

III - 831. Проф. В. ШПАНХАКЕ

Депозитарий

РАБОЧИЕ КОЛЕСА НАСОСОВ и ТУРБИН

ЧАСТЬ I

ОСНОВНАЯ ТЕОРИЯ

Перевод с немецкого инж. Н. Э. УТЦ
под редакцией проф. Ф. В. КОНРАДИ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

ПЕРЕУЧЕТ 1980-82

ПЕРЕУЧЕТ 1980 г.

ЭГ-40-45-5-2(3)

Пр. ТТК № 68 от 16/V 1934 г.

Kreiselräder als Pumpen und Turbinen

Von

Wilhelm Spannhake

Professor an der Technischen Hochschule
Karlsruhe

Erster Band
Grundlagen und Grundzüge

Редактор **В. К. Рерих**

Техн. редактор **А. Д. Чаров**

Сдано в производство 15 января 1934 г. Подписано к печати 25 июня 1934 г.
Уполномоченный Главлита № В-85035. Энергоиздат № 506. Тираж 4000. Заказ № 64.
Бумага 32 × 24 $\frac{1}{16}$. 10, бум. л. Количество знаков в 1 б. л. 101504. Автор. листов 25,3.

4-я типография ОНТИ НКТП СССР „Красный Печатник“. Ленинград. Международный пр., 75а.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
17	24 сверху	горизонтальны	горизонтальные
26	5 сверху	$\frac{d_A}{dt}$	$\frac{d c_A }{dt}$
74	15 и 18 снизу	$M = -\frac{Q\gamma}{q}(\dots)$	$M = -\frac{Q\gamma}{g}(\dots)$
75	13 сверху	$[\bar{J}_2] - [\bar{J}_1 r_1]_2$	$[\bar{J}_2 r_2] - [\bar{J}_1 r_1]$
75	Надпись у чертежа 4 строка сверху	отклоняющейся	отклоняющей
161	13 сверху	$\frac{c_a^2}{2g}$	$\frac{c_{sa}^2}{2g}$
171	15 сверху	$H_s - (nD)^2$	$H_s/(nD)^2$
202	1 сверху	$m = 1 : \frac{c_a^2}{2g} = 0,544H_m$	$m = 1, \frac{c_a^2}{2g} = 0,544H_m$
202	2 сверху	$m = 0,3 : \frac{c_a^2}{2g} = 0,625H_m$	$m = 0,3, \frac{c_a^2}{2g} = 0,625H_m$
274	3 сверху	$2gH\left(\frac{1}{\varrho^2} - 1\right) = c_{a,1}$	$2gH\left(\frac{1}{\varrho^2} - 1\right) = c_{a,1}^2$
275	8 сверху	$\varepsilon' = 2 \frac{w_2 - w_1 V}{w_2^2 - w_1^2}$	$\varepsilon' = 2 \frac{(w_2 - w_1) V}{w_2^2 - w_1^2}$
275	1 снизу	$= \frac{(w_2 + w_1)(w_2 + w_1)}{u_a^2} =$	$= \frac{(w_2 - w_1)(w_2 + w_1)}{u_a^2} =$
276	6 снизу	$\psi_n + \frac{L}{F \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u_a^3}{2}}$	$\psi_n = \frac{L}{F \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^3}{2}}$
276	3 снизу	$\varepsilon' = \frac{\varphi'_n}{\psi_n} fV$	$\varepsilon' = \frac{\varphi'_n}{\psi_n} f_s$
299	8 сверху	меридианольной	меридиональной

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первый том предлагаемого труда надо рассматривать как учебник, а не как справочник. В первую очередь читатель получит в книге сведения о принципе действия машин и об условиях и особенностях их работы, а также сможет изучить их для дальнейшего их усовершенствования. Надо заранее отметить, что специальных сведений по турбиностроению здесь не приводится. В данном труде преследуется цель дать читателю навык извлекать из общих положений специальные теоретические сведения по машиностроению, затем на основании ранее произведенных исследовательских работ получить полезные данные в специальной области и, наконец, систематизировать специальные исследования и согласовать их с общими положениями.

Первый том заключает в себе общие основы гидродинамики, движения жидкости и основную теорию рассматриваемых машин. В данном случае рассматриваются машины для несжимаемой жидкости, что соответствует общепринятым положениям и оправдывается тем, что машины для сжимаемой жидкости теоретически и конструктивно должны быть рассмотрены совершенно иначе.

Отдел А „Основы гидромеханики“ дает краткое представление о современном учении о движении жидкости. В данном случае я считал полезным некоторые положения, которые для инженеров являются недостаточно ясными, сделать более наглядными и только после освещения физической стороны дать им математическую формулировку. Я обратил особое внимание на уяснение поля скоростей неравномерного движения и осветил его несколькими специальными примерами, легко усвояемыми и применимыми к турбонашинам. В связи с этим стоит довольно подробное изложение учения об ускорении частицы жидкости.

В отделе А кратко излагается связь между теорией турбин и теорией несущих крыльев и примыкающей к ней теорией параллельных и круговых решеток.

Здесь же я дал понятие о циркуляции, которое в современном учении о движении играет большую роль. Понятие о потенциальном вихревом потоке будет дано во втором томе.

В главе о вязкой жидкости рассмотрено только самое существенное. К этому во втором томе будет особое дополнение. Там будет указано, как первоначальное потенциальное течение изменяется благодаря вторичному, возникающему в результате влияния стенок и турбулентности.

Главное содержание отдела В — „Рабочие колеса с полным подводом¹ в ограниченном потоке“ — заключает одноразмерную теорию (теория средних значений, „струйная теория“). Эту теорию не требуется создавать, так как 200 лет тому назад (1750—1754) она в своих основах была дана Эйлером.

Она является лучшим примером того, как инженер может, систематически упрощая сложные процессы, получать во многих случаях достаточно точные способы расчета. Метод, предложенный мною для одноразмерной теории, должен вызвать дальнейшие работы, так как он ясно указывает, насколько важно для расчетов применять упрощение и насколько можно допускать подобные упрощения. С целью устранить в первом томе какие-либо сомнения, в IX главе добавлен к основной теории метод приближенного расчета, которым объяснены с определенным процентом точности подсчета явления течения, не охваченные до сих пор основной теорией.

Из изложения раздела 41 достаточно ясно, что при помощи одноразмерной теории можно получить расчетные формулы для турбин и насосов. Для вывода этих формул были широко использованы законы подобия. Особенно обращено здесь внимание на выяснение понятия баланса энергии турбомашины и замену в ее первоначальном виде механических величин через расход воды и число оборотов и, таким образом, преобразование уравнения баланса энергии в уравнение работы. Благодаря этому можно подчитать наиболее употребительные размеры машин, подтверждаемые опытными данными, не отказываясь при этом от существенных понятий струйной теории течения жидкости.

Везде насосы и турбины объединены и рассмотрены совместно не только в интересах изучающих, но также с целью возбуждения интереса у работающих инженеров.

В отделе С „Рабочие колеса с полным подводом в открытом потоке“ дана мною теория струи, в которой учитывается также ее вращательная составляющая. Только благодаря этому удалось на основании струйной теории вывести данные об угле лопаток и установить зависимость между действительной мощностью и коэффициентом полезного действия. Путем простой добавки к формуле трения между жидкостью и лопатками удалось еще полнее установить наблюдаемую зависимость между кривыми мощности и коэффициентом полезного действия. Все это, как мне кажется, подтвердило общую теорию рабочих колес, с другой стороны, при помощи сравнения с опытом и измерениями струи и возможными улучшениями способствовало их дальнейшему развитию.

Отдел D „Современные свободнотруйные турбины“ мало отличается от подобных отделов других учебников.

Высшей математикой я пользовался настолько, насколько она усвоена студентами технических учебных заведений 4-го и 5-го семестров. Я постарался оттенить одинаковую значимость математических формул с физической наглядностью (опытом).

¹ В дальнейшем нами термин „Kreiselrad“ будет переводиться как рабочее колесо или турбоколесо, а термин „vollbeaufschlagten“ — с полным подводом и реже как „полное“. *Ред.*

В дополнение первого тома будет дан сборник примеров с заголовком „Применение основной теории“, где будет указано, как пользоваться этой теорией.

Второй том будет заключать в себе специальную гидродинамику рабочих колес и технические формулы для гидравлических машин из нее вытекающие, проблему лопаток, метод построения и определения размеров спиральной улитки, направляющего аппарата, всасывающей трубы и т. д. Для этого потребуются, как уже было указано, расширение основных понятий гидродинамики для идеальной и вязкой жидкости.

Механико-конструктивная сторона турбомашин будет приведена в третьем томе.

В заключение мне остается выразить благодарность моим ассистентам: инж. Ган, Обенаусу, Кризаму, Вейнелю, Маргеру за их помощь. Инж. Гану, в особенности, за выполнение им чертежей, инж. Маргеру за его ценную помощь при составлении теории струн пропеллера и ветродвигателей.

В. Шпанхаке

Карлсруэ, Январь 1931 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	3
А. Основы гидромеханики	
I. Свойства идеальной несжимаемой жидкости. Основные понятия и формулировки	9
1. Несжимаемость и отсутствие трения. Понятие о давлении жидкости	13
2. Общее действие сил на частицу жидкости	16
3. Жидкость в покое	19
II. Характерные формы движения жидкости и их описание	19
4. Установившееся и неустановившееся движение	—
а) Установившееся движение. Линии тока. Элементарные струйки	—
б) Неустановившееся движение при неизменных элементарных струйках	—
в) Неустановившееся движение с изменяющимися элементарными струйками. Мгновенные абсолютные линии тока	20
г) Общее описание поля скоростей	21
д) Представление о векторе скорости как функции пространства и времени	22
5. Абсолютное и относительное движение	23
6. Пограничные условия	26
7. Уравнение неразрывности	27
8. Ускорение частицы жидкости	28
а) Установившееся, или конвективное ускорение	—
б) Местное и субстанциональное (вещественное) ускорение движения	30
в) Тангенциальное и нормальное ускорение	31
г) Изображение ускорения в декартовой системе координат	34
III. Динамика идеальной жидкости	—
9. Уравнение Эйлера	—
10. Энергия движущейся жидкости	35
11. Уравнение установившегося движения с постоянной энергией	40
12. Движение идеальной жидкости с постоянной энергией в полости вращения	—
IV. Вязкая жидкость	43
13. Сравнение выводов теории идеальной жидкости с опытом	—
14. Основные свойства реальной жидкости	47
а) Ламинарное и турбулентное движения	—
б) Влияние стенок. Распределение скоростей в ламинарном и турбулентном движениях	48
в) Закон внутреннего трения жидкости. Изменение понятия о давлении жидкости	49
г) Проверка закона трения при движении по круглой трубе	50
д) Различие между ускоренными и замедленными течениями	53
15. Отношение теории к опыту	55
а) Законы подобия	—
б) Специальные теории	59
в) Праудтлевская теория пограничного слоя	61

	Стр.
16. Численные значения потерь энергии	62
I. Движение в закрытых трубах и каналах	—
II. Сопротивление погруженных в жидкость тел	68
17. Окончательные выводы для теории рабочих колес	71
V. Взаимодействие сил и обмен энергией между движущейся жидкостью и твердым телом, находящимся в покое или движении	72
18. Отклонение свободной струи жидкости неподвижной твердой направляющей поверхностью	—
19. Действие неограниченного воздушного потока на поддерживающее крыло	75
20. Установившееся движение сквозь неподвижную решетку из лопастей с прямой осью (параллельную решетку)	82
21. Плоское установившееся движение через неподвижную круговую решетку	94
22. Обмен энергией между текущей жидкостью и движущимся твердым телом	99
23. Равномерно обтекаемая прямая решетка, равномерно двигающаяся параллельно своей оси	100
24. Равномерно вращающаяся вокруг своей оси решетка	108
B. Рабочие колеса с полным подводом в ограниченном потоке	
VI. Описание рабочих колес с подводом по всей окружности и их поля течения	111
25. Основные элементы конструкции рабочих колес с подводом по всей окружности в закрытом потоке	—
26. Краткое описание характерных конструкций турбомашин	115
27. Движение в рабочем пространстве (в полости вращения) турбомашин	128
28. Упрощение картины течения для основной одноразмерной теории	133
29. Изменение рабочими колесами момента c_m и Γ	137
VII. Силы и обмен энергией в полных закрытых рабочих колесах	140
30. Осевое давление и момент вращения. Различие между насосами и турбинами	—
31. Баланс энергии в турбомашинах без вредных сопротивлений. Основное уравнение теории рабочих колес	147
32. Баланс энергии действительной турбомашинны в ограниченном потоке	148
33. Распределение энергии и давления в турбомашине. Избыток давления в колесе	154
34. Вычисление помощью баланса энергии данных турбомашинны для переменного режима. Проблема лопаток	159
VIII. Условия подобия и серии рабочих колес	169
35. Подобные турбомашинны	—
36. Подобие динамического распределения давления и выводы из него	173
37. Общее действия динамически и статически распределенных давлений	175
38. Кавитация в рабочих колесах	179
39. Единичные и удельные величины турбомашин	182
40. Изображение единичных величин и удельного числа оборотов посредством характеристик потока и формы	188
41. <i>Формы и свойства типов рабочих колес в зависимости от значений D_a, D_c, m и k и выбор этих величин</i>	<i>192</i>
a) Общие сведения	—
b) Величина (единичный расход)	194
c) Одновременные комбинации величин	196
d) Влияние на свойства машин и потока	197
e) Изменение величин для типов рабочих колес	213
42. Работа различных типов колес при изменяющемся режиме	214
43. Регулирование рабочих колес в ограниченном потоке	228

	Стр.
IX. Дополнения к основной теории рабочих колес в ограниченном потоке . . .	234
44. Дифференциальное уравнение для распределения скоростей идеальной жидкости между лопатками	—
45. Интегрирование дифференциального уравнения распределения скорости (при принятии равенства углов относительных линий тока с углом лопаток) и вывод из него	239
46. Распределение скоростей в идеальной жидкости по шкряне профиля рабочего колеса	247
47. Мощность при расходе, равном нулю, и зависимость потерь от отношения	253
48. Заключительные замечания	255

С. Рабочие колеса с полным подводом в открытом потоке

X. Струйная теория осевого колеса в открытом потоке	256
49. Описание распределения поля течения при technically важных формах машин	—
50. Теоремы импульса энергии для колес в открытом потоке	266
51. Идеальные предельные случаи колес, приводимых в движение механически (струя без момента)	273
52. Коэффициент доброкачественности реальных машин	280
53. Реальные выполнения свободно двигающегося пропеллера (струя с завихрением)	281
54. Практически выполненные неподвижные струйные колеса с механическим приводом	287
55. Турбина в открытом потоке	288
а) Идеальная струйная турбина (струя без крутящего момента)	290
б) Реальная ветряная турбина (струя с крутящим моментом)	291
56. Допустимая нагрузка и определение размеров колес	296
57. Форма лопаток колеса. Связь с другими теориями	298
58. Работа данного колеса в потоке при меняющихся нагрузках	303
59. Условия подобия для колес, работающих в потоке	304

Д. Современные свободоструйные турбины

XI. Одноразмерная теория турбины Пельтона	308
60. Тип ковшевых турбин	—
61. Течение через колесо с ковшами	312
62. Окружная сила и мощность для одноструйного колеса Пельтона. Наивыгоднейшая окружная скорость	316
63. Формы сопел и их устройство	318
64. Закон подобия для свободоструйных турбин. Свойства их при разных эксплуатационных условиях. Коэффициент быстроходности	—

А. ОСНОВЫ ГИДРОМЕХАНИКИ

1. Свойства идеальной несжимаемой жидкости. Основные понятия и формулировки

1. Несжимаемость и отсутствие трения. Понятие о давлении жидкости

Представителем несжимаемых жидкостей является вода; основные ее свойства следующие:

1. Если мы попробуем данную массу воды сжать хорошо пригнанным поршнем (фиг. 1) в каком-нибудь цилиндрическом сосуде, то встретим очень сильное сопротивление.

2. Если, с другой стороны, мы попробуем одну часть данной массы жидкости сдвинуть относительно другой, например, на фиг. 2 частицы, лежащие выше плоскости $a - b$, будем двигать от a к b с одинаковой и равномерной скоростью, то при этом мы встретим очень слабое сопротивление.

3. Разделение данной массы воды на несколько частей встречает тоже весьма малое сопротивление.

Поэтому естественно при теоретических рассуждениях рассматривать эти свойства как вполне совершенные и характеризовать идеальную жидкость, как обладающую следующими свойствами:

1. Она несжимаема.

2. Частицы жидкости, скользящие по разделяющей поверхности, не передают этой поверхности никаких тангенциальных сил.

3. Отдельные части определенной массы жидкости могут быть отделены друг от друга без всякого сопротивления.

Положения 1 и 3 можно объединить в одно:

Идеальная жидкость передает только силы давления и не передает сил растяжения.

Положение 2 можно выразить другими словами:

Идеальная жидкость не передает никаких сдвигающих напряжений, или, что то же, она не обладает свойством трения.

Таким образом о явлениях сцепления и прилипания, в этих условиях не может быть и речи.

Такое идеальное представление вводится с целью упростить теоретическое рассмотрение подобных явлений, причем теория весьма часто подтверждается опытом.



Фиг. 1.
Несжимаемость жидкостей.

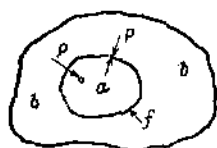


Фиг. 2. Легкость сдвига частиц жидкости.

Обычно принимают за несжимаемые и другие жидкости, не обладающие постоянством объема в такой мере, как вода или подобная ей капельная жидкость; но при этом предполагают весьма малые изменения давления. Это обычно бывает в том случае, если скорость движения рассматриваемой среды ниже скорости распространения в ней звука.

Свойство несжимаемости может быть рассматриваемо как постоянство единичной массы: в 1 м^3 содержится определенное количество килограмм массы жидкости независимо от величины давления на эту жидкость. Количество их мы обозначим через $\frac{\gamma}{g}$. Для

математической формулировки понятия „давление жидкости“ заимствуем представления, употребляющиеся в механике. Если мы внутри какого-либо тела выделим определенный объем, то на него будут действовать силы остальной части тела. Эти силы мы



Фиг. 3. Поверхностные силы на частице.

назовем внутренними, и так как они проявляются на поверхности, разделяющей обе части тела, то они являются, таким образом, поверхностными силами. Так как в идеальной жидкости может иметь место только напряжение сжатия, то силы, действующие на выделенную часть тела, будут направлены внутрь ее. На фиг. 3 часть тела a выделена внутри массы жидкости замкнутой поверхностью f ; на нее извне действуют силы P . Так как по положению 2 на поверхность никаких тангенциальных сил передаваться не может, то эти силы действуют на нее по нормальям. Если мы, наоборот, рассмотрим внешнюю часть тела b , то на нее будут действовать те же силы P , но в обратном направлении, т. е. внутрь тела.

Если определенная масса жидкости будет ограничена твердыми стенками, то это рассуждение не меняется. Твердые стенки заключают в себе жидкость и давят на нее в направлении извне во внутрь. С другой стороны, жидкость давит на стенки сосуда. Силы, действующие на стенки сосуда, являются реакциями сил стенок сосуда, действующих на жидкость.

Представление о том, что действие одной части жидкости на другую проявляется возникновением сил на разделяющей эти части поверхности, приводит к тому, чтобы ввести понятие об удельном давлении подобно тому, как для любых тел установлено понятие напряжения, обозначающее величину поверхностной силы, приходящейся на единицу площади воображаемой поверхности, отделяющей одну часть тела от другой.

Если мы представим в каком-нибудь месте жидкости небольшую площадку, произвольно расположенную, и разделим сумму сил, действующих на нее, на величину ее площади, то при бесконечном уменьшении выделенной площадки мы в пределе получим „давление жидкости в точке“.

Является вопрос, будет ли это давление различно или одинаково для различного направления площадок, расположенных в одном и том же месте?

Это станет ясным в результате следующего рассуждения:

На фиг. 4 тетраэдр ABC представляет объем, выделенный внутри жидкости. Ребро CD длиной h направлено по вертикали, и основание ABC с величиной площади f лежит в горизонтальной плоскости. Перпендикуляр, опущенный на плоскость ABD (с площадью f_1), составляет с вертикалью угол α . На выделенный объем жидкости по направлению силы тяжести действуют следующие силы: вес и вертикальная составляющая сил, действующих на площадь f_1 . В противоположном направлении действует сила, приложенная к площадке f . От сил, действующих на обе другие ограничивающие площадки, не имеется составляющих в данном направлении. Мы выделяем объем такой малой величины, что давление жидкости на ограничивающие площадки можно представить как почти равномерно распределенное.

Сумму всех составляющих сил в направлении силы тяжести можно выразить:

$$\gamma f \frac{h}{3} + p_1 f_1 \cos \alpha - p f.$$

Если тетраэдр выделен в покоящейся жидкости, то сумма всех сил, действующих на него в направлении силы тяжести, вызовет ускорение по направлению оси z .

По основному уравнению Ньютона получаем:

$$\frac{\gamma}{g} f \frac{h}{3} \frac{dc_z}{dt} - \gamma f \frac{h}{3} - p_1 f_1 \cos \alpha + p f = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\gamma}{g} f \frac{h}{3}$ обозначает массу тетраэдра, $\frac{dc_z}{dt}$ — его ускорение по направлению z . Если мы предположим, что тетраэдр уменьшается по направлению к углу C , то исчезнут сначала оба первые члена, так как они пропорциональны объему, следовательно, являются малыми третьего порядка, тогда как два последних члена пропорциональны поверхности и, следовательно, являются малыми только второго порядка, длина же ребер тетраэдра является малой величиной первого порядка. Таким образом остается уравнение

$$p_1 f_1 \cos \alpha - p f = 0,$$

а так как $f_1 \cos \alpha = f$, то получается

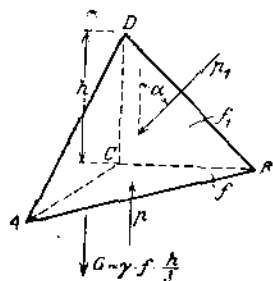
$$p_1 = p. \quad (2)$$

Угол α взят произвольно: точно так же тетраэдр может быть расположен в любом направлении относительно вертикального ребра CD и, наконец, его угол C может быть произвольно расположен в жидкости.

Поэтому мы можем высказать положение:

Давление идеальной жидкости в любой точке имеет одинаковую величину в любом направлении.

Вывод не зависит от состояния жидкости и потому применим как для жидкости покоящейся, так и движущейся с любой ско-



Фиг. 4. Гидромеханическое давление в различных направлениях.

ростью. Мы получим тот же результат, если ограничимся рассмотрением поверхностных сил, действующих на маленький тетраэдр, и вычислим их равнодействующие, относящиеся к единице объема, для любого направления.

Пусть этим направлением будет направление CD . Мы получим упомянутую равнодействующую R , если разделим выражение $p_1 f_1 \cos \alpha - p f$ на объем тетраэдра. Получается:

$$R = 3 \frac{p_1 \frac{f_1}{f} \cos \alpha - p}{h} = 3 \frac{p_1 - p}{h}.$$

Если уменьшать h , а вместе с ним объем, то это выражение увеличивалось бы бесконечно, если бы одновременно числитель не приближался к нулю. Так как, однако, мы не знаем нигде в природе бесконечно больших сил, относящихся к единице объема, то следует точно так же, как и раньше, что в пределе при бесконечном уменьшении тетраэдра до размера точки C , должно быть $p_1 = p$.

Это доказательство не зависит от состояния движения выделенного объема, так как все рассуждение в случае движения с непрерывным изменением давления можно повторить в любой момент для любой точки жидкости.

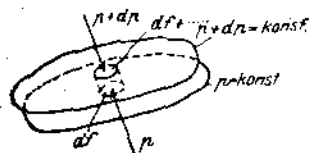
Оба вывода получены на основании опытных данных о свойствах жидкости, состоящих в том, что поверхностные силы, действующие на некоторый объем жидкости, направлены внутрь перпендикулярно к ограничивающей поверхности. В последующем „давление жидкости“ будем часто называть просто „давление“, имея в виду всегда поверхностное давление. Размерность может быть выражена в кг/см^2 или кг/м^2 . Хотя давление в каждой точке жидкости в любом направлении одинаково, однако оно неодинаково в различных точках жидкости. Таким образом оно есть функция координат. Если жидкость отнесена к какой-нибудь координатной системе, например, к прямоугольной системе x, y, z , то давление будет функцией этих координат. Мы можем получить наглядное представление о распределении давления, если представим себе мысленно в этой жидкости поверхности равных (для каждой из них) давлений, расстояния между которыми выбраны так, чтобы разность давлений между двумя смежными поверхностями была всегда одинаковой. Эти поверхности называют поверхностями одинакового уровня. Таким образом мы приходим к понятию падения давления.

Если провести между двумя поверхностями уровня какую-нибудь линию между точками A и B на этих поверхностях (фиг. 5), то разность давлений между этими двумя точками будет одной и той же независимо от расположения точек друг относительно друга на этих поверхностях. Падение же давления представляет разность давлений, отнесенную к длине пути. Этот путь будет самым коротким, если обе точки A и B лежат на траектории, ортогональной поверхностям уровня. Следовательно, падение давления будет наибольшим по направлению, перпендикулярному к поверхностям уровня.



Фиг. 5. Поверхности уровня.

Эту максимальную величину принято обозначать сокращенно как падение давления. Поэтому оно в каждой точке имеет не только определенную величину, но и определенное направление, именно направление, перпендикулярное к поверхности уровня, проходящей через данную точку. Таким образом падение давления является вектором, который можно в любой точке разложить на составляющие, например, по направлению трех осей прямоугольной системы координат. Давление и падение давления рассматриваются прежде всего как функции координат. Для того чтобы вычислить падение давления, надо представить поверхность уровня, проходящую через какую-либо точку (фиг. 6),



Фиг. 6. Падение давления.

и затем по перпендикулярному направлению переместиться на бесконечно малую часть пути к смежной поверхности.

Если обозначить разность давлений через dp , то разность давлений, отнесенная к единице длины, равна $\frac{dp}{dn}$. Если при перемещении по положительному направлению нормали мы получим увеличение давления (следовательно, положительное изменение dp), то падение давления имеет отрицательную величину. Таким образом мы получаем: падение давления равно $-\frac{dp}{dn}$. (3)

Положительную частную производную $\frac{dp}{dn}$ по направлению нормали рассматривают как вектор градиента давления и обозначают его просто $\text{grad } p$. Таким образом падение давления (сравни выше!) равно отрицательному градиенту давления.

В каком-нибудь другом направлении s , проводимом от данной точки, падение давления будет меньше и определяется величиной $-\frac{dp}{ds}$. По направлениям осей прямоугольной системы координат падения давлений будут:

$$-\frac{dp}{dx}, \quad -\frac{dp}{dy}, \quad -\frac{dp}{dz}.$$

dx, dy, dz суть отрезки на координатных осях, представляющие собой расстояния от данной поверхности уровня, проходящей через взятую точку, до соседней, проведенной на бесконечно близком от нее расстоянии, поверхности уровня. Это ясно из фиг. 7, где направления x и y лежат в плоскости, перпендикулярной к двум поверхностям уровня.



Фиг. 7. Компоненты падения давления.

2. Общее действие сил на частицу жидкости

а) Действие поверхностных сил

Объем, выделенный внутри жидкости, испытывает согласно изложенному в § 1 действие сил окружающей массы, эти силы направлены внутрь объема и приложены нормально к его поверхности. Все эти силы могут быть заменены одной равнодействующей.

Так как давление жидкости непрерывно меняется от одной точки к другой, то, для того чтобы вычислить равнодействующую, мы должны выделить бесконечно маленький объем. Математически это можно сформулировать таким образом: надо представить себе частицу конечного размера с объемом V и поверхностью O . На отдельный элемент do этой поверхности действует давление жидкости p и оказывает на каждый элемент давление определенной величины и направления — $p \cdot d\vec{o}$; причем направление нормально к do и совпадает с направлением внутренней нормали (взято — $p \cdot d\vec{o}$, так как нормаль к элементу поверхности $d\vec{o}$ направлена наружу).

Равнодействующую всех этих элементарных сил по величине и направлению мы можем выразить интегралом $\int_V^O p \cdot d\vec{o}$, причем стрелка в интеграле показывает, что при интегрировании должно быть принято во внимание направление увеличения элементарных площадок. Совокупное действие всех сил относят к единице объема. Таким образом равнодействующая давления жидкости, отнесенная к единице объема, выражается: $-\frac{1}{V} \int_V^O p \cdot d\vec{o}$. Если мы будем уменьшать выделенный объем, то величина давления вследствие непрерывности его изменения, будет приближаться к пределу, который пишется так: $\lim_{V \rightarrow 0} \left| -\frac{1}{V} \int_V^O p \cdot d\vec{o} \right|$.

Этот предел имеет определенную величину и направление и является, таким образом, вектором. Согласно вышеуказанному он непрерывно изменяется в пространстве, заполненном жидкостью.

Величину и направление этого вектора можно легко определить, после того как выделен бесконечно малый объем. Для этого мы рассмотрим на фиг. 6 бесконечно малую цилиндрическую трубку, расположенную между двумя бесконечно близкими поверхностями уровней с образующими, направленными перпендикулярно к поверхностям уровней.

Равнодействующая давлений на боковые поверхности этого цилиндра равна нулю, так как не имеется никаких сил, стремящихся передвинуть его параллельно поверхности уровня. Единственная равнодействующая возникает от небольшой разности давлений на площадки df , лежащие в плоскостях, совпадающих с поверхностями уровней.

Если на первой поверхности уровня давление равно p , то на второй оно равно величине $p + \frac{\partial p}{\partial n} dn$. Таким образом в направлении увеличения давления получается равнодействующая (не включая сил величины бесконечно малых второго порядка из-за неполной цилиндричности объема):

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) \right] df = - \frac{\partial p}{\partial n} dn df.$$

Величину объема, с точностью до величин высшего порядка, можно принять равной $df \cdot dn$. Сила, отнесенная к единице объема, тогда будет — $\frac{\partial p}{\partial n}$.

Отсюда вытекает следующее положение. Равнодействующая сила давления, отнесенная к единице объема в любом месте, равна по величине и направлению падению давления в этом месте.

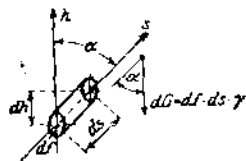
Этот положение мы можем также формулировать и для компонента равнодействующей по какому-либо направлению и тогда получим: составляющая по какому-либо направлению сил давления жидкости, отнесенная к единице объема, равна составляющей падения давления в этом направлении, или короче, равна падению давления по этому направлению.

Для непосредственного доказательства этого положения мы должны снова выделить бесконечно малый объем, расположенный определенным образом в направлении s ; для этого на протяжении отрезка ds выделим маленький цилиндр с образующими, параллельными ds и с основанием df , перпендикулярным к ds . Давление на боковую поверхность не дает равнодействующей, величина же давления на площадь основания цилиндра равна $-\frac{\partial p}{\partial s} ds df$. Если разделить это на объем $ds \cdot df$, то получим $-\frac{\partial p}{\partial s}$. Таким образом вышеприведенное положение снова доказано.

в) Действие объемных сил (сила тяжести)

Кроме равнодействующих поверхностных сил могут существовать еще любые другие силы, возникающие от какой-нибудь извне действующей силы, пропорциональные массе частицы, а в несжимаемой жидкости — пропорциональные ее объему, например, какие-нибудь внешние силы притяжения. Практически здесь идет вопрос о силе тяжести или о весе частиц. Эта сила действует всегда по вертикали, и следовательно, составляющая ее в каком-нибудь ином направлении имеет вполне определенную величину.

Рассмотрим (фиг. 8) маленький цилиндр элементарной длины ds . Он расположен в общем случае наклонно к вертикальному направлению. Мы принимаем вертикальное направление вверх за положительное и обозначаем угол между этим положительным направлением h и положительным направлением s через α . Таким образом мы получаем для положительного направления составляющую силы тяжести, равную $-df ds \gamma \cos \alpha$. До тех пор пока величина α лежит между 0 и 90° или между 270 и 360° , разница высоты dh между началом и концом ds будет положительная. Вместо $\cos \alpha$ можно, таким образом, написать $\frac{\partial h}{\partial s}$. Таким образом составляющая силы тяжести будет $-\gamma df ds \frac{\partial h}{\partial s}$, или, отнесенная к единице объема, $-\gamma \frac{\partial h}{\partial s}$.



Фиг. 8. Действие на частицу силы тяжести.

с) Равнодействующая силы давления и силы тяжести

Мы можем выразить равнодействующую обеих сил в виде одной частной производной, взятой с отрицательным знаком, и получим следующее положение:

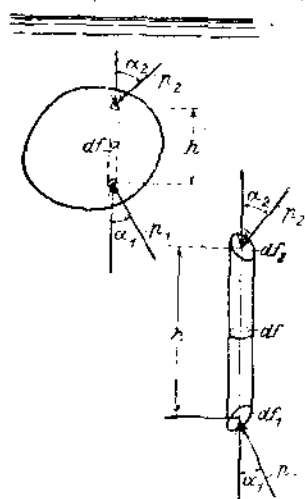
Равнодействующая силы давления и силы тяжести в каком-нибудь направлении равна падению суммы $(p + \gamma h)$ в этом направлении, т. е. равна $-\frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma h)$.

Общее действие сил имеет направление равнодействующей силы давления и силы тяжести. Градиент давления $\text{grad } p$ изменяется от точки к точке по величине и направлению; градиент силы тяжести $\text{grad } \gamma h$ постояен по величине и направлению; его направление отвесно, его величина γ . Все изложенное можно выразить следующими словами: величина и направление равнодействующей сил, действующих на частицу жидкости, отнесенной к единице объема равны $-\text{grad}(p + \gamma h)$.

3. Жидкость в покое

а) Закон гидростатического распределения давления

Равнодействующая всех сил, действующих на каждую частицу в неподвижной жидкости, должна равняться нулю, так как иначе не было бы состояния равновесия. В покоящейся жидкости в любой ее точке выражение $p + \gamma h$ не меняется, другими словами: для жидко-



сти, находящейся в покое, во всем пространстве, занимаемом жидкостью, сумма $(p + \gamma h)$ постоянна. Это положение включает в себе всю гидростатику. Следует отметить, что представление идеальной жидкости в гидростатике больше соответствует действительности, чем в учении о движении жидкости, так как в состоянии покоя в жидкости действительно не возникает никаких сил трения.

б) Подъемная сила жидкости и давление на дно

Из гидростатического закона о распределении давления непосредственно следует положение о вертикальной составляющей давления на тело, погруженное в жидкость. Она получается как сумма элементарных сил давления жидкости на элементы поверхности погруженного в жидкость тела.

Фиг. 9. Подъемная сила.

На фиг. 9 представлены вертикальные составляющие элементарных сил давления жидкости на маленький цилиндр, выделенный внутри тела. Величины оснований цилиндра на поверхности тела равны df_1 и df_2 , поперечное сечение его df .

Равнодействующая давления на площади df равна:

$$dA = df_1 \cdot p_1 \cos \alpha_1 - df_2 \cdot p_2 \cdot \cos \alpha_2 = df(p_1 - p_2),$$

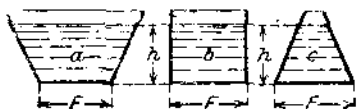
так как $df_1 \cos \alpha_1 = df_2 \cos \alpha_2 = df$.

По предыдущему $p_1 - p_2 = \gamma h$, где γ удельный вес жидкости. Таким образом получаем выражение для интеграла всех элементарных сил:

$$A = \gamma \int df \cdot h = \gamma V,$$

где V — объем погруженного тела. Таким образом на тело действует подъемная сила, равная весу вытесненного объема жидкости. Если мы это положение применим к выделенному объему той же жидкости, то оно выразит положение, что давление в покоящейся жидкости равно весу заключенных в ней частиц. Другими словами, подъемная сила определенного объема жидкости равна весу этого объема.

Далее, помощью закона распределения давления можно определить давление на дно и стенки в сосудах, наполненных жидкостью со свободной или закрытой поверхностью. По этому положению поверхности одинакового давления являются горизонтальными плоскостями, так как в них постоянны h и вследствие этого и p . Поэтому свободные поверхности в покоящемся сосуде также горизонтальны плоскости, если жидкость в них находится в состоянии покоя. Так называемый гидростатический парадокс является после этого положения вовсе не парадоксом, так как при выводе этого положения предварительно ничего не говорилось об особенной форме наполненного жидкостью пространства. Точно так же значение вывода не теряется на границах жидкости, например, там, где она соприкасается с твердым телом (со стенками сосуда или дном сосуда), так как действие сил между этими поверхностями и частицами жидкости, как указано выше, подобно действию сил между различными частями жидкости, разделенной плоскостями. Поэтому давление на дно сосудов a, b, c на фиг. 10 будет одинаково, так как давление жидкости p на дно во всех случаях одинаково и больше атмосферного давления, действующего на свободную поверхность жидкости на величину γh , площади же дна F также одинаковы.

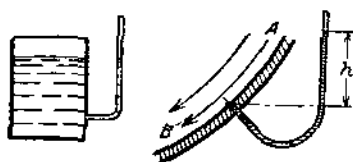


Фиг. 10 Давление на дно.

с) Измерение давления жидкости

Измерение давления жидкости основано на применении вышеизложенного положения, которое объясняет, почему в сообщающихся сосудах со свободными уровнями жидкостей, находящаяся в покое, стоит на одном уровне. Для измерения давления применяется сосуд в виде трубки с маленьким поперечным сечением (так называемый пьезометр, фиг. 11). Для измерения, находящегося

в движении, можно также применить этот способ измерения без грубой ошибки. Если, например, вдоль стенки AB (фиг. 12) течет жидкость и в отверстие в ней вставить трубку перпендикулярно к этой стенке, изогнутую вертикально вверх, то сначала жидкость из потока устремится в эту трубку, так как в отверстии давление



Фиг. 11 — 12. Измерение давления.

со стороны жидкости будет выше атмосферного. Это продолжится до тех пор, пока высота столба жидкости в трубке не достигнет такой высоты, что будет удовлетворено условие $p = \gamma h$, где h есть высота столба жидкости от отверстия до поверхности, а p — избыточное давление над атмосферным. С этого момента подъем

жидкости в столбе прекращается, и поток продолжает двигаться вдоль AB мимо отверстия в стенке сосуда. Если отверстие достаточно мало и если края отверстия нигде не выдаются в поток жидкости, то показание давления и для движущейся жидкости будет правильным. Поэтому мы можем принять за единицу измерения давления вместо кг/м^2 высоту столба жидкости, причем, конечно, должно быть указано, какая жидкость применяется для измерения. Обычно это та же жидкость, давление в которой мы хотим установить, но это может быть и другая жидкость. Так, например, давление атмосферного воздуха измеряется миллиметрами столба ртути или метрами столба воды. Высоты обоих измеряемых столбов при одинаковом давлении относятся обратно пропорционально удельным весам жидкостей. Чтобы установить соотношение различных единиц для измерения давления жидкости ввиду того, что давление на дно сосуда не зависит от его формы, а только от глубины погружения, мы должны представить себе цилиндрический сосуд с площадью дна в 1 м^2 . Для того чтобы давление на дно равнялось $10\,000 \text{ кг}$, что соответствует удельному давлению $p = 10\,000 \text{ кг/м}^2$, надо, чтобы над дном стоял столб воды высотой $p/\gamma \text{ м}$. Так как при 4° удельный вес воды $\gamma = 1\,000 \text{ кг/м}^3$, то над дном должен стоять столб воды высотой 10 м . Таким образом получаем:



Фиг. 13. Измерения давления в потоке.

$$10\,000 \text{ кг/м}^2 = 1 \text{ кг/см}^2 = \begin{cases} 10 \text{ м вод. ст.} \\ 735 \text{ мм рт. ст.} \end{cases} \left(735 = \frac{10\,000}{13,6} \right).$$

Эта величина называется метрической атмосферой, тогда как физическая атмосфера при 0° и средней влажности воздуха на уровне моря равна $10,33 \text{ м вод. ст.}$ или 760 мм рт. ст.

Измерение давления жидкости внутри движущейся жидкости значительно труднее. Во-первых, установка инструмента, хотя и очень малого, несколько изменяет наблюдаемое течение, во-вторых, очень трудно точно установить малую плоскость его отверстия

параллельно к наблюдаемой скорости течения, а также и проделать отверстие, сообщающееся с измерительной трубкой, перпендикулярно этой плоскости.

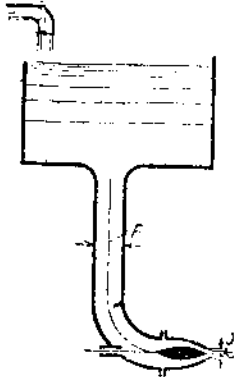
Фиг. 13 показывает приближение к случаю идеального измерения и в то же время уясняет возникающие в этом случае трудности.

II. Характерные формы движения жидкости и их описание

4. Установившееся и неуставившееся движение

а) Установившееся движение. Линии тока и элементарные струйки

Фиг. 14 изображает напорный резервуар, в котором уровень воды держится на постоянной высоте благодаря притоку жидкости. Из этого резервуара вниз к выходному отверстию идет труба, образующая сопло поперечного сечения f , меньшей величины, чем сечение трубы F . При открытом сопле в неизменном его поперечном сечении через трубу протекает в каждую секунду одинаковое количество воды. При этом в определенном месте трубопровода наблюдается все время одинаковая по величине и направлению скорость. Эта скорость может меняться от места к месту; величина скорости в каком-либо сечении трубы зависит от размеров поперечного сечения в данном месте. Таким образом в потоке движущиеся частицы жидкости образуют определенные пути — линии. Эти линии могут быть получены нанесением направлений скоростей от точки к точке и всё время сохраняют свое очертание и расположение. Близко лежащие линии тока можно объединить в пучки, которые называются трубками тока, или элементарными струйками.



Отношение величин скоростей, наблюдаемых в двух определенных местах; остается постоянным. Такое состояние движения называется установившимся. Условием для такого состояния в вышеприведенном примере является постоянство притока воды в напорном резервуаре и равенство его по величине расходу через сопло.

Фиг. 14. Установившееся и неуставившееся течения.

б) Неуставившееся движение при неизменных элементарных струйках

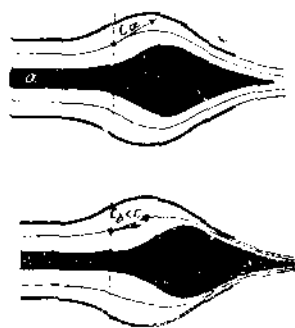
Если площадь отверстия сопла внезапно изменится или внезапно изменится приток воды в напорный резервуар, то соотношение между притоком и расходом воды будет меняться, и уровень воды в резервуаре начнет подниматься или падать. Одновременно меняется форма и расположение линий тока; в напорном резервуаре и в начале трубки, где оно невелико; сильнее всего оно вблизи сопла. На всем остальном участке трубы очертания и поло-

жения линий тока не меняются, так как здесь изменение притока и расхода жидкости на них не оказывает такого сильного влияния. Однако так как в каждое мгновение течет разное количество воды через трубу, то величина скорости в определенном месте трубы меняется каждое мгновение. В особенности, меняются по времени средние скорости в определенном поперечном сечении трубы. Это состояние продолжается до тех пор, пока приток и расход жидкости не сравняются и таким образом наступит новое состояние установившегося движения. В переходное время наблюдается особая форма неустановившегося движения.

Особенность его заключается в том, что линии тока и элементарные струйки в трубе длительно сохраняют одинаковую форму и только скорость меняется каждое мгновение. Отношение двух скоростей, наблюдаемых в определенных точках, при этом постоянно, в особенности, отношение двух средних скоростей, а именно обратно пропорционально площадям поперечных сечений; направление скоростей тока остается постоянным.

с) Неустановившееся движение с изменяющимися элементарными струйками. Мгновенные абсолютные линии тока

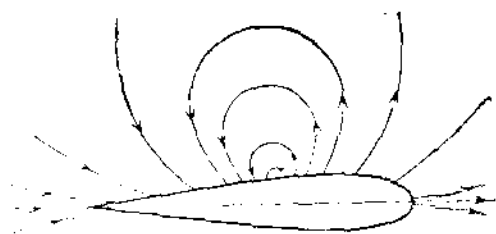
Описанное в п. „b“ движение хотя и является неустановившимся, однако оно имеет такую особенность, что вся картина движения в основном не меняется. Если мы будем наблюдать явления в непосредственной близости иглы сопла, то увидим, что установка ее влияет на форму и расположение линий тока: они при постепенной перестановке иглы меняются каждое мгновение (фиг. 15). В каждой точке скорость s будет меняться по величине и направлению; отношение двух скоростей, наблюдаемых в двух определенных точках, будет в данном случае непостоянным по времени. Другой пример общей формы движения — движение плавающего в бассейне человека. В зависимости от расположения плавающего тела по отношению к границам бассейна, а также от величины и направления его собственной скорости, его движений и изменений фигуры будет меняться распределение скоростей течения во всем бассейне. Но и в данном случае можно вычислить мгновенную скорость движения в каждой данной точке в данное мгновение и проследить ее от точки к точке, иначе говоря, мы можем эти направления свести к кривой мгновенной абсолютной линии тока. При этом мы получаем в каждое мгновение другую картину линий тока, и нигде в заполненном жидкостью пространстве не будет постоянной скорости ни по величине, ни по направлению. Подобный же случай, имеющий, однако, свои особенности, мы наблюдаем при равномерном движении парохода в открытом море при спокойной воде, или подводной лодки под водой на таком



Фиг. 15. Неустановившееся течение через сопло.

величины и направления его собственной скорости, его движений и изменений фигуры будет меняться распределение скоростей течения во всем бассейне. Но и в данном случае можно вычислить мгновенную скорость движения в каждой данной точке в данное мгновение и проследить ее от точки к точке, иначе говоря, мы можем эти направления свести к кривой мгновенной абсолютной линии тока. При этом мы получаем в каждое мгновение другую картину линий тока, и нигде в заполненном жидкостью пространстве не будет постоянной скорости ни по величине, ни по направлению. Подобный же случай, имеющий, однако, свои особенности, мы наблюдаем при равномерном движении парохода в открытом море при спокойной воде, или подводной лодки под водой на таком

расстоянии от поверхности воды, морского дна и берега, что окружающую ее воду можно рассматривать как безграничную. Движения воды возникают здесь только от лодки; она вытесняет частицы своим весом и двигает их перед собой или оттесняет в сторону; с другой стороны, она увлекает их за кормой и притягивает их своими боковыми стенками. Если мы запечатаем мгновенные направления скоростей для какого-нибудь момента, то получим картину в виде кривых, изображенную на фиг. 16. Так как лодка по отношению направления своей собственной скорости остается в одном и том же положении, то мгновенные линии тока, которые начинаются у поверхности лодки и снова кончаются около нее, все время оказываются одинаковыми. Вся картина линий токов, все „поле скоростей“, сопровождает тело, как бы тесно с ним связанное.



Фиг. 16. Мгновенные абсолютные линии тока.

Каждый из трех примеров имеет свои характерные особенности. Течение жидкости через запорный орган трубопровода складывается из движений самой воды, —

„протекания“ и движения, вызванного перемещением самой иглы — выталкивающего движения. Линии тока постепенно меняют свою форму и положение также относительно двигающейся иглы. Движение жидкости в ограниченном бассейне для плавания возникает от движения пловца, следовательно, представляет собой чистое выталкивающее движение; здесь линии тока точно так же меняют постепенно свое положение и форму относительно двигающегося тела, которое само постепенно меняет свою форму и род движения. Течения (токи) в спокойном море возникают только от движения подводной лодки, причем линии тока сохраняют относительно тела расположение и форму и перемещаются вместе с двигающимся телом;

д) Общее описание поля скоростей

Во всех рассмотренных выше случаях мы определяем характер движения, наблюдая его движение в определенном месте неподвижного пространства, т. е. мы наблюдаем временные изменения абсолютной скорости жидкости в определенной точке пространства. Общая картина течения, конечно, будет более полной, если одновременно наблюдать ее во всех точках пространства. При этом не требуется следить, как каждая частица, обладающая наблюдаемой скоростью, перемещается в определенном месте пространства. Для описания движения достаточно установить величину и направление скоростей. Наиболее общий случай движения жидкости сопровождается тем, что скорости в каждой точке все время меняются по величине и направлению. Однако всегда можно в каждый определенный момент изобразить направления скоростей кривыми и таким образом получить мгновенную картину движения во всем пространстве, представленную мгновенными абсолютными линиями токов. Пучок таких

смежных линий тока, между которыми в данный момент течет постоянная масса воды, можно рассматривать, как мгновенную абсолютную элементарную струйку. Если мы знаем картину течений для каждого мгновения, т. е. изменение ее во времени, то мы имеем картину наиболее общего, меняющегося с течением времени течения. Со скоростью меняется и давление. Точно так же и поверхности уровня, о которых говорилось в § 1, меняют свою форму и взаимное расположение каждое мгновение. Таким образом в определенной точке пространства давление и скорость являются функциями времени. С другой стороны, они каждое мгновение меняются от точки к точке. Таким образом давление и скорость в наиболее общем случае являются также функциями пространства и времени. В наиболее общем случае они меняются непрерывно.

Из сказанного видно, что в наиболее общих случаях линии тока не являются путями определенных частиц жидкости, это бывает только для случаев „а“ и „б“. Определение точного пути отдельной частицы жидкости в большинстве случаев сложная задача. Эта трудность была отмечена выше при рассмотрении движения жидкости. Для этого производят наблюдение не над отдельной материальной жидкостью, а наблюдают движение в определенной точке пространства, а затем во всех точках этого пространства. Из определенной таким образом картины скоростей в точке составляют картину всего поля скоростей, меняющую свой вид от момента к моменту. Конечно, возможен и другой метод наблюдений, когда выхватывают отдельные частички жидкости, которые различаются друг от друга по их первоначальному положению при начале наблюдения, и следят за их путем и скоростью. Оба метода наблюдения предложены Эйлером, основателем классической гидродинамики, который их применял уже в середине XVIII столетия. В этой книге применяется первый метод.

е) Представление о векторе скорости как функции пространства и времени

Если даже в действительности приходится отказаться от описания картины движения помощью мгновенных (или за данный отрезок времени) линий токов, то все же мы получаем этим способом ясное представление о поле скоростей, где скорость каждое мгновение вообще меняется по величине и направлению, причем эти изменения для каждой точки имеют свой особенности. Мы принимаем непрерывность изменения в пространстве и времени, т. е. считаем величину скорости и ее направление как непрерывные функции вектора положения $\vec{r}$ и времени t . Это мы представляем помощью векториального уравнения:

$$\vec{c} = f(\vec{r}, t). \quad (4)$$

Если положение какой-либо точки определяется тремя прямоугольными координатами x, y, z , то можно разложить скорость

ее составляющие по направлениям осей координат; тогда состав-
ляющая является функцией трех координат и времени, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} c_x &= f_1(x, y, z, t), \\ c_y &= f_2(x, y, z, t), \\ c_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Смысл вышеизложенного сводится к следующему:

Сначала мы предполагаем себя в качестве наблюдателя на определенном месте пространства и наблюдаем в этом месте мгновенное изменение скорости по величине и направлению. Затем распространяем это наблюдение на все точки пространства. При этом мы либо производим наблюдения мысленно одновременно во всех точках пространства, или для каждой новой точки пространства таким же образом должно быть полностью воспроизведено наблюдение изменения скоростей по времени.

О судьбе отдельных частиц жидкости мы сначала ничего не знаем, но мы можем, как увидим в § 9, вывести уравнения движения частицы в окружающей ее среде по отношению к какой-либо определенной точке.

5. Абсолютное и относительное движение

Все сказанное в § 4 относится к абсолютному движению жидкости. Скорости при этом наблюдаются из определенной неподвижной точки пространства. Часто, однако, удобнее или нагляднее производить наблюдения, находясь на движущемся теле или системе тел. Тогда наблюдают относительное движение, с которым технику в действительности приходится встречаться чаще, чем с абсолютным движением. Если мы рассмотрим (например, на фиг. 17) сосуд с боковыми стенками, перпендикулярными к плоскости чертежа и косым боковым отверстием, то, если сосуд стоит неподвижно, мы получаем достаточно ясное представление о линиях тока внутри сосуда и в вытекающей струе; линии тока совпадают с путями движения частиц жидкости при условии, что приток в сосуд все время остается неизменным по величине, так что уровень воды в нем остается на одной и той же высоте. Если же мы двинем сосуд, например, в направлении, противоположном направлению вытекающей струи, то каждая частица кроме своей скорости в сосуде или относительно сосуда получит еще вторую скорость вместе с сосудом.

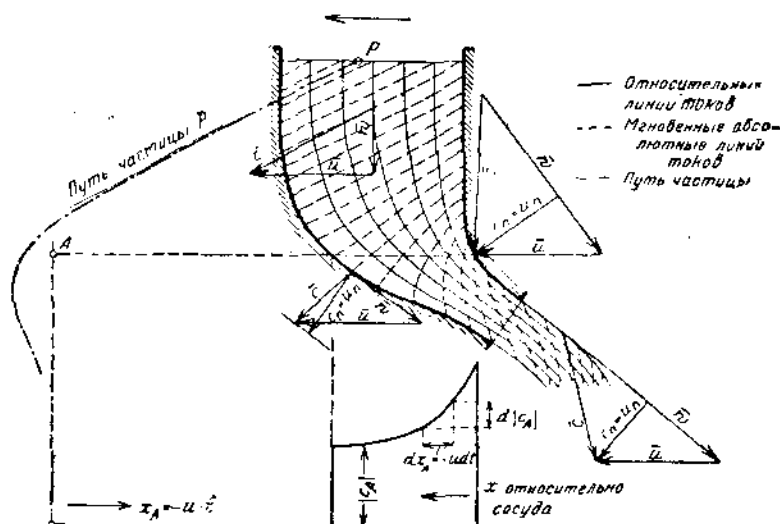
В настоящем простом примере чисто поступательного движения сосуда скорость его для всех точек сосуда одинакова. Она называется переносной скоростью. В более общем случае, когда скорости несущего жидкость сосуда различны в разных его точках, например, при вращении, они тоже называются переносными скоростями. Абсолютная скорость частицы жидкости складывается из скорости сосуда, в котором частица находится, или скорости переносной и ее относительной скорости (по отношению к сосуду).

Абсолютная скорость является, таким образом, геометрической суммой переносной скорости и относительной скорости:

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}, \quad (6)$$

$\vec{c}$ — абсолютная скорость,
 $\vec{w}$ — относительная скорость
 $\vec{u}$ — скорость сосуда (переносная скорость).

(фиг. 18)



Фиг. 17. Протекание через движущийся сосуд.

Возникает вопрос: если приток жидкости при движении сосуда остается каким-то образом по положению, величине и направлению относительно него таким же, каким был раньше в состоянии покоя, то спрашивается, остаются ли при этом скорости относительно сосуда такими же, какими они были, когда сосуд находился в состоянии покоя? Остается ли, следовательно, относительная картина течения во время движения сосуда той же, какой она была при неподвижном сосуда. Техник во многих случаях склонен на этот вопрос ответить положительно, тогда как в действительности вообще на это приходится отвечать отрицательно. Например, в нашем примере вид относительного движения в сосуда неподвижном и в движущемся одинаков, если сосуд движется равномерно и прямолинейно, и наоборот, он будет совсем иным, если сосуд будет двигаться по прямой линии ускоренно; и опять другой вид мы получим при вращательном движении. Таким образом картина относительного движения должна быть в каждом отдельном случае исследована отдельно.



Фиг. 18. Треугольник скоростей.

Относительное движение может быть тех же видов, как и абсолютное движение. Таким образом существует установившееся и неустановившееся относительное движение; неустановившееся отно-

сительное движение будем различать также в зависимости от того, меняется ли только величина скорости, а форма и расположение относительных линий тока остаются теми же, или же меняются также направления скоростей, следовательно, и форма и положение относительных линий тока.

Второй вопрос следующий: какой вид имеет абсолютное движение, которое соответствует данной картине относительного движения, и каковы его характерные особенности? Для того чтобы в определенный момент получить из относительной картины движения абсолютную, необходимо в каждой точке геометрически прибавить к относительной скорости скорость переносного движения. В каждой точке жидкости мы получим из треугольника скоростей вместо прежнего относительного направления новое, абсолютное, направление. Если все концы этих векторов соединить непрерывной кривой, то получим картину абсолютных линий тока. Однако эта картина линий тока изображает, как уже разъяснено в § 4, не пути частиц жидкости, а дает представление о распределении скоростей в абсолютном поле скоростей. Если сосуд имеет установившееся движение, то и относительное движение тоже может быть установившимся. В таких случаях мы имеем в каждый момент одну и ту же картину абсолютных линий тока, движущуюся вместе с сосудом и как бы тесно с ним связанную. Иначе говоря, картина мгновенных абсолютных линий тока в этом случае относительно движущейся системы является установившейся, абсолютное же движение жидкости, наблюдаемое из неподвижной точки пространства, является неустановившимся, так как если мы будем наблюдать из какой-нибудь точки неподвижного пространства за скоростями частиц, проходящих одна за другой мимо этого места, то мы заметим, что эти скорости различны по величине и направлению вследствие того, что вся заполненная жидкостью и в целом приведенная в движение система со своей картиной относительного течения принимает последовательно различные положения относительно неподвижной точки пространства. Так, в примере с приведенным в движение сосудом в какой-нибудь неподвижной точке пространства (например, точка *A* на фиг. 17), которая вообще лежит на пути сосуда, мы сначала, пока передняя стенка сосуда не достигнет этой точки, не сможем заметить никакой скорости. Но с момента, когда стенка сосуда дойдет до *A*, мы будем наблюдать ряд всевозможных абсолютных скоростей, получающихся из относительной и переносной скоростей сосуда, до тех пор пока задняя стенка сосуда не пройдет точку *A*. С этого момента мы снова не сможем заметить никакой скорости. Если в этом случае относительное движение установившееся, получаемая, как то указано выше, картина мгновенных абсолютных линий тока относительно сосуда как бы проходит мимо неподвижной точки пространства с переносной скоростью сосуда. То же самое получается, если бы мы сосуд с относительными и абсолютными линиями тока оставили неподвижным, а до сих пор неподвижную точку пространства двигали бы со скоростью (переносной), но в обратном направлении через неподвижное поле течения и установили бы изменение скорости, которое имеется у точки *A*. Это движение точки *A* через поле скоростей

происходит согласно уравнению $x_A = -u t$, если положительное направление x будет совпадать с положительным направлением u . Изменения скорости по времени $\frac{\partial |c_A|}{\partial t}$ получаются для наблюдателя из изменений скоростей по пути $\frac{\partial |c_A|}{\partial x}$ на основании уравнения:

$$\frac{\partial |c_A|}{\partial t} = \frac{\partial |c|}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -u \frac{\partial |c|}{\partial x}.$$

Абсолютные пути движения частицы жидкости мы получим, если вычислим для определенного момента как положение сосуда, так и положение в нем частицы жидкости. Последнее особенно просто в том случае, если относительное движение установившееся. На фиг. 17 приведены эти отношения как пример сосуда с вытекающей из него жидкостью,двигающегося прямолинейно с постоянной скоростью.

6. Пограничные условия

На примере сосуда неподвижного и подвижного с вытекающей из него жидкостью могут быть выяснены основные случаи так называемых пограничных условий. Жидкость, заполняющая сосуд, ограничена с боков стенками сосуда, сверху свободной поверхностью, а по выходе из сосуда ограничена только свободными поверхностями струи.

а) Сосуд в состоянии покоя

Стенки сосуда являются поверхностями токов, т. е. они являются геометрическим местом линии тока; скорость жидкости касательна к ним. На свободной поверхности в сосуде давление постоянное и равно атмосферному приблизительно так же, как у стенок сосуда на той же высоте (при отвесных стенках сосуда и при достаточной высоте поверхности над отверстием, откуда вытекает жидкость, скорости будут иметь направление по вертикали). На поверхности струи имеется постоянное атмосферное давление, наружная поверхность состоит из линий токов.

б) Равномернодвигающийсясосуд

Для относительного движения имеют место те же пограничные условия, как и для сосуда, находящегося в покое. Для абсолютного же движения возникают совершенно иные пограничные условия. У стенок сосуда абсолютная скорость $\vec{c}$ должна иметь составляющую c_n перпендикулярную к стенке и равную нормальной составляющей u_n переносной скорости $\vec{u}$ элемента стенки (фиг. 17). Если бы этого не было, то разность $c_n - u_n$ обусловила бы проникновение жидкости сквозь стенку. Относительно свободных границ струи можно сказать то же самое. Здесь также жидкость не должна проникать за границы поверхностей. На свободной поверхности сосуда дело обстоит иначе: здесь жидкость проходит через поверхность отвесно, поэтому относительная и абсолютная скорость должны иметь одинаковые составляющие w_n и c_n пер-

перпендикулярные к поверхности (по условиям, уже указанным в случае „а“, $c_n = w_n = w$). Условия постоянного давления на свободной поверхности и на свободной границе струи остаются теми же для относительного и абсолютного движения.

На фиг. 17 пограничные условия изображены на диаграммах скоростей.

Между описанными пограничными условиями различают кинематические и динамические последние — как условия для давления. Кинематические же делятся на две группы: в первой группе требуется, чтобы скорость жидкости была направлена касательно к определенным твердым поверхностям (находящимся в покое или движущимся); во второй — задается величина перпендикулярной составляющей скорости жидкости во всех точках одной или нескольких движущихся поверхностей. В математической гидродинамике говорят, в первом случае о пограничных условиях первого рода, во втором — о пограничных условиях второго рода.

Если область течения простирается в бесконечность, то присоединяются еще условия в отношении бесконечности. Если, например, неизменяющееся тело конечных размеров движется в жидкости, безграничной со всех сторон, то скорости, вызванные его движением, во все стороны постепенно исчезают, так что в бесконечности жидкость остается в покое. Если, с другой стороны, жидкость течет из бесконечности мимо твердого тела, находящегося в покое, то величина и направление скорости в бесконечности должны быть даны. Очень часто мы можем задачу течения разложить на две частные задачи, из которых одна содержит пограничные условия первого рода, другая — второго рода.

7. Уравнение неразрывности

Представление линий тока можно использовать, чтобы сформулировать кинематически физическое свойство несжимаемости жидкости. При этом начнем с общераспространенного представления о течении по трубе. Если поперечное сечение трубы вдоль по длине меняется постепенно, то можно принять, что труба повсюду заполнена текущей жидкостью. То, что обозначено нами как поперечное сечение трубы зависит от ее формы, влияющей также и на форму течения. Поверхность поперечного сечения во всяком случае должна быть перпендикулярна к стенкам трубы и так проходить внутри нее, чтобы все линии тока пересекали ее перпендикулярно. Эта поверхность определяет в зависимости от массы воды, протекающей через трубу в единицу времени, среднюю скорость в сечении, выражаемую в m/sec , как частное от деления Q на F , где Q дано в m^3/sec , а F в m^2 .

В любом поле скоростей можно соединить пучок смежных линий тока вокруг одной средней линии в элементарную струйку и все пространство разбить на такие элементарные струйки. Скорость в такой элементарной струйке тем меньше будет изменяться по поперечному сечению, чем меньше последнее, или, иначе говоря, средняя скорость поперечного сечения такой элементарной струйки будет тем меньше отличаться от настоящей скорости линии тока,

вокруг которой расположена элементарная струйка, чем больше элементарная струйка совпадает с линией тока. В этом случае выражение $c \Delta f$ для всех точек вдоль элементарной струйки можно считать тоже постоянным. Следовательно, можно формулировать несжимаемость или неразрывность течения жидкости следующим образом:

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} [c \Delta f] = \text{const} = dq. \quad (7)$$

Часто рассматривают действительную трубу с конечными поперечными сечениями как трубку тока, и допускают различие скоростей в них настолько малым, что среднюю скорость берут по уравнению $c = \frac{Q}{F}$, считая ее постоянной для сечения. Часто при этом можно рассматривать поперечное сечение как плоскую поверхность, перпендикулярную к оси трубы. Тогда уравнение неразрывности выражается просто:

$$cF = \text{const} = Q. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности (7) можно применить как к установившемуся, так и к неустановившемуся, далее, как к абсолютному, так и к относительному движению. При неустановившемся движении надо уравнение применять в каждый отдельный момент к данной картине элементарных струек.

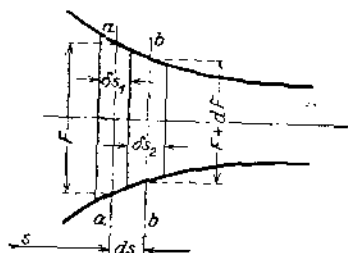
Если поле скоростей задается не при помощи элементарных струек, а посредством трех составляющих c_x , c_y , c_z по координатам, выраженных, как функции этих координат и времени, то мы должны иметь другую формулировку уравнения непрерывности. При этом рассматривают какой-нибудь элемент объема определенной формы, вычисляют втекающую в него и вытекающую из него массу жидкости и принимают, что сумма их равна нулю, поскольку жидкость несжимаема. В особых случаях для математического рассмотрения представляют, что жидкость как бы производится или поглощается в элементе объема, так что элемент объема является как бы источником, или поглотителем, жидкости. Тогда массу жидкости, относящуюся к единице объема и притекающую или вытекающую в единицу времени в соответственной точке пространства, называют дивергенцией вектора $\vec{c}$ и обозначают $\text{div } \vec{c}$. В несжимаемой жидкости в областях, где нет источников, $\text{div } \vec{c} = 0$.

8. Ускорение частицы жидкости

а) Установившееся, или конвективное ускорение

Для того чтобы составить уравнение движения жидкости, надо иметь представление, как вычисляется ускорение материальной жидкой частицы. Для этого возьмем опять как самый простой пример движение в прямолинейном трубопроводе, поперечное сечение которого меняется вдоль оси. Будем рассматривать трубопровод как элементарную струйку, в которой скорость $\vec{c}$ определяется, как частное $\frac{Q}{F}$. Поле скоростей в такой трубе особенно простое, так

как c зависит только от одной координаты (расстояния по направлению оси трубы s , которое можно отсчитывать от любой точки). Массу воды, протекающую по трубе, будем считать постоянной по времени; таким образом мы имеем случай установившегося движения. Необходимо установить, какое ускорение приобретает выделенный нами элементарный цилиндр жидкости (частица), который находится в момент времени t своей средней плоскостью $a-a$ (фиг. 19) в месте, определяемом координатой s . По истечении элемента времени dt частичка должна продвинуться настолько, что ее новая средняя плоскость $b-b$ будет находится на месте, определяемом координатой $s + ds$. Будет проще всего, если мы представим, что при этом продвижении частица совершенно покинула пространство, которое раньше заполняла. Вследствие неразрывности движения и несжимаемости жидкости $F\delta s_1 = (F + dF)\delta s_2$, где F и $F + dF$ — поперечные сечения в средних плоскостях $a-a$ и $b-b$. Толщины δs_1 или δs_2 должны быть взяты настолько малые, чтобы можно было не обращать внимания на различие скоростей в отдельных плоскостях, которыми можно еще дальше разделить частицу. Вначале средняя скорость частицы $c = \frac{Q}{F}$, в конце $c + dc = \frac{Q}{F + dF}$.



Фиг. 19. Установившееся (конвективное) ускорение.

(Мы должны предположить, что при продвижении в положительном направлении s изменения dc и dF являются положительными.) Приращение скорости частицы, таким образом, получается:

$$dc = \frac{Q}{F + dF} - \frac{Q}{F} = Q \frac{F - F - dF}{(F + dF)F} = -\frac{Q}{F^2} dF$$

Разделив на dt , получим ускорение:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{Q}{F^2} \frac{dF}{dt}. \quad (9)$$

Производная $\frac{dF}{dt}$ не означает, конечно, что поперечные сечения трубы меняются по времени, а указывает на то, что одна и та же частица жидкости постепенно занимает различные поперечные сечения. Поперечное сечение трубы само является функцией длины трубы s , и рассматриваемая частица занимает постепенно различные положения по длине трубы. Координата s является, таким образом, той переменной, от изменения которой зависит изменение поперечного сечения частицы. Следовательно, надо рассматривать F как функцию s и одновременно s как функцию t и потому писать:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Частица проходит элемент пути ds со скоростью, которая лежит между c и $c + dc$, следовательно, скорость приблизительно имеет величину $c + \frac{dc}{2}$, так что $ds = \left(c + \frac{dc}{2}\right) dt$.

При приближении к пределу отпадает бесконечно малый член высшего порядка и остается $c \cdot dt$. Отсюда из уравнения (9) получается ускорение:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{Q}{F^2} \frac{dF}{ds} c = + \frac{d\left(\frac{Q}{F}\right)}{ds} c, \quad (10)$$

или также

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{ds} c = \frac{d\left(\frac{c^2}{2}\right)}{ds}. \quad (10a)$$

Смысл этого рассуждения следующий: при установившемся движении частица получает ускорение благодаря тому, что она из одного места поля скоростей, имеющего определенную скорость c , попадает в другое место, где скорость больше или меньше. Тот же результат может быть получен следующим чисто формальным путем. В элементарных струйках при установившемся движении скорость является функцией длины трубы; длина же трубы для частицы в свою очередь является функцией времени; поэтому, во-первых, скорость для частицы становится функцией времени, а следовательно, производную $\frac{dc}{dt}$ можно представить в форме: $\frac{dc}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$. При этом ds есть путь, проделанный частицей за мгновение dt , следовательно, $\frac{ds}{dt}$ в пределе представляет собой первоначальную скорость — c .

Только что описанное ускорение называют установившимся ускорением. Другое название, именно конвективное ускорение, указывает, что это ускорение обусловлено изменением места частицы.

б) Местное и субстанциальное (вещественное) ускорение движения

Если по трубе течет масса воды, меняющаяся по времени, то частица жидкости кроме выше выведенного ускорения обладает еще вторым. В начале элемента времени частица обладает скоростью $c = \frac{Q}{F}$ к концу его:

$$c + dc = \frac{Q + dQ}{F + dF}.$$

Приращение скорости выражается так:

$$dc = \frac{(Q + dQ)F - Q(F + dF)}{F(F + dF)} = \frac{dQ}{F} - \frac{Q}{F^2} dF,$$

т. е. ускорение

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{F} \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{F^2} \cdot \frac{dF}{dt} = \frac{1}{F} \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{F^2} \cdot \frac{dF}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (11)$$

Второй член выражения, как нам уже известно из предыдущего вывода, является конвективным ускорением. В отношении первого члена надо обратить внимание на следующее: он происходит от того, что меняется расход воды, а F временно рассматри-

ся для него, как неизменное, так что этот член не имеет ничего общего с переменной местоположения частицы. Следовательно, его можно выразить таким образом:

$$d\left(\frac{Q}{F}\right) = \frac{\partial c}{\partial t},$$

где производная справа должна писаться как частная производная, так как скорость зависит теперь как от координаты s , так и от времени t . Частица жидкости ускоряет свое движение по двум причинам: во-первых, потому, что скорость меняется во всем поле скоростей, следовательно, и в той точке, где находится частица к началу момента dt , во-вторых, потому, что частица в продолжение момента dt передвигается на другое место, где скорость и без изменения Q будет отличной от скорости в начальном положении. Первый член называют местным (локальным) ускорением, так как оно не зависит от перемены местоположения частицы. Соответственно предыдущему краткому выводу можно и здесь сказать следующее: скорость c частицы при неустановившемся движении во всем поле скоростей является, независимо уже от движения частицы, функцией времени, кроме того, вследствие перемены местоположения частицы является еще раз функцией времени. Таким образом $c = f(s, t)$, причем $s = \varphi(t)$.

Полная производная $\frac{dc}{dt}$ тогда выражается следующим образом:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s} c = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{c^2}{2} \right). \quad (12)$$

Понятно, производная по s должна быть написана как частная производная. Общее ускорение называют также субстанциальным (вещественным) ускорением, так как оно связано с массой частиц.

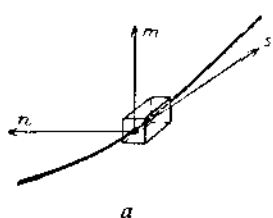
с) Тангенциальное и нормальное ускорение

Все вышеизложенное применимо к прямолинейным трубам, также к бесконечно малым прямолинейным элементарным струйкам.

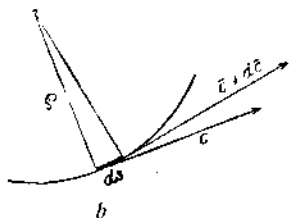
Если имеется обычное, изменяющееся по времени поле скоростей, то, как уже известно, для более наглядного представления о распределении скоростей его разбивают на мгновенные элементарные струйки. Обычно линии тока, из которых состоят элементарные струйки, представляют собой кривые, изогнутые в пространстве.

Для лучшего понимания рассмотрим особый случай, когда элементарные струйки длительно сохраняют очертания и положения, и временные изменения поля скоростей происходят только от того, что в элементарных струйках меняется протекающее количество воды. Линии тока в этом случае являются истинными путями частиц жидкости. В каждой точке поля меняется только величина скорости, тогда как ее направление остается неизменным,

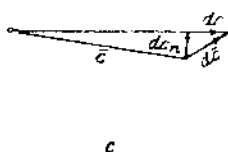
а именно оно совпадает (на фиг. 20, а) с направлением касательной к линии тока, проходящей через эту точку. Если проследить за движением частицы в элементарной струйке от одной точки к другой, бесконечно близкой, то можно считать, что величина скорости меняется совершенно так же и по тем же основаниям, как и в прямолинейной элементарной струйке. На изменение величины скорости влияет только так называемое тангенциальное (касательное) ускорение, которое точно так же, как при неустановившемся движении в прямолинейных элементарных струйках, зависит, во-первых, от временных изменений количества жидкости, во-вторых, от изменения местоположения движущейся частицы по пути, а именно



Фиг. 20. Натуральная координатная система в потоке.



Фиг. 20 б и с. Треугольник скоростей к определению нормального ускорения.



по направлению касательной. Но, кроме того, скорость частицы при перемещении меняет и свое направление, так как путь ее представляет собой кривую. Это равнозначно существованию ускорения, нормального к пути. Для того чтобы его вычислить, достаточно путь, начинающийся в данной точке, представить как лежащий в плоскости, содержащей линию тока; в этой же плоскости лежит главная нормаль, а на ней центр кривизны на расстоянии ρ (радиус кривизны). К этому центру кривизны направлено нормальное ускорение; величина его $\frac{c^2}{\rho}$ (направление n на фиг. 20, а).

Эти рассуждения о линиях тока, являющихся одновременно путями частиц, основаны непосредственно на механике криволинейного движения материальной точки. Там разлагают общее ускорение на тангенциальное (касательное) ускорение $\frac{dc}{dt}$, которое влияет только на изменение величины скорости, и на нормальное или центростремительное ускорение, которое направлено к центру кривизны пути и которое влияет только на изменение направления скорости, причем величина его равна $\frac{c^2}{\rho}$ (сравни план скоростей фиг. 20, б и с). Для движения жидкости в рассматриваемом частном случае, когда движение меняется по времени, благодаря только изменению массы при неизменных линиях тока мы можем написать:

тангенциальное ускорение:

$$b_t = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s} c; \quad (13a)$$

нормальное ускорение:

$$b_n = \frac{c^2}{\rho} \quad (13b)$$

Тангенциальное (касательное) ускорение имеет здесь локальную и конвективную, а нормальное — только конвективную часть. Если изменение течения происходит так, что меняются форма и положения линий тока, то вышеизложенное рассуждение уже недостаточно. Мы должны теперь разложить ускорение на три составляющие, перпендикулярные друг к другу. К направлениям касательной s и главной нормали n присоединяется еще третье направление, бинормали, перпендикулярное к плоскости траектории (направление m на фиг. 20, а). Составленная из этих трех направлений система координат не изменяется в продолжение элемента времени dt . Для того чтобы вычислить конвективные члены ускорения, достаточно рассматривать в продолжение элемента времени dt линии тока как пути частицы. Для конвективного ускорения в направлении главной нормали получается та же величина, как и в уравнении (13b), а для конвективного ускорения в направлении бинормали получается, как и раньше, величина 0, так как линия тока в первом элементе пути ds , проходимом в продолжение dt , не выходит из плоскости кривой. Для того чтобы установить местные (локальные) ускорения, мы должны помнить, что в течение элемента времени меняется вся картина движения и поэтому в исходном положении частицы проявляются не только изменения величины скорости, но и направления, благодаря чему местные ускорения действуют не только в касательном, но и в двух других направлениях. Если мы обозначим составляющие ускорения в направлении касательной главной нормали и бинормали через c , c_n , c_m то сказанное можно свести к трем формулам:

b_t = ускорению в направлении касательной =

$$= \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{c^2}{2} \right)}{\partial s}, \quad (14a)$$

b_n = ускорению в направлении главной нормали =

$$= \frac{\partial c_n}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho}, \quad (14b)$$

b_m = ускорению в направлении главной бинормали =

$$= \frac{\partial c_m}{\partial t}. \quad (15)$$

Систему координат, образованную из направлений касательной, главной нормали и бинормали называют естественной. Применение ее вследствие связанной с ней геометрической наглядности оказывает большие услуги при общих рассуждениях. Надо только иметь в виду, что ее направление во всяком случае меняется от точки к точке и от момента к моменту.

д) Изображение ускорения в декартовой системе координат

Если взамен представления о линиях тока мы будем описывать местоположение частицы указанием трех ее координат в неподвижной системе координат, то каждая составляющая скорости, выраженная координатой, является функцией времени по двум основаниям: во-первых, так как она меняется по времени во всем поле скоростей, во-вторых, потому, что частица меняет по времени свое положение, т. е. все три координаты, и потому снова меняет свою скорость. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} c_x &= f_x(x, y, z, t), \\ c_y &= f_y(x, y, z, t), \\ c_z &= f_z(x, y, z, t), \end{aligned} \right\} \text{ также } \left. \begin{aligned} x &= \varphi_x(t), \\ y &= \varphi_y(t), \\ z &= \varphi_z(t). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Таким образом полное дифференцирование, благодаря которому мы получаем составляющие ускорения, можно выразить следующим образом:

$$\frac{dc_x}{dt} = \frac{\partial c_x}{\partial t} + \frac{\partial c_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (17)$$

или так как $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ являются составляющими пути ds частицы жидкости, а $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ составляющими ее скорости, то

$$\frac{dc_x}{dt} = \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z}, \quad (18a)$$

и аналогично

$$\frac{dc_y}{dt} = \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z}, \quad (18b)$$

$$\frac{dc_z}{dt} = \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z}. \quad (18c)$$

III. Динамика идеальной жидкости

9. Уравнение Эйлера

Уравнение Ньютона для движения отдельной материальной точки гласит:

сила равна массе, умноженной на ускорение:

$$m \frac{d\bar{c}}{dt} = \bar{P}. \quad (19)$$

Равенство обеих частей уравнения относится как к численной величине, так к направлению изображенных механических величин. Так как в потоке жидкости мы имеем поле, в котором всякое действие сил, а следовательно, и ускорение, непрерывно меняются от точки к точке и в каждый момент времени, то мы можем применить это уравнение только к бесконечно малой частице жидкости. На

такую действует бесконечно малая сила, и если объем частицы δV , то основное уравнение движения получится в таком виде:

$$\delta V \frac{\gamma}{g} \frac{d\bar{c}}{dt} = \delta \bar{P}, \text{ или } \frac{d\bar{c}}{dt} = \frac{\delta \bar{P}}{\delta V} \frac{g}{\gamma}.$$

Выражение справа $\frac{\delta \bar{P}}{\delta V}$ обозначает, что действие сил на частицу жидкости относится к единице ее объема. Это действие мы уже вычислили в § 2 и нашли его равным падению давления или же отрицательному градиенту выражения $p + \gamma h$. Таким образом мы получаем:

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = - \frac{g}{\gamma} \text{grad} (p + \gamma h) = - g \text{grad} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right). \quad (20)$$

Вместо векториального уравнения мы можем написать уравнение для составляющих по любому направлению. Таким образом:

$$\frac{dc_s}{dt} = - g \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right). \quad (21)$$

Выраженное словами, оно гласит: Ускорение частицы жидкости в каком-либо направлении равно ускорению силы тяжести, помноженному на падение $\left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$ в соответствующем направлении. Уравнение подобного рода называют уравнением Эйлера для движущейся жидкости. Если его написать для трех направлений естественной системы координат, то после разложения в нем ускорений на местное и конвективное получаем:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{c^2}{2} \right) = - g \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right), \quad (22a)$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho} = - g \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right), \quad (22b)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = - g \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right). \quad (22c)$$

10. Энергия движущейся жидкости

а) Постоянство энергии в элементарной струйке

Первое из уравнений (22) по объединении членов, зависящих от ds , можно также написать в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \right) = 0. \quad (23)$$

Об этом нужно сказать более подробно. Можно себе представить, что такое уравнение написано в определенный момент для каждой точки мгновенной линии тока. Постоянное изменение направления s не имеет никакого значения; иначе говоря, уравнение (23) можно интегрировать по s , т. е. вдоль линии тока. Понятно, что это имеет смысл только в том случае, когда известна функциональная зависимость местного ускорения $\frac{\partial c}{\partial t}$ от s . Выразив это, после интегри-

рования получаем:

$$\int \frac{\partial c}{\partial t} ds + g \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \right) = F(t). \quad (24)$$

Предварительно можно принять, что правая часть уравнения 24 есть функция времени на том основании, что в данном случае взят частный интеграл. Физически эта функция, например, может быть осуществлена в том случае, когда все движение извне подчинено воздействию, произвольно меняющемуся по времени, но одинаковому в каждый момент во всем пространстве (например, периодически колеблющееся давление). Можно представить, например, центробежный насос с совершенно закрытым напорным и всасывающим клапаном, наполненный водой, подверженный переменному давлению благодаря соединению с сосудом с периодически изменяющейся высотой уровня. Если колесо насоса будет приведено в движение, то в колесе и внутри колеса образуется определенное течение, которому соответствует определенное распределение давления. Однако давление в каждой точке колеблется на ту же величину, как и давление внешнее. Так как такие случаи или не имеют особого практического значения, или их особенность может быть учтена впоследствии, то можно вместо $F(t)$ написать постоянную. Таким образом мы получим:

$$\int \frac{\partial c}{\partial t} ds + g \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \right) = C. \quad (25)$$

Уравнение это применимо сначала к случаю, когда расположение элементарных струек не меняется, а меняется только величина скорости. Практическим примером может служить теория меняющихся по времени течений в трубопроводе, например в трубопроводе турбины при ее регулировании, если не учитывать упругость стенок и воды. Особенно простой случай получается, если скорости не меняются по времени, и следовательно, течение совершенно установившееся; тогда уравнение упрощается (так как $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$) в следующее:

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} = C. \quad (26)$$

Естественно дать особое название величине, постоянство которой характеризует движение. Поэтому мы обозначаем вышеприведенную сумму одной буквой H и называем выражение

$$H = \frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \quad (27)$$

энергией струйки.

Уравнение (25) можно выразить словами так:

При абсолютно установившемся движении энергия жидкости в каждой элементарной струйке постоянна. От струйки к струйке она большей частью меняется.

б) Подразделение энергии

Мерой выражения (27) является длина, — например, метр, мерой же энергии является килограмметр. Величина H является, таким

образом, энергией, отнесенной к единице веса, т. е. энергией 1 кг текущей жидкости. Три члена уравнения энергии жидкости обозначаются особыми названиями, а именно:

Величина h выражает работоспособность 1 кг, находящегося на высоте h над каким-нибудь произвольным уровнем (например, у гидросиловой установки над нижним уровнем). Она поэтому обозначается как энергия положения. Соответственно с этим величина $\frac{p}{\gamma}$ называется энергией давления или также высотой давления, так как она измеряется метрами. Последний член выражает собой живую силу для материальной точки и называется кинетической или скоростной энергией, или, просто, скоростным напором.

Высказанное выше об энергии струйки позволяет вычислить часть общей энергии, если известны обе другие части и величина постоянной. Эта постоянная показывает величину общей полной энергии для соответствующей элементарной струйки. Практически дело сводится к тому, что сравниваются две точки элементарной струйки, если известны все составные величины одной из них. Таким образом находят сумму энергии между обеими точками. К вышесказанному следует добавить, что между двумя рассматриваемыми точкам жидкости энергия не теряется.

с) Постоянство энергии во всем поле

При всех важных в техническом отношении движениях жидкости можно с достаточной точностью принять, что все элементарные струйки начинаются в том месте, где все частицы жидкости обладают одинаковой энергией движения. Например, при гидравлической силовой установке можно считать, что все частицы воды начинают свой путь через силовую установку с верхнего уровня. Там энергия положения для всех частиц одинакова, ее измеряют, принимая нижний уровень за нулевой уровень, и поэтому она равна напору установки H_s . Давление на верхнем уровне равно атмосферному давлению воздуха, такой же величины давление и на нижнем уровне воды. Вполне целесообразно давление воздуха принимать за нуль давления, или, что то же, за нуль энергии. Таким образом энергия давления верхнего и нижнего уровней воды различаются только на величину напора H_s . Дальнейшая разница может быть получена только за счет кинетической энергии. Но скорости, с которыми частицы покидают уровень верхней воды или попадают в уровень нижней воды, если, строго говоря, и неодинаковы между собой вверху и внизу, то разница между ними настолько незначительна, что ее и, тем более, разность квадратов скоростей можно не принимать во внимание. Таким образом мы получаем, что все элементарные струйки протекают между двумя областями с одинаковыми (в каждой из них) энергиями движения и что обе эти энергии движения различаются между собою на величину полного падения H . В определенной промежуточной области, если имеется в виду идеальная жидкость, энергия для частиц воды H_s полностью от них

отнимается. В дальнейшем мы увидим, что эту область мы должны будем представить ограниченной колесом турбины и окружающим его пространством. Мы можем рассматривать движение от верхнего уровня воды до вступления в эту область или от выхода из нее до уровня нижней воды, как установившееся, и поэтому (при идеальной жидкости) можем считать энергию движения в обеих областях вне колеса постоянной. В самом колесе, как показывает уравнение (25), движение не может быть установившимся, так как иначе частицы жидкости не могли бы отдавать энергию. Из этого примера мы видим, что при изучении движения жидкости в случаях технических применений можно очень часто ограничить области, где энергия движения постоянна не только в отдельных элементарных струйках, но и во всем поле.

При этом необходимо снова напомнить о двух предположениях, лежащих в основании этого вывода. Движение должно быть установившееся, и жидкость должна быть идеальной.

д) Вычисление распределения давления по уравнению энергии

В установившемся движении идеальной жидкости имеет место постоянная смена трех слагаемых энергии движения. Если, например, какая-нибудь частица перейдет из области меньшей скорости в область большей скорости, то она должна потерять известную величину энергии положения, или энергии давления, или оба эти слагаемых энергии изменяются вместе соответственно увеличению кинетической энергии. Если область более высокого давления лежит на равной или на большей высоте, чем область более низкого давления, то частица может попасть в область более высокого давления, израсходовав для этой цели, и только для этой цели, соответствующее количество кинетической энергии.

В области движения, где скорость увеличивается, давление может настолько понизиться, что жидкость разрывается, при этом связанные с жидкостью газы выделяются и заполняют пустоту, или жидкость сама испаряется, заполняя пустоту. Это явление называется „кавитацией“. Значение наших уравнений, строго говоря, теряется уже при некотором приближении к такому состоянию. Но обычно все же принято при изучении кавитации пользоваться уравнением (26). По этому уравнению, зная постоянную C , можно вычислить критическую величину скорости c , зависящую от давления паров жидкости $\frac{p_v}{\gamma}$, определяемого температурой ее; давление же определяет высоту h , при которой в жидкости начинается образование пустот (кавитация).

Для практических целей при вычислении давления бывает полезно разложить общее давление p на две части, существенно различающиеся между собой: динамическое давление p_{dy} и статическое давление p_{st} . Тогда мы получаем:

$$\frac{p_{dy}}{\gamma} + \frac{p_{st}}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} = \text{const} = k, \quad (26a)$$

это можно выразить следующим образом:

$$\frac{p_{st}}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = k_1; \quad \frac{p_{st}}{\gamma} + h = k_2. \quad (26b)$$

Постоянная k может быть взята или произвольно, или она определяется из данных физических условий, например, если жидкость в какой-либо своей части течет с открытой поверхностью, где давление атмосферное. Иногда удобнее принять $k_1 = 0$ и $k_2 = k$ (давление воздуха на аэроплан).

С другой стороны, можно часто совсем не обращать внимания на статическое распределение давления. Согласно вышеизложенному можно говорить о динамическом и статическом распределении давления. Можно также сказать: внутри однородной жидкости действие сил гидростатического давления уравновешивается весом частиц и в этом случае явление протекает так, как если бы совсем не было силы тяжести. Но это уже не имеет места на границе двух жидкостей, в особенности, на свободной поверхности, здесь, например, под действием силы тяжести могут образоваться волны. Форма свободно вытекающей струи зависит также от действия силы тяжести; однако часто при вытекании струи в свободное пространство при приближенном рассмотрении на это не обращают внимания. Если жидкость обтекает какое-либо тело, то линия тока делится перед телом и затем смыкается за ним. Первое место называется передней напорной точкой, второе — задней напорной точкой¹. В обеих точках скорость относительно тела равна нулю. Если тело неподвижно и движение жидкости установившееся, то давление в обеих точках устанавливается согласно уравнению $\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} = H$, где H — известная нам энергия движения. Если мы ограничимся динамическим давлением, то получим $\frac{p}{\gamma} = \frac{c_0^2}{2g}$, если c_0 является скоростью в тех областях поля, где давление равно нулю. Из опыта мы знаем, что такие давления, действительно, наблюдаются в передних напорных точках. Этим пользуются для измерения помощью так называемых трубок Пито. Трубка Пито представляет собой маленький насадок, сужающийся к концу; в насадке спереди имеется отверстие, которое соединяется с пьезометром. Если плоскость этого отверстия перпендикулярна течению, то она измеряет сумму $\frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g}$. Можно инструмент сделать комбинированным измерителем давления и скорости, для этого необходимо сделать в насадке круглые отверстия по бокам его². Вследствие неизбежного нарушения поля течения при помещении в нем этой трубки эти инструменты достаточно точны только там, где имеется движение с приблизительно параллельными линиями тока.

Величина $p = \frac{\gamma}{g} \frac{c_0^2}{2}$ называется напорным давлением, что ясно из предыдущего, и ее обозначают через q (ср. также § 14 п. „e“, второй пример).

¹ В гидродинамике эти точки носят название „критических“ точек. Прим. ред.

² Трубка Прандтля см. „Hütte“ изд. 25-е т. I, отд. VII, стр. 912.

11. Уравнение установившегося движения с постоянной энергией

Из уравнения (22a) при условии, отмеченном в заголовке, получается известное интегральное выражение:

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} = \text{const} = H.$$

Из уравнения (22b) получается, так как $\frac{\partial c_n}{\partial t} = 0$:

$$\frac{c^2}{g} + g \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = 0.$$

Прибавим и вычтем $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{c^2}{2} \right)$, тогда получим:

$$\frac{c^2}{g} + g \frac{\partial H}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{c^2}{2} \right) = 0.$$

Но так как H постоянно во всем поле, то $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$, и остается:

$$\frac{c^2}{g} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{c^2}{2} \right) = \frac{c^2}{g} - c \frac{\partial c}{\partial n} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{c}{g}. \quad (28)$$

Из уравнения (22c) мы получаем при $\frac{\partial c_m}{\partial t} = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial m} g \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = 0.$$

Но так как

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \right) = 0,$$

то следует также

$$\frac{\partial}{\partial m} \frac{c^2}{2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0. \quad (28a)$$

С помощью этих уравнений мы рассмотрим три примера.

12. Движение идеальной жидкости с постоянной энергией в полости вращения

а) Свободное движение без кругового вращения (меридиональное течение)

На фиг. 21 AB и CD представляют собой меридиональные линии двух поверхностей вращения с осью $z-z$, между которыми заключается полость вращения. В ней движется поток, идущий извне и приблизительно радиально уходящий вдоль оси. Этот поток имеет особое свойство, состоящее в том, что направления скоростей, а следовательно, и всех линий тока, лежат в плоскостях, проходящих через ось (радиальных плоскостях). Поле скоростей можно разделить на четырехгранные элементарные струйки, образованные

этим радиальными плоскостями и последовательным рядом поверхностей вращения (например, $E-F$). Таким образом линии тока являются плоскими кривыми. Направление касательной и главной нормали лежит в радиальной плоскости, направление бинормали перпендикулярно к последней, т. е. касательно окружности, проходящей через рассматриваемую точку и имеющей центр на оси z .

Из условия $\frac{dc}{dn} = 0$ следует, что на таких окружностях скорость постоянна, а следовательно, и сумма $\frac{p}{\gamma} + h$ при вертикальной оси p также постоянна. Такое движение называется симметричным относительно оси. Уравнение движения для направления n можно использовать, чтобы вычислить распределение скоростей приближенным графическим методом ¹.

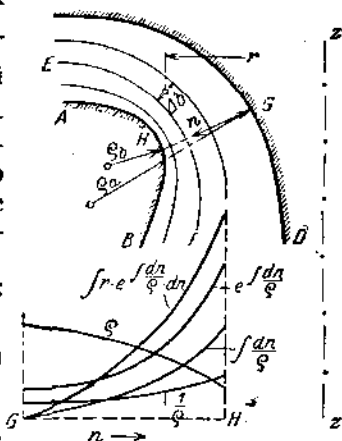
Интегрируя уравнение (28) по n , найдем:

$$\lg c = \int \frac{dn}{e} + C', \text{ или } c = C e^{\int \frac{dn}{e}}. \quad (29)$$

Линии тока могут быть приблизительно начерчены, принимая во внимание, что скорости возрастают в сторону большего искривления полости и что вследствие увеличения радиусов при одинаковых отрезках Δb элементарные поперечные сечения $2\pi r \Delta b$ увеличиваются. Линии токов вычерчиваются на глазмер на таких расстояниях, чтобы между ними протекали одинаковые количества жидкости. Затем надо вычертить развертку нормального сечения, например $G-H$ и произвести вышеупомянутое интегрирование, откладывая на ней величины $q, \frac{1}{q}, \int \frac{dn}{q}, e^{\int \frac{dn}{e}}$ (q берется с чертежа, $\int \frac{dn}{e}$ определяется графическим интегрированием). Функция e пропорциональна c ; для определения постоянной масштаба C служит условие:

$$Q = \int 2\pi \cdot C \int r \cdot e^{\int \frac{dn}{e}} \cdot dn. \quad (30)$$

Интеграл берется по всей траектории. Можно использовать последнее уравнение без определения постоянной, для того чтобы провести первую проверку степени правильности начерченных линий тока. Над развернутой траекторией наносят $q = \int e^{\int \frac{dn}{e}} dn$, для этого делят конечную ординату на столько равных частей, сколько было образовано полостей вычерчиванием линий тока,



Фиг. 21. Течение в полости вращения.

¹ См. Flügel „Ein neues Verfahren der graphischen Integration“ (Флюгель, Новый метод графического интегрирования, примененный к движению идеальной жидкости через центробежное колесо) Мюнхен, Ольденбург, 1914.

и ищут по кривой q соответствующие абсциссы. Эти абсциссы должны определить точки, в которых принятые линии тока пересекают линию нормального сечения. Кроме того, строго говоря, надо проверить для промежуточных точек, действительно ли найденное распределение c и картина движения соответствуют отношению $\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{c}{q}$.

Обе проверки должны дать совпадение для нескольких нормальных сечений. Если этого нет, надо принять другую форму линий токов. В данном случае, определяя форму движения, мы решали также задачу о пограничных условиях. Пограничные условия, во-первых, таковы, что поверхности вращения $A-B$ и $C-D$ должны быть поверхностями токов. Затем должны быть еще выполнены условия относительно „входа“ и „выхода“. Практически это заключается в том, что задаются распределением скоростей в двух, на-глаз принятых, концевых поперечных сечениях полости. При этом надо предположить, что это распределение скоростей достигается каким-то направляющим аппаратом. Физически можно легко себе представить, что это легче удается при входе в полость, чем при выходе из нее, где не так просто устранить последствия неправильного движения в полости. Полученное распределение скоростей мы кратко назовем свободным распределением c_m . Обозначение c_m принято потому что скорость везде направлена касательно к меридиональным линиям определенной поверхности вращения, которая разделяет полость на маленькие ее элементы. Из распределения c_m вычисляется соответствующее „свободное“ распределение давления по уравнению $\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c_m^2}{2g} = \text{const}$, причем постоянная может быть задана вперед, соответствуя принятой поверхности уровня. c_m и p наносятся для наглядности, во-первых, на развертки соответствующих меридиональных линий и, во-вторых, на соответствующие ортогональные траектории. Поверхности вращения, образованные ортогональными траекториями, и являются действительными „поперечными сечениями“ потока. Здесь также целесообразно вычислить отдельно динамическое и статическое распределение давления.

б) Чисто круговое движение жидкости

Оно характеризуется тем, что все частицы двигаются непрерывно по концентрическим кругам. Направление s теперь касательно к этому кругу, направление n является направлением радиуса r и, кроме того, здесь $dn = -dq = -dr$; направление m параллельно оси z , следовательно, $dm = dz$ и $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = 0$; по направлению z давление распределяется статически; кроме того, $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$. На круговых вокруг оси цилиндрах скорость постоянна. Далее, мы имеем:

$$\frac{\partial c}{\partial n} = -\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{c}{r}; \quad c \cdot r = \text{const}, \quad (31)$$

следовательно, c обратно пропорционально радиусу. На параллельных кругах скорость, с одной стороны, и сумма $\frac{p}{\gamma} + h$, с другой —

постоянны. Если такое движение происходит внутри полости вращения, то пространство, ближайшее к оси, ограниченное поверхностью вращения, должно быть исключено из движения, так как иначе близ оси появится недопустимое падение давления. В таком случае характер движения около оси был бы совершенно другой, нежели дают выведенные отношения.

Рассматриваемое распределение скоростей мы назовем „свободным распределением c_a “, так как здесь скорости всюду находятся в плоскостях параллельных кругов.

с) Общий случай движения (Наложение потоков a и b)

Так как два потока заполняют пространство непрерывно, то они не нарушают друг друга, если их наложить один на другой. Сумма их также заполняет пространство непрерывно. Если оба потока объединить в полости вращения, то пограничные условия будут также выполнены, так как поток a , как уже выведено выше, определяется как раз таким образом, что ограничивающие поверхности вращения являются поверхностями токов, и при круговом движении эти пограничные условия выполняются сами собой. Поток протекает по полости вращения спиральными кривыми, проекция которых на какую-либо радиальную плоскость выглядит точно так же, как кривые потока a . Следовательно, линии тока лежат на поверхности вращения, меридианы которой являются линиями тока потока a . Эту часть общего движения мы будем называть дальше меридиональным движением, так как скорость его c , которую мы теперь обозначаем через c_m , касательна к меридиональным линиям. c_m имеет снова две составляющие: c_r , перпендикулярную к оси, и c_z , параллельную ей. Полная скорость всего движения имеет, таким образом, три составляющие: c_r , c_z и c_u , последняя касательна к параллельному кругу. Комбинированное движение можно также назвать симметричным по отношению к оси, так как оно характеризуется постоянством скорости c и суммы $\frac{p}{\gamma} + h$ на параллельных кругах. Динамическое распределение давления комбинированного потока получается наложением друг на друга динамического распределения давления составляющих потоков. Так как $\frac{p_{dy1}}{\gamma} + \frac{c_m^2}{2g} = 0$ и $\frac{p_{dy2}}{\gamma} + \frac{c_u^2}{2g} = 0$, то, сложив их, получим:

$$\frac{p_{dy}}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = 0,$$

как и должно быть, так как $c^2 = c_m^2 + c_u^2$. В общем случае распределение давления в потоке, образованном отдельными течениями, можно определить, исходя из распределения скоростей и закона энергии.

IV. Вязкая жидкость

13. Сравнение выводов теории идеальной жидкости с опытом

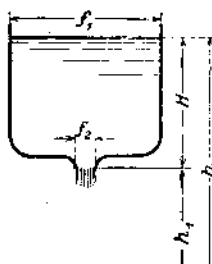
Главный результат всей приведенной теории идеальной жидкости — это положение о постоянстве энергии в установившемся

течении, прежде всего — элементарной струйки, а затем, и в случае, особенно важном для всех технических применений, — во всем поле течения.

Этот результат можно легко проверить опытом. На двух примерах можно видеть результаты этой проверки.

а) Истечение из отверстия

На фиг. 22 изображен сосуд с значительным поперечным сечением f_1 и маленьким отверстием в дне f_2 ; уровень жидкости держится в нем благодаря притоку на одной высоте H над отверстием. Приток поступает с незначительной скоростью в виде дождя над сечением f_1 . Сообразно с изложенным в гл. I—III мы имеем следующую картину: жидкость спускается элементарными струйками со свободной поверхности сначала очень медленно вследствие значительных размеров сечения. Внизу у отверстия в дне элементарные струйки сближаются, и скорость возрастает. Если края отверстия хорошо закруглены, то можно принять, что элементарные струйки в конце опять становятся параллельными, так что они проходят сквозь поперечное сечение и выходят наружу в виде цилиндрической струи. На поверхности струи давление всюду одинаково. Если струйки все параллельны, то в сечении струи не может быть изменения давления в поперечном направлении. Из этого



Фиг. 22. Свободное истечение из сосуда.

следует также равенство скоростей, так как сумма $\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g}$ постоянна и оба ее первые члена в любом поперечном сечении струи одинаковы. Так как h , которое отсчитывается от любого уровня ниже сосуда, не постоянно для различных поперечных сечений струи, то, строго говоря, изменению должно соответствовать в струе изменение c и с ним изменение f , благодаря чему делается невозможной цилиндрическая форма. Но вблизи отверстия и в самом отверстии мы можем пренебречь этим изменением, и тогда для протекающего количества жидкости составить выражение: $Q = f_2 c_2$. Точно так же мы можем принять, что f_1 перпендикулярно всем элементарным струйкам, имеющим равную скорость c_1 , следовательно, также обозначаем $Q = f_1 c_1$. Точным рассмотрением вопроса о форме линии тока между f_1 и f_2 мы пренебрегаем. Таким образом мы путем правдоподобного предположения о состоянии течения в начальном и конечном поперечном сечении просто разрубаем гордиев узел, который заключается в проблеме пограничных условий. Преимущество этого способа состоит в том, что мы тотчас можем установить выражение для энергии движения в обоих поперечных сечениях. Оно таково:

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{c_1^2}{2g}; \quad H_2 = \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{c_2^2}{2g}.$$

c_1 и c_2 мы можем выразить через Q ; если это сделаем и примем во внимание, что $p_1 = p_2$ равно атмосферному давлению и что по теории идеальной жидкости $H_1 = H_2$, то

$$h_1 + \frac{Q^2}{2g f_1^2} = h_2 + \frac{Q^2}{2g f_2^2},$$

а из этого следует:

$$Q^2 \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) = 2g(h_1 - h_2) = 2gH.$$

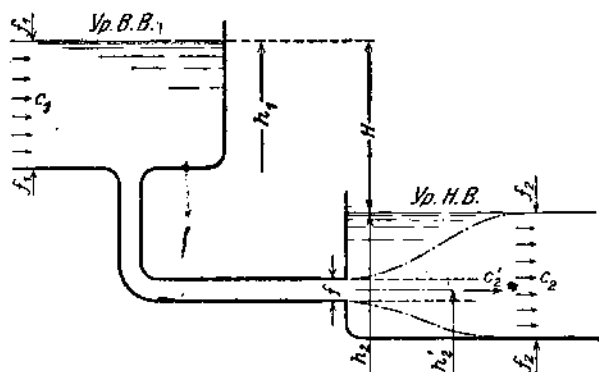
Во многих случаях величина $\frac{1}{f_1^2}$ очень мала по сравнению с $\frac{1}{f_2^2}$, так что получается $Q = f_2 \sqrt{2gH}$, что может быть написано в виде

$$\frac{Q}{f_2} = c_2 = \sqrt{2gH}. \quad (32)$$

Если мы проверим эту „формулу истечения“ измерением расхода, то найдем при сравнительно больших, действительно хорошо закругленных отверстиях, которые вблизи дают гладкую цилиндрическую струю, разницу только в 1%. При маленьких отверстиях отклонение больше и на практике для негладких отверстий достигает величины порядка 10%.

б) Движение в закрытом трубопроводе, соединяющем резервуары со свободными уровнями (фиг. 23).

В верхний канал вода притекает со скоростью c_1 , из нижнего она оттекает со скоростью c_2 , после того как протекла соединяю-



Фиг. 23. Течение между двумя сосудах через трубу.

щий трубопровод, который имеет меньшее поперечное сечение, чем канал. Здесь возможны два предположения:

1. Предполагается, что поток, вытекающий из трубы, каким-то образом расширяется, например, как обозначено пунктиром, и при этом постепенно уменьшает свою скорость до величины c_2 . Если

мы сравним между собою два сечения, для которых известны составные части энергии $\frac{p}{\gamma}$ и h , то этими сечениями могут быть только f_1 на верхнем уровне и f_2 на нижнем уровне. В них мы предполагаем c_1 и c_2 постоянными и, следовательно, можем их выразить через $c_1 = \frac{Q}{f_1}$ и $c_2 = \frac{Q}{f_2}$. Поэтому, как и в случае „а“ мы получаем:

$$\frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{c_2^2}{2g}.$$

Рассмотрим движение в самых каналах. Предположим c_1 постоянным в перпендикулярном поперечном сечении верхнего канала и c_2 — в перпендикулярном поперечном сечении нижнего канала; тогда мы должны получить также постоянными в их поперечных сечениях $\frac{p_1}{\gamma} + h_1$ и $\frac{p_2}{\gamma} + h_2$ и соответственно равными h_1 и h_2 , так как атмосферное давление можно принять за нулевое. Таким образом получается:

$$\frac{c_2^2}{2g} = h_1 - h_2 + \frac{c_1^2}{2g} = H + \frac{c_1^2}{2g}. \quad (33)$$

Этот вывод, однако, совершенно противоречит опыту, так как известно, что во всякого рода сооружениях можно получить одинаковые или почти одинаковые скорости в верхнем и нижнем каналах, несмотря на значительное различие уровней H . Между тем, по уравнению (33) это возможно только при отсутствии разницы высот H . Кроме того, остаются неизвестными величины скоростей и расхода. Таким образом решение получается в конце концов неопределенным.

3. Предполагается, что поток, выйдя из трубы, сначала остается в виде цилиндрической струи с поперечным сечением f , окруженный неподвижной водой. Тогда в поперечном сечении f у выхода $c'_2 = \frac{Q}{f}$. Таким образом получается энергия движения

$$\frac{p'_2}{\gamma} + h'_2 + \frac{Q^2}{2gf^2}.$$

Но так как здесь струя окружена еще неподвижной водой, то вместо $\frac{p'_2}{\gamma} + h'_2$ можно подставить $\frac{p_2}{\gamma} + h_2$ или h_2 , так как p_2 обозначает атмосферное давление.

Таким образом в конечном поперечном сечении трубы получается энергия движения

$$H_2 = h_2 + \frac{Q^2}{2gf^2}.$$

Если считать ее равной энергии в верхнем канале, то следует:

$$h_2 + \frac{Q^2}{2gf^2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2g}.$$

Здесь можно вместо c_1^2 подставить $\left(\frac{Q}{f}\right)^2$, и тогда

$$Q = f \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = f \sqrt{2gH}. \quad (34)$$

Следовательно, получается формула, одинаковая с формулой истечения из отверстия. Таким образом в этом случае мы получаем скорость в поперечном сечении трубы и вместе с ней расход воды. Но и этот вывод не согласуется с данными опыта. Расход жидкости сильно зависит от длины, внутреннего диаметра и формы трубопровода и может составлять некоторую долю полученной выше величины.

с) Баланс энергии в реальных жидкостях

Полученное несоответствие между теорией и опытом приводит нас к выводу, что в установившемся движении реальной жидкости энергия потока теряется, т. е. превращается в форму энергии, которую мы до сих пор не принимали во внимание, а именно в теплоту. Так как технически мы ее не можем использовать, то можно рассматривать это превращение как потерю. Мы постараемся, по возможности меньше изменяя нашу формулировку, найти в установившемся движении такие области, в которых энергия постоянна, и затем установим разницу в величине энергии. Путем этого сравнения мы приходим к понятию баланса энергии между отдельными областями постоянной энергии. Между двумя областями 1 и 2 будет такой баланс:

$$H_1 - H_2 - V_{1-2} = 0. \quad (35)$$

Здесь V_{1-2} — потеря энергии на пути от области 1 до области 2, уменьшающая энергию от H_1 до H_2 .

Таким образом попрежнему мы применяем метод начальной и конечной области движения. При этом большей частью можно выразить скорость через расход и поперечное сечение. Если удастся выразить потерю через скорость c , а следовательно, через расход воды Q , то мы получим уравнение (35) в форме функции $F\left(Q, \frac{p}{\gamma} + h\right) = 0$. Из него мы можем вычислить или расход по данным разностям давлений и высот, или — по данным расходу и разности высот вычислить разность давления. Таким образом исчезают, с одной стороны, неопределенности поставленных проблем, с другой стороны, выводы могут быть сравнены с опытом и приведены в какую-то систему, хотя и очень приближенную. Остается еще выяснить, что надо понимать под давлением жидкости p ; этот вопрос разбирается в следующем разделе.

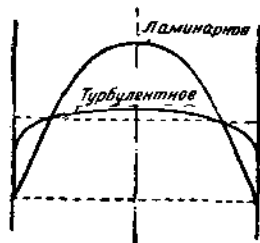
14. Основные свойства реальной жидкости

а) Ламинарное и турбулентное движение

В последнем разделе мы уже говорили о линиях тока и элементарных струйках при установившемся движении реальной жидкости и приняли, что определенным закономерным расположением пучков

кривых движение жидкости вполне определяется. Опыт показывает, что в действительности такое определенное расположение трубок тока бывает только в сравнительно редких случаях.

Если мы осторожно введем в трубку с медленно текущей жидкостью небольшое количество жидкой краски, то она, не считая некоторых возмущений при входе, вытянется по трубке прямой нитью, параллельной оси. Эта нить в целом неподвижна и неизменна. Если скорость течения увеличивается, то при переходе определенной величины скорости, которая зависит от диаметра трубки и от степени вязкости жидкости, характер движения совершенно меняется; окрашенная нить делается беспокойной, расплывается, и скоро вся



Фиг. 24. Распределение скоростей ламинарное и турбулентное.

жидкость в трубке кажется окрашенной. Первое состояние движения называется ламинарным (от латинского *lamina* — слой, так как движение протекает определенными слоями), второе — турбулентным (беспокойное, вихреобразное). Во втором случае отдельные частицы проходят гораздо более сложные пути, чем в первом. Однако считают, что второй вид движения состоит из основного движения, совершающегося по определенно расположенным путям, и присоединяющихся к нему быстрых и маленьких колебаний. Строго говоря, такое движение никогда не

бывает установившимся, поэтому оно называется мнимоустановившимся, в этом случае вычисленные скорости элементарных струек являются установившимися средними величинами. Основное движение, таким образом, является установившимся¹.

Систематические наблюдения движения в трубах показали, что в каждой трубе при движении жидкости со скоростью, меньшей вышеупомянутой граничной, устанавливается ламинарное течение, и даже, что течение снова становится ламинарным по миновании преград и т. п., которые сделали его турбулентным. Выше этой границы оно может остаться ламинарным, если устранить все нарушающее движения; если же оно турбулентно, то и остается турбулентным. Это характерное свойство относится по современным взглядам ко всем практически встречающимся течениям, а не только к течениям в трубе. Таким образом течение жидкости, безгранично простирающейся во все стороны вокруг погруженного в нее препятствия, может быть ламинарным или турбулентным.

б) Влияние стенок. Распределение скоростей в ламинарном и турбулентном движениях

Тщательные измерения и теоретические выводы показали, что в большинстве практических случаев жидкость прилипает к стенкам, следовательно, скорость здесь равна нулю или равна скорости стенки. Это явление добавляется как еще одно условие к погра-

¹ Шиллер. Экспериментальные исследования проблемы вихревых движений (Schiller, Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem) ZAMM, T. 21, стр. 436.

ничным условиям идеальной жидкости. Оно указывает на наличие и касательных усилий в реальной жидкости у твердых стенок, которые отсутствуют у идеальной жидкости. В отдельных случаях прилипание к стенке не наблюдается, но мы этого рассматривать не будем¹.

При турбулентном движении по мере удаления от стенок в свободной жидкости скорость увеличивается очень быстро, при ламинарном — гораздо медленнее. В связи с этим распределение скоростей в свободном течении при турбулентном движении более равномерное, чем при ламинарном. На фиг. 24 изображается распределение скоростей в трубе при ламинарном и турбулентном течениях. Надо помнить, что при турбулентном течении изображенные величины являются скоростями основного движения, следовательно, временными средними величинами скоростей.

с) Закон внутреннего трения жидкости. Изменение понятия о давлении в жидкости

Ламинарное течение дает возможность проверки закона о внутреннем трении в жидкости, установленного Ньютоном. В идеальной жидкости передача силы между отдельными частицами происходит только давлением, которое имеет в каждой точке определенную величину, не зависящую от направления и направленную перпендикулярно к любому элементу поверхности, ограничивающей частицу; оно действует на частицу, как напряжение сжатия.

Опыт показывает, что в реальной жидкости существуют еще другие силы. Эти силы возникают от взаимодействиядвигающихся один относительно другого слоев жидкости. Таким образом положение, высказанное в § 1, что взаимное скольжение жидкости не требует никакого усилия, оказывается неправильным. Реальная жидкость сопротивляется не только давлению, но и сдвигу. Вследствие этогодвигающиеся один относительно другого слои воздействуют друг на друга таким образом, что слой,двигающийся быстрее, тормозится слоем,двигающимся медленнее, а этот в свою очередь ускоряется. Это свойство реальной жидкости называется вязкостью. Так как она проявляется только у движущейся жидкости, то ее можно поставить в связь с разностью скоростей соседних слоев. Поэтому принимается как элементарный закон, что между двумя соседними слоями,двигающимися один относительно другого на расстоянии dn , возникает срезающее усилие (касательный сдвиг) на единице площади, которое пропорционально величине падения скорости $\frac{\partial c}{\partial n}$ в направлении, поперечном движению, откуда следует:

$$\tau = \eta \left| \frac{\partial c}{\partial n} \right|, \quad (36)$$

где η означает коэффициент вязкости. Он имеет размерность силы,

¹ Такие явления наблюдают у смазывающих веществ (ср. фон-Карман, Трение поверхностей, Труды Инсбрукского конгресса, Берлин, Ю. Шпрингер, 1924. A. Karman, Oberflächenreibung).

отнесенной к единице площади и к единице падения скорости, следовательно,

$$[\eta] = \text{кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-3}. \quad (37)$$

Наличие напряжения сдвига ведет к изменению понятия давления жидкости. Так как в уравнениях § 1 к силам, действующим на маленький тетраэдр, присоединяются также напряжения сдвига, то заключение, выведенное для идеальной жидкости, что нормальные напряжения в данной точке одинаковы по величине во всех направлениях, будет неверным. Под давлением жидкости теперь приходится подразумевать среднюю величину нормальных напряжений, которые действуют в одной точке в различных направлениях. Техника измерения в настоящее время не дает никакой возможности установить, дает ли показание давления среднюю величину или какую-либо другую. Конечно, это замечание имеет значение только для двигающейся жидкости, так как в неподвижной жидкости нет никаких напряжений сдвига, и нормальное напряжение в какой-либо точке одинаково во всех направлениях. При измерении давления в движущейся жидкости современными методами — помощью пьезометров — надо всегда следить за тем, чтобы отверстие инструмента для измерения было перпендикулярно к направлению скорости, следовательно, измерение не может быть произведено в разных направлениях (ср. также § 3). В общем выход заключается в том, что показания таких пьезометров принимаются за величину давления жидкости (также и давления на стенки); при этом исходят из того положения, что различие в давлениях незначительно.

д) Проверка закона трения при движении по круглой трубе

Данный уравнением (35) закон трения может быть непосредственно применен только в том случае, если падение скорости идет в одном направлении и происходит от действия сил трения¹. Например, это бывает при установившемся ламинарном движении в прямой круглой трубе, которое мы сейчас и рассмотрим (фиг. 25). Теоретически для идеальной жидкости возможно любое распределение скоростей. Если мы ограничимся рассмотренными в § 10 течениями с постоянной энергией (приток из большого верхнего водоема), то по всей трубе будет $\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} = \text{const}$. Если мы к тому же сделаем весьма близкое к действительности предположение, что движение происходит прямолинейно и параллельно оси, то поперек течения не может существовать никакого падения $\frac{p}{\gamma} + h$ [уравнение (22b)], следовательно, оно должно быть постоянно в поперечном сечении, перпендикулярном к оси, так как в каждой элементарной струйке по условию непрерывности c должно быть постоянно, то $\frac{p}{\gamma} + h$ тоже должно быть постоянно. Или: $\frac{p}{\gamma} + h$ по-

¹ Обобщение этого закона для двухразмерного и трехразмерного потока в этом томе не может быть рассмотрено.

стоянно по всей трубе, т. е. давление распределено статически. Таким образом для теории ламинарного движения вязкой жидкости мы оставим допущение о прямолинейном движении, параллельном оси, со статическим распределением давления в поперечном сечении. Тогда под p надо, в сущности, понимать нормальную составляющую давления на элемент поверхности поперечного сечения. Мы будем ее обозначать кратко p и примем ее как тождественную с пьезометрическим давлением. Сумма $\frac{p}{\gamma} + h$ меняется при переходе от одного поперечного сечения к другому. Мы рассмотрим два поперечных сечения, расположенных на расстоянии l и выведем уравнение движения для объема жидкости, ограниченного двумя цилиндрами радиусом x и $x + dx$ и лежащего между этими сечениями.

Скорость c является функцией x . На торцевую сторону кольцевого цилиндра действует по направлению движения сила

$$(p_1 - p_2) 2x\pi dx;$$

кроме того, действует составляющая силы, величина которой

$$2x \cdot \pi \cdot dx \cdot l \cdot \gamma \cdot \sin \alpha = 2x \cdot \pi \cdot dx \cdot \gamma \cdot (h_1 - h_2).$$

Если мы примем c увеличивающимся вместе с r , то движению изнутри противодействует сила

$$2\pi \cdot x \cdot l \cdot \eta \frac{dc}{dx},$$

а снаружи действует сила

$$2\pi (x + dx) l \eta \left(\frac{dc}{dx} + \frac{d^2c}{dx^2} \cdot dx \right).$$

Равнодействующая этих двух сил будет:

$$2\pi l \left[x \frac{d^2c}{dx^2} + \frac{dc}{dx} \right] dx.$$

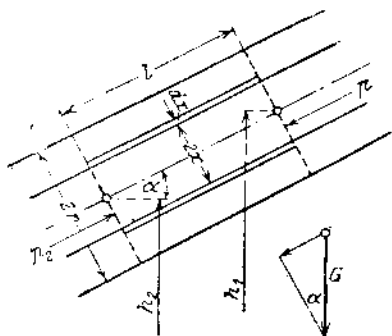
Сумма всех действующих сил будет:

$$2\pi \cdot x \cdot dx [p_1 - p_2 + \gamma (h_1 - h_2)] + 2\pi \cdot l \cdot \eta \cdot dx \left(x \frac{d^2c}{dx^2} + \frac{dc}{dx} \right).$$

Это выражение должно равняться нулю при установившемся движении.

Отсюда получается дифференциальное уравнение для распределения скорости:

$$\eta \left(\frac{d^2c}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dc}{dx} \right) = -\gamma \frac{\frac{p_1}{\gamma} + h_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2 \right)}{l}, \quad (38)$$



Фиг. 25. Ламинарное течение в прямой круглой трубе.

При интегрировании по x :

$$c = \frac{\gamma}{4\eta} \frac{\frac{p_1}{\gamma} + h_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2\right)}{l} (r^2 - x^2). \quad (39)$$

Здесь принято в качестве пограничных условий $c=0$ при $x=r$ (прилипание к стенке). Если труба повсюду обладает одинаковыми свойствами, то

$$\frac{\frac{p_1}{\gamma} + h_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2\right)}{l}$$

является постоянной, представляющей собой падение напора в трубе, причем оно состоит из падения геодезического напора и падения давления по трубе. Таким образом мы пишем:

падение напора в трубе:

$$J = \frac{\left(\frac{p_1}{\gamma} + h_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2\right)}{l} \quad (40)$$

или также

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\gamma l} + \sin \alpha. \quad (41)$$

Тогда получаем

$$c = \frac{\gamma}{4\eta} \cdot J \cdot (r^2 - x^2). \quad (42)$$

Если мы возьмем $\int_0^r 2x \cdot \pi dx \cdot c$, то получим количество воды, протекающей по трубе; оно будет:

$$Q = \frac{\pi \cdot \gamma}{8\eta} J \cdot r^4. \quad (43)$$

Эти результаты совпадают с наблюдениями Пуазейля над капиллярными трубками¹.

Это одно из главных доказательств правильности элементарного закона трения.

Если мы определим среднюю скорость $c_m = \frac{Q}{r^2 \pi}$, то получим:

$$c_m = \frac{\gamma}{8\eta} \cdot J \cdot r^2; \quad J = \frac{8\eta}{\gamma} \frac{c_m}{r^2}. \quad (44)$$

В силу сказанного падение напора в трубе при ламинарном течении пропорционально скорости течения, и это согласуется с наблюдениями Пуазейля.

При турбулентном движении такая зависимость не имеет места. Падение напора J , нужное для продвижения жидкости по трубе, увеличивается значительно быстрее, чем скорость в первой степени.

Опыты с ламинарным течением в трубе могут быть использованы для определения коэффициента вязкости. Распределение ско-

¹ Пуазейль, Мемуары, т. 19 стр. 518, Париж 1846. Poiseuille, Mémoire présentés par divers savants.

ростей в трубе с ламинарно протекающей жидкостью — параболическое, с максимальной величиной скорости

$$c_{\max} = \frac{\gamma}{4\eta} \cdot J r^2 = 2c_m. \quad (45)$$

Следовательно, отношение ее к средней скорости равняется 2:1. Этот результат подтвержден экспериментом. При турбулентном движении картина скоростей характеризуется очень быстрым возрастанием скорости у стенок, более равномерным распределением внутри и меньшим отношением максимальной скорости к средней (ср. фиг. 24). Мизес указал¹, что все изменения картины скоростей при турбулентном движении можно объяснить, допуская существование скоростей, дополнительных к средней скорости, причем добавочные скорости составляют только несколько сотых от средней скорости.

До сих пор еще не выяснено достаточно, почему течение при известных условиях переходит из ламинарного в турбулентное, почему устойчива в одном случае одна форма движения, в другом случае — другая. Теория (см. ниже § 15) дает, правда, общую форму критерия, при помощи которого можно определить, имеем ли мы дело с ламинарным или турбулентным движением, но для определения критической величины, которая характеризует переход одной формы движения в другую, нам приходится пользоваться эмпирическими данными.

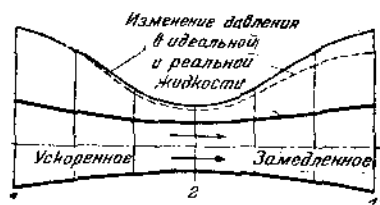
е) Различие между ускоренными и замедленными течениями

В примере „а“ § 13 получилось во многих случаях почти полное совпадение наблюдений с теорией идеальной жидкости, что облегчалось и дополнялось правдоподобностью сделанных предположений о распределении скоростей. Потеря энергии в рассмотренных случаях была чрезвычайно мала. Это течение характеризовалось малыми скоростями вдоль стенок на протяжении большого участка трубы и большим ускорением тоже вдоль стенок, в конце участка. Соответственно этому, как показывает наблюдение, ускоренное течение в левой части трубы (фиг. 26) имеет незначительную потерю, равную приблизительно нескольким сотым от падения давления $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$ соответствующего возрастанию скорости идеальной жидкости. Эта потеря меньше, чем в трубе такой же длины, но с постоянным поперечным сечением, подобранном так, что квадрат скорости в нем приблизительно равен средней скорости в суженном сечении. Совершенно другая картина получается при замедленном течении, т. е. в расширяющейся части трубы. Здесь мы получаем потерю, приблизительно в 10 раз большую, чем в первом случае, т. е. мы теряем из соответствующего идеальной жидкости увеличения давления $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$, самое меньшее 15—20%, а в неблаго-

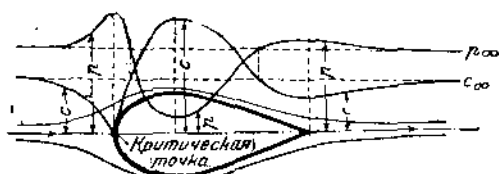
¹ Мизес, Элементы гидромеханики, ч. 1, Тойбнер, 1924. (Von Mises, „Elemente der Hydromechanik“).

приятных случаях и больше. Одновременно наблюдается отставание жидкости от стенок трубы и образования вихрей около них.

Совершенно аналогичную картину мы получаем в жидкости, растекающейся во все стороны, при обтекании ею погруженного в нее неподвижного предмета. На фиг. 27, которая изображает (несколько преувеличенно тупое) тело дирижабля, нарисован слой движущейся жидкости, еще имеющий значение для идеальной жидкости, непосредственно прилегающей к телу. Наряду с этим изображены в виде диаграммы над осью симметрии скорость и давление воздуха в центральных линиях тока, идущих как перед телом



Фиг. 26. Ускоренное и замедленное течение в трубе.



Фиг. 27. Ускоренное и замедленное течение вокруг погруженного тела.

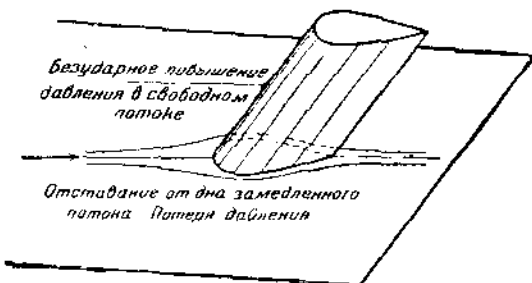
и позади него, так и вдоль тела. В передней критической точке (у носа) v равняется нулю; у мидельшпангоута (главного шпангоута, — самая широкая часть корабля) скорость достигает максимальной величины и падает у заднего конца (у кормы) ниже величины c_∞ , — скорости течения на далеком расстоянии от тела, и затем снова приближается к ней. Соответственно увеличивается давление у носа до максимальной величины; избыток давления над атмосферным давлением на большом расстоянии называется скоростным напором

и имеет величину $q = \frac{\gamma}{g} \frac{c_\infty^2}{2}$. У главного шпангоута давление минимальное, у кормы оно снова выше атмосферного и затем постепенно к нему приближается. Давления (выше атмосферного и ниже атмосферного) распределяются так, что не возникает никакой равнодействующей силы на теле. Так как в идеальной жидкости не существует никакого трения о стенки, то тело не оказывает никакого сопротивления потоку воздуха. В реальной жидкости частицы за главным шпангоутом находятся совершенно в другом взаимодействии, чем частицы перед ним. Перед шпангоутом почти нет никакой разницы во взаимодействии частиц реальной и идеальной жидкости, в особенности, в отношении давления на центральной линии перед носом. Следовательно, в свободной жидкости при гладкой поверхности давление от носа до главного шпангоута почти вполне совпадает с давлением в идеальной жидкости; напротив, в замедляющемся течении вдоль стенки за шпангоутом линии тока и изменение давления обнаруживают значительные отступления даже при гладкой поверхности. Появляется отставание жидкости от стенки, и повышение давления происходит в меньшей мере, чем в идеальной жидкости. Таким образом получается сила, действующая на тело в направлении движения, или сопротивление,

которое оно оказывает течению. Сопротивление в целом зависит от шероховатости поверхности и формы тела (фиг. 27), в первую очередь от формы части его за главным шпангоутом. Поэтому говорят о сопротивлении трения и сопротивлении формы. Точно и принципиально отделить их друг от друга нельзя, но было бы приблизительно верно при измерении общего сопротивления и при определении распределения давления при помощи отверстий на поверхности обозначать силу, вычисленную посредством интегрирования элементарных давлений по поверхности как сопротивление формы, а остаток — как сопротивление от трения.

Совершенно аналогичными будут явления около бесконечно длинной цилиндрической сваи, обтекаемой бесконечно широким потоком. Здесь также происходит повышение давления с передней стороны. Однако, если течение одностороннее, например, ограничено плоскостью, перпендикулярной к направлению сваи, то сильное повышение давления у носа вызывает явления отставания вдоль плоскости (фиг. 28) ¹.

В рассмотренных случаях движения жидкости ясно сказывается влияние особенных явлений у стенок; получается впечатление, что явление в реальной жидкости происходило бы, как в идеальной, если бы не было стенок, и чем дальше находится жидкость от стенок (неподвижных илидвигающихся), тем более приближается ее поведение к поведению идеальной жидкости.



Фиг. 28. Односторонне ограниченное обтекание сваи или крыла.

15. Отношение теории к опыту

а) Законы подобия

Многосторонность явлений в опытах заставляет нас искать принцип закономерности, который позволил бы связать явления, наблюдаемые в каком-нибудь случае, с явлениями в каком-либо другом подобном случае. Явления течения различных жидкостей могут быть подобными тогда, когда подобны внешние условия, т. е. когда геометрически подобны пространства, где происходит течение. Следовательно, подобными могут быть течения в прямых круглых трубах или в прямых прямоугольных трубах, когда прямоугольные поперечные сечения имеют одинаковое отношение сторон. Если трубы изогнуты, то еще должно быть одинаковое во всех случаях отношение радиуса кривизны оси трубы к какому-нибудь размеру поперечного сечения. Если вопрос касается обтекания тел, погруженных в жидкость, то эти тела должны быть геометрически по-

¹ На это явление, насколько мне известно, впервые обратил внимание Феттингер. (См. Föttinger, Jahrb. Schiffsbaut. Ges. Bd. 25. 1924).

добны. Мы только тогда будем называть течения подобными, если подобна и картина линий тока и распределение скоростей (сделать указание на распределение скорости необходимо, потому что в двух движениях с геометрически подобными картинками течения возможны различные распределения скоростей перпендикулярно к линиям тока). Какая-либо длина „подобного тела“ должна находиться в определенном соотношении к длине самого тела. Это подобие при турбулентном движении, строго говоря, должно было бы идти до самых мелких подробностей, однако, так как турбулентное движение не стационарно, то удовлетворяются часто установлением подобия основного движения. Таким образом принимают за скорость основного стационарного течения в какой-либо точке среднюю величину всех скоростей турбулентного типа течения, которые имеются в данной точке в данное время, и принимают линии тока, происходящие от этих скоростей, за меру подобия картин течения и распределения скоростей. В подобных течениях и ускорения в соответствующих пунктах находятся в постоянном соотношении и имеют одинаковые направления. То же самое можно сказать о силах инерции движущихся частиц. С этими силами инерции должны находиться в равновесии действующие на частицы внешние силы. Для подобия необходимо, чтобы многоугольники сил, в которых силы инерции являются замыкающими сторонами, сами были между собой подобны для соответствующих мест обоих случаев. Размеры рассматриваемых частиц должны быть между собой в одинаковых соотношениях, так же как и характерные для обоих случаев длины. Теперь мы различаем два случая:

1. Закон подобия Рейнольдса.

Внутри однородной жидкости явления происходят так, как будто силы тяжести не существует; она только вызывает добавочное статическое распределение давления, которое может быть дополнительно прибавлено к найденному динамическому давлению. Поэтому мы рассмотрим сейчас два движения в двух различных жидкостях 1 и 2, которые мы предполагаем подобными, и исследуем как действующие силы, так и силы давления жидкостей p и напряжения трения τ ; в дальнейшем учтем силы инерции. Давление жидкости и напряжение трения мы измеряем высотой столба исследуемой жидкости. Если мы возьмем какое-либо место в области 1-го течения, то там силы давления на частицу пропорциональны $l_1^2 \cdot h_1 \cdot \gamma_1$, так как поверхность рассматриваемой частицы пропорциональна квадрату какой-либо выбранной длины. При вычислении сил инерции мы предположим установившееся движение; устано-

вившиеся ускорения относятся к типу $c \frac{\partial c}{\partial s}$, или $\frac{\partial (\frac{c^2}{2})}{\partial s}$, следовательно, они равны квадрату скорости, деленной на длину. Таким образом если c_1 является характерной скоростью в явлении 1, то ускорение может быть положено пропорциональным $\frac{c_1^2}{l_1}$. Масса частиц рав-

няется $\frac{\gamma_1}{g} \cdot l_1^3$, следовательно, сила инерции $= \frac{\gamma_1}{g} \cdot l_1^3 \cdot \frac{c_1^2}{l_1}$, или $\frac{\gamma_1}{g} \cdot l_1^2 \cdot c_1^2$. Общая сила трения пропорциональна напряжению трения и поверхности, следовательно, $\eta_1 \cdot \frac{c_1}{l_1} \cdot l_1^2 = \eta_1 \cdot c_1 \cdot l_1$. Таким образом силы в соответствующих местах должны относиться друг к другу, как

$$\frac{l_1^2 \cdot h_1 \cdot \gamma_1}{l_2^2 \cdot h_2 \cdot \gamma_2} = \frac{\frac{\gamma_1}{g} \cdot l_1^2 \cdot c_1^2}{\frac{\gamma_2}{g} \cdot l_2^2 \cdot c_2^2} = \frac{\eta_1 \cdot c_1 \cdot l_1}{\eta_2 \cdot c_2 \cdot l_2} \quad (46)$$

Таким образом получаются два уравнения, которые будут одновременно выполнены, если два процесса течения подобны: получается, во-первых:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad (47)$$

а во-вторых:

$$\frac{\gamma_1 \cdot l_1 \cdot c_1}{\gamma_2 \cdot l_2 \cdot c_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \text{ или } \frac{l_1 \cdot c_1}{\eta_1} = \frac{l_2 \cdot c_2}{\eta_2} \quad (48)$$

$$\frac{\gamma_1}{g} = \frac{\gamma_2}{g}$$

частное $\frac{\eta}{\gamma}$ называют кинематическим коэффициентом вяз-

кости и обозначают ν . Размерность ν выражается: $\text{кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-2} = \text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$. Отношение $\frac{l \cdot c}{\nu}$ называется рейнولدсовым

числом и обозначается через R в честь Осборна Рейнольдса, который первый установил этот закон подобия¹. Число это измеряет отношение сил инерции к силам трения и является, таким образом, числом безразмерным, величина которого зависит от выбора характерных длин и скоростей. Если трение отсутствует, то значения давления в соответствующих точках подобных полей течения находятся в таком же отношении, как квадраты скоростей. При наличии трения добавляется как новая зависимость равенство числа Рейнольдса для обоих явлений. Оно является, таким образом, условием для гидромеханического подобия обоих явлений. Резюмируем:

Два течения, которые происходят в условиях, геометрически подобных между собою, и в которых действия сил трения и инерции являются главными, подобны, если для обоих одинаково рейнولدсово число, являющееся функцией характерной длины l , характерной скорости c и кинематического коэффициента вязкости ν по формуле

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu} \quad (49)$$

¹ О. Рейнольдс (O. Reynolds), Phil. Trans., т. 177, стр. 17, Лондон 1887.

Тогда пьезометрические высоты в соответствующих точках или также разности пьезометрических высот между соответственно расположенными точками пропорциональны квадратам скоростей. Коэффициент пропорциональности для вычисления разности пьезометрических высот согласно выражению $h = \zeta \cdot c^2$ является постоянным только в том случае, если рейнольдсово число постоянно, другими словами, ζ является его функцией, выражение принимает вид: $h = \zeta(R) \cdot c^2$.

Так как h измеряется метрами, то лучше написать:

$$h = \zeta(R) \cdot \frac{c^2}{2g}, \quad (50)$$

где ζ есть отвлеченное число. Конечно, ζ зависит также от внешних геометрических условий, т. е. от общих форм течения. Обе зависимости исследуются в каждом отдельном случае.

Так как ламинарные течения никогда не могут быть подобны турбулентным (сравни различное распределение скорости в трубе), то величина R является критерием для отличия движения ламинарного от турбулентного. Переход из одной формы течения в другую характеризуется поэтому определенной величиной R , так называемым критическим рейнольдсовым числом $R_{кр}$. Величина его для каждого отдельного вида течения зависит от того, какая длина взята как характерная из геометрического расположения и какая скорость из картины течения. При твердо установленных характерных данных $R_{кр}$ для каждого вида течений имеет определенную величину. Закон подобия Рейнольдса применим для всех течений жидкости в закрытых каналах и трубопроводах и для всех течений мимо погруженного тела. В первом случае он служит для сравнения падения давления, которое происходит в трубопроводах, во втором случае — для сравнения сил, которые действуют на погруженное тело, т. е. для определения их путем испытания моделей¹.

Эти силы пропорциональны поверхностям, давлениям, действующим на эти поверхности, и напряжениям трения. Поэтому можно все силы, действующие на погруженное тело, выразить в форме $h \cdot \gamma \cdot F$, где $h = \zeta(R) \frac{c^2}{2g}$; дальше получаем:

$$P = c_p \cdot F \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c^2}{2}, \quad (51)$$

где F какая-нибудь характерная поверхность; для величин $\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c^2}{2}$ выбирают часто напорное давление течения q , что обязательно в тех случаях, когда под c подразумевается скорость однородного поля, имеющаяся в большом отдалении от тела и не нарушенная им. В этом случае около напорной точки тела имеется по сравнению с окружающей средой избыточное давление. Наиболее известными примерами применения формулы (51) являются определения коэффи-

¹ Подробная теория испытания моделей выходит за пределы рамок этой книги; см. например, Weber, Ähnlichkeitsmechanik. Hütte, 25 изд., т. I.

циентов подъемной силы и сил сопротивления для профилей аэропланов в лаборатории в Геттингене ¹.

2. Закон подобия Фрауда

Этот закон принимает во внимание взаимодействие инерции и тяжести, последнюю вместо трения. Можно сейчас же написать следующие уравнения (ход рассуждения такой же, как и выше):

$$\frac{l_1^2 \cdot h_1 \cdot \gamma_1}{l_2^2 \cdot h_2 \cdot \gamma_2} = \frac{l_1^2 \cdot \gamma_1 \cdot c_1^2}{l_2^2 \cdot \gamma_1 \cdot c_2^2} = \frac{l_1^3 \cdot \gamma_1}{l_2^3 \cdot \gamma_2} \quad (52)$$

следовательно,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2} \text{ и } \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{l_1}{l_2} \quad (53)$$

Явления бывают подобны в том случае, если величина $\frac{c}{\sqrt{l}}$ в обоих случаях одинакова. Закон этот находит применение при исследовании тех сопротивлений корабля, которые происходят от образования волн.

в) Специальные теории ²

Введение элементарных сил трения в дифференциальные уравнения движения жидкости ведет к так называемым уравнениям Навье-Стокса. Они так сложны, что для приведенных случаев до сих пор не решены. Только путем ряда упрощений удается получить приближенное решение. Один из видов решения заключается в том, что в уравнении опускают члены, зависящие от ускорения, т. е. пренебрегают влиянием сил инерции. Физически это соответствует течениям с очень малыми рейнольдсовыми числами ($R \rightarrow 0$). Возможно это только в том случае, когда движение настолько медленно, что вызванные изменением скоростей по величине и направлению силы инерции бесконечно малы сравнительно с силами трения. В только что рассмотренном случае, ламинарного течения в круглой трубе силы инерции исчезают совершенно, и задача решается вполне точно. Во многих других случаях ламинарного движения это решение является достаточно приближенным. Трудность иногда заключается в том, что не во всех областях течения силы инерции могут быть отброшены по сравнению с силами трения. В отдельных случаях эта трудность устраняется тем, что члены инерции принимаются во внимание частично ³.

Важный в техническом отношении случай мы имеем при трении смазочных масел в простых и упорных подшипниках. Здесь

¹ Результаты испытания аэродинамической лаборатории, Геттинген, I и II выпуски, изд. Ольденбурга.

² Здесь даются только краткие указания. См. Geiger u. Scheel, Handbuch der Physik, Bd. VII, Kap. 2., Berlin, 1926.

³ См. работы Стокса и к ним примыкающие работы Озина (Stokes u. Oseen, Math. and Phys. Papers, т. I. стр. 75), также Kármán u. Levi-Civita, 1924, Hydro u. Aerodynamik.

при полном пренебрежении инерцией теория дает выводы, которые, по крайней мере, с принципиальной стороны подтверждаются опытом. Теория движения грунтовых вод развивается также при полном пренебрежении инерцией и приводит к практически верным выводам ¹.

Но у большинства важных в теоретическом отношении течений силы инерции имеют большое значение и действие вязкости незначительно, следовательно, рейнольдсовы числа велики ($R \rightarrow \infty$). Можно было бы думать, что, приняв $\nu = 0$, мы сможем воспользоваться уравнениями идеальной жидкости, считая, что реальная жидкость приближается к ней по своим свойствам. Однако это не так, и не должно нас удивлять, если мы вспомним, что идеальная жидкость не отвечает самому существенному условию действительности: прилипанию к твердым стенкам. Это свойство должно изменять форму течения идеальной жидкости прежде всего в непосредственной близости стенок и можно поставить вопрос, как далеко распространяется влияние стенок и как изменяются в зависимости от этого формы течения. В связи с этим надо отметить тот факт, что формы течения идеальной жидкости, не учитывая близость твердых стенок, все-таки являются механически возможными формами и для вязких жидкостей ².

Теория жидкости, обладающей небольшим трением, созданная Прандтлем в 1904 г., учитывает влияние твердых стенок ³.

Эта теория известна теперь под именем прандтлевской теории пограничного слоя. Она дает дифференциальное уравнение пограничного слоя, решение которого упрощается благодаря данным, получаемым из непосредственного наблюдения.

Другим путем ищет решения Озин. Он в обычном дифференциальном уравнении вязкой жидкости Навье-Стокса опускает на основании чисто математических соображений некоторые члены инерции и решает полученные уравнения для пограничных условий, а именно прилипания к стенке, сначала для конечной величины коэффициента вязкости, а затем делает переход к пределу, принимая вязкость равной 0. Он приходит к интересному, совпадающему с действительностью выводу, что течение перед телом, погруженным в жидкость, совпадает с течением идеальной жидкости, позади же его оно существенно отличается от течения идеальной жидкости. Инженер предпочтет прандтлевскую теорию озиновской за ее большую наглядность. Теория пограничного слоя дает то большое преимущество, что она дает ясное физическое представление, которое позволяет предсказать качественно ход явлений вплоть до отдельных подробностей ⁴.

¹ Уже цитиров. руководство по физике, изд. Geiger u. Scheel, Bd. VII, Kap. 2.

² См. наглядное доказательство этого у Бетца, „ZVDI“, 1925, стр. 9.

³ Прандтль Л. Труды Интернац. мат. съезда, Гейдельберг, 1904; Лейпциг, В. Г. Тейблер или также четыре статьи о гидродинамике и аэродинамике Прандтля и Бетца; см. кроме того, работы Кармана и Польгаузена в „Z. ang. Math. u. Mech.“, т. I, 1921, тетрадь 4.

⁴ Ср., например, объяснение эффектов Магнуса, данных Феттингером и Бетцом с помощью теории пограничного слоя. Бетц и Феттингер, Новые основные положения теории пропеллера, Jahrb. Schiffsbaut. Ges., 1918.

с) Прандтлевская теория пограничного слоя¹

Основная идея теории заключается в том, что можно не принимать во внимание трения там, где нет большого различия в скоростях или нет тормозящего действия трения. Оказывается, что форма течения идеальной жидкости является первоначальным состоянием, которое немедленно меняется в большей или меньшей степени при действии самого незначительного трения, вызванного твердыми стенками. Если вязкость невелика и путь вдоль стенки не очень длинный, то уже на очень незначительном расстоянии от стенки скорость будет такая же, как в идеальной жидкости. Существует очень тонкий слой, где происходит очень резкий переход от скорости у стенки (при неподвижных стенках равной 0) к скорости в свободной жидкости и где именно вследствие большого изменения скорости проявляется значительное действие трения. Распределение давления жидкости у стенки зависит от свободного течения. Однако самым важным является то, что в определенном месте поток жидкости отделяется от стенки. Необходимым условием этого является увеличение давления по направлению течения (вниз по течению). Физически это можно объяснить таким образом: при движении идеальной жидкости происходит преобразование скоростной энергии в энергию давления, переходные же слои у стенки теряют большую часть своей скорости благодаря тормозящему действию трения и поэтому не могут проникнуть в область высшего давления. Они отступают от нее в сторону. Таким образом сразу становятся понятными различия свойств ускоренного и замедленного движений. Влияние трения на течение в пограничном слое и положение точки отделения от стенки можно вычислить, если знать распределение давления пограничного слоя, отделенного от свободной жидкости. Для приближенного вычисления можно взять распределение давления для идеальной жидкости и определить, таким образом, место отставания для начальной стадии движения. Однако позже благодаря повторяющемуся отставанию возникают вихри, которые проникают в свободное течение и значительно его изменяют, в силу чего изменяется повышение давления у стенки, причем мы не знаем точно, каким образом. Место отставания передвигается все больше вверх по течению. В конечном состоянии мы различаем три области течения: во-первых, внешняя область, жидкость которой не подвергается действию стенок и движется, как идеальная жидкость; вторая область — непосредственно около стенок; в ней происходит переход от прилипания к стенке к скорости внешней области. Третья область — это область с сильным вихревым движением. Положения места отставания в сильной степени влияют на величину завихренной области, на количество движения, перешедшее в единицу времени в вихревое, и на сопротивление тела движению. Если тело с острыми ребрами, то отставание около них будет непрерывное. Вообще же место отставания будет различно для разных состояний движения, отличающихся

¹ Последующее изложение в общем соответствует оригинальному изложению Прандтля (цит. ранее) см. также Руководство физики, т. VII, гл. 2.

между собой величиной скорости. При этом является решающим, какое движение происходит в самом пограничном слое — ламинарное или турбулентное.

16. Численные значения потерь энергии ¹

1. Движение в закрытых трубах и каналах

а) Гладкая прямая ² труба с постоянным круглым поперечным сечением

Геометрическое подобие между отрезками труб будет соблюдено при равных отношениях $\frac{l}{d}$ (l — длина, d — диаметр). От этого отношения должен прежде всего зависеть коэффициент сопротивления. Так как здесь нет никаких оснований к тому, чтобы один отрезок трубы отличался по своим свойствам от другого, то ζ должен зависеть от l линейно, но так как подобие требует, чтобы ζ зависело только от отношения $\frac{l}{d}$, то получается линейная связь между ζ и $\frac{l}{d}$; таким образом приблизительно $\zeta = \lambda_0 \frac{l}{d}$, где λ_0 является функцией рейнольдсова числа. Таким образом падение давления на длине l будет равняться:

$$\Delta h = \lambda_0 (R) \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g}, \quad (54)$$

$$c = \frac{Q}{F} = \text{средней скорости.}$$

Критическое число $R_{кр}$, которое дает нижний предел для возможности турбулентного движения, равняется

$$R_{кр} = \frac{cd}{\nu} = 2320. \quad (55)$$

Выше этого предела, если не будет каких-либо нарушений, возможно ламинарное движение, однако практически выше $R=3000$ ламинарного движения не бывает.

В ламинарной области, как уже выше указано, падение давления на длине l может быть вычислено из элементарного закона трения. Таким образом полученное уравнение (44) может быть написано еще и так:

$$J \cdot l = \Delta h = \frac{8\eta}{\gamma} \cdot \frac{c}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot l = 64 \cdot \frac{\nu}{c \cdot d} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{64}{R} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g}. \quad (56)$$

Таким образом в общей формуле (54) для ламинарного движения

$$\lambda_{0, \text{лам}} = \frac{64}{R}.$$

¹ Ср. также Hütte, 25-е изд., т. I, ст. 849; Физика, т. VII, гл. 2.

² Schiller (Шиллер, Экспериментальные исследования проблемы турбулентного движения, „ZAMM“, стр. 436, 1926.

Для турбулентного движения до сих пор еще не удалось вычислить удовлетворительным образом коэффициент, исходя из общих положений. Здесь приходится пользоваться опытными данными. По Блазиусу ¹ мы имеем:

$$\lambda_0 = 0,316 \sqrt[4]{\frac{1}{R}} \quad (57)$$

По новым исследованиям Якоба и Эрка ² закон Блазиуса дает для $R > 10^5$ слишком малую величину. По их опытам:

$$\lambda_0 = 0,00714 + 0,614 \cdot R^{-0,35} \quad (58)$$

б) Шероховатая прямая труба с постоянным круглым поперечным сечением

Шероховатость повышает сопротивление. Самый простой метод — измерять шероховатость отношением $\frac{s}{d}$, где s обозначает среднюю величину возвышения шероховатости на стенке, $\frac{s}{d}$ является характеристикой подобия и от него должно зависеть ζ , так же как и от $\frac{l}{d}$. Форма этой зависимости может быть получена только из опыта. При более точном рассмотрении изображать влияние шероховатости только одним числом недопустимо. Новые исследования Гопфа ³ и Фрома ⁴ различают шероховатости первого и второго рода, последняя называется также волнистостью. Для целей этой книги достаточно первое представление, которое ведет к формуле

$$\zeta = \zeta\left(R, \frac{s}{d}\right) \cdot \frac{l}{d}.$$

Она предложена Р. Мизесом (1924) ⁵ и, измененная соответственно нашим обозначениям, получается в таком виде:

$$\lambda = 0,0096 + 5,66 \sqrt{\frac{s}{d}} + 1,7 \sqrt{\frac{1}{R}} \quad \text{для больших } R. \quad (59)$$

Однако вблизи критических значений она будет:

$$\lambda = \left(0,0096 + 5,66 \sqrt{\frac{s}{d}}\right) \left(1 - \frac{2000}{R}\right) + 1,7 \sqrt{\frac{1 - \frac{2000}{R}}{R}} + \frac{64}{R}, \quad (60)$$

при этом можно по Мизесу принимать для s величины, указанные в табл. 1.

¹ Блазиус, Закон подобия, Blasius, Forschungsarbeiten, H. 131.

² Mitt. Forschungsarbeiten H. 267.

³ H o p f, Messung d. hydraul. Rauigkeit (Г о п ф., Измерение гидравлической шероховатости), „ZAMM, 1923“, стр. 339.

⁴ F r o m m, Strömungswiderstand in rauhen Röhren, (Ф р о м м, Сопротивление движению в шероховатых трубах), „ZAMM“, 1923, стр. 339.

⁵ Техническая гидромеханика, т. I.

Таблица 1

Величина шероховатости ε для различных поверхностей

Материал	$10^4 \varepsilon$ в см	$10^3 \sqrt{\varepsilon}$ в см
Стекло	0,2 — 0,8	0,45 — 0,9
Стеклопая труба	20 — 50	4,5 — 7
Асфальт, жестяная или литая труба	30 — 60	5,5 — 7,7
Чугун новый	100 — 200	10 — 14
Чугун, бывший в употреблении	250 — 500	16 — 22
Клепанный трубопровод	200 — 500	14 — 22
Бутовая кладка	2 000 — 4 000	45 — 63
Земляные стенки, откос из гравия	10 000 — 20 000	100 — 140

с) Прямой трубопровод с любым постоянным поперечным сечением ¹

Мы будем сравнивать поперечное сечение труб с круглым поперечным сечением при одинаковом отношении смачиваемого периметра к поперечному сечению, предполагая, что обе трубы имеют одинаковую величину сопротивления. Отношение у круглого сечения $\frac{F}{U} = d/4$. Это отношение называют также гидравлическим радиусом поперечного сечения, который будем обозначать r' . При круглом поперечном сечении он, следовательно, равен $r/2$. Сведением гидравлического радиуса формулы меняются следующим образом:

Число Рейнольдса:

$$R' = \frac{c \cdot r'}{\nu} = \frac{c \cdot d}{4 \cdot \nu} = \frac{R}{4}. \quad (61)$$

Критическое число Рейнольдса:

$$R'_{кр} = \frac{R_{кр}}{4} = 580. \quad (62)$$

Коэффициент сопротивления:

а) для ламинарного течения

$$\lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{16}{R} = \frac{16}{4R'} = \frac{4}{R'}; \quad (63)$$

б) для турбулентного течения по Блазиусу для гладких труб:

$$\lambda'_0 = \frac{\lambda_0}{4} = 0,0791 \sqrt[4]{\frac{1}{R}} = 0,0791 \sqrt[4]{\frac{1}{4R'}} = 0,056 \sqrt[4]{\frac{1}{R'}}; \quad (64a)$$

по Мизесу для шероховатых труб и $R' \gg 580$.

$$\lambda' = \frac{\lambda}{4} = 0,0024 + 0,708 \sqrt{\frac{\varepsilon}{r'}} + 0,425 \sqrt[3]{\frac{1}{R'}}. \quad (64b)$$

¹ См. также Шиллер (Schiller), О сопротивлении движению в трубах различных поперечных сечений и различной степени шероховатости, „ZAMM“, 1923, стр. 2.

д) В качестве средней величины для приближенных технических вычислений можно принимать для трубопроводов:

$$\Delta h = \frac{1}{50} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{200} \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{200} \cdot l \cdot \frac{U}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}. \quad (65)$$

е) Кольцевая щель

Вопрос о том, достаточно ли приближенное вычисление гидравлического радиуса для характеристики формы поперечного сечения, может быть выяснен на примере кольцевой щели. Этот пример чрезвычайно важен для рабочих колес. Если мы обозначим ширину щели между внешним цилиндром с диаметром D и внутренним цилиндром с диаметром d посредством $a = \frac{D-d}{2}$, то, произведя интегрирование уравнения (38), принимая во внимание пограничные условия:

$c = 0$ при $x = \frac{D}{2}$ и $x = \frac{d}{2}$ полагая $D \approx d$, получим для ламинарного движения:

$$\Delta h = \frac{12\eta}{\gamma} \cdot \frac{l}{a^2} \cdot c \quad (65a)$$

[см. также уравнение (44)].

Гидравлический радиус поперечного сечения будет:

$$r' = \frac{F}{u} = \frac{(D^2 - d^2) \frac{\pi}{4}}{(D + d)\pi} = \frac{D - d}{4} = \frac{a}{2};$$

можно написать

$$\left. \begin{aligned} \Delta h &= 2 \cdot \frac{\eta}{c \cdot a} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{c^2}{2g} = 6 \cdot \frac{\eta}{c \cdot r'} \cdot \frac{l}{r'} \cdot \frac{c^2}{2g}, \\ \Delta h &= \lambda(R') \cdot \frac{l}{r'} \cdot \frac{c^2}{2g}, \end{aligned} \right\} \quad (65b)$$

при этом

$$R' = \frac{c \cdot r'}{r} \text{ и } \lambda(R')_{\text{лам}} = \frac{6}{R'}. \quad (65 \text{ с и д})$$

По измерениям Винкеля для кольцевой щели при $a = 2,5$ мм, $D = 30$ мм¹.

Этот закон применим до $R = 450$; за этим пределом движение переходит в турбулентное и получается:

$$\lambda(R')_{\text{турб}} = 0,054 \sqrt[4]{\frac{1}{R'}}, \quad (65e)$$

т. е. почти такой же величины, как для круглой трубы по Блазиусу. Измерения по Шнекенбергу² дают для гладких концевых щелей с $a \leq 1,0$ мм.

$$\lambda(R')_{\text{турб}} = 0,0755 \sqrt[4]{\frac{1}{R'}} \quad (65f)$$

¹ Р. Винкель (R. Winkel). Движение воды по трубопроводам с поперечным сечением в виде кольцевой щели, ZAMM, 1923, тетрадь 4.

² Течение воды через узкие концентрические и эксцентрические кольцевые щели с кольцевыми желобками и без них, Аахенская диссертация, 1929.

и $R_{кр} = 350$. Возможно, что более узкие щели дают более высокие λ . Были бы желательны дальнейшие исследования.

г) Численные значения абсолютных и кинематических коэффициентов вязкости (η и ν)

Таблица 2

	Вода при атмосферном давлении					Воздух при 760 мм Hg					Размерность
$t^{\circ}C$	4	25	50	75	100	0	25	50	75	100	
η	1000	997	988	975	959	1,29	1,18	1,09	1,01	0,95	$кг/м^3$
η'	102,0	101,9	100,5	99,5	97,7	0,132	0,120	0,111	0,103	0,097	$кгсек^2/м^4$
$10^6 \cdot \nu$	15	90	57	42	28,9	1,71	1,86	2,01	2,16	2,33	$кгсек/м^2$
$10^6 \cdot \nu'$	1,54	0,885	0,570	0,422	0,285	13,0	15,2	18,1	21,1	24,5	$м^2/сек$

г) Суживающаяся прямая труба

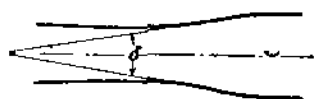
Короткие участки с быстрым сужением и, следовательно, с сильным ускорением, почти не имеют потерь. Потери для более длинных отрезков можно вычислить по формуле:

$$\Delta h = \frac{1}{2g} \int \lambda \frac{c^2}{2g} dl.$$

Точное определение значения интеграла с учетом всех изменений не имеет смысла, так как значения λ не одинаковы для каждого участка: для всей длины l можно производить расчеты, пользуясь средними значениями λ и c^2/d .

г) Расширяющаяся прямая труба

Если задача заключается в том, чтобы в прямом отрезке трубы замедлить течение от скорости c_1 до скорости c_2 , то это может



Фиг. 29. Уширяющаяся прямая труба.

быть достигнуто увеличением площади сечения трубы F_1 до F_2 . Если это происходит на участке большой длины l , то угол расширения δ (угол конусности у круглой трубы, фиг. 29) будет небольшой. Область отставания жидкости от стенки значительно отодвигается, при этом увели-

чивается поверхностное трение о стенки трубы. Наоборот, при конусах с большим δ отставание жидкости начинается сравнительно быстро, чем вызываются большие потери на вихреобразование, в то время как трение о поверхность делается меньше. Таким образом возникает вопрос о наиболее благоприятном угле расширения. Этот угол приблизительно равняется $\delta = 8 - 10^{\circ}$; для него общие потери, вызванные расширяющейся частью трубы, составляют приблизительно:

$$\Delta h = (0,15 \div 0,2) \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}. \quad (66)$$

Таким образом действительное повышение давления при расширении ниже теоретического

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}$$

на указанную выше величину.

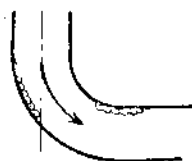
По исследованиям Андреаса ¹ конусообразная форма трубы, а также введение винтообразного или вращательного движения способствуют переходу скорости в давление; однако второе средство, судя по данным испытаний всасывающих труб турбин, оказывается недействительным. Впоследствии будем различать преобразование осевой и тангенциальной скоростей (см. также § 34 б). Гладкость стенок способствует преобразованию скорости в давление. Важны также переходы между присоединяемыми участками труб. Во всяком случае влияние расширения всегда сказывается на последующем участке трубы.

г) Слабо искривленная труба

Слабо искривленные участки трубы можно рассматривать как прямые. Повышение скорости на вогнутой стороне искривления оказывает всегда незначительное влияние на движение в трубопроводе. Его можно не принимать в расчет.

к) Сильно искривленная труба (колени)

В этом случае рассматриваемые явления гораздо заметнее. При входе в колено на выпуклой стороне появляется повышение давления около стенки (фиг. 30), при выходе — на вогнутой. Оба могут вызвать отставание жидкости и образование вихрей. При ряде колен, соединенных одно за другим, может в конце концов образоваться один общий вихрь, который проходит по всей трубе ².



Фиг. 30. Явления в колене.

Потери, конечно, меньше, если в середине колена происходит ускоренное течение, чем в случае течения с постоянной скоростью или же замедленного. Соотношения так разнообразны, что нет возможности здесь передать отдельных опытов, можно только указать литературу ³.

Колена с острым углом могут быть рассмотрены на основе соображений, приведенных в следующем отделе.

В) Внезапные изменения направления и поперечного сечения трубы

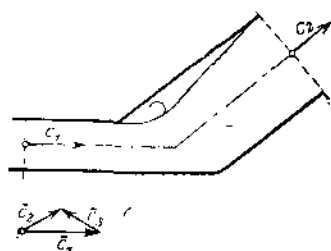
В колене на фиг. 31, где c_1 — скорость в меньшем сечении, c_2 — в большем (если только оно действительно будет заполнено),

¹ Mitt. Forschungsarbeiten (Исследовательские работы), II. 46.

² Ср. Феттингер, Гидравлические проблемы, Föttinger, Hydraulische Probleme, VDI, изд. 1926, стр. 109.

³ Хютте, 25-е изд., т. I, стр. 359, Браббе, Санитарная техника, 1913; Гидравлические проблемы, статья Флюгеля, V.D.I., 1926.

возникает отрыв жидкости от острого ребра. Для того чтобы иметь принципиальные обоснования опытным данным, можно представить себе, что c_1 внезапно в месте изгиба изменилось на c_2 . Если мы нанесем c_1 и c_2 от какого-либо полюса, как направленные векторы, то получим геометрическую разность $c_s = c_2 - c_1$. Скоростную энергию $c_s^2/2g$ можно считать пропорциональной возникающей потере напора, следовательно,



$$\Delta h = \zeta_s \cdot \frac{c_s^2}{2g} \quad (67)$$

Фиг. 31. Внезапное изменение направления и живого сечения.

ζ_s для различных случаев колеблется между величиной меньше 1 и больше 1. При внезапном центральном расширении (следовательно, без изменения направления) $\zeta_s = 1$. Внезапное центральное сужение и связанное с ним ускорение не вызывают никакой потери,

давления, если же струя дальше сужается и не заполняет большего поперечного сечения, то этот случай надо рассматривать, как внезапное расширение, причем надо принять во внимание сжатие струи.

м) Влияние условий входа

Данные выше коэффициенты сопротивления для турбулентного движения в трубах пригодны в том случае, если после прохождения определенного участка с постоянным поперечным сечением в трубе образовалось распределение скоростей, которое затем уже меняется незначительно на протяжении исследуемого участка. Падение давления, необходимое для преодоления трения в трубе, тесно связано с распределением скоростей¹.

Строго говоря, оно изменяется по всей трубе постепенно, но всегда можно установить входной в вышеуказанном смысле участок, внутри которого падение напора может быть значительно (приблизительно до двукратного размера) больше, чем дают приведенные величины.

Вообще надо иметь в виду, что в каждом пространстве, где происходит течение (труба, колено, расширение, сужение, изгиб и т. п.), потеря энергии зависит от распределения скоростей, в протекающей жидкости. Систематических опытов во всей этой области мы еще не имеем².

II Сопротивление погруженных в жидкость тел

п) Поверхностное трение³.

Величина усилия сдвига на единицу площади стенки, омываемой жидкостью, может быть выражена так:

$$\tau = c \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c^2}{2} \quad (68)$$

¹ См. об этом теорию Прандтля-Кармана в статье Кармана „О ламинарном и турбулентном трении“, „ZAMM“ 1921, стр. 233—298.

² См. например, В. Шиллер Исследования о ламинарных и турбулентных течениях. Forschungsarbeiten, VDI. 1922. N. 248.

³ Ср. Карман, О поверхностном трении жидкостей. Доклад в области гидро- и аэродинамики, 1922, стр. 146, Берлин Ю. Шпрингер, 1924.

Опыт и рассуждение показывают, что вообще для силы трения на элементе поверхности вся картина течения и расположение элемента в общей системе находятся во взаимозависимости. Всегда можно вывести средние коэффициенты трения, которые, однако, оказываются различными для различных геометрических расположений и тем самым подтверждают сказанное выше. Эти коэффициенты оказываются различными и в зависимости от того, является ли пограничный слой в большей или меньшей своей части ламинарным или турбулентным.

Плоская пластинка, обтекаемая параллельно ее плоскости

Мы введем число Рейнольдса как $\frac{c \cdot l}{\nu}$, где c — скорость движущейся мимо стенки жидкости, l — длина в направлении течения. Пусть O — смоченная поверхность, W — сила трения. При турбулентном пограничном слое, каковой является преобладающим в важных в техническом отношении случаях, имеем

$$W_f = c_f \cdot O \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c^2}{2},$$

где $c_f = 0,072 \sqrt{\frac{1}{R}}.$ (69)

Это справедливо только для гладких поверхностей.

Диски, вращающиеся в неподвижной жидкости (смоченные с обеих сторон)

Если d — диаметр диска в метрах, n — число оборотов, $u = \frac{\pi d n}{60}$ — его скорость на внешней окружности, M — необходимый для вращения момент в килограммметрах, и если для рейнольдсова числа введем выражение $\frac{u \cdot d}{\nu}$, то при турбулентном пограничном слое имеем

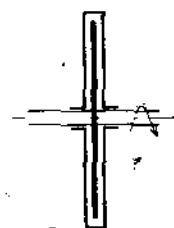
$$M = 0,021 \cdot d^3 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{R^{\frac{1}{5}}}, \quad (70)$$

критическая величина R для данной формулы равняется

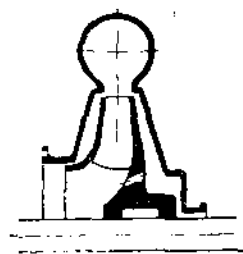
$$R_{кр} = 5 \cdot 10^5.$$

Эту формулу приближенно можно применить для определения трения вращающегося в узком кожухе диска (по фиг. 32) и даже для определения бокового трения рабочих колес с большими размерами (по фиг. 33). Во встречающихся на практике случаях рабочих колес, где боковое трение колеса имеет преимущественное значение, число Рейнольдса принимается порядка $\frac{u \cdot d}{\nu} = 1000 \cdot 10^5$. При этом значении уравнение (70) принимает вид:

$$M = 0,74 \cdot 10^4 \cdot d^3 \cdot n^2,$$



Фиг. 32. Диск, вращающийся в камере.



Фиг. 33. Боковое трение рабочего колеса.

что вполне согласуется с данными испытаний водяных дисковых тормозов и рабочих колес. Расход энергии на боковое трение в таком диске или колесе выражается в лошадиных силах¹.

$$N = 1,1 \cdot 10^{-7} \cdot n^3 \cdot d^5 \quad (71)$$

о) Сопротивление формы

Строго говоря, как уже было указано, сопротивление трения и формы нельзя разделить, потому что напряжения трения зависят от всего расположения, следовательно, от формы. Экспериментально посредством измерения давлений можно определить общее сопротивление и затем еще отдельно составляющую по направлению движения силы нормальных напряжений к поверхности тела как сопротивление формы. Оно имеет преобладающее значение в тех случаях, когда за телом возникает значительное вихревое пространство, но при соответствующей форме оно может оказаться очень незначительным (модель воздушного корабля). Если места отставания одни и те же, так что вихревое пространство находится в одном и том же месте, то получается почти точно квадратичный закон сопротивления, благодаря тому, что в секунду сообщается определенный импульс, который отходит с вихревым движением. Если же места отставания меняются при увеличивающемся или уменьшающемся рейнольдсовом числе, то коэффициент сопротивления в значительной степени зависит от числа Рейнольдса.

В дальнейшем, чтобы выявить большое влияние формы и сделать наглядным только что изложенное приводятся некоторые значения сопротивлений для общего сопротивления, выраженного формулой:

$$c_w = \frac{W_1}{q \cdot F} \quad (72)$$

Здесь q обозначает напорное давление $\frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{2}$; F — площадь характерной для тела поверхности.

Модель дирижабля имеет площадь главного шпангоута $F = 0,0278 \text{ м}^2$ и общую смоченную поверхность $O = 0,479 \text{ м}^2$. Этому соответствует:

$$\left. \begin{aligned} c_{wr} \text{ (действие трения, отнесенное к } O) &= 0,0013 \\ c_{wr} \text{ (" " " к } F) &= 0,0224 \\ c_{ws} \text{ (сопротивление нормальному давлению, отнесенное к } F) &= 0,0342 \\ c_w \text{ (общее сопротивление " к } F) &= 0,0566 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Эти цифры относятся к $c = 10 \text{ м/сек}$ и 15° C , с возрастанием c они уменьшаются вследствие сильного влияния сопротивления трения.

Для тонкой круглой пластинки с той же площадью F , расположенной перпендикулярно к течению, имеем

$$c_w = 1,1 \quad (74)$$

¹ См. также Ханок, Изучение трения вращающихся дисков в вязкой жидкости апрель 1928 г. (Ch. Hanock, Etudes sur le Frottement des disques en rotation dans un fluide visqueux. Rev. Univ. d. Mines).

т. е. равное примерно двадцатикратной величине для воздушного корабля с одинаковым главным шпангоутом. Цифры почти что независимы от рейнольдсова числа, так как сопротивление, главным образом, обусловлено вихревым движением позади пластинки, причем отставание происходит у самых краев пластины.

Для шара, с наибольшим поперечным сечением F , общее сопротивление:

$$\left. \begin{aligned} c_w &= 0,22 \text{ при } R = \frac{c \cdot d}{\nu} = 2,5 \cdot 10^5 \\ c_w &= 0,47 \text{ при } R = 2,0 \cdot 10^4 \div 1,5 \cdot 10^6, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

следовательно, получаются различные пределы в зависимости от различного положения мест отставания¹.

17. Окончательные выводы для теории рабочих колес

Прежде всего надо установить, что течение жидкости в рабочих колесах в преобладающем большинстве случаев является турбулентным. Таким образом, если мы в дальнейших главах говорим о линиях тока, о картинах течения, о скорости, надо помнить, что мы под ними подразумеваем величины, относящиеся к основному движению, другими словами, временные и пространственные средние величины, над которыми располагаются пульсации. Эти основные движения мы вычисляем для течения идеальной жидкости и затем, если это необходимо, используем данные опытов с турбулентным течением о распределении скоростей, с одной стороны, и о потерях энергии — с другой, для исправления выводов теории.

В этом первом томе (§ 28), в котором излагается основная теория рабочих колес, задача вычисления скоростей настолько упрощена, что нет необходимости пользоваться опытными данными о распределении скоростей. Но зато приходится прибегать к опыту каждый раз, когда надо определить полную потерю энергии. Здесь надо быть очень осторожным при выборе значений коэффициентов для труб и подобных им потоков, так как они относятся к случаям, в которых распределение скоростей вполне определено. Пока же еще нет специальных исследований для течений, подобных имеющимся в рабочих колесах, где участки, по которым движется жидкость, сравнительно очень коротки и постоянно меняют свою форму и гидравлический радиус. Поэтому ничего не остается, как осторожно оценивать потери коэффициентами, данными в предыдущих главах, и полученный результат сравнивать с опытом путем определения к. п. д.²

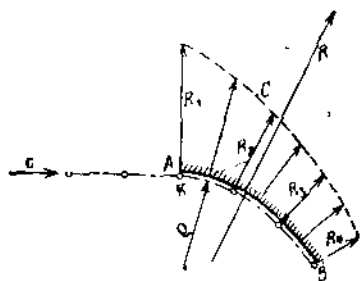
¹ См. об этом также очень интересную диаграмму в Hütte, 25 изд., т. 1 стр. 374

² Подобные систематические исследования, дающие сравнение с измерениями по трубам, производятся в настоящее время в лаборатории гидравлических машин в Высшей технической школе в Карлсруэ.

V. Взаимодействие сил и обмен энергией между движущейся жидкостью и твердым телом, находящимся в покое или движении

18. Отклонение свободной струи жидкости неподвижной твердой направляющей поверхностью. Понятие импульса

Рассмотрим прежде всего на фиг. 34 неподвижную твердую направляющую поверхность в виде цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости чертежа. Представим себе маленький твердый шар K , катящийся в плоскости чертежа вдоль направляющей поверхности; он подходит к начальной точке A с определенной



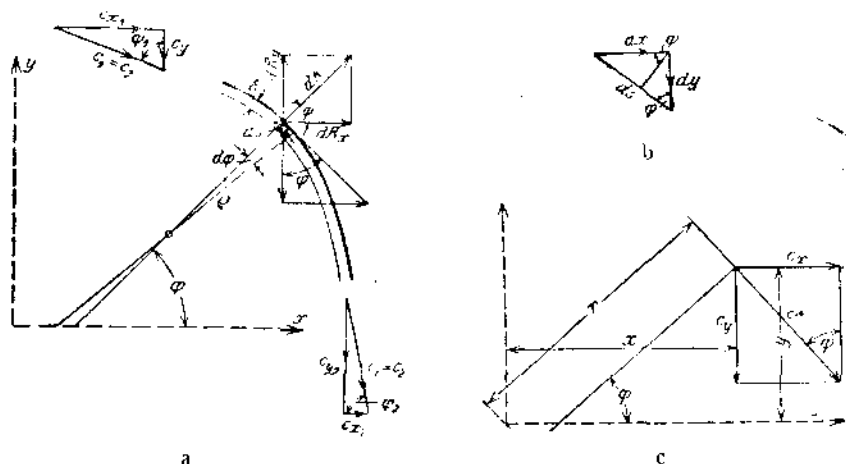
Фиг. 34. Отклонение шарика направляющей поверхностью.

скоростью v , касательной к направляющей поверхности AB и перпендикулярной к ее образующей. Вес шара мы не принимаем во внимание. Направляющая поверхность, если мы оставим без внимания незначительное трение, испытывает каждое мгновение нормальное давление от шара. Эта сила может быть вычислена, зная постоянную скорость v и радиус кривизны пути в точке, где находится в данное мгновение шар. В свою очередь направляющая поверхность оказывает реакцию, которая меняется каждое мгновение по величине, направлению и поло-

жению. Величины этой реакции изображены на фиг. 34 и дают диаграмму C , из которой для каждого положения шара на кривой может быть сразу определена величина действующей на него силы. Если теперь шары одинаковой величины непрерывно двигаются на равных расстояниях по направляющей поверхности, то на нее будут действовать одновременно в каждое мгновение несколько сил реакции, указанных в диаграмме сил. Они могут быть сложены в одну равнодействующую. Эта равнодействующая меняется по величине, положению и направлению в зависимости от мгновенного взаимного расположения следующих друг за другом шаров (для мгновенного расположения шаров, изображенного на фиг. 34, она вычерчена как сумма $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$).

Изменения равнодействующей имеют периодический характер, так, как одно и то же взаимное расположение шаров на направляющей поверхности повторяется с известным ритмом. Этот ритм становится тем более быстрым, и одновременно колебания по величине, положению и направлению равнодействующей тем меньше, чем меньше расстояния между следующими один за другим шарами. Предположим, что они будут следовать друг за другом без промежутков, при этом, чтобы сделать непрерывность полной, надо представить их в виде дисков, которые вполне прилегают к направляющей поверхности и во время движения могут свободно деформироваться, стать бесконечно тонкими в направлении движения. В таком случае

направляющая поверхность испытывает непрерывное и одновременное действие всех сил (теперь бесконечно малых), изображенных на диаграмме, а равнодействующая получается конечной величины и имеет определенное положение и направление. Этим представлением можно воспользоваться для вычисления величин, направления и положения силы (реакции), действующей между очень плоской струей воды и направляющей поверхностью при установившемся течении (фиг. 35а). Пусть толщина струи так незначительна, что ее можно рассматривать как путь всех частиц вдоль направляющей



Фиг. 35, а, б и с. Отклонение струи направляющей поверхностью.

кривой цилиндрической поверхности. На изменение в толщине и связанное с ним изменение в ширине мы не будем обращать внимания; таким образом мы предполагаем толщину постоянной равной δ и ширину также постоянной и равной 1. В точке, определяемой углом φ , между нормалью к направляющей поверхности и положительным направлением оси x действует центробежное давление

$$dR = \frac{\gamma}{g} \cdot ds \cdot \delta \cdot \frac{c^2}{\varrho}$$

от проходящей там частицы объема $ds \cdot \delta$ и массы $\frac{\gamma}{g} \delta \cdot ds$. Это давление имеет составляющие:

$$dR_x = \frac{\gamma}{g} ds \cdot \delta \cdot \frac{c^2}{\varrho} \cdot \cos \varphi$$

в направлении x ,

$$dR_y = \frac{\gamma}{g} ds \cdot \delta \cdot \frac{c^2}{\varrho} \cdot \sin \varphi$$

в направлении y ,

но так как $ds = \varrho \cdot d\varphi$, то получаем:

$$dR_x = -\left(\frac{\gamma}{g} \cdot \delta \cdot c\right) \cdot c \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \quad dR_y = -\left(\frac{\gamma}{g} \cdot \delta \cdot c\right) \cdot c \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Выражение, заключенное в скобки, есть масса воды, которая каждую секунду проходит через точку и вследствие непрерывности одинаково в каждой точке и равно $Q \frac{\gamma}{g}$, где Q количество жидкости, протекающей в секунду (например в $\text{м}^3/\text{сек}$). Таким образом получаем:

$$dR_x = -\frac{Q\gamma}{g} \cdot c \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \quad dR_y = -\frac{Q\gamma}{g} \cdot c \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi. \quad (76)$$

Если мы произведем интегрирование между начальным и конечным положениями (индексы 1 и 2) и примем во внимание, что $c \cdot \sin \varphi = c_y$; $c \cdot \cos \varphi = -c_x$, то получится:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -\frac{Q\gamma}{g} (c \cdot \sin \varphi_2 - c \cdot \sin \varphi_1) = \frac{Q\gamma}{g} (c_{y1} - c_{y2}), \\ R_y &= +\frac{Q\gamma}{g} (c \cdot \cos \varphi_2 - c \cdot \cos \varphi_1) = \frac{Q\gamma}{g} (c_{x1} - c_{x2}). \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Отсюда легко можно вычислить величину и направление равнодействующей реакции. Для того чтобы определить ее положение, надо написать уравнение моментов. Элементарная сила имеет момент относительно начала координат:

$$dM = dR_x \cdot y - dR_y \cdot x = -\frac{Q\gamma}{g} c (y \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi - x \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi). \quad (78)$$

Но выражение в скобках есть $d(x \cdot \cos \varphi + y \sin \varphi)$, что можно легко вывести, производя дифференцирование и приняв во внимание равенство $dx \cdot \cos \varphi = -dy \cdot \sin \varphi$, получающееся из фиг. 35b. Интегрирование дает:

$$M = -\frac{Q\gamma}{g} (c \cdot \cos \varphi \cdot x + c \cdot \sin \varphi \cdot y)_1^2.$$

Из него получается, если мы снова введем $c_x = c \cdot \sin \varphi$, $c_y = -c \cdot \cos \varphi$,

$$M = -\frac{Q\gamma}{g} \cdot (-c_y \cdot x + c_x \cdot y)_1^2$$

или, как видно из фиг. 35с,

$$M = \frac{Q\gamma}{g} [(c \cdot r)_1 - (c \cdot r)_2], \quad (79)$$

где r — расстояние по перпендикуляру до скорости c от начала координат; $c \cdot r$ — „момент скорости“. В последней формуле сознательно не принято во внимание, что $c_2 = c_1 = c$.

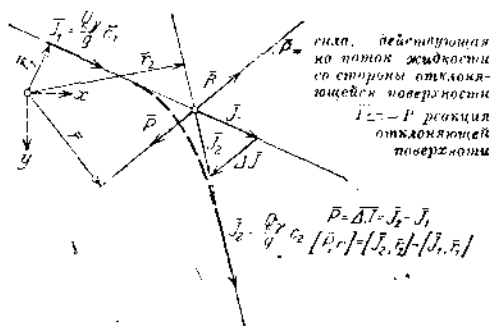
Уравнения (77) и (79) содержат величины с размерностью:

$$\frac{\text{масса} \cdot \text{скорость}}{\text{время}}.$$

Величина в числителе есть „количество движения“, или „импульс“. Вся дробь поэтому может быть названа „потоком импульсов“. Он является, как и сам импульс, вектором, следовательно, обладает величиной и направлением и поэтому может быть также разложен на составляющие. Можно также составить момент потока импульса. При вступлении на отклоняющую поверхность поток импульса имеет величину и направление $\frac{\gamma Q}{g} \tilde{c}_1 = \tilde{J}_1$, а при выходе с нее

$\frac{\gamma Q}{k} \bar{c}_2 = \bar{J}_2$. Изменение от $\bar{J}_1$ до $\bar{J}_2$ по величине, направлению и положению дает равнодействующую силу $\bar{P}$, вызванную действием отклоняющей поверхности на поток жидкости, или с обратным знаком — реакцию $\bar{R}$ отклоняющей поверхности. Таким образом результат этих рассуждений может быть выражен такими двумя векторными равенствами:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= -\bar{R} = \Delta_1^2 \bar{J} = \bar{J}_2 - \bar{J}_1, \\ |\bar{P}\bar{r}| &= -|\bar{R}\bar{r}| = \Delta_1^2 |\bar{J}\bar{r}| = \\ &|\bar{J}_2\bar{r}_2| - |\bar{J}_1\bar{r}_1|_2 \quad (80)\end{aligned}$$



Фиг. 36.

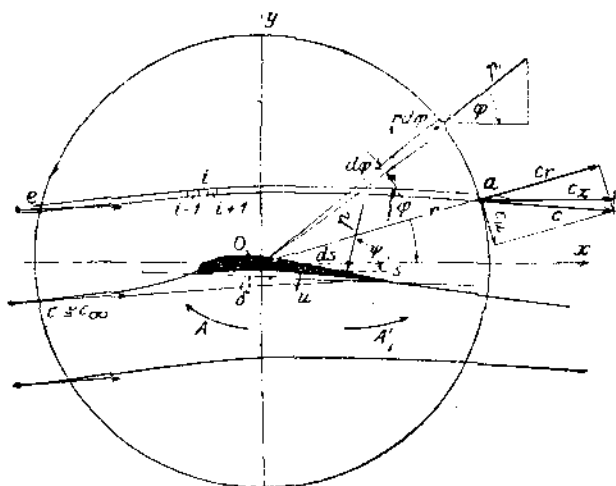
На фиг. 36 это представлено достаточно наглядно. Исследование данного случая особенно упрощается потому, что нам ясна картина течения до отдельных подробностей, которые можно не принимать во внимание и можно легко вычислить равнодействующую, суммируя элементарные взаимодействия между поверхностью и струей.

19. Действие неограниченного однородного воздушного потока на поддерживающее крыло

а) Поле течения (фиг. 37)

Пусть неограниченный, находящийся в установившемся движении поток воздуха направлен на неподвижное отклоняющее тело,

имеющее изображенный на рисунке профиль. Тело тоже имеет неограниченное протяжение поперек направления потока и имеет в каждом поперечном сечении одинаковый профиль. Продольная ось тела перпендикулярна скорости равномерного движения потока, которой он обладает на очень большом расстоянии от тела. Отклоняющее тело называется согласно терминологии науки



Фиг. 37. Бесконечно длинное несущее крыло в воздушном потоке.

о полетах несущей поверхностью, или же несущим крылом. Наклон профиля измеряется углом атаки δ , т. е. углом, образуемым хордой, соединяющей головную и хвостовую части с направлением движения потока.

В каждой плоскости (перпендикулярной к оси крыла) течение совершенно одинаково. Назовем поэтому этот поток плоским и ограничимся рассмотрением ширины потока, измеряемой в направлении оси крыла, равной 1. Несущее крыло воздействует на поток таким образом, что оно отклоняет текущие мимо него слои жидкости от своего пути, причем ближайшие слои отклоняются сильнее, а более отдаленные слабее. Слои, текущие непосредственно вдоль его нижней и верхней поверхностей, соединяются у концевой части в один слой, касательный к концевой части.

На слои, текущие очень далеко сверху или внизу, воздействие очень незначительное. Позади тела отклонение всех слоев постепенно исчезает. Для определения поля скоростей нужно соблюдать следующие условия:

1. Контур, или профиль, тела должен совпадать с линиями тока, принадлежащими полю, образованному потоком, идущим из бесконечности и уходящим в бесконечность.

2. У концевой части воздух должен уходить по касательной. Если концевая часть — клиновидная с определенным углом заострения, то берется среднее направление. Математический анализ показывает, что достаточно этих двух условий, чтобы определить поле скоростей. Первое условие понятно само собой с физической стороны, так как тело непроницаемо для воздуха. Второе устанавливается как явление, наблюдаемое во многих случаях на опыте. В рассматриваемом случае оно наблюдается, если угол атаки не переходит определенной величины ($\delta \approx 15^\circ$), следовательно, если отклонение потока также незначительное.

Отклонение должно соответствовать силе, с которой профиль воздействовал на течение; сила эта, в свою очередь, должна быть равна равнодействующей всех элементарных давлений жидкости на поверхность тела. Сила, действующая на поток, должна быть направлена сверху вниз или, по крайней мере, иметь составляющую в этом направлении; реакцией ее является сила воздействия потока на профиль, которую называют поперечной силой или подъемной силой. Отсюда следует, что давление на нижнюю сторону должно быть больше, чем на верхнюю. Если мы предположим отсутствие трения и пренебрежем действием срезающего усилия или будем его рассматривать отдельно, то для всего потока

можно написать: $\frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = \text{const.}$ Положим, давление в невозмущенном потоке (атмосферное давление на далеком расстоянии от профиля) равным 0, тогда следует $\frac{p}{\gamma} = \frac{c^2_\infty - c^2}{2g}$. Избыточное да-

вление на нижней стороне, т. е. давление снизу вверх, или разрежение на верхней стороне обуславливаются соответственно пониженной скоростью на нижней поверхности и повышенной скоростью на верхней. Таким образом на нижней стороне создается подпор потока. Этот подпор распространяется на некоторое расстоя-

ние перед телом и за телом и вызывает изгибание линий тока в направлениях, изображенных на рисунке стрелками A и A' . Всего сильнее это выгибание проявляется у той линии тока, которая подходит по нормали к контуру у головной части профиля. Она здесь разделяется, обтекает профиль и у конца его снова соединяется, уходя от него по касательной. В начальной точке раздела линий тока скорость $c = 0$ и потому

высшее давление $p_{\max} = q = \frac{\gamma}{g} \frac{c_{\infty}^2}{2}$. Это давление называется динамическим напором потока. Соответственно и точка раздела называется напорной точкой (ср. с § 10). Как уже было замечено при изложении теории пограничного слоя, у вязких жидкостей можно приближенно допускать распределение давления у стенок такое же, как и у идеальной жидкости. Во всяком случае вязкость принципиально не вызывает изменения выведенных соотношений, по крайней мере, у удлиненных профилей.

в) Определение сил взаимодействия между потоком и профилем

Из элементарных сил давления жидкости на профиль можно определить по величине, положению и направлению их равнодействующую. Обе ее составляющие на направления координатных осей, имеющих произвольное направление и взаимно перпендикулярных (фиг. 37), будут:

$$R_x = - \int_K p \cdot \cos \varphi ds; \quad R_y = - \int_K p \cdot \sin \varphi ds, \quad (81)$$

где интеграл берется по всем элементам ds контура K . Для получения численного значения интегралов необходимо знание величины p на контуре; она получается только после вычисления поля скоростей.

Но есть другой путь, который скорее ведет к цели; он заключается в следующем:

В поле скоростей выделяют любое пространство соответственно ограниченное для каждого случая так называемой контрольной поверхностью. Затем пишут основное уравнение для направления, которое нас в данный момент интересует. Уравнение это пишется сначала для одной движущейся частицы, затем его пишут для всех частиц, наполняющих ограниченное пространство и все уравнения складывают. При этом, если в выделенном пространстве находятся твердые тела, то или также суммируют все твердые частицы, или распространяют его только на жидкие частицы, при этом рассматривают поверхность тела как границу контрольного пространства. Первый способ рекомендуется, если вопрос идет о твердом теле, которое движется в жидкости. Точно так же поступают с уравнениями, которые выражают теорему о статическом моменте количества движения для каждой отдельной частицы. Таким образом получают теорему импульса и теорему о моменте импульса (теорема момента количества движения) для потока жидкости.

Описанный метод мы применим на нашем примере. Выделим в потоке, как уже делалось, слой толщиной, равной 1, в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа. Опишем вокруг тела цилиндрическую поверхность. Центр ограничивающего круга лежит гденибудь внутри профиля. Радиус круга пусть будет равен r . Пространство, ограниченное снаружи цилиндром и заполненное жидкостью, ограничено еще и поверхностью тела. В направлении y , которое мы сейчас, уклоняясь от фиг. 37, будем считать перпендикулярным к скорости течения c , для движущейся жидкой частицы с массой Δm мы будем иметь:

$$\Delta m \cdot \frac{dc_y}{dt} = \Delta P_y.$$

Если мы распространим это уравнение на все частицы, заполняющие пространство, то получим:

$$\sum \Delta m \cdot \frac{dc_y}{dt} = \sum \Delta P_y. \quad (82)$$

При суммировании все внутренние силы взаимодействия между частицами, т. е. все силы взаимного давления и трения между частицами, взаимно уничтожаются и остаются только силы объемные (сила тяжести и т. п.). Последние мы не примем во внимание, вернее, будем рассматривать отдельно.

Таким образом остаются только приложенные ко всем частицам, находящимся на ограничивающей поверхности, силы давления и трения; трением мы пока тоже пренебрежем. Фактически мы пренебрегаем только трением на границах контрольного пространства, так как внутреннее трение само собой исключается; силы же трения на границах имеют значительные величины только у стенок профиля, к которым реальная жидкость прилипает, а на ограничивающей поверхности оно незначительно. Силы давления направлены нормально к ограничивающей поверхности. Равнодействующая сил давления на ограничивающую круговую поверхность по направлению y дает составляющую:

$$- \int_0^{2\pi} p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Пусть составляющая P_y равнодействующей P всех сил, действующих на поверхность контрольного пространства, имеет положительное направление вверх. P_y — являющаяся составляющей (в направлении оси y) воздействия потока на крыло, равна и противоположно направлена силой, искомой нами.

Таким образом правая сторона уравнения (82) будет:

$$P_y - \int_0^{2\pi} p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Для того чтобы определить сумму левой части уравнения (82), разбиваем пространство на элементарные трубки тока, которые здесь являются и путями частиц жидкости. В этих трубках мы берем такие маленькие частицы, что каждой частице можно приписать среднюю скорость, c_y . Частицы внутри

такой трубки тока имеют порядковые номера i , которые вверх по течению идут возрастая $i+1, i+2, \dots$, а вниз по течению убывают $i-1, i-2, \dots$. В элемент времени dt каждая частица продвигается на место предыдущей. Таким образом частица i претерпевает изменение скорости $c_{y_{i+1}} - c_{y_i}$. Подобное перемещение возможно только в том случае, если все частицы имеют одинаковый объем, так что соблюдается условие непрерывности. Далее их объем должен быть достаточно мал для того, чтобы мы могли каждой из них приписывать определенную скорость c_y . На основании этих требований объем их должен быть равен $dt \cdot dq$, где dq является массой, протекающей по трубке тока в секунду. Таким образом для частиц $i-1, i, i+1$ левая часть уравнения (82) принимает вид:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot dq \cdot dt \frac{c_{y_{i+2}} - c_{y_{i+1}} + c_{y_{i+1}} - c_{y_i} + c_{y_i} - c_{y_{i-1}}}{dt} = \frac{\gamma}{g} \cdot dq \cdot (c_{y_{i+2}} - c_{y_{i-1}}).$$

Если же мы распространим суммирование на всю элементарную струйку, то все изменения внутри нее отпадают и остается только

$$\frac{\gamma}{g} dq (c_{y_a} - c_{y_e}), \quad (83)$$

представляющая собой приращение количества движения в одной струйке.

Индексом a обозначается место выхода элементарной струйки из контрольного пространства, а знаком e — место ее вступления. Интегрированием по выделенному объему мы получаем окончательную величину левой части равенства (82). Таким образом из уравнения (82) получаем:

$$\frac{\gamma}{g} \int (c_{y_a} - c_{y_e}) dq = P_y - \int_0^{2\pi} pr \sin \varphi d\varphi,$$

или, решая относительно P_y :

$$P_y = \frac{\gamma}{g} \int (c_{y_a} - c_{y_e}) dq + \int_0^{2\pi} pr \sin \varphi d\varphi. \quad (84)$$

Первый интеграл представляет снова поток импульсов, а именно избыток выходящего из пространства импульса потока над входящим. Мы бы ничего не достигли этим уравнением, если бы не могли произвести более простое интегрирование правых интегральных величин, чем интегрирование всех элементарных сил, действующих на тело [уравнение (81)]. Этот вопрос может быть различно решен в каждом отдельном случае. Для настоящего примера современная гидродинамика указывает следующий путь: для вычисления первого интеграла мы вводим полярные координаты и раскладываем в контрольном пространстве скорость c на радиальную составляющую c_r , считая ее положительное направление наружу, и составляющую касательную к окружности c_u , считая ее положительной, если на поверхности тела она направлена одинаково с c_∞ . В таком случае $dq = r d\varphi c_r$ и мы получаем:

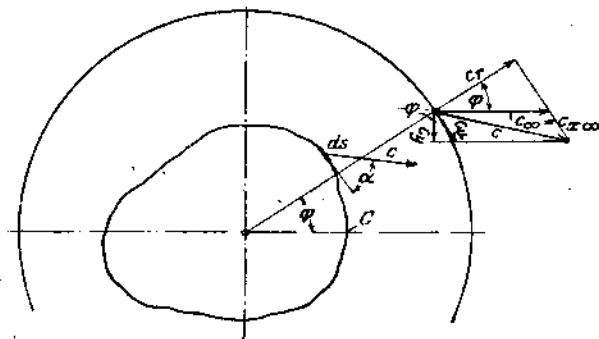
$$\frac{\gamma}{g} \int (c_{y_a} - c_{y_e}) dq = r \int_0^{2\pi} c_y \cdot c_r \cdot d\varphi. \quad (85)$$

(Направо принят во внимание обмен между потоками, входящими и выходящими.) От нас зависит выбрать ограничивающий цилиндр любой величины; уравнение (84) всегда остается правильным.

Гидродинамика показывает, что на большом расстоянии можно представить поток составленным наложением ненарушенного течения (переносного) в направлении x со скоростью $c_\infty = c_\infty$ и вращающегося (вращающегося согласно закону $c_u \cdot r = \text{const}$ вокруг центра, расположенного на профиле). Там же доказывается, что

выражение $2\pi r \cdot c_u = \Gamma$ является константой, которая остается все время одинаковой, — именно, если провести какую-либо кривую C , охватывающую профиль, и для нее составить

интеграл $\int_C c \cdot \cos \alpha \cdot ds$, где c — общая скорость поля, ds — элемент кривой C и α — угол между ними



Фиг. 38.

(ср. фиг. 38). Кривая C может лежать или в непосредственной близости или в некотором отдалении от профиля, надо только, чтобы

она его охватывала. Величину $\int_C c \cdot \cos \alpha \cdot ds = \Gamma$ вообще называют „линейным интегралом скорости“, а в настоящем случае замкнутой кривой величину Γ называют „циркуляцией“ вокруг тела. Ее величина может быть вычислена из условий касательного стекания у конечной части. Пользуясь этими определениями, интеграл в правой части уравнения (85) мы можем выразить иначе (ср. фиг. 38):

$$c_r = c_\infty \cdot \cos \varphi; \quad c_y = -c_u \cdot \cos \varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \varphi.$$

Соответственно с этим получается:

$$r \int_0^{2\pi} c_y \cdot c_r \cdot d\varphi = -c_\infty \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi.$$

Введем для p его величину:

$$p = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c_\infty^2 - c^2}{2},$$

но так как

$$c^2 = c_u^2 + c_\infty^2 + 2c_\infty \cdot c_u \cdot \sin \varphi,$$

то

$$p = -\frac{\gamma}{g} \frac{c_u^2 + 2c_\infty \cdot c_u \cdot \sin \varphi}{2}.$$

Подставляя все значения в уравнение (84), получим окончательно:

$$P_y = -\frac{\gamma}{g} c_\infty \frac{l'}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi,$$

или

$$P_y = -\frac{\gamma}{g} \cdot c_\infty \cdot \Gamma, \quad (86)$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi d\varphi = 2\pi \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

P_y согласно всему ходу рассуждений является силой, действующей на поток по ширине слоя; противоположно направленная сила $R_y = -P_y$ является искомой подъемной силой, приходящейся на единицу длины. Таким образом

$$R_y = \frac{\gamma}{g} \cdot c_\infty \cdot \Gamma. \quad (87)$$

Следовательно, наиболее просто эта сила вычисляется по ненарушенной скорости течения и циркуляции.

Наличие кругового вращения жидкости в потоке является кинематическим эквивалентом динамического явления, заключающегося в том, что крыло отклоняет поток и благодаря этому испытывает подъемную силу среды. Без вычислений, только на основе физического представления, можно следующим образом доказать наличие циркуляции вокруг крыла. Если крыло испытывает подъемное усилие так, как уже говорилось в п. „а“, то давление на нижнюю сторону должно быть больше, чем давление на верхнюю сторону. Избытку давления под крылом соответствует уменьшение скорости, меньшему давлению над крылом соответствует избыток скорости. Чисто кинематически эти скорости можно составить из ненарушенной скорости c_∞ и отрицательной или положительной добавочных скоростей. Эти дополнительные скорости являются теми скоростями, которые на замкнутой, охватывающей крыло кривой создают определенную величину интеграла $\oint c \cdot \cos \alpha \cdot ds$, а следовательно, и определенное значение циркуляции Γ .

Таким образом надо определить циркуляцию, чтобы вычислить подъемное усилие. Гидродинамика и тут указывает определенный путь в зависимости от данного профиля крыла. Она нуждается для этого в качестве физических условий только в знании тангенциального движения у конца крыла.

Аналогичным рассуждением, какое производилось для подъемного усилия, можно вычислить силу, действующую на крыло в направлении движения; она равняется нулю, если не принимать во внимание трение о поверхность тела и на других границах контрольного пространства. Это понятно из того, что как вследствие этого прене-

брежения, так и того, что трение внутри жидкости выпадает из вычисления, мы рассматриваем поток с постоянной энергией.

Сила в направлении движения потока давала бы работу, которая производилась бы за счет энергии потока. В реальной жидкости трение изменяет результаты в том смысле, что подъемное усилие уменьшается и появляется сопротивление тела в направлении движения, вызванное трением по профилю и образовавшимися вследствие этого вихрями у концевой части (ср. с этим § 6 — замечание об образовании вихрей). Однако надо особенно подчеркнуть, что все вышесказанное применимо только, если поток во всех плоскостях перпендикулярных к крылу одинаков¹.

Первые доказательства вышеприведенных выводов и проблемы плоских несущих крыльев ведут начало от Кутта и Жуковского².

Далее ясно, что выводы постольку имеют значение для воздуха, поскольку воздух рассматривается как несжимаемый. Это зависит от появляющихся разностей давления и, благодаря этому, скоростей. Если скорости приближаются к скоростям распространения звука, то выводы перестают быть годными.

Самое важное в приведенных рассуждениях это то, что можно вычислить силы, действующие между крылом и потоком, не вводя в расчет элементарных сил, действующих на крыло, т. е. не вычисляя (что было бы очень затруднительно) давление жидкости, а только рассматривая поток импульсов и его изменение. Такой результат всегда можно получить, если имеются точные или хотя бы приблизительные данные о свойствах потока импульсов на границах подходяще выбранного контрольного пространства.

20. Установившееся движение сквозь неподвижную решетку из лопастей с прямой осью (параллельную решетку)

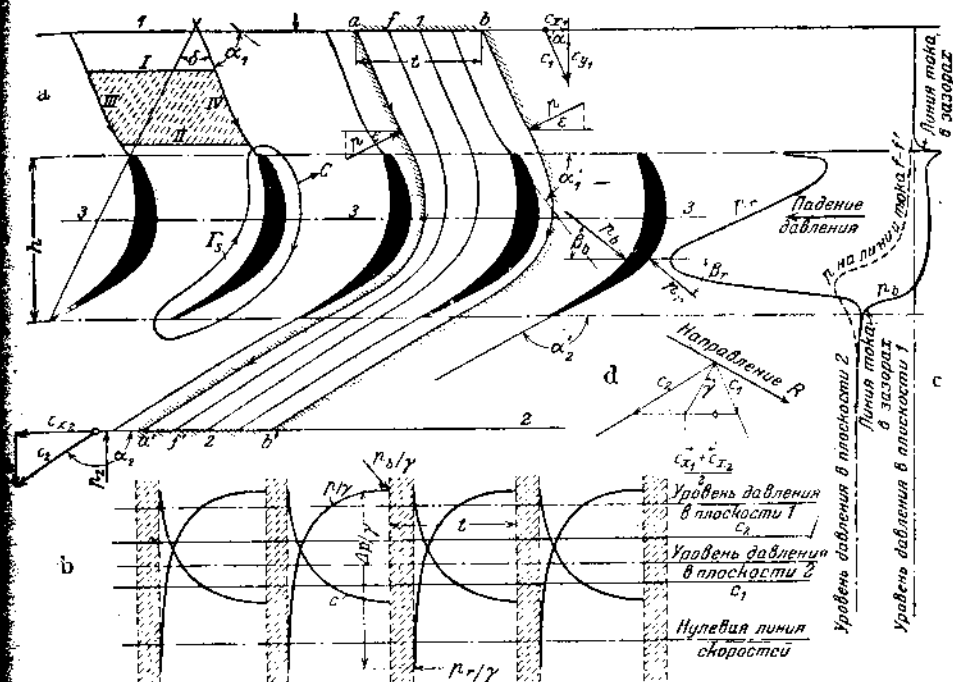
а) Обзор поля течения

На фиг. 39а изображен бесконечный ряд совершенно одинаковых отклоняющих тел цилиндрической формы с образующими, перпендикулярными плоскости чертежа. Тела расположены на одинаковом расстоянии друг от друга и образуют одинаковые углы с неподвижной прямой. Эта прямая называется „осью параллельной решетки“; расстояние между двумя отклоняющими телами, или лопастями, называется шагом (t); размер лопастей, перпендикулярный к оси, — высота решетки h . Решетка перпендикулярна своей оси, параллельной плоскости чертежа, следовательно, к ней притекает „плоский“ поток под определенным углом α , к оси решетки. Направление потоку придается каким-нибудь направляющим аппаратом, находящимся вдали от решетки: там, на бесконечности, мы имеем постоянное давление и постоянную скорость. Таким образом поток

¹ Потоками около несущего крыла конечных размеров занимается прандтлевская теория несущих крыльев, о которой здесь не будем распространяться (см. Прандтль и Бетц, Четыре статьи о гидр- и аэродинамике, изд. Института по исследованию течений им. имп. Вильгельма, Геттинген, 1927.).

² См. Кутта, Подъемные силы в текущих жидкостях (Kutta, Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten.), изд. 1902, стр. 133.

приходит из области с постоянной энергией. Вес жидкости мы снова не принимаем в расчет. Решетка создает направление выходящей жидкости под другим углом γ_2 к оси. Действие решетки на поток заметно, строго говоря, уже в бесконечном отдалении перед решеткой и исчезает оно только в бесконечном отдалении за решеткой. Практически оно проявляется только на конечном расстоянии (приблизительно равном t) перед решеткой и на таком же расстоянии прекращается. На таком расстоянии проведем плоскости



Фиг. 30 а — d. Течение через неподвижно расположенную решетку из лопастей.

1 и 2, параллельные оси решетки, перпендикулярные к плоскости чертежа; жидкость протекает через них с постоянной и неизменного направления скоростью c_1 и c_2 . Картина течения имеет местную периодичность с периодами, равными делению (шагу) t , т. е. если мы пройдем по направлению по оси решетки через поле течения, то, выйдя из какого-либо первоначального пункта, мы снова встретим, после прохождения отрезка nt , одинаковую по величине и направлению скорость при том же давлении, что и в первоначальной точке. Эта периодичность почти исчезает в плоскостях 1 и 2, но вблизи лопастей и, особенно, между ними, она имеется налицо. В остальном поле скоростей определяется точно теми же условиями, как и при одном несущем крыле (которое можно рассматривать как единичную лопать).

Поток, идущий из бесконечности и снова уходящий в бесконечность, при встрече имеет контуры лопастей, как части линий тока;

некоторые из этих линий встречают переднюю часть лопасти нормально к контуру, разделяются ею надвое и у задней части снова смыкаются и уходят по касательной. Отклонение потока вызывает появление силы между потоком и лопастями и, следовательно, излишек давления на вогнутой стороне лопасти и понижение давления на задней её стороне. За нулевую поверхность давления удобно принять давление ненарушенной притекающей жидкости (следовательно, в бесконечности перед решеткой). Вогнутая сторона лопасти соответствует нижней стороне несущего крыла, ее задняя сторона — верхней. Напорное давление на вогнутой стороне и здесь выгибает приходящие и уходящие линии тока. При клинообразной головке лопасти наклон к оси средней касательной к лопасти решетки (α_1' на фиг. 39a) должен быть другим, чем наклон подходящего к ней потока α_1 , если хотят говорить о гидродинамически нестесненном улавливании потока решеткой — о гидродинамическом безударном входе на лопасти решетки. Следовательно, лопасть должна быть изогнута. Изгиб и отклонение расщепляющейся линии тока будет самым сильным, у всех остальных линий токов оно меньше. Поэтому общее среднее отклонение массы жидкости, проходящей через какое-либо деление решетки, меньше угла α_2' , образуемого средней касательной в задней части лопатки с осью решетки. И тут, если требуется определенное среднее отклонение, лопасть должна быть изогнута. Давление между лопастями повышается от задней стороны одной до вогнутой стороны соседней, скорость же, наоборот, понижается. На фиг. 39b под чертежом решетки нанесена диаграмма этих обеих величин, как они существуют в плоскости 3. Значения их приближенно определены после того как поле скоростей было вычерчено, т. е. после того как были проведены на всем протяжении 1—2 линии тока, делящие шаг t в плоскостях 1 и 2 на четыре равные части (линии тока нанесены по методу, указанному в § 12a). Кроме того, сбоку чертежа решетки на фиг. 39c изображено распределение давлений в расщепившейся и в средней линии тока ($f-f'$). За поверхность нулевого давления вместо плоскости, находящейся перед решеткой в бесконечности, принята величина давления в плоскости 1. Распределение давления в расщепленной линии тока до входа на лопасть и за конечной ее частью, естественно, одинаково. Самое высокое давление на контуре лопасти находится у входной точки. На задней стороне имеется два понижения давления: первое также непосредственно рядом у входной точки на лопатку, второе гораздо дальше, внутри решетки. Первое понижение связано с очертанием входной части лопасти (оголовка), второе — с формой всей лопасти, в особенности и с ее кривизной. Изображенная здесь крючкообразная лопасть особенно неблагоприятна, так как она своим искривлением вызывает на задней стороне лопасти повышенные скорости, которые остаются после общего отклонения большими, чем другие скорости, выравнившиеся в плоскости 2. Неизбежное замедление у стенки согласно § 14, е" и 15, с" вызывает особые потери и, смотря по обстоятельствам, сильные изменения течений по сравнению с рассматриваемым здесь течением идеальной жидкости. Поэтому при постройке турбин крючкообразные лопасти давно оставлены.

Более подробные сведения относительно поля скорости см. дальше ¹.

б) Определение сил взаимодействия между потоком и лопастями

Мы снова выделяем контрольное пространство. В качестве его границ мы берем части плоскостей 1 и 2 длиной l , затем две цилиндрические поверхности с образующими, совпадающими с линиями тока aa' и bb' , отстоящими друг от друга на расстоянии l . По бокам пространство замыкается двумя плоскостями, параллельными плоскости чертежа, отстоящими друг от друга на единицу длины. Пространство включает отрезок лопасти длиной l , перпендикулярный к плоскости чертежа. Поверхность этой лопасти является границей контрольного пространства. Снова мы составляем уравнение движения:

$$\Delta m \frac{dc_x}{dt} = \Delta P_x, \quad (88)$$

относя его к оси, параллельной оси решетки. Такое уравнение пишется для каждой частицы, находящейся в контрольном пространстве, и затем, суммируя их, получаем:

$$\sum \Delta m \frac{dc_x}{dt} = \sum \Delta P_x.$$

Мы снова не принимаем во внимание действие силы тяжести. Таким образом направо остаются только силы, действующие на ограничивающие поверхности. На отрезках 1 и 2 давления жидкости перпендикулярны к направлению движения. Мы снова не принимаем во внимание действие трения на пограничных поверхностях 1 и 2. Следовательно, здесь не получается добавочных членов к сумме сил. Также и обе поверхности над линиями токов aa' и bb' в целом не дают никаких усилий, так как каждому элементу поверхности на aa' с давлением p и сдвигающим напряжением τ соответствует такой же элемент с равной, но противоположно действующей величиной p и τ . Таким образом действие трения на поверхностях потока aa' и bb' принято во внимание.

Остаются только действия сил между лопастями и потоком. Их мы заменяем равнодействующей P_x , которая, таким образом, представляет собой общее действие на поток в направлении оси x ; причем — здесь это надо особенно подчеркнуть — она включает в себя и трение о стенки. Плоскости, параллельные плоскости чертежа и отстоящие друг от друга на расстоянии $=1$, не представляют собой материальных преград, а потому, рассматривая плоский поток в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа, мы не вводим сил трения в этих плоскостях. Чтобы определить численное значение левой стороны (уравнение (88)), разобьем контрольное пространство на элементарные струйки и составим сумму сначала для одной из них, примерно для идущей вдоль линии тока

¹ Читатель, вероятно, уже заметил, что на фиг. 39 изображено движение идеальной жидкости.

$f - f'$, найдем, как это сделано в предыдущем примере для нее: $\frac{\gamma}{g} (c_{x2} - c_{x1}) dq$. Для всех же элементарных струек внутри одного деления получим: $\frac{\gamma}{g} \int (c_{x2} - c_{x1}) dq$. Так как мы предполагаем в ограничивающих плоскостях 1 и 2 равномерное распределение скоростей, то мы можем написать:

$$\frac{\gamma Q}{g} (c_{x2} - c_{x1})$$

и, таким образом, получаем:

$$P_x = \frac{\gamma Q}{g} (c_{x2} - c_{x1}). \quad (89)$$

Q является секундным расходом воды, приходящимся на один шаг и ширину потока, равную 1, P_x — сила, действующая на одну лопасть на ширине, равной 1; взятая с обратным знаком, она равна реакции R_x , действующей на лопасть, следовательно, $R_x = -P_x$, таким образом

$$R_x = \frac{Q\gamma}{g} (c_{x1} - c_{x2}). \quad (90)$$

Если соответствующее рассуждение проведем для направления y , то получается следующее:

Давления на границах поверхностей 1 и 2 теперь не выпадают, но дают составляющую $t(p_1 - p_2)$. Напряжения вязкости в этих плоскостях отпадают. Давления и напряжения вязкости на ограничивающих поверхностях $a - a'$ и $b - b'$ опять взаимно уничтожаются. Действие лопасти на поток дает равнодействующую P_y , включающую и действия трения. Таким образом полная сила на границах контрольного пространства равняется $P_y + t(p_1 - p_2)$. Изменение импульса в левой стороне дает здесь $\frac{\gamma Q}{g} (c_{y1} - c_{y2})$. Но вследствие непрерывности течения $c_{y1} = c_{y2}$. Следовательно, получается $P_y + t(p_1 - p_2) = 0$, или

$$P_y = t(p_2 - p_1) \quad \text{и} \quad R_y = t(p_1 - p_2). \quad (91)$$

Уравнение (91) вполне применимо и для вязкой жидкости. В уравнении (90) весьма значительное действие трения на поверхности лопастей также включено в R_x , наоборот, менее значительное трение в 1 и 2 не принято во внимание. Если действие трения идет так далеко, что возникает отставание и образуются мертвые пространства, то надо различать два случая. Первое, — мертвое пространство возникает внутри контрольного пространства, что может случиться только около поверхности лопастей, в выводах ничего не меняется, так как можно рассматривать воду, заполняющую мертвое пространство, как находящуюся за пределами контрольного пространства; она является водяной подушкой, которая передает давление потока на лопасть и может рассматриваться как часть тела лопасти. Второе, — если образуется у лопасти вихревой шнур, который вместе с потоком выходит за пределы контрольного пространства,

должно быть, во-первых, принято во внимание при вычислении $c_{x,y} dq_2$ и, кроме того, вызванное периодическим образованием внутри контрольного пространства (добавочный член к $\sum \Delta t \frac{dc_{x,y}}{dt}$ во всем ограниченном пространстве) увеличения импульса должно быть прибавлено к ранее написанной сумме. Теперь необходимо еще определить по величине и направлению полную реакцию лопасти. Она равняется:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = c_y^2 t^2 \left(\frac{\gamma}{g} \right)^2 (c_{x_1} - c_{x_2})^2 + t^2 (p_1 - p_2)^2.$$

Вместо Q поставлена его величина $c_y t$. Для $p_1 - p_2$ можно составить уравнение баланса энергии. Оно будет

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + h_r = \frac{c_{x_2}^2 - c_{x_1}^2}{2g} + h_r = \frac{c_{x_2}^2 - c_{x_1}^2}{2g} \left(1 + \frac{2gh_r}{c_{x_2}^2 - c_{x_1}^2} \right),$$

где c_y вследствие непрерывности постоянно. Под h_r подразумевается потеря энергии, которая является следствием действия вязкости между сечениями 1 и 2. Далее, получаем:

$$= t^2 \left(\frac{\gamma}{g} \right)^2 \left\{ c_y^2 (c_{x_1} - c_{x_2})^2 + (c_{x_1} - c_{x_2})^2 \left(\frac{c_{x_1} + c_{x_2}}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{2gh_r}{c_{x_2}^2 - c_{x_1}^2} \right)^2 \right\};$$

тогда имеем:

$$R = \frac{\gamma}{g} t (c_{x_1} - c_{x_2}) \sqrt{c_y^2 + \left\{ \frac{c_{x_1} + c_{x_2}}{2} \left(1 + \frac{2gh_r}{c_{x_2}^2 - c_{x_1}^2} \right) \right\}^2}. \quad (92)$$

Выражение под корнем имеет размерность квадрата скорости, которое дает размерность скорости. Поэтому мы обозначим его через c_r . Таким образом получаем:

$$R = \frac{\gamma}{g} t (c_{x_1} - c_{x_2}) c_r. \quad (92a)$$

Оба слагаемые в скобках имеют форму линейного интеграла скорости c на участке t . Можно дополнить эти члены линейным интегралом по обоим линиям тока aa' и bb' , что дает интеграл по замкнутому контуру, состоящему из двух отрезков t и двух линий aa' и bb' , обхватывающему лопасть и, следовательно, приводящему к циркуляции Γ вокруг лопасти. На этой системе кривых, если следовательно соблюдать при интегрировании направление вращения согласно c_{x_1} , получается:

$$\Gamma_s = t \cdot c_{x_1} + \int_b^{b_1} c \cdot ds - t c_{x_2} - \int_a^{a_1} c \cdot ds.$$

На линиях aa' и bb' c совпадает с направлением ds , следовательно, $\cos \alpha = 1$. Но мы имеем:

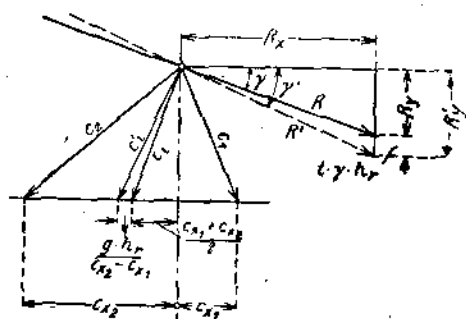
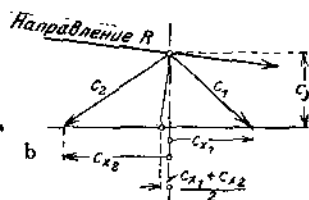
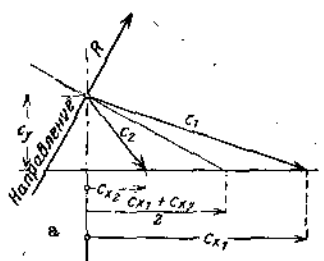
$$\int_b^{b'} c \cdot ds = - \int_a^a c \cdot ds,$$

так что циркуляция приводится к

$$\Gamma_s = t c_{x_1} - t c_{x_2}.$$

Мы можем теперь написать:

$$R = \frac{\gamma}{g} \Gamma_s c_1, \quad (93)$$



Фиг. 40 а — с. Направление равнодействующей в потоках идеальном (без трения) и с трением.

т. е. получим формулу, совершенно соответствующую уравнению (87) для подъемной силы, действующей на отдельное несущее крыло. Аналогия получается еще более полной, если вычислить направление R . Если R составляет с осью решетки угол γ , то

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma = \frac{R_y}{R_x} &= \frac{t(p_1 - p_2)}{c_y t \frac{\gamma}{g} (c_{x_1} - c_{x_2})} = \frac{\frac{c_{x_1}^2 - c_{x_2}^2}{2} \left(1 + \frac{2g h_r}{c_{x_1}^2 - c_{x_2}^2} \right)}{c_y (c_{x_1} - c_{x_2})} = \\ &= \frac{\frac{c_{x_1} + c_{x_2}}{2} \left(1 + \frac{2g h_r}{c_{x_1}^2 - c_{x_2}^2} \right)}{c_y} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

выражение в числителе является составляющей вдоль x выше введенной скорости c_i . Если мы ее обозначим через c_{x_i} , то $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{c_{x_i}}{c_y}$. Так как c_y является составляющей c по y , то доказано, что R перпендикулярно к направлению c_i . Таким образом аналогия с отношениями при отдельном несущем крыле является полной. c_i с составляющими

$$c_i \cos \gamma = c_y \quad \text{и} \quad c_i \sin \gamma = \frac{c_{x_1} + c_{x_2}}{2} \left(1 + \frac{2g h_r}{c_{x_1}^2 - c_{x_2}^2} \right)$$

может быть названа средней скоростью протекания сквозь решетку. При течении идеальной жидкости c , может быть построена из скоростей — подходящей c_1 и уходящей c_2 , как показывают фиг. 39с, 40а и 40б. Из фиг. 40с можно видеть, как меняются отношения в вязкой жидкости по сравнению с идеальной при равных скоростях течения приходящего и уходящего. Практическое значение этого построения не теряется оттого, что в основе его лежат скорости в бесконечности. В связи с предшествующими рассуждениями мы имеем для составляющих:

$$R_x = \frac{\gamma}{g} \cdot \Gamma_s \cdot c_y; \quad R_y = -\frac{\gamma}{g} \Gamma_s \frac{c_{x_1} + c_{x_2}}{2} \left(1 + \frac{2gh_r}{c_{x_2}^2 - c_{x_1}^2} \right). \quad (95)$$

Во входной плоскости 1 можно предполагать распределение скоростей равномерным, при очень близком друг к другу расположении отклоняющих лопастей. Тогда плоскость 1 может лежать в непосредственной близости к решетке. То же самое можно сказать о плоскости 2, располагая ее тем ближе к решетке, чем меньше шаг решетки.

Вообще, если течение нам хорошо известно, то для вычисления R_x и R_y мы можем свободно расположить 1 и 2 в любой близости к решетке. Тогда в место простых произведений необходимо ввести интегралы, и мы получаем:

$$R_x = \frac{\gamma}{g} \int_0^t (c_{x_1} - c_{x_2}) dq; \quad R_y = \int_0^t (p_1 dl_1 - p_2 dl_2). \quad (89a) \text{ и } (90a)$$

Из этих рассуждений мы видим, что для течения идеальной жидкости величины

$$\int_0^t c_x dq \quad \text{и} \quad \int_0^t p dl$$

вне решетки всегда должны давать одну и ту же величину потому, что уже заданные контрольные пространства (между плоскостями входа I и II и боковыми ограничивающими поверхностями III и IV, заштрихованные на фиг. 39а) — суть те, внутри которых и на ограничивающие поверхности которых не действуют никакие силы, которые меняли бы импульс. Отсюда следует, что изменение средней составляющей c_x и среднего давления происходит только между лопастями решетки. Эти средние величины определяются из выражений:

$$c_{x_m} = \frac{\int c_x dq}{Q} \quad \text{и} \quad p_m = \frac{\int p dl}{l}.$$

Эти замечания имеют значение и для вязкой жидкости и именно такой, в которой давления одинаковы и в которой для c_x пренебрегается трением в ограничивающих плоскостях I и II.

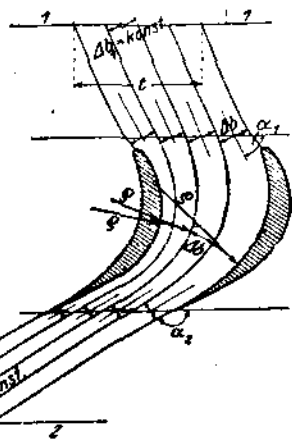
Направление может быть определено из уравнения моментов; но для действительного определения его численного значения требуется знание движения в деталях; для этого недостаточно знания распределения скоростей на ограничивающих плоскостях I и 2.

Вышеприведенные рассуждения показывают и на этом примере, что взаимодействие сил между течением и отклоняющим органом (здесь решетка) можно вычислить, зная изменение состояния потока при переходе из определенным способом заданного состояния (состояние втекания) в состояние, определенным образом вынужденное органом отклонения (состояние вытекания). В общем случае мы не получим точной картины движения, в особенности, когда дело идет о том, чтобы точнее вычислить вынужденное состояние вытекания, в то время как состояние втекания можно принять как данное. Часто, однако, можно делать, по крайней мере, приблизительно, довольно точные предположения о состоянии вытекания (ср. п. „с“).

Надо особенно еще подчеркнуть, что полученные результаты совершенно независимы от условий гидродинамически-безударного выхода. Это происходит оттого, что в уравнениях, как состояние 1, — берется состояние перед входом в решетку.

с) Приблизительная картина линий тока для данной решетки

Способ состоит в вычерчивании на-глаз линий тока и в последующей их проверке. В качестве опорных точек для наброска у нас имеются уже упомянутые в п. „а“ характерные условия картины линий тока. Эти условия следующие:



Фиг. 41. Контроль построения линий тока для идеального потока.

1. Выгибание линий тока при втекании и вытекании.

2. Падение скорости от задней части (спинки) лопатки к вогнутой части.

3. Выравнивание различия в скоростях вне решетки на расстоянии, приблизительно равном шагу ¹.

Поэтому мы проводим на расстоянии t перед решеткой и позади нее параллели 1-1 и 2-2 (фиг. 41) и делим отрезок t , взятый на них, на n равных частей. Перед решеткой наносится в точках деления данное направление

скорости притекания c_1 . За решеткой определяют фактически вынужденное направление скорости уходящего течения или на основании опытов ², или на основании точных расчетов, произведенных для простых случаев ³.

Во всяком случае это направление уходящего течения должно давать меньшее различие составляющей c_x в точках 1 и 2, чем напри-

¹ Доказательство этому будет дано только во втором томе.

² См. например, Mitt. aus den Institut f. Strömungsmaschinen, Высшая школа Карлсруэ, т. 1, изд. Ольденбурга.

³ См. об этом т. 2.

вление (средней) конечной касательной к лопасти. Но она будет тем более совпадать с ней, чем меньше размер делений. Затем внутри решетки между двумя лопастями чертятся n элементарных каналов с одинаковым расходом, принимая во внимание распределение скоростей. Далее, передвигают отрезки t с одинаковыми делениями и направлением скорости по параллелям 1-1 и 2-2 до тех пор, пока не получится плавное очертание линий тока внутри решетки. Тогда производится проверка следующим образом:

1. Проводят какую-либо прямоугольную траекторию и проверяют вдоль нее правильность отношения $\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{c}{\varrho}$. Для этого развертывают траекторию и наносят сверх нее взятые с чертежа радиусы кривизны линии тока, а также скорости из картины линий тока, вычисленные из $c = \frac{AQ}{\Delta b}$ и получают величины $\frac{\partial c}{\partial n}$ и $\frac{c}{\varrho}$, где n есть абсцисса развертки¹, Δb — ширина элементарного потока, следовательно, также отрезок траектории и ее развертки. AQ может быть взято произвольно. Эта проверка будет не вполне точна для траекторий, которые проходят через критическую точку оголовка лопатки или вблизи нее.

2. Вне решетки на расстоянии одного шага t параллельно к решетке $\int_0^t c_x dq = \text{const}$, независимо от расстояния y от решетки.

Вместо интеграла пишут $\sum_1^n c_x dq = \text{const}$. Так как AQ одинаково для всех n элементарных потоков, то получаем просто $\sum_1^n c_x = \text{const}$, или $= nc_{x_1}$ перед решеткой и nc_{x_2} позади решетки. Таким образом мы имеем:

$$c_x = c \cdot \cos \alpha = \frac{AQ}{\Delta b} \cos \alpha,$$

так что

$$\sum_1^n AQ \frac{\cos \alpha}{\Delta b} = \text{const}.$$

AQ как постоянная может быть опущена и остается $\sum_1^n \frac{\cos \alpha}{\Delta b} = \text{const}$, равная $n \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\Delta b_1}$ перед решеткой и $n \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\Delta b_2}$ позади решетки.

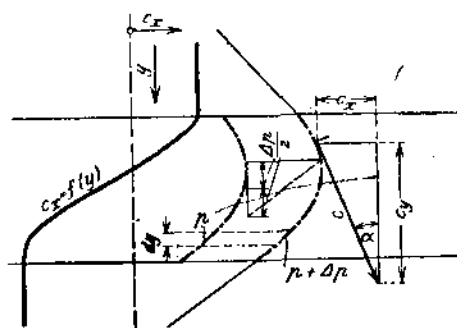
По полю скоростей из уравнения энергии $\frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = \text{const}$ определяется распределение давления в потоке идеальной жидкости. Это всегда следует делать дополнительно, чтобы проверить, не получилось ли в каком-либо месте недопустимо низкое давление. Так как посредством вычисления мы определяем только разность давлений, то надо избегать появления слишком низкого

¹ Ср. также гл. III, § 12, п. 2 а".

давления (кавитации!), выбирая достаточно высокий общий уровень начального давления. Практически это достигается расположением решетки достаточно глубоко под данным уровнем воды.

д) Приблизительный способ проектирования параллельной решетки для заданного общего отклонения и при условиях отсутствия трения

Чем меньше деление t , тем меньше отличаются скорости и давления на интервале t от своих средних величин. Чем ближе сдвигаются лопасти, тем тоньше можно и должно их сделать и тем меньше отличаются направления скоростей от направления



Фиг. 42. Схема лопастной решетки.

касательных к лопастям. Если мы поставим лопасти бесконечно часто ($t \rightarrow 0$) и в то же время сделаем их бесконечно тонкими, но так, чтобы они на единицу длины оси решетки пропускали все-таки прежнее количество воды Q , то линии тока внутри решетки сделаются равными и подобными кривым лопасти. Плавный вход и выход в этом случае происходит без выгибания линий тока в направлении касательных к концам лопастей. Этим рас-

суждением пользуются как исходным пунктом при приближенном проектировании решетки. Представим себе прежде всего решетку с бесконечно тонкими и бесконечно часто поставленными лопастями и будем изменять составляющую по направлению x в определенной зависимости от координаты y , т. е. предположим $c_x = f(y)$ (фиг. 42). Здесь составляющая c_y вследствие исчезающе-малой толщины лопасти независима от y и постоянна. Средняя величина c_y при решетке с конечным шагом всегда постоянна вне решетки, внутри ее — только при бесконечно тонких лопастях $c_y = \frac{Q}{t}$. Угол α скорости c , а с ним согласно вышеизложенному также и касательная к лопасти по направлению y определяется через $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{c_x}{c_y}$. Таким образом получаем уравнение кривой лопасти $\frac{dx}{dy} = \frac{f(y)}{c_y}$ или, интегрируя

$$x = \frac{1}{c_y} \int f(y) dy. \quad (96)$$

Постоянная интеграла может быть принята равной 0.

Теперь можно давление выразить в функции y (индексом 1 отмечены постоянные величины перед решеткой), здесь оно будет равняться:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{c_x^2 - c_{x1}^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{1}{2g} \left\{ [f(y)]^2 - [f(y_1)]^2 \right\}. \quad (97)$$

Составляющая c_y не появляется больше в уравнении (97), так как она от y независима. Если мы теперь перейдем к конечному

шагу t , то можем приблизительно принять среднее давление между двумя лопастями равным вычисленному из уравнения (97), а среднюю скорость c_x и c_y равной прежней и затем предположить, что разница в давлении в пределах шага является наполовину падением давления, наполовину возрастанием давления по отношению к среднему давлению (следовательно, предполагаем линейное изменение давления). Но общую разность давлений для одного шага мы можем найти, применив теорему импульсов для маленького контрольного пространства, взятого между двух лопастей и ограниченного двумя плоскостями, параллельными оси решетки и удаленными друг от друга на dy . Пренебрегая трением, получаем (фиг. 43):



Фиг. 43. Подсчет разности давлений в канале лопаток.

$$p \cdot dy - (p + \Delta p) dy - \frac{Q \gamma}{g} \left(c_x + \frac{dc_x}{dy} dy - c_x \right) = 0,$$

или

$$-\Delta p = c_y t \frac{\gamma}{g} \frac{dc_x}{dy},$$

или

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = -\frac{c_y t}{g} f'(y). \quad (98)$$

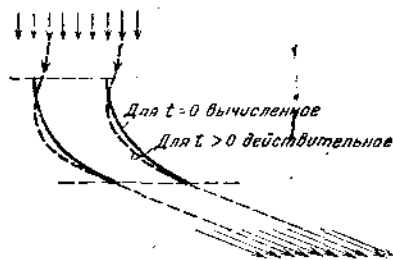
При этом повышение давления в положительном направлении x считается как положительное Δp .

Давление перед и за лопастью получается

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_m}{\gamma} \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{\gamma}, \quad (99)$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{1}{2g} \left\{ [f(y)]^2 - [f(y_1)]^2 \right\} \mp \frac{c_y t}{2g} f'(y). \quad (100)$$

Это уравнение может быть использовано для вычисления, при данной зависимости $c_x = f(y)$, изменения давления на передней и задней сторонах лопасти или, наоборот, пользуясь им, можно определить зависимость $f(y)$ для заданного изменения давления на передней и задней сторонах лопасти. Вычисляя по выше-



Фиг. 44. Кривизна лопасти при $t=0$ и $t>0$.

приведенному способу соответствующие лопасти, следует помнить, что вычисление, строго говоря, соответствует только для $t \rightarrow 0$ и бесконечно тонким лопастям. Бесконечно тонкие лопасти, сделанные при фактически конечном t , должны быть тем сильнее изогнуты по сравнению с вычисленными, чем дальше они отстоят друг от друга (фиг. 44). Действительное распределение давлений, конечно, значительно отстает от вычисленного таким способом. Если мы сделаем утолщенные лопасти, то распределение давлений снова изменится

как потому, что средняя скорость немного изменится, так и потому, что от этого в большой степени могут появиться местные более сильные искривления линий тока, которые поведут к местному повышению скорости и падению давления или наоборот.

Следующим способом можно получить совсем грубые данные о повышении давления между лопастями. Давление определяется (фиг. 39а, последняя лопасть справа):

$$R_x = \int p_b \cos \beta_b ds_b - \int p_r \cos \beta_r ds_r.$$

Индекс b относится к передней стороне лопасти, r — к задней; но: $\cos \beta_b ds_b = \cos \beta_r ds_r = dy$, следовательно,

$$R_x = \int_0^h (p_b - p_r) dy. \quad (101)$$

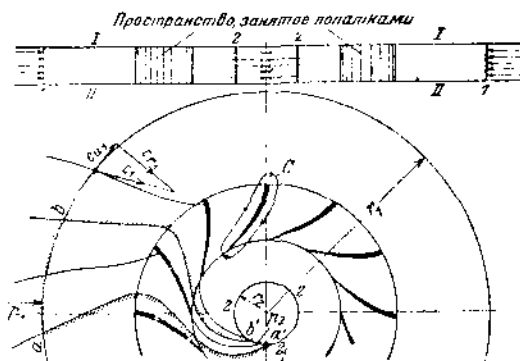
Если вычислить $p_b - p_r = \Delta p_m$ с средней величиной постоянной высоты лопасти h , то получится:

$$\Delta p_m = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{1}{h} (c_{x1} - c_{x2}). \quad (102)$$

21. Плоское установившееся движение через неподвижную круговую решетку

а) Обзор поля течения

На фиг. 45а изображена решетка из лопастей, которые расположены на равном расстоянии от неподвижной оси и друг от друга.



Фиг. 45а. Поток через плоскую круговую, находящуюся в покое, решетку.

Поверхности лопастей являются цилиндрическими поверхностями с образующими параллельными оси. Пространство, заполненное текущей жидкостью, ограничено двумя плоскостями бесконечного протяжения, перпендикулярными к оси и отстоящими друг от друга на расстоянии, равном 1. Течение идет из бесконечности и направляется после протекания лопастей решетки к оси. Таким образом отрезок оси между обеими плоскостями является отверстием, поглощающим жидкость. Это абстрактное представление несколько облегчает математическую обработку проблемы. Поток предполагается плоским. На достаточном расстоянии от решетки, точно так же как в непосредственной близости к оси, различие скоростей на поверхности концентричного цилиндра радиусом r , происходящее от действия решетки, почти исчезает. Здесь

Поток предполагается плоским. На достаточном расстоянии от решетки, точно так же как в непосредственной близости к оси, различие скоростей на поверхности концентричного цилиндра радиусом r , происходящее от действия решетки, почти исчезает. Здесь

мы можем считать течение свободным. Согласно § 12 для него применим закон $c_n r = \text{const}$. За решеткой величина постоянной другая, чем внутри; действие решетки заключается как раз в том, что она изменяет характерную для приходящего течения величину $(c_n r)_1 = k_1$ в величину $(c_n r)_2 = k_2$, характерную для течения уходящего (конечно, эти рассуждения применимы и при движении изнутри наружу); совершенно сходный закон, как и для окружной скорости c_n , может быть применен в свободном течении и для радиальной скорости c_r . В области, где поток имеет равномерное распределение скоростей, на поверхностях соосных цилиндров должно быть $Q = 2\pi r c_r$; при этом, конечно, Q вследствие непрерывности течения является постоянной величиной, одинаковой как для пространства, находящегося близ оси, так и далеко от решетки. Таким образом за решеткой мы имеем:

$$\frac{c_n}{c_r} = \frac{k_1}{r} \cdot \frac{2\pi r}{Q} = K_1.$$

Вблизи оси $\frac{c_n}{c_r} = K_2$. Если через γ обозначить угол линии тока с радиусом, то $\text{tg } \gamma = \frac{c_n}{c_r}$. Таким образом частицы текут по логарифмическим спиралям как в далеком от оси расстоянии, так и вблизи нее. Угол этих спиралей с радиусом вблизи оси будет иной, чем вдали от нее.

Можно представить себе, что жидкость протекает сквозь решетку, направляясь к ней извне через цилиндрическую поверхность, находящуюся вблизи решетки, причем направление течения в каждой точке этой поверхности образует один и тот же угол с радиусом; постоянное количество Q жидкости проходит через очень большое число близко друг к другу расположенных направляющих поверхностей. По проходе решетки жидкость проходит сквозь воображаемую цилиндрическую поверхность, которая может быть тем ближе расположена к решетке, чем больше число лопастей решетки z , следовательно, чем меньше деление $t_\tau = \frac{2\pi}{z}$. В остальном все рассуждения о периодичности картины течения, которые были приведены по поводу параллельных решеток, могут быть применены также и здесь. Нужно только вместо параллельной оси решетки линии, над которой там были начерчены диаграммы периодически повторяющихся скоростей и давления, начертить концентрический к оси круг; вместо прямых линий тока, получающихся при равномерном распределении скоростей, здесь получаются логарифмические спирали. Все сказанное относительно изгиба линий тока безударного входа и вытекания по касательным применимо и здесь. На фиг. 45а намеренно изображен случай не безударного входа, чтобы показать, что следующие расчеты не зависят от этого условия.

б) Определение действующих сил.

На фиг. 45а контрольное пространство около лопасти ограничено цилиндрическими поверхностями 1 и 2 и цилиндрическими поверхностями, образованными линиями токов $a-a'$ и $b-b'$, прове-

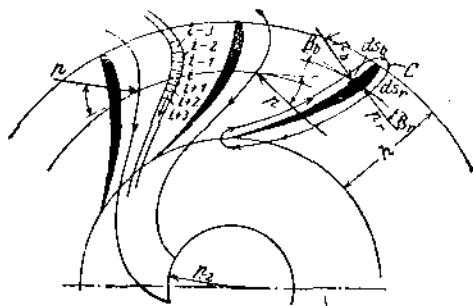
денными с интервалом в одно деление с обеих сторон лопатки. В общем же имеется два таких пространства, причем в каждом картина течения одинакова. Кроме того, наружная поверхность лопасти также рассматривается как граница контрольного пространства. Для каждой частицы жидкости, находящейся в этом пространстве, может быть написана теорема о статическом моменте количества движения относительно оси решетки в форме

$$\Delta m \frac{d(c_u r)}{dt} = \Delta M$$

и затем, суммируя эти выражения для находящихся в пространстве частиц, получаем:

$$\sum \Delta m \frac{d(c_u r)}{dt} = \sum \Delta M, \quad (103)$$

где ΔM есть момент частицы относительно оси. Снова в правой стороне равенства сокращаются моменты всех сил, действующих между частицами, включая трение между ними. Остаются только моменты сил на границах и моменты сил веса частиц. Эти последние могут быть рассмотрены отдельно (чисто статически). К сумме моментов в поверхностях 1 и 2 добавляются только напряжения трения потока, касательные к элементам поверхности и нормальные по отношению к оси. Но так как трения между частицами жидкости весьма незначительны, то мы их не будем принимать в расчет. Давления жидкости на эти поверхности направлены по радиусам, следовательно, не имеют момента. Давления жидкости на границах поверхностей aa' и bb' и внутри их имеют моменты относительно оси, но так как поле течения и поле давления именно тем и характеризуются, что отношения, которые имеются в aa' , повторяются в bb' , то каждому элементу в aa' с моментом $+ \Delta M$ соответствует в bb' противоположный $- \Delta M$, так что в результате обе эти поверхности не дают никакого дополнения к сумме моментов. Остаются только моменты всех давлений и трений на поверхности лопасти, которые мы суммируем, получая равнодействующий момент M . Ограничение плоскостями I и II мы представляем себе, как и раньше, не материально, так что никаких моментов вводить не требуется. Для того чтобы определить численное значение левой стороны, как и раньше, рассмотрим сначала трубку тока, изображенную на фиг. 45b, а внутри одной из них ряд последовательных частиц с порядковыми номерами $i-2, i-1, i, \dots$. Для того чтобы сохранилась непрерывность течения, надо, чтобы каждая частица продвигалась на место предыдущей в элемент времени dt и принимала ее скорость c и момент скорости $c_u r$. Для того



Фиг. 45b. К выводу закона моментов и давления на лопатку.

Фиг. 45b. К выводу закона моментов и давления на лопатку.

чтобы мы могли приписать каждой частице определенную скорость и вместе с ней момент скорости, мы должны взять ее бесконечно малой. На основании этих требований вытекает необходимость, чтобы массы всех частиц были одинаковы, а именно:

$$\Delta m = \frac{\gamma}{g} dq dt,$$

где dq есть количество жидкости, протекающее в одну секунду по трубке тока. Сумма моментов вышечисленных частиц в левой части уравнения (103) выразится в виде:

$$\frac{\gamma}{g} dq dt \cdot \frac{(c_u r)_{i+2} - (c_u r)_{i+1} + (c_u r)_{i+1} - (c_u r)_i + (c_u r)_i - (c_u r)_{i-1} + \dots}{dt}.$$

Если мы распространим суммирование на всю линию тока, то все внутренние изменения выпадут и останется (так как, кроме того, сокращается dt):

$$\frac{\gamma}{g} dq [(c_u r)_2 - (c_u r)_1].$$

Если теперь распространить суммирование на все линии тока, то принимая во внимание, что $(c_u r)$ является постоянной в 1 и 2, мы можем написать:

$$\frac{\gamma Q}{g} [(c_u r)_2 - (c_u r)_1].$$

где Q есть количество воды, приходящееся на один шаг (деление). Таким образом получается:

$$M_s = \frac{\gamma Q}{g} [(c_u r)_2 - (c_u r)_1] = \frac{\gamma Q}{g} \Delta_1^2 (c_u r). \quad (104)$$

Согласно выводу M_s соответствует действию лопастей на поток: моментом „реакции“ является $M_r = -M_s$, следовательно,

$$M_r = \frac{\gamma Q}{g} \Delta_1^2 (c_u r). \quad (105)$$

Если в уравнения (104) и (105) подставить вместо Q всё количество жидкости, протекающее через всю решетку, то получим момент для всей решетки. Эти уравнения можно представить еще в другом виде; если определить интегралы $\int c \cdot \cos \alpha ds$ для кругов 1 и 2 по всей окружности, то получатся циркуляции:

$$\Gamma_1 = 2\pi r_1 c_{u1} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = 2\pi r_2 c_{u2},$$

или

$$(c_u r)_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi}, \quad \text{и} \quad (c_u r)_2 = \frac{\Gamma_2}{2\pi}.$$

Тогда, заменяя в уравнении (105), получим:

$$M_r = \frac{\gamma Q}{g} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\pi}. \quad (106)$$

(Q и M_r относятся к ширине лопасти, равной единице, по вычислены для всей решетки.) На основании выводов гидродинамики в идеаль-

ных жидкостях Γ_1 постоянно во внешнем пространстве, Γ_2 — внутри решетки. С другой стороны, можно вычислить циркуляцию для контура линий, обхватывающих лопасть и образованных из следов, ограничивающих поверхностей 1 и 2, а также aa' и bb' . Эта циркуляция вокруг лопасти будет:

$$\Gamma_s = \frac{2\pi r_1 c_{u1}}{z} \int_b^{b'} c \cdot ds - \frac{2\pi r_2 c_{u2}}{z} \int_a^{a'} c \cdot ds = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{z},$$

так как интегралы взаимно уничтожаются. Таким образом получается:

$$M_r = \frac{\gamma Q}{g} \frac{z \cdot \Gamma_s}{2\pi}. \quad (107)$$

Относительно Γ_s надо снова указать, что оно постоянно для каждой кривой C , обхватывающей отдельную лопасть. Совершенно аналогичным рассуждением, как в § 20 (ограничение контрольного пространства вне лопасти), получаем, что между concentрических окружностей не пересекающих лопастей $\int (c_u r) dq$ — постоянен, а потому

средняя величина $c_u r$, определяемая выражением $\frac{\int c_u r \, dq}{Q}$, меняется только в пространстве лопастей.

Контрольное пространство можно использовать, чтобы вычислить составляющие R_r и R_u силы, действующей на каждую из лопастей, и направленные в радиальном и перпендикулярном к нему направлении. Однако оказывается, что надо знать течение в подробностях, так как силы на границах aa' и bb' не уничтожаются. Без такого более точного знания течения не удастся даже вычислить направления силы на лопасть.

Здесь можно получить данные о величине избыточного давления на переднюю и заднюю стороны лопасти. Если мы обозначим через h разницу радиусов наружного и внутреннего концов лопастей, что соответствует высоте параллельной решетки, то и имеем (фиг. 45b):

$$M_r = \int p_b \cos \beta_b r \, ds_b - \int p_r \cos \beta_r r \, ds_r = \int (p_b - p_r) r \, dr.$$

Обозначив Δp_m среднюю величину избыточного давления лопасти, мы можем заменить вышеприведенную формулу следующей:

$$M_r = \Delta p_m \int_{r_i}^{r_a} r \, dr$$

или

$$M_r = \Delta p_m \cdot h \cdot r_m,$$

где r_m есть средняя арифметическая из радиусов: наружного (оголовка) и внутреннего.

Из этого следует:

$$\Delta p_m = \frac{\gamma Q \Delta (u r)}{g h r_m}. \quad (108)$$

Все дальнейшие рассуждения, приведенные относительно параллельной решетки, например, относительно приближенного распределения давления, могут быть повторены и здесь. При этом c_x заменится величиной c_r , постоянная c_y — радиальной составляющей $c_r = \frac{Q}{2\pi r}$, линия, параллельная оси решетки ($y = \text{const}$), — конаксиальной окружностью (Parallel kreis) ($r = \text{const}$), сила R_x — моментом M_r .

22. Обмен энергией между текущей жидкостью и движущимся твердым телом

Во всех до сих пор рассмотренных примерах не могло быть речи об обмене энергией между потоком и телами. Так как рассматриваемые тела находились в покое, то силы, действовавшие на них, не могли производить какой-либо работы. Подобные течения надо рассматривать как установившиеся. У таких потоков энергия затрачивается только на трение и на прочие потери. Для того чтобы использовать энергию потока, надо, чтобы тела, приходящие с ним в соприкосновение, двигались. Но тогда абсолютное течение уже неустановившееся, а энергия потока может также меняться и в идеальных жидкостях.

Раньше, чем вывести величину сил, действующих на движущееся в потоке тело, необходимо вывести общее положение об изменении энергии для движущейся частицы жидкости в неустановившемся потоке идеальной жидкости.

В неустановившемся течении величины c и p являются функциями положения и времени; h — чистая функция положения. Таким образом энергия потока $\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g}$ является функцией времени и места. Ее субстанциальные изменения для материальной частицы совершенно аналогично, как и скорость, складываются из местных и конвективных изменений (ср. в § 8). Таким образом если мы пользуемся натуральной системой координат, то имеем:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial s} \quad (109)$$

(ср. § 8 и 9). Под этим подразумевается полное мгновенное изменение $[H]$ во времени, которое претерпевает частица в элемент времени dt вследствие изменения поля и благодаря своему продвижению на ds в направлении мгновенной абсолютной линии тока. Если мы в правую часть уравнения (109) внесем определяющее выражение для H , то получим:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) + c \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c^2}{2g} \right) + c \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{c^2}{2g} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) + \frac{c}{g} \frac{\partial}{\partial s} \left[g \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) \right] + \frac{c}{g} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial c}{\partial s} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) + \frac{c}{g} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[g \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) \right] + \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} \right\}. \end{aligned}$$

Но выражение в прямоугольных скобках по уравнению (22a) (Эйлерово уравнение в направлении мгновенных линий тока) равно 0. Таким образом остается:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right),$$

однако, и $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, так как высотное положение точки в пространстве не является функцией времени. Поэтому остается:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} \right). \quad (110)$$

Следовательно, субстанциальное изменение энергии течения отдельной частицы равняется локальному изменению пьезометрической высоты в точке поля, в которой она находится в данный момент.

Значение и применение этого положения будет ясно из последующих примеров.

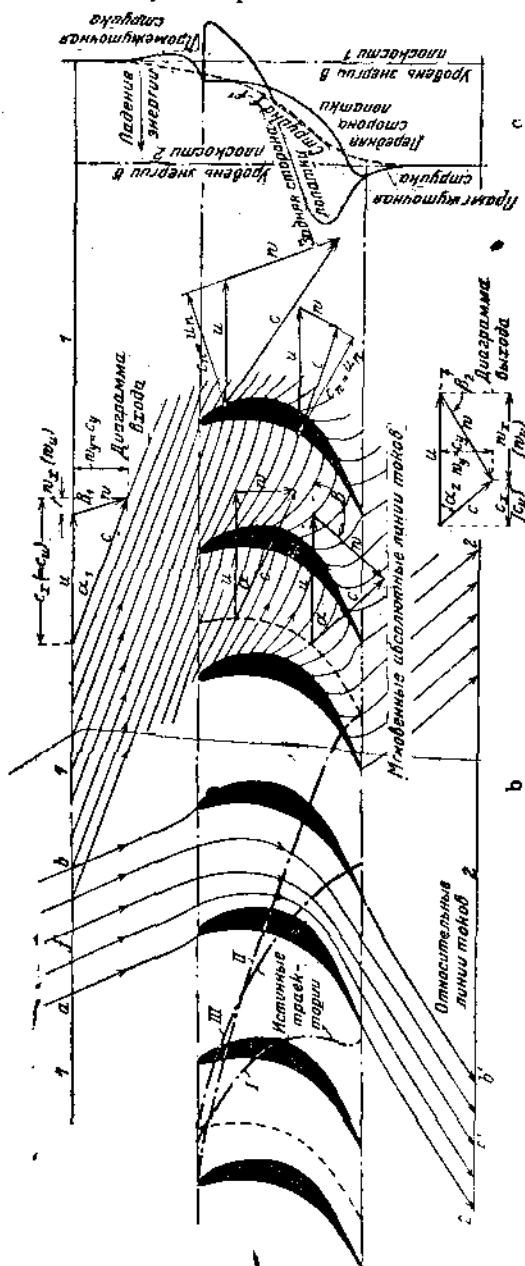
23. Равномерно обтекаемая прямая решетка, равномернодвигающаяся параллельно своей оси

а) Обзор течения

Параллельная решетка, изображенная на фиг. 46, движется с равномерной скоростью u по направлению своей оси. Одновременно, под определенным углом α_1 к ее оси притекает жидкость. Направляющий аппарат, необходимый для того чтобы получить такое направление потока, находится в таком расстоянии от решетки и имеет так много и так часто поставленные лопасти, что возможно говорить о постоянном направлении и постоянной величине скорости, поскольку на каждую единицу длины решетки приходится одинаковое количество жидкости. Никакого другого тела поток не должен встречать на своем пути. Тогда чисто кинематически решетка находится в каждое мгновение в одинаковом положении по отношению к потоку; иначе говоря, пограничные условия для потока одинаковы для каждого мгновения. Поток, идущий из бесконечности и снова уходящий в бесконечность, нигде не может проходить сквозь поверхности тел. Поэтому по всему контуру лопастей нормальная составляющая c_n существующей в нем мгновенной абсолютной скорости должна быть равна проекции u_n поступательной скорости на направление нормали в соответственной точке контура, т.е. $c_n = u_n$. На фиг. 46а для двух точек последней лопасти изображено построение скоростей, поясняющее эти условия для передней и задней поверхностей лопатки. Картина мгновенных абсолютных линий тока в каждое мгновение имеет тот же вид и то же расположение по отношению к решетке; она передвигается вместе с решеткой, как если бы она была с ней тесно связана.

Если мы геометрически сложим абсолютную скорость с противоположно направленной переносной (судна, решетки) скоростью т. е. с $-u$, то получим относительную скорость $\bar{w} = \bar{c} - u$. Так как u постоянно во времени, то относительная картина линий тока тоже постоянна; относительное течение есть течение установившееся. На фиг. 46b в качестве относительного движения взято движение, изображенное на фиг. 39a для неподвижной решетки. Вычерченные там абсолютные скорости c приняты здесь за относительные скорости. Таким образом равномерные скорости $\bar{w}$ в плоскости 1 равны равномерным скоростям c предыдущего случая, а величины настоящих скоростей c получены геометрическим сложением скоростей u и $\bar{w}$, так что $c = u + \bar{w}$. Значит мгновенная картина абсолютного течения получилась из относительного течения посредством наложения постоянной скорости u .

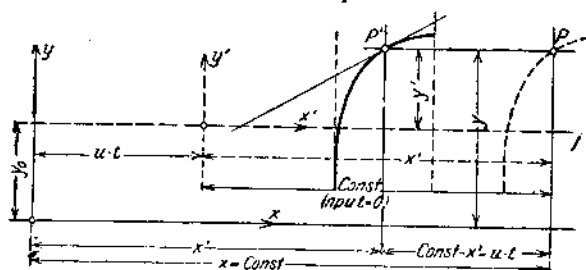
Возникает вопрос: допустимо ли это? Не меняется ли течение через отдельные каналы лопастной решетки относительно нее, когда она равномерно движется по прямой линии, даже в том случае, если приняты меры, чтобы приток жидкости к решетке оставался одинаковым? Ответ следующий.



Фиг. 46, а, б, с. Протекание через прямолинейную равномерно движущуюся решетку.

¹ По способу, предложенному Максвеллом, который будет разъяснен в т. 2.

Распределение давления в установившемся поле течения так тесно связано с конвективным ускорением, что падение давления в направлении этого ускорения уменьшается и пропорционально ему. Увеличение скорости постоянно по времени, а также по величине и направлению во всем поле. Ускорение остается постоянным и, следовательно, распределение давления также остается одинаковым. Вместе с тем отпадает причина для изменения линий тока перво-



Фиг. 46d.

$P(x, y)$ = абсолютно неподвижное местоположение наблюдателя

$P'(x', y')$ = неподвижное относительно подвижной решетки

$$x = x' + u \cdot t; \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dx'} \cdot (-u) = -u \frac{d}{dx'}$$

Пространственная диаграмма $p = p(x')$ для неподвижного наблюдателя в точке P (при движении решетки) превращается в временную $p = p(t)$ согласно $t = \frac{\text{const} - x'}{u}$.

Отсюда следует:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_P = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right) \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x'} \cdot (-u) = -u \frac{\partial p}{\partial x'}$$

же диаграмма скоростей и давлений, которую наносят параллельно решетке, имеет периодический характер (как, например, изображенная на фиг. 39b). Для наблюдателя, помещающегося неподвижно в пространстве, пространственная периодичность этой диаграммы изменяется во временную. Диаграмма движется мимо него вместе с решеткой и он замечает поэтому из своей точки наблюдения периодические по времени колебания скорости и давления. Если x и y (фиг. 46d) суть координаты, параллельные и перпендикулярные к решетке и тесно с ней связанные (т. е. координатная система подвижна), то наступит время, когда он (наблюдатель) наблюдает определенное состояние p, w , имеющее место в точке, удаленной от начала координат на расстояние x' , равное $\frac{\text{const} - x'}{u}$, где const представляет собой расстояние x от наблюдателя до начала координат в момент $t = 0$. Для наблюдателя, находящегося в неподвижной точке, временное и местное изменение состояния, например $\frac{\partial p}{\partial t}$, может быть в данном случае определено из диаграммы относительного

начального поля при их переходе в относительные линии тока нового поля.

Таким образом получается, что картина линий тока решетки по фиг. 39a остается в качестве относительной картины линий тока, если решетка движется равномерно прямолинейно (например, параллельно своей оси) и если абсолютная скорость $\bar{c}$ направлена так, что относительная скорость $\bar{w}$ остается такой, какой была раньше при неподвижной решетке. Таким образом относительное и мгновенно абсолютное поле передвигается вместе с решеткой. Точно так

движения $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x'} = -u \frac{\partial p}{\partial x'}$. Вместо относительного dx' может

быть написано абсолютное: $\frac{\partial p}{\partial t} = -u \frac{\partial p}{\partial x}$ (ср. фиг. 46d). Этот вывод относится ко всякому случаю с относительным установившимся движением, независимо от того, какой вид оно имеет.

Таким образом абсолютное движение является периодическим. Это сказывается и на виде истинного пути отдельной частицы. Если мы представим себе наблюдателя в неподвижной точке пространства непосредственно у входа в решетку, то он увидит различные частицы жидкости, приходящие одна за другой. В зависимости от того, близка ли в это мгновение лопасть или далека от данной точки, частица описывает совершенно различные истинные пути. Таким образом из одной и той же точки пространства исходят периодически колеблющиеся пути. На фиг. 46b изображены 3 подобных пути. Два из них I и II являются путями частиц, из которых одна проходит вдоль вогнутой стороны лопасти, другая — вдоль ее выпуклой стороны. Третий путь III является путем частицы, которая совершенно не соприкасается с лопастью, а движется в середине между лопастями.

б) Определение сил взаимодействия между лопатками и потоком

Так как распределение относительного давления на лопасти в каждое мгновение одинаково и совершенно то же, что и при неподвижных лопастях, то можно применить формулу уравнения (89a) или (90a), и написать dq' вместо dq и w_x вместо c_x и под dq' подразумевать количество воды, протекающей в относительной элементарной струйке.

Таким образом мы имеем:

$$R_x = \frac{\gamma}{g} \int_0^t (w_{x_1} - w_{x_2}) dq'; \quad R_y = \int_0^t (p_1 - p_2) dx. \quad (111), (112)$$

Но так как пограничные поверхности 1 и 2 параллельны направлению движения, то относительное количество воды равно абсолютному dq ; оба они $\neq c_y dx$. Далее

$$w_{x_1} = c_{x_1} - u \quad \text{и} \quad w_{x_2} = c_{x_2} - u.$$

Поэтому

$$R_x = \frac{\gamma}{g} \int_0^t (c_{x_1} - c_{x_2}) dq. \quad (113)$$

или, если в пределах 1 и 2 уже существует одинаковое распределение скорости:

$$R_x = \frac{\gamma Q}{g} (c_{x_1} - c_{x_2}). \quad (114)$$

Таким образом все снова свелось к абсолютным величинам и формула сделалась совершенно тождественной прежней.

Это рассуждение приводит к заключению, что для вычисления суммы $\sum \Delta m \frac{dc_x}{dt}$ мы можем в какое-либо мгновение заключить одну лопасть в контрольное пространство, подобное прежнему, ограниченное двумя одинаковыми, отстоящими друг от друга на один шаг, относительными линиями тока, и что это пространство может быть затем разбито на элементарные относительные струйки с относительным расходом воды dq' .

Тогда мы непосредственно получаем:

$$R_x = \frac{\gamma}{g} \int^i (c_{x_1} - c_{x_2}) dq'$$

и необходимо только установить, что $dq' = c_y dx = dq$.

с) Обмен энергией

Если лопасти двигаются и поток действует на них в направлении движения с силой R_x , то производится работа, равная

$$A = R_x \cdot u \text{ [кгм/сек]} = \frac{\gamma u}{g} \int^i (c_{u_1} - c_{u_2}) dq, \quad (115)$$

при этом мы пишем теперь c_u вместо c_x . Этой работе соответствует величина уменьшения энергии потока, на каковую и отличается энергия в области перед решеткой от энергии позади решетки. Каждый килограмм жидкости снижает поэтому свой уровень энергии на ΔH

и работа A измеряется — $\gamma \int \Delta H \cdot dq$, если мы под ΔH подразумеваем приращение энергии. Таким образом следует:

$$\gamma \int^i dq \Delta_1^2 H = \frac{\gamma}{g} u \int^i (c_{u_1} - c_{u_2}) dq. \quad (116)$$

Дифференцированием получаем для отдельных относительных элементарных струек

$$\Delta_1^2 H = \frac{u}{g} (c_{u_1} - c_{u_2}) = \frac{u}{g} \Delta_1^2 c_u. \quad (117)$$

Если c_u при прохождении жидкости через решетку увеличивается (c_u положительное по направлению u), то и H возрастает (действие насоса, машины-орудия); если оно уменьшается, то падает и H (действие турбины, машины-двигателя).

В идеальной жидкости $\frac{u}{g} \Delta_1^2 c_u$ является единственной разницей энергии. Вывод и его результат могут вызвать представление, что они ограничиваются сравнением начального и конечного состояния. Поэтому надо дать второй вывод, который основывается на общем положении, рассмотренном в § 22. По нему субстанциальное

изменение энергии движения частицы идеальной жидкости выражается в виде

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} \right).$$

Вместо этого мы можем (как ясно из п. „а“) написать это выражение еще так:

$$\frac{dH}{dt} = -u \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{p}{\gamma} \right).$$

Здесь x' означает координату неподвижной точки в относительном поле. Но для одного и того же места и того же времени (ср. еще раз фиг. 46d) абсолютная величина изменения $\frac{\partial p}{\partial x}$ не отличается от относительной, так что можно написать:

$$\frac{dH}{dt} = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} \right).$$

Для $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} \right)$ можно написать уравнение Эйлера для направления $u = x$. Если мы не примем во внимание силу тяжести, то уравнение получается:

$$\frac{dc_u}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} \right).$$

Подставив из этого уравнения значение производной, получим:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{u}{g} \cdot \frac{dc_u}{dt},$$

или

$$dH = \frac{u}{g} dc_u, \quad (118)$$

т. е. для движущейся частицы в каждой точке энергия течения меняется в той же мере и в том направлении, в каком меняется составляющая c_u ее абсолютной скорости.

(Если принимать во внимание силу тяжести, то H будет иметь слагаемое h ; диаграмма давления над лопастью уже изображает не $\frac{p}{\gamma}$, но сумму $\frac{p}{\gamma} + h$, которая имеет периодически возвращающуюся величину; вместо $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} \right)$ можно написать $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$, так как $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. С другой стороны, мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = u \frac{dc_u}{dt}.$$

Уравнение (118) после интегрирования дает:

$$H - \frac{u c_u}{g} = \text{const},$$

или

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2 - 2u c_u}{2g} = \text{const} \quad (119)$$

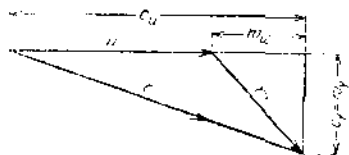
и это уравнение заменяет уравнение $H = \text{const}$, которое применялось для установившегося абсолютного движения (т. е. движения без обмена энергией). Посредством связи, существующей между абсолютным и относительным движением $c = u + w$, которая может быть выражена также двумя уравнениями: $c_x = u + w_x$ и $c_y = w_y$, уравнение (119) (фиг. 47) может быть еще преобразовано, а именно: так как $w^2 = c^2 - 2uc_x + u^2$ и, следовательно, $c^2 - 2uc_x - w^2 = u^2$, то уравнение (119) принимает вид:

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} = \text{const}, \quad (120)$$

но если само u постоянно во всем поле, то получается:

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{w^2}{2g} = \text{const}, \quad (121)$$

этим снова подтверждается положение, высказанное нами в п. "а", что распределение давления, а с ним и распределение скоростей относительного движения в прямолинейно движущейся решетке, имеет совершенно такой же вид, как распределение давления и скорости в подобной неподвижной решетке (при одинаковом относительном истечении).



Фиг. 47. Диаграмма скоростей.

Из вышесказанного видно, что обмен энергией может начинаться, вообще говоря, далеко перед решеткой и кончаться далеко за нею. Практически область постоянной энергии лежит довольно близко (на расстоянии приблизительно l) перед решеткой и за нею. На фиг. 46с изображено изменение энергии для трех частиц при их переходе из одной области в другую. Две из этих частиц двигаются относительно лопасти по разделяющей линии тока (по вогнутой и задней стороне лопасти), третья — по средней (относительной) линии тока.

Теоремы о величине и направлении реакции R лопасти и ее составляющих R_x и R_y , которые были доказаны в § 20 п. "е" для неподвижной решетки и которые выражаются уравнениями с (92) до (95), применимы и к равномерно прямолинейно движущейся решетке. Надо только вместо абсолютной скорости c подставить относительную скорость w .

Если в уравнение (115) для R_x введем его выражение через циркуляцию лопасти Γ_s [уравнение (95)], то получим:

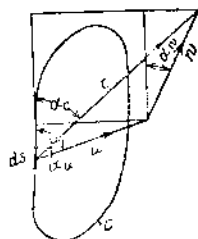
$$A = R_x u = \frac{\gamma Q}{g t} \Gamma_s u = -\gamma Q \Delta H.$$

Таким образом следует также:

$$\Delta H = -\frac{u}{g} \frac{\Gamma}{t}. \quad (122)$$

Γ_s может быть вычислено по какой-либо кривой, охватывающей лопасть, и как из мгновенной абсолютной картины, так и из относительной (фиг. 48):

$$\Gamma_s = \int_C c \cdot \cos \alpha_c ds = \int_C u \cdot \cos \alpha_u ds + \\ + \int_C w \cdot \cos \alpha_w ds = \int_C w \cdot \cos \alpha_w ds,$$



Фиг. 48. Определение циркуляции по относительным или абсолютным скоростям.

потому что $\int_C u \cdot \cos \alpha_u \cdot ds$ вследствие постоянства величины и направления u для всякой замкнутой кривой равняется нулю. Γ_s будет положительной величиной, если направление вращения на кривой C при входе в решетку совпадает с направлением движения решетки.

В вязких жидкостях разница в энергии, которую вызывает решетка, меньше или больше, чем в идеальной жидкости. Часть энергии потока тратится на преодоление сопротивления трения на покрытие потерь. Эта величина является потерей энергии при протекании через решетку. Вместо уравнения (117) тогда имеем:

$$\Delta_1^2 H = \frac{u}{g} \Delta_1^2 c_u - h_{v1 \rightarrow 2}, \quad (117a)$$

при этом $h_{v1 \rightarrow 2}$ обозначает потерю энергии. Вместо уравнения получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\gamma} + h + \frac{w^2}{2g} + h_{v1 \rightarrow 2} &= \text{const}, \\ \text{или} \end{aligned} \right\} \quad (120a)$$

$$\frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{w_1^2}{2g} - h_{v1 \rightarrow 2}.$$

Эти уравнения пригодны как для насосов, так и для турбин. Для случая турбины в уравнении (117a) стоят только отрицательные величины, так что в правой части равенства получается сумма $\frac{u}{g} \Delta c_u$ и h_v .

Для случая насоса отношение

$$\frac{\frac{u}{g} \Delta_1^2 c_u - h_{v1 \rightarrow 2}}{\frac{u}{g} \Delta_1^2 c_u} = 1 - \frac{h_{v1 \rightarrow 2}}{\frac{u}{g} \Delta_1^2 c_u},$$

а для случая турбины отношение:

$$\frac{\frac{u}{g} \Delta_2^1 c_u}{u c_u \Delta_2^1 + h_{v1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{1 + \frac{h_{v1 \rightarrow 2}}{\frac{u}{g} \Delta_2^1 c_u}}.$$

24. Равномерно вращающаяся вокруг своей оси круговая решетка при равномерном протекании жидкости

Если мы представим себе поток, протекающий через неподвижную круговую решетку, то на основании предыдущего нельзя счи-

Фиг. 49. Протекание через равномерно вращающуюся круговую решетку.

108

На контуре лопастей c_n должно равняться u_n . Таким образом картина мгновенных абсолютных линий тока вращается, будучи тесно связанной с решеткой, вокруг ее оси. Наблюдатель, находящийся в неподвижной точке, и здесь будет испытывать периодические колебания давления и скорости и совершенно так же, как и раньше, их можно прочесть на диаграмме давлений и скоростей, связанной с решеткой и вращающейся с нею. На основании этого совершенно аналогично находим, как и раньше, для местного изменения давления, наблюдаемого в неподвижной точке, выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = -u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = -\omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right), \quad (123)$$

при этом φ обозначает угол поворота вокруг оси; $r d\varphi$ — это элемент дуги конаксиального круга, на котором находится наблюдатель.

б) Вычисление момента

Для определенного мгновения снова выделяем около одной лопатки контрольное пространство, заключенное между двумя поверхностями, отстоящими друг от друга на длину одного деления $t_\varphi = \frac{2\pi}{z}$, совпадающими с относительными линиями тока и между цилиндрическими поверхностями с радиусами r_1 и r_2 . Это пространство разбиваем на элементарные относительные струйки, по которым протекает относительное количество жидкости dq' , и вычисляем сумму $\sum \Delta m \frac{d(c_n r)}{dt}$. Посредством тех же рассуждений, как в § 21 п. „б“ мы получаем:

$$M_r = \int [(c_n r)_1 - (c_n r)_2] dq'.$$

Снова на ограничивающих поверхностях 1 и 2 относительный расход воды равен $dq' = dq = c_r r dq$; поэтому можно написать:

$$M_r = \frac{2\pi}{z} \int_0^{2\pi} \Delta_2^1 (c_r r) dq, \quad (124)$$

или, когда в 1 и 2 существует равномерное распределение скоростей:

$$M_r = \frac{2\pi Q}{z} \Delta_2^1 (c_r r). \quad (125)$$

с) Обмен энергией

Реакция лопастей производит работу:

$$A = M\omega \text{ [кгм/сек]} = \gamma \omega \int_0^{2\pi} \Delta_2^1 (c_r r) dq.$$

В данном случае должен существовать эквивалент изменения энергии течения, равный

$$= \gamma \int_0^{2\pi} \Delta_1^2 H.$$

Из уравнения следует:

$$\Delta_1^2 H = \frac{\omega}{g} \Delta_1^2 (c_u r). \quad (126)$$

Таким образом изменение энергии течения пропорционально изменению произведений $c_u \cdot r$ или $u \cdot c_u$ и им равнозначно. Подобный же вывод можно получить для идеальной жидкости из отношений $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$. Правая сторона, как мы знаем из п. „а“, может быть заменена $-u \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$. Для выражения $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right)$ может быть написано уравнение момента. Это выражение, умноженное на γ , представляет составляющую сил, направленных по окружности и отнесенных к единице объема. Если мы его умножим на r , то получим момент силы, относящийся к единице объема. Этот момент по теореме о статическом моменте равен изменению произведения $c_u r$ для массы единицы объема.

Таким образом мы имеем:

$$-r \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) \gamma = \frac{\gamma}{g} \frac{d}{dt} (c_u r),$$

или

$$-u \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = \frac{\omega}{g} \frac{d(c_u r)}{dt}.$$

В заключение получаем:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\omega}{g} \frac{d}{dt} (c_u r),$$

или

$$dH - \frac{\omega}{g} d(c_u r) = 0 \quad \text{и} \quad H - \frac{\omega}{g} (c_u r) = \text{const.} \quad (127)$$

Таким образом мы вывели совершенно аналогичные формулы, как в § 23. Дальнейший разбор этих соотношений будет сделан при рассмотрении рабочих колес. Здесь мы можем ввести понятие циркуляции. Применяя уравнение (107), получим:

$$A = M\omega = \frac{\gamma Q}{g} \frac{z \Gamma_s}{2\pi} \omega = -\gamma Q \Delta H,$$

а отсюда, совершенно соответственно уравнению (122):

$$\Delta H = -\frac{\omega}{g} \frac{z \Gamma_s}{2\pi} = -\frac{\omega}{g} \frac{\Gamma_s}{t_\varphi}. \quad (128)$$

Γ_s считается положительной, если направление вращения кривой S совпадает с направлением вращения решетки. И здесь Γ_s может быть вычислено как из относительной, так и из абсолютной картины течения.

Для вязких жидкостей применимы те же рассуждения, что и для параллельной решетки.

В. РАБОЧИЕ КОЛЕСА С ПОЛНЫМ ПОДВОДОМ В ОГРАНИЧЕННОМ ПОТОКЕ

VI. Описание рабочих колес с подводом, по всей окружности и их поля течения.

25. Основные элементы конструкции рабочих колес с подводом по всей окружности в закрытом потоке

В последней главе мы видели, что обмен энергией между текущей жидкостью и двигающимися в ней твердыми телами наступает только тогда, когда эти тела определенным образом изменяют скорости течения, а именно при прямолинейном движении должны изменяться составляющие скорости c_u , параллельные направлению движения; при вращательном движении меняется произведение $c_u r$, где c_u есть касательная составляющая. Прямолинейного движения в наших машинах не бывает, но иногда оно рассматривается как идеализирование реального движения (например, в так называемых осевых колесах). Таким образом мы можем определить рабочие колеса как такие машины, для действия которых весьма существенно изменение момента скорости $c_u r$.

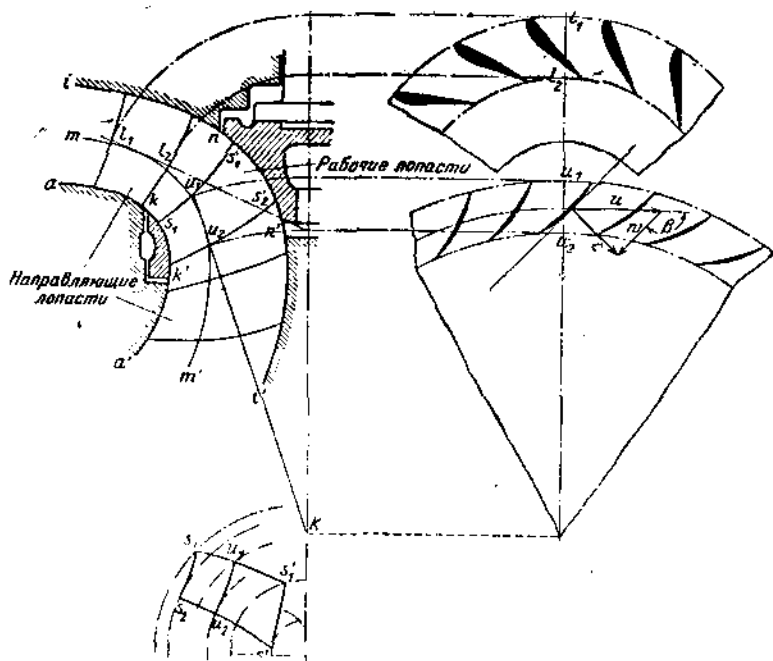
Следовательно, мы должны прежде всего установить начальный момент $c_u \cdot r$, с которым поток входит на рабочее колесо; величина этого момента зависит от формы лопатки и одновременно от ее вращения.

Начальный момент $c_u \cdot r$ возникает под влиянием какого-либо направляющего аппарата. Аппарат этот в простейших случаях может являться трубой, подходящей к рабочему колесу в направлении его оси с поперечным сечением, перпендикулярным к оси машины, и поэтому подводящей жидкость непосредственно к рабочему колесу без возбуждения момента ($c_u r = 0$).

Труба может подходить также перпендикулярно к оси. Тогда, если приток к рабочему колесу должен происходить по осевому направлению, можно изменить его направление посредством колена. Если желают создать момент $c_u \cdot r$, то его можно получить при помощи спиральной камеры, расположенной перед колесом. Чаше, однако, сама труба охватывает рабочее колесо, образуя спиральную камеру. В обоих случаях она имеет прорез, пропускающий жидкость к колесу, по возможности равномерно распределенной по всей его окружности. При этом получается определенная касательная скорость c_u и определенный ее момент $c_u r$. Чтобы регулировать начальный момент $c_u \cdot r$ в современных турбинах устраивают особые направляющие лопатки, обладающие подвижностью, для изменения либо живого сечения потока либо направления лопатки, или того и другого вместе, что позволяет изменять величину и направление скорости течения, направляющегося к колесу. Лопатки вместе с приводным механизмом, необходимым для их перестановки, представляют собой направляющий аппарат. Такой аппарат может быть устроен как при осевом притоке, так

и при притоке извне к внешней окружности колеса. Далее, приток может происходить из большей или меньшей водяной камеры, в которой располагают турбину. Камера может быть открытой и находиться в конце канала, или она может быть закрытой, и тогда помещается в конце трубопровода.

Для отвода воды применяются те же устройства, что и для подвода ее, т. е. трубы, колена, спиральные камеры. Сообразно с обстоятельствами можно также регулировать вытекание жидкости посредством подвижных или неподвижных направляющих лопаток.



Фиг. 50. Схема одноступенчатой турбомашины.

Приспособления для подвода или отвода жидкости могут находиться как в области высокого, так и в области низкого давления всей установки. Они имеют специальные названия, как всасывающие трубы, всасывающие колена, всасывающие спирали и, соответственно напорные трубы, напорные спирали.

Так как колесо является частью машины, симметричной относительно ее оси, то благодаря этому оно лучше всего работает при равномерном распределении жидкости, таким образом подвод воды к колесу и отвод ее от колеса стремятся осуществить симметричным к оси. Это существенно для конструирования соответствующих органов машины.

Все части машины, расположенные непосредственно около колеса, объединяются в одну камеру, внутри которой и работает колесо. К ней примыкают вodoпроводящие органы, и во всем этом устанавливается течение из „нижнего бьефа“ (уровня) в „верхний“ или наоборот, как в сплошном трубопроводе (с находящимся внутри него

колесом). Условия, определяющие расположение колеса между верхним и нижним уровнем воды, определяются характером работы машины, т. е. они зависят от распределения давления.

Наличие трубопровода, закрытого на всем протяжении между верхним и нижним уровнем, существенно для рабочих колес, рассматриваемых в этом отделе В. Таким образом на всем пути между верхним и нижним уровнем поток не соприкасается с атмосферой; поэтому в нем может возникнуть давление, меньшее атмосферного. Однако оно ни в коем случае не должно настолько приближаться к абсолютному, вакууму, чтобы в жидкости начали выделяться растворенные в ней газы, или чтобы сама жидкость начала испаряться (опасность кавитации, ср. § 10, п. „d“).

Можно также располагать между нижним и верхним уровнем воды несколько рабочих колес, параллельно одно другому или одно за другим так, что жидкость будет или протекать через каждое колесо, соответственно им, разделенной массой, или вся масса жидкости будет протекать поочередно через все колеса. В первом случае говорят о двойных или многократных рабочих колесах, а также о машинах многоструйных, во втором — о многоступенчатых машинах. Совершенно особый случай представляют собою колеса, заключенные в замкнутой камере так, что движущаяся жидкость совершенно не выходит из камеры, но непрерывно описывает внутри камеры замкнутый путь (турбинная передача, например, трансформатор Феттингера). Типы рабочих колес различаются, главным образом, формой самого колеса и его направляющего аппарата. Можно считать целесообразной нижеследующую схему одноступенчатой турбомашин.

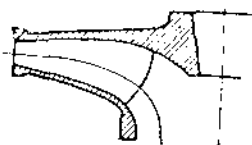
Схема одноступенчатой турбомашин

На фиг. 50 линии aa' и ii' представляют меридиональные линии внешней и внутренней поверхностей вращения. Часть внешней поверхности, на фигуре отрезок kk' , образуется профильными линиями внешнего обода колеса или просто обода колеса; внутренний отрезок nn' — профильными линиями внутреннего обода колеса или втулкой. Между этими обоими отрезками находятся рабочие лопатки, которые соединяют оба обода (или обод и втулку). Они показаны на фигуре в плане, обе линии чертежа s_1s_1' и s_2s_2' являются меридиональными линиями двух поверхностей вращения, на которых расположены концы лопаток. В общем они (концы лопаток), как это видно на горизонтальной проекции, где одинаковые буквы обозначают ребра лопаток, не находятся в одной плоскости (плоскости, проходящей через ось). Линии s_1s_2 и $s_1's_2'$ на плане являются проекциями пространственных кривых, получающихся как пересечение поверхностей вращения с поверхностью лопатки.

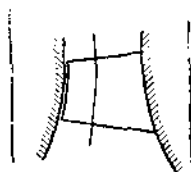
Для того чтобы получить дальнейшее представление о форме (в общем двойная кривизна) поверхности лопатки, мы ее разрежем еще средней поверхностью вращения, например mm' . Чтобы изобразить этот разрез, проводим к поверхности вращения, приблизительно посередине между концами лопаток, касательный конус,

который, конечно, имеет свою вершину в оси вращения, например, в K . Отрезок поверхности вращения, лежащий между ребрами лопатки, мы немного искривляем так, чтобы дуга $n_1 n_2$ наложилась на образующую линию конуса. Этот конус мы разворачиваем на плоскость чертежа и получаем приближенные изображения лопаток в пересечении их с поверхностью вращения mm' . Тут же на развертке можно нарисовать примерную картину протекания через решетку лопаток, так как поверхность mm' является также приближенной поверхностью потока, протекающего с постоянными скоростями, направление которых приблизительно совпадает с касательными плоскостями. На горизонтальном разрезе разрез лопаток виден по кривой $n_1 n_2$, имеющей одинаковое направление с $s_1 s_2$ и $s_1' s_2'$.

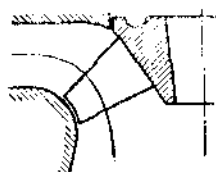
Обе поверхности вращения aa' и ii' образуют неподвижные границы камеры, внутри которой находится полость вращения, в кото-



Фиг. 51. Радиальное колесо.



Фиг. 52. Осевое колесо.



Фиг. 53. Диагональное колесо.

рой протекает рабочий поток. Полость вращения впереди и соответственно позади лопаток переходит в другой орган машины, — орган, подводящий или отводящий воду, который уже не имеет симметричной формы. Как впереди, так и позади рабочих лопаток могут быть установлены решетки из направляющих лопаток. В этом случае они располагаются в полости вращения, следовательно, между поверхностями вращения aa' и ii' . В общем и направляющие лопатки могут быть изогнутыми поверхностями двойной кривизны. Их форму можно получить аналогично форме рабочих лопаток (фиг. 50). Неподвижная часть камеры, которая связывает оба направляющие аппарата или один из них, продолжается в виде крышки или дна до сальника вала колеса и целиком закрывает колесо. Пространство между колесом и камерой тоже наполнено жидкостью, которая находится в определенном движении, но не принимает участия в обмене энергией между потоком и колесом. Пространство между ободом колеса и неподвижной частью камеры называется зазором обода, промежуточное же пространство между двумя системами лопаток, между которыми протекает поток, производящий работу, называется зазором лопаток. Последний всегда имеет величину другого порядка, чем зазор обода. Новые рабочие колеса часто не имеют наружного обода; отрезок kk' поверхности aa' выполняется в виде неподвижной части камеры, в которой двигаются лопатки с незначительным просветом; этот просвет обыкновенно называют тоже зазором обода.

В зависимости от того, лежит ли рабочее колесо в полости вращения, ограничивающие профили которой идут перпендикулярно,

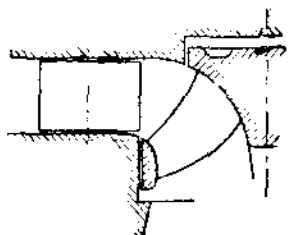
наклонно или параллельно оси, говорят о колесе радиальном, диагональном и осевом. При этом нет необходимости, чтобы кривые профиля полости вращения были направлены точно перпендикулярно, или точно параллельно оси; достаточно, если таким будет основное направление. Таким образом колесо, изображенное на фиг. 51, обозначается как радиальное, хотя профили обода и идут не строго радиально и частично имеют поворот в осевую часть полости вращения. Колесо, изображенное дальше на фиг. 52, будет называться осевым, хотя ограничивающие кривые полости не строго параллельны оси. Диагональное колесо изображено на фиг. 53.

Между тремя названными формами могут быть всевозможные переходные.

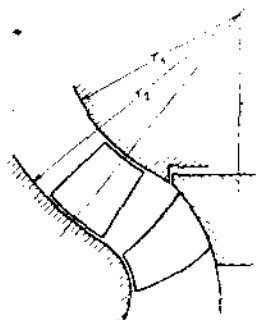
Направляющие аппараты с поворачивающимися лопатками располагаются большей частью ввиду конструктивной простоты в пространстве, расположенном радиально и, кроме того, ограниченном параллельными стенками, причем оси вращения лопаток параллельны оси машины (фиг. 54). Однако бывает, что такие же аппараты располагаются в пространстве диагонально и ограничены двумя концентрическими шаровыми поверхностями, причем оси вращения лопаток являются образующими линиями конуса, вершина которого вместе с центром шаровой поверхности лежит в одной точке оси машины (фиг. 55). Эти обе формы можно различать как радиальные и диагональные направляющие аппараты. Очень редко встречаются осевые направляющие аппараты. Лопатки рабочих колес большей частью крепко связаны с ободами (они или вылиты из одного куска, или сделаны из листового железа и вставлены или влиты в ободья; также встречаются соединения при помощи заклепок и сварные соединения).

Новые осевые колеса имеют поворачивающиеся рабочие лопатки (турбина Каплана). Вовсе не исключено, что в будущем будут построены также радиальные и диагональные колеса с поворачивающимися рабочими лопатками.

Описанная турбомашина может принципиально являться одинаково и насосом и турбиной. В обоих случаях жидкость принципиально может проходить через нее как в одном, так и в другом направлении. Различают внутренний и внешний подвод воды.



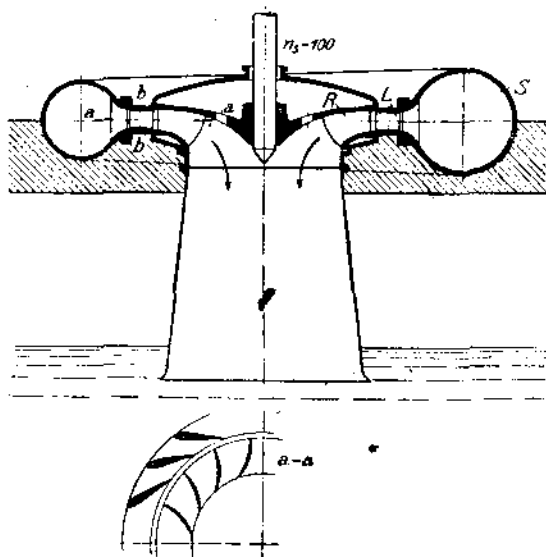
Фиг. 54. Поворотные направляющие лопатки между плоскими стенками.



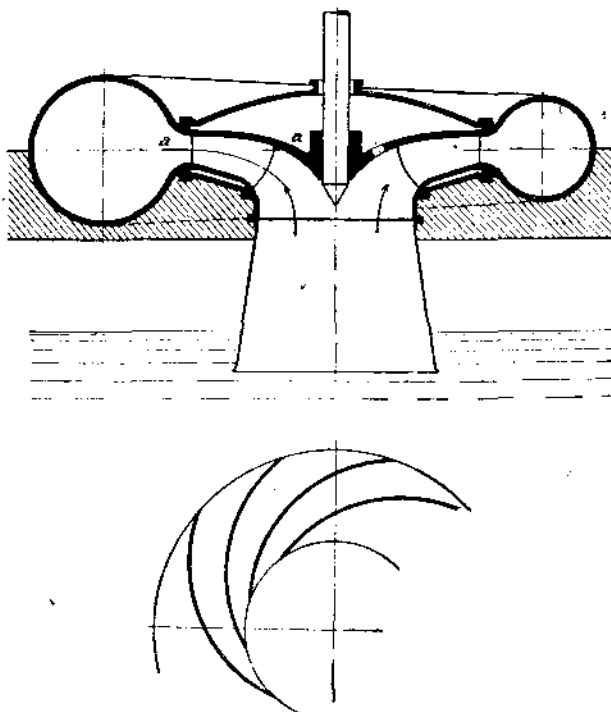
Фиг. 55. Поворотные направляющие лопатки между шаровыми поверхностями.

26. Краткое описание характерных конструкций турбомашин.

Фиг. 56а показывает схематический разрез по оси одноколесной турбины с вертикальным валом. Вода поступает через спиральную камеру *S* в направляющий аппарат *L* и через него к рабочему колесу *R*. Приток к колесу происходит, не считая

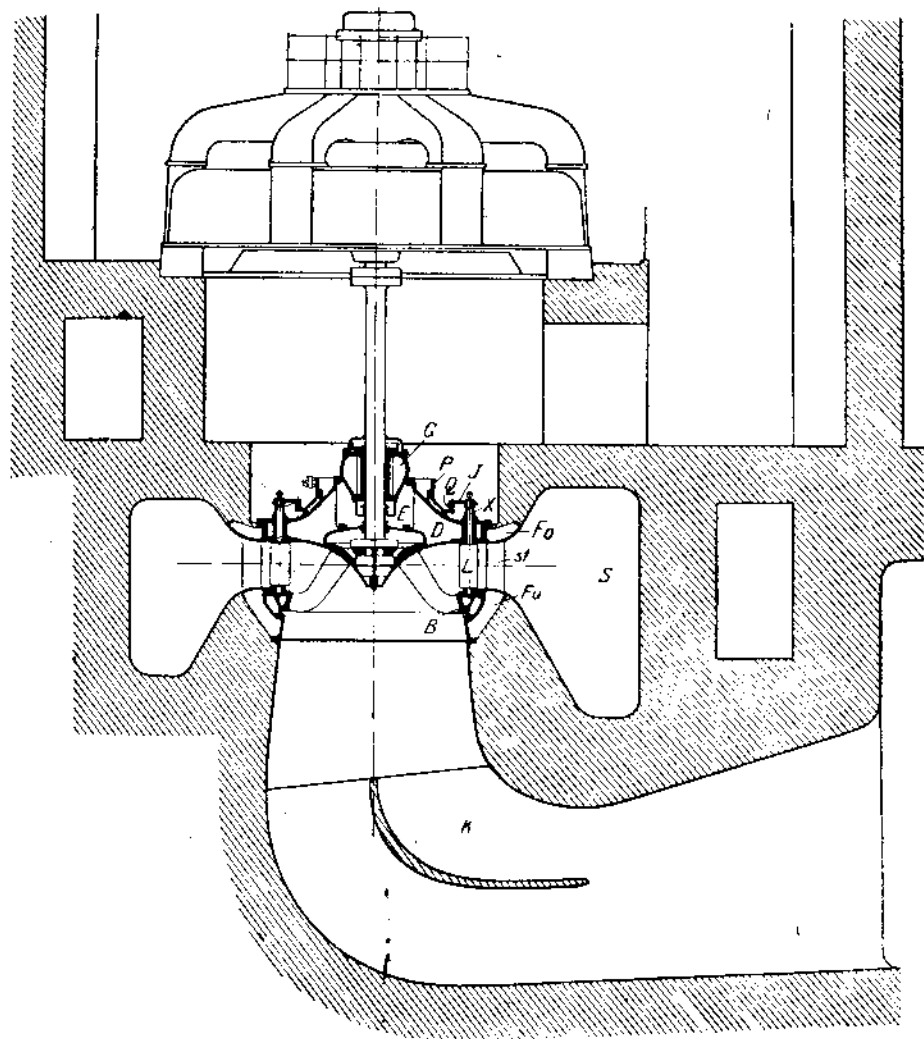


Фиг. 56а и б. Одноколесная вертикальная турбина.



Фиг. 57а и б. Насос с вертикальным валом.

касательных составляющих, чисто радиально; колесо изменяет направление всего потока (за исключением касательного направления) в осевое. В конце концов вода вытекает по концентричной, прямолинейной, конусообразно расширяющейся трубе в нижний бьеф.

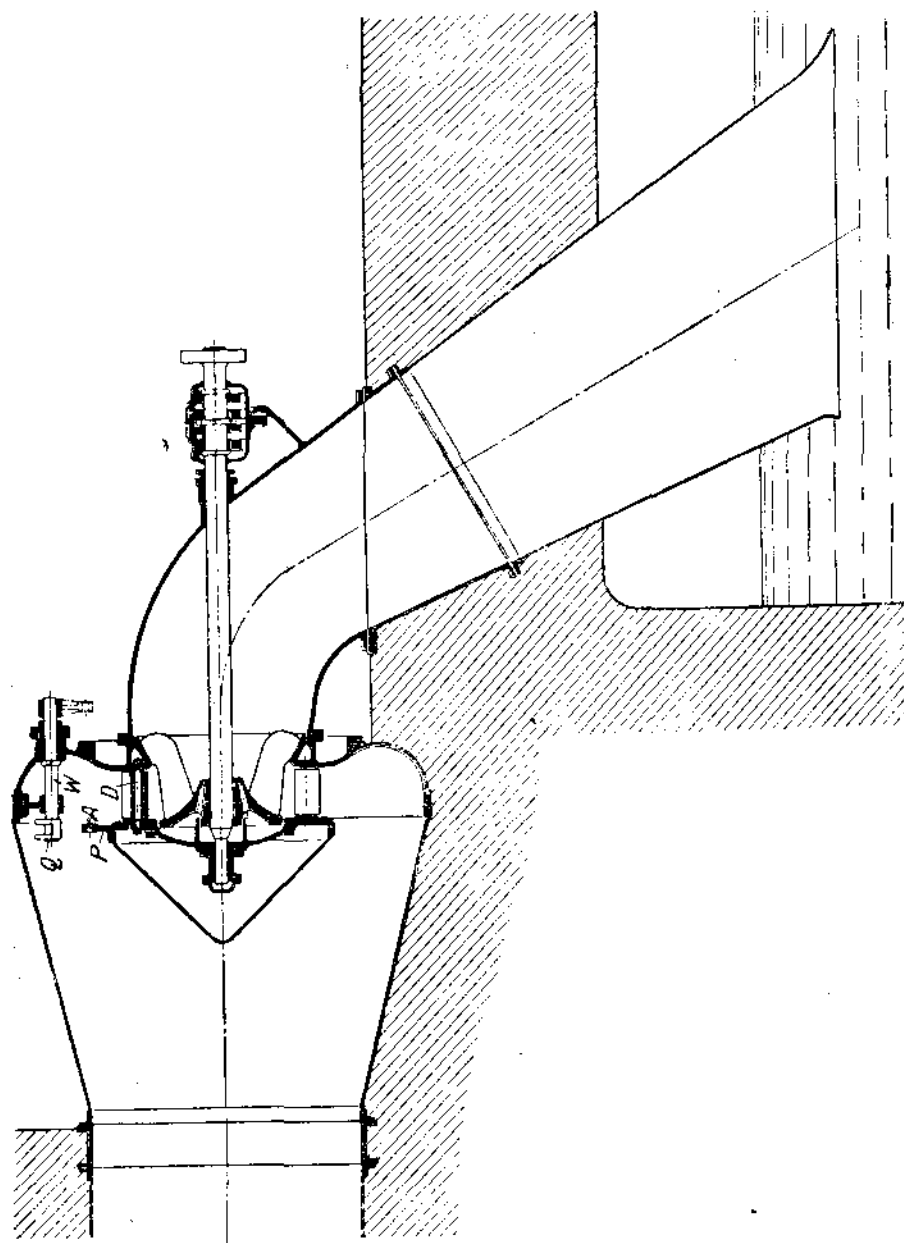


Фиг. 54. Одноколесная турбина в бетонной камере и с бетонной всасывающей трубой.

Фиг. 56b показывает разрез направляющих и рабочих лопаток по средней плоскости направляющего аппарата *аа*. Направляющие лопатки изображаются в этом разрезе в своей истинной форме, рабочие же лопатки — только в том случае, если они будут поверхностями цилиндра, чего при изображенном на фигуре колесе большей частью не бывает. Механизм, приводящий в движение направляющие лопатки, здесь не изображен, однако можно себе представить,

как благодаря одновременному повороту всех направляющих лопаток вокруг осей bb изменяется направление струи и ее поперечное сечение настолько, что движение жидкости может быть прекращено вплоть до небольшой утечки через зазоры между направляющими лопатками и между днищем и крышкой направляющего аппарата.

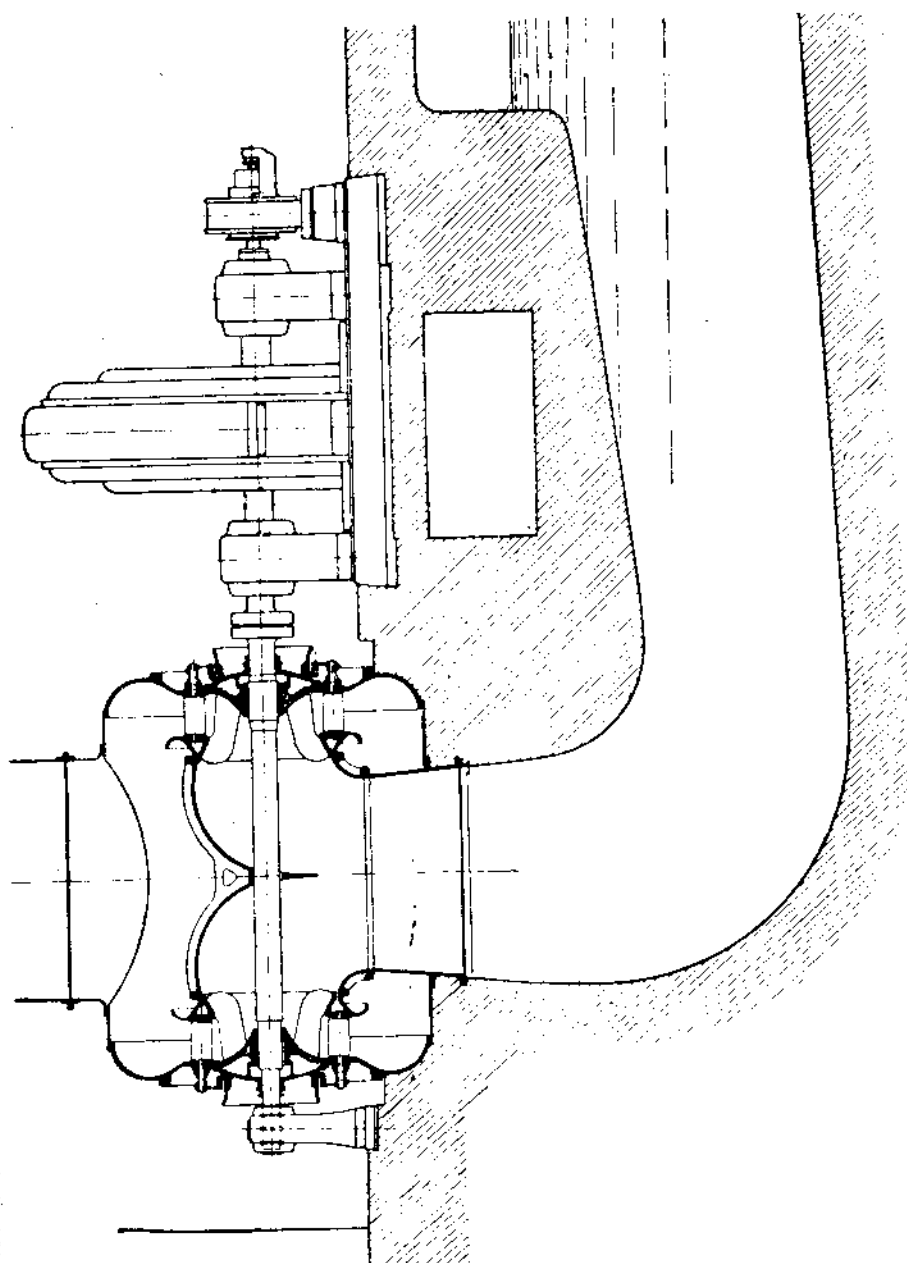
Почти такую же форму может иметь насос с вертикальным валом (фиг. 57а и б). Направление общего течения обрат-



Фиг. 59. Однокопелная турбина с кожухом с лобовым подводом.

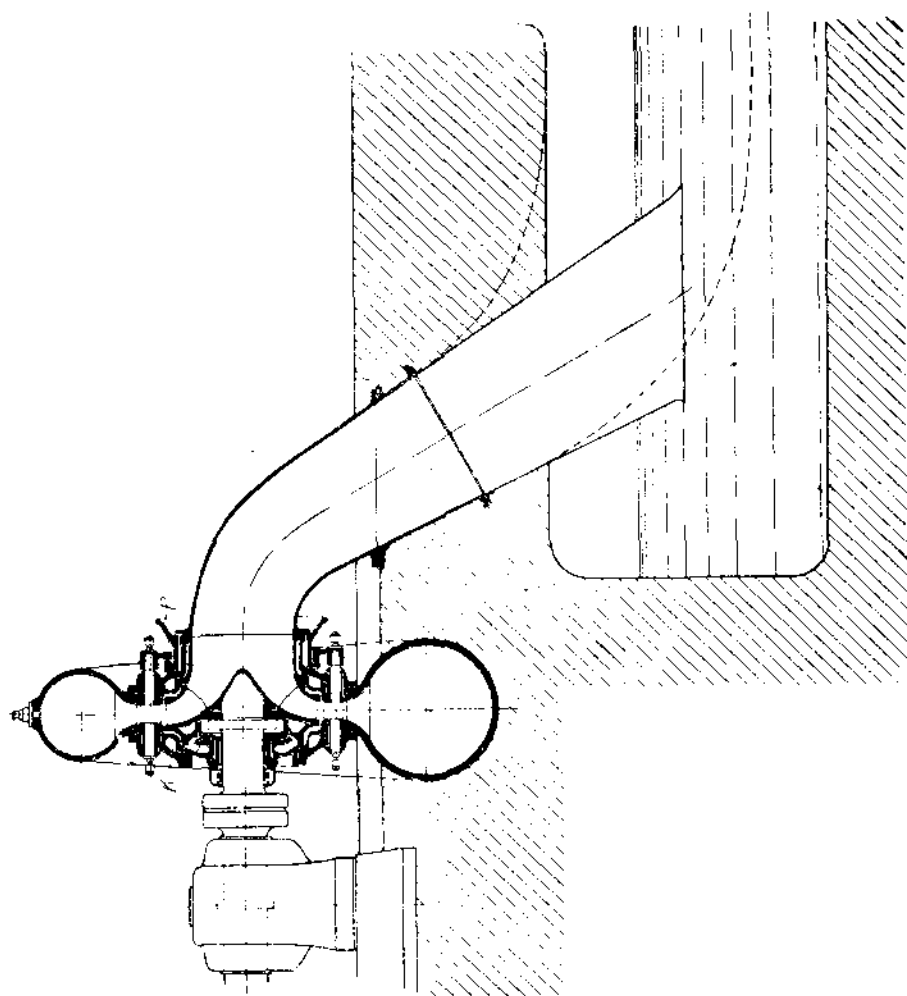
ное; колесо же (в сечении *аа*) имеет лопатки, искривленные иначе. Часто нет направляющих аппаратов. Рабочие колеса имеют в обоих случаях отверстия, чтобы сравнять давления перед и за колесом и тем уменьшить осевое передвижение колеса.

На фиг. 58 изображена с несколько большими конструктивными подробностями вертикальная турбина с одним колесом, со спираль-



Фиг. 60. Сдвоенная турбина с боковым подводом.

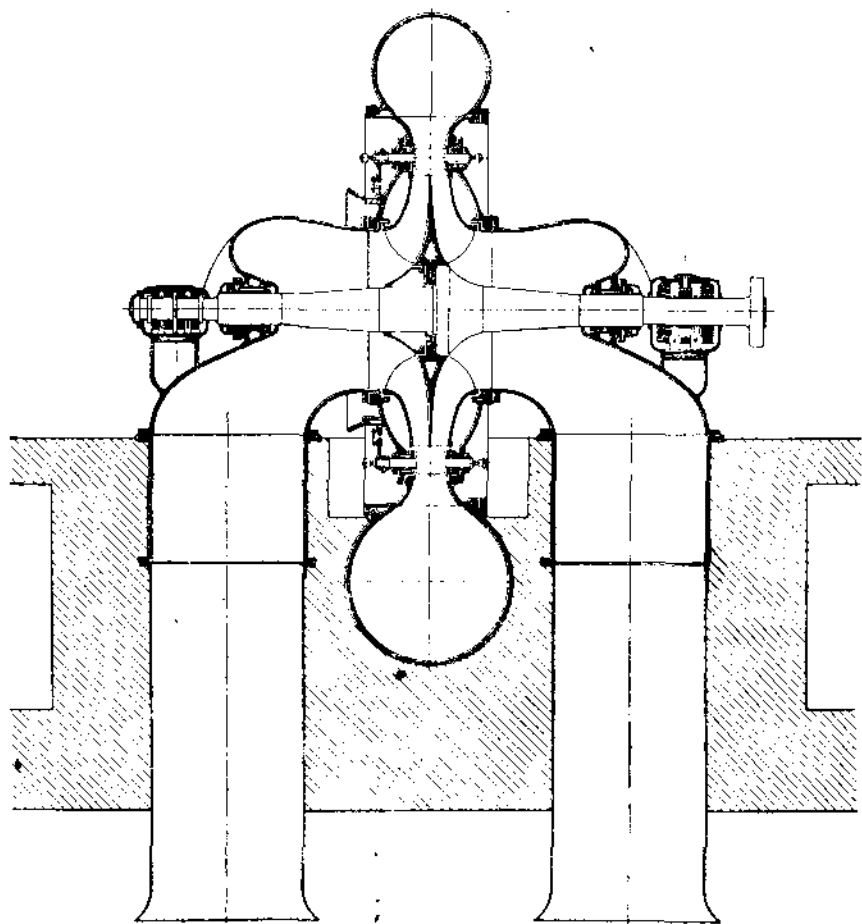
лой камерой, сделанной в бетоне S , а также бетонной всасывающей трубой K . Нижнее фундаментное кольцо F_0 при входе в колено соединено посредством опорных лопаток sl скоростного кольца с верхним кольцом F_0 . Конструкция, образованная тремя



Фиг. 61. Однокопесная горизонтальная турбина.

названными элементами, называется опорным, или скоростным кольцом (траверсным кольцом). В него вставлены днище направляющего аппарата B и крышка направляющего аппарата, или крышка камеры D ; последняя делается в виде большого фонаря. В фонаре находится уплотняющая втулка E , подшипник G и направляющие лопатки L . Шпиндели X влиты или приварены к направляющим лопаткам и несут рычаг J , который приводится в движение вращением регулирующего кольца P , расположенного в центре фонаря. Генераторный вал непосредственно соединен с турбинным валом; над генератором устроен второй подшипник (сквозного вала) и осевой упорный подшипник.

На фиг. 59 изображена одноколесная турбина с лобовым подводом, названная так потому, что все элементы установлены в кожухе, устроенном в конце трубопровода, как его замыкающая часть. Подшипник вала, находящийся на поверхности крышки, должен смазываться через особый трубопровод. Регулирующее кольцо P с механизмом, передающим его движение на направ-

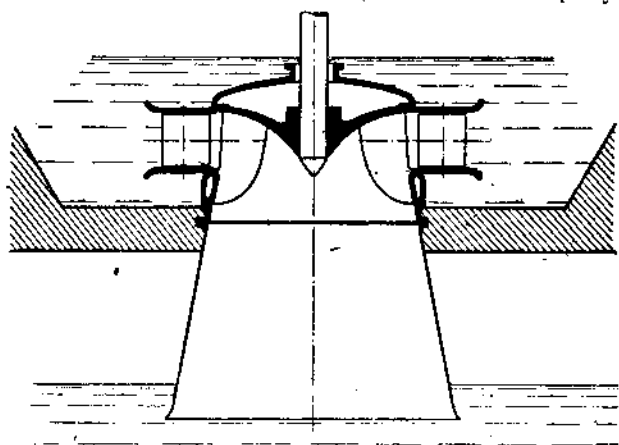


Фиг. 62. Сдвоенная турбина или насос.

ляющие лопасти (шины, коромысла), находится в воде. Говорят про внутреннее регулирование, в то время как соответствующую конструкцию, изображенную на фиг. 58, называют внешним регулированием. Для внутреннего регулирования характерно, что направляющие лопасти имеют сквозные отверстия, через которые проходят установочные болты D . Они соединяют днище и крышку направляющего аппарата, и лопасти вращаются на них. Надо указать также на способ, каким регулирующее кольцо P приводится в движение регулирующим валом W . На валу имеется кривошип Q , от которого идут два стержня к ушкам A регулирующего кольца. W со своей

стороны приводится в движение посредством механизма из рычагов и стержней, большей частью приводимых в действие сервомотором при помощи давления масла и служащим для регулирования скорости машины; при маленьких агрегатах управление производится от руки.

Фиг. 60 изображает сдвоенную турбину с кожухом и боковым подводом (с внешним регулированием), чертеж



Фиг. 63. Турбины с вертикальным валом в открытой камере.

понятен сам по себе. Освещение здесь подробностей будет излишним.

Фиг. 61 дает разрез через одноколесную турбину в спиральной камере с горизонтальным валом и внешним регулированием. Регулирующее кольцо находится на стороне всасывающей трубы. Подобный же вид может иметь также насос с регулированием помощью направляющих лопаток. Уменьшение осевого усилия достигается здесь благодаря соединению камеры *K* со всасывающей трубой. Соединяющая труба снабжена регулирующей задвижкой.

Уменьшение осевого усилия достигается здесь благодаря соединению камеры *K* со всасывающей трубой. Соединяющая труба снабжена регулирующей задвижкой.

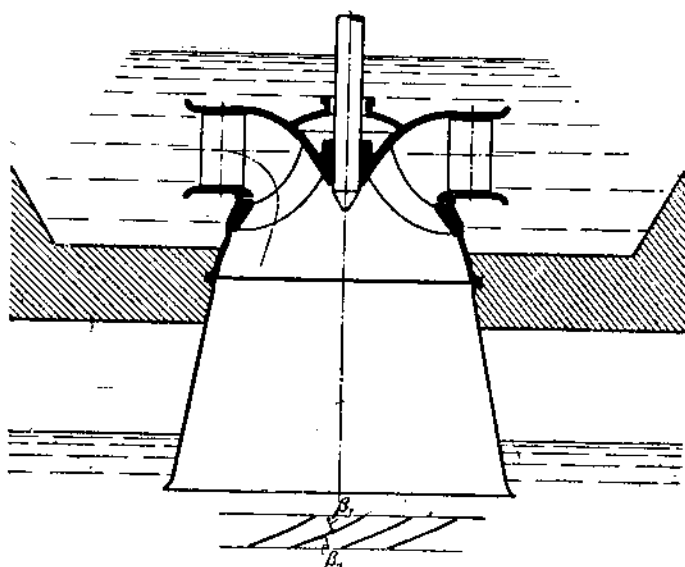
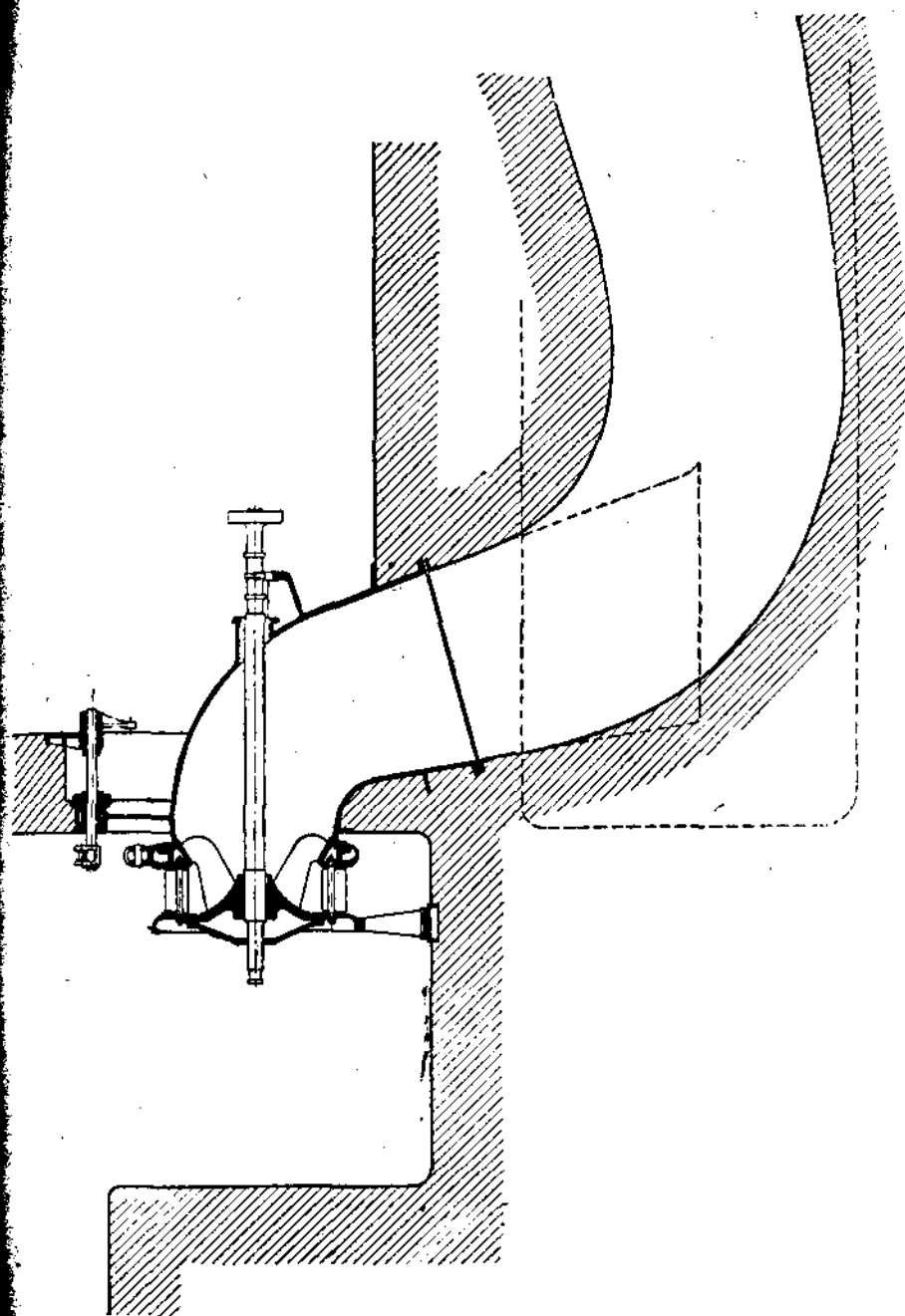
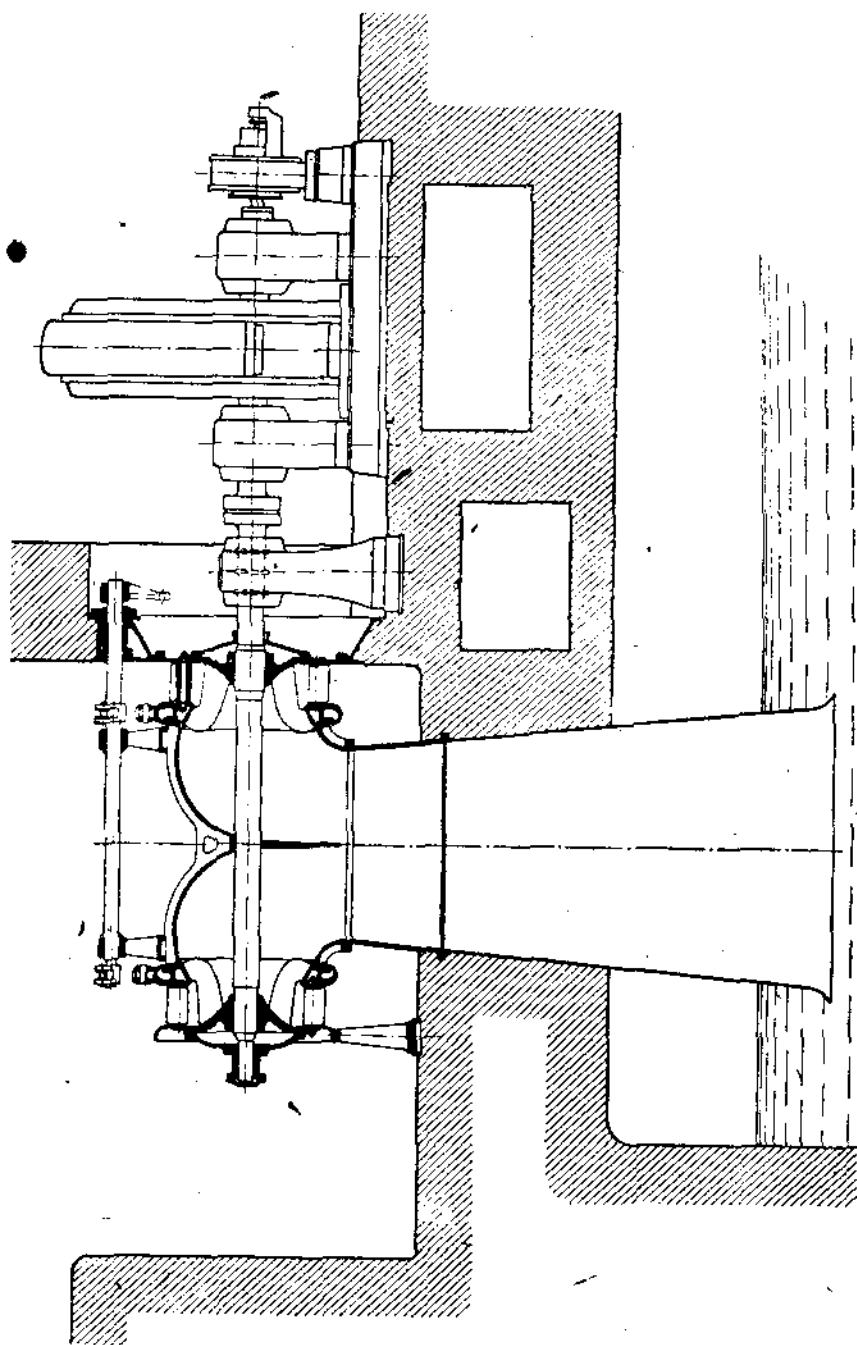


Рис. 64.

Фиг. 64. Турбины с вертикальным валом в открытой камере.



Фиг. 65. Турбина одвоколенная с горизонтальным валом в открытой камере.

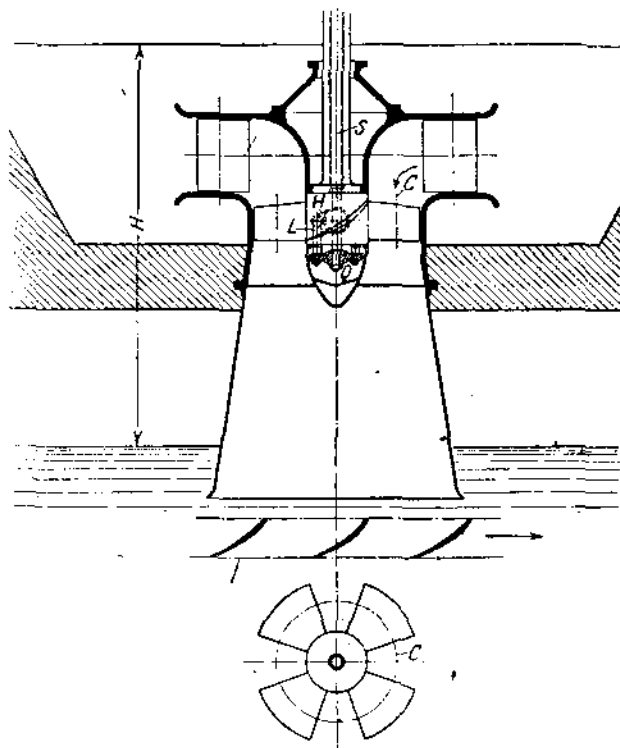


Фиг. 66. Сдвоенная горизонтальная турбина в открытой камере.

Фиг. 62 изображает сдвоенный насос в спиральной камере. Поток разделен во всасывающих трубах и в колесе и соединяется в спиральной камере. Есть также типы машин, где поток не разделен во всасывающих трубах, но делится лишь в колесах и в спиральных камерах. Но последний тип применяется только в турбинах и то редко.

На фиг. 63, 64, 65 и 66 изображены машины в открытых камерах, о которых нельзя сказать ничего существенно нового. Они помещаются в открытых камерах, которые устроены в конце верхнего канала. Принципиально все эти формы выполнения могут быть применены и к насосам и к турбинам; но на практике для насосов они применяются редко.

Фиг. 67 изображает турбину Каплана в открытой камере с регулированием направляющих и рабочих лопаток. Здесь представлен механизм рычагов и стержней, заключенных во втулке и вал (с кривошипом Q , тягой L , рычагом H и шатуном S). Там же представлен план рабочих лопаток и раз-



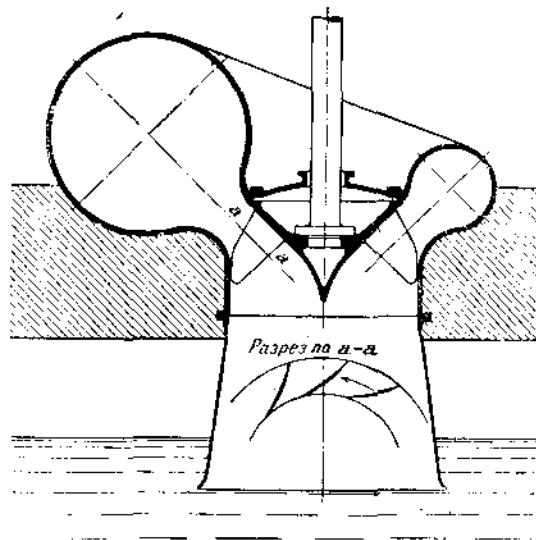
Фиг. 67. Турбина Каплана.

вертка их сечения по цилиндру C . Мы видим, что эта развертка имеет вид параллельной решетки с большим шагом. Для турбин с большими расстояниями между лопатками, если лопатки расположены диагонально или в осевом направлении и если нет регулирования рабочих лопаток, укоренилось название пропеллерных турбин, так как лопатки имеют вид крыльев пропеллера.

Фиг. 68 изображает насос с диагонально расположенными лопатками, называемыми также пропеллерным насосом. Сечение лопаток конусом $a-a$ изображено на плоскости в развернутом виде.

Фиг. 69 изображает разрез пятиступенчатого центробежного насоса высокого давления с неподвижными направляющими аппаратами L и с каналами U , меняющими направление движения воды. На правом конце вала устроен вращаю-

щийся вместе с валом диск (гидравлическая пята), служащий для уравнивания осевого давления рабочих колес.



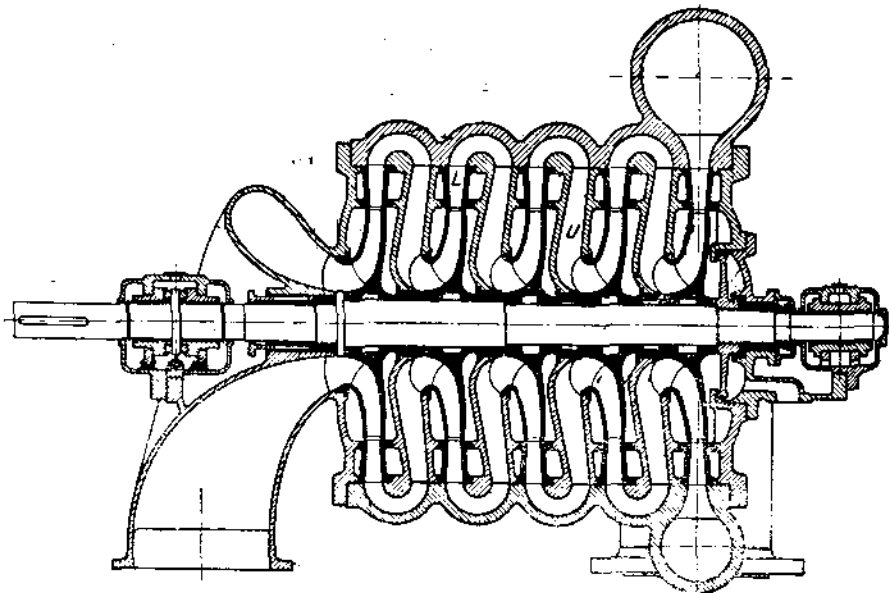
Фиг. 68. Диагональный или пропеллерный насос.

Фиг. 70 изображает примитивный вентилятор с пропеллерообразными лопастями, который служит для проветривания обыкновенных помещений.

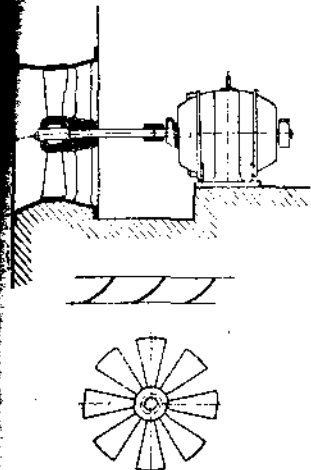
Фиг. 71 — вентилятор низкого давления с радиальными лопатками для подачи воздуха в тоннель. Лопатки вследствие их большой осевой ширины с целью лучшего направления воздуха разделены промежуточными стенками.

Фиг. 72 прибавлена только для сравнения с центробежным насосом высокого давления. Она изображает четырехступенчатую возду-

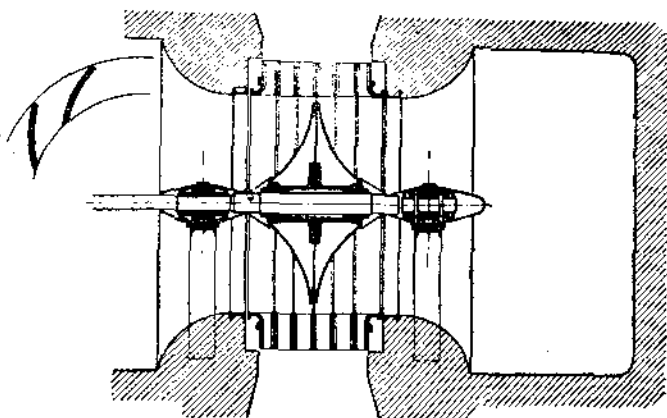
ходувку высокого давления, при расчете которой надо принимать во внимание сжимаемость воздуха. Направляющие аппараты *L* и каналы *U*, меняющие направление воздуха, образуют с колесом, сидящим на валу, как бы отдельные камеры.



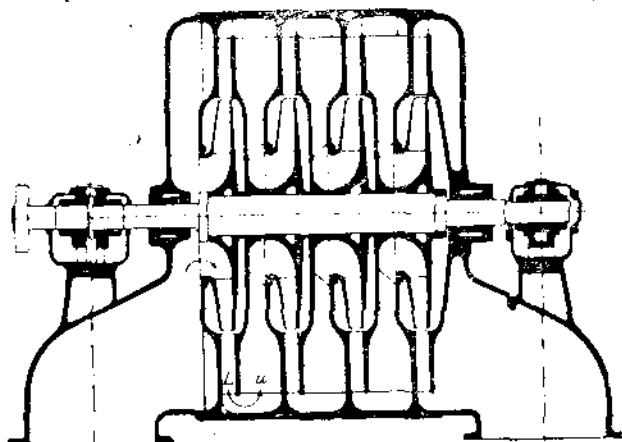
Фиг. 69. Высоковопорный центробежный насос.



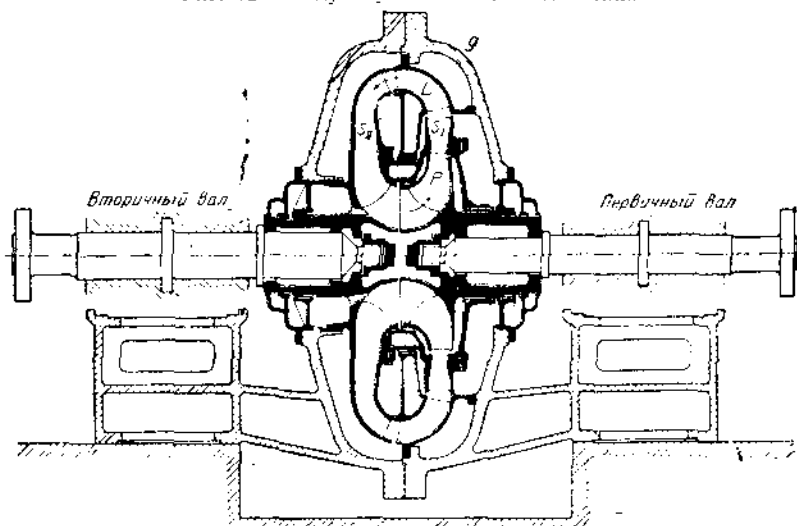
Фиг. 70. Вентилятор.



Фиг. 71 Вентилятор.



Фиг. 72. Воздуходувка высокого давления.



Фиг. 73. Трансформатор «Фетнигера».

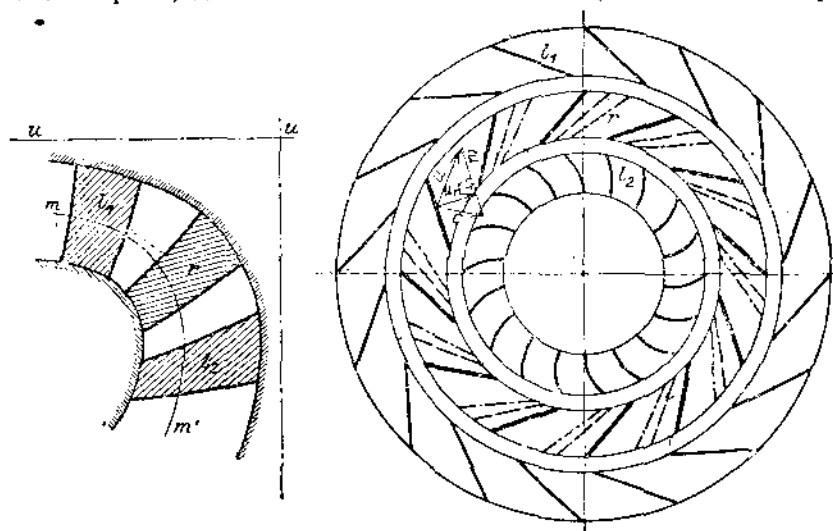
Фиг. 73 изображает разрез трансформатора Феттингера. На основном валу насажено основное колесо P . Оно непосредственно окружено первым вторичным колесом S_I , которое соединено фланцем со вторым колесом S_{II} ; S_{II} сидит на втором валу. Между S_I и S_{II} в камере G находится неподвижный направляющий аппарат L . Камера целиком заполнена водой. Во время работы возникает непрерывное круговое течение в полости, образуемой рабочим и направляющим колесом. При этом устройстве второй вал приходит во вращение при хорошем к. п. д. Его вращение приблизительно в 2,5 до 5,5 раза медленнее, чем у первичного вала.

27. Движение в рабочем пространстве (в полости вращения) турбомашин

В § 12 п. „с“ был рассмотрен наиболее общий случай течения с постоянной энергией в полости вращения без лопастей. Его можно разложить на меридиональное течение без вращающихся составляющих (скорость c_m) и на вращательное течение (скорость c_u). Комбинированное течение происходит по спиральным путям на поверхностях тока меридионального течения. Эти поверхности являются поверхностями вращения, которые образуют постоянный переход от одного профиля кривой полости вращения к другому. Если в полость вращения вставить неподвижную лопастную решетку (в последующем рассуждении подвижные направляющие лопатки считаются тоже неподвижными лопатками) или если в нем вращается другая лопастная решетка — лопасти рабочего колеса, то возникает вопрос: остается ли распределение c_m (предполагая одинаковое протекающее количество воды Q) и теперь таким же, как в свободном пространстве? Свободному распределению c_m соответствует определенное динамическое распределение давления (§ 12). Если мы установкой неподвижной или вращающейся лопастной решетки или вращением ее не нарушим этого распределения, то останется прежним и распределение c_m .

Надо, однако, обдумать, что необходимо принять во внимание, чтобы не было этого нарушения. Прежде всего чтобы не было сужено поперечное сечение, надо принять бесконечно тонкие лопатки. Затем мы должны иметь в виду вызванное лопатками распределение c_u . Оно уже не имеет, как в свободном течении, постоянного давления на concentричных кругах, но периодически меняющееся от лопатки к лопатке (ср. § 20, 21, 23, 24). Эту трудность мы можем устранить тем, что предположим очень много, строго говоря, бесконечно много, лопаток, так что эти периодические изменения давления сделаются незначительными до полного исчезновения. Но тогда останется еще задача, не изменить распределение давления вдоль ортогональных траекторий свободного течения c_m . К этому приходят вследствие вращения рабочей лопастной решетки двояким образом. Во-первых, течение неустановившееся, поэтому в лучшем случае свободное распределение c_m имеет значение лишь как средняя по времени картина течения, которая приближается к истинной, когда увеличивается

число лопаток. Во-вторых, вызванное рабочей лопастью решеткой распределение скорости c_u зависит как от количества воды Q , так и от угловой скорости ω . Если изменятся эти величины, то изменится и распределение c_u и благодаря этому снова вводится нарушающий элемент. Точное изучение этих отношений может быть сделано только во втором томе. Здесь же можно только твердо установить, что в общем свободное распределение c_m не совпадает с распределением в полости вращения турбомашин. Чтобы устранить недоразумения, надо прибавить, что нет и принципиальной необходимости (например, чтобы получить особенно хорошее использование энергии) добиться такого совпадения (хотя бы в центре).

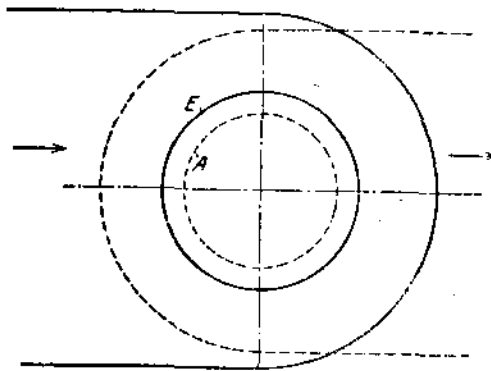
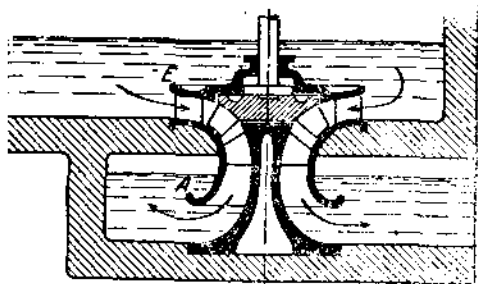


Фиг. 74, а, б. Периодическое изменение во взаимном расположении системы лопаток.

Необходимо несколько более осветить неустановившийся характер потока. Для этого мы рассмотрим течение в упомянутой уже средней поверхности вращения mm' (§ 25, фиг. 50). Представим себе, что сечение этой поверхности со всеми лопастями машины каким-то способом перенесено на плоскость чертежа так, что форма лопаток, вызывающая отклонение потока, будет изображаться на чертеже без искажения. Самым употребительным изображением является такое, которое правильно передает угол между касательной к лопасти и радиусом. Это достигается так называемым конформным изображением. Оно представлено на фиг. 74. Сечение по поверхности вращения mm' , изображенной в левой половине фиг. 74а, с лопатками l_1 , l_2 изображены (развернуты) в плоскости, перпендикулярной к оси, например nn' . Ради простоты чертежа, лопатки здесь ограничены дугами кругов и прямыми линиями. При желании мы можем рассматривать фиг. 74а как изображение чисто радиального колеса с чисто радиальным направляющим аппаратом, и все это — установленное в полости вращения между двумя плоскостями, перпендикулярными к оси. В таком случае

надо представлять себе поток полностью возникающим или исчезающим в оси. Число лопаток одного направляющего аппарата пусть z_n , другого — z_r , рабочего колеса — z_r , его угловая скорость ω .

Для описания движения жидкости мы снова рассмотрим мгновенное распределение абсолютных скоростей. При этом мы предположим, что полость вращения за пределами части занятой



Фиг. 75. Выполнение в открытой камере с круговой симметрией и отвода воды.

тремя рядами лопастей, простирается в бесконечность и не содержит больше никаких сооружений. В некотором отдалении от лопаток поток должен быть распределен симметрично вокруг оси, т. е. там, на каждом из concentрических кругов, должны иметь место одинаковые (по всему кругу) по величине и направлению скорости. Далее, поток должен протекать с равномерной скоростью. Практически такое состояние получается с большим приближением, если приток к машине в полость вращения происходит из камеры, ограничивающие стенки которой везде достаточно далеки от входа в полость вращения, и если, кроме того, вытекание из полости вращения происходит в достаточно просторную камеру. Фиг. 75 поясняет эти положения.

Однако в многочисленных других случаях можно также сделать тоже или другое предположение, чтобы пограничные условия, которым подчиняется поток вне пространства лопаток, оказывали свое влияние внутри его или совершенно незначительно, или, по крайней мере, на какой-либо концентрической окружности распределялись бы равномерно, так что с этой стороны круговая симметрия картины не нарушилась. Другими словами, в основном мгновенное распределение скоростей между неподвижными и вращающимися лопатками и в ближайшем к ним пространстве зависит только от их мгновенного взаимного положения; определенное взаимное положение системы лопаток периодически повторяется. Например, между направляющим колесом l_1 и рабочим колесом r после поворота колеса на $\frac{2\pi}{m_1}$, наступает то же взаимное положение, здесь m_1 является общим наименьшим кратным отношением числа лопаток z_n и z_r . Точно так же повторяется прежнее взаимное расположение колеса и направляющего аппарата l_2 после поворота

на $\frac{2\pi}{m_2}$, где m_2 есть наименьшее кратное отношению z_1 и z_2 . Совершенно одинаковое положение колеса относительно направляющих аппаратов наступает только тогда, когда оба наименьшие кратные этих обоих отдельных вращений дадут одинаковое общее вращение с колесом. Этот полный поворот колеса найдется и будет равен $\frac{2\pi}{m}$, где m является общим наибольшим делителем m_1 и m_2 .

На фиг. 74b рядом со сплошными линиями изображены прерывистым пунктиром два смежных положения лопаток рабочего колеса при одинаковом взаимном расположении колеса, и направляющего аппарата l_1 , и точечным пунктиром и сплошными линиями одинаковое взаимное расположение колеса и направляющего аппарата l_2 . Вращение до одинакового расположения с обоими направляющими колесами здесь случайно совпадает с поворотом колеса на одно деление. Совершенно одинаковое расположение колеса с одними направляющими аппаратами означает и одинаковое распределение скоростей между лопатками, конечно, в том смысле, что картина мгновенных абсолютных линий тока повернулась вместе с колесом на соответствующий угол.

Эта картина линий тока определяется в каждое мгновение пограничными условиями, согласно которым скорости у неподвижных направляющих лопаток направлены касательно, а у вращающихся рабочих лопаток имеют такую величину и направление, что течение точно так же не проходит сквозь них: соответствующее условие уже обозначено в § 22 и 24 указанием о нормальной составляющей, которое на фиг. 50 представлено в виде диаграммы и может быть так сформулировано: относительная скорость должна быть касательной к лопаткам. К этому добавляется еще принятие вращательно-симметричного течения с равномерной скоростью в поперечном сечении при втекании и вытекании.

Таким образом мгновенная абсолютная картина течения все время возвращается с определенной периодичностью, обернувшись на угол вращения, соответствующий этому периоду (угол вращения =

$= \frac{2\pi}{m}$, число периодов $= \frac{\omega \cdot m}{2\pi}$). Все эти картины течения становятся одной неизменной, которая, будучи прикрепленной к колесу, вращается вместе с ним, в том случае если направляющие аппараты или имеют бесконечно много лопаток, или бесконечно далеко удалены от колеса. В этих случаях относительная картина линий тока является картиной установившегося течения, тогда как в общем случае она имеет периодический характер с числом периодов, определенным выше.

В изложенных рассуждениях под поверхностью вращения mt' , изображенной на чертеже, подразумевалась не поверхность течения, а только касательные составляющие распределенных в ней его скоростей. Настоящие поверхности потока тоже подвергаются колебаниям (по очертаниям и форме) с тем же вышеуказанным числом периодов, и также не являются поверхностями вращения. Особенно интересно во всем состоянии скоростей произведение $s \cdot r$. Оно, как

и сама скорость, имеет в определенный момент для всей площади выхода среднюю величину:

$$(c_u r)_m = \frac{1}{Q} \int_0^{2\pi} c_u r dq.$$

Эта величина в свою очередь подвержена колебаниям по времени. Средняя величина постоянна, если направляющие аппараты имеют бесконечно много лопаток или бесконечно далеко отодвинуты.

До сих пор говорилось о периодичности общей картины течения при ее движении вместе с колесом, однако можно наблюдать периодичность состояния скоростей и давления и в неподвижной точке пространства. Здесь всегда возвращается прежнее состояние после поворота колеса на одно деление лопатки, поэтому число периодов равно $\frac{\omega \cdot Z_r}{2\pi}$. В практике эти числа периодов настолько

велики, что очень трудно наблюдать колебания течения. Впрочем, вместе со всей картиной течения колеблется также и момент сил взаимодействия между колесом и течением, вследствие чего ω не постоянно во времени, что до сих пор само собой принималось.

Периодический характер течения в неподвижной точке пространства существенно зависит, как уже излагалось в § 20, 21, 23, 24 от формы преобразования энергии между колесом и жидкостью. Но даже если мы и устраним колебания, вызванные конечным числом лопаток направляющих аппаратов тем, что увеличим число лопаток до бесконечности, или отодвинем далеко направляющий аппарат, то останется еще то обстоятельство, что абсолютная картина течения от рабочей лопатки к рабочей лопатке имеет периодически повторяющийся вид и при вращении вместе с колесом в каждой неподвижной точке пространства получают периодически изменяющиеся состояния. Вид картины течения между лопатками зависит от того, что с изменением в передаче энергии связано изменение равнодействующей силы на каждую лопатку, а вместе с нею и разницы давлений, а также разницы скоростей на обеих сторонах одной лопатки. Если мы для случая бесконечно многих или бесконечно отдаленных направляющих лопаток изобразим на развертке концентричной окружности диаграмму ее скоростей и давлений, то в основном она будет иметь такой же вид, как изображенная для параллельной решетки на фиг. 39 б. Из этой диаграммы можно взять для неподвижной точки пространства местные изменения скоростей и давлений:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t}, \frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial c_u}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t},$$

рассматривая движение диаграммы мимо этой точки (как пункта наблюдения) при движении ее с окружной скоростью колеса, или же можно в качестве наблюдателя пробежать мимо нее со скоростью колеса в обратном направлении. Таким образом совершенно так же, как и раньше (в § 24) мы имеем:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \bar{c}}{\partial \varphi}, \frac{\partial c_m}{\partial t} = -\omega \frac{\partial c_m}{\partial \varphi}, \frac{\partial c_u}{\partial t} = -\omega \frac{\partial c_u}{\partial \varphi}, \frac{\partial p}{\partial t} = -\omega \frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

При этом под φ подразумевается угловая координата в связанной с колесом системе координат, т. е. относительная координата. Но ее можно для мгновенья dt рассматривать как абсолютную. Если мы перейдем к направляющим аппаратам с конечным числом лопаток и в конечной близости колеса, то к диаграмме, периодически повторяющейся от лопатки к лопатке, присоединяются во время ее вращения с колесом еще колебания по времени, которые в общем различны в одно и то же мгновение в каждом делении, но обладают вышеприведенными числами периодов. В вышеприведенные выражения в правой их части должен быть введен еще один член, который соответствует этим колебаниям.

До сих пор еще не решено, имеет ли влияние на передачу энергии в рабочих колесах периодичность или, вернее, частота периодов, и играют ли они роль в вопросах устойчивости¹.

Необходимо здесь упомянуть, что во всем предыдущем изложении, когда мы говорили о скоростях, то всегда имели в виду временные средние величины основного движения и совершенно пренебрегали вихревыми колебаниями.

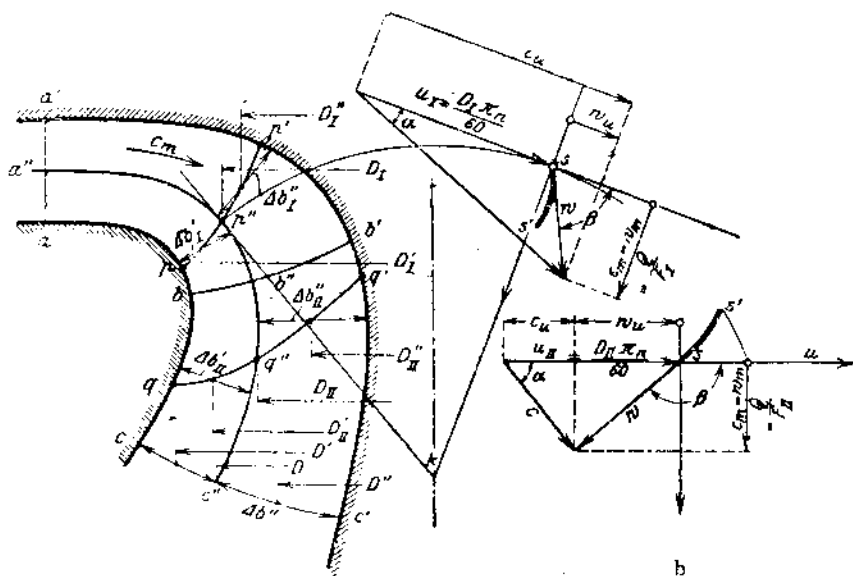
28. Упрощение картины течения для основной одномерной теории

По изложенному в предыдущем разделе ближайшее упрощение заключается в том, что мы принимаем в колесе бесконечно большое число лопаток. Одновременно для того, чтобы между ними мог пройти всякий распад воды, мы должны предположить, что они бесконечно тонкие, причем до такой степени, что объем их в общем пространстве колеса с лопатками в пределе исчезающе мал. Благодаря этому число периодов колебаний делается бесконечно большим, а амплитуда колебаний — бесконечно малой. Поэтому лопатки колес точно направляют течение и если известно распределение c_m , то можно получить составляющие c_u непосредственно для всякого количества воды и числа оборотов. Однако для направляющих аппаратов этого недостаточно. Здесь надо (направление дается на самих лопатках) более точно исследовать течение между лопатками, принимая во внимание пограничные условия и вычислить среднюю величину, составляющей c_u или, лучше, момента $c_u r$. Кроме того, распределение c_m неизвестно сразу, оно зависит в свою очередь от формы лопаток. Можно, правда, указать формы лопаток, при которых при определенном соотношении $Q : \omega$ распределение c_m остается тем же, что и при свободном распределении в полости вращения без лопаток².

¹ Случайные наблюдения заставляют предполагать наличие такого влияния. См., например, Prasil, Сравнительное изучение реактивных турбин низкого давления, Schweiz Bauz., т. 43, где наблюдалось падение коэффициента полезного действия при определенном расходе воды и числе оборотов у колеса с малой щелью между направляющими и рабочими лопатками или также Graf и D. Thoma, Новые быстроходные турбины, ZVDI, 1907, стр. 1012, где сообщается о наблюдении двух различных моментов вращения одного колеса при условиях, одинаковых в остальных отношениях, следовательно, повидимому, о различных состояниях течения в нем.

² Сравни г. 2 или также Mises, Теория водяных колес, Отдельный оттиск из Z. f. Math. u. Physik, 1908.

Поэтому мы идем дальше и, кроме бесконечно большого числа донатов, вводим еще составляющую c_m и среднюю поверхность



вращения в полости вращения и, таким образом, приходим к одно-размерной основной теории. Эта теория позволяет быстро и с достаточным приближением установить соотношения для турбоколес при данных условиях работы и влияние их основных конструктивных данных, именно линейных размеров, поперечного сечения потока и угла лопаток на производственные показатели.

Положение этой поверхности можно определить только на-глаз. Она должна быть надолго средней поверхностью действия потока при всех расходах воды и при всех числах оборотов и к ней должны относиться все конструктивные данные рабочего колеса. Из всего, что говорилось о распределении c_m , ясно, что с гидродинамической точки зрения в расположении этой поверхности вращения существует известная неопределенность. Поэтому в первую очередь надо попробовать определить ее местоположение с чисто геометрической точки зрения. На фиг. 76 посредством меридиональных линий abc

$a'b'c'$ изображены поверхности вращения, ограничивающие полость вращения. На глазомер мы проводим несколько меридиональных следов поверхностей, нормальных к поверхностям abc и $a'b'c'$ и принимаем их за поперечные сечения полости вращения. Пусть это будут, например, линии aa' , bb' и cc' . Каждую из этих кольцевых поверхностей мы делим, выбрав подходящие точки a'' , b'' , c'' , на две равновеликих поверхности.

С обозначениями фиг. 76а например должно быть (поверхность cc'): $\Delta b' \cdot D' = \Delta b'' \cdot D''$. При этом D' — диаметр круга, проведенного через точку, делящую пополам (строго говоря, центр тяжести) дуги $c c'$ и т. д. Меридиональная линия $a''b''c''$ представляет поверхность вращения, которая делит полость вращения на две части; конечно, эта поверхность должна со своей стороны быть нормальной к линиям поперечного сечения aa' , bb' , cc' . Эту поверхность вращения мы и принимаем за среднюю поверхность действия потока. В каком-либо поперечном сечении полости вращения мы принимаем среднюю скорость c_m как частное $\frac{Q}{F}$, например, в сечении cc' :

$$c_m = \frac{Q}{\pi(D' \cdot \Delta b' + D'' \cdot \Delta b'')} \quad (129)$$

Эту величину c_m относим к конаксиальной окружности, образованной пересечением средней поверхности тока с поперечным сечением, например, конаксиальной окружности, проходящей через точку c'' .

Такое определение поперечных сечений и вычисление c_m должны быть проделаны и для части полости вращения, занятой лопатками; они только должны быть несколько уточнены в местах входа и выхода из пространства, занятого лопастями. Точки входа и выхода находятся на окружностях, по которым средняя поверхность тока пересекается с поверхностями вращения пространств, занятых лопастями, например, на фиг. 76а конаксиальными окружностями, проходящими через p'' и q'' . Диаметры этих кругов считаются диаметрами входа и выхода. Ограничивающие поверхности вращения на фиг. 76а, например, pp' и qq' в общем не тождественны с поперечным сечением полости вращения. За расчетное поперечное сечение для точек p'' и q'' принимаем сумму обоих частных поперечных сечений, меридиональные линии которых идут через точку деления обеих частей отрезков pp'' и $p'p'$ или qq'' и $q''q'$ и которые в общем принадлежат различным целым поперечным сечениям полости вращения.

Поэтому будет:

$$F_I = (D_I' \cdot \Delta b_I' + D_I'' \cdot \Delta b_I'')\pi \text{ и } F_{II} = (D_{II}' \cdot \Delta b_{II}' + D_{II}'' \cdot \Delta b_{II}'')\pi. \quad (130)$$

При этом $\Delta b_I'$ и $\Delta b_I''$ или $\Delta b_{II}'$ и $\Delta b_{II}''$ проведены через середины дуг pp'' и $p'p'$ или qq'' и $q'q'$, а D_I' и D_I'' или D_{II}' и D_{II}'' отнесены к средним точкам.

Величины $c_{mI} = \frac{Q}{F_I}$ и $c_{mII} = \frac{Q}{F_{II}}$ относятся к точкам p'' и q'' . Окружная скорость какой-либо точки в пространстве, занятом вращающимися лопатками, вычисляется из

$$u = \frac{\pi D n}{60}. \quad (131)$$

Последней величиной, определяющей течение, является угол лопатки β с направлением окружной скорости, который по нашему теперешнему пониманию тождественен углу между относительной скоростью w и окружной скоростью u . За действующий угол лопаток мы принимаем угол, образуемый пространственной кривой, по которой пересекаются поверхность лопаток (бесконечно тонких!) со средней поверхностью потока с направлением окружной скорости рассматриваемой точки. Угол этот получается на развертке касательного конуса, который вместе со средней поверхностью тока, имеет общую конаксиальную окружность, проходящую через соответствующую точку. На фиг. 50 это построение сделано для общего угла лопаток. На фиг. 76, *b* оно повторено для точки p'' , которая при изображенном направлении потока (c_m со стрелкой) является местом входа, и то же сделано для соответствующего места выхода q'' . Тут начерчена вся диаграмма скоростей, получающаяся для этих точек на развертке конуса. Развертка конуса для точки q'' случайно преобразовалась в развертку цилиндра. Направление лопаток тождественно направлениям касательных к кривой сечения лопаток ss' . Направление c_m является направлением образующей соприкасающегося конуса (на развертке направлена по радиусу); таким образом c_m всегда перпендикулярна u . Конечно, диаграмма скоростей может быть начерчена точно так же через u , c_m и β для любой точки средней поверхности тока. Необходимо еще установить изначальное направление угла β . Для всех рабочих колес мы определяем его следующим образом: откладываются положительные направления u , w , c_m в рассматриваемой точке. Тогда β больше или меньше 90° в зависимости от того, лежит ли положительное направление w между положительным или отрицательным направлением u , с одной стороны, и положительным направлением c_m — с другой. При этом положительные направления c_m и u лежат, конечно, всегда в одной и той же половине плоскости чертежа, разделенной пополам направлением u ; в которой их поместить — безразлично. Их направления соответствуют в какой-то мере направлению жидкости, протекающей через колесо.

Обычно для нашей основной теории отрицательные c_m и w не встречаются, и угол β изменяется от 0° до 180° . Таким образом в треугольнике входа фиг. 76*b*, $\beta < 90^\circ$. Напротив, в треугольнике выхода $\beta > 90^\circ$. Дальнейшие геометрические зависимости в треугольниках скоростей для целей нашей основной теории лучше всего выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{c_m}{\sin \beta} = \frac{Q}{F \sin \beta}; & w_n &= c_m \operatorname{ctg} \beta = \frac{Q \operatorname{ctg} \beta}{F}, \\ c_u &= u + w_n = \frac{\pi D n}{60} + \frac{Q \operatorname{ctg} \beta}{F}; & w_m &= c_m \\ c_u r &= u r + w_n r = \frac{\pi D n}{120} + \frac{Q}{F} \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Знак $+$ соответствует установленному счету угла β . Если система лопаток не вращается, то относительная скорость переходит в абсолютную скорость. Ее направление по отношению к положительному направлению вращения колеса мы будем всегда измерять

углом α и вести отсчеты так же, как мы выше указывали для β . Мы отождествляем его с углом лопасти α неподвижной системы, который мы берем из разверки сечения конусом, касательным к средней поверхности тока, поверхностей неподвижной системы лопаток. Но как и в общей диаграмме скоростей вращающейся системы, мы будем обозначать через α угол равнодействующей абсолютной скорости с положительным направлением u . Таким образом во всех случаях мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{c_m^2 + c_n^2} = \frac{c_m}{\sin \alpha}; & c_n &= c_m \operatorname{ctg} \alpha = \frac{Q}{F} \operatorname{ctg} \alpha; \\ c_n r &= \frac{Q}{F} \cdot \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \alpha; & u &= \frac{Q}{F} \operatorname{ctg} \beta = \frac{Q}{F} \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Правильность выводов приведенной здесь очень упрощенной теории может быть подтверждена только опытными данными. На такие подтверждения будет еще указано ниже.

По принятому соглашению можно говорить также о теории средней элементарной струйки, которая создана в замену трехмерной теории рабочего колеса. Предыдущие рассуждения показывают, каким образом выделяется средняя элементарная струйка при данной системе лопаток и как определяются ее основные размеры: поперечные сечения, углы, расстояния ее отдельных точек от оси. Принимая во внимание приближенный характер всего способа расчета, конечно, не имеет никакого смысла делать каких-либо попытки уточнения, например, приятие во внимание конечной толщины лопаток помощью коэффициента сжатия для поперечных сечений и т. п.

29. Изменение рабочими колесами момента $c_n \cdot r$

а) Зависимость изменения момента $c_n \cdot r$ от расхода воды и числа оборотов

С нашими упрощенными представлениями вполне согласуется то, что мы не обращаем внимания на взаимодействие между системой лопаток (при их меняющемся от вращения положении) и течением, и каждый раз рассматриваем течение от входа в систему лопаток до выхода в следующую, как определяемое только системой; через которую оно протекает, эту часть пути. Это означает следующее: жидкость притекает к каждой системе лопаток с моментом скорости $c_n \cdot r$, который предопределяется предыдущей системой лопаток. При этом мы должны помнить, что в свободном от лопаток переходном участке полости вращения между обоими системами лопаток (в зазоре между лопаток) поток имеет постоянный момент $c_n r = \text{const}$. В нормальных турбомашинах комбинация направляющего аппарата и рабочего колеса представляет особый интерес. Момент скорости между направляющим колесом и рабочим выражается так:

$$(c_n r)_l = \frac{Q}{F_l} \cdot \frac{D_l}{2} \operatorname{ctg} \alpha_l \quad (134)$$

Момент за рабочим колесом выражается так:

$$(\dot{c}_u r)_r = u_r r_r + w_{u_r} r_r = \frac{\pi D_r^2 n}{120} + \frac{Q}{F_r} \frac{D_r}{2} \operatorname{ctg} \beta_r, \quad (135)$$

при этом индексы l и r относятся к выходу из направляющего аппарата и рабочего колеса. Величина, на которую повышается благодаря колесу момент скорости в положительном направлении (в направлении вращения колеса), поэтому равняется:

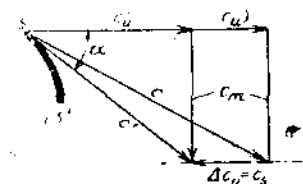
$$\Delta l_i (\dot{c}_u r) = \frac{\pi D_i^2}{120} n + Q \left(\frac{D_r}{2 F_r} \operatorname{ctg} \beta_r - \frac{D_l}{2 F_l} \operatorname{ctg} \alpha_l \right). \quad (136)$$

Если направляющие лопатки расположены радиально или жидкость притекает к колесу по всасывающей трубе в направлении оси, то $\alpha = 90^\circ$; $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

б) Переход из одной системы лопаток в другую

Вопрос в том, переходит ли момент $\dot{c}_u \cdot r$, с которым поступает жидкость из одной системы лопаток к входу в данную систему, не играл никакой роли в предыдущих формулах. Он, действительно, не имеет никакого значения, пока идет речь о повышении момента при данных Q и n . Но он тотчас приобретает большое значение, когда возникает вопрос о потерях энергии потока. Этот вопрос уже освещен с гидродинамической точки зрения для конечных l между лопатками в решетке в § 20. Здесь мы должны также выработать упрощенные представления и соответствующие правила расчета для нашей основной теории.

Мы говорим о безударном входе в систему лопаток, если при входе в неподвижное колесо направление абсолютной скорости совпадает с направлением касательной к лопатке, или, если при входе во вращающееся колесо направление относительной скорости совпадает с направлением касательной к лопатке. Так как вследствие непрерывности составляющие c_m для подступающей жидкости и для уходящей дальше должны быть повсюду равны, следовательно, равны также и при входе, то совпадение направлений вызывает, конечно, равенство скоростей. Если направления не совпадают, то мы представляем, что направление притекающей жидкости при входе внезапно изменяется системой лопаток колеса и говорим о вступлении с ударом. Составляющие c_m поступающей и уходящей жидкости должны быть все еще равны. Разница направлений сводится к разнице составляющих c_m и w_u . На фиг. 77 изображены отношения при входе в неподвижный направляющий аппарат. Поток вступает со скоростью c_u , которая определяется из имеющегося перед колесом $c_u r$ делением его на $\frac{D}{2}$, где D является диаметром входа.



Фиг. 77. Удар при входе в направляющий аппарат.

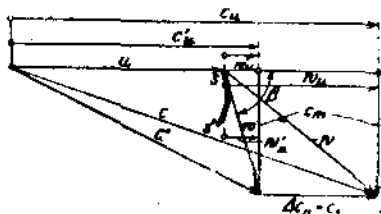
Вступление в направлении касательной к лопатке требовало бы $c'_u = \frac{Q}{F} \operatorname{ctg} \alpha$. Разницу $c_u - c'_u = \Delta c_u = c_s$ называют скоростью, потерянной на удар. Фиг. 78 показывает соответствующие отношения при входе во вращающееся колесо. Поток поступает к колесу с абсолютной скоростью $c_u = \frac{c_u \cdot r}{\frac{D}{2}}$; по отношению к колесу

скорость $w_u = c_u - u$. Вступление по направлению касательной к лопатке требовало бы:

$$c'_u = u + w'_u = \frac{\pi D n}{60} + \frac{Q \operatorname{ctg} \beta}{F}$$

Разность равняется

$$\Delta c_u = c_s = \frac{c_u \cdot r}{\frac{D}{2}} - \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60} - \frac{Q \operatorname{ctg} \beta}{F} \quad (137)$$



Она может быть обозначена, как Δw_u . Фиг. 78. Удар внутри рабочего колеса.

Пример еще лучше пояснит этот случай. Переход из направляющего колеса в рабочее колесо. Индекс l — для выхода из направляющего аппарата; индекс r_e — для входа в рабочее колесо.

Поток подступает с

$$(c_u r)_l = \frac{Q}{F_l} \operatorname{ctg} \alpha_l \frac{D_l}{2},$$

следовательно,

$$c_{ur_e} = \frac{Q}{F_l} \operatorname{ctg} \alpha_l \frac{D_l}{r_e}.$$

Безударное вступление требует:

$$c'_{ur_e} = \frac{\pi D_{r_e} n}{60} + \frac{Q}{F_{r_e}} \operatorname{ctg} \beta_{r_e},$$

следовательно, получается:

$$c_s = \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_l}{F_l} \cdot \frac{D_l}{r_e} - \frac{\operatorname{ctg} \beta_{r_e}}{F_{r_e}} \right) Q - \frac{\pi D_{r_e} n}{60} \quad (138)$$

Таким образом здесь снова линейная зависимость от Q и n . Безударное вступление получится только при определенных отношениях:

$$\frac{Q}{n} = \frac{\frac{\pi D_{r_e}}{60}}{\frac{\operatorname{ctg} \alpha_l}{F_l} \cdot \frac{D_l}{r_e} - \frac{\operatorname{ctg} \beta_{r_e}}{F_{r_e}}} \quad (139)$$

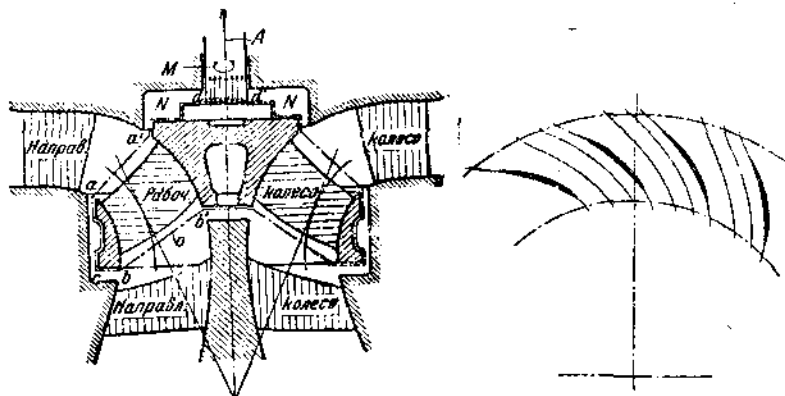
При вычислении это отношение может оказаться отрицательным. В соответствии с нашими положениями § 28 о положительных c_m , w и направлении отсчета угла β , это означает, что при данном на-

правлении потока невозможно безударное вступление в колесо. При обратном направлении потока место вступления сделалось бы местом выхода, и, таким образом, постановка вопроса не имела бы никакого физического смысла. Уравнение можно использовать, чтобы определить углы для безударного входа при данных Q и n и дальше D и F . Эта задача, однако, так же как и определение c , в одном определенном случае решается гораздо проще путем вычерчивания диаграммы скоростей.

VII. Силы и обмен энергией в полных закрытых рабочих колесах

30. Осевое давление и момент вращения. Различие между насосами и турбинами

Для того чтобы вычислить силы и моменты для неподвижного или вращающегося колеса, мы воспользуемся снова методом контрольного пространства, который на примере фиг. 79 применен к



Фиг. 79. Контрольные поверхности вокруг рабочего колеса.

рабочему колесу. Рабочее колесо целиком заключено в окружающую его контрольную поверхность, которая является замкнутой поверхностью вращения (обозначено пунктиром). Эта поверхность своей главной частью O находится целиком в воде; только одной своей маленькой частью она в одном месте прикасается (при сквозных валах — в двух местах) внутри с сальником вала. Главная часть O снова распадается на части, имеющие разное значение. Во-первых, части, которые находятся в собственно рабочем пространстве полости вращения (aa' и bb'). Это — поверхности, через которые рабочая жидкость вступает в контрольное пространство и выходит из него. Направление течения не имеет значения. Во-вторых, части, расположенные между рабочими колесами, окружающими его кожухом ($a-c-b$) ($a'-d$). Эти части контрольной поверхности должны совершенно примыкать к поверхности колеса. Теперь мы применяем, сначала для определенного момента, два следующих уравнения для каждой жидкой или твердой частицы, которая находится в это

мгновение в контрольном пространстве при входе или выходе из него:

$$\Delta m \cdot \frac{dc_a}{dt} = \Delta P_a, \quad (140)$$

$$\Delta m \frac{d(c_u \cdot r)}{dt} = \Delta M. \quad (141)$$

Δm — маленькая частица массы; c_a — составляющая по направлению оси, c_u — составляющая окружной, абсолютной скорости; ΔP_a — составляющая вдоль оси равнодействующей всех сил, действующих на частицу; ΔM — момент этой равнодействующей относительно оси колеса.

Вообразим, что соответствующие уравнения написаны для всех неподвижных и текущих частиц¹ в контрольном пространстве.

Складываем их и получаем:

$$\sum \Delta m \frac{dc_a}{dt} = \sum \Delta P_a. \quad (142)$$

$$\sum \Delta m \frac{d(c_u \cdot r)}{dt} = \sum \Delta M. \quad (143)$$

Возьмем сначала сумму правых сторон. Ради общности не будем делать никаких предположений о положении вала; ось может составлять любой угол с вертикалью. Прежде всего в качестве составляющей для каждой жидкой или твердой частицы является составляющая ΔG_{a_i} или ΔG_{a_e} ее тяжести. Таким образом суммирование дает для уравнения просто сумму составляющих тяжести всех неподвижных частей и всей заключенной жидкости находящихся в контрольном пространстве $G_{a_i} + G_{a_e}$. Эти составляющие считаются положительными, если они идут в направлении осевой части потока. Каждое отдельное воздействие этих сил тяжести, конечно, также, имеет свой момент, но в целом сила тяжести не имеет момента, если центр тяжести всех масс, находящихся в контрольном пространстве, лежит на оси. Все внутренние силы, т. е. давление и трение между жидкими частицами, напряжения между твердыми частицами при сложении взаимно уничтожаются. Точно так же, пока частицы находятся внутри контрольного пространства, выпадают давление и трение между жидкими и твердыми частицами, следовательно, между потоком, с одной стороны, и стенками лопаток и колеса — с другой. То же самое происходит и с моментами этих сил. Остаются только действия сил давлений, трений и напряжений на поверхности контрольного пространства и их моменты. Для вычисления контрольную поверхность разделим на две: на общую часть O внутри жидкости и на поверхность сечения с валом. Осевые напряжения, появляющиеся в последней, и их равнодействующую A от действия верхней части вала на внутреннюю считаем положительной в направлении текущей вдоль оси жидкости.

¹ Таким образом здесь, в противоположность выводам в §§ 20, 21, 23 и 24, плоскости лопаток не рассматриваются как дальнейшие ограничивающие плоскости контрольного пространства. На возможность такого приема уже указывалось в § 19.

Точно также мы вводим интеграл $\int_0^o p_a do$, который представляет осевую составляющую равнодействующей всех давлений и трения части контрольного пространства, расположенного в жидкости с положительным знаком, если эта составляющая совпадает по направлению с осевым потоком. Таким образом правая сторона уравнения (140) полностью вычислена. Она равняется:

$$\sum \Delta P_a = G_{a, \text{ст}} + G_{a, \text{пл}} + A + \int_0^o p_a do. \quad (144)$$

Величину крутящего момента в плоскости сечения, передающегося от внешней части вала на внутреннюю, обозначим через M_i и будем считать его положительным, если он действует в направлении вращения колеса. В главной части O контрольного пространства моменты дают только силы трения жидкости; направление же всех нормальных напряжений пересекают ось и поэтому ничего к моменту не прибавляют. Часть момента сил трения, которые появляются на поверхностях входа и выхода жидкости (aa' , bb'), мы можем не рассматривать, так как они находятся в жидкости, а действие вязкости жидкости согласно нашему пониманию не принимаются во внимание. Существенно только трение на внешних поверхностях ступицы и обода. Можно говорить об обтекании колеса жидкостью и возникающие там силы называют боковым трением колеса. Оно действует всегда противоположно вращению; сумму его моментов мы обозначим M_r . Таким образом правая сторона уравнения (141) получается:

$$\Sigma \Delta M = M_i - M_r. \quad (145)$$

Для определения значения левой части мы рассмотрим в первую очередь твердые части. Они не имеют осевой скорости; таким образом в уравнение (142) ничего не прибавляют. Их составляющая c_u равняется $r\omega$, и суммирование для всего вращающегося колеса дает $\frac{d\omega}{dt} \int r^2 dm$, или $J \cdot \frac{d\omega}{dt}$, где J является моментом инерции массы колеса. В дальнейшем мы ограничимся такими состояниями движения, где Q и ω в среднем постоянны. Для этого сообразно объяснению в § 27 мы должны распространить наши рассуждения на такой период, по истечении которого возвращается, хотя несколько искаженная, но в целом неизменная мгновенная абсолютная картина течения или относительная картина линий тока. В этом случае в середине $\frac{d\omega}{dt} = 0$ и твердые вращающиеся части в середине также ничего не прибавят к уравнению (143). Для жидких частиц мы должны иметь в виду, что какая-нибудь характерная для поля течения величина, например осевая составляющая c_a или момент скорости $c_u \cdot r$ меняются по двум причинам: во-первых, потому, что частицы в мгновенной картине течения двигаются дальше по какой-либо линии тока (— конвективное изменение), во-вторых, потому, что меняется вся картина течения (— локальное изменение). Это второе изменение для частицы выражается в виде $\Delta m \frac{\partial c_a}{\partial t}$ или $\Delta m \frac{\partial (c_u r)}{\partial t}$,

и для всех, заключающихся в контрольном пространстве, равно

$$\int_V \frac{\gamma}{g} \frac{\partial c_a}{\partial t} dV$$

или

$$\int_V \frac{\gamma}{g} \frac{\partial (c_u r)}{\partial t} dV,$$

где V является полным объемом жидкости, находящейся в контрольном пространстве. Но так как одно и тоже распределение скорости периодически возвращается, то можно оба интеграла, когда хотят получить среднюю картину течения для середины, приравнять 0. В ней надо вычислить только конвективные изменения. Такая картина течения для средней поверхности вращения изображена на фиг. 79, б, где показано развернутое на плоскости сечение конусом. Границы вступления и выхода в контрольное пространство тоже отмечены (пунктиром и черточками). В основном получается картина такая же, как на фиг. 49 в § 24, различие только в шаге лопаток и делении вследствие различного положения отдельных каналов лопаток к окружающей их системе направляющих лопаток. Путем разделения на относительные элементарные струйки, мы, так же как и в § 24, получаем для суммы конвективных изменений следующее выражение:

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^0 (c_{a_u} - c_{a_e}) dq'$$

или

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^0 [(c_u \cdot r)_a - (c_u \cdot r)_e] dq'.$$

где dq' представляет количество воды, текущее по относительной струйке, входящее или соответственно выходящее из контрольного пространства; но так как поверхности входа и выхода движутся сами по себе, то можно записать:

$$\frac{\gamma}{g} \left\{ \int_0^{O_a} c_{a_u} dq_a - \int_0^{O_e} c_{a_e} dq_e \right\} \text{ или } \frac{\gamma}{g} \left\{ \int_0^{O_a} (c_u r)_a dq_a - \int_0^{O_e} (c_u r)_e dq_e \right\},$$

где dq_a или dq_e означают абсолютные количества воды, выходящие из поверхности O_a и поступающие в поверхности O_e . Индексы e и a относятся к поверхностям входа и выхода. Таким образом из обоих уравнений (142) и (143) мы получаем:

$$G_{a_i} + G_{a_e} + A + \int_0^0 p_a d\sigma = \frac{\gamma}{g} \left\{ \int_0^{O_a} c_{a_u} dq_a - \int_0^{O_e} c_{a_e} dq_e \right\}, \quad (146)$$

$$M_i - M_e = \frac{\gamma}{g} \left\{ \int_0^{O_a} (c_u r)_a dq_a - \int_0^{O_e} (c_u r)_e dq_e \right\}. \quad (147)$$

В связи со сказанным в § 27 надо заметить, что интегралы $\int_V \frac{\partial c_a}{\partial t} \cdot dV$ и $\int_V \frac{\partial (c_u r)}{\partial t} \cdot dV$ всегда равны нулю, и интегралы $\int c_a dq$ и $\int (c_u r) dq$ постоянны по времени, если направляющие аппарата или имеют бесконечно много лопаток, или отодвинуты бесконечно далеко.

Если, наконец, как это принято в нашей основной теории, во всей системе лопаток число лопаток бесконечно велико, то получим просто:

$$G_{a_{st}} + G_{a_n} + A + \int_0^o p_a do = \frac{Q\gamma}{g} (c_{aa} - c_{ao}) = \frac{Q\gamma}{g} \Delta_c^a c_a, \quad (148)$$

$$M_t - M_r = \frac{Q\gamma}{g} [(c_u \cdot r)_a - (c_u r)_o] = \frac{Q\gamma}{g} \Delta_c^a (c_u \cdot r). \quad (149)$$

Важно снова напомнить определение знаков. G_a , A и элементарные силы $p_a \cdot do$ считаются положительными, когда они направлены извне в контрольное пространство и совпадают с направлением осевой части течения. M_t считается положительным, если оно действует на части в контрольном пространстве, как вращающий момент по направлению ω . M_r всегда отрицательно, $c_u r$ считается положительным в направлении ω . Полезно (148) и (149), согласно приведенным рассуждениям в данном кратком выводе, распространить на правую и левую части; при этом принимать во внимание упомянутое правило знаков и только тогда решать в отношении требуемых величин. Из уравнения (148) получаем:

$$A = \frac{Q\gamma}{g} \Delta_c^a c_a - G_{a_{st}} - G_{a_n} - \int_0^o p_a do. \quad (150)$$

A — противоположно и равно силе, с которой нагружается подпятник. Эту силу обычно подразумевают, когда говорят об осевом давлении вала. Таким образом мы имеем:

$$A_{\text{подпятник}} = -A = G_{a_{st}} - G_{a_n} + \int_0^o p_a do - \frac{Q\gamma}{g} \Delta_c^a c_a. \quad (151)$$

Величину $V = \frac{Q\gamma}{g} \Delta_c^a c_a$ принято называть динамической частью осевого давления и сумму

$G_{a_{st}} + G_{a_n} + \int_0^o p_a do$ — статической частью этого давления. Так как $\int_0^o p_a do$ содержит как динамическое, так и статическое распределение давления, то статическую часть давления по оси можно вычислить также таким образом, что отбросить G_{a_n} , а $G_{a_{st}}$ уменьшить на величину подъемной силы (плавающего тела), а в $\int_0^o p_a do$

подставить только динамическое распределение давления (этот расчет должен быть несколько исправлен, если принимать во внимание поперечное сечение вала в сальнике). Из уравнения (149) следует:

$$M_t = M_r + \frac{Q\gamma}{g} \Delta_s^a(c_u r). \quad (152)$$

В этом уравнении M_r всегда считается положительным. Если $(c_u r)_a > (c_u r)_s$, то M_t положительно, т. е. вал приводит в движение рабочее колесо и к валу должен быть приложен вращающий момент; в таком случае это есть насос (рабочая машина). Если, наоборот, $(c_u r)_a < (c_u r)_s$, то, так как M_r составляет самое большее 10% правой части, M_t отрицательно и, следовательно, вал приводится в движение рабочим колесом, — вращающий момент получается от вала, то мы имеем турбину (двигатель). Величина — $\frac{Q\gamma}{g} \Delta_s^a(c_u r)$ представляет момент реакции, появляющейся от действия потока на лопатки. Обозначим его через M . Он приводит в движение турбину, если $(c_u r)_s > (c_u r)_a$. Одно и то же вращающееся колесо может работать и как насос и как турбина. В первом случае оно увеличивает момент $c_u \cdot r$ протекающей жидкости, во втором — уменьшает его. Вопрос о к. п. д. оставляем пока открытым.

Уравнение

$$M = -\frac{Q\gamma}{g} \Delta_s^a(c_u r) = \frac{Q\gamma}{g} \Delta_s^a(c_u r) \quad (153)$$

называется уравнением моментов рабочих колес. Установил и вывел его еще Эйлер и в данном случае можно преобразовать выражение момента, введя в него циркуляцию вокруг колеса или соответственно вокруг отдельной лопатки. Формула принимает точно такой вид, как для чисто-радиального колеса в § 24:

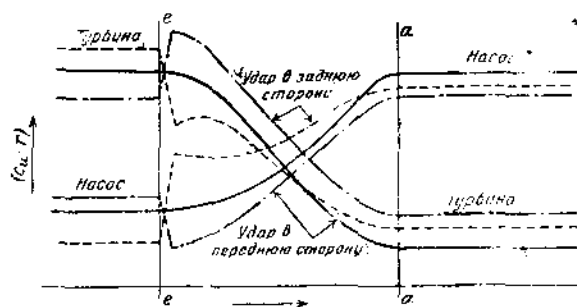
$$M = \frac{Q\gamma}{g} \cdot \frac{\Gamma_s}{t_p} \quad (154)$$

Об ее выводе и применении будет говориться только во втором томе.

Уравнения (148) до (153) применимы и для неподвижных рабочих колес и для направляющих аппаратов, — M_r тогда всегда равно 0.

Место вала, который передает моменты извне, и осевые силы на части, находящиеся в контрольном пространстве, занимают здесь неподвижные детали конструкции камеры: дно, крышка, связи, болты и т. д. Контрольное пространство ограничивается здесь кроме поверхностей входа и выхода также стенками полости вращения. На поверхности лопаток передаются осевые силы и моменты, соответствующие силам и моментам, передаваемым частями камеры, на части внутри контрольного пространства. Левая сторона уравнения вычисляется из абсолютной картины течения, которая является частью общей, периодически изменяющейся. Все приведенные

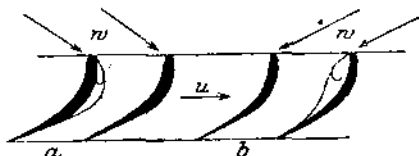
выше замечания относятся, как и выше, к средним величинам. Очень важно иметь в виду, что уравнение моментов совершенно независимо от того, происходит ли вступление жидкости в лопастное колесо с ударом или без него. Вывод ясно показывает, что за момент $c_u \cdot r$ при вступлении принимается тот, который развивает поток перед входом в колесо. Действия удара воды при входе в систему лопаток колеса также можно не принимать во внимание,



Фиг. 80. Диаграмма к удару о переднюю и заднюю стороны лопаток.

как и действие трения внутри контрольного пространства или, если иметь в виду момент M , а не M_r , можно не принимать во внимание вообще всех действий трения, включая боковые трения колеса и трение на поверхностях входа и выхода. Естественно, что в общем случае действие удара вводится в уравнение, смотря потому, как оно влияет на форму потока и вместе с тем на величину момента скорости $c_u \cdot r$ при входе и выходе. Если неправильное вступление на рабочие лопатки ведет к таким вихревым движениям, что вихревой хвост переходит границы контрольного пространства, то в этом случае будет действительным сказанное в § 21. Однако вполне согласуется с лежащими в основе нашей основной теории положениями, если мы будем придерживаться того, что величина момента скорости $c_u \cdot r$ при входе определяется только предшествующим колесом, а величина его при выходе определяется только рассматриваемым колесом. Удар при входе надо понимать в том смысле, что у входных кромок системы лопаток наступает местное понижение или повышение момента $c_u \cdot r$ независимо от того, будет ли он в целом повышен или понижен.

Фиг. 80 показывает четыре типичных случая изменения величины момента скорости $c_u \cdot r$ на пути s средней струйки при проходе ею рабочего колеса. При этом удар в переднюю (вогнутую) сторону лопатки соответствует удару вследствие большого момента $c_u \cdot r$, а удар в заднюю (выпуклую) сторону соответствует удару вследствие малого момента $c_u \cdot r$. Удар передний изображен на фиг. 81 а, задний удар — на фиг. 81 в. На обоих чертежах указано относительное течение, не совпадающее с направлением начального элемента лопаток и вызванное этим образованием вихрей и мертвого пространства.



Фиг. 81. а и б. Удар о переднюю и заднюю стороны лопатки и соответствующие им относительные направления входа.

31. Баланс энергии в турбомашинах без вредных сопротивлений. Основное уравнение теории рабочих колес

Если рабочее колесо вращается и одновременно к валу приложен крутящий момент, то работа или отдается, или потребляется колесом. Сообразно этому в каждую секунду определенное количество воды переходит из одного уровня в другой. Если бы не было никаких потерь энергии, то изменение энергии потока было бы совершенно эквивалентно мощности, развиваемой вращающим моментом вала, так что, если не учитывать той части момента вращения M_r , которая соответствует моменту трения, и ограничиться только моментом, получающимся от взаимодействия потока и лопастей колеса, то получаем уравнение:

$$M \cdot \omega = \gamma \cdot Q \cdot \Delta_e^a H. \quad (155)$$

Если мы поставим для M его величину из уравнения (153), то получим:

$$\gamma \cdot Q \cdot \Delta_e^a H = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \omega \cdot \Delta_e^a (c_u r), \quad (156)$$

или

$$\Delta_e^a H = \frac{\omega}{g} \Delta_e^a (c_u r) \quad (157)$$

H — известная нам энергия потока, следовательно:

$$\Delta_e^a H = \Delta_e^a \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \right). \quad (158)$$

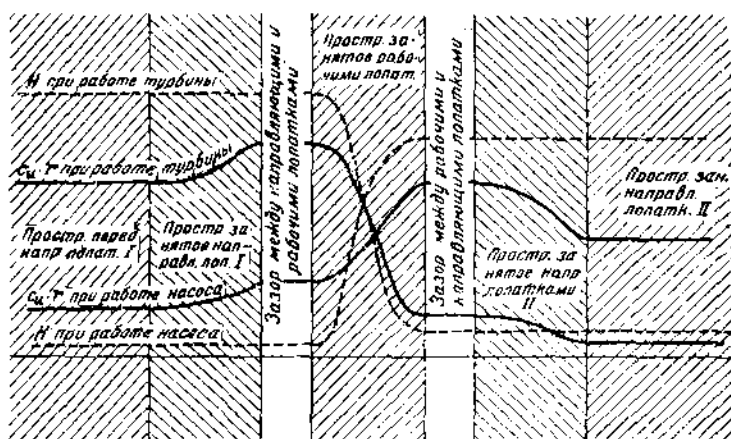
Выражаем это словами: если вращающееся рабочее колесо поддерживает в областях, которые оно разделяет, различие в величине момента ($c_u r$), то оно одновременно поддерживает и различие в количестве энергии, которая по уравнению (157) пропорциональна ему и однозначна с ним: увеличение момента $c_u \cdot r$ означает и увеличение энергии, уменьшение его — уменьшение энергии.

Уравнение (157) называется основным уравнением теории рабочих колес. Для выражения $\Delta_e^a H$ в последнее время в литературе принято название теоретическая удельная мощность, так как оно представляет мощность, развиваемую 1 кг жидкости в секунду. Индексы e и a относятся к областям, свободным от лопаток перед рабочим колесом и позади его. Уравнение (157) часто пишется в другой форме: введя ω как постоянную величину в выражение разности, получаем:

$$\Delta_e^a H = \frac{1}{g} \Delta_e^a (c_u u). \quad (159)$$

При этом надо иметь в виду, что под u подразумеваются те окружные скорости, которые имеют точки вступления и выхода и в которых определяется c_u , если бы они были тесно связаны с колесом. Уравнение (159) применяется чаще, причем u измеряется на концах лопаток рабочего колеса. Если вступление на лопатку безударное, то нет никакой опасности, если же нет, то уравнение (159) не дает возможности установить, какую надо принять вели-

чину c_u , тогда как уравнение (157) ясно говорит, что здесь идет речь только о величине c_u поступающего потока, а не только безударного вступления. Поэтому в этой книге уравнению (157) дается предпочтение. Оба уравнения применимы для насосов и турбин. Знак $\Delta_e(c_u r)$ решает уже известным способом вопрос, какой род работы имеет место. Мы получаем с помощью нашей основной теории следующее представление об отношениях энергии и момента $c_u \cdot r$ при работе без потерь для турбомашины схематически изображенной на фиг. 50. Направляющий аппарат, расположенный первым по пути течения, находится полностью в области постоянной энергии течения H_e . Перед ним мы имеем постоянный момент $c_u \cdot r$, который меняет его на известную величину $(c_u r)_e$; эта величина постоянна между направляющим аппаратом и рабочим колесом. Область постоянной величины H_e достигает непосредственно системы лопаток колеса. Рабочее колесо изменяет момент скорости на величину $(c_u r)_a$; дальше в пространстве между системой лопаток рабочего колеса и второго направляющего аппарата он постоянен, а последнее снова меняет момент. Пространство между лопатками рабочего колеса и лопатками вто-



Фиг. 82 Диаграмма изменения энергии и момента $c_u \cdot r$ в турбомашинах.

рого направляющего аппарата, сами лопатки последнего и дальнейшее пространство до возможного нового рабочего колеса образуют область с постоянной величиной H_a . Диаграмма фиг. 82, вычерченная на развертке среднего пути потока через все упомянутые области, поясняет эти отношения.

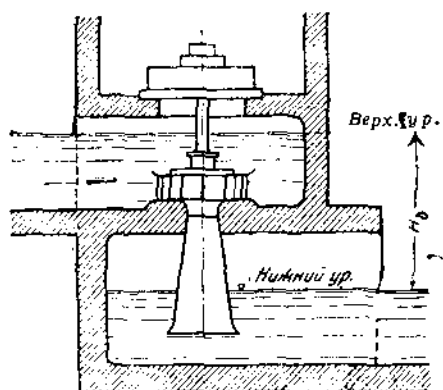
32. Баланс энергии действительной турбомашины в ограниченном потоке

а) Основные определения и способ расчета

Баланс энергии с учетом потерь лучше всего установить не только для рабочего колеса, но сразу и для всех других ответственных частей машины. В дальнейшем мы рассмотрим три типичных примера.

Турбина открытая (фиг. 83). Турбина установлена в открытой камере на конце открытого подводящего канала и имеет вертикальный или горизонтальный вал, в первом случае она с прямой или изогнутой всасывающей трубой, во втором случае — только с изогнутой. Пройдя турбину и всасывающую трубу, вода вытекает в нижний канал. Энергию течения в нижнем канале, а именно около конца всасывающей трубы, там, где вода снова течет спокойно, мы принимаем за нулевой уровень энергии, следовательно, откладываем положительные высоты h кверху от нижнего уровня и от него же отсчитываем высоты давления p/γ сверх атмосферного; скоростную энергию мы пока не принимаем во внимание. В вертикальном сечении нижнего канала мы принимаем энергию потока за постоянную; это значит, что все частицы воды в конце концов поступают в область постоянной энергии потока величины $H=0$. Точно так же мы принимаем за постоянную и энергию непосредственно перед камерой в вертикальном поперечном сечении верхнего канала, считая ее равной энергии верхнего уровня. Там $H = \frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} = H_b$, где H_b является разностью высот между верхним и нижним уровнями воды. Так как там p/γ снова $= 0$ и можно снова не принимать во внимание $c^2/2g$. Можно сказать: H_b есть разница энергии потока между верхним и нижним уровнем, если пренебречь разностью $\frac{c_0^2 - c_u^2}{2}$. Все,

что установлено между верхним и нижним уровнями, чтобы привести воду к рабочему колесу и от него отвести, т. е. турбинная камера, направляющий аппарат, рабочее колесо, всасывающая труба являются ответственными частями конструкции турбины, так как устройство всех этих органов влияет на использование энергии воды. Поэтому понятно само собой, что H_b считается свободным напором. Его называют также напор брутто. Если он используется с общим к. п. д. η , то мы получаем на турбинном валу мощность в лошадиных силах:

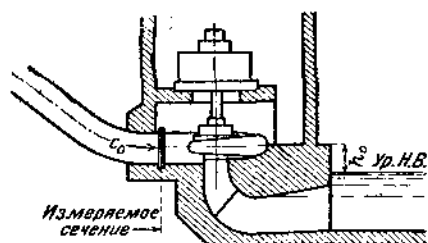


Фиг. 83. Напор брутто в турбине с открытым подводом воды.

$$N_w = \eta \frac{\gamma Q H_b}{75} \quad (160)$$

Турбина с напорным трубопроводом (фиг. 84). Турбина, заключенная в спиральную камеру или котел, который примыкает к напорному трубопроводу, идущему из водонапорного бассейна, расположенного вдали на высшем уровне. Тут было бы неправильно в самой конструкции турбины учитывать потери энергии, получающиеся в трубопроводе. Поэтому располагаемым напо-

ром считается величина $H_b = \frac{p_0}{\gamma} + h_0 + \frac{c_0^2}{2g}$ в сечении трубы непосредственно перед присоединением к спиральной камере или котлу. Таким образом оба эти органа являются ответственными частями конструкции машины. В выражении H_b , h_0 означают среднюю высоту измеряемого поперечного сечения подводящей трубы над поверхностью нижнего уровня воды, p_0/γ — избыток давления в этом сечении, $c_0^2/2g$ — средний квадрат скорости. Большей частью удовлетворяются вычислением квадрата средней скорости $c_0 = \frac{Q}{F_0}$, и это достаточно, так как $c_0^2/2g$ в случаях, встречающихся на практике, составляет только небольшой процент H_b . Скоростная энергия в нижнем канале не принимается во внимание.



Фиг. 84 Напор brutto в турбине с напорным трубопроводом

Центробежный насос. Центробежные насосы являются в большей степени рыночным товаром, чем водяные турбины. Один и тот же тип насоса устанавливается совершенно различным образом и снабжается всасывающими и напорными трубами различной длины. Конструкция центробежного насоса имеет дело только с устройством самой машины от всасывающего патрубка до напорного. Поэтому при приемных испытаниях измеряют разность энергии потока между поперечным сечением всасывающего патрубка (вначале) и конечным поперечным сечением напорного патрубка и обозначают ее, как полезную, или нетто, высоту подачи.

$$H_n = \Delta s^D \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{c^2}{2g} \right).$$

Значение $c^2/2g$ часто можно не принимать во внимание или оно может быть сокращено, так как всасывающие и напорные патрубки имеют равные или приблизительно равные сечения. Если мы затем измерим поступающий расход и механическую мощность, замеренную на соединительной муфте вала, то общий к. п. д. будет:

$$\eta = \frac{\gamma Q H_n}{75 N_w}. \quad (161)$$

Ход мысли в трех рассматриваемых случаях типичен и может быть применен в каждом специальном случае ¹ (насосы с короткой всасывающей трубой, вентиляторы, трансформаторы Феттингера).

в) Разделение общих потерь на четыре группы.

Рассмотрим рабочее колесо с положительной (или потребляемой им) мощностью, т. е. насос.

¹ См. также различные нормы для испытания мощности.

От мощности N_w , прилагаемой на соединительной муфте вала для работы насоса, теряется прежде всего величина N_l для преодоления трения в подшипниках и сальнике. Поэтому мы можем определить общий гидравлический к. п. д. ϵ_h уравнением:

$$\frac{\gamma Q H_n}{75} = \epsilon_h (N_w - N_l) \quad (162)$$

Но мощность $(N_w - N_l)$ не доходит полностью до системы лопаток: часть ее $\frac{M_r \cdot \omega}{75}$ теряется на преодоление бокового трения колеса; только остаток $N_w - N_l - \frac{M_r \cdot \omega}{75}$ преобразовывается в энергию движения. Она сообщается, однако, не только количеству воды Q насоса, но несколько большей массе воды $Q + Q_s$, где Q_s является утечкой воды через зазор. Q_s вся или частично идет другими путями, чем главный поток Q . Например, у турбомашин, схематично изображенной на фиг. 79, утечка через зазор происходит в промежутке между внешним ободом колеса и окружающей камерой; затем она возможна через зазор между втулкой и камерой, особенно тогда, когда пространство между втулкой и камерой соединяется или с атмосферой, или с местами низкого давления в самой машине, конечно, при включении дросселя. Такое устройство часто встречается, чтобы понизить давление в пространстве над втулкой (пространство N фиг. 79) и этим уменьшить осевой сдвиг. Если рабочее колесо не имеет внешнего обода, а лопатки движутся с зазором в камере (как у пропеллерной турбины, турбины Каплана, а также у диагональных и осевых насосов), то у конца каждой лопатки появляется утечка со стороны высокого давления в сторону низкого. Для поддержания течения через зазор у колес с зазорами по ободу тратится почти вся разница энергии области перед и позади рабочего колеса, так как здесь происходит отделение от главного потока части его, проходящей в зазор, и затем их соединение происходит при неблагоприятных условиях; при этом длинный путь через зазор оказывает значительное сопротивление. Если лопатки без обода вращаются свободно в камере, то на утечку расходуется меньше энергии, так как соединение потока происходит при более благоприятных условиях, и путь через зазор оказывает гораздо меньшее сопротивление. Здесь тоже можно себе представить, будто „идеальное“ количество воды Q_s , меньшее, чем в действительности, течет по зазорам, потребляя энергию колеса, превращаемую из механической в гидравлическую. У насосов надо представить себе дальнейший ход явлений таким образом, что вода из зазора течет из области выхода из рабочего колеса по путям зазора ко входу и оттуда через колесо снова направляется в область выхода.

Таким образом колесо приводит в движение большее количество воды, чем устанавливаемый расход насоса. Вследствие этого баланс энергии можно написать в форме:

$$\gamma \frac{Q + Q_s}{75} \frac{\omega}{g} \Delta e(c_u r) = N_w - N_l - \frac{M_r \cdot \omega}{75}, \quad (163)$$

так как $\frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u r)$ есть величина обмена между энергией машины и энергией потока, {отнесенная к 1 кг протекающей жидкости. Ее здесь можно назвать „напор брутто“ и обозначить H_b . Тогда получаем:

$$H_b = \frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u r) = \frac{N_w - N_l - \frac{M_r \cdot \omega}{75}}{\frac{Q + Q_s}{75} \gamma} \quad (164)$$

Но у расхода Q достигается повышение энергии только на величину напора нетто H_n . Отношение

$$\frac{H_n}{H_b} = \varepsilon_s \quad (165)$$

мы называем коэффициентом полезного действия потока в насосе, обусловливаемым только потерей напора в рабочем пространстве с расходом Q . Уравнение (164) применимо и к турбинам, если только иметь в виду, что здесь $\Delta_a^e(c_u r)$ является отрицательной величиной, равно как и N_w и Q_s , так как N_w теперь уже отдаваемая мощность, а Q_s не участвует дополнительно, но исключается из обмена энергии. Таким образом если мы правильно введем все знаки, то получаем после преобразований:

$$\frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u r) = - \frac{N_w + N_l + \frac{M_r \cdot \omega}{75}}{\frac{Q - Q_s}{75} \gamma} \quad (166)$$

Это уравнение (166) полезно вывести отдельно.

При действии турбины мы имеем мощность брутто

$$N_b = \frac{\gamma Q H_b}{75}$$

В механическую работу на лопатках рабочего колеса превращается меньшая мощность $\frac{\gamma (Q - Q_s) H_b}{75}$, так как через зазоры количество воды Q_s обходит рабочее колесо. Преобразование происходит с к. п. д. ε_s .

Поэтому:

$$\frac{(Q - Q_s) \gamma \omega}{75 g} \Delta_a^e(c_u r) = \frac{\gamma (Q - Q_s) H_n}{75}, \quad (167)$$

т. е. получается

$$\frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u r) = H_n, \quad (168)$$

которое можно обозначить, как напор нетто, или как полезный напор. Коэффициент полезного действия потока разнится:

$$\varepsilon_s = \frac{H_n}{H_b} = \frac{\frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u r)}{H_b} \quad (169)$$

Мощность, получаемая лопатками, дальше еще уменьшается на $\frac{M_r \cdot \omega}{75}$. Таким образом, так же как и у насосов мы можем определить общий гидравлический к. п. д. турбины из уравнения:

$$\varepsilon_h \frac{\gamma Q H_b}{75} = \frac{\gamma (Q - Q_s) H_n}{75} - \frac{M_r \omega}{75}. \quad (170)$$

На валу за вычетом трения подшипника и сальника в конце концов получается мощность:

$$N_w = \frac{\gamma (Q - Q_s) \omega}{75g} \Delta_a^e(c_u \cdot r) - \frac{M_r \omega}{75} - N_i = \eta \frac{\gamma Q H_b}{75}, \quad (171)$$

что совпадает с уравнением (164).

с) Общий баланс энергии для насосов и турбин

В дальнейшем будем обозначать величину $\frac{\omega}{g} \Delta_e^e(c_u \cdot r)$ через H_m и поэтому имеем выражение: $H_m = \frac{\omega}{g} \Delta_e^e(c_u \cdot r)$, что как для насосов, так и для турбин является эквивалентом обмена механической энергии между лопатками рабочего колеса и потоком. Индексы e и a относятся попрежнему к области вступления непосредственно перед рабочим колесом к области выхода непосредственно за ним. Индексы же E и A должны относиться ко входу или выходу во всей машине с ее турбоколесами. Тогда мы имеем и для насосов и для турбин одинаковое уравнение баланса (где V —потери), а именно:

$$\Delta_E^A H = \frac{\omega}{g} \Delta_e^a(c_u \cdot r) - V_{E \rightarrow A}. \quad (172)$$

Отношение $\frac{\Delta_E^A H}{H_m}$ представляет у насосов непосредственно к. п. д. ε , а у турбин оно дает его обратную величину. Для турбин при перемене индексов и знаков можно также написать уравнение (172):

$$-\Delta_A^E H = -\frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u \cdot r) - V_{E \rightarrow A}, \quad (173)$$

или

$$\Delta_A^E H = \frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u \cdot r) + V_{E \rightarrow A}.$$

Отсюда видно, что здесь $\frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u \cdot r) < \Delta_A^E H$.

Для многоступенчатых турбомашин уравнение баланса можно применить или для одной ступени, или суммарно для совокупности всех ступеней. Во втором случае вместо H_m пишется $\sum_{i=1}^n H_{m_i}$, где n обозначает число ступеней. Индексы E и A должны быть расположены соответственно рассматриваемому случаю.

В дальнейшем мы будем называть величину

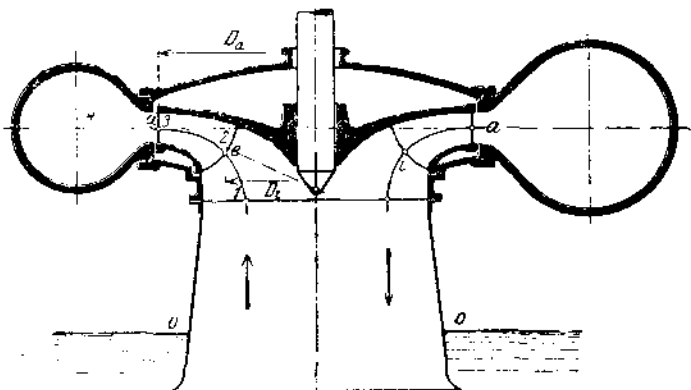
$$H_m = \frac{\omega}{g} \Delta_a^e(c_u \cdot r)$$

энергией колеса.

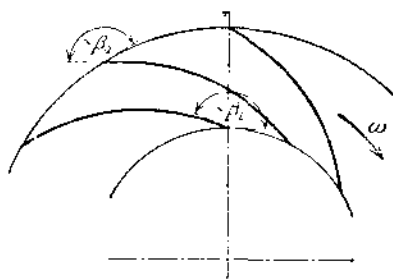
33. Распределение энергии и давления в турбомашине. Избыток давления в колесе

Уравнение (172) дает баланс энергии между местом вступления и местом выхода из машины. Для сравнения можно рассматривать и другие точки на пути потока между входом и выходом из колеса, например, точку x . Полученная или отданная на этом пути механическая энергия, будет тогда:

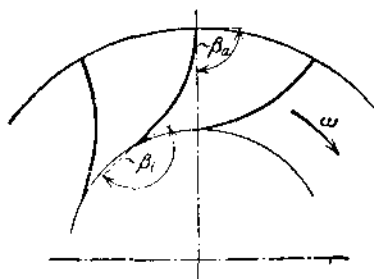
$$H_m = \frac{\omega}{g} A_x^z (c_u \cdot r).$$



Фиг. 85. Турбомашина в спиральной камере.



Фиг. 85а. Лопатки насоса.



Фиг. 85б. Лопатки турбины.

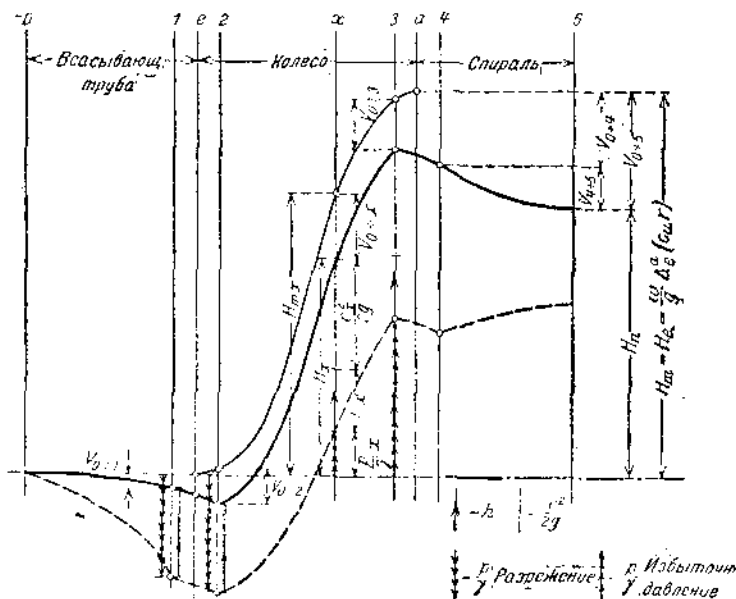
Баланс энергии дает возможность знать доли отдельных форм, энергии в общем обороте, в особенности распределение давления, которое необходимо, чтобы можно было вычислить нагрузки на отдельные части машины, осевое давление и т. д. и, кроме того, для того чтобы установить, не получается ли при работе машины недопустимо низкое давление (опасность кавитации). Само собой понятно, что эти балансы, поскольку они основной теорией устанавливаются по средним величинам, дают средние величины давлений, которые мы относим к среднему сечению потока.

Ход вычислений может быть пояснен на каком-либо простом примере. Фиг. 85 показывает турбомашину с вертикальным валом, прямой всасывающей трубой и спиральной камерой. Напра-

вляющие лопатки совершенно отсутствуют. Подобные машины являются как маленькими турбинами с притоком через спираль, с вытеканием через всасывающую трубу, так и насосами с притоком в обратном направлении. В качестве насосов они снабжаются рабочим колесом с системой лопаток, изображенной на фиг. 85а, в качестве турбин, — согласно изображенной фиг. 85б; оба чертежа изображают развертки среднего касательного конуса средней поверхности вращения. На них углы лопаток β_a и β , несколько искажены.

а) Работа насоса

Отдельные пункты среднего пути потока от нижнего уровня через машину до выходного сечения обозначим следующими индек-



Фиг. 86. Распределение энергии в насосе.

сами. Нижний уровень воды $\bar{q}$, конец всасывающей трубы непосредственно перед входом e в колесо 1, место непосредственно после входа в колесо 2, последнее поперечное сечение непосредственно перед выходом a из колеса 3, вход в спираль непосредственно после a 4, конечное поперечное сечение спирали 5. Эти пункты отмечены на фиг. 86 на развернутом пути потока. Конечно, развертывание не претендует изображать действительную длину пути, в особенности, ради ясности раздвинуты друг от друга пункты 1 и 2, и 3 и 4, которые в действительности почти совпадают с e и a . От начального уровня 0 энергия потока сначала несколько падает, так как во всасывающей трубе получают потери вследствие сопротивлений трения. Преодоление этих сопротивлений, а также образование скоростной энергии $c_1^2/2g$, далее, поднятие на вы-

соту h_1 получается за счет атмосферного давления, поэтому в точке 1 мы имеем понижение давления значительно ниже атмосферного. Для вычисления давления $\frac{p_1}{\gamma}$ мы используем баланс энергии между точками 1 и 0. В нижнем бьефе все три члена энергии равны 0 (ср. § 32, п. „а“), тогда энергия в пункте 1 отрицательная, именно:

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{c_1^2}{2g} = -V_{0 \rightarrow 1},$$

где $V_{0 \rightarrow 1}$ означает потери на участке 0—1.

Отсюда следует:

$$\frac{p_1}{\gamma} = -\left(h_1 + \frac{c_1^2}{2g} + V_{0 \rightarrow 1}\right). \quad (174)$$

От точки e жидкость начинает воспринимать механическую энергию, равную на пути ex $H_{m_x} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^x(c_u \cdot r)$ и превращать ее в энергию течения. Но расход энергии на покрытие потерь продолжается. Так, при входе может получиться потеря от удара $V_{1 \rightarrow 2}$ и в рабочем колесе мы имеем потери трения $V_{2 \rightarrow 3}$; у выхода из рабочего колеса уровень энергии H —самый высокий, однако давление в этом пункте еще не самое высокое в машине. Его вычисляют снова из баланса энергии, всего лучше между пунктами 3 и 0:

$$H_3 = \frac{p_3}{\gamma} + h_3 + \frac{c_3^2}{2g} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^a(c_u \cdot r) - V_{0 \rightarrow 3},$$

отсюда

$$\frac{p_3}{\gamma} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^a(c_u \cdot r) - \left(h_3 + \frac{c_3^2}{2g} + V_{0 \rightarrow 3}\right). \quad (175)$$

При переходе в спираль может снова появиться потеря от удара $V_{3 \rightarrow 4}$ на какую-то уменьшается давление. Затем оно повышается благодаря переходу в спирали скоростной энергии в энергию давления, который связан во всяком случае с потерей $V_{4 \rightarrow 5}$ самой большой из отдельных потерь в машине. Баланс энергии между 5 и 0 выражается в следующем виде:

$$H_5 = H_u = \frac{p_5}{\gamma} + h_5 + \frac{c_5^2}{2g} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^a(c_u \cdot r) - V_{0 \rightarrow 5}, \quad (176)$$

следовательно,

$$\frac{p_5}{\gamma} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^a(c_u \cdot r) - \left(h_5 + \frac{c_5^2}{2g} + V_{0 \rightarrow 5}\right). \quad (177)$$

Вообще для промежуточной точки x мы имеем:

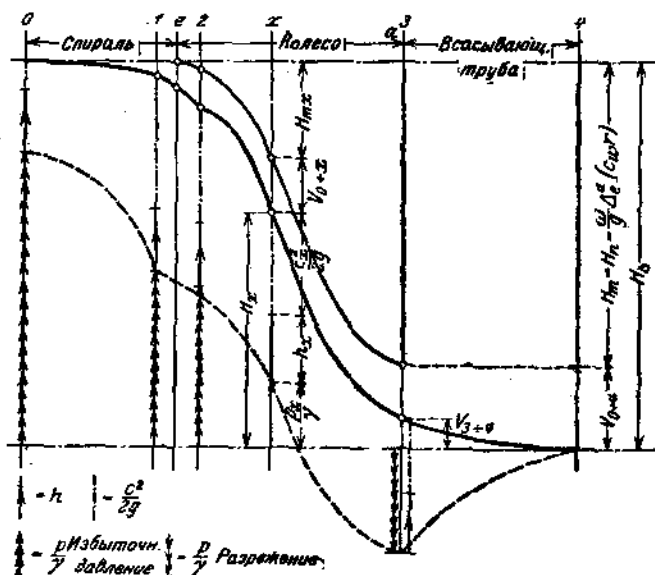
$$H_x = \frac{p_x}{\gamma} + h_x + \frac{c_x^2}{2g} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^x(c_u \cdot r) - V_{0 \rightarrow x} = H_{m_x} - V_{0 \rightarrow x}, \quad (178)$$

следовательно:

$$\frac{p_x}{\gamma} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^x(c_u \cdot r) - \left(h_x + \frac{c_x^2}{2g} + V_{0 \rightarrow x}\right). \quad (179)$$

б) Работа турбины (фиг. 87)

Здесь поперечное сечение хода в спираль получает индекс 0; пункт непосредственно перед входом в колесо ε — индекс 1, непосредственно после него — 2, выход из колеса a обозначается 3, отдельные пункты перед и позади него не требуют особого обозначения, так как потери при переходе из колеса во всасывающую трубу не имеют места. Нижний уровень воды будет 4.



Фиг. 87. Распределение энергии в турбине.

Спираль преобразовывает энергию давления в энергию скорости, потерями при этом являются потери от трения о стенки и потому они незначительны. Давление в точке 1 вычисляется из баланса энергии между 1 и 0 помощью выражения:

$$\frac{p_i}{\gamma} = H_b - \left(h_i + \frac{c_i^2}{2g} + V_{0-i} \right). \quad (18)$$

При переходе в колесо может возникнуть потеря от удара V_{1-2} , которая еще уменьшает давление; а затем начинается отдача механической энергии колесу. В рабочем колесе развиваются сопротивления трения. При выходе в a из рабочего колеса в точке 3 имеется еще незначительный запас энергии, который достаточен, чтобы покрыть потери V_{3-4} во всасывающей трубе. Давление за рабочим колесом вычисляется проще всего из баланса энергии между 3 и 4 :

$$H_3 = \frac{p_3^2}{\gamma} + h_3 + \frac{c_3^2}{2g} = V_{3-4}.$$

отсюда

$$\frac{p_3}{\gamma} = - \left(h_3 + \frac{c^2_3}{2g} - V_{3 \rightarrow 4} \right) \quad (181)$$

(обратим внимание на разницу в знаках перед V_{3-4} в сравнении с насосом). Точно так же его можно вычислить из сравнения между 3 и 0:

$$\frac{p_3}{\gamma} = H_b - \left[h_3 + \frac{c_3^2}{2g} + V_{0-3} + \frac{\omega}{g} A_a^e (c_u \cdot r) \right] \quad (182)$$

В любой точке x в колесе между e и a мы имеем:

$$\frac{p_x}{\gamma} = H_b - \left[h_x + \frac{c_x^2}{2g} + V_{0-x} + \frac{\omega}{g} A_a^e (c_u \cdot r) \right] \quad (183)$$

(обратим внимание в уравнении (182) и (183) на перестановку индексов e и a или e и x !).

Если мы проведем сравнение между 4 и x , то получим:

$$\frac{p_x}{\gamma} = V_{x-4} + \frac{\omega}{g} A_a^x (c_u \cdot r) - \left(h_x + \frac{c_x^2}{2g} \right). \quad (184)$$

с) Избыток давления в колесе

Средняя величина разности давлений между областями e перед колесом и a за колесом сводится к выражению:

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} = \frac{\omega}{g} A_e^a (c_u \cdot r) - \left(\frac{c_a^2 - c_e^2}{2g} + h_a - h_e + V_{e-a} \right) \quad (185)$$

или:

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} = \frac{2(u_a \cdot c_{u_a} - u_e \cdot c_{u_e}) - (c_a^2 - c_e^2)}{2g} - (h_a - h_e + V_{e-a}) \quad (186)$$

Разность обоих первых членов в правой части может быть преобразована. В каждом треугольнике скоростей u, ω, c существует отношение [фиг. 47, ср. также уравнение (119)]:

$$c^2 = c_m^2 + c_u^2 = \omega^2 - \omega_u^2 + u^2 + 2u \omega_u + \omega_u^2 = \omega^2 - u^2 + 2u \cdot c_u \quad (187)$$

Если мы это введем в уравнение (186), то получается:

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} = A_e^a \left(\frac{p}{\gamma} \right) = \frac{u_a^2 - u_e^2}{2g} - \frac{\omega_a^2 - \omega_e^2}{2g} - (h_a - h_e + V_{e-a}), \quad (188)$$

благодаря чему абсолютные скорости заменены скоростями относительными и окружными. Если к обеим частям (188) прибавить

$$\frac{c_a^2 - c_e^2}{2g} + h_a - h_e,$$

то можно написать так:

$$A_e^a H = \frac{1}{2g} A_e^a (u^2 + c^2 - \omega^2) - V_{e-a}. \quad (189)$$

Если в заключение возьмем любую точку в колесе, то получим вообще:

$$A_e^x \left(\frac{p}{\gamma} \right) = \frac{1}{2g} A_e^x (u^2 - \omega^2) - (h_x - h_e + V_{e-x}) \quad (190)$$

и

$$A_e^x H = \frac{1}{2g} A_e^x (u^2 + c^2 - \omega^2) - V_{e-x}. \quad (191)$$

В формулах (188) до (191) при подстановке значений n и ω следует учитывать замечание, высказанное для значений n в уравнении (159).

34. Вычисление помощью баланса энергии данных для турбомашин переменного режима. Проблема лопаток.

В уравнении (172) выражение $A_r^a(c_r \cdot r)$ может быть заменено выражением из правой части уравнения (136).

Член, выражающий потери $(V_{E \dots A})$, состоит из отдельных частей, каждая из которых при приблизительно одинаковом рейнольдсовом числе точно пропорциональна квадрату, определенной для данного места рабочего колеса, скорости. Каждая такая скорость, как это видно из уравнения (132), может быть выражена линейно в зависимости от Q и n . Член $V_{E \dots A}$ является поэтому приближенно — при одинаковом рейнольдсовом числе, точно — функцией второй степени Q и n . $A_r^a(c_r \cdot r)$ является линейной функцией Q и n , но при умножении на ω становится тоже функцией второй степени; таким образом вся правая сторона уравнения (172) становится функцией второй степени, которую обозначим через $F(Q, n)$. Таким образом мы получаем из уравнения (172):

$$A_r^1(H) = F(Q, n) \quad (192)$$

Посредством этого уравнения при данных Q и n можно определить достигаемое (при насосах) или затрачиваемое (при турбинах) $A_r^1(H)$ или при данных $A_r^1(H)$ и n вычислить расход Q . В частности это уравнение, дающее полную картину рабочего состояния, дает возможность по общей высоте напора и потерям определить к. п. д. потока ϵ_n , или, зная потери в зазорах и боковое трение, найти общий гидравлический к. п. д. ϵ_h как функцию рабочего состояния.

При помощи фиг. 85 вычисление может быть проведено на примере. Введенные при этом индексы a и i , помещенные на правой половине фигуры, должны одинаково у насосов и турбин относиться к внешней и соответственно к внутренней окружности лопаток, причем по роду работы они принимают значение a и i ,

а) Насос

Напор брутто. Во всасывающей трубе мы предполагаем осевое движение воды (вращающие составляющие могут возникнуть только случайно). Тогда, при $(c_r \cdot r) = 0$,

$$H_m = \frac{\omega}{g} (c_r r)_a = \frac{u_a c_{v_a}}{g} = \frac{u_a}{g} (u_a + \omega v_a),$$

или

$$H_m = \frac{1}{g} (u_a^2 + u_a \omega v_a) = \frac{1}{g} \left\{ \left(\frac{\pi D_a}{4 \cos \beta_a} \right)^2 n^2 + \frac{\pi D_a}{4 \cos \beta_a} \frac{c \lg \beta_a}{F_a} n Q \right\}. \quad (193)$$

H_m при действии насоса равно H_b ; потери здесь учтены.

Трение во всасывающей трубе. Вода движется по всасывающей трубе ускоренно, поэтому в ней получается незначительная потеря энергии, только вследствие трения о стенки, которая может быть определена по § 16, 1 f. Ее можно отнести к конечной скорости при входе в колесо и выразить членом:

$$V_s = \zeta_s \frac{c_s^2}{2g} = \frac{1}{2g} \frac{\zeta_s}{F_s^4} Q^2. \quad (194)$$

Удар при входе в колесо. Скорость удара c_{si} по уравнению (138) может быть преобразована при $\text{ctg } \alpha_s = 0$.

$$c_{si} = - \left(\frac{\text{ctg } \beta_i}{F_i} Q + \frac{\pi D_i}{60} n \right). \quad (195)$$

Получающаяся потеря равна $c_{si}^2/2g$ и, таким образом, она равняется:

$$V_{st} = \frac{1}{2g} \left\{ \left(\frac{D_i \cdot r}{60} \right)^2 \cdot n^2 + 2 \frac{D_i \cdot \pi}{60} \cdot \frac{\text{ctg } \beta_i}{F_i} n \cdot Q + \frac{\text{ctg}^2 \beta_i}{F_i^2} \cdot Q^2 \right\}. \quad (196)$$

Трение в рабочем колесе. Оно может быть определено путем сравнения отдельного канала рабочего колеса с отрезком трубы, равной длины с одинаковым средним квадратом относительной скорости и с одинаковым средним гидравлическим радиусом. Таким образом коэффициент ζ_r может быть определен с достаточной точностью по формуле:

$$V_r = \zeta_r \frac{w_p^2}{2g}. \quad (197)$$

Теперь получаем

$$w_a = \frac{c_{ma}}{\sin \beta_a} = \frac{Q}{F_a \sin \beta_a},$$

следовательно:

$$V_r = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\zeta_r}{F_a^2 \cdot \sin^2 \beta_a} \cdot Q^2. \quad (198)$$

Переход в спиральную камеру и преобразование энергии в ней. Спираль надо рассматривать как неподвижный направляющий аппарат. Это станет сразу ясно, если мы представим на мгновение, что вода через нее проходит извне во внутрь для поступления в турбину. Если она правильно построена, то она направляет жидкость с равномерной скоростью и в одинаковом направлении; значит, также с равномерной окружной скоростью c_u по всей окружности колеса. Иначе говоря, она действует совершенно так, как направляющий аппарат и дает момент $c_u \cdot r$ согласно уравнению (134), в котором $\alpha_s = \alpha_{sp}$ определяется из размера спирали. Под этим углом поток подходит к окружности колеса. Таким образом мы имеем:

$$(c_u \cdot r)_{sp} = \frac{D_a \text{ ctg } \alpha_{sp}}{2} \frac{Q}{F_a}. \quad (199)$$

Если жидкость проходит через спираль изнутри наружу, то вступление жидкости, производящей работу, происходит без удара в том случае, если она подается в спираль из колеса насоса как

раз с величиной момента, выраженного уравнением (199), следовательно, тогда, когда $(c_u \cdot r)_a = (c_u \cdot r)_{sp}$. Если $(c_u \cdot r)_a$ отлично от этой величины, то получается потеря при переходе, которая по существу является потерей от удара. Чтобы ее узнать, вычислим здесь скорость удара c_s , причем она представляет внезапное отклонение, сконцентрированное в поперечном сечении выхода F_a колеса. Там жидкость оставляет колесо со скоростью

$$c_{u_a} = u_a + w_{u_a} = \frac{D_a \pi}{60} n + \frac{\operatorname{ctg} \beta_a}{F_a} Q. \quad (200)$$

Вход в спираль требует, однако,

$$c'_{u_a} = \frac{(c_u \cdot r)_{sp}}{\frac{D_a}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_{sp}}{F_a} Q. \quad (201)$$

Получаем разность

$$c_{s_a} = \frac{D_a \pi}{60} \cdot n + \frac{\operatorname{ctg} \beta_a - \operatorname{ctg} \alpha_{sp}}{F_a} \cdot Q. \quad (202)$$

Скоростной напор $\frac{c_{s_a}^2}{2g}$ надо считать пропорциональным возникающей потере, только коэффициент, который при входе в колесо был принят равным 1, будет здесь меньше, так как спираль не имеет никаких лопаток, у каждой из которых, как и у колеса, неправильное направление течения повело бы к образованию вихрей. Поэтому мы применяем:

$$V_a = \frac{\zeta_a}{2g} \left\{ \left(\frac{D_a \pi}{60} \right)^2 n^2 + 2 \frac{D_a \cdot \pi}{60} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \beta_a - \operatorname{ctg} \alpha_{sp}}{F_a} n Q + \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_a - \operatorname{ctg} \alpha_{sp}}{F_a} \right)^2 Q^2 \right\} \quad (203)$$

После того как касательная скорость при входе приведена к c'_{u_a} , течение проходит через спираль только с постепенным замедлением общей скорости. Начальная величина скорости уже не отличается от c'_{u_a} ; поэтому можно сказать, c'_{u_a} замедляется по спирали до скорости выхода $c_{sp} = \frac{Q}{F_{sp}}$ из спирали (F_{sp} равно поперечному сечению трубопровода). Получающаяся при этом потеря, происходящая от трения о стенки и от образования вихрей в расширении, может быть учтена выражением

$$V_u = \frac{\zeta_u}{2g} \left(c'^2_{u_a} - c^2 \right) = \frac{\zeta_u}{2g} \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha_{sp}}{F_a^2} - \frac{1}{F_{sp}^2} \right) \cdot Q^2. \quad (204)$$

ζ_u будет всегда больше, чем величина 0,15—0,20, данная в уравнении (66) § 16,1, g для расширяющейся прямой трубы с круглым поперечным сечением. Условия для замедленного течения в спирали значительно менее благоприятны как вследствие искривления, так и благодаря большому различию в длине замедляющего пути для отдельных частиц (сравни § 40, d, e).

Баланс энергии. Таким образом фактическое полезное повышение энергии, появляющееся между входом во всасывающую

трубу и выходом из последнего поперечного сечения спирали равняется:

$$\Delta_E^A H = H_m - V_{E \rightarrow A} = H_n, \quad (205)$$

если расположить члены по степеням n^2 , nQ , Q^2 , то:

$$2gH_n = n^2 \left\{ \left(\frac{D_a \pi}{60} \right)^2 (2 - \zeta_a) - \left(\frac{D_i \pi}{60} \right)^2 \right\} + \\ + 2nQ \left\{ \frac{D_a \pi}{60} \cdot \frac{\text{ctg } \beta_a (1 - \zeta_a) + \text{ctg } \alpha_{sp}}{F_a} - \frac{D_i \pi}{60} \cdot \frac{\text{ctg } \beta_i}{F_i} \right\} - Q^2 \left\{ \frac{\zeta_s + \text{ctg}^2 \beta_i}{F_i^2} + \right. \\ \left. + \frac{\zeta_r}{F_a^2 \sin^2 \beta_a} + \frac{\zeta_a}{F_a^2} (\text{ctg } \beta_a - \text{ctg } \alpha_{sp})^2 + \zeta_u \left(\frac{\text{ctg}^2 \alpha_{sp}}{F_a^2} - \frac{1}{F_{sp}^2} \right) \right\}. \quad (206)$$

Величины, заключенные в скобки, являются известными для данной турбомашины, если мы примем коэффициенты потерь ζ за постоянные, что в известном приближении допустимо.

Уравнение (206) дает при постоянном n для переменного Q параболу, если H_n выразить в функции Q , в то время как уравнение (193) дает для H_n прямую линию (ср. фиг. 88). Для к. п. д. потока ϵ , получается гипербола, которая пересекает в той же точке, что и парабола H_n , ось абсцисс и дает для $Q=0$ еще значительную величину.

Мощность $N_m = \frac{\gamma Q H_m}{75}$, примененная

для приведения в движение, дает по вычислению гиперболу, проходящую через нулевую точку и точку $H_m=0$. Выполненные насосы показывают в области высоких к. п. д. и при больших количествах подаваемой воды хорошее совпадение с приведенной формулой, напротив, при расходах,

близких к нулю, получается сильное разногласие; это происходит от того, что при небольшом расходе течение в насосах принимает совершенно другой вид, чем предположено при выводе уравнения. Появляются вторичные течения, которые искажают главный поток и в заключение при расходе, равном нулю, распространяются по всему колесу. Таким образом при расходе, равном нулю, потребляется значительная мощность, совершенно независимо от него, что объясняется наличием бокового трения и потерь через зазоры, которые не учтены в выведенном уравнении (ср. § 32 п. „в“). По той же причине нельзя определить при помощи приведенного уравнения точную величину напора, развиваемого насосом при расходе, равном нулю.

б) Турбины

Полезный напор. Здесь спираль создает „входной“ момент так, что на внешнюю окружность колеса рабочая жидкость поступает с моментом:

$$(c_u \cdot r)_{a,p} = \frac{D_a \text{ctg } \alpha_{sp}}{2 \cdot F} Q. \quad (207)$$

Вода покидает колесо с моментом [уравнение (135)].

$$(c_u \cdot r)_t = \frac{\pi D_t^2}{120} n + \frac{D_t}{2} \frac{\text{ctg } \beta_t}{F_t} Q, \quad (208)$$

так что падение момента (вызванное колесом) равняется:

$$\Delta_i^a (c_u \cdot r) = (c_u \cdot r)_a - (c_u \cdot r)_t = \left(\frac{D_a}{2} \frac{\text{ctg } \alpha_{sp}}{F_a} - \frac{D_t}{2} \frac{\text{ctg } \beta_t}{F_t} \right) Q - \frac{\pi D_t^2}{120} n. \quad (209)$$

Если умножить на $\frac{\omega}{g} = \frac{\pi}{30 g} n$, то получится:

$$H_m = \frac{1}{g} \left\{ \left(\frac{D_a \pi \text{ctg } \alpha_{sp}}{60 \cdot F_a} - \frac{D_t \pi \text{ctg } \beta_t}{60 \cdot F_t} \right) n Q - \left(\frac{D_t \pi}{60} \right)^2 n^2 \right\}, \quad (210)$$

причем H_m здесь равно H_n .

Потери в спирали. Здесь жидкость протекает ускоренно и мы имеем дело только с потерей от трения, которая определяется по длине среднего пути воды, по среднему гидравлическому радиусу и по среднему квадрату скорости. В конце концов она может быть отнесена к квадрату c_{ua} , который не очень отличается от абсолютной скорости c_a при выходе из спирали.

Таким образом приходим к исходной формуле:

$$V_{sp} = \zeta_{sp} \frac{c_{ua}^2}{2g} = \frac{\zeta_{sp}}{2g} \frac{\text{ctg}^2 \alpha_{sp}}{F_a^2} Q^2. \quad (211)$$

Потеря от удара при вступлении жидкости в колесо. Жидкость поступает к колесу со скоростью $c_{ua} = \frac{\text{ctg } \alpha_{sp}}{F_a} Q$. Безударное вступление требовало бы скорости $c'_{ua} = \frac{\pi D_a}{60} n + \frac{\text{ctg } \beta_a}{F_a} Q$. Скорость, теряемая при ударе:

$$c_s = c_{ua} - c'_{ua} = \frac{\text{ctg } \alpha_{sp} - \text{ctg } \beta_a}{F_a} Q - \frac{\pi D_a}{60} n \quad (212)$$

Считаем, что соответствующий скоростной напор совершенно потерян и получаем:

$$V_{st} = \frac{1}{2g} \left\{ \left(\frac{\pi D_a}{60} \right)^2 n^2 - 2 \frac{\pi D_a}{60} \cdot \frac{\text{ctg } \alpha_{sp} - \text{ctg } \beta_a}{F_a} n, Q + \left(\frac{\text{ctg } \alpha_{sp} - \text{ctg } \beta_a}{F_a} \right)^2 Q^2 \right\} \quad (213)$$

Потеря от трения в колесе. Относим эту потерю к относительной скорости выхода и полагаем:

$$V_r = \frac{\zeta_r}{2g} w_t^2 = \frac{\zeta_r}{2g} \frac{1}{F_t^2 \sin^2 \beta_t} Q^2. \quad (214)$$

Потеря во всасывающей трубе. При переходе из колеса во всасывающую трубу потери на удар не происходит, какую мы нашли для насоса при переходе от колеса к спирали. Здесь явля-

ется вопросом, какое количество энергии жидкости $\frac{c_i^2}{2g} = \frac{c_{m_i}^2 + c_{u_i}^2}{2g}$ переходит в энергию давления. Примем, что $\frac{c_{u_i}^2}{2g}$ совершенно теряется для рассматриваемой машины, так как прямая всасывающая труба, несмотря на значительное расширение поперечного сечения, дает только незначительное увеличение радиуса и поэтому составляющая c_{u_i} , которая во всасывающей трубе следует закону $c_{u_i} \cdot r = \text{const}$, не может существенно уменьшаться. Таким образом соответствующая ей энергия теряется в конце концов путем образования вихрей в нижнем бьефе. Напротив, энергия $\frac{c_{m_i}^2}{2g}$ должна претерпеть преобразование с к. п. д. $\eta_u = 0,8$ ср. [§ 16, 1, g, уравнение (66)]. Тогда потеря во всасывающей трубе:

$$V_s = \frac{1 - \eta_u}{2g} c_{m_i}^2 + \frac{c_{u_i}^2}{2g}. \quad (215)$$

Но так как:

$$c_{m_i} = \frac{Q}{F_i} \text{ и } c_{u_i} = u_i + w_i = \frac{\pi D_i}{60} n + \frac{\text{ctg } \beta_i}{F_i} Q,$$

то получается:

$$V_s = \frac{1}{2g} \left\{ \left(\frac{\pi D_i}{60} \right)^2 n^2 + 2 \frac{\pi D_i}{60} \frac{\text{ctg } \beta_i}{F_i} n \cdot Q + \left(\frac{1 - \eta_u + \text{ctg}^2 \beta_i}{F_i^2} Q^2 \right) \right\}. \quad (216)$$

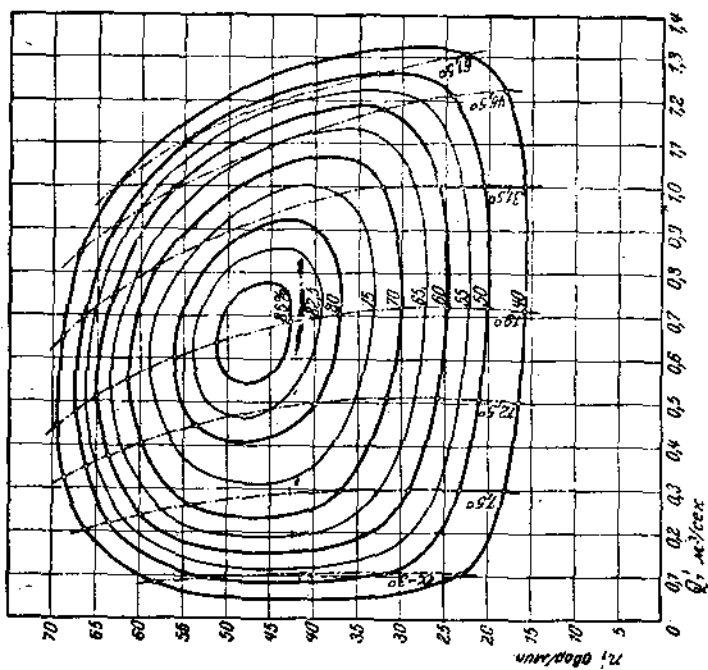
Баланс энергии. Напор брутто должен покрыть полезный напор и потерю, таким образом он равняется:

$$\Delta_A^E H = \frac{\omega}{g} \Delta_i^a (c_u r) + V_{E-A} = H_b; \quad (217)$$

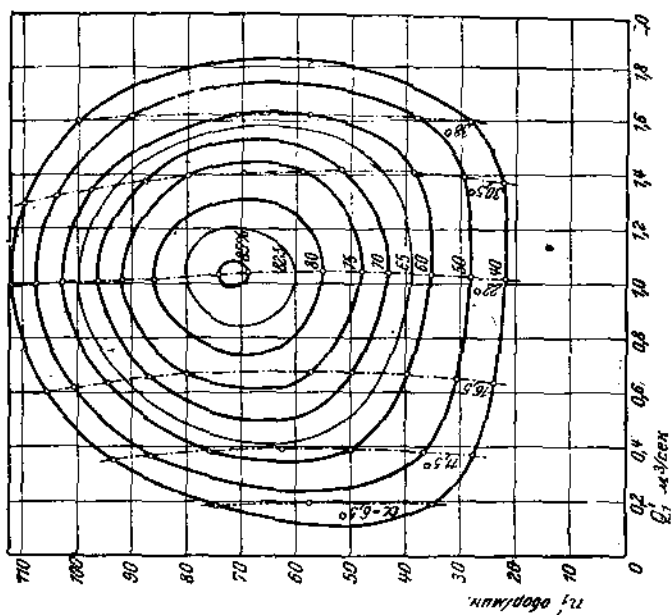
из этого получаем:

$$2g H_b = n^2 \left\{ \left(\frac{\pi D_a}{60} \right)^2 - 2 \left(\frac{\pi D_i}{60} \right)^2 \right\} + 2nQ \frac{\pi D_a}{60} \cdot \frac{\text{ctg } \beta_a}{F_a} + \\ + Q^2 \left\{ \frac{c_{ap} \text{ctg}^2 \alpha_{ap} + (\text{ctg } \alpha_{ap} - \text{ctg } \beta_a)^2}{F_a^2} + \frac{z_r}{F_i^2 \sin^2 \beta_i} + \frac{1 - \eta_u + \text{ctg}^2 \beta_i}{F_i^2} \right\}. \quad (218)$$

Уравнение (218) при принятых постоянных коэффициентах потерь ζ , при определенном данном H_b дает параболу, эллипсис или гиперболу, представляющие зависимость Q от n . Вычисленные таким образом значения и определенные этим путем к. п. д. очень хорошо согласуются с данными опыта. Это согласие получается хорошим для весьма различных типов турбин, различающихся как радиальными, так и осевыми размерами, а также величиной углов направляющего и рабочего колес. Если мы в выражении в скобках уравнения (218) примем α_{ap} за угол направляющего аппарата и будем его изменять, то получим посредством вычисления зависимость между Q , n и α , которые также согласуются с данными опыта. В особенности правильно можно подсчитать различные взаимоотношения у быстроходных и тихоходных машин при постоянном напоре и постоянном числе оборотов, если меняется количество воды, вследствие изменения углов направляющего колеса.



Фиг. 89. Диаграмма $Q - \eta$ — тихоходной турбины.



Фиг. 90. Диаграмма $Q - \eta$ — турбины нормальной быстроходности.

Уравнение (218) выразит правильно даже действие турбины Каплана, которая имеет еще лишнюю переменную величину—углы рабочего колеса β_0 и β_1 , если эти оба угла видоизменять одновременно согласно конструктивным особенностям этой турбины.

Фиг. 89—91 изображают диаграммы к. п. д. турбины, как функций Q и n , которые вычислены подобным образом. Именно фиг. 89

дает к. п. д. тихоходной, фиг. 90 нормальной, фиг. 91, быстроходной турбин системы Френсиса. Все диаграммы годны для напора брутто в 1 м и для диаметра в 1 м у выхода из турбины (начала всасывающей трубы).

Фиг. от 92—94 изображают соответствующие профили и приблизительные разрезы лопаток рабочего колеса (понятие о тихоходной и быстроходной и надлежащем числе n , см. § 39). На фиг. 95 изображены диаграммы тихоходной турбины Френсиса с постоянным расходом воды, а на фиг. 96 — с постоянным напором, вычисленные с помощью уравнения баланса энергии.

Это совпадение с опытом у турбин, у которых расходы, равные нулю, не представляют интереса, а несовпадение у насосов (когда расход равен нулю) показывает, что предположение основной теории о том, что поток можно представлять сконцентрированным в определенной средней поверхности вращения с соответ-

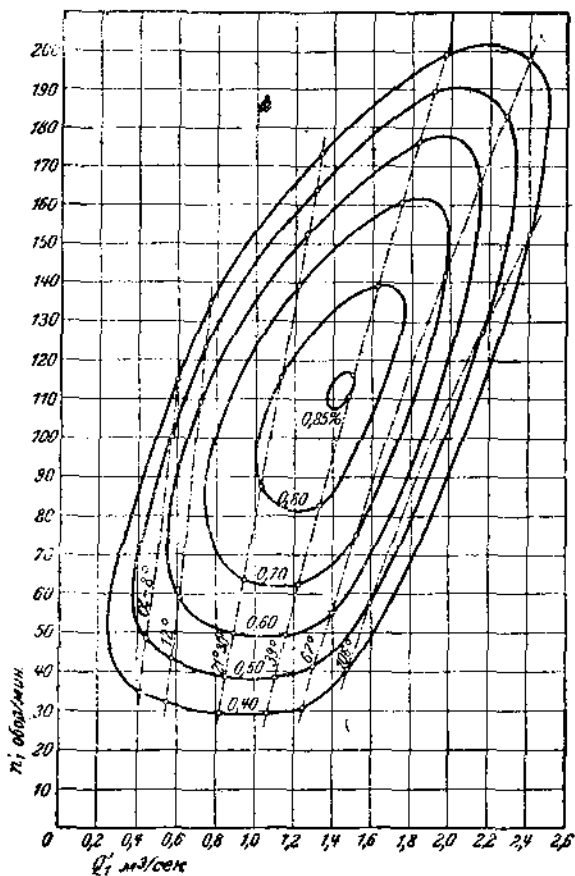
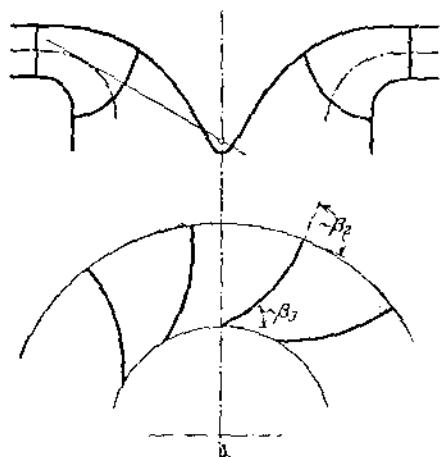


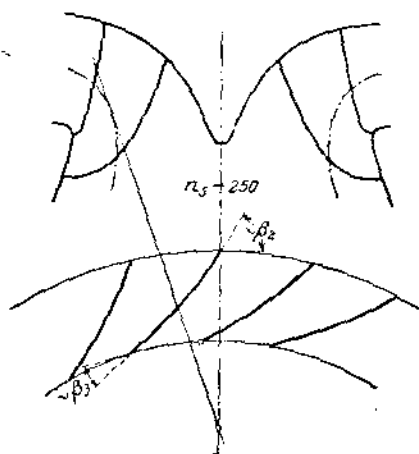
Рис. 91. Диаграмма $Q - \eta$ — быстроходной турбины.

ствующими ей диаметром, поперечным сечением и углом лопаток фактически приемлемо до тех пор, пока существует достаточно интенсивное течение через рабочее колесо. В особенности, надо подчеркнуть, что у турбин самых различных типов, от тихоходной до турбины Каплана, получается линейная зависимость между моментом вращения и числом оборотов, когда эти турбины испытываются при переменном числе оборотов, постоянном расходе воды, и при этом с высотой напора H , изменяющейся соответственно уравнению (218). При этом все углы лопаток остаются неизменными (само собой разумеется, что момент бокового трения колеса должен быть

исключен из величин, полученных испытанием). Эти данные дает уравнение момента (153), если в него ввести выражение (136) для разности моментов скорости и рассматривать в нем как постоянные диаметр, поперечное сечение и угол. Фиг. 95 представляет



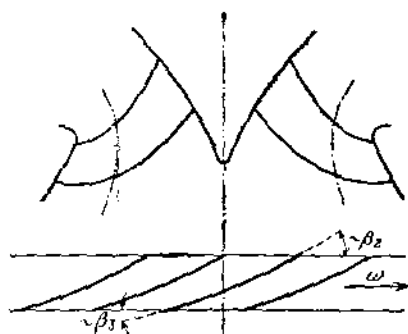
Фиг. 92. Тихоходная турбина.



Фиг. 93. Турбина нормальной быстроходности.

диаграмму, вычисленную для постоянного количества воды и постоянного открытия направляющего аппарата при изменяющемся числе оборотов. Фиг. 96 дает подобную диаграмму, пересчитанную по так называемым условиям подобия (ср. § 35 и след.) для H_b при наилучшем ϵ_s .

В общем можно из уравнений (206) и (208) вывести, что у турбомашин, с определенными размерами и поперечным сечением, в то время как углы лопаток (α — в неподвижной, β — во вращающейся части) изменяются, существует зависимость между напором H_b и H_n , с одной стороны, и расходом Q , числом оборотов n , углами лопаток α и β — с другой:



Фиг. 94. Быстроходная турбина.

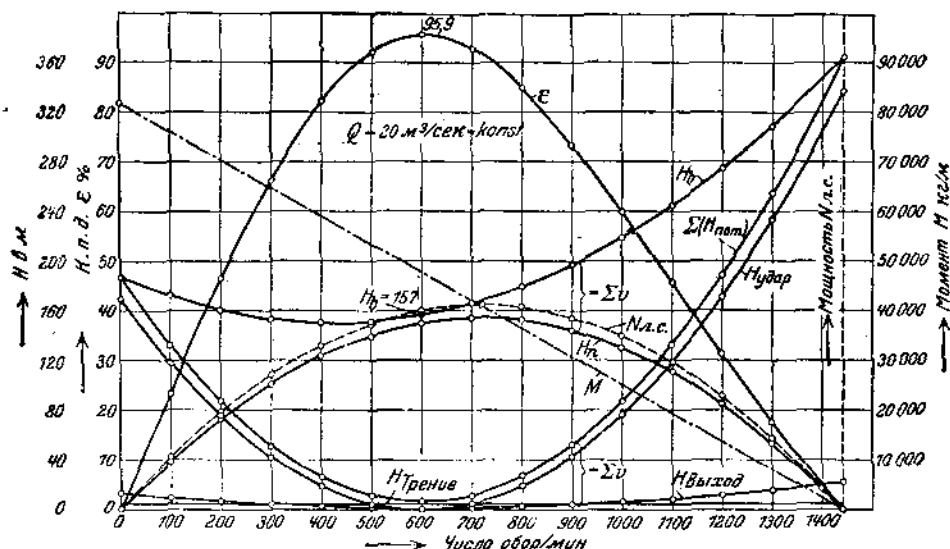
$$F(H_{n \text{ или } m}, Q, n, \alpha, \beta) = 0. \quad (219)$$

При этом β обозначает угол лопатки в колесе, с которым одновременно и закономерно меняется β_a и β_r . Поэтому возможно посредством изменения α по отношению к β , или α и β вместе, влиять на взаимозависимость

$$\Phi(H, Q, n) = 0, \quad (220)$$

полученную из уравнения (219), если принять в ней α и β за параметры, т. е. — регулировать мощность машины. Одновременно можно установить посредством вычислений по уравнениям (219) и (220), как меняется при этом к. п. д.

Этот метод регулирования применяется почти исключительно у турбин, редко у насосов.



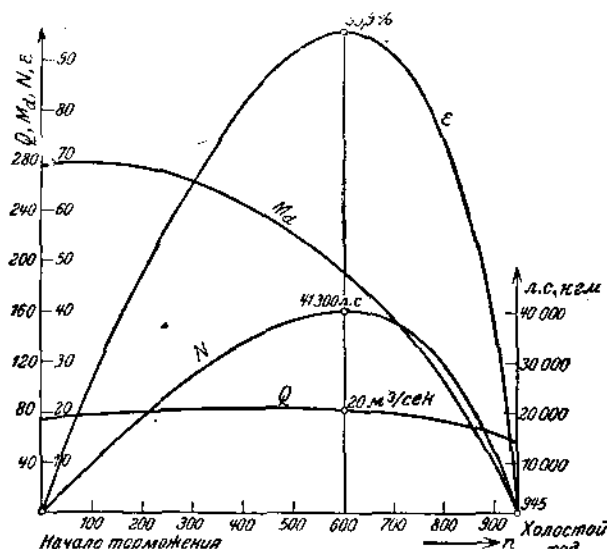
Фиг. 95 Характеристические кривые для турбины при $Q = \text{const.}$

Если в отдельных случаях пользуются уравнениями (206) и (218) или (219) и (220), то необходимо производить вычисление числовыми значениями. Очень рекомендуется вычерчивание диаграмм скоростей и получение из них c , ω , c_u , c_v вместо вычисления по

формулам, в особенности, если α и β меняется.

с) Проблема системы лопаток

Проблема заключается в том, что разность моментов $c_u \cdot r$, которую мы имеем в уравнении напора, определяется для данного напора или для требуемой высоты подачи после того как предварительно задан к. п. д. ϵ_s . При этом надо иметь в виду, что определяется только разность моментов перед и позади колеса, а не их величины. Поэтому



Фиг. 96. Характеристические кривые для турбины при $H_0 = \text{const.}$

надо ее выбирать в дальнейшем при данном Q и n так, чтобы получились формы лопаток такие, в которых неизбежные потери были бы как можно меньше. При этом надо попытаться, (если это, действительно, зависит от данных величин Q и n , достигнуть лучшего к. п. д., избегая для данного состояния какой-либо потери от удара, делая всюду замедления по возможности меньшими и скорости протекания через машину также возможно меньшими. Задача может быть решена только попытками: задаваясь разными формами лопаток при одном и том же $\Delta(c, r)$, определяют к. п. д. из составляемого каждый раз уравнения баланса энергии. Конечно, при оценке отдельных форм должен быть принят во внимание и хозяйственный момент путем сравнения стоимости изготовления машины.

Сообразно характеру производственных вычислений вопрос идет только о средних отношениях в духе упрощений, принятых для нашей теории в § 28, следовательно, и об установлении средней формы лопаток (в сечении со средней поверхностью вращения $m-m'$). Пространственное выполнение лопаток должно производиться сообразно особым точкам зрения, между которыми на первом месте стоит одинаковый обмен энергии во всех частях потока. При этом может случиться, что признанная сначала за благоприятную средняя форма лопаток, при пространственном образовании снова будет оставлена, так как она ведет к неблагоприятным пространственным отношениям. Эта более трудная задача не будет рассматриваться в этом томе. Здесь мы будем рассматривать образование только средней формы (§ 40). Практика издавна для определения пригодных форм наряду с теоретическими рассуждениями и вычислениями привлекала эксперимент, и еще сейчас мы оставляем ему последнее решение, пользуясь им в виде систематических опытов с моделями, применение которых основано на условиях подобию рабочих колес.

VIII. Условия подобию и серии рабочих колес

35. Подобные турбомашинны и подобные состояния работы

До тех пор пока в потоке, протекающем через турбомашину, не образуются полости со свободными поверхностями жидкости (явление кавитации), мы можем легко сравнивать две машины одинакового типа, но различных размеров, с различными числами оборотов, напорами или высотами подачи и расходами и выяснить соотношения между этими величинами, которые существуют при подобных условиях работы. Подобные состояния работы предполагают подобные картины течения, а эти в свою очередь — подобные пространства течения. Это условие привело бы к необходимости рассматривать подобные течения только в целой установке турбомашинны.

Ясно также, что течение через открытую турбину, не похожее во всех деталях на течение через спиральную турбину или течение через машину с прямой всасывающей трубой, не сходно с течением через машину с изогнутой трубой. Однако для одного колеса, а если машина многоструйная или многоступенчатая, то для каж-

дого колеса, всегда можно установить определенную область, внутри которой при геометрически подобном выполнении существуют подобные течения, если только течение при входе или выходе одинаково поступает или вытекает и колеса исполняют одинаковую работу при одинаковых условиях. В конце концов можно даже ограничить область только колесом, причем необходимо поставить условие, чтобы течение поступало и отводилось в одинаковых условиях. Поэтому необходимо всегда при перенесении на большие сооружения данных опыта, которые мы получаем на модели, точно определить, действительно ли сравниваемые области течения сходны геометрически и существует ли на границах одинаковое распределение скоростей. Некоторые отклонения от этого в постройке турбомашин происходят оттого, что слишком быстро делают заключение, что „такое-то мал изменение по сравнению с моделью едва ли окажет влияние“. При опытах с моделями колеса и всасывающей трубы подобие должно быть соблюдено насколько возможно, более полно (число лопаток и толщина их). У насосов для спирали и направляющего аппарата, если он есть требуется также весьма строгое подобие, так как замедленное течение в них ведет к неустойчивости и поэтому может подвергаться изменению при незначительных отклонениях. У турбин можно позволить себе несколько большую свободу относительно этих частей, так как при ускоренном течении нет склонности к неустойчивости. Здесь в первую очередь нужно то, чтобы подвести поток этими частями к колесу в середину с одинаковым углом по окружности или по отношению радиуса. Влияние незначительных изменений в числе и толщине лопаток в направляющем аппарате и изменение размеров спирали можно определить отдельно.

Подобие картин течения требует подобия треугольников скоростей в одинаково расположенных точках пространства, следовательно, равенства углов треугольников и отношений скоростей. Из них мы выберем два подходящие для нашей цели. Окружная скорость u какой-либо точки колеса пропорциональна числу оборотов n и диаметру D , следовательно, $u \sim (nD)$. Скорость c_m можно вычислить из протекающего расхода Q и поперечного сечения F в соответствующем месте. Но F у подобных колес пропорционально D^2 , поэтому $c_m \sim \frac{Q}{D^2}$. Из подобия треугольников следует равенство отношений $\frac{c_m}{u}$. Поэтому мы имеем право сказать:

Подобные состояния работы требуют равных отношений $\frac{c_m}{u}$ или $\frac{Q}{nD^2}$. Энергия течения H_m переходит в механическую пропорционально произведению двух скоростей (c_u и $u = r \cdot \omega$), но так как вследствие подобия треугольников каждая скорость пропорциональна $(n \cdot D)$, то:

$$H_m \sim (n \cdot D)^3.$$

Для того чтобы обе стороны имели одинаковые измерения напомним:

$$H_m \sim \frac{(n \cdot D)^2}{2 \cdot g}. \quad (221)$$

Потери энергии (потери давления) возрастают пропорционально квадратам скоростей только при одинаковом рейнольдсовом числе R , поэтому можно написать:

$$H_v \sim f(R) \frac{(n \cdot D)^3}{2 \cdot g} \quad (222)$$

Но для полного подобия требуется равенство чисел Рейнольдса для сравниваемых состояний работы. Выражается R посредством какой-либо характерно выбранной скорости, которая пропорциональна $n \cdot D \sim \sqrt{2gH_m}$, затем посредством диаметра D и кинематической вязкости ν :

$$R = \frac{\sqrt{2gH_m} D}{\nu} \quad (223)$$

Если R равны для сравниваемых состояний, то $f(R)$ постоянна и тогда H_v точно так же, как и H_m , пропорционально $(n \cdot D)^2$, отношение H_v/H_m — величина постоянная и благодаря этому к. п. д. ϵ_s для обоих случаев равны. Если изменится состояние работы, то изменится отношение $H/(nD)^2$ и отношение $H_v — (nD)^2$, каждое из них различным, но определенным образом. Если изменится R , то изменится и отношение $H_v — (nD)^2$, хотя и не точно. Таким образом ϵ_s зависит как от состояния работы, так и от рейнольдсова числа:

$$\epsilon_s = f_s \left(\frac{Q}{n \cdot D^3}, \frac{\sqrt{2gH_m} D}{\nu} \right) \quad (224)$$

Этот вывод может быть распространен и на общий гидравлический к. п. д., для определения которого должны быть учтены еще только два чисто гидродинамических явления, зависящих от трения жидкости, а именно боковое трение колеса и потери в зазорах. Следовательно, получается также:

$$\epsilon_h = f_h \left(\frac{Q}{n \cdot D^3}, \frac{\sqrt{2gH_m} D}{\nu} \right) \quad (225)$$

Зависимость отдельных потерь в потоке рабочего колеса от рейнольдсова числа еще недостаточно известна. Можно только сказать, согласно изложенному в § 15 и 16, что коэффициенты, посредством которых потери относятся к квадратам скоростей, при чистых потерях на трение при незамедленном движении сильно уменьшаются с увеличивающимся рейнольдсовым числом в то время, как эта тенденция в течениях замедленных выражается не так сильно. Потери, которые происходят благодаря сильному отставанию вихрей, всегда на одном и том же месте, например, потери на удар, которые, таким образом, происходят от своего рода сопротивления формы, почти совершенно независимы от рейнольдсова числа. Так как величины отдельных потерь в общей потере сильно изменяются с изменением состояния работы, то и влияние рейнольдсова числа на к. п. д. при различных условиях работы различно. Сильнее всего оно проявляется при работе с высшим к. п. д., так как в таком случае стараются у всех турбомашин ограничить потери чистыми трениями (что, конечно, не вполне удается).

Боковое трение колеса соответственно меньше при большом диаметре и большой скорости, но потеря в зазоре, конечно, соответственно большая, так как здесь уменьшающееся трение соответственно увеличивает количество проходящей через зазоры воды.

Если мы примем известную зависимость от рейнольдсова числа, то можно вычислить повышение ϵ_s , которое возрастает при больших в сравнении с моделью машинах.

Для насосов мы имеем $\epsilon_s = 1 - \Sigma V_{\text{(потери)}}$

Если мы обозначим рабочую машину индексом A , а модель ее индексом M , то имеем:

$$H_{mA} = H_{mM} \frac{(nD)_A^2}{(nD)_M^2}; \quad \Sigma V_A = \Sigma V_M \frac{f(R_A)(nD)_A^2}{f(R_M)(nD)_M^2}. \quad (226)$$

Таким образом получается:

$$\epsilon_{sA} = 1 - \frac{\Sigma V_M}{H_{mM}} \cdot \frac{f(R_A)}{f(R_M)} = 1 - (1 - \epsilon_M) \cdot \frac{f(R_A)}{f(R_M)}. \quad (227)$$

Для турбин имеем:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma V}{H_m}}$$

Для тех же отношений, что в уравнении (226)

$$\epsilon_s = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma V_M}{H_{mM}} \cdot \frac{f(R_A)}{f(R_M)}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\epsilon_M} - 1 \right) \frac{f(R_A)}{f(R_M)}}. \quad (228)$$

Если мы сделаем предположение, что при наилучшем к. п. д. для преобладающих при этом потерь на трение применима формула Блазиуса $f(R) \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$ и что другие потери тоже приближенно

подчиняются этому закону, то при равных температурах, следовательно, одинаковых ν получаем:

для насосов

$$\epsilon_{sA} = 1 - (1 - \epsilon_{sM}) \sqrt[4]{\frac{D_M \sqrt{H_{mM}}}{D_A \sqrt{H_{mA}}}}; \quad (229)$$

для турбин

$$\epsilon_{sA} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\epsilon_{sM}} - 1 \right) \sqrt[4]{\frac{D_M \sqrt{H_{mM}}}{D_A \sqrt{H_{mA}}}}}. \quad (230)$$

Вычисленные таким образом величины часто хорошо совпадают с опытом. Это происходит вследствие того, что модель выполняется очень тщательно с „гладкими“ стенками, исполнение же в увеличенном размере, несмотря на свои величины, тоже может быть принято, как „гладкое“.

На практике в первом и большую часть достаточном приближении не обращают внимания на влияние рейнольдсова числа.

Тогда H_m и H_b делаются пропорциональными друг другу, так как потери и связанные с ними все величины напоров пропорциональны $(nD)^2$. У насосов тогда вводят в вычисление $H_n = H_m - \Sigma V_{\text{потери}}$ у турбин $H_b = H_m + \Sigma V_{\text{потери}}$, так как у насосов можно непосредственно измерить H_n , у турбин — H_b . С этими величинами H устанавливают законы подобия, как если бы они были строго пропорциональны квадратам скоростей, следовательно, принимается:

$$\left. \begin{aligned} H_m &\sim (c^2, u^2, c_u^2, c_m^2, \omega^2) \sim \frac{(n \cdot D)^2}{2 \cdot g} \\ \text{и соответственно} \\ c, u, c_u, c_m, \omega &\sim n \cdot D \sim \sqrt{2gH_m} \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Повышение e , можно дополнительно определить по уравнению (229) или (230) в то время, как H_m принимается $\sim H_n$ или $\sim H_b$.

36. Подобие динамического распределения давления и выводы из него

а) Динамическое распределение давления

В § 10 было вообще указано, что важно при каждом процессе течения разлагать распределение давления на динамическое и статическое. Подобно тому как там уравнение (26) для течений с постоянной энергией было представлено двумя уравнениями (26 а) для динамического и статического давлений, примем то же разделение давления для уравнений § 33. Возьмем, например уравнение (179)

$$\frac{p_{xdy}}{\gamma} + \frac{p_{xst}}{\gamma} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^x (c_u r) - \left(\frac{c_x^2}{2g} + V_{0-x} \right) - h_x \quad (179a)$$

и представим его как сумму

$$\frac{p_{xdy}}{\gamma} = \frac{\omega}{g} \Delta_e^x (c_u r) - \left(\frac{c_x^2}{2g} + V_{0-x} \right)$$

и

$$\frac{p_{xst}}{\gamma} = -h_x \quad (179b)$$

(точка 0 соответствует нижнему уровню; h_x соответствует высоте над нижним уровнем).

Отсюда ясно видно, что только динамическое распределение давления при пренебрежении влиянием рейнольдсова числа, приближенно пропорционально квадратам скоростей в то время как статическое следует своему собственному закону. Лучше это выразить так:

Динамические различия давлений в подобных течениях рабочих колес приблизительно или точно пропорциональны квадратам скоростей и соответственно энергии высот H ; статические — устанавливаются, как в спокойной воде.

б) Силы и моменты

Оставим на одно мгновение допущения основной теории и рассмотрим истинное течение между конечным числом лопаток. Уравнения в § 33 дают только средние величины давлений. Но выше-рассмотренное условие также применимо по общему закону подобия Рейнольдса для всех динамических разностей давлений в каждом потоке рабочего колеса. Образование свободных поверхностей существенно изменяет соотношения. Различие давлений между обеими сторонами лопаток, должное существовать при конечном их числе (для того, чтобы возник момент вращения вала), — пропорционально квадратам скоростей или высоте напора. Назовем кратко эту разность давлений давлением на лопатку и обозначим ее через Δp_s . Следовательно, имеем:

$$\Delta p_s \sim c^2, u^2, c_w^2, c_m^2, \omega^2 \sim (n \cdot D)^2 \quad (232)$$

(множитель, необходимый для установления одинаковой размерности обеих частей равенства, здесь опущен).

Таким образом в случае подобия, полная сила на лопатке P_s (так как подобные поверхности возрастают пропорционально квадратам линейных размеров), будет:

$$P_s \sim c^2 \cdot D^2 \sim n^2 \cdot D^4 \sim H \cdot D^3 \quad (233)$$

Момент имеет плечо, которое увеличивается линейно с размерами машины, поэтому получается:

$$M \sim c^2 \cdot D^3 \sim n^2 \cdot D^5 \sim H \cdot D^3. \quad (234)$$

с) Напряжения материала

Давления жидкости — это силы, относящиеся к единице поверхности; на стенках рабочих колес, направляющего аппарата и камеры турбомашин они выражаются как удельные давления. Таким образом видно сразу, что напряжение материала, поскольку оно происходит от динамического действия, пропорционально квадратам скоростей, или напору. То же самое отношение применимо для всех видов напряжений. Надо только сказать о крутящем моменте вала, который пропорционален приблизительно $H \cdot D^3$. При увеличении с сохранением подобия это напряжение воспринимается полярным моментом сопротивления, который возрастает пропорционально D^3 . Если в дальнейшем какая-нибудь конструктивная часть испытывает напряжение изгиба, то изгибающий момент увеличивается пропорционально HD^3 . Момент сопротивления $\frac{b \cdot h^2}{6}$ при подобном увеличении тоже увеличивается вместе с D^3 . Поэтому можно сказать:

Подобные течения вызывают у подобных машин напряжения, которые возрастают с высотой подачи или напора, т. е.

$$k_b, k_s, k_i, k_d \sim H. \quad (235)$$

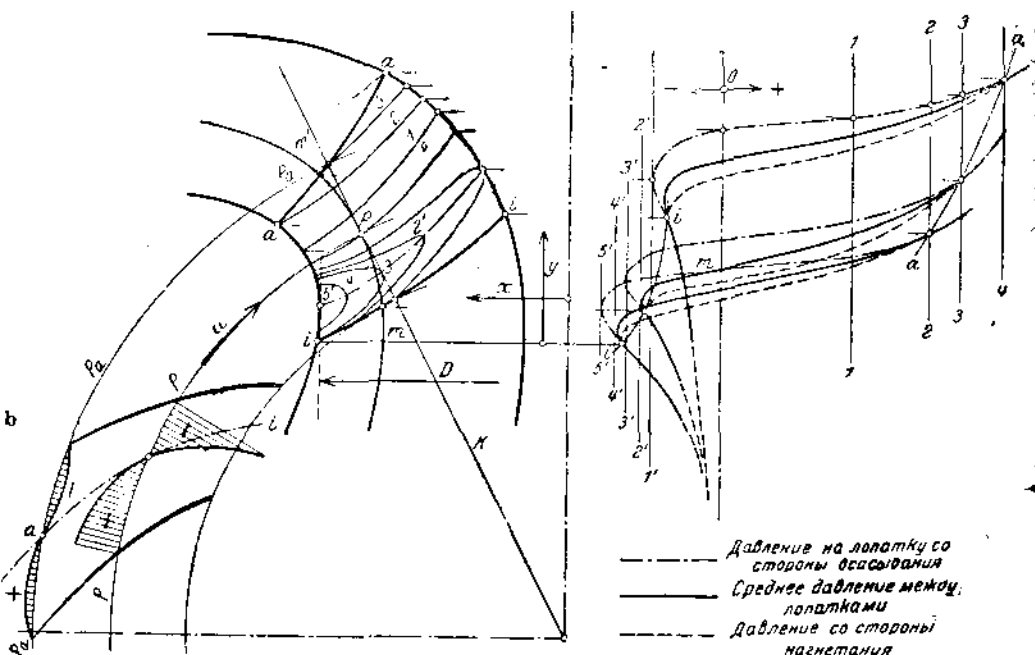
При этом, конечно, предполагается полное геометрическое подобие машин (например, толщина стенок). Часто это может быть не соблюдено; тогда вышеприведенное положение дает отправную точку для определения напряжения.

37. Общее действие динамически и статически распределенных давлений

Для изучения распределения давления мы снова должны отбросить на один момент допущения основной теории, т. е. иметь в виду рабочее колесо с конечным числом лопаток и, кроме того, принять во внимание соотношения по обеим сторонам средней поверхности вращения. До сих пор вычислялись средние величины давления; они возникают в средней поверхности вращения mm' и изменяются при бесконечном числе лопаток только от одной контактной окружности этой поверхности к другой окружности. Если же число лопаток конечное, то они являются только средними величинами на определенном пути канала лопаток примерно ia на фиг. 97*b*, который проводится между двумя лопатками и затем снова переходит на среднюю поверхность вращения. По отношению к этим средним величинам существуют более или менее значительные отклонения в канале лопаток, с одной стороны, по обе стороны средней поверхности по направлению к внешнему или внутреннему ободу колеса, с другой стороны — на каждой concentрической окружности. Величина их зависит, с одной стороны, от формы профиля колеса, с другой стороны, — от числа и формы лопаток. Фиг. 97*a* до с пор поясняют эти отношения. На средней поверхности вращения mm' фиг. 97, *a* слева расположен касательный конус K ; его сечение двумя лопатками (развертывание K) изображено на фиг. 97, *b*. В изображенном таким образом канале образованном лопатками, принадлежащем поверхности вращения mm' , вычерчена соединительная линия ia как место точек среднего динамического давления; разности динамического давления по отношению к средней величине его (давление выше $+$, давление ниже $-$) нанесено в виде диаграммы между двумя concentрическими окружностями P и P_a (абсциссы равны длине дуг, ординаты равны радиусам или образующим линиям конуса). На окружности P_a показано, то что давление на концах лопаток не может образовать прыжок (как это имеет место внутри лопаток от передней стороны лопаток к задней). На фиг. 97, *c* изображено изменение среднего давления в канале для внешней, средней и внутренней поверхностей вращения, а также изменение давления на стороне повышенного и пониженного давлений как функция высотного положения y ; фиг. 97, *a* изображает кривые равных давлений, величины которых соответствуют линиям одинаковой нумерации фиг. 97, *c*; это дает общее изменение давления на стороне пониженного давления лопаток. Можно начертить такую же картину линий равных давлений для каждого слоя в канале между сторонами повышенного и пониженного давления (пространственная форма их приблизительно соответствует поверхности лопатки). Можно изобразить также изменение давления в слое канала вместо линий равных давлений и вместо кривых фиг. 97, *c* посредством

диаграммы в сечениях цилиндром. Это является дополнением к изображениям фиг. 97, *a*—*c* и выполнено на фиг. 98, *b* для слоя канала на стороне подсасывания (лопатки) тогда как фиг. 98, *a* является повторением фиг. 97, *a*.

Сечения профилей фиг. 97, *a* и 98, *a* изображают определенный тип рабочего колеса в любом масштабе. Мы, рассматривая только отвесное положение вала, характеризуем профиль по высоте безразмерной координатой η , а по направлению радиуса безраз-



Фиг. 97. Распределение давления в рабочем колесе.

мерной координатой ξ . Они должны представлять отношение абсолютных координат y и x к диаметру сечения D :

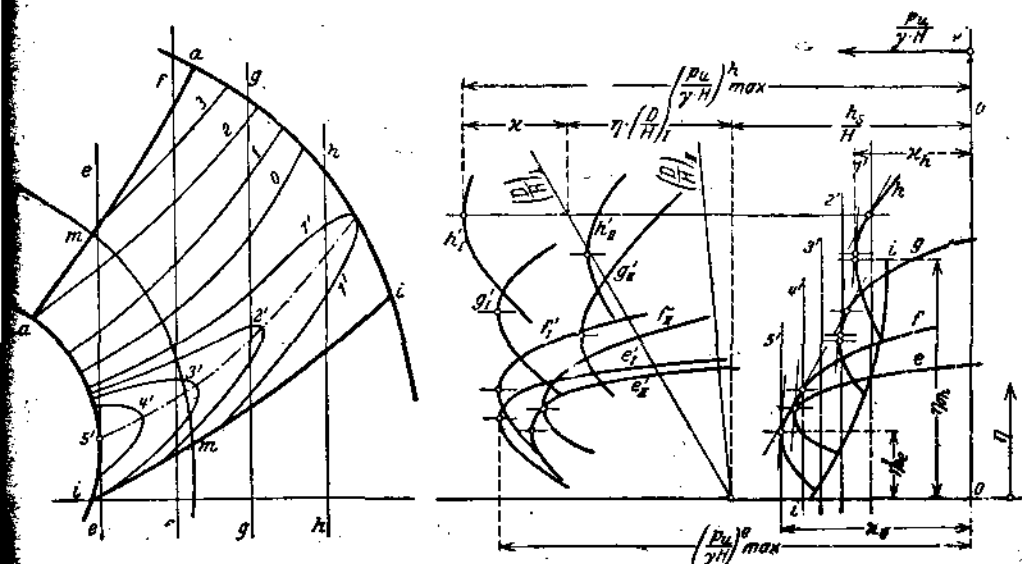
$$\xi = \frac{x}{D}; \quad \eta = \frac{y}{D}. \quad (236)$$

Тогда динамическое распределение давления может быть изображено в каждом сечении цилиндром как функция η . При этом мы получаем изображение, совершенно безразмерное нанося на него соответствующие величины давления $\frac{p}{\gamma H} = f(\eta)$. Различные для каждого цилиндрического сечения функции изображены кривыми на фиг. 98, *b*. Самое интересное в кривых — среда наиболее сильного динамического разрежения. Поэтому для дальнейшего полезно и в то же время достаточно каждую кривую давления в сечении цилиндром заменить параболой с вершиной в максимуме динамического разрежения, и с осью, перпендикулярной направлению η . Если мы будем считаться только с динамическим раз-

режением $(p_u/\gamma)_{dy}$, считая его положительным, то мы можем написать для кривой, образованной сечением цилиндра вблизи ее максимума

$$\left(\frac{p_u}{\gamma}\right)_{dy} = \left(\frac{p_{udy}}{\gamma}\right)_{\max} - a(\eta - \eta_0)^2 \quad (237)$$

При этом η может считаться самой нижней точкой ребра лопатки и соответственно η_0 показывает высотное положение места максимума разрежения в соответствующем цилиндре; $\frac{p_u}{\gamma}$ измерено в метрах, поэтому коэффициент a точно так же имеет измерение в метрах. Так как динамическое распределение давления подчиня-



Фиг. 98а, б. Динамическое и статическое распределение давления в рабочем колесе.

ется рейнольдсову закону подобия, то $\left(\frac{p_{udy}}{\gamma}\right)_{\max}$ и a пропорциональны H (напору или высоте подачи); поэтому получается:

$$\left(\frac{p_{udy}}{\gamma H}\right)_{\max} = \kappa \cdot H, \quad (238)$$

$$a = a \cdot H \quad (239)$$

κ и a различны для каждого цилиндрического сечения.

Теперь можно написать:

$$\frac{p_{udy}}{\gamma H} = \kappa - a(\eta - \eta_0)^2, \quad (240)$$

и таким образом мы получаем лишенное размерности уравнение динамического распределения давления, которое применимо для рассматриваемого типа турбомашин. Величины κ и a являются постоянными (подобия) для данной серии подобных колес (типа) и

зависимы от их действительных размеров. Фиг. 98, *b* является также безразмерным отображением и изображает над соответствующим высотным положением соответствующую величину разрежения $\frac{p_u}{H\gamma}$. Над динамическим распределением давления располагается статическое. Им обусловлено добавочное разрежение $\frac{p_{st}}{\gamma}$ независимо от напора. Оно равно в каждой точке высоте над нижним уровнем (в области атмосферного давления). Высоту самой нижней точки лопатки обозначим через h_s . Эта величина называется вообще при конструировании рабочих колес статической высотой всасывания. Внутри колеса разрежение увеличивается на величину $y = \eta \cdot D$. Тогда полное разрежение будет равно:

$$\frac{p_u}{\gamma} = h_s + \eta \cdot D + \kappa \cdot H - \alpha \cdot (\eta - \eta_0)^2. \quad (241)$$

Место максимума разрежения давления передвигается в каждом цилиндрическом сечении. Если мы будем дифференцировать уравнение (241) по η , то получим для места η'_0 равнодействующей $\left(\frac{p_u}{\gamma}\right)_{\max}$

$$D - 2\alpha H (\eta'_0 - \eta_0) = 0, \quad (242)$$

или

$$\eta'_0 - \eta_0 = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{D}{H}. \quad (243)$$

Если мы это подставим в уравнение (241), то получим:

$$\left(\frac{p_u}{\gamma}\right)_{\max} = h_s + \kappa \cdot H + \eta_0 \cdot D + \frac{1}{4\alpha} \frac{D^2}{H}. \quad (244)$$

Разделив на H , получим для соответствующего максимума разрежения:

$$\left(\frac{p_u}{\gamma H}\right)_{\max} = \frac{h_s}{H} + \kappa + \eta_0 \frac{D}{H} + \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{D}{H}\right)^2. \quad (245)$$

Такое уравнение существует для каждого цилиндрического сечения (η_0 , κ и α имеют свою особенную величину в каждом сечении цилиндра). Таким образом статическое распределение давления передвигает в каждом сечении цилиндром максимальные места полного разрежения от мест динамического кверху и повышает общие максимальные величины разрежения. При этом вообще абсолютно наивысшая величина разрежения наблюдается не в том сечении, где существует наивысшее динамическое разрежение.

Это рассуждение можно пояснить чисто геометрически при помощи фиг. 98, *b*. Если мы внесем туда соответствующее статическое разрежение

$$\frac{p_{st}}{\gamma H} = \frac{h_s}{H} + \eta \frac{D}{H}, \quad (246)$$

то прямая линия, изображающая это отношение, будет иметь тем больший подъем, чем больше D/H . Новые максимум и минимум можно найти графически таким образом:

Надо найти на кривых динамического разрежения $\frac{P_{уд}}{\gamma H}$ места, где касательные имеют наклон, обратный

$$\frac{P_{уд}}{\gamma H} \left[\text{так как там } \frac{d}{d\eta} \left(\frac{P_{уд} + P_{уд}}{\gamma H} \right) = 0! \right]$$

Однако эти места тем дальше отдалены в положительном направлении η от мест максимальных $(P_{уд}/\gamma H)_{\max}$ чем больше D/H , и чем более плавно меняется максимум динамического разрежения, тем выше также максимальная величина распределения. Это делается ясным из фиг. 98, *b*. Из кривых динамического распределения давления получились благодаря комбинации с двумя прямыми статического распределения (изображенными для двух крайних различных значений D/H) две новые системы кривых равнодействующего распределения. Мы видим, как основательно могут быть сдвинуты отношения благодаря влиянию статического распределения.

Величина D/H в условиях низкого давления может достигнуть и превысить 1. Следовательно, здесь влияние статического распределения особенно велико. В установках высокого давления D/H имеет величину порядка $\frac{1}{100}$, в установках среднего давления $\frac{1}{10}$. В модельных испытаниях, для изучения некоторых явлений кавитации, величина D/H может быть выбрана по нашему усмотрению. Однако практически и здесь мы большую часть ограничены малыми величинами $\left(\frac{1}{10} \text{ до } \frac{1}{200} \right)$.

38. Кавитация в рабочих колесах ¹

Если в каком-либо месте потока давление уменьшается до упругости пара движущейся жидкости, то образуются пространства, заполненные парами жидкости. Возможно, что уже и раньше, при несколько большем давлении в жидкости, выделяются растворенные в ней газы, скопясь, образуют „пустые“ пространства. Массы газа или пара передвигаются вместе с потоком и когда они снова попадают в область более высокого давления, то сталкиваются между собой. Большей частью это явление происходит около стенок колеса или лопаток, и тогда здесь возникают при известных обстоятельствах сильные удары, которые за короткое время сильно изнашивают материал. Попутно происходят и химические разрушительные воздействия. Конечно, неразрывность потока нарушается и неблагоприятно отражается на мощности и к. п. д.

¹ В вопросах, связанных с кавитацией см. Феттингер, Исследование кавитации и коррозии у турбин. *Hydraulische Probleme*, „VDI“, изд. 1926; Д. Тома. Кавитация у водяных турбин, там же. Датес („Ежегодник по использованию водных сил“) 1924, Статьи Д. Тома, Каплана, Э. Энглессона; кроме того: Акерет. Экспериментальные и теоретические исследования об образовании пустот (кавитации) в воде. Техническая механика и термодинамика, тетрадь 1 и 2, „VDI“ изд. 1930 г.).

Если допустить, что рейнольдсов закон подобия действует вплоть до границ кавитации, то можно применить к явлению уравнение (244) и внести в него

$$\left(\frac{p_u}{\gamma}\right)_{\max} = h_b - h_d \quad (247)$$

При этом h_b обозначает внешнее барометрическое давление, h_d — упругость пара жидкости при соответствующей температуре. Обе величины взяты в метрах столба жидкости.

Таким образом получаем (в метрах):

$$h_b - (h_s + h_d) = \kappa H + \eta_s D + \frac{1}{4\alpha} \frac{D^3}{H}, \quad (248)$$

или безразмерно:

$$\frac{h_b - (h_s + h_d)}{H} = \kappa + \eta_0 \frac{D}{H} + \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{D}{H}\right)^2. \quad (249)$$

Левую сторону принято обозначать σ и называть коэффициентом кавитации¹.

$$\sigma = \frac{h_b - (h_s + h_d)}{H}. \quad (250)$$

Сообразно сказанному в предыдущих параграфах η_0 и α только тогда имеют одинаковую величину во всех сечениях цилиндра, когда динамическое распределение давления вблизи максимального разрежения случайно представлено в виде цилиндра $f(\xi, \eta)$ с образующими параллельными плоскости ξ - η и, в особенности, направлению ξ . В общем случае область максимального динамического разрежения может быть заменена поверхностью второго порядка. Но и тогда мы приходим к выражению для σ , содержащему первую и вторую степень D/H , только тогда оба члена имеют другие коэффициенты. В общем можно написать

$$\sigma = \kappa + \mu_1 \frac{D}{H} + \mu_2 \left(\frac{D}{H}\right)^2, \quad (251)$$

выражение, которое можно было бы написать, не входя в подробности динамического распределения.

Путем опыта коэффициент кавитации σ у модели машины определяется таким образом: держат постоянной определенную высоту всасывания при различных напорах H , при этом добиваются каждый раз подобных состояний работы ($n \sim \sqrt{H}$) и наблюдают количество воды Q , мощность N и гидравлический к. п. д. ϵ_h . Пока нет кавитации $Q \sim \sqrt{H}$, $N \sim H\sqrt{H}$ и ϵ_h должны быть постоянны (до тех пор пока изменения рейнольдсова числа незначительны). Уменьшение трех вышеназванных величин указывает на появление кавитации. Появление кавитации проявляется более или менее сильно в зависимости от того или иного состояния работы. Опыт показывает следующее:

¹ См. Д. Тома цитир. выше; его же, Доклад всемирной эне гетической конференции 1924.

Можно считать общепризнанным для турбин, с которыми было произведено большинство опытов в отношении кавитации, что имеется связь между мощностью, расходом воды и к. п. д. от коэффициента кавитации σ . Эта зависимость изображается кривыми фиг. 99. Кривая *a* показывает повышение мощности незадолго до начала кавитации, явление, которое было неоднократно установлено разными наблюдениями¹.

Кривые *b* и *a* являются кривыми кавитации одинаковых колес Каплана—одного с 4 лопатками (кривая *b*) и другого с 6 лопатками (кривая *a*)².

До сих пор известно мало опытов в отношении кавитации с насосами. Этим, конечно, объясняется, что до сих пор коэффициенты кавитации для насосов еще не пользуются в той мере, как для турбин.

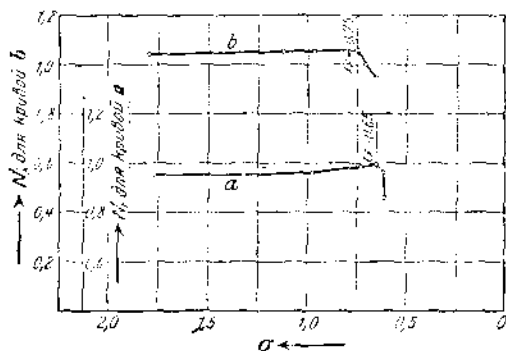
Фиг. 100 изображает кривые кавитации, у которых расход и мощность нанесены в зависимости $(h_s - h_d)$ (h_s —абсолютное давление перед рабочим колесом, h_d —упругость пара работающей воды). Общая высота подачи и число оборотов сохранялись постоянными. Уменьшение количества воды и мощности в зависимости от положения рабочей точки при наступающей кавитации выражено с различной силой в диаграмме QH , и именно в такой зависимости, что при большом расходе и при малой высоте подачи переход самый незаметный.

Нам также неизвестно такое повышение полезной мощности или к. п. д. для насосов, какое установлено в некоторых случаях для турбин, по крайней мере в опубликованном до сих пор очень скудном материале³.

Если мы поставим три опыта с кавитацией с различными высотами всасывания, то будем наблюдать наступление кавитации при различных общих напорах. Мы получим из отношения

$$\sigma = \frac{h_b - (h_s - h_d)}{H}$$

совершенно различные величины σ и можем вычислить из полученных трех уравнений путем решения уравнения (251) три коэффициента κ , κ_1 , κ_2 , так как они вследствие различной величины H содержат различные величины D/H . Очень часто колеса моделей так малы,



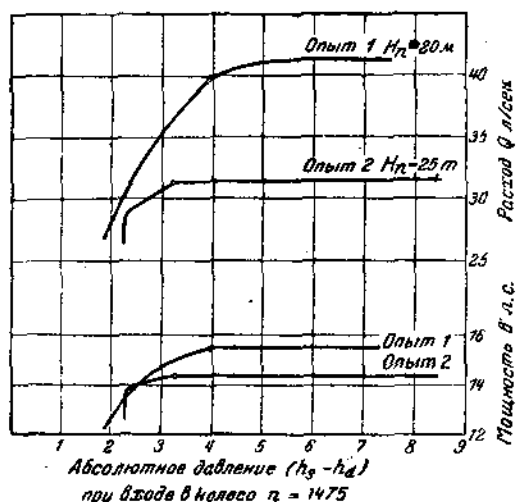
Фиг. 99. Испытание турбины в отношении кавитации.

¹ См. Д. Тома, Wasserkraftjahr, 1924.

² Взято в Институте водяных машин, Карлсруэ.

³ Ср. Pfeleiderer, Kreiselpumpen (Пфлейдерер, Центробежные насосы), § 64, Берлин, Ю. Шпрингер, 1924; Ф. Кризам, Опыты и расчеты к проблеме кавитации в центробежных насосах, Журнал „Turbinen und Pumpen“, Н. 2, 1930.

что указанный способ практически труден, если не совсем неприменим. Если мы имеем для испытания две или несколько моделей колес различной величины, то шансы опыта значительно благоприятнее. Возникает вопрос и о вариации h_d при работе с теплыми жидкостями. Часто, однако, удовлетворяются тем, что не принимают во внимание влияния D/H при опыте с моделью, т. е. принимают $\sigma = \kappa$.



Фиг. 100. Испытание насоса в отношении кавитации.

числе соответственно больше, так как всасывающая труба вследствие соответственно меньших потерь имеет более высокий к. п. д. До сих пор еще не выяснено, зависит ли σ еще в другом отношении от R .

Если мы знаем величину кавитации, то можем использовать уравнение (250) для того, чтобы или определить при данном H допустимую величину h_b , следовательно, например, допустимую высоту установки колеса над нижним уровнем или, наоборот, если дано h_b — определить наибольшую допустимую величину H .

$$h_{b_{гон}} = h_b - h_d - \sigma \cdot H; H_{гон} = \frac{h_b - h_b - h_d}{\sigma}. \quad (252)$$

39. Единичные и удельные величины турбомашин

а) Определения технической практики

Предположим, что мы имеем испытанную машину с высотой подачи или напором H . Представим себе ее подобно увеличенной или уменьшенной так, что наружный диаметр D , по которому измеряют величину машины, равен 1 м. Далее, представим ее себе работающей с высотой подачи или напором $H = 1$ м. Эту машину называют машиной единичных размеров. Тогда между рабо-

ними состояниями с одинаковым к. п. д. обеих машин, причем не принимается во внимание влияние рейнольдсова числа, существуют такие отношения (величины, относящиеся к машинам единичных размеров, отмечаются индексом 1):

$$\frac{n_1'(D_1'=1)}{nD} = \sqrt{\frac{H_1' \approx 1}{H}} = \frac{1}{\sqrt{H}},$$

следовательно:

$$n_1' = \frac{n}{\sqrt{H}} D; \quad (253)$$

$$\frac{Q_1'}{Q} = \frac{n_1'(D_1'=1)^3}{n \cdot D^3} = \frac{n_1'}{n \cdot D \cdot D^2} = \frac{1}{\sqrt{H} \cdot D^2},$$

следовательно,

$$Q_1' = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}}. \quad (254)$$

n_1' и Q_1' — величины, характеризующие данный тип; они являются, само собой разумеется, всегда одинаковыми, безразлично, какая машина берется для их определения. Называют: n_1' — единичное число оборотов, (Stichzahl), Q_1' — единичный расход (Schluckfähigkeit).

Мощность машины единичных размеров получается:

$$\text{„единичная мощность“ } N_1' = \frac{Q_1' \cdot \gamma}{75} \text{ у насосов,} \quad (255a)$$

$$N_1' = \frac{Q_1' \cdot \epsilon_h \cdot \gamma}{75} \text{ у турбин.} \quad (255b)$$

Единичная мощность вычисляется из данных любой машины таким образом:

$$\frac{N_1'}{N} = \frac{Q_1' \cdot 1}{Q \cdot H} = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}} \cdot \frac{1}{Q \cdot H}, \quad N_1' = \frac{N}{\sqrt{H} \cdot H}. \quad (256)$$

Величины единичной машины, разумеется, относятся только к гидравлической мощности. При этом, однако, приняты во внимание потери в зазорах и боковое трение колеса. Они изменяются с состоянием работы так же, как ϵ_h . Отдельные типы сравниваются в первую очередь по единичным данным состояния работы при наименьшем к. п. д. и только во вторую очередь интересуются значениями для состояния работы при низком к. п. д.

Можно себе представить любую машину единичных размеров, увеличенную или уменьшенную, которая при напоре $H=1$ при подобном состоянии работы, следовательно, одинаковом ϵ_h , совершает работу в 1 л. с. Она тогда должна иметь диаметр D_1 и число оборотов n_1 . Эти величины называются удельным диаметром и удельным числом оборотов. Для их вычисления служат отношения, которые отчасти уже заключались в уравнениях от (253) до (256).

При подобных состояниях работы у подобных машин относятся:

$$\text{Высоты энергии } H, \text{ как } c^2, n^2, \omega^2 \sim (nD)^2, \dots \dots \dots (257)$$

$$\text{Расходы } Q, \text{ как } F \cdot c_m \sim D^3 \cdot n \cdot D \sim n \cdot D^3 \sim D^2 \sqrt{H} \dots \dots \dots (258)$$

$$\text{Мощности } N, \text{ как } QH \sim n^3 \cdot D^5 \sim D^3 \sqrt{H} \cdot H \dots \dots \dots (259)$$

Удельные величины получаются в соответствии с этим из уравнений:

$$\frac{N_s (=1)}{N} = \frac{n_s^3 D_s^5}{\pi^3 D^5} \quad \text{и} \quad \frac{H_s (=1)}{H} = \frac{n_s^2 D_s^2}{\pi^2 D^2}. \quad (260)$$

Если мы исключим отсюда D_s , которым мы больше не интересуемся, то удельное число оборотов будет:

$$n_s = n \frac{\sqrt{N}}{H\sqrt{H}}. \quad (261)$$

Удельным числом оборотов называют такое число оборотов, которое делала бы машина при высоте напора (или высоте падачки) 1 м, если бы она была настолько геометрически увеличена или уменьшена, что выполняла бы работу 1 л. с.

Можно единичную машину рассматривать здесь, как такую выполняемую, которая берется для сравнения, тогда получим:

$$n_s = n_1' \sqrt{N_1'} \quad (262)$$

Если мы поместим величины для N_1' из (255), то получается: для насосов

$$n_s = \frac{n_1'}{8,66} \sqrt{Q_1' \gamma}, \quad (263a)$$

для турбин

$$n_s = \frac{n_1'}{8,66} \sqrt{Q_1' \gamma \epsilon_h}. \quad (263b)$$

Для воды ($\gamma = 1000$) отсюда получается: для насосов

$$n_s = 3,65 n_1' \sqrt{Q_1'}, \quad (264a)$$

для турбин

$$n_s = 3,65 n_1' \sqrt{Q_1' \epsilon_h}. \quad (264b)$$

Определение n_s независимо от размеров машины; оно содержит только величины работы; n_s является характеристикой подобия для целого типа и его особого режима работы. В первую очередь мы будем сравнивать типы по удельному числу оборотов, которое они имеют при работе с наивысшим к. п. д.

Удельное число оборотов измеряет быстроходность (или тихоходность) данного типа рабочего колеса и называется также „коэффициентом быстроходности“.

б) Применение установленных понятий для определения размеров выполняемых конструкций.

Если N , H и n являются заданными, то из (261) сейчас же можно получить n_s . Если вместо N дано Q , то N у насосов может быть вычислено сразу, а у турбин после того как задались значением ϵ_h .

Затем определяется максимум к. п. д. при данных размерах конструкции. Для этого надо отыскать между имеющимися типами такие, которые имеют одинаковые n , при высшем к. п. д., что вычисляется из заданных величин. При этом каждый тип имеет определенный единичный расход, и мы имеем:

$$Q_1' = \frac{Q}{n^2 \sqrt{H}}, \text{ или } D = \sqrt{\frac{Q}{Q_1' \sqrt{H}}}. \quad (265)$$

Этим самым выполнено определение размеров, так как D дает одновременно масштаб, по которому надо увеличивать или уменьшать все размеры машины соответственно единичной мощности для того, чтобы получить для конструкции данные величины. Зная D , можно определить число оборотов n из уравнения (253).

с) Безразмерные общие для насосов и турбин определения единичных и удельных величин

В предыдущем разделе мы установили понятия: единичное число оборотов, единичный расход, единичная мощность и удельное число оборотов из чисто практических соображений. Поэтому величины n_1' , Q_1' , N_1' и n , постоянные подобия, определенные уравнениями с (253) до (260) и с (261) до (264), давали при вычислении по ним числовые величины, имеющие определенные размерности. Однако в механике подобия требуется от постоянных, чтобы они были величинами безразмерными, так как благодаря этому можно легко производить проверку при вычислении и, кроме того, числовые величины постоянных независимы при этом от системы мер. Кроме того, принято при сравнении мощности турбин или насосов брать за основу полезную мощность или высоту подачи: у насосов — полезную высоту подачи, у турбин же напор брутто. Это происходит оттого, что заказчики, которые сравнивают разные предложения, например, по скорости, требуют при покупке от насосов определенную, непосредственно измеряемую полезную высоту подачи и совершенно не интересуются высотой подачи брутто. Интересуясь работой брутто, и наоборот, требуют у турбин измеряемый напор брутто и определенную полезную мощность. Поэтому для одного и того же колеса, которое работает с одинаковым расходом воды и числом оборотов, но с разным направлением вращения, в одном случае в качестве насоса, в другом — в качестве турбины, причем в обоих случаях с одинаковой мощностью на валу (потребляемой или отдаваемой) получаем, несмотря на это, два различных коэффициента быстроходности, так как различный для обоих случаев к. п. д. дает для насоса полезную высоту подачи, меньшую, чем напор брутто для турбины. Надо сказать, что при вычислении единичных и удельных величин, исходя из характеристики формы профиля и системы лопаток, необходимо задаваться к. п. д., что связано с известным произволом.

Напротив, последовательнее рассматривать колесо само по себе (независимо от того работает ли оно как насос или как турбина), приняв для этого его к. п. д. равным 1. К тому же в действительности,

чисто гидравлические потери в колесе имеют величину порядка $0,01 \cdot H$, в то время как сумма остальных достигает величины порядка $0,1 \cdot H$. В этом разделе мы будем всегда считать в качестве напора или высоты подачи колеса:

$$H_m = \frac{\omega}{g} A(c_u \cdot r).$$

а мощность

$$N_m = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_m}{75},$$

Энергия колеса H_m должна называться просто напором. Тогда мы назовем величину

$$c_h = \sqrt{2gH_m} \quad (266)$$

скоростью напора.

Для дальнейших расчетов мы должны еще установить некоторые обозначения. В качестве диаметра для сравнения величин колес будет служить многократно упоминаемый „диаметр сужения“ D_e . Назовем область колеса или системы лопаток, которая лежит вблизи места сужения и у насосов расположена у входа, а у турбин у выхода, областью D_e . D_e означает диаметр концентричной окружности, по которой средняя поверхность вращения пересекает ребра лопаток другой области, соответственно называемой областью D_a (фиг. 101, а—с). У насосов D_e — средний диаметр выхода, у турбин — средний диаметр входа в систему лопаток. Отношение D_a/D_e является первой важной характеристикой формы колеса. Фиг. 101, а, б, с показывает, что D_a/D_e при радиальном колесе больше 1, при осевом — меньше 1 (приблизительно 0,8); между этими пределами оно может принимать все значения.

Для того чтобы перейти к безразмерным величинам-характеристикам, сравним сначала протекающее через колесо количество воды Q с теоретическим:

$$Q_t = \frac{\pi}{4} F_e c_h = D_e^2 \sqrt{2gH_m}.$$

Обозначим отношение Q/Q_t через $\pi/4\sqrt{k}$, тогда мы получим

$$\frac{\pi\sqrt{k}}{4} = \frac{Q}{D_e^2 \sqrt{2gH_m}}. \quad (267)$$

Из

$$\left(\frac{Q}{\pi D_e^2} \right)^2 \frac{1}{2g} = \frac{c_h^2}{2g} = k \cdot H_m$$

видно, что k выражает отношение скоростной энергии в сечении F_e к напору. $\frac{\pi\sqrt{k}}{4}$ может быть названо пропускной способностью, или единичным расходом, так как оно отличается от величины, обозначенной таким образом раньше (не принимая во внимание общей ссылки на энергию колеса H_m вместо H_e или H_u) только множителем $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, [благодаря введению которого прежнее выражение становится безразмерным.

Мы будем отличать новую безразмерную величину от прежней, имеющей измерение, прибавлением звездочки (*).

Таким образом мы имеем: пропускную способность:

$$(Q_1')^* = \frac{Q}{D^2 \sqrt{2gH_m}} = \pi \frac{\sqrt{k}}{4} = Q_1' \frac{1}{\sqrt{2g}}. \quad (268)$$

Далее, сравниваем окружную скорость $u_s = D_s n \frac{\pi}{60}$ со скоростью напора и назовем $60/\pi$, кратную величину их отношения, единичным числом оборотов

$$(n_1')^* = \frac{D_s n}{\sqrt{2gH_m}} = n_1' \frac{1}{\sqrt{2g}}; \quad (269)$$

соответственно единичная мощность равняется:

$$\begin{aligned} (N_{m1}')^* &= \frac{N_m}{D_s^2 \sqrt{2gH_m} \gamma H_m} = \\ &= \frac{\gamma Q H_m}{75 D_s^2 \sqrt{2gH_m} \gamma H_m} = \\ &= \frac{(Q_1')^*}{75} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{k}}{75} = \frac{N_{m1}'}{\gamma \sqrt{2g}}. \end{aligned} \quad (270)$$

В заключение получаем удельное число оборотов:

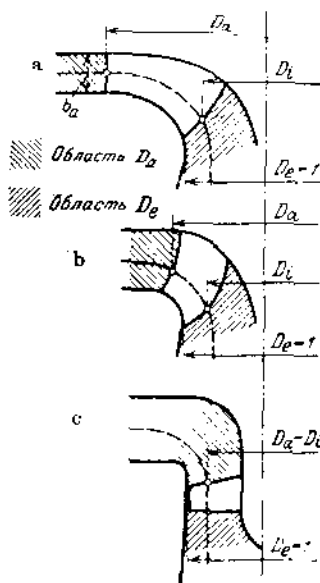
$$(n_s)^* = (n_1' \sqrt{N_{m1}'})^* = \frac{n_1' \sqrt{N_m}}{(\gamma H_m)^{1/2} (2gH_m)^{1/4}} = n_s \frac{1}{\gamma^{1/2} (2g)^{1/4}}. \quad (271)$$

Если мы введем вместо единичной мощности пропускную способность, то получим:

$$(n_s)^* = \frac{(n_1' \sqrt{Q_1'})^*}{\sqrt{75}} = 0,1154 (n_1' \sqrt{Q_1'})^*. \quad (271a)$$

Определяемое уравнением (271) удельное число оборотов является тем числом оборотов, которое делает рабочее колесо геометрически подобное определенному типу, если оно работает с жидкостью удельного веса $\gamma = 1 \text{ кг/м}^3$ в поле тяжести с ускорением силы тяжести $g = 1/2 \text{ м/сек}^2$ и при этом поглощает или выделяет между областью входа и выхода энергию столба жидкости в 1 м (чистый к. п. д. равен 1). Величина $g = \frac{1}{2}$ выбрана затем, чтобы в формулы входили ясно представляемая скорость напора $\sqrt{2gH_m}$ и наглядная высота давления γH_m .

Соответственным образом можно было бы также определить словами пропускную способность и единичную мощность, однако, мы от этого воздержимся.



Фиг. 101а—с. Область D_a и D_e для различных типов колес.

40. Изображение единичных величин и удельного числа оборотов посредством характеристик потока и формы

В следующих расчетах $(n_s)^*$ всегда будет являться безразмерным числом, а именно, с одной стороны, как состоящее из чисто рабочих величин (мощность, число оборотов, падение), с другой — из чистых характеристик формы и потока. Придерживаясь обозначений предыдущего раздела, пишем для колеса любой величины

$$N_m = \frac{\gamma Q H_m}{75} \text{ или } Q = \frac{75 N_m}{\gamma H_m} \quad (272)$$

С другой стороны, мы имеем:

$$Q = \frac{\pi D_s^3}{4} \sqrt{2gkH_m} \quad (273)$$

здесь k то же самое безразмерное число, как в разделе „а“, т. е. величина, пропорциональная кинетической энергии в поперечном сечении D_s . Это первая характеристика течения. Для дальнейших расчетов возьмем состояние течения, не дающее момента скорости в области D_s . Это правильно для насосов, так как насосы в очень редких случаях имеют направляющий аппарат в этой области. У турбин вытекание жидкости без момента скорости гарантирует в большинстве случаев лучший к. п. д. для превращения скорости в давление во всасывающей трубе. Таким образом в области D_s будет:

$$(c_u \cdot r)_s = 0. \quad (274)$$

Выражение напора будет:

$$H_m = \frac{\omega}{g} \cdot r_a \cdot c_{u_a} = \frac{u_a c_{u_a}}{g} \quad (275)$$

При этом у турбин предполагается безударный вход в колесо в области D_a . То же самое предполагается у насосов в области D_s . Лучший к. п. д. машины требует безударного входа. С другой стороны, требуется, чтобы при сравнении типов рабочих колес в отношении их быстроходности в первую очередь бралось за основу состояние работы, дающее наилучший к. п. д.

Теперь введем еще новую характеристику — характеристику потока как отношение

$$m = \frac{c_{u_a}}{u_a} \quad (276)$$

Оно означает следующее: колесо имеет на конаксиальной окружности D_a окружную скорость u_a которая может быть больше, равна или меньше c_{u_a} касательной составляющей у насосов уходящей от колеса, у турбин подходящей без удара к колесу жидкости ($c_{u_a} \equiv u_a$). Если все концы лопаток лежат на одной окружности диаметра D_a , то c_{u_a}/u_a везде одинаково, если же нет (у диагональных и осевых колес), то c_{u_a} меняется в обратном отношении u_a , так как $(c_u r)_a$ остается постоянным по отношению краев лопаток, таким образом m варьирует по двум причинам. В этом случае под $m = \frac{c_{u_a}}{u_a}$ надо по-

нимать среднюю величину, которая относится к окружности D_a . m является существенной характеристикой треугольника скоростей на окружности D_a , пропорциональной уравнению напора. Так что получаем:

$$H_m = m \frac{n_a^3}{g}. \quad (277)$$

Отсюда имеем:

$$H_m = \frac{m}{g} D_a^2 n^2 \left(\frac{\pi}{60} \right)^2 = \frac{m}{g} \left(\frac{D_a}{D_e} \right)^2 \cdot D_e^2 n^2 \left(\frac{\pi}{60} \right)^2, \quad (278)$$

при этом введена характеристика профиля D_a/D_e .

Из уравнения (278) следует:

$$(n_1')^3 = \frac{D_e n}{\sqrt{2g H_m}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{60}{\pi}}}{\frac{D_a}{D_e} \cdot \sqrt{m}}, \quad (279)$$

с другой стороны, можно написать:

$$D_e^2 = \frac{2g H_m}{m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{D_a}{D_e} \right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{60}{\pi} \right)^2 \quad (278a)$$

Посредством сравнения обоих выражений (272) и (273) для Q и введением D_e^2 из уравнения (278a) получается:

$$\frac{n^3 N_m}{(\gamma H_m)(2g H_m)^{3/4}} = \frac{60^2}{600 \pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{D_a}{D_e} \right)^2 m} \cdot \sqrt{k} \quad (280)$$

или

$$\frac{n \sqrt{N_m}}{(\gamma H_m)^{1/4} (2g H_m)^{3/4}} = (n_2)^3 = \frac{1,38}{\frac{D_a}{D_e} \cdot \sqrt{m}} \sqrt{k}. \quad (281)$$

Направо и налево находятся безразмерные числа; налево—выражение из рабочих величин, направо—из характеристик профиля и течения. Каждый тип рабочего колеса, который при постановке его величин D_a/D_e , m и k дает нужное число, подходит к состоянию работы n , N , H_m , которое в левой части дает то же число. В § 39b уже указано, каких размеров должна быть машина, соответствующая работе данного случая.

Характеристики течения (или диаграммы) m и k могут быть заменены дальнейшими характеристиками формы (соответственно D_a/D_e). Для этой цели мы рассмотрим точку i (фиг. 85). Она находится на концентричной окружности, образованной пересечением краев лопаток области D_e со средней поверхностью вращения m . В этом месте можно приравнивать среднюю скорость c_m скорости

¹ У осевых колес оставленное здесь без внимания сужение поперечного сечения F_e благодаря втулке сравнительно велико (до 25%). Вследствие этого n_2 при равном k будет соответственно меньше (до 12%).

В поперечном сечении $F_e = \frac{D_e^2 \pi}{4}$, т. е. ($c_{m_e} = c_{m_e} = c_e$). Вследствие состояния течения без момента скорости мы имеем

$$\operatorname{tg} \beta_i = -\frac{c_{m_i}}{u_i} = -\frac{Q}{\frac{D_e^2 \pi}{4} \cdot D_i \cdot \frac{\pi}{60} n} = -\frac{\sqrt{2 g k H_m}}{D_i \cdot n \cdot \frac{\pi}{60}}. \quad (282)$$

Надо помнить то, что сказано в § 28 касательно вычисления угла; β_i всегда больше 90° ; в турбино- и насосостроении часто вместо него принимают $180 - \beta_i$. Отсюда следует

$$n = -\frac{\sqrt{2 g k H_m}}{D_i \frac{\pi}{60} \operatorname{tg} \beta_i}. \quad (283)$$

Далее имеем:

$$g H_m = m u_a^2 = m \cdot D_a^2 n^2 \left(\frac{\pi}{60} \right)^2. \quad (284)$$

Подставив n из (283),

$$2 g H_m = 2 m D_a^2 \left(\frac{\pi}{60} \right)^2 \frac{2 g k H_m}{D_i^2 \left(\frac{\pi}{60} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i},$$

следовательно,

$$k = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_i}{m} \cdot \left(\frac{D_i}{D_a} \right)^2. \quad (285)$$

(При нахождении $\operatorname{tg} \beta_i$ результат должен быть взят с отрицательным знаком!).

Далее, имеем:

$$m = \frac{c_{u_a}}{u_a} = \frac{u_a + w_{u_a}}{u_a} = 1 + \frac{w_{u_a}}{u_a} = 1 + \frac{c_{m_a}}{u_a \operatorname{tg} \beta_a} \quad (286)$$

(Здесь β_a должна быть всегда меньше 90°). Из (286) дальше получается

$$m = 1 + \frac{Q}{D_a \pi b_a D_a \cdot n \cdot \frac{\pi}{60} \operatorname{tg} \beta_a} = 1 + \frac{Q}{D_a^2 \pi b_a \cdot n \frac{\pi}{60} \operatorname{tg} \beta_a} \quad (287)$$

Подставив n из (283), получаем

$$m = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2 \frac{\frac{D_i}{D_a} \operatorname{tg} \beta_i}{\frac{b_a}{D_a} \operatorname{tg} \beta_a}. \quad (288)$$

Выражая через D_a/D_e , k и m уравнение (281), получаем:

$$\frac{\sqrt{k}}{\frac{D_e}{D_a} \sqrt{m}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{D_i}{D_a} \operatorname{tg} \beta_i} \cdot \frac{D_e}{D_a} m^{-3/4}.$$

Здесь достаточно разложить $m^{-\frac{3}{4}}$ по формуле бинома и ограничиться первым членом. Таким образом получается, если теперь перейти к определению n_s :

$$n_s \text{ или } (n_s)^* = A \sqrt[4]{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_i}{D_a} \operatorname{tg} \beta_i} \frac{D_s}{D_a}} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{D_s}{D_a} \right)^2 \frac{\frac{D_i}{D_a} \cdot \operatorname{tg} \beta_i}{\frac{b_a}{D_a} \cdot \operatorname{tg} \beta_a} \right\}. \quad (289)$$

Здесь в зависимости от того, должно ли n_s быть размерно или безразмерно (для воды и для ускорения силы, тяжести), берется соответственно численное значение $A = 405$ в метрической системе или

$A = 1,38$ ($405 = \sqrt{1000} \cdot \sqrt[4]{19,62^3 \cdot 1,38}$). Впрочем n_s выражено только в углах лопаток и в отношениях диаметров или ширин колеса. При одном радиальном колесе b_a дается непосредственно как ширина колеса. Для других типов b_a согласно § 28 представляет идеальную ширину колеса, которая в связи с уравнением (129) определяется выражением

$$b_a = \frac{D_a' \cdot \Delta b_a' + D_a'' \Delta b_a''}{D_a}. \quad (290)$$

Далее, D_i/D_s и k можно заменить другими характеристиками формы и течения. При новых, в особенности быстроходных, рабочих колесах имеет большое значение средний избыток давления на лопатках Δp_m , так как он связан с опасностью кавитации. Поэтому следовало бы вывести в зависимости от n_s выражение, которое содержит эту величину. Для этой цели мы выражаем мощность посредством числа оборотов и момента давления на лопатку что равно мощности потока, соответствующей моменту вала.

Мы имеем:

$$M = z \int_r^* \Delta p \cdot \cos \gamma \cdot dF_s, \quad (291)$$

здесь z — число лопаток, dF_s — элемент поверхности лопаток, γ — угол между нормалью к нему и направлением окружной скорости, Δp — имеющаяся там разность давления на лопатку, r — радиус соответствующей точки. Но $dF_s \cdot \cos \gamma$ есть dF_p , причем dF_p является соответственным элементом в плоскости проекции лопатки на плоскость продольного сечения. Если мы введем средний избыток давления на лопатки, то можем написать:

$$\dot{M} = z \Delta p_m \int_r^* r dF_p. \quad (292)$$

Но интеграл является не чем иным, как $n_s \cdot F_p$, где r_s есть радиус центра тяжести (фиг. 102). Таким образом получается:

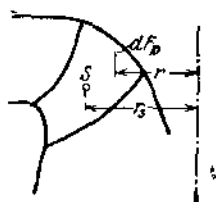
$$\Delta p_m = \frac{M}{z r_s \cdot F_p}. \quad (293)$$

Это рассуждение подобно рассуждению в § 20d и 21b. Однако при подобных и подобно действующих рабочих колесах Δp_m пропорционально γH_m . Следовательно,

$$\Delta p_m = \lambda \cdot \gamma \cdot H_m. \quad (294)$$

С другой стороны, $M = 716,2 \cdot \frac{N}{n}$. Если мы введем эту величину и сравним уравнения (293) и (294), то получим:

$$\frac{716,2 \cdot N}{n z \cdot \frac{D_s}{2} \cdot F_p} = \lambda \cdot \gamma \cdot H_m. \quad (295)$$



Здесь r_s заменено $\frac{D_s}{2}$. Подставляя $D_s = \frac{D_a}{U_a} \cdot D_a$ и как прежде — $c_{u_a} = m \cdot u_a$ имеем, следовательно,

$$u_a = D_a n \cdot \frac{\pi}{60} = \sqrt{\frac{g \cdot H_m}{m}} \text{ или } D_a = \sqrt{\frac{60}{2\pi}} \sqrt{\frac{2gH_m}{m}}$$

Фиг. 102. Момент давления на лопатку

Кроме того, F_p у подобных колес пропорционально D_a^2 , следовательно:

$$F_p = f \cdot D_a^2. \quad (296)$$

Подставляя в (295) и производя ряд преобразований, получаем:

$$\frac{n \sqrt{N}}{(\gamma H_m)^{1/4} (2g H_m)^{3/4}} = (n_s)^* = 1,32 \sqrt{\frac{z \cdot \lambda \cdot f \cdot D_s}{m^{3/2} \cdot D_a}} \quad (297)$$

Здесь число лопаток z в качестве характеристики показывает, что как будто бы благодаря увеличению числа лопаток увеличивается быстроходность. Однако, в действительности, z , λ , m и f находятся между собой в определенной зависимости. Малое число лопаток одинаковой формы и величины проекции вызывает меньшие отклонения, чем большее число лопаток; $\frac{z \cdot \lambda \cdot f}{m^{3/2}}$ с уменьшением z может возрастать. Об этом подробнее будет говориться во втором томе.

41. Формы и свойства типов рабочих колес в зависимости от значений $\frac{D_a}{D_s}$, m и k и выбор этих величин

а) Общие сведения

Основное положение, по которому для данного n , устанавливаются три величины $\frac{D_a}{D_s}$, m и k , что соответствует уравнениям (289) или (297), является столь же простым, как и в § 34c и гласит: получающиеся благодаря выбору D , m и k формы колеса, системы лопаток и камеры и образующиеся в них формы течения и скоростей должны вызывать минимум потерь. Пока мы действуем в рамках основной теории, дело идет о том, чтобы установить формы рабочего колеса и лопаток в средней поверхности вращения (это уже подчер-

кивалось в § 34с.). Поэтому может случиться, о чем уже говорилось в § 34с, что при создании пространственной формы лопаток по образцу той, которая установлена для средней поверхности, приходится несколько изменять первоначально принятые величины D , m и k , если благодаря этому достигаются преимущества для работы лопатки. Далее, может потребоваться спроектировать колеса для особо высоких напоров при особенно большой быстроходности; в таком случае надо стремиться в первую очередь уменьшить опасность кавитации, а затем уж стремиться к минимуму потерь.

Для того чтобы быстро получить общее представление о наилучшей форме колеса для нормальных в отношении напора и числа оборотов рабочих данных, совершенно достаточно рассматривать соотношения лишь характерные для средней поверхности вращения, стремясь в целом к наименьшим потерям при условиях работы с высшим к. п. д., в то время как состояние при измененном режиме работы может пока не приниматься во внимание.

О потерях можно сказать следующее (при этом мы ссылаемся на изложенное в § 14, 15, 16): чистые потери трения какого-либо относительного течения, например, через рабочее колесо, или через всасывающую трубу турбины, или через спираль и направляющий аппарат турбины, могут быть всегда соответственно понижены путем придания большей гладкости стенкам, в особенности, если мы достигнем таких форм течения, которые в каждой элементарной струйке, следовательно, и в тех, которые находятся около направляющих стенок, движутся ускоренно. Надо также помнить о вытекании из правильно закругленного устья, при котором, если число Рейнольдса не слишком мало, теряется только 1,5% скоростной энергии (т. е. разность скоростной энергии между устьем и начальным поперечным сечением). Потери, вызываемые формой канала, тоже можно уменьшить соответствующими устройствами. К ним относятся формы с малым углом конусности, лезвиеобразное заострение у конца выхода, менее удлиненное, более топоробразная форма с небольшим закруглением, у входных кромок лопаток. Все остальные потери могут получиться десятикратной величины. Надо иметь в виду, что в лучшем случае расширяющейся трубы конусообразной формы преобразование скорости в давление происходит с 85% коэффициентом полезного действия, следовательно, с потерей 15% разности скоростных энергий. В искривленных каналах получают дополнительные потери преобразования; в таких каналах со средним ускорением к потерям трения добавляются потери преобразования, в том случае если у одной стенки канала вследствие искривления получается ускорение выше суммы средней скорости выхода и необходимо обратное замедление до средней скорости.

У нормальных турбомашин, работающих с заданной высотой напора, необходимо замедляющее устройство. Назначение всасывающей трубы у турбины, направляющего аппарата и спирали у насоса — преобразовывать неизбежно появляющуюся энергию скорости в давление. Напротив, в колесе мы можем стремиться, по крайней мере, в середине, к ускоренному относительному движению. У турбин это удается всегда, у насосов в общем только у типов средней

быстроходности (вполне удастся избежать относительного замедления движения в трансформаторе Феттингера).

Надо обращать серьезное внимание на потери в зазорах и боковое трение колеса у всех типов. Однако оказывается, что они играют незначительную роль только у уже описанных тихоходов, которые работают с малым единичным расходом и малой единичной мощностью.

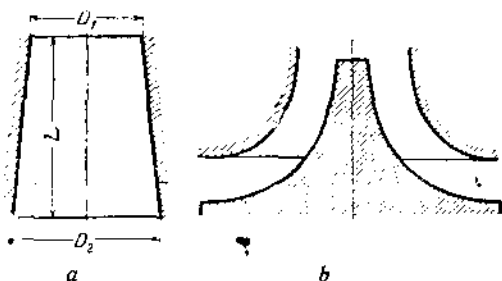
При изменении характеристик $\frac{D_a}{D_c}$, m , и k , как показывают рассуждения и опыт, для получения хорошего к. п. д. недопустимо стремиться к сильному изменению n_s путем соответственно сильного одностороннего изменения только одной (или двух) характеристик. Необходимо в этом случае одновременно изменять их все вместе. Напротив, для определенного n_s предоставляется выбор их в известных границах. Неподходящие формы отбрасываются при помощи вычислений по уравнению баланса (34!), причем потери вычисляются на основании общих гидравлических опытов или математических формул. Последнее суждение о формах, мало друг от друга отличающихся, можно получить только на основании опыта.

Если в дальнейшем мы будем анализировать влияние величин $\frac{D_a}{D_c}$, m , k на потери, то это может быть сделано только после исследования удачности и неудачности форм, полученных благодаря различному выбору этих величин, причем мы пытаемся прежде получить по возможности численные отправные точки о величинах потерь. При этом, так как опыты дают только к. п. д., причем подробных опытов для выяснения отдельных потерь не делают, то мы можем попытаться определить эти отдельные потери иным путем. Это мы делаем, как это уже указывалось в § 17, сравнивая отдельные участки течения по спирали, всасывающим трубам, по каналам направляющих и рабочих колес с течениями по трубе и колену, причем вследствие этого мы должны оставить допущение бесконечного числа лопаток, чтобы говорить о каналах лопаток в направляющем и рабочем колесе. Поэтому конечное число лопаток z будет играть роль в последующих рассуждениях.

б) Величина k (единичный расход)

Если бы удалось всегда распределять на поверхности лопаток разности динамического давления так, что среднему давлению в областях D_c или D_s не противостояло бы никакое более низкое давление, то граница кавитации зависела бы только от k ; другими словами σ была бы тогда равна k . Всегда ли можно достичь этой цели, или только при определенных лопатках, или только при определенном состоянии работы, здесь остается нерешенным, во всяком случае можно стремиться к этому путем ряда приближений. Типы рабочих колес, которые должны работать с высоким паром и которые одновременно расположены на значительной высоте над нижним уровнем (ни в коем случае не под ним!) или к которым рабочая жидкость подводится под давлением, должны

иметь незначительную величину k , т. е. незначительный единичный расход. Это одинаково относится и к насосам и к турбинам. У турбин величина k представляет собою еще и дополнительную энергию к скоростной (в процентах от напора), которая по выходе из колеса скрыта в течении и затем превращается во всасывающей трубе в давление. Таким образом высокое k означает у турбин соответственно высокую потерю во всасывающей трубе. Современные быстроходные турбины (колеса Каплана или пропеллерные колеса) имеют $k = 0,4 \sim 0,5$. Если мы при этом вспомним, что лучший к. п. д. преобразования в прямом, конусообразном расширении равняется приблизительно 85%, величина, которая при больших сооружениях поднимается до 0,88 и может быть еще немного больше, то теоретический максимальный к. п. д. получается, если не обращать внимания на другие потери, — от $1 - 0,5 \cdot 0,12$ до $1 - 0,40 \cdot 0,12 = 1 - 0,06$ до $1 - 0,048$, т. е. от 0,94 до 0,952. Таким образом для турбин безусловно есть возможность работать с такой высокой величиной k . Изображенные на фиг. 103, *a* и *b* симметричные формы вращения всасывающих труб дают во всяком случае лучший к. п. д. Фиг. 103, *a* подходит лучше всего к случаям, где течение позади колеса, главным образом, осевое; 103, *b*, напротив, для таких, где в течении содержатся значительные составляющие окружные скорости. С другой стороны, все рассуждение показывает, как сильно зависит экономичность крайне быстроходных турбин от к. п. д. всасывающей трубы и что эти виды турбин вследствие опасности кавитации должны ограничиваться малыми напорами. Измеренные общие к. п. д. составляют часто свыше 90%. Отсюда получается к. п. д. потока выше 91 до 92% (потери зазора 1%), так что на чистые потери на трение, при входе в направляющий аппарат и рабочее колесо остается общая сумма приблизительно от 4% напора. У тихоходных турбин мы имеем обратные отношения. Здесь бываю величины k от $0,02 \sim 0,03$, так что потери во всасывающей трубе почти не имеют никакого значения. Напротив, здесь направляющий аппарат, рабочее колесо и большей частью вход имеют неблагоприятные поперечные сечения (более длинные каналы с плохим гидравлическим радиусом), так что потери на трение соответственно увеличиваются. Несмотря на это, здесь также получились к. п. д. от 93%; таким образом к. п. д. потока оказывается около 95%, потери в зазоре и боковое трение колеса равняются приблизительно 2,5%, для потерь на трение остается около 4,5%. Для насосов при выборе k почти совершенно отпадает соображение о хорошем к. п. д.; здесь движущаяся жидкость приходит к колесу только с потерями от трения, которые можно удерживать незначительными, несмотря на большие величины k , причем поперечное сечение потока уже не-



Фиг. 103. Всасывающие трубы симметричной ротационной формы.

бращенные на фиг. 103, *a* и *b* симметричные формы вращения всасывающих труб дают во всяком случае лучший к. п. д. Фиг. 103, *a* подходит лучше всего к случаям, где течение позади колеса, главным образом, осевое; 103, *b*, напротив, для таких, где в течении содержатся значительные составляющие окружные скорости. С другой стороны, все рассуждение показывает, как сильно зависит экономичность крайне быстроходных турбин от к. п. д. всасывающей трубы и что эти виды турбин вследствие опасности кавитации должны ограничиваться малыми напорами. Измеренные общие к. п. д. составляют часто свыше 90%. Отсюда получается к. п. д. потока выше 91 до 92% (потери зазора 1%), так что на чистые потери на трение, при входе в направляющий аппарат и рабочее колесо остается общая сумма приблизительно от 4% напора. У тихоходных турбин мы имеем обратные отношения. Здесь бываю величины k от $0,02 \sim 0,03$, так что потери во всасывающей трубе почти не имеют никакого значения. Напротив, здесь направляющий аппарат, рабочее колесо и большей частью вход имеют неблагоприятные поперечные сечения (более длинные каналы с плохим гидравлическим радиусом), так что потери на трение соответственно увеличиваются. Несмотря на это, здесь также получились к. п. д. от 93%; таким образом к. п. д. потока оказывается около 95%, потери в зазоре и боковое трение колеса равняются приблизительно 2,5%, для потерь на трение остается около 4,5%. Для насосов при выборе k почти совершенно отпадает соображение о хорошем к. п. д.; здесь движущаяся жидкость приходит к колесу только с потерями от трения, которые можно удерживать незначительными, несмотря на большие величины k , причем поперечное сечение потока уже не-

посредственно в области D_e уменьшается до малой поверхности соответствующей большой величине k . Однако опасность кавитации требует при выборе k у насосов такого же внимания, как и у турбин.

- с) Одновременные комбинации величин k и $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ (единичного расхода и единичного числа оборотов)

Из уравнения (281) видно, что величины k и $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ влияют противоположным образом на быстроходность; отсюда заключается, что для достижения сильно разнящихся друг от друга величин n_s надо связать малые величины k с соответственно большими величинами $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ и, наоборот, большие величины k с малыми величинами $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$.

$\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ обратно пропорционально единичному числу оборотов, поэтому можно также сказать: для того, чтобы действительно изменить быстроходность, надо одновременно и в одинаковом направлении изменить единичный расход и число оборотов. Надо только исследовать, насколько трудно при таком мероприятии сохранить благоприятные формы лопаток. Для этого мы решаем уравнение (285) относительно $\operatorname{tg} \beta_i$ и получаем:

$$\operatorname{tg} \beta_i = -\sqrt{2} \frac{D_a}{D_i} \sqrt{m k} \quad (298)$$

D_i никогда не бывает больше D_e ; у радиальных колес D_i самое большее равно D_e ; у осевых колес оно равно $D_a \approx 0,8 D_e$. Часто D_i также имеет эту величину у радиальных колес, если их лопатки имеют диагональную часть профиля. Поэтому мы примем для D_i значение, равное $0,8 \cdot D_e$, поэтому мы получаем:

$$\operatorname{tg} \beta_i = -\frac{\sqrt{2}}{0,8} \cdot \frac{D_a}{D_e} \sqrt{m k}. \quad (298a)$$

Если мы вставим здесь $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ из уравнения (281), то получим

$$\operatorname{tg} \beta_i = -\frac{\sqrt{2}}{0,8} \cdot \frac{1,38}{n_s^*} k^{3/4}. \quad (298b)$$

Мы видим, что соединение малой величины k с большой величиной $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ или с малыми величинами n_s и наоборот действует таким образом, что сохраняет $\operatorname{tg} \beta_i$ в среднем постоянным. Конечно, это постоянство не является непременным законом, а только как средняя величина. Рассуждение показывает, что предложенная комбинация дает во всяком случае возможность придать в области D_i всем типам практичный (не слишком плоский и не слишком крутой) угол лопаток (очень плоские углы дают длинные лопатки с большой поверхностью трения, очень крутые не рассматриваются, потому что тогда k было бы несоразмерно большим).

Если мы, далее, заменим в уравнении (288) D_i через D_a и решим его относительно $\operatorname{tg} \beta_a$, то получится:

$$\operatorname{tg} \beta_a = \frac{0,2}{m-1} \frac{\left(\frac{D_e}{D_a}\right)^3}{\frac{b_a}{D_a}} \cdot \operatorname{tg} \beta_i \quad (299)$$

и, если здесь вставим $\operatorname{tg} \beta_i$ из уравнения (298), то имеем:

$$\operatorname{tg} \beta_a = +0,25 \cdot \sqrt{2} \frac{V \overline{mk}}{(m-1) \left(\frac{D_a}{D_e}\right)^2 \frac{b_a}{D_a}} \quad (300)$$

Если введем сюда $\left(\frac{D_a}{D_e}\right)^2 = \frac{1,9 V \overline{k}}{(n_s^*)^2 m}$ из уравнения (281), то имеем:

$$\operatorname{tg} \beta_a = 0,1315 \sqrt{2} \cdot \frac{m^{3/2}}{m-1} \cdot \frac{D_a}{b_a} (n_s^*)^2 \quad (301)$$

Таким образом форма лопатки затрагивается посредством k только в месте D_i и то очень мало. Следовательно, поступают правильно, когда комбинируют большой единичный расход с высоким единичным числом оборотов и при этом устанавливают как среднее правило, что β_i у всех типов в среднем должно быть одинаково. Мы выбираем для этого $\beta_i \approx 180-30^\circ$. При этом полезно помнить, что гидродинамически средний относительный угол приходящего или уходящего по отношению к колесу потока мы считаем равным углу лопаток только в основной теории. В действительности отношение этих обоих углов зависит от числа лопаток. У колес, имеющих незначительное количество лопаток, мы встречаем значительную разницу между гидродинамическим относительным углом приходящего и уходящего течения и выполненным углом лопаток. Но это с нашей точки зрения соображения второстепенные. Наше основное правило ведет нас при помощи уравнения (298b) к отношению между k и n_s^* , а именно:

$$k \approx 0,14 (n_s^*)^4 \quad (302)$$

Для $n_s^* = 52$, ($n_s = 742$), согласно этому $k = 0,475$, для $n_s^* = 0,25$ ($n_s = 74$) получается $k = 0,022$. Выполненные машины соответствуют этим величинам, хотя, конечно, могут встретиться отклонения в ту или другую сторону. }

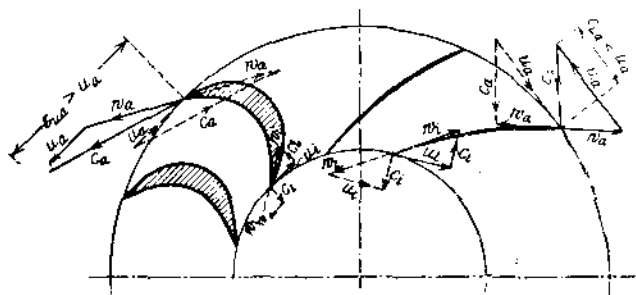
д) Влияние $\frac{D_a}{D_e}$ и m на свойства машины и потока

О предельных значениях величины k нам уже известно; мы знаем, далее, что величины $\frac{D_a}{D_e}$ должны изменяться в одинаковом направлении с k , чтобы существенно изменить n_s и в то же время получить пригодные формы. Теперь вопрос в том, чтобы установить границы для величины $\frac{D_a}{D_e}$ и m . Заранее мы знаем только, что самая малая величина $\frac{D_a}{D_e} = 0,8$ и что она бывает у осевых колес.

$\frac{D_a}{D_e}$ и m влияют одинаково на быстроходность, поэтому комби-

нируют сравнительно небольшие величины $\frac{D_a}{D_e}$ со сравнительно малыми величинами m . Но обе эти величины влияют на к. п. д. частично в противоположном направлении, поэтому необходимо найти самое благоприятное решение для произведения $\frac{D_a}{D_e} \sqrt{m}$ в его обоих множителях. Для этого мы рассмотрим сейчас зависимость отдельных свойств типов колес и течений в них от $\frac{D_a}{D_e}$ и m .

а) Величина m и кривизна каналов лопаток. Величиной m не вполне определяется треугольник скоростей в точке D_a ; для этого нужна еще величина c_{m_a} , но более существен-



Фиг. 104. Лопатки рабочего колеса для $m \approx 1$.

ным элементом является m ; он является, если и не единственным, то в основном решающим для величины абсолютного, а вместе с тем и относительного, отклонения потока, а следовательно, и кривизны каналов рабочего колеса. Фиг. 104 показывает две формы лопаток с одинаковым $\frac{D_a}{D_e}$, одинаковым β , и одинаковым числом лопаток, но которые отличаются только величиной $m \approx 1$. При этом приближенно принимается, что лопатки, несмотря на их значительное конечное расстояние, вызывают относительное отклонение всего течения, которое соответствует углам лопаток β , и β_a . Это предположение соответствует предпосылке бесконечного числа лопаток в нашей основной теории. Для того чтобы изобразить влияние m на кривизну канала, вполне достаточно придраться к этому предположению. Лопатка, которая относится к состоянию течения, характеризуемому посредством $m > 1$, имеет относительное отклонение больше 90° , она должна быть утолщена в месте перехода от входа к выходу для того, чтобы создать до некоторой степени благоприятное отношение радиуса изгиба относительной элементарной струйки к ширине канала (необходимо отличать от ширины колеса!). Несмотря на это, изгиб вызывает очень большие различия скоростей внутри канала на разных сторонах лопаток. Это влияние имеется как при неподвижном, так и при вращающемся канале. Вращение и вызванная им работа насоса или турбины повышает различие скоростей по сравнению с имеющимся различием при неподвижном канале. Поэтому при производстве турбомашин для несжимающихся жидкостей давно оставлена очень круто изогнутая лопатка. Она

вызывала вследствие сильного изгиба кавитацию даже вблизи места a_m (т. е. в области сравнительно высокого среднего давления). Но если можно было бы избежать кавитации посредством низкого расположения, то такая форма вызывает большие потери преобразования энергии в лопатках. Слабо изогнутая форма ($m \geq 1$) лопаток встречается у крайне тихоходных турбин; величина $m = 1$ часто встречается у нормальных тихоходных турбин; колеса насосов всегда имеют $m < 1$. Значения $m < 1$ создают для изгибов значительно более благоприятные отношения, в особенности, если с ним мы приходим к лопаткам, изогнутым назад (противоположность крюкообразным или изогнутым вперед) ¹.

В канале, который мы представляем себе неподвижным, имеются также различия в скоростях, которые при вращении оказываются направленными в противоположные стороны, почему равнодействующая их получается гораздо меньше. Этим значительно уменьшаются потери преобразования благодаря обратному замедлению в сторону средней скорости. Этим обстоятельством объясняется новая тенденция снабжать лопатками с $m < 1$ также тихоходные турбины. Изгиб лопаток зависит, конечно, также от отношения составляющих c_m в пунктах a и i , так же как и $\frac{D_a}{D_e}$, или $\frac{D_e}{D_i}$, но величины c_m и $\frac{D_a}{D_e}$ действуют смягчающе на изгиб. Влияния этих величин уступают влиянию величины m .

β) Относительное ускорение или замедление в рабочем колесе. Величина $\frac{\omega_a^2 - \omega_i^2}{2g}$ у турбин всегда отрицательная, т. е. тут, как уже упоминалось, всегда удается относительно ускорить течение через рабочее колесо. Иначе обстоит дело с насосами, где часто приходится считаться с замедленным относительным течением. Поэтому важно найти величину пропорциональную $\frac{\omega_a^2 - \omega_i^2}{2g}$. Если мы снова примем $D_i = 0,8 \cdot D_e$ и $c_i = c_e$, то получим:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_a^2 - \omega_i^2}{2g} &= \frac{\omega_{a_1}^2 + c_{m_a}^2 - 0,64 u_e^2 - c_e^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left\{ \left[(m-1)^2 - 0,64 \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2 \right] u_a^2 + \right. \\ &\quad \left. + c_e^2 \left[\left(\frac{D_e^2 \pi}{D_a \pi b_a} \right)^2 - 1 \right] \right\} = \\ &= \left\{ \frac{(m-1)^2 - 0,64 \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2}{2m} + k \left[\frac{1}{16} \left(\frac{D_e}{b_a} \right)^2 - 1 \right] \right\} H_m. \end{aligned} \quad (303a)$$

¹ Эти обозначения для лопаток посредством $m \geq 1$ должны были бы иметь одинаковое значение в производстве рабочих колес как для насосов, так и для турбин. Вперед (или крюкообразно) изогнутая лопатка ($m \geq 1$) у колеса насоса с уходящей жидкостью изгибается вперед и у колеса турбины с приходящим течением изгибается, напротив, обратно. Таким образом она показывает приходящему или уходящему течению свою вогнутую сторону. Обратное получается при изогнутой лопатке назад ($m \leq 1$).

c_{m_0} и c_d почти всегда мало отличаются друг от друга (при осевых колесах они совсем одинаковы). Благодаря этому влияние k выпадает; поэтому мы имеем приближенно:

$$\frac{w_a^2 - w_i^2}{2g} \approx \frac{(m-1)^2 - 0,64 \left(\frac{D_e}{D_a}\right)^2}{2m} \cdot H_m. \quad (303b)$$

Для осевых колес, где, кроме того, также $0,8 D_e = D_a$, получается точно

$$\frac{w_a^2 - w_i^2}{2g} = \left(\frac{m}{2} - 1\right) H_m. \quad (303c)$$

У осевых колес это является независимо от математического знака, одновременно величиной избыточного давления в колесе $\Delta p_r / \gamma$, так как это давление вообще равняется $\frac{\Delta p_r}{\gamma} = \frac{u_a^2 - u_i^2}{2g} - \frac{w_a^2 - w_i^2}{2g}$.

Таким образом видно, что у осевых колес ($u_a = u_i$) весь избыток давления колеса получается благодаря разности квадратов относительных скоростей. У чисто осевых турбин всегда еще имеется ускорение. У чисто осевых насосов, напротив, происходит так, что вся высота подачи получается благодаря преобразованию скоростной энергии в давление, происходящему как в рабочем колесе, так и в направляющем аппарате. Здесь мы снова встречаемся с основными трудностями насосов по сравнению с турбинами.

Радиальные колеса могут принципиально как у насосов, так и у турбин, работать с ускорением. Например, если дается $m = 1$ и $\frac{D_e}{D_a} \approx 0,625$, то $\frac{w_a^2 - w_i^2}{2g} = -\frac{1}{8} H_m$, что для турбин благоприятно, для насосов, напротив, плохо.

Колесо насоса с $\frac{D_e}{D_a} = 0,625$ или $\frac{D_e}{D_a} = 1,6$ должно было бы иметь $m = \frac{1}{2}$, чтобы, по крайней мере, $w_a \approx w_i$, в том случае, если не хотят сделать очень малым (b_a/D_a), благодаря чему уже при $m = \frac{1}{2}$ можно получить ускорение в рабочем колесе. Малые величины b_a/D_a тоже неблагоприятны вследствие получающихся узких прямоугольных поперечных сечений у выхода рабочего колеса. Но еще и на основании других соображений (§ 41, d, ζ) возникает вопрос, можно ли себе позволить комбинацию такой величины D_a/D_e с пропорционально малой величиной $m = \frac{1}{2}$? Во всяком случае здесь ясно видно причину того, почему у насосов избегают величины $m = 1$, еще хорошей для турбин; при $m = 1$ лопатка получается изогнутой вперед и, кроме того, есть относительное замедление, комбинация, которая после всего того, что мы говорили о замедленном течении, особенно плоха. Мы еще вернемся к этому рассуждению (§ 41, d, ζ), заметим только, что $m \approx 0,8$ является наибольшей величиной для насосов в соединении с высшими величинами D_a/D_e в противоположность турбинам.

γ) Избыточное давление колеса и скоростная энергия в области D_a . Избыточное давление колеса, если мы не будем принимать во внимание потерь в колесе, равняется:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_r}{\gamma} &= H_m - \frac{c_a^2 - c_e^2}{2g} = H_m - \frac{c_{u_a}^2}{2g} - \frac{c_{m_a}^2 - c_e^2}{2g} = \\ &= \left\{ 1 - \frac{m}{2} + k \left(1 - \frac{1}{16} \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2 \right) \right\} H_m. \end{aligned} \quad (304a)$$

Как уже упоминалось, c_{m_a} и c_e большею частью мало отличаются друг от друга (у осевых колес совершенно нет!). Поэтому большею частью достаточно поставить

$$\frac{\Delta p_r}{\gamma} \approx \left(1 - \frac{m}{2} \right) H_m. \quad (304b)$$

Полезно здесь вспомнить, что мы все время производим вычисления средними величинами и что, следовательно, и уравнение (304a) или (304b) в общем дают среднюю величину, а именно величину в средней поверхности вращения, которая только у радиальных колес постоянна во всю ширину колеса, тогда как у диагональных и осевых колес она сильно изменяется, величины же m и c_m значительно уклоняются от своих значений в средней поверхности вращения. Соображения, при помощи которых мы определяем избыточное давление колеса и энергию скорости, играют большее значение у радиальных колес, чем у диагональных и осевых.

Энергия скорости равняется:

$$\frac{c_a^2}{2g} = \frac{c_{u_a}^2 - c_{m_a}^2}{2g} = \frac{m}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2 \frac{k}{m} \right\} H_m. \quad (305a)$$

Так как c_{m_a} , как уже упоминалось при уравнениях (304b), часто мало отличается от c_e ($D_a \pi b_a \approx D_e^2 \frac{\pi}{4}$), то иногда бывает достаточно принять:

$$\frac{c_a^2}{2g} \approx \frac{m}{2} \left(1 + \frac{2k}{m} \right) H_m. \quad (305b)$$

У тихоходов при $k=0,03$ и $m=75$ второй член в скобках не имеет большого значения ($\frac{2 \cdot 0,02}{0,75} = 0,054$); напротив, при большой быстросходности им нельзя пренебрегать (при $k=0,5$, $m=0,4$ он будет равен 2,5).

Если мы введем в уравнение (305b) среднюю величину k по уравнению (302), то получится:

$$\frac{c_a^2}{2g} \approx \frac{m}{2} \left(1 + 0,28 \frac{(n_s^*)^{1/2}}{m} \right). \quad (305c)$$

При этом получается для $n_s^* = 0,25$ с $m = 1$: $\frac{c_a^2}{2g} = 0,544 H_m$ для $n_s^* = 2,5$ с $m = 0,3$: $\frac{c_a^2}{2g} = 0,625 H_m$; таким образом нет большой разницы между тихоходной и быстроходной машинами.

д) Потери при протекании чисто ускоренного потока в направляющем и рабочем колесе (турбины). Мы сначала составим выражение для среднего $\frac{w^2}{2g}$ в рабочем колесе и получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{w^2}{2g} \right)_m &= \frac{w_a^2 + w_i^2}{4g} = \frac{w_{a_a}^2 + c_{m_a}^2 + 0,64 u_a^2 + c_a^2}{4g} = \\ &= \left\{ \frac{(m-1)^2 + 0,64 \left(\frac{D_c}{D_a} \right)^2}{4m} + \frac{k}{2} \left(1 + \frac{1}{16} \left(\frac{D_c}{\frac{b_n}{D_a}} \right)^2 \right) \right\} H_m. \end{aligned} \quad (306a)$$

Так как c_{m_a} большей частью равняется c_{m_e} , то можно написать

$$\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m = \left\{ \frac{(m-1)^2 + 0,64 \left(\frac{D_c}{D_a} \right)^2}{4m} + k \right\} H_m, \quad (306b)$$

$(D_c/D_a)^2$ может быть исключено посредством уравнения (281). Тогда получаем:

$$\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m = \left\{ \frac{(m-1)^2}{4m} + 0,084 \frac{(n_s^*)^2}{\sqrt{k}} + k \right\} H_m. \quad (306c)$$

Если мы и здесь заменим k в среднем по данным уравнения (302) посредством n_s^* , то получаем окончательно:

$$\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m = \left\{ \frac{(m-1)^2}{4m} + 0,37 (n_s^*)^{1/3} \right\} H_m. \quad (306d)$$

Первый член в скобках имеет минимум, а именно величину нуль для $m = 1$; мы уже знаем из предыдущих рассуждений, что m при увеличении n_s^* уменьшается. Таким образом первый член также увеличивается с n_s^* . Мы получаем для $n_s^* = 0,25$ ($n_s = 74$) и $m = 1$ выражение $\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m = 0,058 H_m$, а для $n_s^* = 2,5$ ($n_s = 740$) и $m = 0,3$ величину $\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m = 1,66 H_m$, следовательно, величину, в 30 раз большую.

Теперь можно составить примерное представление о величине потери в рабочем колесе. Мы сделаем это сначала для осевой турбины с небольшим числом лопаток (турбина Каплана или пропеллерная). Среднее сечение цилиндром через лопатки такой турбины (фиг. 135, а—с) дает профили лопаток, какие бывают также у несущих крыльев аэропланов. Для них известен коэффициент сопротивления, относящийся к проекции поверхности крыла, перпендикулярной к хорде крыла¹.

¹ Данные аэродинамической лаборатории, Геттинген, I, II, III вып. Измерения профилей аэропланов.

В лучшем случае коэффициент может равняться

$$c_w = \left(\frac{W}{F \gamma \frac{w^2}{g}} \right) = 0,01.$$

Здесь поверхность всех лопаток F может быть принята равной $\lambda \cdot \frac{D_e^2 - D_n^2}{4} \cdot \frac{\pi}{(\cos \beta)_m}$; $\lambda = 1$, если лопатки в проекции, перпендикулярной к валу, имеют вид согласно фиг. 105, б; $(\cos \beta)_m$ измеряет средний наклон лопаток к направлению окружной скорости, он может быть принят:

$$(\cos \beta)_m = \left(1 - \frac{m}{2} \right) u;$$

D_n диаметр втулки. Работа, которую должен совершить поток, чтобы преодолеть сопротивление, может быть выражена двояко, а именно посредством $L = W \cdot w_m$ или, выражая иначе

$$L = Q \cdot \gamma \cdot h_r = \\ = h_r \cdot \gamma \cdot \frac{D_e^2 - D_n^2}{4} \cdot \pi \sqrt{2gk} H_m.$$

Таким образом получаем для потери давления в рабочем колесе

$$h_r = \frac{c_w \cdot \lambda \sqrt{\frac{2m}{k}} \left[\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m \right]^2}{1 - \frac{m}{2}} H_m, \quad (307)$$

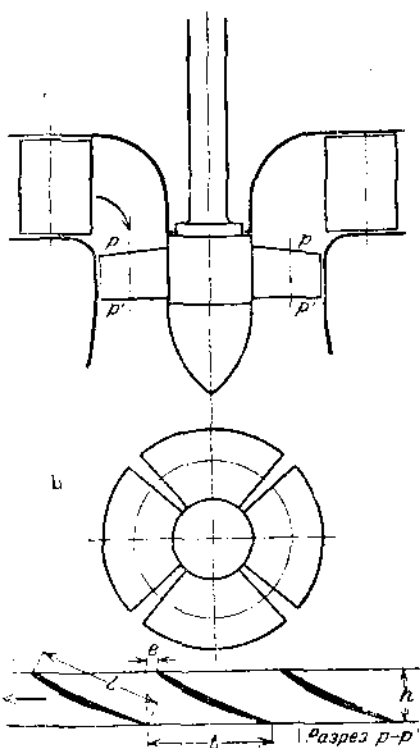
причем $(w^2)_m$ и $(w_m)^2$ считаются равными, что допустимо для приближенного вычисления. Если мы поставим для $\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m$ его величину из уравнения (306д), то получится:

$$h_{rb} = \frac{c_w \cdot \lambda \sqrt{\frac{2m}{k}}}{1 - \frac{m}{2}} \left\{ \frac{(m-1)^2}{4m} + 0,37 (n_s^*)^{1/2} \right\}^2 H_m. \quad (308)$$

(Здесь индекс b указывает, что движение ускоренное). При $c_w = 0,01$, $\lambda = 1$, $m = 0,3$, $k = 0,5$ получаем $h_{rb} = 0,036 H_m$.

В этом выражении не учтено трение о втулку и об внешнюю стенку камеры. Величина трения о втулку вследствие малой поверхности незначительна. У внешней стенки камеры для определения работы трения должна быть взята абсолютная скорость, которая меньше, чем относительная (ср. также ζ).

Потери при движении через колесо находятся, таким образом, в порядке величин от 3 до 4% напора. Здесь ясно видна необ-



Фиг. 105, а—с. Турбина Капана.

ходимость применять при большой быстроходности небольшое число лопаток, т. е. $\lambda < 1$ (отрицательное покрытие).

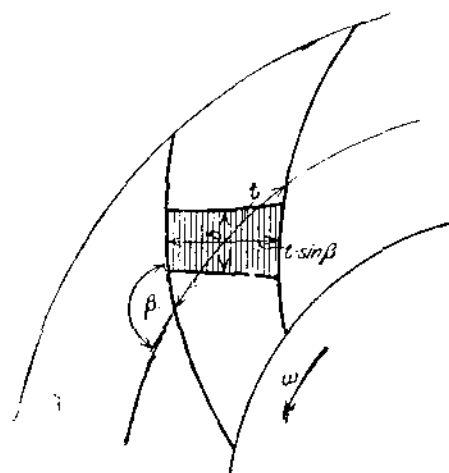
Потери протекания в тихоходных колесах вследствие значительно меньшей относительной скорости, значительно меньше, правда, не в такой мере, как можно предположить по выше вычисленным средним для $\left(\frac{w^2}{2g}\right)_m$. Это происходит от того, что каналы лопаток значительно длиннее и имеют неблагоприятную форму. Чтобы вычислить потери протекания, можно рассматривать лопатки не как отдельные несущие крылья (так как они с обеих сторон замкнуты боковыми цилиндрическими поверхностями и образуют с ними закрытые каналы), но нужно рассматривать каналы лопаток и определять потери в них, как в отрезках труб и коленах. Исходное математическое выражение было бы то же, что в уравнении (65), следовательно,

$$h_{rb} = \zeta_{rb} \frac{1 \cdot U}{F} \left(\frac{w^2}{2g}\right)_m. \quad (309)$$

Если мы подставим подобное математическое выражение в уравнение (307) для быстроходных осевых колес, то получаем:

$$\zeta_r \cdot \frac{1 \cdot U}{F} = \frac{c_w \lambda \sqrt{\frac{2m}{k}} \cdot \left(\frac{w^2}{2g}\right)_m}{1 - \frac{m}{2}} = \frac{c_w \lambda \sqrt{\frac{2m}{k}} \cdot \left\{ \frac{(m-1)^2}{4m} + 0,37 (n_1)^{0,8} \right\}}{1 - \frac{m}{2}}. \quad (310)$$

Это даст с числовыми величинами вышеприведенного примера для быстроходных осевых колес $\zeta_r \frac{1 \cdot U}{F} = 0,022$. У тихоход-



Фиг. 106. Нормальное сечение канала

ных радиальных колес можно вычислить для $\frac{U}{F}$ среднюю вели-

$$\left(\frac{U}{F}\right)_m = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{U}{F}\right)_a + \left(\frac{U}{F}\right)_i \right\}$$

и ее перемножить с приближенной средней величиной длины канала:

$$l_m \approx \frac{1}{2} \frac{(D_a - D_i)}{(\sin \beta)_m},$$

$$\text{где } (\sin \beta)_m = \frac{\sin \beta_a + \sin \beta_i}{2}.$$

При этом вообще

$$\begin{aligned} \frac{U}{F} &= 2 \frac{b + t \cdot \sin \beta}{b t \cdot \sin \beta} = 2 \frac{1 + \frac{t}{b} \cdot \sin \beta}{t \cdot \sin \beta} \\ &= 2 \frac{1 + \frac{D}{b} \frac{\pi}{2} \sin \beta}{D \frac{\pi}{2} \sin \beta} \quad (\text{фиг. 106}) \quad (311) \end{aligned}$$

Окончательно для тихоходных радиальных колес получаем:

$$\left(\frac{1 \cdot U}{F}\right)_m = \left\{ 1 + \frac{D_a}{b_a} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \beta_a, 1 + \frac{D_i}{b_i} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \beta_i \right\} \frac{D_a}{D_i} - 1 \quad (312)$$

$$\left\{ \frac{D_a}{D_i} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \beta_a, \frac{\pi}{2} \sin \beta_i \right\} 2(\sin \beta)_m.$$

Это дает для колеса с $\frac{D_a}{b_a} = 16$; $\frac{D_i}{b_i} = 5$; $\frac{D_a}{D_i} = 1,7$; $\sin \beta_a = 1$; $\sin \beta_i = 0,4$. $(\sin \beta)_m = 0,7$; $z \approx 16$:

$$\left(\frac{l \cdot U}{F} \right)_m \approx 15.$$

Коэффициент ξ_r определен только на-глаз; для колеса, характеризованного вышеприведенными цифрами, которые указывают на упомянутую среднюю относительную скорость, и для еще сравнительно сильного изгиба каналов надо было бы считать $\xi_r = 0,0125$ не слишком большим (прямая труба имеет в среднем 0,005)¹.

Таким образом получается $\xi_r \left(\frac{l \cdot U}{F} \right)_m$ для тихоходных радиальных колес равно 0,19. Для этой величины и уже выше вычисленной для $\left(\frac{w^2}{2g} \right)_m$ получается $h_{r,8} \approx 0,19 \cdot 0,058 H_m = 0,11 H_m$.

Таким образом здесь рабочее колесо добавляет к потерям протекания гораздо меньшую величину, чем у быстроходных осевых колес.

В направляющем аппарате мы имеем обратные отношения. Здесь величины $\frac{c_a^2}{2g}$ у быстроходных и тихоходных машин мало отличаются друг от друга. Однако величина $\xi \frac{l \cdot U}{F}$ у тихоходных машин значительно больше, чем у быстроходных. У последних происходит еще то, что скорости выхода из лопаток направляющего колеса значительно меньше, чем c_a . Это происходит потому, что эти лопатки кончаются на пропорционально меньшем круге, чем тот, которому соответствует диаметр D_a . У тихоходных машин, которые при больших диаметрах имеют пропорционально маленький зазор в лопатках, на эту разницу можно не обращать внимания. Во всяком случае потери протекания в направляющем колесе радиальных тихоходных машин значительно больше, чем в направляющем колесе осевых быстроходных машин. Вообще очень трудно дать здесь общие формулы; трудно это оттого, что различные способы подвода воды к направляющему колесу вызывают различные потери.

В заключение можно сказать: у тихоходных радиальных турбин преобладают потери протекания в направляющем колесе, у быстроходных осевых турбин — в рабочем колесе. Общая сумма потерь протекания у радиальных турбин несколько меньше, чем у осевых.

Все потери протекания у турбин больших размеров бывают величиной от 3 до 5%; у тихоходных турбин потери возрастают с уменьшением величины и мощности (т. е. рейнольдсова числа) быстрее, чем у быстроходных.

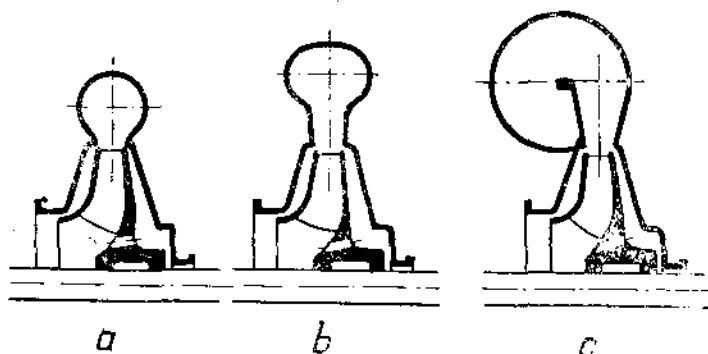
е) Потери протекания при частично или совершенно замедленном течении в направляющем и рабочем колесах (насосы). Как уже говорилось, только типы машин средней быстроходности удастся выполнять с ускоренным течением в рабочем колесе. У тихоходных радиальных насосов и быстроход-

¹ Ср. также замечание в § 16 m и 17 о сравнении более длинных отрезков труб с короткими отрезками каналов!

ных осевых насосов в рабочем колесе мы имеем в общем замедленное движение. Однако, так как m меньше 1, а $\frac{D_c}{D_a}$ у тихоходных велико, то каналы лопаток у радиальных насосов не очень сильно изогнуты и также не очень расширены. Кроме того, изгиб так выполнен, что он противодействует распределению давления, вызываемому действием насоса. Все это дает основание в формуле:

$$h_{r_v} = \lambda_{r_v} \frac{w_c^2 - w_a^2}{2g} \quad (313)$$

(индекс v обозначает, что мы имеем замедленное движение!) принять значение для λ_{r_v} , которое немногим превышает уже известную



Фиг. 107, а--с. Различные формы спиралей для насосов.

величину для наиболее благоприятного преобразования, т. е. в среднем для радиальных колес $\lambda_{r_v} \approx 0,25$.

У осевых колес величина λ_{r_v} , несмотря на меньший относительно изгиб, должна быть несколько выше, так как этот изгиб усиливает различие давлений, вызываемое вращением. Мы принимаем для осевых колес $\lambda_{r_v} = 0,3$.

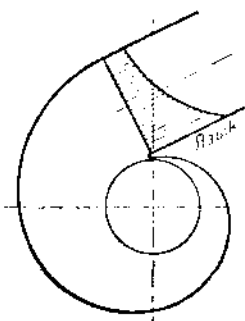
Вместе с уравнением (303b) или (303с) получаем:

$$h_{r_v} = 0,25 \text{ (или } 0,3) \frac{0,64 \left(\frac{D_c}{D_a} \right)^2 - (m-1)^2}{2m} H_m \quad (314)$$

Это дает при $m = 0,8$ и $\frac{D_c}{D_a} = \frac{1}{2,2}$ для тихоходных осевых колес $h_{r_v} = 0,028 H_m$ и при $m = 0,3$ и $\frac{D_c}{D_a} = \frac{1}{0,8}$ для быстроходных осевых колес $h_{r_v} = 0,025 H_m$, т. е. при неопределенности в выборе значения λ_{r_v} разницы никакой нет.

Потери в направляющем аппарате и спирали у насосов являются всегда потерями преобразования энергии. Это преобразование в радиальной, окружающей колесо спирали (рис. 107) всегда менее благоприятно, чем в направляющем аппарате со спиралью. Причина в том, что отдельные элементарные струйки, сходящие с колеса, протекают при различных условиях в область высшего давления, создаваемого спиралью. Даже если выбрать такую конструкцию спирали, чтобы получалось наиболее симметрично-вращательное распределение давления вокруг колеса, то все-таки переход из спирали в отводящий патрубок вокруг „языка“ спирали (фиг. 108) является областью, в которой частицы жидкости должны кратчайшим путем достигнуть конечного давления, в то время как другие к этому приходят только длинным путем по всей спирали.

Таким образом первый переход вызывает очень малые потери трения и очень большие потери от преобразования энергии, второй — очень большие потери трения и очень малые потери от преобразования. Можно охарактеризовать положение таким образом: в переходе из спирали в патрубок в поперечном сечении перехода наблюдаются очень различные скорости, которые должны уравниваться до общей конечной величины скорости выхода из патрубка. Это изображено на фиг. 108. Если патрубок короткий и совершенно цилиндрический, то это выравнивание вызывает большие потери; они уменьшаются при более длинном патрубке с малым углом расширения. Поэтому возникает вопрос: не было ли бы лучше делать спирали по возможности с малым поперечным сечением,



Фиг. 108. Распределение скоростей при выходе из спирали.

т. е. использовать их только, главным образом, для собирания и отвода жидкости и достигать замедление, главным образом, в конечном патрубке? Но этим мы вызвали бы большие потери благодаря трению о стенки спирали, не говоря уже о том, что благодаря длинному патрубку машина получается более громоздкой. Другое средство ослабить неравномерность в движении части жидкости, уходящей от колеса, заключается в том, чтобы расположить как можно ближе к колесу область симметричного вращения определенного радиального размера (так называемый радиальный диффузор, фиг. 107, *b* и *c*), в котором каждая частица жидкости прежде всего замедляется и только после этого диффузора поместить спираль с ее языком. И это расположение удлиняет пути трения. Часто в этом радиальном диффузоре устанавливаются направляющие лопатки. Благодаря этому можно устранить большую часть замедлений в упомянутом канале, устройство изгибов и расширений которого зависит в достаточной степени от нас. Во всяком случае и здесь увеличены поверхности трения. Все же практика, кажется, оправдывает установку тщательно отделанного канала с лопатками, если идет вопрос о высоком к. п. д.

Приведенные рассуждения делают понятным, что в радиальных направляющих аппаратах, диффузорах и спиральных не надо

рассчитывать на к. п. д. преобразования больше 0,85. Для указанного устройства можно в выражении

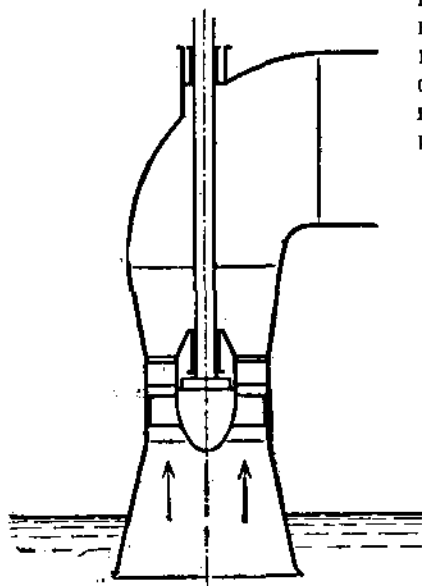
$$h_{i_r} = \lambda_{i_v} \frac{C_a^2}{2g}$$

считать

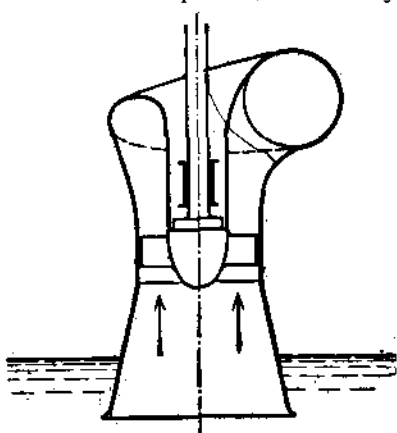
$$\lambda_{i_v} = 0,35.$$

У упомянутых осевых насосов соответственно формам радиальных насосов, для отвода применяются конусообразные или изогнутые трубы, а также спирали, расширяющиеся в осевом и соответственно диагональном направлениях. Все формы могут быть снабжены

направляющими аппаратами. Обе нижеописанные формы дают лучший к. п. д. Первая имеет непосредственно за колесом осевой направляющий аппарат, который изменяет скорость, имеющую у



Фиг. 109. Аксиальный насос с направляющим аппаратом, расширяющейся трубой и коленом.



Фиг. 110. Аксиальный насос с расширяющейся трубой и спиралью.

выхода из колеса направление по окружности на чисто осевое и при этом несколько замедляет течение помощью примыкающей конусообразно расширяющейся трубы, по возможности длинной и симметричной (фиг. 109). У другой — направляющий аппарат отсутствует,

но первая часть энергии $\frac{c_a^2}{2g} = \frac{c_{m_a}^2}{2g} + \frac{c_{v_a}^2}{2g}$ преобразуется в конусообразно расширяющейся трубе, вторая часть — в примыкающей спирали (фиг. 110).

Для первой формы можно принять $\lambda_{i_v} \approx 0,2$.

Для второй: $\lambda_{i_v} \approx 0,17$.

При больших размерах конструкции эти величины должны быть еще снижены.

ζ) Влияние $\frac{D_a}{D_e}$ и m на боковое трение колеса. В § 16, II для бокового трения колеса была дана формула в лошадиных силах, которая может быть представлена в таком виде:

$$N_{sr} = \varrho \frac{\gamma}{g} n^3 D_a^5 = \varrho \frac{\gamma}{g} (n D_a)^3 D_a^2,$$

здесь

$$n D_a = \frac{60}{\pi} u_a = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{g H_m}{m}}.$$

Если мы это подставим и разделим на

$$\frac{Q \gamma}{75} = D_e^2 \frac{\pi}{4} \gamma \frac{\sqrt{2 g k H_m}}{75},$$

то получаем потерю от бокового трения колеса, пересчитанную в эквивалентную потерю высоты давления.

$$h_{N_{sr}} = 4,7 \cdot 10^5 \cdot \varrho \left(\frac{D_a}{D_e} \right)^2 \frac{H_m}{\sqrt{k m^3}}. \quad (315)$$

Если мы из уравнения (281) введем отношение

$$\left(\frac{D_a}{D_e} \right)^2 = \frac{1,9 \sqrt{k}}{(n_s^*)^2 m},$$

то получим:

$$h_{N_{sr}} = 8,93 \cdot 10^5 \frac{\varrho}{(n_s^*)^2 m^{3/2}} H_m. \quad (316)$$

Видно, что при данном n_s потеря от бокового трения колеса в процентном отношении зависит только от m . У турбин (вследствие ускоренного течения в рабочем колесе) m можно делать максимально около 1,1; если хотят достигнуть $n_s = 75$, соответствующее $n_s^* = 0,256$, надо учесть для воды среднее число Рейнольдса и обычную температуру ($\varrho \sim 1,1 \cdot 10^{-9}$):

$$h_{N_{sr}} = 1,17 \cdot 10^{-2} \cdot H_m$$

у турбины при полном открытии не нужно дальше уменьшать n_s , так, как будет видно из гл. XI, для этого мы имеем в распоряжении средство в виде парциальных турбин. Для насосов это неприменимо; здесь поэтому надо попытаться достичь меньшего n_s . Так как, с другой стороны, нельзя применять такую большую величину m , как у турбины, то сразу видно, что придется считаться с большими величинами бокового трения колеса. Они могут в конце концов возрастать в порядке величины потерь преобразования в направляющем аппарате и спирали. При этом m действует на обе потери в противоположном направлении; таким образом есть оптимальное m , которое сводит к минимуму сумму бокового трения колеса и потерь преобразования. Его легко определить. В уравнении (308)

мы можем откинуть член k/m , который в тихоходных машинах очень мал по сравнению с 1; следовательно, можно написать:

$$\frac{h_{lv} + h_{Nsr}}{H_m} = \lambda_{lv} \frac{m}{2} + 8,93 \cdot 10^5 \frac{q}{(n_s^*)^2 m^{3/2}} \quad (317)$$

Частная производная по m приравненная нулю, дает:

$$\frac{\lambda_{lv}}{2} - 2,23 \cdot 10^6 \frac{q}{(n_s^*)^2 m^{3/2}} = 0, \quad (318)$$

отсюда

$$m \approx 80 \left(\frac{q}{\lambda_{lv}} \right)^{2/3} \frac{1}{(n_s^*)^2} \quad (319)$$

Если мы это подставим в уравнение (317), то получается:

$$\left(\frac{h_{lv} + h_{Nsr}}{H_m} \right)_{\min} \approx 55 \left(\frac{\lambda_{lv} - q^2}{(n_s^*)^4} \right)^{1/2} \quad (320)$$

Таким образом для воды со средней $q = 1,1 \cdot 10^{-9}$, далее с $\lambda_{lv} = 0,35$ получается:

$$m \approx \frac{0,3}{(n_s^*)^{4/3}} \quad (321)$$

Это дало бы для $n_s^* \sim 0,2$ ($n_s = 60$).

$$m = 0,74$$

и

$$\frac{h_{lv} + h_{Nsr}}{H_m} \approx 0,2.$$

Вычисления совершенно не принимают во внимание потери рабочего колеса. В общем необходимо применять меньшее m для того, чтобы сделать незначительным замедление в рабочем колесе. Если, благодаря этому и увеличится $h_{lv} + h_{Nsr}$, то все-таки общая сумма $h_{lv} + h_{Nsr} + h_{rc}$ будет меньше, чем при большей величине m . Применять вышеприведенные формулы также к турбинам не имеет смысла, так как h_i и h_r здесь — величины одинакового порядка и обе изменяются с m в противоположном смысле.

Таким образом с уменьшением n_s надо всегда считаться с большими потерями бокового трения колеса. У насосов это ведет в конце концов к тому, что делят напор, т. е. останавливаются на определенном n_s для колеса и дальше понижают коэффициент быстроходности всей машины включением друг за другом нескольких ступеней. Из уравнения (281) имеем:

$$n_{s \text{ машины}} = \frac{1}{i^{1/2}} n_{s \text{ колеса}}, \quad (322)$$

де i — число колес, поставленных друг за другом. Надо только иметь в виду, что благодаря установке колес одного за другим возникают дополнительные потери, именно $\zeta_{\text{в}}$, так как в направляющем аппарате каждой ступени надо повернуть течение, направленное наружу, снова внутрь и подвести к следующей ступени. Устроить эти поворачивающие аппараты так, чтобы сумма потерь трения и преобразования была минимальной, является главной задачей многоступенчатого насоса высокого давления. У многоступенчатых насосов эта задача очень затрудняется необходимостью выдержать определенное расстояние между подшипниками вала при большом количестве колес, принимая при этом во внимание допустимое число оборотов.

Поэтому неудивительно, что насосы высокого давления со многими ступенями (насосы с 10 ступенями для питания котлов при n , каждого колеса ≈ 45 , $Q \approx 251$ л/сек, $H_n \approx 1000$ м) показывают к. п. д. только 65%.

Для диагональных и осевых колес формула (316) уже непригодна. Стенки колеса, дающие потерю на трение, здесь уже не чисто радиальны, а частично или совершенно вытянуты конусообразно или цилиндрически. Так как окружные скорости одновременно пропорционально сильно увеличиваются, то диагональные и осевые колеса имеют значительно большее боковое трение колеса по сравнению с формулой (316). У осевых колес это привело к тому, что отказались от внешнего обода колеса. Благодаря этому экономят не только трение длинного цилиндра в окружающей водяной подушке, но уменьшают также трение в самом рабочем колесе, так как вместо большой относительной скорости на окружности цилиндра в области рабочего колеса появляется меньшая абсолютная скорость. Во всяком случае здесь увеличиваются потери зазора, но в общем получается выгода.

η) Потери через зазоры. С избыточным давлением в колесе изменяется т. е. повышается или падает также избыточное давление в зазоре. Однако оно для всех колес с $\frac{D_a}{D_e} > 1$ меньше, чем избыточное давление колеса. Жидкость между колесом и камерой приводится колесом во вращение; это вращение, как известно из опыта, происходит с половинной угловой скоростью колеса (слой около стенки колеса имеет скорость его окружности, слой около стенки камеры — неподвижен). Благодаря этому в пространстве между колесом и камерой центробежное давление неодинаково и разность их в двух точках определяется величиной $\frac{1}{4} \Delta \left(\frac{u^2}{2g} \right)$ (фиг. 111). Здесь распределение давления между колесом и камерой происходит по параболоиду вращения. Зазор у обода, а именно на стороне всасывания колеса, имеет диаметр $D_e \approx D_a$; таким образом избыточное давление в зазоре меньше на величину:

$$R = \frac{1}{4} \frac{u_a^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2 \right] = \frac{1}{8} \frac{1 - \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2}{m} H_m, \quad (323)$$

чем избыточное давление в колесе, т. е. там будет:

$$\frac{\Delta p_{sp}}{\gamma} = \left[1 - \frac{m}{2} - \frac{1}{8} \frac{1 - \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2}{m} \right] H_m,$$

при этом мы пользуемся только упрощенной формулой (304b) и не принимаем во внимание разницу давления в области D_e . Это избыточное давление вызывает в зазоре скорость протекания:

$$c_{sp} = \mu_{sp} \sqrt{2g \frac{\Delta p_{sp}}{\gamma}} \approx \mu_{sp} \sqrt{2g H_m \left(1 - \frac{m}{4} - \frac{1}{16} \frac{1 - \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2}{m} \right)},$$

так что потеря через зазор, равна

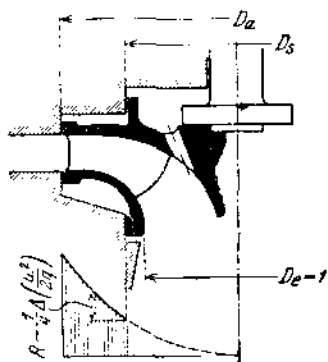
$$Q_{sp} \approx \mu_{sp} D_e s \pi c_{sp},$$

(s — ширина зазора).

Это означает в долях от всего протекающего количества воды потерю в размере

$$\frac{Q_{sp}}{Q} = \frac{\mu_{sp} D_e s \pi c_{sp}}{D_e^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{2g k H_m}} = 4 \frac{s}{D_e} \frac{\mu_{sp}}{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{m}{4} - \frac{1}{16} \frac{1 - \left(\frac{D_e}{D_a} \right)^2}{m} \right) \quad (324)$$

Часто на противоположной стороне колеса устраивается обод с одинаковым диаметром, а пространство внутри его сообщается посред-



Фиг. 111. Ротационный параболоид.

ством отверстий в диске колеса или особой проводкой со всасывающим пространством (областью D_e). Благодаря этому достигается более или менее совершенное уравнивание осевого давления (фиг. 111). В этом случае потеря через зазор достигает приблизительно двойной величины, данной уравнением (324) (именно постольку, поскольку можно пренебречь тем обстоятельством, что давление внутри второго зазора неравно давлению во всасывающем пространстве, а также не свободно от разности давлений, вызываемых центробежной силой).

Уравнение (324) благодаря подстановке

$$\frac{D_e^2}{D_a^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{(n_s^*)^2}{1,9 \sqrt{k}}$$

переходит в

$$\frac{Q_{sp}}{Q} = 4 \frac{s}{D} \frac{\mu_{sp}}{\sqrt{k}} \left[1 - \frac{1}{4} \left(m - \frac{1}{4m} \right) + \frac{1}{30,4} \frac{(n_s^*)^2}{\sqrt{k}} \right],$$

или, если ввести среднюю величину k из уравнения (302) в

$$\frac{Q_{sp}}{Q} \approx 10,7 \frac{s}{D} \frac{\mu_{sp}}{(n_s^*)^2} \left[1 - \frac{1}{4} \left(m - \frac{1}{4m} \right) + \frac{1}{11,4} \frac{(n_s^*)^2}{\sqrt{k}} \right]. \quad (325)$$

Видно, что при одинаковых n_s^* потеря через зазор, главным образом, зависит только от m и что есть такая величина m , при которой потеря достигает максимума. Это m получается из отношения

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m^2} = 0; \text{ откуда } m = \frac{1}{2}.$$

Если мы это подставим в (325), то получается:

$$\frac{Q_{\text{з.р.}}}{Q} = 10,7 \frac{s}{D} \frac{\mu_{\text{з.р.}}}{(n_s^*)^{1/2}} \left(1 + \frac{(n_s^*)^{1/2}}{11,4} \right), \quad (326)$$

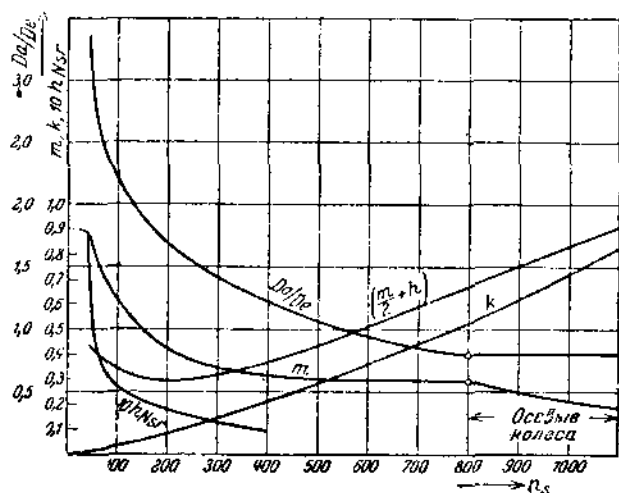
вследствие неблагоприятных условий протекания $\mu_{\text{з.р.}}$ всегда $\ll 1$. Посредством особых конструктивных мероприятий ее можно сделать очень низкой; в среднем она определяется 0,45. $\frac{s}{D}$ не следует геометрическому подобию при машинах различной величины. В то время как она при $D_s = 0,2$ м при тщательной отделке едва может быть доведена до величины ниже 0,001 ($s = 0,2$ мм), при больших конструкциях ($D_s > 2$ м) она уменьшается при известных обстоятельствах до 0,0005 ($s = 1$ мм). В среднем ее можно принять равной 0,00075. Для $n_s^* = 0,25$ ($n_s = 74$), тогда получается $\frac{Q_{\text{з.р.}}}{Q} = 0,009$ для одного зазора и 0,018 при двух зазорах. При незначительности этой величины мы приходим к заключению, что при выборе m , нет необходимости заботиться о потерях через зазор; мы замечаем, что на эту потерю скорее можно повлиять особыми конструктивными и производственными мероприятиями. Для осевых колес вышеприведенное рассуждение неприемлемо вследствие отпадения парабола вращения; также у диагональных колес мы имеем уже другие отношения, однако все эти колеса обладают таким единичным расходом, что не стоит исследовать влияние m на потерю через зазоры.

е) Изменение величин $\frac{D_s}{D_s^*}$, m и k для типов рабочих колес

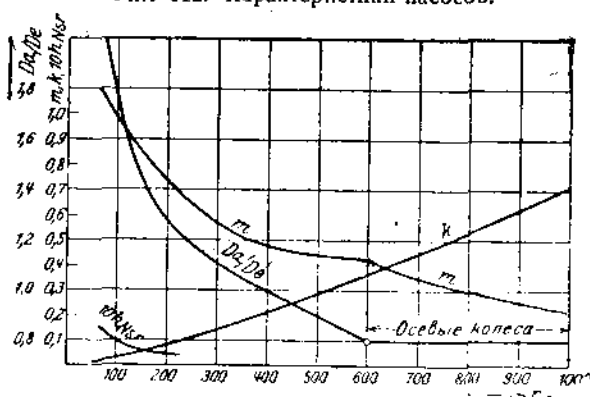
В предыдущих разделах подробно говорилось о влиянии вышеуказанных величин на форму типа и его потери. При этом соответственно выбирались цифровые примеры уже испытанных на деле конструкций. Вычисленные при этом потери относятся к большим машинам с большой мощностью. Небольшие машины с малой мощностью и с соответственно меньшим рейнольдсовым числом имеют большие потери.

Рассуждения, как они приведены в предыдущем разделе, вместе с опытами над моделями для турбин привели к довольно твердо установленному ряду средних форм для типов различных быстроходных рабочих колес. В постройке насосы сильно отличаются друг от друга величиной n_s . На фиг. 112 и 113 изображены значения величин для насосов или турбин, выбранные сообразно руководящим указаниям предыдущих разделов согласно всему, что о них уже говорилось. Они должны рассматриваться только как

средние числа для проектирования рабочих колес. В диаграмме насоса кроме D_a/D_e , m и k изображены еще скоростная энергия у выхода колеса (предполагая $c_{m2} = c_e$) и боковое трение колеса; в диаграмме турбины — только боковое трение колеса. Оно вычис-



Фиг. 112. Характеристики насосов.



Фиг. 113. Характеристики турбин.

лено по уравнению (315), которое, однако, как уже говорилось, применимо только для величины $\frac{D_a}{D_e} \gg 1$. Ниже величины $\frac{D_a}{D_e} = 1,2$ боковое трение колеса не показано (оно уже не имеет никакого значения для соответствующих колес).

42. Работа различных типов колес при изменяющемся режиме

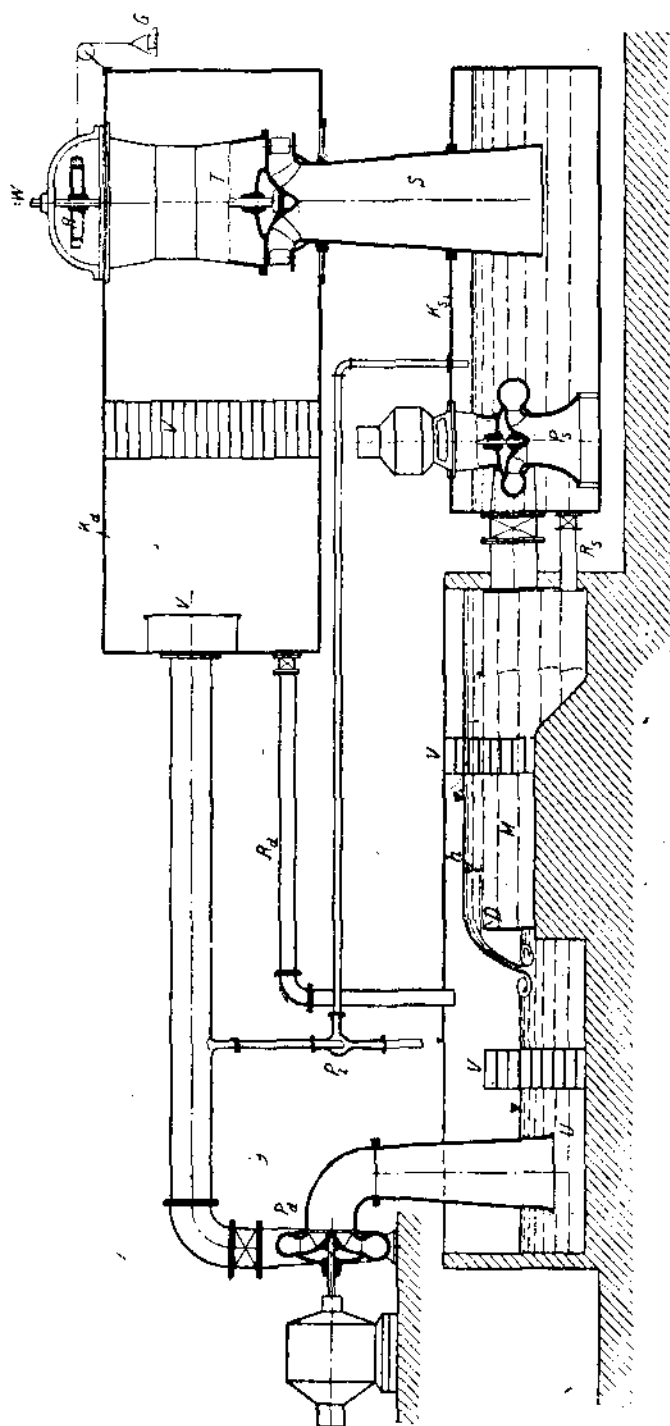
а) Опыты с моделями и приемочные испытания

Надо принципиально отметить, что приемка на месте никогда не может претендовать на точность, которая достигается в специальной лаборатории; трудности здесь встречаются как со стороны

измерения количества воды, так и мощности. Последние могут быть проверены с гораздо большей точностью в лаборатории. Конструирующая практика, будучи заинтересована дальнейшим развитием машин, не может отказаться от пробных исследований, поэтому в производстве насосов и турбин получили широкое распространение испытания в специальных лабораториях. Насосы, которые в нормальном изготовлении гораздо чаще, чем турбины, бывают небольшого размера и небольшой мощности, могут часто подвергаться там исследованию, выполненному непосредственно для сдачи. Если имеющаяся в распоряжении мощность недостаточна, то делают пробы с пониженным числом оборотов и тем самым со значительно уменьшенной мощностью. Турбины очень редко могут быть испытываемы в лаборатории в настоящую величину. Вместо этого производится опыт с моделью, при котором и др. существенные части машины (спираль, направляющий аппарат, всасывающая труба, иногда только колесо и всасывающая труба, ср. § 35) воспроизводятся в геометрически уменьшенном виде и испытываются при подобных состояниях работы. $\left(\frac{n}{\sqrt{H}} \text{ или } \frac{Q}{\sqrt{H}} = \text{const.}\right)$ В дальнейшем схематически описывается оборудование таких лабораторий¹.

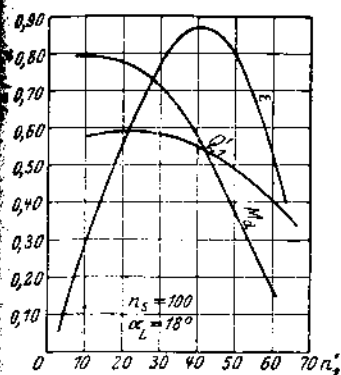
Фиг. 111 показывает схему лаборатории для испытания моделей турбин. Турбина T показана там с вертикальным валом и прямой конусообразной всасывающей трубой. Турбина помещена в закрытом напорном кожухе K_a . Ее вал W выходит из сальника и поддерживает тормозной шкив B , на котором приспособлен тормоз Прони. Механическая мощность переходит в тормозе в теплоту и измеряется произведением момента торможения и числом оборотов по формуле $N = \frac{M \cdot n}{716,2}$. Момент определяется посредством груза g и длины плеча рычага, укрепленного на тормозе. Напорный бак находится под напором, создаваемым насосом P_a , который всасывает воду из приемника и нагнетает ее в турбину. В напорном баке предусмотрены приспособления, успокаивающие и выпрямляющие течения. От турбины вода течет через всасывающую трубу S в бак всасывающей стороны K_s , в котором посредством отсасывания воды водяным насосом P_s и отсасывания воздуха воздушным насосом P_v над свободной поверхностью может поддерживаться определенный вакуум. Насос P_s подает воду в измерительный канал M , где она успокаивается, количество ее определится посредством водослива путем измерения высоты h над ребром D . За водосливом вода попадает в приемник U , откуда циркуляция начинается снова. Путем регулирования работы всасывающего и нагнетательного насосов, изменением числа оборотов их приводных двигателей или посредством дросселирования можно установить производительность насосов при определенной полной высоте напора (слагающейся из высот нагнетания и всасывания).

¹ Ср. „ZdVdI“ № 36, 1920, Институт для водяных машин при Высшей технической школе в Карлсруэ.

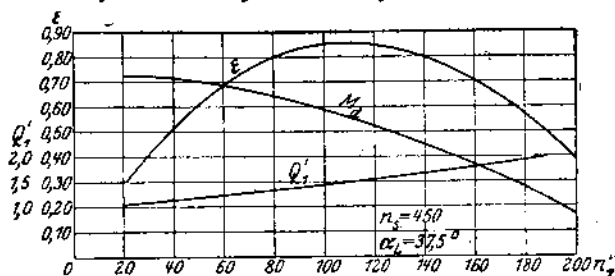


Фиг. 114. Схема установки для испытания моделей турбин.

Так как нельзя избежать небольших колебаний установившегося состояния и, таким образом, также колебаний в притекающей к турбине массе воды, то необходимо автоматически, посредством регулирования давления поддерживать неизменный напор в напорном бассейне-котле и вакуум во всасывающем. Это регулирование достигается посредством добавочных циркуляций путем возвращения воды по трубопроводу R_d из напорного бака K_d в приемник U или по трубопроводу R_s из измерительного канала M в бак всасывающей стороны K_s . Эти побочные течения регулируются при помощи дросселя при падающем давлении в K_d или возрастающем в K_s . Подобное оборудование используется следующим образом.



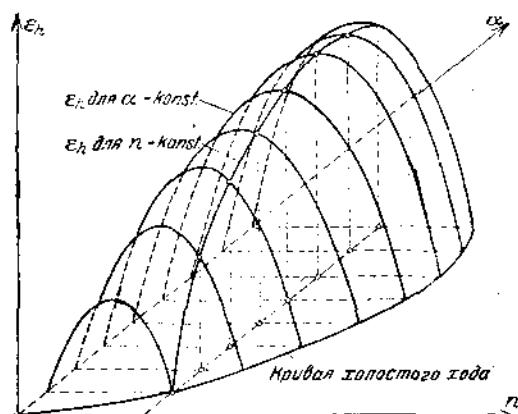
Фиг. 115. Диаграмма для тихоходного колеса



Фиг. 116. Диаграмма для быстроходного колеса

Устанавливают ряд опытов при постоянном напорном и всасывающем давлении, причем поддерживают постоянное определенное расположение направляющих лопаток и число оборотов изменяют между нулем и тем числом, при котором уже никакой момент не может быть измеренным (постоянный момент тормоза и холостой ход или число оборотов). Тогда мы получаем диаграммы, изображенные на фиг. 115 и 116, из которых фиг. 115 относится к тихоходным машинам, фиг. 116 — к быстроходным. Основная разница между обеими заключается в том, что у тихоходных машин количество воды убывает при повышении числа оборотов, в то время как у быстроходных — увеличивается. Если мы проведем ряд опытов для достаточно большого числа различных положений направляющего аппарата, то можно составить две пространственные диаграммы, состоящие из поверхности к. п. д. $\epsilon = f_s(\alpha, n)$ и поверхности расходов воды $Q = f_a(\alpha, n)$. Обе эти поверхности, каждая из которых составлена из отдельных диаграмм после ряда опытов, проведенных при определенных расположениях направляющих лопаток, изображены на фиг. 117 и 118. Посредством графического исключения α из обеих получается одна плоскостная диаграмма $\epsilon = f(Q, n)$, которая изображает в плоскости $Q-n$ кривые постоянного к. п. д. Кроме того, в эту диаграмму можно вчертить кривые постоянного угла направляющего колеса, постоянной мощности и постоянного удельного числа оборотов. Для удобства пользования диаграмму пересчитывают на напор 1

и диаметр $D = 1$. Таким образом из опыта мы получаем совершенно такую же диаграмму, какую имели в § 34 на фиг. 89 — 91 как результат вычислений. Здесь на фиг. 119 можно нанести еще кривые N'_1 и n . Из диаграмм $Q-n$ можно получить кривые, изображенные на фиг. 120, сечениями по $n = \text{const}$ ¹.

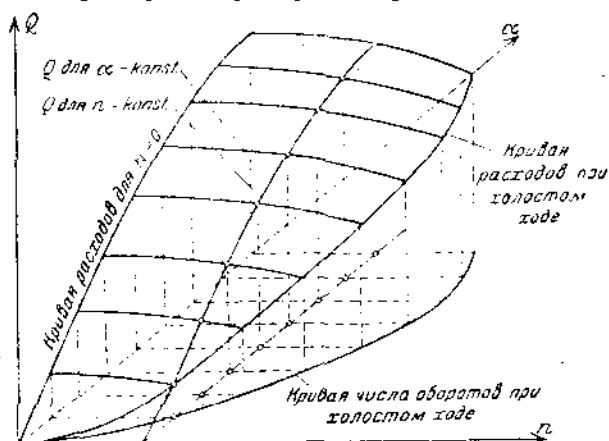


Фиг. 117. Пространственная диаграмма коэффициента полезного действия турбины.

леса, которые при данном постоянном n каждый раз давали бы лучший к. п. д. (ср. фиг. 120).

По новым опытам величина модельного колеса может быть очень незначительной. Так, например, лаборатория гидравлических машин Технического высшего училища в Карлсруэ, которая устроена по описанной схеме (фиг. 114), произвела опыты с моделью турбины Каплана для верхнерейнской гидростанции Рибург-Шверштадт в масштабе около 1:30. Для больших машин с колесами диаметром 4 м модельные колеса имели диаметр 230 мм. Уже с этими колесами при применении прямой всасывающей трубы для $H=5$ м и $N=10$ л. с. мощности, установлен максимальный к. п. д. в 87%.

У большой машины с закругленными всасывающими трубами при напоре 10 м и мощности 40000 л. с. ожидают к. п. д. свыше 90%.



Фиг. 118. Пространственная диаграмма расходов турбины.

¹ По данным фирмы I. M. Voith — Heidenheim в Бремене.

На практике при приемных испытаниях, конечно, не приходится производить опыты в таком объеме. Там интересуются кривой к. п. д. для постоянного числа оборотов и постоянного напора. Эти кривые гарантируются на основании опытов с моделью и на основании кривых к. п. д., полученных из этих опытов особых режимов работы практики и контролируются при приемных испытаниях (ср. фиг. 120).

Для свободоструйных турбин, о которых здесь надо упомянуть, оборудование для опытов, конечно, упрощается, так как здесь отсутствует всасывание. Конструкция сопла свободоструйной турбины, которая заменяет направляющий аппарат полной турбины, присоединяется посредством трубопровода к напорному баку K_a , и вода с колеса поступает непосредственно в измерительный канал M .

Для испытаний насосов пользуются только приемным и измерительным каналом, нужно только провести напорную трубу насоса в успокаивающий аппарат V . Большую высоту всасывания можно получить посредством дросселирования всасывающего трубопровода, большую напорную высоту — тем же способом на нагнетательной трубе. При этом надо следить, чтобы аппараты для дросселирования были достаточно удалены от насоса и помещались центрально в трубопроводе для того, чтобы не нарушался непосредственный приток и уход воды около насоса.

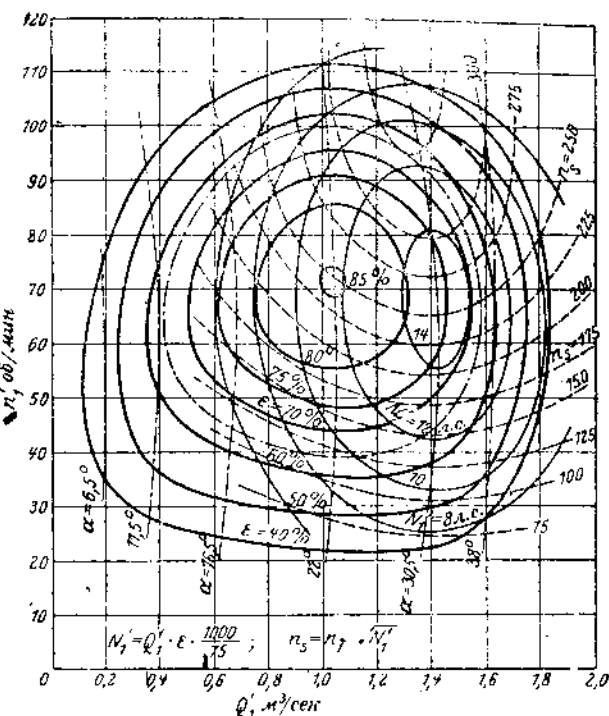


Рис. 119. Диаграмма Q - n турбины.

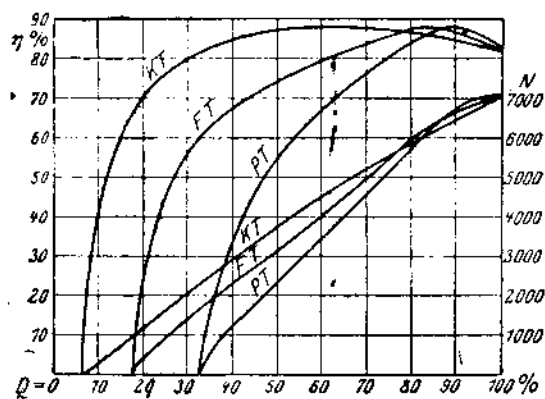
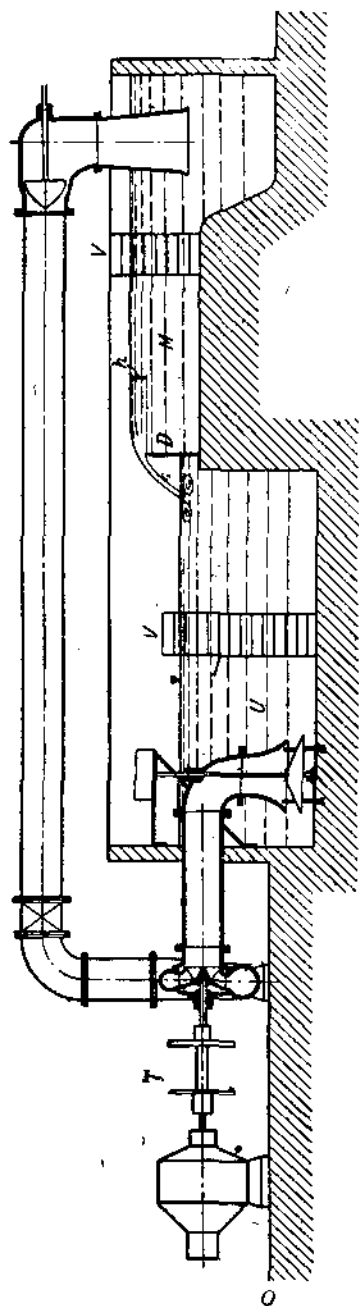


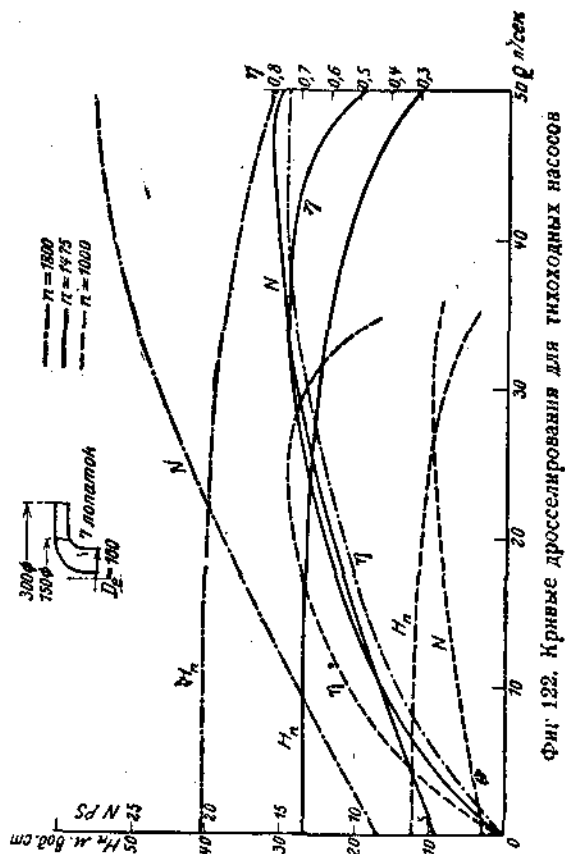
Рис. 120. Кривые к. п. д., мощности при постоянном числе оборотов: KT — турбина Каплана; FT — турбина Френсиса; PT — пропеллерная турбина.

Измерение мощности лучше всего производится посредством установки вращающегося динамометра (Амслера или Феттингера) между приводным двигателем и насосом. Фиг. 121 изображает схему такого особого оборудования для насоса.

Ряд опытов с насосом может быть также проведен, как у турбин. Но насосы только в очень редких случаях устраиваются с поворотными лопатками. Почти всегда удовлетворяются дроссельным регулированием при приведении в движение двигателем трехфазного тока, т. е., следовательно, при постоянном числе оборотов. Соответственно этому и приемное испытание при постоянном числе оборотов устраивается так, что меняют дросселированием режим работы в нагнетательной и всасывающей трубах и измеряют рабочий расход воды или

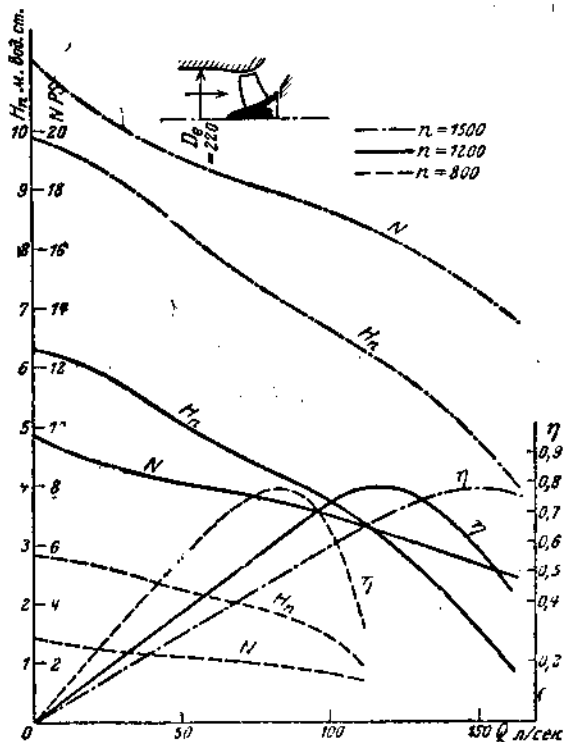


Фиг. 121. Схема установки для испытания насосов.

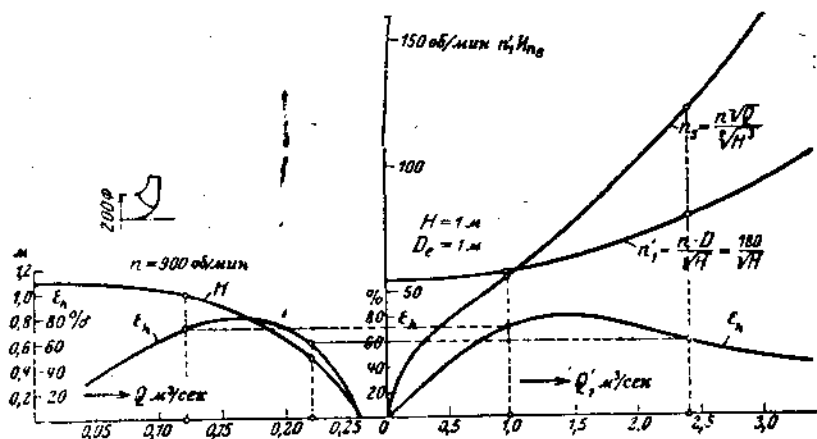


Фиг. 122. Кривые дросселирования для осевых насосов

получающуюся разность энергии течения между всасывающим и нагнетательным патрубком. Подобный опыт устраивают при различных постоянных числах оборотов, в особенности, для того, чтобы установить, не получается ли разрыва струи в насосе при каком-нибудь встречающемся на практике числе оборотов. Поскольку этого не случается и режимы работы при различном числе оборотов сходны, то кривые $Q-H$ находятся между собой в отношении $H \propto Q^2$. Таким образом кривые подобных рабочих состояний суть параболы второй степени. Гидравлическая потребная мощность, за вычетом трения подшипника и сальника, имеет зависимость третьей степени от числа оборотов или, если мы возьмем кривые $N-Q$ с диаграммы, то они будут подобны параболе третьей степени. Фиг. 122 и 123 изображают составленную таким образом характеристику насосов, а именно фиг. 122 — тихоходного насоса и фиг. 123 — быстроходного.

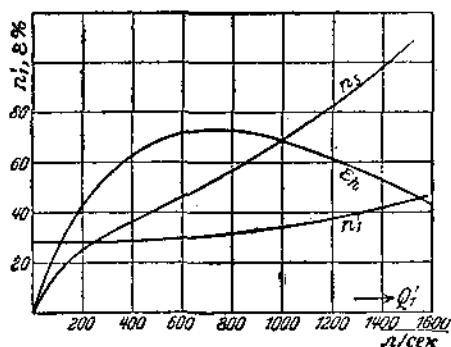


Фиг. 123. Кривые дросселирования для быстроходных насосов

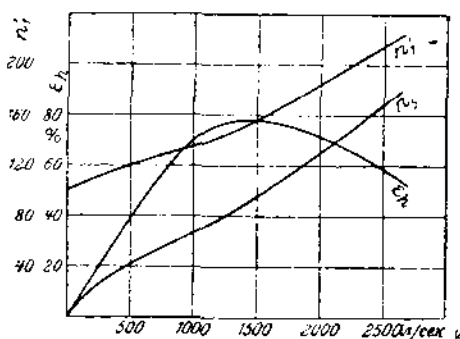


Фиг. 124. Зависимость между «единичной» диаграммой и диаграммой для постоянного числа оборотов.

Вместо того чтобы чертить кривые для различных чисел оборотов, можно ограничиться одной диаграммой, поскольку при одинаковом к. п. д. и одинаковом отношении Q/n мы получим подобное состояние работы. Для этого вычисляют из какой-нибудь диаграммы для постоянного n единичные значения совершенно так же, как у турбины, приводя согласно формулам $n_1' = \frac{n \cdot D_e}{\sqrt{H_n}}$; $Q_1' = \frac{Q}{D_e^2 \sqrt{H_n}}$ к относительному диаметру $D_e = 1$ и полезной работе при $H_n = 1$. Тогда находят зависимость единичного расхода Q' , n_1' :



Фиг. 125. „Единичная“ диаграмма для тихоходных насосов



Фиг. 126. „Единичная“ диаграмма для быстроходных насосов.

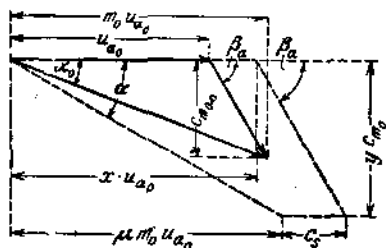
и к. п. д. ϵ_n . Было бы полезно внести [также в диаграмму еще коэффициент быстроходности согласно формуле $n_s = \frac{n \sqrt{Q \cdot H_n}}{H_n \sqrt{H_n}} = \frac{n \sqrt{Q}}{\sqrt{H_n^3}}$]

Этим способом, который наглядно изображается на фиг. 124, получились из фиг. 122 и фиг. 123 обе фиг. 125 и 126. При этом в основу было положено, что кривые фиг. 122 с колесом диаметром 100 мм, получены так же, как на фиг. 123 с колесом 220 мм диаметра. Единичные диаграммы фиг. 125 и 126 могли бы быть использованы для проектирования способом, указанным в § 37. Кроме того, они также показывают, в какой области и с каким к. п. д. при постоянной высоте подачи можно подавать различные массы воды в зависимости от изменения числа оборотов (об этом см. также конец § 421).

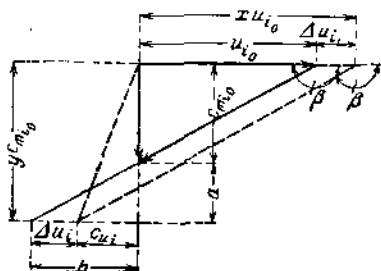
б) Данные опытов, не объясняемые основной теорией. Уже в § 34 указывалось, что основная теория только до тех пор дает правильные данные, пока в машине имеется достаточно интенсивное протекание.

С этой предпосылкой совершенно не согласуется режим работы центробежного насоса, при котором жидкость совершенно не перемещается, или потому, что закрыта нагнетательная или всасывающая задвижки, и рабочее колесо находится в периоде разгона, или потому, что высота подачи, которую надо преодолеть, имеет как раз величину, которую насос может производить при нулевой подаче (состояние равновесия). Состояния, близкие к ну-

левой подачи, тоже значительно уклоняются от основной теории. Таким образом три важных для центробежного насоса величины, вообще говоря, не могут быть определены при помощи основной теории, практически же не могут быть вычислены с достаточной надежностью, это: высота подачи при нулевом расходе (давление при закрытой заслонке), расход мощности при нулевой подаче и, наконец, изменение высоты подачи при расходах, близких к нулевым. Здесь мы не будем рассматривать точного потребления мощности рабочим колесом, которое тоже уклоняется от вычисленного по основной теории. В отношении мощности при нулевом расходе обращает на себя внимание то, что она



Фиг. 127. Треугольник входных скоростей у турбины при нормальном и отклоненном режиме работы.



Фиг. 128. Диаграмма выходных скоростей у турбины при нормальном и отклоненном режиме работы.

меньше у тихоходных машин, чем у быстроходных. В то время, как у тихоходных машин она составляет около 30% от мощности при наилучшем к. п. д., у быстроходных она поднимается свыше 100% от той же мощности. Относительно высоты подачи особенно интересен вопрос, однообразно ли она падает с увеличением расхода от нуля до данного рабочего количества или достигает сначала максимума (который, таким образом, лежит выше, чем давление при закрытой заслонке) и только потом убывает.

Встречающиеся у турбин отклонения от предпосылок и выводов основной теории не так значительны, как у центробежных насосов. Здесь никогда не бывает состояния работы с нулевым расходом: крайнее состояние работы — это холостой ход турбины при постоянном напоре и постоянном числе оборотов, который может сохраняться только при определенном расходе. Этому рабочему количеству воды при холостом ходе соответствует потребление энергии, которое вследствие постоянного напора пропорционально расходу, причем для тихоходных машин меньше и быстроходных больше, однако в среднем значительно меньше, чем потребление мощности центробежных насосов при нулевой подаче; расход энергии холостого хода у турбин может быть в значительной части объяснен понятиями основной теории. Это мы сейчас и сделаем. Для этого мы составляем для напора, удара при входе и потерь во всасывающей трубе для общих режимов работы математические выражения, которые в основном являются не чем иным, как преобразованием формул, зависящих от Q и n , данных для этих ве-

личин в § 34. Новые формулы, однако, заключают в себе те величины, которые дают возможность тотчас различать разные типы.

■ Мы исходим из нормального состояния работы, по которому типы могут различаться в отношении их быстроходности; это характеризуется отношениями:

$$\left. \begin{aligned} H_{m_0} &= \frac{m_0 \cdot u_{a_0}^2}{g}; & \frac{c_e^2}{2g} &= \frac{c_i^2}{2g} = k_0 H_{m_0}; & Q &= Q_0; & \frac{c_s^2}{2g} &= 0, \\ n_s^* &= \frac{1,38}{\frac{D}{D_s} \sqrt{m_0}} \sqrt[4]{k_0} \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

Отклоняющийся от этого режим работы мы характеризуем посредством

$$\left. \begin{aligned} u_a &= x \cdot u_{a_0}; & k &= y^2 \cdot k_0; & Q &= y \cdot Q_0; & m &= \mu \cdot m_0, \\ c_{ua} &= \mu \cdot m_0 \cdot u_{a_0}; & H_m &= \mu \frac{m_0 \cdot u_{a_0}^2}{g} \end{aligned} \right\} \quad (328)$$

На фиг. 127 изображен треугольник входных скоростей для нормального режима работы при u_{a_0} , c_{ma_0} , $c_{ua_0} = m_0 u_{a_0}$. Для того чтобы освободиться от несущественных факторов, мы соответственно среднему отношению примем $c_{ma} = c_{me} = c_{mi}$, как уже неоднократно практиковалось в § 40. Другое состояние работы, для которого все отклонения от нормальных величин u_{a_0} , m_0 , k_0 взяты положительными, изображено на чертеже пунктиром. Прежде всего получается для углов:

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = \frac{m_0 \cdot u_{a_0}}{c_{m_0}} = \frac{m_0 \sqrt{\frac{g H_{m_0}}{m_0}}}{\sqrt{2 g k_1 \cdot H_{m_0}}} = \sqrt{\frac{m_0}{2 k_0}}, \quad (329)$$

$$\operatorname{ctg} \beta_a = \frac{(m_0 - 1) u_{a_0}}{c_{m_0}} = \frac{m_0 - 1}{\sqrt{2 m_0 k_0}}. \quad (330)$$

Мы сначала рассмотрим турбины с неподвижными лопатками рабочего колеса, тогда β_a является постоянной; этому соответствует пункт на чертеже. Напротив, если α меняется в соответствии с работой, то

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\mu m_0 u_{a_0}}{y c_{m_{a_0}}} = \frac{\mu}{y} \operatorname{ctg} \alpha_0. \quad (331)$$

Теперь можно вычислить c_s . Оно равняется:

$$\begin{aligned} c_s &= u_a + c_m \cdot \operatorname{ctg} \beta - c_{ua} = x \cdot u_{a_0} + y \cdot c_{m_0} \frac{m_0 - 1}{\sqrt{2 m_0 k_0}} - \mu \cdot m_0 \cdot u_{a_0} = \\ &= \frac{x - y + m_0 (y - \mu)}{\sqrt{m_0}} \sqrt{g \cdot H_{m_0}}. \end{aligned}$$

Таким образом потеря от удара получается

$$\frac{c_s^2}{2g} = \frac{x - y + m_0 (y - \mu^2)}{2 m_0} H_{m_0} \quad (332)$$

На фиг. 128 изображена нормальная (прямоугольная, без момента скорости) диаграмма выхода и другая для большего u и большего c_m начерчена пунктиром. Составляющая c_m увеличилась до $c_{mi} = y \sqrt{2gk_0 H_{m_0}}$, кроме того, получилась добавочная составляющая c_u :

$$|c_{ui}| = |b - \Delta u_i|; \quad (333)$$

но $b : a = u_{ia} : c_{mi}$, следовательно,

$$b = a \frac{u_{ia}}{c_{mi}} = \frac{y \cdot c_{mi} - c_{mi}}{c_{mi}} u_{ia}$$

или $b = (y - 1) \cdot u_{ia}$, с другой стороны,

$$\Delta u_i = (x - 1) \cdot u_{ia}$$

следовательно, $|c_{ui}| = |(y - x) \cdot u_{ia}|$

или c_{ui} направлено противоположно u , если $(y - x)$ положительно

$$c_{ui} = (y - x) 0,8 \frac{D_a}{D_s} u_{ia} = 0,8 \frac{y - x}{\frac{D_a}{D_s} \sqrt{\frac{2}{m_0}}} \sqrt{g H_{m_0}} \quad (235)$$

В заключение увеличение энергии выхода получается:

$$\frac{c_i^2}{2g} = \left[y^2 k_0 + 0,32 \frac{(y - x)^2}{\left(\frac{D_a}{D_s} \right)^2 m_0} \right] H_{m_0} \quad (336)$$

Второй член этой энергии, который относится к окружающей составляющей, почти совершенно теряется. Первый член превращается снова в давление тем же (приблизительно) к. п. д., как и при нормальном состоянии работы. Таким образом потеря во всасывающей трубе может быть выражена посредством:

$$V_s = \left(\zeta_a y^2 k_0 + 0,32 \frac{(y - x)^2}{\left(\frac{D_a}{D_s} \right)^2 m_0} \right) H_{m_0} \quad (337)$$

Это выражение может быть преобразовано при помощи уравнения (281) в

$$V_s = \left(\zeta_a \cdot y^2 k_0 + 0,168 \frac{(y - x)^2 (n_s^*)^2}{\sqrt{k_0}} \right) H_{m_0} \quad (338)$$

или также, если мы из уравнения (302) введем для k_0 среднюю величину, то получим

$$V_s = 0,14 \cdot (n_s^*)^{1/2} \cdot \{ \zeta_a y^2 + 3,2 (y - x)^2 \} H_{m_0} \quad (339)$$

Если мы теперь обозначим потерю во всасывающей трубе при нормальном состоянии работы посредством V_{s_0} и вспомним что

$$V_{s_0} = \zeta_a k_0 \cdot H_{m_0} = 0,14 \cdot \zeta_a (n_s^*)^{1/2} H_{m_0} \quad (340)$$

то это можно написать в виде:

$$V_s = y^2 \cdot V_{s_0} + 0,45 (y - x)^2 \cdot (n_s^*)^{1/4} \cdot H_{m_0}. \quad (341)$$

Прежде всего видно, что при одинаковом в процентном отношении изменении режима работы (одинаковом x и y) потеря во всасывающей трубе распадается на две части, из которых первая при одинаковой в процентном отношении нагрузке дает для всех типов одинаковое в процентном отношении изменение, в то время как другая сильно меняется с увеличением быстроходности. Это происходит оттого, что быстроходные типы работают с соответственно большей окружной скоростью и дополнительно возникающие составляющие c_{u_i} при одинаковом изменении впуска являются тем большими, чем больше окружная скорость [уравнение (334)]. Таким образом мы здесь находим основную причину того, что быстроходные машины с неповорачивающимися лопатками рабочего колеса требуют значительно большего расхода для холостого хода и в связи с этим кривая их к. п. д. убывает значительно отвеснее, чем кривая у тихоходных машин с неподвижными лопатками рабочего колеса.

Мы нуждаемся еще в одном выражении для напора H_m изменяющегося режима работы (полезный напор турбины) — это:

$$H_m = \frac{\omega}{g} \Delta (c_u r) = \frac{\omega}{g} (m u_{a_0} r_a - c_{u_i} \cdot r_i) = \frac{m \cdot u_{a_0} \cdot u_a - c_{u_i} \cdot u_i}{g},$$

здесь надо ввести $c_{u_i} = -(y - x) u_{i_0}$. Получается:

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{\mu \cdot m \cdot x \cdot u_{a_0}^2 + (y - x) \cdot 0,64 \left(\frac{D_s}{D_a} \right)^2 \cdot x \cdot n_a^2}{g} = \\ &= x \left\{ \mu + 0,64 \left(\frac{D_s}{D_a} \right)^2 m_0 \right\} H_{m_0}. \end{aligned} \quad (342a)$$

Если мы здесь снова введем известным образом h_s^* вместо $\left(\frac{D_s}{D_a} \right)^2 m_0$, то получается:

$$H_m = x \{ \mu + 0,9 (y - x) \cdot (n_s^*)^{1/4} \cdot H_{m_0} \}. \quad (342b)$$

Выведенные соотношения мы применим теперь к тому, чтобы выяснить численные значения состояния холостого хода крайне тихоходной и очень быстроходной турбин.

Тихоходная машина с $n_s^* = 0,25$ ($n_s = 74$), как известно из опыта, имеет, при нормальном числе оборотов ($x = 1$), расход воды для холостого хода приблизительно в 10% от расхода при лучшем к. п. д. Отсюда надо вычесть около 1,5% на утечку через зазор, так что расход для холостого хода остается 8,5%. Ход поддерживается посредством H_m , который покрывает потребную мощность на трение подшипника, сальника и стенок колеса. Уравнение (316) дает для бокового трения колеса для нормального расхода Q_0 как

эквивалент напора только определенное $h_{N_{gr}}$. Но, так как мы имеем теперь в распоряжении только 8,5% от Q_0 , то получается:

$$h_{N_{gr}} \text{ для холостого хода} = \frac{8,93 \cdot 10^5}{0,085} \cdot \frac{e}{(n_s^*)^3 m_0^{3/2}}. \quad (343)$$

Это дает для $n_s^* = 0,25$; $e = 1,1 \cdot 10^{-9}$, $m_0 = 1,08$ (фиг. 127):

$$h_{N_{gr}} \text{ для холостого хода} = 0,15 H_{m_0}. \quad (344)$$

На трение подшипника и сальника надо добавить две трети этой величины; так что отношения должны бы соответствовать:

$$H_m \text{ для холостого хода} = 0,25 H_{m_0}. \quad (345)$$

Из уравнения (342) теперь получается

$$\frac{H_m}{H_{m_0}} = 0,25; x = 1; y = 0,085; \quad (346)$$

$$\eta \text{ для холостого хода} = 0,38.$$

Теперь могут быть вычислены потери на удар из уравнения (332), получается:

$$\left(\frac{c_s^2}{2g}\right) \text{ для холостого хода} = 0,16 H_{m_0}. \quad (347)$$

В заключение потери выхода по уравнению (339) с $\zeta = 0,15$

$$\left(\frac{c_t^2}{2g}\right) \text{ для хол. хода} = 0,06 H_{m_0}. \quad (348)$$

Таким образом сумма потерь, вычисленная по основной теории содержит (не принимая во внимание трений в каналах направляющего и рабочего колес):

$$(0,25 + 0,16 + 0,06) H_{m_0} = 0,47 H_{m_0}, \quad (349)$$

тогда как в действительности (если при лучшем к. п. д. $\varepsilon_s = 0,91$) мы имеем в распоряжении около $1,1 H_{m_0}$. Таким образом расходуется дополнительная мощность из суммы

$$N_{дон} = \frac{0,63 \cdot 0,085 \cdot Q_0 \cdot H_{m_0}}{Q_0 H_{m_0}} N_0 = 0,0535 N_0, \quad (350)$$

т. е. от 5 1/2% мощности течения, развивающейся при лучшем к. п. д. Это составляет 3,5-кратную величину бокового трения колеса и само по себе незначительно по сравнению с дополнительным, не объяснимым основной теорией расходом мощности тихоходного насоса при нулевом напоре.

Подобное рассуждение может быть проведено и для быстроходной турбины. Расход воды холостого хода с $y = 0,35$ взят здесь из опыта с колесом турбины Каплана, работавшим как колесо пропеллерной турбины, которое при лучшем к. п. д. имело $n_s = 600$, $m_0 = 0,33$ и $k_0 = 0,22$. Так как потери зазора, боковое трение колеса, подшипника и сальника здесь также незначительны против мощности холостого хода, то их можно не принимать во внимание. Другими словами, мы здесь принимаем

$$H_m \text{ для хол. хода} = 0. \quad (351)$$

У испытанного колеса $\frac{D_a}{D_r} = 0,8$ и $m_0 = 0,33$, поэтому мы принимаем здесь уравнение (342 а) и получаем

$$\mu \text{ для хол. хода} = 1,97. \quad (352)$$

Тогда из уравнения (332) следует:

$$\left(\frac{c_1^2}{2g}\right)_{\text{для хол. хода}} = 0,182 H_{m_0}. \quad (353)$$

Вместо уравнения (339) мы используем уравнение (337) и находим:

$$V_s \text{ для хол. хода} = 0,645 H_{m_0}. \quad (354)$$

Сумма уравнений (353) и (354) дает (при пренебрежении трением в каналах направляющего и рабочего колес)

$$\text{потери при холостом ходе} = 0,827 H, \quad (355)$$

в то время как имеются в распоряжении $\frac{H_{m_0}}{0,87} = 1,15 H_{m_0}$ (лучший $\epsilon_s = 0,87$). Таким образом здесь остается дополнительная мощность:

$$N_{\text{ост}} = \frac{0,323 - 0,35, Q_0 H_{m_0}}{Q_0 H_{m_0}} N_0 = 0,113 N_0,$$

т. е. 11,3% нормальной мощности потока теорией выяснены. Это значительно больше, чем у тихоходных турбин, однако, все-таки далеко не так много, как у соответствующих быстроходных насосов. В гл. IX, § 43 эти отношения снова будут рассмотрены.

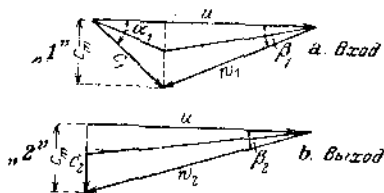
43. Регулирование рабочих колес в ограниченном потоке

Главной проблемой регулирования насосов является требование подавать при одинаковом числе оборотов разные количества воды при неизменной полезной высоте подачи, а у турбин при данном одинаковом напоре брутто пропускать разные количества воды. При этом к. п. д. должен по возможности оставаться одинаковым. Если бы удалось его удержать совершенно постоянным, то проблема регулирования означала бы, что энергия колеса $H_m = \frac{\omega}{g} A(c_u \cdot r)$ должна оставаться неизменной при изменении расхода Q . Что это требование не может строго исполняться ясно уже из того, что благодаря изменению рабочего расхода при неизменных остальных рабочих величинах удельное число оборотов машины значительно меняется и поэтому надо было бы для различных режимов работы из одной машины делать различные типы, чтобы, действительно, добиться лучшего к. п. д. Можно было бы значительно приблизиться к этой цели, если бы удалось держать постоянной, по возможности для всех положений, диаграмму скоростей и во всяком случае для точек входа и выхода из колеса и направляющего аппарата. Для этого нужно, чтобы число оборотов и с ними окружная скорость оставались неизменными и хотя неизменность углов лопаток допустима, но это требует изменяющихся поперечных сечений колеса и на-

правляющего аппарата, так же как и непосредственно примыкающих частей остальных деталей (всасывающей трубы, спиральной камеры). Благодаря этому энергия колеса H_m , действительно, сохраняется неизменной. Коэффициент полезного действия не меняется постольку, поскольку формы каналов между лопатками при небольших расходах получаются неблагоприятными. Потери на удар были бы, однако, почти что устранены. При исполнении этой идеи (которая, как мы увидим из главы XI, осуществлена совершенно просто у свободноструйных турбин) у турбомашин с подводом воды по всей окружности приходится встречаться с непреодолимыми конструктивными трудностями.

Следующим за вышеописанным идеальным регулированием по результатам и свойствам является регулирование посредством одновременно перестановки направляющих и рабочих лопаток, которое в первый раз осуществлено (и с большим успехом) у современной турбины Каплана. Осевое колесо турбины Каплана посредством поворачивающихся рабочих лопаток освобождается в первую очередь от установленного в § 42 сильного увеличения потерь во всасывающей трубе, имеющего место при неподвижных рабочих лопатках с уменьшением расхода. Наряду с этим уменьшаются также потери удара при входе в колесо. Фиг. 129 показывает диаграммы скоростей входа и выхода для среднего цилиндрического сечения колеса Каплана.

Если регулирование производится, действительно, так, что углы 1 и 2 треугольника длительно остаются в направлении, перпендикулярном направлению u , то энергия колеса H_m остается независимой от расхода Q . Однако углы лопаток β_1 и β_2 закономерно связаны между собой однажды выбранной формой лопатки, и положением оси вращения для неподвижной самой по себе лопатки, что в общем не вполне соответствует теоретическим требованиям. Также в общем невозможно точно установить угол направляющего аппарата, которого требует абсолютное направление поступающей жидкости α_1 . Мы не так хорошо знаем также потери протекания, соответствующие разным положениям лопаток, чтобы установить точно расход, определяемый по составляющим c_m треугольника. Благодаря этому H_m подвергается влиянию, т. е. составляющие c_m меняются, вследствие чего возникают добавочные потери. У осевых колес еще приводит то, что углы входа и выхода в разных цилиндрических сечениях (углы очень различаются между собой в радиальном направлении вследствие меняющихся окружных скоростей) при вращении лопаток меняются различным образом. Этим способом регулирования всегда удавалось достигнуть для осевых колес турбины Каплана к. п. д., которые мало меняются по сравнению с какой-либо другой полной турбиной при гораздо более широких границах расходов. При этом, как уже упоминалось в § 42, удается экспериментально посредством опытов с моделью добиться самого благоприятного соотношения



Фиг. 129. Диаграмма скоростей при регулировании турбины Каплана.

между положением направляющих и рабочих лопаток, что устанавливается посредством кривошипа или соответствующими конструктивными средствами в регулирующем механизме. Можно выполнить этот механизм таким образом, чтобы была возможность менять взаимодействие между направляющими и рабочими лопатками. Благодаря этому получается возможность достичь самой благоприятной кривой к. п. д. при меняющемся расходе для различных чисел оборотов при одинаковом напоре или наоборот (т. е. вообще для разных $\frac{n}{\sqrt{H}}$.)

Поворотные рабочие лопатки до сих пор применялись только у осевых колес. Это имеет прежде всего конструктивные причины. Втулка колеса Каплана дает возможность поместить в ней механизм, который превращает вращательное движение лопаток в поступательное движение регулирующего стержня внутри полого вала и таким образом делает возможным перестановку лопаток извне (см. описание в § 26). Эта задача труднее у радиальных колес, где оси вращения лопаток уже не перпендикулярны к оси машины, а параллельны ей. К этому добавляется, что у радиальных колес мы ограничены в стремлении сделать возможным поворачивание лопаток постоянной шириной рабочего колеса в области лопаток и что здесь очень трудно обойтись без второго обода рабочего колеса или второго днища, служащих для бокового направления колеса, так как точная игра в зазоре между лопатками и стенкой камеры, которая тут всецело зависит от точной установки и изнашивания упорного подшипника вала, также от длины вала и подобных влияний. При осевых турбинах мы в этом отношении свободнее, так как промежутки между рабочими лопатками и камерой, имеют радиальное направление и потому очень мало подвергаются влиянию при осевых сдвигах рабочего колеса.

Едва ли менее значительны конструктивные трудности у диагональных колес. Здесь мы были бы стеснены в образовании профиля ограничением полости вращения концентричной шаровой поверхностью, центр которой помещается на оси машины и одновременно является точкой пересечения всех осей вращения лопаток.

Относительно вращения неизменяющихся самих по себе лопаток радиальных и диагональных колес надо отметить следующее: с положением угла лопаток меняются вообще радиусы входа и выхода пространства между лопаток, а с этим вследствие изменения окружных скоростей должны меняться также составляющие c_u , чтобы энергия колеса H_m осталась прежней. Но благодаря этому происходят также перемещения в диаграммах, которых стараются избежать, так как они соответствуют вызываемым дополнительным потерям, а именно потерям удара и увеличенным потерям преобразования во всасывающей трубе или спирали. Таким образом здесь поворачивание лопаток менее пригодно для поддержания постоянной величины напора. Напротив, при случае оно может быть полезно для других целей, например, для поддержания постоянной мощности на валу при изменяющихся Q и H (как это может случиться при гидравлической передаче).

Если предусматриваются поворачивающиеся направляющие лопатки, то только те из них, которые установлены перед входом в колесо, действуют принципиально правильным образом, т. е. чистым более или менее неблагоприятным дросселированием. Это можно легко постичь, если мы поймем, как уже выше указывалось, в первом приближении задачу так, что энергия колеса $H_m = \frac{\omega}{g} \Delta(c_u \cdot r)$ будет независимой от расхода Q , в то время как величины напоров H_2 и H_1 только тогда будут независимы от Q , когда одновременно удастся держать неизменным к. п. д. Однако в выражении для H_m только величина $\Delta(c_u \cdot r)$ зависит от расхода Q и только от него, если установленный перед колесом направляющий орган (спираль или направляющее колесо) неподвижен. Но если имеются в виду поворачивающиеся направляющие лопатки, то $\Delta(c_u \cdot r)$ зависит также от положения угла этих лопаток и поэтому имеется возможность держать постоянным H_m при меняющемся Q . Направляющий аппарат, поставленный после колеса, не может влиять на энергию колеса, а может только более или менее выгодно преобразовывать имеющуюся еще при выходе из колеса скоростную энергию в давление. В этом направлении у современных насосов, действительно, достигнуты некоторые результаты, а именно: насосы для аккумулирования гидроэнергии снабжены поворачивающимися направляющими лопатками при этом благодаря тому, что поворачивающиеся направляющие лопатки при частичной подаче более приспособлены к скоростям выхода, к. п. д. были повышены на несколько процентов. Но этим не разрешается все-таки задача, сохраняя неизменным по возможности к. п. д., держать постоянным $\Delta(c_u \cdot r)$, и вместе с ним — H_m . Во всяком случае устройство поворачивающихся направляющих лопаток перед входом в колесо у насоса конструктивно затруднительно. Изготовление аксиальных направляющих лопаток поворотными вызывает особые затруднения. Задача, кроме того, не может быть безукоризненно разрешена, потому что вращение должно быть различное в различных цилиндрических сечениях. Радиально расположенный направляющий аппарат перед внутренним кругом системы лопаток насоса требовал бы очень много места при наличии подводящей спирали перед рабочим колесом. Поэтому насосы с направляющим впускным аппаратом еще и не известны. Вообще этот аппарат не может быть выполнен у насосов, даже при больших значениях радиусов, столь же эффективным как у турбин, потому что у насосов при сравнительно малом входном радиусе аппарата даже значительное изменение угла дает незначительное влияние на произведение $c_u r = \frac{Q}{F} \operatorname{ctg} \alpha \cdot r$.

Благодаря этому на энергию колеса H_m оказывается лишь незначительное влияние. Напротив, у турбин регулирование поворотом направляющих лопаток имело полный успех. Направляющий аппарат расположен здесь снаружи вокруг колеса; лопатки поворачиваются между двумя плоскостями, перпендикулярными к оси. Вся конструкция для малых и больших, и даже наибольших машин, легко управляется и к ней можно отлично применять автоматическое регулирование. Попутно & целью сбере-

расхода воды от положения лопаток. Тогда для всякого расхода воды момент скорости, полученный направляющим аппаратом, должен быть постоянным (так как оттекание жидкости с колеса происходит без момента скорости и H_m должно быть постоянным). Таким образом имеется:

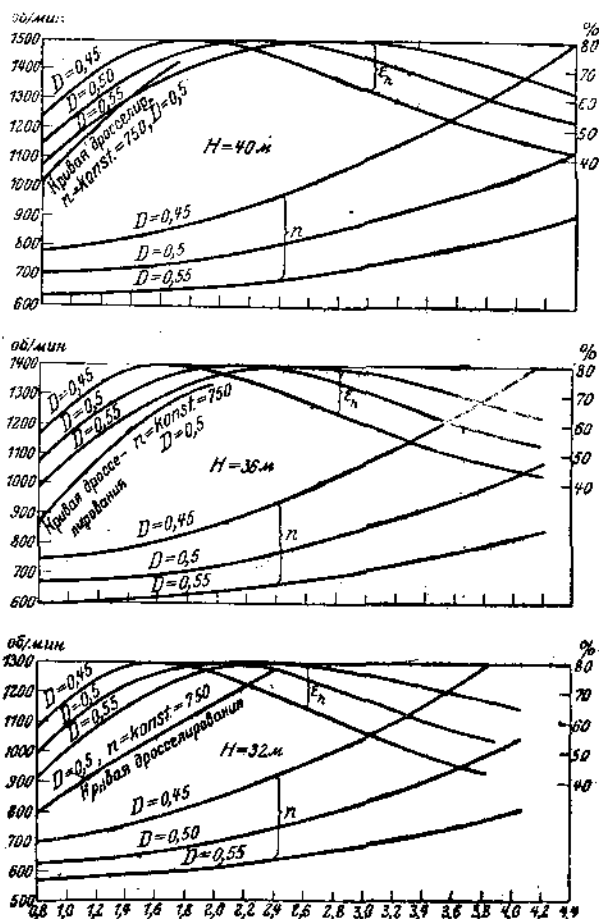
$$(c_u \cdot r)_1 = \frac{Q}{F_1} \operatorname{ctg} \alpha_1 \cdot r_1 = \\ = \operatorname{const} = \frac{g \cdot H_m}{\omega},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{g \cdot H_m \cdot F_1}{\omega \cdot r_1 \cdot Q}.$$

Если не требуется постоянства числа оборотов, то получается возможность пропускать разные расходы воды под одинаковым напором без поворота лопаток только изменением числа оборотов при сравнительно хорошем к. п. д. У турбин этот метод почти не применяется и, напротив, часто применяется у насосов с приводом от паровой турбины или мотора постоянного тока. В конце § 42а уже указано на эту возможность. Сообразно указанному там способу из диаграмм $Q-H$ и ϵ_n фиг. 124а вычислена общая диаграмма для данного типа, изображенная на фиг. 124б. Из нее получены те

числа оборотов $(n = n_1 \frac{\sqrt{H}}{D})$, которые необходимы для подачи различного количества воды ($Q = Q_1' D^3 \sqrt{H}$) на постоянную высоту H . Взяты из фиг. 124б при соответствующих величинам Q_1' коэффициенты полезного действия окончательно изображены на фиг. 131 а, б, с. Эти три диаграммы различаются между собой величиной постоянной высоты напора H . Далее, в каждой диаграмме изображены кривые как числа оборотов n , так и к. п. д. ϵ_n , которые пригодны для различных размеров D , данного типа, к которому относится единичная диаграмма фиг. 124. Здесь надо еще раз



Фиг. 131, а — с. Коэффициенты полезного действия и числа оборотов для регулирования изменением числа оборотов при разных постоянных напорах.

настойчиво указать, что надо быть уверенным, что для всех чисел оборотов и мощностей в данной области гидромеханическое подобие сохраняется с достаточным приближением (т. е. чтобы неменялось число Рейнольдса и не появилось где-либо кавитации). Если мы это имеем, то по единичной диаграмме можно проследить работу данного типа при самых разнообразных условиях. В противном случае это надо делать по способу фиг. 122, получая точки пересечения с $H = \text{const.}$

Если изменение числа оборотов должно быть применено для автоматического регулирования подаваемого расхода посредством изменения числа оборотов двигателя, то очень важно, чтобы характеристика $Q-H$ насоса была устойчива, т. е. имела высшую точку при расходе, равном нулю. Только в этом случае при определенной величине H мы имеем для каждого расхода воды только одно число оборотов, а также все увеличивающееся число оборотов с увеличивающимся расходом, тогда как в другом случае для определенного расхода существует минимум числа оборотов, и одно и то же число оборотов может относиться к двум разным расходам. Благодаря таким взаимоотношениям автоматическое регулирование может легко нарушиться, в особенности, если два насоса работают параллельно. С другой стороны, линия $Q-H$ не должна слишком круто подниматься для того, чтобы небольшим изменением числа оборотов можно было достичь больших расходов. Таким образом на единичной диаграмме линия n_1' должна иметь свою самую низкую точку при $Q_1' = 0$ и оттуда подниматься равномерно и не слишком круто.

Для сравнения к. п. д., при изменении числа оборотов на фиг. 131 а, с изображены еще те к. п. д., которые достигаются, если число оборотов держится постоянным и расход регулируется посредством задвижек в напорной трубе. Эти коэффициенты, конечно, хуже, чем те, которые соответствуют естественному ходу характеристики $Q-H$.

IX. Дополнения к основной теории рабочих колес в ограниченном потоке

44. Дифференциальное уравнение для распределения скоростей идеальной жидкости между лопатками по конаксиальной окружности

Попутно уже в предыдущих главах мы дали понятие об основной теории, чтобы иметь возможность обсудить, хотя бы качественно и суммарно, особенности рабочих колес, которые должны быть приняты во внимание при установлении основных размеров. В особенности было необходимо рассмотреть распределение давления и скорости при конечном шаге лопатки. Этот вопрос будет обсуждаться в дальнейшем.

При этом ближайшей целью является вывод дифференциального уравнения для распределения скорости идеальной жидкости в пространстве между двумя лопатками. В точном виде мы дадим это только во втором томе этой книги. Здесь в связи с основной теорией может идти речь только о приближенной теории.

Для того чтобы получить это уравнение, рассмотрим элемент кольцевого слоя небольшой ширины Δb (фиг. 132). Мы предположим, что поток медленно протекает в нем, т. е. не обращаем внимания на периодические колебания, с которыми связано поперечное пульсирование слоя (ср. § 27). Можно представить себе, что обе поверхности вращения, заключающие слой, являются боковыми стенками турбомашин небольшой ширины. Выделяем в этом слое небольшую часть, размерами: длиной dl (длина дуги для средней поверхности вращения), $r d\varphi$ и $(r+dr) d\varphi$ (длина дуги на обоих ограничивающих соосных окружностях, изображенных на развернутом конусе) и Δb или соответственно $\Delta b + \frac{\partial \Delta b}{\partial l} dl$ (изменяющаяся ширина слоя). К этой части мы применим теорему момента количества движения. Она дает:

$$\frac{\gamma}{g} r \cdot d\varphi \cdot dl \cdot \Delta b \frac{d(c_u \cdot r)}{dt} = dP_u \cdot r. \quad (356)$$

При вычислении существенных изменений $\frac{d(c_u r)}{dt}$ надо помнить, что мы рассматриваем абсолютное движение и что оно не установившееся; таким образом изменение величины $(c_u \cdot r)$ складывается из местного и конвективного.

Таким образом имеем:

$$\frac{d(c_u \cdot r)}{dt} = \frac{\partial(c_u \cdot r)}{\partial t} + c \frac{\partial(c_u \cdot r)}{\partial s}, \quad (357)$$

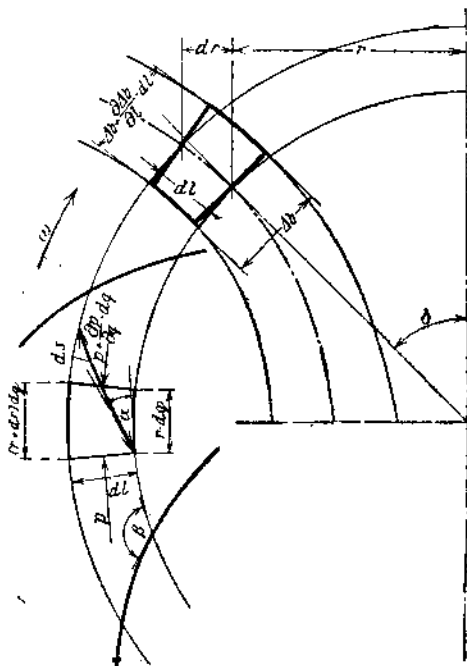
при этом под ds подразумевается длина дуги мгновенной абсолютной линии тока, по которой как раз движется в данный момент частица ds , и в рассматриваемый момент лежит во вращающемся слое, координата s является, таким образом, функцией длины дуги l и длины дуги $r \cdot d\varphi$ на конаксальной (соосной) окружности. На развертке касательного конуса к средней поверхности вращения рассматриваемого слоя нанесено ds (фиг. 132).

Таким образом мы имеем $s = f(l, \varphi)$ и поэтому:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial l} \cdot \frac{dl}{ds} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{r \cdot d\varphi}{ds},$$

следовательно:

$$c \frac{\partial(c_u \cdot r)}{\partial s} = c \frac{\partial(c_u \cdot r)}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial s} + c \frac{\partial(c_u \cdot r)}{\partial \varphi} \cdot \frac{r \cdot d\varphi}{ds} = c \cdot \sin \alpha \frac{\partial(c_u \cdot r)}{\partial l} + c \cdot \cos \alpha \frac{\partial(c_u \cdot r)}{r \cdot d\varphi}.$$



Фиг. 132. Элементарный круговой слой в рабочем колесе.

α — угол абсолютной линии тока против направления окружной скорости; на развертке касательного конуса к поверхности вращения он является истинной величиной, тогда мы имеем:

$$c \cdot \sin \alpha = c_m \text{ и } c \cdot \cos \alpha = c_u,$$

а потому

$$c \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial s} = c_m \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial l} + c_u \frac{\partial (c_u \cdot r)}{r \cdot d\varphi}. \quad (358)$$

Местное изменение $\frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial t}$ (при условии не принимать во внимание противоположно направленных влияний вращающегося и неподвижного колес с лопатками; ср. § 27) получается только благодаря тому, что неподвижная сама по себе картина абсолютного течения вращается вместе с колесом. Таким образом мы имеем для местных изменений какой-нибудь величины поля течения:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

(ср. § 23, 24, 29). При этом под φ подразумевается угловая координата как в неподвижном пространстве, так и в относительном (вращающемся) пространстве.

Сила на окружности dP_u получается только от разности давлений на концентричной окружности и равняется

$$dP_u = dl \cdot \Delta b \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{r \cdot d\varphi} r \cdot d\varphi \right) \right] = -r \cdot d\varphi \cdot dl \cdot \Delta b \frac{\partial p}{r \cdot d\varphi}; \quad (359)$$

если мы все подставим в (356), то получим:

$$c_m \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial l} + c_u \frac{\partial (c_u \cdot r)}{r \cdot \partial \varphi} - \omega \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial \varphi} = -g \frac{\partial \left(\frac{p}{\gamma} \right)}{\partial \varphi}. \quad (360)$$

Но [ср. § 24 уравнение (127) и § 33]

$$g \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) + \frac{c^2}{2} - \omega c_u \cdot r = \text{const.} \quad (361)$$

Заменяя c^2 посредством $c_m^2 + c_u^2$ и дифференцируя по φ получим:

$$g \frac{\partial \left(\frac{p}{\gamma} \right)}{\partial \varphi} + c_m \frac{\partial c_m}{\partial \varphi} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} - \omega \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial \varphi} = 0. \quad (362)$$

Из сопоставления (360) и (362) получается:

$$c_m \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial l} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} - \omega \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial \varphi} = c_m \frac{\partial c_m}{\partial \varphi} + c_u \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} - \omega \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial \varphi},$$

причем в (360) можно написать $\frac{\partial (c_u \cdot r)}{r \partial \varphi}$ вместо $\frac{\partial c_u}{\partial \varphi}$, так как r независимо от φ .

В заключение получается:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \varphi} = \frac{\partial (c_u \cdot r)}{\partial l}. \quad (363)$$

Теперь мы введем отношения, известные из § 28 [уравнение (132)]:

$$c_u = r \cdot \omega + c_m \operatorname{ctg} \beta \text{ и } c_u \cdot r = r^2 \omega + c_m \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \beta,$$

где β — угол относительной линии тока с направлением окружной скорости, получим:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \varphi} = 2r \cdot \omega \cdot \frac{dr}{dl} + \left(\frac{\partial c_m}{\partial l} r + c_m \frac{dr}{dl} \right) \operatorname{ctg} \beta + c_m r \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial l}. \quad (364)$$

$\frac{dr}{dl} = \sin \delta$ если обозначать через δ половину угла конуса, касательного к средней поверхности вращения.

Если мы, с другой стороны, для элемента объема неподвижного пространства с длиной ребер $dl, \Delta b$ или $\Delta b + \frac{\partial \Delta b}{\partial l} dl$ и $rd\varphi$, или $(r + dr)d\varphi$ напомним условие неразрывности, т. е., что из него уходит столько же жидкости, сколько в него поступает, то имеем:

$$\left(c_m + \frac{\partial c_m}{\partial l} dl \right) (r + dr) d\varphi \left(\Delta b + \frac{\partial \Delta b}{\partial l} dl \right) - \left(c_u + \frac{\partial c_u}{r \cdot d\varphi} rd\varphi \right) dl \cdot \Delta b = \\ = c_m \cdot rd\varphi \Delta b + c_u dl \cdot \Delta b. \quad (365)$$

Раскрывая скобки и вычеркивая члены высшего порядка, получаем:

$$\frac{\partial c_m}{\partial l} r + c_m \frac{dr}{dl} = - \frac{c_m \cdot r}{\Delta b} \cdot \frac{\partial \Delta b}{\partial l} - \frac{\partial c_u}{\partial \varphi}. \quad (366)$$

Подставляя в (364), получаем, если мы введем $\frac{dr}{dl} = \sin \delta$:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \varphi} = 2r\omega \sin \delta - \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{c_m \cdot r}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \sin \delta + \frac{\partial c_u}{\partial \varphi} \right) + c_m \cdot r \cdot \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} \sin \delta. \quad (367)$$

Но мы имеем

$$\frac{\partial c_u}{\partial \varphi} = \frac{\partial c_m}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \beta + c_m \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial \varphi}; \quad (368)$$

уравнение (368), подставленное в (367), дает:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \varphi} (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta) = \sin \delta \left[2r\omega + c_m r \left\{ \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{1}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \delta} \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial \varphi} \right) \right\} \right] \text{ с } 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \varphi};$$

получаем окончательно:

$$\frac{\partial c_m}{\partial \varphi} = \sin \delta \cdot \sin^2 \beta \left[2r\omega + c_m \cdot r \left\{ \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{1}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \delta} \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial \varphi} \right) \right\} \right]. \quad (369)$$

Разделим еще на среднюю величину скорости c_m , господствующую в данной конаксиальной окружности, а именно:

$$c_{m_0} = \frac{\Delta Q}{2r \cdot \pi \cdot \Delta b}, \quad (370)$$

причем здесь приняты бесконечно тонкие лопатки. Тем, что протекающее количество воды обозначено посредством ΔQ , указывается,

что уравнение при случае может быть годно и для части слоя колеса с большей шириной. Если мы еще подставим

$$\frac{c_m}{c_{m0}} = x, \quad (371)$$

то уравнение (369) может быть написано в безразмерной форме

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = a + bx, \quad (372)$$

если под a и b подразумевать числовые величины:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sin \delta \cdot \sin^2 \beta \cdot \frac{2u}{c_{m1}}; \\ b &= \sin \delta \cdot \sin^2 \beta \left\{ r \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{r}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial r} + \frac{1}{\sin \delta} \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial \varphi} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

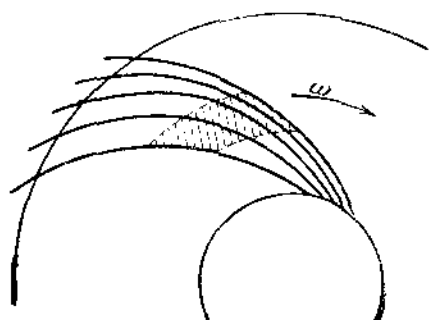
Случай чисто радиального колеса заключается в (372) и (373) при $\sin \delta = 1$. Для осевого колеса с $\sin \delta = 0$; a будет равно 0; но b — не равно нулю, так как здесь подставляется $\sin \delta \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial h}$; где элемент длины dl , параллельный оси, обозначен через dh ; кроме того, последний член в b не содержит $\sin \delta$. Таким образом для осевых колес

$$\left. \begin{aligned} a &= 0; \\ b &= \sin^2 \beta \left[r \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial h} - \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{r}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial h} + \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (374)$$

Однако числа a и b не зависят от φ , так как там заключается самое существенное отношение, обусловленное конечным числом лопаток; так что как β и δ , так и $\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r}$ не равны величинам, имеющим значение для поверхностей лопаток, но изменяются по делению лопаток (т. е. с φ). Так как мы не знаем этого изменения, то не можем, строго говоря, применить выведенное дифференциальное уравнение, пока не начертим полную картину линий тока (абсолютную или относительную) для протекающей через межлопаточное пространство жидкости. Но это требует решения задачи об ограничивающих поверхностях, которая складывается из определения пограничных условий, первого и второго рода (ср. § 6); решение этой задачи можно будет найти во втором томе.

Все-таки использовать приближенным способом дифференциальное уравнение (373) можно для того, чтобы раскрыть характерные свойства относительного течения. А именно, можно прежде всего попытаться установить, достаточно ли хорошо рассматривать углы δ и β постоянными на протяжении одного деления (шага). Для β это определено с большим приближением можно допустить внутри межлопаточного канала, достаточно длинного по отношению к делению (шагу), а тем более для таких мест, которые достаточно далеко удалены от входа и выхода. На фиг. 133 начерчен такой канал (на развертке конуса) и приблизительно указано, как проходят относительные линии тока. Видно, что в заштрихованном

пространстве углы, образованные относительными линиями тока с окружностью, весьма мало отличаются от углов лопаток β , так что изменяются только w и c_m . Это предположение хуже согласуется вблизи области входа или выхода), а также нельзя еще знать, не появляются ли внутри обстоятельства, которые вызывают значительные различия относительных углов линий тока. Но все же, при условии последующего контроля, полезно допустить одинаковость углов пути течения на конаксиальной окружности и их совпадение с углом лопаток β , так как это позволяет произвести интегрирование дифференциального уравнения и приводит к интересным выводам.



Фиг. 133. Относительные линии токов в межлопастном канале.

Под $\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r}$ надо подразумевать то изменение $\operatorname{ctg} \beta$, которое устанавливается непосредственно на кривой лопатке.

Относительно δ , при не слишком большой ширине Δb , можно заранее принять, что она не очень меняется в пределах одного деления.

45. Интегрирование дифференциального уравнения распределения скорости (при принятии равенства углов относительных линий тока с углом лопаток) и вывод из него

Так как для определенной конаксиальной окружности r и δ постоянные, то для $\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = 0$ величины a и b остаются постоянными числовыми величинами, меняющимися только от одной конаксиальной окружности к другой. Тогда уравнение (373) может быть интегрировано по φ и дает

$$x = C \cdot e^{b\varphi} - \frac{a}{b}. \quad (375)$$

Но, если z обозначает число лопаток, то должно получиться

$$\frac{z}{2r\pi\Delta b} \int_0^{\frac{2\pi}{z}} c_m \cdot r \cdot d\varphi \Delta b = \frac{\Delta Q}{2r\pi\Delta b} = c_m, \quad (376)$$

следовательно:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{z}} x d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{z}} \left(C \cdot e^{b\varphi} - \frac{a}{b} \right) d\varphi = \frac{2\pi}{z}. \quad (377)$$

Отсюда определяется C ; получаем

$$C = \frac{2\pi b}{z} \cdot \frac{1 + \frac{a}{b}}{\frac{2\pi b}{z} - 1}.$$

Поэтому имеем:

$$x = \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} \cdot e^{b\varphi} - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} \cdot e^{b\varphi} \right). \quad (378)$$

В особенности интересны величины для $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{2\pi}{z}$, получаем:

$$x_{\varphi=0} = \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} \right), \quad (379)$$

$$x_{\varphi=\frac{2\pi}{z}} = \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} \cdot e^{\frac{2\pi b}{z}} - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} \cdot e^{\frac{2\pi b}{z}} \right). \quad (380)$$

Отношение $\frac{a}{b}$ по (373) пропорционально $\frac{u}{c_{m_0}}$ (u равняется окружная скорость на рассматриваемой конаксиальной окружности). (379) и (380) могут быть поэтому написаны следующим образом:

$$x_{\varphi=0} = \varrho - \sigma \frac{u}{c_{m_0}} \quad (379a)$$

$$x_{\varphi=\frac{2\pi}{z}} = \varrho' - \sigma' \frac{u}{c_{m_0}} \quad (380a)$$

Здесь мы имеем

$$\varrho = \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1}; \quad \sigma = 2 \frac{1 - \varrho}{r \left(\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\Delta b} \cdot \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right)} \quad (381)$$

$$\varrho' = \varrho \cdot e^{\frac{2\pi b}{z}}; \quad \sigma' = 2 \frac{1 - \varrho'}{r \left(\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\Delta b} \cdot \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right)} \quad (382)$$

Таким образом видно, что на стороне давления лопаток может наступить поворот назад направления течения, в особенности, при больших величинах $\frac{u}{c_{m_0}}$, т. е. если скорость протекающей жидкости мала по отношению к окружной скорости. Это начинается, когда $x_{\varphi=0} = 0$, т. е. если $\frac{u}{c_{m_0}} = \frac{\varrho}{\sigma}$.

Если $\frac{u}{c_{m_0}}$ еще возрастает, то можно вывести из (378), как далеко на делении лопаток (шаге) происходит поворот обратного

направления течения для $x=0$ (при использовании постоянной q из условия), получается:

$$q \cdot e^{b\varphi} - 2 \frac{u}{c_{m0}} r \left(\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right) = 0;$$

для угла φ , до которого дошло обратное течение:

$$\varphi_{x=0} = \frac{1}{b} \ln \left\{ \frac{1}{q} r \left(\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\Delta b} \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right) c_{m0} + 2u \right\}. \quad (383)$$

В частности для $c_{m0} = 0$ (никакого протекания жидкости!) получается

$$\varphi_{x=0, c_{m0}=0} = \frac{1}{b} \ln \frac{1}{q}. \quad (384)$$

Особый случай мы имеем в радиальном колесе с параллельными ободьями, когда лопатки искривлены по логарифмическим спиралям. Тогда $b=0$. Решение в данной форме получается неопределенное; лучше всего тогда вернуться к дифференциальному уравнению, которое тогда имеет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = a, \quad (385)$$

и имеет решение

$$x = a\varphi + C, \quad (386)$$

которое, беря во внимание условие (376), переходит в

$$x = 1 + a \left(\varphi - \frac{\pi}{z} \right) \quad (387)$$

с величинами ограничивающих поверхностей:

$$x_{\varphi=0} = 1 - \frac{a\pi}{z} \quad \text{и} \quad x_{\varphi=\frac{2\pi}{z}} = 1 + \frac{a\pi}{z}. \quad (388)$$

Если мы снова введем для a величину из (373), то получается:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2 \sin^2 \beta \frac{u}{c_{m0}} \left(\varphi - \frac{\pi}{z} \right), \\ x_{\varphi=0} &= 1 - 2 \sin^2 \beta \cdot \frac{\pi}{z} \frac{u}{c_{m0}}; \quad x_{\varphi=\frac{2\pi}{z}} = 1 + 2 \sin^2 \beta \cdot \frac{\pi}{z} \cdot \frac{u}{c_{m0}} \end{aligned} \right\} \quad (389)$$

или также

$$x_{\varphi=0} = 1 - \frac{t \cdot \sin^2 \beta \cdot \omega}{c_{m0}}; \quad x_{\varphi=\frac{2\pi}{z}} = 1 + \frac{t \sin^2 \beta \cdot \omega}{c_{m0}}, \quad (390)$$

где t есть деление (шаг) лопатки, измеренное на соответствующей конаксиальной окружности. Для случая $c_{m0} = 0$ безразмерное

представление не подходит; мы пишем тогда (389) после умножения на c_m в форме:

$$c_m = c_{m_0} + 2 \sin^2 \beta \cdot u \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (391)$$

и находим точку на конаксиальной окружности, в которой для состояния нулевого расхода господствует полный покой ($c_m = 0$), подстановкой $\varphi = \frac{\pi}{2}$; таким образом, как это заранее ясно из линейного распределения c_m , она лежит на середине деления.

Для осевого колеса мы можем тоже получить формулы при $a = 0$ и $b \rightarrow$ по (374); мы получим

$$x = \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1} e^{\frac{b\varphi}{z}} \quad (392)$$

Здесь ясно видно, что ни в каком месте деления (шага) не могут встретиться отрицательные величины x . Даже если $c_{m_0} = 0$, то не будет никакого обратного течения. Мы должны, однако, не забывать, что до сих пор шла речь только об обратном течении, противоположном одному из первоначальных направлений течения. Необходимо также подумать, могут ли кроме этого явления действовать еще вторичные течения, перпендикулярные к основному направлению течения, т. е. поперек ширины профиля рабочего колеса (т. е. в чисто радиальном колесе — в направлении вращающейся оси, у чисто осевого колеса — в направлении радиуса).

Для ограничивающих поверхностей у осевых колес мы получаем

$$x_{\varphi=0} = \frac{\frac{2\pi b}{z}}{\frac{2\pi b}{z} - 1}, \quad x_{\varphi=\frac{2\pi}{z}} = x_{\varphi=0} \cdot e^{\frac{2\pi b}{z}} \quad (393)$$

В общем настоящими рассуждениями доказано, что во вращающемся канале лопаток при определенных обстоятельствах могут встречаться как отрицательные, так и положительные скорости по отношению к первоначальному направлению течения¹.

В самом крайнем случае это наступает, если течение совершенно прекращается, как это бывает, например, в центробежных насосах при нулевом расходе. Тогда внутри канала лопаток возникает относительно колеса настоящее вращение, приблизительно так, как если бы канал был бы замкнут с обоих концов. Это явление называют относительной циркуляцией (круговоротом) в канале. Фиг. 135 представляет собой фотографический снимок такого вращения, которое благодаря насыпанным опилкам алюминия сле-

¹ В первый раз было указано на этот факт в литературе в очень ясном и интересном произведении Кухарского „Течения идеальной жидкости при вращении твердых тел“, изд. Ольденбурга. 1918. Кухарский рассматривает там относительное течение по методам математической гидродинамики и кроме различных примеров дает решение для случая радиального колеса с параллельными ободьями с чисто радиальными лопатками.

дано видимым между 16 радиальными лопатками колеса, вращающегося в открытом круглом водяном бассейне (фиг. 134) ¹.

Для лопаток, поставленных косо, фиг. 136 показывает относительный круговорот в канале. Вне пространства лопаток, за пределы которого круговорот выступает, жидкость движется относительно системы лопаток приблизительно по кругам, противоположным вращению колеса. Если прибавляется прямое течение, то воз-

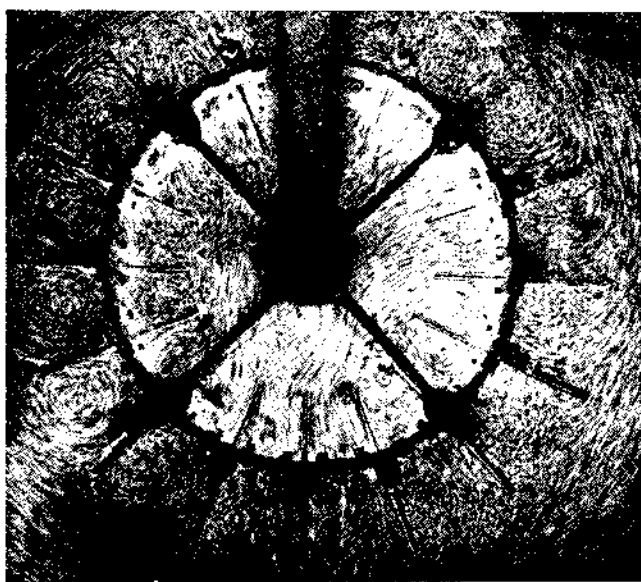


Фиг. 134. Открытый круглый бассейн с вращающимся лопастным колесом.

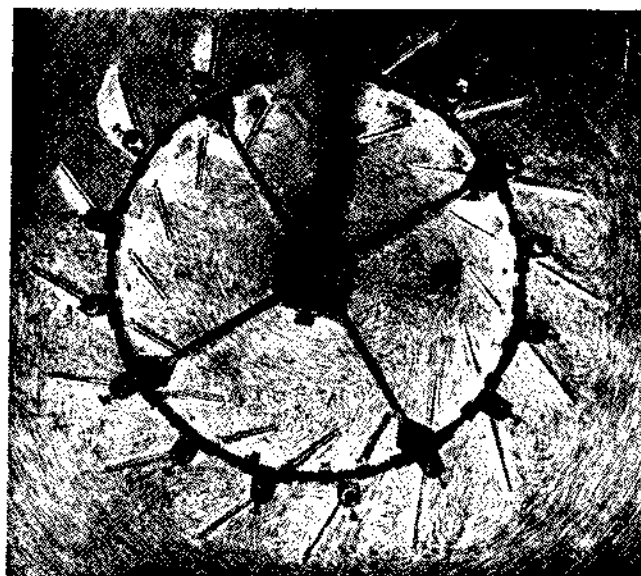
никает равнодействующее течение из наложения круговорота в канале и прямого течения. При этом сначала при незначительном проточном количестве остаются замкнутые участки с чистым вращательным движением; оно исчезает только с увеличением расхода. На помещенных фотографических снимках можно видеть течение

¹ Взято из сообщений Института водяных машин Технического высшего училища Карлсруэ, тетрадь 1, изд. Ольденбурга, 1930, а именно из статьи В. Барта, Вытесняющие течения цилиндрических лопаток при вращении в жидкости со свободной поверхностью (Verdrängungsströmungen zylindrischer Schaufeln bei Rotation in einer Flüssigkeit...).

Ср. с этим также Эртлн, Исследование водяных течений через вращающееся колесо с камерами. Цюрихская диссертация, изд. Я. Больмана, Цюрих, 1928.

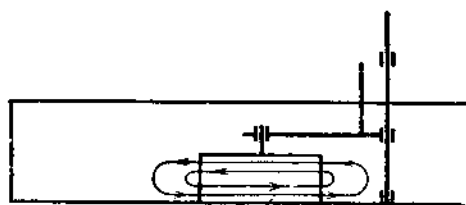


Фиг. 135. Круговорот в каналах радиальных лопаток.

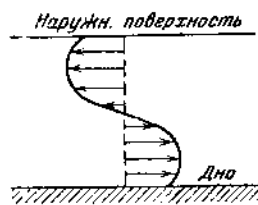


Фиг. 136. Круговорот в каналах косо поставленных лопаток.

от небольшого расхода рядом с большой областью круговорота в каналах. Проточное течение возникло благодаря трению о дно сосуда, которое вызывает на дне меньшее повышение центростремительного давления, почему и возникло обратное течение снаружи во внутрь соответственно на свободной поверхности течение изнутри наружу. Таким образом положение может быть представлено идеализированно таким образом, как будто приблизительно в центре вращения помещается для поверхностного течения слабый источник, а для нижнего течения слабый поглотитель. Фиг. 137 передает схематический разрез через опытный аппарат, изображенный на фотографическом снимке фиг. 134, и показывает характер течения в радиальном сечении.



Фиг. 137а. Схематический разрез аппарата
фиг. 134.



Фиг. 137б. Скорости у поверхности и у дна аппарата по фиг. 134.

Интенсивность вращательного движения в относительном круговороте канала может быть определена по формулам (379а) и (380а) или (389), (390) и (391). Для этого уравнения (379) и (380) или (389) и (390) пишут сначала в форме, имеющей размерность. Получаем:

$$c_{m\varphi=0} = \varrho \cdot c_{m_0} - \sigma \cdot u; \quad c_m = \frac{2\pi}{z} = \varrho' \cdot c_{m_0} - \sigma' \cdot u \quad (394)$$

или, при радиальном колесе с параллельными ободами, с кривизной лопаток по логарифмическим спиральям

$$c_{m\varphi=0} = c_{m_0} - \frac{2\pi}{z} \cdot \sin^2 \beta \cdot u; \quad c_m = \frac{2\pi}{z} = c_{m_0} + \frac{2\pi}{z} \sin^2 \beta \cdot u. \quad (395)$$

Для $c_{m_0} = 0$ получается, если мы еще введем для σ и σ' величины (381) и (382): для обоих случаев:

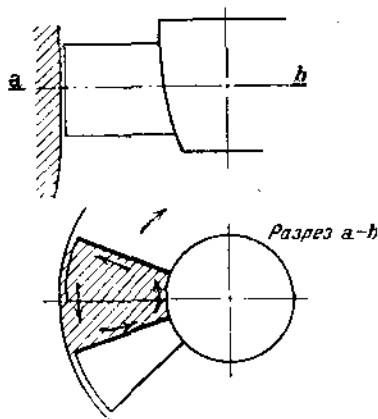
$$\left. \begin{aligned} c_{m \text{ для } c_{m_0} = 0 \text{ и } \varphi = 0} &= -2 \cdot \frac{1 - \frac{2\pi b}{z}}{r \left(\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\Delta b} \cdot \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right)}, \\ c_{m \text{ для } c_{m_0} = 0 \text{ и } \varphi = \frac{2\pi}{z}} &= +2 \cdot \frac{\frac{2\pi b}{z} \cdot e^{\frac{2\pi b}{z}} - 1}{r \left(\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\Delta b} \cdot \frac{\partial \Delta b}{\partial r} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (396)$$

Для радиальных колес с параллельными ободами, с лопатками, выполненными по логарифмическим спиралям для $c_{m\varphi} = 0$:

$$c_{m\varphi=0} = -\frac{2\pi}{z} \sin^2 \beta \cdot u; \quad c_{m\varphi=\frac{2\pi}{z}} = +\frac{2\pi}{z} \sin^2 \beta \cdot u. \quad (397)$$

Для $\beta \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial r}$, r , Δb , $\frac{\partial \Delta b}{\partial r}$ и u должны быть подставлены численные значения, относящиеся приблизительно к середине между концами канала.

Уравнения (394) и (395) могут быть также использованы для вычисления для определенной конаксиальной окружности с радиусом r того расхода Q , при котором с напорной стороны лопаток начинается обратное течение.



Фиг. 138. Пространство между 2 лопатками аксиального рабочего колеса, как радиальная ячейка.

В общем дифференциальное уравнение действительно и для канала, находящегося в покое, или, иначе говоря, для чистого протекающего течения. Надо только подставить $\omega = 0$, тогда будет $a = 0$ и формулы сделаются тождественными с формулами осевой турбины, если еще подставить $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial h}$ (или $dr = dl = dh$). Так как мы можем рассматривать решетку из лопаток осевой турбины при малой ширине Δb как решетку,двигающуюся прямолинейно вперед, то здесь снова получается (ср. § 23, стр. 94 и 95), что относительное течение через такую решетку не отличается при равно-

мерном движении от течения через неподвижную решетку. В общем, однако, можно сказать, что в каждом вращающемся колесе с лопатками можно течение разложить на относительный круговорот в канале и на сплошное прямое течение, причем прямое течение имеет совершенно такой вид, как в подобном неподвижном колесе. Оба частных течения накладываются, причем в зависимости от их сравнительной величины получаются разные картины течения.

Таким образом благодаря выведенному дифференциальному уравнению мы имеем кинематический анализ относительного течения, который заменяет изучение распределения давления. Этот анализ, точно так же как изучение распределения давления, объясняет факт, что направление относительных линий тока вблизи концов лопаток может значительно отличаться от направления кривых лопаток, так как относительный круговорот в канале дает в течении вблизи концов лопаток дополнительные окружные скорости, что изменяет расход мощности и условия для безударного входа по отношению к условиям, действительным для бесконечного числа лопаток.

Отметим, что и в совершенно замкнутом канале при вращении возникает относительный круговорот ¹.

Если осевое колесо значительной ширины вращается и протекания нет, то можно также рассматривать канал между лопаток как замкнутый канал определенного радиального протяжения с радиальными границами, по крайней мере, в среднем сечении по высоте (ср. фиг. 138). В этом среднем слое образуется тогда круговое течение. Таким образом этим подтверждается и для осевого колеса стремление к возникновению поперечного течения, на которое уже указывалось выше.

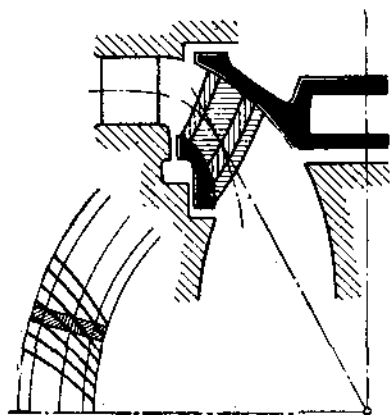
Изложенные здесь выводы и представления дают возможность создать приблизительный метод для определения относительного течения за исключением крайних случаев (не для малого числа лопаток, не для незначительного отношения радиусов). Но изложение этого метода выходит за пределы этой книги. Во втором томе будет более подробно охвачена вся эта проблема.

46. Распределение скоростей в идеальной жидкости по ширине профиля рабочего колеса

Уже упоминалось, что при рассмотрении проблемы лопаток в § 34с при пространственном выполнении лопаток на первом месте стоит стремление к одинаковому обмену энергии во всех слоях. В параллельной решетке с совершенно прямой осью (§ 23) и в совершенно радиальной круговой решетке с параллельными ободами (§ 24) это достигается для всех расходов посредством цилиндрических лопаток с цилиндрическими образующими, перпендикулярными к оси параллельной решетки или параллельными оси вращения круговой решетки. Посредством таких лопаток для изменяющегося расхода во всех слоях, параллельных оси параллельной решетки или перпендикулярных оси вращения круговой решетки, получается изменение соответствующих c_u или величины момента скорости $c_u \cdot r$. Это изменение зависит от изменяющегося расхода, но оно одинаково для отдельных слоев. Так как от этих изменений зависит распределение давления, то оно меняется при изменяющемся расходе равномерно для всех слоев; таким образом не возникает никакого стремления к отклонению от равномерного распределения расхода во всех слоях. Иначе обстоит дело у рабочих колес обычной формы, у которых система лопаток колеса находится в полости вращения с определенной кривизной ограничивающих поверхностей. В § 12-а указан метод, по которому можно вычислить распределение скоростей для свободной жидкости без вращательных составляющих в такой полости вращения. В § 12с было подробно изложено, что на это течение можно наложить чисто вращательное течение по закону $c_u r = \text{const}$, не нарушая его распределения. Распределение давления обоих частных течений также не влияют друг на друга. Поток направляется к рабочему колесу посредством устройства, которое хотя и дает для различных расходов различные величины момента скорости, однако приближенно, достаточно одинаковые для всех слоев

¹ Ср. Эртли, работа цитиров. выше.

поперек сечения (у турбин направляющий аппарат состоит из цилиндрических лопаток между параллельными ободами; у насосов всасывающая труба без направляющего аппарата, т. е. нет вращательных составляющих). При изменении этого момента лопатками колеса надо стремиться, чтобы получалось распределение давления, которое свободно накладывалось бы на распределение давления свободного меридианального течения. Выполнение этого требования лучше всего наблюдать, если мы предположим очень много лопаток, так как тогда различия давления и скорости на конаксиальной окружности, которых вообще нет в свободном меридианальном



Фиг. 139. Слой для одинаковых радиальных сечений между часто расположенных лопаток

течении, получаются очень незначительными и в конце концов могут быть совсем оставлены без внимания. Мы сможем тогда рассматривать небольшие слои между двумя соседними бесконечно тонкими лопатками в одном радиальном слое (фиг. 139). Тогда для свободного течения без вращательных составляющих можно написать:

$$\frac{p_1}{\gamma} + h + \frac{c_m^2}{2g} = \text{const} = H_1.$$

Затем можно наложить в отдельных слоях, разделенных лопатками, распределения с постоянной величиной $c_u r$, которая, однако, благодаря разделяющим лопаткам должна быть различна для каждой части одинакового радиального слоя, лежащего между двумя лопатками. Таким образом возникает добавочное распределение давления, выражаемое:

$$\frac{p_2}{\gamma} + h + \frac{c_u^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + h + \frac{k^2}{2gr^2} = \text{const} = H_2,$$

которое, однако, не нарушает распределения l , хотя оно и имеет другую постоянную для каждой лежащей между двумя лопатками части одного и того же радиального слоя. Если форма лопаток такова, что она при вращении сохраняет в рассматриваемом слое только что названное $c_u r$, то в распределении давления прибавляется еще третий член. Вследствие $c_u r = \text{const}$, он является постоянным во всем слое между двумя лопатками и вычисляется из

$$\frac{p_2}{\gamma} + h - \frac{\omega c_u r}{g} = H_3;$$

он не нарушает распределения давления, возникающего от c_m . В конце концов при очень большом количестве (строго говоря бесконечно большом) лопаток, радиальные сечения лопаток должны быть линиями постоянного значения $c_u r$. Край со стороны впуска и край со стороны выпуска лопаток должны точно так же лежать в радиальных сечениях¹.

¹ См. об этом также Мизес, Теория водяных колес, далее, Бауерсфельд „ZdVdI“, 1912.

Так как $c_u r = r^2 \omega + c_m r \operatorname{ctg} \beta$, то это правило распространяется на частное дифференциальное уравнение для поверхности лопатки, которое дает изменение β от одного радиального сечения к другому в каждом цилиндрическом слое, при принятии изменения $c_u r$ от одного сечения к другому. Распределение c_m рассматривается как заданное, но так как абсолютная величина c_m зависит от расхода Q , то можно достичь этого только для такого отношения Q/ω , чтобы распределение c_m не сдвигалось.

Практика в общем не придерживалась изложенного правила, а довольствовалась часто только тем, что устраивала входные и выходные части лопаток, точнее даже кромки по правилу $c_u r = \text{const}$. При этом в основе лежит представление безударного поступления потока, приходящего с постоянным $c_u r$ и уходящего в пространство с постоянной энергией, следовательно, также с постоянным $c_u r$.

Из вышеизложенного мы возьмем следующие представления для вывода приближенной теории. Проведем в полости вращения ряд поверхностей вращения, имеющих приблизительно такую форму, как те, по которым протекает свободное меридиональное течение. Определяем теперь кривые, получающиеся от пересечений поверхности лопатки с поверхностями вращения и их угол β , образуемый ими с окружной скоростью.

Этот угол β рассматриваем для каждого распределения воды как неизменяющийся угол относительных путей течения. При этом мы предполагаем достаточно большое количество лопаток. Это предположение основано на допущении, что протекание все время одинаковых поверхностей вращения происходит с величиной различно распределенных составляющих c_m . Можно также сказать так: мы принимаем, что для всех распределений расхода даются одинаковые ортогональные траектории течения и только величины составляющих c_m не меняют свое направление. В дальнейшем мы будем рассматривать как факт, что жидкость, которая притекает к рабочему колесу с постоянным моментом скорости, стремится к тому, чтобы покинуть его также с постоянным моментом скорости, и что ее распределение устанавливается соответственно. Поэтому повсюду, а следовательно, и при выходе

$$c_u \cdot r = r^2 \omega + c_m r \operatorname{ctg} \beta = k.$$

Если это должно быть постоянным, то получается:

$$c_m = \frac{k - r^2 \omega}{r \operatorname{ctg} \beta}. \quad (398)$$

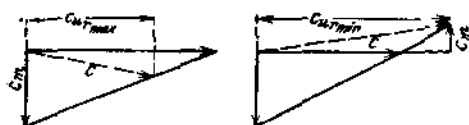
Так как для поверхности вращения выходных кромок лопатки для каждой точки даны r и β , то для каждой величины k имеется определенное распределение c_m . Теперь мы берем интеграл

$$Q = \int 2 \pi r c_m \cdot ds$$

для всей выходной кромки, причем ds является элементом ее дуги и получаем

$$Q = 2 \pi \int \frac{k - r^2 \omega}{\operatorname{ctg} \beta} ds. \quad (399)$$

Таким образом каждой величине k соответствует определенный расход воды и обратно. Можно установить связь посредством определения численных значений интеграла для различных величин k и изобразить ее графически. Если мы согласно этой зависимости подставим в уравнение (398) величины k , соответствующие определенным величинам Q , то получим для каждой величины k совершенно определенное распределение c_m и можем достичь в определенных местах (r) отрицательных величин для c_m . Это означает, что в зависимости от радиуса окружности, на которой лежат особые места выхода, можно получить одинаковую величину $c_m \cdot r$ как с положительными, так и отрицательными величинами c_m . Эту возможность можно понять при помощи следующего короткого рассуждения. В рабочем колесе при нормальном расходе выход воды про-



Фиг. 140. Треугольники скоростей выхода для различных c_u .

исходит без момента $c_u \cdot r$. На фиг. 140 изображены треугольники (прямоугольные) скоростей для точек с самым большим и с самым малым радиусом. Если масса воды идет обратно, то возникает противоположный момент скорости, который, например, в крайней внешней точке доходит до изображенной величины c_u . Если соответствующая величина $c_u r$ должна иметься также во внутреннем участке, то там c_u должно быть больше в обратном отношении радиусов или окружных скоростей. Как показывает диаграмма, этого можно достичь только посредством отрицательного c_m .

Для осевых колес с поверхностями выхода, перпендикулярными к оси, можно легко вычислить интеграл (399). Для нормального расхода Q_0 мы предполагаем выход с положительным моментом скорости k_0 и равномерным распределением скоростью c_{m0} .

Тогда имеем

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{k_0 - r^2 \omega}{c_{m0} \cdot r}, \quad (400)$$

т. е. этими углами в соответствующих сечениях цилиндрическими поверхностями (r) лопатка определяется. Так как мы это рассматриваем как неизменное, несмотря на меняющееся распределение расхода, то мы можем подставить уравнение (400) в (399) и получить:

$$Q = 2\pi c_{m0} \int_{r_i}^{r_a} \frac{k_0 - r^2 \omega}{k_0 - r^2 \omega} r dr,$$

или

$$Q = 2\pi c_{m0} \left(\frac{r_a^2 - r_i^2}{2} + \frac{k_0 - k_0}{2\omega} \ln \frac{k_0 - r_i^2 \omega}{k_0 - r_a^2 \omega} \right).$$

Сюда мы вводим

$$Q_0 = \pi (r_a^2 - r_i^2) c_{m0}$$

и получаем

$$\bar{Q} = Q_0 + \frac{(k_0 - k_0) \cdot Q_0}{\omega (r_a^2 - r_i^2)} \ln \frac{k_0 - r_i^2 \omega}{k_0 - r_a^2 \omega}.$$

Решение относительно k дает:

$$k = k_0 + \frac{Q - Q_0}{Q_0} \frac{\omega(r_a^2 - r_i^2)}{\ln \frac{k_0 - r_i^2 \omega}{k_0 - r_a^2 \omega}}. \quad (401)$$

Распределение c_m посредством подстановки (400) и (401) в (398) получается в виде:

$$c_m = \left(1 + \frac{Q - Q_0}{Q} \frac{\omega(r_a^2 - r_i^2)}{\ln \frac{k_0 - r_i^2 \omega}{k_0 - r_a^2 \omega}} \right) \cdot c_{m0}. \quad (402)$$

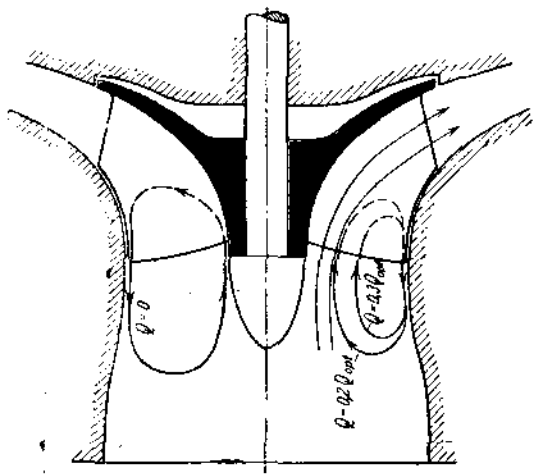
Таким образом на окружности с радиусом r появляется обратное течение, когда

$$Q = \frac{\omega(r_a^2 - r_i^2)}{(k_0 - r^2 \omega) \ln \frac{k_0 - r_i^2 \omega}{k_0 - r_a^2 \omega} + \omega(r_a^2 - r_i^2)} Q_0. \quad (403)$$

Это обратное течение, действительно, наблюдается у турбин и насосов. Фиг. 141, взятая из сочинения Д. Тома, показывает течение, сделанное видимым посредством дыма в турбине, работающей в воздухе при сравнительно малом расходе. Внутри и вне окруж-



Фиг. 141. Наблюдаемое обратное течение в турбине Френсиса

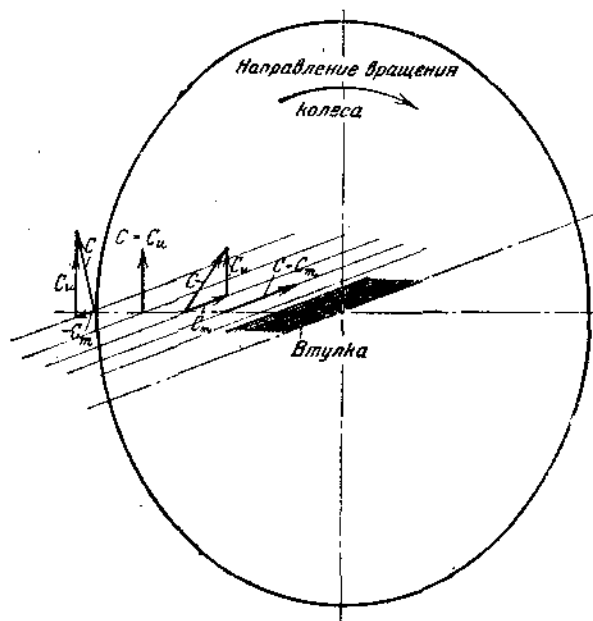


Фиг. 142a. Кольцевые круговороты в центробежном насосе при различных подачах воды.

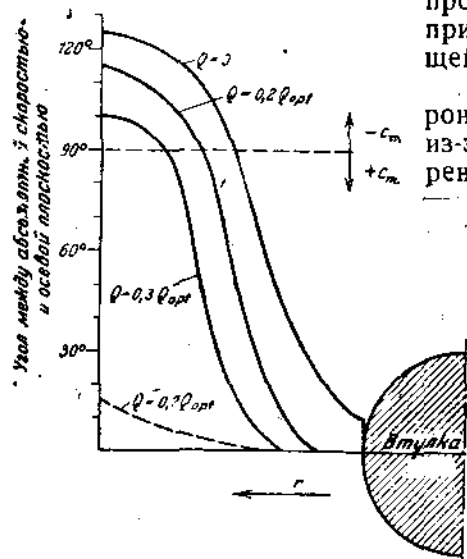
ности, на которой $c_m = 0$, виден вихрь, ось вращения которого перпендикулярна к радиусу, следовательно, лежит в направлении окружности. Следовательно, его правильно будет обозначить как кольцевой вихрь, в то время как рассматривавшийся в § 44 и 45 вихрь в канале должен считаться осевым вихрем, так как его ось параллельна оси вращения. Фиг. 142 а, б, с изображают наблюдения лаборатории гидравлических машин Высшего технического учи-

¹ Thomas D., Die neue Wasserturbinen-Versuchsanstalt von Briegeel, Hausen u. Co., Gota, 1918.

лища в Карлсруэ, которые были произведены над центробежным насосом, точно так же работающим с воздухом, при коротком всасывающем патрубке. При этом направление течения было сделано видимым посредством легких шерстяных нитей. Как видно из разреза фиг. 142а, профиль в области входа идет почти по оси. В перспективной фиг. 142b изображено, как направление абсолютной скорости при небольшом расходе меняется по направлению радиуса, в то время как фиг. 142с показывает это изменение расхода от 0 до 70% от его количества при лучшем к. п. д. Путем измерений построены кривые фиг. 142а, которые показывают рас-



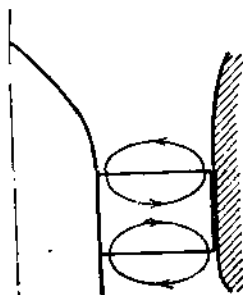
Фиг. 142b.



Фиг. 142с. Угол потока при входе в центробежное колесо согл. фиг. 142а.

пространение кольцевого круговорота при различных количествах протекающей жидкости.

Соответствующие явления на стороне выхода не могли наблюдаться из-за трудностей технических измерений. Но принципиально там (в чисто



Фиг. 143. Кольцевой вихрь в аксиальном колесе при расходе равном нулю.

осевом колесе) должны образоваться при расходе $= 0$ подобные отношения, что ясно уже из того, что в таком колесе

при нулевой подаче ни одна из обеих конечных частей лопаток ничем не отличается от другой. Таким образом в чисто осевом колесе при нулевой подаче по фиг. 143 возникнут два кольцевые круговорота. Не зная предшествующего вычисления, это можно обосновать тем, что лопатки осевого колеса на внешнем ободе при нулевой подаче производят определенное центростремительное давление, которое не распространяется за пределы лопаток. Таким образом должно возникнуть перемещение жидкости изнутри наружу и обратное течение за лопатками, снаружи внутрь, которое делится на два первоначальных в области входа и выхода. Но установленные подсчеты (выводы) не становятся благодаря этому рассмотрению излишними, так как они совершенно общо указывают влияние расхода и кольцевого вихря на распределение c_m .

47. Мощность при расходе, равном нулю, и зависимость потерь от отношения Q/ω .

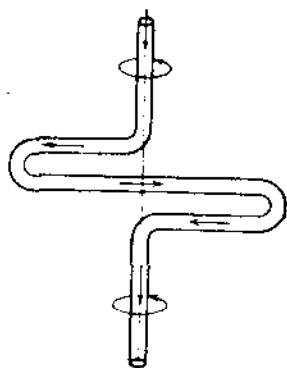
Вышеприведенные выводы относились к идеальной жидкости, однако, следствия, выведенные из них, особенно в крайних случаях, очень хорошо подтверждаются опытом. Для реальной жидкости при расходе, равном нулю, получается, что при нем рабочее колесо работает как тормоз и потребляет мощность для поддержания вращения. Такое заключение не может быть, конечно, выведено из рассмотрения идеальной жидкости ни для радиального колеса с его осевым вихрем, ни для осевого колеса с его кольцевым вихрем. Это объясняется у радиального колеса тем, что как в одном направлении течет некоторое количество идеальной жидкости с определенным повышением энергии, так и в обратном направлении течет то же количество, но уже с такой же отдачей энергии. У осевого колеса в основе вычисления лежит допущение $c_{u,r} = \text{const}$, так как заранее изменения энергии не рассматриваются. Совершенно иначе обстоит дело с реальной жидкостью. Здесь вихри сильно смешиваются с окружающей жидкостью. У радиального колеса во всяком случае и при нулевом расходе вихрь в канале очень мало выходит из канала лопаток и тем меньше, чем больше отношение длины канала к его ширине. Это объясняет тот факт, что радиальные колеса с большим отношением радиусов $r_e/r_i \gg 1$ требуют меньшей мощности.

Существенной причиной смещения с жидкостью за пределами колеса является то обстоятельство, что в двух углах канала лопаток, расположенных друг против друга по диагонали, вихрь идеальной жидкости обуславливает резкое замедление относительно стенки. Таким образом образуются новые отдельные вихри при сильном обратном течении жидкости из окружающей среды в канал. Двойной же кольцевой вихрь осевого колеса уже сам по себе двигает наружу всю входящую в его состав жидкость из колеса ко внешней окружности. Она смешивается с окружающей жидкостью и возвращается при большой потере энергии ко внутренней окружности колеса, в которое она может поступить снова с потерей на удар. При этом замечено, что жидкость содержащаяся во всасывающей трубе осевого колеса вовлекается во вра-

щательное движение вокруг оси даже на довольно значительном удалении от колеса, благодаря чему смягчаются потери удара масс кольцевого вихря при входе в колесо. Потребление мощности при нулевой подаче в значительной мере зависит также от того, подвергается ли воздействию колеса это количество жидкости. Во всяком случае понятно из самой природы кольцевого вихря, что мощность, потребляемая осевым кольцом при нулевой подаче, значительно выше, чем мощность, потребляемая радиальным колесом. Она может превзойти потребление мощности самого благоприятного режима работы.

Потребление мощности при расходе, равном нулю, может быть обозначено согласно вышеуказанному как потребление для сохранения осевого или кольцевого вихря. Оно, конечно, постепенно возрастая, делается заметным уже при приближении к нулевому расходу. Поэтому кривая мощности, потребляемой центробежным насосом, которая по основной теории в зависимости от рабочей массы была бы параболой со значением нуль при $Q=0$, все более и более уклоняется от этой параболы с приближением к нулевой подаче (ее отношение в области $H=0$ не так интересно и потому мало исследовано; она еще подвергается сильному воздействию кавитации). Можно предполагать, что потребление мощности, изображаемое параболой основной теории, начинается тогда уклоняться, когда в канале лопаток начинается обратное течение и благодаря этому наступает образование области вихря. Расход Q , при котором начинается образование вихря, может быть приближенно вычислен по нашим формулам, а именно для радиального колеса по уравнению (394) или (395), для осевого — по уравнению (403), применяя при этом эти уравнения для каждой конаксиальной окружности между самой большой и самой малой внутри системы лопаток. Так как для сравнения с опытом нет еще достаточного материала, то мы не будем дальше углубляться.

Если ближе присмотреться к фотографическим снимкам фиг. 135 и 136, то сразу станет ясно, что небольшим расходам гораздо труднее протекать канал лопаток, чем большим при одинаковом числе оборотов колеса. Таким образом мнение, с которым часто встречаемся в литературе и которое основано на формулах потери нашей основной теории (§ 34), а именно, что потеря протекания, приблизительно (т. е. не принимая во внимание влияния рейнольдсова числа) возрастает пропорционально второй степени Q , это мнение не подтверждается. Если даже еще не возник ясно выраженный вихрь канала, то все-таки скорости при различном отношении Q/ω тоже распределяются различно. Так как трение поверхностей (трение о стенки) также пропорционально второй степени относительной скорости, то неравномерное распределение вызывает также больше трений, чем равномерное.



Фиг. 144.

Таким образом с уменьшением расхода потери протекания в колесе будут уменьшаться не так сильно, как Q^2 , и как только образуется изолированный вихрь канала, появляется как новый источник потерь турбулентный обмен импульсов протекающего течения с вихрем.

Эти отношения трудно изложить теоретически в количественных выражениях; еще долгое время здесь будет слово за опытом. При этом общая потеря, возникающая при протекании рабочего колеса, с большим трудом делится на потерю на удар при входе и потерю протекания с повышенной турбулентностью и только в общих чертах может быть показана ее зависимость от относительного направления приходящего течения¹.

48. Заключительные замечания

Изложенное в § 44—47 надо рассматривать только как первое указание на особенные явления, которые наблюдаются при крайних режимах работы. Так как все следствия получились из одной формулы, которая считает жидкость лишенной трения, то нельзя ожидать, что действительные течения вполне, во всяком случае количественно, будут совпадать с вычислениями. Однако приведенные вычисления не теряют благодаря этому своей ценности. Современная теория течений во многих случаях еще и теперь идет таким путем, что она сначала исследует, какое состояние скорости и давление образовалось бы в идеальной жидкости и рассматривает это, как начальное состояние, которое преобразуется под влиянием трения, а именно: трения о стенки. Это преобразование может идти очень далеко, что мы и имеем в данном случае. Здесь мы не можем углубляться в подробности. Это остается для второго тома. В особенности сильно преобразовываются осевые вихри, менее — кольцевые вихри. Осевые — благодаря взаимодействию с протекающим течением. Влияние всех этих обстоятельств на расход и мощность в настоящее время можно учесть только в виде суммарной оценки или путем опыта.

¹ Феттингер в своем в высшей степени интересном докладе „Гидродинамическая передача работы, в особенности, посредством трансформаторов“ („Ежегодник судостроительного общества“ т. 31, 1900) сообщает о своих опытах и исследованиях также в области относительно течения через рабочие колеса. Уже в 1910 г. посредством опыта в Данииском высшем училище Феттингер установил относительное вихревое движение и предложил как средство его уменьшения повышение числа лопаток. Повод к этому дали ему результаты с особым типом его „трансформатора“, который как раз должен был быть применен для небольшого протекающего расхода при большой окружной скорости (так называемый сепяющийся тип, см. об этом выше-названный доклад). В то время как у других типов трансформаторов, которые не работают с крайне малыми величинами Q , основная теория с потерей удара и трения, составленная по схеме нашего баланса энергии в § 34, прекрасно передавала работу машины, здесь этого совпадения между опытом и вычислением не получалось. Тогда Феттингер в 1911 г. на основании своих опытов предложил (не опубликованную) теорию, которая давала выводы, совпадающие с опытом. В своем докладе в 1930 г. он кратко сообщает об опытах с вращающейся U-образной трубой (согласно фиг. 144, в которых он при небольшом отношении Q/ω нашел измерением больше чем сорократную величину сопротивления протеканию по сравнению с неподвижной трубой. Мы с интересом ждем подробностей об этих опытах в обещанной диссертации инж. Зилинга, Шарлоттенбург.

С. РАБОЧИЕ КОЛЕСА С ПОЛНЫМ ПОДВОДОМ В ОТКРЫТОМ ПОТОКЕ

Х. Струйная теория осевого колеса в открытом потоке

49. Описание распределения поля течения при технически важных формах машин

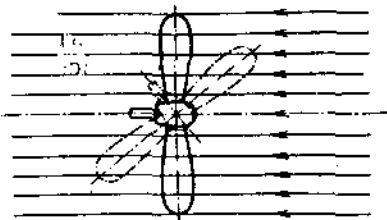
Рабочие колеса в открытом (неограниченном) потоке в большинстве случаев являются осевыми колесами, и именно в двух формах: как подъемные винты и пропеллеры или двигающие винты, с одной стороны, и как ветроиспользующие турбины — с другой. Подъемные винты и ветровые турбины являются осевыми колесами не меняющими своего положения в пространстве, пропеллеры кроме вращения имеют поступательное движение в направлении — ей оси при преодолении сопротивления. Подъемные винты и пропеллеры по своему внутреннему образу действия являются осевыми насосами, так как они приводятся в движение механически и частично превращают при неподвижном их местоположении (предполагая идеальную жидкость) механическую энергию в энергию течения. Во втором случае последняя должна быть по возможности незначительной и большая часть энергии должна превращаться в работу перемещения, но и в этом случае нельзя избежать преобразования механической работы в энергию течения. Во всяком случае задачей подъемных винтов и пропеллеров является создание осевого сдвига и соответственно получение его при возможно меньшем расходе механической работы и при возможно меньших размерах колеса. Соответственно задача ветровой турбины заключается в превращении энергии потока в механическую работу: здесь дело заключается, главным образом, в том, чтобы с данными размерами колеса получить по возможности больше механической энергии. Часто также встречаются неподвижные осевые колеса в качестве вентиляторов, но это их применение в настоящее время не имеет большого технического значения.

Причина, что колеса в открытом потоке всегда бывают осевыми колесами, лежит в природе вещей, так как радиальный или касательный подвод требовал бы закрытия части лопаток и следовательно напрасно тратилось бы большее или меньшее количество энергии. Для этого закрытия во время работы нужны приспособления, которые периодически переставляли бы при вращении лопатки и этим создавали бы благоприятные условия впуска, как того требует хорошая передача энергии. Все эти приспособления сложны и непрактичны и потому не укоренились. В основном удержалось только осевое колесо с полным подводом, а потому только оно и будет в дальнейшем рассматриваться. Оно располагается своей осью вращения по направлению движения потока и при нормальном положении подставляет ему полную свою проекцию для восприятия действия потока (фиг. 145). Только для уменьшения обмена энергии и поэтому для уменьшения перегрузки у ветровых турбин отклоняют ось от направления течения (фиг. 145). Поле скоростей, которое возникает благодаря взаимодействию меж-

ду лопаток... и течением, в действительности, очень сложно. Если представить сначала неподвижные колеса (ветровые турбины, вентиляторы), то и абсолютное течение только периодически постоянно. Если нет направляющих аппаратов, то период $\frac{2\pi}{z\omega}$ (причем z обозначает число лопаток колеса) и относительное течение постоянны. Если же будут установлены направляющие аппараты, то будут действительны те же замечания, которые были сделаны в § 27 о периодической смене абсолютной и относительной картины течения. Для того чтобы исчезли колебания и таким образом устранился посредством неподвижных осевых колес непостоянный характер течения, мы и здесь предположим бесконечно большое число лопаток. Однако если рабочее колесо кроме вращения имеет еще другое движение (в особенности, поступательное) в направлении своей оси, как это мы встречаем у пропеллеров), то абсолютное течение безусловно непостоянно и последствия этого факта не могут быть устранены никакими мероприятиями или устройствами.

Рассмотрим сначала неподвижное, приводимое механически в движение осевое колесо с бесконечным числом лопаток, вращающееся внутри простирающейся во все стороны массы жидкости; жидкость сначала находится в покое, только вращение колеса приводит ее в движение. В установившемся состоянии колесо захватывает в единицу времени определенную массу жидкости и сообщает ей ускорение в направлении своей оси. Это может произойти только таким образом, что на одной стороне колеса — стороне входа — образуется пониженное давление, на другой — на стороне выхода — избыточное давление по отношению к давлению непогрешенной жидкости; колесо своим действием на течение поддерживает повышение давления. Фиг. 146а показывает получающуюся картину токов в ближайшей к колесу области, а фиг. 146b — в более отдаленном пространстве. Жидкость подступает со всех сторон и объединяется колесом в струю. Так как давление в струе постоянно сравнивается с окружающим давлением, то и в ней (следовательно, позади колеса) жидкость еще ускоряется, струя сжимается, достигает, наконец, при цилиндрически круглой форме, скорости $c_{\text{ст}}$. Можно в воображении заменить колесо поршнем в трубе,двигающимся очень быстро и на очень коротком промежутке туда и обратно. Поршень должен был бы иметь очень много обратных клапанов, которые закрывались бы при ходе вперед и открывались бы при обратном ходе, чтобы течение не прерывалось¹.

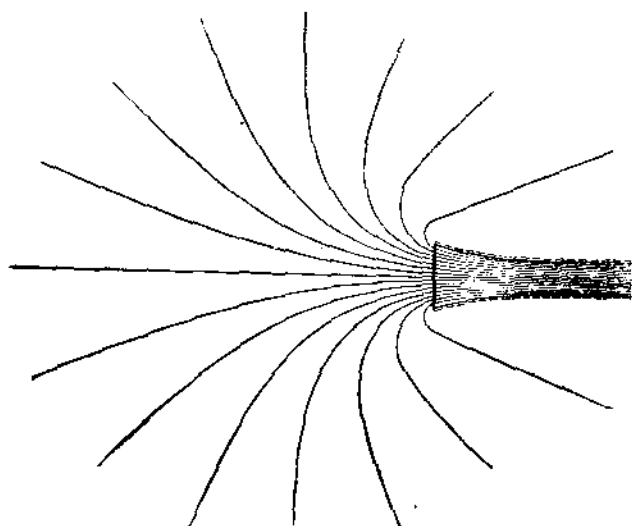
На далеком расстоянии от колеса можно представить себе притекание как радиальное течение к точкообразному „поглотителю“, лежащему в области входа перед колесом. Это важно



Фиг. 145. Ветряное колесо.

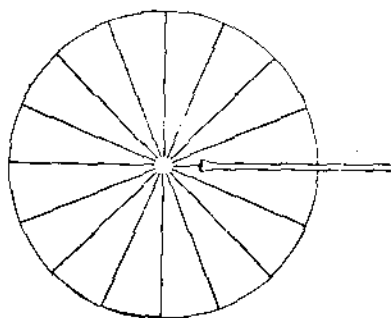
¹ Сравни Феттингер, Новые основы теории пропеллеров, „Ежегодник об-ва судостроения“, 1918, изд. Шпрингера.

для дальнейших рассуждений, а именно мы принимаем, что течение на далеком расстоянии направлено в среднем радиально к точке, лежащей вблизи колеса на оси, и скорости течения обратно пропорциональны квадратам расстояний от этой точки (так как

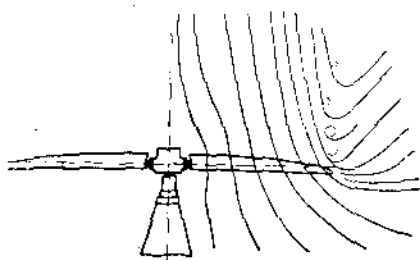


Фиг. 146а. Теоретические линии „собственного“ течения при приведении во вращение осевого колеса.

приток происходит по шаровой поверхности, которая прерывается только у места выхода струи). Так как фиг. 146а изображает идеальную жидкость, то отчетливо видны границы потока, на которых



Фиг. 146 б. Теоретические линии „собственного“ течения при приведении во вращение осевого колеса,



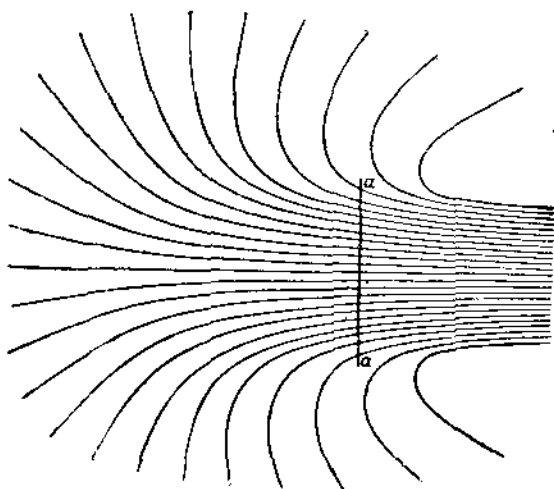
Фиг. 147. Действительное течение, вызванное приведенным во вращение осевым колесом.

скорости от внешних малых величин сразу переходят на внутренние большие величины и меняют свое направление. На ее конечном кольцеобразном крае, приблизительно в средней плоскости колеса, скорости должны были бы быть бесконечно большими. В действительности границей струи служит слой, заполненный вихрями,

внутри которого могут быть также линии тока, которые пришли из бесконечности, но возвращаются обратно, не достигнув плоскости колеса; эти линии во всяком случае находятся в области незначительной скорости. Фиг. 147 показывает картину линий тока¹, полученную посредством измерений, которая в общем вполне подтверждает наши представления. Соответственно этому мы вычерчиваем фиг. 148 как картину, более отвечающую действительности, однако все еще идеализированную. Здесь симметричное течение, направляющееся к воображаемому „поглотителю“ перед колесом, еще больше нарушается, чем в случае фиг. 146. Несмотря на это, мы можем все-таки на большом расстоянии принимать величины скоростей течения к колесу как равномерно распределенные по поверхности очень большого шара.

Фиг. 146, 147 и 148 изображают поток, возникший в первоначально неподвижной жидкости от приведенного в действие неподвижного осевого колеса. При этом безразлично, служит ли это колесо вентилятором или подъемным винтом.

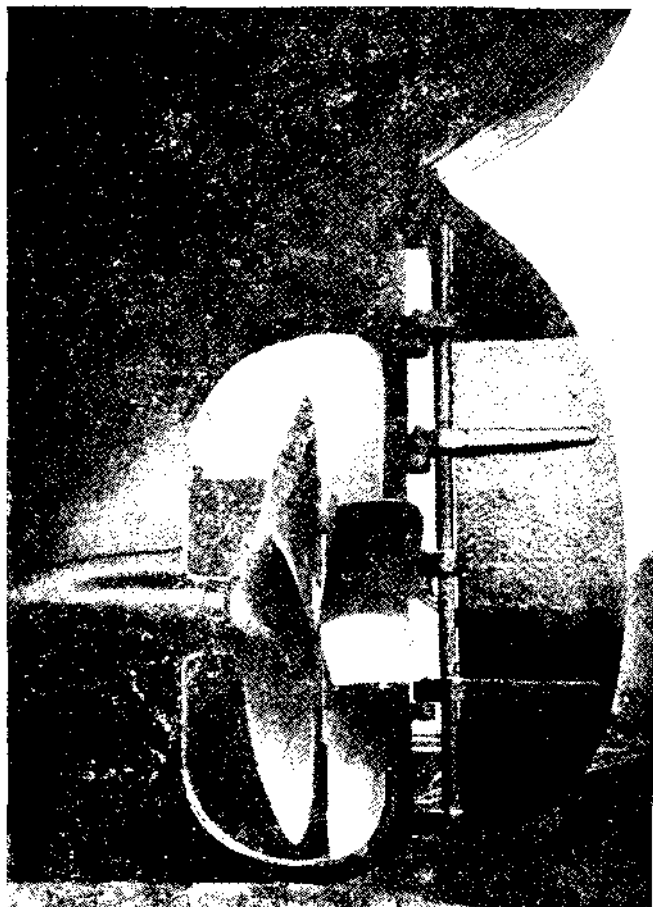
Для идеальной жидкости вся механическая двигательная мощность переходит в энергию потока. Двигательной мощности соответствует двигательный момент на валу, а этому—снова момент в струе. В скоростях, подходящей к колесу жидкости нет окружных скоростей; у прошедшей же через колесо они должны иметь направление вращения колеса, если мы имеем перед собою колесо, приводимое в действие механически (подъемный винт, воздушный винт, пропеллер, вентилятор). Момент скорости появляющийся после колеса можно устранить различными способами. Например, или устраивают 2 осевых колеса, из которых второе приводится во вращение в направлении, противоположном первому колесу; оно уничтожает как раз окружные скорости, возникшие благодаря вращению первого колеса. В то время как второе колесо сводит к нулю момент, противоположный направлению его вращения, следовательно, отрицательный момент скоростей, оно действует совершенно так же, как и первое, т. е. как насос точно так же передает энергию жидкости и так же ее ускоряет. Поэтому оба колеса вместе могут рассматриваться как



Фиг. 148. Идеализированное представление о течении, вызванном осевым колесом.

¹ Взято из Бендемана, Исследования воздушных пропеллеров. Отчеты особого комитета юбилейного немецкой промышленности, тетрадь 3, 1918, изд. Ольденбурга.

одно колесо, которое передает течению энергию, не навязывая ей момента $c_u \cdot r$. Чисто теоретически это можно себе представить при помощи одного колеса, если мы будем представлять механическую энергию, получаемую посредством бесконечно малого момента и с бесконечно большой угловой скоростью ω , причем $M\omega$ равно заданной величине мощности L . Далее, можно установить



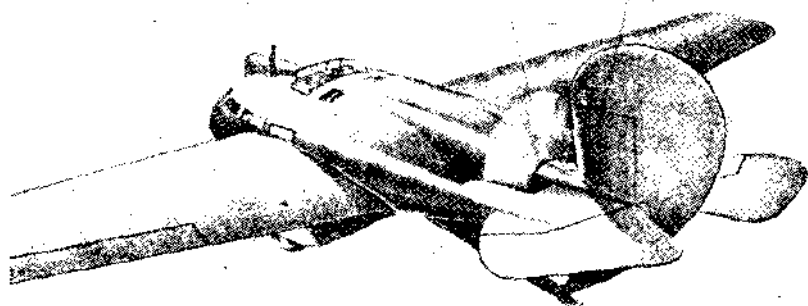
Фиг. 149. Пропеллер и контрпропеллер парохода.

перед вращающимся колесом или позади него или даже как перед, так и позади него неподвижное колесо в качестве направляющего аппарата. Действие таких направляющих колес вместе с рабочим колесом заключается всегда в том, чтобы создать струю в системе рабочего колеса без кручения (вихря), так как тогда вся энергия тратится на сообщение жидкости чисто осевой скорости, а общая сила ускорения реакции также направлена в осевом направлении, и подобна сдвигу. Такие направляющие колеса под названием контрпропеллера уже введены у кораблей и также предложены для аз-

ропланов фиг. 149 и 150, которые взяты из „Ежегодника технического общества по судостроению“¹, показывают такие машины. При неподвижных осевых колесах может возникнуть вопрос о всех вышеназванных мероприятиях, хотя бы с целью предохранить систему, носящую рабочее колесо, от реакции приводному моменту. Осевые, радиальные и окружные скорости постоянно меняются при прохождении через направляющее или рабочее колесо. Каждое направляющее и рабочее колесо, идеализируя, можно заменить плоскостью прохождения, перпендикулярной к направлению оси.

И тогда еще осевые и радиальные составляющие должны бы постоянно меняться при прохождении через эту поверхность, так как поперечное сечение струи должно постоянно меняться. Но

Пропеллер Направляющая плоскость

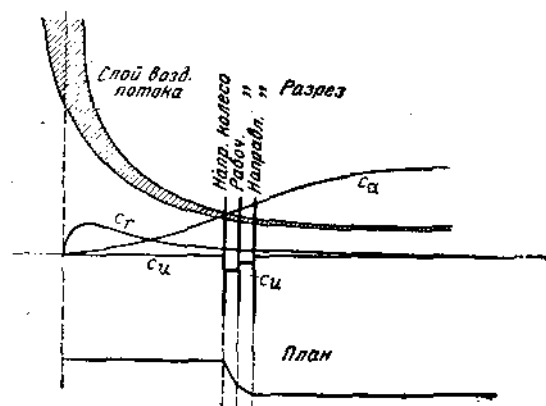


Фиг. 150. Пропеллер и контр-направляющий аппарат аэроплана.

окружная скорость меняется в плоскости прохождения непостоянно: точно так же и давление. Тогда линии тока внутри поверхности вращения, в которой они проходят, имеют в поверхности прохождения излом в направлении окружности. На фиг. 151 изображены изменения скорости и давления в слое вращения для неподвижной системы осевого колеса, на горизонтальной проекции; там же изображена одна линия тока, проходящая в этой поверхности. Поверхность вращения показана только для верхней половины сечения, осевая, радиальная и касательная скорости и давление нанесены над осями абсцисс. Имеются входной и выходной направляющие аппараты, а их взаимодействие с колесом рассчитано так, что в струе не остается окружных скоростей. Если на какой-нибудь поверхности прохождения взять кольцевой элемент струи между радиусами r и $r+dr$ и не обращать внимания на незначительную радиаль-

¹ См. Вагнер, Взгляд на прошедшее и виды на будущее в развитии контр-пропеллера, „Ежегодник технического об-ва судостроения“ т. 30, 1929.

ную скорость, которая получается от изменения поперечного сечения всей струи, то можно представить поток развернутым на плоскость. Тогда влияние лопаток (направляющих или рабочих) колеса на течение будет сходно с влиянием на него (неподвижной или движущейся) параллельной решетки (или, если хотят принять во внимание сужение или расширение струи, то берется развертка конуса по способу § 28, и тогда рассматривается движение через кругловую решетку с очень большим радиусом). Такую решетку можно заменить поверхностью, в которой перпендикулярные составляющие — постоянные, касательные составляющие — непостоянные. Вследствие этого в ней также непостоянно и давление. То же самое бывает



Фиг. 151. Изменение скоростей и давления в собственном течении.

в струе при прохождении через поверхность, заменяющую колесо. Впрочем, скорости и давление меняются в струе в зависимости от радиуса. На отчетливой границе струи, которую надо представить в идеальной жидкости, упомянутые уже скорости непостоянны, но давление у границ струи должно определенно переходить в давления окружающей среды. В реальной жидкости переход как скоростей, так и давления в величины окружающей среды происходит через промежуточный слой жидкости, смотря по обстоятельствам или неподвижной, или очень медленно движущейся, большей же частью наполненной вихрями.

По мере удаления от колеса, струя все больше и больше принимает цилиндрическую форму. Если в ней нет окружных скоростей, то у нее одинаковое давление во всем поперечном сечении, а именно давление окружающей среды, т. е. неподвижной жидкости. Если же в струе есть окружающая скорость, то вообще давление в ее поперечном сечении различно, и только на наружной поверхности равно окружающему.

Мы назовем вышеописанное течение, которое возникает в перемещающейся системе с механически приводимыми в движение колесами, в первоначально неподвижной во все стороны простирающейся жидкости собственным течением системы. Характерным в нем является прежде всего только осевая скорость c_{a1} в кругло-

цилиндрической части струи, а именно ее средняя величина, так как мы ничего не говорим о распределении в струе скоростей.

Если эта система, кроме вращательного движения своих рабочих колес имеет еще равномерное прямолинейное поступательное движение, при котором ее ось остается все время параллельной, а система все время достаточно удаленной от границ жидкости,

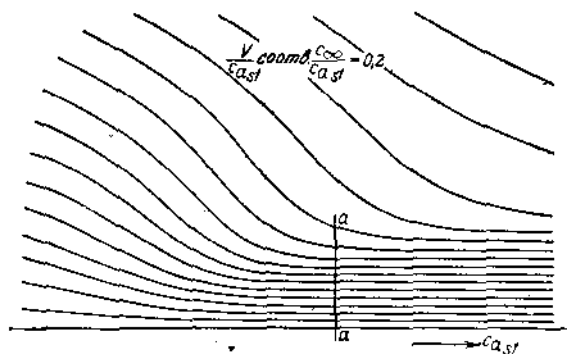
то ее собственное течение движется с нею не изменяясь; благодаря этому оно делается мгновенным абсолютным течением. Относительное течение получается тогда, когда в каждое мгновение и в каждой точке пространства отнимают от вектора скорости собственного течения вектор скорости поступательного движения. Так как он постоянен не только в пространстве, но и по времени, то и относительное движение, установившееся в большинстве случаев в направлении струи, бывает только поступательным движением, но противоположным скорости струи $c_{a_{el}}$. Для построения (на чертеже) относительного течения надо наложить на собственное течение однородное поле скоростей со скоростями V в одинаковом направлении с $c_{a_{el}}$. Касательные и радиальные составляющие собственного течения остаются при этом нетронутыми; меняются только осевые составляющие. В зависимости от числовой величины отношения $V:c_{a_{el}}$ получаются разные картины относительных линий тока. Фиг. 152 а, б, с изображают картины для изображений $V:c_{a_{el}} = 0,2; 0,5; 1$ ¹.

Они показывают, что одна часть относительного течения, хотя и подвергается влиянию рабочего колеса, однако через него не протекает; колесо выделяет, смотря по обстоятельствам, разную струю из относительного течения, а именно с увеличивающимся отношением скоростей $V:c_{a_{el}}$ отношение поперечного сечения струи перед и позади рабочего колеса убывает и приближается при $V:c_{a_{el}} \rightarrow \infty$ к единице. Одновременно жидкость впереди и позади пропеллера остается в неподвижном пространстве в покое, пропеллер не оказывает никакого действия на жидкость и не испытывает ее действия.

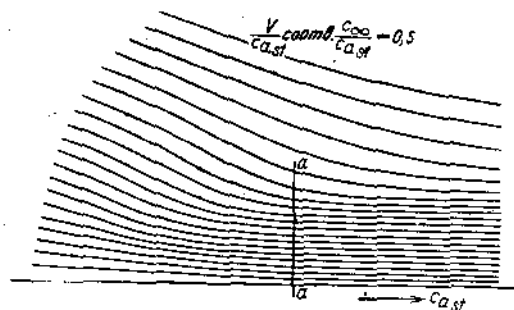
Но фиг. 152 а, б, с могут рассматриваться так же, как изображения абсолютного течения, которое возникает от неподвижной системы рабочего колеса в заранее данном поле скоростей со скоростью $c_{a_{1\infty}}$ одинакового направления с $c_{a_{el}}$. Мы имеем тогда дело с вентилятором или подъемным пропеллером с заранее данной скоростью течения. В заключение надо отметить, что они изображают относительное течение, которое принадлежит пропеллеру, двигаемому со скоростью V , противоположной $c_{a_{el}}$, если он движется в заранее данном поле скоростей со скоростью $c_{a_{1\infty}}$ одинаково направленной с $c_{a_{el}}$; вместо V или $c_{a_{1\infty}}$ здесь является сумма $(c_{a_{1\infty}} + V)$. Собственное течение приводимого в движение механически и передающего энергию жидкости рабочего колеса, как мы видим, может быть осуществлено в действительности движущимся колесом, неподвижно установленным в первоначально покоящейся жидкости. При этом существенным является факт выравнивания давления в полученной струе или, по крайней мере,

¹ Чтобы быстрее изобразить картину, вместо вращательно-симметричного течения было положено в основу плоское течение для того, чтобы можно было применить упомянутый в § 23 способ Максвелла для построения равнодействующей течения из двух частных течений.

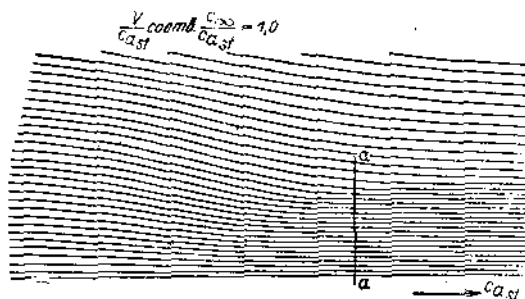
на ее боковой поверхности, так что на шарообразной границе поля скоростей в основном имеется одинаковое давление. Скорость



Фиг. 152 а. Относительное течение около осевого колеса, перемещающегося по направлению оси.



Фиг. 152 б. Относительное течение около осевого колеса, перемещающегося по направлению оси.



Фиг. 152 в. Относительное течение около осевого колеса, перемещающегося по направлению оси.

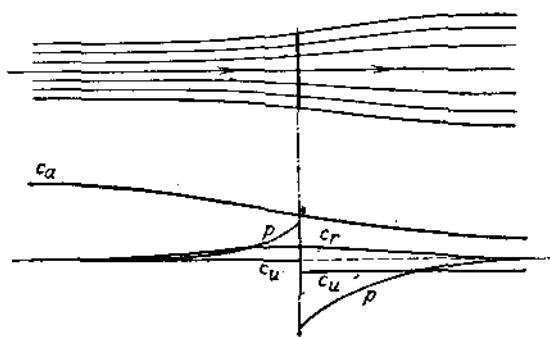
на этой границе за исключением скорости в струе бесконечно мала. При таких предположках отнять энергию у жидкости, конечно, невозможно. Это удается только в потоке с определенной скоростью конечной величины. Фиг. 153 показывает действие ветровой турбины на однородное поле скоростей. Изображенное здесь течение отличается от изображенного на фиг. 152а-с тем, что здесь имеется однородная скорость не нарушенного поля, наибольшая из всех имеющихся, тогда как в фиг. 152а-с она наименьшая. Все представления о ходе скоростей, также как о скачке давления в плоскости прохождения колеса, применимы также к струе турбины. На фиг. 153 мы находим все существенное. Колесо задерживает проходящее течение, благодаря чему возникает на его стороне входа повышение давления, соответствующее замедлению частиц жидкости. Замедление еще имеется также на стороне выхода из колеса, с чем связано понижение давления на стороне выхода, которое только постепенно сглаживается. Струя все время расширяется. Замедлению частиц жидкости и соответствует отдача колесу энергии, дающая момент вращения.

Если дополнительно желают составить (изобразить) течение через турбину из

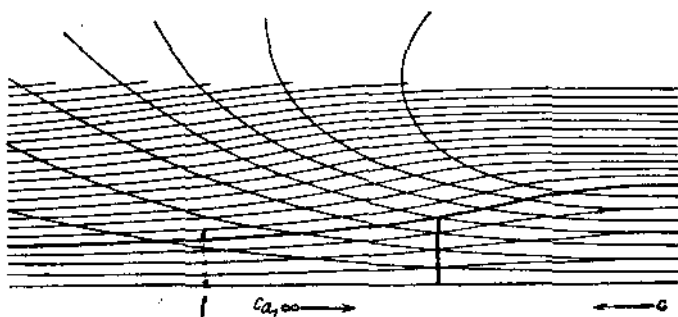
равномерного течения и дополнительного поля, возникшего благодаря турбине, то это дополнительное поле можно получить из общего поля. Это достигается наложением на однородное поле поля

равного, но направленного обратно общему. Тогда мы получаем в качестве собственного течения ветровой турбины такое течение, которое направлено противоположно данному общему течению, — можно сказать, оно имеет отрицательные скорости струи. Величина их в большом отдалении за колесом наиболее велика, там же фактическое течение имеет самые незначительные положительные скорости. Собственное течение имеет там поперечное сечение большее, чем колесо; кроме того, оно там отклоняется от колеса. Фиг. 154 показывает реальное и полученное из него собственное течение через ветряную турбину.

Если свести все это вместе, то можно сказать: каждое рабочее колесо в открытом потоке имеет собственное течение; оно в основном представляется свободной струей, которая направляется от колеса, если колесо работает в качестве насоса и направляется к колесу, если оно работает в качестве турбины. Абсолютные величины скоростей струи всегда больше на большом расстоянии от колеса, чем около самого колеса. Поперечное сечение струи на большом расстоянии при работе турбины больше, чем пло-



Фиг. 153. Форма потока, распределение скоростей и давлений в потоке, проходящем ветряной двигатель (турбину).



Фиг. 154. Течение через ветряной двигатель (турбину) и соответствующее собственное течение.

щадь круга колеса, при работе насоса — меньше. Жидкость, соединяющаяся в струю у колеса насоса, собирается со всех направлений, в то время как у турбинного колеса она растекается по всем направлениям. Надо еще раз подчеркнуть, что собственное течение колес, работающих в качестве насоса, в действительности физически может быть осуществлено само по себе, в то время как собственное течение турбинных колес может быть только представлено как частичное течение, выделенное из возможного физического.

Описанные картины линий тока идеализированы, так как при их составлении не принималось во внимание влияние несущих конструкций. Они нарушают поле скорости как у неподвижной, так и имеющей собственное движение системы с рабочим колесом. В особенности у последней (например, пароход или самолет) имеются собственные течения, которые при наблюдении их с неподвижной точки могут рассматриваться как вытесняемые течения. Однако мы в этом томе не будем рассматривать эти влияния, следовательно, будем предполагать, что несущие конструкции очень далеко удалены от системы колеса, т. е. мы говорим о пароходном или самолетном винте, как о свободно двигающемся пропеллере. Соответственно мы должны были бы внести выражения свободностоящий подъемный винт, свободностоящие вентилятор или ветровая турбина. В заключение отмечаем, что для нашей основной теории оставляем без внимания то обстоятельство, что судовые винты лежат близко к границе жидкости.

50. Теоремы импульса и энергии для колес в открытом потоке

Сначала рассмотрим одно колесо (без направляющего аппарата), которое с заранее заданной скоростью V движется в жидкости, имеющей противоположно направленную скорость c_{a1} . Оно передает энергию жидкости и порождает, таким образом, собственное течение со скоростью c_{a2} , одного направления с c_{a1} . Упростим себе задачу, предполагая приближенно, что осевая скорость распределена в струе равномерно.

Рассмотрим абсолютное течение и вспомним положение об импульсе и энергии. При их применении надо, как известно, ограничить надлежащим образом контрольной поверхностью контрольное пространство, в котором заключены также неподвижные части, находящиеся во взаимодействии с жидкостью. К числу внешних сил относим те силы, которые передаются контрольной поверхностью непосредственно через нее как твердым так и текучим частям. Применяя теорему об импульсе, необходимо условиться об определенном направлении, поэтому получаем:

Положительная составляющая в определенном направлении равнодействующей всех внешних сил равна положительному приращению в единицу времени составляющей в том же направлении всего импульса в контрольном пространстве.

Таким образом для интересующего нас только осевого направления (индекс a) получается:

$$\sum P_a = \frac{d}{dt} \sum m c_a. \quad (404)$$

Если применить теорему момента импульса, то, приняв соответственно подходяще выбранную ось (Bezugsachse), можно сказать: момент всех внешних сил равен приращению за единицу времени всех моментов импульса контрольного пространства.

Таким образом в нашем случае, если обозначить окружные скорости в плоскости, перпендикулярной оси колеса, через c_u :

$$\sum (P_u \cdot r) = \frac{d}{dt} \sum m \cdot c_u \cdot r. \quad (405)$$

В теореме об энергии дело идет о величинах, не имеющих направления; она гласит:

Работа всех внешних сил, произведенная в единицу времени, равна приращению за то же время всей кинетической энергии контрольного пространства.

Таким образом

$$\sum (P, c) = \frac{d}{dt} \sum m \frac{c^2}{2}. \quad (406)$$

При неустановившемся течении, о котором здесь в общем идет речь, изменения, происходящие в контрольном пространстве в продолжение элемента времени dt , состояются из частных изменений, поскольку мы рассматриваем жидкость, как движение частиц жидкости в поле, представляемом в данный момент постоянным.

Теперь мы имеем в виду подробно разъяснить уравнения (404), (405), (406). В качестве контрольной поверхности выбираем очень большой шар; центр которого лежит вблизи колеса на стороне его входа. Мы рассмотрим свободно двигающуюся или свободно стоящую машину. Таким образом крутящий момент и сдвиг передаются длинным валом, расположенным в пустом стержне с бесконечно тонкими стенками; вал выходит из контрольной поверхности. В поперечном сечении, в котором контрольная поверхность пересекает вал, сдвиг S передается посредством напряжений растяжения или сжатия, а крутящий момент M — напряжениями кручения. Если мы, например, представим пропеллер, двигающийся впереди судна, то мы имеем дело с напряжениями растяжения; вал расположен в центре струи. Кроме этих сил существуют еще силы давления жидкости на контрольный шар. Если он достаточно велик, можно говорить о симметричном распределении давления, которое простирается вплоть до поперечного сечения луча F_{st} . Таким образом все силы давления уничтожаются вплоть до тех, которые обусловлены разностью давлений жидкости в поперечном сечении струи F_{st} с давлениями в равновеликом диаметрально-противоположащем сечении на контрольном шаре. Если мы примем за нулевое, — давление покоящейся жидкости, т. е. давление на контрольный шар вне струи, то абсолютная величина этой разности будет:

$$\int_{F_{st}} p \cdot dF.$$

Мы принимаем направление c_{st} за положительное и вводим как положительные все силы, которые действуют извне на систему в этом направлении (следовательно, также на частицы жидкости). Поэтому мы имеем для суммы всех внешних сил:

$$\sum P_o = S - \int_{F_{st}} p \cdot dF.$$

Часть изменений импульса, соответствующая установившейся слагающей движения, вычисляется как избыток мгновенно вытекающего из контрольной поверхности импульса над притекаю-

шим. Чтобы его определить, полагаем на мгновение $V = 0$ и представляем поле скорости, построенное из c_{a_1} и собственного течения колеса. В нем выделяем струю, которая в секунду переносит массу.

$$F_{st}(c_{a_1} + c_{ast}) \frac{\gamma}{g}.$$

Все частицы жидкости этой струи получают ускорение от c_{a_1} до $c_{a_1} + c_{ast}$. Таким образом струя дает для увеличения импульса в контрольном пространстве величину, соответствующую установившейся части движения

$$\Delta J_{yem} = \frac{\gamma}{g} F_{st}(c_{a_1} + c_{ast}) c_{ast}.$$

Если мы предположим контрольный шар достаточно большим, то части контрольной поверхности вне поверхности прохождения струи не дают никакого приращения.

Местное изменение импульса происходит оттого, что поле скорости передвигается со скоростью V по отношению неподвижного контрольного пространства. При этом в основном дело идет о поле скорости собственного течения, так как поле основного течения c_{a_1} установившееся. Благодаря передвижению собственного течения в контрольное пространство продвигается масса:

$$F_{st} V \frac{\gamma}{g},$$

которая по сравнению с основным течением имеет скорость, увеличенную на c_{ast} , т. е. приносит с собой увеличение импульса:

$$\Delta J_{мстм} = \frac{\gamma}{g} \cdot F_{st} \cdot V c_{ast}.$$

Благодаря передвижению импульс передается на других частях контрольной поверхности не больше, чем получается ими, так как поле собственного течения, вплоть до поверхности поперечного сечения струи симметрично, и, поверхность, противолежащая в контрольном шаре поперечному сечению струи, одинаковой с ним величины, следовательно, конечная поверхность имеет бесконечно малые скорости собственного течения.

Теперь выражение импульсов пишется:

$$\text{или} \quad S - \int_{F_{st}} p \cdot dF = \frac{\gamma}{g} F_{st}(c_{a_1} + c_{ast} + V) c_{ast}, \quad (407)$$

$$S = \int_{F_{st}} p \cdot dF + \frac{\gamma}{g} F_{st}(c_{a_1} + c_{ast} + V) c_{ast}. \quad (408)$$

Для вычисления крутящего момента мы примем распределение окружной скорости в струе позади колеса по правилу:

$$c_{a_1} r = \text{const} = k. \quad (409)$$

Перед проходом через колесо нет никаких окружных скоростей, следовательно, когда энергия передается жидкости, окруж-

ные скорости позади колеса должны быть направлены в сторону вращения колеса. Из внешних сил только напряжение кручения имеет момент, который мы обозначим через M . Давления жидкости на контрольный шар пересекают своими направлениями ось или параллельны ей, следовательно, не имеют момента. Приращение момента импульса складывается тоже из установившегося и местного, которые определяются совершенно так же, как соответствующие части приращения импульса. Поэтому сейчас же можно написать уравнение момента;

$$M = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) k. \quad (410)$$

Для работы внешних сил имеем:

$$M \cdot \omega - S \cdot V - \int_{F_{st}} p (c_{a_1} + c_{a_{st}}) dF.$$

Здесь $M \cdot \omega = L$ — механическая мощность импульса, $S \cdot V$ — механическая мощность, затраченная на преодоление сопротивления сдвигу¹.

Интеграл представляет мощность поверхностных сил на контрольной поверхности, которые только в сечении струи имеют величину, отличную от нуля.

Приращение живой силы получается от приращения осевых скоростей так же, как от вновь возникших окружных скоростей. Каждая из этих величин имеет часть, установившуюся и местную. Посредством таких же рассуждений, как при рассмотрении импульса, подтверждается правильность ниже написанных формул:

$$\Delta E_{\text{уст}} = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}}) \frac{(c_{a_1} + c_{a_{st}})^2 - c_{a_1}^2}{2} + \frac{\gamma}{g} (c_{a_1} + c_{a_{st}}) \int_{F_{st}} \frac{c_u^2}{2} dF,$$

$$\Delta E_{\text{местн}} = \frac{\gamma}{g} F_{st} V \frac{(c_{a_1} + c_{a_{st}})^2 - c_{a_1}^2}{2} + \frac{\gamma}{g} V \int_{F_{st}} \frac{c_u^2}{2} dF.$$

Так как окружные скорости меняются в поперечном сечении, то надо для соответствующих частей написать интегралы. Теперь, применяя теорему об энергии, получаем:

$$\left. \begin{aligned} M \cdot \omega - S \cdot V + \int_{F_{st}} p (c_{a_1} + c_{a_{st}}) dF = \\ = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) \frac{(c_{a_1} + c_{a_{st}})^2 - c_{a_1}^2}{2} + \\ + \frac{\gamma}{g} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) \int_{F_{st}} \frac{c_u^2}{2} dF. \end{aligned} \right\} \quad (411)$$

Чтобы определить численное значение интеграла давления в уравнении (408), предположим энергию течения в струе позади колеса постоянной. Изменение давления в поперечном сечении

¹ У винтов, расположенных непосредственно на судах, в общем S неравно сопротивлению судна, так как винт и судно действуют в противоположные стороны. См. об этом Фрезениус: Принципиальная сущность взаимодействия между корпусом корабля и винтом, „Судостроение“, 1921—1922, стр. 257 или также „JFM“, 1928, тетрадь 8.

струи происходит от изменения окружных скоростей. Оно вычисляется из уравнения:

$$\frac{p_{st}}{\gamma} + \frac{c_{u_{st}}^2}{2g} = \frac{p_{st_a}}{\gamma} + \frac{c_{u_{st_a}}^2}{2g} = \frac{c_{u_{st_a}}^2}{2g}. \quad (412)$$

В этом уравнении давление p_{st_a} у поверхности струи принимается за равное давлению окружающей среды, следовательно, равно нулю, поэтому:

$$p_{st} = -\frac{\gamma}{g} \frac{c_{u_{st}}^2 - c_{u_{st_a}}^2}{2}. \quad (413)$$

Если мы это подставим в уравнение (408) и дальше соединим уравнения (408) и (410) с (411), то получится следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) \left\{ \omega k - \frac{c_{u_{st_a}}^2}{2} + \int_{F_{st_a}}^{F_{st}} \frac{c_u^2}{2} dF - V c_{a_{st}} \right\} = \\ = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) \left\{ \frac{(c_{a_1} + c_{a_{st}})^2 - c_{a_1}^2}{2} + \int_{F_{st_a}}^{F_{st}} \frac{c_u^2}{2} dF \right\}. \end{aligned}$$

Здесь интегралы взаимно уничтожаются и от интеграла давления уравнения (408) остается только $\frac{\gamma}{g} F_{st}$, умноженное на постоянный множитель $\frac{c_{u_{st}}^2}{2}$. После сокращения на множитель в скобках остается:

$$\omega k = \frac{(c_{a_1} + c_{a_{st}})^2 - c_{a_1}^2}{2} + V \cdot c_{a_{st}} + \frac{c_{u_{st}}^2}{2}, \quad (414)$$

или

$$\omega k = \frac{c_{a_{st}} [c_{a_{st}} + 2(c_{a_1} + V)] + c_{u_{st}}^2}{2}. \quad (415)$$

Полезно на время ввести относительную скорость по отношению к двигающемуся винту, т. е. рассмотреть изменения энергии, исходя от системы, в которую входит винт. Обозначим относительные скорости через w и вспомним что:

$$\begin{aligned} c_{a_1} + V = w_1; \quad c_{a_1} + c_{a_{st}} + V = w_2; \\ c_{a_{st}} = w_2 - w_1; \quad c_u = w_u. \end{aligned} \quad (416)$$

(По поводу уравнения $c_u = w_u$ надо указать, что здесь идет речь не о вращающейся системе, а о системе, двигающейся поступательно по направлению оси.)

Если мы эти отношения введем в уравнение (414), то получим:

$$\omega k = \frac{(w_2 - V)^2 - (w_1 - V)^2 + 2V(w_2 - w_1) + w_{u_{st_a}}^2}{2},$$

или

$$\omega k = \frac{w_2^2 - w_1^2 + w_{u_{st_a}}^2}{2}. \quad (417)$$

Как и должно быть, исчезли все отношения, которые указывают на совершенную работу сдвига; уравнение (417) выражает простое положение, что в рассматриваемой системе, движимой по оси винтом, механическая энергия расходуется для сообщения энергии относительно течения в струе. Причина того, что в уравнении (417) не появляется давление, заключается в том [как и в уравнениях (414) и (415)], что мы ввели энергию скорости на поверхности струи; при этом надо только особенно обозначить окружные скорости через индекс a , так как мы заранее предположим постоянными осевые составляющие, что выражение закона об энергии в системе, где винт не имеет осевого движения, будет просто, зависеть в основном от того, что течение в этой системе установившееся.

Теперь мы снова вычислим сдвиг, а именно из прыжка давления у поверхности прохождения колеса F .

Он равняется:

$$S = \int^F \Delta p \, dF.$$

Прыжок давления находим из баланса энергии, сравнивая, с одной стороны, относительную энергию течения непосредственно перед колесом с энергией на большом расстоянии перед ним, и с другой стороны, сравнивая энергию непосредственно позади колеса с энергией на краю поперечного сечения струи F_a .

Если мы обозначим давление перед колесом через p_r , давление позади его через p_h , то имеем:

$$\frac{p_r}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g},$$

так как давление на большом расстоянии равно нулю. С другой стороны, имеем:

$$\frac{p_h}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} - \frac{w_u^2}{2g} = \frac{w_s^2}{2g} + \frac{w_{usta}^2}{2g}.$$

Здесь учтено то обстоятельство, что осевые величины скорости при прохождении через колесо не имеют прыжка, и давление у поверхности струи равно нулю. Скорости в плоскости колеса введены без индекса. Мы находим:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_h - p_r}{\gamma} = \frac{w_s^2 - w_1^2 + w_{usta}^2}{2g} - \frac{w_u^2}{2g}.$$

Принимая во внимание уравнение (416) и равенство c_u и w_u , получаем:

$$\Delta p = \frac{\gamma}{g} \left(\omega k - \frac{c_u^2}{2} \right), \quad (418)$$

отсюда получается:

$$S = \frac{\gamma}{g} F \cdot \omega k - \frac{\gamma}{g} \int^F \frac{c_u^2}{2} dF. \quad (419)$$

С другой стороны, S определено по уравнению (408) [если там интеграл давления вычислить по уравнению (413)]:

$$S = \frac{\gamma}{g} F_{st} \frac{c_{u_{st}a}^2}{2} - \frac{\gamma}{g} \int_{r_i}^{r_{st}} \frac{c_u^2}{2} dF + \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) c_{a_{st}}. \quad (408a)$$

Если мы теперь введем:

$$F = (r_a^2 - r_i^2) \pi; \quad F_{st} = (r_{sta}^2 - r_i^2) \pi; \quad c_u \cdot r = c_{u_{st}} \cdot r_{st} = k, \quad (420)$$

то из сравнения уравнений (418) и (408a) получается:

$$\begin{aligned} \frac{\pi \gamma}{g} (r_a^2 - r_i^2) \omega \cdot k + \frac{\pi \gamma}{g} k^2 \left(\int_{r_i}^{r_{sta}} \frac{dr}{r} - \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} \right) = \\ = \frac{\pi \gamma}{g} (r_{sta}^2 - r_i^2) \left[\frac{c_{u_{sta}}^2}{2} + (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) c_{a_{st}} \right]. \end{aligned}$$

Если заменить $c_{u_{sta}}^2$ в уравнении (415) через

$$\frac{c_{u_{sta}}^2}{2} = \omega k - \frac{c_{a_{st}} \{ c_{a_{st}} + 2(c_{a_1} + V) \}}{2}$$

по приведении членов с ωk и взятии интеграла окончательно получается

$$\omega k (r_a^2 - r_{sta}^2) + k^2 \ln \frac{r_{sta}}{r_a} = (r_{sta}^2 - r_i^2) \frac{c_{a_{st}}^2}{2}. \quad (421)$$

С обоими уравнениями (415) и (421) приходится иметь дело при осевых колесах в открытом течении. Мы их еще немного изменим. Обозначим через ϱ отношение внешнего радиуса в поперечном сечении струи F_{st} к внешнему радиусу в плоскости колеса F и таким образом пишем:

$$\varrho = \frac{r_{sta}}{r_a}; \quad (422)$$

соответственно имеем:

$$\varrho_i = \frac{r_i}{r_a}. \quad (423)$$

При этом надо напомнить, что мы предполагаем в струе позади колеса наличие неподвижного сердечника, образованного валом и пустым стержнем для его установки, имеющего постоянный радиус r_i . Мы пользуемся представлением, что k постоянно во всей струе, следовательно, и над плоскостью колеса, для того чтобы написать, что

$$\omega k = \omega \cdot c_u \cdot r = u \cdot c_u = u_a \cdot c_{u_a} \quad (424)$$

для предельной окружной скорости колеса. Так же как в теории турбин мы вводим здесь диаграммную характеристику m , которую здесь определяем по диаграмме окружной скорости колеса, а именно:

$$m = \frac{c_{u_a}}{u_a}. \quad (425)$$

С другой стороны, S определено по уравнению (408) [если там интеграл давления вычислить по уравнению (413)]:

$$S = \frac{\gamma}{g} F_{st} \frac{c_{u_{sta}}^2}{2} - \frac{\gamma}{g} \int_{r_i}^{r_{sta}} \frac{c_u^2}{2} dF + \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) c_{a_{st}}. \quad (408a)$$

Если мы теперь введем:

$$F = (r_a^2 - r_i^2) \pi; F_{st} = (r_{sta}^2 - r_i^2) \pi; c_u \cdot r = c_{u_{st}} \cdot r_{st} = k, \quad (420)$$

то из сравнения уравнений (418) и (408a) получается:

$$\begin{aligned} \frac{\pi \gamma}{g} (r_a^2 - r_i^2) \omega \cdot k + \frac{\pi \gamma}{g} k^2 \left(\int_{r_i}^{r_{sta}} \frac{dr}{r} - \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} \right) = \\ = \frac{\pi \gamma}{g} (r_{sta}^2 - r_i^2) \left[\frac{c_{u_{sta}}^2}{2} + (c_{a_1} + c_{a_{st}} + V) c_{a_{st}} \right]. \end{aligned}$$

Если заменить $c_{u_{sta}}^2$ в уравнении (415) через

$$\frac{c_{u_{sta}}^2}{2} = \omega k - \frac{c_{a_{st}} (c_{a_{st}} + 2(c_{a_1} + V))}{2}$$

по приведении членов с ωk и взятии интеграла окончательно получается

$$\omega k (r_a^2 - r_{sta}^2) + k^2 \ln \frac{r_{sta}}{r_a} = (r_{sta}^2 - r_i^2) \frac{c_{a_{st}}^2}{2}. \quad (421)$$

С обоими уравнениями (415) и (421) приходится иметь дело при осевых колесах в открытом течении. Мы их еще немного изменим. Обозначим через ϱ отношение внешнего радиуса в поперечном сечении струи F_{st} к внешнему радиусу в плоскости колеса F и таким образом пишем:

$$\varrho = \frac{r_{sta}}{r_a}; \quad (422)$$

соответственно имеем:

$$\varrho_i = \frac{r_i}{r_a}. \quad (423)$$

При этом надо напомнить, что мы предполагаем в струе позади колеса наличие неподвижного сердечника, образованного валом и пустым стержнем для его установки, имеющего постоянный радиус r_i . Мы пользуемся представлением, что k постоянно во всей струе, следовательно, и над плоскостью колеса, для того чтобы написать, что

$$\omega k = \omega \cdot c_u \cdot r = u \cdot c_u = u_a \cdot c_{u_a} \quad (424)$$

для предельной окружной скорости колеса. Так же как в теории турбин мы вводим здесь диаграммную характеристику m , которую здесь определяем по диаграмме окружной скорости колеса, а именно:

$$m = \frac{c_{u_a}}{u_a}. \quad (425)$$

Таким образом мы можем положить:

$$\omega k = m u_a^2, \quad (426)$$

с другой стороны,

$$k^2 = c_{at}^2 r_a^2 = m^2 u_a^2 r_a^2. \quad (427)$$

Выражение $m u_a^2$ является g -кратной энергией относительного течения H , передаваемой колесом каждому килограмму.

Из уравнения (421) получается, если мы разделим на r_a^2 и воспользуемся уравнениями (424) — (427) и напомним $\frac{1}{2} \ln q^2$ вместо $\ln q$:

$$m \cdot u_a^2 \left(1 - q^2 + \frac{m}{2} \ln q^2\right) = (q^2 - q_t^2) \frac{c_{at}^2}{2}. \quad (428)$$

Уравнение (415) напишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega k &= c_{at} (c_{a1} + V) + \frac{c_{at}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{k^2}{r_{at}^2} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2} = \\ &= c_{at} (c_{a1} + V) + \frac{c_{at}^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{r_a^2} \frac{1}{q^2}, \end{aligned}$$

или

$$m - u_a^2 \left(1 - \frac{m}{2q^2}\right) = c_{at} (c_{a1} + V) + \frac{c_{at}^2}{2}. \quad (429)$$

Уравнения (428) и (429) применяются, предполагая данными c_{a1} , также m , r_a и u_a . Тогда этих уравнений достаточно, чтобы определить r_{at} , ρ , если заранее определить ρ_t . Это мы имеем право сделать для свободно двигающегося или свободно стоящего колеса (о котором здесь все время идет речь). Величину c_t примем равной средней толщине втулки или вала. Положим $q_t^2 = 0,1$.

Если c_{at} и q определены, то из уравнения (410), после умножения на ω (заданную величинами u_a и r_a), получается израсходованная мощность и из уравнения (408) или (418) — сдвиг. Таким же образом из уравнения непрерывности получается c_a или w_a в плоскости колеса; так, что можно, по крайней мере, приближенно, определить углы абсолютных и относительных траекторий и посредством этого углы поверхностей лопаток.

51. Идеальные предельные случаи колес, приводимых в движение механически (струя без момента $c_u \cdot r$)

Как уже излагалось в § 49, можно себе представить бесконечно быстро двигающееся колесо и тогда при конечной мощности $M\omega$ с бесконечно убывающим моментом можно вычислить M или крутящий момент k . Это означает, что мы в наших формулах считаем $m \cdot u_a^2 = gH$ конечным, а $m = 0$.

В этом случае нам не надобно предполагать наличие сердечника стержня в струе. В общих случаях это необходимо, так как увеличивающаяся внутри окружная скорость соответствует убывающему

давлению, которому здесь должен быть поставлен предел. При $m = 0$, $\rho_i = 0$ и $m \cdot u_a^2 = gH$ из уравнений (428) и (429) получается:

$$2gH \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) = c_{a_{st}} \quad (430)$$

и

$$2gH = 2(c_{a_i} + V)c_{a_{st}} + c_{a_{st}}^2 \quad (431)$$

Если мы это преобразуем в два уравнения для относительных скоростей, для чего воспользуемся отношениям (416), то получится:

$$2gH(1 - \rho^2) = \rho^2(w_2 - w_1)^2, \quad (430a)$$

$$2gH = w_2^2 - w_1^2. \quad (431a)$$

Здесь надо рассматривать w_1 и H как данные, w_2 и ρ как искомые. Вместо ρ вводим при помощи уравнения непрерывности

$$F \cdot w = F_{st} \cdot w_2 \text{ или } r_a^2 w = r_{st}^2 w_2 \quad (432)$$

относительную скорость прохождения через плоскость колеса w и получаем:

$$\rho^2 = \frac{w}{w_2}; \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{w_2}{w}. \quad (433)$$

Вводя это уравнение и уравнение (431a) в уравнение (430a), получаем:

$$(w_2^2 - w_1^2) \frac{w_2 - w}{w} = (w_2 - w_1)^2$$

и отсюда после простого преобразования

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2}. \quad (434)$$

В абсолютных скоростях это выражение пишется:

$$c_a = c_{a_i} + V + \frac{c_{a_{st}}}{2}. \quad (435)$$

Таким образом в случае струи без момента скорости в плоскости колеса имеется половина абсолютной скорости струи; относительная скорость протекания есть средняя арифметическая из относительных скоростей далеко перед колесом и далеко позади него.

В струе без момента скорости $c_a \cdot r$ в цилиндрической части давление всюду равно окружающей среде. Поэтому в уравнении (408) исчезает интеграл давления и оно получается:

$$S' = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_i} + c_{a_{st}} + V) c_{a_{st}},$$

или, если ввести относительные скорости:

$$S' = \frac{\gamma}{g} F_{st} w_2 (w_2 - w_1) = \frac{\gamma}{g} F w (w_2 - w_1). \quad (436)$$

Знак прим (') указывает на то, что здесь мы имеем дело с идеальными предельными величинами. Из уравнения (410) получаем далее:

$$\begin{aligned} M\omega = L' &= \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_2} + V) \omega k = \frac{\gamma}{g} F_{st} w_2 g H = \\ &= \frac{\gamma}{g} F_{st} w \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (437)$$

Идеальный к. п. д. получается из

$$\varepsilon' = \frac{S'V}{L'} \quad (438)$$

или

$$\varepsilon' = 2 \frac{w_2 - w_1 V}{w_2^2 - w_1^2} = \frac{2V}{w_1 + w_2}, \quad (439)$$

или

$$\varepsilon' = \frac{2V}{2 \cdot (c_{a_1} + V) + c_{a_2}}, \quad (440)$$

Последние выводы полезно дополнить рассмотрением в относительном пространстве. В системе, где винт неподвижен при сделанных здесь предположениях, мощность должна тратиться на то, чтобы протолкнуть поток через плоскость колеса против повышенного давления, которое, умноженное на величину поверхности колеса, дает сдвиг. Таким образом должно быть

$$S'w = L'$$

или:

$$\frac{\gamma}{g} F w^2 (w_2 - w_1) = \frac{\gamma}{g} F w \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}, \quad (441)$$

или

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2},$$

следовательно, получается результат, одинаковый с уравнением (434).

Мы введем теперь коэффициент сдвига φ_u посредством определения

$$\varphi_u = \frac{S}{F \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^2}{2}}. \quad (442)$$

Индекс u должен обозначать, что этот коэффициент сдвига относится к окружной скорости колеса. Из уравнения (436) (если значения, относящиеся к идеальному случаю, снова обозначим посредством знака „прим“) мы получаем:

$$\varphi'_u = \frac{2(w_2 - w_1)w}{u_a^2} = \frac{(w_2 + w_1)(w_2 - w_1)}{u_a^2} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{u_a^2}. \quad (443)$$

¹ Ср. Бендемани, цитиров. выше, Н. 3, стр. 33.

Отсюда можно при данных φ'_u , u_a и w_1 вычислить w_2 ; находим:

$$w_2^2 = \varphi'_u u_a^2 + w_1^2,$$

или

$$w_2 = u_a \sqrt{\varphi'_u + \left(\frac{w_1}{u_a}\right)^2}. \quad (444)$$

В абсолютных величинах

$$c_{a_{st}} = u_a \sqrt{\varphi'_u + \left(\frac{c_{a_1} + V}{u_a}\right)^2} - (c_{a_1} + V). \quad (445)$$

определяем далее коэффициент продвижения f через

$$f = f_c + f_v = \frac{c_{a_1} + V}{u_a} = \frac{c_{a_1}}{u_a} + \frac{V}{u_a} \quad (446)$$

и поэтому можем написать вместо уравнения (445):

$$c_{a_{st}} = u_a \left\{ \sqrt{\varphi'_u + f^2} - f \right\}. \quad (447)$$

Если вставим $c_{a_{st}}$ из уравнения (445) в уравнение (440), то получается

$$\varepsilon' = \frac{2V}{c_{a_1} + V + u_a \sqrt{\varphi'_u + \left(\frac{c_{a_1} + V}{u_a}\right)^2}} = \frac{2V}{u_a (f + \sqrt{\varphi'_u + f^2})}$$

или, если на место V поставим его величину из уравнения (446):

$$\varepsilon' = \frac{2fV}{f + \sqrt{\varphi'_u + f^2}}, \quad (448)$$

с другой стороны, можно определить коэффициент мощности φ_u посредством

$$\varphi_u + \frac{L}{F \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u_a^2}{2}}. \quad (449)$$

Если введем его в уравнение вместо ε^2 , то получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{S' \cdot V}{L'} = \frac{\varphi'_u F \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^2}{2} \cdot V}{\varphi'_u F \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^2}{2}} = \frac{\varphi'_u}{\varphi'_u} \cdot \frac{V}{u_a}, \\ \varepsilon' &= \frac{\varphi'_u}{\varphi'_u} \cdot fV \end{aligned} \quad (450)$$

или

$$\varphi'_u = \frac{\varepsilon' \varphi'_u}{fV}. \quad (451)$$

Отсюда получается из уравнения (448):

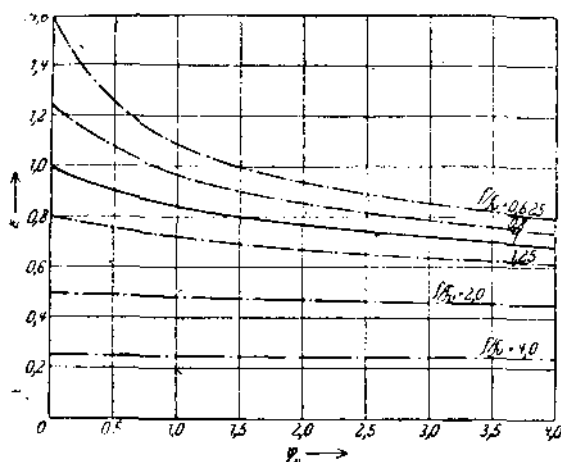
$$\varepsilon' \left(f + \sqrt{\frac{\varepsilon' \psi_u}{f_V} + f^2} \right) = 2 \cdot f_V,$$

или

$$\varepsilon'^3 + 4 \frac{f \cdot f_V^2}{\psi_u} \varepsilon' - 4 \frac{f_V^3}{\psi_u} = 0; \quad (452)$$

оказывается практичным ввести отношение f/f_V как дальнейший параметр. Тогда уравнение (452) пишется таким образом:

$$\varepsilon' + 4 \frac{f}{f_V} \frac{f_V^3}{\psi_u} \varepsilon' - 4 \frac{f_V^3}{\psi_u} = 0. \quad (452a)$$



Фиг. 155. Коэффициент полезного действия ε' в зависимости от коэффициента мощности ψ_V и отношения $\frac{f}{f_V} = \alpha$.

Фиг. 155 изображает ε' в функции величины ψ_u/f_V^3 как абсциссу и в функции $\alpha = f/f_V$ как параметр. ψ_u/f_V^3 может также рассматриваться как коэффициент мощности, который соответственно должен был бы обозначаться через ψ_V , так как он уже не содержит u_a . Он является

$$\frac{\psi_u}{f_V^3} = \psi_V = \frac{L'}{F \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^3}{2} \frac{V^3}{u_a^3}} = \frac{L'}{F \frac{\gamma}{g} \frac{V^3}{2}}. \quad (453)$$

Таким образом если L , F , c_{a1} и V даны, то можно тотчас вычислить возможно больший к. п. д. и сдвиг, предположив, что можно получить струю без момента скорости, т. е. $L = L'$. Для $c_{a1} = 0$ будет $f_c = 0$ и $f = f_V$, т. е. $\alpha = 1$; этот случай изображен на фиг. 155.

Нельзя говорить о к. п. д. у винта. Но и здесь можно вычислить высший сдвиг S' , который достигается при данной мощности $L = L'$. Он равняется:

$$S' = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}}) c_{a_{st}} = \frac{\gamma}{g} F c_a c_{a_{st}}.$$

Так как

$$c_a = c_{a_1} - \frac{c_{a_{st}}}{2}$$

[уравнение (435)], тогда получается:

$$S' = \frac{\gamma}{g} F \left(c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2} \right) c_{a_{st}}; \quad (454)$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} L = L' &= \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a_1} + c_{a_{st}}) \omega k = \\ &= \frac{\gamma}{g} F \left(c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2} \right) \frac{c_{a_{st}} (c_{a_{st}} + 2c_{a_1})}{2}, \end{aligned}$$

(см. уравнение 415)

$$L' = \frac{\gamma}{g} F \left(c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2} \right) \left(c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2} \right) \cdot c_{a_{st}}. \quad (455)$$

Из уравнения (454) и (455) получается:

$$\frac{S'}{L'} = \frac{1}{c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2}}. \quad (456)$$

Но мы можем совершенно исключить скорости и представить S' в зависимости только от F и L . Для этого вводим кроме уже определенных φ_u , ψ_u , f и f_c еще соответствующую скорость струи

$$\lambda_u = \frac{c_{a_{st}}}{u_a}, \quad (457)$$

для которой в случае неподвижного винта в струе без момента скорости из уравнения (445), принимая во внимание уравнения (446), получаем:

$$\lambda_u = \sqrt{\varphi_u'^2 + f_c^2} - f_c \quad (458)$$

и

$$\lambda_u + 2f_c = \sqrt{\varphi_u'^2 + f_c^2} + f_c. \quad (459)$$

С другой стороны, из уравнения (454) после определения φ_u' получается:

$$\varphi_u' = (2f_c + \lambda_u) \lambda_u, \quad (460)$$

соответственно из уравнения (455):

$$\psi_u' = \frac{(2f_c + \lambda_u)^2 \lambda_u}{2}, \quad (461)$$

благодаря этому

$$\varphi'_u = \frac{2\psi'_u}{2f_c + \lambda_u} \quad (462)$$

С уравнением (459) получается:

$$\varphi'_u = \frac{2\psi'_u}{\sqrt{\varphi'_u + f_c^2 + f_c}}$$

После небольшого преобразования получается зависимость между φ'_u и ψ'_u

$$\varphi'^3_u + 4f_c\psi'_u \cdot \varphi'_u - 4\psi'^3_u = 0. \quad (463)$$

Если c_{a1} , следовательно, также и $f_c = 0$, то мы имеем:

$$\varphi'_u = \sqrt[3]{4\psi'^3_u}. \quad (464)$$

Если мы снова выразим φ и ψ через S , F и L , то получим:

$$S' + \sqrt[3]{2 \frac{\gamma}{g} FL'^2}. \quad (465)$$

В дальнейшем, деля и сокращая на L , получаем:

$$\frac{L'}{S'} = \sqrt[3]{\frac{g}{2\gamma} \cdot \frac{L'}{F}}. \quad (466)$$

Таким образом в идеальном случае можно получить в первоначально покоящейся жидкости сдвиг с бесконечно малой мощностью, если представить плоскость колеса бесконечно увеличивающейся. Произведение $F \cdot c_{a1}^2$ [уравнение (454)] сохраняет свою конечную величину $2 \frac{g}{\gamma} S'$; в то время как $F \rightarrow \infty$ и $c_{a1}^2 \rightarrow 0$. Однако

мощность $L' = S' \frac{c_{a1}}{2}$ [см., уравнение (454) и (455)] и вместе с c_{a1} стремится к нулю. В реальной жидкости для диаметра колеса существуют конечные границы ψ вследствие трения жидкости, которое здесь приблизительно определяется как боковое трение колес, насосов и турбин.

Если мы выразим в уравнении (463) φ , f_c и ψ посредством их определяющих формул, то получим:

$$\frac{S'^3}{2 \frac{\gamma}{g} F} + L' (S' c_{a1} - L') = 0. \quad (467)$$

Отсюда получается наименьшая мощность неперемещаемого колеса для производства сдвига в идеальном случае ($F \rightarrow \infty$)

$$L' = S' c_{a1}. \quad (468)$$

Точно так же получается для свободнодвигающегося пропеллера с $F \rightarrow \infty$ из уравнения (452a), $\varepsilon' = 1$, если $c_{a_1} = 0$ и $\varepsilon' = \frac{1}{1 + \frac{c_{a_1}}{V}}$, сле-

довательно, $\varepsilon' \geq 1$ в зависимости от математического знака перед c_{a_1} , т. е. в зависимости от того, идет ли движение вместе с течением или против него. Это можно увидеть, если перемножить уравнение (452a) на ψ_u и тогда оно при $F \rightarrow \infty$ перейдет к пределу $\psi_u = 0$.

Если сплошная система колеса рассматривается как насос (воздуходувы), где полезная мощность сосредоточена в осевой подаче жидкости, то она имеет в идеальной жидкости к. п. д. насоса $\eta_a = 1$ в том случае, если она подает жидкость без окружных скоростей. Потребленная мощность и полезная мощность насоса определяются тогда:

$$L' = L_n' = F \frac{\gamma}{g} \left(c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2} \right)^2 c_{a_{st}} = S' \left(c_{a_1} + \frac{c_{a_{st}}}{2} \right), \quad (469)$$

следовательно, той мощностью, которая достаточна для образования идеального наибольшего сдвига.

52. Коэффициент доброкачественности реальных машин

Коэффициент полезного действия у выполненного, свободно двигающегося пропеллера $\varepsilon < \varepsilon'$; сдвиг неподвижной системы $S < S'$ и ее к. п. д. как насоса $\eta_a < 1$. Все это имеет место даже при идеальной жидкости. Причина этого в том, что струе надо сообщать больше кинетической энергии, чем то требует идеальный случай. В реальной жидкости требуется дальнейшее увеличение мощности для потерь трения, удара и вихрей. Как коэффициент доброкачественности ζ можно принимать:

у двигающегося пропеллера

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'},$$

у неподвижного винта

$$\zeta = \frac{S}{S'}.$$

У неподвижного насоса ζ имеет одинаковое значение с $\eta_a < 1$. У двигающегося винта ζ имеет только теоретический интерес. У неподвижного винта ζ представляет единственную меру оценки. В этом случае:

$$\zeta = \frac{S}{\sqrt[3]{2 \frac{\gamma}{g} FL^2}}. \quad (470)$$

Если мы введем коэффициент сдвига и мощности, то получим из этого:

$$\zeta = \frac{\varphi_u}{\sqrt[3]{4\psi_u^2}}. \quad (471)$$

Между к. п. д. η_a неподвижного колеса, работающего в качестве насоса, и коэффициентом доброкачественности ζ для такого же колеса, работающего в качестве винта, существует отношение, которое получается посредством следующего рассуждения: полезная мощность насоса L_n в идеальном случае была бы достаточна, чтобы произвести сдвиг S' ; таким образом по уравнению (465) получается:

$$S = \sqrt[3]{2 \frac{\gamma}{g} FL_n^2}.$$

С другой стороны, можно было бы помощью действительно потребленной мощности L произвести в идеальном случае сдвиг S' , который вычисляется по уравнению (465):

$$S' = \sqrt[3]{2 \frac{\gamma}{g} FL^2}.$$

Далее, имеем:

$$\zeta = \frac{S}{S'} = \left(\frac{L_n}{L} \right)^{2/3} = \eta_a^{2/3} \approx 1. \quad (472)$$

53. Реальные выполнения свободно двигающегося пропеллера (струя с завихрением)

В общем случае задача сводится к вычислению по уравнениям (428) и (429) c_{a_s} и e .

Уравнения эти сложно-трансцендентны и поэтому могут быть решены только табличными вычислениями или графически. Для намеченной цели мы делим их на u_a^2 и вводим в них уже определенные относительные величины:

$$\frac{c_{a_s} + V}{u_a} = \frac{c_{a_s}}{u_a} + \frac{V}{u_a} = f_c + f_v = f,$$

$$c_{a_s}/u_a = \lambda_u;$$

тогда получаем:

$$\lambda_u^2 = 2m \frac{1 - e^2 + \frac{m}{2} \ln e^2}{e^2 - e_i^2} \quad (473)$$

$$\lambda_u^2 + 2f\lambda_u = 2m \left(1 - \frac{m}{2e^2} \right). \quad (474)$$

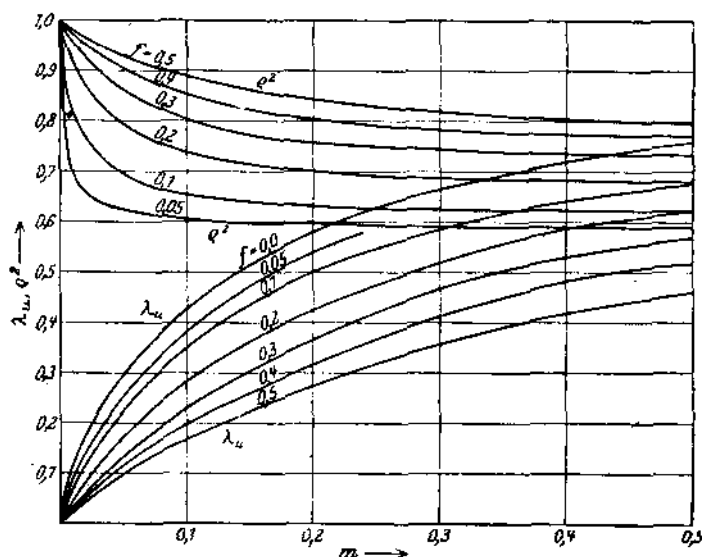
Диаграмма фиг. 156 изображает результаты вычислений этих двух уравнений. По оси абсцисс отложены m в качестве параметра f . Посредством взятых из фиг. 156 величин можно определить все интересующие нас величины.

¹ См. Бендеманн, цитиров. выше.

Сдвиг мы вычисляем по уравнению (419). Он равняется:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\gamma}{g} F \cdot \omega k - \frac{\gamma}{g} \pi k^2 \int_{r_i}^{r_a} \frac{dv}{r} = \\
 &= \frac{\gamma}{g} \pi \left[(r_a^2 - r_i^2) \omega k - k^2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right] = \\
 &= \frac{\gamma}{g} \pi r_a^2 u_a^2 \cdot m \left(1 - e_i^2 + \frac{k^2}{\omega k r_a^2} \ln e_i \right) = \\
 &= \frac{\gamma}{g} r_a^2 \pi u_a^2 \cdot m \left(1 - e_i^2 + \frac{m}{2} \ln e_i^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{475}$$

(475a)



Фиг. 156. Относительные скорости струн λ_u и сечение струи e^2 в зависимости от относительной окружной составляющей m и относительной скорости притекания f .

Мы определяем коэффициент сдвига φ_u как и раньше, относя его к полной площади круга $r_a^2 \pi$

$$\varphi_u = \frac{S}{r_a^2 \pi \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^2}{2}} = 2m \left(1 - e_i^2 + \frac{m}{2} \ln e_i^2 \right). \tag{476}$$

Таким образом коэффициент сдвига независим от параметра f . Соответственно мы получаем из уравнения (410):

$$\begin{aligned}
 L &= M \cdot \omega = \frac{\gamma}{g} \pi (r_{st_a}^2 - r_i^2) \omega k (c_{a_i} + V + c_{a_{st}}) = \\
 &= r_a^2 \pi \frac{\gamma}{g} u_a^2 m (e^2 - e_i^2) (c_a + V + c_{a_{st}}).
 \end{aligned}
 \tag{477}$$

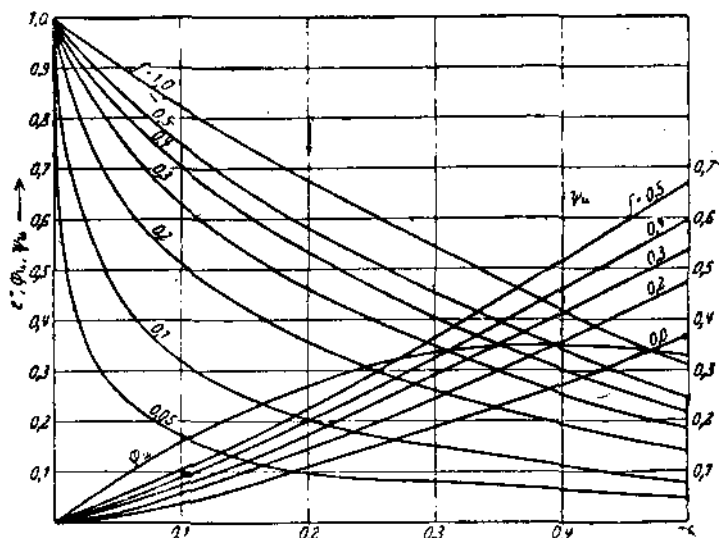
Для коэффициента мощности ψ_u мы пишем:

$$\psi_u = \frac{L}{r_a^2 \pi \frac{\gamma}{g} \frac{u_a^3}{2}} = 2m (e^2 - e_i^2) (f - \lambda_u). \quad (478)$$

Для идеальной жидкости мы получаем к. п. д. ϵ^* :

$$\epsilon^* = \frac{S \cdot V}{L} = \frac{\varphi_u \cdot r_a^2 \pi \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u_a^3}{2} \cdot V}{\psi_u \cdot r_a^2 \pi \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u_a^3}{2}}, \quad (479)$$

$$\epsilon^* = \frac{\varphi_u}{\psi_u} \cdot f_V.$$



Фиг. 157. Коэффициент полезного действия ϵ^* , коэффициент мощности ψ_u и коэффициент сдвига φ_u в зависимости от m и f в идеальной жидкости.

Фиг. 157 дает φ_u , ψ_u и ϵ^* , к. п. д. ϵ^* при $c_a = 0$, следовательно, $f_V = f$.

Для реальной жидкости $\epsilon < \epsilon^*$. На фиг. 158 изображены такие к. п. д. ϵ , при вычислении которых были приняты во внимание только трения о поверхности лопаток колеса. Полный диск с радиусом r_a и окружной скоростью u_a израсходовал бы мощность на боковое трение L_3 :

$$L_r = C_1 \cdot \pi \cdot \frac{\gamma}{g} r_a^2 u_a^3. \quad (480)$$

При этом C является функцией числа (Рейнольдса)

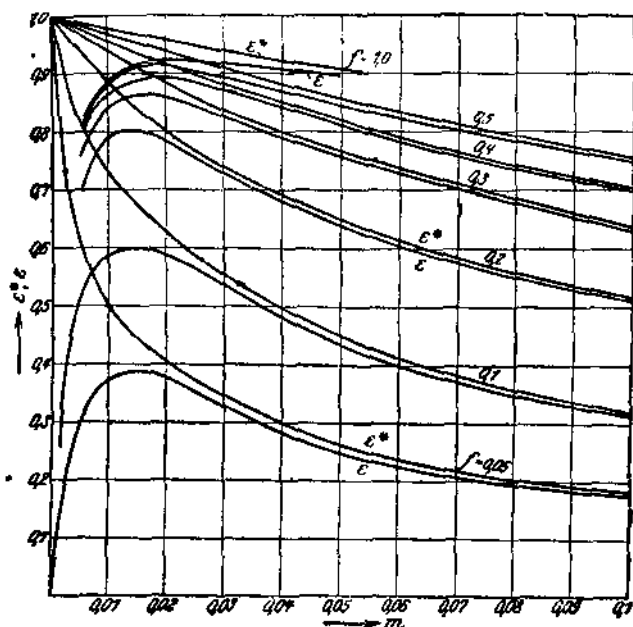
$$R = \frac{u \cdot r}{\gamma},$$

именно:

$$C \approx \frac{1}{R^{\frac{1}{5}}}.$$

При $R \approx 50 \cdot 10^6$, как это соответствует средним величинам водяных и воздушных винтов, получается для полного кругового диска

$$C_0 = 0,58 \cdot 10^{-3}.$$



Фиг. 158. Коэффициенты полезного действия пропеллера в идеальной и вязкой жидкости (ϵ^* и ϵ).

Отсюда взята для описываемых колес половина, хотя развернутые поверхности лопаток часто меньше, чем половина площади круга; зато относительные скорости больше, чем окружная скорость. При помощи значения

$$C = 0,25 \cdot 10^{-3}$$

можно определить коэффициент мощности трения

$$\psi_{u_r} = \frac{L_r}{r_a^2 \pi \frac{\gamma_a}{g} \cdot \frac{u_a^3}{2}} = 2C. \quad (481)$$

Коэффициенты полезного действия ϵ (фиг. 158) соответствуют поэтому формуле:

$$\epsilon = \frac{\varphi_u}{\psi_u + \psi_{u_r}} f_V, \quad (482)$$

$$\epsilon = \frac{\varphi_u}{\psi_u + 0,5 \cdot 10^{-3}} f_V. \quad (483)$$

Для сравнения на фиг. 158 изображены к. п. д. ϵ^* . Кривые построены только до значения $m = 0,1$, потому что, начиная с этого значения, потери на трение не имеют никакого значения по сравнению с мощностью, превращенной в кинетическую энергию.

Для $m = 0$ получаются величины:

$$\varphi_u = 0; \quad \psi_u = 0; \quad \epsilon^* = 1,$$

благодаря постоянной

$$\psi_u \text{ и } \epsilon = 0.$$

Переход к $m = 0$ не приводит нас к идеальному случаю, рассмотренному в п. а, а соответствует бездействующему винту или насосу. Это происходит потому, что трение не допускает бесконечного увеличения числа оборотов, т. е. что здесь вместе с $m = 0$ исчезает также $\omega k = m - u_a^2$, в то время как в прежде рассмотренном идеальном случае $\omega \cdot k$ имело конечную величину, несмотря на исчезающее m . Для того чтобы еще яснее показать влияние момента скорости $c_u \cdot r$ на к. п. д. на фиг. 159 показаны к. п. д. ϵ^* для $m > 0$ и идеальные ϵ' — для струи без момента скорости. При этом в отличие от фиг. 158 величина m , пропорциональная моменту скорости, выбрана как параметр. В качестве абсциссы служит коэффициент мощности ψ_v ; для того чтобы не усложнять чертежа, и здесь также изображен только случай $C_{a1} = 0$, следовательно, $f_c = 0$. Кривая для ϵ' такая же, как изображенная на фиг. 155 для $f_c = 0$. Кривые для ϵ^* получены из кривых [фиг. 156 и 157 посредством сечения $m = \text{const}$, причем величины ψ_u , принадлежащие различным параметрам f_v , пересчитаны в значения ψ_v по соотношению

$$\psi_v = \psi_u : f_v^3. \quad (484)$$

Для дальнейшего пояснения на фиг. 159 изображено также отношение мощности, потребленной для образования окружных скоростей

$$L_u = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a1} + c_{ast} + V) \frac{c_{ast}^2}{2\pi} \quad (485)$$

ко всей потребляемой мощности

$$L = L_a + L_u,$$

причем L_a является мощностью, потребленной для увеличения осевых скоростей, и имеет величину:

$$L_a = \frac{\gamma}{g} F_{st} (c_{a1} + c_{ast} + V) c_{ast} \frac{c_{ast}^2 (c_{a1} + V)}{2}. \quad (486)$$

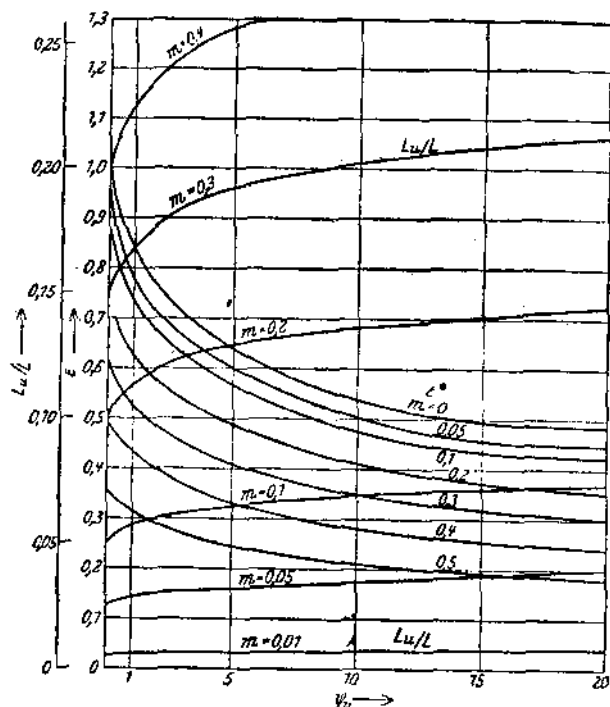
Соответственно фиг. 159 для случая $c_{a1} = 0$ имеем:

$$\frac{L_u}{L} = \frac{c_{ast}^2}{c_{ast} (c_{ast} + 2V) + c_{ast}^2} = \frac{c_{ast}^2 \frac{1}{Q^2}}{c_{ast} (c_{ast} + 2V) + c_{ast}^2 \frac{1}{Q^2}}.$$

Если мы разделим числитель и знаменатель на u_{α}^2 , то получим:

$$\frac{L_u}{L} = \frac{\frac{m^2}{e^3}}{\lambda_r(\lambda_u + 2\lambda_v) + \frac{m^2}{e^3}} = \frac{m}{2e^3} \quad (487)$$

[ср. уравнение (474)]. Этой величины, однако, недостаточно, чтобы объяснить отношения $\frac{\epsilon^*}{e}$; надо еще помнить, что при одинаковой



Фиг. 159. Коэффициент полезного действия ϵ^* и рота-
ционная часть энергии в общей энергии струи в зави-
симости от ψ и m .

мощности сдвиг в струе, имеющей момент скорости, меньше, чем в струе без него. Уравнение (475a) ясно это показывает, так как $\ln e_i^2$ отрицателен. Можно также определить уменьшение сдвига s , благодаря моменту скорости оно равняется:

$$s = \frac{\frac{m}{2} \ln e_i^2}{1 - e_i^2}, \quad (488)$$

что, благодаря произвольному выбору e_i^2 , кажется произвольным.

Однако надо иметь в виду, что e_i^2 не может быть сделано сколько угодно малым и почти совершенно независимо от необ-

ходимых размеров несущих конструкций с учетом пониженного давления в струе. Если последнему поставят определенный твердый предел, то надо с повышающимся m делать радиус сердечника ϱ_i большим. Здесь приходится отказаться от более точных исследований этих отношений; наоборот, дается предел коэффициента мощности для постоянной $\varrho_i^2 = 0,1$, который не может быть перейден, если пониженное давление в струе не должно перейти определенной величины (см. § 56).

с не нанесено на фиг. 159, так как оно независимо от φ .

Случай $f \neq 0$, т. е. неподвижный винт или насос без притока, изображены на фиг. 156 и 157. Для него, конечно, $\varepsilon = 0$, т. е., как уже упоминалось в § 51 и 52, здесь вместо к. п. д. ε должен быть взят коэффициент доброкачественности ζ .

54. Практически выполненные неподвижные струйные колеса с механическим приводом (винты неподвижные или подъемные винты и воздуходувки; струя с моментом скорости)

Общности ради мы предполагаем данное поле с $c_\infty = c_{a_1}$. Тогда уравнения (428) и (429) применимы и для данного случая при условии, что $f_v = 0$, следовательно,

$$f = f_c = \frac{c_{a_1}}{u_a}. \quad (489)$$

Формула (476) для степени сдвига остается неизменной; в формуле (478) для степени мощности вместо f пишется f_c , так что здесь

$$\varphi_u = 2m(\varrho^2 - \varrho_i^2)(f_c + \lambda_u). \quad (490)$$

Величины λ_u , ϱ^2 , далее φ_u и ψ_u из фиг. 156 и 157 надо взять неизменными, если величины параметров, данные для f , считать за величины параметров f_c . Мы можем вычислить коэффициент доброкачественности неподвижного винта и к. п. д. неподвижной воздуходувки по уравнению (471) и (472), т. е.

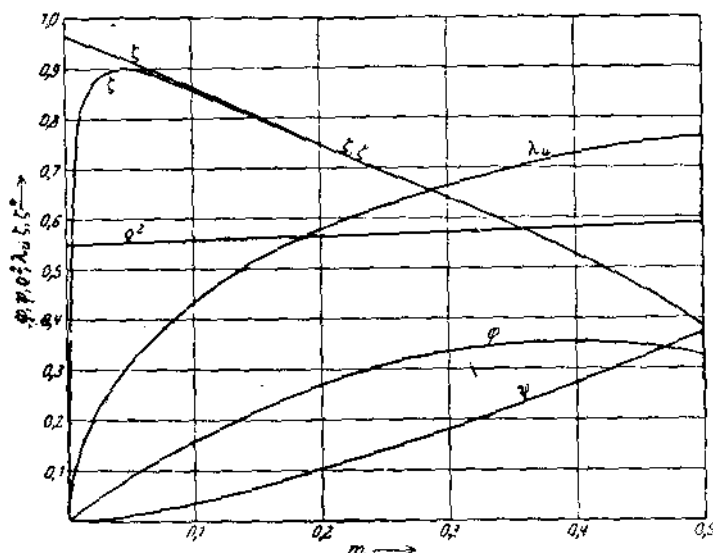
$$\zeta^* = \frac{\varphi_u}{3 \sqrt[4]{\varphi_u^2}}; \quad \eta_a = \sqrt{(\zeta^*)^3}. \quad (491)$$

Уравнение (491) дает величину, обозначенную ζ^* , для работы в идеальной жидкости. Для работы в реальной жидкости мы должны принять во внимание только трение о поверхности, прибавлением постоянного члена $\psi_u = 0,5 \cdot 10^{-3}$ к коэффициенту мощности, и получаем:

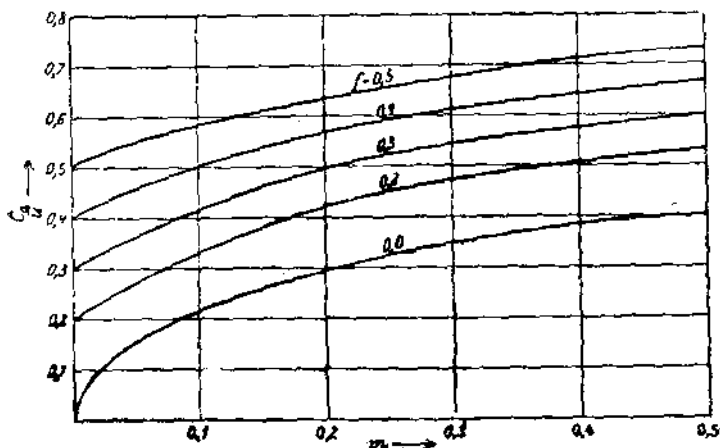
$$\zeta = \frac{\varphi_u}{3 \sqrt[4]{(\varphi_u + 0,5 \cdot 10^{-3})^2}}. \quad (492)$$

Фиг. 160 показывает ход всех интересных для нас у неподвижного колеса характерных величин за исключением η_a , которая может быть тотчас вычислена по уравнению (491).

Все случаи, рассмотренные в § 53 и 54, изображает фиг. 161, которая представляет относительную скорость $\frac{w_a}{u_e}$ как функцию от m и f .



Фиг. 160. Характерные данные для неперемещающегося колеса.



Фиг. 161. Отношение средней скорости в плоскости колеса неперемещаемого и движущегося в пространстве пропеллера.

55. Турбина в открытом потоке

Для рассмотрения этой машины мы вернемся к уравнениям (428) и (429) или (421) и (415), в которых V предполагается равной нулю. Уменьшению энергии в жидкости соответствует замедление частиц жидкости. Мы учитываем уменьшение энергии тем, что

предполагаем k и m отрицательными и замедление определяется тем, что в уравнениях применяются только величины $q^2 > 1$. Из уравнения (428) получается ($-mu_a^2 = -\omega k$)

$$c_{a_{st}}^2 = -2\omega k \frac{1 - q^2 - \frac{m}{2} \ln q_i^2}{q^2 - q_i^2},$$

или

$$c_{a_{st}}^2 = +2\omega k \frac{q^2 - 1 + \frac{m}{2} \ln q_i^2}{q^2 - q_i^2}. \quad (493)$$

Из уравнения (429) получается:

$$c_{a_{st}}^2 + 2c_{a_1} c_{a_{st}} = -2\omega k \left(1 + \frac{m}{2q^2}\right). \quad (494)$$

В оба уравнения надо теперь подставить k и m с их абсолютными величинами, определенно положительными. Для изображения оказывается удобным установить отношения этих величин к $\frac{c_{a_1}^2}{2g}$, т. е. энергии, содержащейся в каждом килограмме притекающей жидкости. Поэтому мы вводим относительную отдачу энергии

$$x = \frac{\frac{\omega k}{g}}{\frac{c_{a_1}^2}{2g}} = \frac{2\omega k}{c_{a_1}^2}. \quad (495)$$

Далее, мы обозначаем относительное торможение как частное

$$\lambda_c = \frac{c_{a_{st}}}{c_{a_1}}. \quad (496)$$

Мы приходим к этим обоим относительным числам, если разделим уравнение (493) и (494) на $c_{a_1}^2$; тогда получаем:

$$\lambda_c^2 = x \frac{q^2 - 1 + \frac{m}{2} \ln q_i^2}{q^2 - q_i^2}, \quad (497)$$

$$\lambda_c^2 + 2\lambda_c = -x \left(1 - \frac{m}{2q^2}\right). \quad (498)$$

Прежде чем приступить к общему рассмотрению этих уравнений, исследуем сначала случай $m=0$ при конечном и любом x . Таким образом мы делаем такой же переход границы, как в § 51, где, как и здесь, имеет место $mu_a^2 = gH =$ конечной величины, но $m=0$. Этот случай можно представить в действительности как бесконечно быстро вращающееся колесо.

а) Идеальная струйная турбина (струя без момента скорости

При $m = 0$ мы вместо уравнения (497) и (498) получаем:

$$\lambda_c^2 = x \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2}, \quad (499)$$

$$\lambda_c^2 + 2\lambda_c = -x. \quad (500)$$

Подобно тому как раньше, мы и здесь также примем $\varrho_i = 0$. Из уравнения 500 следует:

$$\lambda_c = \sqrt{1-x} - 1. \quad (501)$$

Отрицательный знак перед корнем не имеет смысла, положительный дает уже отрицательную величину для λ_c , как и должно быть из-за замедления. Однако абсолютные величины остаются при этом меньше, как это и соответствует только физическому смыслу (c_{a1} не может никогда сделаться по величине больше c_{a1}). Уравнение (411), в котором исчезает SV , так же как интегралы давления и скорости, дает:

$$-M \cdot \omega = \frac{\gamma}{g} F_{st} c_{a1} (1 + \lambda_c) \frac{c_{a1}^2}{2} \{(1 + \lambda_c)^2 - 1\}.$$

Последний множитель в скобках отрицательный, благодаря чему и вся правая часть получается отрицательной; на лево мы имеем соответственно отрицательному моменту $-M\omega$. Таким образом, если мы обозначим через L достигнутую мощность, то имеем:

$$L = \frac{\gamma}{g} F_{st} \frac{c_{a1}^2}{2} (1 + \lambda_c) \{1 - (1 + \lambda_c)^2\}. \quad (502)$$

Дальше имеем:

$$F_{st} = \varrho^2 F. \quad (503)$$

Из сравнения уравнений (499) и (500) получается:

$$\varrho^2 = \frac{x}{2(x + \lambda_c)}. \quad (504)$$

Если мы вставим уравнения (501), (503) и (504) в уравнение (502), то получится:

$$L = \frac{\gamma}{g} F \frac{c_{a1}^2}{2} \frac{x^2 \sqrt{1-x}}{2(x + \sqrt{1-x} - 1)}. \quad (505)$$

Мы определяем в этом случае коэффициент мощности ψ'_c в зависимости от скорости притекания c_{a1} и полагаем:

$$\psi'_c = \frac{L}{F \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c_{a1}^3}{2}}. \quad (506)$$

Далее, получаем:

$$\psi'_c = \frac{x^2 \sqrt{1-x}}{2(x + \sqrt{1-x} - 1)} = \frac{x^2}{2(1 - \sqrt{1-x})}. \quad (507)$$

Эта величина имеет максимум при $x = \frac{8}{9} c$

$$\psi'_{c_{\max}} = \frac{16}{27}. \quad (508)$$

Физически наличие наиболее благоприятной величины x объясняется таким образом: можно посредством придания какой-либо формы или определенного размера так устроить колесо, что оно будет забирать у каждого килограмма жидкости большее или меньшее количество энергии. Чем больше оно заберет, тем сильнее задерживается течение, тем больше частиц отклоняется от колеса. Наоборот, чем меньше энергии забирается у каждого килограмма, тем больше воздуха протекает через колесо,

Величина $x = \frac{8}{9}$ соответствует:

$$\lambda_{c_{\text{optimum}}} = -\frac{2}{3}, \quad (509)$$

следовательно,

$$c_{a_2} = c_{a_1} - \frac{2}{3} c_{a_1} = \frac{1}{3} c_{a_1}, \quad (510)$$

соответствующее ρ^2 будет:

$$\rho^2 = 2,$$

следовательно,

$$c_a = \frac{2}{3} c_{a_1} = \frac{c_{a_1} + c_{a_2}}{2}. \quad (511)$$

Таким образом скорость протекания в плоскости колеса и здесь является средней величиной от скорости перед колесом и позади его.

в) Реальная ветряная турбина (струя с моментом скорости)

Мы сначала исследуем предельный случай $x = 1$. Если у каждой частицы жидкости отнимем всю осевую скорость, соответствующую кинетической энергии, то мы ее совершенно затормозим. Но тогда (так как все частицы позади турбины должны постепенно совершенно остановиться) струя на далеком расстоянии должна иметь бесконечно большое поперечное сечение. Если будем твердо придерживаться представления о постоянстве момента $c_u \cdot r$ в струе, то в этом предельном случае он обладает бесконечно высокой составляющей общей величины энергии, соответствующей окружным скоростям:

$$E_u \approx \int_{r_1}^{r_2} \frac{k^2 dr}{r}.$$

Этот предельный случай отдачи энергии совершенно не может быть осуществлен в действительности; он требует дополнительной подачи энергии. Таким образом уже при величинах $x < 1$ полу-

чаемая мощность должна равняться нулю. Вычисление показывает, что эта величина лежит очень близко к $x = 1$.

Теперь надо вспомнить, что у настоящей турбины каждой величине x соответствует определенная величина m , так как у вращающихся машин не может быть израсходована или получена мощность без того, чтобы одновременно не увеличивался или не уменьшался существующий момент скоростей; при начальном же моменте, равном нулю (имея в виду вращение), возникал бы положительный или отрицательный момент скоростей. Необходимая, пропорциональная моменту скоростей, величина m связана с x простой зависимостью. А именно:

$$x = \frac{2\omega \cdot k}{c_{a_1}^2} = \frac{2m \cdot u_a^2}{c_{a_1}^2} = \frac{2m}{f_c^2} \quad (512)$$

где, как и раньше, подставлено

$$f_c = \frac{c_{a_1}}{u_a}.$$

Обратная величина f_c может быть названа коэффициентом вращения ϑ , так что, если подставить

$$\vartheta = \frac{1}{f_c}, \text{ то } x = 2m\vartheta^2. \quad (513)$$

Таким образом, если имеется заданный коэффициент вращения ϑ , то коэффициент мощности ψ_c будет возрастать с m , увеличивающимся от нуля до максимума, потом снова падать и, приближаясь к величине

$$m = \frac{f_c^2}{2} = \frac{1}{2\vartheta^2} \text{ (т. е. } x = 1), \quad (514)$$

снова придет к нулю.

Вычисление подтверждает физические рассуждения. Сначала можно убедиться, что уравнения (497) и (498) в зависимости от величины

$$x = 1, \quad \lambda_c = -1, \quad e^2 = \infty$$

будут удовлетворять каждому m . Для дальнейшего вычисления мы воспользуемся вместо уравнений (497) и (489) обоими следующими уравнениями, которые получаются из уравнений (493) и (494), если разделить их вместо u_a^2 на $c_{a_1}^2$; таким образом получаем:

$$\lambda_u^2 = 2m \frac{e^2 - 1 + \frac{m}{2} \ln e^2}{e^2 - e_i^2}, \quad (515)$$

$$\lambda_u^2 + 2f \cdot \lambda_u = - \frac{2m}{f^2} \left(1 + \frac{m}{2e^2} \right). \quad (516)$$

Только близко к уже названной величине

$$m = \frac{f_c^2}{2} = \frac{1}{2\vartheta^2},$$

когда требуется еще получить мощность от турбины, можно допустить увеличение m над нулем. Вообще коэффициент мощности в идеальной жидкости:

$$\begin{aligned}\psi_c^* &= \frac{L}{F \frac{\gamma}{g} \frac{c_{a1}^3}{2}} = \frac{L}{\frac{\gamma}{g} \pi r_a^2 \frac{u_a^3}{2} \frac{c_{a1}^3}{u_a^3}} = \\ &= \left[\frac{(r_{st1}^2 - r_i^2) (c_{a1} + c_{a2}) \omega k}{r_a^2 \frac{u_a^3}{2} \cdot f_c^3} \right] = \\ &= \frac{2m}{f_c^3} (\varrho^2 - \varrho_i^2) (f_c + \lambda_u). \quad (517)\end{aligned}$$

Ход расчета должен быть такой, что сначала f_c , λ_u и ψ_c как функции произвольных величин m и ϱ^2 представляют на таблице или диаграмме с m в качестве абсциссы и ϱ^2 в качестве параметра и затем посредством сечений при различных величинах $f_c = \text{const}$, величина ϱ^2 исключается и получаем в качестве параметра f_c . Таким образом мы получаем диаграмму фиг. 162, где ψ_c — величина, зависящая от m и f , представлена с m в качестве абсциссы и f_c — в качестве параметра. Если принять ϑ за параметр, то уравнение дает прямую:

$$x = \frac{2m}{f_c^3} = 2m \cdot \vartheta^3.$$

С увеличивающимся коэффициентом вращения ϑ (уменьшающимся f_c) допустимый предел для m делается все меньше; для каждого коэффициента вращения имеется свое лучшее m . Причина, что линия, соединяющая максимум линий f , не показывает здесь для $m = 0$ установленной ранее идеальной величины $\psi_c' = \frac{16}{27}$, заключается в том, что мы считаем $\varrho_i^2 = 0,1$, в то время как мы могли бы уменьшить ϱ_i^2 и m до нуля.

Сейчас мы принимаем во внимание трение о поверхности так же, как у пропеллеров, т. е. подставляем

$$L_r = C \cdot \pi \frac{\gamma}{g} r_a^3 u_a^3$$

и получаем для коэффициента мощности трения

$$\psi_{c_r} = \frac{2L_r}{\frac{\pi \gamma}{g} r_a^3 u_a^3 \left(\frac{c_{a1}}{u_a}\right)^3} = \frac{2C}{f_c^3} = 2C \vartheta^3. \quad (518)$$

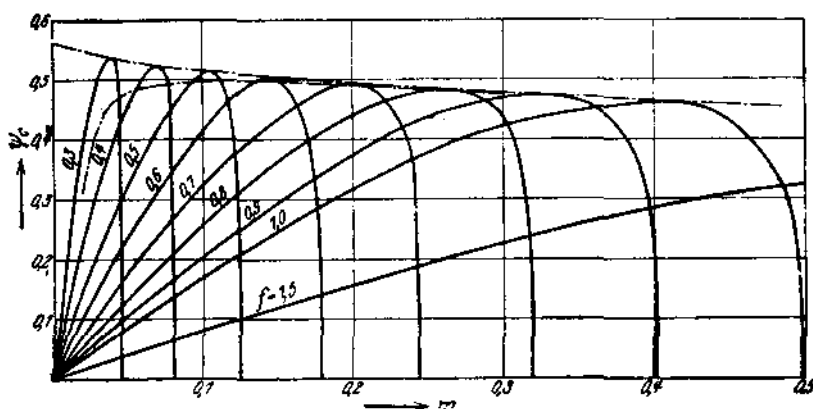
Мощность трения уменьшает получаемую мощность, т. е. мы получаем окончательно для коэффициента мощности ψ_c в реальной вязкой жидкости

$$\psi_c = \psi_c^* - \psi_{c_r}$$

Благодаря этому вращение со значительной скоростью делается менее выгодным, но в то же время оно выгодно вследствие незначительности энергии вращения в струе. Фиг. 162 показывает это отношение при величине

$$C = 2,0 \cdot 10^{-3},$$

которая кажется большой по сравнению с принятой прежде для пропеллеров, но выбрана такой потому, что основная область применения ветряных турбин соответствует работе с несоразмерно малым числом Рейнольдса $R = \frac{u \cdot r}{\nu}$. На фиг. 162 ради наглядности



Фиг. 162. Коэффициент мощности ветряной турбины в зависимости от m и f .

вместо действительных степеней мощности показана линия, соединяющая их вершины; эта линия имеет очень пологий максимум для

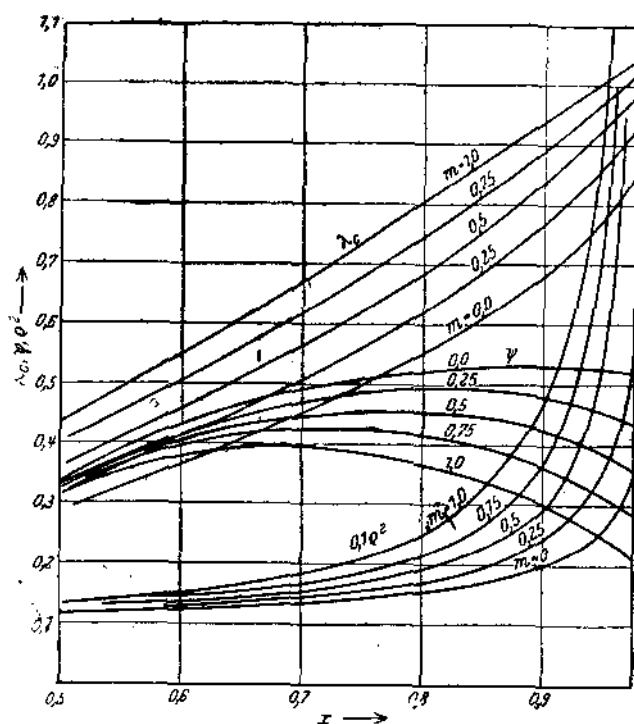
$$2,0 < \vartheta < 2,25.$$

Выполненные машины обычно соответствуют этим величинам. Фиг. 163 дает другое изображение взаимной зависимости. Здесь $x = 2\omega \cdot \frac{k}{c a_1}$ выбран как абсцисса и m — как параметр; нанесен также φ_c^* .

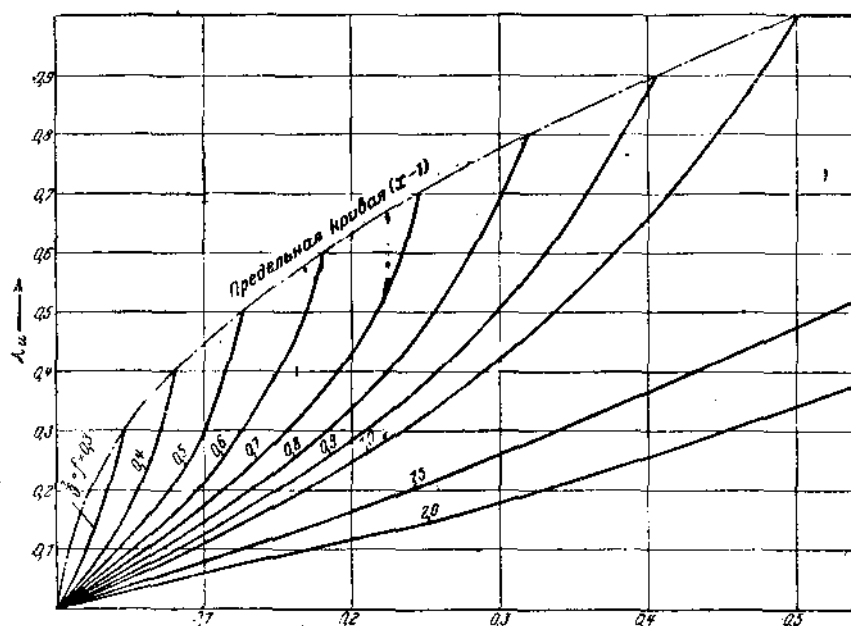
Предельный случай $m=0$ вычислен по уравнению (507), для остальных величин использованы при вычислении уравнения (499) и (500) и общая формула имеет вид:

$$\varphi_c = x (\varrho^2 - \varrho_i^2) (1 + \lambda_c). \quad (519)$$

Она легко получается из уравнения (517); если подставить $\frac{2m}{f_c^2} = x$ и $\lambda_c' f_c = \lambda_c$. В общем фиг. 163 можно получить из фиг. 162 посредством сечения $m = \text{const}$ и исключения f_c или ϑ . Фиг. 164 и 165 содержат над m с параметром $f_c = \frac{1}{\vartheta}$ величины λ_c и ϱ^2 , необходимые для дальнейших вопросов при определении размеров.



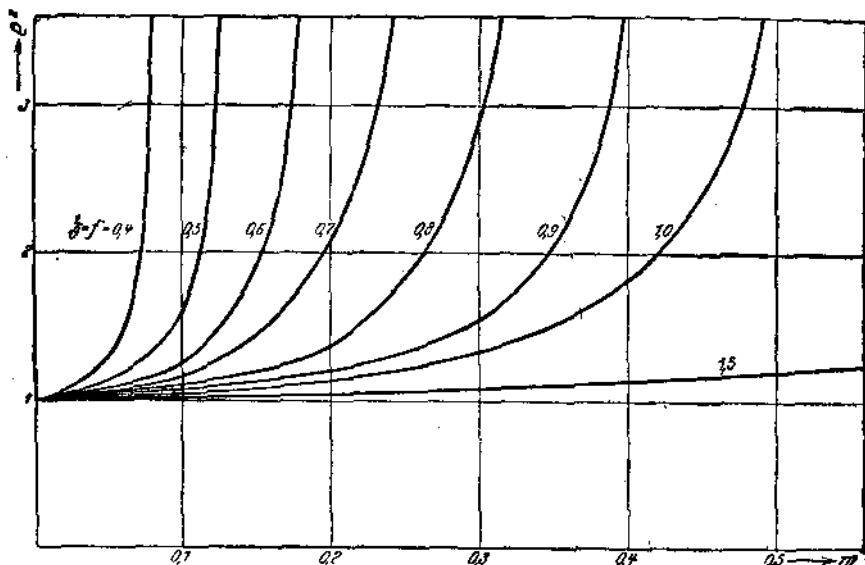
Фиг. 163. Характеристики ветряной турбины в зависимости от m и отвода энергии x .



Фиг. 164. λ_u для ветряной турбины в зависимости от m и f_c .

56. Допустимая нагрузка и определение размеров колес

Давление в струе жидкости, в особенности непосредственно около поверхности колеса, нигде не должно приближаться к упругости пара. Этим условием ограничивается пригодность наших расчетов для несжимаемой жидкости. Оставляя за собой особое рассуждение для ветряных турбин и воздушных пропеллеров в отношении колес, работающих в потоке, мы предполагаем, что они своей осью расположены на глубине h'_s под уровнем жидкости, на который действует атмосферное давление. Тогда давление невозмущенной жид-



Фиг. 165. C_p для ветряной турбины в зависимости от m и f_c .

кости, которое в наших выводах считаем произвольно равным нулю, повышается на $\gamma h'_s$. Теперь нужно исследовать, как велико во всей системе абсолютно наиболее низкое давление и установить для него предел. Подробное исследование распределения давления выходит за пределы этого тома. Здесь мы применим следующее рассуждение:

Приращение давления в плоскости колеса равняется:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{\omega k}{g} - \frac{k^2}{2gr^2} = \frac{\omega k}{g} \left(1 - \frac{m}{2} \frac{r_a^2}{r^2} \right). \quad (520)$$

При колесах, потребляющих мощность (k и m — положительные), Δp — положительно и больше снаружи, чем внутри; при колесах, отдающих мощность (k и m — отрицательные) — оно отрицательно и снаружи меньше, чем внутри. Выбираем как меру для нагрузки приращение давления на круге с радиусом $r = \frac{r_a}{\sqrt{2}}$, следовательно,

$$\frac{\Delta p_m}{\gamma} = \frac{\omega k}{g} (1 - m). \quad (521)$$

Предположим в отношении прыжка давления, что он является понижением давления по сравнению с нулевым уровнем. Для того чтобы быть уверенным, что понижение давления нигде не становится слишком большим, $\frac{\Delta p_m}{\gamma}$ не должно переходить предела, установленного точными расчетами или опытом. Этот предел может быть тем выше, чем больше h_s . Вместо h_s мы введем лучше глубину под уровнем жидкости, на которой расположен верх круга с радиусом $r = \frac{r_a}{\sqrt{2}}$. Таким образом можно сказать: пониженное давление выражаемое

$$\frac{p_u}{\gamma} = \frac{\omega k}{g} (1 - m) - h, \quad (522)$$

не должно превосходить определенного предела h_0 . Таким образом ωk ограничено

$$\omega k_{\text{дон}} = g \frac{h_s - h_0}{1 - m}.$$

Так как $\omega k = m \cdot u_a^2$, то в качестве предела для u_a получается:

$$u_{a\text{дон}} = \sqrt{g \frac{h_s - h_0}{m(1 - m)}}. \quad (523)$$

Здесь h_s , как видно из рассуждения, не должно ни в коем случае приближаться к $1 - h_0$, где h_s есть упругость пара. Более точными исследованиями на основании опыта, мы устанавливаем для винтов, насосов и турбин под водой

$$h_{sw} = 5,0; \quad (524)$$

у воздушных пропеллеров и ветряных турбин надо принимать $h_s = 0$. Принципиально h_0 можно выбрать выше, так как при приближении к низкому давлению, которое наступило бы у несжимающейся жидкости, появляется существенное изменение удельного объема, благодаря чему частично снова сравниваются различия в давлении. Во всяком случае благодаря этому устраняются предположения для наших уравнений (в особенности, например, для вычисления прыжка давления). Предварительно мы примем для воздушных винтов и ветряных турбин

$$h_{0L} = 9,0. \quad (525)$$

Если задаться u_a , то определение размеров наполовину выполнено, надо только еще выбрать из фиг. 157, 160 и 162 или 163 коэффициент сдвига φ или коэффициент мощности ψ и тогда можно из уравнения вычислить при требуемом сдвиге

$$r_a^2 = \frac{2}{\pi \frac{\gamma}{g} \varphi u^2} S, \quad (526)$$

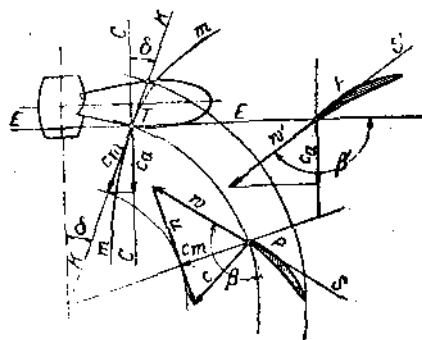
или при данной или требуемой мощности вычислить r_a :

$$r_a^2 = \frac{2}{\pi \frac{\gamma}{g} \psi u^3} L. \quad (527)$$

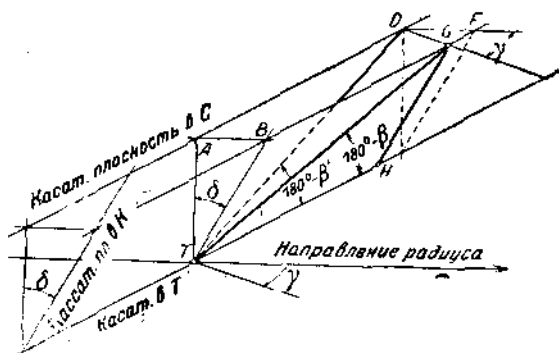
Выбор φ или ψ сначала делается произвольно: как первое условие ставится наибольший к. п. д. Однако одновременно с φ или ψ определяются f , m (и k !). Тогда получаем определенное r_a и так как u_a также известно, то получается определенное число оборотов. Если это не подходит, надо выбрать другие φ , ψ , m и в данном случае поступиться несколько к. п. д.

§57. Форма лопаток колеса. Связь с другими теориями

Остается теперь еще исследовать, каким образом получается постоянство, предполагаемое в предыдущем изложении момента $c_u \cdot r$. Здесь применимы те же рассуждения, что и в теории насосов



Фиг. 166. Среднее конусное и цилиндрическое сечение колес для пропеллерной или ветряной турбины.



Фиг. 167. Зависимость между конусным и цилиндрическим сечением.

и турбин, находящихся в потоке, ограниченном стенками. Здесь как и там, предполагаем, что имеется очень много лопаток, которые вызывают относительное направление уходящего от окружности течения, совпадающее с направлением касательных к лопаткам у выхода из колеса или, у лопаток конечной толщины, с средним направлением хвоста лопаток.

На фиг. 166 изображен средний слой $m-m$ и конус K , которого он касается при выходе из колеса. Через касательный круг T проведен круговой цилиндр C . Конус разрезает лопатки колеса по профилю P , изображенному на развертке конуса, цилиндр разрезает по профилю P' , начерченному на развертке цилиндра. Углы среднего направления профиля S или S' по отношению к положительному направлению окружности, как и раньше, обозначены через β или β' . Если провести через круг T еще плоскость E , то связь между β и β' будет ясна. На фиг. 167 все поверхности, сходящиеся друг с другом к сечению, заменены их касательными плоскостями.

Из фиг. 166 получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \beta &= \frac{TH}{GH} = \frac{BG}{GH} = \frac{AD - FG}{HG} = \frac{AD - DF \cdot \operatorname{tg} \gamma}{TB} = \\ &= \left(\frac{AD}{TA} - \frac{AB}{TA} \operatorname{tg} \gamma \right) \cos \delta = (\operatorname{ctg} \beta' - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \gamma) \cos \delta \\ \operatorname{ctg} \beta &= \operatorname{ctg} \beta' \cos \delta - \operatorname{tg} \gamma \sin \delta.\end{aligned}\quad (528)$$

С другой стороны, и здесь между $c_u r$ и β существует отношение, выражаемое уравнением (132):

$$k = c_u \cdot r = r^2 \omega + w_m r \cdot \operatorname{ctg} \beta,$$

где w_m является относительной меридианольной скоростью, лежащей в плоскости, касательной конусу K , а угол β отсчитывается так, как принято в (28). Из последнего уравнения вместе с уравнением (528) получается:

$$k = r^2 \omega + w_m \cos \delta \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \beta' - w_m \sin \delta \cdot r \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

или

$$k = r^2 \omega + w_a r \cdot \operatorname{ctg} \beta' - w_r r \cdot \operatorname{tg} \gamma.\quad (529)$$

Из предыдущего видно, что для такого установления поверхности лопатки, чтобы получилось постоянное k , надо знать точную форму струи, т. е. распределение w_r . Однако распределение w_r тоже зависит от формы лопатки. Разрешение вопроса элементарным путем не представляется возможным. Можно получить приближенное решение, однако, вполне достаточное для основной теории, если предположить, что можно откинуть $c_r \cdot \operatorname{tg} \gamma$ по сравнению с $c_a \cdot \operatorname{ctg} \beta'$. При этом предположении из уравнения (529) получается

$$\operatorname{ctg} \beta' = \frac{k}{w_a r} - \frac{r \omega}{w_a}.\quad (530)$$

Угол β' всегда больше 90° : следовательно, всегда $\frac{k}{w_a r} < \frac{r \cdot \omega}{w_a}$. Таким образом поверхность с увеличением r имеет уменьшающийся угол β' , следовательно, является близкой к винтовой поверхности, у которой $\operatorname{tg} \gamma = 0$. Так как, кроме того, w_r в большинстве случаев мало по сравнению с w_a и само по себе значительно только в крайних слоях струи, то пренебрежение произведением $c_r \cdot \operatorname{tg} \gamma$ вполне допустимо. В уравнении (530) можно еще заменить k посредством

$$m = \frac{c_{ua}}{u_a} = \frac{k}{r_a^2 \omega}.$$

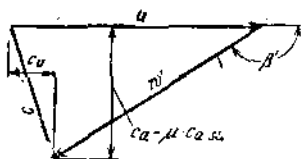
Таким образом получается:

$$\operatorname{ctg} \beta' = \frac{u_a}{w_a} \left(m \frac{r_a}{r} - \frac{r}{r_a} \right).\quad (531)$$

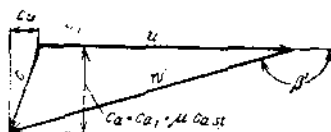
Так как $\frac{u_a}{w_a}$ известно для всех случаев (фиг. 168а, б, 169), то может быть вычислено распределение углов у выхода из колеса. w_a получается в зависимости от u_a и c_a из диаграммы скоростей фиг. 167

и 168. c_a получается из $c_{a, st}$, если принять во внимание отношения поперечного сечения в струе. Для неподвижного или движущегося пропеллера $\frac{c_a}{u_a}$ изображено на фиг. 161.

При конечном числе лопаток углы должны быть увеличены. Принципиально здесь такая же проблема, как у какой-либо лопастной решетки с конечным шагом (делением, см. § 20, а). Только здесь мы



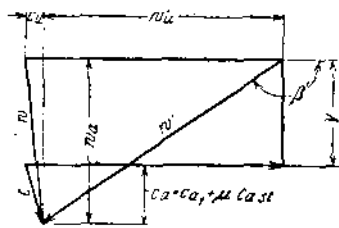
Фиг. 168 а. Диаграмма скоростей перемещающегося в пространстве пропеллера.



Фиг. 168 б. Диаграмма скоростей ветряной турбины.

имеем, как и у турбин Каплана с малым числом лопаток, крайние отношения. В основной теории приходится обходиться приближительной оценкой.

Направление лопаток у входа в колесо должно быть установлено по основному положению безударного входа в рабочей точке и наилучшего к. п. д. Тогда по направлениям входа и выхода получаются очень незначительные относительные отклонения. Эти отклонения служат причиной того, что винтовая поверхность со стороны давления пропеллера вместе с вогнутой поверхностью со стороны всасывания часто очень хорошо удовлетворяет всем требованиям.



Фиг. 169. Диаграмма скоростей перемещающегося пропеллера.

В новейшее время выбирают часто для развернутых профилей сечения лопаток так называемые профили поддерживающего крыла. Надо заметить, что они, главным образом, применимы только для воздуха. Для воды у них получаются слишком сильные утолщенные входные кромки. Эти утолщения вызывают местные увеличения скорости и соответствующие понижения давления, которые слишком быстро (при соответственно незначительных окружных скоростях) ведут к кавитации. Для работы в воде надо дать предпочтение клиновидным профилям входа.

Более подробно о форме лопаток можно будет говорить только во втором томе.

Здесь можно только рассмотреть обычно употребляемый способ определения размера винта пропеллера по шагу и диаметру. В основу кладется движение в неподвижной среде и выбирают на основе опыта и рассуждения опорное давление на поверхности p_0 ,

которое определяется как частное из требуемого сдвига S и площади круга $r_a^2 \pi$, следовательно:

$$p_{\odot} = \frac{S}{r_a^2 \pi},$$

$p_{\odot}$ является средней величиной возрастания давления в плоскости прохождения колеса. Таким образом для него применяются те же рассуждения, как для вывода уравнения (522);

$$\frac{p_u}{\gamma} = \frac{p_{\odot}}{2\gamma} - h_1, \quad (532)$$

которое не должно переходить допустимого предела h_0 , следовательно, должно быть

$$\frac{p_{\odot}}{\gamma} < 2(h_0 + h_1). \quad (533)$$

Затем определяют на-глаз скольжение гребного винта (слип) s , которое определяют таким образом:

Сначала представляют точную поверхность винта, т. е. такую, шаг которой H не зависит от радиуса. Если бы такая поверхность двигалась в неподвижной гайке, то она при числе оборотов n прошла бы в секунду путь:

$$W = \frac{H \cdot n}{60}.$$

В действительности она проходит в жидкости только отрезок

$$V = f_v \cdot u = f_v \frac{D\pi n}{60}.$$

Соответствующую разность

$$s = \frac{W - V}{W} = 1 - \frac{V}{W} = 1 - \frac{\frac{D\pi n}{60} \cdot f_v}{Hn} = 1 - \frac{f_v}{H} \cdot \pi \quad (534)$$

называют относительным скольжением гребного винта и оно именно является фактическим скольжением для свободно двигающегося пропеллера и мнимым для расположенного в непосредственной его близости судна или самолета. Мнимым называется оно в этом случае потому, что судно или самолет вызывает особенные собственные течения, которые называются передним или задним течением и которые влияют также на винт. Таким образом предположение, которое было сделано при вычислении s по уравнению (534), а именно, что винт двигается в спокойной жидкости, не осуществляется у пропеллера, двигающегося с судном или самолетом.

Если выбрать $p_{\odot}$, то r_a или D даны, а при заданном n известно также u_a и таким образом при заданном V известно f_v . Затем выбирают по данным опытов благоприятное s и получают H . Наиболее благоприятное s , если дело идет только о свободно двигающемся пропеллере, иное для каждого нового отношения H/D . Таким образом должно иметься большое количество опытов, чтобы сделать правильный выбор.

Относительный шаг H/D очень просто связывается с $\operatorname{ctg} \beta'$. При бесконечно многих и бесконечно тонких лопатках непосредственно

$$\operatorname{ctg} \beta'_a = \frac{H}{D\pi},$$

следовательно,

$$\frac{H}{D} = \pi \cdot \operatorname{ctg} \beta'_a. \quad (535)$$

При незначительном количестве лопаток, чтобы получить в струе среднее β'_a , H/D должно быть увеличено по сравнению с уравнением (535). Можно положить:

$$\frac{H}{D} = \sigma \cdot \operatorname{ctg} \beta'_a, \quad (536)$$

где

$$\sigma > \pi.$$

Величина σ пока определяется только приблизительно. При трех лопатках она может составлять приблизительно 4,5—5,0. Для $\operatorname{ctg} \beta'_a$ надо подставлять по уравнению (531)

$$\operatorname{ctg} \beta'_a = \frac{u_a}{w_a} (m - 1). \quad (537)$$

Бесконечно большое количество и бесконечно тонкие винтовые поверхности, конечно, не могут гарантировать безударного входа, они скорее посредством удара производят касательное отклонение, необходимое для приема мощности. Конечно, многие поверхности лопаток могут быть принципиально так утолщены и благодаря этому могут получить такие профили в сечениях отдельными слоями потока, что течение будет повсюду касательным к среднему направлению входных концов.

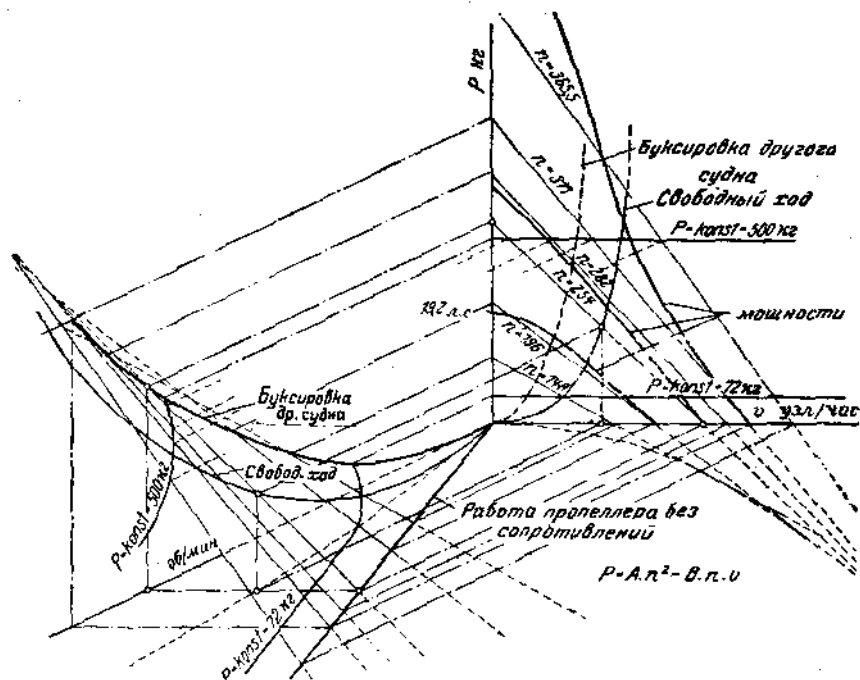
Если подставить для H/D его величину в уравнение (534) и для $\operatorname{ctg} \beta'_a$ —величину из уравнения (536), то получим связь между понятием скольжения и нашими представлениями, которые мы изложили для того, чтобы основать всю проблему по возможности на безукоризненной физической основе. А именно получается:

$$s = 1 - \frac{f_V}{\operatorname{ctg} \beta'_a} \cdot \frac{\pi}{\sigma}. \quad (538)$$

Посредством этого возможно определить влияние s на к. п. д. и изобразить диаграммой, которая соответствовала бы фиг. 157 и 158. От этого здесь, однако, придется отказаться.

Надо выяснить еще один вопрос: является ли условие $c_u r = \text{const}$, которое лежит в основе нашего изложения и на основе которого производится определение формы лопаток, действительно самым благоприятным, или оно только наиболее удобно для вычисления? Оно было бы самым благоприятным, если бы благодаря ему получался минимум кинетической энергии в струе. Заранее можно сказать, что ожидать этого нельзя и в действительности этого не наблюдается. Но казалось правильным положить в основу теории вышеназванный закон и именно по двум причинам; во-первых, благодаря ему вообще подчеркивается значение окружной скорости и устанавливается численно ее влияние на к. п. д. в дос-

таточно простой форме. Кроме того, самый благоприятный пропеллер характеризуется не только минимумом кинетической энергии в струе, но также минимумом общих потерь, к которым особенно относятся также потери трения. Благодаря этому теряет несколько свое значение вопрос о самом благоприятном распределении окружных составляющих скорости; отклонение от условия минимума энергии струи все равно является необходимым вследствие того, что приходится принимать во внимание другие потери.



Фиг. 170. Режим пропеллера при переменных скорости и числе оборотов.

Кроме того, вопрос о самом благоприятном распределении окружных составляющих скорости очень трудно разрешить при помощи только одной основной теории.

У ветряных турбин как раз редко удается достигнуть минимума кинетической энергии, так как здесь вопрос о к. п. д. значительно уступает в значении вопросу издержек строительства. Здесь поэтому особенно было уместным охватить в простой формуле влияние вращательного составляющего движения струи.

58. Работа данного колеса в потоке при меняющихся нагрузках

Уравнение (531) дает величины углов для каждого режима работы и показывает, что они меняются с его изменением. Если, наоборот, оставить углы неизменными, то вследствие только что установленной связи при различных режимах работы, строго говоря, уже не будет получаться постоянного момента скоростей в плоскости колеса. Однако точно также, как при упрощении,

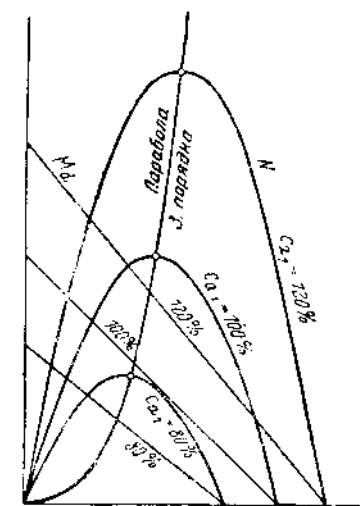
произведенном в § 28, на эти отклонения можно не обращать внимания и рассматривать момент скоростей, как постоянный, приближенно равный тому, который получается в среднем слое струи, следовательно, на окружности выхода из колеса с радиусом $r = r_a/\sqrt{2}$. Таким образом мы и здесь представляем всю работу сконцентрированной в среднем слое. Если мы это отметим посредством индекса m , то получим согласно уравнению (530):

$$k = r_m^2 \omega \cdot w_a \cdot r_m \operatorname{ctg} \beta_m',$$

или

$$m = \frac{k}{r_a^2 \omega} = \left(\frac{r_m}{r_a}\right)^2 + \frac{w_a}{u_a} \cdot \frac{r_m}{r_a} \operatorname{ctg} \beta_m'. \quad (539)$$

Здесь r_m/r_a и $\operatorname{ctg} \beta_m'$ — постоянные величины; но w_a/u_a мы рассматриваем, имея в виду принятое здесь допущение, как известную из прежних рассуждений функцию m и режима работы (f, f_v, f_e). Тогда из уравнения (539) можно вычислить m как функцию r_m/r_a , $\operatorname{ctg} \beta_m'$ и f , f_v, f_e , а затем величину шага и мощность. Во всяком случае при этом оставляются без внимания потери на удар при входе, а также всякие потери на трение. Проведя это вычисление, можно получить сравнительно точное совпадение с данными, найденными экспериментально для работы разных конструкций колес, работающих в потоке. Это может быть кратко



Фиг. 171. Режим ветряной турбины при меняющихся скорости притекания и числе оборотов, нанесенной на число оборотов.

объяснено тем, что шаг и момент вращения при переменном f меняются линейно, мощность получается в параболической зависимости. Фиг. 170¹ показывает это для пропеллера для разных постоянных чисел оборотов и изменяющейся поступательной скорости. Фиг. 171 относится к турбине, работающей в потоке при различных постоянных подходных скоростях и изменяющемся числе оборотов. Рисунки идеализированы и показывают малые отклонения от прямых линий и парабол. Впрочем рисунки являются иллюстрациями к рассматриваемым в дальнейшем условиям подобия.

59. Условия подобия для колес, работающих в потоке

Изложенная теория основывалась на определении относительных характеристик. Этим указывается путь к установлению характеристик подобия. Мы, однако, хотим их вывести из общих условий подобия.

Подобные состояния работы требуют геометрически подобных деталей. Под этим подразумеваются сначала сами колеса, затем также несущие конструкции (судно, самолет, башня ветряной мельницы). Далее, поля скоростей могут быть только тогда подобны, когда расстояние тел от возможных границ жидкости, например,

¹ Чертеж сделан на основе фиг. 14 в статье Прелля, „Ежегодника технического кораблестроительного общества“, т. 11, 1910, стр. 787.

глубина погружения пропеллера, высота ветряной мельницы над уровнем земли во всех сравниваемых случаях имеет одинаковое отношение к размеру тела, установленному в качестве величины для сравнения.

В качестве масштаба кинематического подобия является уже введенное относительное число f . Оно во всяком случае одинаково для подобных состояний работы. Если иметь дело с идеальной жидкостью, следовательно, не обращать внимания на влияние числа Рейнольдса, то можно также и здесь применить отношения, установленные в §§ 35 и 36, следовательно, написать: все энергии потока, все давления жидкости, а также все

$$\left. \begin{array}{ll} \text{напряжения} & \sim n^2 D_1^2 \\ \text{все силы} & \sim n^3 D_1^4 \\ \text{все моменты} & \sim n^2 D_1^5 \\ \text{все мощности} & \sim n^3 D_1^5 \end{array} \right\} \quad (540)$$

При этом все факторы пропорциональности зависят прежде всего от формы колеса (от углов лопаток, числа лопаток, отношения радиусов и отношений ширины, взаимного расположения направляющих и рабочих колес и т. д.) и затем, от отношения f , которое характеризует состояние работы. Если принять во внимание трение, то надо учесть, что оно еще зависит от числа Рейнольдса (в заключение также надо принять во внимание относительную шероховатость s/D). Сюда не относятся только потери и потребленные энергии, полезные силы и полезные энергии. Таким образом к. п. д. и здесь увеличиваются с увеличением числа Рейнольдса, так же, как у рабочих колес в потоке ограниченном стенками. Отметим две вещи: во-первых, что статическое распределение давления не следует закону подобия Рейнольдса; во-вторых, что этот закон лишь имеет значение постольку, поскольку условия течения не вызывают кавитации. Понятия коэффициент сдвига и коэффициент мощности, которые соответствуют понятиям единичный расход и единичная мощность, созданные для колес, в ограниченном стенками потоке и являющиеся точно так же постоянными подобия, имеющими одинаковые величины при подобных состояниях работы.

Коэффициент полезного действия зависит от режима работы, т. е. в общем он является функцией режима работы и числа Рейнольдса (не принимая во внимание различную шероховатость), т. е.

$$\epsilon = F(f, R).$$

В заключение можно считать также удельное число оборотов в качестве постоянной подобия. Из различных возможных определений, мы отметим следующее:

„Удельным числом оборотов колеса должно быть то число, которое наблюдалось бы при подобном режиме работы у колеса, одинакового с данным типа и подобно уменьшенного или увеличенного, когда оно при относительной скорости притекания $w_1 = c_{01} + V = 1$ потребляет или отдает мощность, равную единице.

Тогда применимы обе пропорции:

$$\frac{N}{1} = \frac{n^3 D^5}{n_s^3 D_s^5}; \quad \frac{c_{a_1} + V}{u_a} = f = \frac{1}{\frac{n_s D_s \pi}{60}}. \quad (541)$$

Посредством исключения D_s , которое нас не интересует, получается:

$$n_s = n \sqrt{\frac{N}{(c_{a_1} + V)^5}}. \quad (542)$$

Если здесь ввести ψ_u и f , то имеем:

$$n^2 N = \frac{30^3}{\pi \cdot 75} \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot \psi_u u_a^5,$$

$$n_s^2 = \frac{30^3}{\pi \cdot 75} \cdot \frac{\gamma}{2g} \psi_u \left(\frac{u_a}{c_{a_1} + V} \right)^5.$$

Таким образом при замене на $f = \frac{c_{a_1} + V}{u_a}$ будет:

$$n_s = \frac{30}{\sqrt{\pi \cdot 75}} \sqrt{\frac{\gamma}{2g} \frac{\psi_u}{f^5}}. \quad (543)$$

Благодаря умножению на $\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}$ оно получается безразмерным; согласно нашим прежним обозначениям безразмерных величин для удельного числа оборотов мы можем писать:

$$n_s^* = n \sqrt{\frac{\frac{2g}{\gamma} N}{(c_{a_1} + V)^5}} = \frac{30}{\sqrt{\pi \cdot 75}} \sqrt{\frac{\psi_u}{f^5}} = 1,955 \frac{\psi_u^{\frac{1}{5}}}{f^{\frac{1}{2}}}. \quad (544)$$

Каждая система, которая дает со своим ψ_u и f определенное n_s^* подходит к режиму работы, который дает с n , N , c_{a_1} и V по уравнению (544) то же самое n_s^* .

В тех случаях, когда заданы только V и c_{a_1} , вышеприведенное определение не применимо; можно получить "единичность" отношения, заменяя $c_{a_1} + V$ скоростью струи $c_{a_{10}}$, вследствие чего на место f^5 в знаменателе должен появиться λ_u^5 . Другое определение подходит для всех пропеллеров (также и к пропеллеру неподвижному) и относится к единичной мощности и единичному сдвигу.

$$\text{Из } \frac{S}{1} = \frac{n^3 D^4}{n_s^3 D_s^4} \quad \text{и} \quad \frac{N}{1} = \frac{n^5 D^5}{n_s^5 D_s^5} \quad (545)$$

получается удельное число оборотов:

$$n_s = \frac{n \sqrt{S^5}}{N^{\frac{1}{5}}}, \quad (546)$$

или (безразмерно):

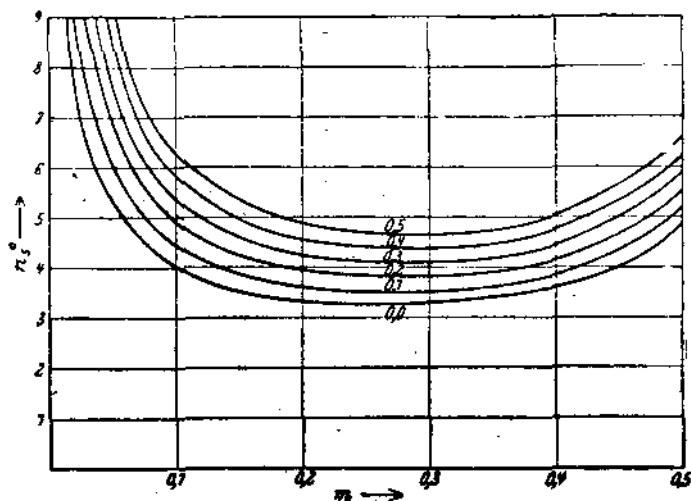
$$n_s^* = n \sqrt{\frac{\frac{2g}{\gamma} S^5}{N^{\frac{1}{5}}}}, \quad (547)$$

а подставляя φ_u и ψ_u :

$$n_s = \frac{30 \cdot 75^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{2g}} \frac{\sqrt{\varphi_u^5}}{\psi_u^2} \quad (548)$$

и (безразмерно):

$$n_s^* = \frac{30 \cdot 75^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varphi_u^5}}{\psi_u^2} = 0,95 \cdot 10^4 \frac{\varphi_u^{\frac{5}{2}}}{\psi_u^2} \quad (549)$$



Фиг. 172. Удельное число оборотов пропеллера в зависимости от m и f .

Если в заключение сравнить это выражение с формулой удельного числа оборотов турбины Каплана, то надо ввести понятие высоты напора. Для ветряной турбины $\frac{c_{a1}}{2g}$ является высотой брутто. Если ее обозначить через H , то, сравнивая с уравнением (542), видим, что получится, действительно, нам известная формула удельного числа оборотов для турбин:

$$n_s = \frac{n \sqrt{N}}{H \sqrt{H}};$$

у пропеллеров можно рассматривать как полезную высоту напора средний перепад давления в плоскости колеса в метрах столба жидкости, следовательно, величину:

$$H = \frac{S}{\gamma \pi r_a^2} = \frac{p_{\odot}}{\gamma}, \quad (550)$$

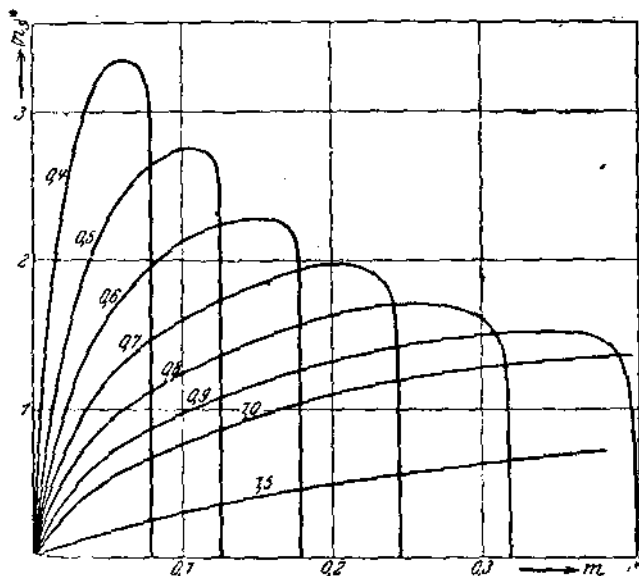
где через $p_{\odot}$ обозначается сдвиг по отношению к квадратному метру площади круга колеса. Таким образом мы получаем:

$$n_s = \frac{n \sqrt{N}}{\frac{p_{\odot}}{\gamma} \sqrt{\frac{p_{\odot}}{\gamma}}}, \quad (551)$$

или в безразмерной форме:

$$n_* = \frac{1}{\gamma^{1/2} (2g)^{3/4}} \cdot \frac{n \sqrt{N}}{\frac{p_{\odot}}{\gamma} \sqrt{V p_{\odot}}} = 1,955 \frac{\psi_u^{1/2}}{\varphi^{3/4}} \quad (552)$$

Фиг. 172 и 173 показывают зависимость удельного числа оборотов от m и f : из них можно для данного режима работы легко



Фиг. 173. Удельные числа оборотов ветряной турбины в зависимости от m и f .

определить n_s , причем можно установить, который из типов, указанных на фиг. 158 и 161, подходит для данного случая.

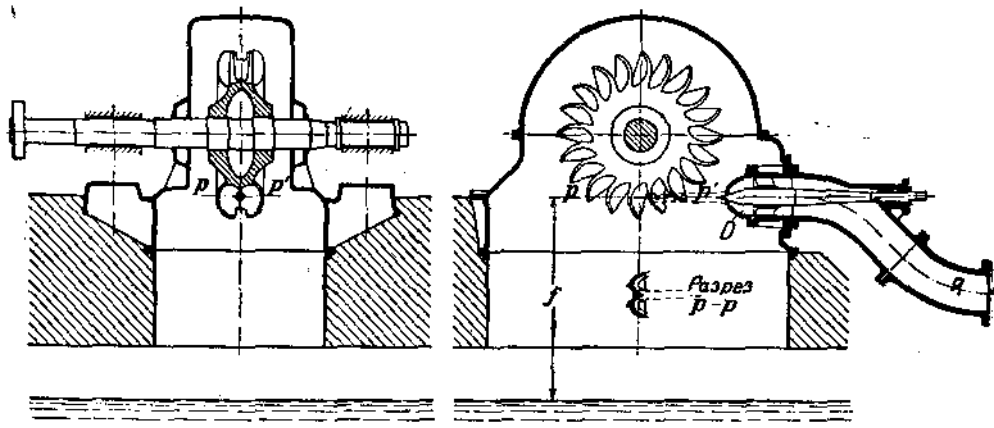
Д. СОВРЕМЕННЫЕ СВОБОДНОСТРУЙНЫЕ ТУРБИНЫ

XI. Одноразмерная теория турбин Пельтона

60. Типы ковшевых турбин

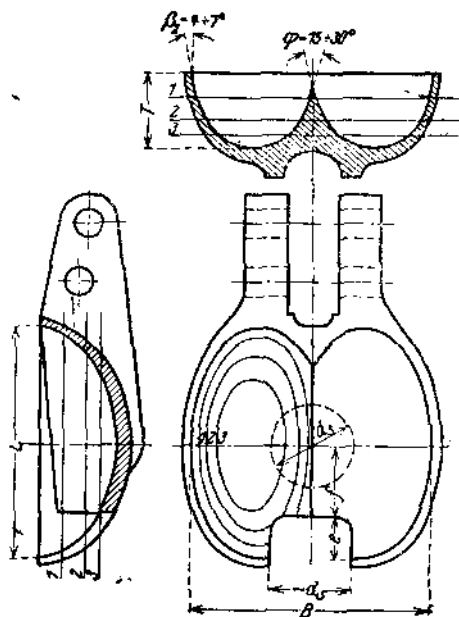
На фиг. 174 показаны все наиболее существенные конструктивные части свободнотруйных турбин, прототип которых изобретен американцем Пельтоном и которые до сих пор носят его имя. К колесу, имеющему форму диска, прибалчиваются ковши, имеющие форму двух ладоней, соединенных друг с другом. Форма их симметрична относительно средней плоскости, перпендикулярной к оси колеса, в которой и лежит нож ковша (это особенно понятно из разреза pp' , но также ясно из фиг. 174). Вода действует на определенную часть окружности колеса свободной струей, которая в современных конструкциях имеет круглую форму. Струя вытекает из сопла с иглой, которое установлено так, что струя

средней своей плоскостью, перпендикулярной к оси колеса, совпадает со средней плоскостью ковшей и делится ею на две симметричные части. Характерно, что главное направление отклонения струи лежит в плоскости, параллельной оси колеса, что особенно ясно из разреза pp' . Согласно указанному в § 25 определению колеса Пельтона должны быть отнесены к аксиальным турбинам. Во всяком случае каждая половина струи, расширяясь, заполняет вог-



Фиг. 174. Схематический продольный и поперечный разрезы свободнотруйной турбины

нутые формы лопаток, немного отклоняясь от главного направления. Это имело бы место в том случае, если бы каждая половина ковша представляла собой цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной ношу, ковша. Действительная форма ковша, изображенная на фиг. 175, получилась в результате продолжительных опытов. Она выполнена таким образом, чтобы каждая капля жидкости отделялась от поверхности колеса с возможно меньшей потерей энергии. Направляющий аппарат, при помощи которого вода попадает на колесо, представляет собою как уже было сказано сопло. Оно имеет круглую симметричную форму и внутри его находится игла с наконечником тоже в форме тела вращения. Конец, выступающий из сопла, имеет коническую форму. Благодаря совместному с соплом сужению достигается значительное суже-



Фиг. 175. Ковши турбины Пельтона.

ние струи при выходе наружу и переход из кольцеобразной формы в круглую. Игла имеет подвижность в направлении оси и благодаря этому площадь выходного отверстия может меняться от максимума до нуля. Для этого наибольшее сечение конечности иглы должно быть больше, чем круглое отверстие сопла. Передвижение иглы от руки производится только в малых турбинах, для остальных это выполняется сервомотором, который устанавливает иглу под влиянием регулятора скорости. В современных свободоструйных турбинах, имеется еще второй регулятор — отклонитель струи. Он состоит из лопатообразной поверхности, прикрепленной к коленчатому рычагу между соплом и колесом, которая совсем или частично отклоняет струю от ковшей. При внезапной разгрузке турбины можно предохранить всю конструкцию от разнеса, не прекращая течения воды через сопло и трубопровод и без всякого торможения. Благодаря этому приспособлению в первый момент регулирования игла переставляется с допустимой скоростью и отклонитель выходит из струи. Этот метод регулирования делает свободоструйные турбины особенно удобными для центральных станций с сильно колеблющейся нагрузкой.

Сопло входит в кожух, внутри которого вращается колесо. Движение свободной струи и отработанной воды происходит внутри кожуха. В противоположность полным турбинам кожух в данном случае не является рабочей частью турбины и служит только как предохранительный кожух, чтобы отработанную воду ограничить определенным местом и предохранить машинное помещение от разбрызгивающейся воды. Уплотнение вала в том месте, где он выступает из кожуха, имеет назначение препятствовать разбрызгиванию и просачиванию в машинное помещение. Колесо должно быть расположено настолько высоко, чтобы ковши не погружались в воду и тем самым не вызвали вредного сопротивления. Колесо в данном случае называют „свободно висющим“. Благодаря этому часть напора теряется при преобразовании в механическую работу; это соответствует на фиг. 174 обозначенной через f высоте сопла или оси струи над нижним горизонтом воды. Благодаря всасывающему действию струи и вращению лопаток захватывается воздух, и внутри кожуха получается разреженное пространство. Поэтому нижний уровень воды, засасываясь, поднимается. Для того чтобы этого не происходило и лопатки колеса не затоплялись водой в кожухе устраивается автоматический вентиль для выпуска воздуха. Характерным числом для турбин Пельтона принято отношение диаметра струи d_s к диаметру колеса D_r . За диаметр струи принимается сжатая часть цилиндрической струи; таким образом d_s меньше, чем диаметр сопла d_a . За диаметр колеса принимается диаметр круга в том месте, где он соприкасается с осью струи, и его называют средним диаметром колеса. Конечно, колеса надо различать в зависимости от количества и формы лопаток. В этом случае это на отношение $\frac{d_s}{D_r}$ оказывает мало влияния. Практика выработала основные формы лопаток, которые в разных производствах отличаются деталями, причем главные размеры ковшей — длина L , ширина B , глубина T , определяются в зависимости от d_s .

Заранее можно сказать, что малые отношения d_s/D_r характеризуют крайнюю тихоходность. При заданном напоре малое сечение струи даст небольшую мощность, а большой диаметр колеса обуславливает малое число оборотов, так как, нам уже известно, определенный напор для определенного типа дает строго установленную окружную скорость. Наоборот, менее тихоходному типу соответствует толстая струя и малый диаметр колеса. Наивысший предел отношений d_s/D_r ограничивается конструкцией и условиями прочности. В этом случае ковши по отношению к колесам были бы чрезмерно велики. Их прикрепление к колесу (точнее — противодействие центробежной силе путем прикрепления ковшей к колесу) чрезвычайно затруднительно или почти невозможно. Если в таких случаях коэффициент быстроходности недостаточен, то так же, как для турбин с подводом воды по всей окружности, надо перейти к колесам с многократным подводом воды. Это можно выполнить двояким способом: 1) направляют несколько струй на лопатки колеса, причем этот способ надо применять, пока есть возможность; 2) на одном валу располагают несколько колес, на каждое из которых действует по нескольку сопел. Предельное число сопел определяется условием отвода воды без взаимных столкновений струй, те же соображения играют роль при выборе числа колес, а также конструкции подшипников для вала. Наибольшее число сопел для колеса с горизонтальным валом меньше, чем для колеса с вертикальным валом (2 — 3 для колеса с горизонтальным валом).

Ниже приводятся два крайних примера свободоструйных турбин, чтобы обрисовать область их применения.

Установка Фулли в Швейцарии имеет колесо Пельтона с диаметром 3550 мм. Колесо приводится в движение одной струей с диаметром отверстия сопла 38 мм. Отношение d_s/D_r равняется 1:93,5. Напор у сопла равен 1600 м, наибольшая мощность 3000 л. с., число оборотов 500 об/мин. Коэффициент быстроходности определяется формулой:

$$n_s = n \frac{\sqrt{N}}{H\sqrt{H}} = 500 \frac{\sqrt{3000}}{1600\sqrt{1600}} = 2,7.$$

Скорость вытекающей струи 170 м/сек.

Высоконапорная установка с аккумулятором в Шварценбахе в Баденском северном Шварцвальде имеет две свободоструйные турбины, каждая с тремя колесами, причем на каждое колесо действует по два сопла. Колеса имеют диаметр 1350 мм, каждая струя при полном открытии имеет диаметр 140 мм $d_s/D_r = 1:10,35$. Действующий на сопло напор имеет 360 м. Наибольшая мощность на каждый агрегат 30000 л. с., число оборотов 500 об/мин. Коэффициент быстроходности определяется:

$$n_s = n \frac{\sqrt{N}}{H\sqrt{H}} = 500 \frac{\sqrt{30000}}{360\sqrt{360}} = 56.$$

Из приведенных примеров видно, что свободоструйные турбины представляют собой исключительно высоконапорные турбины. На основании вышеизложенного об условиях подобия ясно, что подоб-

ные турбины надо относить к высоконапорным не только вследствие абсолютной величины напора, но и вследствие коэффициента быстроходности, мощности и числа оборотов.

61. Течение через колесо с ковшами. Кинематические условия для наиболее благоприятных условий работы

В отдельных случаях исследовать движение воды через лопатки свободноструйного колеса еще труднее, чем через колесо с подводом воды по всей окружности. Лопатки направляют воду одно-сторонне; форма всего потока, абсолютные и относительные линии тока, как и пути частиц, обуславливаются тем обстоятельством, что наружная поверхность струи соприкасается с воздухом и имеет постоянное давление. Математически охватить это очень трудно и делать этого не стоит; практика помогла себе в этом отношении путем физических опытов и систематических испытаний¹.

Свободноструйные турбины в связи с ранее отмеченной тихоходностью имеют то преимущество, что в них относительное отклонение рабочей воды может быть значительно сильнее, чем в турбинах с избытком давления (§ 41 d, a). В данном случае отпадают все условия, которые там имелись. Распределение скорости и давления имеют предельные величины, так как на свободной поверхности имеется свободное давление и толщина текущей струи незначительна, а на закруглении лопатки получается ничтожная разница в давлении. Мы получаем для свободноструйной турбины относительное отклонение приблизительно на 180° . Ставится одно условие, чтобы жидкость, отходящая от колеса, не задевалась ближайшими лопатками, иначе говоря, чтобы образование свободной струи ничем ни нарушалось. Это зависит при заданном относительном угле выхода также от числа лопаток и их шага. Относительный угол входа по нашим положениям § 28 может быть равен нулю и направление поверхности лопаток может совпадать с окружностью. Пельтон установил, что результаты при осевом протекании по лопатке рабочей воды получаются лучшие, чем при радиальном. Причина заключается в том, что при осевом протекании элементы поверхности у входа на лопатки при полном подводе воды все время остаются касательными к направлению струи, в то время как при радиальном типе их положение по отношению к струе меняется и только в одном месте может быть касательно к направлению струи.

Вторая идея, которую выдвинул Пельтон, заключается в симметричном разделении струи ножом ковша на две части и их симметричное отведение двумя частями ковша. Только так практически можно было выполнить входную часть лопатки касательной к направлению струи. Практика показала, что ножи можно выполнять с углом 15° в поперечном сечении и первое отклонение жидкости от ее направления происходит достаточно плавно (практически без потери от удара). В целях обеспечения не нарушающего работу

¹ См. Рейхель и Вагенбах — Опыты с ковшевыми турбинами. „ZdVdI“, 1913 и 1918.

соприкосновения лопаток со струей надо устраивать ковши с вырезами со стороны наружной окружности (выполняемыми всегда прямоугольной формы), через которые струя может, не задерживаясь, проникать, пока ковши погружаются в нее своими крайними точками. Эти вырезы делают возможным образование расходящихся от ножа во все стороны поверхностей и все же обеспечивают безударный вход струи на лопатку.

Наилучшее положение лопаток получается не при радиальном положении лезвия; напротив, лезвие, относительное положение которого во время вращения меняется, должно быть расположено так, чтобы его лезвие было перпендикулярно по отношению частиц набегающей струи. Шаг лопаток и количество их должны быть выбраны таким образом, чтобы ни одна частица не покидала колеса без отдачи работы. Это требование ведет к тому, чтобы применять большой шаг, обеспечивающий наибольшую отдачу работы от частиц жидкости. Может случиться, что при малом количестве лопаток струя временно остается не отклоненной.

Чтобы выяснить эти вопросы необходимо установить относительные пути всех частиц струи, проходящих через колесо, в том случае, когда струя не подвергается влиянию лопаток. Мы получим эту относительную картину, если наложим на картину абсолютного движения системы „колеса и струи“ вращение вокруг оси колеса с угловой скоростью ω , но в направлении, обратном действительному вращению. Таким образом колесо находится как бы в покое, частички струи, в дополнение к своей абсолютной скорости c , каждое мгновение получают окружную скорость u . Эта последняя равна и противоположна той скорости, которую в этот момент в данном пункте имела частица если бы была связана с колесом. При построении относительного пути неотклоненной частицы мы должны принять во внимание, что ее абсолютный путь при прохождении через колесо остается прямолинейным. Это допустимо при наличии очень больших скоростей струи и малых проходимых расстояний. В дальнейшем мы увидим, что окружная скорость равна приблизительно половине абсолютной скорости.

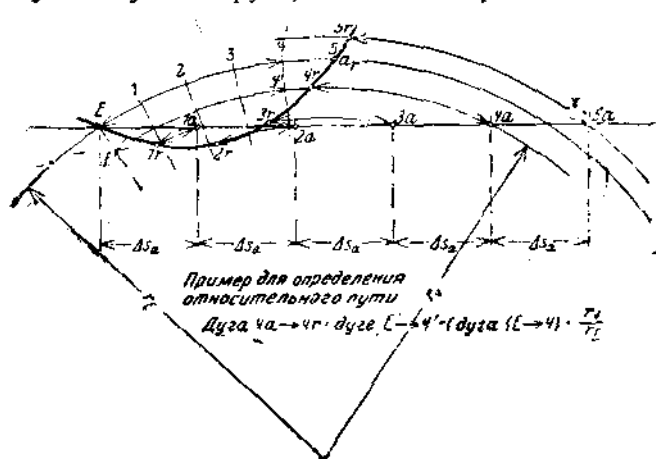
Фиг. 176 изображает абсолютный и относительный пути одной неотклоненной частицы. На прямолинейном абсолютном пути нанесены равные участки Δs_a , которые частица проходит в одинаковые промежутки времени Δt . Согласно вышеизложенным положениям концы путей каждой частицы должны быть повернуты на определенную дугу проходящего через них круга. Эти дуги имеют длины, равные дугам, проходимым в равный период времени точками колеса, совпадающими с концами отрезков, как то и необходимо для абсолютного пути частицы от места вступления до конца соответственного участка.

На фиг. 176, например, точке $4a$ абсолютного пути соответствует точка $4r$ относительного пути, причем в данном случае:

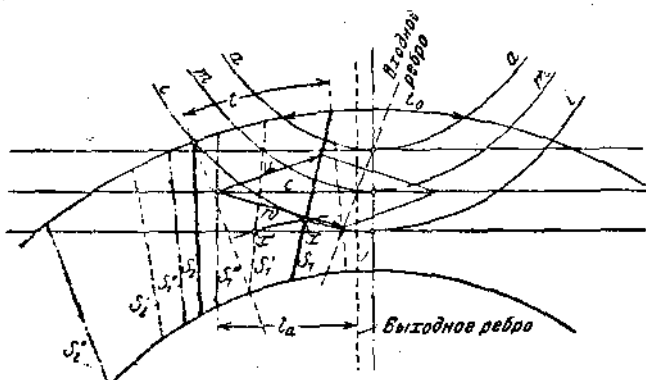
$$\text{дуга } 4a \rightarrow 4r = (\text{расстоянию } E \rightarrow 4a) \cdot \frac{u}{c} = (E \rightarrow 4a) \frac{u_E \frac{r_E}{r_E}}{c}.$$

Таким образом на фиг. 176 получается изогнутый относительный путь неотклоненной частицы. Это дает шаг t_0 , равный

дуге $E \rightarrow A$ на окружности колеса от точки входа E до точки выхода A . Если абсолютный путь на фиг. 176 представляет наружную образующую струи, и t есть шаг (деление) на окружности, проходящей через крайнюю точку лезвия ковша, равный t_0 , то получается следующее: капля жидкости, которая в данный момент достигает упомянутого круга, где в это время находится в этой точке край



Фиг. 176. Абсолютный и относительный путь неотклоняющейся частицы жидкости.



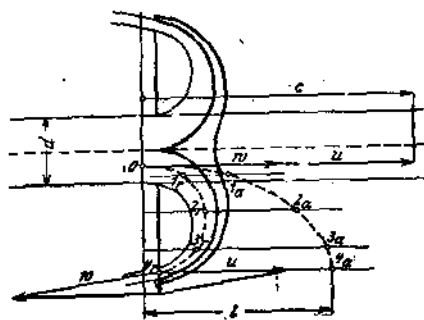
Фиг. 177. Кинематические соотношения между ковшами и неотклоненной струей.

лезвия ковша, больше отклонению не подвергается; жидкость, обладая большей скоростью, чем лопатка, может догнать вперед движущуюся лопатку, прежде чем она выйдет из области влияния лопаток. Если шаг лопатки $t = t_0 =$ дуге EA , то жидкость в последний момент отделяется, не производя никакого действия на движущуюся вперед лопатку. Настоящий шаг лопаток должен быть $t < t_0$. Обыкновенно принимают $t = 0,75t_0$.

На фиг. 177 изображены относительные пути наружной, внутренней и средней линии тока струи, не отдающей энергии колесу. Обозначение „наружная“ и „внутренняя“ определяются расстоянием от центра колеса. Относительные пути представлены для трех частиц, которые одновременно проходят через вертикальную, проходящую через ось колеса, плоскость. Между путями aa и ii — относительная неотклоненная струя. Там же изображена и абсолютная. От лопаток нанесено только лезвие ковша. Его расположение по отношению к радиусу будем считать согласно изображенному.

Теперь выбирают деление $t < t_0$, чертят две лопатки S_1 и S_2 , отстоящие друг от друга на расстоянии t в таком положении к относительной струе, чтобы своей наружной точкой S_2 пересекла внутренний относительный путь (расположение S_1 и S_2

без добавочных индексов). Относительный путь ii пересечет S_1 в точке x . В этой точке начинается соприкосновение внутренней струйки струи с S_1 ; раньше она оставалась неотклоненной. Если мы повернем назад лопатку настолько, чтобы точка x попала на абсолютную самую крайнюю внутреннюю неотклоненную струйку (положение $x_1' S_1', S_2'$), то мы будем иметь такое абсолютное положение лопатки, в котором она в последний раз подвергалась действию полной струи. В первый раз это имеет место в положении S_1'' . Из положений S_1' и S_1'' получается среднее положение S_1''' , причем u и c располагаются перпендикулярно к относительному направлению лезвия ковша. Если, как это нарочно принято на фиг. 177, это не имеет места, то направление лезвия ковша нужно изменить и проверку провести снова. На фиг. 177 надо было выбрать наклон лезвия к радиусу более значительным.



Фиг. 178. Относительный и абсолютный путь отклоненной частицы.

Фиг. 178 изображает главное сечение ковша с относительным и абсолютным отклонением частицы внутри средней части струи. Движение ковша принимается происходящим прямолинейно с средней окружной скоростью u_m (соответствующей радиусу $r_m = \frac{D_r}{2}$). Определение абсолютного пути из относительного ясно видно из фиг. 178. Относительная скорость жидкости по всему профилю ковша почти постоянная (только трение ее несколько изменяет). Ее находят из входного треугольника, который (вследствие $\beta = 0$) в данном случае почти превращается в прямую $w = c - u$ и можно принимать при этом $u = \frac{c}{2}$ (см. § 62). Если относительный путь разделить на определенные участки Δs , то

$$\Delta t = \frac{\Delta s_r}{w}$$

есть время, необходимое для его прохождения. В равные промежутки времени квш передвигается на абсолютный отрезок пути Δs_a , равный $\Delta s_r \frac{u}{w}$.

Таким образом получают для каждой точки относительного пути соответственный абсолютный путь. При этом откладываются отрезки l абсолютного пути жидкости. Если нанести это на фиг. 177 от точки пересечения расположения лопаток S_1''' со средней линией струи в положительном направлении, то среднее положение выходных краев ковша расположится между первым и последним выходом полной струи. В это мгновение струя должна быть перпендикулярна к выходному краю, как это и показано на фиг. 177. В этом же положении показано направление лезвия, чтобы видно было, как оно наклонено по отношению к выходным краям ковша.

Правильность вышеизложенных рассуждений подтверждена опытными исследованиями наилучших форм ковшей, их расположе-

ний и величины их шага. Наиболее употребительные отношения для ковшей в соответствии с фиг. 175 следующие:

$$L \approx 2,1d; \quad B \approx 2,5d; \quad T \approx 0,85d; \quad e \approx 0,35d; \quad f \approx 0,35d.$$

62. Окружная сила и мощность одноструйного колеса Пельтона. Наивыгоднейшая окружная скорость

Действительная картина тока, которую дает свободнотруйная турбина, дает значительно большие периоды колебания, чем у реактивных турбин. Все-таки и в этом случае достаточно представить себе установившуюся картину тока, чтобы подсчитать мощность. В середине устанавливается течение, как это изображено на фиг. 178. Его мы рассматриваем как стационарное. Мы можем применить уравнение (90) для отклоняющей реакции в решетке двигающейся, параллельно самой себе, и отсюда получить окружную силу колеса Пельтона:

$$R_u = Q \frac{\gamma}{g} (c_{u1} - c_{u2}). \quad (553)$$

Здесь c_{u1} равнозначна скорости струи c и, следовательно,

$$Q = d_s^2 \frac{\pi}{4} c.$$

Относительная скорость w_1 при выходе равна $w_1 = c - u$.

Мы считаем в данном случае жидкость идеальной и принимаем $w_2 = w_1$. На фиг. 179 изображены треугольники скоростей входа и выхода, причем какого-либо специального значения отношениям $w:u$ или $c:u$ не давалось.

Согласно фиг. 179 получаем:

$$c_{u2} = u + w_2 \cos \beta_2 = u - w_1 \cos \beta_2' = u - (c - u) \cos \beta_2'; \quad (555)$$

отсюда следует:

$$\begin{aligned} R_u &= d_s^2 \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{g} c \{ c - u + (c - u) \cos \beta_2' \} = \\ &= d_s^2 \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{g} c^2 (1 + \cos \beta_2') \left(1 - \frac{u}{c}\right). \end{aligned} \quad (556)$$

Фиг. 179. Средняя диаграмма скоростей входа и выхода для турбины Пельтона.

Окружная сила, а также момент вращения, для идеальной жидкости, являются линейной функцией отношения $\frac{u}{c}$.

При полном торможении колеса ($\frac{u}{c} = 0$) он достигает значения

$$R_{u \text{ торм}} = d_s^2 \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{g} c^2 (1 + \cos \beta_2'). \quad (557)$$

Холостой ход получается при $u:c = 1$.

Мощность теоретическая

$$N_t = \frac{R_u \cdot u}{75} = d_s^2 \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{g} c^3 (1 + \cos \beta_2') \left(1 - \frac{u}{c}\right) \frac{u}{c}. \quad (558)$$

В пределах $0 < \frac{u}{c} < 1$ она является параболической функцией отношения $\frac{u}{c}$ с максимумом при $\frac{u}{c} = \frac{1}{2}$.

Величина того максимума определяется из формулы

$$N_{i_{\max}} = \frac{1}{4} \cdot d_s^2 \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{g} c^3 (1 + \cos \beta_2'). \quad (559)$$

При реальной жидкости эти отношения несколько меняются. Мощность теряется благодаря трению струи о ковши и вследствие вентиляционной работы колеса, вращающегося в воздухе. Она подчиняется тому же закону, что трение вращающегося диска, и равняется

$$N_r = C \frac{\gamma}{g} D_r^2 \frac{\pi}{4} u^3.$$

Трение струи о ковши дает уменьшение w_2 в отношении w_1 . Это воздействие сравнительно невелико, но так как оно с уменьшением w или с увеличением u вероятно возрастает, то его можно включить в выражение N_r . Для действительной работы мы получаем:

$$N = N_i - N_r = d_s^2 \frac{\pi}{4} \frac{\gamma}{g} c^3 \left\{ (1 + \cos \beta_2') \left(1 - \frac{u}{c}\right) \frac{u}{c} - C \left(\frac{D_r}{d_s}\right)^2 \left(\frac{u}{c}\right)^3 \right\}.$$

Эта мощность имеет максимум при значении $\frac{u}{c} < \frac{1}{2}$, настоящее положение и величина которого зависит от отношения $x = \frac{1 + \cos \beta_2'}{C \left(\frac{D_r}{d_s}\right)^2}$ и будет:

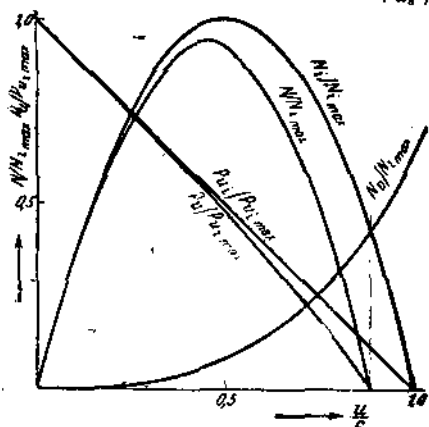
$$\left(\frac{u}{c}\right)_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}} - \frac{x}{3}.$$

Соответственно с этим диаграмма окружной силы и крутящего момента не является прямой.

Фиг. 180 иллюстрирует наши подсчеты. Там изображены отдельно N_r и N_i , полученные из равенства $N = N_i - N_r$. Видно, что холостой ход образуется при значениях $\frac{u}{c} < 1$. Принятое допущение выявляется для больших расходов воды ($\frac{D_r}{d_s}$ маленькое) лучше, чем для типов с малым единичным расходом и при больших расходах дает наивысшую величину при наилучшем u/c . Новые опыты дают обратное. Причина заключается в трудности профилирования лопаток, что при толстых струях, естественно, будет сильнее заметно.

В современных конструкциях применяют $u = (0,485 - 0,42) \cdot c$, где меньшая величина относится к большим расходам.

¹ Остерлин, Свободнотруйные турбины; Дуббель, Карманная книжка для машиностроения.



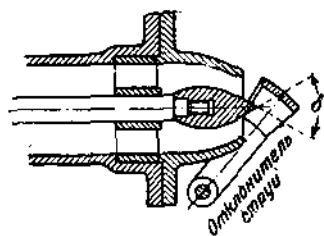
Фиг. 180. Окружная сила и мощность колеса Пельтона.

63. Формы сопел и их устройство

Сопло обыкновенно представляет коленичатую трубу. Это необходимо потому, что регулирующий шток должен выходить из подводящей трубы (фиг. 174). Большее искривление или меньшее закругление, но с большим углом поворота применяется при устройстве нескольких сопел для одного колеса. При проектировке колен надо принять меры к тому, чтобы отставание пограничного слоя на закруглении не вызвало винтообразного движения струи. В самом сопле при всяком положении иглы на коротком участке развивается сильное ускорение; формы сопла, у которых при разных установках иглы не получается плавного сужения сечения, должны считаться негодными. Чтобы получить верную и точно очерченную струю, необходимо защитить всю конструкцию против вибрации.

В особенности солидно должна быть укреплена игла перед ее оконечностью. Прежде при установлении формы оконечности иглы ставили условием, чтобы диаметр кривизны ее профиля был больше соответственного диаметра профиля сопла. Но затем было установлено, что и при прямолинейном профилировании иглы, струя к игле прижимается. Надо полагать, что выполнение подобной формы легче, и противодействие ее разъеданию сильнее. Угол сопла (фиг. 181) принимается $60-80^\circ$. При хорошем выполнении потери в сопле незначительные. Для полного открытия в среднем можно считать $c = 0,98 \sqrt{2gH}$.

H надо считать как сумму статической и динамической высоты напора ($H = \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g}$) непосредственно в сопле. Окончательное преобразование давления в скорость внутри струи происходит вне сопла; скорости в кольцеобразном, суженном иглой сечении сопла



Фиг. 181. Сопло Пельтона с иглой и отклонителем струи

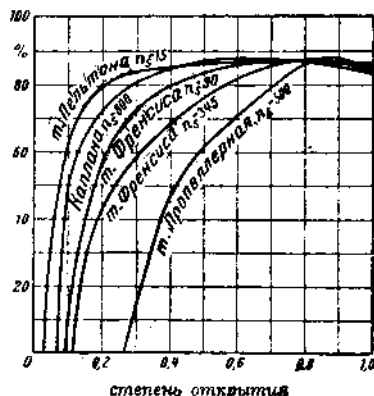
не везде одинаковы; они внутри меньше в зависимости от величины давления и изгибов струи. Средняя скорость таким образом здесь меньше, чем в струе кругового сечения. Можно считать $c_m = (0,7 - 0,9) \sqrt{2gH}$.

Скорость при коленичатом подводе с малым углом конусности должна быть незначительной; ее величина находится в зависимости от выполнения $c_k = (0,12 - 0,14) \sqrt{2gH}$. Сопло должно быть расположено возможно ближе к лопаткам колеса, чтобы путь воды через воздух был возможно короче и сопротивление было меньше. При современных турбинах это затруднительно вследствие установки отклонителя струи.

64. Законы подобия для свободнотруйных турбин. Свойства их при разных эксплуатационных условиях. Коэффициент быстроходности

Общие законы подобия имеют место и в данном случае. Надо иметь в виду кроме геометрических подобия конструктивные: равенство отношений u/c , отношений d_1/D , (также реактивных

местоположений иглы), числа Рейнольдса R , которое так же, как и у реактивных машин имеет вид: $R = \frac{V \sqrt{2gHD}}{\nu}$. Если имеется равенство трех чисел: u/c , d_s/D_r и R , то дальше остаются в силе как главное отношение u , w , $c \sim \sqrt{H}$ и дальше все уравнения от (231) до (235). Гидравлический к. п. д. $\epsilon_h = f\left(\frac{u}{c}, \frac{d_s}{D_r}, R\right)$; причем относительная шероховатость во внимание не принята. Зависимость к. п. д. от d_s/D_r при равных или почти равных u/c и равных R весьма незначительна. Это происходит вследствие того, что регулирование путем изменения d_s/D_r является исключительно регулированием расхода. Диаграмма скоростей при этом почти не изменяется. Регулирование в данном случае можно считать для турбины идеальным. Кривые полного к. п. д. ϵ для современных турбин, выраженные через мощность при постоянном числе оборотов, имеют довольно пологую форму (фиг. 182). Только при приближении к единичному расходу они падают соответственно преобладающему влиянию механических и вентиляционных потерь.



Изменение ϵ от u/c имеет вид, подобный изображенному на фиг. 180 для N . Понятие единичного расхода, единичной мощности и коэффициент быстроходности сохраняют свое значение.

Фиг. 182. Сравнение коэффициента полезного действия колеса Пельтона с другими типами турбины (Voith).

Диаграммная характеристика m при наивысшем к. п. д. в среднем $m = c_u$; $u = c$; $u = 2,2$.

Как основной диаметр выбираем средний диаметр колеса D_r . Для машины единичной мощности ($D_r = 1$; $H = 1$):

$$u = \frac{\pi}{60} n_1'.$$

Вторым характерным числом служит отношение d_s/D_r .

Третьим характерным числом можно принять число сопел i , причем это число сопел, приходящееся на все колеса, соединенные в один агрегат. При этом колеса принимаются равными друг другу.

Тогда (при $c = 0,98 \sqrt{2gH}$) единичный расход:

$$\begin{aligned} Q_1' &= \frac{Q}{D_r^2 \sqrt{H}} = i \frac{d_s^2 \frac{\pi}{4} 0,98 \sqrt{2gH}}{D_r^2 \sqrt{H}} = \\ &= 0,98 \frac{\pi}{4} \sqrt{2g} i \left(\frac{d_s}{D_r} \right)^2 = 3,47 i \left(\frac{d_s}{D_r} \right)^2 \end{aligned} \quad (560)$$

или безразмерно:

$$(Q_1')^* = \frac{Q}{D_r^2 \sqrt{2gH}} = 0,768 i \left(\frac{d_s}{D_r} \right)^2. \quad (561)$$

Единичная мощность

$$N_1' = \frac{\gamma \cdot \varepsilon}{75} Q_1' \quad (562)$$

или безразмерно:

$$(N_1')^* = \frac{\varepsilon}{75} (Q_1')^* \quad (563)$$

Единичное число оборотов:

$$n_1' = \frac{nD}{\sqrt{H}} = \frac{u \cdot \frac{60}{\pi}}{\sqrt{H}} = \frac{c}{m} \cdot \frac{60}{\pi} = \frac{0,98 \sqrt{2gH} \cdot \frac{60}{\pi}}{m \sqrt{H}} = \frac{0,98 \sqrt{2g} \cdot \frac{60}{\pi}}{2,2} = 38 \quad (564)$$

или (безразмерно):

$$(n_1')^* = \frac{nD}{\sqrt{2gH}} = 8,5. \quad (565)$$

Коэффициент быстроходности

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H\sqrt{H}} = n_1' \sqrt{N_1'} = 38 \sqrt{\frac{\gamma \cdot \varepsilon}{75} Q_1'} = 38 \sqrt{\frac{\gamma \cdot \varepsilon}{75} \cdot 3,47 \cdot i \left(\frac{d_s}{D_r}\right)^2} = 8,2 \frac{d_s}{D_r} \sqrt{\gamma \cdot \varepsilon \cdot i}. \quad (566)$$

При $\gamma = 1000$ для воды и $\varepsilon \approx 0,85$ получается

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H\sqrt{H}} = 240 \sqrt{i} \frac{d_s}{D_r}. \quad (567)$$

Безразмерно получается:

$$(n_s)^* = \frac{n\sqrt{N}}{(\gamma H)^{\frac{1}{2}} (2gH)^{\frac{1}{4}}} \approx 0,82 \sqrt{i} \frac{d_s}{D_r}. \quad (568)$$

Применение этих понятий при сравнении различных типов, а также и при выборе подходящих типов (для данной установки) и при выборе размеров для них совершенно такое же, что и для реактивных полных турбин.

Нижнего предела для отношения d_s/D_r не имеется; для верхнего можно принять $\frac{d_s}{D_r} = \frac{1}{7}$, который на основании приведенных в § 60 причин трудно превзойти. Отсюда получается $n_s \approx 35$, как верхний предел коэффициента быстроходности для колеса с одним соплом.

Взаимное отношение свободнотруйных турбин, как и для реактивных турбин, может быть установлено на основании диаграммы $Q-n$ или $Q_1'-n_1'$ при помощи кривых с одинаковым к. п. д., одинаковой единичной мощностью, одинаковым коэффициентом быстроходности. Чего-нибудь существенно нового эта диаграмма не дает; она характерна только плавным подъемом кривой к. п. д. в зависимости от Q_1' . Вместо линии одинаковых открытий направляющего колеса, как это видно на диаграмме фиг. 91, которые не совпадают с ординатами линий $Q_1' = \text{const}$, имеют место в данном случае линии $ds'_1 = \frac{d_s}{D_r} = \text{const}$, которые одинаковы с ординатами $Q_1' = \text{const}$.