. В. Терпугова; см. Изв. Киев. полт. инст., 1908 г.

Подробное исследование вопроса об изгибе длинных прямоугольных пластинок имеется в книге И. Бубнова, Строительная механика корабля, т. II, стр. 545.

См. также наш Курс теор. упруг., ч. II.

самое можно заключить на основании ф-л (293) и (294) и относительно напряжений. Поэтому в таблицах напряжения p_1 и p_2 даны в зависимости от отношения $\frac{l}{h}$, при чем отношение это меняется в пределах от $\frac{l}{h} = 80$ до $\frac{l}{h} = 240$. Чем больше это отношение и чем больше нагрузка q , тем большую роль играют продольные силы. Что касается коэффициента распора k , то в тех случаях, когда с уменьшением k напряжение сперва увеличивается, а потом убывает, в таблицах дана наибольшая величина напряжения при изменении k в границах: $\frac{1}{2} < k < 1$.

ТАБЛИЦА I

Края пластинки оперты.

q kg/cm ²	Напряжения	$\frac{l}{h} = 80$		$\frac{l}{h} = 120$		$\frac{l}{h} = 160$		$\frac{l}{h} = 200$		$\frac{l}{h} = 240$	
		$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$
0,3 {	$p_1 =$	189	—	380	275	510	390	615	480	710	555
	$p_2 =$	—	—	1060	1120	1075	1100	1095	1095	1130	1095
0,4 {	$p_1 =$	261	—	475	350	630	490	755	590	865	680
	$p_2 =$	—	—	1240	1300	1250	1285	1285	1260	1320	1270
0,5 {	$p_1 =$	325	220	570	425	740	575	880	690	1010	790
	$p_2 =$	1300	1410	1390	1460	1410	1435	1450	1415	1495	1415
0,6 {	$p_1 =$	385	270	655	495	840	655	1000	780	1140	895
	$p_2 =$	1450	1570	1525	1600	1550	1565	1600	1550	1665	1555
0,7 {	$p_1 =$	445	315	730	560	985	730	1110	870	1270	995
	$p_2 =$	1590	1720	1645	1720	1680	1685	1740	1680	1820	1700
0,8 {	$p_1 =$	500	360	805	620	1025	800	1220	955	1385	1090
	$p_2 =$	1710	1850	1760	1835	1800	1795	1875	1800	1965	1835

q kg/cm ²	Напряжения	$\frac{l}{h}=80$		$\frac{l}{h}=120$		$\frac{l}{h}=160$		$\frac{l}{h}=200$		$\frac{l}{h}=240$	
		$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$
0,9	$p_1=$	555	400	875	675	1110	870	1320	1040	1500	1180
	$p_2=$	1830	1970	1860	1940	1920	1900	2005	1910	2100	1955
1,0	$p_1=$	610	455	945	730	1200	985	1415	1115	1615	1270
	$p_2=$	1930	2080	1960	2035	2030	2000	2130	2010	2220	2060
1,1	$p_1=$	660	485	1010	780	1280	1000	1515	1190	1720	1355
	$p_2=$	2030	2185	2055	2130	2140	2095	2250	2110	2345	2155
1,2	$p_1=$	705	525	1075	835	1355	1060	1605	1260	—	—
	$p_2=$	2130	2285	2145	2220	2245	2175	2360	2205	—	—
1,3	$p_1=$	755	555	1140	880	1430	1125	1695	1330	—	—
	$p_2=$	2220	2380	2230	2305	2345	2270	2465	2305	+	—
1,4	$p_1=$	800	670	1205	930	1505	1185	1785	1400	—	—
	$p_2=$	2305	2465	2320	2385	2435	2355	2570	2400	—	—
1,5	$p_1=$	845	710	1265	980	1580	1245	1865	1470	—	—
	$p_2=$	2390	2555	2405	2460	2525	2440	2670	2500	—	—
1,6	$p_1=$	890	750	1330	1030	1655	1300	1945	1525	—	—
	$p_2=$	2470	2635	2490	2535	2620	2530	—	—	—	—
1,7	$p_1=$	930	785	1390	1075	1725	1350	2020	1585	—	—
	$p_2=$	2545	2715	2575	2610	—	—	—	—	—	—

Таблица II относится к случаю длинной прямоугольной пластинки с заделанными краями. При таком способе закрепления наибольшие напряжения имеют место у контура пластинки. Исследуя при помощи приведенных выше ф-л изгиб элементарной полоски, выделенной из пластинки, мы найдем, что при малых нагрузках, пока продольная растягивающая сила, возникающая при изгибе, мала, опорный изгибающий момент вдвое больше момента по середине длины выделенной полоски. С увеличением нагрузки

ТАБЛИЦА II

Края пластинки заделаны.

q кг/см ²	Напряжения	$\frac{l}{h}=84$		$\frac{l}{h}=120$		$\frac{l}{h}=160$		$\frac{l}{h}=200$		$\frac{l}{h}=240$	
		$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$
0,3	$p_1=$	—	—	150	90	310	215	455	330	565	430
	$p_2=$	—	—	—	—	1030	1110	1070	1175	1085	1095
0,4	$p_1=$	—	—	215	135	415	290	575	425	710	535
	$p_2=$	—	—	1080	1120	1215	1305	1240	1300	1260	1265
0,5	$p_1=$	—	—	280	180	510	365	685	520	840	640
	$p_2=$	—	—	1245	1320	1375	1465	1395	1430	1430	1415
0,6	$p_1=$	65	10	345	230	595	435	795	600	960	735
	$p_2=$	—	—	1400	1495	1510	1600	1535	1560	1585	1545
0,7	$p_1=$	95	30	410	275	680	500	895	675	1075	825
	$p_2=$	—	—	1545	1645	1635	1720	1620	1680	1725	1670
0,8	$p_1=$	125	55	470	320	760	560	995	750	1185	910
	$p_2=$	1180	900	1675	1785	1750	1835	1795	1790	1860	1785
0,9	$p_1=$	155	75	530	365	835	620	1085	825	1295	995
	$p_2=$	1370	1155	1790	1915	1860	1940	1910	1900	1990	1895

q kg/cm ²	Напряжения	$\frac{l}{h}=80$		$\frac{l}{h}=120$		$\frac{l}{h}=160$		$\frac{l}{h}=200$		$\frac{l}{h}=240$	
		$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$	$k=1$	$k \geq 0,5$
1,0	$p_1=$	185	95	530	410	910	680	1175	895	1400	1075
	$p_2=$	1535	1360	1900	2035	1965	2040	2020	1995	2110	2005
1,1	$p_1=$	215	115	650	450	985	740	1265	965	1500	1155
	$p_2=$	1675	1535	2005	2145	2065	2185	2130	2095	2220	2110
1,2	$p_1=$	240	135	700	490	1055	795	1350	1035	—	—
	$p_2=$	1800	1685	2105	2245	2160	2225	2235	2185	—	—
1,3	$p_1=$	270	155	755	530	1125	850	1430	1100	—	—
	$p_2=$	1905	1820	2195	2345	2255	2310	2335	2275	—	—
1,4	$p_1=$	300	180	810	570	1195	900	1505	1160	—	—
	$p_2=$	2000	1945	2280	2435	2345	2390	2440	2360	—	—
1,5	$p_1=$	330	200	860	610	1260	950	1575	1215	—	—
	$p_2=$	2085	2065	2365	2520	2430	2470	2535	2445	—	—
1,6	$p_1=$	360	220	910	650	1325	1000	1645	1275	—	—
	$p_2=$	2155	2175	2440	2605	2515	2550	—	—	—	—
1,7	$p_1=$	390	240	955	685	1390	1045	1705	1335	—	—
	$p_2=$	2220	2280	2520	2690	—	—	—	—	—	—

отношение опорного момента к моменту по середине пролета возрастает. Весь пролет выделенной полоски можно подразделить на два участка: в среднем участке, занимающем более $\frac{4}{5}$ пролета ¹⁾, напряжение нигде не превосходит максимального напряжения

¹⁾ Этот вопрос выяснен в вышецитированной книге И. Г. Бубнова, стр. 598.

в среднем сечении полоски; в крайних участках, общее протяжение которых меньше $\frac{1}{5}$ пролета, наибольшие напряжения превосходят величину максимальных напряжений по середине пролета. В таблице II даны приведенные напряжения p_1 , соответствующие продольной растягивающей силе, и максимальные напряжения p_2 —от совместного действия изгиба и растяжения по середине пролета выделенной элементарной полоски. Максимальные напряжения у опорного контура пластинки будут больше p_2 , но в тех случаях, когда нагрузка на пластинке постоянна, с этими напряжениями обыкновенно не считаются и допускают появление у опорного контура остающихся деформаций. Если при постоянном возрастании нагрузки напряжения у опорного контура пластинки перейдут за предел упругости, то при дальнейшем увеличении q опорный момент будет возрастать менее интенсивно, чем то следует из ф-л, выведенных в предположении совершенной упругости материала, и край пластинки займет по условиям закрепления промежуточное положение между опертым и абсолютно заделанным краем. В этом случае максимальное напряжение по середине пролета будет заключаться между соответствующими значениями p_2 , приведенными в таблицах I и II и вычисленными в предположении совершенной упругости материала.

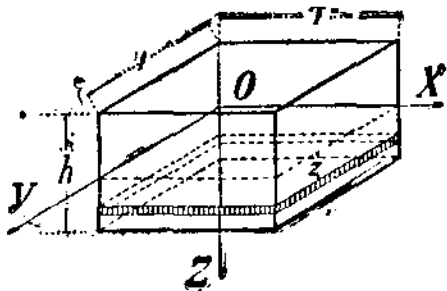
§ 146. Чистый изгиб пластинок.

Для изгиба пластинки по цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Y , необходимо, как мы видели, определенное соотношение между нормальными напряжениями p_x и p_y , именно: нужно, чтобы

$$p_y = \sigma p_x.$$

При других соотношениях между этими напряжениями мы получим более сложный вид искривленной поверхности. Выделим из изгибаемой пластинки двумя парами плоскостей, перпендикулярных осям X и Y , элемент (черт. 362), высота которого равна толщине пластинки, а два другие размера равны единице. Положим, что по боковым граням элемента действуют только нормальные напряжения p_x и p_y , соответственно приводящиеся к парам сил M_1 и M_2 . Этот случай назовем *чистым изгибом*. Исходя из принятой нами основной гипотезы, заключаем, что при изгибе пластинки боковые грани выделенного элемента остаются плоскими, и срединная плоскость играет роль нейтрального слоя. Кривизны срединной поверхности, соответствующие нормальным сечениям плоскостями ZX и ZY , обозначим через $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$. Тогда деформация элементарного слоя, расположенного в расстоянии z от срединной плоскости ¹⁾ (на черт. 362 боковые грани этого слоя заштрихованы), определится удлинениями:

$$e_x = \frac{z}{R_1} \quad \text{и} \quad e_y = \frac{z}{R_2} \quad (a).$$



Черт. 362.

¹⁾ z отсчитываем в направлении выпуклости.

Соответствующие этим деформациям напряжения легко найдутся из общих ф-л:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_x + \sigma e_y) \text{ и } p_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_y + \sigma e_x).$$

После подстановки вышенайденных значений e_x и e_y , получим:

$$p_x = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right); \quad p_y = \frac{Ez}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right) \quad (b).$$

Составляя моменты напряжений p_x и p_y , действующих по боковым граням элемента, и приравнявая их M_1 и M_2 , найдем:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = C \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right) \\ M_2 &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = C \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1} \right) \end{aligned} \right\} (297).$$

Ф-лы эти дают возможность по известным величинам M_1 и M_2 найти соответствующие значения радиусов кривизны R_1 и R_2 . Легко видеть, что R_1 и R_2 являются, в данном случае, главными радиусами кривизны искривленной поверхности пластинки, так как удлинения (a) представляют собой наибольшее и наименьшее удлинения выделенного элементарного слоя. Удлинение этого слоя в каком-либо направлении, наклонном к осям X и Y , будет иметь некоторое промежуточное значение и может быть представлено в таком виде:

$$\frac{z}{\rho} = e_x \cos^2 \theta + e_y \sin^2 \theta = \frac{z}{R_1} \cos^2 \theta + \frac{z}{R_2} \sin^2 \theta,$$

где через θ обозначен угол, составляемый выбранным направлением с осью X и через ρ — радиус кривизны, соответствующий этому направлению. Зависимость между радиусами кривизны напишется так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}.$$

Пользуясь выражением для моментов (ф-ла 297) и полагая $z = \frac{h}{2}$, мы из ф-л для напряжений (b) найдем:

$$(p_x)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2} \text{ и } (p_y)_{\max} = \frac{6M_2}{h^2}.$$

Без затруднения можно составить также выражение для потенциальной энергии, накапливаемой при изгибе пластинки в выделенном элементе. Грани элемента остаются при изгибе плоскими и поворачиваются на углы соответ-

ственно равные: $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$. При этом моменты M_1 и M_2 , постепенно возрастающие от нуля до конечного своего значения, совершат работу:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) = \frac{C}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} \right]. \quad (298).$$

Это и будет искомое значение потенциальной энергии, отнесенное к единице поверхности изгибаемой пластинки. Мы до сих пор ограничивались рассмотрением одного элемента пластинки, но в таких же условиях будет и всякий другой элемент, если только по краям прямоугольной пластинки равномерно распределить изгибающие моменты M_1 (по сторонам, параллельным оси Y) и M_2 (по сторонам, параллельным оси X).

В частном случае, когда главные радиусы кривизны равны между собой и равны R , выражения (297) дают нам:

$$M_1 = M_2 = M = \frac{C(1 + \sigma)}{R} \quad (299).$$

Так как при этом пластинка гнется по шаровой поверхности, то распределение напряжений по всякому нормальному сечению пластинки будет одно и то же. На основании этого можно сделать и обратное заключение: при всякой форме контура пластинка изогнется по поверхности шара, если по гравям, соответствующим контуру, приложены только нормальные напряжения, приводящиеся, на протяжении контура ds , к моменту Mds . Радиус шаровой поверхности будет равен:

$$R = \frac{C(1 + \sigma)}{M}.$$

§ 147. Температурные напряжения в пластинках.

Полученным выше результатом можно воспользоваться для решения интересной задачи о температурных напряжениях в пластинках. Если пластинка разделяет две области разных температур, то мы, без больших погрешностей, можем считать, что по толщине пластинки температура падает по линейному закону. По этому же закону будут меняться и температурные удлинения, что вызовет в пластинке со свободными краями изгиб по шаровой поверхности. Если вести отсчет от температуры, соответствующей срединной плоскости, и обозначить падение температуры по толщине пластинки через t , то удлинения на поверхностях пластинки будут равны:

$$+\frac{\alpha t}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\alpha t}{2}.$$

С другой стороны, те же удлинения просто выражаются через радиус шаровой поверхности, по которой происходит изгиб, и равны

$$+\frac{h}{2R} \quad \text{и} \quad -\frac{h}{2R};$$

следовательно:

$$R = \frac{h}{\alpha t} \quad (300).$$

Если края пластинки совершенно свободны, то такое искривление не вызовет никаких напряжений. В случае заделанных краев по контуру должны возникнуть реактивные моменты, величина которых определяется крайне просто. Было показано, что равномерное распределение моментов по контуру пластинки вызовет изгиб по шаровой поверхности. Мы можем интенсивность моментов M выбрать так, чтобы вызываемая ими кривизна была равна по величине и противоположна по знаку кривизне, обусловленной неравномерным нагреванием. При действии этих моментов пластинка останется плоской и края ее не повернутся, — условие закрепления будет выполнено. Величина M , на основании ф-л (299) и (300), представится так:

$$M = \frac{C(1+\varepsilon)\alpha t}{h}.$$

Соответствующие значения max напряжений равны:

$$p_{\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6C(1+\varepsilon)\alpha t}{h^2} = \frac{E\alpha}{2(1-\varepsilon)} \quad (301).$$

Напряжения эти совершенно не зависят от толщины пластинки, но так как падение температуры t ¹⁾ обыкновенно тем больше, чем толще пластинка, то можно высказать положение, что в толстых пластинках температурные напряжения имеют более существенное значение, чем в тонких ²⁾. Все, что увеличивает проводимость стенки, увеличивает падение температуры t , а, следовательно, и величину температурных напряжений. Ф-лой (301) можно пользоваться также для определения температурных напряжений в различных оболочках: например, в стенке и днищах котла, в стенках жаровых труб и т. д., и даже в тех случаях, когда толщина стенки весьма значительна, как это имеет место, например, в кирпичной дымовой трубе. Полученная ф-ла дает результаты, не существенно отличающиеся от того, что следует из точного решения теории упругости для температурных напряжений в толстостенных цилиндрических трубках.

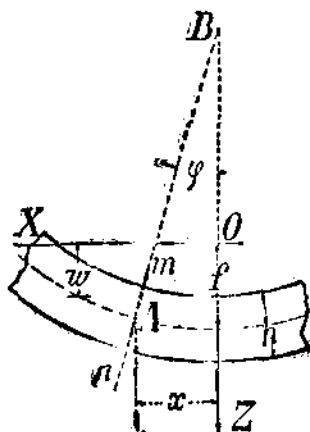
¹⁾ Под t подразумевается разность температур поверхностей пластинки. Температура соприкасающейся с пластинкой среды может значительно отличаться от температуры, соответствующей поверхности пластинки. См. работу Holborn и Dittenberg, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 2. Изменение температуры по толщине стенки парового котла исследовано с большой подробностью опытным путем. См. Roensgen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1916 г., стр. 27.

²⁾ Отметим здесь общезвестный факт, что реторты, подвергающиеся действию высоких температур, оказываются наиболее прочными, если их стенкам придана минимальная толщина.

§ 148. Дифференциальное уравнение равновесия для симметрично нагруженной круглой пластинки.

Мы ограничимся здесь рассмотрением двух частных случаев: исследуем изгиб круглой пластинки равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой, приложенной в центре пластинки.

Более общие случаи симметричного нагружения пластинки также могут быть разрешены элементарным путем, но окончательные формулы для напряжений и прогибов получаются более сложными. Поместим начало координат в центре срединной поверхности недеформированной пластинки и рассмотрим меридиональное сечение ZX (черт. 363). Согласно принятой гипотезе, прямолинейные элементы, перпендикулярные срединной плоскости, после изгиба остаются прямыми и нормальными к искривленной поверхности пластинки. Ряд таких элементов, расположенных до деформации по цилиндрической поверхности радиуса x , образует после деформации коническую поверхность с вершиной B , при чем каждый элемент mn поворачивается относительно своей средней точки A на некоторый угол φ . Кривизна срединной поверхности пластинки по меридиональному сечению, очевидно, будет равна:



Черт. 363.

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Что касается второй главной кривизны, то для какой-либо точки A соответствующий радиус кривизны R_2 равен AB , следовательно:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\varphi}{x}.$$

При исследовании изгиба пластинки будем пренебрегать влиянием касательных напряжений на деформацию пластинки. В таком случае можно воспользоваться формулами (297) и написать для интенсивности моментов M_2 по меридиональному сечению (M_2 — изгибающий момент, приходящийся на единицу длины меридионального сечения) выражение:

$$M_2 = C \left(\frac{\varphi}{x} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Для нормального сечения, перпендикулярного к плоскости меридиана, получим:

$$M_1 = C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \frac{\varphi}{x} \right).$$

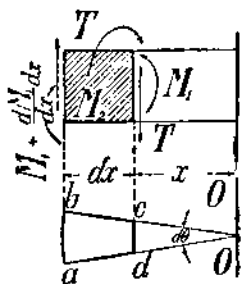
После этих предварительных замечаний перейдем к исследованию условий равновесия элемента пластинки $abcd$ (черт. 364), вырезанного двумя бесконечно

близкими меридиональными сечениями и двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями радиусов x и $x + dx$. По боковым граням элемента ad и bc , совпадающим с меридиональными сечениями, будут действовать изгибающие моменты, равные $M_2 dx$, по грани cd , соответствующей цилиндрической поверхности радиуса x , будет действовать момент:

$$M_1 x d\theta$$

и, наконец, по грани ab — момент:

$$\left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx \right) (x + dx) d\theta.$$



Черт. 364.

Составим момент всех этих сил относительно оси OO перпендикулярной к биссектору угла $d\theta$. Принимая во внимание направление стрелок, указанное на черт. 364,

и отбрасывая малые величины высшего порядка, получим для искомого момента выражение ¹⁾:

$$\begin{aligned} & \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx \right) (x + dx) d\theta - M_1 x d\theta - M_2 dx d\theta = \\ & = \left(M_1 + x \frac{\partial M_1}{\partial x} - M_2 \right) dx d\theta \end{aligned} \quad (a).$$

Перейдем теперь к определению касательных напряжений, действующих на выделенный элемент. В силу симметричности деформации пластинки заключаем, что по граням ad и bc , совпадающим с меридиональными сечениями, никаких касательных напряжений не будет. По граням ab и cd будут действовать в вертикальном направлении касательные напряжения. Сумма их найдется из следующих соображений. Возьмем сечение пластинки цилиндрической поверхностью радиуса x и обозначим через T сумму касательных усилий, отнесенную к единице длины сечения цилиндра с срединной поверхностью пластинки. Тогда все касательные усилия дадут вертикальную силу, равную $T \cdot 2\pi x$. Сила эта должна быть, очевидно, равна по величине и противоположна по знаку вертикальной нагрузке, лежащей на пластинке внутри круга радиуса x . При одновременном действии равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и сосредоточенной в центре силы P , получим для определения T ур-ие:

$$T \cdot 2\pi x = q\pi x^2 + P, \quad \text{откуда:} \quad T = \frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}.$$

Касательные усилия, приложенные к грани cd выделенного элемента, приводятся к равнодействующей:

$$T x d\theta = x \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right) d\theta.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, найдем, что момент касательных усилий,

¹⁾ Моментом нагрузки, приходящейся на элемент, пренебрегаем.

действующих по граням ab и cd выделенного элемента относительно оси, проходящей через центр элемента и параллельной OO , равняется:

$$Tx \, d\theta \, dx = x \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right) d\theta \, dx \quad (b).$$

Для равновесия элемента необходимо, чтобы моменты (a) и (b) были равны по величине и противоположны по знаку, следовательно:

$$M_1 + x \frac{\partial M_1}{\partial x} - M_2 + x \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right) = 0. \quad (c).$$

Вставляя вместо M_1 и M_2 их выражения через φ , получим такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{qx}{2C} - \frac{P}{2\pi Cx}.$$

Уравнение это может быть представлено в более удобном виде, если принять во внимание, что:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varphi}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{x} \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi) \right],$$

следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi) \right] = -\frac{qx}{2C} - \frac{P}{2\pi Cx}.$$

Первое интегрирование дает нам:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi) = -\frac{qx^2}{4C} - \frac{P}{2\pi C} \ln x + C_1,$$

Умножив обе части на x и выполняя второе интегрирование, получим:

$$x\varphi = -\frac{qx^4}{16C} - \frac{P}{2\pi C} \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

откуда:

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16C} - \frac{Px}{8\pi C} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1}{2} x + \frac{C_2}{x}. \quad (302).$$

Чтобы получить выражение для прогибов пластинки, примем во внимание, что φ есть угол, составляемый касательной к меридиану с осью X -ов, следовательно:

$$\varphi = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{qx^3}{16C} + \frac{Px}{8\pi C} (2 \ln x - 1) - \frac{C_1}{2} x - \frac{C_2}{x},$$

откуда:

$$w = \frac{qx^4}{64C} + \frac{Px^2}{8\pi C} (\ln x - 1) - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln x + C_3. \quad (303).$$

Произвольные постоянные, входящие в выражения (302) и (303), должны быть определены в каждом частном случае из условий на контуре пластинки.

§ 149. Изгиб круглой пластинки равномерно распределенной нагрузкой.

Наиболее просто решается задача в том случае, когда края пластинки заделаны и при изгибе не могут поворачиваться. При этом условии:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = r,$$

где r — радиус контура пластинки. Кроме того, из условий симметрии имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 получаем два следующие уравнения (величина P в ф-лах предыдущего параграфа должна быть положена равной нулю):

$$\left[\frac{qx^3}{16C} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right]_{x=r} = 0; \quad \left[\frac{qx^3}{16C} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right]_{x=0} = 0,$$

откуда:

$$C_1 = \frac{qr^2}{8C} \text{ и } C_2 = 0.$$

Вставляя это в выражение для φ , получим:

$$\varphi = \frac{qx}{16C} (r^2 - x^2) \quad (304).$$

Интенсивность изгибающих моментов M_1 и M_2 будет:

$$\begin{aligned} M_1 &= C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \frac{\varphi}{x} \right) = \frac{q}{16} \left[r^2 (1 + \sigma) - x^2 (3 + \sigma) \right] \\ M_2 &= C \left(\frac{\varphi}{x} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{q}{16} \left[r^2 (1 + \sigma) - x^2 (1 + 3\sigma) \right] \end{aligned} \quad (a).$$

Напряжения p_x и p_y для какой-либо точки в расстоянии z от срединной поверхности представляются ф-лами:

$$p_x = \frac{12M_1 z}{h^3}; \quad p_y = \frac{12M_2 z}{h^3}.$$

Напряжения p_x достигают наибольшего значения на заделанном контуре пластинки, где $M_1 = -\frac{qr^2}{8}$:

$$(p_x)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2}.$$

Напряжение p_y для той же точки будет равно $\frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2} \sigma$.

В центре пластинки:

$$M_1 = M_2 = \frac{q}{16} r^2 (1 + \sigma),$$

и напряжения, соответствующие центру нижней поверхности пластинки, будут:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{3}{8} \frac{qr^2}{h^2} (1 + \sigma).$$

При расчетах пластинок будем исходить из третьей теории прочности. Так как p_x и p_y одного знака, и третье главное напряжение p_z , действующее по площадкам нормальным к оси Z -ов, мы принимаем равным нулю¹⁾, то первая и третья теории прочности в данном случае совпадают.

Наиболее опасными являются точки у заделанного контура пластинки, и расчетная ф-ла напишется так:

$$(\rho_x)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2} \leq R \quad (305),$$

где R — допускаемое напряжение.

Если бы мы руководствовались второй теорией прочности, то расчетная ф-ла получила бы такой вид:

$$\rho_x - \sigma \rho_y = \frac{3}{4} \frac{qr^2}{h^2} (1 - \sigma^2) \leq R.$$

Определим теперь вид изогнутой поверхности пластинки. На основании общего выражения (303) будем иметь:

$$w = \frac{qx^4}{64C} - \frac{qr^2x^2}{32C} + C_3.$$

Принимая во внимание, что на контуре прогиб пластинки равен нулю, найдем:

$$C_3 = \frac{qr^4}{64C},$$

следовательно:

$$w = \frac{qx^4}{64C} - \frac{qr^2x^2}{32C} + \frac{qr^4}{64C} = \frac{q}{64C} (r^2 - x^2)^2.$$

Наибольший прогиб соответствует центру пластинки, он равен:

$$f = \frac{qr^4}{64C} \quad (306).$$

Чтобы получить главнейшие ф-лы для изгиба круглой пластинки с опертыми краями, применим принцип сложения действия сил, которым мы часто пользовались при исследовании изгиба стержней. Только-что рассмотренный случай изгиба пластинки с заделанными краями можно представить себе, как результат совместного действия сплошной нагрузки и опорных моментов интенсивности: $-\frac{qr^2}{8}$. Если к этим силам присоединить равномерно распределенные по контуру изгибающие моменты интенсивности:

$$M = + \frac{qr^2}{8},$$

¹⁾ Интенсивность давлений сплошной нагрузки, лежащей на пластинке, обыкновенно весьма мала по сравнению с напряжениями от изгиба.

то мы, очевидно, придем к изгибу равномерно распределенной нагрузкой пластинки с опертыми краями. Добавленные моменты изогнут пластинку по шаровой поверхности и вызовут в каждом нормальном сечении изгибающие моменты интенсивности: $+\frac{qr^2}{8}$. Присоединяя эти моменты к выражениям (а), найдем, что в случае опертых краев:

$$M_1 = \frac{q}{16} [r^2(3 + \sigma) - x^2(3 + \sigma)]; \quad M_2 = \frac{q}{16} [r^2(3 + \sigma) - x^2(1 + 3\sigma)].$$

Наибольшей интенсивности достигают изгибающие моменты в центре пластинки, где:

$$M_1 = M_2 = \frac{3 + \sigma}{16} qr^2.$$

Соответствующие значения наибольших напряжений будут:

$$(p_x)_{\max} = (p_y)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2} = \frac{3(3 + \sigma)}{8} \frac{qr^2}{h^2}.$$

Расчетная ф-ла на основании первой и третьей теории прочности напишется так:

$$\frac{3(3 + \sigma)}{8} \frac{qr^2}{h^2} \leq R,$$

или, вставляя вместо σ величину 0,3, получим:

$$1,24 \frac{qr^2}{h^2} \leq R \quad (307).$$

Исходя из второй теории и полагая в основание расчетов величину наибольших удлинений, мы получили бы расчетную ф-лу такого вида.

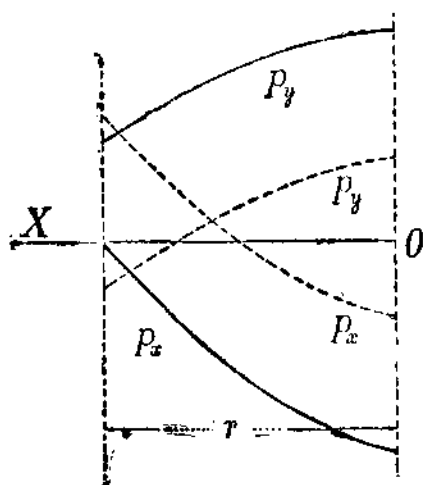
$$p_x - \sigma p_y = \frac{3(3 + \sigma)(1 - \sigma)}{8} \frac{qr^2}{h^2} \leq R.$$

При $\sigma = 0,3$ она получает вид:

$$0,87 \frac{qr^2}{h^2} \leq R.$$

Для сравнения напряжений $(p_x)_{\max}$ и $(p_y)_{\max}$ при опертых и заделанных краях приводим диаграмму (черт. 365). Сплошными линиями показано изменение напряжений в зависимости от x , в случае пластинки с опертыми краями. Пунктирные линии дают изменения напряжений при заделанных краях.

Чтобы получить прогиб в центре пластинки, нужно к ранее полученному выражению (306) присоединить прогиб, вызываемый приложенными по контуру изгиба-



Черт. 365.

ющими моментами M . Эти моменты изгибают пластинку по шаровой поверхности радиуса:

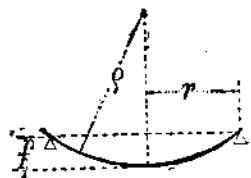
$$= \frac{C(1+\sigma)}{M} = \frac{8C(1+\sigma)}{qr^2}$$

(см. ф-лу 299), и вызывают дополнительный прогиб f_1 , величина которого определится из черт. 366. Принимая во внимание, что f_1 мало по сравнению с r , находим:

$$2\rho f_1 = r^2.$$

Вставляя вместо ρ вышенаписанное значение его, получим:

$$f_1 = \frac{qr^4}{16C(1+\sigma)}.$$



Черт. 366.

Полный прогиб в центре пластинки с опертыми краями определится из ф-лы:

$$f = \frac{qr^4}{64C} + \frac{qr^4}{16C(1+\sigma)} = \frac{qr^4}{64C} \frac{5+\sigma}{1+\sigma} \quad (308).$$

Он, примерно, вчетверо больше прогиба пластинки с заделанными краями.

§ 150. Изгиб круглой пластинки силой, приложенной в центре ¹⁾.

Общее выражение для φ напишется в этом случае так (ф-ла 302):

$$\varphi = -\frac{Px}{8\pi C} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}.$$

Для определения произвольных постоянных, в случае заделанных краев, имеем два условия:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{Px}{8\pi C} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=0} &= 0, \\ \left[-\frac{Px}{8\pi C} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=r} &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\left[x \ln x \right]_{x=0} = \left[\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right]_{x=0} = 0,$$

получим из первого ур-ния:

$$C_2 = 0.$$

Второе ур-не дает нам:

$$C_1 = \frac{P}{4\pi C} (2 \ln r - 1).$$

¹⁾ Изгиб круглой пластинки силой, приложенной не в центре, рассмотрен Клебшем; см. Théorie de l'élasticité des corps solides, перев. S. Venant'a, стр. 774.

Приближенный метод решения той же задачи принадлежит А. Фёррлю; см. Sitzungsber. d. Math. Phys. Klasse 1. Akad. zu München, 1912 г. Heft. II.

следовательно:

$$\varphi = \frac{Px}{4\pi C} \ln \frac{r}{x}.$$

Интенсивность изгибающих моментов M_1 и M_2 определится ф-лами:

$$\begin{aligned} M_1 &= C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \frac{\varphi}{x} \right) = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \sigma) \ln \frac{r}{x} - 1 \right] \\ M_2 &= C \left(\frac{\varphi}{x} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \sigma) \ln \frac{r}{x} - \sigma \right] \end{aligned} \quad (a).$$

На контуре эти моменты приобретают значения:

$$M_1 = -\frac{P}{4\pi} \quad \text{и} \quad M_2 = -\frac{\sigma P}{4\pi}.$$

Соответствующие значения наибольших напряжений будут:

$$(p_x)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2} \quad \text{и} \quad (p_y)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{\sigma P}{\pi h^2} \quad (309).$$

Эти величины совершенно не зависят от радиуса пластинки. Для сравнения этого результата с ф-лой (305) перепишем эту последнюю в таком виде:

$$\frac{3}{4\pi} \frac{Q}{h^2} \leq R,$$

где Q — вся нагрузка, лежащая на пластинке. Нагружая пластинку, вместо равномерной нагрузки, сосредоточенной силой той же величины, мы вдвое увеличиваем напряжения по контуру. Что касается напряжений в точках, близких к центру пластинки, то, как легко видеть из ф-л (а), величины их возрастают с уменьшением x . При $x=0$ величины M_1 и M_2 , а также и соответствующие им напряжения обращаются в бесконечность. Здесь ф-лы, полученные на основании ряда допущений, не приложимы, и существенное значение приобретают местные напряжения, распределение которых не может быть исследовано элементарным путем ¹⁾.

Определим теперь вид искривленной поверхности пластинки. На основании общего выражения для прогиба (ф-ла 303) имеем:

$$w = \frac{Px^2}{8\pi C} \left(\ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \right) + C_3.$$

Произвольная постоянная величина C_3 определится из того условия, что на контуре прогиб равен нулю, следовательно:

$$C_3 = - \left[\frac{Px^2}{8\pi C} \left(\ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \right) \right]_{x=r} = \frac{Pr^2}{16\pi C}$$

и

$$w = \frac{Px^2}{8\pi C} \ln \frac{x}{r} + \frac{P}{16\pi C} (r^2 - x^2).$$

¹⁾ Приближенное решение этого вопроса см. Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. 1913 г., стр. 54.

По середине пластинки, т.е. при $x=0$, первый член этой ф-лы обращается в нуль, и мы получим для наибольшего прогиба выражение (при $\sigma=0,3$):

$$f = \frac{Pr^2}{16\pi C} = 0,22 \frac{Pr^2}{Eh^3} \quad (310).$$

На основании сравнения этого результата с ф-лой (306) заключаем, что при действии сосредоточенной силы, приложенной в центре пластинки, максимальный прогиб в четыре раза больше того, который получается в случае равномерно распределенной нагрузки той же величины.

В рассмотренном случае изгиба пластинки мы, кроме сосредоточенной силы P , имеем еще опорные моменты интенсивности $-\frac{P}{4\pi}$. Чтобы перейти к пластинке с опертными краями, нужно, очевидно, к этим силам присоединить равномерно распределенные по контуру моменты интенсивности $+\frac{P}{4\pi}$. Моменты эти вызовут добавочный изгиб пластинки по шаровой поверхности, радиус которой равен:

$$\rho = \frac{C(1+\sigma)}{M} \approx \frac{4\pi C(1+\sigma)}{P}.$$

Соответствующий дополнительный прогиб определится из ф-лы:

$$f = \frac{r^2}{2\rho} = \frac{Pr^2}{8\pi C(1+\sigma)}.$$

Присоединяя это к результату (310), найдем прогиб круглой пластинки с опертными краями в таком виде:

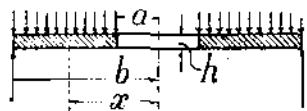
$$f = \frac{Pr^2}{16\pi C} \frac{3+\sigma}{1+\sigma} = 0,55 \frac{Pr^2}{Eh^3} \quad (311).$$

Что касается напряжений, то нужные для определения их значения M_1 и M_2 получим, прибавляя к выражениям (а) величину $\frac{P}{4\pi}$.

§ 151. Изгиб круглой пластинки с отверстием в центре.

При симметричном расположении нагрузки задача эта может быть решена тем же элементарным путем, как и в предыдущих случаях. Если на пластинке лежит равномерно распределенная нагрузка (черт. 367), то касательная сила T , приходящаяся на единицу длины сечения пластинки цилиндрической поверхностью радиуса x , определится из ур-ия:

$$T \cdot 2\pi x = \pi q(x^2 - a^2), \text{ откуда: } T = \frac{qx}{2} - \frac{qa^2}{2x}.$$



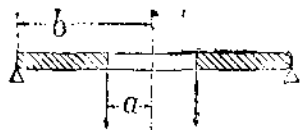
Черт. 367.

Вставляя это выражение в общее ур-ие (с) (§ 148), вместо величины $\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}$, найдем после интегрирования:

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16C} + \frac{qa^2x^2}{8C}(2\ln x - 1) + \frac{C_1x}{2} + \frac{C_2}{x}$$

$$w = \frac{qx^4}{16C} - \frac{qa^2x^2}{8C}(\ln x - 1) - \frac{C_1x^3}{4} - C_2\ln x + C_3.$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 и C_3 находятся в каждом частном случае из условий на внутреннем и наружном контуре.



Черт. 368.

Если на пластинку действуют вертикальные силы, распределенные равномерно по внутреннему контуру (черт. 368), дающие в сумме силу P , то ур-ие для искривленной поверхности будет то же, что и в случае сплошной пластинки, нагруженной силой P в центре (§ 150).

Произвольные постоянные могут быть найдены из условий на внутреннем и наружном контуре. Выбирая соответствующим образом эти условия, можно получить ф-лы, нужные для расчета крышек кольцевых каналов, поршней паровых машин и т. д. ¹⁾

§ 152. Пределы применимости выведенных формул.

Изложенная теория изгиба круглых пластинок построена на ряде положений, принятых нами без всякого доказательства, поэтому экспериментальная проверка полученных результатов представляет большой интерес. Ряд исследований, сделанных в этом направлении ²⁾, показал, что ф-лы, полученные для прогиба пластинок, дают вполне удовлетворительные результаты, пока стрелка прогиба f мала по сравнению с толщиной пластинки ($f < 0,2h$). При больших искривлениях замечаются значительные отклонения от линейной зависимости между нагрузками и соответствующими прогибами. Прогибы растут медленнее нагрузок, и пластинка оказывается более жесткой, чем то следует из теоретических ф-л.

Рассмотрим, где лежит причина несовпадения теоретических ф-л с опытом при больших прогибах. Для этого возьмем простейший пример — изгиб пластинки по шаровой поверхности. Элементарная теория изгиба пластинок кладет в основание выводов допущение, что срединная поверхность не деформируется и играет роль нейтрального слоя. Удлинения отдельных элементов пластинки, параллельных срединной поверхности, пропорциональны расстоянию от этой поверхности и достигают наибольшего значения на поверхности пластинки, где их величина равна $\frac{h}{2\rho}$ (ρ — радиус кривизны соответствующей шаровой поверхности). Легко показать, что искривление пластинки в шаровую

¹⁾ Целый ряд примеров этого рода разобран в работах М. Ensslin'a, Studien über die Beanspruchung und Formänderung kreisförmiger Platten, Dingers Polyt. Journal, 1903 и 1904 гг.

Расчет поршней и литература по этому предмету имеются в работе С. Pfeiderer, Die Berechnung der Scheiberkolben, Mitteil. u. Forschungsarb., 1911 г., Nr. 97. По вопросу о расчете фланцев см. Лукьян, К теории и расчету фланцевых соединений, 1911 г.

²⁾ С. Bach, Elastizität und Festigkeit, стр. 583, V изд.

A. Föppl, Mitteilung. Mech.-Techn. Laborat., München, 1900 г.

М. Ensslin, Dingers Polyt. Journal, 1913 г., стр. 705.

Steinthal, Engineering, 1911 г., стр. 677.

Crawford, Roy. Soc. Edinburgh, 1912 г.

поверхность невозможно без деформаций в срединной плоскости. Деформации эти малы, и ими можно пренебречь при малых прогибах. При больших искривлениях они представляют собой величину того же порядка, что и удлинение $\frac{h}{2\rho}$.

В самом деле, пусть AOB (черт. 369) представляет меридиональное сечение срединной поверхности пластинки, изогнутой по шаровой поверхности радиуса ρ . Если в срединной поверхности не происходит при изгибе деформаций, то длина дуги OB должна равняться первоначальному радиусу пластинки

$$OB' = r = \rho\theta.$$

Предположив отсутствие деформаций срединной поверхности в радиальном направлении, мы, как следствие, получим деформацию той же поверхности в направлении перпендикулярном к радиальному. Возьмем, например, точки A и B . До деформации они лежали на окружности радиуса r , после деформации радиус окружности станет равным

$$CB = \rho \sin \theta.$$

Следовательно, относительное сжатие срединной поверхности по окружности, соответствующей контуру пластинки, равно:

$$e = \frac{\rho\theta - \rho \sin \theta}{\rho\theta} = \frac{\theta^2}{6}.$$

Принимая во внимание, что

$$f = \rho(1 - \cos \theta) = \frac{\rho\theta^2}{2},$$

можем ф-лу для e представить в таком виде:

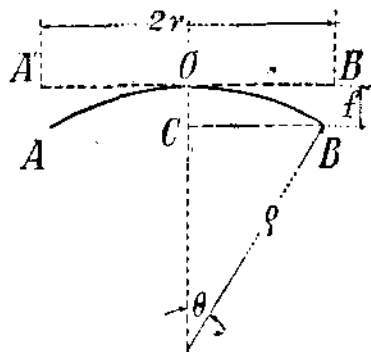
$$e = \frac{f}{3\rho}.$$

Найденная деформация в срединной поверхности будет мала по сравнению с $\frac{h}{2\rho}$ лишь в том случае, когда f мало по сравнению с h . Если f и h величины одного порядка, то деформации срединной поверхности, которыми в элементарной теории изгиба пренебрегают, будут величинами того же порядка, что и удлинения $\frac{h}{2\rho}$.

Заключение это, относящееся к искривлению пластинки по шаровой поверхности, может быть распространено и на другие случаи изгиба. Исключение составляет искривление пластинки по развортываемой поверхности, когда деформации в срединной поверхности могут быть равными нулю.

Отметим еще одно обстоятельство, которое должно быть принято во внимание при согласовании опытных данных с результатами теоретического расчета. При выводах мы предполагали, что по контуру пластинки не приложено никаких усилий, препятствующих сближению краев пластинки при изгибе. В действительности же закрепление по контуру,

1) Задача при этом даже в простейших случаях приводится к интегрированию не линейных ур-ий и может быть решена лишь приближенным способом. См. нашу работу: К вопросу о больших прогибах, Сборник инст. инж. пут. сообщ., 1915 г.



Черт. 369.

обыкновенно, таково, что сближение краев невозможно. Вследствие этого, изгиб пластинки сопровождается появлением растягивающих усилий, действующих в срединной плоскости. Величина этих усилий и их влияние на прогиб могут быть определены тем же приближенным методом, которым мы пользовались при исследовании изгиба пластинки по цилиндрической поверхности. Мы на этой задаче здесь не останавливаемся, так как она не имеет большого практического значения. При малых прогибах роль растягивающих усилий ничтожна, а при больших искривлениях — не приложимы ф-лы, полученные на основании элементарной теории.

§ 153. Потенциальная энергия изогнутой пластинки.

Нами было уже выведено выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки в зависимости от главных радиусов кривизны (ф-ла 298). Для дальнейших приложений является более удобным пользоваться выражением потенциальной энергии в зависимости от прогиба пластинки w . Для составления этого выражения поступим так. Вырежем из пластинки элемент нормальными сечениями, параллельными плоскостям ZX и ZY (черт. 370, фиг. а). Соответствующие значения кривизны

будут:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

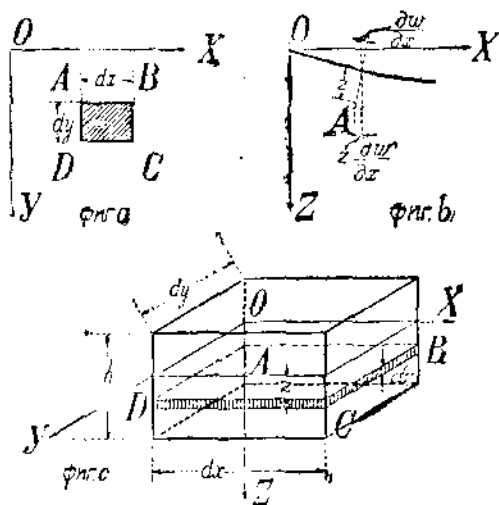
Если бы эти сечения были главными нормальными сечениями, то энергия выделенного элемента, на основании ф-лы (298), представилась бы в таком виде:

$$dV_1 = \frac{C}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (a).$$

В общем случае выражение для энергии элемента будет несколько сложнее, так как каждый бесконечно тонкий горизонтальный слой выделенного элемента, распо-

ложенный в расстоянии z от срединной плоскости (на фиг. с боковые грани рассматриваемого слоя заштрихованы), кроме растяжений в направлении осей X и Y , принятых во внимание при выводе ф-лы (298), будет испытывать сдвиг.

Величину этого сдвига и соответствующее значение потенциальной энергии можно найти на основании геометрических соображений. Рассмотрим перемещения точек A , B , C и D — вершин бесконечно тонкого слоя по направлениям осей X и Y при изгибе пластинки. Перемещения эти обусловлены пово-



Черт. 370.

ротом вертикальных ребер выделенного элемента. Из фиг. 6 легко видеть, что точка A совершает в направлении оси X -ов перемещение:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Точно таким же образом можно показать, что перемещение точки A в направлении оси Y -ов равно:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Если мы перейдем к точке B , отстоящей от A на бесконечно малую величину dx , то для нее перемещение в направлении оси Y -ов представится ф-лой:

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx = -z \frac{\partial w}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx.$$

Точно также для точки D перемещение в направлении оси X -ов представится ф-лой:

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -z \frac{\partial w}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy.$$

Для большей ясности мы изобразили в плане (черт. 371) вид элементарного слоя $ABCD$ до и после деформации ¹⁾.

Сдвиг, который претерпевает рассматриваемый слой, равен:

$$\alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Соответствующее сдвигающее напряжение будет:

$$-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} G,$$

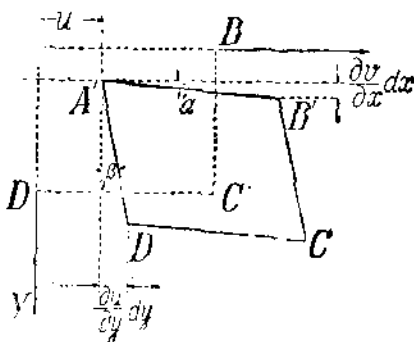
и потенциальная энергия сдвига для бесконечно тонкого слоя напишется так:

$$2z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 G dx dy dz \quad (b).$$

Меняя z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$ и суммируя элементарные выражения вида (b), получим энергию сдвига dV_2 , накапливаемую в выделенном элементе пластинки:

$$\begin{aligned} dV_2 &= 2G \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 z^2 dx dy dz = 2G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \\ &= G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 (1 - \sigma) dx dy \quad (c). \end{aligned}$$

¹⁾ На черт. 371 представлен случай, когда u и v положительны.



Черт. 371.

Складывая (а) и (с), получим искомое полное выражение для потенциальной энергии элемента пластинки в таком виде:

$$\begin{aligned} dV = dV_1 + dV_2 &= \frac{C}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 (1 - \sigma) \right\} dx dy = \\ &= \frac{C}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (312). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия всей пластинки получится путем суммирования элементарных выражений вида ф-лы (312). Суммирование должно быть распространено на всю поверхность пластинки.

§ 154. Приближенный метод исследования изгиба пластинки.

При исследовании изгиба пластинок может быть применен тот же приближенный метод, которым мы пользовались при определении прогиба стержней (глава XV).

На основании условий на контуре мы задаемся подходящей формой изгиба пластинки:

$$w = \varphi(x, y) \quad (a),$$

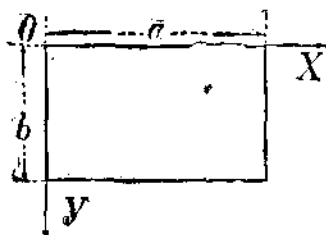
где $\varphi(x, y)$ включает один или несколько произвольных параметров. Параметры эти играют роль обобщенных координат, и мы можем подобрать их величины так, чтобы принятая нами форма изгиба (а) по возможности ближе подходила к действительной форме. Определение параметров идет таким же путем, как и при исследовании изгиба стержней. Мы составляем выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки и производные от этого выражения по обобщенным координатам (параметрам) приравняем соответствующим обобщенным силам. Таким путем составим столько ур-ий, сколько имеется произвольных параметров.

В качестве примера рассмотрим случай прямоугольной пластинки, при чем ограничимся первым приближением, — возьмем выражение для изогнутой поверхности пластинки с одним произвольным параметром. Пусть прямоугольная пластинка, контур которой близок к квадрату (черт. 372), изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . В случае опертых краев мы удо-

ветворим условиям на контуре, если предположим, что сечения искривленной пластинки плоскостями, параллельными ZX и $Z'Z'$, представляют собой синусоиды.

Тогда ур-ие поверхности может быть написано так:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (b),$$



Черт. 372.

Легко показать, что на контуре пластинки:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

следовательно, обращаются в нуль и соответствующие моменты M_1 и M_2 , как то требуется по условиям для опертых краев. При

$$x = \frac{a}{2} \text{ и } y = \frac{b}{2},$$

т.е. в центре пластинки

$$w = f.$$

Составим теперь выражение для потенциальной энергии пластинки. На основании ф-лы (321) имеем:

$$V = \frac{C}{2} \int_0^a dx \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dy \quad (313).$$

Вставляя вместо w его значение (b) и принимая во внимание, что:

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4},$$

получим после простых преобразований:

$$V = \frac{\pi^4}{8} C f^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (314).$$

Задавшись выражением для прогиба (b), мы тем самым обратили пластинку в систему с одной степенью свободы. Все обстоятельства изгиба определяются величиной прогиба f . Эту величину мы примем за обобщенную координату. Найдем соответствующее значение обобщенной силы. Если координате f дать бесконечно малое приращение δf , то при этом нагрузка $q dx dy$, приходящаяся на элемент поверхности пластинки, совершит работу:

$$q dx dy \delta f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Вся работа, совершаемая при этом нагрузкой, лежащей на балке, равняется:

$$\int_0^a dx \int_0^b q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dy = \delta f \frac{4qab}{\pi^2};$$

следовательно, искомая обобщенная сила равна $\frac{4qab}{\pi^2}$.

Величину прогиба f найдем из ур-ня

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{\pi^4}{4} C f ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{4qab}{\pi^2}.$$

Полагая $a > b$ и вводя обозначение $b:a = \mu$, найдем:

$$f = \frac{16qb^4}{C\pi^6(1+\mu^2)^2} \quad (315).$$

О степени точности этой приближенной ф-лы можно судить по результатам, помещенным в нижеследующей таблице ¹⁾.

Для квадратной пластинки погрешность приближенной ф-лы, примерно 2,5% (точным значением прогиба мы здесь назвали тот результат, который получается путем интегрирования дифференциального ур-ния равновесия для пластинки).

ТАБЛИЦА

μ	Точный прогиб.	Приближен. прогиб.	Точное реш. $(p_y)_{\max}$
0	$0,0130 \frac{qb^4}{C}$	—	$0,75 \frac{qb^2}{h^2}$
$\frac{1}{3}$	—	—	$0,72 \frac{qb^2}{h^2}$
$\frac{1}{2}$	$0,0101 \frac{qb^4}{C}$	$0,0106 \frac{qb^4}{C}$	$0,61 \frac{qb^2}{h^2}$
$\frac{2}{3}$	—	—	$0,48 \frac{qb^2}{h^2}$
1	$0,00406 \frac{qb^4}{C}$	$0,00416 \frac{qb^4}{C}$	$0,29 \frac{qb^2}{h^2}$

Для прямоугольника с отношением сторон $\mu = 0,5$, погрешность составляет 5%. С возрастанием длины пластинки погрешность, как и нужно было ожидать, увеличивается, форма поверхности в средней части пластинки приближается к цилиндрической, и для расчетов следует пользоваться ф-лами, полученными раньше (§ 145).

Наибольшие напряжения, в случае пластинки с опертыми краями, получаются в центре по площадкам, нормальным к коротким сторонам пластинки. Из предыдущей таблицы видно, что с увеличением

длины пластинки напряжения быстро приближаются к значению, соответствующему бесконечно длинной пластинке ($\mu = 0$). Если края пластинки при изгибе не могут сменаться, то появляются растягивающие усилия, действующие в срединной плоскости. Для длинных пластинок усилия эти определяются тем же способом, как и при изгибе по цилиндрической поверхности. В случае пластинок, контур которых близок к квадрату, определение растягивающих усилий представляет сложную задачу ²⁾. Влияние этих усилий на изгиб пластинки при малых прогибах невелико.

Рассмотрим теперь изгиб прямоугольной пластинки с заделанными краями. Для искривленной формы пластинки нужно подобрать такое выражение, чтобы не только w , но также $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ обращались на контуре пластинки в нуль. Мы удовлетворим этим условиям, положив:

$$w = \frac{f}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (c)$$

¹⁾ Подробные таблицы для расчета прямоугольных пластинок с опертыми краями. См. Курс теор. упр., ч. II, стр. 290.

²⁾ См. нашу работу: Применение нормальных координат..., Изв. Киев. пол. инст., 1909 г.

Легко проверить, что

$$\text{при } x=0, \quad x=a, \quad y=0 \text{ и } y=b$$

прогиб w и первые производные $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ обращаются в нуль.

Вставляя выражение для прогиба (с) в ф-лу (313) и произведя необходимые преобразования, получим:

$$V = \frac{\pi^4}{8} C f^2 a b \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) \quad (316).$$

Примем f за обобщенную координату. Работа равномерно распределенной нагрузки, соответствующая приращению координаты δf , будет равна:

$$q \frac{\delta f}{4} \int_0^a dx \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dy = q \delta f \frac{ab}{4},$$

следовательно, $\frac{qab}{4}$ — есть сила, соответствующая координате f . Величина f определится из ур-ня:

$$\frac{dV}{df} = \frac{\pi^4}{4} C f a b \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) = \frac{qab}{4}.$$

Вводя прежнее обозначение $b:a = \mu$, получим:

$$f = \frac{qb^4}{C\pi^4} \frac{1}{3 + 2\mu^2 + \mu^4} \quad (317).$$

В нижеследующей таблице приведены результаты, полученные на основании этой приближенной ф-лы. Для сравнения приведены также результаты более точного исследования ¹⁾, откуда

ТАБЛИЦА.

взяты также и значения напряжений.

μ	Точный прогиб.	Приблизж. прогиб.	Точное решение $(p_y)_{\max}$
0	0,00260 $\frac{ab^4}{C}$	—	0,500 $\frac{qb^2}{h^2}$ kg/cm ²
$\frac{1}{2}$	0,00253 $\frac{qb^4}{C}$	0,00278 $\frac{qb^4}{C}$	0,497 $\frac{qb^2}{h^2}$ "
$\frac{2}{3}$	0,00213 $\frac{qb^4}{C}$	0,00229 $\frac{qb^4}{C}$	0,467 $\frac{qb^2}{h^2}$ "
$\frac{4}{5}$	—	—	0,399 $\frac{qb^2}{h^2}$ "
1	0,00126 $\frac{qb^4}{C}$	0,00128 $\frac{qb^4}{C}$	0,290 $\frac{qb^2}{h^2}$ "

¹⁾ Общая метода исследования изгиба прямоугольной пластинки с заделанными краями дана в работе W. Ritz'a, Journal f. Math, 1909 г., стр. 1.

См. также работу Б. Кояловича, Об одном ур-ни с частными производными IV порядка, 1902 г.

Некоторые численные результаты имеются в дипломной работе Д. Пистрякова, Изгиб тонкой пластинки, Изв. Киев. политех. инст., 1910 г.

Подробные таблицы для расчета прямоугольных пластинок с заделанными краями имеются в Курсе теор. упр., ч. II, стр. 304.

См. также И. Г. Бубнова, Строительная механика корабля, т. II.

См. также H. Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, München. A. Nádai, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1914 г., стр. 487.

В случае пластинок, контур которых близок к квадрату, приближенная ф-ла дает для прогиба вполне удовлетворительные результаты. С увеличением длины пластинки погрешность возрастает. Начиная с $\mu = 0,5$, можно вести расчет пластинки по ф-лам, полученным для изгиба по цилиндрической поверхности ($\mu = 0$).

Наибольшие напряжения получаются в середине длинных сторон пластинки

$$(y = 0 \text{ или } b \text{ и } x = \frac{a}{2}).$$

Как видно из вышеприведенной таблицы, уже при $\mu = \frac{2}{3}$ максимальные напряжения близки к тому, что получается для бесконечно длинной прямоугольной пластинки. Влияние растягивающих усилий, появляющихся при изгибе пластинок с неповорачивающимися и не смещающимися краями, на практике всегда очень мало, и им можно пренебрегать, если только напряжения у заделанного контура не переходят предела упругости.

§ 155. Расчет тонких оболочек.

Расчет тонких оболочек, несмотря на всю его практическую важность, является до настоящего времени весьма мало разработанным, так как полное решение этой задачи представляет много трудностей чисто математического характера. Для получения приближенных решений приходится делать различные допущения в зависимости от размеров и условий работы рассчитываемых частей. Например, часто пренебрегают изгибом оболочки и принимают во внимание только растягивающие или сжимающие напряжения, которые предполагают равномерно распределенными по толщине стенки. Этим приемом мы уже пользовались при расчете тонкостенных сосудов, испытывающих давление газов или жидкости. В некоторых случаях, наоборот, напряжения от изгиба имеют преобладающее значение, и по сравнению с ними можно пренебречь растяжением или сжатием срединной поверхности оболочки¹⁾. Таким путем получен ряд решений, имеющих большое значение в акустике — исследованы вопросы о колебаниях цилиндрических, конических и шаровых оболочек²⁾.

В некоторых простейших случаях возможно получить полное решение, приняв во внимание и изгиб и деформации срединной поверхности. Как пример можно привести расчет цилиндрической трубки. Если нагрузка не меняется вдоль оси цилиндра, то мы можем ограничиться рассмотрением деформаций элементарного кольца, вырезанного из цилиндра двумя сечениями, перпендикулярными оси трубки и отстоящими друг от друга на расстоянии, равном еди-

¹⁾ Несколько задач этого рода рассмотрено в нашей работе: К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки, Вестник об-ва технологов, 1914 г.

²⁾ Более подробно вопросы о расчете оболочек рассмотрены в Курсе теор. упруг., ч. II, стр. 362.

нице. К расчету такого кольца могут быть применены правила, изложенные в отделе кривых брусьев. Нужно только иметь в виду, что благодаря связи выделенного кольца с соседними частями трубки, невозможно искажение поперечного сечения кольца при изгибе. Это, как мы видели (§ 144), несколько увеличивает жесткость кольца. Вместо величины

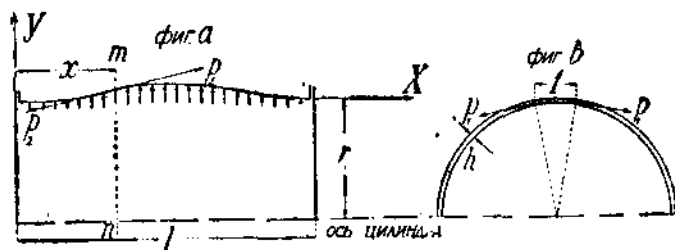
$$EJ = E \frac{1 \cdot h^3}{12} \quad (h \text{ — толщина трубки}),$$

придется ввести в расчет цилиндрическую жесткость:

$$C = \frac{E \cdot 1 \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

В случае кругового поперечного сечения трубки, можно при исследовании деформаций пользоваться общим ур-нем (275)¹⁾. У концов трубки в местах соединения ее с фланцами или с дном, условия деформации будут значительно сложнее.

Точное решение этой задачи представляет большие трудности, но в случае кругового поперечного сечения и нагрузок симметричных относительно оси трубки возможно упростить исследование и привести задачи к определению изгиба элементарной полоски, выделенной вдоль образующей цилиндра. На черт. 373 представлен продольный и поперечный разрезы цилиндра, подвергаю-



Черт. 378.

щегося равномерному внутреннему давлению q . Выделим из цилиндра продольную полоску шириной единица (на фиг. б сечение выделенной полоски заштриховано) и обозначим через y прогиб этой полоски в каком-либо поперечном сечении mn . Прогиб этот равен радиальному перемещению точек цилиндрической поверхности, лежащих в сечении mn . Относительное удлинение окружности цилиндра в сечении mn равно:

$$\epsilon_1 = \frac{y}{r}.$$

¹⁾ Ряд задач этого рода имеется в работе P. Forchheimer'a, Zeitschr. öster. Ing. u. Arch. Ver., 1914 г., стр. 133.

См. также V. Mayer, Dissertation, Über Elastizität u. Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens.

Расчет трубок эллиптического сечения см. Mayer-Mita, Zeit. d. Ver. d. Ing., 1914 г.

Соответствующее растягивающее напряжение p_1 , стремящееся разорвать цилиндр вдоль образующей, определится из ф-лы:

$$e = \frac{1}{E} (p_1 - \sigma p_2).$$

Принимая во внимание, что растягивающее напряжение:

$$p_2 = \frac{\pi r^2 q}{2\pi r h} = \frac{r q}{2h},$$

получим:

$$p_1 = E e_1 + \sigma p_2 = \frac{E y}{r} + \frac{\sigma r q}{2h}.$$

Из фиг. б видно, что напряжения p_1 дают составляющую в радиальном направлении, препятствующую прогибу выделенной элементарной полоски. Величина радиального усилия, приходящегося на единицу длины полоски, равна:

$$p_1 h \frac{1}{r} = \frac{E h y}{r^2} + \frac{\sigma q}{2} \quad (a).$$

Таким образом, выделенная полоска, изгибаемая равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , испытывает реакции со стороны соседних частей трубки.

Дифференциальное ур-е для изогнутой оси полоски напишется так:

$$C \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{E h y}{r^2} + q \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) \quad (b).$$

Здесь мы взяли цилиндрическую жесткость C , так как, благодаря связи элементарной полоски с соседними частями трубки, невозможно искажение поперечного сечения полоски.

Полученное ур-е совпадает с тем, что мы имели при исследовании изгиба балок, лежащих на упругом основании. Общий интеграл этого ур-я будет:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + \frac{q \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) r^2}{E h},$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{E h}{4 C r^2}}$$

Произвольные постоянные $C_1, \dots, C_4$ определяются из условий на концах выделенной полоски. Если днища совершенно не деформируются, то условия будут следующие:

$$y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l; \quad y' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Без особых затруднений возможно решить задачу, приняв во внимание также и деформация днищ. Произвольные постоянные в этом случае придется определять из условий неразрывной связи стенки и днищ цилиндра. Исследование изгиба продольной полоски, вырезанной из стенки цилиндра, может быть рас-

пространство на случай переменного давления q и переменной толщины стенки h^1). Задачи эти приобретают практический интерес в связи с расчетом резервуаров, подвергающихся действию гидростатического давления или давления сыпучих тел.

В заключение, отметим еще одну задачу, представляющую некоторый практический интерес в связи с расчетом мостовых настилов. Предположим, что цилиндрическая оболочка оперта на длинный прямоугольный контур (черт. 374) и изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . При расчете мы можем ограничиться рассмотрением элементарной полоски шириной 1 см, заключенной между сечениями m, n и m_1, n_1 , нормальными к образующим цилиндра. В случае опертых и не смешивающихся краев, полоску эту можно рассчитывать как двухшарнирную арку. Если первоначальная стрелка прогиба мала по сравнению с пролетом l , то для расчета оболочки можно воспользоваться приближенным приемом, изложенным в § 137. При этом во внимание, что поперечное сечение выделенной нами полоски не будет при изгибе искажаться, нам придется ввести цилиндрическую жесткость:

$$C = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)},$$

тогда величина σ^2 , представляющая отношение продольной растягивающей силы S , возникающей при изгибе полоски, к критической силе, определяется ф-лой:

$$\sigma^2 = \frac{12S^2(1 - \sigma^2)}{Eh^4\pi^2}.$$

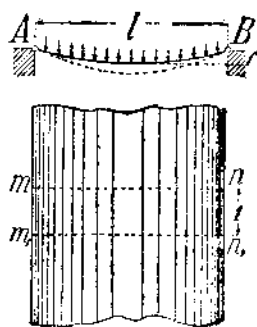
Ур-ие (I) (§ 137), полученное нами для стержня, переписывается так:

$$\frac{(f_0 - \sigma^2 b_1)^2}{(1 + \sigma^2)^2} + \frac{2b_1(f_0 - \sigma^2 b_1)}{1 + \sigma^2} = \frac{\sigma^2 h^2}{3}. \quad (318).$$

Здесь h — толщина оболочки, b_1 — начальный прогиб по середине пролета, f_0 — прогиб выделенной полоски, вычисленный как для балки с опертными концами, имеющей жесткость C . Имея эти величины, мы из написанного ур-ия определяем σ^2 , а, следовательно, и продольную силу S . Дальнейший расчет не представляет после этого никаких затруднений.

В следующей таблице приводим значения прогиба f по середине, величины напряжений p_1 от продольной растягивающей силы и величины максимальных напряжений p_2 , вычисленные для железной оболочки толщины $h = 1$ см при $l = 100$ см и $b_1 = 0, 1, 2$ и 3 см².

Из этой таблицы видно, как начальное искривление влияет на обстоятельства изгиба. Благодаря этому искривлению убывают и величина продольной растягивающей силы, и величина напряжений от изгиба. При начальном прогибе $b_1 = 3$ см — роль изгиба



Черт. 374.

¹) См. C. Rügge, Zeit. f. Math. u. Phys., 51 том, 1914 г., стр. 254.

H. Reissner, Beton u. Eisen, 7 том, 1908 г.

T. Pöschl u. K. Terzaghi, Berechnung von Reihältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden, 1913 г.

См. также Курс теории упругости, ч. II, стр. 20.

H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre, 1913 г., стр. 603.

²) Вычисление таблицы выполнено инж. К. Чалышевым, в предположении $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma = 0,3$.

Т А Б Л И Ц А.

q kg/cm ²	$b_1 = 0$ cm			$b_1 = 1$ cm			$b_1 = 2$ cm			$b_1 = 3$ cm		
	f cm	p_1 kg/cm ²	p_2 kg/cm ²	f cm	p_1 kg/cm ²	p_2 kg/cm ²	f cm	p_1 kg/cm ²	p_2 kg/cm ²	f cm	p_1 kg/cm ²	p_2 kg/cm ²
0,1	0,445	107	570	0,10	101	191	0,03	60	78	0,01	43	43
0,2	0,639	221	873	0,18	191	347	0,06	119	149	0,03	83	83
0,3	0,769	320	1094	0,25	272	482	0,09	176	218	0,04	124	124
0,4	0,870	410	1273	0,31	350	608	0,11	229	331	0,06	164	164
0,5	0,953	493	1426	0,37	421	727	0,14	288	342	0,07	205	205
0,6	1,025	570	1566	0,42	490	832	0,16	342	402	0,09	243	243
0,8	1,148	713	1801	0,51	620	1004	0,22	443	540	0,11	323	323
1,0	1,251	845	2003	0,59	739	1188	0,26	547	625	0,13	402	402
1,5	1,453	1143	2427	0,76	1030	1480	—	—	—	—	—	—
2,0	1,614	1409	2765	0,89	1270	1870	—	—	—	—	—	—

ничтожна, и мы можем найти продольную силу, рассчитывая выделенную плоскую, как гибкую нить.¹⁾

С определением напряжений в сферических оболочках приходится иметь дело при расчете куполов, сферических котельных днищ и различного рода непроницаемых переборок. В случае оболочки, опирающейся на круговой контур и нагруженной сплошной симметрично распределенной нагрузкой, мы получим приближенное решение, пренебрегая напряжениями изгиба и принимая в расчет лишь растяжение и сжатие срединной поверхности оболочки. В том случае, когда опертые края оболочки могут при деформации свободно перемещаться по направлению нормали к поверхности оболочки, получаемое таким путем приближенное решение дает результаты вполне достаточной для практики точности²⁾. Если края оболочки закреплены и не могут свободно поворачиваться или смещаться, — по контуру появляются усилия, которые могут вызвать значительные местные напряжения. Напряжения эти быстро падают по мере удаления от опорного контура³⁾, и их можно оставить без рассмотрения, если оболочка подвергается действию постоянных или случайных нагрузок.

¹⁾ Влияние кривизны, в случае прямоугольной пластинки, стороны которой одного порядка, рассмотрено в нашей заметке, см. Сборник инст. инж. пут. сообщ., 1914 г.

²⁾ См. H. Reissner, Festschrift Müller-Breslau, 1912 г.

³⁾ Эти напряжения могут быть приблизительно вычислены при помощи метода, указанного O. Blumenthal'ем. См. Intern. Congr. of. Math., Cambridge, 1912 г. и Z. f. Math. u. Phys., Bd. 62, стр. 359.

Изложение этого метода, в применении к одному частному случаю, имеется в нашей работе: Расчет сферических оболочек, Вестник об-на технологов, 1913 г.

Ряд решений, относящихся к случаям конической и сферической оболочек, имеется в работе Meissner'a, Phys. Zeitschr., 1913 г., стр. 343. Изложение этого приема см. Курс теор. упр., ч. II, стр. 405.

См. также работы Keller'a, Mitteilung. u. Forschungsarb., H. 120.

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ

**ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СОПРОТИВЛЕНИИ
МАТЕРИАЛОВ**

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ.

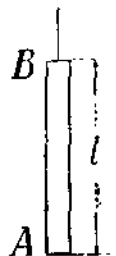
ВЛИЯНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ.

§ 156. О напряжениях в движущихся стержнях.

Современная техника и в особенности современное машиностроение ставят целый ряд задач, где вопрос о прочности не может быть удовлетворительно разрешен, если не принять во внимание обстоятельств движения рассчитываемой конструкции. При больших скоростях движения силы инерции, вибрации и удары могут играть весьма существенную роль, и их нельзя оставлять без внимания¹⁾. Однако, несмотря на всю важность вопроса, задачи динамики в сопротивлении материалов разработаны далеко не так полно, как вопросы статики, и нам в дальнейшем изложении придется ограничиться лишь несколькими простейшими примерами.

Наиболее просто вопрос о динамических напряжениях разрешается в тех случаях, когда можно пренебрегать деформациями рассчитываемых частей и считать их абсолютно твердыми. Тогда, по заданному движению машины, мы легко определяем ускорения отдельных элементов рассчитываемой конструкции и находим соответствующие значения сил инерции. Присоединяя эти силы к заданным внешним нагрузкам, мы ведем дальнейший расчет так же, как и в случае статически действующих сил.

Рассмотрим, например, влияние сил инерции на напряжения в движущихся стержнях. Если стержень движется по направлению своей оси, то силы инерции будут вызывать в нем дополнительные растягивающие или сжимающие напряжения, зависящие от величины ускорения и удельного веса материала стержня. Пусть стержень *AB* (черт. 375) подымается вверх силой, приложенной к концу *B*. При равномерном движении на каждый элемент стержня будет действовать



Черт. 375.

¹⁾ Важность задач динамики в сопротивлении материалов была подчеркнута проф. А. Sommerfeld'ом, Zeit. d. Ver. deutsch. Ing., 1902 г., стр. 390.

только сила тяжести, и если мы через q обозначим вес единицы длины стержня, то растягивающее усилие в сечении B будет равно ql .

Возьмем теперь равномерно ускоренное движение и обозначим через a величину соответствующего ускорения, тогда на каждый элемент стержня длиной dx , кроме веса его qdx , будут действовать силы инерции, имеющие в данном случае то же направление, что и сила тяжести. Для определения величины сил инерции, действующих на элемент, нужно массу элемента $q \frac{dx}{g}$ помножить на ускорение a . Растягивающее усилие в сечении B будет равно:

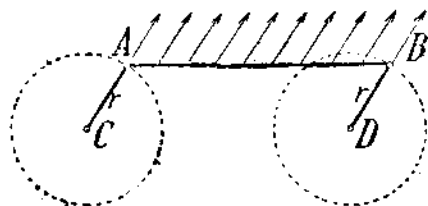
$$q \left(1 + \frac{a}{g} \right) l.$$

Если бы к нижнему концу стержня был подвешен груз Q , то для растягивающего усилия в сечении B мы получили бы выражение:

$$(ql + Q) \left\{ 1 + \frac{a}{g} \right\} \quad (319).$$

При больших значениях ускорения a растягивающие напряжения, обусловленные силами инерции, могут во много раз превосходить напряжения, вызванные статической нагрузкой. Этим пользовался Reynolds (§ 24) при устройстве своей машины для испытания металлов на усталость. Он прикреплял к нижнему концу испытуемого бруска груз Q и сообщал бруску быстрые колебательные движения по вертикальному направлению (до 2000 колебаний в минуту). Появившиеся при этом силы инерции, примерно, в шестьдесят раз превосходили вес груза Q .

Если направление движения стержня не совпадает с направлением его оси, то силы инерции будут вызывать не только растяжение и сжатие, но также и изгиб стержня. На практике бывают случаи, когда вызываемые этим изгибом напряжения достигают значительной величины, и их приходится принимать в расчет. В виде примеров приведем расчет паровозного спарника и расчет шатуна паровой машины.



Черт. 376.

При движении паровоза спарник AB (черт. 376), кроме движения общего с паровозом ¹⁾, совершает еще относительное движение, при котором отдельные точки его оси описывают окружности радиуса r . Выделим у точки A бесконечно малый элемент длины dx , соответствующая ему масса будет $q \frac{dx}{g}$.

Сила инерции для выделенного элемента есть не что иное, как центробежная сила. Величина ее равна $q \frac{dx}{g} \omega^2 r$, где ω — угловая скорость. Напра-

¹⁾ Предполагаем, что паровоз движется с постоянной скоростью.

вление же в каждый момент будет совпадать с направлением кривошипа CA . Совершенно такие же силы инерции будут приложены к каждому элементу спарника, так как все точки его оси совершают такое же движение, как и взятая нами точка A . Спарник оказывается как бы нагруженным распределенной нагрузкой интенсивности:

$$\frac{q}{g} \omega^2 r.$$

Направление действия нагрузки совпадает с направлением кривошипов.

Самый невыгодный случай будем иметь в тот момент, когда кривошипы занимают вертикальное положение. При этом условии силы инерции перпендикулярны оси спарника. Если предположить для простоты, что спарник имеет призматическую форму, то наибольший изгибающий момент, обусловленный силами инерции, будет посредине, и его величина определится ф-лой:

$$M = \frac{q \omega^2 r}{g} \frac{l^2}{8}.$$

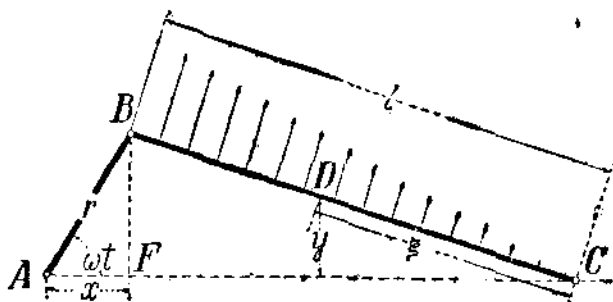
Присоединяя к этому момент от собственного веса, найдем:

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right) \quad (320).$$

Напряжения от изгиба придется суммировать с сжимающими напряжениями от продольной силы, действующей по оси спарника.

Из ф-лы (320) видно, что силы инерции должны приобретать особое значение при больших скоростях движения, и что величина $M_{\max}$ пропорциональна весу спарника. Для уменьшения этого веса в быстроходных паровозах придают спарникам двутавровое поперечное сечение — более выгодное, чем сечение прямоугольное.

При расчете шатуна (черт. 377) обыкновенно принимают горизонтальные перемещения отдельных точек его оси равными перемещениям точки F — проекции пальца



Черт. 377.

кривошипа B . (Это допущение будет тем ближе к истине, чем больше длина шатуна по сравнению с радиусом кривошипа r).

Если мы перемещения x точки F будем отсчитывать от точки A , то для любого угла поворота кривошипа получим:

$$x = r \cos \omega t.$$

Что касается вертикальных перемещений y , то для различных точек шатуна

они будут различны. Для какой-либо точки D , в расстоянии ξ от правого конца C шатуна, будем иметь:

$$y = r \sin \omega t \frac{\xi}{l}.$$

Проекции ускорения точки D будут:

$$x'' = -r\omega^2 \cos \omega t; y'' = -r\omega^2 \sin \omega t \frac{\xi}{l}.$$

Пренебрегая углом наклона шатуна к оси AC , можно считать направление ускорения y'' перпендикулярным к оси шатуна. Соответствующие этому ускорению силы инерции интенсивности:

$$-\frac{q}{g} y'' = \frac{q}{g} r\omega^2 \sin \omega t \frac{\xi}{l}$$

будут производить изгиб шатуна. Самый невыгодный случай получим, положив:

$$\sin \omega t = 1.$$

Наибольшая интенсивность нагрузки $\frac{q}{g} \omega^2 r$ будет соответствовать точке B . Максимум изгибающего момента, в случае постоянного сечения, будет в расстоянии:

$$\xi = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

от точки C и определится ϕ -лой:

$$M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{q}{g} \frac{r\omega^2 l^2}{2} = 0,128 \frac{q}{g} \frac{r\omega^2 l^2}{2} \quad (321).$$

§ 157. Напряжения в быстро вращающемся кольце.

С вопросом о напряжениях в быстро вращающемся кольце приходится встречаться при расчете обода маховых колес, барабана паровых турбин, якорей динамо-машин ¹⁾ и др. Если толщина кольца в радиальном направлении мала по сравнению с его радиусом, то можно считать, что растягивающие напряжения, появляющиеся в нем при вращении, распределяются по сечению равномерно. Обозначим через q вес элемента кольца; длиной единица (считая по окружности кольца) и через ω — постоянную угловую скорость вращения. Если r — средний радиус кольца, то сила инерции, приходящаяся на выделенный элемент кольца, равна:

$$\frac{q}{g} \omega^2 r = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r}.$$

Силы инерции в данном случае имеют радиальное направление, распределены равномерно по окружности кольца, и вызываемое ими растягивающее напря-

¹⁾ Werner, Die mechanische Beanspruchung rasch laufender Magneträder, 1914 г.
Lorenz, Berechnung rotierender Tromeln, Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1910 г., стр. 1397.

жение определится совершенно таким же образом, как в стенке цилиндрического сосуда, подвергающегося действию внутреннего равномерно распределенного давления (§ 35). Растягивающее усилие равно:

$$T = r \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{qv^2}{g}.$$

Разделяя величину найденного усилия на площадь поперечного сечения кольца, найдем искомое растягивающее напряжение:

$$p = \frac{T}{F} = \frac{\gamma v^2}{g} \quad (\text{где } \gamma \text{ вес единицы объема}) \quad (322).$$

Величина напряжения зависит только от удельного веса материала и скорости v . Для литого железа полученная ф-ла дает следующие значения для напряжений при различных скоростях:

Т А Б Л И Ц А.

$v =$	25 m/sc	50 m/sc	100 m/sc	150 m/sc	200 m/sc	400 m/sc
$p =$	50 kg/cm ²	200 kg/cm ²	800 kg/cm ²	1800 kg/cm ²	3200 kg/cm ²	12800 kg/cm ²

Уже при скоростях в 150 m/sc напряжения приближаются к пределу пропорциональности. Для возможности получения больших скоростей приходится, вместо колец, брать диски и изготовлять их из более совершенных и прочных материалов, например, из никелевой стали.

§ 158. Напряжения в быстро вращающихся дисках.

С расчетом быстро вращающихся дисков приходится иметь дело при проектировании паровых турбин, при назначении предельных скоростей для точильных камней ¹⁾ и т. д. В случае постоянной малой толщины диска вопрос о напряжениях, обусловленных силами инерции, с большой точностью может быть разрешен элементарным путем. Мы примем, что по толщине диска напряжения не меняются, и в дальнейшем будем полагать толщину равной единице. Ход решения задачи весьма близок к тому, которому мы следовали при выводе ф-лы Ляме. Мы выделим из диска элемент $abcd$ (черт. 332) и из условий равновесия его находим зависимость между напряжением p_x и p_z , для чего проектируем все приложенные к элементу силы на направление радиуса ob . Кроме сил, действующих по поверхности элемента, придется принять в расчет и силы инерции:

$$\frac{\gamma \omega^2 r}{g} p \, d\varphi \, dr,$$

¹⁾ См. Stodola, Die Dampfturbinen, 4-е изд., 1910 г., стр. 248.

Grübler, Zeit. d. Ver. d. Ing., 1897 г., стр. 860, и 1905 г., стр. 535.

H. Holzer, Berechnung der Scheibenräder, Zeit. f. gesamte Turbinenwesen, 1913.

имеющие радиальное направление. Вместо ур-ия (с), полученного при решении задачи Ляме, будем иметь:

$$p_z + \rho \frac{\partial p_z}{\partial \rho} - p_x + \frac{\omega^2 \rho^2 \gamma}{g} = 0 \quad (a).$$

Выражение (d) (§ 135) для p_x и p_z , в зависимости от радиального перемещения и рассматриваемого элемента, сохраняет свою силу:

$$p_x = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{u}{\rho} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \rho} \right); \quad p_z = \frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \sigma \frac{u}{\rho} \right).$$

Вставляя эти значения в ур-ие (a), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{\omega^2 \rho \gamma (1-\sigma^2)}{gE} = 0.$$

Вводя для сокращения обозначение:

$$\frac{\omega^2 \gamma (1-\sigma^2)}{gE} = A \quad (b),$$

можем представить полученное выше ур-ие в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (u\rho)}{\partial \rho} \right] + A\rho = 0,$$

откуда, выполняя интегрирование, находим:

$$u = -\frac{A\rho^3}{8} + \frac{C_1\rho}{2} + \frac{C_2}{\rho} \quad (c)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 должны быть найдены из условий на контуре диска. Мы здесь рассмотрим два частных случая: диск с отверстием в центре и сплошной диск.

При наличии отверстия напряжения p_z , имеющие радиальное направление, должны обращаться в нуль при $\rho = a$ и $\rho = b$, где a — радиус внутреннего отверстия и b — наружный радиус диска. Вставляя найденное значение u в выражение для напряжения p_z , будем иметь:

$$p_z = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[-\frac{(3+\sigma)A\rho^2}{8} + \frac{(1+\sigma)}{2} C_1 - (1-\sigma) \frac{C_2}{\rho^2} \right].$$

Условия на контуре дают для определения C_1 и C_2 ур-ия:

$$\frac{(3+\sigma)Aa^2}{8} + \frac{(1+\sigma)}{2} C_1 - \frac{1-\sigma}{a^2} C_2 = 0,$$

$$-\frac{(3+\sigma)Ab^2}{8} + \frac{(1+\sigma)}{2} C_1 - \frac{1-\sigma}{b^2} C_2 = 0;$$

откуда находим:

$$C_1 = \frac{(3+\sigma)(a^2+b^2)}{4(1+\sigma)} A; \quad C_2 = \frac{(3+\sigma)a^2b^2}{8(1-\sigma)} A.$$

Для напряжений p_x и p_z получим выражения:

$$p_x = \frac{3+\sigma}{1-\sigma^2} \frac{AE}{8} \left[-\frac{1+3\sigma}{3+\sigma} \rho^2 + a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{\rho^2} \right] \quad (323),$$

$$p_z = \frac{3+\sigma}{1-\sigma^2} \frac{AE}{8} \left[-\rho^2 + a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{\rho^2} \right]$$

Вставляя вместо A его значение (b) и вводя обозначения:

$$a : b = \alpha; \quad \rho : b = \varphi,$$

можем представить ф-лы для напряжений в более простом виде:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3 + \sigma}{8} \left[-\frac{1 + 3\sigma}{3 + \sigma} \varphi^2 + 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{\varphi^2} \right] \\ p_z &= \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3 + \sigma}{8} \left[-\varphi^2 + 1 + \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (323').$$

Здесь через σ обозначена скорость ωb на наружном контуре диска. Радиальные напряжения p_x обращаются в нуль при $\varphi = \alpha$ и при $\varphi = 1$, т.е. на наружном и внутреннем контуре диска. Для промежуточных значений φ напряжения p_x положительны и, как легко проверить, достигают наибольшего значения при

$$\varphi = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{когда } \rho = b \sqrt{\alpha} = \sqrt{ab}.$$

Вставляя это значение ρ в ф-лу (323), найдем:

$$(p_z)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3 + \sigma}{8} (1 - \alpha)^2 \quad (324).$$

Что касается напряжений p_x , то они также положительны для всех точек диска и, как легко видеть, достигают наибольшей величины при наименьшем значении φ , т.е. на внутреннем контуре диска, где $\varphi = \alpha$:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3 + \sigma}{4} \left(1 + \frac{1 - \sigma}{3 + \sigma} \alpha^2 \right) \quad (325).$$

Сравнивая (324) и (325), заключаем, что $(p_x)_{\max} > (p_z)_{\max}$, и, следовательно, расчет диска нужно вести на основании ф-лы (325).

Проследим, как на величину наибольших растягивающих напряжений влияет величина внутреннего отверстия в диске. При малом отверстии a мало по сравнению с b , и величиной α^2 можно пренебречь, тогда:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3 + \sigma}{4} \quad (325').$$

Второй крайний случай получим, если a приближается по величине к b и диск обращается в кольцо, толщина которого в радиальном направлении весьма мала. При этом условии можно положить $\alpha = 1$, и ф-ла (325) дает нам:

$$(p_x)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g}.$$

Ф-ла эта совершенно совпадает с тем, что мы нашли раньше для тонкого кольца (§ 157). Из полученных результатов следует, что в случае диска с отверстием в центре наиболее опасным в смысле напряжений является контур отверстия.

Чтобы избежать больших напряжений материала, иногда применяют конструкции, которые дают возможность прикрепить к диску ось, не продлевая центрального отверстия. Рассмотрим, как распределяются напряжения в случае сплошного диска. Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 будем иметь следующие условия: 1) радиальное перемещение u для центра диска должно равняться нулю и 2) напряжения p_x на наружном контуре диска обращаются в нуль. Чтобы удовлетворить первому условию,

нужно в выражении (с) положить $C_2 = 0$, тогда для определения C_1 второе условие даст нам уравнение:

$$-\frac{(3+\sigma)}{8} Ab^2 + \frac{1+\sigma}{2} C_1 = 0, \text{ откуда: } C_1 = \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \frac{Ab^2}{4}.$$

Для напряжений p_x и p_z получаем выражения:

$$p_x = \frac{\gamma v}{g} \frac{3+\sigma}{8} \left[-\frac{1+3\sigma}{3+\sigma} \frac{\rho^2}{b^2} + 1 \right]; \quad p_z = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8} \left[-\frac{\rho^2}{b^2} + 1 \right].$$

Оба эти напряжения положительны и возрастают с убыванием ρ , т.е. с приближением к центру диска. Для $\rho = 0$ получаем:

$$(p_x)_{\max} = (p_z)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\sigma}{8} \quad (326).$$

Напряжения эти вдвое меньше того, что мы получили для диска с весьма малым центральным отверстием (325').

На основании ф-л (325) и (326) заключаем, что диски с одинаковыми скоростями по наружному контуру и с одинаковыми значениями отношения α , при наличии центрального отверстия, будут иметь одинаковые значения максимальных напряжений.

§ 159. Диск равного сопротивления.

Мы видим, что в случае диска постоянной толщины напряжения пропорциональны квадрату скорости на окружности диска. Для материала заданной прочности можно всегда установить то предельное значение v , за которым максимальные напряжения уже будут превосходить допускаемую для материала норму. Чтобы иметь возможность безопасно достигнуть больших скоростей, приходится делать диски переменной толщины. При определении напряжений в таком диске будем, как и раньше, исходить из предположения, что по толщине диска напряжения не меняются. Допущение это, как показывают более точные исследования ¹⁾, весьма близко к истине в случае дисков малой толщины. Например, для диска, имеющего форму эллипсоида вращения, при толщине по оси вращения, равной $\frac{1}{8}$ наружного диаметра, отклонение от равномерного распределения напряжений по толщине не превосходит 5%. Для составления зависимости между напряжениями p_x и p_z обратимся к условию равновесия элемента $abcd$, выделенного из диска двумя меридиональными сечениями и двумя concentрическими цилиндрическими поверхностями (черт. 332). Если через u обозначим переменную толщину диска, то усилия, приложенные к боковым граням элемента ab и dc , будут равны:

$$p_x \cdot u \cdot d\varphi.$$

Усилия по граням da и bc представляются ф-мой:

$$p_z u \rho d\varphi \text{ и } p_z u \rho d\varphi + d(p_z u \rho d\varphi).$$

Присоединяя к этим усилиям силы инерции:

$$\gamma \rho d\varphi d\rho \frac{\gamma \omega^2 \rho}{g}$$

и проектируя все силы на направление радиуса, получим такое уравнение равновесия:

$$d(p_z u \rho d\varphi) + \gamma \rho d\varphi d\rho \frac{\gamma \omega^2 \rho}{g} - p_x u d\rho d\varphi = 0,$$

¹⁾ См. вышецитированную книгу A. Stodola, стр. 617, а также статью того же автора в Zeit. d. Ver. d. Ing., 1907 г., стр. 1269.

или

$$\frac{d}{dp}(p_z y p) - p_x y + \frac{y \omega^2 \gamma \omega^2}{g} = 0 \quad (a).$$

Соотношение между p_x и p_z изменяется в зависимости от закона, по которому будет меняться толщина диска y . Наиболее выгодным является, очевидно, тот случай, когда напряжения p_x и p_z равны между собой и по всему диску равны допускаемому напряжению. Полагая в уравнении (a):

$$p_x = p_z = R,$$

получим:

$$p \frac{dy}{dp} + \frac{y p^2 \gamma \omega^2}{g R} = 0, \text{ или: } \frac{dy}{y} = - \frac{\gamma \omega^2}{g R} p dp,$$

откуда:

$$y = y_0 e^{-\frac{\gamma \omega^2 p^2}{2gR}} \quad (327),$$

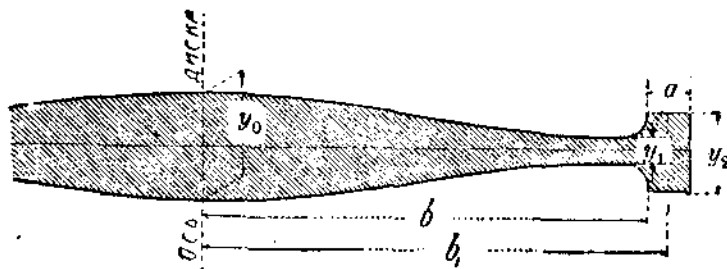
где y_0 — представляет толщину диска в центре. Величина эта определяется в зависимости от условий на контуре диска. Вопрос о деформациях диска равного сопротивления решается весьма просто. Равным напряжениям p_x и p_z будут соответствовать и равные относительные удлинения:

$$e_x = e_z = \frac{(1 - \sigma) R}{E}.$$

Перемещение какой-либо точки в радиальном направлении будет равно:

$$u = \frac{(1 - \sigma) R}{E} \quad (328).$$

Перейдем теперь к условиям на контуре диска. На практике приходится среднюю часть турбинного диска, имеющую форму равного сопротивления, окружать более широким ободом (черт. 378), к которому прикрепляют лопатки турбины. Поперечное сечение



Черт. 378.

этого обода для диска равного сопротивления не может быть задано произвольно, его размеры найдутся из таких соображений. При вращении диска на обод его, кроме сил инерции, действуют еще напряжения R , распределенные по поверхности соединения внутренней части диска с ободом. Размеры обода должны быть подобраны таким образом, чтобы увеличение его внутреннего радиуса b как раз равнялось расширению диска

равного сопротивления с наружным радиусом b . Силы, приходящиеся на единицу длины обода, представляются такой ф-ой:

$$q = \frac{ay_2 \gamma}{g} \omega b_1 - Ry_1 \frac{b}{b_1},$$

относительное удлинение обода равно:

$$e = \frac{qb_1}{ay_2 E},$$

и увеличение внутреннего радиуса будет:

$$eb = \frac{qb_1}{ay_2} \frac{b}{E}.$$

Приравнявая это увеличению радиуса диска равного сопротивления, вычисленному по ф-ле (328), получим необходимое соотношение между размерами обода:

$$\frac{1-a}{E} Rb = \frac{qb_1}{ay_2} \frac{b}{E} \quad (329).$$

Величинами y_1 и y_2 обыкновенно задаются на основании конструктивных соображений, тогда ур-ие (329) определяет ту толщину обода a , которая должна быть взята, чтобы по поверхности соединения обода с диском получались растягивающие напряжения R .

Этим мы ограничим рассмотрение напряжений в быстро вращающихся дисках. Дальнейшие подробности могут быть найдены в специальных курсах паровых турбин 2).

§ 160. Напряжения в ободе махового колеса.

При расчете махового колеса на прочность обыкновенно ограничиваются тем, что определяют растягивающие напряжения в ободе, рассматривая его как кольцо, вращающееся с заданной угловой скоростью ω . Спицы махового колеса препятствуют свободному расширению обода, уменьшают продольную растягивающую силу в ободе, но вызывают дополнительные напряжения изгиба. Вычислим эти напряжения в предположении равномерной угловой скорости вращения колеса. В этом случае спицы работают только на растяжение, и соответствующая растягивающая сила X может быть найдена при помощи начала наименьшей работы. При составлении выражения для потенциальной энергии можно, очевидно, ограничиться частью колеса, выделенной двумя меридиональными сечениями, делящими пополам углы между смежными спицами (черт. 379) (2α — угол между двумя последовательными спицами). Действие отброшенной части обода на рассматриваемую может быть заменено продольной силой N_0 и парой сил M_0 . Из условий

1) Через b_1 обозначено расстояние от центра диска до центра тяжести поперечного сечения обода.

2) Много данных относительно формы равного сопротивления для вращающихся дисков имеется в работе A. Basch'a и A. Leon'a, *Über rotierende Scheiben gleichen Fliehkraftwiderstandes*, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, 1907 г.

Вычислительный метод расчета дисков переменной толщины дан в нашей работе: Вопросы прочности в паровых турбинах, Вестник об-ва технологов, 1912 г.

Применение к расчету турбинных дисков методы W. Ritz'a имеется в интересной работе Pöschl'a, *Zeit f. Gesamt. Trb-wsn.*, 1913 г.

Вспомогательные таблицы для расчета дисков приведены в книжке Donat'a: *Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe nach einem neuen Verfahren*, 1912 г.

симметрии заключаем, что касательные напряжения по произведенным сечениям обода равны нулю. Если через q назовем вес единицы длины обода и через r — радиус его, то из условий равновесия выделенной части обода, проектируя все силы на направление спицы, находим:

$$2N_0 \sin \alpha + X = 2 \int_0^{\alpha} \frac{qr d\varphi}{g} \omega^2 r \cos(\alpha - \varphi),$$

$$\text{откуда } N_0 = \frac{qr^2 \omega^2}{g} - \frac{X}{2 \sin \alpha}.$$

Для определения M_0 воспользуемся тем обстоятельством, что поперечные сечения, которыми мы выделили рассматриваемую часть обода, при деформации махового колеса не поворачиваются, следовательно (ф-ла 272'):

$$\int_0^{\alpha} M_{\varphi} r d\varphi = 0 \quad (a).$$

Здесь через M_{φ} обозначен изгибающий момент в каком-либо сечении m обода. Величина эта равна:

$$M_{\varphi} = M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) + \frac{q\omega^2 r}{g} 2r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = M_0 + \frac{Xr}{2} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \alpha}.$$

Вставляя ее в ур-ие (a) и выполняя интегрирование, найдем:

$$M_0 = -\frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Имея выражения для N_0 и M_0 , находим величины продольной и поперечной силы и величину изгибающего момента в сечении m :

$$N_{\varphi} = N_0 \cos \varphi + \frac{q\omega^2 r}{g} 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{qr^2 \omega^2}{g} - \frac{X \cos \varphi}{2 \sin \alpha},$$

$$Q_{\varphi} = N_0 \sin \varphi - \frac{q\omega^2 r}{g} 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{X \sin \varphi}{2 \sin \alpha},$$

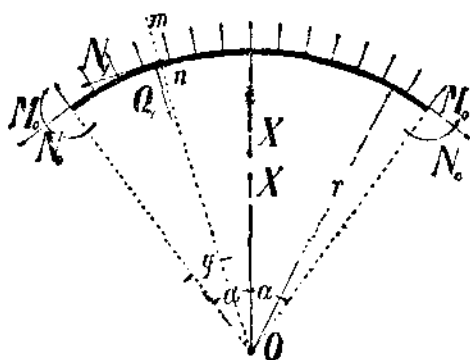
$$M_{\varphi} = -\frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{Xr}{2} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \alpha} = \frac{Xr}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \right).$$

Потенциальная энергия для выделенной части обода махового колеса, на основании приближенной ф-лы (271), представится в таком виде:

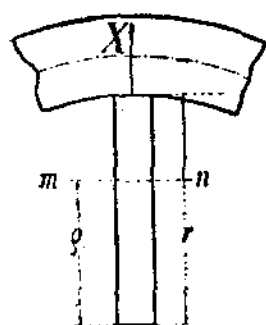
$$V_1 = 2 \int_0^{\alpha} \frac{M_{\varphi}^2 r d\varphi}{2EJ} + 2 \int_0^{\alpha} \frac{N_{\varphi}^2 r d\varphi}{2EF}.$$

Здесь через J и F обозначены моменты инерции и площадь поперечного сечения обода.

Вычислим теперь потенциальную энергию растянутой спицы махового колеса (черт. 380). Длину спицы положим равной радиусу махового колеса, и площадь поперечного сечения ее обозначим через F_s , тогда растягивающее усилие N в сечении m ,



Черт. 379.



Черт. 380.

взятом в расстоянии ρ от оси колеса, составит из силы X , представляющей действие обода на спицу, и сил инерции, приложенных к верхней части спицы; мы получим:

$$N = X + \frac{F_1 \gamma}{g} (r - \rho) \omega^2 \frac{(r + \rho)}{2} = X + \frac{F_1 \gamma \omega^2}{2g} (r^2 - \rho^2).$$

Потенциальная энергия растяжения представится в таком виде:

$$V_2 = \int_0^r \frac{N^2 d\rho}{2EF_1}.$$

Пренебрегая деформацией других частей махового колеса, мы получим для всей энергии деформации выражение:

$$V = V_1 + V_2.$$

Для определения неизвестной величины X , на основании начала наименьшей работы, получим ур-не:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0.$$

Вставляя вместо V его значение, мы после ряда преобразований найдем:

$$X = \frac{q\omega^2 r^2}{g} \cdot \frac{1}{\frac{Fr^2}{J} f_2(x) + f_1(x) + \frac{F}{F_1}} \quad (330),$$

где для сокращения введены такие обозначения:

$$f_1(x) = \frac{1}{2 \sin^2 x} \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right); \quad f_2(x) = \frac{1}{2 \sin^2 x} \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2x}.$$

Для упрощения пользования ф-лой (330) приводим в нижеследующей таблице значения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для различного числа спиц n .

Т А Б Л И Ц А.

$n =$	4	6	8	10	12
$f_1(x) =$	0,643	0,957	1,274	1,592	1,910
$f_2(x) =$	0,00608	0,00169	0,00076	0,000395	0,000125

Вычислив натяжение спицы X , мы без затруднения находим величину изгибающего момента, продольной и поперечной силы для любого сечения обода махового колеса и можем найти соответствующие значения напряжений.

В случае непостоянной скорости вращения махового колеса, к силам инерции, имеющим радиальное направление, придется присоединить касательные силы инерции, соответствующие касательным ускорениям. Эти силы вызовут изгиб спиц, при чем изгибающие напряжения будут тем большие, чем резче колебания угловой скорости колеса. Обозначим через ω угловое ускорение махового колеса, тогда касательное ускорение

точек обода будет равно $r\omega$. Соответствующие касательные силы инерции дадут относительно оси колеса момент:

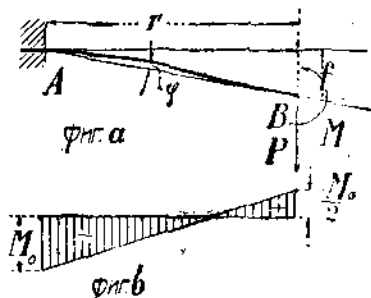
$$M = \frac{Q}{g} \omega r^2,$$

где через Q обозначен вес обода махового колеса. Момент этот передается валу при посредстве спиц, следовательно, изгибающий момент для каждой спицы, в месте прикрепления ее к валу, можно принять равным:

$$M_{II} = \frac{M}{n} = \frac{Q}{ng} \omega r^2 \quad (331)$$

и вычислить соответствующие напряжения от изгиба.

Нетрудно также найти закон изменения изгибающего момента по длине спицы. Мы для упрощения задачи пренебрежем изгибом обода колеса ¹⁾ и силами инерции, действующими на массу спицы. В таком случае каждая спица представляет собой балку, заделанную концом A , (черт. 381) и изгибаемую силой P и парой M , приложенными к концу B . Между силой и парой такое соотношение, что касательная к изогнутой оси спицы в точке B , нормальная к ободу колеса, проходит через точку A , соответствующую оси колеса. При этих условиях M легко выразить через P . Прогиб спицы, при совместном действии P и M , равен:



Черт. 381.

$$f = \frac{Pr^3}{3EJ_1} - \frac{Mr^2}{2EJ_1}.$$

Угол наклона касательной в точке B будет:

$$\varphi = \frac{Pr^2}{2EJ_1} - \frac{Mr}{EJ_1},$$

с другой стороны тот же угол равен:

$$\varphi = \frac{f}{r} = \frac{Pr^2}{3EJ_1} - \frac{Mr}{2EJ_1}.$$

Из сравнения двух выражений для φ находим:

$$M = -\frac{Pr}{3}.$$

Эпюра изгибающих моментов для спицы представится наклонной прямой (фиг. b).

Полученные ф-лы решают вопрос о прочности в случае цельного махового колеса. Если колесо составлено из частей, то необходимы дополнительные исследования прочности в местах соединения. Эти места обыкновенно оказываются наиболее опасными, так как применяемые на практике конструкции соединений не исключают возможности некоторых перемещений по поверхностям соприкосновения соединяемых частей ²⁾.

¹⁾ Более подробное исследование этого вопроса см. в работе Н. Бауера, Die Festigkeitsberechnung der Schwungräder, Dingl. Pol. Journ., 1908 г., стр. 353.

²⁾ Экспериментальные исследования деформаций махового колеса в статье S. H. Bacrigh, An Optical Method of determining the deformations of a Rotating Fly-Wheel, Proc. civil engineers, v. CL, стр. 398.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ. О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ СИСТЕМ.

§ 161. Свободные колебания системы с одной степенью свободы.

Вопрос о колебании упругих систем имеет не только теоретическое, но также и большое практическое значение ¹⁾. С задачами этого рода мы встречаемся в различных отделах машиностроения: например, при расчете пароходных валов, валов паровых турбин и балок, поддерживающих быстроходные, не вполне уравновешенные машины. В более сложном виде приходится решать ту же задачу проектирующему инженеру при исследовании вибраций судов и при определении динамических напряжений в мостах, колеблющихся под действием подвижных грузов. При некоторых условиях возникающие колебания весьма значительны, и вызываемые ими напряжения приходится принимать в расчет. Напряжения эти не только меняют свою величину, но и знак. При быстрых колебаниях мы будем в короткий срок получать большое число перемен знака напряжений, что особенно вредно отражается на прочности материала и конструкций. Из перечисленных выше примеров видно, что инженеру приходится иногда иметь дело с колебаниями очень сложных систем, где точное решение задачи в полном объеме представляет большие затруднения. В таких случаях обыкновенно ограничиваются приближенным решением и сводят вопрос к исследованию колебаний системы с одной степенью свободы.

¹⁾ Наиболее полным сочинением по исследованию колебаний упругих систем является книга знаменитого английского ученого — лорда Rayleigh'a, *Theory of sound*. Хотя эта книга посвящена вопросам акустики, но в ней помещены решения ряда задач, имеющих большое практическое значение. Там же изложены приближенные методы исследования колебаний сложных систем. Более элементарное изложение задач о колебаниях упругих систем можно найти в книге Lamb'a, *The Dynamical theory of sound*.

См. также: В. Hopkinson, *Vibrations of systems having one degree of Freedom*.
А. Boutaric, *Oscillation et vibrations, étude générale des mouvements vibratoires*, Paris, 1912 г.

Ряд технических задач, относящихся к отделу колебаний, разобран в книге А. Н. Крылова, *О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики*, 1913 г.

В этой книге, написанной для инженеров, интересующихся механикой, изложены методы интегрирования дифференциальных уравнений, имеющих техническое значение. Особенно подробно рассмотрены задачи о вибрациях стержней.

См. также: Курс теории упругости, ч. II, стр. 171.

Таким приемом мы уже пользовались при определении изгиба стержней (глава XV).

Колебательные движения системы могут возникнуть при различных обстоятельствах, и если они совершаются при отсутствии внешних сил, или при постоянных силах, то эти колебания называют „свободными колебаниями“, или „собственными колебаниями“ системы. Изучим свойства колебательного движения на простейшем примере — рассмотрим колебания в вертикальном направлении груза Q , подвешенного на невесомом упругом стержне OA . (черт. 382). При статическом действии груза стержень удлинится на величину:

$$\lambda = \frac{Ql}{EF}.$$

Пусть O — положение центра тяжести груза Q , соответствующее положению равновесия. Чтобы заставить груз колебаться по вертикальному направлению, поступим так: с помощью вертикальной силы вызовем дополнительное удлинение стержня на какую-либо величину a и после этого предоставим груз самому себе. Он начнет совершать колебательное движение около положения равновесия, отклоняясь от точки O вверх и вниз на величину a .

Для составления дифференциального уравнения этого движения рассмотрим все силы, действующие на груз. В тот момент, когда центр тяжести груза совпадает с точкой O , сила тяжести Q уравновешивается соответствующим натяжением стержня AO . Возьмем теперь какое-либо иное положение груза во время колебаний, и пусть x — координата центра тяжести, соответствующая этому положению (положительные x отсчитываем от точки O вниз). В этот момент на груз, кроме силы тяжести Q , направленной вертикально вниз, будут действовать растягивающее усилие в стержне, равное

$$Q = \frac{xEF}{l}$$

и направленное снизу вверх, и силы инерции, выражающиеся ф-лой:

$$-\frac{Q}{g} \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ур-ие движения напишется так:

$$Q - \left(Q + \frac{xEF}{l} \right) - \frac{Q}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \quad (2),$$

где для сокращения введено обозначение:

$$k = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \quad (332).$$

Величину k называют „частотой“ колебаний.



Черт. 382.

Общий интеграл полученного ур-ия (а) может быть представлен в таком виде:

$$x = A \sin kt + B \cos kt \quad (b).$$

Произвольные постоянные A и B должны быть определены таким образом, чтобы были удовлетворены начальные обстоятельства движения. В начальный момент мы отодвинули груз от положения равновесия на величину a и представили его самому себе, не сообщая ему никакой скорости, следовательно,

$$\text{при } t=0, \quad x=a \quad \text{и} \quad x'=0.$$

Для определения A и B получим ур-ия:

$$[A \sin kt + B \cos kt]_{t=0} = a; \quad [Ak \cos kt - Bk \sin kt]_{t=0} = 0.$$

Второе из этих ур-ий дает нам $A=0$, тогда из первого находим, что $B=a$. Вставляя эти значения произвольных постоянных в общий интеграл (b), получим:

$$x = a \cos kt; \quad x' = -ak \sin kt \quad (c).$$

При изменении $\cos kt$ в пределах $+1$ до -1 , x будет меняться в пределах от $+a$ до $-a$.

Из выражений (c) легко видеть, что от прибавления к t величины

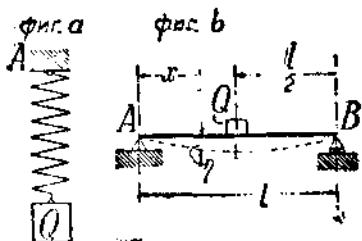
$$T = \frac{2\pi}{k} \quad (333)$$

значения x и x' не меняются. За промежуток времени T груз совершает полное колебание, возвращается в первоначальное положение и приобретает первоначальную скорость. Величину T называют „периодом“ собственных колебаний системы. Он не зависит от начальных обстоятельств движения и вполне определяется упругими свойствами и размерами стержня и весом груза Q . Вставляя вместо k его значение (332), получим для T ф-лу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{Ql}{EFg}} \quad (334),$$

совершенно совпадающую с результатом, получаемым в теоретической механике для периода колебаний математического маятника. Мы можем высказать такое положение: период полного колебания груза Q , подвешенного на упругом невесомом стержне такой же, как у математического маятника, длина которого равна удлинению упругого стержня под действием груза Q .

Для упрощения рассуждений мы взяли груз, подвешенный на упругом стержне, но такое же колебательное движение можно получить, если подвесить груз на винтовой рессоре (черт. 383, фиг. а), или положить его на невесомой упругой балке (фиг. б). Существенным во всех этих случаях является только



Черт. 383.

то, что опускание груза сопровождается появлением сил упругости, препятствующих этому перемещению, и величина сил пропорциональна величине перемещения.

При растяжении стержня коэффициент пропорциональности, на который нужно множить перемещение, чтобы получить силу, равен $\frac{EF}{l}$. Нетрудно найти соответствующие коэффициенты для спиральной пружины и для балки АВ. Растяжение пружины при действии силы Q равно (§ 47):

$$h = \frac{QR^2 2\pi n}{GJ_p}.$$

Прогиб балки, при расположении груза по середине пролета, равен:

$$f = \frac{QL^3}{48EJ}.$$

Чтобы от колебаний груза, подвешенного на стержне, перейти к системам, представленным на фиг. а и фиг. б, нужно вместо $\frac{EF}{l}$ подставить:

$$\frac{GJ_p}{2\pi n R^2} \text{ или } \frac{48EJ}{l^3},$$

и периоды колебаний для спиральной пружины и для нагруженной балки АВ будут такие же, как и для математического маятника, имеющего длину, равную растяжению пружины h , или равную прогибу балки f .

§ 162. Приближенное вычисление периода основных колебаний сложных систем.

При решении задач предыдущего параграфа мы пренебрегали массой стержня и массой пружин по сравнению с массой подвешенного груза Q и таким путем получали систему с одной степенью свободы. Вопрос сводился к интегрированию обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Если не сделать указанных упрощений, то задача становится более сложной — приходится решать дифференциальное уравнение в частных производных и исследовать различные типы возможных колебаний системы. В технических вопросах наиболее существенную роль играет тот тип колебаний, которому соответствует наибольший период. Этот тип называют „основными“ колебаниями системы. Для нахождения периода этих колебаний воспользуемся приближенной методикой. На основании опытных данных задаемся типом колебаний, т. е. видом тех отклонений, которые система получает при колебаниях, и обращаем таким образом сложную систему в систему с одной степенью свободы¹⁾. Для выяснения хода расчета рассмотрим несколько задач.

В качестве первого примера возьмем случай груза, подвешенного на стержне. Начнем с невесомого стержня. При колебаниях, когда груз Q достигает одного из крайних своих положений, скорость его, а, следовательно, и кинетическая энергия системы обращаются в нуль. Потенциальная же энергия в этот момент достигает наи-

¹⁾ Прием этот предложен лордом Rayleigh'em; см. Theory of sound, 2-ое изд. стр. 111 и 287.

большого значения, так как ему соответствуют наибольшие деформации упругого стержня. Когда груз проходит через среднее положение, его скорость и кинетическая энергия имеют наибольшее значение, а потенциальная энергия достигает своего minimum'a. Таким образом, во время колебаний величина кинетической и потенциальной энергии все время меняется, но их сумма, полная энергия системы, остается постоянной, так как мы в своих выводах пренебрегали до сих пор теми сопротивлениями, которые встречает груз Q при колебаниях, и не принимали во внимание рассеяния энергии.

Потенциальная энергия системы составит из энергии растяжения стержня и энергии, соответствующей весу груза, и равняется:

$$\frac{EF}{2l} (x + \lambda)^2 - Qx \quad (a)$$

(здесь x отсчитывается от положения равновесия груза).

Кинетическая энергия системы, равная живой силе движущегося груза, напишется так:

$$\frac{Q}{2g} \cdot x'^2 \quad (b).$$

Получаем ур-ие:

$$\frac{EF}{2l} (x + \lambda)^2 - Qx + \frac{Q}{2g} x'^2 = \text{const},$$

или, принимая во внимание значение:

$$\lambda = \frac{Ql}{EF},$$

получим:

$$\frac{EF}{2l} x^2 + \frac{Q}{2g} x'^2 = \text{const} \quad (c).$$

Дифференцируя по t , придем к ур-ию колебательного движения, рассмотренному в предыдущем параграфе:

$$\frac{Q}{g} x'' + \frac{EF}{l} x = 0.$$

Положение системы будет вполне определяться координатой x , и перемещение какого-либо сечения стержня, расположенного в расстоянии ξ от точки привеса (черт. 382), будет равно:

$$u = \frac{x\xi}{l} \quad (d).$$

Оценим теперь влияние массы стержня на период колебания системы¹⁾. Если вес стержня не велик по сравнению с весом груза, то мы, без больших погрешностей, можем допустить, что тип основных колебаний системы будет такой же, как и в случае невесомого стержня. Перемещение любого сечения стержня при колебаниях определится прежней формулой (d), и потенциальная энергия растяжения стержня, при отклонении груза на величину x от положения равновесия, будет иметь прежнее значение.

Что касается кинетической энергии системы, то она несколько изменится: к живой силе движущегося груза нужно будет присоединить живую силу стержня. Если через q

¹⁾ Свободные колебания этой системы изучены еще Пуассоном. Вынужденные колебания ее рассмотрены в нашей работе: О вынужденных колебаниях призматических стержней, Изв. Киев. пол. инст., 1910 г., и в статье

А. Н. Крылова, Некоторые замечания о крешерах и индикаторах, Изв. импер. акад. наук, Петербург, 1909 г., № 9.

назовем вес единицы длины стержня, то кинетическая энергия элемента стержня, выделенного в расстоянии ξ от точки привеса, представится так:

$$\frac{q}{2g} d\xi \left(\frac{x'\xi}{l} \right)^2,$$

Живая сила стержня будет равна:

$$\int_0^l \frac{q d\xi}{2g} \left(\frac{x'\xi}{l} \right)^2 = \frac{ql}{3g} \frac{x'^2}{2}$$

и кинетическая энергия системы представится ф-лой:

$$\frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{ql}{3} \right).$$

Окончательно, вместо ур-ия (с), выведенного для невесомого стержня, мы получим:

$$\frac{EF}{2l} x^2 + \frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{ql}{3} \right) = \text{const.}$$

Ур-ие движения такое же, как в случае невесомого стержня, на конце которого привешен груз

$$Q + \frac{ql}{3}.$$

Для вычисления периода основных колебаний груза, подвешенного на весовом стержне, можно пользоваться прежней ф-лой (334), нужно только к весу груза Q присоединить одну треть собственного веса стержня.

В качестве второго примера рассмотрим колебания груза, помещенного на балке (черт. 383, фиг. б). Пренебрегая массой балки, найдем для периода колебаний ф-лу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} \quad (e),$$

где f — прогиб балки под грузом. Чтобы оценить приближенное влияние массы балки на период колебаний, поступим так же, как и в предыдущем случае. Допустим, что тип колебаний остается тот же, что и для невесомой балки.

Потенциальная энергия изогнутой балки сохраняет прежнее значение, и нам придется только видоизменить выражение кинетической энергии системы. К живой силе колеблющегося груза нужно прибавить живую силу балки. Вычисление этой последней может быть выполнено на основании следующих соображений. Мы предположили, что в рассматриваемом случае тип колебаний такой же, как и для невесомой балки. Следовательно, в каждый момент между прогибом η в каком-либо сечении балки и прогибом y по середине пролета будет такая же зависимость, как и при статическом изгибе балки. На основании ур-ия для изогнутой оси балки, нагруженной по середине пролета, имеем:

$$\eta = y \frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3}.$$

Если через q обозначим вес единицы длины балки, то кинетическая энергия ее в какой-либо момент представится ф-лой:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q dx}{2g} \eta'^2 = \frac{q y'^2}{g l^3} \int_0^{\frac{l}{2}} (3l^2 x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} \frac{ql}{g} \frac{y'^2}{2}.$$

Живая сила будет такая же, как для невесомой балки, несущей по середине пролета нагрузку $\frac{17}{35}ql$. Период колебаний системы, принимая во внимание массу балки, можно приближенно вычислить по ф-ле (е), нужно только под f подразумевать прогиб, получающийся в балке под действием груза

$$Q + \frac{17}{35}ql,$$

сосредоточенного по середине пролета.

Когда вес балки ql мал по сравнению с весом груза Q , указанный приближенный прием вычисления периода T весьма точен. Для практических приложений существенно то обстоятельство, что даже при больших значениях ql изложенный метод дает вполне удовлетворительные результаты. Возьмем крайний случай, когда $Q=0$, и нужно вычислить период основных колебаний ненагруженной балки. Применяя приближенный метод, будем иметь:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{17}{35}ql^4}{48EJg}} = 2\pi \frac{l^2}{9,94} \sqrt{\frac{q}{EJg}} \quad (335).$$

Точное решение той же задачи, основанное на интегрировании соответствующего дифференциального ур-ня в частных производных, дает нам:

$$T = 2\pi \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{EJg}} = 2\pi \frac{l^2}{9,87} \sqrt{\frac{q}{EJg}} \quad (335').$$

Разность между точным и приближенным решениями меньше 1%.

Оценивая влияние массы балки на период колебаний, мы исходили из предположения, что при колебаниях ось балки имеет такую же форму, как и при статическом изгибе. Можно задаться в другой подходящей формой искривления, выбирая ее так, чтобы были удовлетворены условия на концах. Предположим, например, что при колебаниях балка гнется по синусоиде, тогда:

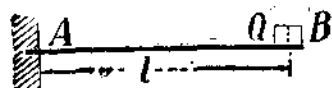
$$\eta = y \sin \frac{\pi x}{l},$$

где η и y имеют прежнее значение. Живая сила балки представится так:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{q dx}{g} \eta'^2 = \frac{ql}{2} \frac{y'^2}{2g}.$$

Тот же результат мы получили бы, если бы предположили балку невесомой, и половину ее массы сосредоточили по середине пролета. Таким образом, приняв искривление по синусоиде, мы вместо $\frac{17}{35}ql$ получили $\frac{1}{2}ql$. Оба результата мало разнятся друг от друга.

Если вместо балки с опертыми концами нужно исследовать колебания балки с одним заделанным концом (черт. 384), то первое приближение для периода колебаний получим, подставляя в ф-лу:



Черт. 384.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}},$$

вместо f , прогиб балки под действием груза Q . Чтобы оценить влияние собственного веса балки, нужно задаться формой искривления при колебаниях, соответствующих основному типу. Если принять, что вид искривленной оси такой же, как при статическом действии вертикальной

силы на конце B , то, идя прежним путем, найдем, что значение живой силы будет то же, что для невесомой балки, несущей на конце груз $\frac{33}{140} q l$. Чтобы оценить влияние собственного веса, нужно в ф-лу для T подставить вместо f прогиб, получающийся при действии на конце балка груза ¹⁾:

$$Q + \frac{33}{140} q l \quad (336).$$

Таким же способом может быть исследован вопрос о колебаниях балок переменного сечения ²⁾ и балок, составленных из стержней и представляющих собой целые фермы.

§ 163. Колебания в сопротивляющейся среде.

В предыдущих выводах мы не принимали во внимание влияние сопротивлений, которые при колебаниях имеют место. Сопротивление среды, в которой совершаются колебания, постепенно уменьшают амплитуду колебаний, колебания „затухают“. Величина сопротивления зависит от скорости движения, и, если скорость эта не велика, то его можно иногда считать пропорциональным первой степени скорости и положить равным:

$$R = -\alpha \frac{\partial x}{\partial t} \quad (a),$$

где коэффициент пропорциональности α зависит от размеров и формы тела и представляет собой то сопротивление, которое имеет место при скорости равной единице. Знак минус взят потому, что сопротивление всегда имеет направление, противоположное скорости.

Переходя к случаю груза Q , подвешенного на упругом невесомом стержне (черт. 382), и проектируя все силы, действующие на груз, и силы инерции на ось X -ов, получим ур-ие:

$$Q - \left(Q + \frac{x E F}{l} \right) - \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial x}{\partial t} = 0,$$

или:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial x}{\partial t} + k^2 x = 0 \quad (b),$$

где

$$k = \sqrt{\frac{E F g}{Q l}}; \quad 2n = \frac{\alpha g}{Q}.$$

Интеграл этого ур-ия будет:

$$x = e^{-nt} \left[A \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t) + B \cos(\sqrt{k^2 - n^2} t) \right].$$

¹⁾ Вопрос об искривлении балки с одним заделанным концом при колебаниях был исследован экспериментальным путем; см. Garrett, On the lateral vibration of bars, Phil. Mag., V. 8, стр. 581.

²⁾ Другой приближенный метод исследования колебания балок изложен в очень интересной работе J. Morrow, On the lateral vibration of loaded and unloaded bars, Phil. Magaz., 1905—1906 гг.

Положим, что в начальный момент ($t=0$) $x=a$, в таком случае $B=a$. Величину начальной скорости, для упрощения дальнейших рассуждений, выберем так, чтобы A обращалось в нуль; в таком случае для x получим выражение:

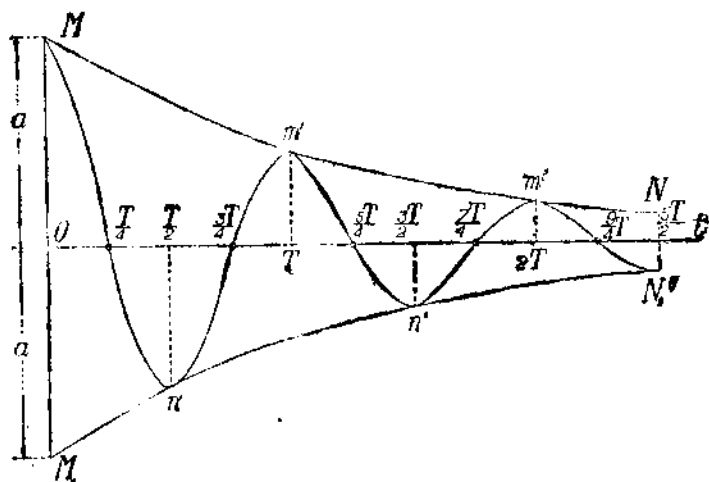
$$x = e^{-nt} a \cos(\sqrt{k^2 - n^2}t).$$

Из полученного решения видно, что движение имеет колебательный характер, но размахи, или „амплитуда“ колебаний постепенно уменьшаются. В начальный момент отклонение груза от положения равновесия равно a ; по истечении времени, соответствующего полному периоду колебаний, груз не вернется в первоначальное положение — его отклонение от положения равновесия уменьшится по сравнению с первоначальным и будет равно ae^{-nT} . После второго колебания отклонение будет ae^{-2nT} и т. д. Величины размахов уменьшаются в порядке геометрической прогрессии с знаменателем ae^{-nT} . Чем больше коэффициент n , т. е. чем больше сопротивление среды, тем быстрее идет затухание колебаний.

Рассмотрим теперь период колебаний T . Благодаря наличности сопротивлений, он получается большим, чем в случае „свободных колебаний“, и определится из ф-лы:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (337).$$

Если сопротивления не велики (а это наиболее частый случай), n мало по сравнению с k , и потому можно считать, что период колебаний мало меняется от появления малых сопротивлений. При больших сопротивлениях, например, при колебаниях в вязкой жидкости, n может быть значительным и, наконец, возможен случай, когда $n \geq k$. Тогда движение теряет колебательный характер



Черт. 385.

становится „аперiodическим“. На этом случае мы в дальнейшем останавливаться не будем.

Чтобы наглядно представить затухание колебаний, можно воспользоваться графическим изображением (черт. 385). По оси абсцисс откладываем время, а по оси ординат — отклонение груза от положения равновесия. Если мы предварительно нанесем две кривые MN и $M_1N_1^*$, ординаты которых соответственно равны:

$$1) x_1 = ae^{-\pi t} \text{ и } 2) x_2 = -ae^{-\pi t},$$

то волнообразная кривая, изображающая колебания, будет касаться попеременно то первой, то второй кривой. Точки касания $m', m'', \dots, n', n'', \dots$ будут соответствовать абсциссам $T, 2T, 3T, \dots, \frac{T}{2}, \frac{3T}{2}, \dots$. Отметим здесь, что величины наибольших отклонений не совпадают с точками касания $m', m'', \dots, n', n'', \dots$, и, как видно из черт. 385, время, необходимое для передвижения тела из положения равновесия в крайнее положение, меньше, чем время, необходимое для возвращения тела обратно к положению равновесия.

§ 164. Вынужденные колебания.

Свободные колебания системы, благодаря сопротивлениям, постепенно затухают, и для поддержания колебательного движения необходимо прилагать внешние силы переменной величины. Возникающие при таких условиях колебания называют „вынужденными колебаниями“ системы.

Мы изучим их свойства на прежнем примере, представленном на чертеже 382. Для возбуждения колебания груза Q , подвешенного на невесомом стержне AO , заставим точку привеса A совершать простое колебательное движение около некоторого среднего положения. Пусть b — амплитуда колебаний точки A и p — частота этих колебаний. Если в начальный момент точка A совпадает с средним положением A_0 и начинает движение вниз, то в любой момент t положение точки привеса относительно точки A_0 определится координатой:

$$x_1 = b \sin pt \quad (a).$$

Рассмотрим, каково будет движение груза Q . Все рассуждения предыдущих параграфов остаются и теперь в силе, нужно внести только изменения в выражение для силы натяжения стержня. Вместо удлинения стержня, равного x , придется брать величину:

$$x - x_1 = x - b \sin pt.$$

Ур-не движения для груза Q напишется в этом случае так:

$$Q - \left[Q + \frac{(x - b \sin pt) EF}{l} \right] - \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial x}{\partial t} = 0.$$

или:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial x}{\partial t} + k^2 x = q \sin pt \quad (b).$$

Здесь n и k имеют прежние значения и

$$q = \frac{bEFg}{lQ} \quad (c).$$

Опять мы получили линейное ур-ие с постоянными коэффициентами. От ур-ия (b) предыдущего параграфа оно отличается последним членом.

Полный интеграл ур-ия (b) получим, если к интегралу ур-ия без последнего члена прибавим частное решение ур-ия с последним членом. Частное решение будем искать в форме:

$$x = M \sin pt + N \cos pt.$$

Подставляя его в ур-ие (b), получим:

$$-Mp^2 \sin pt - Np^2 \cos pt + 2nMp \cos pt - 2nNp \sin pt + k^2 M \sin pt + \\ + k^2 N \cos pt = q \sin pt.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $\sin pt$ и $\cos pt$, получаем, для определения постоянных M и N , ур-ия:

$$-Np^2 + 2Mnp + Nk^2 = 0; \quad -Mp^2 - 2Npn + Mk^2 = q,$$

откуда:

$$N = -\frac{2qpn}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}; \quad M = \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}.$$

Общий интеграл ур-ия (b) имеет вид:

$$x = e^{-nt} \left[A \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t) + B \cos(\sqrt{k^2 - n^2} t) \right] - \\ - \frac{2qpn}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \cos pt + \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \sin pt \quad (d).$$

Величины A и B определяются на основании начальных обстоятельств.

Заметим, что первая часть интеграла (d), имеющая множителем величину e^{-nt} со временем все убывает, и практически придется считаться лишь со второй частью интеграла, не зависящей от начальных обстоятельств. Эта вторая часть, пропорциональная величине q , и представит собой „вынужденные колебания“ системы.

Выражение для вынужденных колебаний:

$$x = -\frac{2qpn}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \cos pt + \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \sin pt \quad (e).$$

можно упростить, если ввести такие обозначения:

$$\frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = C \cos \alpha; \quad -\frac{2qpn}{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = -C \sin \alpha \quad (f).$$

Тогда выражение (е) для вынужденных колебаний переписывается так:

$$x = C \cos \alpha \sin pt - C \sin \alpha \cos pt = C \sin(pt - \alpha) \quad (h).$$

Величины C и α легко найти из ф-л (f):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pn}{k^2 - p^2}; \quad C = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}} = \frac{q \sin \alpha}{2pn} \quad (k).$$

На основании полученных ф-л (h) и (k) заключаем, что вынужденные колебания имеют такой же период:

$$T = \frac{2\pi}{p},$$

как и период колебания точки привеса, т.-е., как период силы, вынуждающей колебания.

Сравнивая (h) и (k), видим, что в зависимости от знака α вынужденные колебания или отстают, или опережают колебания точки привеса. При $k > p$, т.-е., когда частота „собственных“ колебаний системы больше нежели частота колебаний точки привеса (частота колебаний вынуждающей колебания причины), α — положительно: вынужденные колебания отстают от колебаний точки привеса. При $k < p$, α — отрицательно: вынужденные колебания опережают колебания точки привеса.

Когда колебания не совпадают, то говорят, что они находятся в разных „фазах“. Разность фаз в нашем случае определяется величиной α . В том случае, когда $k = p$, т.-е., когда частота „собственных“ колебаний системы такая же, как и частота „собственных“ колебаний точки привеса, будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha = \infty; \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

— колебания груза отстают или опережают колебания точки привеса на $1/4$ периода. Когда точка привеса занимает среднее свое положение, груз находится в одном из крайних положений.

Рассмотрим теперь, как изменяются размахи вынужденных колебаний (амплитуда) при изменении частоты колебаний p точки привеса. Наибольшие отклонения груза Q от его среднего положения определяются величиной C [ф-лы (h) и (k)]. Когда p весьма мало, т.-е., когда точке привеса сообщены медленные колебания, мы в выражении для C можем пренебречь членами p^2 и $4p^2n^2$ по сравнению с k^2 . В таком случае:

$$C = \frac{q}{k^2} = \frac{bEFg}{lQ}; \quad \frac{EFg}{lQ} = b,$$

т.-е. груз Q совершает такие же колебания, как и точка привеса. При p очень большом, т.-е., когда точке привеса сообщено весьма быстрое колебательное движение, знаменатель выражения для C делается большим, и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний весьма мала, груз Q остается почти непо-

движным в пространстве. Возьмем, например, случай, когда $p = 10k$, т.-е., когда частота колебаний точки привеса в 10 раз больше частоты собственных колебаний системы. Пренебрегая влиянием сопротивлений и полагая $n = 0$, найдем

$$C = \frac{q}{99k^2} = \frac{b}{99} \approx 0,01b.$$

Амплитуда колебаний груза составляет 0,01 амплитуды колебаний точки привеса.

Этим обстоятельством пользуются, когда необходимо получить неподвижную точку, например, при устройстве сейсмографов (приборов для записывания колебаний при землетрясениях) и паллографов (приборов для записывания вибраций в корпусе судов). Груз, подвешенный на резине, может служить простейшим прибором для записывания колебаний. Положим, мы желаем записать вибрации в корпусе судна и заранее приблизительно знаем частоту этих колебаний p . Выберем длину резины и вес груза Q так, чтобы частота собственных колебаний груза Q , подвешенного на резине, была в несколько раз меньше p . Если теперь груз подвесить к палубе, то при вибрации судна он будет мало отклоняться от своего среднего положения, и прикрепленный к нему карандаш запишет на вращающемся барабане, неизменно связанном с палубой, интересующие нас колебания. На том же принципе возможно было бы устройство приборов для записывания колебаний мостов при проходе поезда.

Найдем теперь ту частоту колебаний точки привеса, которой соответствуют наибольшие значения C . Составляя производную от C по p и приравнявая ее нулю, получим:

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

Так как величина n обыкновенно очень мала по сравнению с k , то можно высказать такое положение: „амплитуда вынужденных колебаний возрастает с приближением частоты p вынуждающей колебания силы к частоте собственных колебаний системы“.

Чтобы нагляднее представить зависимость между амплитудой вынужденных колебаний и частотой p колебаний точки привеса, воспользуемся графическим изображением. На основании ф-лы (k) амплитуда вынужденных колебаний представится так:

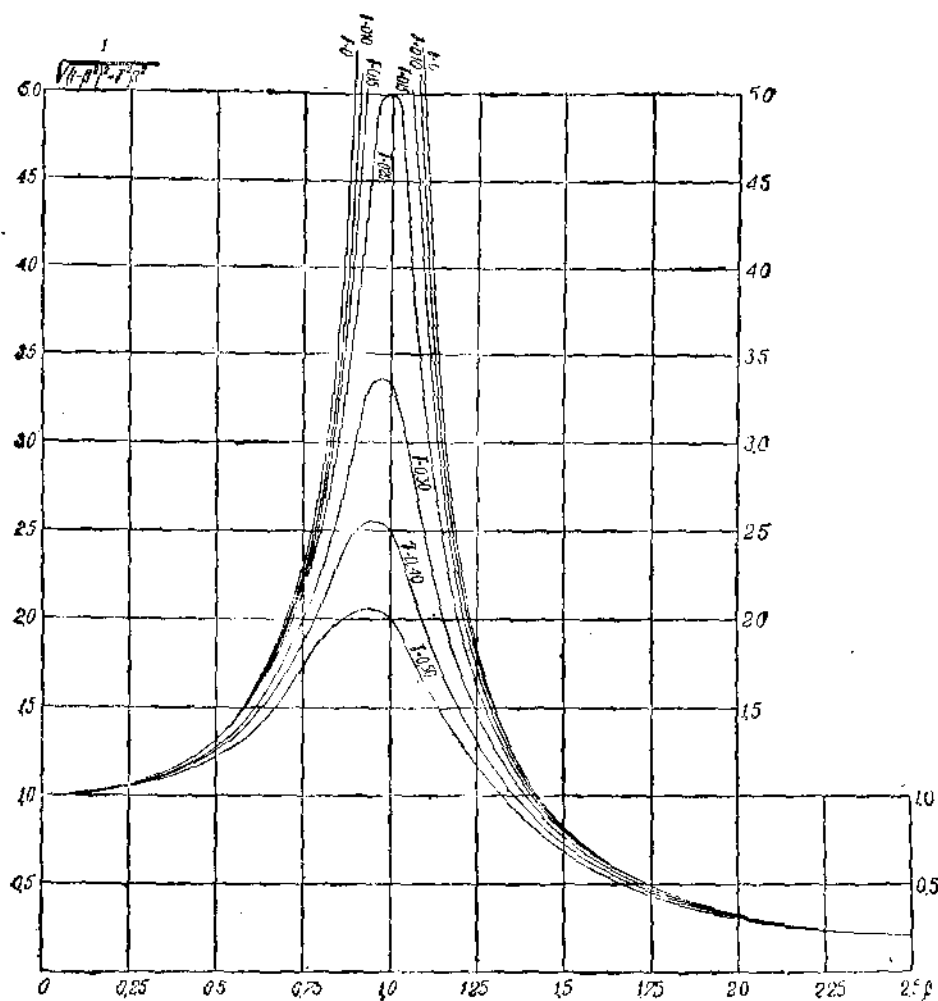
$$C = \frac{q}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2 p^2}{k^2}}} = b \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + \gamma^2 \beta^2}},$$

где

$$\beta = \frac{p}{k} \text{ и } \gamma = \frac{2n}{k}.$$

Откладывая по горизонтальной оси значения β и по оси ординат значения множителя при b в выражении для C , получим, меняя γ , серию кривых, пред-

ставленных на чертеже 386. Видим, что при приближении p к k амплитуда вынужденных колебаний быстро возрастает.



Черт. 386.

Значения C при различных значениях p представлены в нижеследующей таблице. Величина b (амплитуда колебаний точки привеса) принята равной единице.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении p к k будет тем резче, чем меньше сопротивление среды, т. е., чем меньше коэффициент n . При

$$n = 0 \text{ и } p = k, C = \infty.$$

амплитуда вынужденных колебаний беспрестанно растет. Возрастание размахов вынужденных колебаний при $p=k$ называют „явлением резонанса“. Явление

Т А Б Л И Ц А.

p	C	p	C
1	1	10,5	9,5
5	1,3	11	4,6
8	2,8	12	2,2
9	5,2	13	1,4
9,5	9,5	15	0,8
10	25	20	0,3

это в некоторых технических задачах играет очень важную роль, так как с возрастанием колебаний обыкновенно возрастают и напряжения материала, что может привести к совершенно неожиданным случаям поломок машин или разрушения сооружений.

§ 165. Практическое значение явления резонанса.

В основание выводов предыдущего параграфа был положен вполне определенный способ раскачивания груза Q (предполагалось колебательное движение точки привеса). Легко видеть, что в обстоятельствах движения ничто не изменится, если точка привеса будет оставаться неподвижной, а вызывать колебания будет сила R , изменяющаяся по закону:

$$R = q \cdot \frac{Q}{g} \sin pt.$$

Ур-ие движения будет то же. Не изменится также движение, если вместо упругого стержня взять спиральную пружину или укрепить груз Q на балке, лежащей на двух опорах. Если вес пружины или балки мал по сравнению с весом груза Q , и все явление происходит в пределах упругости, то ур-ие будет того же вида, что и ур-ие (b). Растяжение пружины и прогиб балки будут пропорциональны действующим силам — меняется только коэффициент пропорциональности.

Рассмотрим в качестве примера такую задачу, имеющую практическое значение:

На балке, свободно лежащей на двух опорах, установлен по середине двигатель, вызывающий при некоторых скоростях значительные колебания. Подобные колебания не только обуславливают значительные напряжения в материале, но и расстраивают постепенно соединения: заклепочные, болтовые и т. д. Как, зная вес двигателя и размеры балки, установить те скорости, при которых возможно возникновение сильных вибраций? Если бы все части двигателя были вполне уравновешены, то не было бы вибраций. В действительности полного уравновешивания обыкновенно не достигают, и получаются при вращении машины силы инерции, обуславливающие вынужденные колебания. Законы, по которым эти силы инерции меняются, в зависимости от вре-

мени, могут быть довольно сложными. Мы предварительно разберем задачу в простейшем предположении.

Допустим, что действие неуравновешенных масс машины эквивалентно действию вращающегося груза q , насаженного на вал с эксцентриситетом r ¹⁾. В таком случае, при постоянной скорости вращения мотора, силы инерции приведутся к одной центробежной силе. Направление силы при вращении будет меняться, величина же остается постоянной, равной:

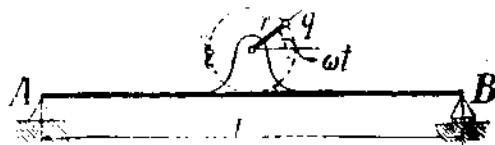
$$P = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{q}{g} \omega^2 r,$$

где g — ускорение силы тяжести, v^2 — квадрат скорости груза q и ω — угловая скорость вращения. Особый интерес представляет вертикальная составляющая центробежной силы, так как именно она вызывает поперечные колебания балки. Если угол поворота радиуса r будем отсчитывать от горизонтальной прямой (черт. 387), то вертикальная проекция центробежной силы будет:

$$R = P' \sin \omega t,$$

т.е. сила меняется так, как предполагалось ранее в рассмотренном случае вынужденных колебаний.

Мы будем иметь сильные колебания, когда угловая скорость вращения двигателя приближается по величине к k — частоте собственных „свободных колебаний“, которые совершает прикрепленный к балке груз Q при отсутствии внешних сил ²⁾.



Черт. 387.

Нахождение частоты колебаний k не представляет никаких затруднений, и с достаточной точностью может быть исполнено приближенным способом (§ 162). Опасная „критическая“ угловая скорость найдется из ф-лы:

$$\omega_{кр} = k = \sqrt{\frac{48EJg}{\left(Q + \frac{17}{35}Q_1\right)l^3}} \quad (338),$$

где через Q_1 обозначен вес балки.

Подобного же типа задачу представляет случай, описанный Sommerfeld'ом ³⁾ (черт. 388). Двигатель установлен в помещении, расположенном на железных вертикальных колоннах; требуется найти те скорости машины, при которых возникают сильные коле-

¹⁾ В таком виде поставлен опыт с вынужденными колебаниями в механ. лабор. Киев. пол. инст.

²⁾ Подобное действие оказывают избыточные противовесы паровозов на колебания мостов. Опыты показывают, что при определенных скоростях движения мосты под действием противовесов могут получать значительные колебания. См. F. E. Turneaure, Some experiments on bridges under moving train loads, Trans. Am. Soc. C. E., V. 41, стр. 410.

³⁾ Zeit. d. Ver. deutsch. Ing. 1904 г.

бания. Раз известны размеры колонн, вес здания и двигателя, то вычисление частоты собственных колебаний системы не представляет затруднений. Отличие от предыдущего случая то, что вынуждающей колебания силой будет горизонтальная составляющая сил инерции. Колонны придется рассматривать, как балки, заделанные нижним концом.

Критическая угловая скорость найдется из ф-лы:

$$\omega_{кр} = k = \sqrt{\frac{g}{f}} = \sqrt{\frac{3EJg}{\left(Q + \frac{33}{140}Q_1\right)B}} \quad (339),$$

где Q — вес здания и Q_1 — вес колонн.

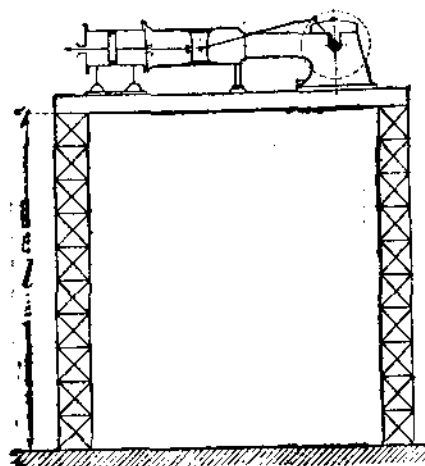
До сих пор мы полагали, что силы инерции могут быть заменены центробежной силой одного груза, вращающегося с той же скоростью, что и машина. В действительности выражение для сил инерции значительно сложнее, и вынуждающая колебания сила представляется в виде суммы целого ряда сил, при чем каждое из слагаемых меняется по закону $\sin$ 'а или $\cos$ 'инус'а с частотой, кратной угловой скорости машины. Если R попрежнему будет вынуждающая колебания сила, то в самом общем виде можно положить

$$R = P_1 \sin \omega t + P_2 \sin 2\omega t + P_3 \sin 3\omega t + \dots + Q_1 \cos \omega t + Q_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (a).$$

Для нас является существенным здесь то, что даже самую сложную силу, вызывающую колебания, мы можем представить в виде суммы членов, меняющихся по закону $\sin$ 'а и $\cos$ 'инус'а. Мы уже умеем находить действие каждого такого элемента. Чтобы получить действие силы R , придется только суммировать действия отдельных слагаемых. Действия сил складываются, так как движение выражается линейным дифференциальным уравнением.

Если период какого-либо слагаемого приближается к периоду собственных колебаний системы, то тогда амплитуда колебаний, соответствующих этому слагаемому, получает преобладающее значение и может достигнуть значительной величины, а следовательно, вызвать значительные дополнительные напряжения. Предположим, что $\omega = k$ (где k — частота собственных колебаний системы), тогда в выражении (а) преобладающее значение будут иметь члены: $P_1 \sin \omega t$ и $Q_1 \cos \omega t$. Если бы скорость машины была такова, что $2\omega = k$ или $3\omega = k$, то наиболее существенными членами были бы: $P_2 \sin 2\omega t$, $Q_2 \cos 2\omega t$, или $P_3 \sin 3\omega t$, $Q_3 \cos 3\omega t$ и т. д. Мы можем сделать такое заключение: если частота собственных колебаний равна или кратна угловой скорости ω вращения машины, то можно ожидать возникновения сильных вибраций¹⁾. Чтобы избежать вибраций и связанных с ними дополнительных напряжений, нужно изменить угловую скорость вращения или изменить частоту собственных колебаний системы. Этого можно достигнуть изменением размеров конструкции. Можно, например, уменьшить размеры балки в вышеописанном примере и этим уменьшением уничтожить вибрации и связанные с ними динамические напряжения.

¹⁾ Мы здесь ограничиваемся основным типом колебаний системы, имеющим обыкновенно наибольшее практическое значение.



Черт. 388.

§ 166. Колебания кручения.

С этого рода колебаниями приходится считаться главным образом при проектировании валов паровых машин. Оказывается, что при некоторых условиях в машинных валах могут возникнуть значительные колебания. Эти колебания вызывают большие дополнительные напряжения и в некоторых случаях могут послужить причиной поломки вала. Немецкий инженер Frahm¹⁾ опытным путем определял угол закручивания парового вала во время работы машины и по углу закручивания вычислял соответствующие напряжения. Опыты показали, что при известной скорости вращения вала возникают сильные колебания, и напряжения изменяются в пределах $+600$ до -166 kg/cm^2 (вал был рассчитан на напряжения 218 kg/cm^2). Таким образом, меняется не только величина, но и знак напряжения. Очевидно, те скорости, при которых наблюдаются особенно сильные колебания, соответствуют явлению резонанса. Чтобы устранить возможность появления сильных колебаний, нужно уметь вычислять период собственных колебаний вала по его размерам, и размеры эти выбирать так, чтобы период собственных колебаний вала не совпадал с периодом полного оборота машины.

Изучение колебаний кручения начнем с такого простейшего случая. Имеется стержень AB (черт. 386) кругового поперечного сечения с насаженным на свободном конце шкивом. Если верхний конец A стержня закрепить, а нижний конец, снабженный шкивом, повернуть на некоторый угол α и потом предоставить его самому себе, то возникнут колебания кручения. Период этих колебаний будет зависеть от размеров стержня, свойств материала и от размера шкива. Возьмем одно из положений шкива, через которое он проходит при колебаниях. Пусть φ — соответствующий угол закручивания; тогда момент сил упругости скрученного стержня, действующий на шкив AB , будет иметь значение:

$$M = -\frac{\varphi GJ_p}{l}.$$

Ур-не движения шкива (пренебрегая сопротивлениями) будет:

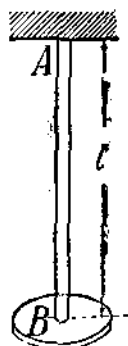
$$\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{GJ_p}{l} \varphi = 0, \text{ или } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k^2 \varphi = 0, \text{ где } k = \sqrt{\frac{GJ_p}{\theta l}},$$

и θ — момент инерции шкива относительно оси вращения. Общий интеграл полученного ур-ия будет:

$$\varphi = A \sin kt + B \cos kt.$$

Принимая во внимание, что в начальный момент $\varphi = \alpha$ и $\varphi' = 0$, будем иметь:

$$\varphi = \alpha \cos kt.$$



Черт. 389.

¹⁾ H. Frahm, Neue Untersuchungen über dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen v. Schiffsmaschinen. Zeit. d. Ver. deutsch. Ing., 1902 г., стр. 797.

Получаем уже знакомое нам периодическое колебательное движение частоты k .
Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta I}{GJ_p}} \quad (340).$$

Вычисление частоты колебаний и периода их по полученным ф-лам не представляет затруднений.

Если на шкив действует переменный момент

$$M = -N \sin pt,$$

скручивающий стержень, и сопротивление среды, пропорциональное скорости, то ур-ие движения получает вид:

$$\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{GJ_p}{I} \varphi + \beta \varphi' = N \sin pt, \quad \text{или:} \quad \varphi'' + 2n\varphi' + k^2\varphi = q \sin pt \quad (a),$$

где

$$2n = \frac{\beta}{\theta}; \quad q = \frac{N}{\theta}.$$

Ур-ие (a), совпадающее с ур-ием (b) (§ 164), представляет собой колебания в случае действия внешних раскачивающих сил. Размахи, или амплитуда колебаний, могут достигнуть значительной величины, когда p — частота вызывающего колебания момента близка к величине k — частоте собственных колебаний системы.

Пользуясь приближенным методом, мы без затруднений можем оценить влияние массы стержня на период колебания шкива. Допустим, что при этом тип колебаний такой же, как и в случае невесомого стержня, тогда поворот какого-либо сечения стержня, находящегося в расстоянии ξ от закрепленного конца, будет равен $\frac{\varphi \xi}{l}$, где φ — угол поворота шкива. Если через θ обозначим момент инерции элемента стержня длиной единица, относительно оси стержня, то кинетическая энергия стержня будет равна:

$$\int_0^l \left(\frac{\varphi \xi}{l} \right)^2 \frac{\theta d\xi}{2} = \frac{1}{3} \frac{(\varphi')^2 \theta l}{2}.$$

На основании полученного результата заключаем, что для определения влияния массы стержня на период колебаний шкива нужно к моменту инерции шкива присоединить одну треть момента инерции стержня.

От рассмотренного простейшего случая колебаний легко перейти к более сложной задаче, особенно часто встречающейся на практике. На концах вала имеются шкивы с моментами инерции θ_1 и θ_2 (черт. 390), требуется найти частоту собственных колебаний этой системы. Если вал скрутить двумя равными



Черт. 390.

и прямо противоположными парами сил и потом предоставить систему самой себе, то шкивы будут совершать колебательные движения, вращаясь около оси AB . Во время этих колебаний в каждый момент шкивы будут вращаться в противоположные стороны, следовательно, между

шкивами на валу АВ можно будет найти сечение m , остающееся при колебаниях неподвижным. Сечение это назовем „узловым сечением“. Для каждой половины вала оно играет роль закрепленного сечения, и расстояния l_1 и l_2 могут быть найдены из того условия, что периоды колебаний обеих частей вала должны быть одинаковы. Продолжительности этих периодов на основании ф-лы (340) представляются так:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_1 l_1}{GJ_p}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_2 l_2}{GJ_p}},$$

откуда:

$$\sqrt{\frac{\theta_1 l_1}{GJ_p}} = \sqrt{\frac{\theta_2 l_2}{GJ_p}},$$

или

$$\theta_1 l_1 = \theta_2 l_2, \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Узловое сечение подразделяет вал на участки, обратно пропорциональные моментам инерции шкивов. Если принять во внимание, что $l_1 + l_2 = l$, то получим:

$$l_1 = \frac{\theta_2 l}{\theta_1 + \theta_2}, \quad l_2 = \frac{\theta_1 l}{\theta_1 + \theta_2},$$

и, следовательно, искомый период собственных колебаний будет равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_1 \theta_2 l}{GJ_p (\theta_1 + \theta_2)}} \quad (341),$$

а частота колебаний:

$$h = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GJ_p (\theta_1 + \theta_2)}{\theta_1 \theta_2 l}} \quad (342).$$

В виде численного примера рассмотрим такой случай. Пароходная машина тройного расширения, мощностью 3000 л. с., делает нормально 75 оборотов в минуту. Вал имеет длину $l = 50$ м и диаметр $d = 35$ см. Модуль упругости G примем равным 880000 кг/см². Вес гребного винта 6480 кг. Соответствующий радиус инерции 1 м. Вес кривошипов машины 4500 кг с радиусом инерции 0,40 м. Вес движущихся частей машины, которые должны быть прибавлены к кривошипу, равен 7750 кг. Соответствующий радиус инерции 0,60 м.

По этим данным определяем (массы приводим к радиусу 60 см):

$$\theta_1 = \frac{4500}{981} 40^2 + \frac{7750}{981} 60^2 = \frac{9750}{981} 60^2 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$$

(момент инерции кривошипов и движущихся частей машины),

$$\theta_2 = \frac{6480}{981} 100^2 = \frac{18000}{981} 60^2 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$$

(момент инерции гребного винта). Число собственных колебаний системы в минуту будет:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GJ_p (\theta_1 + \theta_2)}{\theta_1 \theta_2 l}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{880000 \cdot 14700 \cdot 27750 \cdot 3600 \cdot 981}{5000 \cdot 9750 \cdot 18000 \cdot 3600}} = 319.$$

При более точном подсчете периода собственных колебаний приходится иметь дело с следующими двумя обстоятельствами ¹⁾:

1) Вал обыкновенно бывает переменного сечения. В таком случае, вместо действительной длины l вала, нужно будет взять некоторую фиктивную длину l' , которая получается приведением отдельных участков вала к какому-либо одному общему диаметру. Положим, на валу имеется утолщение диаметра D на протяжении a ; благодаря этому утолщению, вал делается жестче, его угол закручивания при одном и том же скручивающем моменте будет меньше, чем для вала однообразного диаметра d . Углы закручивания прямо пропорциональны длинам и обратно пропорциональны моментам инерции поперечных сечений, т.е. четвертым степеням диаметров, следовательно, жесткость вала не изменится, если вместо участка a диаметра D вставить участок длины

$$a_1 = a \left(\frac{d}{D} \right)^4$$

диаметра d . Этим способом мы всегда можем вал переменного сечения привести к некоторому фиктивному валу постоянного диаметра.

II) Для более точного подсчета периода собственных колебаний вала приходится иногда принимать во внимание массу самого вала и его собственный момент инерции θ_0 . Принимая во внимание выражения для l_1 и l_2 , найдем, что для приблизительной оценки влияния массы вала нужно вместо θ_1 и θ_2 вставить такие величины

$$\theta_1 + \frac{\theta_0}{3} \frac{l_1}{l_1 + l_2} \quad \text{и} \quad \theta_2 + \frac{\theta_0}{3} \frac{l_2}{l_1 + l_2} \quad (343).$$

Если введем эту поправку для вышеприведенного примера, то, вместо $n = 319$, получим $n = 315$. Если машина будет делать не 75, а, например, 78 или 79 оборотов в минуту, то можно ожидать возникновения сильных колебаний, так как $79.4 = 316$; $78.4 = 312$ 79 — 78 оборотов в минуту будет критической угловой скоростью.

Отклонение от критической скорости на 5 или 6 оборотов, как показали опыты Frahm'a, вполне достаточно для обеспечения спокойного хода машины.

При расчетах паровых валов обыкновенно заранее известно нормальное число оборотов машины, длина вала, размеры гребного винта. Диаметр вала нужно подобрать так, чтобы частота собственных колебаний вала не была кратной угловой скорости вращения при нормальном ходе машины. Иногда приходится для этой цели уменьшать диаметр вала, и такое уменьшение размеров, прекращая колебания, уменьшает дополнительные динамические напряжения и, следовательно, увеличивает прочность вала.

* ¹⁾ Более подробное исследование колебания валов имеется в нашей работе: О явлениях резонанса в валах, Изв. Петерб. пол. инст., 1905 г. В ней применен метод Rayleigh'a для оценки влияния массы вала и разобран случай вала с тремя шкивами.

Точное решение задачи о колебании вала с двумя шкивами имеется в нашей работе: О вынужденных колебаниях призматических стержней, Изв. Киев. пол. инст., 1910 г.

Вопрос о колебании валов с тремя шкивами рассмотрен Roth'ом, Zeit. f. Ver. deutsch. Ing., 1904 г.

§ 167. Колебание балки под действием подвижной нагрузки.

При расчетах мостовых балок, подвергающихся действию подвижных грузов, напряжения обыкновенно определяют из условий статики: предполагают, что из одного положения в другое подвижная нагрузка переходит с бесконечно малой скоростью. Насколько же отличаются полученные таким путем напряжения от истинных, и как влияет на напряжения скорость подвижной нагрузки? В полном виде задача эта еще не решена, но влияние некоторых факторов уже в достаточной мере выяснено.

Мы рассмотрим здесь влияние сил инерции катящегося груза и влияние колебаний балки. Если вес катящегося груза велик по сравнению с весом балки, то в первом приближении массой балки можно пренебречь и принять в расчет только силы инерции катящегося груза P (черт. 391). При бесконечно малой скорости движения вертикальные силы инерции также бесконечно малы, и прогиб под грузом может быть определен по известной ф-ле (§ 78):

$$y = \frac{P(lx - x^2)^2}{3lEJ} \quad (a).$$

В виде первого приближения¹⁾ можно принять, что и при конечной скорости движения v м/сек траектория движения груза P определяется тем же ур-нем (a).

В таком случае легко вычислить дополнительное давление груза на балку, обусловленное силами инерции. Выражение для вертикальной составляющей сил инерции будет:

$$Q = -\frac{P}{g} \frac{d^2y}{dt^2},$$

или, принимая во внимание, что $x = vt$, и вставляя вместо y его значение (a), найдем

$$Q = -\frac{Pv^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Pv^2}{g} \frac{2P}{3lEJ} (l^2 - 6lx + 6x^2).$$

Наибольшее значение сил инерции получим для середины пролета, когда $x = \frac{l}{2}$.

$$Q_{\max} = -\frac{Pv^2}{g} \frac{Pl}{3EJ}.$$

Полное давление груза на балку в этом месте будет равно:

$$P + Q = P \left(1 + \frac{v^2 Pl}{3EJg} \right) = P \left(1 + \frac{16v^2}{l^2} \frac{f_{st}}{g} \right) = P \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (311)$$

где

$$f_{st} \approx \frac{Pl^3}{48EJ} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\beta} = \frac{16v^2}{l^2} \frac{f_{st}}{g}.$$

При обычных значениях скорости v и допускаемых в мостах величинах отношения $f_{st} : l$, значение $\frac{1}{\beta}$ мало, и ф-ла (311) довольно точно оценивает влияние сил инерции катящегося груза.

¹⁾ Это приближенное решение принадлежит проф. Willis'у, занимавшемуся вопросом о колебании мостов в знаменитой английской комиссии по испытанию железа (1846 г.). Подробное изложение решения имеется в курсе теории упругости Clebsch'a, перев. S.-Venant'a, стр. 597.

Точное решение задачи о деформации невесомой балки под действием катящегося по ней тяжелого груза принадлежит английскому ученому G. G. Stokes'у ¹⁾. На основании его результатов можно дать такую приближенную ф-лу для давления груза по середине пролета:

$$P + Q = P \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right) \quad (345)$$

Если катящийся по балке груз представляет собой ось паровоза или вагона, то, кроме веса колесного ската P , нужно принять во внимание давление P_1 , передаваемое на ось через рессору. Давление это можно считать постоянным, не меняющимся от прогиба балки. Тогда давление оси на балку вычислится по ф-ле:

$$P_1 + P \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right).$$

Величина P_1 , обыкновенно в несколько раз больше P , поэтому даже при малых значениях β влияние сил инерции не велико. По подсчетам Zimmernann'a, дополнительное давление, обусловленное силами инерции, в самом невыгодном случае (при скорости 100 km в час и высоте балки 30 cm) не превосходит 14% от статического давления.

Задавись траекторией движения (а) для катящегося груза, можно элементарным путем оценить также и влияние массы балки. Мы ограничимся здесь окончательным результатом для величины наибольшего значения изгибающего момента ²⁾:

$$M_{\max} = -\frac{Pl}{4} \left(1 + \frac{1}{\beta - 3} \right) + \frac{Ql}{8} \left(1 + \frac{5}{4} \frac{1}{\beta} \right) \quad (346)$$

Первый член этого выражения представляет изгибающий момент от действия катящегося груза, второй член дает нам изгибающий момент от собственного веса балки Q . Полученные ф-лы с достаточной точностью учитывают влияние динамических причин лишь в том случае, когда вес балки мал по сравнению с весом катящегося груза. С увеличением длины балки влияние ее веса быстро возрастает, и в мостах больших пролетов собственный вес имеет большее значение, чем вес катящихся грузов. В этом случае для получения приближенного решения можно пренебречь силами инерции катящихся грузов и привести задачу к исследованию колебаний балки под действием переменных сил ³⁾. Для оценки условий, при которых вынужденные колебания могут достигнуть

¹⁾ G. G. Stokes, Discussion of a differential equation relating to the breaking of Railway Bridges, Mathemat. and Phys. Papers, V. II, стр. 179.

Решение той же задачи на пятьдесят лет позже появилось в часто цитируемой работе Zimmernann'a: Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last.

Решение задачи путем приведения ее к ур-ию в конечных разностях выполнено в интересной работе Н. П. Петрова. Влияние поступательной скорости колеса на напряжения в рельсе, Зап. имп. русск. техн. об-ва, 1903 г.

См. также наши работы: К вопросу о прочности рельс, Сборник инст. инж. путей сообщ., 1915 г., и К вопросу о вибрациях рельс, Изв. электрот. инст., 1915 г.

²⁾ Подробный вывод можно найти в вышецитированной книге Ciesch'a, стр. 609.

³⁾ Уже Stokes заметил, что движение грузов должно вызывать в балке колебания. Для определения этих колебаний им был применен приближенный метод, изложенный в дополнении к вышецитированной работе.

Точное решение задачи о колебаниях балки в том случае, когда массой катящегося груза можно пренебречь, дал А. Н. Крылов, Ueber die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben, Mathem. Annalen, Bd. 61.

Иной метод исследования той же задачи дан в нашей работе: О вынужденных колебаниях призматических стержней. Там же рассмотрен вопрос о влиянии противовесов на колебания мостов.

большой величины, весьма важно знать период основных колебаний балки, что возможно сделать ранее изложенным (§ 162) приближенным методом. Если балка имеет постоянное сечение, то период ее колебаний вычисляется по ф-ле (335). При помощи этой ф-лы нами составлена нижеследующая таблица для периода колебаний T при различных пролетах моста. При вычислениях вес моста определялся по таблицам для собственного веса мостов под железную дорогу ¹⁾, высота моста принята равной 0,1 пролета и допускаемые напряжения равными 800 kg/cm². Влияние деформации решетки на прогиб моста не принято во внимание, поэтому вычисленные значения T , вероятно, меньше действительных.

ТАБЛИЦА.

Пролет моста	l м =	10	20	40	60	80	100
Период основ. колеб.	T сек =	0,046	0,079	0,129	0,181	0,226	0,270
Для $v = 10$ м/сек	α =	0,023	0,020	0,016	0,015	0,014	0,0135
Для $v = 30$ м/сек	α =	0,069	0,060	0,048	0,045	0,042	0,040

При перемещении по балке груза амплитуда вынужденных колебаний будет зависеть от скорости движения. Наибольший размах получается в случае резонанса, когда время, необходимое для пробега грузом пролета моста, равно половине периода основных колебаний, т.е. когда:

$$T = \frac{2l}{v}.$$

Из вышеприведенной таблицы видно, что при обычных условиях явление резонанса невозможно, так как отношение:

$$\alpha = T : \frac{2l}{v}$$

представляет собой малую величину. Значения этой величины для двух скоростей приведены в таблице. Вычисления показывают, что в случае движущегося груза соотношение между динамическим и статическим прогибами с достаточной точностью можно представить так:

$$f_d = f_{st}(1 + \alpha) \quad (347).$$

Принимая во внимание обычные значения α , заключаем, что возрастание прогиба, обусловленное быстрым накатыванием грузов, не велико. Гораздо большее влияние на раскачивание моста могут оказать противовесы паровозных колесных скатов. Если полный оборот колеса совершается за промежуток времени, равный периоду основных колебаний T , то мы будем иметь явление резонанса, и можно ожидать возникновения значительных колебаний ²⁾. В случае мостов под обыкновенную дорогу значительные

¹⁾ Der Brückenbau, Handb. d. Ingenieurwiss., II Bd., 2 Abt., стр. 6.

²⁾ Если пренебречь сопротивлением среды, то в самом невыгодном случае амплитуда вынужденных колебаний может в 15—25 раз превосходить прогиб $\frac{Pl^3}{48EI}$, где P — силы инерции противовеса. Для быстрых паровозов P достигает 5 т.

колебания могут возникнуть при прохождении толпы, идущей в ногу. Здесь период изменения нагрузки равен времени, соответствующему одному шагу, и явление резонанса может наступить в случае мостов с большим периодом собственных колебаний. Такое условие мы имеем висячих мостах.

Кроме дополнительных напряжений, обусловленных колебаниями моста, приходится принимать во внимание также влияние и других динамических причин. Большое значение, в особенности для мостов малых пролетов, могут иметь удары колес на рельсовых стыках, удары от износившихся бандажей и от неровностей пути. Решение этих вопросов чисто теоретическим путем невозможно, необходимо параллельное экспериментальное исследование колебаний мостов при прохождении поездов и изменений в напряжениях отдельных частей. Таких опытов до сих пор делалось очень мало, и их далеко не достаточно, чтобы удовлетворительно оценить влияние различных динамических причин на напряжения.

§ 168. Критическая скорость для гибкого вала Лавалья.

Теория гибких валов приобретает особый практический интерес в связи с широким распространением, какое находят в различных областях техники паровые турбины. Большие угловые скорости обуславливают целый ряд своеобразных конструкций, к которым принадлежит и гибкий вал Лавалья. При самом точном изготовлении центр тяжести диска, насаженного на вал, может не совпадать с осью вращения, и при расчете придется иметь дело с силами инерции, изгибающими вал. При больших угловых скоростях влияние этих сил возрастает, и даже небольшие неточности могут быть причиной весьма значительных дополнительных напряжений. Для примера возьмем турбинное колесо, диаметра 760 мм, имеющее скорость на ободе 420 м/сек. Если к ободу прикрепить массу в 0,1 кг, то соответствующая ей центробежная сила будет равна:

$$P = \frac{0,1 \cdot 420^2}{9,81 \cdot 0,38} = 5000 \text{ kg.}$$

Таким образом, ничтожная неточность в изготовлении может повлечь за собой весьма опасные напряжения. Введение в практику гибких валов устраняет эту опасность и дает возможность достигать спокойного хода машины при огромных скоростях.

Рассмотрим такой простейший случай. На невесомом валу AB (черт. 392), с опорами в точках A и B , насажен по середине пролета диск m . Центр тяжести диска O не совпадает с осью вращения AB , и эксцентриситет равен e . При вращении диска, благодаря эксцентриситету, вал будет изгибаться центробежной силой:

$$P = m(y + e) \omega^2 \quad (a),$$

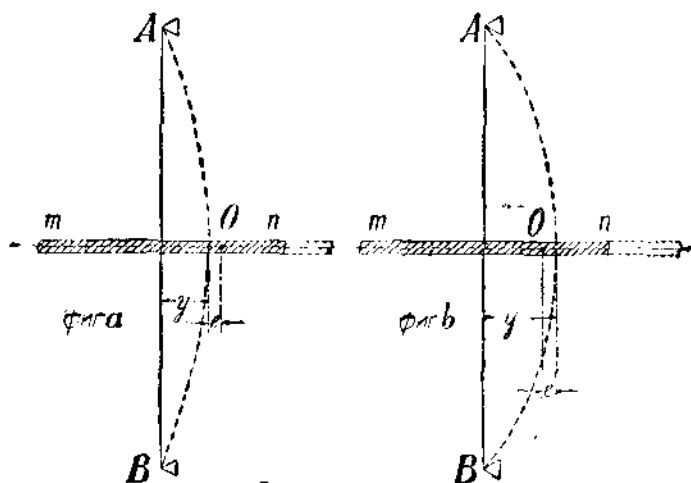
где y — прогиб вала по середине пролета и m — масса колеса. Прогиб y может быть выражен через величину изгибающей силы и размеры вала так:

$$y = \frac{1}{2} P,$$

где α имеет различные значения, в зависимости от закрепления концов A и B

$$\alpha = \frac{P}{48 EJ} \text{ — при опертых концах;}$$

$$\alpha = \frac{P}{192 EJ} \text{ — при заделанных концах.}$$



Черт. 392.

Вставляя выражение для P через α и y в ур-ие (а), найдем:

$$y = \frac{\alpha m \omega^2}{1 - \alpha m \omega^2} \quad (б).$$

При малом значении ω и прогибы будут малы, следовательно, малы и соответствующие им напряжения. Величина прогиба будет быстро возрастать с приближением знаменателя в выражении (б) к нулю. Когда

$$1 - \alpha m \omega^2 = 0,$$

прогиб обращается в бесконечность. Такой результат указывает на возможность появления значительных искривлений вала. Чтобы перейти эту скорость, при опытах приходится устраивать особые приспособления для устранения возможности появления сильных поперечных колебаний. Скорость, соответствующую этому моменту, называют „критической скоростью“, величина ее равна:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{1}{\alpha m}} \quad (348).$$

Соответствующее время одного оборота равно:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} \quad (349).$$

Здесь через f обозначен тот прогиб, который получает вал под действием собственного веса турбинного диска.

Следовательно, критическая скорость равна частоте колебаний математического маятника, длина которого равна прогибу вала или равна частоте поперечных колебаний вала с насаженным по середине диском. Получаем такой вывод: чтобы определить, каково число оборотов n , при котором вал испытывает сильные колебания, начинает „бить“, нужно положить вал с насаженным по середине колесом на две опоры и вызвать каким-либо образом поперечные колебания. Число этих колебаний в минуту как раз будет равно числу оборотов n , при котором вал „бьет“. Явления, соответствующие критической скорости, можно, следовательно, рассматривать как вынужденные колебания под действием сил инерции неуравновешенных масс. Раз критическая скорость достигнута, то, как бы прочен вал ни был, он должен был бы сломаться, если бы не было сопротивлений, препятствующих боковым колебаниям.

Если перейти за критическую скорость, то, как показывает опыт, опять можно получить спокойный ход — вал перестает „бить“. Оказывается, что в этом случае центр тяжести турбинного диска располагается не так, как мы предполагали на фиг. а, между геометрической и искривленной осью вала. Относительное расположение представлено на фиг. b, и выражение для центробежной силы будет:

$$P = m(y - e)\omega^2.$$

Прогиб y определится из ур-ня

$$y = \alpha P = \alpha m(y - e)\omega^2,$$

откуда

$$y = \frac{\alpha m e \omega^2}{\alpha m \omega^2 - 1} = \frac{e}{1 - \frac{1}{\alpha m \omega^2}},$$

или, на основании ф-лы (348):

$$y = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}.$$

Ф-ла эта получена для скоростей, больших критической.

Мы видим, что увеличение скорости все уменьшает прогибы, и в пределе $y = e$, т.-е. получается стремление диска установиться таким образом, чтобы его центр тяжести лежал на геометрической оси вала. Вал, при этом, искривившись, описывает некоторую поверхность вращения. Что эта форма движения, устанавливающаяся при скоростях больших критической, устойчива, подтверждается опытом и может быть доказано также и аналитически¹⁾.

Теперь становится ясной выгода применения гибкого вала. В самом деле; прогибы y тем меньше, чем меньше отношение $\omega_{кр}:\omega$. Уменьшить это отношение мы можем, уменьшая числитель, следовательно, уменьшая жесткость вала, — делая вал гибким.

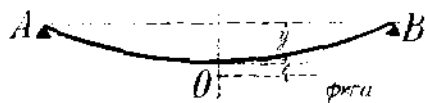
¹⁾ См. Föppl, Technische Mechanik, Bd. IV; F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft 4, § 9.

Если на невесомом валу закреплено два диска, то будем иметь два различных типа поперечных колебаний, и соответственно этому можно найти два значения критической угловой скорости. С увеличением числа дисков исследование вопроса о критических скоростях становится все более трудным, и на практике пользуются или эмпирической ф-лой Dunkerley'я ¹⁾ или приближенным графическим методом ²⁾. По Dunkerley'ю критическая угловая скорость ω , при наличии нескольких дисков, определится из условия:

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_{i=1,2,\dots} \frac{1}{\omega_i^2} \quad (с)$$

где ω_i — критическая угловая скорость, вычисленная для того случая, когда на валу имеется только диск порядка i . Суммирование в приближенной ф-ле должно быть распространено на все значения i ³⁾.

В предыдущих рассуждениях мы предполагали ось вала расположенной вертикально и таким образом исключили влияние собственного веса диска на величину биения. Если ось вала расположить горизонтально и оценить влияние собственного веса диска, то получим для $\omega_{кр}$ значения меньшие, чем то было найдено для вертикально расположенного вала ⁴⁾.



Покажем это на случае одного диска, закрепленного с эксцентриситетом e . Вследствие действия собственного веса точка O , в которой мы предполагаем сосредоточенной массу диска m (черт. 393), будет двигаться не по кругу, а по более сложной кривой. К вращению с постоянной угловой скоростью присоединится еще движение точки O в радиальном направлении.

При составлении дифференциального ур-ня движения точки O по направлению Y нужно будет для сил инерции написать выражение:

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \omega^2 (y + e).$$

Тогда, пользуясь началом Даламбера и проектируя все силы действующие на точку O , на направление оси Y , получим:

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} + m \omega^2 (y + e) + mg \cos \omega t - \frac{y}{2} = 0,$$

откуда:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m} - \omega^2 \right) y = g \cos \omega t + \omega^2 e.$$

Черт. 393.

¹⁾ Phil. Trans. Lond. Soc., т. 185, стр. 270.

²⁾ Метод этот изложен в книге А. Stodola, Die Dampfturbinen, 4 изд., стр. 301.

³⁾ Формула (с) с достаточной точностью подтверждена опытами Dunkerley'я и А. Stodola, см.: Die Dampfturbinen, стр. 306.

Теоретическое исследование значения критических скоростей при нескольких дисках имеется в работе С. Chree, Phil. Mag., 1904 г., стр. 504.

Решение той же задачи при помощи метода Ritz'a намечено нами в работе: Вопросы прочности в паровых турбинах, Вестн. ф-ва технологов, 1912 г.

⁴⁾ Выяснению вопроса о влиянии собственного веса на $\omega_{кр}$ посвящена статья в Engineering, 1916 г., стр. 152, 197.

Мы получили таким образом, дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний по оси Y . Множитель

$$\frac{1}{ma} - \omega^2$$

представляет собой квадрат частоты собственных колебаний системы. Величина ω — представляет частоту вынуждающей колебания силы. Явление резонанса, соответствующее „биению“ вала, будем иметь, когда

$$\frac{1}{ma} - \omega^2 = \omega^2,$$

откуда:

$$\omega_{кр} = \frac{1}{1 \cdot 2} \sqrt{\frac{1}{ma}} \quad (348').$$

Сравнивая это с формулой (348), заключаем, что при горизонтальном расположении вала $\omega_{кр}$ уменьшается по сравнению с тем, что мы имели для вертикального вала, в отношении

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§ 169. Критическая угловая скорость для ненагруженного вала.

Предположим, что поперечное сечение вала постоянно по длине и центр тяжести каждого сечения совпадает с геометрической осью вращения. В таком случае нет внешних причин, которые вызвали бы искривление вала. Мы, для определения критического значения угловой скорости, будем пользоваться несколько иным приемом, чем в предыдущем параграфе. Начнем с рассмотрения поперечных колебаний вала. Пока вал не вращается, он противодействует всякому изгибу; если его отклонить от положения равновесия и потом предоставить самому себе, то он совершает колебания около положения равновесия, и частота колебаний будет тем большая, чем, при одном и том же весе, вал жестче. Жесткостью изгиба измеряется та восстанавливающая сила, которая стремится вернуть валу первоначальную форму равновесия. Если вал вращается с какой-либо постоянной скоростью, а мы искривим его ось, то, пока скорость вращения меньше критической, вал после ряда поперечных колебаний опять вернется в свое прямолинейное состояние, но опыт показывает, что сила, восстанавливающая прямолинейную форму, как бы ослабляется. Это происходит благодаря влиянию центробежной силы, действующей на отдельные элементы изогнутого вала. В самом деле: при вращении на каждый элемент изогнутого вала приходится центробежная сила $\frac{q}{g} \omega^2 u dx$, где q — вес единицы длины вала. Вал оказывается как бы нагруженным сплошной нагрузкой, пропорциональной в каждом сечении величине прогиба. Увеличивая угловую скорость вращения, мы увеличиваем и интенсивность сплошной нагрузки. Можно в заключение достигнуть такой скорости, что сила инерции будет достаточно для того, чтобы удержать вал в искривленном состоянии. Соответствующая этому скорость будет критической, так как при ней всякая случайная причина может повлечь за собой сильное искривление. Для нахождения критической угловой скорости составим дифференциальное уравнение искривленной оси вала. Воспользуемся тем, что вторая производная от изгибающего момента в каждом сечении равна интенсивности сплошной нагрузки, следовательно (§ 96):

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q}{g} \omega^2 y.$$

Общий интеграл этого ур-ия будет:

$$v = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C \sin \alpha x + D \cos \alpha x,$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{q\omega}{gEJ}} \quad (350).$$

Найдем те значения α , a , следовательно, и ω , при которых будут удовлетворены условия на опертых концах вала:

$$\text{при } x=0: \quad v=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0; \quad \text{при } x=l: \quad v=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0.$$

Для определения произвольных постоянных имеем условия:

$$\text{I)} \quad A + B + D = 0; \quad \text{II)} \quad A\alpha^2 + B\alpha^2 - D\alpha^2 = 0;$$

$$\text{III)} \quad Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l} + C \sin \alpha l + D \cos \alpha l = 0;$$

$$\text{IV)} \quad A\alpha^2 e^{\alpha l} + B\alpha^2 e^{-\alpha l} - C\alpha^2 \sin \alpha l - D\alpha^2 \cos \alpha l = 0.$$

Из I и II условий следует, что $D = 0$, $A = -B$. Для того, чтобы удовлетворить условиям III и IV, нужно положить:

$$A = -B = 0; \quad \sin \alpha l = 0 \quad (a).$$

Полученное условие (a) дает нам возможность определить то значение α , при котором возможны искривленные формы вала. Наименьшую угловую скорость, при которой возможно искривление, получим, положив $\alpha = \frac{\pi}{l}$, тогда, на основании ф-лы (350):

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}} \quad (351).$$

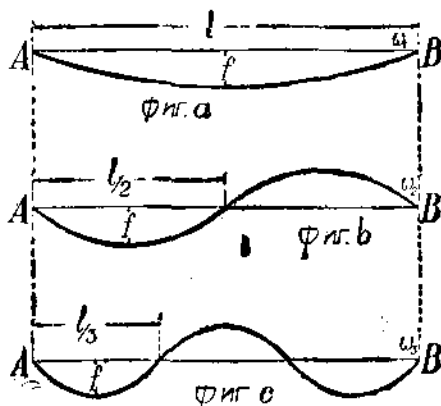
Соответствующий период одного оборота вала равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{кр}} = 2\pi \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{EJg}}.$$

Полученная ф-ла совпадает с ф-лой (335'). Следовательно, и в данном случае критическая скорость совпадает с частотой поперечных колебаний стержня. Если бы мы положили в ур-ия (a) $\alpha = \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \dots$, то получили бы другие формы искривления (черт. 394), соответствующие высшим типам поперечных колебаний. Каждой такой форме соответствует своя критическая скорость, и отношение между скоростями будет:

$$\omega_{1кр} : \omega_{2кр} : \omega_{3кр} = 1 : 4 : 9.$$

Постепенно увеличивая скорость вращения, можно на опыте наблюдать различные типы колебаний и различные критические скорости.



Черт. 394.

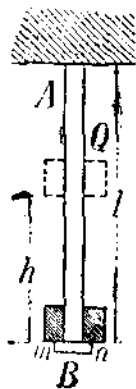
Если на валу имеется ряд дисков, то при равномерном их распределении по длине вала можно общую массу дисков разделить на длину вала и при вычислении критической скорости пользоваться данными, выведенными для вала постоянного диаметра (ф-ла 351). Нужно только помнить, что диски, увеличивая массу вала, не увеличивают его жесткости ¹⁾.

§ 170. О напряжениях при ударе.

При рассмотрении задач статики предполагалось, что приложенные силы возрастают от нуля до своего конечного значения так, что во всякий момент имеется равновесие между внешними силами и внутренними силами упругости. Только при таких условиях прилагаемая нагрузка не вызовет в упругой системе колебаний и связанных с этим дополнительных напряжений. В действительности, части инженерных сооружений и машинные конструкции несут не только спокойную статически приложенную нагрузку, но часто подвергаются действию внезапно приложенных сил и испытывают удары. Вызываемые этими причинами напряжения часто достигают весьма значительной величины и должны быть введены в расчет. Мы начнем с определения деформаций и напряжений, вызываемых ударом в стержнях, т.-е. в телах, два измерения которых можно считать малыми по сравнению с третьим. Задачи эти решаются очень просто в том случае, если пренебречь массой стержня, а, следовательно, и соответствующими силами инерции ²⁾. Только благодаря влиянию сил инерции, действие, воспринимаемое стержнем в какой-либо точке, передается другим точкам не мгновенно, а требует конечного промежутка времени. Если пренебречь массой стержня (что можно сделать в том случае, когда она мала по сравнению с массой ударяющего тела), то придется решать задачу статики, придется находить деформации стержня под действием силы, приложенной в месте удара. Величина этой силы в каждый момент будет пропорциональна вызываемым ею деформациям (предполагается, что напряжения при ударе не превосходят предела упругости).

Определение соответствующих напряжений покажем на частных примерах.

Вертикальный стержень AB (черт. 395) длины l закреплен верхним концом неподвижно. Нижний свободный конец воспринимает удары груза Q , который при падении свободно (без тре-



Черт. 395.

¹⁾ Сопротивление дисков изменению наклона их оси вращения рассмотрено в сочинении Stodola, *Die Dampfturbinen*, 4 изд., стр. 288 и 298.

²⁾ Это первое приближение, при исследовании удара, имеется в книгах:

Th. Young, *A course of lectures on natural philosophy*, 1807 г., стр. 135.

I. V. Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle*, 3 изд., 1870 г., стр. 418.

ния) движется по оси стержня. В момент соприкосновения груза Q с утолщением mn (начало удара) скорость груза будет равна:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Дальнейшему свободному движению падающего груза мешает утолщение mn . Давление, передаваемое от груза на это утолщение, очевидно, будет растягивать стержень, и растяжение будет продолжаться до тех пор, пока скорость груза не обратится в нуль. Соответствующее этому моменту наибольшее удлинение λ может быть легко вычислено. Для этого нужно работу силы тяжести, действующей на груз Q , приравнять потенциальной энергии, накопленной в стержне AB при растяжении его на величину λ ; получаем:

$$Q(h + \lambda) = \frac{\lambda^2 EF}{2l}.$$

Решая полученное уравнение относительно λ , находим:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + 2\lambda_{st}h} \quad (352),$$

где через λ_{st} обозначена величина $\frac{Ql}{EF}$, представляющая статическое удлинение стержня AB под действием груза Q . Если высоту падения h выразить через скорость v , которую груз Q имеет в момент начала удара, то ф-ла (352) может быть представлена в таком виде:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + \frac{\lambda_{st} v^2}{g}} \quad (352').$$

Положив $v = 0$, найдем $\lambda = 2\lambda_{st}$, т.е. внезапно приложенный груз вызывает в первый момент удлинения, вдвое большие тех, которые соответствуют положению равновесия. [Результат этот был уже нами получен раньше (§ 21).]

Определим теперь величину растягивающих напряжений p_{max} , соответствующих наибольшему удлинению λ :

$$p_{max} = \frac{\lambda}{l} E.$$

Подставляя вместо λ его значение (352') и вместо λ_{st} — величину $\frac{Ql}{EF}$, найдем

$$p_{max} = \frac{Q}{F} + \sqrt{\left(\frac{Q}{F}\right)^2 + \frac{QE}{Fl} \frac{v^2}{g}} \quad (353).$$

Величина напряжения зависит, как мы видим, не только от площади поперечного сечения стержня, но и от его длины. Чем длина l больше, тем напряжения при ударе будут меньше.

При значительной высоте падения h величиной λ_{st} можно пренебречь по сравнению с h ; тогда для наибольшего удлинения λ получим ф-лу:

$$\lambda = \sqrt{2\lambda_{st}h} = \sqrt{\lambda_{st} \frac{v^2}{g}} \quad (354).$$

Соответствующее напряжение будет:

$$p'_{\max} = \frac{E\lambda}{l} = \sqrt{\frac{QE v^2}{Fl g}} \quad (355).$$

Если через R обозначим допускаемое напряжение при простом растяжении, то из ф-лы (355) легко найдем то предельное значение живой силы ударающего тела, при котором напряжения не превосходят допускаемого предела. Очевидно:

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{R^2 Fl}{2E} \quad (356),$$

т.е. предельное значение для живой силы ударающего тела пропорционально объему стержня, испытывающего удар, и не зависит от соотношения между размерами стержня.

Рассмотрим теперь *случай изгиба*. Стержень, опертый по концам, изгибается грузом Q , падающим с высоты h . Для упрощения выкладок положим, что место удара соответствует середине стержня и что изгиб стержня происходит в одной из главных плоскостей. Пусть f_d — величина наибольшего прогиба при ударе. Такому прогибу соответствует давление упавшего груза Q , равное:

$$P = \frac{48EJf_d}{l^3}.$$

Потенциальная энергия в стержне, соответствующая наибольшему прогибу f_d будет:

$$V = \frac{Pf_d}{2} = \frac{24EJf_d^2}{l^3}.$$

Если мы пренебрегаем массой стержня, то, очевидно, в момент наибольшего прогиба стержня работа силы тяжести падающего груза вся обратится в потенциальную энергию деформированного стержня. Для определения f_d получим уравнение:

$$Q(h + f_d) = \frac{24EJ}{l^3} f_d^2,$$

откуда:

$$f_d = \frac{Ql^3}{48EJ} + \sqrt{\left(\frac{Ql^3}{48EJ}\right)^2 + \frac{2Ql^3h}{48EJ}} = f_{st} + \sqrt{f_{st}^2 + 2f_{st}h}.$$

Полученная ф-ла совершенно совпадает с ф-лой (352), найденной для стержня, подвергающегося продольному удару¹⁾. Зная величину наибольшего прогиба, легко найдем и соответствующую величину наибольшего напряжения. Величина наибольшего изгибающего момента по середине стержня будет:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = f_d \frac{12EJ}{l^2},$$

¹⁾ Та же ф-ла может быть получена и в самом общем случае, если исходить из предположения, что вся живая сила падающего груза обращается в потенциальную энергию ударяемого тела, и что перемещение точки, на которую груз падает, пропорционально в каждый момент давлению груза.

следовательно:

$$P_{\max} = \frac{12f_d EJ}{l^3 W} = f_d \frac{12aE}{l^3}.$$

Здесь через a обозначено расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленного волокна. Если высота падения груза h велика по сравнению со статическим прогибом, то для наибольшего прогиба получим достаточно точное значение, пользуясь такой ф-лой:

$$f_d = \sqrt{2f_{st} h} = \sqrt{\frac{Ql^3}{48 EJ} \frac{v^2}{g}}.$$

Величина соответствующего наибольшего напряжения будет:

$$P'_{\max} = \frac{12aE}{l^3} \sqrt{\frac{Ql^3}{48 EJ} \frac{v^2}{g}} \quad (357).$$

Если через R обозначим величину допускаемого напряжения при изгибе, то из ф-лы (357) найдем предельное значение для живой силы падающего груза Q :

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{R^2 l J}{6a^3 E}.$$

В случае прямоугольного поперечного сечения:

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{R^2 l F}{18 E} \quad (358),$$

где F — площадь поперечного сечения. Опять мы находим, что предельное значение для живой силы падающего груза пропорционально объему изгибаемого бруса.

Значение удара при кручении выясним на таком простом примере. Маховое колесо MN , насаженное на валу AB (черт. 396), вращается с заданной угловой скоростью ω . Какие напряжения возникнут, если внезапно остановить вращение левого конца A ? Очевидно, после остановки левого конца A маховое колесо MN будет продолжать вращаться до тех пор, пока вся живая сила его не обратится в потенциальную энергию скрученного вала. Этому моменту будет соответствовать наибольшее значение φ угла закручивания. Если через θ обозначим момент инерции махового колеса, через J_p — полярный момент инерции поперечного сечения вала, то для нахождения φ получим такое ур-ие:

$$\frac{\varphi^2 G J_p}{2l} = \frac{\theta \omega^2}{2}.$$

(Левая часть написанного ур-ия есть потенциальная энергия скрученного вала, а правая — живая сила махового колеса.) Определив φ , легко найти и соответствующие напряжения.



Черт. 396.

§ 171. Влияние массы стержня на величину напряжений при ударе.

В предыдущих задачах, при вычислении динамических напряжений, мы пренебрегали массой рассчитываемого на удар стержня или балки. Такое упрощение задачи не влечет за собой больших погрешностей, если масса $\frac{Q}{g}$ падающего груза велика по сравнению с массой стержня $\frac{P}{g}$; в противном случае влиянием массы стержня уже пренебрегать нельзя. Мы здесь приведем приближенный способ оценки этого влияния¹⁾.

Пока мы пренебрегаем массой стержня, величина деформаций определяется из того условия, что вся живая сила падающего груза обращается в потенциальную энергию стержня. Никакой потери в скорости в первый момент удара не получается. Иной результат мы будем иметь, если примем во внимание массу стержня. Скорость v , которую падающий груз имеет в момент касания стержня, изменяется до тех пор, пока груз и часть стержня, находящаяся с ним в соприкосновении, не приобретут некоторой общей скорости c . Если бы стержень, принимающий удар, был свободным твердым телом, то величину c можно было бы определить из ур-ния количества движения:

$$\frac{P+Q}{g} c = \frac{Q}{g} v,$$

откуда:

$$c = v \frac{Q}{P+Q}.$$

В действительности стержень в первый момент удара начинает деформироваться и в то время, как сечение, соответствующее месту удара, приобретает скорость c , другие сечения могут иметь другие скорости. Закрепленные же точки стержня или опертые концы балки будут иметь скорость, равную нулю. Если сделать относительно закона изменения скоростей по длине стержня известные предположения, то влияние массы стержня на величину динамических напряжений может быть определено таким же элементарным путем, как мы это делали при исследовании колебаний (§ 162).

Рассмотрим случай продольного растяжения стержня AB падающим грузом Q (черт. 395). Пусть v — скорость, с которой груз Q достигает нижнего сечения стержня AB . Соответствующая живая сила будет $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{2}$. В первый момент удара устанавливается для груза и нижнего конца стержня общая скорость c . Допустим, что в тот же момент скорости отдельных элементов по длине стержня меняются по тому же закону, как и перемещения отдельных сечений при растяжении стержня силой, приложенной на конце. В таком случае скорость c_x в сечении mn , в расстоянии x от закрепленного конца, будет:

$$c_x = c \frac{x}{l}.$$

¹⁾ Способ этот принадлежит Н. Сох'у, Cambridge Phil. Soc. Trans., 1849 г., стр. 73. Изложение его имеется в сочинении Todhunter and Pearson, A. History of the Theory of Elasticity, том I, стр. 895.

Более точные исследования задачи об ударе стержней имеются в вышецитированной книге Clebsch'a, Théorie de l'élasticité... в дополнениях к § 61, принадлежащих S.-Venant'у. S.-Venant отметил удовлетворительное совпадение более точных исследований и опытов с результатами приближенной методы.

Живая сила всего стержня будет равна:

$$\int_0^l \frac{P}{gl} dx \frac{c_x^2}{2} = \frac{P}{3g} \frac{c^2}{2}.$$

Значение живой силы такое же, как если бы стержень был невесом, а $\frac{1}{3}$ его массы была сосредоточена на конце. В таком случае скорость c определится из ур-ня количества движения:

$$\frac{Q}{g} c + \frac{1}{3} \frac{P}{g} c = \frac{Q}{g} v_1$$

откуда

$$c = \frac{vQ}{Q + \frac{1}{3}P}.$$

Имея скорость c , можно вычислить живую силу системы после первого момента удара. Предполагая, что вся эта живая сила обратится в потенциальную энергию, найдем выражение для динамических напряжений¹⁾. Если через λ обозначим наибольшее удлинение стержня при ударе, то ур-ие для определения этой величины напишется так:

$$\frac{(Q + \frac{1}{3}P)c^2}{2g} + Q\lambda = \frac{\lambda^2 EF}{2l}.$$

Вставляя вместо c найденное выше его значение и принимая во внимание, что:

$$\frac{Ql}{EF} = \lambda_{st},$$

можем переписать ур-ие в таком виде:

$$\frac{v^2 Q}{2g} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{P}{Q}} + Q\lambda = \frac{\lambda^2 EF}{2l}.$$

откуда:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + \frac{\lambda_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{P}{Q}}} \quad (359).$$

Подобным же образом возможно оценить влияние массы стержня, изгибаемого падающим грузом. Положим, например, что груз Q падает с высоты h на середину пролета балки с опертыми концами. В первый момент удара устанавливается для груза и для среднего сечения балки некоторая общая скорость c . Предполагая, что по длине балки скорости меняются по такому же закону, как и перемещения при статическом изгибе силой, сосредоточенной посередине, мы найдем, что живая сила балки в первый момент удара будет такая, как если бы $\frac{17}{35}$ массы балки было сосредоточено по середине пролета. Скорость c найдется из ур-ня количества движения:

$$\frac{Q}{g} v = \left(\frac{Q}{g} + \frac{17}{35} \frac{P}{g} \right) c.$$

¹⁾ Предполагаем удар совершенно неупругим. После установления общей скорости c груз продолжает движение в соприкосании со стержнем.

откуда:

$$c = v \frac{Q}{Q + \frac{17}{35} P}$$

Полагая, что живая сила груза и стержня полностью обращается в потенциальную энергию деформации, получим для определения динамического прогиба ур-ие:

$$f_d^2 - 2f_d f_{st} - \frac{f_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{P}{Q}} = 0,$$

откуда:

$$f_d = f_{st} + \sqrt{f_{st}^2 + \frac{f_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{P}{Q}}} \quad (360).$$

При $v = 0$, т.е. когда груз приложен к балке без скорости, мы получаем известный результат: $f_d = 2f_{st}$.

От рассмотренных частных примеров легко перейти к более общему случаю. Если система, на которую падает груз Q такова, что перемещение s — точки, соответствующей месту удара, пропорционально давлению ударяющего груза, то величина динамического перемещения s_d может быть вычислена по ф-ле:

$$s_d = s_{st} + \sqrt{s_{st}^2 + \frac{s_{st} v^2}{g} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{P}{Q}}} \quad (361),$$

где s_{st} — перемещение места удара при статическом действии груза Q . Величина k — коэффициент, определяемый в каждом частном случае на основании допущения относительно скоростей отдельных точек системы в первый момент удара. Ф-ла (361) может быть применена к расчету систем, состоящих из нескольких стержней: например, мостовых ферм и ферм подъемных кранов, нужно только уметь находить перемещение узлов фермы при действии статической нагрузки в месте удара ¹⁾.

Чтобы судить, насколько точные результаты дает изложенная приближенная метода, мы приводим в нижеследующей таблице несколько чисел, полученных S.-Venant'ом для стержня с опертыми концами путем интегрирования соответствующего дифференциального ур-ия в частных производных (место удара — середина пролета).

ТАБЛИЦА.

$\frac{P}{Q} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
Точное решение $f_d =$	1,09A	0,739A	0,477A	0,297A	0,167A
Приближенное решение $f_d =$	1,09A	0,738A	0,474A	0,291A	0,168A

¹⁾ Численный пример этого рода имеется в статье Tschetsche, Berechnung dynamisch beanspruchter Tragkonstruktionen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1894 г. стр. 194.

В этой таблице через A обозначена постоянная величина, зависящая от размера и веса стержня и от скорости падающего груза. Заметим, что точное решение S.-Venant'a предполагает некоторые определенные условия в момент удара. S.-Venant допускал, что в первый момент удара сечение бруска, соответствующее месту удара, приобретает скорость, равную скорости падающего груза, и дальше брусок совершает колебания вместе с грузом. Подробное исследование первого момента удара показывает¹⁾, что при некоторых соотношениях между массой балки и массой падающего груза удар распадается на несколько повторных ударов, и все явление представляется несравненно более сложным, чем то принимал в своих исследованиях S.-Venant.

Мы рассмотрели случаи удара стержней, т.-е. тел, у которых один размер велик по сравнению с двумя другими. При таком условии можно было оставить без рассмотрения деформации в месте удара и время, в которое эти деформации совершаются, считая ничтожно малым по сравнению с полным временем удара²⁾. Когда все измерения ударяющихся тел одного порядка, например, в случае удара двух шаров, на первый план выступают местные деформации. Если они происходят в пределах упругости, то их величина и время удара могут быть вычислены весьма точно по ф-лам Herz'a (§ 37). Получаемые таким путем результаты с большой точностью подтверждаются опытом³⁾.

§ 172. Разрушение от удара.

Формулы предыдущего параграфа решают задачи об ударе в тех случаях, когда деформации не выходят за пределы упругости, и имеется линейная зависимость между перемещением точки приложения давления и величиной давления. За пределами упругости явление удара представляется более сложным. Для получения динамических удлинений и прогибов и для нахождения того предельного значения живой силы падающего груза, при котором брусок разрушается, необходимо иметь диаграмму для статического растяжения до разрыва и для статического изгиба за пределом упругости. Если предположить, что при разрыве ударом сохраняется между удлинениями и усилиями такая же зависимость, как при статическом разрыве⁴⁾, то по величине „удельной работы“ (§ 10) для данного материала можно судить о живой силе падающего груза, нужной для

¹⁾ См. нашу работу: К вопросу о действии удара на балку, Изв. Петерб. политехн. инст., 1912 г.

²⁾ При продольном ударе стержней местные деформации играют весьма существенную роль. См. J. E. Sears, The longitudinal impact of metal rods with rounded ends, Cambridge Phil. Soc., 1907 г.

³⁾ Hamburger Wied. Annal., 28, 1886 г. В русской литературе имеется исследование по удару шаров, принадлежащее А. Н. Диньяку, Изв. Киев. политехн. инст., 1909 г.

⁴⁾ Есть опытные данные, показывающие, что при большой скорости нарастания деформаций получается иная диаграмма, чем в случае статического разрыва. Предел упругости при ударном разрыве выше, чем при обычном опыте на растяжении. См. Н. Н. Давиденков, Изв. Петерб. политехн. инст., 1913 г.

См. также: Armin Elmendorf, Journal of The Franklin Inst., V. 182, 1916 г., стр. 771. В этой статье имеются результаты испытания на изгиб деревянных брусков. Отношение ломающей силы при динамическом испытании к разрушающей силе при статической нагрузке получилось равным, примерно, 1,78.

разрыва бруска. Причины, уменьшающие удлинение бруска при статическом разрыве, уменьшают и работу, необходимую для его разрыва, следовательно, ослабляют сопротивляемость бруска ударам.

Если мы возьмем железные бруски, представленные на черт. 47, и сравним их с цилиндрическим бруском диаметра 15 мм, то найдем, что при разрыве ударом соотношение между их прочностями будет не такое, как при статическом разрыве. Результат этот легко объяснить, если обратиться к деформациям стержней. В цилиндрическом стержне при растяжении все элементы будут удлиняться одинаково, тогда как в стержнях с выточками утолщенные части получают лишь незначительное удлинение, деформироваться будут главным образом участки, соответствующие выточкам. Окончательное удлинение цилиндрического стержня будет значительно больше, чем удлинение стержней с выточками, а, следовательно, необходимо затратить и большую работу для его разрыва. При испытании на удар цилиндрический стержень окажется более прочным. Прочность стержней с выточками будет зависеть от протяжения, какое выточка занимает по длине бруска, и от степени резкости в изменении сечения бруска. Оказывается, что при разрывах с большой скоростью, какая имеет место при ударах, напряжения не успевают выравниваться по плоскости ослабленного поперечного сечения, и материалы, дающие значительные удлинения при статическом разрыве, могут оказаться хрупкими при ударе. Вообще при испытании на удар различные недостатки в материалах проявляются с особенной резкостью, и потому „ударной пробе“ в последнее время уделяют большое внимание в лабораториях по испытанию материалов ¹⁾. С увеличением хрупкости брусков, при ослаблении их поперечных сечений, приходится иметь дело на практике в различных металлических конструкциях. Оказывается, например, что железные листы и уголки при ослаблении их заклепочными отверстиями становятся более хрупкими, и это обстоятельство служит иногда причиной разрушения ²⁾.

¹⁾ Описание соответствующих приборов и приемов испытания можно найти в работах: Breuil, Nouveaux mécanismes et nouvelles méthodes pour l'essai des métaux, Paris 1910 г., стр. 140 — 240.

B. Blount, W. Kirkaldy, H. Sankey, Proc. of the Inst. of Mech. Engin., 1910, 1—2.

²⁾ См. Hackstroh, Baumaterialienkunde, 1905 г., стр. 321.

Zimmermann, Zentralbl. d. Bauverw., 1899 г., стр. 265.

О повторных ударах надрезанных образцов см. Preuss, Z. d. V. d. Ing., 1914 г. См. также Heyn, Zeit. d. Ver. d. Ing., 1914 г., стр. 383.

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ.
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ.

§ 173. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия.

При проектировании инженерных сооружений размеры отдельных частей подбирают таким образом, чтобы напряжения материала не превосходили известных норм (допускаемых напряжений), устанавливаемых на основании опытного исследования прочности материалов. Ряд крупных катастроф показал, что такого расчета для современных инженерных сооружений далеко не достаточно, принятые нормы допускаемых напряжений не всегда обеспечивают надлежащую прочность, необходимы дополнительные исследования относительно устойчивости тех форм равновесия, которые приняты при расчете как отдельных частей, так и всего проектируемого сооружения. Важность проверки на устойчивость в настоящее время сознается всеми, но, вследствие недостатка в теоретической разработке, вопросам устойчивости и в строительной механике и в технических расчетах до последнего времени отводили лишь весьма скромное место.

На практике особенно часто приходится решать задачу об устойчивости сжатых стержней. Если призматический брусок сжимать силами, действующими по оси, то он будет укорачиваться, сохраняя свою прямолинейную форму. При некоторых условиях прямолинейная форма равновесия может оказаться неустойчивой, и стержень выпучивается, искривляется. Это явление искривления называют „продольным изгибом“, оно наступает тем скорее, чем больше длина стержня по сравнению с его поперечными размерами. В случае очень гибких стержней, например, при сжатии тонкой линейки, явление выпучивания можно наблюдать при очень малых продольных сжимающих напряжениях. Эти обстоятельства указывают, что поперечное сечение сжатых стержней должно быть назначено не по величине допускаемых при сжатии напряжений, а по величине „критической нагрузки“, при которой прямолинейная форма перестает быть устойчивой. Явление продольного изгиба представляет собой простейшую задачу, где приходится разбираться с вопросом устойчивости. Случай этот

всесторонне разработан теоретически и экспериментально, и проверка на продольный изгиб уже вошла в практику инженерных расчетов. Кроме этого простейшего случая, при расчете инженерных сооружений приходится встречаться с гораздо более сложными задачами, требующими дополнительной проверки на устойчивость. Например, часто приходится иметь дело с расчетом пластинок, подвергающихся действию сжимающих усилий, приложенных в срединной плоскости пластинки. При действии таких усилий плоская форма равновесия пластинки может оказаться неустойчивой, и пластинка выпучится. Высокие двутавровые балки, обладающие большой жесткостью в плоскости вертикальной стенки, могут оказаться недостаточно жесткими в направлении, перпендикулярном плоскости стенки, и выпучиться при действии изгибающих сил в плоскости наибольшей жесткости. Тонкостенная цилиндрическая трубка кругового поперечного сечения при действии всестороннего равномерного наружного давления также может оказаться в состоянии неустойчивого равновесия и сплющиться, когда внешнее давление достигает некоторого „критического“ значения. Все эти задачи имеют не только теоретическое, но и большое практическое значение. Можно назвать немало случаев крушения крупных инженерных сооружений, явившихся результатом недостаточного внимания к вопросам устойчивости.

Приступая к исследованию устойчивости упругих систем, нужно прежде всего установить, при каких условиях вообще приходится ставить вопрос об устойчивости той или иной конструкции. Если упругое тело может иметь только одну форму равновесия, — эта форма будет устойчива. Какие бы внешние причины ни отклонили тело от принятой им формы равновесия, оно, будучи предоставлено самому себе, возвратится в первоначальное состояние, так как это состояние есть единственная возможная форма равновесия (предполагается, что все явление происходит в пределах упругости). В том случае, когда возможно несколько форм равновесия, явление может быть иным: тело, отклоненное от одной из своих форм равновесия, может в первоначальное свое положение не вернуться, а принять какую-либо другую возможную форму равновесия. Пока все измерения тела одного порядка, в пределах упругости возможны лишь малые перемещения точек, и можно доказать, что в этом случае имеется только одна форма равновесия: она, как единственная форма, будет, очевидно, устойчива ¹⁾. Если одно или два измерения тела малы, как, например, в случае тонких пластинок и тонких стержней, возможно, не переходя предела упругости, производить значительные изменения формы: пластинку можно сильно изогнуть, свернуть в трубку, тонкий стержень изогнуть в кольцо и т. д. При этих условиях бывают такие случаи, что одним и тем же силам могут соответствовать несколько различных форм равновесия. Сжатый стержень может сохранить свою прямолинейную форму, но может и изогнуться. Пластинка,

¹⁾ См. G. H. Bryan, Cambridge Phil. Soc. Proc., V. 6., 1888 г.

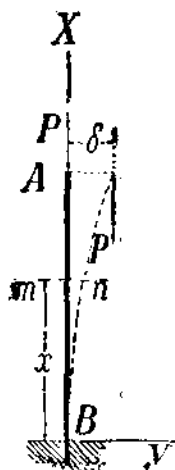
сжатая силами, лежащими в ее срединной плоскости, может остаться плоской но может при некоторых условиях и выпучиться.

Рассчитываемая конструкция, очевидно, будет прочной лишь в том случае, если положенная в основание расчета форма равновесия устойчива. Поэтому для практических приложений необходимо знать то наименьшее значение внешних нагрузок, при котором становятся возможными несколько различных форм равновесия. Значение это в дальнейшем будем называть „критическим“. Пока нагрузка меньше критической, — возможна лишь одна форма равновесия, и эта форма, очевидно, будет устойчивой. При нагрузках, больших критической, возможны, по крайней мере, две различные формы равновесия. Различные методы определения „критических“ нагрузок выясним при рассмотрении отдельных задач.

§ 174. Задача Эйлера.

Первая задача, относящаяся к исследованию вопроса об устойчивости равновесия упругого тела, была разрешена Эйлером ¹⁾. Им было найдено то значение нагрузки P , при котором вертикально заделанный нижним концом стержень начинает искривляться (черт. 397). Пока сжимающая сила P не велика, стержень AB сохраняет устойчиво свою прямолинейную форму, и деформация будет заключаться в простом сжатии. Если какой-либо горизонтальной силой вызвать небольшое искривление стержня, то по удалении этой силы стержень возвратится к своей первоначальной прямолинейной форме равновесия. Такая устойчивость прямолинейной формы сохраняется только до известных пределов. Постепенно увеличивая силу P , можно достигнуть такого предельного состояния, когда малейшая причина может искривить стержень, и по удалении причины, вызвавшей искривление, стержень к прямолинейной форме не возвращается. Наша задача заключается в том, чтобы определить это „критическое“ значение сжимающей силы P .

Мы предполагаем, что брусок свободно может искривиться в любом направлении, поэтому, очевидно, искривление должно произойти в направлении наименьшего сопротивления, т.-е. в плоскости наименьшей жесткости стержня. Выберем эту плоскость наименьшей жесткости за координатную плоскость XU . Пусть при некотором значении P , большем критического, стержень AB изогнулся, как показано на чертеже пунктиром. Если теперь уменьшать постепенно силу P , то уменьшаться будет и искривление стержня. Когда мы в пределе достигнем критического значения P , т.-е. того значения, при котором только становится возможным появление искривления, искривленная форма



Черт. 397.

¹⁾ Histoire de l'Academie de Berlin, т. 13, 1757 г.

сольется с прямолинейной. Если сжимающая сила на малую величину превосходит критическое значение, то искривленная форма мало отличается от прямолинейной; этим воспользуемся для нахождения значения силы $P_{кр}$. Мы здесь идем как бы обратным путем: полагаем, что возможна искривленная форма, и ищем, какова для этого должна быть сжимающая сила P . Возьмем какое-либо поперечное сечение m и напишем для верхней отсеченной части (черт. 397) условие равновесия внешних и внутренних сил:

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M.$$

При выбранном направлении осей $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ положительно, и изгибающий момент в сечении m равен: $P(\delta - y)$. Ур-ие упругой линии будет:

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Py - P\delta = 0 \quad (a)$$

— получаем линейное дифференциальное ур-ие с постоянными коэффициентами и с последним членом. Общий интеграл этого ур-ия напишется так:

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \delta, \text{ где } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \quad (b).$$

Произвольные постоянные определяются из условий на концах изогнутого стержня:

при $x=0$, I) $y=0$ и II) $y'=0$; при $x=l$, III) $y=\delta$.

Из (I) имеем:

$$C_1 = -\delta;$$

из (II):

$$[-C_1 \alpha \sin \alpha x + C_2 \alpha \cos \alpha x]_{x=0} = 0, \text{ или } C_2 = 0,$$

следовательно:

$$y = \delta(1 - \cos \alpha x).$$

Чтобы удовлетворить условию (III), необходимо положить:

$$\cos \alpha l = 0, \text{ или: } \alpha l = \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Принимая во внимание обозначение (b), получим:

$$P = \frac{(n+1)^2 \pi^2 EJ}{4l^2} \quad (362).$$

Наименьшее значение P , при котором становится возможным искривление будет:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (363).$$

Полученное значение P и будет „критической“ сжимающей силой, при кото-

рой становится возможной предположенная нами искривленная форма равновесия.

От рассмотренной задачи легко перейти и к некоторым другим случаям продольного изгиба. Возьмем, например, стержень, оба конца которого при выпучивании могут свободно поворачиваться (черт. 398). Касательная в середине выпучившегося стержня будет параллельна первоначальной оси бруска, и, следовательно, обе половины изогнувшегося стержня будут в таких же условиях, как и в вышеописанном случае. Критическая сжимающая сила будет:

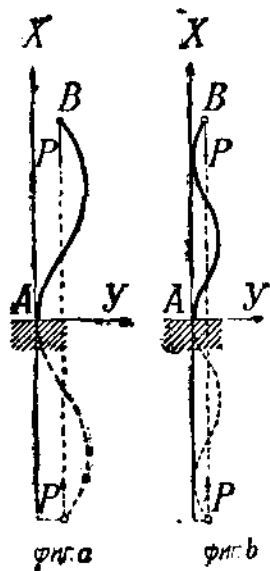
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (364).$$

Мы до сих пор рассматривали первую форму искривления, т.е. форму, которой соответствует наименьшее значение сжимающей силы. Рассмотрим теперь другие формы искривления. В общем виде упругая линия определится ур-ем:

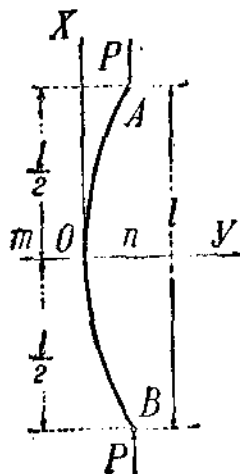
$$y = \delta(1 - \cos \alpha x), \quad \text{где} \quad \alpha l = \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Мы рассмотрели случай $n=0$ и получили первую возможную форму. Полагая $n=1$ или $n=2$, найдем:

$$P_{кр} = \frac{3\pi^2 EJ}{4l^2}, \quad \text{или:} \quad P_{кр} = \frac{5\pi^2 EJ}{4l^2}.$$



Черт. 399.



Черт. 398.

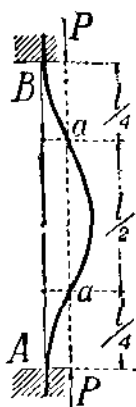
Соответствующие кривые представлены на фиг. а и б (черт. 399). Распространяя эти кривые симметрично в сторону отрицательных X-ов, как это показано на чертеже пунктиром, получим различные искривленные формы равновесия для стержней с опертыми концами. В местах пересечения направления сил P с искривленной осью будем иметь точки перегиба; изгибающий момент для этих точек равен нулю. Все эти высшие формы возможны при больших значениях сжимающей силы, и все они, как показывает опыт, неустойчивы.

Рассмотрим еще один случай, могущий иметь практическое значение, именно случай сжатия стержня с заделанными концами (черт. 400). Чтобы помешать концам вращаться, нужно приложить моменты в плоскостях заделки. Это равносильно приложению сжимающих сил P с некоторым эксцентриситетом. На линии действия сил P должны лежать точки прогиба aa

изогнутой оси стержня. Мы видим, что полученную кривую опять можно привести к первому разобранным случаю, если вместо l взять $\frac{l}{4}$; тогда получим

ф-лу:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \quad (365),$$



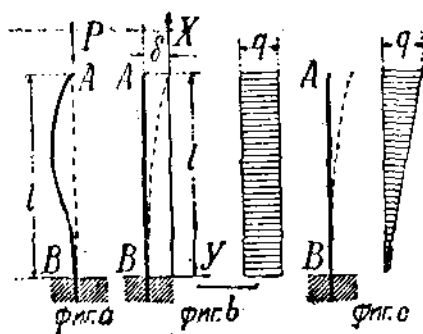
Черт. 400.

т. е. критическая сжимающая сила в этом случае в 4 раза больше, чем для бруска со свободно поворачивающимися концами. Это заключение будет верно, конечно, только в том случае, если концы абсолютно неподвижны. Когда концы могут хоть немного поворачиваться, — выпучивание произойдет при силе значительно меньшей. В технических расчетах, при проверке отдельных стержней на продольный изгиб, концы предполагают свободными, так как обычные способы прикрепления концов не могут обеспечить абсолютной неподвижности.

Мы перечислили наиболее часто встречающиеся случаи продольного изгиба. Во всех этих случаях вид ф-лы для значения критической нагрузки остается один и тот же:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (366),$$

и меняется только коэффициент μ , который условимся называть „коэффициентом длины“. Если только для какого-либо случая действия сил значение μ найдено, задача об определении критической силы приводится к случаю стержня с поворачивающимися концами; нужно только в ф-лу (364) вместо действительной длины вставить некоторую приведенную длину μl . В заключение приводим без выводов значения коэффициента μ для нескольких частных случаев (черт. 401).



Черт. 401.

Если нижний конец стержня заделан, а верхний при выпучивании свободно поворачивается, оставаясь на оси X-ов (фиг. а), то

$$P_{кр} \approx \frac{2,046 \pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{и} \quad \mu = 0,7.$$

При действии на стержень равномерно распределенных вертикальных усилий, интенсивности q (фиг. б), критическое значение сжимающего усилия, соответствующего нижнему концу стержня, равно ¹⁾

$$ql = \frac{\pi^2 EJ}{(1,12l)^2} \quad \text{и} \quad \mu = 1,12.$$

¹⁾ Решение это принадлежит А. С. Greenhill'ю, Cambridge Phil. Soc. Proc., т. 4, 1881 г.

При распределении сплошной вертикальной нагрузки по закону треугольника (фиг. с) критическое значение сжимающей силы, соответствующей нижнему сечению стержня, равно ¹⁾

$$\frac{ql}{2} = \frac{\pi^2 EJ}{(1,388l)^2} \quad \text{и} \quad \mu = 1,388.$$

§ 175. Пределы применимости полученных формул.

Примем случай стержня со свободно поворачивающимися концами за основной, и посмотрим, каковы будут сжимающие напряжения, при которых может начаться выпучивание. Из ф-лы (364) имеем:

$$p_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \pi^2 E \left(\frac{r}{l} \right)^2 \quad (367),$$

где r — наименьший радиус инерции поперечного сечения. На полученное таким образом напряжение нужно смотреть, как на своего рода временное сопротивление, так как достижение в сооружении напряжений, при которых могут произойти выпучивания стержней, столь же опасно, как и достижение напряжений, при которых происходит разрыв.

При всех выводах мы предполагали материал совершенно упругим и следующим закону Гука. Только для этого случая верно основное ур-не (а) (§ 174). Найденное значение для критической сжимающей силы будет соответствовать действительному только в том случае, если получающиеся при этом сжимающие напряжения $p_{кр}$ не превосходят предела упругости материала. Для напряжений, превосходящих предел упругости, результаты, полученные по ф-лам Эйлера, не имеют никакого реального смысла. Из ф-лы (367) видно, что явление выпучивания будет происходить в пределах упругости при сравнительно большой длине и при малом радиусе инерции r . Для всякого материала с известным модулем упругости E и с известным пределом упругости можно установить предельное отношение $l:r$, при котором выпучивание происходит в пределах упругости, и, значит, еще применима ф-ла Эйлера. Например, если для железа взять $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ и предел упругости $p = 2000 \text{ kg/cm}^2$ то мы получим предельное значение отношения $l:r \approx 100$, т.е. для возможности применения ф-лы Эйлера, в случае опертых концов, отношение длины железного стержня к наименьшему радиусу инерции должно быть не меньше 100. Стержни, с которыми приходится иметь дело при расчетах, сплошь и рядом удовлетворяют этому условию. Возьмем, например, равнобокий уголок $70 \text{ mm} \times 70 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. Наименьший радиус инерции будет $r = 1,35 \text{ cm}$, следовательно, при длине уголка, превосходящей 1,35 м, можно пользоваться

¹⁾ Эта задача решена проф. Ф. Ясинским; см. полн. собр. соч., т. I, стр. 161.

Ряд более сложных задач разрешен А. Н. Динником; см. Вестник инженер. 1915 г., стр. 94.

ф-лой Эйлера. В случае кругового сечения $J = \frac{\pi d^4}{64}$, $r = \frac{d}{4}$, следовательно, ф-лу Эйлера при опертых концах стержня можно применять при длине $l \geq 25d$.

Для расчета сжатых стержней в том случае, когда ф-ла Эйлера не применима, т.е., когда получаемые по ней напряжения превосходят предел упругости, приходится пользоваться экспериментальными данными ¹⁾, главным образом, опытами Тетмайера. Эти опыты доказали верность ф-лы Эйлера в пределах упругости и дали достаточный материал для установления эмпирической ф-лы для критических напряжений за пределами упругости, т.е. при сравнительно коротких брусках. Проф. Ясинский обработал опытные данные, относящиеся к железу, и результаты представил ф-лой:

$$p_{кр} = a - b \frac{l}{r},$$

где a и b — коэффициенты, определенные из опытов Тетмайера, Баушингера и Консидера по способу наименьших квадратов. Для литого железа им получено:

$$p_{кр} = \left[3387 - 14,83 \frac{l}{r} \right] \text{ kg/cm}^2 \quad (368),$$

в пределах $70 < \frac{l}{r} < 110$.

Для чугуна ф-лой Эйлера можно пользоваться при длинах $l \geq 80 r$. При меньших длинах следует критическое напряжение вычислять по эмпирической ф-ле Тетмайера:

$$p_{кр} = \left[7760 - 120 \frac{l}{r} + 0,53 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right] \text{ kg/cm}^2.$$

Для дерева Тетмайер дает ф-лу:

$$p_{кр} = \left[293 - 1,94 \frac{l}{r} \right] \text{ kg/cm}^2,$$

ее следует применять для длин $l \leq 110 r$.

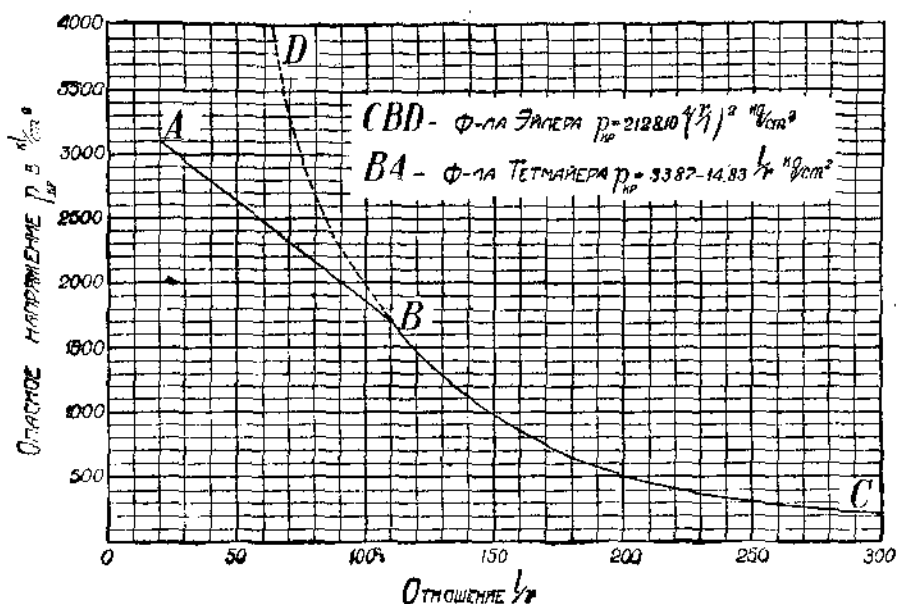
Представим графически результаты ф-лы Эйлера и эмпирической ф-лы (368), построенной на основании опытов Баушингера, Тетмайера и Консидера. Для этого по оси абсцисс будем откладывать величины отношения $\frac{l}{r}$, а по оси ординат — соответствующие значения критического напряжения. До точки В (черт. 402, кривая ВС), т.е. для $\frac{l}{r} > 110$ величина критического сжимающего напряжения вычислена по ф-ле Эйлера, за этими пределами — по эмпи-

¹⁾ Наиболее полное экспериментальное исследование продольного изгиба принадлежит Tetmajer'у, Die Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit, 3 изд., 1903 г.

Из более новых исследований отметим работу Т. Kármán'a, Untersuchungen über Knickfestigkeit, Göttingen Diss., 1909 г.

рической ф-лы (368). Как видно из самой ф-лы, здесь изменение критического напряжения выражается линейным законом — получаем участок прямой линии АВ.

Проф. Яснским, на основании эмпирической ф-лы (368) и ф-лы (367)



Черт. 402.

составлена таблица значений критического или ломающего напряжения для отношений $\frac{l}{r} > 20$. Некоторые числа этой таблицы мы здесь приводим (см. табл. на стр. 530).

Пользуясь этой таблицей, легко подбирать сечения сжатых стержней. Сначала приблизительно задаемся размерами поперечного сечения и находим его наименьший радиус инерции. По заданной длине стержня находим $\frac{l}{r}$ и соответствующее ломающее напряжение $p_{кр}$. Величина $Fp_{кр}$ будет ломающим грузом. Размеры сечения придется подобрать так, чтобы приходящаяся на стержень сжимающая сила составляла лишь часть $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$ от ломающей критической нагрузки.

Кроме ф-л Эйлера и ф-л, построенных на опытных данных, встречается еще немало других ф-л для расчета стержней на продольный изгиб, ф-л, не имеющих какого-либо научного обоснования и появившихся в то время, когда пределы применимости ф-л Эйлера не были достаточно выяснены. Среди

ТАБЛИЦА

критических напряжений для стоек из литого железа, сжатых в условиях основного случая.

$\frac{l}{r}$	φ	Крит. напряж. в kg/cm^2	$\frac{l}{r}$	φ	Крит. напряж. в kg/cm^2
20	0,88	3090	140	0,31	1090
30	0,84	2940	150	0,27	946
40	0,80	2790	160	0,24	831
50	0,76	2650	170	0,21	736
60	0,71	2500	180	0,19	657
70	0,67	2350	190	0,17	589
80	0,63	2200	200	0,15	532
90	0,59	2050	210	0,14	483
100	0,54	1900	220	0,13	440
110	0,50	1760	230	0,11	402
120	0,42	1480	240	0,10	369
130	0,36	1260	250	0,10	340

знаменателе, тогда ф-ла Шварц-Ренкина получает вид ф-лы Эйлера. Применять ф-лу Шварц-Ренкина в пределах упругости, очевидно, нет никакой надобности, так как там во всей строгости применима ф-ла Эйлера. За пределами упругости, т.-е. для литого железа при $\frac{l}{r} < 110$, как показали, главным образом, опыты Тетмайера, ф-ла Шварц-Ренкина дает не всегда удовлетворительные результаты. При малых значениях $\frac{l}{r}$, получаемые по этой формуле величины ломающих напряжений очень велики, но при $40 < \frac{l}{r} < 110$ — ф-лой можно пользоваться, положив $\alpha = 0,0001$.

Пользуясь вышеприведенными ф-лами, мы можем найти в отдельных частных случаях величину критического или ломающего напряжения. Для обеспечения надлежащей прочности размеры сжатых стержней выбирают так,

этих ф-л отметим ф-лу Шварц-Ренкина. По ней часто проверяют на продольный изгиб сжатые стержни в мостах ¹⁾ Ф-ла эта имеет такой вид:

$$P_{кр} = \frac{R'}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad (369),$$

здесь R' — временное сопротивление материала разрыву, α — постоянный коэффициент. У нас в Союзе для железа берут $\alpha = 0,00008$. При малых длинах брусков член $\alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2$ — величина малая, ее можно отбросить по сравнению с единицей, и ф-ла для $P_{кр}$ будет давать постоянную величину, равную временному сопротивлению разрыву. При очень больших длинах величина $\alpha \left(\frac{l}{r}\right)^2$ велика, и по сравнению с ней можно отбросить единицу в

¹⁾ Распространенность этой ф-лы можно отчасти объяснить тем, что определяемые по ней значения $P_{кр}$ обыкновенно получаются большими, чем то дает ф-ла Эйлера, на продольный изгиб стержни выходят более легкими.

чтобы действительные напряжения составляли лишь некоторую долю от ломающих напряжений. Величину допускаемых напряжений определяют из таких соображений: считают состояние, соответствующее „критической нагрузке“ столь же опасным, как и состояние, соответствующее моменту разрыва. В таком случае отношение допускаемого напряжения при продольном изгибе к допускаемому напряжению при растяжении должно быть такое же, как отношение „критического напряжения“ к временному сопротивлению разрыву R' . Обозначая это отношение через φ , найдем, что допускаемое напряжение при сжатии стержней равно φR , где R — допускаемое напряжение при простом растяжении. „Коэффициент уменьшения“ φ может быть в каждом частном случае вычислен, если имеется величина ломающего напряжения и временного сопротивления R' . В вышеприведенной таблице даны значения φ в предположении, что временное сопротивление материала равно 3500 kg/cm^2 .

Кроме чисто эмпирических ф-л, возможно, для определения $p_{кр}$ за пределами упругости, построить и аналитическую ф-лу¹⁾, аналогичную ф-ле Эйлера (367). Нужно только для материала стержня знать зависимость между деформациями и напряжениями при сжатии за пределом упругости. За этим пределом деформации растут быстрее напряжений, и отношение приращения напряжения к приращению деформаций будет некоторой ф-ней от напряжения; обозначим ее через E_1 . Предположим, что стержень прямоугольного поперечного сечения, сжатый за предел упругости, начинает искривляться; тогда с вогнутой стороны получится некоторое увеличение сжатия, а с противоположной стороны — уменьшение его. Этим изменениям деформации соответствуют дополнительные напряжения изгиба. Если бы все явление происходило в пределах упругости, то эти напряжения линейно изменялись бы по высоте сечения. В нашем случае задача сложнее. Со стороны вогнутости происходит дополнительное сжатие за пределами упругости, и зависимость между напряжениями и деформациями определяется переменной величиной E_1 , зависящей от первоначального сжатия стержня. С выпуклой стороны происходит при искривлении уменьшение первоначального сжатия и, следовательно, зависимость между деформациями и напряжениями, как и в пределах упругости, определяется величиной модуля E . Вследствие этого, распределение напряжений изгиба при искривлении стержня, сжатого за пределы упругости, будет такое же, как и в случае изгиба стержней, материал которых при растяжении и сжатии имеет различные модули упругости см. § 99. Общий вид дифференциального ур-ня изогнутой оси стержня остается прежний, нужно только, вместо модуля упругости E , вставить величину:

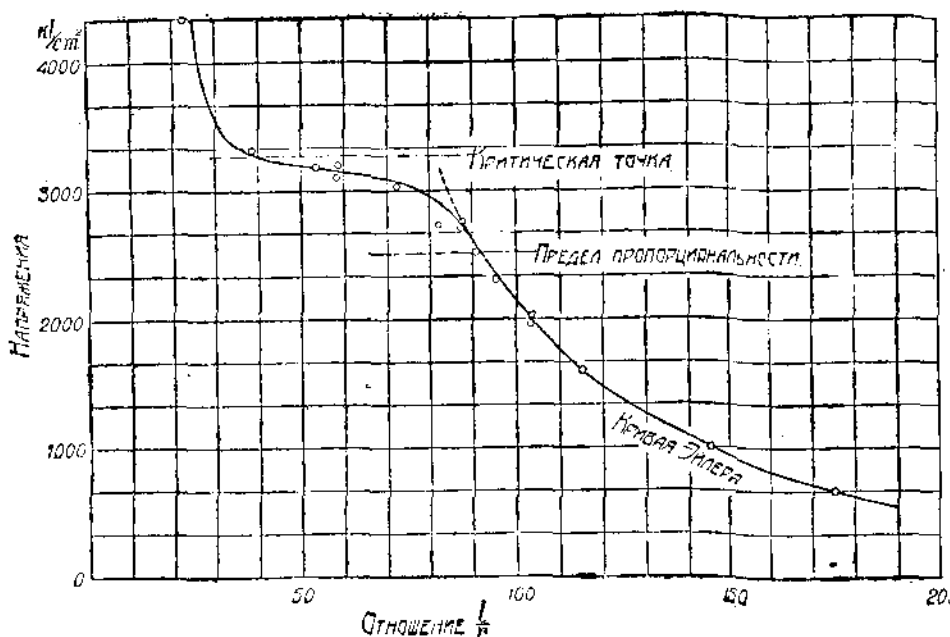
$$E' = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2}.$$

Соответственно этому, и ф-ла для критической нагрузки, в случае стержня со свободно поворачивающимися концами, представится в таком виде:

$$p_{кр} = \frac{\pi^2 E' J}{l^2} \quad \text{и} \quad p_{кр} = \pi^2 E' \left(\frac{r}{l} \right)^2 \quad (370).$$

¹⁾ Первая попытка аналитического решения задачи о продольном изгибе за пределами упругости принадлежит Engesser'y, см. Zeitschr. deutsch. Hann. Arch. u. Ing. Ver., 1889 г. Дальнейшая разработка этого вопроса принадлежит. Т. Kármán'y; см. вышецитированную работу: Untersuchungen über Knickfestigkeit.

Для каждого значения продольного сжимающего усилия можно найти E и E' , из предварительных опытов на сжатие за пределами упругости, и тогда, на основании ф-лы (370), составить таблицу критических напряжений для различных соотношений $l:r$. Насколько полученные таким путем значения $p_{кр}$ совпадают с опытами, видно из прилагаемой диаграммы (черт. 403), представляющей результаты опытов Т. Кármán'a над образцами мартеновской стали, давшей при испытании на разрыв временное сопротивление 6800 kg/cm^2 и удлинение $16,7\%$. Кружками отмечены результаты отдельных



Черт. 403.

опытов, сплошная линия представляет результаты вычислений. Совпадение теоретических и опытных данных очень хорошее. Отличие от результатов Тетмайера то, что при уменьшении длины стержней, начиная с $l:r = 40$, значение $p_{кр}$ начинает быстро возрастать. Заметим, что в тот момент, когда сжимающие напряжения соответствуют критической точке, стержень находится в положении неустойчивого равновесия; перейти эту точку и получить высокие значения для критических напряжений можно только при самой тщательной постановке опытов на продольный изгиб.

Относительно выбора формы поперечного сечения сжатых стержней заметим, что величина критической сжимающей силы зависит от величины соотношений $l:r$. Чем это отношение меньше, тем большее значение имеет ломающее напряжение, тем меньше должна быть площадь сечения, а значит, и вес стержня. При выборе поперечного сечения выгодно увеличивать радиус инерции сечения, для чего нужно прибегать к сечениям трубчатой формы. Чем больше поперечные размеры трубки, тем тоньше могут быть стенки ее, тем меньше на нее пойдет материала. Однако, здесь нельзя идти очень далеко. Есть пределы,

далее которых уменьшать площадь стенок не следует. В ф-лу Эйлера входит величина момента инерции поперечного сечения, и эту величину мы рассматриваем, как постоянную. Мы полагаем, что форма поперечного сечения остается неизменной, но при тонких стенках может появиться выпучивание стенок трубки, тогда ф-ла Эйлера не приложима. Вопрос об устойчивости сжатых стенок трубки еще мало разработан. Некоторые результаты, относящиеся к этому, изложены будут в разделе об устойчивости пластинок.

Относительно качеств материала заметим, что при большой длине, где применима ф-ла Эйлера, величина критического напряжения зависит от модуля E , и так как E с повышением качеств материала меняется мало, то мало изменится и допускаемая на стержень нагрузка. При более коротких стержнях, где явление продольного изгиба происходит за пределами упругости, приходится пользоваться данными опыта. Величина критического напряжения в большой мере зависит от качеств материала и особенно от высоты предела упругости ¹⁾.

§ 176. Влияние эксцентриситета и первоначальной кривизны на величину критической силы.

При выводе основной ф-лы для продольного изгиба предполагалось, что ось стержня строго прямолинейна и точки приложения сжимающих сил совпадают точно с центрами тяжести концевых поперечных сечений. На практике не удается обеспечить строгую прямолинейность стержней, не удается приложить силы без всякого эксцентриситета. Посмотрим, как изменятся выводы предыдущих параграфов в том случае, когда ось стержня имеет некоторую первоначальную кривизну и сжимающие силы приложены с эксцентриситетом.

Пусть $\frac{1}{r}$ первоначальная малая кривизна сжимаемого стержня. Сжимающая сила P приложена с эксцентриситетом e (черт. 404). Если через δ обозначим прогиб верхнего конца бруса, а через ρ назовем радиус кривизны после деформации, то:

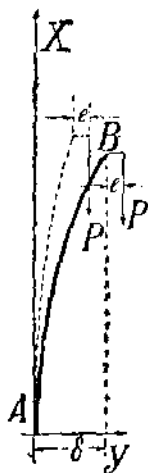
$$EJ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) = M;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{r} + \frac{P}{EJ} (\delta + e - y),$$

или, полагая, $\frac{P}{EJ} = \alpha^2$, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \alpha^2 y = \frac{1}{r} + \alpha^2 (\delta + e).$$

¹⁾ Применение в мостах материалов высокого качества (например, никелевой стали) дает возможность значительно повышать допускаемые напряжения в сжатых стержнях.



Черт. 404.

Общий интеграл получим в таком виде:

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + \delta + e + \frac{1}{\alpha^2 r}.$$

При $x=0$; $y=0$ и $y'=0$. Чтобы удовлетворить этим условиям, нужно положить:

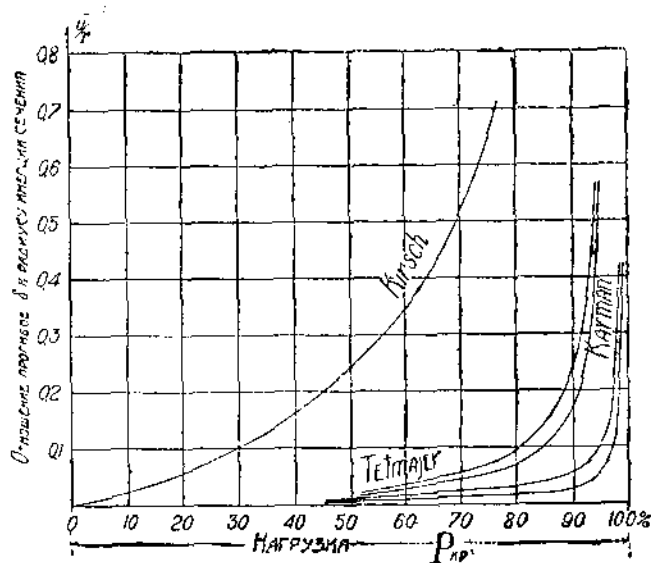
$$y = -\left(\delta + e + \frac{1}{\alpha^2 r}\right) \cos \alpha x + \delta + e + \frac{1}{\alpha^2 r}.$$

При $x=l$; $y=\delta$, следовательно:

$$\delta = \frac{\left(c + \frac{1}{\alpha^2 r}\right) (1 - \cos \alpha l)}{\cos \alpha l} \quad (371)$$

Пока P мало, α — также малая величина, $\cos \alpha l$ — близок к единице, следовательно, прогибы δ очень малы, но когда P начнет приближаться к величине Эйлеровой нагрузки, αl , как мы видели, приближается к $\frac{\pi}{2}$ и $\cos \alpha l$ стремится к нулю. Прогиб δ , как видно из ф-лы (371), стремится к бесконечности. Нужно заметить, что наша ф-ла верна только для небольших прогибов, и мы можем сделать заключение, что с приближением силы к критической Эйлеровой

нагрузке прогибы начинают быстро возрастать. Следовательно, и для искривленных стержней при расчетах необходимо удовлетворить тем же условиям, что и при прямолинейных брусках. Но условие, необходимое и достаточное при прямых стержнях, может оказаться недостаточным, в случае искривленных брусков и в случае сил, приложенных с эксцентриситетом. При малых эксцентриситетах и малой начальной кривизне



Черт. 40б.

(по Ясинскому $e=0,1r$ и первоначальная кривизна $< 0,008$), как показали расчеты Ясинского, достаточно производить проверку по обычным ф-лам продольного изгиба. При больших эксцентриситетах и большей кривизне необходимы дополнительные исследования, для чего удобнее всего воспользоваться

приближенным методом (см. § 137)¹⁾. При испытании стержней на продольный изгиб первоначальная кривизна стержня и эксцентричное приложение силы неизбежны, поэтому все явление протекает так, как то следует из ф-лы (371). Уже при малых нагрузках начинается искривление стержня, но, пока сжимающая сила далека от Эйлеровой нагрузки, искривление это весьма мало. С приближением к Эйлеровой нагрузке прогибы начинают быстро возрастать, примерно, по гиперболическому закону. Чем тщательнее поставлены опыты, тем яснее можно наблюдать явление резкого возрастания прогибов и тем ближе соответствующая этому моменту сжимающая сила к Эйлеровой нагрузке. Для примера приводим диаграмму (черт. 405), где представлен закон возрастания прогибов с увеличением нагрузки при опытах Kirsch'a, T. Kármán'a и Tetmajer'a.

§ 177. Приближенный метод решения вопросов устойчивости²⁾.

При выводе ф-л Эйлера мы предполагали, что искривление стержня уже произошло, и путем интегрирования соответствующего дифференциального ур-ния искали ту сжимающую силу, которую нужно приложить, чтобы удержать стержень в изогнутом состоянии. Затруднения, которые часто встречаются при интегрировании дифференциальных ур-ний, заставляют искать других методов для решения вопросов устойчивости, таких, которые давали бы возможность находить величины критических нагрузок непосредственно, не прибегая к интегрированию дифференциальных ур-ний. Так как здесь вопрос идет об исследовании устойчивости различных форм равновесия, то наиболее естественно обратиться к рассмотрению выражения потенциальной энергии системы. Нам обыкновенно известна форма равновесия, соответствующая нагрузкам, меньшим критической. Без затруднения возможно составить выражение для изменения энергии системы при малом отклонении от этой формы равновесия. Если при всяком возможном отклонении потенциальная энергия системы возрастает, — рассматриваемая форма равновесия будет устойчива. Вывести систему из такого положения можно, только затратив известную работу. Если при каком-либо отклонении от положения равновесия энергия системы убывает, то эта форма равновесия неустойчива. „Критическим“ будет то значение нагрузки, при котором изменение энергии системы для какого-либо возможного перемещения обращается в нуль. Обозначим через V изменение энергии внутренних сил упругости системы и через T — работу приложенных к системе нагрузок при отклонении от рас-

¹⁾ Некоторые авторы предлагают вместо расчета по ф-лам Эйлера исходить из ф-л для изгиба эксцентрично приложенными силами и выбирать размеры так, чтобы напряжения нигде не превосходили допускаемых норм; см. Ostenfeld, Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit, Zeitschr. d. Ver. d. Ing., 1898 г., стр. 1462. В этих расчетах произвольной остается величина эксцентриситета.

²⁾ См. нашу работу: Об устойчивости упругих систем, Изв. Киев. пол. инст., 1910 г. Подробно те же задачи рассмотрены в Курсе теории упругости, ч. II, стр. 98.

смаатриваемой формы равновесия; тогда критическое значение нагрузки найдется из ур-ия:

$$T = V \quad (a).$$

Очевидно, из всех возможных отклонений нужно выбрать то, при котором ур-ие (а) дает для внешних нагрузок наименьшее значение. Такой способ разыскания критических нагрузок делает возможным нахождение приближенного решения задачи. Как и в случае приближенного исследования изгиба стержней (глава XV), мы, на основании опытных данных и условий в опорных точках, задаемся подходящим выражением для отклоненной формы равновесия системы, и для этой формы составляем выражения V и T . Вставляя их в ур-ие (а), найдем критическую нагрузку. Чтобы таким путем получить решение, по возможности близкое к точному, мы будем брать выражение для отклоненной формы с произвольными параметрами и величину этих параметров подберем так, чтобы выражение для критической нагрузки получало минимальное значение.

Поясним сказанное несколькими примерами. Рассмотрим основной случай продольного изгиба, когда концы стержня при выпучивании свободно поворачиваются. При этом ось стержня искривляется, как мы видели (§ 174), по синусоиде, и для прогиба можно написать выражение:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Изменение энергии деформации, соответствующее этому искривлению, будет (ф-ла 220):

$$V = f^2 \frac{\pi^4 EJ}{4l^3};$$

при этом продольные сжимающие силы P совершат работу (ф-ла 227)

$$T = f^2 \frac{P\pi^2}{4l}.$$

Вставляя это в ур-ие (а), найдем:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Мы в данном случае знали точное выражение для отклоненной формы равновесия, и потому ур-ие (а) дало нам точное значение для $P_{кр}$.

Возьмем более сложную задачу. Стержень, заделанный вертикально нижним концом, сжимается силами, равномерно распределенными по длине (черт. 401, фиг. б). Возьмем выражение для искривленной оси стержня в форме тригонометрического ряда. Чтобы удовлетворить условиям на концах:

$$y = 0 \text{ при } x = l, y = \delta \text{ и } y' = 0 \text{ при } x = 0,$$

нужно положить:

$$y = a_1 \cos \frac{\pi x}{2l} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{2l} + \dots \quad (b)$$

Ограничимся двумя членами этого ряда, тогда потенциальная энергия изгиба будет:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{\pi^4 EJ}{64l^3} (a_1^2 + 81a_2^2).$$

Найдем теперь работу внешней нагрузки при искривлении стержня. Каждый элемент ее $q dx$, выделенный в расстоянии x от нижнего сечения, опустится на величину $\frac{1}{2} \int_0^x (y')^2 dx$ и совершит работу $\frac{1}{2} q dx \int_0^x (y')^2 dx$. Вся работа нагрузки, совершаемая при искривлении, равна:

$$T = \frac{q}{2} \int_0^l dx \int_0^x (y')^2 dx = \frac{q}{2} \int_0^l (l-x) (y')^2 dx.$$

Вставляя вместо y два первые члена ряда (b) и выполняя промежуточные действия, найдем:

$$\begin{aligned} T &= \frac{q}{2} \frac{\pi^2}{4} \left[a_1^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + a_2^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{6}{\pi^2} a_1 a_2 \right] = \\ &= \frac{q}{2} \frac{\pi^2}{4} \left[0,1487a_1^2 + 0,6078a_1 a_2 + 2,1487a_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Имея выражения для T и V , найдем из ур-ия (a):

$$\begin{aligned} ql &= \frac{\pi^2 EJ}{8l^3} \cdot \frac{a_1^2 + 81a_2^2}{0,1487a_1^2 + 0,6078a_1 a_2 + 2,1487a_2^2} = \\ &= \frac{\pi^2 EJ}{8l^3} \cdot \frac{1 + 81z^2}{0,1487 + 0,6078z + 2,1487z^2} \end{aligned} \quad (c)$$

где через z обозначено отношение $a_2 : a_1$. Чтобы найти возможно точнее выражение для $(ql)_{кр}$ нужно так выбрать отношение z , чтобы выражение (c) приобрело значение minimum. Составляя производную от этого выражения по z и приравнявая ее нулю, получим для определения z ур-ие:

$$z^2 + 0,4020 z - 0,01235 = 0,$$

корнями которого будут:

$$z_1 = 0,0287 \text{ и } z_2 = -0,4307.$$

Вставляя z_1 в выражение (c), найдем:

$$(ql)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(1,12l)^3}.$$

Результат этот совершенно совпадает с тем, что было дано нами раньше (§ 174). Если бы мы ограничились в выражении для y первым членом ряда (b) и положили $a_2 = z = 0$, то нашли бы:

$$(ql)_{кр} = \frac{\pi EJ}{(1,09l)^2}.$$

Следовательно, первое приближение в данном случае дает погрешность в 5%.

§ 178. О продольном изгибе стержней в упругой среде ¹⁾.

Положим, что призматический стержень с опертыми концами сжимается двумя взаимно противоположными силами P . Всякому искривлению стержня препятствуют реакции упругой среды. Предположим, что реактивное усилие, приходящееся на элемент стержня, пропорционально длине элемента оси стержня и величине прогиба y в рассматриваемом сечении. Эти условия можно считать приблизительно выполненными в целом ряде технических задач. При отыскании $P_{кр}$ придется принять во внимание не только энергию деформации стержня, но также и упругой среды. Основное уравнение для определения $P_{кр}$ напишется так:

$$\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx \quad (a)$$

Левая часть уравнения представляет работу сжимающих сил при искривлении стержня, в правой части имеем энергию изгиба стержня и энергию деформации среды, k — постоянный коэффициент, на который нужно множить прогиб y , чтобы получить реакцию среды, приходящуюся на единицу длины стержня. Общий вид для изогнутой оси стержня мы получим путем наложения отдельных синусоид (см. ф-лу 223):

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots = \sum_{m=1,2,3,4..} a_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (b)$$

Вставляя это выражение для прогиба в уравнение (a) и выполняя промежуточные вычисления, получим:

$$P = \frac{EJ \sum a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + k \sum a_m^2}{\sum a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} \quad (372)$$

Наименьшее значение выражение (372) получает, когда все коэффициенты a_m , кроме одного, обращаются в нуль. Следовательно, первой возможной искривленной формой равновесия стержня будет синусоида. В отличие от ранее разобранных случаев (§ 174), здесь первая искривленная форма может иметь несколько точек перегиба. Число их будет зависеть от величины коэффициента k , характеризующего жесткость среды. Чем больше k , тем на большее число полуоволн подразделяется стержень при вынуждении. Определение числа полуоволн в каждом частном случае можно выполнить на основании таких соображений. Положим, что первая искривленная форма образует m полуоволн тогда:

$$y = a_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

Ф-ла (372) даст нам:

$$P_{кр} = \frac{EJ(m\pi)^4 + k l^4}{m^2 \pi^2 l^2} \quad (c)$$

¹⁾ См. нашу работу: О продольном изгибе стержней в упругой среде, Изв. Петерб. политех. инст., 1907 г., и вышецитированную работу: Об устойчивости упругих систем, а также работы: Zimmermann'a, Zentralblatt d. Bauverwaltung, 1906 г. и Sitzungsberichte d. Akademie d. Wissenschaften, Berlin, 1906, 1907 и 1909 г.

Вводя обозначение:

$$B^2 = \frac{k l^4}{16 E J}, \quad (d)$$

перепишем ф-лу для $P_{кр}$ в таком виде:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} \left(m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4} \right) = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2} \quad (373),$$

где „коэффициент длины“

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4}}} \quad (374)$$

Пока среда обладает малой жесткостью и коэффициент k — малая величина, вполне естественно положить, что первая искривленная форма равновесия будет без точек перегиба, как и в основном случае продольного изгиба. Увеличивая k , или, что все равно, увеличивая B^2 , мы достигнем предела, когда стержню легче изогнуться по кривой с двумя полуволнами, далее с тремя, с четырьмя и т. д. полуволнами. Пусть первая искривленная форма имеет m полуволи, и мы постепенно увеличиваем B^2 ; спрашивается, при каком значении B^2 стержень примет форму с $m+1$ полуволнами. Очевидно, форма с $m+1$ полуволнами будет первой искривленной формой равновесия при том значении B^2 , когда коэффициент длины μ , определяемый по ф-ле (374), увеличится с заменой m на $m+1$. Величина B^2 , соответствующая моменту перехода от m к $m+1$ полуволи, определится из ур-я:

$$\sqrt{m^2 + \frac{16 B^2}{m^2 \pi^4}} = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16 B^2}{(m+1)^2 \pi^4}},$$

откуда:

$$B^2 = \frac{\pi^4}{16} m^2 (m+1)^2 \quad (e).$$

Полагая $m=1$, найдем: $B^2 = 24,35$. Пока $B^2 < 24,35$, первая искривленная форма равновесия не имеет точек перегиба. Подставляя вместо m в ур-е (e) числа 2, 3, 4, ..., получим ряд значений B^2 , при которых совершается переход от одной формы равновесия к другой с большим числом полуволи. Значения эти приведены в следующей таблице. Верхний ряд чисел дает число полуволи для первой искривленной формы, а нижний — предельные значения B^2 , при которых эти формы могут получаться.

$m =$	1	2	3	4	5	6	7
$B^2 \approx$	24,35	219,2	876,7	2435	5479	10739	19091

Определив B^2 на основании данных относительно упругих свойств системы, мы из вышеприведенной таблицы можем найти число полуволи m , на которое стержень подразделяется при выпучивании. Вставляя это значение m в ф-лу (374), найдем величину коэффициента длины μ и из ф-лы (373) — соответствующее значение $P_{кр}$ ¹⁾. При боль-

¹⁾ Отметим здесь один результат, представляющий интерес в теории гибких валов. При вращении вала с угловой скоростью ω всякое искривление сопровождается появлением сил инерции. На каждый элемент вала будет действовать центробежная сила $\frac{q}{g} \omega^2 u dx$, где q — вес единицы длины вала. Силы эти стремятся увеличить искривление,

шом значении m поступим следующим образом. Перепишем выражение (с) в таком виде:

$$P_{кр} = EJ \left[\frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{m}\right)^2} + \frac{k}{EJ} \left(\frac{l}{m}\right)^2 \frac{1}{\pi^2} \right] = EJ \left[\frac{\pi^2}{s^2} + \frac{ks^2}{\pi^2 EJ} \right] \quad (f),$$

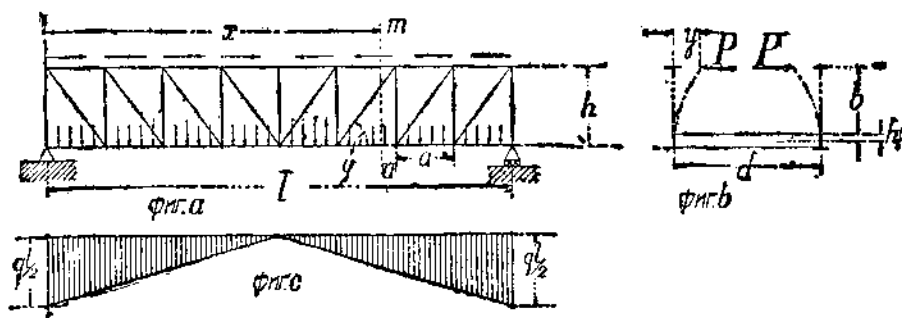
где через s обозначена длина одной полуволны. Наименьшее значение выражение (f) получает при

$$s = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{k}}.$$

С увеличением числа полуволн длина их приближается к найденному пределу s , и величина $P_{кр}$, как видно из выражения (f), к такому значению:

$$P_{кр} = EJ \left[\sqrt{\frac{k}{EJ}} + \sqrt{\frac{k}{EJ}} \right] = 2\sqrt{kEJ} = 2 \frac{\pi^2 EJ}{s^2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим задачу об устойчивости сжатых поясов открытых мостов (черт. 406)¹⁾. Если на мост действует равномерно распределенная



Черт. 406.

нагрузка и Q — величина нагрузки, приходящаяся на одну ферму, то при большом числе панелей сжимающее усилие, передаваемое от какого-либо раскоса верхнему поясу моста, с достаточной точностью выражается ф-лой:

$$\frac{Q}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right) \operatorname{ctg} \varphi, \\ \left[\frac{Q}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right) - \text{перерезывающая сила в сечении } mn \right].$$

Для упрощения дальнейших расчетов мы эти сосредоточенные усилия заменим сплошной нагрузкой, закон распределения которой представлен на фиг. с. Интенсивность

и мы получаем изгиб в среде с отрицательным k , равным $-\frac{q}{g} \omega^2$. Как видно из ф-лы (с), вал искривится при отсутствии предельной силы, когда $EJ(m\pi^4) = -kl^4 = \frac{q}{g} \omega^2 l^4$. Критическое значение угловой скорости (ф-ла 351) получим, полагая $m=1$.

¹⁾ Решение этой задачи принадлежит Ф. С. Ясинскому; см. собр. соч., т. I, стр. 215. Упрощение решения и некоторые поправки имеются в нашей работе: Об устойчивости упругих систем, стр. 31.

нагрузки в каком-либо сечении mn найдется, если величину усилия, передаваемого поясу соответствующим раскосом, разделим на длину панели a . Таким образом получим:

$$\frac{Q}{la} \left(x - \frac{l}{2} \right) \operatorname{ctg} \varphi = \frac{Q}{lh} \left(x - \frac{l}{2} \right) = q \left(x - \frac{l}{2} \right), \text{ где } q = \frac{Q}{lh}.$$

Интенсивность сжимающих усилий растет от середины пролета к опорам по закону треугольника. Наибольшее сжатие соответствует середине пояса, где сжимающая сила выражается площадью одного из заштрихованных треугольников (фиг. с) и равняется $\frac{q l^2}{8}$.

В открытых мостах не имеется верхних связей между поясами, и когда сжимающие усилия перейдут известный предел, возможно выпучивание поясов, сопровождающееся изгибом стоек и раскосов фермы (фиг. б). При определении критического значения сжимающей силы $\frac{q l^2}{8}$ верхний пояс каждой фермы можно рассматривать, как стержень, сжатый усилиями, представленными на фиг. с. Выпучиванию стержня препятствует упругая среда, жесткость которой характеризуется коэффициентом k . Величина k , как и прежде (§ 97), может быть вычислена путем замены сосредоточенных сопротивлений отдельных стоек (фиг. б) сопротивлениями, распределенными по длине a ¹⁾. Рассматривая каждую стойку, как балку с одним заделанным концом, будем иметь:

$$v = \frac{P b^3}{3 E J_1}.$$

В тех случаях, когда стойки подвергаются значительному продольному сжатию, нужно принять во внимание влияние сжимающих сил на величину прогиба (ф-ла 229) и применить ф-лу:

$$v = \frac{P b^3}{3 E J_1} \frac{1}{1 - \alpha^2},$$

где α^2 — отношение продольной сжимающей силы к критической нагрузке для стойки с нижним заделанным и верхним свободным концом. Для силы P — „опора“ стойки получаем выражение:

$$P = \frac{3 E J_1}{b^3} (1 - \alpha^2) y.$$

Распределяя эту силу на длину панели a , найдем:

$$\frac{P}{a} = \frac{3 E J_1}{a b^3} (1 - \alpha^2) y$$

и

$$k = \frac{3 E J_1}{a b^3} (1 - \alpha^2) \quad (375).$$

Выяснив силы, действующие на стержень и упругие свойства среды, мы найдем критическое значение сжимающей силы, приравняв работу сжимающих усилий при выпу-

¹⁾ Конечно, получаемый таким путем результат для критического значения сжимающей силы будет тем точнее, чем гуще распределены стойки. При небольшом числе стоек и при большой их жесткости придется рассматривать сосредоточенные реакции. Вместо стержня в упругой среде, будем иметь стержень на упругих опорах. Некоторые задачи этого рода имеются в книге И. Г. Бубнова, Строительная механика корабля, стр. 260. См. также А. Ostenfeld, Die Seitensteifigkeit offener Brücken, Zeitschr. Beton u. Eisen, 1916 г.

чивании изменению потенциальной энергии системы. Выделим два элемента стержня, симметрично расположенные относительно его середины. Работа приложенных к ним усилий:

$$q \left(\frac{l}{2} - x \right) dx$$

при искривлении оси стержня представится ф-лой:

$$\frac{1}{2} q \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \int_x^{l-x} (y')^2 dx.$$

Работа всех сжимающих усилий, приложенных к стержню, будет равна:

$$T = \frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \int_0^{l-x} (y')^2 dx = \frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} x(l-x) (y')^2 dx.$$

Приравнявая ее изменению потенциальной энергии деформации, получим основное урав-ие ¹⁾:

$$\frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} x(l-x) (y')^2 dx = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx.$$

откуда:

$$\frac{q l^2}{8} = \frac{P}{8} \cdot \frac{EJ \int_0^l (y'')^2 dx + k \int_0^l y^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^l x(l-x) (y')^2 dx} \quad (h).$$

Таким образом, задача о нахождении критических сжимающих усилий сводится к разысканию минимума дроби (h). Если опорные стойки мостовой фермы настолько жестки, что их изгибом можно пренебречь, то сжатый пояс придется рассматривать, как стержень с опертыми концами, и взять для искривленной оси общее выражение (b). Чтобы упростить вычисления, лучше каждую из возможных форм равновесия рассмотреть отдельно. В случае весьма податливой среды, первой искривленной формой равновесия будет кривая без перегибов, состоящая из одной полуволны. Кривая эта будет симметрична относительно середины, поэтому, ограничиваясь двумя членами ряда (b), нужно положить ²⁾:

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} + a_1 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Вставляя это выражение в общую ф-лу (h) и выполняя промежуточные вычисления, найдем:

$$\frac{q l^2}{8} = \frac{\pi^2 EJ}{P} \cdot \frac{1 + 81z^2 + \frac{16B^2}{\pi^4} (1 + z^2)}{2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{15}{\pi^2} z + 2 \left(3 - \frac{1}{\pi^2} \right) z^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (k).$$

¹⁾ Мы предполагаем, что жесткость изгиба для пояса постоянна по длине, и в тех случаях, когда она меняется по длине стержня, вместо EJ в дальнейшем будем ставить то значение жесткости, при котором критические напряжения, определяемые по ф-ле (h) получают наименьшую величину.

²⁾ Члены $\sin \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{4\pi x}{l}$ пропадут, так как они соответствуют формам, несимметричным относительно середины.

Величины z и B^2 имеют прежние значения:

$$z = a_1 : a \text{ и } B^2 = \frac{k^4}{16EJ}.$$

Для получения критической сжимающей силы нужно подобрать для z величину, при которой выражение (4) приобретает значение minimum. Это нами сделано для нескольких значений B^2 , и соответствующие величины коэффициента длины помещены в нижеследующей таблице.

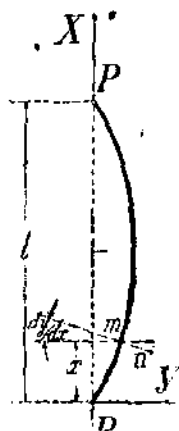
Начиная, примерно, с $B^2 \approx 18$, стержень при выпучивании подразделяется на две полуволны и имеет по середине пролета точку перегиба. Если ограничиваться в выражении для искривленной формы двумя членами, то нужно положить:

$$y = a \sin \frac{2\pi x}{l} + a_1 \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Входящие в эти выражения синусоиды имеют точку перегиба по середине пролета. Вставляя новое значение y в общую ф-лу (4), мы можем вычислить прежним способом значения коэффициента длины μ для второй искривленной формы равновесия и т. д. Результаты вычислений приведены в таблице. Вводя в расчет наименее выгодную стойку и наименее выгодное сечение пояса ¹⁾, мы на основании ф-л (375) и (4), определяем величину B^2 и из таблицы находим соответствующее значение коэффициента длины μ . Дальнейший расчет ведется, как для основного случая продольного изгиба ²⁾.

ТАБЛИЦА.

B^2	μ	B^2	μ	B^2	μ
0	0,694	22,8	0,363	200	0,245
5	0,524	56,5	0,324	300	0,224
10	0,443	100	0,289	500	0,204
15	0,394	162,8	0,257	1000	0,174



Черт. 407.

§ 179. О продольном изгибе составных стержней.

На практике очень часто применяют составные стержни, склепанные из нескольких частей, соединенных решетками, и является вопрос о проверке на устойчивость таких стержней. Оказывается, что в этих случаях на величину критической нагрузки может оказать существенное влияние поперечная сила, появляющаяся при выпучивании стержня. Роль поперечной силы выясним предварительно на основном случае продольного изгиба.

Предположим, что призматический стержень с опертыми концами выпучился под действием продольных сжимающих сил P (черт. 407). Благодаря искривлению, в каждом поперечном сечении стержня, кроме продольной силы, будет действовать поперечная сила Q ,

¹⁾ Нужно брать стойку, для которой k , вычисляемое по ф-ле (375), получает наименьшее значение. Для пояса нужно взять то сечение, при котором величина $\mu : r$ получает наименьшую величину. (r — соответствующий радиус инерции сечения).

²⁾ Мы предполагаем, что за пределами упругости коэффициент длины μ сохраняет свою величину. Это не совсем точно, но получаемые при таком способе расчета погрешности идут в запас прочности, см.: Об устойчивости упругих систем, стр. 73.

равная $P \frac{dy}{dx}$, представляющая собой проекцию силы P на нормаль к изогнутой оси балки в рассматриваемом сечении mn . Чтобы оценить влияние этой силы на величину критической нагрузки, нужно принять во внимание не только энергию изгиба, но также и энергию сдвига искривленного стержня.

Так как кривизна в данном случае обусловлена не только действием изгибающего момента, но зависит также от поперечной силы, то для энергии изгиба воспользуемся таким выражением:

$$V_1 = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = -\frac{P^2}{2EJ} \int_0^l y^2 dx.$$

Для энергии сдвига получим:

$$V_2 = \int_0^l \frac{k' Q^2}{2FG} dx = \frac{k' P^2}{2FG} \int_0^l (y')^2 dx,$$

где

$$\frac{kQ'}{FG} = \beta$$

представляет собой некоторое среднее значение угла перекашивания, обусловленное действием поперечной силы Q .

Основное ур-ие для определения критической нагрузки напишется так:

$$\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx = -\frac{P^2}{2EJ} \int_0^l y^2 dx + \frac{k' P^2}{2FG} \int_0^l (y')^2 dx \quad (a).$$

Левая часть ур-ия представляет собой работу сжимающих сил при искривлении стержня, в правой части имеем энергию изгиба и энергию сдвига.

Наименьшее значение для критической нагрузки получим, полагая искривление по синусоиде без точек перегиба. Вставляя в ур-ие (a) вместо прогиба выражение:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

и выполняя промежуточные вычисления, найдем:

$$P_{кр} = \frac{1}{\frac{P}{\pi^2 EJ} + \frac{k'}{FG}} \quad (376).$$

Вводя обозначения:

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{P}; \quad P_d = \frac{FG}{k'},$$

получим из ф-лы (376):

$$P_{кр} = P_e \frac{P_d}{P_d + P_e} = \varphi P_e.$$

Так как P_d очень велико по сравнению с P_e , то коэффициент φ близок к единице, и влияние поперечной силы на величину критической нагрузки будет невелико¹⁾.

Мы остановились на выводе ф-лы (376) лишь потому, что она дает возможность перейти к исследованию устойчивости составных стержней; нужно

только иметь в виду, что добавочный член $\frac{k'}{FG}$ в знаменателе полученной ф-лы представляет собой множитель, на который приходится множить поперечную силу Q , чтобы получить угол сдвига β .

Возьмем стержень, состоящий из поясов AB и A_1B_1 и соединительной решетки (черт. 408, фиг. a). Предположим, что выпучивание свободно может происходить в плоскости XY ,



Черт. 408

следовательно, в обычную ф-лу Эйлера войдет момент инерции J_0 относительно оси OZ . При оценке влияния поперечной силы будем считать число панелей решетки весьма большим и найдем угол перекашивания β из рассмотрения деформации одной панели (фиг. b). Обозначим через F_d площадь поперечного сечения диагонали, через F_g и F_p — поперечные сечения поясов

и распорок. Если величина F_d мала, по сравнению с F_g и F_p , то можно считать, что перекашивание, представленное на фиг. b пунктиром, является результатом растяжения диагонали. Удлинение диагонали равно:

$$\delta = \frac{Qa}{\cos \alpha EF_d \sin \alpha}.$$

Абсолютный сдвиг mn найдется из Δ -ка mnp ; он равен $\delta : \cos \alpha$, следовательно угол перекашивания будет:

$$\beta = \frac{mn}{a} = \frac{Q}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} \quad (b).$$

Вставляя в ф-лу (376) вместо $\frac{k'}{FG}$ множитель при Q в выражении (b), получим

¹⁾ См. нашу работу: К вопросу о продольном изгибе, Изв. Киев. пол. инст., 1908 г.

Тот же результат иным путем получен инж. Nussbaum'ом, Zeitschr. f. Math. u. Phys., т. 55.

искомое значение $P_{кр}$ для составного стержня, представленного на фиг. а 1):

$$P_{кр} = \frac{1}{\frac{P}{\pi^2 EJ_0} + \frac{1}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha}} \quad (377).$$

Легко видеть, что влияние поперечной силы на величину $P_{кр}$ может быть значительным лишь в случае малых значений F_d .

Если при составлении угла перекашивания β принять во внимание сжатие распорок решетки, то найдем:

$$\beta = \frac{Q}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{Qb}{EF_p a} = \frac{Q}{E} \left(\frac{1}{F_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{F_p \tan \alpha} \right) \quad (e).$$

Вставляя получившийся при Q множитель в ф-лу (376) вместо $\frac{k'}{GF}$ найдем:

$$P_{кр} = \frac{1}{\frac{P}{\pi^2 EJ} + \frac{1}{EF_d \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{EF_p \tan \alpha}} \quad (378).$$

Если решетка имеет двойные диагонали (черт. 409, фиг. а), то вместо F_d придется в ф-лу (378) вставить величину $2F_d$.

При стержне трубчатого сечения (фиг. б) придется принять во внимание две соединительные решетки, поэтому в ф-лу (378) нужно подставить вместо F_d — величину $4F_d$ и вместо F_p — величину F_p .

При расчете стержня, представленного на фиг. с, можно применить ф-лу (377), нужно только под α подразумевать угол, указанный на чертеже.

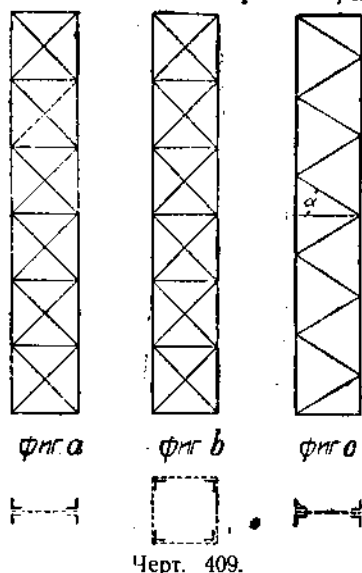
Во всех рассмотренных случаях величина критической нагрузки меньше Эйлеровой нагрузки:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_0}{P},$$

и может быть представлена ф-лой:

$$P_{кр} = \varphi P_{кр}.$$

Найдя при помощи ф-л (377) или (378) величину φ , мы приводим расчет составных стержней к основному случаю продольного изгиба, а за пределами упругости можем пользоваться данными раньше эмпирическими ф-лами или таблицей Ясинского.



1) Ф-ла эта впервые была получена Engesser'ом. Позднейшее изложение его решения имеется в журнале Zentralblatt der Bauverw., 1909 г., стр. 136.

Исследование того же вопроса, в связи с рассмотрением причин крушения Квебекского виадука, см. L. Prandtl, Knicksicherheit v. Gitterstäben, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1907 г. В обеих работах принят метод исследования, отличный от изложенного выше.

Приложения к мостовым конструкциям, см.: Н. П. Виноградов, О расчете сжатых решетчатых стержней, Вестник о-ва технологов, 1914 г.

Перейдем теперь к случаю, когда пояса составного стержня соединены между собой лишь рядом поперечных планок (черт. 410). Такого рода конструкции нашли себе за последнее время широкое распространение в сжатых мостовых элементах. Положим, что при сжатии составной стержень может свободно выпучиваться в плоскости XU . Обозначим через J_0 момент инерции всего сечения относительно оси Z -ов, через J_1 и J_2 — моменты инерции сечения одного пояса и сечения соединительной планки. Мы опять можем воспользоваться ф-лой (376), нужно только установить связь между углом перекашивания β и поперечной силой Q . Для этого выделим из стержня сечениями m и m_1 элемент длиной a . Искривленный вид этого элемента в увеличенном масштабе представлен на фиг. б. Перекашивание его зависит от изгиба поперечной планки и от изгиба поясов. Из фиг. б видно, что

$$\beta = (\delta_1 + \delta_2) : \frac{a}{2}.$$

Пользуясь известными ф-лами, найдем:

$$\varphi = \delta_1 : \frac{a}{2} = -\frac{Qab}{2 \cdot 6EJ_2}; \quad \delta_2 = -\frac{Qa^3}{3 \cdot 2 \cdot 8EJ_1};$$

следовательно:

$$\beta = \frac{Q}{E} \left(\frac{ab}{12J_2} + \frac{a^2}{24J_1} \right).$$

Вставляя получившийся при Q множитель в ф-лу (376) вместо $\frac{k'}{FG}$ найдем¹⁾:

$$P_{кр} = \frac{1}{\frac{p}{\pi^2 EJ_0} + \frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1}} \quad (379).$$

Опять, как видно из полученной ф-лы, величина $P_{кр}$ меньше, чем Эйлера нагрузка, вычисленная по ф-ле для цельного стержня. Разность между цельным и составным стержнями будет тем большая, чем меньше жесткость планок и чем больше расстояние a между ними.

В тех случаях, когда a велико или когда мала жесткость пояса EJ_1 , может случиться, что величина $\frac{P_{кр}}{2}$, вычисленная по формуле (379), не будет

¹⁾ Ф-ла эта дает результаты, близкие к тому, что найдено было на опыте проф. Rüdelofom; см. Eisenbau, 1913 г., стр. 41, а также Lossier, Génie Civil, t LXVI, 1915 г., стр. 150.

мала по сравнению с величиной $\frac{\pi^2 EJ_1}{a^2}$ критической нагрузки, вычисленной для элемента пояса между двумя поперечными планками. При этом условии ф-ла (379) дает для $P_{кр}$ несколько преувеличенные значения ¹⁾.

Ф-ла (379) выведена в предположении, что явление происходит в пределах упругости. За пределами упругости ее можно применить, чтобы найти соотношение между критической нагрузкой для составного и соответствующего цельного стержня и потом воспользоваться эмпирическими ф-лами, данными для цельных стержней ²⁾. Что касается опытов, произведенных над устойчивостью составных стержней, то их далеко не достаточно для вывода обоснованных эмпирических ф-л.

§ 180. Замечания относительно закрепления концов и ослабления поперечных сечений сжатых стержней.

При выводе ф-л для критической нагрузки различают свободные, опертые и заделанные концы. На практике приходится встречаться с промежуточными условиями. Концы рассчитываемого стержня, обыкновенно, прикреплены к другим частям сооружения и потому не могут считаться свободно поворачивающимися. Их нельзя также считать и абсолютно заделанными: при самом совершенном способе закрепления концы отчасти поворачиваются, и это обстоятельство понижает величину критической нагрузки. Если углы поворота концов пропорциональны появляющимся опорным моментам, то мы будем иметь дело с упругой заделкой концов, и при заданной жесткости заделки сможем оценить ее влияние на величину критической нагрузки. При пользовании приближенным методом придется принять во внимание не только энергию деформации рассчитываемого стержня, но также и тех частей сооружения, с которыми этот стержень соединен. Таким образом, мы приходим к исследованию устойчивости стержневых систем ³⁾. На практике в таких случаях, для упрощения расчетов обыкновенно пренебрегают, в запас прочности, влиянием закреплений и пользуются ф-лой, выведенной для стержней со свободно поворачивающи-

¹⁾ Дальнейшие исследования, относящиеся к этому вопросу, и опытные данные имеются в статье: Об устойчивости упругих систем, стр. 57.

Иной вывод ф-лы (379) дан проф. Kayser'ом см. Eisenbau, 1910 г.

См. также исследование Müller-Breslau, Eisenbau, 1911—1913 гг.

²⁾ Получаемые при таком способе расчета погрешности идут в запас прочности, см. Об устойчивости упругих систем, стр. 75.

³⁾ Как пример такого типа задач, можно привести проверку на устойчивость сжатых стержней многораскосных систем; см. Ясинский, т. I, стр. 177.

См. также статью Vianello; Knickfestigkeit eines dreiarmligen ebenen System, Zeitschr. d. Ver. d. Ing., 1906 г., стр. 1753.

Один частный случай рассмотрен в нашей статье: К вопросу о продольном изгибе, Изв. Киев. пол. инст., 1908 г.

мися концами. Заметим здесь, что влияние закрепления концов на величину критической нагрузки убывает с уменьшением длины стержня. Для примера сравним стержень с опертыми концами и стержень, концы которого абсолютно заделаны. В последнем случае коэффициент длины $\mu = 0,5$. Пока явление продольного изгиба происходит для обоих стержней в пределах упругости, критическая нагрузка при заделанных концах в четыре раза больше, чем при опертых концах. За пределами упругости коэффициент длины μ сохраняет свое значение, но отношение между критическими нагрузками будет уже иное. Пользуясь таблицей Ясинского (стр. 530), легко получить такие результаты:

ТАБЛИЦА

$\frac{l}{r}$	$P_{кр} \text{ kg/cm}^2$ Свободные концы	$\frac{\mu l}{r}$	$P'_{кр} \text{ kg/cm}^2$ Заделанные концы	$\frac{P'_{кр}}{P_{кр}}$
200	532	100	1904	3,58
150	946	75	2275	2,40
100	1904	50	2646	1,39
50	2646	25	3016	1,15

Из этой таблицы видно, как убывает отношение $P'_{кр} : P_{кр}$ с уменьшением длины стержня. При коротких стержнях влияние закрепления концов на величину критических напряжений очень невелико.

Сжатые стержни, рассчитываемые на продольный изгиб, бывают обыкновенно в некоторых сечениях ослаблены заклепочными отверстиями, или различного рода врубками, и является вопрос, на сколько, благодаря этим ослаблениям, уменьшается величина критической нагрузки. Решение этой

задачи связано с исследованием продольного изгиба стержней переменного сечения. В тех случаях, когда протяжение ослабленного места вдоль оси стержня невелико ¹⁾, влияние его на величину критической нагрузки для основного случая продольного изгиба такое же, как и влияние приращения длины стержня на величину:

$$\delta l = d \frac{J - J'}{J'} - \cos^2 \frac{\pi c}{l} \quad (380)$$

Здесь J — момент инерции неослабленного сечения, J' — момент инерции ослабленного сечения, c — расстояние ослабленного места от середины стержня, d — длина ослабленного участка. Наибольшее влияние на $P_{кр}$ оказывает ослабление стержня по середине, где $c = 0$. Если в стержне имеется ряд равных и равноудаленных друг от друга ослаблений, то общее их влияние на $P_{кр}$ получится путем суммирования влияний отдельных ослаблений и, на основании ф-лы (380), может быть заменено приращением длины стержня на величину:

$$\delta l = \frac{nd}{2} \frac{J - J'}{J'} \quad (381)$$

¹⁾ См. нашу работу: К вопросу о продольном изгибе, Изв. Киев. пол. инст., 1908 г

где n — число ослабленных мест. На численном примере можно показать, что в случае металлических стержней влияние заклепочных отверстий на величину $P_{кр}$ невелико.

Возьмем железный уголок, сечение которого равно $75 \times 75 \times 10$ мм и длина $l = 2,5$ м. По длине стержня имеется 10 заклепочных отверстий диаметром 2 см. Такое отверстие ослабляет сечение стержня, примерно, на 14%, на столько же, приблизительно, уменьшится и момент инерции сечения; следовательно:

$$(J - J') : J' \approx 0,17.$$

Если в ф-лу (381), вместо длины ослабленного участка, поставим диаметр заклепки, то найдем:

$$\delta l = 1,7 \text{ см.}$$

Так как критическое напряжение обратно пропорционально квадрату длины стержня, то вычисленное нами удлинение стержня δl уменьшает $P_{кр}$ на

$$100 \frac{\delta l}{l} \approx 1,4\%.$$

Уменьшение $P_{кр}$ происходит в значительно меньших размерах, чем ослабление сечения, и потому при проверке на продольный изгиб расчеты следует относить к сечению *brutto* и не вычитать заклепочных отверстий ¹⁾.

Этим мы и ограничим наше рассмотрение вопросов устойчивости сжатых стержней. Изложенные здесь методы могут быть применены также при решении более сложных задач: например, вопросов об устойчивости стержней переменного сечения ²⁾, стержней равного сопротивления продольному изгибу ³⁾ и стержней, опертых в нескольких точках ⁴⁾. Для приближенного решения тех же вопросов можно воспользоваться также графическим методом ⁵⁾.

¹⁾ При этом, конечно, должно быть соблюдено то условие, чтобы сжимающие напряжения в ослабленном сечении не превосходили допускаемой нормы.

²⁾ См.: Franke, Die Tragkraft d. Säulen bei veränd. Querschnitt, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1901 г.

Franke, Knicksicherheit bei entsprechender Zunahme d. Trägheitsmomentes, Zeitschr. f. Arch. u. Ing., 1907 г.

А. Динник, Вестник о-ва технологов, 1913 г. См. также Вестник инж., 1915 г., стр. 94.

Приближенный метод исследования устойчивости составных стержней переменного сечения см.: H. Kayser, Knickwiderstand. v. Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt, Eisenbau, 1910 г., стр. 451.

³⁾ См. Verhandlung. d. Gewerbebeiss, 1910 г., Heft VI.

⁴⁾ См. Wittenbauer, Die Knicklast mehrfach befestigter Stäbe, Zeitschr. d. Ver. d. Ing., 1902 г.

Johnson. The Theory of continuous columns, Amer. Soc. of. civileng., 1906 г.

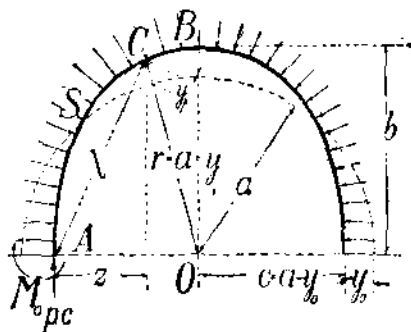
⁵⁾ См. Vianello, Zeitschr. d. Ver. d. Ing., 1898 г., стр. 1436.

§ 181. Об устойчивости кругового кольца и цилиндрической трубки.

Если круглое кольцо, или тонкостенная цилиндрическая трубка кругового поперечного сечения радиуса a подвергаются действию равномерно распределенных внешних давлений, то, как показывает опыт, увеличением интенсивности давления p можно достигнуть такого предельного состояния, когда круговая форма равновесия перестает быть устойчивой, и кольцо или трубка начинают сплющиваться. Для определения „критического“ значения внешнего давления можно, конечно, воспользоваться общим приемом и получить нужное уравнение, приравнявая работу внешних давлений при сплющивании изменению потенциальной энергии деформации системы ¹⁾. Мы получим нужное нам решение проще, если воспользуемся дифференциальным уравнением равновесия для изогнутой оси кривого бруса (§ 137):

$$EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{y}{a^2} \right) = -M \quad (a)$$

Для упрощения выводов предположим, что кольцо имеет прямоугольное поперечное сечение и ширина сечения в направлении, перпендикулярном к плоскости кольца, равна единице; тогда давление, приходящееся на каждую единицу длины кольца, будет равно p . Предположим, что под действием давлений p произошло сплющивание кольца, и пусть сплошная линия на черт. 411 представляет ось кольца и линии OA и OB — оси симметрии для искривленной формы равновесия. Рассечем кольцо в точке A . Действие нижней части кольца на верхнюю может быть заменено продольной сжимающей силой $p \cdot c$ (c — малая полуось сплюсненной формы равновесия кольца) и моментом M_0 . Изгибающий момент в точке C будет равен ²⁾:



Черт. 411.

$$M = -M_0 - pcz + \frac{p l^2}{2}.$$

Здесь равномерное давление по дуге AC заменено давлением по хорде AC . Длина этой хорды найдется из $\triangle OAC$:

$$\overline{OC}^2 = r^2 = l^2 + c^2 - 2cz,$$

откуда:

$$\frac{p}{2} \cdot cz = \frac{r^2 - c^2}{2} = \frac{(a+y)^2 - (a-y_0)^2}{2} = a(y-y_0).$$

¹⁾ См. нашу работу: Применение нормальных координат..., Изв. Киев. пол. инст., 1910 г.

²⁾ Как и при выводе уравнения (a), за положительное направление момента мы принимаем здесь то, которому соответствует увеличение кривизны оси.

Принимая это во внимание и вставляя выражение для M в ур-ие (а), получим:

$$EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{y}{a^2} \right) = M_0 + pa y_0 - pa y,$$

или:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{M_0 + pa y_0}{EJ} + \left(\frac{pa}{EJ} + \frac{1}{a^2} \right) y = 0 \quad (b).$$

Общий интеграл этого ур-ия будет:

$$y = \frac{M_0 + pa y_0}{EJa^2} + C \cos \alpha s + C_1 \sin \alpha s \quad (c),$$

где:

$$\alpha^2 = \frac{pa}{EJ} + \frac{1}{a^2},$$

C и C_1 — произвольные постоянные. Радиальное перемещение y имеет наибольшее отрицательное и наибольшее положительное значение в точках A и B , где $s = 0$ и $s = \frac{a\pi}{2}$, в этих точках $\frac{\partial y}{\partial s} = 0$. Чтобы удовлетворить этим условиям, нужно положить:

$$C_1 = 0 \quad \text{и} \quad \left[\sin \alpha s \right]_{s=\frac{a\pi}{2}} = 0,$$

следовательно:

$$\frac{\alpha a \pi}{2} = n\pi, \quad \text{или:} \quad \sqrt{\frac{pa}{EJ} + \frac{1}{a^2}} = \frac{2n}{a}$$

Наименьшее значение для давления, при котором возможно сплющивание кольца, получим, положив $n = 1$, тогда:

$$p_{кр} = \frac{3EJ}{a^3} \quad (382).$$

Если нужно рассчитать на устойчивость трубку кругового поперечного сечения, то можем выделить из нее элементарное кольцо, ширина которого в направлении оси трубки равна единице. Устойчивость такого кольца может быть проверена по ф-ле (382), нужно только, вместо жесткости EJ , вставить цилиндрическую жесткость, тогда:

$$p_{кр} = \frac{3Eh^3}{12(1-\sigma^2)a^3} \quad (383),$$

где h — толщина трубки. Полученная ф-ла хорошо согласуется с опытами ¹⁾ и дает возможность проверять на устойчивость длинные трубки.

¹⁾ См. P. A. Cargan, Univ. of Illinois Bulletin, n° 5, 1906 г.
G. Cook, Phil. Mag., 1914 г., стр. 51.

См. сит, The collapse of tubes under external pressure, Engineering, 1909 г., стр. 35.

В случае трубки конечной длины ¹⁾ l , величина критических давлений будет больше, чем то следует из ф-лы (383) и может быть определена из ф-лы ²⁾:

$$p_{кр} = \frac{E}{(n^2 - 1) \left[1 + \left(\frac{nl}{\pi a} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{h}{a} + 0,73 E \left[n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1,3}{1 + \left(\frac{nl}{\pi a} \right)^2} \right] \frac{h^3}{(2a)^3} \quad (384).$$

Здесь n целое число, указывающее число полуволов, на которые подразделяются при выпучивании параллельные круги цилиндрической трубки. Число n должно быть подобрано так, чтобы определяемое по ф-ле (384) критическое давление имело наименьшее значение. В нижеследующей таблице приводим ряд значений $p_{кр}$ в kg/cm^2 , вычисленных при $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ и $\nu = 0,3$. При модуле E' , отличном от E , числа таблицы должны быть помножены на дробь $\frac{E'}{E}$. Черной чертой отмечены в таблице давления, соответствующие напряжениям, большим, чем 1800 kg/cm^2 .

ТАБЛИЦА.

$\frac{a}{l} \backslash \frac{100b}{a}$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
	Критические давления в kg/cm^2							
0	0,035	0,28	0,95	2,25	4,4	7,6	12	18
0,1	0,18	1,0	2,9	6,6	12,3	17	23	31
0,2	0,37	2,1	5,9	13	21	37	47	66
0,3	0,56	3,2	9,3	18	32	51	76	111
0,4	0,76	4,5	11,6	25	45	70	101	140
0,5	0,97	5,5	15	32	55	87	132	190

Если, вместо полного кольца, имеется только часть его, и концы кривого стержня закреплены шарнирно, то критическое значение давления, равномерно распределенного по стержню и направленного нормально к его оси, определится по ф-ле:

$$p_{кр} = \frac{EJ}{a^3} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi^2} - 1 \right) \quad (d),$$

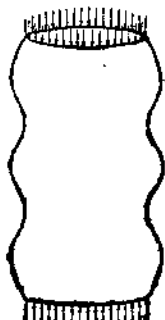
где через φ обозначен центральный угол, соответствующий оси кривого бруска ³⁾. На

¹⁾ См. R. V. Southwell, Phil. Mag., 1913 г., стр. 503 и 1915 г., стр. 67.

²⁾ R. v. Mises, Z. d. Ver. d. Ing., 1914 г., стр. 750. См. также Курс теор. упр., ч. II, стр. 387.

³⁾ См. нашу работу: Об устойчивости упругих систем, стр. 66. См. также Mauey-Mita, Z. d. Ver. d. Ing., 1914 г., стр. 649 и Eisenbau, 1913 г., стр. 361.

основании этой ф-лы можно составить представление об устойчивости двухшарнирных и трехшарнирных арок и установить предельные значения для их толщины. При малой кривизне можно ф-лу (a) заменить более простой:



Черт. 412.

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{a^3 \cdot 2} = \frac{4\pi^2 EJ}{as^2},$$

где s — длина стержня; тогда продольная сжимающая сила в арке найдется так:

$$P_{кр} = aP_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{s^2} \quad (385).$$

Ф-ла совпадает с тем, что мы имели для продольного изгиба стержня с заделанными концами ¹⁾.

Иногда приходится решать вопрос об устойчивости тонкостенных цилиндрических трубок кругового сечения под действием сжимающих усилий, равномерно распределенных по поперечному сечению и направленных параллельно оси трубки. Если эти напряжения превзойдут известный предел, то трубка может сплющиться, при чем образующие цилиндра выпучатся по синусоиде, как то показано на черт. 412. Величину критической нагрузки нетрудно найти, если выделить элемент трубки между двумя близкими образующими и рассматривать его, как стержень в упругой среде (§ 179). Степень жесткости среды определяется так, как было указано в § 155

§ 182. Об устойчивости сжатых пластинок ²⁾.

В виде составной части железных конструкций в инженерных сооружениях нередко употребляют железные листы. Толщина листов обыкновенно бывает малой по сравнению с другими их размерами, и потому к ним применимы с достаточной точностью все выводы, относящиеся к тонким пластинкам. Если пластинка подвергается действию сжимающих сил, расположенных в ее срединной плоскости, то при увеличении этих сил можно достигнуть предела, когда плоская форма равновесия перестает быть устойчивой, пластинка выпучивается. Возможность этого явления, аналогичного продольному изгибу тонких стержней, должна быть принята во внимание при расчете конструкций, составленных из листов, например, при расчете сжатых мостовых поясов трубчатого коробчатого и таврового поперечных сечений, при расчете толщины стенки клепаных двутавровых балок и т. д.

Наиболее простыми и для практических приложений наиболее важными являются задачи об устойчивости пластинок, ограниченных прямоугольным контуром ³⁾. Предпо-

¹⁾ Другие задачи, относящиеся к устойчивости трубки, см. нашу работу: Einige Stabilitätsprobleme d. Elastizitätstheorie, Z. f. Math. u. Phys., 1910 г. и Lorenz, Die nichtachsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder, Phys. Zeitschr., 1911 г., стр. 241. С. Тимошенко, К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки, Вестник о-ва технологов, 1914 г.; Курс теории упругости, ч. II.

²⁾ Подробные решения ряда задач и числовые таблицы имеются в Курсе теории упруг., ч. II, стр. 317—362.

³⁾ Задача об устойчивости сжатых пластинок разрешена также в случае кругового контура; см. А. Н. Дзяник, Изв. Киев. пол. инст., 1911 г. См. также Nadai, Z. d. ver. d. Ing., 1915 г., стр. 169.

ложим края пластинки опертыми и рассмотрим несколько частных случаев, соответствующих различным способам распределения сжимающих сил (черт. 413). При определении критического значения силы будем пользоваться приближенным методом. Задавшись подходящей формой для искривленной поверхности пластинки, мы подсчитаем соответствующее изменение потенциальной энергии деформации и приравняем работе, которую производят сжимающие силы при выпучивании пластинки. Если нам удастся для искривленной поверхности пластинки взять точное выражение, то получим также точное выражение для критического значения сжимающих сил.

При сжатии пластинки силами, равномерно распределенными по поперечным сторонам (фиг. а)¹⁾, выпучивание происходит по поверхности, сечения которой плоскостями: $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ представляют собой синусоиды. Если длина пластинки не велика ($a < b\sqrt{2}$), то синусоиды эти представляют одну полуволну, и уравнение искривленной поверхности напишется так:

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (a).$$

Легко проверить, что выражение (а) для прогиба w удовлетворяет условиям на опертом контуре пластинки. Выражение для потенциальной энергии изгиба, соответствующее принятой форме искривления, было найдено нами раньше (§ 154):

$$V = \frac{Cab}{8} A^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right).$$

Что касается работы T сжимающих сил, то, обозначая через P величину усилия, приходящуюся на единицу длины контура, и принимая во внимание, что сближение двух каких-либо точек, лежащих на поперечных сторонах и соответствующих одному и тому

же значению y , равно $\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$, можно написать:

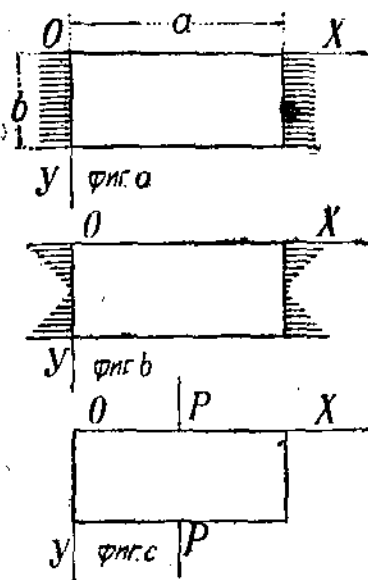
$$T = \frac{1}{2} \int_0^b P dy \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = P \frac{ab}{8} A^2 \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Приравняв этот результат потенциальной энергии изгиба, получим критическое значение для сжимающих усилий

$$P_{кр} = C\pi^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} \right)^2 \quad (386).$$

Постепенно увеличивая длину пластинки a , мы можем получить условия, когда пластинка выпучивается по двум полуволнам, при дальнейшем увеличении длины полу-

¹⁾ Решение этой задачи принадлежит G. H. Bryan'y, Lond. Math. Soc. Proc., 1891 г., т. 22.



Черт. 413.

чаются три, четыре и т. д. полуволн. С возрастанием длины картина явления изменяется так же, как при продольном изгибе стержня в упругой среде (§ 179). При подразделении пластинки на m полуволн, каждая полуволна будет в таких же условиях, как пластинка с опертыми краями, имеющая длину $\frac{a}{m}$ и ширину b . Критическое значение сжимающих сил найдем, вставляя в ф-лу (386), вместо a , величину $\frac{a}{m}$. Переход от формы с m полуволнами к форме с $m+1$ полуволной соответствует тому моменту, когда величина $P_{кр}$, вычисляемая в предположении m или $m+1$ полуволн, получает одно и то же значение, т. е., когда:

$$\frac{P}{a} + \frac{a}{mb^2} = \frac{m+1}{a} + \frac{a}{(m+1)b^2}.$$

откуда:

$$a = b\sqrt{m(m+1)} \quad (b).$$

Полагая $m=1$, получим $a = b\sqrt{2}$. Начиная с этого соотношения, пластинка подразделяется при выпучивании на две полуволны. При $m=2$, $a = b\sqrt{6}$. Этим соотношением определяется момент перехода от двух полуволн к трем и т. д. При весьма большой длине пластинки число m велико, и мы вместо ур-ия (b) можем положить $a = bm$ или $a:m = b$, т. е. длинная пластинка при выпучивании стремится подразделиться на квадраты.

Для практических приложений удобнее перейти от величины $P_{кр}$ к величине соответствующих критических напряжений:

$$P_{кр} = \frac{P_{кр}}{h} = \frac{E\pi^2}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \frac{h^3}{b^2}.$$

Здесь мы вместо цилиндрической жесткости C вставили ее выражение, в зависимости от толщины пластинки h .

На основании полученного результата заключаем, что при определенном отношении $a:b$ критические напряжения пропорциональны отношению $h^3:b^2$. Увеличивая вдвое толщину пластинки, мы тем самым увеличиваем в четыре раза $P_{кр}$. Этим обстоятельством воспользуемся при составлении таблицы для проверки на устойчивость сжатых пластинок. Ниже мы приводим значения $P_{кр}$ (таблица I) для различных значений отношения $a:b$, вычисленные в предположении, что $b:h = 100$; $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kg/cm}^2$ и $\sigma = 0,25$. Если на практике придется встретиться с отношением $b:h = n$, то для получения соответствующих критических напряжений придется числа таблицы множить на величину $\left(\frac{100}{n}\right)^2$.

ТАБЛИЦА I.

$\frac{b}{a}$	$P_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$P_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$P_{кр}$ для $b:h=100$
0,5	1097 kg/cm ²	0,8	738 kg/cm ²	1,2	725 kg/cm ²
0,6	900 "	0,9	709 "	1,3	750 "
0,7	795 "	1,0	702 "	1,4	784 "
0,75	761 "	1,1	709 "	1,5	823 "

Из таблицы видно, что значительным отклонением величины $a:b$ от единицы соответствуют малые изменения в значениях $P_{кр}$. Поэтому при достаточно длинных пластинках можно не определять числа полуволн и предположить,

что пластинка подразделяется при выпучивании на квадраты. В таком случае критическое напряжение будет равно:

$$p_{кр} = 702 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 \text{ kg/cm}^2 \quad (387).$$

В условиях только-что рассмотренной пластинки будут находиться грани трубки квадратного поперечного сечения, сжатой силами, равномерно распределенными по концам.

При распределении сжимающих усилий, представленном на фиг. в, т.-е. в случае изгиба пластинки в ее плоскости, интенсивность сжимающих усилий для какой-либо точки представится ф-лой:

$$P \left(1 - \frac{2y}{b} \right).$$

При определении $P_{кр}$ можно воспользоваться прежним методом. Мы не будем здесь останавливаться на выборе подходящей формы искривления и составления выражений для V и T , и ограничимся лишь приведением окончательных результатов¹⁾. Оказывается, что и в этом случае для определенного значения отношения $a:b$, величина $p_{кр}$ пропорциональна h^2/b^2 . Ниже мы приводим (таблица II) значения для $p_{кр}$, вычисленные при различных соотношениях $a:b$ в предположении, что $b:h=100$ и $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Если при расчете будем иметь $b:h=n$, то соответствующее значение $p_{кр}$ найдем, умножая число таблицы на величину $\left(\frac{100h}{b} \right)^2$. Из таблицы видно, что наименьшее значение

$p_{кр}$ соответствует отношению $a:b=0,707$, следовательно, в случае длинной пластинки, выпучивание должно происходить по поверхности, образующей ряд полуволи. Число полуволи m таково, что отношение $\frac{a}{m} : b$ по возможности близко подходит к величине 0,707, соответствующей наименьшему значению $p_{кр}$. Расчетная ф-ла получает вид:

$$p_{кр} = 4390 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 \text{ kg/cm}^2 \quad (388).$$

ТАБЛИЦА II.

$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$
0,2	14680 kg/cm ²	0,707	4390 kg/cm ²
0,4	5780 "	0,8	4440 "
0,5	4870 "	1,0	4870 "
0,6	4500 "	1,2	5560 "

Этой ф-лой следует пользоваться при проверке на устойчивость стенки высоких двутавровых балок по середине пролета, где наибольшее значение имеют нормальные напряжения изгиба и стенка находится, примерно, в таких же условиях, как и сейчас рассмотренная пластинка²⁾. Заметим здесь, что вертикальные уголки жесткости, которыми подкрепляют стенки высоких клепаных двутавровых балок, не могут помещать выпучиванию этих стенок и влияют только на длину тех полуволи, по которым выпучивание происходит. Это, как видно из таблицы, мало сказывается на величине $p_{кр}$. У опор высоких клепаных двутавровых балок наибольшее значение имеют касательные напряжения. Для определения их критического значения можно пользоваться таблицей III³⁾, в которой, в зависимости от отношения $\frac{a}{b}$, даны значения критических напря-

¹⁾ Решение этой задачи помещено в статье: Об устойчивости упругих систем, стр. 158.

²⁾ Препятствием, которое оказывают пояса балки поворачиванию краев стенки при выпучивании, можно пренебречь в запас прочности.

³⁾ См. С. Тимошенко, Об устойчивости пластинок..., Сборн. инст. инж. пут. сообщ., 1914 г.

ТАБЛИЦА III.

$\frac{a}{b}$	$(p_t)_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$(p_t)_{кр}$ для $b:h=100$
1	1650 кг/см ²	1,8	1190 кг/см ²
1,2	1406 "	2,0	1160 "
1,4	1280 "	2,5	1100 "
1,9	1230 "	3,0	1070 "

жений $(p_t)_{кр}$ для опертой по контуру прямоугольной пластинки, подвергающейся действию касательных напряжений, равномерно распределенных по контуру. В случае длинных пластинок значение $(p_t)_{кр}$ может быть определено по ф-ле ¹⁾:

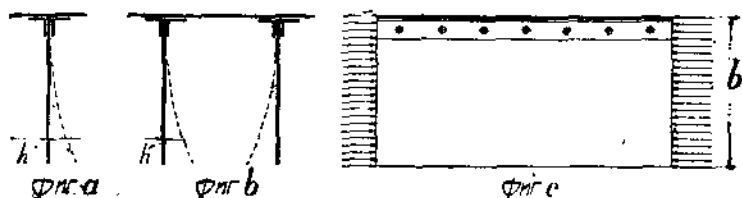
$$(p_t)_{кр} = 990 \left(\frac{100h}{b} \right)^2 \text{ кг/см}^2 \quad (389).$$

Уголки жесткости у опор двутавровой балки оказывают существенное влияние на устойчивость ее стенки ²⁾.

Задачи об устойчивости пластинок, сжимаемых сосредоточенными силами, являются более сложными, и в настоящее время имеется решение только для случая, представленного на фиг. с черт. 413 ³⁾. При значительной длине пластинки величина критического значения сжимающей силы для опертых краев может быть вычислена по ф-ле:

$$P_{кр} = \frac{4\pi C}{b} \quad (390).$$

Рассмотрим теперь несколько случаев, когда одна из продольных сторон пластинки не опирается на контур и совершенно свободна от всяких усилий. Задачи эти приобретают практический интерес в связи с расчетом сжатых поясов тавровых и коробчатых поперечных сечений (черт. 414). При увеличении сжимающих усилий P можно достигнуть



Черт. 414.

предела, когда плоская форма равновесия вертикального листа перестает быть устойчивой, и происходит выпучивание у нижнего свободного края. Величина критических напряжений зависит от степени закрепления вертикального листа по верхнему краю. В случае таврового сечения часто можно, в запас прочности, пренебрегать влиянием горизонтального листа и уголков и рассматривать вертикальный лист как пластинку с тремя опер-

¹⁾ См. Об устойчивости упругих систем, стр. 163.

²⁾ Несколько опытов, выясняющих влияние уголков жесткости на устойчивость стенки двутавровой балки, помещено в интересной книжке W. E. Lilly, The design of plate girders and columns, 1908 г.

Некоторые заключения относительно выбора жесткости подкрепляющих уголков имеются в вышеступированной нашей работе: Об устойчивости пластинок...

³⁾ См. Sommerfeld, Über die Knicksicherheit der Stege v. Walzwerkprofilen, Z. f. Math. u. Phys., 1907 г. и нашу работу:

Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Z. f. Math. u. Phys., 1910 г.

тыми и одной свободной стороной; тогда критические напряжения найдутся на основании таблицы IV¹⁾.

Критические напряжения убывают с увеличением длины пластинки, следовательно, при выпучивании искривление будет происходить по поверхности с одной полуволной. Величина $p_{кр}$ вычислена в предположении, что $b:h=100$; при другом каком-либо соотношении между шириной и толщиной пластинки придется поступать так же, как и в ранее рассмотренных случаях.

В случае коробчатого сечения (фиг. б) закрепление вертикальных листов по верхнему краю обыкновенно обладает достаточной жесткостью, и вертикальный лист можно рассматривать, как пластинку, поперечные стороны которой оперты, одна из продольных сторон абсолютно заделана, а другая свободна. Величина критических напряжений при таких условиях найдется из таблицы V.

Вычисления сделаны для отношения $b:h=100$; при других значениях этого отношения придется поступать, как и в ранее разобранных случаях. Все выводы сделаны, конечно, в предположении, что явление выпучивания происходит в пределах упругости, за этими пределами приведенные таблицы дадут для критических напряжений преувеличенные значения.

Без особых затруднений может быть разрешена также задача об устойчивости прямоугольной пластинки, когда одна или обе стороны, параллельные

ТАБЛИЦА IV.

$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$
1	253 kg/cm ²	1,8	133 kg/cm ²	4	90,5 kg/cm ²
1,2	199 "	2,0	123 "	5	86,8 "
1,4	167 "	2,5	107 "	10	81,6 "
1,6	147 "	3	98,9 "	∞	80,0 "

ТАБЛИЦА V.

$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$	$\frac{a}{b}$	$p_{кр}$ для $b:h=100$
1,0	298 kg/cm ²	1,5	235 kg/cm ²	2,1	249 kg/cm ²
1,1	274 "	1,6	234 "	2,2	255 "
1,2	257 "	1,7	234 "	2,3	262 "
1,3	247 "	1,9	239 "	2,4	270 "
1,4	239 "	2,0	243 "	2,5	280 "

ТАБЛИЦА VI.

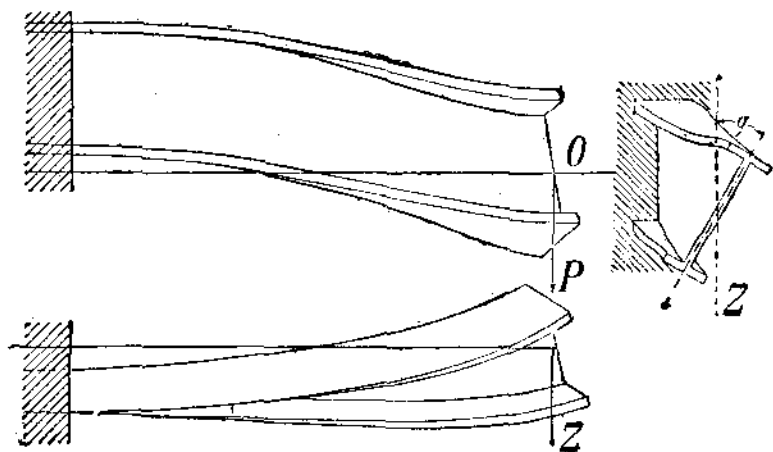
$EJ=$	$p_{кр}$ для $b:h=100$	$EJ=$	$p_{кр}$ для $b:h=100$
∞	702 kg/cm ²	2,15 bC	526 kg/cm ²
29,1 bC	685 "	1,15 "	439 "
14,2 "	667 "	0,60 "	351 "
5,2 "	614 "	—	—

¹⁾ См. нашу работу: Об устойчивости сжатых пластинок, Изв. Киев. пол. инст., 1907 г.

оси X -ов (см. черт. 413), опираются на упругий контур. Величина критических напряжений будет зависеть, конечно, от соотношения жесткости EJ той балочки, на которую опирается край пластинки, к жесткости пластинки bc . Мы приводим несколько чисел (таблица VI)¹⁾ для случая квадратной пластинки, находящейся в условиях фиг. а черт. 413 и опертой по сторонам $y=0$ и $y=b$ на гибкие стержни EJ ²⁾.

§ 183. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок.

Рассмотрим здесь те случаи неустойчивости равновесия, которые возникают иногда при изгибе стержней в плоскости их наибольшей жесткости. Если одна из главных жесткостей изгиба мала по сравнению с другой, то, изгибая стержень в плоскости наибольшей жесткости, можно, постепенно увеличивая силы, достигнуть предела, когда плоская форма изгиба перестает быть устойчивой. Ось стержня искривляется в направлении легчайшего изгиба, при чем отдельные поперечные сечения стержня поворачиваются. Вместо плоского изгиба мы будем иметь изгиб оси по линии двойной кривизны, сопровождающийся кручением. Явление это проще всего демонстрировать на изгибе обыкновенной линейки. Изгибая линейку руками в плоскости ее наибольшей жесткости, легко можно почувствовать то предельное значение изгибающего момента, при котором плоская форма перестает быть устойчивой. На черт. 415 представлен вид выпучившейся



Черт. 415.

двутавровой балки с одним заделанным концом при действии вертикальной силы на свободном конце. Явление неустойчивости возможно при различных формах поперечного сечения. Мы рассмотрим случай прямоугольного сечения, имеющий место при изгибе линейки или железной полосы, и случай двутаврового поперечного сечения. Двутавровое сечение очень часто встречается на практике, и потому вопрос об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок имеет большое практическое значение. Стремление

¹⁾ Таблица VI вычислена инж. К. Чалышевым; см. Сборн. инст. инж. пут. сообщ., 1914 г.

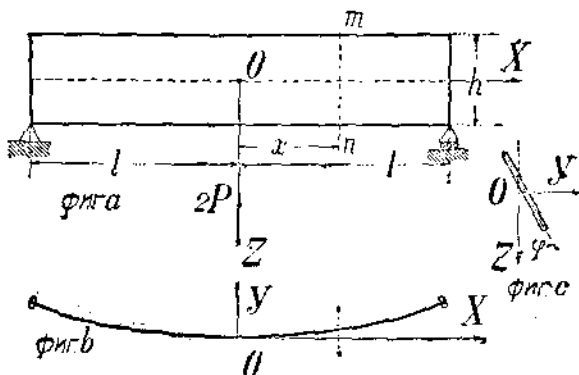
²⁾ Более общая задача рассмотрена в статье В. Рак, Об устойчивости прямоугольной пластинки, подкрепленной по краю уголком жесткости, Сборн. инст. инж. пут. сообщ., 1916 г.

получить возможно большую экономию в материале и желание достигнуть возможно большей жесткости в плоскости действия сил заставляют конструктора увеличивать высоту двутавровой балки. Ширина поясов при этом из конструктивных соображений не может быть значительно увеличена. В заключение получается сечение, один из главных моментов инерции которого во много раз больше другого. Балка имеет в направлении, перпендикулярном к плоскости действия сил, недостаточную жесткость, и становится возможным явление неустойчивости. Обыкновенно в инженерных сооружениях этот недостаток жесткости возмещается дополнительными связями, но иногда эти связи не могут быть поставлены из конструктивных соображений, иногда связей недостаточно. В обоих случаях балка может оказаться значительно менее прочной, чем то следует из обычных расчетов, заключающихся в вычислении наибольших напряжений.

При исследовании устойчивости плоской формы изгиба мы будем предполагать, что искривление в направлении наименьшей жесткости сопровождается лишь поворотом поперечных сечений балки, форма же сечения остается неискаженной. Такие явления, как выпучивание вертикальной стенки балки или выпучивание горизонтальных сжатых листов, мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе.

При определении величины критической нагрузки в различных частных случаях мы будем пользоваться приближенным методом¹⁾. На основании опытных данных и условий закрепления концов задаемся подходящей формой искривления; для этой формы подсчитываем изменение потенциальной энергии деформации и приравниваем его работе внешних сил, соответствующей принятой форме искривления.

Рассмотрим изгиб полосы с опертими концами силой $2P$ (черт. 416), приложенной в центре тяжести среднего поперечного сечения балки. Опорные закрепления допускают свободное вращение концов относительно главных осей инерции



Черт. 416.

сечения, вращение же относительно оси полосы невозможно. Постепенно увеличивая нагрузку, можно достигнуть предела, когда плоская форма изгиба станет неустойчивой, и ось полосы искривится в направлении легчайшего изгиба, как то показано на фиг. б.

Форма этого искривления определится величиной прогиба y в плоскости XZ и величиной угла φ , определяющей поворота отдельных поперечных сечений (фиг. в). При выборе подходящей формы искривления мы не можем произвольно задаваться величинами y и φ — между ними имеется связь, которую легко установить при помощи дифференциальных уравнений равновесия. Для какого-либо поперечного сечения m изгибаю-

¹⁾ Решение некоторых задач этого рода, путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений равновесия имеется в работах P. and H. Kipp-Erscheinungen, Münch. Diss. 1899 г. и в нашей работе: Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровых балок, Изв. Петерб. политех. инст., 1906 г. Подробное изложение полученных результатов см. Курс теор. упруг., ч. II, стр. 143. См. также Диниш, Об устойчивости плоской формы изгиба, Изв. Донск. политех. инст., 1913 г. А. Коробов, Изв. Киев. Политех. Инст., 1911 и 1913 гг.

ший момент, действующий в вертикальной плоскости, равен $P(l-x)$. Вследствие поворота сечения при выпучивании полосы, плоскость момента не совпадает с главными плоскостями балки, и изгибу в направлении наименьшей жесткости будет соответствовать момент $P(l-x)\varphi$. Дифференциальное ур-е изогнутой оси полосы в плоскости XU ¹⁾ напишется так:

$$B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P(l-x)\varphi \quad (a)$$

где B обозначает наименьшую жесткость изгиба. Полученное ур-е и представляет нужную нам зависимость между φ и y .

Искривлению полосы в направлении легчайшего изгиба соответствует появление потенциальной энергии изгиба в плоскости наименьшей жесткости и энергии кручения. Выражения для обоих видов энергии представляются такими ф-лами:

$$V_1 = B \int_0^l (y'')^2 dx \text{ и } V_2 = C \int_0^l (\varphi')^2 dx.$$

Здесь через C обозначена жесткость полосы при кручении. В дальнейшем для двутаврового сечения будем пользоваться при определении C ф-лой (48).

Для определения работы внешних сил, соответствующей принятому искривлению полосы, нужно найти выражение для опускания O точки приложения груза $2P$. Сделаем это таким образом: будем считать точку O неподвижной и посмотрим, насколько поднимутся концы полосы, благодаря принятому искривлению. Подъем этот, очевидно, равняется искомому опусканию точки O . Вследствие искривления элемента полосы, лежащего в сечении tl , правый конец полосы опишет дугу $y''dx(l-x)$. Так как искривление происходит в плоскости легчайшего изгиба, то найденное перемещение конца полосы наклонено к горизонту под углом φ , и ему соответствует повышение: $y''dx(l-x)\varphi$. Принимая во внимание искривление всех элементов полосы, найдем для подъема концов, или, что все равно, для опускания точки O выражение:

$$\int_0^l y''(l-x)\varphi dx.$$

Основное ур-е для определения критической нагрузки напишется так:

$$2P \int_0^l y''(l-x)\varphi dx = B \int_0^l (y'')^2 dx + C \int_0^l (\varphi')^2 dx \quad (b).$$

При выборе подходящей формы искривления зададимся выражением для угла φ в форме тригонометрического ряда. Чтобы удовлетворить условиям на концах, нужно положить:

$$\varphi = A \cos \frac{\pi x}{2l} + A_1 \cos \frac{3\pi x}{2l} + A_2 \cos \frac{5\pi x}{2l} + \dots \quad (c).$$

При $x=l$ все члены обращаются в нуль, следовательно, концы полосы не поворачиваются относительно оси X -ов. При $x=0$ φ достигает наибольшего значения. Вставляя выражение для φ в ур-е (a), найдем соответствующее значение y'' . После этого крити-

¹⁾ Мы здесь пренебрегаем наклоном плоскости XU к плоскости легчайшего изгиба

ческая нагрузка $2P_{кр}$ найдется из у-ния (b) в виде ф-ии от коэффициентов $A, A_1, A_2, \dots$. Остается подобрать значение этих коэффициентов так, чтобы величина $P_{кр}$ была миним. Ограничимся первыми двумя членами ряда (с); тогда, производя промежуточные вычисления, найдем из ур-ия (b):

$$P_{кр} = \frac{BC}{l^2} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{8}(1+9z^2)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{10}{4\pi^2}z + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9\pi^2}\right)z^2} \quad (d).$$

Через z обозначено отношение $A_1:A$. Наименьшее значение для $P_{кр}$ получим, полагая

$$z = 0,051;$$

этому соответствует:

$$P_{кр} = \frac{2,117 \sqrt{BC}}{l^2} \quad (391).$$

Критическое значение изгибающей силы определяется величиной произведения наименьшей жесткости изгиба и жесткости кручения и длиной полосы. Такого же вида ф-лы мы получим и при других способах действия сил. Например, при изгибе полосы с одним заделанным концом силою P , приложенной в центре тяжести свободного конца (черт. 415), получим:

$$P_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{BC}}{l^2} \quad (392).$$

При изгибе полосы сплошной нагрузкой, равномерно распределенной по оси¹⁾:

$$(ql)_{кр} = \frac{3,54 \sqrt{BC}}{l^2} \quad (393).$$

Исследование устойчивости в случае изгиба двутавровых балок несколько усложняется благодаря тому, что нужно принять во внимание неодинаковый прогиб поясов балки при искривлении оси ее в направлении легчайшего изгиба. Если через y будем, как и прежде, обозначать прогибы оси балки в плоскости YX (черт. 416), то прогибы верхнего и нижнего поясов определятся ф-ми:

$$y + \frac{h}{2} \varphi \text{ и } y - \frac{h}{2} \varphi,$$

где h — высота балки. Обозначая через D жесткость пояса при изгибе в направлении, перпендикулярном плоскости стенки²⁾, получим для энергии изгиба, при выпучивании балки в плоскости XY , выражение:

$$\begin{aligned} V_1 &= (B - 2D) \int_0^l (y'')^2 dx + D \int_0^l \left(y'' + \frac{h}{2} \varphi''\right)^2 dx + D \int_0^l \left(y'' - \frac{h}{2} \varphi''\right)^2 dx = \\ &= B \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{Dh^2}{2} \int_0^l (\varphi'')^2 dx, \end{aligned}$$

¹⁾ Здесь через q обозначена интенсивность нагрузки, l — половина пролета. Во всех дальнейших случаях для балок с опертными концами P и ql обозначают половину действующей нагрузки и l — половину пролета.

²⁾ Для обычных двутавровых балок с достаточной точностью можно положить $D = \frac{B}{2}$, где B — наименьшая жесткость изгиба.

и основное ур-ие (b) для определения критической нагрузки напишется так:

$$2P \int_0^l \varphi y'' (l-x) dx = B \int_0^l (y'')^2 dx + C \int_0^l (\varphi')^2 dx + \frac{Dh^2}{2} \int_0^l (\varphi'')^2 dx \quad (e).$$

Ограничиваясь, как и в случае полосы, двумя членами в выражении (c) для угла φ , найдем из ур-ия (e) после выполнения квадратур:

$$P^2_{кр} = \frac{BC}{k} \frac{\frac{\pi^2}{2} (1+9z^2) + \frac{\pi^4}{32} \gamma^2 (1+81z^2)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{10}{4\pi^2} z + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9\pi^2}\right) z^2} \quad (f).$$

Здесь z имеет прежнее значение, кроме того, для упрощения ф-лы введено обозначение:

$$\gamma^2 = Dh^2 : 2CP.$$

ТАБЛИЦА А.

$\frac{1}{\gamma^2}$	k	$P_{кр}$ для $\Phi=0,0001$ $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{1}{\gamma^2}$	k	$P_{кр}$ для $\Phi=0,0001$ $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	10,8	680 kg/cm ²	24	2,24	2190 kg/cm ²
1	3,99	800 "	32	2,21	2500 "
2	3,20	910 "	40	2,19	2770 "
4	2,73	1090 "	50	2,18	3080 "
6	2,54	1250 "	60	2,17	3360 "
8	2,45	1380 "	70	2,16	3620 "
12	2,37	1620 "	80	2,15	3860 "
16	2,29	1830 "	90	2,15	4080 "
20	2,26	2020 "	100	2,15	4300 "
			∞	2,115	

Остается подобрать z таким образом, чтобы получить для критической нагрузки наименьшее значение. Ф-ла $P_{кр}$ сохранит прежний вид:

$$P_{кр} = \frac{kV\overline{BC}}{r} \quad (394),$$

но только коэффициент k будет меняться в зависимости от величины γ . Ряд значений для k нами вычислен и приведен в таблице А.

Ф-ла (394) сохраняет свое значение и для других способов действия сил, нужно только вставить соответствующее значение k ¹⁾. Если, например, сила $2P$ приложена не в центре тяжести среднего сечения, а в точке,

соответствующей верхнему канту балки, то для определения k нужно пользоваться таблицей В. При действии на балку с опертыми концами равномерно распределенной нагрузки, приложенной к верхнему канту, коэффициент k в ф-ле:

$$(ql)_{кр} = \frac{kV\overline{BC}}{r}$$

определился по таблице С.

¹⁾ Ряд таблиц для k , при различных способах нагрузки и различных закреплениях концов, дан нами в статье: Об устойчивости упругих систем; см. также Курс теор. упруг., ч. II, стр. 152.

ТАБЛИЦА В.

$\frac{1}{\gamma^2}$	k	$p_{кр}$ для $\Phi=0,0001$ $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{1}{\gamma^2}$	k	$p_{кр}$ для $\Phi=0,0001$ $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	6,42	405 kg/cm ²	16	1,86	1490 kg/cm ²
1	2,52	505 "	24	1,88	1840 "
2	2,13	600 "	32	1,89	2140 "
3	1,99	690 "	40	1,92	2420 "
4	1,93	770 "	50	1,93	2740 "
6	1,88	920 "	60	1,94	3020 "
8	1,86	1050 "	70	1,95	3260 "
10	1,85	1170 "	80	1,96	3500 "
12	1,85	1280 "	100	1,97	3940 "
			∞	2,115	

ТАБЛИЦА С.

$\frac{1}{\gamma^2}$	k	$p_{кр}$ для $\Phi=0,0001$ $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	$\frac{1}{\gamma^2}$	k	$p_{кр}$ для $\Phi=0,0001$ $E=2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
0,1	11,6	367 kg/cm ²	24	3,25	1590 kg/cm ²
1	4,54	454 "	32	3,26	1840 "
2	3,80	538 "	40	3,27	2080 "
4	3,43	684 "	50	3,29	2330 "
6	3,31	813 "	60	3,30	2560 "
8	3,28	923 "	70	3,30	2770 "
12	3,27	1120 "	80	3,31	2980 "
16	3,22	1290 "	90	3,32	3160 "
20	3,23	1440 "	100	3,33	3330 "
			∞	3,54	

При расчетах удобнее пользоваться значениями критических напряжений, а не критических нагрузок. Вычисление $P_{кр}$ в вышеприведенных случаях не представляет никаких затруднений. Возьмем, например, изгиб балки с опертыми концами силой $2P$, приложенной по середине пролета. Величина наибольшего изгибающего момента равна Pl , и критические напряжения определяются так:

$$P_{кр} = \frac{P_{кр} l}{W} = \frac{EP_{кр} l}{B_1} \frac{h}{2},$$

где B_1 — жесткость балки при изгибе ее в плоскости стенки. Вставляя вместо $P_{кр}$ его значение (ф-ла 394) и принимая во внимание, что:

$$C = \frac{Dh^3}{2I\gamma^4} \approx \frac{Bh^2}{4I\gamma^2},$$

найдем:

$$P_{кр} = E \frac{k}{\gamma} \frac{B}{B_1} \frac{h^2}{4I^2} = E \frac{k}{\gamma} \Phi, \quad \text{где } \Phi = \frac{B}{B_1} \frac{h^2}{4I^2} \quad (395).$$

В вышеприведенных таблицах даны значения $P_{кр}$, вычисленные в предположении, что $\Phi = 0,0001$. Если для рассчитываемой балки $\Phi = \frac{1}{n}$, то придется напряжения, данные в таблицах, умножить на величину $\frac{10^4}{n}$.

Общий ход проверки двутавровой балки на устойчивость таков. На основании размеров балки выписываем значения следующих величин: F — площадь поперечного сечения, $B = EI$ — наименьшая жесткость изгиба, $B_1 = EJ_1$ — наибольшая жесткость изгиба, $D = \frac{B}{\gamma^2}$ — жесткость изгиба одного пояса, $C = \frac{1}{40} \frac{F^4}{J + J_1}$. G — жесткость при кручении, $\frac{1}{\gamma^2} = \frac{2CP}{Dk^2}$ и $\Phi = \frac{B}{B_1} \left(\frac{h}{2l} \right)^2 = \frac{1}{n}$, h — высота сечения и l — в случае балок, лежащих на двух опорах, представляет половину пролета. По вычисленному значению $\frac{1}{\gamma^2}$ находим из таблиц критическое напряжение для случая, когда $\Phi = 0,0001$. Искомое $P_{кр}$ будет равно табличному, умноженному на $\frac{10^4}{n}$.

Возьмем, например, клепанную двутавровую балку, составленную из вертикального листа $70 \times 0,8$ см и четырех уголков $7 \times 7 \times 0,8$ см. Пролет балки $2l = 3,25$ м. В этом случае $F = 98,2$ см²; $B = 446$ Е кг./см²; $B_1 = 59140$ Е кг./см²; $D = \frac{1}{2} B = 223$ Е кг./см². Полагая для железа $E = 2 \cdot 10^6$ кг./см² и $G = 8 \cdot 10^5$ кг./см², найдем: $G = 31,2 \cdot 10^6$ кг./см², $\frac{1}{\gamma^2} = 0,75$ и $\Phi = \frac{1}{2860}$.

Если балка изгибается сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести среднего сечения, то нужно пользоваться таблицей А. Для вычисленного значения $\frac{1}{\gamma^2}$, путем интерполирования, находим: $P_{кр} = 767$ кг./см². Чтобы получить действительное значение критического напряжения, нужно найденную величину помножить на $\frac{10^4}{2860} \approx 3,5$.

Если на балку действует равномерно распределенная нагрузка, приложенная к верхнему канту, нужно пользоваться таблицей С. Для $\frac{1}{\gamma^2} = 0,75$, путем интерполирования,

находим $p_{кр} = 430 \text{ kg/cm}^2$. Для получения критических напряжений нужно найденную величину помножить на 3,5.

Все выводы, относящиеся к исследованию устойчивости двутавровых балок, сделаны в предположении, что явление выпучивания происходит при напряжениях, не превосходящих предела упругости. За этим пределом ф-лы наши будут давать для критических напряжений преувеличенные значения. При расчетах можно допустить¹⁾, что действительные критические напряжения $p_{кр}$ во столько раз меньше напряжений $p'_{кр}$, определяемых по ф-лам, выведенным в пределах упругости, во сколько раз действительные напряжения при продольном изгибе меньше напряжений, определяемых по ф-лам Эйлера. Ряд значений $p'_{кр}$ и соответствующих им действительных критических приводим ниже²⁾:

$p_{кр} \text{ kg/cm}^2$	2000	2500	3000	3500	4000	5000	7000	10000	13000	20000	30000	50000
$p_{рк} \text{ kg/cm}^2$	1860	2020	2140	2230	2310	2420	2570	2710	2790	2890	3000	3080

Пользуясь изложенными приемами, мы можем по размерам балки и по способу действия сил найти величину $p'_{кр}$; тогда вышеприведенная таблица дает возможность найти величину действительного критического напряжения $p_{кр}$. Определив таким путем критические напряжения для рассчитываемой балки и зная временное сопротивление материала, найдем коэффициент уменьшения, на который должно множить напряжения R , допущенные при простом растяжении.

Этим мы заканчиваем исследование вопросов устойчивости упругих систем. Дальнейшие подробности интересующиеся могут найти в вышецитированных работах.

¹⁾ См. Об устойчивости упругих систем, стр. 147.

²⁾ Числа эти получены на основании таблицы Ясинского.

ДОПОЛНЕНИЕ.

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ У ОТВЕРСТИЙ И ВЫКРУЖЕК.

1. Общие замечания.

Проектирующим инженерам хорошо известно, что у краев отверстий, во входящих углах и в местах резких изменений поперечных сечений получается концентрация напряжений, которая весьма нежелательна в машинных частях, особенно, если эти части подвергаются действию усилий, меняющих свою величину и направление. Благодаря усталости металла, подверженного действию переменных напряжений, обыкновенно получается трещина в месте наибольшей концентрации напряжений. Со временем трещина все расширяется и в конце концов приводит к излому. Большинство машинных поломок получается благодаря усталости металла в местах наибольшей концентрации напряжений.

Только в простейших случаях, таких, например, как случай круглого отверстия, задача о концентрации напряжений может быть без затруднений разрешена аналитически. В большинстве случаев приходится прибегать к экспериментальным методам определения концентрации напряжений, и в последующем некоторые из этих методов, применявшиеся при решении практических задач, рассмотрены более детально. Методы эти приобретают все большее практическое значение, так как концентрация напряжений становится все более и более опасной в связи с повышением допускаемых напряжений в машинных частях.

2. Аналитические решения.

а. Круглое отверстие.

Если пластинка с круглым отверстием подвержена действию равномерно распределенного растяжения (фиг. 1), распределение напряжений по сечению, проходящему через центр отверстия, будет очень далеко от равномерного распределения, и приближенная величина максимального напряжения может быть получена таким путем. Известно, что отверстие производит значительное изменение в распределении напряжений лишь в непосредственной близости к отверстию, и, если из центра отверстия описать круг достаточно большого диаметра D (фиг. 1а), то без существенной погрешности можно считать, что

напряжения в точках этой окружности не меняются благодаря наличности отверстия. Вообразим теперь, что часть пластинки, ограниченная изнутри краем отверстия диаметра d и снаружи цилиндрической поверхностью диаметра D , вырезана, и по наружному контуру приложены усилия, заменяющие действие отброшенной части пластинки на вырезанный из пластинки диск. Если через p_0 обозначено равномерное растягивающее напряжение, то напряжение в какой-либо точке m на окружности диска будет (фиг. 1б):

$$p = p_0 \sin \varphi \quad (1),$$

где φ обозначает угол, составляемый радиусом om с горизонтальной осью.

Теперь задача по определению напряжений у отверстия сводится к расчету напряжений в круговом кольце (фиг. 1б), на которое действуют силы, заданные уравнением (1).

Принимая во внимание условия симметрии, мы сводим задачу к рассмотрению только одного квадранта (фиг. 2) и в дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

M_0 — изгибающий момент в горизонтальном сечении m_0n_0 кольца,

S_0 — продольная сила в том же сечении,

M и S — изгибающий момент и перерезывающая сила в произвольном поперечном сечении mn ,

φ — угол между сечениями mn и m_0n_0 ,

$h = \frac{D-d}{2}$ — ширина кольца,

t — толщина кольца,

$\rho = \frac{D+d}{4}$ — радиус оси кольца,

r — радиус, соответствующий нейтральной оси при изгибе кольца,

$\gamma = \rho - r$ — расстояние нейтральной оси от центра тяжести поперечного сечения,

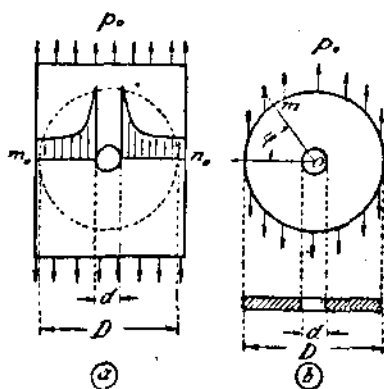
$A = th$ — площадь поперечного сечения кольца,

$A\gamma$ — статический момент поперечного сечения кольца относительно нейтральной оси,

z — расстояние любой точки поперечного сечения от нейтральной оси (направление от оси к центру кольца рассматривается как положительное),

p_0 — равномерное растягивающее напряжение в пластинке,

p_1 — растягивающее напряжение в поперечном сечении m_0n_0 , производимое продольной силой S_0 ,



Фиг. 1.

Для вычисления изгибающих напряжений пользуемся известным выражением (см стр. 390).

$$p_b = \frac{Mz}{A\gamma(r-z)} \quad (9).$$

Наибольшее напряжение изгиба получается в точке n_0 . Для его вычисления подставляем в (9)

$$z = \frac{h}{2} - \gamma \text{ и } r - z = \frac{1}{2} d.$$

Это дает нам:

$$p_2 = \frac{M_0}{\gamma d t} \left(1 - \frac{2\gamma}{h} \right) \quad (10).$$

Пользуясь формулами (7) и (8), наибольшие напряжения изгиба легко могут быть вычислены теперь при помощи формулы (10) для различных значений отношения $\frac{D}{d}$. Складывая эти напряжения с напряжениями p_1 , произведенными продольной силой, максимальные напряжения получим в такой форме:

$$p_{\max} = p_1 + p_2.$$

Результаты произведенных таким образом вычислений приведены в ниже-следующей таблице.

ТАБЛИЦА 1.

$\frac{D}{d}$	3	4	5	6	8	10
$\frac{2\gamma}{h}$	0,1796	0,2238	0,2574	0,2838	0,3239	0,3536
$\frac{p_1}{p_0}$	1,50	1,33	1,25	1,20	1,14	1,11
$\frac{p_2}{p_0}$	2,33	1,93	1,83	1,83	1,95	2,19
$\frac{p_{\max}}{p_0}$	3,83	3,26	3,08	3,03	3,09	3,30

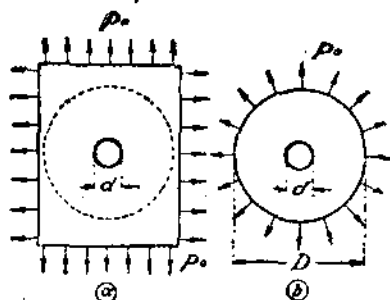
Отношение наибольшего напряжения к равномерному растягивающему напряжению будем называть в дальнейшем „коэффициентом концентрации напряжений“ и обозначать через k . Тогда

$$p_{\max} = k \cdot p_0. \quad (11).$$

Для отношений $\frac{D}{d} = 5 - 6$, этот коэффициент получился весьма близким к тому, что дает точное решение задачи, пользуясь уравнениями теории упругости ¹⁾.

¹⁾ См. С. Тимошенко, Курс теории упругости, ч. I, стр. 120.

При больших значениях $\frac{D}{d}$ коэффициент концентрации получается несколько большим, чем дает точная теория. Объясняется это тем, что с возрастанием отношения $\frac{D}{d}$ понижается точность элементарной теории изгиба кривых брусьев,



Фиг. 3.

которой мы пользовались при выводе уравнений (7) и (8).

Для того случая, когда растягивающие или сжимающие напряжения одинаковой величины действуют по двум перпендикулярным направлениям (фиг. 3), величина напряжения у края отверстия может быть вычислена, пользуясь тем же методом, как и в вышеописанном случае. Вырезывая из пластинки диск диаметра D и применяя формулу Lamé (см. стр. 402), мы най-

дем для max напряжений такое выражение:

$$p_{\max} = 2p_0 \frac{D^2}{D^2 - d^2},$$

которое в случае весьма малого отверстия дает нам

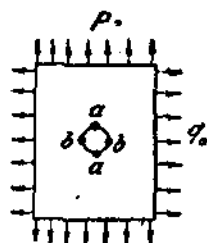
$$p_{\max} = 2p_0 \quad (12).$$

Таким образом в случае равномерного растяжения по двум направлениям, максимальное напряжение у края отверстия получается вдвое больше растягивающего напряжения p_0 , приложенного по краям пластинки.

Сравнивая уравнение (12) с уравнением:

$$p_{\max} = 3p_0 \quad (13)$$

для простого растяжения, мы заключаем, что в случае простого растяжения в точках $a-a$ (фиг. 4) действуют в тангенциальном направлении сжимающие напряжения, определяемые уравнением:



Фиг. 5.

$$p_{\min} = -p_0 \quad (14).$$

Пользуясь принципом сложения действия сил и применяя решения (13) и (14), мы можем теперь получить решение для случая, представленного на фиг. 5. Очевидно, что напряжения в точках b в направлении касательной к контуру отверстий будут равны

$$3p_0 - q_0.$$

В точках a напряжения в тангенциальном направлении будут

$$3q_0 - p_0.$$

Когда $q_0 = -p_0$, т.е., когда два главных напряжения равны по величине и противоположны по знаку, мы имеем случай чистого сдвига. Обозначая через p_0 — главное растягивающее напряжение и применяя прежний метод рассуждения, мы получаем для этого случая в точках b :

$$p_{\max} = 3p_0 - (-p_0) = 4p_0 \quad (15).$$

Для точек a мы находим

$$p_{\min} = 3q_0 - p_0 = -4p_0.$$

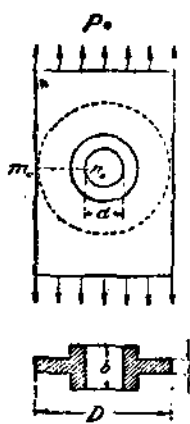
Это показывает, что в случае скручивания тонкостенной трубки (фиг. 6) малое круглое отверстие производит большую концентрацию напряжений, и наибольшее растягивающее напряжение у края отверстия в четыре раза больше касательных напряжений, действующих по поперечному сечению трубки. Заключение это имеет большое практическое значение, так как оно показывает, насколько понижается прочность валов благодаря каналам кругового сечения, идущим в радиальном направлении. Подобные каналы иногда делаются для проведения смазки.



Фиг. 6.

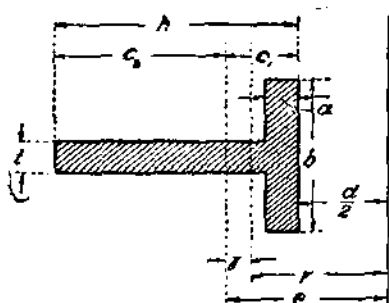
в. Круговое отверстие с усиленным краем.

Для понижения вредного влияния круглых отверстий в пластинках, подверженных действию растяжения и сжатия, обычно усиливают края отверстия кольцом, как это показано на фиг. 7. Такое усиление края отверстия должно понизить максимальные напряжения у края отверстия и в то же время несколько уменьшить район, в котором происходит значительное перераспределение напряжений, благодаря наличности отверстия. Это показывает, что метод, примененный в предыдущем параграфе, может быть использован так же и здесь, и в результате задача о концентрации напряжений сведется к расчету кругового кольца, наружный диаметр которого равен D и внутренний — d (фиг. 7). При вычислении изгибающего момента M_0 , действующего в поперечном сечении $m-m$ этого кольца, прежнее уравнение (4) может быть применено. Обозначая через c_1 и c_2 расстояния центра тяжести сечения от наиболее удаленных волокон (фиг. 8) и пользуясь обозначениями



Фиг. 7.

$$\frac{b}{t} = n \quad \text{и} \quad \frac{a}{d} = m,$$



Фиг. 8.

мы легко находим из фиг. 8:

$$\frac{c_1}{d} = \frac{h'}{2d} \cdot \frac{1 + (n-1) \frac{m^2 d^2}{h^2}}{1 + (n-1) \frac{md}{h}} \quad (16).$$

Для тех случаев, когда m — малая величина, формула (16) с достаточной точностью может быть представлена в таком упрощенном виде

$$\frac{c_1}{d} = \frac{h}{2d} \left[1 - (n-1) \frac{md}{h} \right] \quad (17).$$

Расстояние γ нейтральной оси от центра тяжести сечения может быть найдено обычным методом, объясненным в главе о кривых брусках, и мы получим:

$$\frac{\gamma}{d} = \frac{e-f}{d} = \frac{e}{d} - \frac{(n-1)m + \frac{h}{d}}{(n-1) \ln(1+2m) + \ln \frac{D}{d}} \quad (18).$$

Если m — малая величина, вместо формулы (18) может быть применена следующая упрощенная формула

$$\frac{\gamma}{d} = \frac{e}{d} - \frac{(n-1)m + \frac{h}{d}}{2m(n-1) + \ln \frac{D}{d}} \quad (19).$$

Заметим, что в формулы (17) и (19) величины m и $n-1$ входят лишь в виде произведения

$$m(n-1) = \frac{a(b-t)}{dt} = \frac{A_b}{A_h},$$

где $A_b = a(b-t)$ обозначает площадь поперечного сечения усиливающего кольца,

$A_h = dt$ — площадь диаметрального сечения отверстия.

Это показывает, что положение центра тяжести сечения и нейтральной оси определяются с достаточной точностью отношением

$$\alpha = m(n-1) = \frac{A_b}{A_h} \quad (20).$$

Определив таким образом положение центра тяжести сечения и расстояние γ от центра тяжести до нейтральной оси, мы можем вычислить теперь величину изгибающего момента M_0 в сечении $m_0 n_0$ из уравнения (7). Для этого нужно только подставить в это уравнение c_2 вместо $\frac{h}{2}$ и соответствующее значение γ .

При обозначении площади поперечного сечения кольца через A растягивающие напряжения, вызываемые в сечении m_0n_0 продольной силой, будут определяться формулой

$$p_1 = \frac{1}{2} \frac{p_0 d D}{A} \quad (21).$$

Максимальные изгибающие напряжения в сечении m_0n_0 будут в точке n_0 у края отверстия (фиг. 7) и найдутся из общего уравнения (9). Подставляя в это уравнение $M = M_0$, $z = c_1 - \gamma$ и $r - z = r + \gamma - c_1 = \frac{1}{2} d$, мы получим:

$$p_2 = \frac{M_0}{A_1} \cdot \frac{2(c_1 - \gamma)}{d} \quad (22).$$

Складывая напряжения p_1 и p_2 , получаем

$$p_{\max} = p_1 + p_2 = k_1 p_0 \quad (23),$$

где k_1 обозначает коэффициент концентрации напряжений для этого случая. Чтобы выяснить зависимость $p_{\max}$ от основных пропорций усиливающего кольца, вычисления были выполнены для разных значений отношения $\alpha = \frac{A_b}{A_h}$ и для отношения $\frac{D}{d} = 5$. Результаты этих вычислений помещены в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2.

$\alpha = \frac{A_b}{A_h}$	$\frac{c_1}{d}$	$\frac{p}{d}$	$\frac{\gamma}{d}$	$\frac{c_2}{d}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$	$k_1 = \frac{p_1 + p_2}{p_0}$
0,10	0,9530	1,4530	0,291	1,0470	1,19	1,34	2,53
0,20	0,9095	1,4095	0,312	1,0905	1,14	1,03	2,17
0,30	0,8703	1,3702	0,326	1,1297	1,09	0,81	1,90
0,40	0,8342	1,3342	0,334	1,1658	1,04	0,65	1,69
0,50	0,8010	1,3010	0,339	1,1990	1,00	0,53	1,53

Последний столбец таблицы дает величину коэффициента концентрации, и мы видим, как величина максимального напряжения убывает с увеличением сечения подкрепляющего кольца. Когда поперечное сечение кольца равняется половине диаметрального сечения отверстия, максимальное напряжение получается приблизительно вдвое меньшим, чем в случае отверстия, не подкрепленного по краю.

с. Эллиптическое отверстие.

Если пластинка, подверженная действию растягивающих напряжений p_0 , имеет малое эллиптическое отверстие, большая ось которого перпендикулярна растяжению (фиг. 9), весьма большие местные напряжения получаются у краев



Фиг. 9.

отверстия в местах наибольшей кривизны, т. е. в точках *m* и *n*. Величина этих напряжений может быть вычислена по такой формуле:

$$p_{\max} = p_0 \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (24).$$

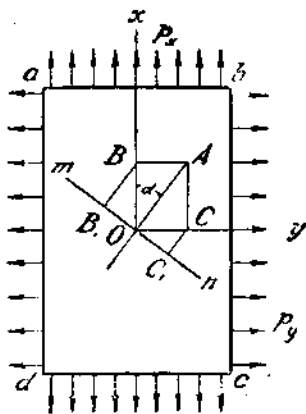
Когда $a = b$ мы получаем случай кругового отверстия, рассмотренный раньше. Из уравнения (24) видно, что с увеличением отношения $\frac{a}{b}$, величина местных напряжений возрастает, и получается очень большой для вытянутого, узкого эллипса. Этим объясняется, почему трещины, перпендикулярные направлению растяжения, имеют тенденцию увеличиваться, и почему распространение трещин может быть остановлено высверливанием круглых отверстий по концам трещины. Эти отверстия, устраняя высокие местные напряжения у концов трещины, понижают, конечно, величину максимальных напряжений, которые особенно опасны в случае применения хрупких материалов.

Уравнение (24) может быть применено также в случае расположения длинной оси эллипса параллельно растяжению. В таком случае $a < b$ в уравнении (24), и величина местных максимальных напряжений будет меньше, чем в случае круглого отверстия.

3. Исследование напряжений при помощи поляризованного света.

Описание метода.

Известно, что такие прозрачные материалы, как стекло, целлулоид, бэкилит и другие, под действием напряжений становятся двойко-лучепреломляющими. Этим свойством в настоящее время широко пользуются при изучении распределения напряжений в сложных случаях, где не удается получить аналитическое решение вопроса. При применении этого оптического метода исследования напряжений пользуются поляризованным светом. Пусть (фиг. 10) *abcd* — пластинка изотропного прозрачного материала, которая пересекается в *O* с лучом поляризованного света, перпендикулярным к плоскости пластинки. Пусть *OA* представляет собой пересечение плоскости пластинки с плоскостью, в которой происходят световые колебания поляризованного луча, и длина $OA = \lambda$ изображает амплитуду этих колебаний. Если пластинка не напряжена, то эти колебания пройдут сквозь пластинку без искажения. Пред-



Фиг. 10.

ставим себе теперь, что напряжения p_x и p_y , различные по величине, приложены к пластинке; тогда скорость распространения световых колебаний в плоскости Ox будет отлична от скорости в плоскости Oy . Предположим, свет совершает простое гармоническое колебание, тогда перемещение в плоскости OA будет

$$a = \lambda \cos pt \quad (a).$$

Разлагая амплитуду OA на составляющие OB и OC , найдем, что колебания в плоскостях Ox и Oy можно представить так:

$$b = \lambda \cos \alpha \cos pt \text{ и } c = \lambda \sin \alpha \cos pt \quad (b).$$

Пусть τ — время, потребное для прохождения сквозь пластинку световых колебаний в плоскости OB , и τ_1 — соответствующее время для колебаний в плоскости OC . Тогда колебания (b) после прохождения света сквозь пластинку будут:

$$b' = \lambda \cos \alpha \cos p(t + \tau) \text{ и } c' = \lambda \sin \alpha \cos p(t + \tau_1) \quad (c).$$

Благодаря разности скоростей получается между колебаниями b' и c' разность фаз, равная $p(\tau - \tau_1)$. Эта разность фаз и соответствующая разность скоростей распространения света в плоскостях OB и OC может быть найдена следующим образом. Поставим за пластинкой призму Николя так, чтобы она пропускала лишь колебания в плоскости mn , перпендикулярной плоскости OA . Тогда из колебания OB пройдет сквозь призму Николя лишь составляющая

$$b' \sin \alpha = \lambda \sin \alpha \cos \alpha \cos p(t + \tau) \quad (d)$$

и из колебания OC — составляющая

$$c' \cos \alpha = \lambda \sin \alpha \cos \alpha \cos p(t + \tau_1) \quad (e).$$

Колебания (d) и (e) , происходящие в одной и той же плоскости mn , ложатся в одно результирующее колебание.

$$\begin{aligned} \lambda \sin \alpha \cos \alpha [\cos p(t + \tau) - \cos p(t + \tau_1)] = \\ = -\lambda \sin 2\alpha \sin p\left(t + \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \sin p \frac{\tau - \tau_1}{2} \end{aligned} \quad (f).$$

Таким образом получается опять простое гармоническое колебание, амплитуда которого пропорциональна $\sin p \frac{\tau - \tau_1}{2}$, т.е. зависит от разности скоростей света в плоскостях OB и OC .

Если напряжения p_x и p_y равны между собой, τ и τ_1 также будут равны, и амплитуда колебаний (f) будет равна нулю. В этом случае световые колебания не будут вовсе проходить сквозь призму Николя.

Если напряжения p_x и p_y различны, разность скоростей света $v_x - v_y$ в плоскостях Ox и Oy будет пропорциональна разности напряжений $p_x - p_y$, и мы получим:

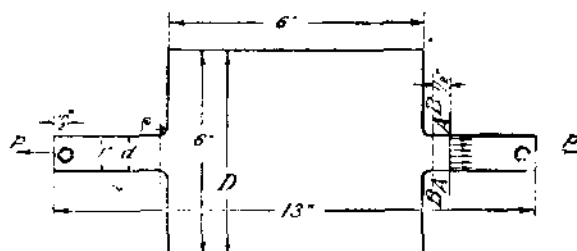
$$\tau - \tau_1 = \frac{d}{v_x} - \frac{d}{v_y} = \frac{d(v_y - v_x)}{v_x v_y} = \frac{d}{v^2} (v_y - v_x) = k(p_x - p_y) \quad (9),$$

где d — толщина пластинки, и k постоянная, зависящая от свойств материала и от толщины пластинки. Мы видим, таким образом, что амплитуда колебаний (f), т. е. сила света зависит от разности напряжений $p_x - p_y$.

Если вместо простого гармонического колебания (a) (мономатический свет) возьмем белый свет, составленный из колебаний разных частот, которым соответствуют различные цвета, то для каждого цвета сложение колебаний может быть выполнено по формуле (f). При этом может случиться, что в то время, как колебание одних цветов, интерферируя между собой, тушатся, колебания других — складываются, и в результате вместо белого получится окрашенный цвет. По цвету результирующего луча можно определить разность напряжений $p_x - p_y$, т. е. величину, равную двойному наибольшему касательному напряжению. На этом и основан оптический метод исследования распределения напряжений.

Добавим еще, что, как видно из описания, метод может быть применен лишь к случаям, где исследуемая конструкция может быть с достаточным приближением представлена моделью, вырезанной из пластинки прозрачного материала.

Несколько примеров, где практические задачи были разрешены таким образом, мы приводим ниже.



Фиг. 11.

О распределении напряжений у выкружек.

Вопрос о концентрации напряжений у выкружек представляет большой практический интерес.

Чтобы получить величину максимального напряжения при разных величинах радиуса выкружек, мы произвели испытание моделей такого вида, как указано на фиг. 11. Радиус выкружек менялся в пределах от $1/16$ дюйма до $1/2$ дюйма. Ширина моделей d в узкой части всегда была равна 1 дюйму в то время, как ширина D менялась от 6 дюймов до 1,1 дюйма. Для каждого размера модели были произведены измерения напряжений вдоль края выкружки, и установлено положение точки наибольших напряжений. Положение точки наибольших напряжений обыкновенно получалось в расстоянии около 20° от начала выкружки. Начало выкружки принято в месте сопряжения ее с узкой частью

ТАБЛИЦА 3.

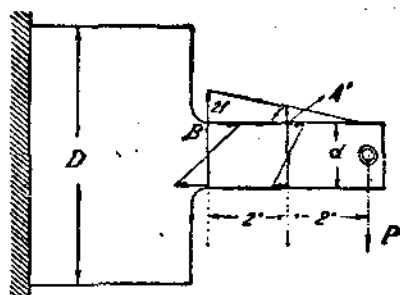
$\frac{D}{d}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	
6	31	2.66	2.28	2.0	1.76	1.6	$D-d > 2\rho$
3	31	2.66	2.28	2.0	1.76	1.6	
$2\frac{1}{2}$	31	2.58	2.18	1.90	1.65	1.51	$D-d = 2\rho$
2	2.66	2.28	1.97	1.74	1.52	1.41	
$1\frac{1}{2}$	2.42	2.14	1.87	1.65	1.45	1.36	$D-d < 2\rho$
$1\frac{1}{2}$	2.2	2.0	1.77	1.58	1.39	1.31	
$1\frac{1}{2}$	2.1	1.92	1.72	1.54	1.35	1.28	
$1\frac{1}{2}$	1.96	1.84	1.65	1.50	1.32	1.26	
$1\frac{1}{2}$	1.86		1.60				

модели. Результаты этих измерений даны в таблице 3. Для сравнения с простым растяжением в этой таблице помещены значения коэффициента концентрации напряжений, который в данном случае представляет собой отношение максимального напряжения у края выкружки к равномерному растягивающему напряжению в сечении AA (фиг. 11), удаленному от выкружки. Из таблицы мы видим, что коэффициент концентрации возрастает с убыванием отношения радиуса выкружки ρ к ширине d узкой части модели, он возрастает также до известных пределов с увеличением отношения $\frac{D}{d}$.

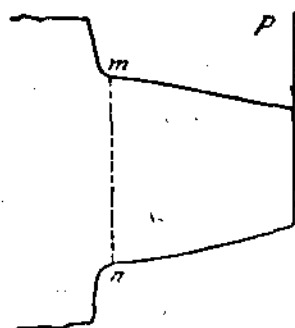
При малых значениях $\frac{\rho}{d}$ и для $\frac{D}{d} > 2$ максимальные напряжения примерно втрое больше среднего растягивающего напряжения.

Исследования с моделями, работающими на изгиб (фиг. 12), показали, что коэффициенты, данные в таблице 3, могут быть применены при изгибе. Чтобы получить величину максимального напряжения, нужно только наибольшее напряжение, полученное по обычной формуле для изгиба призматических брусков, помножить на соответствующий коэффициент таблицы.

В качестве другого примера приведем результат исследования напряжений в зубьях зубчатых колес. В некоторых случаях, напри-



Фиг. 12.



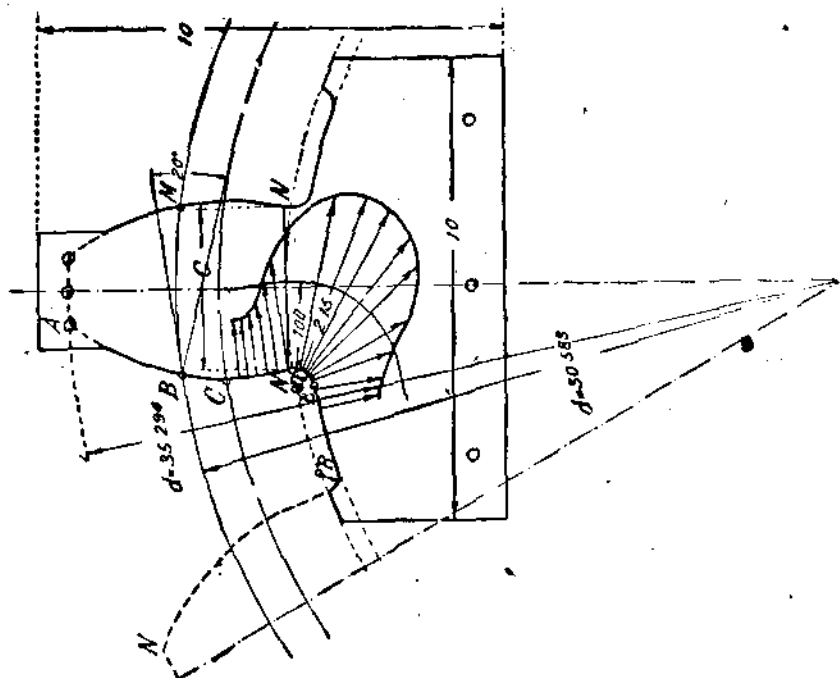
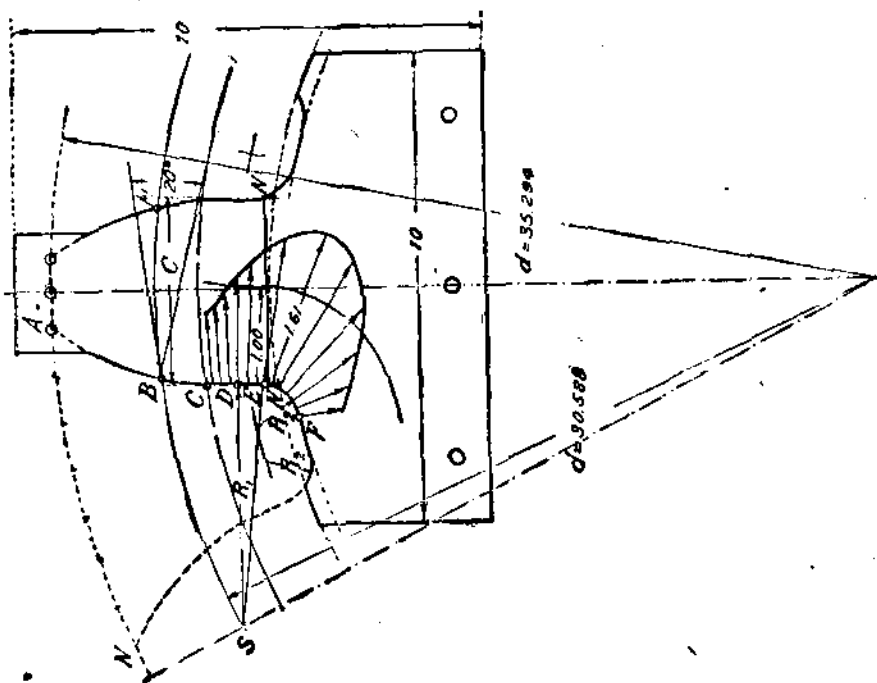
Фиг. 13.

мер, в тяжелых современных электрических локомотивах приходится допускать весьма высокие давления на зубец, и обычная формула изгиба дает значительные напряжения в точках m и n сечения у начала выкружек при основании зубьев (фиг. 13).

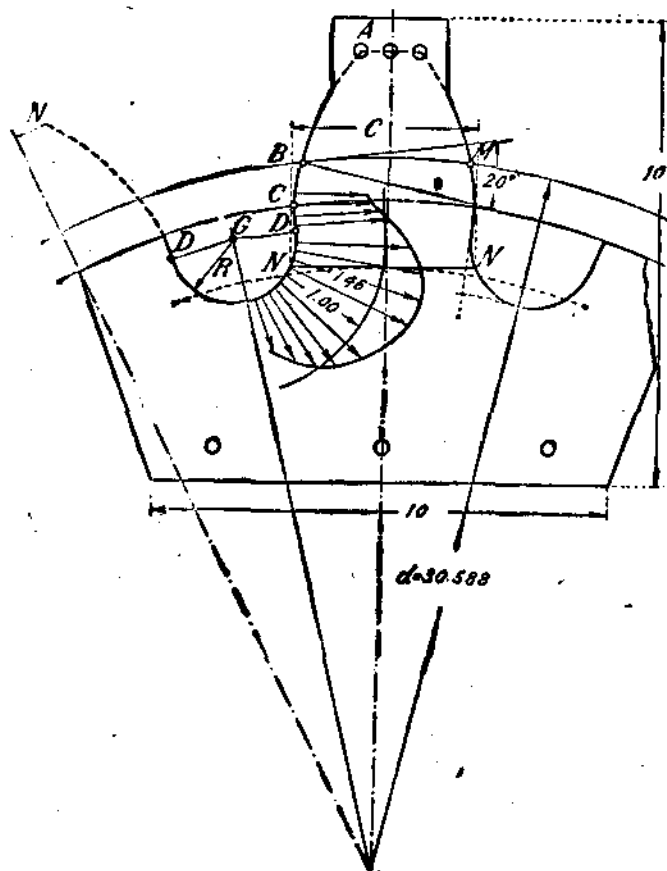
Действительные напряжения у выкружек значительно выше тех, что получаются из формулы изгиба, и приблизительная их величина может быть вычислена при помощи таблицы 3. Результаты более точных измерений напряжений вдоль выкружек даны на фигурах 14, 15 и 16. Из этих фигур сразу видно, как может быть уменьшено напряжение

путем увеличения радиуса выкружки.

На фигуре 14 представлена модель зубца, обычно применяемого на практике, и величина наибольшего напряжения у выкружки больше напряжения, получаемого по обычной формуле изгиба на 61% (коэффициент концентрации 1,61). На фигуре 15 представлен зубец с минимальным радиусом выкружки, установленным Американской ассоциацией заводчиков, изготавливающих зубчатые колеса. Мы видим, что коэффициент концентрации напряжений



в этом случае равен 2,15. На фигуре 16 показано, что путем увеличения радиуса выкружки до максимального предела, коэффициент концентрации напряжений может быть понижен до 1,46



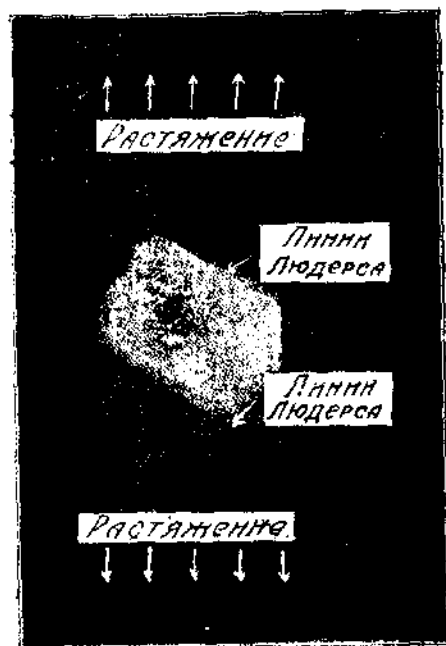
Фиг. 16.

4. Применение линий Людерса к исследованию концентрации напряжений.

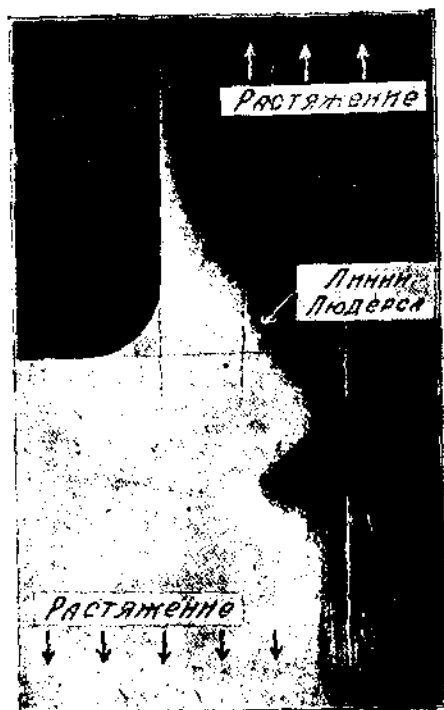
Хорошо известно, что при растяжении железных образцов за предел упругости появляются по поверхности неровности или линии Людерса (см. § 6), которые представляют собой результаты сдвигов в материале испытуемого бруска (фиг. 17). Впервые линии Людерса были использованы при исследовании напряжений нашим русским инженером, профессором Киевского политехнического института М. А. Воропаевым. Наблюдая появление этих линий на поверхности шлифованных образцов, ему удалось установить места наиболь-

ших напряжений в случае деформации круговых колец, стяжек и звеньев цепей ¹⁾.

Этот же метод может быть применен также и при изучении концентрации напряжений. Прежде всего надлежит подобрать подходящее железо (примерно 0,20% углерода), которое дает резкие линии Людерса, и установить путем предварительных опытов напряжение, при котором эти линии появляются



Фиг. 17.

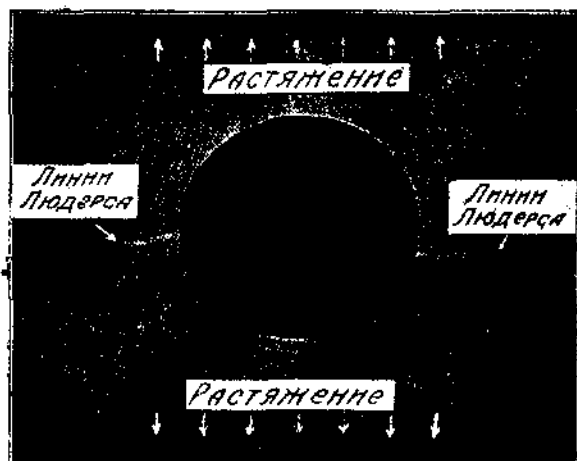


Фиг. 18.

Изготавливая из того же материала модели изучаемой конструкции и подвергая их действию нагрузок, соответствующих действительным условиям, можно путем увеличения нагрузок достигнуть предела, когда начнут появляться на шлифованной поверхности линии Людерса. Места появления первых линий укажут слабые места конструкции, а результаты предварительных испытаний на растяжение дадут величину наибольших напряжений в этих местах в момент появления первых линий. Наши опыты с линиями Людерса показали, что в случае очень малых радиусов выкружек и малых отверстий область, в которой происходит концентрация напряжений, очень мала и оказывается недостаточной для своевременного появления линий Людерса. Линии Людерса обычно запаздывают и дают напряжения, значительно меньшие тех, которые в действи-

¹⁾ См. Известия Киевского политехнического института, 1910 г.

тельности имеют место. Применяя модели больших размеров, можно получить удовлетворительные результаты. На фиг. 18 показаны линии Людерса у начала выкружки модели, общий вид которой дан на фиг. 11. На фиг. 19 даны линии у краев круглого отверстия. Мы видим, что линии эти точно указывают место, где получаются наибольшие напряжения. Что касается величины этих напряжений, то она получается несколько преуменьшенной, и, например, в случае круглого отверстия, экспериментируя с моделью, в которой диаметр отверстия равнялся 1 дюйму, мы получили коэффициент концентрации равным 2,3 вместо коэффициента 3, полученного теоретически. Несмотря на это, метод, основанный на применении линий Людерса, может иметь большое практическое значение, так как опыты этого рода не требуют сложных приспособлений и могут быть выполнены не только над плоскими мо-



Фиг. 19.

делями, но также и в случаях более сложного распределения напряжений, где способ, основанный на применении поляризованного света, не может быть употреблен.

Вместо линий Людерса, для наблюдения которых нужна шлифованная поверхность, можно использовать такой прием. Покрасить поверхность конструкции тонким слоем цементного раствора. Тогда трещины в покраске укажут места, где начинается пластическая деформация в цементе. Этот прием применялся при изучении деформаций в котельных днищах ¹⁾ и при исследовании сжатия крупных мостовых частей ²⁾.

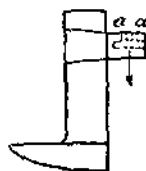
5. Практические приложения.

Все результаты, полученные выше аналитически или экспериментальным путем, основаны на предположении, что материал однороден, изотропен и следует закону Гука. Такой материал, как сталь, при значительных размерах конструкций, где можно забыть о мелко кристаллической структуре металла, обладает в большой степени свойствами, перечисленными выше, и результаты, полученные оптическим методом на целулоиде, можно применять и к стали,

¹⁾ См. Mitteilungen aus dem Kaiser Wilhelm Institut für Eisenforschung, 1926 г.

²⁾ См. R. S. Johnston, Technologic Paper of the Bureau of Standards, 1926, № 72.

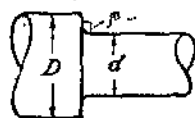
если только напряжения в стали нигде не превосходят предела упругости. Хотя результаты, получаемые оптическим методом, строго применимы лишь к плоской задаче, но ими можно пользоваться для получения картины распределения напряжений и в более сложных случаях.



Фиг. 20.

Возьмем, например, палец кривошипа (фиг. 20) с каналами кругового сечения для смазки, идущими в радиальном направлении. На основании решения для круглого отверстия мы можем сказать, что наибольшие напряжения в пальце кривошипа будут примерно втрое большими, чем напряжения, получаемые в сечении расположения каналов при помощи обычных формул изгиба. В практике очень часто трещины начинают образовываться как раз у краев этих каналов.

В случае круглого вала переменного диаметра (фиг. 21) напряжения изгиба у выкружек, конечно, значительно больше напряжений, получаемых по обычным формулам. Некоторое представление об этих напряжениях можно получить на основании таблицы 3. Числа таблицы получены для плоской задачи, но можно считать, что в тех случаях, когда радиус выкружки мал по сравнению с диаметром вала, роль третьего напряжения не велика, и, например, для $p \leq 1/12d$ числа таблицы дают удовлетворительное приближение для величины наибольших напряжений.



Фиг. 21.

Мы видели, что с уменьшением отношения $\frac{p}{d}$ коэффициент концентрации напряжений возрастает, и в случае входящего угла без выкружки (фиг. 22a) величина этого коэффициента теоретически получается бесконечно большой.



Фиг. 22.

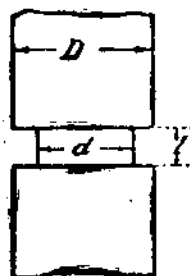
Это показывает, что в случае входящих углов самый незначительный изгибающий момент должен произвести у вершины входящего угла остаточную деформацию. Деформация эта будет местного характера и не отразится на общем прогибе вала. Для устранения больших напряжений в этом случае применяется иногда выкружка, расположенная, как указано на фиг. 22b.

При оценке влияния концентрации напряжений на прочность машинной конструкции для инженерного сооружения следует различать два случая: 1) действие постоянной нагрузки и 2) действие переменных усилий. При действии постоянных усилий влияние концентрации напряжений на прочность рассчитываемой части зависит от свойств материала. В случае таких материалов, как литое железо и мягкая сталь, весьма значительная пластическая деформация может быть получена без разрушения.

Если в местах концентрации напряжений величина этих напряжений превзойдет предел текучести, получится местная остаточная деформация, и при дальнейшем увеличении нагрузки распределение напряжений будет отличаться

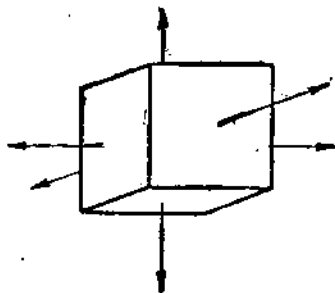
от того, что дает аналитическое решение задачи. Например, для случая, представленного на фиг. 1, распределение напряжений за пределом текучести, с возрастанием нагрузки, все более и более будет приближаться к равномерному, и в результате временное сопротивление бруска с отверстием будет примерно таким, как то получается на основании предположения равномерного распределения напряжений по ослабленному сечению.

Интересно отметить, что для случая цилиндрического бруска с выточкой (фиг. 23) временное сопротивление зависит от отношения $\frac{l}{d}$. При весьма малых значениях этого отношения, например, $\frac{l}{d} = \frac{1}{3}$, временное сопротивление бруска с выточкой получается для литого железа примерно на 40% большим, чем временное сопротивление цилиндрического бруска диаметра d .



Фиг. 23.

Такой результат легко объясняется, если принять в расчёт, что пластическая деформация состоит в сдвигах по плоскостям, где действуют наибольшие касательные напряжения. В случае растяжения это будут плоскости, наклоненные под углом 45° к направлению растяжения. Легко видеть, что в случае, представленном на фиг. 23, при малом значении l , такие сдвиги являются невозможными, благодаря наличности частей бруска с диаметром D , где материал остается в пределах упругости. Вследствие этого разрушение произойдет не как результат сдвигов, а вследствие нарушения сцепления между частицами в тот момент, когда растягивающие напряжения превзойдут величину этого сцепления. Вид разрушения при этом получается такой же, как у хрупких материалов таких, как чугун или закаленная сталь.



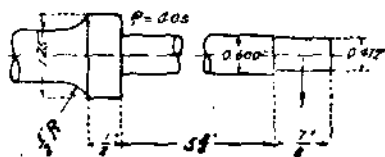
Фиг. 24.

Подобного вида разрушение мы будем получать во всех случаях, когда устранена возможность сдвигов, например, в случае растяжения по трем направлениям (фиг. 24).

Подобного типа напряжения получаются иногда в больших поковках например, в тяжелых вращающихся частях генераторов, которые теперь делаются нередко диаметром в 50—60 дюймов. Благодаря неравномерному охлаждению в таких поковках создаются иногда значительные начальные напряжения такого типа, как указано на фиг. 24. Бывали случаи, когда эти напряжения являлись причиной разрушения. Характер разрушения в таком случае получался такого же типа, как в случае хрупких материалов, а в то же время опыты на простое растяжение давали значительную пластическую деформацию материала.

Итак, в случае материалов, способных получать значительную пластическую деформацию, концентрация напряжений у выкружек и отверстий не понижает временного сопротивления конструкции. Иное заключение мы получим в случае хрупких материалов таких, как стекло и твердая закаленная сталь. Здесь невозможна пластическая деформация, выравнивающая распределение напряжений по слабому сечению, и в результате концентрации напряжений у выкружек и у входящих углов получается обычно существенное ослабление конструкции.

Несравненно более существенное значение концентрация напряжений имеет в случае действия на рассчитываемую конструкцию переменных усилий. В этих случаях концентрация напряжений ослабляет конструкцию не только в случае хрупких материалов, но также и в случае материалов, способных получать значительную пластическую деформацию ¹⁾. При переменных напряжениях в местах концентрации напряжений приходится считаться с усталостью металла. Обычно в этих местах начинает развиваться трещина, которая в дальнейшем приводит к разрушению. Большинство поломок машинных частей, подверженных действию переменных усилий, объясняется этой причиной, и потому изучение усталости металла в связи с концентрацией напряжений является весьма важной практической задачей. В последнее время в лаборатории Westinghouse El. and



Фиг. 25.

Mng. Co (Pittsburgh, Pa., U. S. A.) были произведены опыты со сталью разных сортов, при чем для испытаний брались цилиндрические образцы с выкружкой радиуса r у основания (фиг. 25).

Вообразим себе, что левый утолщенный конец образца закреплен в испытательной машине, вращающейся с постоянной скоростью (1200 оборотов в минуту), а к другому концу, при помощи шарикового подшипника, приложена нагрузка, действующая вертикально вниз. Благодаря вращению продольные элементы образца будут подвержены действию переменного растяжения и сжатия. У выкружки мы получаем комбинированное действие концентрации напряжений и усталости металла. Для сравнения опыты на усталость производились также со стандартными образцами, где влияние концентрации напряжений устранено. Сравнивая результаты двух серий испытаний, можно установить, на сколько понижается прочность образцов из-за концентрации напряжений. Оказалось, что чувствительность различных сортов стали к концентрации напряжений различна. Ниже мы приводим сравнительную таблицу для углеродистой стали и для никелевой стали.

Мы видим, что для одной и той же концентрации напряжений мы получаем в случае углеродистой стали ослабление в отношении 1:1,5. В случае никелевой стали ослабление получается в отношении 1:1,7.

¹⁾ Новые исследования по усталости металлов можно найти в книге H. Gough'a, The Fatigue of Metals, London, 1924.

ТАБЛИЦА 4.

Металл	Предел пропорциональности kg/cm ²	Предел текучести kg/cm ²	Временное сопротивление kg/cm ²	Относительное удлинение %	Сокращение площади сечения %	Предельное напряжение		Отношение $\frac{a}{b}$
						Стандартный образец a kg/cm ²	Образец с выкружкой b kg/cm ²	
Углеродистая сталь	2900	3000	5200	35	37	2300	1500	1,5
Никелевая сталь	5200	5400	7600	27	61	3700	2210	1,7

Заметим, что во всех наших рассуждениях предполагалось, что коэффициент концентрации не зависит от абсолютных размеров конструкции и остается постоянным для геометрически подобных моделей. Однако опыты показывают, что, когда мы переходим к весьма малым выточкам и весьма малым неровностям на поверхности образцов, эффект этих неровностей получается значительно меньшим, чем то можно было бы ожидать на основании теоретических решений. В этом отношении представляют большой теоретический интерес исследования А. А. Griffiths'a ¹⁾, который показал, что даже в случае таких хрупких материалов, как твердая сталь, бороздки и выточки глубиной 0,0025 миллиметра не оказывают влияния на прочность, но выточки глубиной 0,625 миллиметра оказывают полный эффект, т. е. такое ослабление, какое получается на основании теоретических расчетов.

¹⁾ См. Phil. Trans. A. Vol. 221, p. 163 (1920).