

К. ПОССЕ и И. ПРИВАЛОВ

**КУРС
ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ**

ГОСТЕХИЗДАТ-1939

А Т

Депозитарий

К. ПОССЕ и И. ПРИВАЛОВ

S173
П-62

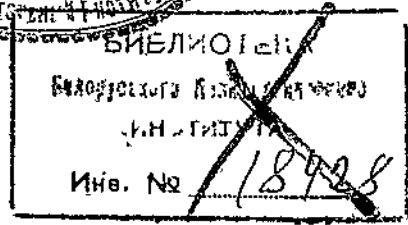
КУРС ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4-е переработанное издание

Допущено Всесоюзным Комитетом по делам
высшей школы при СНК СССР в качестве
учебника для физико-математических факуль-
тетов государственных университетов

ПРОВЕРЕНО
2.8.1952 г.

0320



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1939 Ленинград

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Редактор Н. М. Лисенков и Г. Ф. Рыбкин
Техн. редактор В. Ф. Зазульская и Р. В. Эмдина

Сдано в набор 26/V 1939 г.	Подписано к печати 10/VII 1939 г.
Тираж 40000	Формат бумаги 60×92 ¹ / ₁₆
Уч.-авт. лист. 37.	Изд. № 121.
Бум. лист. 15.	Печ. лист. 30.
Леноблгорт № 3372.	Коллич. ттп, зн. в бум. листе 105832.
	Заказ № 1653.
	Бумага Окундовской ф-ки.

2-я типогр. ГОНТИ им. Евгения Соколова, Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

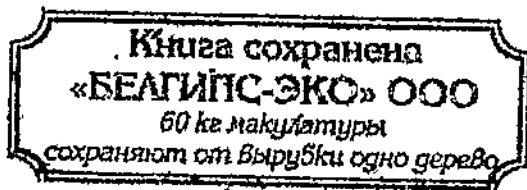
В настоящем издании мною произведена коренная переработка курса интегрального исчисления проф. К. Пюссе.

Эта книга содержит полный курс интегрального исчисления и включает в объеме, необходимом для вузов, разделы дифференциальных уравнений и рядов Фурье.

В изложение всего материала книги я внес существенные изменения, причем значительная часть текста написана мною заново.

Учитывая интересы преподавателей, а также студентов университетов и педвузов, я включил некоторый дополнительный материал, освещающий важные теоретические вопросы; он набран мелким шрифтом. Однако чтение основного текста не зависит от этих дополнений, что дает возможность учащемуся пройти курс, ограничиваясь текстом, набранным крупным шрифтом.

И. Привалов



ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Глава I. Основные способы интегрирования функций	7
§ 1. Неопределенный интеграл (7). § 2. Геометрическое изображение интеграла (11). § 3. Простейшие теоремы и формулы интегрального исчисления (15). § 4. Различные приемы интегрирования функций (17). Упражнения (24).	
Глава II. Интегрирование в конечном виде некоторых алгебраических и трансцендентных функций	27
§ 1. Интегрирование рациональных дробей (27). § 2. Отделение алгебраических членов в интеграле от рациональной дроби (29). § 3. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций (32). § 4. Интегрирование некоторых трансцендентных функций (48). Упражнения (59).	
Глава III. Существование первообразной функции	63
§ 1. Равномерная непрерывность (63). § 2. Основная лемма (65). § 3. Непрерывная функция как сумма правильно сходящегося ряда полиномов (68). § 4. Основная теорема (69).	
Глава IV. Определенный интеграл. Геометрические приложения	70
§ 1. Определенный интеграл и его простейшие свойства (70). § 2. Выражение интеграла в виде предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых (74). § 3. Геометрическая интерпретация представления интеграла как предела суммы (78). § 4. Задачи, приводящиеся к вычислению определенных интегралов (80). § 5. Некоторые неравенства и теорема о среднем значении (86). § 6. Преобразование переменной (89). § 7. Интегрирование по частям (92). § 8. Квадратура областей (94). § 9. Спрямление дуг (106). § 10. Вычисление объемов (112). § 11. Вычисление площади поверхностей тел вращения (117). § 12. Вычисление объемов и поверхностей тел, образуемых вращением замкнутой кривой около данной оси (119). § 13. Приближенное вычисление определенных интегралов (121). Упражнения (124).	
Глава V. Определенные интегралы от разрывных функций. Несобственные интегралы	131
§ 1. Понятие определенного интеграла от ограниченной функции (131). § 2. Простейшие свойства определенного интеграла от ограниченной функции (136). § 3. Интегралы с бесконечными пределами (137). § 4. Интеграл от функции, неограниченной между пределами интегрирования (142). § 5. Признаки сходимости несобственных интегралов (147). § 6. Примеры (151). Упражнения (155).	
Глава VI. Ряды в интегралах, зависящие от параметра	158
§ 1. Теорема Коши-Маглорена (158). § 2. Формула Тейлора с остаточным членом в виде определенного интеграла (161).	

§ 3. Равномерно сходящиеся ряды (163). § 4. Интегрирование и дифференцирование рядов (167). § 5. Примеры на вычисление интегралов при помощи разложения подинтегральной функции в ряд (170). § 6. Дифференцирование и интегрирование определенного интеграла по параметру (172). § 7. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов по параметру (177). § 8. Вычисление определенных интегралов методами дифференцирования и интегрирования по параметру (184). § 9. Эйлєровы интегралы (193). Упражнения (201).

Глава VII. Интегрирование дифференциальных уравнений 205

§ 1. Разыскание функции от нескольких переменных по данному полному ее дифференциалу (205).

Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка 209

§ 2. Определения (209). § 3. Уравнения 1-го порядка и первой степени относительно производной неизвестной функции (216). § 4. Множитель дифференциального уравнения (238). § 5. Уравнения 1-го порядка, не решенные относительно производной функции (244). § 6. Особые решения уравнений 1-го порядка (253).

Дифференциальные уравнения высших порядков 263

§ 7. Дифференциальное уравнение как результат исключения нескольких произвольных постоянных (263). § 8. Повышение порядка и интегрирование уравнений в некоторых частных случаях (268). § 9. Интегрирование дифференциальных уравнений конических сечений (283).

Линейные уравнения 285

§ 10. Общие свойства линейных уравнений (285). § 11. Способ изменения произвольных постоянных (294). § 12. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и приводящиеся к ним (296).

Интегрирование уравнений при помощи рядов 312

§ 13. Решение уравнений с помощью ряда Тейлора (312).

Решение некоторых задач, приводящихся к интегрированию уравнений 315

§ 14. Задача о траекториях (315). § 15. Задача о погонной линии (318). § 16. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (320). § 17. Интегрирование уравнений в частных производных 1-го порядка, линейных относительно частных производных неизвестной функции (332). Упражнения. (337).

Глава VIII. Двойные и тройные интегралы 344

§ 1. Определение интеграла, распространенного по прямоугольнику (344). § 2. Определение двойного интеграла, распространенного по произвольной области (348). § 3. Геометрическая интерпретация двойного интеграла (356). § 4. Обобщение определения двойного интеграла (359). § 5. Случай, когда результат двух последовательных интегрирований $f(x, y)$, в постоянных пределах, может зависеть от порядка действий (362). § 6. Вычисление площадей поверхностей (365). § 7. Преобразование переменных в двойных интегралах (367). § 8. Геометрическое истолкование формулы преобразования двойного интеграла (375). § 9. Приложение общей формулы преобразования

переменных в двойном интеграле к частным случаям. Элементы поверхности в криволинейных координатах (378). § 10. Определе-
ние и вычисление тройного интеграла, распространенного
по пространственной области или телу (388). § 11. Преобразо-
вание переменных в тройных интегралах. Элемент объема
в криволинейных координатах (393). § 12. Геометрическая
интерпретация преобразования тройного интеграла (396).
§ 13. Элемент объема в полярных и вообще в ортогональных
координатах (398). Упражнения (401).

Глава IX. Криволинейные интегралы. Интегралы по поверхности. 405

§ 1. Определение криволинейного интеграла (405). § 2. Фор-
мула Грина (408). § 3. Интегралы, распространенные по поверх-
ности. Формула Стокса (414). § 4. Обобщение формулы Грина:
преобразование интеграла, распространенного по телу, в интеграл
по поверхности. Следствие этой формулы (теорема Грина) (421).
Упражнения (425).

Глава X. Ряды и интегралы Фурье. 426

§ 1. Введение (426). § 2. Приближенное выражение функций
тригонометрическими суммами (442). § 3. Ряд Фурье (435).
§ 4. Основная теорема (445). § 5. Метод Дирихле (447). § 6. При-
меры (454). § 7. Неполные тригонометрические ряды (455).
§ 8. Периодические функции периода 2π (458). § 9. Порядок
коэффициентов Фурье (462). § 10. Интеграл Фурье (467). § 11. Ча-
стные случаи интеграла Фурье (470). § 12. Метод приближенного
вычисления коэффициентов Фурье (471). § 13. Уравнение тепло-
проводности (473).

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Неопределенный интеграл. Если для всех значений x , лежащих в некотором сегменте, функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ связаны равенством

$$\varphi'(x) = f(x)$$

или, что все равно:

$$d\varphi(x) = f(x) dx, \quad (1)$$

то $\varphi(x)$ называют *первообразной* функцией относительно $f(x)$ или *интегралом* от $f(x) dx$ и обозначают следующим образом:

$$\varphi(x) = \int f(x) dx. \quad (2)$$

Равенство (2) равносильно (1) или равенству

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Например, равенство $d(x^m) = mx^{m-1} dx$ (m — постоянное), равносильно такому:

$$x^m = \int mx^{m-1} dx,$$

так что *интеграл* от $mx^{m-1} dx$ есть x^m . Точно так же и из формулы

$$d(e^x) = e^x dx$$

получаем

$$e^x = \int e^x dx$$

и т. д.

Основной вопрос интегрального исчисления состоит в разыскании

$$\int f(x) dx$$

по данной $f(x)$, т. е. в разыскании первообразной функции по данной ее производной. Это — вопрос, обратный основному вопросу дифференциального исчисления, состоящему в разыскании производной от данной функции. Операция, при помощи которой решается упомянутый выше вопрос интегрального исчисления, называется *интегрированием функций*. Вопрос интегрального исчисления в том виде, как он поставлен выше, включает в себе, по самой его сущности, некоторую неопределенность.

В самом деле, из дифференциального исчисления известно, что если две функции отличаются одна от другой только постоянным слагаемым, то дифференциалы их равны между собой. Поэтому, если $\varphi(x)$ есть интеграл от $f(x) dx$, то и $\varphi(x) + C$, где C — постоянное, будет также интеграл от того же дифференциала. С другой стороны, из дифференциального исчисления также известно, что, и обратно, если две функции имеют один и тот же дифференциал, то разность между этими функциями — число постоянное. Поэтому, если $\varphi(x)$ есть интеграл от $f(x) dx$, то всякий другой интеграл от того же дифференциала будет всегда функция вида $\varphi(x) + C$, где C — постоянное; иными словами, при произвольном значении постоянной C , сумма

$$\varphi(x) + C$$

будет изображать общее выражение всех интегралов от $f(x) dx$:

$$\int f(x) dx = \varphi(x) + C.$$

Следовательно, при одной и той же функции $f(x)$ символ

$$\int f(x) dx$$

изображает не одну, а бесконечное множество функций, отличающихся друг от друга постоянной разностью. В силу этого замечания первообразная функция относительно данной $f(x)$, если она ничем более не обусловлена, называется *неопределенным* интегралом от $f(x) dx$.

Рассмотрим две общие задачи, приводящиеся к вычислению неопределенного интеграла.

Из дифференциального исчисления мы знаем, что если $s = \varphi(t)$ выражает закон движения точки, то вычисление скорости этого движения производится посредством дифференцирования, а именно производная $\varphi'(t) = f(t)$ есть величина искомой скорости. В этой механической задаче известен путь s как функция времени, и нужно найти соответствующую скорость v .

Рассмотрим теперь обратную задачу. Предполагая известной скорость движения $v = f(t)$, будем определять закон движения, т. е. путь как функцию времени. Так как

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

то

$$\frac{ds}{dt} = f(t) \quad \text{или} \quad ds = f(t) dt,$$

и вопрос приводится к нахождению первообразной функции s по данному ее дифференциалу. Мы знаем, что общее решение нашей задачи будет вида

$$s = \varphi(t) + C, \quad (3)$$

где C — произвольная постоянная.

Полученная неопределенность решения поставленной задачи объясняется тем, что с механической точки зрения наша задача не была однозначно определенной, поскольку не было задано то расстояние, на котором находится точка в начальный момент времени. Присоединяя дополнительное условие, состоящее в том, что к начальному моменту времени $t=0$ путь s имеет значение s_0 , мы делаем задачу вполне определенной, и, значит, постоянная C в полученном решении должна иметь определенное значение, которое определится на основании присоединенного дополнительного условия. Действительно, в силу поставленного условия, мы должны иметь

$$s_0 = \varphi(0) + C, \text{ откуда } C = s_0 - \varphi(0).$$

Внося это значение C в формулу (3), мы получим вполне определенный закон движения точки.

Из изложенного вытекает, что первообразная функция для данной производной будет единственной, если известно ее значение для частного значения аргумента, так как это дополнительное условие позволяет немедленно найти числовое значение произвольной постоянной C , входящей в общее выражение первообразных функций.

Как пример найдем закон движения камня, брошенного вверх с начальной скоростью v_0 , предполагая, что в начальный момент $t=0$ камень находился на расстоянии s_0 от земли (начала координат). Как известно из физики, скорость v выражается формулой

$$v = v_0 - gt,$$

где g — ускорение силы тяжести, равное $9,81 \text{ м/сек}^2$. Так как $\frac{ds}{dt} = v$, то в данном случае имеем

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - gt \quad \text{или} \quad ds = (v_0 - gt) dt.$$

Легко непосредственно написать ту функцию, дифференциал которой равен $(v_0 - gt) dt$. Общее выражение такой функции будет

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + C,$$

где C — произвольная постоянная. Полагая в последней формуле $t=0$ и замечая, что при этом $s=s_0$, мы найдем $s_0 = C$, и, значит, искомый закон движения будет

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В качестве второй задачи, приводящей к вычислению неопределенных интегралов, рассмотрим геометрический вопрос об определении кривой, если ее наклон задан в каждой точке как функция абсциссы этой точки. Из дифференциального исчисления мы знаем, что наклон кривой $y = \varphi(x)$ в точке с абсциссой x , т. е. угловой коэффициент касательной в этой точке, равен производной $\varphi'(x)$.

Пусть теперь мы имеем обратную задачу: зная наклон кривой в каждой ее точке как функцию $f(x)$ абсциссы x этой точки, определить кривую. Так как наклон кривой $y = y(x)$ в точке с абсциссой x равен $\frac{dy}{dx}$, то, согласно условию, имеем

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{или} \quad dy = f(x) dx.$$

Таким образом вопрос сводится к определению функции y по данному дифференциалу $f(x) dx$, т. е. к вычислению неопределенного интеграла

$$y = \int f(x) dx = \varphi(x) + C.$$

Вычислив этот интеграл, мы получим уравнение искомой кривой

$$y = \varphi(x) + C,$$

содержащее произвольную постоянную C .

Полученная неопределенность решения поставленной задачи объясняется тем, что с геометрической точки зрения наша задача не была однозначно определенной, так как путем сдвига кривой параллельно оси Oy мы, очевидно, не изменяем ее наклона $f(x)$. Присоединяя дополнительное условие, состоящее в том, что искомая кривая должна проходить через данную точку (x_0, y_0) , мы делаем задачу вполне определенной, и, следовательно, постоянная C в полученном уравнении должна иметь определенное значение, которое определится на основании присоединенного дополнительного условия.

Действительно, в силу поставленного условия мы должны иметь

$$y_0 = \varphi(x_0) + C, \quad \text{откуда} \quad C = y_0 - \varphi(x_0).$$

Внося это значение C в уравнение $y = \varphi(x) + C$, мы получим уравнение вполне определенной кривой.

Как пример определим уравнение кривой, проходящей через начало координат, имеющей в каждой своей точке наклон, равный $2x$. Так как $\frac{dy}{dx}$ равен наклону кривой $y = y(x)$ в точке (x, y) , то в данном случае имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \text{или} \quad dy = 2x dx.$$

Легко сразу написать ту функцию, дифференциал которой равен $2x dx$. Общее выражение такой функции будет

$$y = x^2 + C,$$

где C — произвольная постоянная. Полагая в последнем уравнении $x = 0$ и замечая, что при этом $y = 0$, мы найдем $C = 0$, и, значит, искомое уравнение кривой будет

$$y = x^2.$$

Итак, искомая кривая оказалась параболой с вершиной в начале координат, симметрично расположенной относительно оси Oy .

Если бы мы откинули дополнительное условие о том, что искомая кривая должна проходить через данную точку (начало координат), то получили бы в ответе не одну кривую, а бесконечное семейство парабол $y = x^2 + C$, каждая из которых получается из одной $y = x^2$ путем ее сдвига на расстояние C вдоль оси Oy .

Возвращаясь к общей задаче определения кривой по данному ее наклону $f(x)$, разберем вместо описанного аналитического графическое ее решение. С этой целью проведем систему прямых, параллельных оси Ox , на равных расстояниях друг от друга и отметим произвольную начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ (черт. 1). По условию наклон искомой кривой в точке M_0 равен $f(x_0)$. Проведем из точки M_0 прямолинейный отрезок до пересечения в точке M_1 с ближайшей параллелью так, чтобы его угловой коэффициент был равен $f(x_0)$. Если обозначить через h расстояние между параллельными прямыми построенной системы, то, очевидно, ордината y_1 точки M_1 определится по формуле

$$y_1 = y_0 + f(x_0) \cdot h.$$

Соединив точку M_0 с точкой M_1 , получим нужный отрезок. Отправляясь теперь вместо точки M_0 от точки $M_1(x_0 + h, y_1)$, вычислим по той же формуле ординату y_2 точки M_2

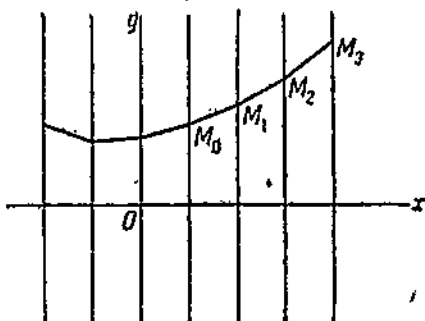
$$y_2 = y_1 + f(x_0 + h) \cdot h.$$

Соединяя точки M_1 и M_2 , получим второй отрезок ломаной. Продолжая поступать таким образом далее, мы в результате построим ломаную линию, проходящую через данную точку M_0 , которая будет представлять приближенно график искомой кривой. Можно сказать, что предельным положением этой ломаной, когда h стремится к нулю, является плавная кривая, изображающая в точности искомую линию, проходящую через точку M_0 . Изменяя положение начальной точки M_0 на вертикальной прямой, т. е. y_0 , мы будем получать различные кривые с данным наклоном $f(x)$. Все эти кривые могут быть получены путем сдвига одной из них параллельно оси ординат.

Читателю рекомендуется выполнить графическое построение параболы, отправляясь от условия.

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

§ 2. Геометрическое изображение интеграла. Возьмем декартову систему координат и рассмотрим область, ограниченную осью x -ов,



Черт. 1.

двумя прямыми AC и PM , параллельными оси y -ов, и кривой линией CM , уравнение которой есть

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — непрерывная в известном сегменте функция (черт. 2). Для простоты предположим, что $f(x) > 0$ для всех значений x в данном сегменте.

Если будем рассматривать точку C как неподвижную, а точку M как переменную, движущуюся по данной кривой, то площадь S области $ACMP$ можно рассматривать как некоторую функцию от абсциссы $x (= OP)$ точки M , так как каждому значению x соответствует определенное значение S . Легко показать, что, полагая $S = \varphi(x)$, получим $\varphi'(x) = f(x)$ или $d\varphi(x) = f(x) dx$, т. е.

$$\varphi(x) = \int f(x) dx.$$

В самом деле, если дадим числу x приращение $\Delta x (= PP_1)$, то площадь S получит приращение

$$\Delta S = \text{пл. } PMM_1P_1.$$

Если назовем через m_1 длину наибольшей, а через m_2 длину наименьшей ординаты данной кривой в сегменте от x до $x + \Delta x$, то, очевидно, будем иметь

$$m_1 \cdot PP_1 \geq \Delta S \geq m_2 \cdot PP_1,$$

или, что все равно,

$$\Delta S = \mu \cdot PP_1 = \mu \cdot \Delta x,$$

где μ — некоторое число, удовлетворяющее условию $m_1 \geq \mu \geq m_2$.

Так как m_1 и m_2 означают наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции $f(x)$ в сегменте $[x, x + \Delta x]$, то, каково бы ни было число μ , лежащее между m_1 и m_2 , функция $f(x)$ достигает значения, равного μ , при некотором значении аргумента, промежуточном между x и $x + \Delta x$, так что

$$\mu = f(\xi),$$

где ξ лежит между x и $x + \Delta x$, и

$$\Delta S = f(\xi) \Delta x,$$

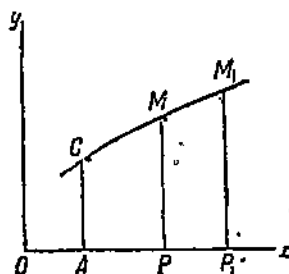
откуда

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(\xi), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta S}{\Delta x} \right] = f(x),$$

т. е.

$$\varphi'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \int f(x) dx,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 2.

Итак, площадь области $ACMP$, ограниченной, как указано выше, представляет

$$\int f(x) dx,$$

если x означает абсциссу точки M . Ясно, что площадь области A_1C_1MP , отличающаяся от предыдущей положением начальной ординаты, будет также изображать интеграл от $f(x) dx$, что и согласно с указанной выше неопределенностью интеграла от данного дифференциала. Бесконечное множество площадей областей, отличающихся одна от другой положением начальной ординаты, изображает бесконечное множество функций, заключающихся в символе

$$\int f(x) dx$$

и отличающихся одна от другой значениями произвольной постоянной.

Как мы видели, в приложениях интегрального исчисления обыкновенно требуется найти функцию по данному ее дифференциалу, принимающую определенное значение при данном частном значении переменной. Вопрос этот решается так: положим, что требуется найти функцию $\varphi(x)$ по данному ее дифференциалу $f(x) dx$ и по условию

$$\varphi(a) = K, \quad (A)$$

где a и K — данные числа. Найдя *какой-нибудь* интеграл $F(x)$ от $f(x) dx$, будем иметь

$$\varphi(x) = F(x) + C,$$

где C не зависит от x . Остается найти C так, чтобы удовлетворилось условие (A); полагая $x = a$, находим

$$K = F(a) + C, \text{ откуда } C = K - F(a)$$

и

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) + K$$

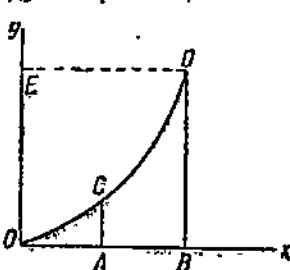
будет искомая функция.

В рассмотренном выше вопросе для вычисления определенной площади $ACMP$, у которой начальная ордината соответствует, положим, значению $x = a (= OA)$, нужно найти функцию $\varphi(x)$ по данному ее дифференциалу, $f(x) dx$, принимающую значение, равное нулю при $x = a$, потому что площадь $ACMP$, очевидно, обратится в нуль, когда точка M совпадет с A . Найдя один из интегралов $F(x)$ от $f(x) dx$, получим по предыдущему

$$\text{пл. } ACMP = \varphi(x) = F(x) - F(a).$$

Итак, вопрос о квадратуре площадей областей, ограниченных осью x -ов, кривой линией $y = f(x)$ и двумя данными ординатами, сводится к интегрированию функции и определению постоянной в выражении неопределенного интеграла по данному значению искомой функции при данном значении аргумента.

Для примера вычислим площадь $ACDB$ (черт. 3), где CD есть дуга параболы, заданной уравнением



Черт. 3.

$$y = \frac{x^2}{2p} \text{ и } OA = a.$$

Замечая, что

$$\frac{x^2 dx}{2p} = d\left(\frac{x^3}{6p}\right),$$

имеем

$$\int \frac{x^2 dx}{2p} = \frac{x^3}{6p} + C,$$

где C — постоянная. Площадь области $ACDB$ равна тому из интегралов, который обращается в нуль при $x = a$. Полагая в найденном выражении интеграла $x = a$ и приравнявая результат нулю, находим

$$\frac{a^3}{6p} + C = 0, \quad C = -\frac{a^3}{6p}.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } ACDB = \frac{x^3 - a^3}{6p}, \text{ где } x = OB, \quad a = OA.$$

При $a = 0$ получим

$$\text{пл. } ODB = \frac{x^3}{6p} = \frac{1}{3} x \cdot \frac{x^2}{2p} = \frac{1}{3} OB \cdot BD,$$

т. е. площадь $ODB = 1/3$ площади прямоугольника $OBDB$.

Этот результат был найден из совершенно других соображений Архимедом.

Вышеизложенное можно рассматривать как геометрическое истолкование следующей теоремы:

Какова бы ни была функция $f(x)$, непрерывная в известном сегменте, существует другая функция $\varphi(x)$, также непрерывная в том же сегменте, производная которой равна $f(x)$, а именно такой функцией $\varphi(x)$ будет площадь области $ACMP$, ограниченной осью абсцисс, кривой линией $y = f(x)$ и двумя ее ординатами, рассматриваемая как функция от абсциссы подвижной точки M на кривой.

Примечание. Построение, изображенное на черт. 2, предполагает, что $f(x) > 0$ для всех значений x в данном сегменте. В общем случае, когда $f(x)$ меняет несколько раз знак, кривая $y = f(x)$ пересекает ось x и образует фигуру, некоторые части которой лежат над осью Ox , а другие под нею. В этом случае под S понимается алгебраическая сумма площадей, в которой, при $OP > OA$ ($x > a$), со знаком плюс берутся площади частей, лежащих над осью Ox , и со знаком минус — площади частей, лежащих под осью x .

Нетрудно убедиться, что при таком определении функции S формула

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta S}{\Delta x} \right] = f(x), \quad S = \int f(x) dx$$

остается справедливой как при $f(x) > 0$, так и при $f(x) < 0$, и высказанная здесь теорема может считаться рассмотренной для всякой непрерывной функции при помощи геометрических соображений.

Впоследствии будет дано строгое аналитическое доказательство этой теоремы, т. е. существования интеграла от всякого дифференциала $f(x) dx$, если функция $f(x)$ непрерывна.

§ 3. Простейшие теоремы и формулы интегрального исчисления. На основании определения интеграла имеем

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

Кроме того, особенно важны следующие свойства:

А. *Интеграл алгебраической суммы нескольких дифференциалов равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:*

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx. \quad (A)$$

Действительно, обозначая через U правую часть равенства (A), имеем

$$dU = d \int f_1(x) dx + d \int f_2(x) dx - d \int f_3(x) dx = [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx,$$

а это равенство равносильно следующему:

$$U = \int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx,$$

что и требовалось доказать.

В. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и вносить под знак интеграла:*

$$\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx \quad (B)$$

при K постоянном.

В самом деле, полагая $U = K \int f(x) dx$, имеем

$$dU = Kd \int f(x) dx = Kf(x) dx, \quad \text{т. е.} \quad U = \int Kf(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Так как каждый из интегралов, входящих в состав равенств (A) и (B), представляет не одну, а бесконечное множество функций, отличающихся друг от друга постоянными слагаемыми, то эти равенства надо понимать в том смысле, что функции, стоящие в левой и правой частях равенств, отличаются друг от друга на постоянную, остающуюся неопределенной.

Всякая формула дифференциального исчисления

$$d\varphi(x) = f(x) dx$$

равносильна формуле интегрального исчисления:

$$\int f(x) dx = \varphi(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

По этой схеме и получаются непосредственно выражения некоторых простейших интегралов. Имея

$$d(x^{m+1}) = (m+1)x^m dx \quad \text{или} \quad d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m dx,$$

находим, при m постоянном, не равном -1 :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C. \quad (I)$$

Из $d \ln x = \frac{dx}{x}$ имеем

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x + C, \quad (II)$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx, \quad d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (III)$$

и, при $a = e$ (основанию натуральных логарифмов):

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad (IIIa)$$

$$d \sin x = \cos x dx, \quad \int \cos x dx = \sin x + C. \quad (IV)$$

$$d \cos x = -\sin x dx, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C. \quad (V)$$

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad (VI)$$

$$d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad (VII)$$

$$d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \quad (VIII)$$

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \quad (IX)$$

Заменяя x через ax , где a — постоянная, в формулах (IIIa), (IV), (V), находим

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C. \quad (III^*)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C. \quad (IV^*)$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C. \quad (V^*)$$

Заменяя x через $\frac{x}{a}$, где a — постоянная, в формулах (VIII) и (IX), мы находим

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \quad (\text{VIII}^*)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0). \quad (\text{IX}^*)$$

Примеры на формулу (I).

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

Во всех выведенных формулах можно вместо x подставить какую угодно функцию $f(x)$, так что каждая из них обнимает бесконечное множество частных случаев, соответствующих различным видам функции $f(x)$. Таким образом можно написать следующие формулы:

$$\int [f(x)]^m df(x) = \int [f(x)]^m f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1), \quad (a)$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln f(x) + C, \quad (b)$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C \quad (c)$$

и т. д.

По формуле (b) найдем, между прочим

$$\int \operatorname{cig} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln \sin x + C. \quad (X)$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln \cos x + C. \quad (\text{XI})$$

Когда предложенный интеграл не берется непосредственно по одной из основных формул, то во многих случаях его разыскание можно свести к разысканию другого или нескольких других интегралов известного вида при помощи различных способов, с которыми мы и ознакомимся.

§ 4. Различные приемы интегрирования функций. Рассмотрим теперь различные способы преобразования интегралов, имеющие целью свести разыскание интеграла, который не берется непосредственно, к разысканию другого, известного из основных формул.

Способ подстановки. Положим, что требуется найти

$$\int f(x) dx,$$

БИБЛИОТЕКА
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Зак. 1633. К. Писем. и И. Прозвон.
ИН. ИТУГА

Инд. №

18428



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

где $f(x)$ непосредственно не интегрируется, потому что неизвестна из дифференциального исчисления такая функция $F(x)$, для которой

$$dF(x) = f(x) dx.$$

Введем новую переменную z , связанную с x уравнением $x = \psi(z)$ или $z = \varphi(x)$, и, выразив $f(x) dx$ через переменную z , находим

$$du = f(x) dx = f[\psi(z)] \psi'(z) dz = \Phi(z) dz,$$

откуда

$$u = \int f(x) dx = \int \Phi(z) dz.$$

Если сумеем выразить преобразованный интеграл в переменной z , то, подставив в полученное его выражение $z = \varphi(x)$, найдем выражение искомого интеграла через переменную x .

Примеры

$$1. J = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad z = 1-x^2, \quad dz = -2x dx;$$

$$J = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2} \int z^{-1/2} dz = -z^{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

где C — постоянная.

$$2. J = \int \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx, \quad z = \sin x, \quad dz = \cos x dx;$$

$$J = \int z^{1/3} dz = \frac{3}{4} z^{4/3} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\sin^4 x} + C.$$

$$3. J = \int (ax+b)^n dx, \quad z = ax+b, \quad dz = a dx;$$

$$J = \frac{1}{a} \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1).$$

При $n = -1$ находим $J = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C.$

$$4. J = \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}, \quad z = \operatorname{arctg} x, \quad \frac{dx}{1+x^2} = dz;$$

$$J = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln \operatorname{arctg} x + C.$$

$$5. J = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^6}}, \quad z = x^3, \quad dz = 3x^2 dx;$$

$$J = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3} \arcsin z + C = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + C.$$

$$6. J = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^3-1}}, \quad z = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2};$$

$$J = \int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^3}} = \arccos z + C = \operatorname{arccsc} x + C.$$

$$7. J = \int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^z dz, \quad z = x^3, \quad J = \frac{1}{3} e^z + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Интегрирование по частям. Если u и v — функции от x , то

$$d(uv) = u dv + v du,$$

откуда

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям* и приводит разыскание одного интеграла к разысканию другого. Для успешного ее применения надо разложить подинтегральную функцию на два множителя, u и dv , причем второй должен быть дифференциалом известной функции (т. е. функции, которую умеем найти). Если сможем найти интеграл от $v du$, то найдем интеграл и от $u dv$.

Примеры

$$1. J = \int \ln x dx, \quad u = \ln x, \quad dx = dv, \quad v = x, \quad du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

$$2. J = \int \operatorname{arctg} x dx, \quad u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx, \quad v = x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2};$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$3. J = \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d(-\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

следовательно,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Применяя способы подстановки, интегрирования по частям и теорему об интеграле от суммы нескольких слагаемых, мы найдем выражения интегралов некоторых простейших функций, весьма часто встречающихся в приложениях.

$$A. \text{ Интегралы вида } J = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Замечая, что

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right],$$

положим

$$x + \frac{b}{2a} = z, \quad dx = dz.$$

Подставляя эти выражения в интеграл, находим

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

1) Если $b^2 - 4ac < 0$, то, обозначив $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -k^2$, находим

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 + k^2} = \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C,$$

т. е.

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C.$$

2) Если $b^2 - 4ac > 0$, то, положив $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = k^2$, находим

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 - k^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{z^2 - k^2} = \frac{1}{(z+k)(z-k)} = \frac{1}{2k} \frac{(z+k) - (z-k)}{(z+k)(z-k)} = \frac{1}{2k} \left\{ \frac{1}{z-k} - \frac{1}{z+k} \right\},$$

получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2ak} \left\{ \int \frac{dz}{z-k} - \int \frac{dz}{z+k} \right\} = \\ &= \frac{1}{2ak} \{ \ln(z-k) - \ln(z+k) \} + C = \frac{1}{2ak} \ln \frac{z-k}{z+k} + C; \end{aligned}$$

заменяя z и k их выражениями, получим, при $b^2 - 4ac > 0$:

$$J = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

Замечание. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ действительны, когда $b^2 - 4ac > 0$. Обозначив их через x_1 и x_2 , имеем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

следовательно,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)} \left[\int \frac{dx}{x-x_1} - \int \frac{dx}{x-x_2} \right] = \\ &= \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln \frac{x-x_1}{x-x_2} + C. \end{aligned}$$

Если бы сюда подставили выражения корней

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

то снова получили бы выведенное выше выражение J .

3) Если $b^2 - 4ac = 0$, то

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{az} + C, \quad \text{т. е.} \quad J = -\frac{1}{ax + \frac{b}{2}} + C.$$

В. Интегралы вида $J = \int \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c} dx$ приводятся к предыдущему.

Положив

$$x + \frac{b}{2a} = z \quad \text{и} \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm k^2,$$

находим

$$J = \frac{1}{a} \int \frac{m \left(z - \frac{b}{2a} \right) + p}{z^2 \pm k^2} dz = \frac{1}{a} \left\{ m \int \frac{z dz}{z^2 \pm k^2} + \left(p - \frac{mb}{2a} \right) \int \frac{dz}{z^2 \pm k^2} \right\};$$

$$\int \frac{z dz}{z^2 \pm k^2} = \frac{1}{2} \ln(z^2 \pm k^2) + C, \quad \text{а} \quad \int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$$

берется, как показано выше.

С. Интегралы вида $J = \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$, где n — целое положительное число.

Для упрощения напомним $(ax^2 + bx + c)^n$ в виде $a^n(x^2 + px + q)^n$, где $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, и рассмотрим интеграл

$$J = \int \frac{(Mx + N) dx}{(x^2 + px + q)^n},$$

отличающийся от предыдущего только множителем a^n . Замечая, что $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, и полагая $x + \frac{p}{2} = z$, $q - \frac{p^2}{4} = \pm k^2$, находим

$$J = M \int \frac{z dz}{(z^2 \pm k^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^n}.$$

Первый интеграл легко найти, а именно:

$$\int \frac{z dz}{(z^2 \pm k^2)^n} = \frac{1}{2} \int (z^2 \pm k^2)^{-n} d(z^2 \pm k^2) = \frac{1}{2} \frac{(z^2 \pm k^2)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

Для второго:

$$u_n = \int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^n},$$

выведем формулу приведения, с помощью которой, u_n выражается через u_{n-1} , а u_{n-1} через u_{n-2} и т. д., пока не дойдем до $u_1 = \int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$, который мы вычислять умеем, а именно:

$$\int \frac{dz}{z^2 + k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C, \quad \int \frac{dz}{z^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{z-k}{z+k} + C.$$

Для вывода требуемой формулы замечаем, что

$$u_n = \int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^n} = \frac{1}{\pm k^2} \int \frac{(z^2 \pm k^2) - z^2}{(z^2 \pm k^2)^n} dz =$$

$$= \frac{1}{\pm k^2} \left[u_{n-1} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2 \pm k^2)^n} \right]; \quad (2)$$

с помощью интегрирования по частям второй интеграл приводится к первому:

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2 \pm k^2)^n} = \int z (z^2 \pm k^2)^{-n} z dz;$$

положив в формуле

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

$u = z$, $dv = (z^2 \pm k^2)^{-n} z dz$, находим

$$v = \frac{1}{2} \int (z^2 \pm k^2)^{-n} d(z^2 \pm k^2) = \frac{1}{2} \frac{(z^2 \pm k^2)^{-n+1}}{-n+1}, \quad du = dz;$$

так что

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{(z^2 \pm k^2)^n} &= \frac{1}{2} \frac{z(z^2 \pm k^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dz}{(z^2 \pm k^2)^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{z}{(z^2 \pm k^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} u_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставив в формулу (2), находим

$$u_n = \frac{1}{\pm k^2} \left\{ \frac{z}{2(n-1)(z^2 \pm k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} u_{n-1} \right\}. \quad (A)$$

Это и есть искомая формула приведения.

Заменяя в ней n на $n-1$, $n-2$, ..., 2, последовательно выразим u_n через u_{n-1} , u_{n-1} через u_{n-2} и т. д. и окончательно u_n через u_1 .

D. Интеграл вида $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}$.

Полагая $x + \sqrt{x^2 \pm k^2} = z$, находим

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}\right) dx = dz, \quad \text{т. е.} \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} dx = dz, \quad \text{и} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \frac{dz}{z};$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C$$

или, заменяя z выражением через x , окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm k^2}) + C. \quad (XII)$$

(Эту формулу полезно запомнить.)

E. Интеграл вида $J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ приводится к

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm k^2}} \quad \text{или к} \quad \int \frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}}.$$

1) Если $a > 0$, то, положив

$$z = x + \frac{b}{2a}, \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \pm k^2,$$

находим

$$J = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm k^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(z + \sqrt{z^2 \pm k^2}) + C,$$

т. е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left\{ x + \frac{b}{2a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{ax^2 + bx + c} \right\} + C.$$

2) Если $a < 0$, то

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac - (2ax + b)^2};$$

здесь $b^2 - 4ac > 0$, иначе $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ был бы мнимым при всяком x ; положив $b^2 - 4ac = k^2$, $2ax + b = z$, находим

$$dx = \frac{dz}{2a}, \quad J = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{z}{k} + C,$$

т. е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-(2ax + b)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C \quad (a < 0).$$

Г. Интеграл вида $J = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ приводится, сперва подстановкою $x + \frac{b}{2a} = z$ к виду

$$J = \int \sqrt{az^2 + k} dz,$$

где постоянная k имеет следующее значение: $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, а затем интегрированием по частям к интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + k}},$$

который берется, как показано выше. В самом деле, положив в формуле

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad u = \sqrt{az^2 + k}, \quad dv = dz,$$

находим $du = \frac{az dz}{\sqrt{az^2 + k}}$, $v = z$, и, следовательно,

$$\int \sqrt{az^2 + k} dz = z \sqrt{az^2 + k} - \int \frac{az^2 dz}{\sqrt{az^2 + k}}, \quad (3)$$

а так как

$$\int \frac{az^2 dz}{\sqrt{az^2 + k}} = \int \frac{(az^2 + k) - k}{\sqrt{az^2 + k}} dz = \int \sqrt{az^2 + k} dz - k \int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + k}},$$

то, подставляя в (3), получим

$$2 \int \sqrt{az^2 + k} dz = z \sqrt{az^2 + k} + k \int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + k}};$$

заменяя z и k их выражениями, находим

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b^2 - 4ac}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Г. Интеграл вида $J = \int \frac{(mx + p)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ приводится также к виду Е.

Замечая, что

$$d\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

напишем выражение J так:

$$J = \frac{m}{a} \int \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(p - \frac{mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

и получим

$$J = \frac{m}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2ap - mb}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Упражнения

Найти интегралы:

- $\int \frac{(\sqrt{x+x})^2}{x^3} dx.$ *Отв.* $-\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x + C.$
- $\int \lg^2 x dx.$ *Отв.* $\lg x - x + C.$
- $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} dx.$ *Отв.* $\frac{x^2}{2} + 2x + C.$

Указание. Разделить числитель на знаменатель.

- $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$ *Отв.* $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + C.$
- $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx.$ *Отв.* $\sin x - \cos x + C.$
- $\int (x+3)^{3/2} dx.$ *Отв.* $\frac{7}{12} (x+3)^{5/2} + C.$
- $\int \frac{dx}{x-1}.$ *Отв.* $\ln(x-1) + C.$
- $\int e^{\cos x} \sin x dx.$ *Отв.* $-e^{\cos x} + C.$
- $\int \sin^3 x \cos x dx.$ *Отв.* $\frac{1}{4} \sin^4 x + C.$

10. $\int \sin x \cos^2 x \, dx.$ *Омс.* $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$
11. $\int \frac{dx}{4+x^2}.$ *Омс.* $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sin x}.$ *Омс.* $\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$
13. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 5}.$ *Омс.* $\ln(e^x + 5) + C.$
14. $\int x^2 \cos x \, dx.$ *Омс.* $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$
15. $\int e^x \cos x \, dx.$ *Омс.* $\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$
16. $\int x^3 \ln x \, dx.$ *Омс.* $\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$
17. $\int e^x x^2 \, dx.$ *Омс.* $e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$
18. $\int \arcsin x \, dx.$ *Омс.* $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$
19. $\int \sin(2x+1) \cos(3x+4) \, dx.$ *Омс.* $-\frac{1}{10} \cos(5x+5) + \frac{1}{2} \cos(x+3) + C.$
20. $\int \frac{dx}{x(x+1)}.$ *Омс.* $\ln \frac{x}{x+1} + C.$
21. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$ *Омс.* $\frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2} + C.$
22. $\int \cos 5x \cos x \, dx.$ *Омс.* $\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C.$
23. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$ *Омс.* $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$
24. $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^n-1}}.$ *Омс.* $\frac{(x^n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)x^{n-1}} + C.$
25. $\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{x(x-1)}}.$ *Омс.* $\sqrt{\frac{x}{x-1}} \left\{ 2 - \frac{2x}{3(x-1)} \right\} + C.$
26. $\int \sqrt[3]{x} (\ln x)^2 \, dx.$ *Омс.* $\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \left\{ (\ln x)^2 - \frac{3}{2} \ln x + \frac{9}{8} \right\} + C.$
27. $\int e^{-3x} \cos^2 x \, dx.$ *Омс.* $\frac{e^{-3x}}{2} \left\{ \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{13} - \frac{1}{3} \right\} + C.$
28. $\int \cos^3 x \sin 2x \, dx.$ *Омс.* $-\frac{2}{5} \cos^5 x + C.$
29. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \, dx.$ *Омс.* $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$
30. $\int \frac{dx}{(x+4) \sqrt{x^2+3x-4}}.$ *Омс.* $\frac{2}{5} \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C.$

$$31. \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx. \quad \text{Омс. } \frac{e^x}{1+x} + C.$$

$$32. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right).$$

$$33. \int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{4}}. \quad \text{Омс. } \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$34. \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} + C.$$

$$35. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}. \quad \text{Омс. } -\frac{1}{x+1} + C.$$

$$36. \int \frac{2x+3}{2x^2+x+1} dx. \quad \text{Омс. } \frac{1}{2} \ln(2x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$37. \int \frac{3x-2}{x^2+3x+1} dx. \quad \text{Омс. } \frac{3}{2} \ln(x^2+3x+1) - \frac{13}{2\sqrt{5}} \ln \frac{x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + C.$$

$$38. \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx. \quad \text{Омс. } \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$39. \int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}. \quad \text{Омс. } \arcsin \frac{2x+1}{5} + C.$$

$$40. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+7x-1}}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(x + \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}} \right) + C.$$

$$41. \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx. \quad \text{Омс. } 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

$$42. \int \sqrt{2x^2-x+3} dx. \quad \text{Омс. } \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \right) \sqrt{2x^2-x+3} + \frac{23}{16\sqrt{2}} \ln \left(x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}} \right) + C.$$

43. Поезд движется со скоростью $v = (t^3 - 5t^2 + 50)$ км/час и находится в начальный момент от станций на расстоянии 5 км; найти уравнение движения поезда.

$$\text{Омс. } s = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + 50t + 5.$$

44. Некоторая точка M , совершая по оси Ox гармоническое колебательное движение, имеет скорость $v = \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}$ (где T — некоторая постоянная величина). Найти уравнение движения точки, если известно, что она в начальный момент совпадает с началом координат.

$$\text{Омс. } s = \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

45. Найти уравнение кривой, поднормаль которой постоянна и равна 4 и которая пересекает ось Oy на расстоянии 5 от точки O .

$$\text{Омс. } y^2 = 8x + 25.$$

ГЛАВА II

ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Интегрирование рациональных дробей. Рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде суммы, состоящей из целого полинома степени k , если степень $F(x)$ на k единиц выше степени $f(x)$, и простейших дробей следующих видов:

$$1) \frac{A}{(x-a)^n}, \quad 2) \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n},$$

где n — целое положительное число. (Диф. исч., ч. I, гл. VIII, § 6). Интеграл от целого полинома степени k есть целый полином степени $(k+1)$, а именно:

$$\int (ax^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_n) dx = a \frac{x^{k+1}}{k+1} + a_1 \frac{x^k}{k} + \dots + a_n x + C.$$

Интегралы дробных членов вида 1) будут логарифмические и алгебраические функции, а именно:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln(x-a) + C,$$

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,$$

а $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx$, как показано было в главе I, выражается в конечном виде через алгебраические, логарифмические и круговые функции. Из всего этого вытекает, что интеграл от рациональной функции всегда выражается в конечном виде через алгебраические, логарифмические и круговые функции.

Разберем пример. Найти $\int \frac{(x^2-3x-2) dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

Разлагая дробь на простейшие (Диф. исч., ч. I, гл. VIII, § 6), находим

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2-3x-2) dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} &= \\ &= \int \frac{2dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{(3x-1) dx}{(x^2+x+1)^2} + \int \frac{(x-2) dx}{x^2+x+1}. \quad (a) \end{aligned}$$

Вычислим в отдельности интегралы, стоящие в правой части равенства:

$$\begin{aligned}\int \frac{2dx}{(x+1)^2} &= -\frac{2}{x+1}, \quad \int \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1), \\ \int \frac{(x-2)dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{(x-\frac{1}{2})dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{(x+\frac{1}{2}) - \frac{5}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] - \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \\ \int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2} dx &= \int \frac{3(x+\frac{1}{2}) - \frac{5}{2}}{\left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^2} dx = \\ &= -\frac{3}{2 \left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]} - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^2}.\end{aligned}$$

Полагая $x + \frac{1}{2} = z$, находим

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^2} &= \int \frac{dz}{(z^2 + \frac{3}{4})^2} = \frac{4}{3} \int \frac{dz}{z^2 + \frac{3}{4}} - \frac{4}{3} \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + \frac{3}{4})^2}, \\ \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + \frac{3}{4})^2} &= -\frac{z}{2(z^2 + \frac{3}{4})} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 + \frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^2} &= \frac{2z}{3(z^2 + \frac{3}{4})} + \frac{2}{3} \int \frac{dz}{z^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{z}{z^2 + \frac{3}{4}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Остается подставить вместо z его значение $x + \frac{1}{2}$ и все найденные интегралы в формулу (а), чтобы получить выражение искомого интеграла.

В некоторых случаях интегралы от рациональных функций можно найти проще, не прибегая к разложению дроби на простейшие.

Примеры

$$1. \quad J = \int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n}.$$

Полагая $x-a = z(x-b)$, находим

$$x-b = \frac{a-b}{1-z}, \quad x-a = \frac{z(a-b)}{1-z}, \quad dx = \frac{(a-b)dz}{(1-z)^2};$$

отсюда после подстановки вместо x его выражения через z получаем

$$J = \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int \frac{(1-z)^{m+n-2} dz}{z^m}.$$

Если $m+n-2$ есть целое положительное число, то, разложив $(1-z)^{m+n-2}$ по степеням z , приведем вопрос к интегрированию одночленов. Например, подстановкой $z = \frac{x}{x-1}$ вычисляется следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3(x-1)^2} &= \int \frac{(1-z)^3 dz}{z^3} = \int \frac{dz}{z^3} - 3 \int \frac{dz}{z^2} + 3 \int \frac{dz}{z} - \int dz = \\ &= -\frac{1}{2z^2} + \frac{3}{z} + 3 \ln z - z + C. \end{aligned}$$

2. $J = \int \frac{x^{2m+1} dx}{(a+bx^2)^n}$ при целом $m > 0$; полагая $a+bx^2 = z$, находим

$$J = \frac{1}{2bm+1} \int \frac{(z-a)^m}{z^n} dz,$$

а дальше поступаем, как в предыдущем примере.

§ 2. Отделение алгебраических членов в интеграле от рациональной дроби. Совокупность алгебраических членов в интеграле от рациональной дроби можно найти, не разлагая дроби на простейшие. Положим, что степень $F(x)$ ниже степени $f(x)$. Тогда, как сейчас увидим, интеграл наш всегда можно представить следующим образом:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \frac{M}{D} + \int \frac{N dx}{Q}, \quad (1)$$

где M , D , N , Q — целые полиномы, D — общий наибольший делитель функции $f(x)$ и ее производной, Q — частное от деления $f(x)$ на D , M — полином степени не выше $p-1$, если p есть показатель степени полинома D , а N — полином степени не выше $k-1$, если k есть показатель степени полинома Q . В самом деле, обозначая через $a, b, \dots, l$ корни полинома $f(x)$, а через $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ показатели их кратности, можем написать (Диф. исч., ч. I, гл. VIII, § 6)

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^2} + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\ &+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \dots + \frac{B_{\beta-2}}{(x-b)^2} + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\ &+ \dots + \frac{L}{(x-l)^{\lambda}} + \dots + \frac{L_{\lambda-2}}{(x-l)^2} + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}. \end{aligned}$$

Умножая на dx и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \frac{-A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{-A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} + \dots + \frac{-A_{\alpha-2}}{x-a} + \\ &+ \frac{-B_{\beta-2}}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{-B_{\beta-2}}{x-b} + \\ &+ \dots + \frac{-L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{-L_{\lambda-2}}{x-l} + \\ &+ \int \left[\frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} \right] dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Складывая все дроби вне знака интеграла, получим дробь вида $\frac{M}{D}$, где $D = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\dots(x-l)^{\lambda-1}$ есть, как известно, общий наибольший делитель функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$, а M — полином степени ниже D . Складывая дроби под знаком интеграла, получим дробь вида $\frac{N}{Q}$, где $Q = (x-a)(x-b)\dots(x-l) = \frac{f(x)}{D}$, N — полином степени ниже Q .

Следовательно

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \frac{M}{D} + \int \frac{N dx}{Q}.$$

Интеграл $\int \frac{N dx}{Q}$ выразится в логарифмах и круговых функциях, а $\frac{M}{D}$ будет алгебраическая часть интеграла. Заметим, между прочим, что эта алгебраическая часть интеграла будет равна нулю, если все корни функции $f(x)$ простые, как это видно из предыдущего.

Если $f(x)$ разложена на простые множители, то полином D находим, уменьшая на единицу показатели всех этих множителей. В противном случае можно найти D , как общий наибольший делитель $f(x)$ и $f'(x)$, пуская в ход алгоритм Евклида, заключающийся в применении к 2 любым полиномам $f(x)$ и $\varphi(x)$ в следующем:

Делим полином $f(x)$ на полином $\varphi(x)$, получая в частном некоторый полином $q_1(x)$, а в остатке полином $r_1(x)$ степени, по крайней мере на единицу меньшей степени делителя $\varphi(x)$. Далее полином $\varphi(x)$ делим на первый остаток $r_1(x)$, причем в частном получается полином $q_2(x)$, а в остатке полином $r_2(x)$ степени, по крайней мере на единицу меньшей степени делителя $r_1(x)$. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получим в остатке нуль, что непременно произойдет после конечного числа шагов, так как степени остатков $r_1(x), r_2(x), \dots$ убывают. Последний остаток $r_k(x)$ (предшествующий нулевому) и будет общим наибольшим делителем многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. В самом деле, так как делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток, то можем написать ряд тождеств:

$$f(x) = \varphi(x) q_1(x) + r_1(x),$$

$$\varphi(x) = r_1(x) q_2(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = r_2(x) q_3(x) + r_3(x),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) q_k(x) + r_k(x),$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x) q_{k+1}(x).$$

Покажем, что $r_k(x)$ — общий наибольший делитель $f(x)$ и $\varphi(x)$. Для этого обнаружим сперва, что $r_k(x)$ есть общий делитель $f(x)$ и $\varphi(x)$, а затем, что общий наибольший делитель $f(x)$ и $\varphi(x)$ есть

делитель $r_k(x)$. Оба эти факта мы усматриваем из написанных тождеств, если проанализируем их сначала снизу вверх, а затем сверху вниз. Действительно, из последнего тождества следует, что $r_k(x)$ — делитель $r_{k-1}(x)$; заметив это, мы видим из предпоследнего тождества, что $r_k(x)$ — делитель $r_{k-2}(x)$, и, продолжая так рассуждать до первого тождества, убедимся, что $r_k(x)$ — делитель $\varphi(x)$ и $f(x)$. Итак, $r_k(x)$ — общий делитель $f(x)$ и $\varphi(x)$. Положим, что у этих полиномов общий наибольший делитель будет $d(x)$, степень которого, очевидно, больше или равна степени $r_k(x)$. Из первого тождества видим, что $d(x)$ — делитель $r_1(x)$, из второго — что $d(x)$ — делитель $r_2(x)$ и т. д. В конце концов получаем, что $d(x)$ — делитель $r_k(x)$. А это возможно только тогда, когда степень $d(x)$ равна степени $r_k(x)$. В этом случае $d(x)$, будучи делителем полинома $r_k(x)$, отличается от последнего только постоянным множителем. Поэтому можно принять за общий наибольший делитель $f(x)$ и $\varphi(x)$ полином $r_k(x)$.

Полином Q получим, разделив $f(x)$ на D ; полиномы M и N , зная высшие пределы их степеней, напомним с неопределенными коэффициентами, и для определения этих коэффициентов поступаем следующим образом.

Дифференцируя равенство (1), находим

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{DM' - MD'}{D^2} + \frac{N}{Q};$$

отсюда

$$F(x) = \frac{M'f(x)}{D} - \frac{MD'f(x)}{D^2} + \frac{Nf(x)}{Q}, \quad (3)$$

но

$$\frac{f(x)}{D} = Q, \quad \frac{f(x)}{Q} = D, \quad \frac{D'f(x)}{D^2} = \frac{D'Q}{D};$$

последнее выражение есть также целый полином, потому что $f(x) = DQ$, откуда

$$f'(x) = DQ' + QD';$$

замечая, что $f'(x)$ делится на D , и обозначая $\frac{f'(x)}{D} = T$, получим

$$\frac{D'Q}{D} = T - Q';$$

следовательно, из (3) имеем

$$F(x) = M'Q - M(T - Q') + ND. \quad (4)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в этом тождестве, получаем систему уравнений первой степени относительно неизвестных коэффициентов полиномов M и N , из которой они и определяются.

Примеры

$$1. \quad \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \int \frac{bx+c}{(x-1)(x+2)} dx.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{bx+c}{(x-1)(x+2)},$$

$$x = -a(x+2) + (bx+c)(x-1).$$

Полагая $x=1$, получим $1 = -3a$, $a = -\frac{1}{3}$. При $x=-2$ получим $-2 = 6b - 3c$. Наконец, при $x=0$ получим $0 = -2a - c$, $c = \frac{2}{3}$, $b=0$.

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \frac{x-1}{x+2} + C.$$

$$2. \int \frac{2-x-2x^2}{(x+1)^2(x+2)^3} dx = \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x+2)^2} + \int \frac{kx+g}{(x+1)(x+2)} dx.$$

Дифференцируя и умножая на $(x+1)^2(x+2)^3$, получим

$$2-x-2x^2 = (2ax+b)(x+1)(x+2) -$$

$$-(ax^2+bx+c)(3x+4) + (kx+g)(x+1)(x+2)^2;$$

определив коэффициенты, находим

$$a=0, \quad b=1, \quad c=0, \quad k=0, \quad g=0,$$

откуда

$$\int \frac{2-x-2x^2}{(x+1)^2(x+2)^3} dx = \frac{x}{(x+1)(x+2)^2} + C.$$

§ 3. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций. Самый употребительный прием интегрирования иррациональных функций состоит в приведении подынтегральной функции к рациональному виду преобразованием переменной.

1. Рассмотрим сперва интегралы вида

$$J = \int f(x, u^{\frac{l_1}{m_1}}, u^{\frac{l_2}{m_2}}, \dots) dx,$$

где $u = \frac{ax+b}{cx+d}$, $l_1, m_1, l_2, m_2, \dots$ — целые числа, a, b, c и d — постоянные и f — знак рациональной функции от стоящих под этим знаком аргументов.

Полагая $\frac{ax+b}{cx+d} = z^N$, где N — кратное всех знаменателей $m_1, m_2, \dots$, т. е. показателей, входящих в f радикалов, найдем

$$x = \frac{\beta z^N - b}{a - \alpha z^N} = \text{рациональной функции от } z.$$

Обозначая для краткости $x = \Phi(z)$, получим $dx = \Phi'(z) dz$, где $\Phi'(z)$ — также рациональная функция. Все радикалы $u^{\frac{l_1}{m_1}}$ и т. д. выразятся рационально через z , потому что $u^{\frac{l_1}{m_1}} = z^{N_1 \cdot m_1} = z^{k_1}$, где

k_1 — целое число, так как m_1 — делитель N . Следовательно, наш интеграл приведет к $\int F(z) dz$, где $F(z)$ — рациональная функция. По предыдущим правилам этот интеграл может быть выражен в конечном виде через z ; подставляя затем

$$z = \left(\frac{ax+b}{\alpha x+\beta} \right)^{\frac{1}{N}},$$

получим выражение искомого интеграла через x . Под рассмотренный вид подходит, между прочим,

$$\int f(x, \sqrt[m_1]{x}, \sqrt[m_2]{x}, \dots, \sqrt[m_k]{x}) dx,$$

где подинтегральная функция есть рациональное выражение относительно x и нескольких радикалов с различными показателями и одним и тем же подкоренным одночленом x .

Примеры

1.
$$\int \frac{x dx}{(a+bx)^{3/4}}.$$

Полагая $a+bx = z^4$, получим $dx = \frac{2z dz}{b}$, $x = \frac{z^4 - a}{b}$ и

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(a+bx)^{3/4}} &= \frac{2}{b^2} \int \frac{z^4 - a}{z^2} dz = \frac{2}{b^2} \left\{ \int dz - a \int \frac{dz}{z^2} \right\} = \\ &= \frac{2}{b^2} \left(z + \frac{a}{z} \right) + C = \frac{2}{b^2} \frac{2a+bx}{\sqrt[4]{a+bx}} + C. \end{aligned}$$

2.
$$\int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Полагая $x = z^6$, находим $\sqrt[6]{x} = z$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, $dx = 6z^5 dz$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= 6 \int \frac{z^6(1+z)}{1+z^2} dz = 6 \int \left(z^4 + z^3 - z^2 - z + 1 + \frac{z-1}{1+z^2} \right) dz = \\ &= 6 \left\{ \frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) - \operatorname{arctg} z \right\} + C, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt[6]{x}$.

II. Интегрирование функций, рациональных относительно x и корня квадратного из полинома второй степени.

А. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int f(x, y) dx,$$

где $y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, A , B и C — постоянные, f — рациональная функция от x и y . Подинтегральное выражение мы можем привести к рациональному виду одной из следующих подстановок Эйлера.

Первая подстановка. Полагаем, считая $A > 0$:

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = z - x\sqrt{A},$$

откуда

$$Ax^2 + 2Bx + C = z^2 - 2zx\sqrt{A} + Ax^2,$$

т. е.

$$2Bx + C = z^2 - 2zx\sqrt{A}.$$

Это уравнение первой степени относительно x ; следовательно, решив его, найдем для x рациональное выражение через z :

$$x = \Phi(z), \quad dx = \Phi'(z) dz,$$

где $\Phi'(z)$ — также рациональная функция,

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = z - \Phi(z)\sqrt{A},$$

и

$$\int f(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx = \int f(\Phi(z), z - \Phi(z)\sqrt{A}) \Phi'(z) dz$$

приводится к интегралу от рациональной дроби.

Вторая подстановка ($A < 0$). Обозначая через α и β корни полинома $Ax^2 + 2Bx + C$ и замечая, что при действительных значениях переменной x он должен быть неотрицательным, мы можем ограничиться случаем действительных α и β . Положим

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = z(x - \beta),$$

откуда

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x - \alpha)(x - \beta) = z^2(x - \beta)^2,$$

или

$$A(x - \alpha) = z^2(x - \beta)$$

— уравнение первой степени относительно x , откуда и получим для x , dx и $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = z(x - \beta)$ выражения, рациональные относительно z .

Замечая, что $z = \sqrt{\frac{A(x - \alpha)}{x - \beta}}$, можем сказать, что вторая подстановка состоит в том, что подкоренное выражение $Ax^2 + 2Bx + C$ разлагается на два линейных множителя и за новую переменную принимается корень квадратный из отношения этих множителей.

На основании предыдущего заключаем, что интеграл вида

$$\int f(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}) dx,$$

где f — рациональная функция, всегда берется в конечном виде.

Третья подстановка. Считая $C > 0$ и полагая

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \sqrt{C} + xz,$$

получим

$$Ax^2 + 2Bx = x^2 z^2 + 2xz\sqrt{C}, \quad Ax + 2B = xz^2 + 2z\sqrt{C}.$$

Из этого уравнения первой степени относительно x получаем для x , а следовательно, и для $\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = xz + \sqrt{C}$ и dx рациональные выражения относительно z .

В пояснение к предыдущему относительно подстановок, приводящих подинтегральный дифференциал к рациональному виду, заметим еще следующее: всегда можно из трех подстановок (и даже из первых двух) выбрать такую, чтобы выражение подинтегральной функции в новой переменной было действительное, если только сам данный радикал $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ не будет мнимым для всех значений x ; при этом коэффициенты A, B, C — вещественные числа. Действительно, при $A > 0$ первая подстановка дает вещественный результат, при $C > 0$ — третья. При $A < 0$ корни полинома $Ax^2 + 2Bx + C$ не могут быть мнимыми, если только $Ax^2 + 2Bx + C$ не будет меньше нуля при всяком x , т. е. если $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ не будет мнимым при всяком x ; в самом деле, допустим, что эти корни мнимые, положим

$$\alpha = \mu + \nu i, \quad \beta = \mu - \nu i,$$

тогда

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x - \alpha)(x - \beta) = A[(x - \mu)^2 + \nu^2] < 0$$

при всяком x , что противно предположению. Итак, при $A < 0$, α и β действительные, и вторая подстановка дает результаты действительного вида.

Примеры

1.
$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Пологая $\sqrt{x^2 - 1} = z - x$, находим

$$x^2 - 1 = z^2 - 2zx + x^2, \quad -1 = z^2 - 2zx,$$

откуда

$$x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad dx = \frac{z^2 - 1}{2z^2} dz.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(z^2 - 1) dz}{z^2 \cdot z} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^3} = \\ &= \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{4z^2} + C = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{4(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{4}(x - \sqrt{x^2 - 1})^2 + C. \end{aligned}$$

2.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Положим $\sqrt{ax - x^2} = xz$, $ax - x^2 = x^2 z^2$, $a - x = xz^2$; не решая этого уравнения относительно x , дифференцируем его и находим

$$-dx = z^2 dx + 2xz dz$$

или, после очевидных преобразований, получаем

$$(1+z^2)dx = -2xzdz, \quad \frac{dx}{xz} = -\frac{2dz}{1+z^2}$$

но $xz = \sqrt{ax-x^2}$, следовательно, $\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2}$ и

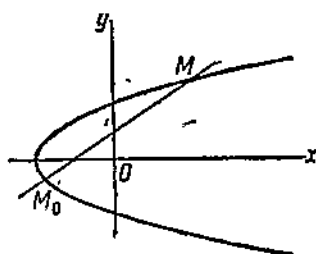
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -2 \int \frac{dz}{1+z^2} = -2 \operatorname{arctg} z + C = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x}} + C.$$

Возможно дать геометрическую интерпретацию подстановкам Эйлера, которыми мы пользовались для приведения интеграла

$$\int f(x, y) dx, \quad (a)$$

где $y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, к интегралу рациональной функции от z , и найти, воспользовавшись этим геометрическим истолкованием, другие подстановки, приводящие к той же цели. Сначала ради простоты рассмотрим интеграл вида (a) в случае $A=0$, т. е.

$$\int f(x, \sqrt{bx+c}) dx. \quad (a')$$



Черт. 4.

Положим $y = \sqrt{bx+c}$ или $y^2 = bx+c$. Если рассматривать x и y как декартовы координаты точки M , то уравнение $y^2 = bx+c$ изображает параболу, симметрично расположенную относительно оси абсцисс, с вершиной в точке $(-\frac{c}{b}, 0)$ (черт. 4).

Чтобы привести интеграл (a') к интегралу рациональной функции, достаточно выразить координаты точки M в рациональных функциях параметра z . Для этой цели возьмем на параболе некоторую определенную точку M_0 , имеющую абсциссу x_0 и ординату $y_0 = \sqrt{bx_0+c}$; пересечем затем параболу секущей M_0M (точка M — переменная точка), проходящей через точку M_0 . Эта секущая имеет уравнение вида

$$y - y_0 = z(x - x_0).$$

Так как она пересекает параболу только в одной переменной точке M , то координаты x и y этой точки выражаются рационально в функциях от z .

Отсюда видно, что можно бесконечным множеством способов привести данный интеграл к интегралу рациональной функции, потому что выбор точки M_0 произволен. Легко видеть, что подстановка, употребленная нами в начале настоящего параграфа, есть частный случай множества подстановок, о которых мы только что говорили. В самом деле, принимая точку M_0 в бесконечности, мы получим пучок прямых, параллельных оси абсцисс, уравнение которого есть

$y = z$. Чтобы x и y выразить через z , надо решить относительно x , y уравнения $y = z$, $y^2 = bx + c$, что приводит нас к подстановке $bx + c = z^2$, которую мы и делали.

Перейдем к общему случаю $A \neq 0$, когда иррациональность, входящая под знак интеграла, есть квадратный радикал из полинома второй степени. Рассмотрим коническое сечение

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

или

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C$$

(черт. 5) и постараемся выразить координаты x , y этой текущей точки в рациональных функциях переменного параметра z . Для этой цели применим тот же метод пучка прямых, которым мы только что пользовались. Возьмем на коническом сечении некоторую определенную, хоть и произвольную, точку M_0 с абсциссой x_0 и ординатой

$$y_0 = \sqrt{Ax_0^2 + 2Bx_0 + C}.$$

Пересечем затем коническое сечение секущей M_0M , имеющей, очевидно, уравнение вида

$$y - y_0 = z(x - x_0).$$

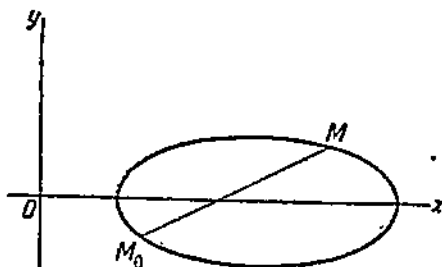
Так как эта секущая пересекает коническое сечение только в одной переменной точке M , то координаты x , y этой точки должны выражаться рационально в функциях от z .

Отсюда следует, что возможно бесконечным множеством способов привести данный интеграл к интегралу рациональной функции, потому что выбор точки M_0 произволен.

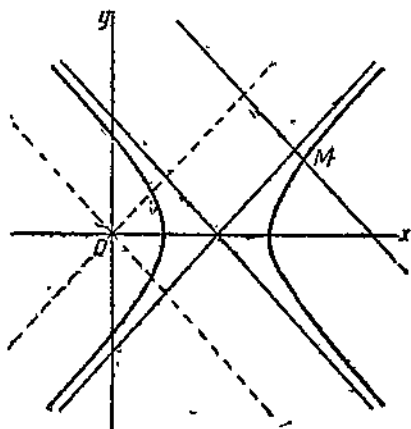
Легко показать, что три подстановки Эйлера, употреблявшиеся нами в этом параграфе, являются частными случаями множества подстановок, о которых мы только что сказали. Так, кривая $y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$ или $y^2 = Ax^2 + 2Bx + C$ представляет собой в случае $A > 0$ гиперболу, асимптоты которой параллельны прямым $y = \pm \sqrt{A}x$ (черт. 6).

Выполняя первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = z - x\sqrt{A}, \text{ или } y = z - x\sqrt{A},$$



Черт. 5.



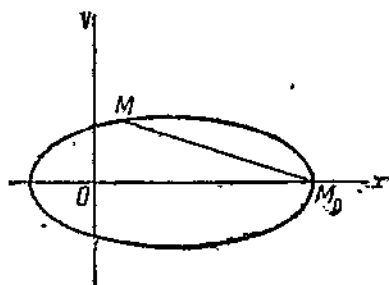
Черт. 6.

геометрически мы рассматриваем пучок прямых параллельных одной из асимптот нашей гиперболы. В самом деле, последнее уравнение при переменной z представляет уравнение прямой, передвигающейся параллельно асимптоте, т. е. проходящей через бесконечно удаленную точку M_0 гиперболы. Эта прямая пересекается с гиперболой только в одной переменной точке M , координаты которой выражаются рационально относительно z .

Переходя к геометрическому истолкованию второй подстановки Эйлера: $y = z(x - \beta)$, рассмотрим коническое сечение

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}, \text{ или } y^2 = Ax^2 + 2Bx + C,$$

где $A < 0$. Эта кривая представляет собой эллипс, центр которого лежит на оси абсцисс и которая пересекает эту ось в точках $(\alpha, 0)$ и $(\beta, 0)$ (черт. 7). Уравнение $y = z(x - \beta)$ есть уравнение прямой, проходящей через вершину эллипса $(\beta, 0)$ и пересекающей эллипс в переменной точке M .



Черт. 7.

Наконец, третья подстановка Эйлера $y = \sqrt{C} + xz$ при переменном z геометрически изображает собой пучок прямых, проходящих через точку $(0, \sqrt{C})$. Эта точка M_0 лежит на коническом сечении $y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, и, следова-

тельно, наше коническое сечение в рассматриваемом случае пересекается с прямой $y = \sqrt{C} + xz$ в одной переменной точке M .

В связи с рассмотренной геометрической интерпретацией подстановок Эйлера, заметим, что плоская алгебраическая кривая называется *уникурсальной*, если координаты x и y переменной точки этой кривой могут быть выражены при помощи рациональных функций параметра z . Таковыми являются, как мы видели, конические сечения, кривые 3-го порядка с одной двойной точкой, кривые 4-го порядка с тремя двойными точками и с одной тройной. Очевидно, что в случае нахождения интеграла вида $\int f(x, y) dx$, взятого вдоль дуги уникурсальной кривой, мы приходим к интегрированию рациональных дробей, вводя переменную z , через которую x и y выражаются рационально. Само собой предполагается, что f есть функция, рациональная относительно своих аргументов x и y . Так, например, кривая 3-го порядка $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, имеющая двойную точку в начале координат, есть уникурсальная. Чтобы координаты x , y ее текущей точки выразить рационально в функциях параметра z , проведем секущую $y = zx$ через двойную точку, находящуюся в начале координат. Решая совместно уравнения кривой и секущей, мы найдем координаты x , y переменной точки M . Выпол-

нив вычисления, получим

$$x = \frac{3az}{1+z^2}, \quad y = \frac{3az^2}{1+z^2}.$$

В. Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{Ax^2+2Bx+C})^{2n+1}},$$

где n — целое положительное число, может быть приведен к интегралу от целого полинома, если взять за новую переменную *производную* радикала $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$.

Полагая $R = \sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ и обозначая через R' производную от R по x , имеем

$$R^2 = Ax^2 + 2Bx + C, \quad (1)$$

$$RR' = Ax + B, \quad (2)$$

$$R^2 R'^2 = A^2 x^2 + 2ABx + B^2, \quad (3)$$

из (1) и (3):

$$R^2 (A - R'^2) = AC - B^2$$

$$R^{2n} = \frac{(AC - B^2)^n}{(A - R'^2)^n}. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (2), находим

$$R dR' + R' dR = A dx, \quad \text{т. е.} \quad R dR' + R'^2 dx = A dx,$$

откуда

$$\frac{dR'}{A - R'^2} = \frac{dx}{R}, \quad (5)$$

а из (4) и (5) находим

$$\frac{dx}{R^{2n+1}} = \frac{(A - R'^2)^{n-1} dR'}{(AC - B^2)^n}. \quad (6)$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{Ax^2+2Bx+C})^{2n+1}} = \int \frac{dx}{R^{2n+1}} = \frac{1}{(AC - B^2)^n} \int (A - R'^2)^{n-1} dR'. \quad (7)$$

Выполняя интегрирование целой функции от R' , стоящей под знаком интеграла, заменяем в результате R' его выражением

$$R' = \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Примеры

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{dx}{(1-x^2)^{5/2}} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^5} = \int (-1 - R'^2) dR' = \\ &= -R' - \frac{1}{3} R'^3 + \text{const}, \quad R' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, возвращаясь к переменной x , окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{5/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{(\sqrt{1-x^2})^3} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{(\sqrt{1+x+x^2})^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \int (1-R'^2)^2 dR' = \\ = \frac{64}{27} \int (1-2R'^2+R'^4) dR' = \frac{64}{27} \left\{ R' - \frac{2}{3} R'^3 + \frac{R'^5}{5} \right\} + C,$$

$$\text{где } R' = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

С. Интегралы вида

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},$$

где $F(x)$ — полином степени n , могут быть вычисляемы по формуле

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \Phi(x) \sqrt{Ax^2+2Bx+C} + e \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}, \quad (A)$$

где $\Phi(x)$ — целый полином степени $(n-1)$, а e — постоянная. Для доказательства формулы (A) выведем формулу приведения интеграла

$$U_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{R(x)}},$$

при n целом и положительном и $R(x) = Ax^2 + 2Bx + C$, к интегралам того же вида с меньшим показателем n . Для этого рассмотрим выражение производной произведения $x^{n-1} \sqrt{R(x)}$ и находим

$$[x^{n-1} \sqrt{R(x)}]' = \frac{x^{n-1} R'(x)}{2 \sqrt{R(x)}} + (n-1) x^{n-2} \sqrt{R(x)} = \\ = \frac{x^{n-1} (Ax+B) + (n-1) x^{n-2} (Ax^2+2Bx+C)}{\sqrt{R(x)}} = \\ = \frac{nAx^n + (2n-1)Bx^{n-1} + (n-1)Cx^{n-2}}{\sqrt{R(x)}};$$

интегрируя, получим

$$x^{n-1} \sqrt{R(x)} = nAU_n + (2n-1)BU_{n-1} + (n-1)CU_{n-2}. \quad (8)$$

Если в этой формуле положим $n=1$, то последний ее член пропадает, и получится зависимость между U_1 и U_0 , из которой можно выразить U_1 через U_0 формулой вида

$$U_1 = \alpha \sqrt{R(x)} + \beta U_0,$$

где α и β — постоянные.

Заменяя n в формуле (8) последовательно через $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, 1 и выражая при помощи этих формул последовательно U_n через U_{n-1} и U_{n-2} , U_{n-1} через U_{n-2} и U_{n-3} и т. д. и, наконец, U_1 через U_0 , окончательно получим результат вида

$$U_n = \Phi_{n-1}(x) \sqrt{R(x)} + e_{n-1} U_0,$$

Т. е.

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{R(x)}} = \Phi_{n-1}(x) \sqrt{R(x)} + e_{n-1} \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где $\Phi_{n-1}(x)$ будет полином $(n-1)$ -й степени, а e_{n-1} — постоянная. Замечая, что

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где $F(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$ есть линейная функция от $U_n, U_{n-1}, \dots, U_1, U_0$, а именно:

$$c_0 U_n + c_1 U_{n-1} + \dots + c_n U_0,$$

мы на основании предыдущего заключаем, что и для этого интеграла имеется формула вида

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{R(x)}} = \Phi(x) \sqrt{R(x)} + e \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}; \quad (A)$$

где $\Phi(x)$ — также некоторая функция $(n-1)$ -й степени, а e — некоторая постоянная.

Формула (A) служит, как мы видим, для отделения алгебраической части нашего интеграла от трансцендентной. Для определения коэффициентов в $\Phi(x)$ и числа e дифференцируем уравнение (A) и получаем

$$\frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{2} \frac{\Phi(x) R'(x)}{\sqrt{R(x)}} + \Phi'(x) \sqrt{R(x)} + \frac{e}{\sqrt{R(x)}},$$

а по умножении на $\sqrt{R(x)}$:

$$F(x) = \frac{1}{2} \Phi(x) R'(x) + \Phi'(x) R(x) + e.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого тождества, получаем достаточное число уравнений для определения искомых коэффициентов.

Пример

$$\int \frac{(x^2+1) dx}{\sqrt{x^2-4x+1}} = (ax+b) \sqrt{x^2-4x+1} + e \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

Дифференцируя и умножая затем на радикал, получаем

$$x^2+1 = (ax+b)(x-2) + a(x^2-4x+1) + e.$$

откуда $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $e = \frac{13}{2}$, и, следовательно,

$$\int \frac{(x^2+1) dx}{\sqrt{x^2-4x+1}} = \left(\frac{1}{2}x+3\right) \sqrt{x^2-4x+1} + \frac{13}{2} \ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+1}) + C.$$

D. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

приводятся к интегралам только что рассмотренного типа подстановкой $x - a = \frac{1}{z}$, т. е. $x = \frac{az + 1}{z}$, которая дает

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{z} \sqrt{A_1 z^2 + 2B_1 z + C_1},$$

где A_1, B_1, C_1 — постоянные, и

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = - \int \frac{z^{n-1} dz}{\sqrt{A_1 z^2 + 2B_1 z + C_1}}.$$

Полученный интеграл берется, как было сказано, и, по выделении алгебраической части, приводится к простейшему

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A_1 z^2 + 2B_1 z + C_1}}.$$

Е. К рассмотренному нами классу интегралов приводится еще следующий:

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{ax+\beta}) dx,$$

содержащий два различных корня второй степени из линейных функций. Полагая $\sqrt{ax+b} = z$, $x = \frac{z^2 - b}{a}$, приведем тотчас наш интеграл к виду

$$\int F[z, \sqrt{R(z)}] dz,$$

где $R(z)$ — полином второй степени от z , F — рациональная функция от z и $\sqrt{R(z)}$.

III. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Биномиальным дифференциалом называется выражение вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (9)$$

где m, n и p — числа целые или дробные (рациональные), положительные или отрицательные. Под тем же названием понимают и выражение вида

$$x^m (ax^r + bx^n)^p dx = x^{m+pr} (a + bx^{n-r})^p dx,$$

приводящееся, как видно, к (9). При некоторых условиях, которым удовлетворяют числа m, n и p , выражение (9) интегрируется в конечном виде.

Заметим следующие, почти очевидные положения:

1) Если все три числа m, n и p целые, то выражение (9) рационально и интеграл

$$V = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

может быть взят в конечном виде.

2) Если p — число целое, то интеграл V также может быть взят в конечном виде, потому что, при m и n дробных, выражение (9)

всегда можно привести к выражению того же вида, но с целыми показателями m и n . Действительно, полагая $m = \frac{\alpha}{\beta}$, $n = \frac{\gamma}{\delta}$, где $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ — целые числа, делаем подстановку $x = z^N$, где N — кратное от β и δ ; тогда

$$dx = Nz^{N-1} dz, \quad x^m = z^{\frac{\alpha N}{\beta}}, \quad x^n = z^{\frac{\gamma N}{\delta}},$$

откуда

$$x^m (a + bx^n)^p dx = Nz^{N-1 + \frac{\alpha N}{\beta}} (a + bz^{\frac{\gamma N}{\delta}})^p dz = Nz^{m_1} (a + bz^{n_1})^p dz,$$

где m_1 и n_1 — целые числа.

3) Если p дробное, то выражение (9) может быть приведено к рациональному виду и, следовательно, проинтегрировано в конечном виде только при выполнении некоторых условий, известных под именем *условий интегрируемости биномиальных дифференциалов*.

Пусть $p = \frac{\alpha}{\beta}$, где α и β — целые числа. Полагая $a + bx^n = z^\beta$, получим

$$(a + bx^n)^p = z^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad x^n = \frac{z^\beta - a}{b}, \quad x^m = \left(\frac{z^\beta - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}},$$

$$x = \left(\frac{z^\beta - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{\beta}{nb} \left(\frac{z^\beta - a}{b} \right)^{\frac{1}{n} - 1} z^{\beta-1} dz,$$

откуда

$$x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{\beta}{nb} z^{\alpha + \beta - 1} \left(\frac{z^\beta - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} dz. \quad (10)$$

Выражение (10) будет рационально, если

$$\frac{m+1}{n} = \text{целому числу}. \quad (A)$$

Преобразуем теперь выражение (9) следующим образом:

$$x^m (a + bx^n)^p dx = x^{m+np} (b + ax^{-n})^p dx. \quad (11)$$

Применяя к преобразованному выражению выведенное условие (A), получим, что выражение (11) может быть приведено к рациональному виду подстановкой:

$$b + ax^{-n} = z^\beta, \quad \text{или} \quad a + bx^n = x^n z^\beta,$$

если $\frac{m+np+1}{-n} = \text{целому числу}$, т. е. если

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{целому числу}. \quad (B)$$

Условие (B) может быть выполнено, когда (A) не выполнено, и представляет независимое от первого второе условие интегрируемости.

Итак,

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

приводится к интегралу от рациональной дроби, следовательно, берется в конечном виде при p дробном, равном $\frac{\alpha}{\beta}$, в следующих двух случаях, когда

$$\frac{m+1}{n} = \text{целому числу}, \quad (\text{A})$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{целому числу}. \quad (\text{B})$$

В первом случае приведение к рациональному виду делается подстановкой

$$a + bx^n = z^\beta,$$

во втором — подстановкой

$$a + bx^n = x^n z^\beta,$$

где β — знаменатель дробного показателя p .

Примеры

$$1. \int \sqrt[3]{x} \sqrt{1 + \sqrt[6]{x}} dx = \int x^{1/3} (1 + x^{1/6})^{1/2} dx,$$

$$m = \frac{1}{3}, \quad n = \frac{1}{6}, \quad p = \frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8;$$

выполнено первое условие интегрируемости; полагая $1 + x^{1/6} = z^2$, находим

$$(1 + x^{1/6})^{1/2} = z, \quad x^{1/6} = z^2 - 1,$$

$$\text{откуда} \quad x^{1/3} = (z^2 - 1)^2, \quad x = (z^2 - 1)^6, \quad dx = 12(z^2 - 1)^5 z dz,$$

$$\int \sqrt[3]{x} \sqrt{1 + \sqrt[6]{x}} dx = 12 \int z^2 (z^2 - 1)^7 dz;$$

раскрывая $(z^2 - 1)^7$ по формуле бинома Ньютона, умножая на z^2 , интегрируя целую функцию и подставляя в результат $z = \sqrt{1 + \sqrt[6]{x}}$, найдем искомый интеграл.

$$2. \int x^4 \sqrt[3]{1 - x^3} dx = \int x^4 (1 - x^3)^{1/3} dx,$$

$$m = 4, \quad n = 3, \quad p = \frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{5}{3}, \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2;$$

выполнено второе условие интегрируемости. Полагая $1 - x^3 = x^3 z^3$, находим

$$(1 - x^3)^{1/3} = xz, \quad x^3 = (z^3 + 1)^{-1}, \quad x^2 dx = -(z^3 + 1)^{-2} z^2 dz,$$

$$\text{откуда} \quad x^4 (1 - x^3)^{1/3} dx = -x^3 (z^3 + 1)^{-2} z^3 dz = -\frac{z^3 dz}{(z^3 + 1)^3},$$

$$\int x^4 (1 - x^3)^{1/3} dx = -\int \frac{z^3 dz}{(z^3 + 1)^3};$$

интеграл этот берется по правилам интегрирования рациональных дробей.

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{a + bx^n}}.$$

где n — целое положительное число, всегда берется в конечном виде; замечая, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{a+bx^n}} = \int (a+bx^n)^{-1/n} dx,$$

имеем

$$m=0, \quad p=-\frac{1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0;$$

выполнено второе условие интегрируемости. Для примера найдем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}. \\ 1-x^3 = x^3 z^3, \quad x^3 = \frac{1}{1+z^3}, \quad x^2 dx = -\frac{z^2 dz}{(1+z^3)^2}, \\ \sqrt[3]{1-x^3} = xz, \quad \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{z dz}{(1+z^3)^2 x^3} = -\frac{z dz}{1+z^3}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\int \frac{z dz}{1+z^3}; \end{aligned}$$

интегрирование кончается по известным правилам.

4. Интеграл $\int (a+bx^n)^p \frac{dx}{x}$ всегда берется в конечном виде, потому что здесь

$$m=-1, \quad \frac{m+1}{n} = 0;$$

следовательно, его можно взять следующей подстановкой: $a+bx^n = z^p$, $p = \frac{\alpha}{\beta}$.

Например:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[4]{1+x^3} dx}{x}; \quad 1+x^3 = z^4, \quad 3x^3 dx = 4z^3 dz, \quad \sqrt[4]{1+x^3} = z, \\ \int \frac{\sqrt[4]{1+x^3} dx}{x} = \frac{4}{3} \int \frac{z^4 dz}{z^4-1}. \end{aligned}$$

IV. Формулы приведения интегралов от биномиальных дифференциалов. Было уже замечено, что при рассмотрении интегралов вида

$$V_{m,p} = \int x^m (a+bx^n)^p dx$$

можно ограничиться предположением, что m и n — целые числа; нетрудно убедиться, что n можно считать положительным, потому что при n отрицательном, подстановкой $x = z^{-1}$ подынтегральное выражение приводится к выражению того же вида:

$$x^m (a+bx^n)^p dx = -z^{-(m+2)} (a+bz^{-n})^p dz,$$

где показатель переменного z в двучлене число положительное.

Заметив это, напишем теперь формулы приведения интеграла $V_{m,p}$ из которых видно, что этот интеграл всегда может быть сведен к другому интегралу того же вида, в котором показатель m численно не больше $\frac{n}{2}$.

а показатель p численно не больше $\frac{1}{2}$. Формулы эти применимы независимо от того, выполнены ли или не выполнены условия интегрируемости в конечном виде, и полезны в том отношении, что приводят вычисление интеграла $V_{m,p}$ к другому, более простому. Они с пользой применяются и при целых m , n и p , т. е. к интегралам от рациональных дробей. Во всех формулах первая часть есть интеграл $V_{m,p}$.

$$V_{m,p} = \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{m-(n-1)}{bn(p+1)} \int x^{m-n} (a + bx^n)^{p+1} dx \quad (I)$$

$$= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{bpn}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx \quad (II)$$

$$= \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{b(m+1+np)} - \frac{a(m+1-n)}{b(m+1+np)} \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx \quad (III)$$

$$= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b[m+1+n(p+1)]}{a(m+1)} \int x^{m+n} (a + bx^n)^p dx \quad (IV)$$

$$= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{apn}{(m+1+np)} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx \quad (V)$$

$$= -\frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{[m+1+n(p+1)]}{an(p+1)} \int x^m (a + bx^n)^{p+1} dx. \quad (VI)$$

Формула (I) приводит $V_{m,p}$ к $V_{m-n,p+1}$ и служит для численного уменьшения m при $m > \frac{n}{2}$ и для численного уменьшения p при $p < 0$ и $|p| > \frac{1}{2}$. Формула (II) служит для численного уменьшения m при $m < -\frac{n}{2}$ и для численного уменьшения p при $p > \frac{1}{2}$. Формула (III) уменьшает численно m при $m > \frac{n}{2}$, не изменяя p , и т. д.

Для вывода этих формул проще всего приложить метод неопределенных коэффициентов. Положим, например, что желательнее вывести формулу (II), служащую для замены m на $m+n$ под знаком интеграла, без изменения p .

Напишем формулу

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = Ax^{\alpha} (a + bx^n)^{\beta} + B \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx \quad (12)$$

с неопределенными коэффициентами A и B и неопределенными показателями α и β . Дифференцируя написанное тождество, получим

$$x^{m-n} (a + bx^n)^p (x^n - B) = Ax^{\alpha-1} (a + bx^n)^{\beta-1} [\alpha(a + bx^n) + \beta bnx^n].$$

Отсюда следует: 1) что

$$\alpha - 1 = m - n, \quad \beta - 1 = p,$$

т. е.

$$\alpha = m - n + 1, \quad \beta = p + 1;$$

2) по сокращении на $x^{\alpha-1} (a + bx^n)^{\beta-1}$, получаем

$$x^n - B = A[\alpha(a + bx^n) + \beta bnx^n],$$

откуда $A[\alpha b + \beta bn] = 1$, $A = \frac{1}{b(\alpha + \beta n)} = \frac{1}{b(m+1+pn)}$,
 $B = -A\alpha a = \frac{-a(m-n+1)}{b(m+1+pn)}$.

Подставив в формулу (12) найденные значения α, β, A, B , получаем формулу (III). Совершенно тем же способом могут быть получены все формулы (I) — (VI).

Применим формулу (III) к вычислению интеграла

$$U_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

который, при m целом, берется в конечном виде. Предполагая $m > 0$, положим в формуле (III) $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = -1$ и находим

$$U_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (13)$$

Небесполезно здесь заметить, что эта формула может быть выведена, независимо от общей, интегрированием по частям, а именно:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int x^{m-1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) \int \frac{x^{m-2} (1-x^2) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + (m-1) \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} - (m-1) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}; \end{aligned}$$

перенеся последний интеграл в левую часть равенства и разделяя все члены на m , мы получим формулу (13).

Пологая $m = 2\mu$, если m — четное число, находим

$$U_{2\mu} = -\frac{x^{2\mu-1} \sqrt{1-x^2}}{2\mu} + \frac{2\mu-1}{2\mu} U_{2\mu-2} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2\mu}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-1)} U_{2\mu} &= \\ &= -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2\mu-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-1)} x^{2\mu-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2\mu-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-3)} U_{2\mu-2}. \end{aligned}$$

Заменяя в этой формуле последовательно μ через $\mu-1$, $\mu-2$, ..., 2, складывая все результаты и замечая, что при $\mu=1$ формула (14) даст

$$U_2 = -\frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} U_0 = -\frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C,$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2\mu}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-1)} \int \frac{x^{2\mu} dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \\ &= -\sqrt{1-x^2} \left\{ x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} x^5 + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2\mu-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu-1)} x^{2\mu-1} \right\} + \\ &\quad + \arcsin x + C. \end{aligned}$$

Полагая в формуле (13) $m = 2\mu + 1$, при m нечетном, найдем тем же путем

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu + 1)}{2 \cdot 4 \dots 2\mu} \int \frac{x^{2\mu+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = -\sqrt{1-x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\mu - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2\mu} x^{2\mu} \right\} + C.$$

Формулы (I) — (VI), как уже было упомянуто, с пользой применяются к интегрированию рациональных функций. Для примера найдем.

$$J = \int \frac{x^5 dx}{(a + bx^4)^2} = \int x^5 (a + bx^4)^{-2} dx.$$

По формуле (I), положив $m = 5$, $n = 4$, $p = -2$, приведем этот интеграл к интегралу

$$J_1 = \int x (a + bx^4)^{-1} dx = \int \frac{x dx}{a + bx^4},$$

а этот последний, при помощи подстановки $x^2 = z$, приводится к

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{a + bz^2}.$$

Если a и b одинаковых знаков, то, положив $a = bk^2$, находим

$$J_1 = \frac{1}{2b} \int \frac{dz}{k^2 + z^2} = \frac{1}{2bk} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C.$$

Если a и b разных знаков, то, положив $a = -b\lambda^2$, найдем

$$J_1 = \frac{1}{2b} \int \frac{dz}{z^2 - \lambda^2} = \frac{1}{4b\lambda} \ln \frac{z - \lambda}{z + \lambda} + C.$$

Самое приведение интеграла J к J_1 , конечно, можно произвести непосредственно, применяя способ неопределенных коэффициентов, а именно, положив

$$J = \int x^5 (a + bx^4)^{-2} dx = Ax^{\alpha} (a + bx^4)^{\beta} + B \int x (a + bx^4)^{-1} dx,$$

находим дифференцированием

$$x(a + bx^4)^{-2} \{ x^1 - B(a + bx^4) \} = Ax^{\alpha-1} (a + bx^4)^{\beta-1} \{ a(a + bx^4) + 4b\beta x^4 \}$$

откуда путем легких преобразований мы получим

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1, \quad B = -A\alpha, \quad A = \frac{1}{4\beta b} = -\frac{1}{4b}, \quad B = \frac{1}{2b},$$

$$J = -\frac{x^2}{4b(a + bx^4)} + \frac{1}{2b} \int \frac{x dx}{a + bx^4}.$$

§ 4. Интегрирование некоторых трансцендентных функций.

I. Рассмотрим интеграл вида

$$\int e^{mx} f(x) dx,$$

где $f(x)$ — целая функция степени ν , m — постоянное число. Интегрирование по частям дает

$$\int e^{mx} f(x) dx = \int f(x) d\left(\frac{e^{mx}}{m}\right) = \frac{e^{mx}}{m} f(x) - \frac{1}{m} \int e^{mx} f'(x) dx,$$

$$\frac{1}{m} \int e^{mx} f'(x) dx = \frac{e^{mx}}{m^2} f'(x) - \frac{1}{m^2} \int e^{mx} f''(x) dx;$$

продолжая так же до тех пор, пока не дойдем до

$$\int e^{mx} f^{(v)}(x) dx,$$

где $f^{(v)}(x)$ — число постоянное, вследствие чего

$$\int e^{mx} f^{(v)}(x) dx = \frac{e^{mx}}{m} f^{(v)}(x) + C,$$

найдем

$$\int e^{mx} f(x) dx = \frac{e^{mx}}{m} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{m} + \frac{f''(x)}{m^2} - \dots + (-1)^v \frac{f^{(v)}(x)}{m^v} \right\} + C. \quad (1)$$

II. Интегралы вида

$$J = \int x^\mu f(\ln x) dx,$$

где $f(\ln x)$ — целый полином от $\ln x$, а μ — какое угодно постоянное, приводится к предыдущему виду подстановкой $x = e^z$, $z = \ln x$, дающей

$$J = \int e^{(\mu+1)z} f(z) dz.$$

III. Интегралы вида

$$J_1 = \int f(x) \sin mx dx, \quad J_2 = \int f(x) \cos mx dx,$$

где m — постоянное, а $f(x)$ — целый полином, берутся также интегрированием по частям. Замечая, что

$$\sin mx dx = d\left(\frac{-\cos mx}{m}\right), \quad \cos mx dx = d\left(\frac{\sin mx}{m}\right),$$

находим

$$J_1 = \int f(x) d\left(\frac{-\cos mx}{m}\right) = \frac{-f(x) \cos mx}{m} + \frac{1}{m} \int f'(x) \cos mx dx,$$

$$J_2 = \int f(x) d\left(\frac{\sin mx}{m}\right) = \frac{f(x) \sin mx}{m} - \frac{1}{m} \int f'(x) \sin mx dx.$$

Применяя тот же прием к интегралам во вторых частях равенств, найдем

$$\int f'(x) \cos mx dx = \frac{f'(x) \sin mx}{m} - \frac{1}{m} \int f''(x) \sin mx dx,$$

$$\int f'(x) \sin mx dx = \frac{-f'(x) \cos mx}{m} + \frac{1}{m} \int f''(x) \cos mx dx$$

и, подставляя в предыдущие формулы, находим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int f(x) \sin mx dx = \\ &= -\cos mx \frac{f(x)}{m} + \sin mx \frac{f'(x)}{m^2} - \frac{1}{m^2} \int f''(x) \sin mx dx, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int f(x) \cos mx dx = \\ &= \sin mx \frac{f(x)}{m} + \cos mx \frac{f'(x)}{m^2} - \frac{1}{m^2} \int f''(x) \cos mx dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Интегралы во вторых частях формул (2) и (3) имеют такой же вид, как и первоначальные, но функция $f(x)$ заменена в последних функцией $f''(x)$, степень которой на две единицы ниже.

Применяя формулы (2) и (3) к интегралам

$$\int f''(x) \sin mx \, dx \quad \text{и} \quad \int f''(x) \cos mx \, dx$$

и продолжая этот процесс, дойдем до

$$\int \sin mx \, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C \quad \text{и} \quad \int \cos mx \, dx = \frac{\sin mx}{m} + C$$

и получим формулы

$$\int f(x) \sin mx \, dx = \varphi(x) \cos mx + \psi(x) \sin mx + C, \quad (A)$$

$$\int f(x) \cos mx \, dx = \psi(x) \cos mx - \varphi(x) \sin mx + C, \quad (B)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — целые полиномы, а именно:

$$\varphi(x) = -\frac{f(x)}{m} + \frac{f''(x)}{m^3} - \frac{f^{(IV)}(x)}{m^5} + \dots, \quad (4)$$

$$\psi(x) = \frac{f'(x)}{m^2} - \frac{f'''(x)}{m^4} + \frac{f^{(V)}(x)}{m^6} - \dots \quad (5)$$

Ряды (4) и (5) обрываются сами собой, потому что производные порядка выше, чем степень $f(x)$, равны нулю.

IV. Для упрощения вычислений нередко вводят в рассмотрение комплексные значения постоянных в выражениях подинтегральной функции. Рассматривая переменную интегрирования попрежнему как число действительное, установим следующие условные равенства:

$$[\varphi(x) + i\psi(x)]' = \varphi'(x) + i\psi'(x), \quad (6)$$

$$\int [\varphi(x) + i\psi(x)] \, dx = \int \varphi(x) \, dx + i \int \psi(x) \, dx, \quad (7)$$

для распространения понятия о производной и об интеграле на функции с комплексными коэффициентами. Правила дифференциального и интегрального исчисления, установленные для функций с действительными коэффициентами, легко распространяются и на случай комплексных функций.

Для ближайших приложений покажем, что формула

$$(e^{mx})' = me^{mx}$$

и вытекающая из нее формула

$$\int e^{mx} \, dx = \frac{e^{mx}}{m}$$

справедливы и при m комплексном. Положив $m = a + bi$, имеем

$$e^{mx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx);$$

по формуле (6) находим

$$\begin{aligned}(e^{mx})' &= (e^{ax} \cos bx)' + i(e^{ax} \sin bx)' = \\ &= e^{ax} \{a \cos bx - b \sin bx\} + i e^{ax} \{a \sin bx + b \cos bx\} = \\ &= e^{ax} (a + bi) (\cos bx + i \sin bx) = (a + bi) e^{(a+bi)x} = m e^{mx},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Приложим сказанное к разысканию интегралов

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Из формулы $(e^{mx})' = m e^{mx}$ имеем

$$\int e^{mx} \, dx = \frac{e^{mx}}{m};$$

положим $m = a + bi$, тогда получим

$$\int e^{(a+bi)x} \, dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a + bi};$$

отделим действительные члены от мнимых при помощи формулы $e^{bxi} = \cos bx + i \sin bx$ и получим

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos bx \, dx + i \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)}{a + bi} = \\ &= \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) (a - bi)}{a^2 + b^2},\end{aligned}$$

а сравнивая действительные члены и коэффициенты при i , получаем

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{e^{ax} \{a \cos bx + b \sin bx\}}{a^2 + b^2} + C, \\ \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{e^{ax} \{a \sin bx - b \cos bx\}}{a^2 + b^2} + C.\end{aligned}$$

Приложим еще формулы Эйлера к вычислению интегралов

$$M = \int f(x) e^{ax} \cos bx \, dx, \quad N = \int f(x) e^{ax} \sin bx \, dx,$$

где $f(x)$ — целый полином степени n .

Положив $m = a + bi$ в формуле

$$\int e^{mx} f(x) \, dx = e^{mx} F(x) + C,$$

где

$$F(x) = \frac{1}{m} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{m} + \frac{f''(x)}{m^2} - \dots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{m^n} \right\},$$

и замечая, что $e^{(a+bi)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$, получим

$$M + iN = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) F_1(x) + \text{const},$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{a + bi} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{a + bi} + \frac{f''(x)}{(a + bi)^2} - \dots \right\}.$$

Отделяя действительную часть от мнимой, найдем M и N .

Для примера возьмем:

$$M = \int x e^x \cos x \, dx, \quad N = \int x e^x \sin x \, dx;$$

$$\begin{aligned} M + Ni &= \int x e^x (\cos x + i \sin x) \, dx = \int x e^{(1+i)x} \, dx = \\ &= \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} \left\{ x - \frac{1}{1+i} \right\} + C = \frac{e^x (1-i) (\cos x + i \sin x)}{2} \left(x - \frac{1-i}{2} \right) + C = \\ &= \frac{e^x}{2} \{ x \cos x - (1-x) \sin x \} + i \frac{e^x}{2} \{ (1-x) \cos x + x \sin x \} + C. \end{aligned}$$

Отсюда

$$M = \frac{e^x}{2} \{ x \cos x - (1-x) \sin x \} + \text{const},$$

$$N = \frac{e^x}{2} \{ (1-x) \cos x + x \sin x \} + \text{const}.$$

V. Интегралы вида

$$\int f(x) e^{ax} \cos^p x \, dx \quad \text{и} \quad \int f(x) e^{ax} \sin^p x \, dx,$$

где f — целый полином, p — целое положительное число, приводятся к предыдущим при помощи разложения степеней синуса и косинуса по синусу и косинусу кратных дуг. Например, для нахождения

$$\int e^x \cos^3 x \, dx$$

берем

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left\{ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right\}^3 = \frac{1}{8} \{ e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix} \} = \\ &= \frac{1}{8} \{ e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix}) \} = \frac{1}{4} \{ \cos 3x + 3 \cos x \}. \end{aligned}$$

Умножая последнее равенство на e^x и интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \int e^x \cos^3 x \, dx &= \frac{1}{4} \int e^x \cos 3x \, dx + \frac{3}{4} \int e^x \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} e^x \left\{ \frac{\cos 3x + 3 \sin 3x}{10} \right\} + \frac{3}{4} e^x \left\{ \frac{\cos x + \sin x}{2} \right\} + C. \end{aligned}$$

VI. Интегралы вида

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx$$

берутся при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} \{ \cos (m-n)x + \cos (m+n)x \}, \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} \{ \cos (m-n)x - \cos (m+n)x \}, \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} \{ \sin (m+n)x + \sin (m-n)x \}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На основании этих формул получим

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right\} + C$$

при $m \neq n$. Если же $m = n$, то найдем

$$\int \cos^2(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} + C.$$

Так же найдем и другие два интеграла.

Применяя формулы (8) несколько раз, можем найти интеграл вида

$$\int \cos mx \cos m_1 x \cos m_2 x \dots \cos m_k x \, dx,$$

и аналогичные ему от произведений синусов линейных функций от x или синусов и косинусов, каково бы ни было число множителей. Например, чтобы взять

$$v = \int \cos x \cos 3x \cos 5x \, dx,$$

замечаем, что

$$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x,$$

$$\begin{aligned} \cos x \cos 3x \cos 5x &= \frac{1}{2} \{ \cos 2x \cos 5x + \cos 4x \cos 5x \} = \\ &= \frac{1}{4} \{ \cos 3x + \cos 7x + \cos x + \cos 9x \}, \end{aligned}$$

и находим

$$v = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 9x}{9} \right\} + C.$$

VII. Интегралы вида

$$J = \int \sin^p x \cos^q x \, dx,$$

где p и q — целые числа, могут быть приведены подстановкой $z = \sin x$ к интегралу от биномиального дифференциала:

$$\int z^p (1-z^2)^{\frac{q-1}{2}} dz,$$

а этот приводится всегда к интегралу от рациональной функции, потому что или $\frac{q-1}{2}$ равно целому числу при q нечетном, или $\frac{p+1}{2}$ равно целому числу при p нечетном, или $\frac{p+q}{2} = \frac{p+1}{2} + \frac{q-1}{2}$ равно целому числу, когда p и q оба четные, так что всегда выполнено одно из условий интегрируемости.

Чаще всего, однако, интегралы рассматриваемого вида находят с помощью формул приведения, приводящих данный интеграл к другому, в котором численные величины показателей p и q меньше

прежних, и доходят последовательно до интегралов, которые берутся непосредственно. Мы найдем сперва формулы приведения для

$$\int \operatorname{tg}^p x \, dx \quad \text{и} \quad \int \operatorname{ctg}^p x \, dx,$$

соответствующих случаю $q = -p$ в общем выражении искомого интеграла. Принимая во внимание, что

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{или} \quad \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

получим

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^p x \, dx &= \int \operatorname{tg}^{p-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{p-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{p-2} x \, d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{p-2} x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{p-1} x}{p-1} - \int \operatorname{tg}^{p-2} x \, dx. \end{aligned}$$

Последовательное приложение этой формулы приведет к

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\ln \cos x + C \quad \text{или} \quad \int dx = x + C,$$

смотря по тому, будет ли p нечетное или четное число. Так же

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^p x \, dx &= \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^p x} = \int \frac{(\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x) \, dx}{\operatorname{tg}^p x} = \\ &= \int \operatorname{tg}^{-p} x \, d \operatorname{tg} x - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^{p-2} x} = -\frac{1}{(p-1) \operatorname{tg}^{p-1} x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^{p-2} x}. \end{aligned}$$

Последовательное приложение этой формулы приведет к

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \ln \sin x + C, \quad \text{или} \quad \int dx = x + C.$$

Например:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} &= \int \frac{(\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x) \, dx}{\operatorname{tg}^4 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}; \\ \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x} &= \int \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} \, dx = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} - \int dx = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} - x + C; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x} = -\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + x + C.$$

Напишем теперь формулы приведения для общего случая:

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x \, dx \quad (I)$$

$$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx \quad (II)$$

$$= +\frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^q x \, dx \quad (III)$$

$$= +\frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x \, dx \quad (IV)$$

$$= + \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x dx \quad (V)$$

$$= - \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} \int \sin^p x \cos^{q+2} x dx. \quad (VI)$$

Последние формулы можно получить из формул (I) — (VI) § 3, п. IV. Достигается это тем, что в данном интеграле полагают $\sin x = z$ и к полученному интегралу от биномиального дифференциала

$$\int z^p (1-z^2)^{\frac{q-1}{2}} dz$$

применяют упомянутые формулы приведения. Можно их вывести и непосредственно, применяя способ неопределённых коэффициентов или интегрирование по частям, что мы и представляем читателю. Последовательное применение этих формул всегда приведет разыскание интеграла

$$\int \sin^p x \cos^q x dx$$

к разысканию интеграла того же вида, в котором показатели p и q будут иметь значения 0, +1 и -1, а эти интегралы, как сейчас увидим, можно взять непосредственно. В самом деле, интегралы эти будут:

$$\int dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin x}, \\ \int \sin x \cos x dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Первые шесть известны; остаётся взять последние три.

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

берётся следующим образом. Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и замечая, что $\frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \ln \operatorname{tg} x + C. \quad (9)$$

Далее

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}};$$

применяя формулу (9), находим

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C, \quad (10)$$

Наконец,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)};$$

положив $\frac{\pi}{2} - x = y$, имеем

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{dy}{\sin y} = - \ln \operatorname{tg} \frac{y}{2} + C.$$

По формуле (10), применение которой сразу дает:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C,$$

или, замечая, что $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)}$,

находим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

В частных примерах можно, не прибегая к таблице общих формул (I)–(VI), а руководясь только характером этих формул, достигать приведения предложенного интеграла различными частными приемами.

Примеры.

1. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. Интеграл этот, как мы знаем, может быть приведен к $\int \frac{dx}{\sin x}$ [формула (III) при $q=0$, $p=-3$]. Достигнуть же этого можно всего проще следующим приемом: замечая, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x};$$

интеграл $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$, как мы знаем, может быть приведен к $\int \frac{dx}{\sin x}$ [формула (IV) при $q=2$, $p=-3$], и приведение это может быть достигнуто прямо интегрированием по частям. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x} &= \int \cos x \sin^{-3} x \cos x dx = \\ &= \frac{\cos x \sin^{-2} x}{-2} + \frac{1}{2} \int \sin^{-2} x d \cos x = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Указанный здесь прием всегда удобно прилагается при разыскании интегралов вида

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$$

при m и n целых и положительных.

2. Найти $\int \cos^4 x dx$.

При помощи интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \cos^3 x \cos x dx = \cos^3 x \sin x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \\ &= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x dx - 3 \int \cos^4 x dx; \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx; \\ \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cos x \, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \\ &= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx,\end{aligned}$$

откуда

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \sin x + x}{2} + C,$$

следовательно,

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{8} (\cos x \sin x + x) + C.$$

VIII. Интеграл вида

$$\int f(\sin x, \cos x) \, dx,$$

где f — рациональная функция, приводится к интегралу от алгебраической рациональной функции подстановкой $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, которая дает:

$$\cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{2z}{1 + z^2};$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

и, следовательно,

$$\int f(\sin x, \cos x) \, dx = \int F(z) \, dz,$$

где $F(z)$ рационально выражается через z .

Примеры

$$\begin{aligned}1. \quad V &= \int \frac{dx}{a + b \cos x} \stackrel{1}{=} 2 \int \frac{dz}{a(1 + z^2) + b(1 - z^2)} = \\ &= 2 \int \frac{dz}{a + b + (a - b)z^2} = \frac{2}{a - b} \int \frac{dz}{z^2 + \frac{a + b}{a - b}};\end{aligned}$$

при $a > b > 0$, полагая $\frac{a + b}{a - b} = \beta^2$, находим

$$\begin{aligned}V &= \frac{2}{a - b} \int \frac{dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{2}{(a - b)\beta} \operatorname{arctg} \frac{z}{\beta} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] + C;\end{aligned}$$

при $0 < a < b$, полагая $\frac{a+b}{a-b} = -\beta^2$, находим

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{a-b} \int \frac{dz}{z^2 - \beta^2} = \frac{1}{(a-b)\beta} \ln \frac{z-\beta}{z+\beta} + C = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}} + C, \end{aligned}$$

при $a = b$

$$V = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n},$$

где n — целое положительное число, приводится к $\int \frac{dx}{a+b \cos x}$ с помощью следующей формулы, в которой для сокращения положено $T = a+b \cos x$,

$$\int \frac{dx}{T^n} = -\frac{b \sin x}{(n-1)(a^2-b^2)T^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{dx}{T^{n-1}} - \frac{(n-2)}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{dx}{T^{n-2}}. \quad (11)$$

Формулу эту легко проверить дифференцированием или вывести следующим образом: дифференцируя выражение $\frac{\sin x}{T^{n-1}}$, получим

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\sin x}{T^{n-1}} \right\} = \frac{\cos x}{T^{n-1}} + \frac{b(n-1) \sin^2 x}{T^n} = \frac{\cos x}{T^{n-1}} + \frac{b(n-1)}{T^n} - \frac{b(n-1) \cos^2 x}{T^n}.$$

Решая уравнение $T = a+b \cos x$ относительно $\cos x$, получаем

$$\cos x = \frac{T-a}{b}, \quad \cos^2 x = \frac{T^2 - 2aT + a^2}{b^2};$$

подставляя в предыдущую формулу и упрощая, находим

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\sin x}{T^{n-1}} \right\} = -\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{bT^n} + \frac{a(2n-3)}{bT^{n-1}} - \frac{n-2}{bT^{n-2}},$$

откуда интегрированием и получается формула (11). При $n=2$ она дает

$$\int \frac{dx}{T^2} = -\frac{b \sin x}{(a^2-b^2)T} + \frac{a}{a^2-b^2} \int \frac{dx}{T},$$

при $n=3$, $\int \frac{dx}{T^3}$ выразится в $\int \frac{dx}{T^2}$ и $\int \frac{dx}{T}$, а заменяя $\int \frac{dx}{T^2}$ предыдущим его выражением, найдем выражение $\int \frac{dx}{T^3}$ через

$$\int \frac{dx}{T} = \int \frac{dx}{a+b \cos x}.$$

3. Интеграл

$$V = \int \frac{dx}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$$

может быть взят с помощью общего приема приведения подынтегральной функции к рациональному виду, но проще найдется, если разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$:

$$V = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a \operatorname{tg}^2 x + 2b \operatorname{tg} x + c};$$

полагая $\operatorname{tg} x = z$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dz$, находим при $ac - b^2 > 0$:

$$V = \int \frac{dz}{az^2 + 2bz + c} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{az + b}{\sqrt{ac - b^2}} + C;$$

когда $ac - b^2 < 0$, V выражается в логарифмах.

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 - 1}$. *Омс.* $\frac{1}{3} x^3 + x + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$.
2. $\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} dx$. *Омс.* $\ln \frac{x^2 - 1}{x} + C$.
3. $\int \frac{2x^2 + 5}{(x-2)(x+3)(x-4)} dx$.
Омс. $-\frac{13}{10} \ln(x-2) + \frac{23}{35} \ln(x+3) + \frac{37}{14} \ln(x-4) + C$.
4. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$. *Омс.* $\frac{1}{x} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + C$.
5. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)^2}$.
Омс. $\frac{3(x-1)}{16(x+1)} - \frac{x+1}{16(x-1)} - \frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2} + \frac{3}{16} \ln \frac{x+1}{x-1} + C$.
6. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$. *Омс.* $\frac{1}{4} \ln \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2(x-2)} + C$.
7. $\int \frac{x^3 dx}{(2-x)^3}$. *Омс.* $-x + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{12}{x-2} - 6 \ln(x-2) + C$.
8. $\int \frac{x dx}{x^6 + 1}$.
Омс. $-\frac{1}{3} \ln(1+x) + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.
9. $\int \frac{x^6 + 1}{x^6 + x^4} dx$. *Омс.* $\frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x + C$.
10. $\int \frac{dx}{1-x^4}$. *Омс.* $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$.
11. $\int \frac{(5x^2 - 1) dx}{(x^2 + 3)(x^3 - 2x + 5)}$.
Омс. $\ln \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 3} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.
12. $\int \frac{1+x^4}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$. *Омс.* $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C$.

$$13. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}. \quad \text{Омс.} -\frac{1}{3} \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) + \\ + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{9} \ln(x-1) + C.$$

$$14. \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}. \quad \text{Омс.} \frac{x-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x) + C.$$

$$15. \int \frac{x^3+4x^2+6}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx. \quad \text{Омс.} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \ln \frac{(x^2+2)^2}{x+1} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$16. \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1} dx. \quad \text{Омс.} \ln \sqrt[4]{\frac{(x-1)^5}{x+1}} - \frac{1}{2(x-1)} + C.$$

Выделить алгебраическую часть:

$$17. \int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2} dx. \quad \text{Омс.} \frac{x^2+1}{3(x^3+1)} \text{ (алгебраическая часть).}$$

$$18. \int \frac{4x^5-1}{(x^6+x+1)^2} dx. \quad \text{Омс.} -\frac{x}{x^6+x+1} \text{ (весь интеграл).}$$

Найти интегралы функций, указанных в нижеследующих задачах:

$$19. \int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}. \quad \text{Омс.} 2t^3-3t^2+6t-6 \ln(t+1)+C, \text{ где } t=\sqrt[3]{x}.$$

$$20. \int \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+3} dx. \quad \text{Омс.} 2\sqrt{x+2}-\ln(x+3)-2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+2}+C.$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}. \quad \text{Омс.} \frac{1}{3}(x+1)^{3/2}+\frac{1}{3}(x-1)^{3/2}+C.$$

$$22. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx. \quad \text{Омс.} \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}. \quad \text{Омс.} \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(3x + \frac{1}{2} + \sqrt{9x^2+3x+3} \right) + C.$$

$$24. \int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}. \quad \text{Омс.} -\sqrt{2+4x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} + C.$$

$$25. \int \sqrt{x^2-2x-1} dx. \quad \text{Омс.} \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}) + C.$$

$$26. \int \sqrt{a^2-x^2} dx. \quad \text{Омс.} \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$27. \int \sqrt{x^2-a^2} dx. \quad \text{Омс.} \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$28. \int \frac{dx}{(x^3+x+1)^{3/2}}. \quad \text{Омс.} \frac{2(2x+1)}{3(x^3+x+1)^{1/2}} + C.$$

$$29. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{5/2}}. \quad \text{Омс. } 2\sqrt{x-1} \left[x + \frac{3}{5}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{7} \right] + C.$$

$$30. \int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{5/2}}. \quad \text{Омс. } \frac{x(1-x^2)^{3/2}}{2} + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x} + C.$$

$$31. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{6}(x^3-1)\sqrt{1+2x^2} + C.$$

$$32. \int x^4 \sqrt{1+x^2}^3 dx.$$

$$\text{Омс. } \left(\frac{1}{8}x^7 + \frac{3}{16}x^5 + \frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{128}x \right) \sqrt{1+x^2} + \frac{3}{128} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$33. \int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$\text{Омс. } \sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + \frac{4}{3} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

$$34. \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{2-x^2}}. \quad \text{Омс. } \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2-x^2}}{x\sqrt{3}} + C.$$

$$35. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin^2 x - 2 \sin x + 2)^3}}. \quad \text{Омс. } \frac{\sin x - 1}{\sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + 2}} + C.$$

$$36. \int \frac{x^2 dx}{1+x^4}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

37. Привести интеграл

$$\int \frac{(x+A)dx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]\sqrt{x^2+2\gamma x+\delta}}$$

к виду

$$I = \int \frac{(at+b)dt}{(at^2+bt)\sqrt{ct^2+k}}$$

подстановкой $x = \frac{\mu t + \nu}{t+1}$, где μ и ν — постоянные.

Доказать, что всегда найдутся действительные значения для μ и ν .

Привести интеграл I к основным, рассмотренным в § 3.

Вычислить нижеследующие интегралы:

$$38. \int \frac{dx}{2+3\cos x}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

$$39. \int \sin^4 x \cos^3 x dx. \quad \text{Омс. } \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

$$40. \int \sin^2 x \cos^2 x dx. \quad \text{Омс. } \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$41. \int \frac{\cos x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}. \quad \text{Омс. } \frac{1}{3} \ln \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

42. $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx$. *Омс.* $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C$.
43. $\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$. *Омс.* $\frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} + C$.
44. $\int \frac{dx}{e^x + 1}$. *Омс.* $\ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C$.
45. $\int x^2 e^x \sin x \, dx$. *Омс.* $\frac{1}{2} e^x [(x^2 - 1) \sin x - (x - 1)^2 \cos x] + C$.
46. $\int \frac{\arcsin x \, dx}{x^2}$. *Омс.* $-\frac{\arcsin x}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{\sqrt{1-x^2} - 1} + C$.
47. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} \, dx$. *Омс.* $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + C$.
48. Найти

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2},$$

где $u = x \sin x + \cos x$, $v = \sin x - x \cos x$.

Омс. Замечая, что $du = x \cos x \, dx$, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{u^2} &= \int \frac{x}{\cos x} \frac{du}{u^2} = -\frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1}{u} + \int \frac{d\left(\frac{x}{\cos x}\right)}{u} = \\ &= -\frac{x}{u \cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{u \cos x} + \operatorname{tg} x = \frac{v}{u}. \end{aligned}$$

Так же найдем

$$\int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = \frac{1}{b} \frac{u}{au + bv}.$$

49. $\int \frac{dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2}$.
- Омс.* $\int \frac{dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} = \int \frac{\cos^2 x \, dx}{[a \cos x + (ax + b) \sin x]^2} = \frac{1}{a} \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}.$

Указание. Сделать подстановку $a \cos x + (ax + b) \sin x = y$.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Равномерная непрерывность. В предыдущем мы рассмотрели способы интегрирования в конечном виде некоторых простейших алгебраических и трансцендентных функций. Основное предложение интегрального исчисления состоит в утверждении, что *существует первообразная функция для любой функции, непрерывной на данном сегменте $[a, b]$.*

Доказательству этого положения мы посвятим настоящую главу. Предварительно в этом параграфе мы установим весьма важное свойство непрерывной функции на сегменте $[a, b]$, известное под именем *равномерной непрерывности*, а именно: если $f(x)$ есть однозначная непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, каковы бы ни были два числа x_1 и x_2 , принадлежащие сегменту $[a, b]$ и удовлетворяющие условию $|x_1 - x_2| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. В силу этого предложения, к доказательству которого мы сейчас обратимся, говорят, что всякая функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$, есть равномерно непрерывная на том же сегменте.

Заметим еще. Теорема перестает быть справедливой, если вместо сегмента $[a, b]$ рассматривать интервал (a, b) , т. е. функция может быть непрерывной в интервале (a, b) , не будучи равномерно непрерывной на этом интервале. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в интервале $0 < x \leq 1$; однако она не будет равномерно непрерывна в этом интервале. Действительно, для данного ε нельзя найти такое δ , что $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon$ при любых x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$ и принадлежащих интервалу $(0, 1)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно, например, взять $x_1 = \delta$, $x_2 = \frac{\delta}{n}$; в этом случае будет $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{n}{\delta} \right| = \frac{n-1}{\delta}$, что может быть сделано заданно больше ε , принимая n достаточно большим.

Обращаясь к доказательству теоремы, условимся называть *колебанием* непрерывной функции на сегменте разность между ее наибольшим и наименьшим значениями на этом сегменте (см. Диф. исчисление, ч. I, гл. III, § 4); очевидно, если некоторый сегмент принадлежит другому сегменту, то колебание функции на первом, меньшем сегменте будет не больше колебания функции на втором, большем сегменте. Заметив это и воспользовавшись аксиомой Кантора (Диф. исч., ч. I, гл. II, § 7), установим следующее положение: если $f(x)$ есть однозначная непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, то при любом $\varepsilon > 0$ возможно разбить сегмент $[a, b]$ на конечное число таких сегментов, чтобы в каждом из них колебание функции $f(x)$ было меньше ε .

Пусть $\varepsilon > 0$ — данное число. Допустим, что наше утверждение неверно, т. е. что сегмент $[a, b]$ нельзя разбить на конечное число малых сегментов, в каждом из которых колебание функции было бы меньше ε . Разделим сегмент $[a, b]$ пополам. Очевидно, предположенная невозможность разбиения будет продолжать существовать, по крайней мере в одной из этих двух частей, так как в противном случае она не существовала бы в полном

сегменте. Пусть $[a_1, b_1]$ та из двух половин сегмента $[a, b]$, в которой существует невозможность разбиения, или любая из двух половин, если невозможность разбиения имеет место в обеих половинах $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и

$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Разделим также $[a_1, b_1]$ на две равные части и обозначим через $[a_2, b_2]$ одну из этих двух частей, в которой существует еще невозможность разбиения. Разделим $[a_2, b_2]$ на равные части и продолжим таким образом поступать далее. Мы образуем последовательность сегментов $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$), каждый из которых содержит следующий и длиннее, чем предыдущий, по мере возрастания номера стремятся к нулю.

По аксиоме Кантора (ч. I, гл. II, § 7) существует точка c , принадлежащая всем сегментам последовательности, т. е. $a_n \leq c \leq b_n$, каково бы ни было $n = 1, 2, \dots$. Вспомним, с другой стороны, что, в силу построения, колебание функции на каждом сегменте $[a_n, b_n]$ нашей последовательности будет не меньше ϵ .

Так как точка c принадлежит сегменту $[a, b]$, то в ней функция $f(x)$ по условию непрерывна, т. е.

$$-\frac{\epsilon}{2} < f(x) - f(c) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (1)$$

для любой точки x , принадлежащей некоторому сегменту $[c - \eta, c + \eta]$. В частности, колебание функции $f(x)$ на этом сегменте $[c - \eta, c + \eta]$ будет меньше ϵ , потому что из неравенств (1) следует

$$M - f(c) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{и} \quad m - f(c) > -\frac{\epsilon}{2},$$

где M и m — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на рассматриваемом сегменте $[c - \eta, c + \eta]$; вычитанием последних неравенств найдем $M - m < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, что и нужно. Итак, мы построили

сегмент $[c - \eta, c + \eta]$, на котором колебание функции $f(x)$ меньше ϵ . С другой стороны, очевидно, сегмент $[a_n, b_n]$, при достаточно большом номере n , будет принадлежать сегменту $[c - \eta, c + \eta]$, и, значит, на нем и подалюбо колебание нашей функции должно быть меньше ϵ . В силу же построения, как было выше упомянуто, колебание функции на сегменте $[a_n, b_n]$ не меньше ϵ . Полученное противоречие убеждает нас в справедливости высказанного положения.

Из доказанного предложения немедленно вытекает равномерная непрерывность функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке сегмента $[a, b]$. В самом деле, отправляясь от любого $\epsilon > 0$, разобьем сегмент $[a, b]$ на конечное число таких сегментов, чтобы в каждом из них колебание функции $f(x)$ было меньше $\frac{\epsilon}{2}$, что возможно сделать на основании только

что доказанного положения. Обозначим через δ длину наименьшего из тех сегментов, на которые мы разбили весь сегмент $[a, b]$. Покажем, что, если x_1 и x_2 — любые две точки сегмента $[a, b]$, расстояние между которыми меньше δ , то $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. В самом деле, точка x_1 принадлежит некоторому сегменту разбиения; точка x_2 принадлежит либо тому же сегменту, либо смежному с ним, так как ее расстояние от точки x_1 меньше δ — длины наименьшего из сегментов разбиения.

В первом случае $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$, во втором случае, обозначая через x' точку, общую двум смежным сегментам, имеем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x')| + |f(x') - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Таким образом $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, коль скоро $|x_1 - x_2| < \delta$, что и т. д.

§ 2. Основная лемма. Мы уже знаем, что если для всех значений x , лежащих в некотором сегменте $[a, b]$, функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ связаны равенством

$$\varphi'(x) = f(x)$$

или, что все равно, $d\varphi(x) = f(x) dx$, то $\varphi(x)$ называют первообразной функцией для $f(x)$. Основная теорема интегрального исчисления заключается в утверждении существования первообразной функции $\varphi(x)$ для любой непрерывной функции $f(x)$. Легко видеть, что не уменьшая общности теоремы, мы можем считать непрерывную функцию $f(x)$ заданной на сегменте $[0, 1]$. Действительно, функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, преобразуется при помощи подстановки $x = (b-a)t + a$ или $t = \frac{x-a}{b-a}$ в функцию $f_1(t)$, непрерывную на сегменте $[0, 1]$:

$$f(x) = f_1(t),$$

где $x = (b-a)t + a$.

Пусть $\varphi_1(t)$ есть первообразная функция для $f_1(t)$, т. е. $\varphi_1'(t) = f_1(t)$ для всех значений t , принадлежащих сегменту $[0, 1]$. Тогда, полагая $\varphi(x) = (b-a)\varphi_1(t)$, будем иметь $\varphi'(x) = \varphi_1'(t) = f_1(t) = f(x)$, т. е. $\varphi'(x) = f(x)$ для всех значений x , принадлежащих сегменту $[a, b]$. Итак, в дальнейшем мы можем вместо сегмента $[a, b]$ брать сегмент $[0, 1]$.

Основная лемма¹⁾. Если $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[0, 1]$, то как бы ни было мало наперед заданное положительное число ϵ , можно указать такой полином $P(x)$, что для всех значений переменной x из рассматриваемого сегмента будет выполняться неравенство

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon. \quad (1)$$

Доказательство. Вследствие равномерной непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$, при данном $\epsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) > 0$, что, каковы бы ни были два числа x_1 и x_2 , принадлежащие сегменту $[0, 1]$ и удовлетворяющие условию $|x_1 - x_2| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$. Считая ϵ , а значит, и δ фиксированными, будем искать полином $P(x)$ в виде

$$P(x) = \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

где C_n^m означает число сочетаний из n элементов по m , и покажем в заключение, что при достаточно большом n , неравенство (1) будет выполнено.

В самом деле, заметив, что по формуле бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^n C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = 1,$$

имеем

$$f(x) - P(x) = f(x) \sum_{m=0}^n C_n^m x^m (1-x)^{n-m} - \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} =$$

¹⁾ Приводимое ниже доказательство леммы принадлежит академику С. Н. Бернштейну.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = \\
&= \sum_I \left[f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \\
&+ \sum_{II} \left[f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \quad (2)
\end{aligned}$$

где $\sum_I$ есть сумма всех тех слагаемых, для которых значения m удовлетворяют неравенству $\left| x - \frac{m}{n} \right| < \delta$, а $\sum_{II}$ — сумма остальных слагаемых, для которых значения m удовлетворяют неравенству

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| \geq \delta.$$

Переходя к абсолютным величинам, из соотношения (2) получим

$$\begin{aligned}
|f(x) - P(x)| &\leq \sum_I \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \\
&+ \sum_{II} \left[\left| f(x) \right| + \left| f\left(\frac{m}{n}\right) \right| \right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Так как в сумме $\sum_I$ значения m удовлетворяют неравенству $\left| x - \frac{m}{n} \right| < \delta$, то в силу выбора числа δ , для всех слагаемых этой суммы имеем

$$\left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметив это и обозначив через M наибольшее значение функции $|f(x)|$ на сегменте $[0, 1]$, получим из неравенства (3):

$$\begin{aligned}
|f(x) - P(x)| &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_I C_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \\
&+ 2M \sum_{II} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{II} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \quad (4)
\end{aligned}$$

Последнее замечание сделано вследствие очевидного неравенства:

$$\sum_I C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leq \sum_{m=0}^n C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = 1.$$

Таким образом остается оценить сумму $\sum_{II} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$, входящую в неравенство (4). Так как в этой сумме значения m удовлетворяют неравенству $\left| x - \frac{m}{n} \right| \geq \delta$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{II} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{II} \left(x - \frac{m}{n} \right)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leq \\
&\leq \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{m=0}^n (nx - m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \quad (5)
\end{aligned}$$

Возвращаясь к неравенству (4), будем иметь в силу (5)

$$\left| f(x) - P(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{m=0}^n (nx - m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \quad (6)$$

Остается вычислить сумму, входящую в последнее неравенство, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n (nx - m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} &= \\ &= n^2 x^2 \sum_{m=0}^n C_n^m x^m (1-x)^{n-m} - 2nx \sum_{m=0}^n m C_n^m x^m (1-x)^{n-m} + \\ &+ \sum_{m=0}^n m^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из тождества

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n, \quad (8)$$

полагая в нем $p = x$, $q = 1 - x$, найдем

$$\sum_{m=0}^n C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = 1. \quad (9)$$

С другой стороны, дифференцируя тождество (8) по переменной p и умножая затем на p , получим

$$\sum_{m=0}^n m C_n^m p^m q^{n-m} = np(p+q)^{n-1}, \quad (10)$$

откуда при $p = x$, $q = 1 - x$, найдем

$$\sum_{m=0}^n m C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = nx. \quad (11)$$

Дифференцируя тождество (10) по переменной p и умножая затем на p , получим

$$\sum_{m=0}^n m^2 C_n^m p^m q^{n-m} = np(np+q)(p+q)^{n-2},$$

откуда при $p = x$, $q = 1 - x$, найдем

$$\sum_{m=0}^n m^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = nx(nx+1-x). \quad (12)$$

Принимая во внимание тождества (9), (11) и (12), перепишем формулу (7) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n (nx - m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} &= n^2 x^2 - 2n^2 x^2 + \\ &+ nx(nx+1-x) = nx(1-x). \end{aligned}$$

При изменении x от 0 до 1 выражение $nx(1-x)$ достигает своего наибольшего значения при $x=1/2$, а потому

$$\sum_{m=0}^n (nx-m)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leq \frac{1}{4} n,$$

каково бы ни было x , принадлежащее сегменту $[0, 1]$.

Пользуясь последним неравенством, перепишем неравенство (6) в виде

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2k^2 n}. \quad (13)$$

До сих пор n было произвольным натуральным числом. Выберем теперь n столь большим, чтобы было

$$\frac{M}{2k^2 n} < \frac{\varepsilon}{2};$$

значит, из (13) найдем

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает нашу лемму.

§ 3. Непрерывная функция как сумма правильно сходящегося ряда полиномов. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ ($k=1, 2, 3, \dots$), мы в силу основной леммы, доказанной в предыдущем параграфе, можем подобрать такие полиномы $P_k(x)$, что для $0 \leq x \leq 1$ будут выполнены неравенства

$$|f(x) - P_k(x)| < \frac{1}{2^k} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь ряд полиномов

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \dots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \dots$$

или

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x) + \dots + \pi_n(x) + \dots, \quad (2)$$

где положено

$$\pi_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (n=2, 3, \dots)$$

и

$$\pi_1(x) = P_1(x).$$

Легко видеть, что сумма $S_n(x)$ первых n членов ряда (2) равна $P_n(x)$, и, следовательно, в силу (1) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x),$$

т. е. ряд (2) полиномов сходится и имеет своей суммой данную функцию $f(x)$.

Покажем, наконец, что этот ряд есть правильно сходящийся на сегменте $[0, 1]$. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} |\pi_n(x)| &= |P_n(x) - P_{n-1}(x)| = |[P_n(x) - f(x)] + [f(x) - P_{n-1}(x)]| \leq \\ &\leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_{n-1}(x)| < \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n=2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что все члены ряда (2) удовлетворяют неравенствам

$$|\pi_n(x)| < A_n \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

где положено

$$A_n = \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n=2, 3, \dots), \quad \text{а} \quad A_1 = \max |P_1(x)| + 1.$$

Так как числовой ряд

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

сходящийся, то, следовательно, ряд (2) есть правильно сходящийся на сегменте $[0, 1]$ (Диф. исч., ч. I, гл. VII, § 2).

Итак, мы доказали теорему: *всякая непрерывная функция на сегменте $[0, 1]$ может быть представлена в виде суммы ряда полиномов, правильно сходящегося на этом сегменте.*

§ 4. Основная теорема. Отправляясь от функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[0, 1]$, мы построили ряд полиномов

$$f(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + \dots + \pi_n(x) + \dots, \quad (1)$$

правильно сходящийся к данной функции $f(x)$ на этом сегменте.

Обозначим через $\tilde{\pi}_n(x)$ полиномы, определяемые условиями:

$$\tilde{\pi}_n'(x) = \pi_n(x), \quad \tilde{\pi}_n(0) = 0.$$

Другими словами, если

$$\pi_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + a_2^{(n)}x^2 + \dots + a_{k_n}^{(n)}x^{k_n},$$

то

$$\tilde{\pi}_n(x) = a_0^{(n)}x + \frac{a_1^{(n)}}{2}x^2 + \frac{a_2^{(n)}}{3}x^3 + \dots + \frac{a_{k_n}^{(n)}x^{k_n+1}}{k_n+1}.$$

Образуем ряд

$$\tilde{\pi}_1(x) + \tilde{\pi}_2(x) + \dots + \tilde{\pi}_n(x) + \dots, \quad (2)$$

для которого ряд (1) будет производным рядом. Покажем теперь, что ряд (2) сходится на сегменте $[0, 1]$. Действительно, по формуле Лагранжа имеем

$$\tilde{\pi}_n(x) = \tilde{\pi}_n(x) - \tilde{\pi}_n(0) = x \tilde{\pi}_n'(\xi), \quad \text{где} \quad 0 < \xi < x \leq 1.$$

Так как $\tilde{\pi}_n'(\xi) = \pi_n(\xi)$, то

$$\tilde{\pi}_n(x) = x \pi_n(\xi),$$

и, следовательно,

$$|\tilde{\pi}_n(x)| = |x| |\pi_n(\xi)| \leq |\pi_n(\xi)| < A_n,$$

каково бы ни было x , принадлежащее сегменту $[0, 1]$. Так как числовой ряд $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ сходится, то ряд (2) и подавно сходится всюду на сегменте $[0, 1]$ к некоторой функции $\varphi(x)$. По теореме (Диф. исч., ч. I, гл. VII, § 2) о дифференцировании рядов мы знаем, что сходящийся ряд (2) возможно почленно дифференцировать во всякой точке сегмента $[0, 1]$, так как его производный ряд (1) на этом сегменте есть правильно сходящийся.

Так как сумма ряда (2) обозначена через $\varphi(x)$, а сумма его производного ряда (1) есть данная функция $f(x)$, то $\varphi'(x) = f(x)$ во всякой точке x сегмента $[0, 1]$.

Итак, функция $\varphi(x)$ является первообразной для данной функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[0, 1]$, что и доказывает основную теорему интегрального исчисления о существовании первообразной функции для любой непрерывной функции.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. **Определенный интеграл и его простейшие свойства.** Как мы знаем (гл. III), всякая непрерывная функция имеет первообразную функцию, т. е. если $f(x)$ есть данная непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, то существует другая функция $\varphi(x)$, производная от которой равна данной функции $f(x)$ во всех точках сегмента $[a, b]$:

$$\varphi'(x) = f(x)$$

для всех значений x из сегмента $[a, b]$ или, что то же,

$$\varphi(x) = \int f(x) dx.$$

По определению разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ называется *определенным интегралом от $f(x)$, взятым от $x=a$ до $x=b$, и обозначается знаком*

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Итак, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a), \quad (1)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, а $\varphi'(x) = f(x)$ для всех значений x , принадлежащих этому сегменту.

Определенный интеграл не изменит своей величины при замене функции $\varphi(x)$ какой угодно другой, имеющей ту же производную, потому что всякая такая функция будет вида $\psi(x) = \varphi(x) + C$, где C от x не зависит, и, следовательно,

$$\psi(b) - \psi(a) = [\varphi(b) + C] - [\varphi(a) + C] = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Буква x , входящая под знак интеграла, называется *переменной интегрирования*, число a — *нижним*, число b — *верхним пределом интеграла*.

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ не является функцией от переменной интегрирования, которая входит в обозначение интеграла,

но не входит в его выражение $\varphi(b) - \varphi(a)$. Ясно, что символы

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(z) dz,$$

где переменные интегрирования обозначены разными буквами, означают одно и то же число. Если будем рассматривать пределы интеграла a и b как переменные, то интеграл будет функцией от них.

Из формулы (1), в связи с тем, что $\varphi'(x) = f(x)$, вытекает, что

$$D_b \int_a^b f(x) dx = f(b), \quad (2)$$

т. е. производная интеграла, взятая по верхнему пределу, равна значению подинтегральной функции при этом пределе. При этом нижний предел a рассматривается нами как постоянная, и $f(x)$ считается не зависящей от b .

Из той же формулы (1) мы имеем, при b постоянном и $f(x)$, не зависящей от a :

$$D_a \int_a^b f(x) dx = -f(a), \quad (3)$$

т. е. производная интеграла, взятая по нижнему пределу, равна значению подинтегральной функции при этом пределе, взятому с обратным знаком.

Рассматривая верхний предел интеграла как величину переменную, мы обозначим его буквой x , а переменную интегрирования буквой z ; получаемая таким образом функция

$$\int_a^x f(z) dz = \varphi(x) - \varphi(a) \quad (4)$$

будет иметь производную, равную $f(x)$, и будет обращаться в нуль при $x = a$. Из бесконечного множества интегралов, обозначенных выше символом

$$\int f(x) dx,$$

символ

$$\int_a^x f(z) dz$$

будет означать тот интеграл, который обращается в нуль при $x = a$.

Весьма часто переменную интегрирования обозначают той же буквой, как верхний предел, когда он рассматривается как величина

переменная, и пишут

$$\int_a^x f(x) dx,$$

когда хотят изобразить тот из интегралов от $f(x) dx$, который обращается в нуль при $x=a$.

Например:

$$\int_1^x x^2 dx = \frac{x^3 - 1^3}{3} = \frac{x^3 - 1}{3},$$

$$\int_0^x \cos x dx = \sin x - \sin 0 = \sin x$$

и т. д.

Употребляя символ

$$\int_a^x f(x) dx,$$

надо, однако, помнить, что буква x под знаком интеграла, т. е. переменная интегрирования, означает любое число, лежащее в промежутке между пределами интеграла, а буква x при верхнем пределе есть одна из границ этого промежутка. Букву x под знаком интеграла нельзя заменить постоянным числом, не нарушая смысла символа, а вместо буквы x в верхнем пределе можно подставлять любое данное число.

Применяя к определенным интегралам, взятым от a до x , основные формулы (А) и (В) § 3 гл. I получим

$$\int_a^x [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^x f_1(x) dx + \int_a^x f_2(x) dx - \int_a^x f_3(x) dx, \quad (5)$$

$$\int_a^x \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^x f(x) dx. \quad (5')$$

Эти равенства, в противоположность тому, что было сказано о равенствах (А) и (В), справедливы *безусловно*, потому что все интегралы, входящие в состав формул (5) и (5'), обращаются в нуль при $x=a$, а потому неопределенная постоянная, которая подразумевалась в равенствах (А) и (В), должна быть равна нулю.

Из формулы (1), служащей определением интеграла от $f(x) dx$, взятого от $x=a$ до $x=b$, непосредственно вытекают главные свойства определенных интегралов, которые мы теперь и заметим.

$$1) \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

т. е. определенный интеграл равен нулю, если верхний его предел равен нижнему.

$$2) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

потому что

$$\varphi(a) - \varphi(b) = -[\varphi(b) - \varphi(a)],$$

т. е. при перестановке пределов интеграл меняет знак, не меняя численной величины.

$$3) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

где число c лежит между a и b , потому что

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(c) - \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(c).$$

Очевидно, эта формула остается справедливой и в том случае, когда точка c лежит вне сегмента $[a, b]$ при условии непрерывности функции $f(x)$ в наибольшем сегменте, содержащем точки a, b, c .

Точно так же убеждаемся, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x) dx + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \quad (6)$$

при условии непрерывности функции $f(x)$ в наибольшем сегменте, содержащем точки $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, b$. Это свойство кратко выражают, говоря, что в определенном интеграле можно разбивать сегмент интегрирования $[a, b]$ на части.

$$4) \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi), \quad (7)$$

где ξ есть некоторое число, лежащее между a и b , потому что по формуле Лагранжа

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi),$$

где $\varphi'(x) = f(x)$.

$$5) \quad \int_a^b f(x) dx = (x_1-a)f(\zeta_0) + (x_2-x_1)f(\zeta_1) + \dots + (x_{n-1}-x_{n-2})f(\zeta_{n-2}) + (b-x_{n-1})f(\zeta_{n-1}), \quad (8)$$

где $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}, \zeta_{n-1}$ — определенные числа, лежащие соответственно внутри сегментов

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, b].$$

Формула (8) получится, если вставим между числами a и b ряд промежуточных значений $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, возрастающих, если $a < b$, и

убывающих, если $a > b$. Разобьем данный интеграл на несколько других, по формуле (6), и применим формулу (7) к каждому из интегралов в правой части равенства (6). Для краткости сумму, стоящую в правой части равенства (8), обозначают символом

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} f(\zeta_i) (x_{i+1} - x_i),$$

причем $x_0 = a$, $x_n = b$, и читают так: „Сумма всех слагаемых вида

$$f(\zeta_i) (x_{i+1} - x_i),$$

распространенная на значения i от $i=0$ до $i=n-1$ “ (подразумевается, целые и положительные). Формулу (8) пишут следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(\zeta_i) (x_{i+1} - x_i). \quad (8')$$

Эта формула показывает, что определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

можно рассматривать как сумму какого угодно конечного числа слагаемых вида (8), в которой ζ_i означает определенное число в интервале (x_i, x_{i+1}) , и значок i получает значение $0, 1, 2, \dots, n-1$.

§ 2. Выражение интеграла в виде предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Формула (8) предыдущего параграфа сама по себе не дает средства для вычисления определенного интеграла по данной подинтегральной функции, потому что очень часто не удается найти чисел ζ_i . Однако эта формула приводит, как сейчас увидим, к особому аналитическому представлению интеграла, имеющему очень важное значение как теоретическое, так и для приложений интегрального исчисления. Рассмотрим сумму

$$S_n = (x_1 - a)f(\xi_0) + (x_2 - x_1)f(\xi_1) + \dots + (b - x_{n-1})f(\xi_{n-1}) = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i), \quad (1)$$

отличающуюся от суммы, стоящей в формуле (8) предыдущего параграфа и изображающей данный интеграл, тем, что на место неизвестных чисел ζ_i входят произвольно выбираемые в каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ числа ξ_i , причем, конечно, соответственные числа ξ_i и ζ_i лежат в одном и том же сегменте $[x_i, x_{i+1}]$. О числах

$$a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, b$$

предположим, что они расположены в порядке величин, т. е. в порядке возрастания, если $a < b$, и убывания, если $a > b$, так что в том

и в другом случае, все разности $x_{i+1} - x_i$ суть числа одного знака. Мы покажем, что интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

при непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ есть предел, к которому стремится сумма S_n , когда максимум длин частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ стремится к нулю.

Для этого замечаем, пользуясь формулой (8), § 1, гл. IV, что

$$\int_a^b f(x) dx - S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} [f(\zeta_i) - f(\xi_i)] (x_{i+1} - x_i). \quad (2)$$

Вследствие равномерной непрерывности $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ для всякого положительного числа ε можно указать такое другое положительное число δ , что всякий раз, как имеет место неравенство

$$|x' - x''| < \delta,$$

будет справедливо и другое неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Так как ζ_i и ξ_i лежат на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, то

$$|\zeta_i - \xi_i| \leq |x_{i+1} - x_i|,$$

а потому

$$|f(\zeta_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon,$$

когда

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta,$$

для всех значений $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Тогда по формуле (2) мы получим следующее:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| < \varepsilon \sum_{i=0}^{i=n-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

а замечая, что

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = b - a$$

и все разности $(x_{i+1} - x_i)$ одного знака, вследствие чего сумма их абсолютных значений

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

очевидно, равна абсолютному значению разности $(b - a)$, мы находим

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| < \varepsilon |b - a|. \quad (8)$$

Так как ε — произвольное положительное число, то надлежащим выбором этого числа мы можем сделать $\varepsilon|b-a|$ меньшим любого данного числа, а формула (3) и показывает, что S_n будет отличаться как угодно мало от $\int_a^b f(x) dx$ при достаточно малых значениях $|x_{i+1} - x_i|$; иными словами, что

$$\int_a^b f(x) dx$$

есть предел, к которому стремится S_n с приближением максимума $|x_{i+1} - x_i|$ к нулю, причем число их n должно возрастать неограниченно, так как сумма всех этих разностей остается постоянно равной $b-a$.

Введя еще обозначение $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, получаем формулу

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (4)$$

при условии, что максимум $|x_{i+1} - x_i|$ стремится к нулю.

Эта формула показывает, что

$$\int_a^b f(x) dx$$

есть предел суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых вида

$$f(\xi_i) \Delta x_i$$

где ξ_i обозначает любое число в сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

Взяв $\xi_i = x_i$ или $\xi_i = x_{i+1}$, можем написать формулу (4) в следующих двух видах:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i, \quad (4a)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \Delta x_i. \quad (4b)$$

Во всех формулах $x_0 = a$, $x_n = b$.

Так как выражение $f(x) dx$ получается из общего выражения слагаемого или элемента суммы $f(x_i) \Delta x_i$, если опустим значок i и вместо Δx напомним dx , то для сокращения речи говорят, что

$$\int_a^b f(x) dx$$

есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых элементов вида

$$f(x) dx,$$

где dx означает бесконечно малую разность между двумя последовательными значениями переменной x , а суммирование распространено на все значения x от $x=a$ до $x=b$.

Если возьмем в формуле (4a) числа $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ равноотстоящими друг от друга, т. е. разделим $b-a$ на n равных частей и положим все

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h,$$

то получим формулу

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a) + f(a+h) + \dots + f[a+(n-1)h]}{n} \quad (5)$$

при условии $nh = b-a$.

Поясним формулу (4) простым примером. Вычислим $\int_0^1 x dx$, рассматривая его как предел суммы. Полагая в формуле (4) $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$, $\xi_i = x_i$, возьмем все $\Delta x_i = h = \frac{1}{n}$, так что после этого числа, разбивающие интервал, представятся так:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{n},$$

$$f(x_i) \Delta x_i = \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

К тому же результату мы пришли бы, применяя формулу

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a), \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ — первообразная функция или неопределенный интеграл от $f(x) dx$. В нашем примере

$$\varphi(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{и} \quad \int_0^1 x dx = \frac{1^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

В этом примере непосредственное суммирование не представляет никаких затруднений. Вообще же сопоставление формул (4) и (6), дающих выражения одного и того же интеграла в разных формах, приводит к следующему важному результату. Вычисление пределов

сумм бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых вида

$$f(\xi_i) \Delta x_i,$$

распространенных на значения

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b,$$

причем ξ_i означает произвольное число в сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ и $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, приводится к разысканию функции $\varphi(x)$ по данному ее дифференциалу, т. е. к интегрированию дифференциалов, так как из формул (4) и (6) вытекает, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (7)$$

Формула (4) дает новое определение интеграла от непрерывной функции $f(x)$ в пределах от a до b , позволяя его рассматривать как предел суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Итак, к понятию определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от не-

прерывной функции $f(x)$ мы можем прийти двояким путем. С одной стороны, путем обращения операции дифференцирования, рассматривая

в этом случае $\int_a^b f(x) dx$ как разность значений $\varphi(b) - \varphi(a)$ перво-

образной функции $\varphi(x)$ при верхнем и нижнем пределах; именно так мы и ввели понятие определенного интеграла. С другой стороны, теперь мы видим, что к тому же результату мы приходим, рас-

сматривая $\int_a^b f(x) dx$ как предел суммы вида $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, когда

максимум длин Δx_i всех частичных сегментов стремится к нулю. Это показывает, что процесс интегрирования непрерывной функции можно рассматривать с двух разных точек зрения: *либо как операцию, обратную дифференцированию, либо как операцию суммирования бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.*

§ 3. Геометрическая интерпретация представления интеграла как предела суммы. Чтобы дать геометрическое истолкование формулы (4), § 2, гл. IV, будем сначала предполагать функцию $f(x)$ положительной при изменении x от a до b , причем $a < b$. Рассмотрим область, ограниченную кривой линией AB , заданной уравнением $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя ординатами A_1A и B_1B , соответствующими абсциссам $OA_1 = a$ и $OB_1 = b$ (черт. 8).

Процесс интегрирования, выражаемый формулой (4), будет заключаться в следующем: во-первых, нужно разделить сегмент $[a, b]$ на произвольное число n частичных сегментов при помощи проме-

жесточных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, идущих в порядке возрастания; во-вторых, составить произведение $f(\xi_i) \Delta x_i$ значения функции $f(\xi_i)$ в произвольно выбранной точке ξ_i , принадлежащей сегменту $[x_i, x_{i+1}]$, на длину Δx_i этого частичного сегмента; составленный элемент суммы $f(\xi_i) \Delta x_i$ будет равен площади прямоугольника с основанием, равным Δx_i , и высотой $f(\xi_i)$; в-третьих, нужно образовать сумму элементов $f(\xi_i) \Delta x_i$, распространив ее на все значения i от 0 до $n-1$, т. е. на все частичные сегменты; образованная таким образом сумма будет равна сумме площадей всех прямоугольников, построенных на частичных сегментах $[x_i, x_{i+1}]$ как на основаниях и имеющих высотами соответствующие ординаты $f(\xi_i)$. Наконец, в-четвертых, мы должны взять предел образованной суммы в предположении, что максимум длин всех частичных сегментов стремится к нулю. В результате мы получаем, как показывает формула (4), § 2, гл. IV, вполне определенное

число, равное $\int_a^b f(x) dx$,

независимо от того, по какому закону максимум длин частичных сегментов стремится к нулю, и от того,

как мы выбрали произвольные точки ξ_i этих частичных сегментов. Согласно определению, этот предел мы принимаем за площадь области, ограниченной сверху кривой линией AB , снизу осью абсцисс, и с боков — прямыми $x=a$ и $x=b$.

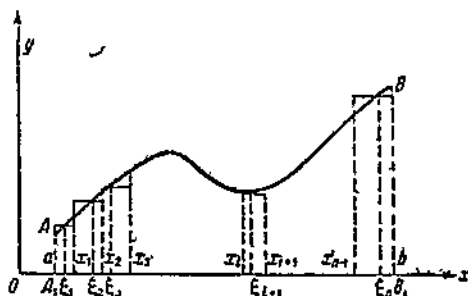
Формула (4) показывает нам, следовательно, что определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ равен площади области, ограниченной осью абсцисс, кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Все сказанное легко обобщить на случай, когда $f(x)$ меняет знак в сегменте $[a, b]$ и когда $b < a$. Если $f(x)$ все время меньше нуля для $a \leq x \leq b$, то дуга кривой AB вся лежит со стороны отрицательных ординат. Выражение $f(\xi_i) \Delta x_i$ будет меньше нуля для всех x_i , потому что

$$f(\xi_i) < 0, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0 \quad \text{при } b > a.$$

Значит, это выражение равно площади элементарного прямоугольника, взятой со знаком минус, и

$$\lim \sum f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$



Черт. 8.

очевидно, будет изображать площадь области $aABb$, взятую со знаком минус.

Переходя к общему случаю, когда $f(x)$ меняет знак несколько раз в сегменте $[a, b]$, т. е. кривая AB несколько раз пересекает ось x -ов, и считая опять $b > a$, легко убедимся, что в этом слу-

чае $\int_a^b f(x) dx$ равен алгебраической сумме площадей областей, лежа-

щих между осью абсцисс, кривой CD и двумя ординатами, соответствующими $x=a$ и $x=b$, причем площади частей, лежащих

со стороны положительных y -ов, берутся со знаком плюс, а лежащих со стороны отрицательных y -ов со знаком минус.

Например, если кривая $y=f(x)$ есть CKD (черт. 9), где $OA=a$, $OB=b$, $OK=c$, то

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \\ &= \text{пл. } ACK - \text{пл. } KBD. \end{aligned}$$

Черт. 9.

Наконец, случай $b < a$ сводится к предыдущему перестановкой пределов, причем интеграл меняет свой знак, не меняя абсолютной величины.

§ 4. Задачи, приводящиеся к вычислению определенных интегралов. К определению предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых нас приводят многочисленные задачи геометрии и механики. Одну из таких общих геометрических задач мы уже рассмотрели: это был вопрос квадратуры областей. В качестве второй общей задачи рассмотрим вопрос из механики об определении пути, пройденного точкой от момента t_0 до момента T , если известна скорость движения $v=f(t)$, как функция времени t .

Для ее решения разделим промежуток времени $T-t_0$ на произвольное число n равных частей, обозначая через Δt величину каждого маленького промежутка, т. е. полагая

$$\Delta t = \frac{T-t_0}{n}.$$

Очевидно, мы получим весь путь $s_{t_0}^T$ за промежуток времени от t_0 до T , если сложим все расстояния, пройденные точкой за последовательные малые промежутки Δt , на которые мы разбили полный интервал от t_0 до T :

$$s_{t_0}^T = s_{t_0}^{t_0+\Delta t} + s_{t_0+\Delta t}^{t_0+2\Delta t} + \dots + s_{t_0+(n-1)\Delta t}^T. \quad (1)$$

Через $s_{t_1}^{t_2}$ будем обозначать путь, пройденный точкой от момента t_1 до момента t_2 . Когда интервалы Δt стремятся к нулю, соответствующие им расстояния также стремятся к нулю; число же их n неограниченно

возрастает. Таким образом весь путь $s_{t_0}^T$, пройденный точкой от момента t_0 до момента T , оказывается равным сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Вычислить каждый из элементарных путей, на которые мы разбили полный путь, так же трудно, как и первоначальный путь, потому что движение в течение каждого элемента времени Δt неравномерное. Поэтому, считая промежутки времени Δt бесконечно малым, мы предполагаем, что в течение каждого такого промежутка от момента t до момента $t + \Delta t$ движение совершается равномерно, т. е. с постоянной скоростью, равной величине скорости $v = f(t)$ в начальный момент этого бесконечно малого промежутка времени. Подсчитанный таким образом путь $f(t) \cdot \Delta t$ будет отличаться от истинного пути за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ на величину бесконечно малую высшего порядка относительно Δt , т. е. истинный элементарный путь и вычисленный таким образом будут бесконечно малые, между собой эквивалентные.

Так как при нахождении суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых можно, не изменяя предела этой суммы, откинуть в каждом слагаемом бесконечно малую высшего порядка (относительно приращения независимой переменной), т. е. заменить каждое слагаемое ему эквивалентной бесконечно малой величиной, то для полного пути $s_{t_0}^T$ вместо формулы (1) можем принять

$$s_{t_0}^T = \lim \sum_{t_0}^T f(t) \Delta t.$$

Каждое слагаемое $f(t) \Delta t$ суммы, стоящей в правой части последней формулы, представляет произведение величины скорости $v = f(t)$ в начальный момент бесконечно малого промежутка на величину этого промежутка. Оно выражает путь, пройденный точкой за соответствующий бесконечно малый промежуток времени и вычисленный в том предположении, что движение совершается равномерно в пределах этого бесконечно малого промежутка.

Итак, мы получили,

$$s_{t_0}^T = \lim \sum_{t_0}^T f(t) \Delta t = \int_{t_0}^T f(t) dt,$$

т. е. искомый путь выражается посредством определенного интеграла. Например, чтобы вычислить путь, пройденный падающим телом за T секунд, нужно положить $v = gt$, и тогда, согласно установленной формуле, получим

$$s_0^T = \int_0^T gt dt = g \int_0^T t dt = g \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^T = \frac{gT^2}{2}.$$

В качестве второй общей механической задачи, решаемой, как и разобранный выше, путем суммирования, разберем задачу *вычисления работы силы*.

Представим себе, что точка движется по прямой линии под действием силы p , направленной в сторону движения, и описывает путь r . Если величина силы p постоянна, то производимая ею работа равна произведению силы p на пройденный путь r , т. е. pr . Однако во многих задачах механики приходится иметь дело со случаями, когда сила p есть величина переменная. Итак, представим себе, что точка M движется по прямой, принятой за ось абсцисс, под действием силы p , направленной в сторону движения, причем сила p задана как функция абсциссы x точки M :

$$p = f(x),$$

и требуется вычислить работу, производимую этой силой при движении точки из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(X)$.

Разделим весь сегмент M_0M_1 , равный $X - x_0$, на n равных частей, обозначая через Δx величину каждого малого сегмента

$$\Delta x = \frac{X - x_0}{n}.$$

Очевидно, мы получим полную работу силы, обозначаемую через R , если сложим элементарные работы этой силы, соответствующие всем последовательным малым сегментам Δx , на которые мы разбили весь сегмент M_0M_1 :

$$R = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \quad (2)$$

где через r_i обозначены элементарные работы, выполняемые силой на малых сегментах. Когда сегменты Δx стремятся к нулю, соответствующие им элементарные работы r тоже стремятся к нулю, число же их n неограниченно возрастает. Таким образом полная работа R оказывается равной сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

При оценке элементарной работы r_i мы можем считать силу p постоянной в пределах соответствующего малого сегмента, подобно тому как мы это уже делали при вычислении пути по данной скорости. Мы уже знаем, что такая приближенная оценка бесконечно малых элементов r_i не будет влиять на предельное значение их суммы, т. е. не изменит полной работы R .

Таким образом на первом сегменте Δx сила равна $f(x_0)$, на втором равна $f(x_0 + \Delta x)$ и, наконец, на n -м сегменте сила будет $f[x_0 + (n-1)\Delta x]$, а соответствующие работы будут

$$r_1 = f(x_0)\Delta x, \quad r_2 = f(x_0 + \Delta x)\Delta x, \quad \dots, \quad r_n = f[x_0 + (n-1)\Delta x]\Delta x.$$

Следовательно, внося эти значения r_i в формулу (2), мы изменим R лишь на величину бесконечно малую, а потому мы можем написать

$$R = \lim \{f(x_0)\Delta x + f(x_0 + \Delta x)\Delta x + \dots + f[x_0 + (n-1)\Delta x]\Delta x\}$$

или, более кратко, так:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x = \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Итак, мы видим, что определение работы R переменной силы $p=f(x)$ привело к необходимости вычисления предельного значения суммы, составленной для функции $p=f(x)$, по тому же закону, что и при вычислении пути по данной скорости $v=f(t)$.

Как частный пример этой основной задачи механики рассмотрим задачу о вычислении работы упругой силы. Вообразим себе, что мы растягиваем пружину с укрепленным одним концом, прилагая силу, пропорциональную удлинению x пружины, т. е. $p=kx$, где k — положительная постоянная, зависящая от упругих свойств самой пружины. Искомая работа, согласно полученной формуле, будет

$$R = \int_0^x kx dx = k \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^x = \frac{kx^2}{2},$$

где X есть полное удлинение пружины.

С помощью определенных интегралов вычисляются не только площади, работа силы, путь, пройденный движущейся точкой, но и другие геометрические, механические и тому подобные величины, например объемы, длины дуг, координаты центра тяжести, моменты инерции и т. п. При этом применяется основной принцип интегрального исчисления, в силу которого возможно при вычислении суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых откидывать от каждого слагаемого бесконечно малую высшего порядка, не изменяя предела этой суммы.

При применении определенных интегралов соблюдают следующие правила. Искомую величину разбивают на бесконечно малые части и выбирают независимую переменную, например, x . Откидывая бесконечно малые высшего порядка, заменяют каждую из бесконечно малых частей элементом вида $f(x) dx$. Если на протяжении всех элементов независимая переменная изменяется в пределах от a до b , то искомая величина будет

$$\lim \sum_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Если мы возьмем ту часть искомой величины, которой соответствует изменение независимой переменной от a до x , то это будет некоторая функция $F(x)$, зависящая от x [$F(x)$ есть один из неопределенных интегралов функции $f(x)$]. Те бесконечно малые части, на которые мы разбивали всю искомую величину, будут приращениями этой функции $F(x)$ (при изменении независимой переменной от x до $x + \Delta x$); полученный же откидыванием бесконечно малой высшего порядка элемент $f(x) dx$ есть, следовательно, дифференциал той же функции $F(x)$. Поэтому часто элемент величины называют ее дифференциалом и пользуются соответствующей записью.

Разберем еще ряд прикладных задач, решаемых с помощью определенных интегралов. Так, например, для вычисления координат центра

тяжести пользуются формулами:

$$x_G = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum Px}{\sum P}, \quad y_G = \frac{\sum Py}{\sum P}, \quad z_G = \frac{\sum Pz}{\sum P},$$

где $P_1, P_2, \dots, P_n$ — веса частей, на которые разбито тело, а $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ — координаты центров тяжести этих частей. Числитель $\sum Px$ в формуле для x_G называется *статическим моментом* тела относительно плоскости yOz (в случае плоской пластинки — относительно оси Oy); аналогичны названия — для числителей формул y_G и z_G . Знаменатель же всех трех формул есть вес всего тела. Если тело однородное, т. е. его удельный вес δ всюду одинаков, то

$$P_1 = \delta V_1, \quad P_2 = \delta V_2, \dots, P_n = \delta V_n,$$

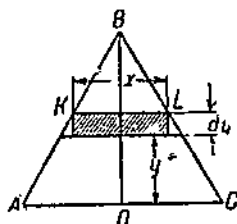
где $V_1, V_2, \dots, V_n$ — объемы частей тела. Тогда, вынося δ за скобку в числителе и знаменателе формул для x_G, y_G и z_G , мы получим

$$x_G = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + \dots + V_nx_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n} = \frac{\sum Vx}{\sum V}, \quad y_G = \frac{\sum Vy}{\sum V}, \quad z_G = \frac{\sum Vz}{\sum V},$$

т. е. всюду вместо весов мы можем брать объемы.

Если мы имеем дело с однородной пластинкой, т. е. такой, у которой вес, приходящийся на единицу площади, всюду одинаков, то в формулах для координат центра тяжести мы можем всюду вместо весов брать площади. Доказательство этого совершенно такое же, как для случая однородного тела.

Пример. Найти центр тяжести однородной пластинки, имеющей вид равнобедренного треугольника, основание которого равно a , а высота равна h (черт. 10). Разобьем треугольник прямыми, параллельными основанию, на бесконечно малые части (на черт. 10 заштрихована одна из этих бесконечно малых частей). Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, мы можем принять каждую из этих частей за прямоугольник. Центр тяжести каждого из этих прямоугольников лежит на высоте OB . Следовательно, центр тяжести всего треугольника лежит также на высоте OB . Остается только найти его расстояние y_G от



Черт. 10.

AC . Чтобы найти это расстояние, надо вычислить статический момент M треугольника относительно его основания, причем, как было указано выше, мы можем вместо весов брать площади, так как треугольник однородный. Обозначим ширину элементарного прямоугольника через x , его расстояние от AC через y . Тогда его высота будет dy , а площадь

$$dQ = x dy,$$

статический момент его

$$dM = y dQ = yx dy$$

(расстояние центра тяжести элемента до основания в точности будет $y + \frac{1}{2} dy$, но слагаемое $\frac{1}{2} dy$ при умножении на dQ дает бесконечно малую высшего порядка, поэтому следует это слагаемое отбросить).

Теперь остается выразить x в функции от y (из подобия треугольников BAC и BKL) и найти предел суммы статических моментов отдельных прямоугольников, т. е. проинтегрировать. Прделаав эти вычисления, мы найдем

$$M = \frac{1}{6} ah^2.$$

Разделив далее M на площадь треугольника $Q = \frac{1}{2} ah$, получим

$$y_{\text{ср}} = \frac{h}{3}.$$

Моментом инерции J тела относительно некоторой оси называется сумма произведений масс его частей на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J = \sum mr^2,$$

m — масса части, r — ее расстояние от оси.

Моменты инерции играют важную роль в теории вращательного движения твердого тела. Вычислим, например, живую силу T тела, вращающегося вокруг оси с угловой скоростью ω . Разбив тело на бесконечно малые части, мы получим

$$T = \sum \frac{1}{2} mv^2,$$

где m — масса бесконечно малой части, v — ее скорость. Если r — расстояние этой части от оси, то скорость $v = r\omega$. Подставив это выражение для v в формулу для T и вынеся $1/2\omega^2$ за скобку (ω одинаково для всех точек тела), мы найдем

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum mr^2 = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Вообще в теории вращательного движения угловая скорость ω играет ту же роль, что обыкновенная скорость v при поступательном движении, а момент инерции J — такую же роль, как и масса в поступательном движении. С моментами инерции плоских фигур приходится также иметь дело в теории изгиба балок. В этой теории при вычислении моментов инерции обычно принимают, что на единицу площади приходится единица массы, так что вместо масс всюду появляются площади.

Пример. Найти момент инерции однородного прямоугольника со сторонами a и b относительно оси, проходящей через центр

тяжести этого прямоугольника и параллельной стороне a . Поверхностная плотность (количество массы, приходящееся на единицу площади) равна единице.

Разобьем прямоугольник прямыми, параллельными оси, на бесконечно малые полоски. Обозначая через r расстояние одной из этих полосок от оси, мы видим, что ширина полоски равна dr , а значит, ее площадь есть $a dr$. Момент инерции этой полоски будет $ar^2 dr$, и, следовательно, момент инерции всего прямоугольника равен

$$J = 2 \int_0^{b/2} ar^2 dr = 2a \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^{b/2} = \frac{ab^3}{12}.$$

§ 5. Некоторые неравенства и теорема о среднем значении. В § 2 мы вывели формулу, выражающую определенный интеграл в виде предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, а именно:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

Пользуясь этой формулой, установим ряд важных неравенств:

1. Если $a < b$ и $f(x) > 0$ для всех значений x в сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx > 0,$$

В самом деле, обозначая через m наименьшее значение функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \geq m \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m(b-a),$$

откуда в пределе получим

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a) > 0,$$

что и нужно.

Из этого неравенства вытекает: если $a < b$ и $f(x) > \varphi(x)$ для всех x в сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b \varphi(x) dx,$$

потому что

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx$$

будет больше нуля на основании предыдущего [по условию $f(x) - \varphi(x) > 0$].

Примечание. Можно доказать более общее предложение, чем только что сформулированное. Предполагая $f(x)$ непрерывной функцией на сегменте $[a, b]$, удовлетворяющей условию $f(x) \geq 0$, мы всегда можем заключить, что

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место лишь в том случае, когда $f(x) \equiv 0$.

Действительно, либо $f(x) \equiv 0$ и тогда $\int_a^b f(x) dx = 0$, либо найдется значение x_0 независимой переменной, при котором $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности будет существовать некоторый сегмент $[c, k]$, содержащий точку x_0 , в котором функция $f(x)$ все время положительна, и, значит, вследствие вышедшего доказательства

$$\int_c^k f(x) dx > 0.$$

Замечаем теперь, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^k f(x) dx + \int_k^b f(x) dx,$$

где

$$\int_a^c f(x) dx \geq 0, \quad \int_c^k f(x) dx > 0, \quad \int_k^b f(x) dx \geq 0.$$

Последние соотношения и доказывают вторую часть нашего утверждения

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Из доказанного предложения вытекает: если $a < b$ и $f(x) \geq \varphi(x)$ для всех x в сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx,$$

причем знак равенства имеет место лишь в том случае, когда

$$f(x) \equiv \varphi(x).$$

В самом деле, на основании предыдущего

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место лишь в случае, когда

$$f(x) - \varphi(x) \equiv 0 \quad \text{или} \quad f(x) \equiv \varphi(x).$$

II. Если $a < b$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Действительно,

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i,$$

откуда в пределе получим

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и, кроме того, $\varphi(x)$ не меняет знака (знакопостоянная) в этом сегменте, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx,$$

где ξ — некоторое число, промежуточное между a и b .

Формула эта и выражает теорему о среднем значении.

Обозначая через M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в сегменте $[a, b]$, будем иметь

$$M \geq f(x) \geq m \quad \text{при} \quad a \leq x \leq b.$$

Мы предположим для определенности $a < b$; кроме того, положим, что $\varphi(x) \geq 0$ для всех x в сегменте $[a, b]$. Тогда из предыдущих неравенств получаем

$$M\varphi(x) \geq f(x)\varphi(x) \geq m\varphi(x)$$

и

$$M \int_a^b \varphi(x) dx \geq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \geq m \int_a^b \varphi(x) dx,$$

если $f(x)$ не есть постоянное (см. примечание выше).

Эти неравенства равносильны равенству

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

где $M > \mu > m$. Но в силу непрерывности функции $f(x)$, наверно существует между a и b такое число ξ , для которого $f(\xi) = \mu$.

Следовательно,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, если $f(x) = \text{const}$, то эта формула очевидна.

Ясно, что формула эта справедлива при $a > b$ и при $\varphi(x) \leq 0$, как видно из самого хода доказательства.

В частности, положив $\varphi(x) = 1$, находим известную уже формулу

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi),$$

где $\xi = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$.

Из последней формулы, выражающей частный случай теоремы о среднем, получаем

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

Этой формуле теорема обязана своим названием. Дело в том, что частное от деления определенного интеграла на длину промежутка интегрирования ($b > a$) называется средним значением подынтегральной функции на промежутке интегрирования, подобно тому как частное от деления суммы нескольких чисел на их число называется средним арифметическим этих чисел. Тогда последнее равенство можно сформулировать так: *среднее значение функции на сегменте $[a, b]$ равно одному из значений этой функции на этом сегменте.*

Отсюда и название теоремы.

§ 6. Преобразование переменной. Пусть $I = \int_a^b f(x) dx$ и $x = \varphi(t)$,

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция на сегменте $[\alpha, \beta]$, имеющая непрерывную производную на том же сегменте. Предположим, что $\varphi'(t)$ не меняет знака (законопостоянная) в этом сегменте и, сверх того, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда при изменении t от α до β в одном направлении, $x = \varphi(t)$ изменяется от a до b также в одном направлении, т. е. что $\varphi(t)$ — функция монотонная. Действительно, по формуле Лагранжа $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = (t_1 - t_2) \varphi'(\xi)$, где $t_1 > \xi > t_2$; так как $\varphi'(\xi)$ либо ≥ 0 , либо ≤ 0 , то в первом случае $\varphi(t_1) \geq \varphi(t_2)$, во втором $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$, каковы бы ни были значения $t_1 > t_2$ из сегмента $[\alpha, \beta]$.

В первом случае $\varphi(t)$ будет неубывающей функцией в сегменте $[\alpha, \beta]$, во втором — невозрастающей; в том и другом случае мы называем ее монотонной на этом сегменте. При этих условиях

$f[\varphi(t)]$ будет непрерывной функцией на сегменте $[\alpha, \beta]$, потому что при изменении t от α до β значения $\varphi(t)$ будут все время принадлежать сегменту $[a, b]$, на котором $f(x)$ по условию непрерывна.

Наша задача заключается в том, чтобы установить формулу преобразования определенного интеграла при введении новой переменной

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим две функции переменной t , определенные на сегменте $[\alpha, \beta]$, а именно:

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Сравним между собой их производные.

При определении производной от первой функции применим правило дифференцирования сложной функции и получим $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$; производную второй функции мы найдем, дифференцируя интеграл по верхнему пределу, что нам даст также $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$. Итак, рассматриваемые функции имеют одинаковые производные на всем сегменте $[\alpha, \beta]$, а потому сами функции могут отличаться лишь на постоянную, т. е.

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x) dx = \int_\alpha^t f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt + C.$$

Для определения C положим, в частности, $t = \alpha$; тогда найдем, вспомнив, что $\varphi(\alpha) = a$,

$$0 = 0 + C, \quad \text{откуда} \quad C = 0.$$

Следовательно, можем написать

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x) dx = \int_\alpha^t f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

откуда при $t = \beta$, вспомнив, что $\varphi(\beta) = b$, получим окончательно

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

что и нужно.

Примечание. Приведенный вывод остается в силе, и, следовательно, формула (1), преобразования переменной в определенном интеграле, будет справедливой и в том случае, когда $\varphi'(t)$ меняет знак при изменении t от α до β , лишь бы только функция $f[\varphi(t)]$ была непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Применяя формулу (1), надо всегда иметь в виду, что она может привести к неверному результату, если не будут соблюдены сформулированные выше условия ее применимости.

Положим, например, что для вычисления интеграла

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (2)$$

($a > 0$ и $b > 0$) мы вводим новую переменную $t = \operatorname{tg} x$, тогда

$$\frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}.$$

Согласно формуле $t = \operatorname{tg} x$, имеем при $x = 0$, $t = 0$; при $x = \pi$, $t = 0$.

Буквальное применение формулы (1) привело бы к нелепому результату

$$I = \int_0^0 \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = 0,$$

между тем как все элементы в интеграле (2) положительны, и интеграл не может быть равен нулю. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что при изменении x от 0 до π , при переходе x через $\frac{\pi}{2}$, переменная $t = \operatorname{tg} x$ имеет разрыв непрерывности.

Чтобы получить верный результат, надо представить I в виде

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x},$$

потому что второй интеграл, очевидно, равен первому (что можно также обнаружить, положив во втором интеграле $x = \pi - y$).

Возьмем теперь

$$\int_0^l \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x},$$

где

$$0 < l < \frac{\pi}{2},$$

и положим $t = \operatorname{tg} x$; мы найдем

$$\int_0^l \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\operatorname{tg} l} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{ab} \left[\operatorname{arctg} \frac{bt}{a} \right]_0^{\operatorname{tg} l} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left[\frac{b}{a} \operatorname{tg} l \right].$$

Здесь формула замены переменной приложима, потому что $\operatorname{tg} x$ имеет производную $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ при изменении x от 0 до $l < \frac{\pi}{2}$.

Чтобы получить I , заметим, что

$$I = 2 \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{2}{ab} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{b}{a} \operatorname{tg} t \right] = \frac{2}{ab} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{ab}. \quad (3)$$

Заметим следующее преобразование интеграла, имеющего пределы, равные по величине и противоположные по знаку:

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

Положив во втором интеграле $x = -t$, мы найдем

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \quad (4)$$

Как следствие из формулы (4) вытекает, что если $f(x)$ — *нечетная* функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0,$$

а если $f(x)$ — *четная* функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

§ 7. Интегрирование по частям: Предполагая, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[a, b]$, из формулы

$$\frac{d}{dx} [\varphi(x)f(x)] = \varphi(x)f'(x) + f(x)\varphi'(x)$$

получаем

$$\int_a^b \varphi(x)f'(x) dx + \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = [\varphi(x)f(x)]_a^b,$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)f'(x) dx,$$

где символ $[f(x)\varphi(x)]_a^b$ обозначает разность $f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$.

Приложение формулы интегрирования по частям к частным примерам. Найдем

$$U_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx,$$

где m — целое положительное число. При $m=0$, $U_0 = \frac{\pi}{2}$; при $m=1$

$$U_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1;$$

при $m > 1$

$$U_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \sin x dx = [-\cos x \sin^{m-1} x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (m-1) \sin^{m-2} x \cos^2 x dx;$$

замечая, что при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$, $\cos x \sin^{m-1} x = 0$, находим

$$U_m = (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (m-1) U_{m-2} - (m-1) U_m,$$

откуда

$$U_m = \frac{m-1}{m} U_{m-2}. \quad (1)$$

Заменяя m последовательно числами $2n$, $2n-2$, ..., 2, из формулы (1) мы получим

$$U_{2n} = \frac{2n-1}{2n} U_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} U_{2n-4} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} U_0,$$

т. е.

$$U_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Заменяя в (1) число m последовательно числами $2n+1$, $2n-1$, ..., 3, мы получим

$$U_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)(2n+1)} U_1.$$

Так как U_1 равно единице, то мы получаем

$$U_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)(2n+1)}. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) вытекает формула Валлиса, изображающая число $\frac{\pi}{2}$ в виде бесконечного произведения. Из (2) и (3) находим

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} = \frac{[3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2} \frac{\pi}{2},$$

или

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)} \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}.$$

Замечая, что

$$U_n - U_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^n x (1 - \sin x) dx > 0,$$

потому что все элементы интеграла больше нуля, находим отсюда

$$U_{2n-1} > U_{2n} > U_{2n+1};$$

следовательно,

$$\frac{U_{2n-1}}{U_{2n+1}} > \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} > 1,$$

но по формуле (1)

$$\frac{U_{2n-1}}{U_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n},$$

поэтому

$$\frac{2n+1}{2n} > \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} > 1.$$

Отсюда видно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} \right] = 1$; следовательно,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)} \right]$$

— формула Валлиса.

Найдя значение какого-нибудь интеграла, можем с помощью преобразования переменной вывести из него значения бесчисленного

множества других. Полагая в формуле $U_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx$, $x = \frac{\pi}{2} - y$,

найдем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = - \int_{\pi/2}^0 \cos^m y dy = \int_0^{\pi/2} \cos^m y dy = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx.$$

Давая показателю m различные значения, мы получаем

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)},$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

§ 8. Квадратура областей. I. Площадь области U , ограниченной осью абсцисс, дугой кривой линии $y=f(x)$ и двумя ординатами, соответствующими абсциссам a и $b > a$, вычисляется, как

известно, при помощи формулы

$$U = \int_a^b y dx, \quad b > a.$$

При этом предполагается, что $y > 0$ для всех значений x между пределами интегрирования.

II. Площадь сектора OAB , ограниченного дугой кривой AB и двумя радиусами-векторами OA и OB , также вычисляется при помощи интегрирования. Положим, что уравнение кривой AB в полярных координатах есть

$$\rho = f(\theta).$$

Обозначим через α и $\beta > \alpha$ углы, образованные радиусами-векторами OA и OB с полярной осью Ox (чертеж 11).

Для определения площади сектора OAB разобьем его на n частей, при помощи лучей $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_{n-1}$, где $\theta_0 = \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \beta = \theta_n$.

Рассмотрим один из малых секторов $OP_i P_{i+1}$ и, не изменяя величины $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ его центрального угла, заменим дугу $P_i P_{i+1}$ дугой окружности радиуса $OP_i = f(\theta_i)$. Таким образом вместо сектора $OP_i P_{i+1}$ мы берем круговой сектор $OP_i Q_{i+1}$, площадь которого равна $\frac{1}{2} f^2(\theta_i) \Delta\theta_i$.

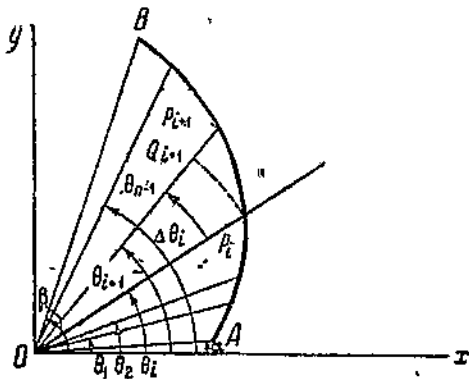
Образуем теперь сумму площадей всех круговых секторов $OP_i Q_{i+1}$, давая i значения $0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\theta_i) \Delta\theta_i.$$

Заставляя, наконец, все $\Delta\theta_i$ стремиться к нулю, мы видим, что, согласно основной теореме интегрального исчисления, сумма S_n стремится к вполне определенному пределу, равному

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

С другой стороны, по определению предел суммы площадей построенных круговых секторов мы принимаем за площадь сектора



Черт. 11.

ОАВ. Итак,

$$\text{пл. } OAB = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\theta_i) \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Формула

$$\text{пл. } OAB = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta, \quad \text{где } \rho = f(\theta),$$

служит для вычисления площади криволинейного сектора.

Беря вместо точки B переменную точку M на кривой и обозначая через θ ее полярный угол, мы получим

$$\text{пл. } OAM = u = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\theta} \rho^2 d\theta,$$

откуда

$$du = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta.$$

Замечание. Если обозначим через x и y прямоугольные координаты точки M относительно осей Ox и $Oy \perp Ox$, то $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$; откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x}, \quad d \operatorname{tg} \theta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{x dy - y dx}{x^2}, \quad du = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^2}{\cos^2 \theta} d\theta; \end{aligned}$$

следовательно,

$$du = \frac{1}{2} (x dy - y dx).$$

Так выражается дифференциал сектора AOM в прямоугольных координатах точки M .

Приложим общие формулы к некоторым частным примерам.

А. Параболы. Пусть уравнение кривой OM есть $y^m = ax^n$, где m и n — положительные числа. Такие кривые называются *параболами* (черт. 12).

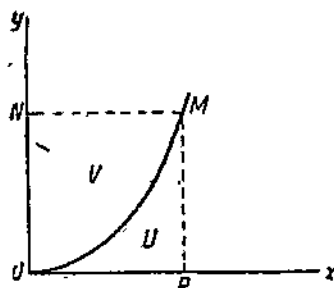
$$\text{Пл. } OMP = u = \int_0^x y dx = a^{\frac{1}{m}} \int_0^x x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} = \frac{a^{\frac{1}{m}} m x^{\frac{n+m}{m}}}{n+m},$$

или

$$u = \frac{m}{n+m} x a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} = \frac{m}{n+m} xy = \frac{m}{n+m} OP \cdot PM = \frac{m}{n+m} S,$$

где S = пл. прямоугольника $OPMN$; отсюда

$$v = \text{пл. } ONM = S - u = \frac{n}{m+n} S.$$



Черт. 12.

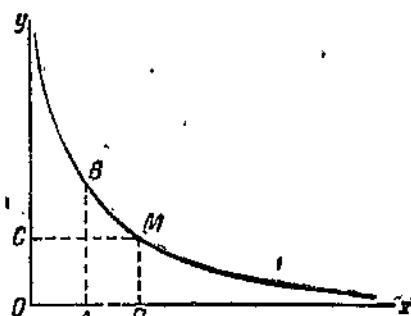
Следовательно, $\frac{v}{u} = \frac{n}{m}$, т. е. кривая OM делит площадь прямоугольника $OPMN$ на части, пропорциональные числам m и n .

Для обыкновенной параболы

$$m=1, \quad n=2, \quad u=\frac{1}{3}S, \quad v=\frac{2}{3}S, \quad v=2u.$$

В. Гиперболы (черт. 13). Пусть уравнение кривой BM есть $y^m x^n = a$, где m и n — положительные числа. Такие кривые называются *гиперболами*.

$$\begin{aligned} \text{Пл. } ABMP &= u = \int_{x_0}^x y \, dx = \\ &= a^{\frac{1}{m}} \int_{x_0}^x x^{-\frac{n}{m}} \, dx, \end{aligned}$$



Черт. 13.

где $x_0 = OA$.

Интегрируя, находим при $m \neq n$:

$$u = a^{\frac{1}{m}} \left\{ \frac{x^{-\frac{n}{m}+1} - x_0^{-\frac{n}{m}+1}}{-\frac{n}{m}+1} \right\} = \frac{m}{m-n} a^{\frac{1}{m}} \left(x^{\frac{m-n}{m}} - x_0^{\frac{m-n}{m}} \right).$$

При $m=n=1$ получим уравнение кривой в виде $xu = k^2$, где $k^2 = a^{\frac{1}{m}}$.

Это будет обыкновенная равнобочная гипербола, отнесенная к асимптотам, и для нее

$$u = k^2 \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = k^2 \ln \frac{x}{x_0}.$$

При $k=1$ и $x_0=1$ уравнение кривой будет

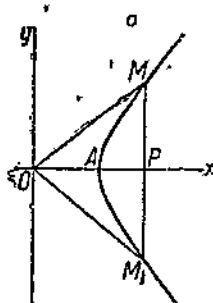
$$xu = 1 \quad \text{и} \quad u = \ln x.$$

В общем случае, при $m > n$, с приближением x_0 к нулю, u стремится к пределу, равному

$$\frac{m}{m-n} a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} xu,$$

т. е. с приближением точки A к нулю площадь $ABMP$ стремится к пределу, равному площади прямоугольника $OSMP$, умноженной на $\frac{m}{m-n}$. С увеличением же x до бесконечности, т. е. с удалением

точки P в бесконечность, ордината $y = \sqrt[m]{\frac{a}{x^n}}$ стремится к нулю, а площадь u , как видно из формулы, растет неограниченно.



Черт. 14.

Если возьмем обыкновенную гиперболу, т. е. гиперболу второй степени (черт. 14), и отнесем ее к центру и осям

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то для площади AMP будем иметь формулу

$$u = \int_a^x y \, dx = \int_a^x \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \, dx,$$

где $a = OA$, $x = OP$. Интегрируя, мы находим

$$\begin{aligned} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + a^2 \ln a] = \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл, выражающий искомую площадь, будет

$$u = \frac{1}{2} \frac{bx}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} ab \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Отсюда имеем

$$2u = xy - ab \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Замечая, что xy равно площади треугольника $OMPM_1$, и обозначая через z площадь гиперболического сектора $OMAM_1$, получим

$$z = ab \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Для равносторонней гиперболы, $x^2 - y^2 = a^2$:

$$b = a, \quad z = a^2 \ln \frac{x + y}{a}.$$

Из этой формулы легко получить выражения координат x и y точки M в функциях от z , а именно, имея

$$z = a^2 \ln \frac{x + y}{a}, \quad -z = a^2 \ln \frac{a}{x + y} = a^2 \ln \frac{x - y}{a},$$

так как $x + y = \frac{a^2}{x - y}$, находим

$$\frac{x + y}{a} = e^{\frac{z}{a^2}}, \quad \frac{x - y}{a} = e^{-\frac{z}{a^2}},$$

$$x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a^2}} + e^{-\frac{z}{a^2}} \right), \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a^2}} - e^{-\frac{z}{a^2}} \right).$$

Полагая $a = 1$, последние формулы мы можем записать в следующем виде:

$$x = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z, \quad y = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z.$$

С. *Эллипс* (см. черт. 15). Уравнение эллипса, отнесенное к центру и осям, есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\text{Пл. } OBM P = u = \int_0^x y dx =$$

$$= \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

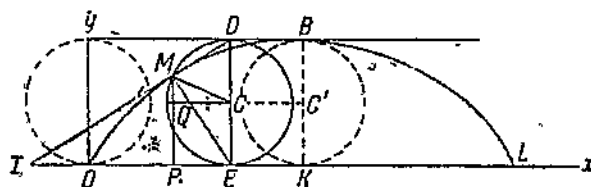
интегрируя, находим

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

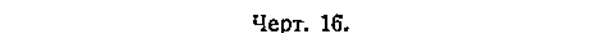
$$u = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \left\{ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right\}.$$

При $x = a = OA$ получим

$$\text{пл. } OBA = \frac{1}{4} \text{ пл. эллипса} = \frac{1}{2} \frac{b}{a} a^2 \arcsin 1 = \frac{\pi ab}{4}.$$



Черт. 15.



Черт. 16.

Следовательно, площадь всего эллипса равна πab , или равна произведению его полуосей, умноженному на π .

Д. *Циклоида*. Если OM есть дуга циклоиды, то для точки M мы будем иметь (черт. 16)

$$OP = x = a(t - \sin t),$$

$$MP = y = a(1 - \cos t),$$

где a — радиус катящегося круга, а t — угол MCE , изменяющийся от нуля до 2π , когда точка M движется от O до L .

$$\text{Пл. } OPM = u = \int_0^x y dx.$$

Выражая x и y через t , получим

$$y dx = a^2 (1 - \cos t)^2 dt;$$

при $x=0$, $t=0$ и, следовательно,

$$u = a^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2 dt,$$

где верхний предел есть значение t в точке M . Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \int_0^t (1 - \cos t)^2 dt &= \int_0^t (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\cos t \sin t}{2}, \\ u &= a^2 \left\{ \frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{\cos t \sin t}{2} \right\}; \end{aligned}$$

полагая здесь $t=2\pi$, мы окончательно получим искомую площадь:

$$\text{пл. } OBL = 3\pi a^2,$$

т. е. площадь, ограниченная целой ветвью циклоиды и соответствующей частью прямой, по которой катится производящий круг, равна утроенной площади этого круга (теорема Галилея),

Е. Площадь эллиптического сектора (черт. 17). Вычислим площадь сектора FMA , ограниченного дугой эллипса, большей его осью и радиусом-вектором FM , входящим из фокуса эллипса. Если обозначим через a и b полуоси эллипса, построим окружность круга радиуса a из O как центра и, заметив точку N , в которой ордината MP пересекает эту окружность, соединим N и O , то увидим, что

$$\text{пл. } FMA = \frac{b}{a} \text{ пл. } FNA.$$

Черт. 17.

В самом деле, полагая $OP=x$, $PM=y$, $PN=Y$, имеем

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad Y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{b}{a} Y;$$

$$\text{пл. } PMA = \int_x^a y dx, \quad \text{пл. } PNA = \int_x^a Y dx.$$

Следовательно, пл. $PMA = \frac{b}{a}$ пл. PNA , пл. $\triangle FMP = \frac{a}{a}$ пл. $\triangle FNP$, откуда и находим

$$\text{пл. } FMA = \frac{b}{a} \text{ пл. } FNA.$$

Замечая еще, что

$$\text{пл. } FNA = \text{пл. } ONA - \text{пл. } \triangle ONF = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} OF \cdot ON \sin u,$$

где $OF = ae$ (e — эксцентриситет), $ON = a$, $u = \angle NOX$, находим

$$\text{пл. } FMA = \frac{ab}{2} (u - e \sin u).$$

Е. Цепная линия. Уравнение цепной линии

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right). \quad (1)$$

При $x = 0$, $y = a = OA$ (черт. 18). Площадь области $OAMP$ вычислится, как и раньше, по неоднократно применявшейся формуле

$$S = \int_0^x y dx = \\ = \frac{a^2}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

где $x = OP$. Легко проверить, что

$$\frac{a(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})}{2} = \sqrt{y^2 - a^2},$$

так что для искомой площади получаем следующее выражение:

$$S = a \sqrt{y^2 - a^2}.$$

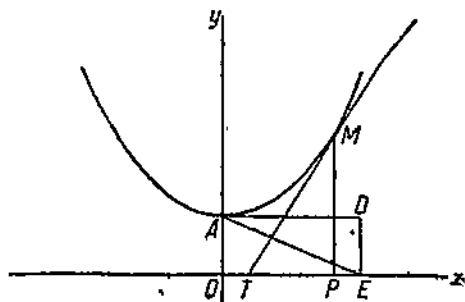
Построив $AE = MP = y$, будем иметь

$$OE = \sqrt{y^2 - a^2};$$

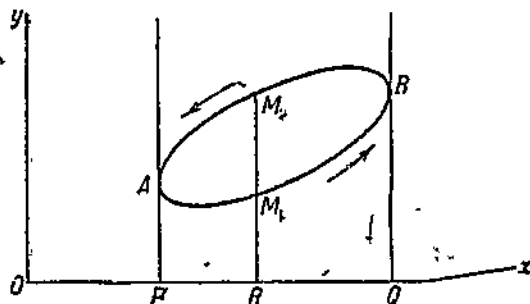
следовательно,

$$S = \text{пл. } OAMP = \text{пл. прямоугольника } OADE.$$

Г. Площадь области, ограниченной замкнутой кривой. Рассмотрим площадь области, ограниченной замкнутой кривой AM_1BM_2A (черт. 19), о которой предположим, что она пересекается с прямыми данного направления не более чем в двух точках: такую кривую будем называть *простым контуром*.



Черт. 18.



Черт. 19.

Отнесем кривую к прямоугольной системе осей Ox и Oy , причем Oy возьмем параллельной упомянутому направлению. Проведем касательные AP и BQ к данной кривой, параллельные Oy , и положим $OP=a$, $OQ=b$, $b > a$. Каждому значению x в сегменте $[a, b]$, $x=OR$, соответствуют два значения $y=RM_1$ и $y=RM_2$, которые мы обозначим соответственно через y_1 и y_2 . Эти величины y_1 и y_2 будут функциями от x , причем при $x=a$ и $x=b$, $y_1=y_2$, а при $a < x < b$, $y_2 > y_1$.

$$\text{Пл. сегмента } PAM_2BQ = \int_a^b y_2 dx, \text{ пл. сегмента } PAM_1BQ = \int_a^b y_1 dx,$$

а площадь S , ограниченная данной кривой, очевидно, равна разности этих двух площадей.

Таким образом для площади, ограниченной замкнутой кривой, получаем

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx. \quad (2)$$

(Мы предполагаем, что ось Ox выбрана так, что y_1 и $y_2 > 0$.) Выражения y_1 и y_2 найдем из уравнения данной кривой $f(x, y) = 0$, решив его относительно y , а числа a и b — абсциссы точек кривой, в которых касательные параллельны Oy , — очевидно, найдутся, если решим систему уравнений $f(x, y) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, из которых второе выражает, что угловой коэффициент касательной $y' = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$ обращается в бесконечность. Указанный способ представляет то неудобство, что требует решения уравнений и может привести к сложным выкладкам. Мы укажем другое выражение площади S , важное как в практическом, так и в теоретическом отношениях.

Пусть замкнутая кривая C , ограничивающая область D , площадь которой нужно найти, задана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции от t на сегменте $[t_0, T]$, имеющие на этом сегменте непрерывные производные. Кроме того, мы предполагаем:

1) при возрастании t от t_0 до T точка $[\varphi(t), \psi(t)]$ опишет нашу кривую только один раз и при том в положительном направлении, т. е. так, что область D , ограниченная кривой, лежит влево относительно направления движения;

2) производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ обращаются в нуль лишь конечное число раз.

Это означает, что разным значениям t соответствуют разные точки кривой C , кроме значений t_0 и T , для которых имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \varphi(T), \\ \psi(t_0) &= \psi(T). \end{aligned}$$

Сверх того, кривую C можно, очевидно, разбить на конечное число таких дуг, что $\varphi'(t)$ не меняет знака вдоль каждой из них. Другими словами, абсцисса $\varphi(t)$ меняется *монотонно* вдоль каждой из этих дуг. Аналогичные выводы можно сделать и насчет ординаты $\psi(t)$. Прежде определения площади D , разберем 2 вспомогательных задачи.

Задача I. Найти площадь области Δ , ограниченной осью x -ов, прямыми $x=a$ и $x=b$ ($b > a$) и кривой AB , заданной параметрически:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t),\end{aligned}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$, а $\psi(t)$ и $\varphi'(t)$, кроме того, положительны на интервале (α, β) , причем значения $\varphi(t)$ на концах сегмента $[\alpha, \beta]$ будут абсциссами начала и конца дуги AB .

Очевидно,

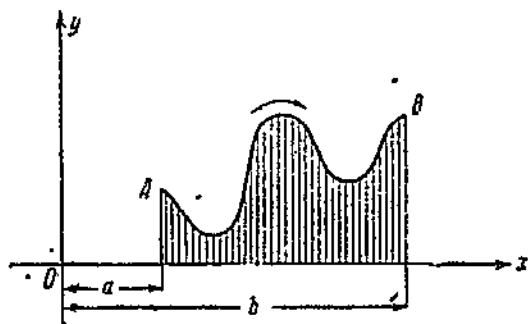
$$\varphi(\alpha) = a,$$

$$\varphi(\beta) = b,$$

а при возрастании t от α до β абсцисса $\varphi(t)$ растет от a до b (черт. 20).

На основании начала этого параграфа

$$\text{пл. } \Delta = \int_a^b y \, dx.$$



Черт. 20.

Так как $x = \varphi(t)$ растет от a до b с возрастанием t от α до β , то можно сделать в предыдущем интеграле замену переменных, введя вместо x переменную t . Тогда получим

$$\text{пл. } \Delta = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) \, dt.$$

Задача II. Найти площадь области Δ , ограниченной осью x -ов, прямыми $x=a$ и $x=b$ ($b > a$) и кривой AB , заданной параметрически:

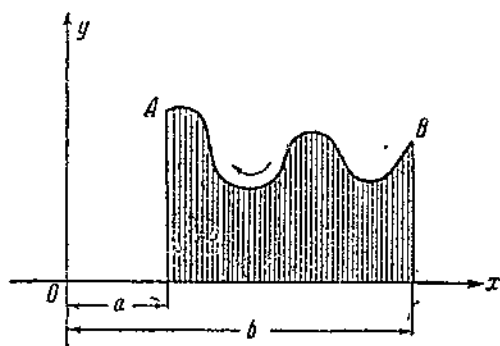
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$; $\psi(t)$ положительна на интервале (α, β) , а $\varphi'(t)$ отрицательна на этом же интервале, причем значения $\varphi(t)$ на концах сегмента $[\alpha, \beta]$ будут абсциссами начала и конца дуги AB .

Очевидно

$$\varphi(\alpha) = b,$$

$$\varphi(\beta) = a,$$



Черт. 21.

и при возрастании t от α до β абсцисса $\varphi(t)$ убывает от b до a (черт. 21).

На основании решения задачи I имеем

$$\text{пл. } \Delta = \int_{\beta}^{\alpha} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

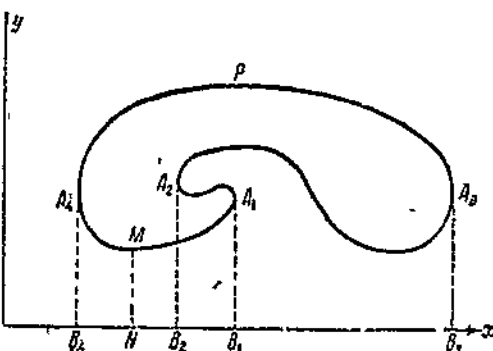
Отсюда получаем, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt = \pm \text{пл. } \Delta,$$

причем знак плюс берется тогда, когда параметр t и абсцисса x меняются в одном и том же направлении, а в противном случае берется знак минус.

Теперь рассмотрим нашу задачу, считая, что область D лежит над осью x -ов. Для определенности возьмем контур, указанный на чертеже (черт. 22).

Пусть точка M соответствует значениям параметра t_0 и T , а контур C разбит на дуги MA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4M , вдоль которых абсцисса $\varphi(t)$ меняется монотонно. Значения параметра t , соответствующие точкам



Черт. 22.

кам A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , будут некоторые числа t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , удовлетворяющие неравенствам

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T.$$

Пользуясь решением вспомогательных задач, найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt = \text{пл. } NMA_1B_1,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt = -\text{пл. } B_2A_2A_1B_1,$$

$$\int_{t_2}^{t_3} \psi(t) \varphi'(t) dt = \text{пл. } B_2A_2A_3B_3,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt = - \text{пл. } B_4 A_4 P A_3 B_3,$$

$$\int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt = \text{пл. } B_4 A_4 M N.$$

Складывая эти равенства почленно, получим в левой части интеграл

$$\int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

а в правой окажется искомая площадь области D , взятая со знаком минус. Отсюда выводим

$$\text{пл. обл. } D = - \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Если область D лежит полностью или частично под осью x -ов, то переносом начала координат можно привести этот случай к предыдущему. Пусть формулы преобразования таковы:

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= y_1 + b. \end{aligned}$$

Тогда новые уравнения кривой C будут

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(t) = \varphi_1(t), \\ y_1 &= \psi(t) - b = \psi_1(t). \end{aligned}$$

Пользуясь этими уравнениями, найдем

$$\begin{aligned} \text{пл. } D &= - \int_{t_0}^T [\psi(t) - b] \varphi'(t) dt = - \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt + \int_{t_0}^T b \varphi'(t) dt = \\ &= - \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt + b [\varphi(t)]_{t_0}^T = - \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt + \\ &\quad + b [\varphi(T) - \varphi(t_0)] = - \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt, \end{aligned}$$

так как $\varphi(T) = \varphi(t_0)$.

Значит, и в этом случае

$$\text{пл. } D = - \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Таким же образом найдем вторую формулу:

$$\text{пл. } D = + \int_{t_0}^T \varphi(t) \psi'(t) dt. \quad (5)$$

Складывая почленно 2 последних равенства и деля на 2, будем иметь

$$\text{пл. } D = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\varphi(t) \psi'(t) - \psi(t) \varphi'(t)] dt. \quad (6)$$

Все эти формулы выведены в предположении, что при возрастании t от t_0 до T соответствующая точка движется так, что область D остается слева. В противном случае эти формулы дадут площадь, взятую со знаком минус.

Чтобы показать, какое упрощение дает формула (6), применим ее к вычислению площади эллипса с полуосями a и b . Мы можем положить $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, и обойдем весь эллипс в положительном направлении, если заставим t пройти все значения от $t = 0$ до $t = 2\pi$. Площадь эллипса

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab. \end{aligned}$$

§ 9. Спрямление дуг. Вычисление длины дуги кривой линии, заданной аналитически, приводится так же как и определение площадей, к вычислению интегралов.

Всюкую кривую линию можно аналитически задавать системой трех уравнений:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (1)$$

дающих выражения декартовых (прямоугольных) координат каждой ее точки в функциях от одной независимой переменной. Каждому значению t соответствует определенная точка на кривой. Когда t изменяется от $t = t_0$ до $t = T$, то точка (x, y, z) описывает некоторую дугу AM данной кривой.

Возьмем на этой дуге ряд достаточно близких точек, соответствующих значениям $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = T$; t_0 соответствует точке A , T — точке M , причем предполагаем, что $T > t_0$, а числа $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ идут в возрастающем порядке.

То направление, в котором точка (x, y, z) описывает кривую линию при возрастании t , будем называть *положительным направлением* на кривой.

Соединив полученные точки последовательно отрезками прямых, получим некоторую ломаную линию, вписанную в дугу AM .

Длиной дуги AM называется предел, к которому стремится сумма длин сторон этой ломаной (периметр ломаной), когда максимум длин сторон неограниченно приближается к нулю. Этот предел, как сейчас увидим, выражается некоторым определенным интегралом.

Напишем выражение c_i для длины стороны ломаной, лежащей между точками t_i и t_{i+1} , где $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Мы получим

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} = \\ = \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2 + [\chi(t_{i+1}) - \chi(t_i)]^2}.$$

Применяя формулу Лагранжа, можем написать

$$\begin{aligned} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) &= (t_{i+1} - t_i) \varphi'(\theta_1), \\ \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) &= (t_{i+1} - t_i) \psi'(\theta_2), \\ \chi(t_{i+1}) - \chi(t_i) &= (t_{i+1} - t_i) \chi'(\theta_3), \end{aligned}$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — числа, лежащие в интервале (t_i, t_{i+1}) . Согласно этим выражениям c_i примет вид

$$c_i = (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\varphi'(\theta_1)^2 + \psi'(\theta_2)^2 + \chi'(\theta_3)^2}.$$

Это же выражение можно переписать так:

$$c_i = (t_{i+1} - t_i) \{ \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2 + \chi'(t_i)^2} + \Delta_i \},$$

где

$$\Delta_i = \sqrt{\varphi'(\theta_1)^2 + \psi'(\theta_2)^2 + \chi'(\theta_3)^2} - \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2 + \chi'(t_i)^2}.$$

Надо показать, что, при достаточно малых значениях $(t_{i+1} - t_i)$, $|\Delta_i|$ будет меньше любого заранее заданного положительного числа. Для этого мы воспользуемся следующей простой леммой:

ЛЕММА. Условившись обозначать, через $\sum a_k$ сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ любого числа чисел a_k , будем иметь неравенство

$$|\sqrt{\sum a_k^2} - \sqrt{\sum b_k^2}| < \sum |a_k - b_k|, \quad (2)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_m$ и $b_1, b_2, \dots, b_m$ обозначают две какие угодно системы действительных чисел.

Доказательство. Напишем тождество

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum a_k^2} - \sqrt{\sum b_k^2} &= \frac{\sum a_k^2 - \sum b_k^2}{\sqrt{\sum a_k^2} + \sqrt{\sum b_k^2}} = \\ &= \frac{a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + \dots + a_m^2 - b_m^2}{\sqrt{\sum a_k^2} + \sqrt{\sum b_k^2}} = \sum (a_k - b_k) \frac{a_k + b_k}{\sqrt{\sum a_k^2} + \sqrt{\sum b_k^2}}. \end{aligned}$$

Второй множитель

$$\frac{a_k + b_k}{\sqrt{\sum a_k^2} + \sqrt{\sum b_k^2}},$$

очевидно, меньше единицы по абсолютной величине. Следовательно,

$$|\sqrt{\sum a_k^2} - \sqrt{\sum b_k^2}| < \sum |a_k - b_k|,$$

что и требовалось доказать.

Применяя эту лемму к выражению Δ_i , мы получим

$$|\Delta_i| < |\varphi'(0_1) - \varphi'(t_i)| + |\psi'(0_2) - \psi'(t_i)| + |\chi'(0_3) - \chi'(t_i)|.$$

В силу предположенной равномерной непрерывности функций φ' , ψ' , χ' , при достаточно малых значениях разности $|t_{i+1} - t_i|$ каждое слагаемое в правой части будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, где ε — любое заранее заданное положительное число, а потому и получим, что $|\Delta_i| < \varepsilon$, каково бы ни было i , что мы и желали показать.

Суммируя выражение c_i от $i=0$ до $i=n-1$, находим

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\varphi'(t_i)^2 + \psi'(t_i)^2 + \chi'(t_i)^2} + \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \Delta_i.$$

Второе слагаемое, при достаточно малых $t_{i+1} - t_i$, будет меньше (по абсолютной величине) числа

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| = \varepsilon |T - t_0|$$

и будет иметь пределом нуль, а первое слагаемое, как известно, имеет пределом определенный интеграл

$$\int_{t_0}^T \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt,$$

который и выражает собой $\lim \sum_{i=0}^{n-1} c_i$, т. е. предел суммы сторон нашей ломаной.

Поэтому, обозначая длину дуги AM через s , по определению мы будем иметь

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt = \int_{t_0}^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt, \quad (3)$$

где x , y , z — данные функции от t , определяющие данную кривую.

Будем рассматривать теперь число t_0 как постоянное, т. е. точку A как неподвижную точку на кривой, а T как число переменное, т. е. точку M как точку, передвигающуюся по данной кривой. Сообразно этому заменим букву T в верхнем пределе интеграла буквой t . В этом случае длина *переменной* дуги AM будет функцией от t и будет изображаться формулой

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (4)$$

Производная этой функции s будет

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad (5)$$

а дифференциал

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (6)$$

где (x, y, z) означают координаты переменного конца дуги.

Следовательно, дифференциал длины дуги кривой равен корню квадратному из суммы квадратов дифференциалов декартовых (прямоугольных) координат переменного конца дуги.

Для примера положим, что дана линия, изображаемая уравнениями

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = kt, \quad (7)$$

где a и k — постоянные (эта линия называется винтовой; подробнее о ней см. Диф. исч., ч. II, гл. IV). По формуле (6) найдем

$$ds = \sqrt{a^2 + k^2} dt,$$

и если начало дуги взято в точке, в которой $t=0$, т. е. в начале координат, то

$$s = \sqrt{a^2 + k^2} \cdot t.$$

Для плоской кривой (в плоскости $z=0$) мы имеем формулу

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (8)$$

Если плоская кривая задана уравнением $y=f(x)$, то

$$dy = f'(x) dx = y' dx, \quad ds^2 = (1 + y'^2) dx^2,$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad s = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где x_0 — абсцисса точки, от которой отсчитываем дуги, т. е. в которой $s=0$.

В полярных координатах (ρ, θ) на плоскости, по формулам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

получим

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta,$$

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta^2,$$

предполагая, что ρ выражено через θ из уравнения кривой; следовательно,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2} d\theta, \quad s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2} d\theta,$$

где θ_0 соответствует началу дуги.

Для примера вычислим длину дуги кривой, заданной уравнениями

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

(a — постоянное больше нуля), от точки $t=0$ ($x=0, y=0$) до какой-нибудь точки $t < 2\pi$, считая при этом дугу возрастающей

вместе с t (эта кривая называется *циклоидой*; подробнее о ней см. Диф. исч., ч. I, гл. IV). Из данных уравнений имеем

$$dx = a(1 - \cos t) dt, \quad dy = a \sin t dt, \\ ds^2 = 2a^2(1 - \cos t) dt^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} dt^2,$$

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt, \quad s = 2a \int_0^t \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Длина дуги s_1 между точками $t=0$ и $t=2\pi$ ($x=2a\pi$, $y=0$), т. е. между двумя последовательными точками пересечения циклоиды с осью x -ов, равна

$$s_1 = 4a(1 - \cos \pi) = 8a.$$

С помощью полученного выражения для дифференциала дуги легко доказать следующую теорему:

Предел отношения длины бесконечно малой дуги с постоянным началом к длине стягивающей ее хорды равен единице (иными словами, длина бесконечно малой дуги с постоянным началом и длина стягивающей ее хорды эквивалентны).

В самом деле, абсолютное значение длины дуги между точками $M(x, y, z)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ можно рассматривать как *положительное* приращение Δs переменной длины дуги AM , соответствующее *положительному* приращению Δt переменной t . Длина хорды c , стягивающей дугу MM_1 , равна $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; следовательно,

$$\frac{\text{дуга } MM_1}{\text{хорда } MM_1} = \frac{\Delta s}{c} = \frac{\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}},$$

откуда

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = 1.$$

Вычисление длины дуги кривой линии между двумя данными точками (спрямление дуги) приводится к вычислению функции s по ее данному дифференциалу, пользуясь выведенными уже раньше выражениями дифференциала дуги. Приложим эти выражения к некоторым примерам.

Примеры

$$1. \text{ Парабола } y^2 = 2px, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy.$$

Длина дуги, считаемой от вершины ($y=0$) по данной точки с ординатой y определяется формулой

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{p^2 + y^2} dy.$$

Выполняя интегрирование, найдем

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{p} \sqrt{y^2 + p^2} + p \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \right).$$

2. Логарифмическая кривая $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

Положив $x = a \ln \operatorname{tg} t$, найдем $y = a \operatorname{tg} t$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a dt}{\cos^2 t \sin t},$$

$$s = a \int \frac{\operatorname{tg} t}{\sin t} = \frac{a}{\cos t} + a \int \frac{dt}{\sin t} = a \left(\sec t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + C.$$

3. Эллипс с полуосями a и $b = a\sqrt{1-k^2}$, где k — эксцентриситет. Положив $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, найдем для вычисления $\frac{1}{4}$ всего обвода эллипса выражение

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \cdot dt = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \cdot dt.$$

Разлагая подынтегральную функцию в ряд, интегрируя и принимая во внимание формулу

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \cdot dt = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n},$$

которая выводится интегрированием по частям (см. гл. IV, § 7), получим

$$s = a \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} k \right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^2 \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^3 \right)^2 - \dots \right\}.$$

4. Кардиоида. Уравнение ее в полярных координатах (черт. 23)

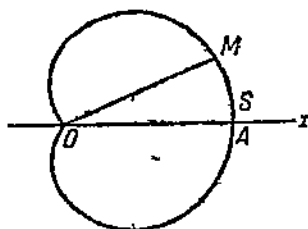
$$\rho = a(1 + \cos \theta),$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad d\rho = -a \sin \theta d\theta,$$

$$ds = a \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta,$$

$$s = \text{—} AM = 2a \int_0^{\theta} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

При $\theta = \pi$, $\text{—} AM = 4a$.



Черт. 23.

5. Винтовая линия. Уравнения винтовой линии в параметрической форме будут

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = kt,$$

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = a \cos t dt, \quad dz = k dt,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{a^2 + k^2} dt, \quad s = \sqrt{a^2 + k^2} (t - t_0),$$

если начало дуги соответствует значению $t = t_0$.

6. Цепная линия (см. черт. 18).

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right\},$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right\} dx.$$

Следовательно, длина дуги AM равна

$$\frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{a}{2} \left\{ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right\},$$

т. е. $AM = \sqrt{y^2 - a^2} = OE$, так что построение, сделанное в § 8 для нахождения площади $OAMP$, дает и длину дуги AM . Нетрудно убедиться, что перпендикуляр MT из M на AE дает направление касательной к кривой. В самом деле,

$$\angle MTx = \angle OAE,$$

следовательно,

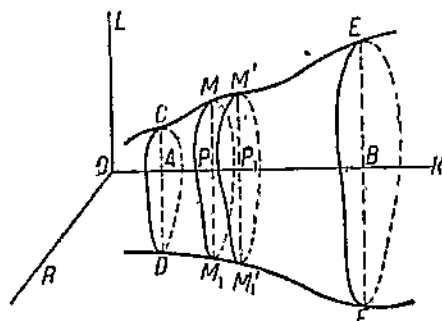
$$\operatorname{tg} MTx = \operatorname{tg} OAE = \frac{OE}{OA} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} = \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right\} = \frac{dy}{dx},$$

что и требовалось доказать.

§ 10. Вычисление объемов. Положим, что геометрическое тело, объем которого требуется вычислить, ограничено некоторой кривой поверхностью и двумя плоскостями, перпендикулярными к некоторой прямой OK , которую можно принять за одну из осей прямоугольной системы координат, например за ось x -ов, а произвольно выбранную на ней точку O за начало координат. Представим себе, что рассматриваемое тело разбито на некоторое число слоев системой плоскостей, перпендикулярных к оси x -ов.

На черт. 24 линии CE и DF изображают кривые пересечения поверхности, ограничивающей данное тело, с плоскостью LOK , линии CD и EF —

сечения той же поверхности с плоскостями, перпендикулярными к оси x -ов, ограничивающими данное тело по направлению этой оси, а линии MM_1 и $M'M'_1$ — сечения ограничивающей поверхности двумя близкими плоскостями, перпендикулярными к оси x -ов и образующими один из слоев, на которые разбито данное



Черт. 24.

тело. Пусть $OP = x_i$ и $OP_1 = x_i + \Delta x_i$ будут расстояния этих двух плоскостей от начала координат. Обозначим через $U = \varphi(x)$ площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси x и проходящей от начала координат на расстоянии x . Пусть тело таково, что $\varphi(x)$ — непрерывная функция от x . Представим себе прямой цилиндр, имеющий высоту Δx_i , т. е. расстояние между плоскостями, ограничивающими рассматриваемый элемент тела, а основанием — сечение с площадью $U_i = \varphi(x_i)$. Объем этого цилиндра будет равен произведению площади основания на высоту, т. е.

$$U_i \Delta x_i = \varphi(x_i) \Delta x_i.$$

Составим сумму объемов всех цилиндров, заменяющих элементы нашего тела, складывая выражения $\varphi(x_i) \Delta x_i$, где i принимает значения от 0 до $n-1$.

Таким образом получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i) \Delta x_i,$$

где x_0 и $X = x_n$ суть значения x , соответствующие сечениям CD и EF .

Согласно определению, за объем V данного тела мы принимаем тот предел, к которому стремится сумма объемов всех построенных цилиндров, когда максимум их высот Δx_i стремится к нулю, т. е.

$$V = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i) \Delta x_i.$$

С другой стороны, по основной теореме интегрального исчисления предел вышеупомянутой суммы существует и равен

$$\int_{x_0}^x \varphi(x) dx, \quad \text{т. е.} \quad V = \int_{x_0}^x \varphi(x) dx = \int_{x_0}^x U dx. \quad (1)$$

Таким образом мы видим, что вычисление объема, так же как и квадратура областей, приводится к интегрированию функций. Выражение площади сечения U , вообще говоря, находится само при помощи интегрирования, и вычисление объема требует поэтому выполнения двух последовательных интегрирований, но во многих случаях это выражение известно заранее; к рассмотрению этих случаев мы теперь и обратимся.

А. Объемы тел вращения. Площадь сечения U , которую надо знать, чтобы приложить формулу (1), будет известна, если поверхность, ограничивающая данное тело, есть поверхность, образуемая вращением плоской кривой CE около оси Ox . Примем OL за ось y -ов, и пусть уравнение CE в плоскости LOK есть

$$y = f(x). \quad (2)$$

При вращении CE около Ox каждая точка M этой кривой опишет круг, центр которого лежит на Ox , а радиус MP есть значение y , соответствующее данному x , получаемое из уравнения (2). Площадь U равна площади круга радиуса y , т. е. $U = \pi y^2$, и объем тела вращения V выразится формулой

$$V = \pi \int_{x_0}^x y^2 dx. \quad (3)$$

Объем кольцеобразного тела вращения (черт. 25), образуемого вращением области $BCNE$, заключенной между кривыми CN и BE , около оси x -ов, равен разности двух объемов, вычисляемых по формуле (3), и потому выразится формулой

$$V = \pi \int_{x_0}^x (y_1^2 - y_2^2) dx, \quad (4)$$

где $y_1 = f(x)$ выводится из уравнения CN , $y_2 = \varphi(x)$ — из уравнения BE .

Замечание. Само собой разумеется, что если ось вращения принята за ось y -ов, то в формулах (3) и (4) надо переставить буквы x и y .

Примеры.

1. **Объем эллипсоида вращения.** Объем части эллипсоида вращения, образуемого вращением дуги эллипса около большой оси, выразится формулой

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx, \quad \text{где } y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Следовательно,

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right),$$

где $x = OP$ (см. черт. 15). Полагая $x = OA = a$, находим, что $\frac{1}{2}$ объема эллипсоида вращения равна $\frac{2}{3} \pi a b^2$ и весь объем равен $\frac{4}{3} \pi a b^2$.

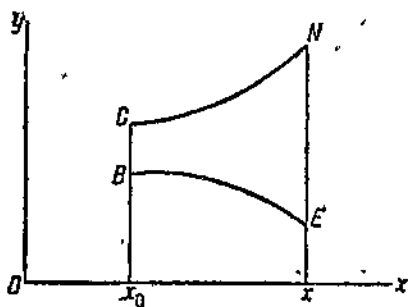
При вращении половины эллипса около малой оси образуется другой эллипсоид вращения, объем которого

$$V_1 = \pi \int_{-b}^b x^2 dy = 2\pi \int_0^b x^2 dy,$$

где $x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)$, т. е.

$$V_1 = \frac{2\pi a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy = \frac{4}{3} \pi b a^2.$$

Объем V меньше объема V_1 , потому что $\frac{V}{V_1} = \frac{b}{a} < 1$.



Черт. 25.

2. Объем кольца, образуемого вращением круга около прямой, лежащей в его плоскости (тора) (черт. 26). Пусть расстояние OC центра круга от оси вращения равно h . Приняв ось вращения за ось x -ов, OC за ось y -ов, получим уравнение круга:

$$(y-h)^2 + x^2 = a^2,$$

где a — радиус круга; отсюда

$$y_1 = h + \sqrt{a^2 - x^2} \text{ для точки } M_1,$$

$$y_2 = h - \sqrt{a^2 - x^2} \text{ для точки } M.$$

Объем кольца будет следующий:

$$V = 2\pi \int_0^a (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^a (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) dx = 8\pi h \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 h.$$

Полученный результат относится к случаю $h > a$, т. е. предполагает, что ось вращения не пересекает окружности круга. Когда ось вращения пересекает окружность круга в точках D и D_1 (черт. 27), то объем тела вращения D_1AD около оси x -ов равен удвоенному объему тела, образуемого вращением AED . Для всех точек дуги AE

$$y = h + \sqrt{a^2 - x^2},$$

для дуги EK

$$y_1 = h + \sqrt{a^2 - x^2},$$

для дуги KD $y_2 = h - \sqrt{a^2 - x^2}$,

где $h = CO$.

Искомый объем вычислится по формуле

$$V = 2 \left\{ \pi \int_0^{OD} y^2 dx + \pi \int_{OD}^a (y_1^2 - y_2^2) dx \right\},$$

где $OD = \sqrt{a^2 - h^2}$. Выполняя интегрирования, найдем

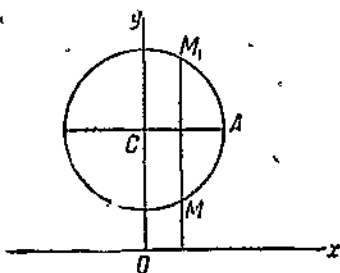
$$V = 2\pi a^2 h \left(\pi - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a} \right) + \frac{2}{3} \pi (2a^3 + h^3) \sqrt{a^2 - h^2}.$$

3. Объем циклоидального тела вращения. Объем тела, образуемого вращением циклоиды около ее основания, выразится формулой

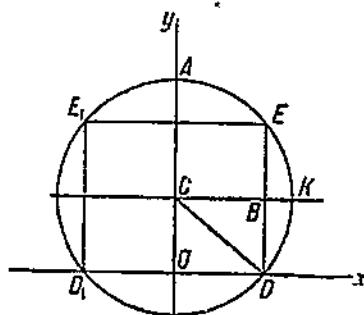
$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx,$$

где $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, откуда $dx = a(1 - \cos t) dt$ и

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \left\{ \frac{5}{2} t - 3 \sin t + \frac{3}{2} \cos t \sin t - \cos^2 t \sin t - \frac{2}{3} \sin^3 t \right\}. \end{aligned}$$



Черт. 26.



Черт. 27.

При $t = 2\pi$ получим объем тела, образуемого вращением целой ветви циклоиды, а именно:

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

В. Вычисление объемов некоторых тел, не принадлежащих к телам вращения.

I. Объем эллипсоида с тремя неравными осями. Уравнение поверхности эллипсоида с тремя неравными осями, отнесенное к центру и осям, есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (a)$$

Сечение плоскостью, перпендикулярной оси z -ов, в данном расстоянии z от плоскости xy , есть эллипс, уравнение которого получим из уравнения (а), при z постоянном. Уравнение это

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

можно написать в виде

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Площадь U этого эллипса, как известно, равна произведению полуосей его, умноженному на π ; следовательно,

$$U = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Объем тела, ограниченного поверхностью эллипсоида и двумя плоскостями $z = z_0$ и $z = Z$, параллельными плоскости (xy) , выражается формулой

$$V = \int_{z_0}^Z U dz = \pi ab \int_{z_0}^Z \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

Чтобы получить объем всего эллипсоида, положим $z_0 = 0$, $Z = c$ и удвоим результат. Найдем

$$V = 2\pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2}\right]_0^c = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Итак, объем трехосного эллипсоида равен произведению его полуосей на $\frac{4}{3} \pi$. (В частном случае, при $a = b = c$, получаем объем шара $V = \frac{4}{3} \pi a^3$.)

II. Объем части однополлого гиперболоида. Вычислим объем, ограниченный поверхностью однополлого гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и плоскостями } z = 0 \text{ и } z = h.$$

Сечение плоскостью, перпендикулярной оси z -ов, при данном z , будет эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1;$$

площадь его

$$U = \pi ab \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Следовательно, искомый объем будет

$$V = \pi ab \int_0^h \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left(h + \frac{h^3}{3c^2}\right).$$

§ 11. Вычисление площади поверхностей тел вращения. Рассмотрим поверхность тела, образуемого вращением дуги AB плоской кривой около данной прямой. Примем ось вращения за ось x -ов прямоугольной системы координат. Предположим, что ординаты всех точек рассматриваемой кривой положительны, и будем рассматривать координаты точек данной кривой как функции дуги s , отсчитываемой от произвольно выбранной точки на кривой. Функции $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ будем предполагать непрерывными в сегменте $[s_0, S]$, где s_0 соответствует начальной точке A , а S — конечной точке B дуги AB , так что длина дуги $AB = S - s_0$.

Под величиной площади поверхности, образуемой вращением дуги AB около оси x -ов, понимается предел, к которому стремится площадь поверхности, образуемой вращением около той же оси ломаной линии, вписанной в данную дугу, когда максимум длин ее сторон стремится к нулю, а число их растет неограниченно. При этом сумма длин сторон этой ломаной будет иметь пределом длину данной дуги.

Чтобы вывести на основании такого определения формулу для вычисления величины поверхности вращения, поступим следующим образом. Отметим на дуге AB ряд точек, в которых переменная дуга принимает значения

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n = S,$$

и обозначим через x_i, y_i координаты точки, для которой $s = s_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), т. е. положим

$$x_i = \varphi(s_i), \quad y_i = \psi(s_i).$$

Впишем ломаную, сторонами которой будут хорды, имеющие концами отмеченные точки, и пусть C_i будет длина той стороны ломаной, которая соединяет точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) . При вращении около оси x -ов хорда C_i опишет боковую поверхность конуса, усеченного параллельно основанию, величина которой, как известно из геометрии, равна полусумме длин окружностей оснований, умно-

женной на длину образующей. Так как радиусы окружностей оснований конуса, очевидно, равны ординатам y_i и y_{i+1} начала и конца хорды C_i , то величина боковой поверхности этого конуса равна

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} C_i,$$

а величина поверхности вращения, образуемой вращением дуги AB , по определению, будет равна пределу суммы

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} 2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} C_i, \quad (1)$$

к которому эта сумма стремится, когда максимум длин C_i стремится к нулю. Принимая во внимание, что

$$\lim \sum_{i=0}^{i=n-1} C_i = S - s_0 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (s_{i+1} - s_i), \quad (2)$$

можно представить сумму (1) в виде двух слагаемых, из которых одно будет иметь пределом некоторый определенный интеграл, а другое — нуль. Для этого перепишем сумму (1) так:

$$2\pi \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (s_{i+1} - s_i) - 2\pi \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (s_{i+1} - s_i - C_i). \quad (3)$$

Во втором члене формулы (3) все слагаемые под знаком $\sum$ положительны, так как C_i есть хорда, стягивающая дугу $s_{i+1} - s_i$, и потому $s_{i+1} - s_i - C_i > 0$, по условию y_i и $y_{i+1} > 0$. Вследствие этого второй член формулы (3) будет меньше, чем

$$2\pi M \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} (s_{i+1} - s_i) - \sum_{i=0}^{i=n-1} C_i \right] = 2\pi M \left\{ S - s_0 - \sum_{i=0}^{i=n-1} C_i \right\},$$

где M — наибольшее значение y в сегменте $[s_0, S]$; в силу формулы (2) разность $S - s_0 - \sum C_i$ имеет пределом нуль, а вместе с нею и весь второй член формулы (3). Что же касается первого члена, то, так как $\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ равно среднему значению ординаты y в сегменте $[s_i, s_{i+1}]$, предел его есть определенный интеграл

$$2\pi \int y \, ds, \quad (4)$$

взятый в пределах s_0 и S . Этот интеграл и выражает величину поверхности вращения, образуемой вращением дуги кривой $x = \varphi(s)$ и $y = \psi(s)$ около оси x -ов.

От выражения (4) можно перейти к различным выражениям величины поверхности вращения, соответствующим различным способам изображения плоской кривой, заменяя ds соответствующими

выражениями дифференциала дуги. Обозначая через A величину поверхности вращения, можем представить A в следующих видах:

$$A = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ = 2\pi \int \psi(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'^2(t)} dt = 2\pi \int \rho \sin \theta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta,$$

смотря по тому, задана ли кривая уравнениями:

$$y = f(x) \text{ или } x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \text{ или, наконец, } \rho = f(\theta).$$

Пределы интегрирования определяются всякий раз по значениям той переменной, которая принимается за независимую, в начале и конце вращающейся дуги.

Примеры.

1. *Поверхность эллипсоида вращения.* Поверхность эллипсоида, образуемого вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) около большей оси, получается по формуле (4), причем

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, откуда

$$A = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx.$$

Выполняя интегрирование, найдем $A = 2\pi ab \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right\}$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$, $\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 1$, $b \rightarrow a$, $A \rightarrow 4\pi a^2$ — известное выражение поверхности шара. Для поверхности эллипсоида вращения около малой оси получим выражение

$$A_1 = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 \frac{\ln \frac{a(1 + \varepsilon)}{b}}{\varepsilon}.$$

2. *Поверхность циклоидального тела вращения.* Для циклоиды имеем

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

Поверхность, образуемая вращением целой ветви циклоиды около ее основания, будет равна

$$A = 2\pi \int y ds = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \left(\frac{t}{2} \right) dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

§ 12. Вычисление объемов и поверхностей тел, образуемых вращением замкнутой кривой около данной оси. Положим, что требуется вычислить объем тела, образуемого вращением замкнутой

кривой AM_1BM_2A (см. черт. 19) около оси x -ов, не пересекающей кривую. Проведя касательные AP и BQ , параллельные Oy , обозначая через x_0 и $X > x_0$ абсциссы точки касания, будем иметь по предыдущему для искомого объема V формулу

$$V = \pi \int_{x_0}^X (y_2^2 - y_1^2) dx, \text{ или } V = \pi \left[\int_{x_0}^X y_2^2 dx + \int_X^{x_0} y_1^2 dx \right],$$

где y_2 есть ордината кривой на верхней ветви, а y_1 — на нижней ветви данной кривой.

Пусть замкнутая кривая C задана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданы на сегменте $[t_0, T]$ и удовлетворяют условиям конца § 8. Кроме того, предположим, что область D , ограниченная кривой C , лежит над осью x -ов, т. е. $\psi(t) \geq 0$ (см. черт. 22). Тогда тем же методом, что и в конце § 8, докажем, что объем тела, полученного от вращения области D вокруг оси x -ов, будет

$$V_D = -\pi \int_{t_0}^T \psi^2(t) \varphi'(t) dt.$$

Точно так же площадь поверхности, полученной от вращения кривой C вокруг оси x -ов, будет

$$S_D = 2\pi \int_{t_0}^T \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Применим эти формулы к вычислениям объема и поверхности *тора* (тела, образуемого вращением окружности круга около оси, не пересекающей окружность, см. черт. 26).

Обозначая через a радиус круга, через h расстояние его центра от оси x -ов, можем положить $x = -a \cos t$, $y - h = a \sin t$, потому что, исключая t , получим

$$x^2 + (y - h)^2 = a^2$$

— уравнение данного круга. Легко видеть, что при возрастании t от 0 до 2π точка (x, y) опишет окружность данного круга и притом в отрицательном направлении. Следовательно, объем V найдется по формуле

$$V = \pi \int y^2 dx = \pi a \int_0^{2\pi} (h + a \sin t)^2 \sin t dt.$$

Замечая, что интегралы от нечетных степеней $\sin t$ в пределах 0 и 2π , очевидно, равны нулю, тотчас получим

$$V = 2\pi a^2 h \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt = 2\pi^2 a^2 h,$$

как и было найдено раньше иным путем. Для поверхности A получим

$$A = 2\pi \int y ds,$$

где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a dt$, откуда

$$A = 2\pi a \int_0^{2\pi} (h + a \sin t) dt = 4\pi^2 ah.$$

§ 13. Приближенное вычисление определенных интегралов. Часто бывает, что при вычислении определенного интеграла мы не можем указать соответствующего неопределенного интеграла или не можем воспользоваться им для вычислений вследствие его сложности. В таких случаях прибегают к приближенным методам вычислений. Мы разберем здесь три метода: а) *метод прямоугольников*, б) *метод трапеций* и в) *метод Симпсона*.

а) и б) *метод прямоугольников* и *метод трапеций* заключаются в следующем:

Делим промежуток интегрирования $[a, b]$ на n равных частей. Обозначим $\frac{b-a}{n}$ через h , а точки деления через

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_i = a + ih, \dots, x_n = a + nh = b.$$

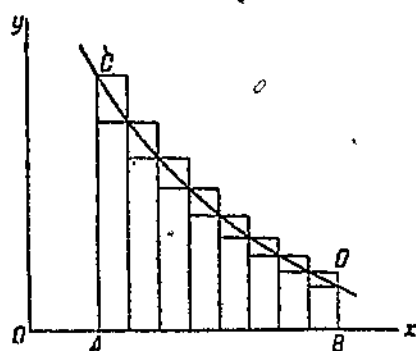
Пусть значения подинтегральной функции $f(x)$ будут

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_i = f(x_i), \dots, y_n = f(x_n).$$

Предполагая для наглядности функцию $f(x)$ неотрицательной, видим, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ есть площадь области Δ , ограниченной осью x -ов, прямыми $x=a$ и $x=b$ и кривой $y=f(x)$ (см. черт. 28).

Делению отрезка интегрирования на n равных частей соответствует разбиение области Δ на n полосок. Для приближенного вычисления всей площади достаточно вычислить приближенно площадь каждой полоски. А для этого можно заменить приближенно каждую полоску какой-нибудь простой областью.

Если заменяем i -ю полоску между прямыми $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, прямоугольником с тем же основанием и высотой y_{i-1} или y_i , то по-



Черт. 28.

лучающиеся формулы называются формулами прямоугольников. Они будут таковы:

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{i-1} h + \dots + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{i-1} + \dots + y_{n-1})$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_1 h + y_2 h + \dots + y_i h + \dots + y_n h = h(y_1 + y_2 + \dots + y_i + \dots + y_n).$$

Очевидно, правые части этих приближенных равенств суть интегральные суммы для определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Поэтому

при $n \rightarrow +\infty$ эти суммы будут иметь пределом интеграл. Следовательно, взяв n достаточно большим, мы найдем интеграл с каким угодно приближением при помощи выведенных формул.

Если же i -ю полоску заменить трапецией, заключенной между прямыми $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, взяв вместо криволинейной границы полоски хорду, стягивающую дугу кривой, то получится формула трапеций. Она будет такова:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

Очевидно, и здесь при $n \rightarrow +\infty$ правая часть, как интегральная сумма для интеграла $\int_a^b f(x) dx$, имеет пределом определенный интеграл. Поэтому при достаточно большом n можно вычислить интеграл при помощи этой формулы с каким угодно приближением.

с) Формула Симпсона основана на следующей теореме:

ТЕОРЕМА. Если $f(x)$ — целый полином не выше третьей степени, то

$$\int_a^b \tilde{f}(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (1)$$

где

$$y_0 = f(a), \quad y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad y_2 = f(b).$$

Доказательство. Положив $x = \frac{a+b}{2} + z$, $\frac{b-a}{2} = h$, замечаем, что целый полином $f(x)$, не выше третьей степени относительно x , представится тогда в виде целого полинома от z не выше третьей степени, так что

$$f(x) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3, \quad (2)$$

где A, B, C, D — постоянные. При $x = a$ $z = -h$; при $x = b$ $z = +h$; следовательно,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-h}^{+h} (A + Bz + Cz^2 + Dz^3) dz = 2Ah + \frac{2}{3} Ch^3, \quad (3)$$

Замечая далее, что при $z = 0$ $x = \frac{a+b}{2}$, $f(x) = y_1$; при $z = -h$ $x = a$, $f(x) = y_0$; при $z = +h$ $x = b$, $f(x) = y_2$, находим по формуле (2):

$$y_0 = A - Bh + Ch^2 - Dh^3, \quad y_1 = A, \quad y_2 = A + Bh + Ch^2 + Dh^3,$$

откуда

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6A + 2Ch^2;$$

следовательно, по формуле (3)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

что и требовалось доказать.

Формула (1) дает величину площади, ограниченной параболической кривой не выше 3-го порядка, $y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами y_0 и y_2 , соответствующими абсциссам a и b . Ордината y_1 соответствует абсциссе, равной среднему арифметическому чисел a и b .

Когда $f(x)$ не есть целый полином степени ≤ 3 , то формула (1) дает не точное, а приближенное значение интеграла или площади. Приложение этой формулы равносильно замене данной произвольной кривой $y = f(x)$ параболой не выше 3-го порядка, проходящей через три данные точки (a, y_0) , $\left(\frac{a+b}{2}, y_1\right)$, (b, y_2) на данной кривой.

Для достижения большей точности делят промежуток $b - a$ на четное число равных частей, вычисляют ординаты $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$, соответствующие точкам деления, и применяют формулу (1) к каждой части области, заключающейся между ординатами (y_0, y_2) , (y_2, y_4) и т. п. Сложив все полученные таким образом результаты,

находим

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6n} \{ y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \}. \quad (4)$$

Это и есть формула Симпсона для приближенных квадратур. Желая ознакомиться подробнее с вопросом о приближенном вычислении интегралов при помощи *интерполирования* отсылаем к сочинению акад. А. А. Маркова „Исчисление конечных разностей“.

Теорему, выражаемую формулой (1), можно применять во многих случаях и к вычислению объемов. Если в формуле

$$V = \int_{x_0}^X U dx,$$

дающей объем тела, ограниченного некоторой поверхностью и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси x -ов, $x = x_0$ и $x = X$, площадь сечения U есть целый полином степени не выше третьей, то по формуле (1) получим для вычисления V :

$$V = \int_{x_0}^X U dx = \frac{X - x_0}{6} \{ U_0 + 4U_1 + U_2 \}, \quad (5)$$

где U_0 и U_2 — площади крайних сечений, а U_1 — площадь среднего сечения, соответствующего точке $x = \frac{x_0 + X}{2}$. Например, замечая, что площадь сечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостью, перпендикулярной к оси x -ов, равна

$$U = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

и полагая в формуле (5) $x_0 = -a$, $X = a$, $\frac{x_0 + X}{2} = 0$, находим

$$U_0 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_1 = \pi bc,$$

$$\text{объем всего эллипсоида } V = \frac{2a}{6} \cdot 4\pi bc = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Упражнения

1. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(3n-1)^2}{n^3} \right]$. *Ома.* $\int_0^3 x^2 dx = 9$.

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \frac{n}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (n-1)^2} \right]$.

Ома. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

3. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right]$.

Отв. $2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{3}$.

4. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}}{n}$.

Отв. $e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{-1}$.

Указание. Предварительно прологарифмировать и свести к определенному интегралу.

5. Найти величину $\int_0^1 e^x dx$, рассматривая его как предел суммы бесконечно малых слагаемых.

Отв. $e - 1$.

Указание. Удобно разбить сегмент $[0, 1]$ на n равных частей.

6. Найти величину $\int_0^a x^n dx$ при $a > 0$, $n > 0$, рассматривая его как предел суммы.

Отв. $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Указание. Удобно придать переменной x ряд значений, убывающих по закону геометрической прогрессии.

7. Доказать, что, какова бы ни была знакопостоянная в пределах от $x=a$ до $x=b$ функция $f(x)$, всегда

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

Указание. Это неравенство есть следствие тождества

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \\ = n^2 + \frac{(u_1 - u_2)^2}{u_1 u_2} + \frac{(u_1 - u_3)^2}{u_1 u_3} + \dots + \frac{(u_1 - u_n)^2}{u_1 u_n} + \\ + \frac{(u_2 - u_3)^2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{(u_2 - u_n)^2}{u_2 u_n} + \frac{(u_{n-1} - u_n)^2}{u_{n-1} u_n} \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

- и определения интеграла как предела суммы.

8. Доказать, что для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных на сегменте $[a, b]$, имеет место неравенство

$$\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \geq \left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2.$$

Указание. Воспользоваться неравенством:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

и определением интеграла как предела суммы.

9. Найти площадь области, ограниченной кривой $y = 6x - x^2$ и осью x -ой.

Отв. 36.

10. Найти площадь области, заключенной между кривой $y^2 = \frac{x^3}{c}$ и прямой $y = x$.

Отв. $\frac{c^3}{10}$.

11. Вычислить площадь области, которая ограничена двумя параболой $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

Отв. $\frac{4}{3}p^2$.

12. Вычислить расстояние от земли камня, брошенного вверх с начальной скоростью v_0 , по прошествии T секунд от момента бросания.

Отв. $v_0 T - g \frac{T^2}{2}$.

13. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из цилиндрической цистерны, имеющей радиус a метров и глубину b метров.

Отв. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

14. Доказать, что работа силы тяжести при поднятии тела по любому пути равна Qh килограммометров, где Q — вес тела в килограммах, а h — высота поднятия в метрах.

Указание. Когда направление перемещения не совпадает с направлением силы, то работой силы называют произведение перемещения на проекцию этой силы на направление этого перемещения.

15. Найти центр тяжести однородного конуса, высота которого h , а радиус основания r .

Отв. Центр тяжести лежит на высоте конуса в расстоянии $\frac{h}{4}$ от основания.

Указание. Разбить конус на бесконечно малые слои плоскостями, параллельными основанию конуса.

16. Найти момент инерции однородного треугольника относительно его основания.

Основание треугольника b , высота h , поверхностная плотность равна 1.

Отв. $\frac{bh^3}{12}$.

17. Вычислить силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, имеющие 20 м в ширину и 16 м в глубину, если их верхняя грань лежит на поверхности воды.

Отв. 2560 т.

Указание. Разделить поверхность ворот прямыми, параллельными поверхности воды, на бесконечно малые части и вспомнить, что давление на элемент площади равно весу столба воды, основание которого есть этот элемент, высота — расстояние до уровня жидкости.

18. Найти интегрированием объем шарового сегмента высоты h . Радиус шара r .

Отв. $\frac{\pi h^2}{3} (3r - h)$.

19. Найти с помощью интегрирования объем пирамиды, основание которой равно B , а высота H .

$$\text{Отв. } \frac{BH}{3}.$$

Указание. Разбить пирамиду на бесконечно малые слои плоскостями, параллельными основанию, и воспользоваться свойством параллельных сечений пирамиды.

20. Сегмент параболы $y^2 = 2px$, отсеченный прямой $x = a$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем полученного тела вращения.

Отв. Половина произведения площади его основания на высоту.

Указание. Разбить данный сегмент параболы прямыми, параллельными оси Oy , на бесконечно узкие полосы.

21. Вычислить площадь области, ограниченной эволютой эллипса с полуосями a и b .

$$\text{Отв. } S = \frac{3\pi(a^2 - b^2)^2}{8ab}.$$

22. Вычислить площадь петли строфынды $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$.

$$\text{Отв. } 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}.$$

23. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = \sqrt{\frac{x^2}{a}}$ и $y = \frac{x^2}{a^2}$.

$$\text{Отв. } \frac{a^2}{12}.$$

24. Вычислить площадь области, ограниченной осью Ox , кривой $y = \sin x$ и касательной к ней в данной точке с абсциссой x , меньшей $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Отв. } \frac{(1 - \cos x)^3}{2 \cos x}, \text{ где } x - \text{абсцисса данной точки.}$$

25. Вычислить площадь области, ограниченной кардиондой $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

$$\text{Отв. } \frac{3}{2} \pi a^2.$$

26. Найти площадь области, ограниченной кривой $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$.

$$\text{Отв. } \frac{3}{8} \pi a^2.$$

27. Найти площадь области, ограниченной кривыми $x^2 + 4y^2 = 8$ и $x^2 - 3y^2 = 1$.

$$\text{Отв. } \frac{6\pi - 2\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})}{3}.$$

28. Найти площадь области, ограниченной кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

$$\text{Отв. } \pi \sqrt{2}.$$

Указание. Перейти к полярным координатам.

Найти объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением следующих кривых:

29. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ вокруг оси Ox в пределах для x от 0 до x .

$$\text{Отв. } 8a^3 \ln\left(1 - \frac{x}{2a}\right) - \frac{x^3}{3} - ax(x + 4a).$$

30. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ вокруг оси Ox .

$$\text{Отв. } \frac{\pi a^3}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right].$$

31. $r = a^2 \cos \theta$ вокруг полярной оси.

$$\text{Отв. } \frac{\pi a^3}{6}.$$

32. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ вокруг оси Oy .

$$\text{Отв. } \frac{32\pi a^2 b}{105};$$

33. Найти объем тела, вырезаемого из параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ сферой $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$.

$$\text{Отв. } \frac{76}{3}\pi.$$

34. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + z^2 = 1$.

$$\text{Отв. } \frac{16}{3}.$$

Указание. Рассмотреть сечения горизонтальными плоскостями.

35. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - ax = 0$, $x - z = 0$, $x + z = 0$.

$$\text{Отв. } \frac{\pi a^3}{4}.$$

Указание. Рассмотреть сечения плоскостями, перпендикулярными Ox .
Найти длины дуг кривых.

36. $y^2 = x^3$ между точками $(0, 0)$ и $(4, 8)$.

$$\text{Отв. } \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

37. $y = \ln x$ в пределах для x от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{8}$.

$$\text{Отв. } 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

38. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$.

$$\text{Отв. } \sqrt{y^2 - a^2}.$$

39. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$$\text{Отв. } 6a.$$

40. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ в пределах первого координатного угла.

$$\text{Отв. } \frac{3a}{2}.$$

41. $r = a\varphi$ от начала координат.

$$\text{Отв. } \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})].$$

42. Найти длину дуги кривой, по которой пересекаются поверхности $(z - y)^2 = 3a(z + y)$ и $z^2 = \frac{9}{8}x^2 + y^2$ от начала координат.

$$\text{Отв. } z\sqrt{2}.$$

43. Показать, что длина дуги кривой $a^m y^n = x^{m+n}$ выражается в конечном виде функцией от x , когда $\frac{n}{2m}$ или $\frac{n}{2m} + \frac{1}{2}$ — целые числа, и вычислить длину дуги кривой $y = x\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ между точками $(0, 0)$ и (a, a) .

$$\text{Отв. } \frac{a}{4} \left[410 - \frac{81}{2} \ln 3 \right].$$

Найти величину поверхности, образованной вращением кривых:

44. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > b$, вокруг оси Ox .

$$\text{Отв. } 2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}, \text{ где } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

45. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > b$, вокруг оси Oy .

$$\text{Отв. } 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \left[\frac{a}{b} (1 + \varepsilon) \right], \text{ где } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

46. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси Ox . Отв. $\frac{12\pi a^3}{5}$.

47. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси Oy . Отв. $\frac{12\pi a^3}{5}$.

48. $r = a^2 \cos \theta$ вокруг полярной оси. Отв. πa^2 .

49. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ около касательной в вершине и около нормали в вершине.

$$\text{Отв. } \frac{32}{3} \pi a^2; 8\pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

50. Прямая, оставаясь параллельной к плоскости (xy) , движется, постоянно встречая прямые $x = a$, $y = 0$ и $x = 0$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Вычислить объем тела, ограниченного образуемой при таком движении линейчатой поверхностью и координатными плоскостями.

$$\text{Отв. } \frac{1}{4} abc.$$

51. Из точки O — середины хорды AB , стягивающей дугу плоской кривой, — восстановлен перпендикуляр к хорде, пересекающий дугу в точке C .

Длина $OC = l$. Если продолжим OC до точки D так, чтобы $OD = \frac{2l}{\sqrt{3}}$,

и соединим точку D с концами дуги A и B прямыми, то длина $AD + DB$ будет равна длине дуги AB , если пренебречь пятой и высшими степенями ее (приближенный способ спрямления дуг, данный Чебышевым).

- Указание. Приняв O за начало координат, хорду AB за ось x -ов, обозначая длину хорды AB через $2a$, можем написать уравнение кривой в виде $y = (a^2 - x^2) \varphi(x)$; тогда $l = a^2 \varphi(0)$. Обозначая отношение $\frac{OD}{l}$ через k , находим

$$AO + OB = 2a \left[1 + \frac{a^2}{2} k^2 \varphi^2(0) \right], \quad (1)$$

а длина дуги

$$s = \int_{-a}^a (1 + y'^2)^{1/2} dx = 2a \left[1 + \frac{2}{3} a^2 \varphi^2(0) \right], \quad (2)$$

если отбросить члены пятой и высших степеней относительно a в (1) и (2). Из сравнения (1) и (2) получим $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Значит $OD = \frac{2}{\sqrt{3}} l$.

Найти величины следующих интегралов:

$$52. \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{\sin x} dx,$$

где m — целое положительное число.

Отв. 0 при m четном и π при m нечетном.

Указание. Вывести формулу приведения, вычислив

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin (m+2)x}{\sin x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{\sin x} dx.$$

$$53. \int_0^{\pi} \cos^{2n} x dx,$$

где n — целое положительное число.

$$\text{Отв. } \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi.$$

Указание. Интегрированием по частям вывести формулу приведения.

$$54. \int_0^1 (1-x^2)^n dx,$$

где n — целое положительное число.

$$\text{Отв. } \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Указание. Подстановкой $x = \sin \varphi$ свести задачу к вычислению интеграла от степени косинуса, а затем вывести формулу приведения.

$$55. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Отв. } \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Указание. Положить $x = \operatorname{tg} \varphi$.

56. Если $\varphi(x)$ — монотонная функция на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте непрерывную производную, а $f(x)$ — какая угодно непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

где $a < \xi < b$ (вторая теорема о среднем значении).

Указание. Проинтегрировать по частям и применить первую теорему о среднем значении.

Теорема справедлива для любой монотонной и непрерывной функции $\varphi(x)$, но в этих условиях доказывается сложнее.

57. Полагая

$$X_n = \frac{1}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

доказать, что $\int_{-1}^{+1} f(x) X_n dx = 0$ для всякого целого полинома $f(x)$

степени не выше $n-1$.

Указание. Применяя n раз подряд интегрирование по частям, найдем

$$\int_{-1}^{+1} f(x) X_n dx = C \int_{-1}^{+1} f^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx = 0,$$

потому что $f(x)$ степени не выше $(n-1)$.

ГЛАВА V

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Понятие определенного интеграла от ограниченной функции. В предыдущей главе мы имели дело с определенным интегралом от непрерывной функции на сегменте $[a, b]$. Задача настоящего параграфа заключается в том, чтобы распространить известный нам процесс интегрирования непрерывных функций, заключающийся в суммировании бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, на функции, ограниченные по абсолютной величине на сегменте $[a, b]$ и имеющие конечное число точек разрыва на этом сегменте. Предположим, сначала, что $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, т. е. $|f(x)| \leq M$, каково бы ни было x , принадлежащее сегменту $[a, b]$, и имеет одну точку разрыва в конце этого сегмента, например, при $x = b$.

Считая $a < b$, мы заметим, что данная функция непрерывна на любом сегменте $[a, b - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое число. Следовательно, мы в праве написать

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \varphi(b-\varepsilon) - \varphi(a), \quad (1)$$

где $\varphi'(x) = f(x)$ для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $a \leq x < b$. Заставляя ε стремиться к нулю по убывающим значениям, мы покажем, что $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ будет стремиться к определенному пределу, который мы и примем за значение $\int_a^b f(x) dx$.

Другими словами, мы покажем, что первообразная функция $\varphi(x)$, определенная для $a \leq x < b$, имеет предел при $x = b$, и, принимая этот предел равным $\varphi(b)$, мы делаем ее непрерывной на всем сегменте $[a, b]$, причем из формулы (1) тогда получим при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (2)$$

Для доказательства представим данную функцию $f(x)$ в виде разности двух неотрицательных функций, ограниченных на сегменте

$[a, b]$ и всюду непрерывных кроме $x=b$. Для этого достаточно положить

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Тогда, очевидно, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ всюду непрерывны, кроме $x=b$, и, сверх того,

$$0 \leq f_1(x) \leq M \quad \text{и} \quad 0 \leq f_2(x) \leq M.$$

Заметив это, имеем

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx - \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx. \quad (3)$$

Когда ε , убывая, стремится к нулю, оба интеграла, стоящие в правой части, могут только возрастать (так как промежуток интегрирования увеличивается, а подинтегральные функции неотрицательны); с другой стороны, оба эти интеграла остаются все время $\leq M(b-a)$,

потому что $f_1(x) \leq M$ и $f_2(x) \leq M$, и, следовательно, $\int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx \leq M(b-a-\varepsilon) < M(b-a)$, равно как $\int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx \leq M(b-a-\varepsilon) < M(b-a)$.

По основному принципу теории пределов отсюда заключаем, что неубывающие переменные $\int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx$ и $\int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, оставаясь ограниченными, должны стремиться к определенным конечным пределам. Если так, то из формулы (3) вытекает, что и левая часть должна иметь определенный конечный предел, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Итак, доказано, что $\int_a^b f(x) dx$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, и мы можем согласно определению принять

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (4)$$

Теперь легко убедиться, что определенное формулой (4) число $\int_a^b f(x) dx$ совпадает с пределом суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, составленных так же, как в случае непрерывной функции. Действительно, образуем сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (5)$$

где $x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, и покажем, что она стремится к пределу, равному $\int_a^b f(x) dx$, когда максимум длин Δx_i всех частичных сегментов стремится к нулю. С этой целью, составим разность

$$\int_a^b f(x) dx - S_n = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx + \delta - S'_n - \sigma_n \quad (6)$$

где $S_n = S'_n + \sigma_n$, а S'_n — сумма всех тех слагаемых суммы (5), которые относятся к сегменту $[a, b - \varepsilon]$ ¹⁾, причем

$$\delta = \int_a^b f(x) dx - \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Пусть η — сколь угодно малое положительное число. Выберем ε столь малым, чтобы, во-первых, $|\delta| < \frac{\eta}{3}$, что возможно сделать, так как $\delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; во-вторых, чтобы $|\sigma_n| < \frac{\eta}{3}$, что также возможно осуществить, потому что $|\sigma_n| \leq M\varepsilon$. Тогда из соотношения (6) получим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| &\leq \left| \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx - S'_n \right| + |\delta| + |\sigma_n| < \\ &< \left| \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx - S'_n \right| + 2\frac{\eta}{3}. \end{aligned} \quad (7)$$

С другой стороны, заметим, что на сегменте $[a, b - \varepsilon]$ функция $f(x)$ непрерывна, и поэтому, в силу ранее доказанного основного свойства определенных интегралов, разность $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx - S'_n$ может быть

сделана по абсолютной величине меньше чем $\frac{\eta}{3}$, если выберем длины Δx_i всех частичных сегментов достаточно малыми.

Заметив это, из (7) находим

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| < \frac{\eta}{3} + 2\frac{\eta}{3} = \eta$$

¹⁾ Очевидно, мы можем предполагать, что число $b - \varepsilon$ совпадает с одним из чисел x_i .

при условии, что длины Δx_i всех частичных сегментов суммы (5) достаточно малы, а это и значит, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim S_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (8)$$

причем предел берется в предположении стремления к нулю длины максимального из частичных сегментов.

Совершенно так же устанавливается формула (8) в случае, когда $f(x)$ имеет единственную точку разрыва при $x=a$, будучи ограниченной на всем сегменте $[a, b]$. В этом случае за исходное определение

числа $\int_a^b f(x) dx$ следует принять

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Пусть теперь ограниченная функция $f(x)$ имеет одну только точку разрыва внутри сегмента $[a, b]$, напр мер при $x=c$, где $a < c < b$. Покажем, что и в этом случае сумма (5) стремится к вполне определенному конечному пределу, когда длины всех частичных сегментов

стремятся к нулю. Этот предел мы примем за значение $\int_a^b f(x) dx$,

т. е. положим по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

В самом деле, разобьем сумму S_n на две части S'_n и S''_n , объединяя под S'_n сумму слагаемых, соответствующих сегменту $[a, c]$, а под S''_n сумму остальных слагаемых, соответствующих сегменту $[c, b]$ ¹⁾. Итак, мы полагаем

$$S_n = S'_n + S''_n.$$

Переходя к пределу в предположении, что максимум длин всех частичных сегментов стремится к нулю, мы найдем

$$\lim S_n = \lim S'_n + \lim S''_n = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

так как ограниченная функция $f(x)$ на сегментах $[a, c]$ и $[c, b]$ имеет по одной точке разрыва в конце этих сегментов и, по предыдущему,

¹⁾ Точку c мы считаем одной из точек x_i подразделения.

пределы сумм S'_n и S''_n существуют и равны соответственно

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x) dx.$$

Итак, доказано, что $\lim S_n$ существует; этот предел мы принимаем за значение

$$\int_a^b f(x) dx,$$

т. е. полагаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim S_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где максимум длин Δx_i стремится к нулю.

Наконец, остается рассмотреть общий случай, когда ограниченная функция на сегменте $[a, b]$ имеет конечное число точек разрыва.

Пусть, например, точками разрыва будут $a < c < d < b$. Разделим сегмент $[a, b]$ на конечное число таких сегментов, чтобы каждый из них содержал лишь одну точку разрыва. В разбираемом случае достаточно взять сегменты:

$$[a, l_1], [l_1, l_2], [l_2, l_3], [l_3, b],$$

приняв $a < l_1 < c$, $c < l_2 < d$, $d < l_3 < b$. Соответственно выбранным четырем сегментам, всю сумму S_n разобьем на четыре слагаемых $S'_n, S''_n, S'''_n, S^{IV}_n$. Объединяем под S'_n те слагаемые суммы S_n , которые соответствуют первому сегменту $[a, l_1]$, S''_n есть сумма слагаемых, соответствующих сегменту $[l_1, l_2]$, и т. д. В результате мы получим

$$S_n = S'_n + S''_n + S'''_n + S^{IV}_n, \quad (9)$$

причем каждая из сумм правой части будет распространена на сегмент, содержащий лишь одну точку разрыва функции. Следовательно, по вышедшему при стремлении максимума длин Δx_i частных сегментов к нулю, каждое из слагаемых формулы (9) стремится к определенному конечному пределу, и мы видим из формулы (9), что при этом и вся сумма S_n стремится к определенному конечному пределу.

По определению мы полагаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim S_n = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i; \quad (10)$$

предел берется в предположении, что максимум длин Δx_i всех частных сегментов стремится к нулю.

В предыдущем для определенности мы считали $a < b$; очевидно, мы можем рассуждать аналогично и при $a > b$. Таким образом формула (10) служит определением понятия интеграла от ограниченной функции при любых его пределах.

§ 2. Простейшие свойства определенного интеграла от ограниченной функции. Пользуясь формулой (10), служащей определением интеграла от функции $f(x)$, ограниченной на сегменте $[a, b]$, мы можем установить ряд простейших его свойств, известных уже нам из гл. IV для непрерывных функций.

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$, т. е. *определенный интеграл равен нулю, если верхний его предел равен нижнему.*

2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$, потому что

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_i - x_{i+1}),$$

откуда в пределе имеем свойство 2, т. е. *при перестановке пределов интеграл меняет знак, не меняя абсолютной величины.*

3. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$, при условии ограниченности функции $f(x)$ на наибольшем сегменте, содержащем точки a, b, c . В самом деле это свойство мы получим переходом к пределу, если выражение $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$, распространенное на сегмент $[a, b]$, представим в виде суммы двух аналогичных выражений, распространенных на сегменты $[a, c]$ и $[c, b]$, приняв c за одну из точек деления. Это свойство кратко выражают, говоря, что *в определенном интеграле можно разбивать сегмент интегрирования $[a, b]$ на части.*

$$4. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx,$$

потому что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i) - f_3(\xi_i)] \Delta x_i = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i) \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} f_3(\xi_i) \Delta x_i, \end{aligned}$$

откуда в пределе следует формула (4). Согласно этому свойству, *определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен той же сумме интегралов от слагаемых.*

5. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, где k — постоянное, так как

$\sum_{i=0}^{n-1} k f(\xi_i) \Delta x_i = k \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$, откуда в пределе получаем доказываемое, т. е. что *постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла*.

§ 3. Интегралы с бесконечными пределами. До сих пор предполагалось, что подинтегральная функция ограничена на сегменте между пределами интеграла, и эти пределы — числа конечные. Укажем теперь, как обобщается понятие об интеграле, когда эти условия не выполнены. Соответствующие интегралы называют *несобственными*.

Считая $f(x)$ непрерывной функцией при $x \geq a$, рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^l f(x) dx,$$

где $l > a$ — любое число.

Если с возрастанием l до бесконечности интеграл I стремится к определенному конечному пределу, то этот предел обозначают символом $\int_a^\infty f(x) dx$ и говорят, что $\int_a^\infty f(x) dx$ *сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в пределах от a до ∞ . Итак, по определению

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f(x) dx,$$

при условии, что последний предел существует и есть конечное число.

Если же с возрастанием l до бесконечности I не стремится ни к какому пределу или же неограниченно возрастает по абсолютной величине, то символ $\int_a^\infty f(x) dx$ смысла не имеет; в этом случае

говорят, что $\int_a^\infty f(x) dx$ *расходится*. Аналогично этому объясняется

значение символов $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$. Последний символ определяют как $\lim_{l_1} \int_{l_1}^b f(x) dx$, когда l_1 стремится к $-\infty$, а l_2 к $+\infty$ независимо друг от друга, в предположении, что этот предел имеет

определенное конечное значение, не зависящее от закона изменения I_1 и I_2 .

Для иллюстрации всех возможных случаев, могущих представиться, когда один из пределов интеграла бесконечно велик, рассмотрим три примера.

Примеры

1. Пусть нужно вычислить $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$. Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\int_0^l e^{-x} dx = -e^{-l} + 1,$$

величину которого мы находим, замечая, что неопределенный интеграл функции e^{-x} есть $-e^{-x}$. Когда l неограниченно возрастает, e^{-l} стремится к нулю. Следовательно, вспомогательный интеграл стремится к пределу единица, и мы, согласно определению, имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Построив кривую $y = e^{-x}$, имеющую асимптотой ось абсцисс, мы можем наше рассуждение геометрически истолковать следующим образом: площадь области, заключенной между кривой, осью ординат и асимптотой Ox , конечна и равна единице.

2. Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$.

В данном случае имеем

$$\int_0^l \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+l^2),$$

и получаемое выражение неограниченно возрастает вместе с l . Следовательно, данный интеграл расходится.

Кривая $y = \frac{x}{1+x^2}$ тоже имеет ось абсцисс асимптотой; однако площадь области, заключенной между этой кривой, осью ординат и асимптотой Ox , бесконечна.

3. Пусть, наконец, рассматривается интеграл

$$\int_0^{\infty} \sin x dx.$$

Здесь имеем

$$\int_0^l \sin x dx = 1 - \cos l.$$

Когда l неограниченно возрастает, $1 - \cos l$ не имеет предела, оставаясь заключенным в границах 0 и 2. Следовательно, данный интеграл расходится. Геометрически это значит, что элементарная сумма площадей областей, заключенных между синусоидой $y = \sin x$ и положительной осью абсцисс, является неопределенной.

Вопрос о сходимости интеграла легко решается, когда известна первообразная функция от $f(x)$. В самом деле, если первообразная функция $\varphi(x)$ стремится к определенному конечному пределу, когда $x \rightarrow \infty$, то $\int_a^\infty f(x) dx$ есть конечное число, вычисляемое по формуле

$$\int_a^\infty f(x) dx = \varphi(\infty) - \varphi(a),$$

где $\varphi(\infty)$ означает $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$. Это вытекает непосредственно из фор-

мулы $\int_a^l f(x) dx = \varphi(l) - \varphi(a)$, когда перейдем к пределу при $l \rightarrow \infty$.

В дальнейшем мы познакомимся с признаками, с помощью которых во многих случаях можно судить о сходимости интеграла с бесконечным пределом, не зная первообразной функции.

ТЕОРЕМА. Если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)| dx$, то $\int_a^\infty f(x) dx$ и наоборот сходится.

Для доказательства положим $f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ и $f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$; тогда будем иметь

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad \text{и} \quad |f(x)| = f_1(x) + f_2(x),$$

где f_1 и f_2 — непрерывные неотрицательные функции.

По условию

$$\int_a^l |f(x)| dx = \int_a^l f_1(x) dx + \int_a^l f_2(x) dx \quad (1)$$

при неограниченном возрастании l стремится к конечному пределу

$I = \int_a^\infty |f(x)| dx$; следовательно, при любом $l > a$ имеем $\int_a^l |f(x)| dx \leq I$,

потому что с возрастанием l интеграл $\int_a^l |f(x)| dx$ может только возрастать. Отсюда в силу (1) вытекает, что

$$\int_a^l f_1(x) dx \leq I \quad \text{и} \quad \int_a^l f_2(x) dx \leq I;$$

так как f_1 и f_2 — неотрицательные функции, то с возрастанием l интегралы $\int_a^l f_1(x) dx$ и $\int_a^l f_2(x) dx$ могут только возрастать, оста-

ваясь ограниченными сверху числом l . Таким образом по основному принципу теории пределов существуют конечные пределы

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f_1(x) dx = \int_a^{\infty} f_1(x) dx$$

и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f_2(x) dx = \int_a^{\infty} f_2(x) dx.$$

Заметив это, вспомним, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$; тогда найдем

$$\int_a^l f(x) dx = \int_a^l f_1(x) dx - \int_a^l f_2(x) dx.$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f(x) dx &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f_1(x) dx - \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f_2(x) dx = \\ &= \int_a^{\infty} f_1(x) dx - \int_a^{\infty} f_2(x) dx, \end{aligned}$$

причем предел, стоящий в левой части, существует, так как существуют конечные пределы интегралов, находящихся в правой части.

Итак, доказано, что существует конечный предел интеграла $\int_a^l f(x) dx$, когда l неограниченно возрастает, т. е. $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сходится.

Условимся называть интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ *абсолютно сходящимся*, если сходится $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$, а функцию $f(x)$ в этом случае — *абсолютно интегрируемой* в пределах от a до ∞ .

Легко проверить на примере, что интеграл может сходиться, но не быть абсолютно сходящимся. В качестве такого примера рассмотрим

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Покажем сначала, что рассматриваемый интеграл сходится.

Действительно, интегрированием по частям находим

$$\int_{\pi/2}^l \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos l}{l} - \int_{\pi/2}^l \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

откуда в пределе при $l \rightarrow \infty$ получим

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

предполагая, что последний интеграл сходится. Это же предположение мы легко оправдаем, показав, что $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится. В самом деле,

$$\int_{\pi/2}^l \frac{|\cos x|}{x^2} dx < \int_{\pi/2}^l \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{l} < \frac{2}{\pi}.$$

С возрастанием l левая часть неравенства растет, оставаясь все время меньше $\frac{2}{\pi}$; следовательно, существует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^l \frac{|\cos x|}{x^2} dx,$$

т. е. $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится.

Доказав сходимость интеграла $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, обнаружим теперь, что он не абсолютно сходящийся, т. е. что $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится.

С этой целью, будем отправляться от соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{(2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x} dx &> \int_{\pi/2}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x} dx + \int_{3\pi/2}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x} dx + \dots + \\ &+ \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x} dx, \end{aligned}$$

из которого вытекает

$$\begin{aligned} (2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \int_{\pi/2}^{\frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \right] = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{7}{4}} + \dots + \frac{1}{\frac{4n+3}{4}} \right] > \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4n+4} \right) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Когда n неограниченно возрастает, то правая часть последнего неравенства тоже неограниченно растет, а значит и левая часть.

Следовательно, $\int_{\pi/2}^l \frac{|\sin x|}{x} dx$ при $l \rightarrow \infty$ стремится к $+\infty$, т. е.

$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится.

§ 4. Интеграл от функций, неограниченной между пределами интегрирования. Если $f(x)$, будучи непрерывной функцией при $a \leq x < b$, является неограниченной вблизи b , например, стремится

к бесконечности при $x \rightarrow b$, то $\int_{b-a}^b f(x) dx$ ($b > a$) определяют как

предел, к которому стремится $\int_a^b f(x) dx$ с приближением положи-

тельного числа a к нулю. Аналогично этому, если $f(x)$ непрерывна при $a < x \leq b$ и неограниченна вблизи a , например, стремится к бесконечности при $x \rightarrow a$, то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx,$$

а если $f(x)$ неограниченна вблизи c , где $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx \right]$$

с приближением положительных чисел ϵ и η к нулю независимо друг от друга. Если не существует конечных пределов выражений,

написанных в вышеприведенных определениях, то $\int_a^b f(x) dx$ теряет

смысл или, как говорят в этом случае, $\int_a^b f(x) dx$ *расходится*.

В случае же существования интеграла его называют *сходящимся*, а подинтегральную функцию $f(x)$ — *интегрируемой на сегменте* $[a, b]$.

Вопрос о сходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$ в рассматриваемых здесь исключительных случаях легко решается, когда известна первообразная функция от $f(x)$. Так, если $f(x)$ неограниченна вблизи c , например $f(c) = \infty$, а первообразная функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = c$, то $\int_a^b f(x) dx$ сходится и вычисляется по прежней формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

В самом деле мы можем написать следующие соотношения:

$$J_1 = \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx = \varphi(c-\varepsilon) - \varphi(a),$$

$$J_2 = \int_{c+\eta}^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(c+\eta).$$

Переходя к пределу, мы получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \eta=0}} \{ J_1 + J_2 \} = \varphi(b) - \varphi(a),$$

если $\varphi(x)$ непрерывна при $x = c$, так как при этом

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \eta=0}} \{ \varphi(c-\varepsilon) - \varphi(c+\eta) \} = \varphi(c) - \varphi(c) = 0.$$

В § 5 изложены некоторые теоремы, с помощью которых во многих случаях можно судить о сходимости интеграла от функций, неограниченных в пределах интегрирования, не зная первообразной функции.

Для пояснения введенных определений мы рассмотрим несколько примеров.

Примеры

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рассмотрим вспомогательный интеграл $\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\epsilon)$, величину которого мы нашли, замечая, что неопределенный интеграл функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, непрерывной на сегменте $[1, 1-\epsilon]$, есть $\arcsin x$. Когда ϵ стремится к нулю, $\arcsin(1-\epsilon)$ стремится к $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, вспомогательный интеграл стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$, и мы согласно определению имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Построив кривую $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, которая имеет асимптоты $x = \pm 1$, мы можем наше рассуждение геометрически истолковать так; площадь области, заключенной между кривой, осью абсцисс, осью ординат и асимптотой $x = 1$, конечна и равна $\frac{\pi}{2}$.

2. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

В данном случае имеем $\int_{\eta}^1 \frac{dx}{x} = -\ln \eta = \ln \frac{1}{\eta}$, и полученное выражение неограниченно возрастает, когда η стремится к нулю. Следовательно данный интеграл расходится. Кривая $y = \frac{1}{x}$ имеет ось ординат асимптотой. Площадь области, заключенной между этой кривой, осями координат и прямой $x = 1$, бесконечна.

3. Рассмотрим интеграл $\int_0^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$.

Здесь имеем $\int_{\eta}^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2} = -\cos \frac{1}{\eta}$.

Когда η стремится к нулю, $-\cos \frac{1}{\eta}$ не имеет предела, оставаясь заключенным в границах -1 и $+1$. Следовательно, данный интеграл расходится, будучи неопределенным. С геометрической точки зрения это значит, что алгебраическая сумма площадей областей, заключенных между кривой $y = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$, осями координат и прямой $x = \frac{2}{\pi}$, является неопределенной.

4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2}}$.

Его подинтегральная функция обращается в бесконечность для $x = 0$. Построим кривую $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$; она имеет две ветви, асимптотически приближающиеся к оси ординат.

Согласно определению, рассматриваем вспомогательное выражение:

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x^2}} + \int_{\eta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = 6 - 3\epsilon^{1/2} - 3\eta^{1/2},$$

которое, при независимом друг от друга стремлении ϵ и η к нулю, стремится к пределу 6. Следовательно, имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = 6.$$

Истолковывая геометрически, мы скажем, что площадь области, заключенной между кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$, осью абсцисс и прямыми $x = \pm 1$, конечна и равна 6.

5. Дается интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Кривая $y = \frac{1}{x^2}$ имеет вид, аналогичный виду кривой, рассмотренной в предыдущем примере. Однако в данном случае вспомогательное выражение

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\eta} - 2$$

неограниченно возрастает, когда ϵ (или η) стремится к нулю. Поэтому данный интеграл расходится. Площадь соответствующей области в этом случае бесконечна.

ТЕОРЕМА. Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$, то $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx$ *подавно сходится.*

Для определенности предположим, что $f(x)$ будет неограниченной вблизи $x = b$, оставаясь непрерывной при $a \leq x < b$.

Полагая

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

мы видим, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ и $|f(x)| = f_1(x) + f_2(x)$, где f_1 и f_2 непрерывные при $a \leq x < b$, неотрицательные функции.

Согласно условию,

$$\int_a^{b-\epsilon} |f(x)| dx = \int_a^{b-\epsilon} f_1(x) dx + \int_a^{b-\epsilon} f_2(x) dx \quad (1)$$

при стремлении положительного числа ε к нулю стремится к конечному пределу $I = \int_a^b |f(x)| dx$; следовательно, имеем

$$\int_a^{b-\varepsilon} |f(x)| dx < I,$$

потому что с убыванием ε этот интеграл возрастает. Отсюда вследствие (1) вытекает, что

$$\int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx < I \quad \text{и} \quad \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx < I;$$

так как f_1 и f_2 — неотрицательные функции, то с убыванием ε последние интегралы могут только возрастать, оставаясь ограниченными сверху постоянным числом I . Таким образом по основному принципу теории пределов существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx = \int_a^b f_2(x) dx.$$

Заметив это, вспомним, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$; тогда найдем

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx - \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx. \quad \text{Переходя к пределу при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f_1(x) dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x) dx,$$

причем предел, стоящий в левой части, существует, потому что существуют конечные пределы, находящиеся в правой части.

Итак, доказано, что существует конечный предел выражения

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad \text{когда } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{т. е.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{сходится.}$$

Теорема доказывается аналогично, если $f(x)$ неограниченна вблизи $x=a$ или $x=c$, где $a < c < b$. Условимся называть интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^b |f(x)| dx$, а функ-

цию $f(x)$ в этом случае будем называть *абсолютно интегрируемой* на сегменте $[a, b]$.

§ 5. Признаки сходимости несобственных интегралов.
ТЕОРЕМА I. Если $f(x)$ для всех достаточно больших значений x удовлетворяет условию

$$x^\alpha |f(x)| < A, \quad (1)$$

где $\alpha > 1$, A — некоторое определенное число, то

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

сходится абсолютно.

Пусть неравенство (1) выполняется для всех значений $x \geq \xi$, где ξ — некоторое данное число. Так как

$$\int_a^l |f(x)| dx = \int_a^\xi |f(x)| dx + \int_\xi^l |f(x)| dx,$$

где первый интеграл правой части определенное число, то достаточно исследовать второй. По условию при $x \geq \xi$ имеем

$$|f(x)| < \frac{A}{x^\alpha}, \quad \text{где } \alpha > 1.$$

Следовательно,

$$\int_\xi^l |f(x)| dx < A \int_\xi^l x^{-\alpha} dx = \frac{A}{\alpha-1} \left(\frac{1}{\xi^{\alpha-1}} - \frac{1}{l^{\alpha-1}} \right) < \frac{A}{(\alpha-1) \xi^{\alpha-1}}.$$

Так как подинтегральная функция неотрицательна, то $\int_\xi^l |f(x)| dx$ может только возрастать с возрастанием l , но остается меньше числа $\frac{A}{(\alpha-1) \xi^{\alpha-1}}$; следовательно $\int_\xi^\infty |f(x)| dx$ существует.

Следствие. Интеграл $I = \int_a^\infty f(x) dx$ абсолютно сходится, если можно указать такое число $\alpha > 1$, при котором $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha |f(x)|$ есть определенное конечное число, потому что тогда будет выполнено условие (1) доказанной теоремы.

Примечание. Если $f(x)$ сохраняет знак для всех достаточно больших значений x и при этом

$$x |f(x)| > A, \quad (2)$$

где $A > 0$, то $\int_a^\infty f(x) dx$ расходится.

Положим для определенности, что $f(x)$ сохраняет знак $+$ для всех $x \geq \xi$, где ξ — некоторое данное число и $xf(x) > A$ для всех этих значений x . Так как

$$\int_a^l f(x) dx = \int_a^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^l f(x) dx,$$

где первый интеграл правой части определенное число, то достаточно исследовать второй. При $xf(x) > A$ имеем $f(x) > \frac{A}{x}$ для всех $x \geq \xi$, поэтому

$$\int_{\xi}^l f(x) dx > A \int_{\xi}^l \frac{dx}{x} = A \ln \frac{l}{\xi}.$$

При возрастании l до бесконечности, $\ln \frac{l}{\xi}$ также возрастает до бесконечности, а следовательно, $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\xi}^l f(x) dx = \infty$ и интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ расходится. В частности, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{xf(x)\} = L,$$

где $L \neq 0$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ расходится, потому что тогда выполнено условие (2).

ТЕОРЕМА II. Если функция $f(x)$ неограниченна вблизи $x=b$ (например, стремится к ∞ при неограниченном приближении x к b), остается непрерывной при $a \leq x < b$ и удовлетворяет условию

$$(b-x)^{\alpha} |f(x)| < A \quad (3)$$

для всех значений x , достаточно близких к b , причем $0 < \alpha < 1$, а A — некоторое число, то интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

сходится абсолютно.

Пусть неравенство (3) выполняется для всех значений $x \geq \xi$, где ξ — некоторое данное число, заключенное между a и b . Так как

$$\int_a^{b-\varepsilon} |f(x)| dx = \int_a^{\xi} |f(x)| dx + \int_{\xi}^{b-\varepsilon} |f(x)| dx,$$

то достаточно исследовать второй интеграл правой части предыдущего равенства, так как первый интеграл этой же части равенства — постоянная величина.

По условию при $x \geq \xi$, имеем

$$|f(x)| < \frac{A}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где } \alpha < 1.$$

Следовательно,

$$\int_{\xi}^{b-\varepsilon} |f(x)| dx < A \int_{\xi}^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} dx = A \left\{ \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right\}_{\xi}^{b-\varepsilon} < A \frac{(b-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

При убывании ε верхний предел $b-\varepsilon$ возрастает, вместе с тем возрастает и рассматриваемый интеграл, потому что $|f(x)| \geq 0$, но, оставаясь меньше числа $A \frac{(b-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, стремится к определенному конечному пределу. Следовательно, $\int_{\xi}^b |f(x)| dx$ существует.

Следствие. Интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ абсолютно сходится, если можно указать такое число $\alpha < 1$, при котором

$$\lim_{x \rightarrow b} [(b-x)^{\alpha} |f(x)|]$$

есть определенное конечное число, потому что тогда будет выполнено условие (3) доказанной теоремы.

Примечание. Если $f(x)$ сохраняет знак для всех значений x , достаточно близких к b , и при этом

$$(b-x)|f(x)| > A \quad (4)$$

где $A > 0$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится. Положим для определенности, что $f(x)$ сохраняет знак $+$ для всех $x \geq \xi$, где $a < \xi < b$ и $(b-x)f(x) > A$ для всех этих значений x . Так как

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

где первый интеграл правой части — определенное число, то достаточно исследовать второй. При $(b-x)f(x) > A$ имеем $f(x) > \frac{A}{b-x}$ для всех $x \geq \xi$, поэтому

$$\int_{\xi}^{b-\varepsilon} f(x) dx > A \int_{\xi}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = A \ln \frac{b-\xi}{\varepsilon}.$$

С приближением ε к нулю $\ln \frac{b-\varepsilon}{\varepsilon}$ возрастает до бесконечности, а следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx = +\infty$$

и интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

В частности, если

$$\lim_{x \rightarrow b} \{ (b-x)f(x) \}^{\frac{1}{\alpha}} = L,$$

где $L \neq 0$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится, потому что тогда выполнено условие (4).

Очевидно, мы можем применить доказанную теорему и в том случае, когда $f(x)$ неограниченна вблизи нижнего предела, например, стремится к бесконечности при $x \rightarrow a$, заменяя неравенства (3) и (4) соответственно условиями:

$$(x-a)^{\alpha} |f(x)| < A, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1,$$

и

$$(x-a) |f(x)| > A, \quad \text{где } A > 0.$$

Замечая, наконец, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

мы можем использовать наши признаки и в том случае, когда $f(x)$ неограниченна вблизи $x=c$, например, стремится к бесконечности при $x \rightarrow c$, где c лежит между a и b .

Замечая, что

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

мы можем применить доказанный результат и к тем случаям, когда $f(x)$ обращается в бесконечность при нижнем пределе a или для $x=c$ между пределами a и b .

Приложим изложенные признаки к примерам. Рассмотрим интеграл

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

$f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$; если p и $q > 1$, то $f(x)$ непрерывна при всяком x ; если $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, то $f(x)$ становится неограниченной вблизи $x=1$ и при $x=0$. Замечая, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(1-x)^{1-q} f(x)] = 1, \quad (1-q < 1)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-p} f(x)] = 1, \quad (1-p < 1),$$

по теореме II заключаем, что, при p и $q > 0$, $B(p, q)$ есть определенное число. При p или $q \leq 0$ тотчас же убеждаемся, что $B(p, q)$ равно бесконечности, потому что, например, при $q < 0$,

$$(1-x)f(x) = x^{p-1}(1-x)^q$$

с приближением x к единице не стремится к нулю, а возрастает неограниченно; при $q=0$ это выражение стремится к 1. Рассмотрим еще

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx;$$

при $p \leq 0$, $\Gamma(p) = \infty$, потому что

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x e^{-x} x^{p-1}] = \lim_{x \rightarrow 0} [e^{-x} x^p] = \infty \text{ или } 1.$$

При $0 < p < 1$, $\Gamma(p)$ — определенное число, потому что

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-p} e^{-x} x^{p-1}] = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{\alpha} e^{-x} x^{p-1}] = 0 \text{ при всяком } \alpha.$$

При $p \geq 1$, $f(x)$ остается непрерывной для $x=0$. Следовательно, $\Gamma(p)$ есть конечное определенное число при всяком $p > 0$.

Интеграл $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ называется, по Лежандру, эйлеровым интегралом 1-го вида, а $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ — эйлеровым интегралом 2-го вида.

§ 6. В заключение этой главы, рассмотрим два примера.

1. Вычислим

$$J = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx,$$

рассматривая его как предел суммы

$$s = h \{ f(0) + f(h) + f(2h) + \dots + f[(n-1)h] \},$$

где $h = \frac{\pi}{n}$;

$$\begin{aligned} s &= \frac{\pi}{n} \left\{ \ln(1 - 2\alpha \cos 0 + \alpha^2) + \ln\left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \ln\left(1 - 2\alpha \cos \frac{n-1}{n} \pi + \alpha^2\right) \right\} = \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left\{ (1 - \alpha^2)^2 \left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2\right) \left(1 - 2\alpha \cos \frac{2\pi}{n} + \alpha^2\right) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left(1 - 2\alpha \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \alpha^2\right) \right\}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \alpha^{2n} - 1 &= (\alpha^2 - 1) \left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2\right) \left(1 - 2\alpha \cos \frac{2\pi}{n} + \alpha^2\right) \times \dots \\ &\quad \dots \times \left(1 - 2\alpha \cos \frac{n-1}{n} \pi + \alpha^2\right) \end{aligned}$$

(см. решение двучленных уравнений с помощью тригонометрических функций), находим

$$s = \frac{\pi}{n} \ln \frac{(\alpha - 1)(\alpha^{2n} - 1)}{\alpha + 1}.$$

Если $|\alpha| > 1$, то при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim s &= \lim \frac{\pi}{n} \ln \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \lim \frac{\pi}{n} \ln (\alpha^{2n} - 1) = \lim \frac{\pi}{n} \ln \left[\alpha^{2n} \left(1 - \frac{1}{\alpha^{2n}}\right) \right] = \\ &= \lim \left[\frac{\pi}{n} \ln (\alpha^{2n}) + \frac{\pi}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{\alpha^{2n}}\right) \right] = \pi \ln (\alpha^2). \end{aligned}$$

Если $|\alpha| < 1$, то

$$s = \frac{\pi}{n} \ln \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} + \frac{\pi}{n} \ln (1 - \alpha^{2n}), \quad \text{и} \quad \lim s = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \begin{cases} = \pi \ln(\alpha^2) & \text{при } \alpha^2 > 1, \\ = 0 & \text{при } \alpha^2 < 1. \end{cases} \quad (A)$$

Изложенный способ для вычисления интеграла

$$J = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = J(\alpha)$$

неприменим, если $\alpha = \pm 1$, так как подынтегральная функция обращается в бесконечность при $x = 0$, если $\alpha = 1$, и при $x = \pi$, если $\alpha = -1$. Нетрудно, однако, вычислить интеграл J для этих значений α непосредственно следующим образом:

$$\begin{aligned} J(1) &= \int_0^{\pi} \ln(2 - 2 \cos x) dx = \int_0^{\pi} \ln\left(4 \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx = \\ &= 2\pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx; \\ J(-1) &= \int_0^{\pi} \ln\left(4 \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = 2\pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi} \ln \cos \frac{x}{2} dx. \end{aligned}$$

Полагая $y = \frac{x}{2}$, получим

$$\int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin y dy, \quad \int_0^{\pi} \ln \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy,$$

но интегралы

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin y dy \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy$$

равны между собой, так как они преобразовываются друг в друга заменой переменной $y = \frac{\pi}{2} - z$. Полагая

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin y dy = \int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy = J_1,$$

получим

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin y dy + \int_0^{\pi/2} \ln \cos y dy = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2y}{2} dy = 2J_1,$$

откуда, положив $2y = z$,

$$2J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin z dz - \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Но

$$\int_0^{\pi} \ln \sin z dz = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z dz + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin z dz.$$

Заменяя во втором слагаемом z через $\pi - y$, получим

$$\int_0^{\pi} \ln \sin z dz = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin z dz = 2J_1,$$

и, следовательно,

$$2J_1 = J_1 - \frac{\pi \ln 2}{2}, \quad J_1 = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Таким образом окончательно находим

$$J(1) = J(-1) = 2\pi \ln 2 + 4J_1 = 0.$$

Это непосредственное вычисление интеграла $J(a)$ при $a = \pm 1$ показывает, что формула (A) остается справедливой и при этих значениях a и что интеграл $J(a)$ представляет собой непрерывную функцию от a для всех значений a в интервале $(-\infty, +\infty)$.

2. *Декартов лист*. Уравнение этой кривой

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (B)$$

Легко убедиться, что эта кривая имеет асимптоту, уравнение которой есть (черт. 29)

$$y = -x - a.$$

Для построения этой прямой откладываем на координатных осях отрезки $OA = OB = -a$

и проводим прямую через точки A и B —это и будет асимптота.

Для исследования кривой положим в уравнении (B) $y = tx$ и найдем

$$-x = 3a \frac{t}{t^3 + 1}, \quad y = 3a \frac{t^3}{t^3 + 1}, \quad (B')$$

выражения координат рациональными функциями одного параметра t . Изменяя t от 0 до $+\infty$, мы видим, что x изменяется от нуля до нуля, проходя через максимум, соответствующий значению $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, обращаю-

щему в нуль производную

$$\frac{dx}{dt} = 3a \frac{1 - 2t^3}{(t^3 + 1)^2};$$

у при этом изменяется тоже от нуля до нуля, проходя через максимум, и получается петля кривой OCO . При изменении t от 0 до -1 x остается отрицательным и стремится к $-\infty$, а y положительным и стремится к $+\infty$: получается ветвь OE ; при изменении t от $-\infty$ до -1 получается ветвь OF . Вычислим 1) площадь петли OCO и 2) площадь между асимптотой и бесконечной ветвью EOF .

1) Для вычисления площади петли OCO можно поступить следующим образом. Проведя касательную GH , параллельную оси u -ов, будем рассматривать площадь петли S как разность

$$\text{пл. } OCGH - \text{пл. } OGH.$$

При движении по OCG в направлении от O через C к G t убывает от $+\infty$ до $t_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, x возрастает, $dx > 0$ и

$$\text{пл. } OCGH = \int y dx = 9a^2 \int_{+\infty}^{t_1} \frac{(1 - 2t^3)t^2 dt}{(t^3 + 1)^3}.$$

При движении от O до G по нижней части петли t изменяется от 0 до t_1 , $dx > 0$ и

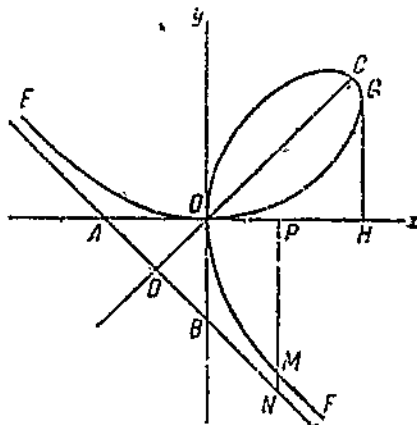
$$\text{пл. } OGH = \int y dx = 9a^2 \int_0^{t_1} \frac{(1 - 2t^3)t^2 dt}{(t^3 + 1)^3}.$$

Замечая, что

$$\int_{+\infty}^{t_1} - \int_0^{t_1} = \int_{+\infty}^0 = - \int_0^{+\infty}.$$

находим

$$S = -9a^2 \int_0^{+\infty} \frac{(1 - 2t^3)t^2 dt}{(t^3 + 1)^3}.$$



Черт. 29.

Полагая $t^3 + 1 = u$, $t^2 dt = \frac{1}{3} du$, находим

$$\int \frac{(1-2t^3)t^2 dt}{(t^3+1)^3} = \frac{1}{3} \int \frac{3-2u}{u^3} du = -\frac{1}{2u^2} + \frac{2}{3u} = -\frac{1}{2(t^3+1)^2} + \frac{2}{3(t^3+1)}.$$

$$S = 9a^2 \left[\frac{-2}{3(t^3+1)} + \frac{1}{2(t^3+1)^2} \right]_0^{\infty} = 9a^2 \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right\} = \frac{3}{2} a^2.$$

Замечая, что площадь треугольника AOB , где $|OA| = |OB| = a$, очевидно, равна $\frac{1}{2} a^2$, находим, что площадь петли равна утроенной площади AOB .

2) Для вычисления площади, ограниченной кривой и ее асимптотой, замечаем, что эта площадь равна сумме

$$\text{пл. } OAE + \text{пл. } AOB' + \text{пл. } OBF$$

а так как, по симметрии,

$$\text{пл. } OAE = \text{пл. } OBF,$$

и площадь $\triangle AOB = \frac{a^2}{2}$, то все дело сводится к вычислению площади OBF .

Эта последняя, очевидно, равна

$$\int \eta dx,$$

где $\eta = MN = PN - PM = x + a + y$, потому что $PN = AP = a + x$, где y надо взять из уравнения кривой или выразить x и y через t по формулам (B') и интегрировать по t от $t = -\infty$ до $t = -1$.

Таким образом находим

$$\eta = x + y + a = 3a \frac{t(t+1)}{t^3+1} + a = 3a \frac{t}{t^2-t+1} + a = \frac{a(t+1)^2}{t^2-t+1},$$

$$dx = 3a \frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2} dt, \quad \text{пл. } OBF = 3a^2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{(1-2t^3) dt}{(t^2-t+1)^2}.$$

Интегрируя по известным правилам, находим

$$\int \frac{(1-2t^3) dt}{(t^2-t+1)^2} = \frac{t^2 + \frac{1}{2}}{(t^2-t+1)^2}$$

$$\text{пл. } OBF = 3a^2 \left[\frac{t^2 + \frac{1}{2}}{(t^2-t+1)^2} \right]_{-\infty}^{-1} = -\frac{a^2}{2} = \text{пл. } \triangle AOB.$$

Отсюда видим, что вся площадь, ограниченная кривой и ее асимптотой, равна $\frac{3}{2} a^2$, т. е. равна площади петли OSO , и что прямыми OA и OB площадь области EOF разделяется на три равные части.

Упражнения

Исследовать сходимость следующих интегралов:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1}.$$

Отв. Сходящийся.

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 2x + 2}.$$

Отв. Расходящийся.

$$3. \int_0^{+\infty} x^m \sin x^n dx.$$

Отв. Сходящийся при $-2 < \frac{m+1}{n} < 1$, считая $n \neq 0$; иначе расходящийся.

$$4. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Отв. Расходящийся.

$$5. \int_0^1 \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Отв. Сходящийся.

Найти величины следующих интегралов:

$$6. \int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha dx}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}, \quad (-\pi < \alpha < \pi).$$

Отв. $\frac{\pi}{2}$, если $0 < \alpha < \pi$.

$$7. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx, \quad a > 0.$$

Отв. $\frac{a}{a^2 + b^2}$.

$$8. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx, \quad a > 0.$$

Отв. $\frac{b}{a^2 + b^2}$.

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Отв. $\frac{\pi}{2}$.

Указание. Рассмотреть интеграл в пределах от $-2N\pi$ до $+2N\pi$ при $N \rightarrow +\infty$ и разбить его на ряд интегралов в пределах от $2k\pi$ до $(2k+1)\pi$ и от $(2k+1)\pi$ до $(2k+2)\pi$. Кроме того, воспользоваться следующим разложением $\frac{1}{\sin x}$ в ряд:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - \pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 4\pi^2} - \frac{2x}{x^2 - 9\pi^2} + \dots$$

$$10. \text{Вычислить } \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^m dx, \text{ где } m > 0 \text{ — целое.}$$

Отв. При $m = 2n$ $\frac{\pi N}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \dots (2n-1)}$, где

$$N = (2n)^{2n-1} - 2n(2n-2)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} (2n-4)^{2n-1} \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n(2n-1) \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} 2^{2n-1},$$

при $m = 2n+1$ $\frac{\pi N_1}{2^{2n+1} \cdot 1 \cdot 2 \dots 2n}$, где

$$N_1 = (2n+1)^{2n} - (2n+1)(2n-1)^{2n} + \frac{(2n+1)2n}{1 \cdot 2} (2n-3)^{2n} + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{(2n+1)2n \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Указание. Интегрирование по частям дает

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^m x}{x^m} dx = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} \int_0^{\infty} \frac{d^{m-1} \sin^m x}{dx^{m-1}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Из разложения $\sin^m x$ по синусам или косинусам кратных дуг получаем выражение для $\frac{d^{m-1} \sin^m x}{dx^{m-1}}$, а затем из формулы $\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, при $k > 0$, находим окончательный результат.

ГЛАВА VI

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Теорема Коши-Маклорена. Положим, что $f(x)$ постоянно убывает с возрастанием x до бесконечности, оставаясь положительной при $x \geq a$. Бесконечный ряд

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a+n-1) + \dots \quad (1)$$

будет сходящийся или расходящийся, смотря по тому, будет ли

$\int_a^\infty f(x) dx$ иметь смысл или нет.

Доказательство. По условию $f(x)$ убывает при возрастании x , следовательно,

$$f(a) > f(x) > f(a+1) \quad \text{при } a < x < a+1;$$

отсюда

$$\int_a^{a+1} f(a) dx > \int_a^{a+1} f(x) dx > \int_a^{a+1} f(a+1) dx,$$

т. е.

$$f(a) > \int_a^{a+1} f(x) dx > f(a+1).$$

Заменяя a через $a+1, a+2, \dots, a+n-1$ и складывая получающиеся неравенства, находим

$$\begin{aligned} f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n-1) &> \\ > \int_a^{a+n} f(x) dx > f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a+n), \end{aligned}$$

или, обозначая через S_n сумму n первых членов ряда (1):

$$S_n > \int_a^{a+n} f(x) dx > S_n + f(a+n) - f(a).$$

1) Если при неограниченном возрастании n интеграл $\int_a^{a+n} f(x) dx$

стремится к конечному пределу, то из неравенства

$$S_n < \int_a^{a+n} f(x) dx + f(a) - f(a+n)$$

заключаем, что S_n , постоянно возрастаая, остается меньше определенного числа $\int_a^{\infty} f(x) dx + f(a)$; следовательно, ряд (1) — сходящийся.

2) Если $\int_a^{a+n} f(x) dx$ возрастает неограниченно вместе с n , то из неравенства

$$S_n > \int_a^{a+n} f(x) dx$$

видно, что и S_n возрастает неограниченно, следовательно, ряд (1) — расходящийся.

Пример.

Ряд $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$ сходящийся при $k > 1$ и расходящийся при $k \leq 1$, потому что

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \left[\frac{x^{1-k}-1}{1-k} \right]_{x=1}^{\infty} = \frac{1}{k-1} \quad \text{при } k > 1;$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \infty \quad \text{при } k \leq 1.$$

Так же убеждаемся, что ряд, общий член которого есть $\frac{1}{n(\ln n)^k}$, сходящийся при $k > 1$ и расходящийся при $k \leq 1$.

Из доказанной теоремы вытекает следующий признак сходимости рядов с убывающими положительными членами, который принадлежит проф. В. П. Ермакову.

Пусть $\varphi(x)$ означает функцию, обусловленную только тем, что для $x \geq a$, где a — достаточно большое положительное число, имеет место неравенство $\varphi(x) > x$; рассмотрим ряд положительных членов:

$$f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n) + \dots, \quad (1)$$

где $f(x)$ есть функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и в теореме Коши-Маклорена, и обозначим через $\varphi'(x)$ производную от $\varphi(x)$; тогда будем иметь следующую теорему:

ТЕОРЕМА. Если для всех значений $x \geq a$, где a — достаточно большое положительное число, имеет место неравенство

$$\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)} < \alpha < 1, \quad (2)$$

то ряд (1) будет сходящимся; если же имеет место неравенство

$$\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)} > 1 \quad (3)$$

для всех $x \geq a$, то ряд (1) — расходящийся.

Доказательство. Положим, что имеет место неравенство (2); обозначая через A какое-нибудь число, большее a , будем иметь

$$\text{откуда} \quad \varphi'(x)f[\varphi(x)] < \alpha f(x),$$

$$\int_a^A \varphi'(x)f[\varphi(x)] dx < \alpha \int_a^A f(x) dx. \quad (4)$$

Положив $\varphi(x) = z$, $\varphi'(x) dx = dz$, находим

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(A)} f(z) dz = \int_a^A f(x) dx < \alpha \int_a^A f(x) dx;$$

разбивая первый интеграл на части, можем написать предыдущее неравенство следующим образом:

$$\int_a^A f(x) dx + \int_A^{\varphi(A)} f(x) dx - \int_a^{\varphi(a)} f(x) dx < \alpha \int_a^A f(x) dx,$$

откуда

$$(1 - \alpha) \int_a^A f(x) dx < \int_a^{\varphi(a)} f(x) dx - \int_A^{\varphi(A)} f(x) dx < \int_a^{\varphi(a)} f(x) dx, \quad (5)$$

потому что $\varphi(A) > A$, а следовательно,

$$\int_A^{\varphi(A)} f(x) dx > 0.$$

Неравенство (5) дает

$$\int_a^A f(x) dx < \frac{1}{1 - \alpha} \int_a^{\varphi(a)} f(x) dx,$$

откуда видно, что с возрастанием A до бесконечности интеграл

$$\int_a^A f(x) dx,$$

возрастая, остается меньше определенного числа; следовательно, ряд (1) будет сходящимся.

Положим теперь, что удовлетворяется неравенство (3), т. е.

$$\varphi'(x)f[\varphi(x)] > f(x)$$

при $x \geq a$; тогда

$$\int_a^A \varphi'(x)f[\varphi(x)] dx > \int_a^A f(x) dx, \quad \text{или} \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(A)} f(x) dx > \int_a^A f(x) dx,$$

откуда

$$\int_a^{\varphi(A)} f(x) dx > \int_a^A f(x) dx + \int_A^{\varphi(a)} f(x) dx,$$

или

$$\int_a^{\varphi(A)} f(x) dx - \int_a^A f(x) dx > \int_a^{\varphi(n)} f(x) dx. \quad (6)$$

Допустив, что с возрастанием A до бесконечности интеграл $\int_a^A f(x) dx$ стремится к некоторому конечному пределу L , мы заключили бы, что разность в левой части неравенства (6) стремится к нулю, потому что $\int_a^{\varphi(A)} f(x) dx$, очевидно, стремится к тому же пределу L , а такое заключение противоречит неравенству (6), в котором вторая часть есть конечное, положительное число. Следовательно, $\int_a^A f(x) dx$ возрастает неограниченно вместе с A , ряд (1) — расходящийся. Итак, обе части теоремы доказаны.

Положив $\varphi(x) = x + 1$, получаем

$$\frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} = \frac{f(x+1)}{f(x)},$$

и доказанная теорема дает основной признак сходимости рядов, основанный на рассмотрении отношения двух последовательных членов.

Положив $\varphi(x) = e^x$ или $\varphi(x) = a^x$, где $a > e$, получим признак сходимости, основанный на рассмотрении отношения

$$\frac{a^x f(a^x)}{f(x)},$$

более чувствительный, чем все другие, известные до сих пор, т. е. решающий вопрос о сходимости или расходимости ряда в тех случаях, когда другие дают сомнительный случай.

§ 2. Формула Тейлора с остаточным членом в виде определенного интеграла. Пусть a и $a+h$ — любые две точки интервала $l < x < L$, в котором определена непрерывная функция $f(x)$, имеющая непрерывные производные до порядка n включительно. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^h f'(a+h-x) dx,$$

к которому применим правило интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^h f'(a+h-x) dx &= [xf'(a+h-x)]_0^h + \\ &+ \int_0^h xf''(a+h-x) dx = hf'(a) + \int_0^h xf''(a+h-x) dx. \end{aligned} \quad (a)$$

Интеграл в правой части полученного результата снова интегрируем по частям:

$$\int_0^h x f''(a+h-x) dx = \left[\frac{x^2}{2} f''(a+h-x) \right]_0^h + \\ + \frac{1}{2} \int_0^h x^2 f'''(a+h-x) dx = \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{1}{2!} \int_0^h x^2 f'''(a+h-x) dx, \quad (b)$$

интеграл в правой части опять интегрируем по частям:

$$\frac{1}{2!} \int_0^h x^2 f'''(a+h-x) dx = \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{1}{3!} \int_0^h x^3 f^{IV}(a+h-x) dx, \quad (c)$$

и так далее, пока, наконец,

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_0^h x^{n-2} f^{(n-1)}(a+h-x) dx = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h x^{n-1} f^{(n)}(a+h-x) dx. \quad (d)$$

Складывая (a), (b), (c), ..., (d), после сокращения получим

$$\int_0^h f'(a+h-x) dx = \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \\ + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h x^{n-1} f^{(n)}(a+h-x) dx. \quad (e)$$

Вычисляя интеграл в левой части полученного равенства,

$$\int_0^h f'(a+h-x) dx = [-f(a+h-x)]_0^h = -f(a) + f(a+h),$$

и переноса $f(a)$ в правую часть, находим

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \\ + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h x^{n-1} f^{(n)}(a+h-x) dx. \quad (f)$$

Это и есть формула Тейлора с остаточным членом в виде определенного интеграла. Применяя теорему о среднем, можно остаточный член R_n выразить и без помощи интеграла. Замечая,

что множитель x^{n-1} в пределах интегрирования, от 0 до h , знака не меняет, посредством теоремы о среднем найдем

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h x^{n-1} f^{(n)}(a + h - x) dx = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a + h - \theta h) \int_0^h x^{n-1} dx \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

Обозначая $1 - \theta = \theta_1$ и производя интеграцию, получим

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_1 h).$$

Это — остаточный член в форме, данной Лагранжем (см. Диф. исч., ч. I, гл. VII, § 4). Остаточный член можно выразить иначе, если применить к интегралу теорему о среднем в частном виде:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h x^{n-1} f^{(n)}(a + h - x) dx = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} (\theta_1 h)^{n-1} h f^{(n)}(a + h - \theta_1 h) \quad (0 < \theta_1 < 1). \end{aligned}$$

Полагая снова $1 - \theta_1 = \theta_1$, откуда $\theta_1 = 1 - \theta_1$, получим остаточный член в форме Коши:

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} (1 - \theta_1)^{n-1} f^{(n)}(a + \theta_1 h).$$

§ 3. Равномерно сходящиеся ряды. Положим, что члены ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

суть однозначные функции от переменной x , определенные на данном сегменте $[a, b]$ ¹⁾. Предположим, что ряд (1) сходится для всех значений x , принадлежащих сегменту $[a, b]$. Сумма этого ряда S будет тогда определенная функция от x на данном сегменте. При данном значении x в этом сегменте мы можем, задав по произволу положительное число ε , указать такое число N , чтобы, при $n \geq N$, остаточный член ряда (1)

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots \quad (2)$$

по абсолютной величине был меньше ε . Число N , обладающее тем свойством, что при $n \geq N$ имеем

$$|R_n(x)| < \varepsilon, \quad (3)$$

¹⁾ Вместо сегмента $[a, b]$ можно было бы говорить здесь и во всем дальнейшем об интервале (a, b) .

может зависеть не только от ε , но и от выбранного в сегменте $[a, b]$ значения аргумента x . Часто бывает, что номер N , начиная с которого удовлетворяется неравенство (3), возможно принять одним и тем же при данном ε , каково бы ни было значение x из сегмента $[a, b]$. В этом случае говорят, что ряд (1) *равномерно сходящийся на данном сегменте* $[a, b]$.

Итак, по определению ряд (1) называют *равномерно сходящимся на сегменте* $[a, b]$, если, во-первых, этот ряд сходится во всякой точке этого сегмента и, во-вторых, для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер остаточного члена, не зависящий от x , начиная с которого остаточный член по абсолютной величине будет меньше ε для всякого значения x из сегмента $[a, b]$. Легко привести пример ряда, сходящегося неравномерно. Возьмем ряд

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots \quad (4)$$

Этот ряд сходится при всяком x , потому что, при $x \neq 0$, он — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и имеет сумму $S = 1 + x^2$, а при $x = 0$ все его члены равны нулю и, значит, $S = 0$. Покажем, что данный ряд *неравномерно сходящийся* на сегменте $[-1, +1]$ и вообще на всяком сегменте, заключающем в себе нуль.

В самом деле, остаточный член ряда (4) $R_n = 0$ при $x = 0$, а при $x \neq 0$

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \left\{ 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots \right\} = \\ &= \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}; \end{aligned}$$

для того чтобы $|R_n|$ было меньше ε , необходимо и достаточно, чтобы

$$(1+x^2)^{n-1}$$

было больше $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е.

$$(n-1) \ln(1+x^2) > \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad n-1 > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}$$

при всяком данном x , не равном нулю. Этому неравенству, очевидно, можно удовлетворить, взяв n достаточно большим. С другой стороны, очевидно, не существует такого числа N , как бы оно велико ни было, чтобы при $n \geq N$ вышеприведенное неравенство удовлетворялось при всяком значении x , принадлежащем сегменту $[-1, +1]$. В самом деле, взяв x достаточно близким к нулю, мы

можем сделать $\ln(1+x^2)$ сколь угодно малым, а $\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}$ сколь

угодно большим и, следовательно, большим любого числа. Этим и доказывается неравномерная сходимость рассматриваемого ряда на сегменте $[-1, +1]$.

С другой стороны, из предыдущего анализа мы можем усмотреть, что ряд (4) будет равномерно сходящимся во всяком сегменте, не содержащем нуля. Действительно, например, в сегменте $[1, 2]$

дробь $\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}$ все время не больше чем $\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$; поэтому, приняв $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil + 2$, мы видим, что неравенство

$$n - 1 > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}$$

удовлетворяется при $n \geq N$ для всякого x , принадлежащего сегменту $[1, 2]$. Нижеследующая теорема дает простое средство убедиться во многих случаях в равномерной сходимости ряда.

Теорема. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (5)$$

будет равномерно сходящимся на сегменте $[a, b]$, если для всех значений x в этом сегменте модули членов ряда (5) будут не больше соответствующих членов некоторого сходящегося числового ряда

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \quad (6)$$

В Диф. исч. ч. I, гл. VII, § 2 ряд (5), удовлетворяющий условиям этой теоремы, назван правильно сходящимся. Таким образом наша теорема кратко может быть формулирована так: *всякий правильно сходящийся ряд на сегменте $[a, b]$ есть равномерно сходящийся на том же сегменте.* Для доказательства заметим прежде всего, что в силу условий теоремы данный ряд сходится абсолютно во всякой точке сегмента $[a, b]$. Обозначая через R_n и p_n соответственно остаточные члены рядов (5) и (6), мы можем, вследствие сходимости числового ряда (6), при произвольно заданном $\varepsilon > 0$, указать такое число N , чтобы при $n \geq N$ было $p_n < \varepsilon$. С другой стороны, так как по условию теоремы $|u_n(x)| \leq A_n$ для всех значений x сегмента $[a, b]$, то

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots \leq A_{n+1} + A_{n+2} + \dots = p_n^1),$$

а значит, $|R_n(x)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, где N , в силу его определения, не зависит от x . Итак, ряд (5) есть равномерно сходящийся.

1) Неравенство $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots$ выводим из неравенства $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|$, заставляя p стремиться к бесконечности.

В силу доказанной теоремы, если ряд правильно сходящийся на некотором сегменте, то он и равномерно сходящийся на том же сегменте, но не наоборот.

Другими словами, *существуют ряды равномерно сходящиеся, не являющиеся правильно сходящимися.*

Приведем пример такого ряда. Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, мы в Диф. исч., ч. I, гл. VII, § 6 получили

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_n$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Из этой формулы легко усмотреть, что ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

равномерно сходится на сегменте $[0, 1]$; действительно,

$$|R_n| = \frac{x^{n+1}}{n(1+\theta x)^n} \leq \frac{1}{n},$$

каково бы ни было x на сегменте $[0, 1]$.

Следовательно, рассматриваемый ряд сходится на сегменте $[0, 1]$ и его остаточный член по абсолютной величине становится меньше сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера N , не зависящего от x , что и доказывает равномерную сходимость этого ряда.

С другой стороны, легко видеть, что наш ряд не будет правильно сходящимся на сегменте $[0, 1]$. В самом деле, абсолютная величина его общего члена равна $\frac{x^n}{n}$ и достигает своего наибольшего значения при изменении x от 0 до 1 при $x=1$. Таким образом максимум абсолютной величины общего члена нашего ряда равен $\frac{1}{n}$.

Так как ряд $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \dots$ расходится, то данный ряд не будет правильно сходящимся на сегменте $[0, 1]$.

В заключение этого параграфа докажем теорему: *если ряд (5), составленный из непрерывных функций на сегменте $[a, b]$, равномерно сходится на этом сегменте, то его сумма есть непрерывная функция на сегменте $[a, b]$.* Обозначая через $S_n(x)$ сумму первых n членов данного ряда, через $R_n(x)$ его остаточный член, имеем

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S(x)$ — полная сумма ряда.

Следовательно, можем написать

$$S(x + \Delta x) - S(x) = [S_n(x + \Delta x) - S_n(x)] + \\ + R_n(x + \Delta x) - R_n(x). \quad (7)$$

где $x + \Delta x$ означает любую точку сегмента $[a, b]$.

В силу равномерной сходимости данного ряда на сегменте $[a, b]$, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N , что для всякого x , принадлежащего сегменту $[a, b]$, будем иметь

$$|R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (8)$$

в частности,

$$|R_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9)$$

С другой стороны, так как для всякого целого n функция $u_n(x)$ есть непрерывная в точке x , то, имея в виду, что N есть число постоянное и раз навсегда выбранное для данного ε , мы заключаем: $S_N(x)$ как сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная в точке x . Поэтому для Δx , достаточно малого по абсолютной величине, мы должны иметь

$$|S_N(x + \Delta x) - S_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (10)$$

Принимая во внимание неравенства (8), (9) и (10), из соотношения (7), в котором принимаем $n = N$, найдем

$$|S(x + \Delta x) - S(x)| \leq |S_N(x + \Delta x) - S_N(x)| + |R_N(x + \Delta x)| + \\ + |R_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Так как последнее неравенство справедливо в точке x при всех достаточно малых по абсолютной величине значениях Δx , то оно обнаруживает непрерывность функции $S(x)$ в точке x . Имея в виду, что точка x была любая точка сегмента $[a, b]$, мы тем самым доказали непрерывность функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$.

§ 4. Интегрирование и дифференцирование рядов. Теорема. Если функций $f(x)$ разлагается в ряд непрерывных функций, сходящийся равномерно на сегменте $[a, b]$,

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

то ряд

$$\int_a^x u_1(x) dx + \int_a^x u_2(x) dx + \dots + \int_a^x u_n(x) dx + \dots, \quad (2)$$

где x — любое число из сегмента $[a, b]$, будет сходиться и сумма его равна

$$\int_a^x f(x) dx,$$

так что можно писать

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x u_1(x) dx + \int_a^x u_2(x) dx + \dots + \int_a^x u_n(x) dx + \dots$$

В этом смысле нужно понимать утверждение, что *равномерно сходящийся ряд (1) можно интегрировать почленно*.

Доказательство. Обозначая через r_n остаточный член ряда (1), можно для произвольно заданного положительного числа ε указать такое число N , что при $n \geq N$ имеем

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

при любом значении x из сегмента $[a, b]$.

Следовательно,

$$\left| \int_a^x r_n(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^x dx = \frac{\varepsilon}{b-a} (x-a) \leq \varepsilon$$

при любом n , удовлетворяющем условию $n \geq N$.

Пусть $s_n(x)$ — сумма n первых членов ряда (1), а $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда (2). Тогда

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

$$S_n(x) = \int_a^x u_1(x) dx + \int_a^x u_2(x) dx + \dots + \int_a^x u_n(x) dx.$$

Очевидно,

$$S_n(x) = \int_a^x s_n(x) dx.$$

Но

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Следовательно,

$$S_n(x) = \int_a^x f(x) dx - \int_a^x r_n(x) dx.$$

Из последнего равенства получаем

$$\left| S_n(x) - \int_a^x f(x) dx \right| = \left| \int_a^x r_n(x) dx \right| < \varepsilon$$

при $n \geq N$ и любом значении x из сегмента $[a, b]$. Таким образом для всякого положительного числа ε можно указать такое число N ,

что при $n \geq N$ и любом x из сегмента $[a, b]$ имеет место неравенство

$$\left| S_n(x) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

А это показывает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Отсюда следует, что ряд (2) сходится равномерно, и его сумма равна $\int_a^b f(x) dx$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает как следствие теорема о дифференцировании рядов, состоящая в следующем:

Если функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

сходится на сегменте $[a, b]$ к функции $f(x)$, а ряд, составленный из производных членов первого ряда:

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots,$$

сходится равномерно на том же сегменте, причем производные $u'_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) непрерывны на этом сегменте, то сумма второго ряда есть $f'(x)$, т. е. производная суммы первого ряда.

Для доказательства применим предыдущую теорему ко второму ряду, обозначив его сумму через $\psi(x)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx &= \int_a^b u'_1(x) dx + \int_a^b u'_2(x) dx + \dots + \int_a^b u'_n(x) dx + \dots = \\ &= [u_1(x) - u_1(a)] + [u_2(x) - u_2(a)] + \dots + \\ &\quad + [u_n(x) - u_n(a)] + \dots = f(x) - f(a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_a^b \psi(x) dx = f(x) - f(a).$$

Взяв производные по x от обеих частей последнего равенства, получим

$$\psi(x) = f'(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Примеры на вычисление интегралов при помощи разложения подынтегральной функции в ряд.

$$1. \quad \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Из тождества

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z} \quad (a)$$

находим, положив $z = -x^2$, разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}; \quad (a')$$

отсюда

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n} dx}{1+x^2}.$$

Замечая, что $\frac{x^{2n}}{1+x^2} < x^{2n}$, получим, при $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{x^{2n} dx}{1+x^2} < \int_0^x x^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

При неограниченном возрастании n выражение $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ стремится к нулю при $x \leq 1$; следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Ясно, что результат будет справедлив и при $x < 0$, лишь бы $|x| \leq 1$.

$$2. \quad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

Из тождества (a), при $z = -x$, найдем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

Интегрируя от нуля до x , находим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Остаточный член

$$R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{x^n}{1+x} dx = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)} \quad (0 < \theta < 1).$$

Подобно предыдущему убедимся, что R_n стремится к нулю с возрастанием n , если $-1 < x \leq 1$, и получим известное уже раньше разложение

$\ln(1+x)$ в ряд (Диф. исч., ч. I, гл. VII, § 6).

$$3. \quad \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $|x| < 1$, по формуле бинома Ньютона (Диф. исч., ч. I, гл. VII, § 5),

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots \\ \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n} + \dots \quad (b)$$

Отсюда, интегрируя от 0 до x ¹⁾, получим

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Если этот ряд остановим на члене с x^{2n+1} , то погрешность будет по численной величине меньше суммы ряда

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \left\{ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \dots \right\},$$

потому что

$$\frac{2n+3}{2n+4} < 1, \quad \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+4)(2n+6)} < 1 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, погрешность будет численно меньше

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)} \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

$$4. \text{ Интеграл } K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad (x = \sin \varphi),$$

где $k < 1$, называется полным эллиптическим интегралом первого вида. Легко найти разложение его по степеням k . Заменяя x в разложении (b) (см. пример 3) через $k \sin \varphi$, интегрируя от нуля до $\frac{\pi}{2}$ ¹⁾ и замечая, что

$$u_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

найдем

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \\ = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} k^2 u_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 u_4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} k^{2n} u_{2n} + \dots$$

¹⁾ Эта операция законна, так как степенной ряд равномерно сходится на всяком сегменте, внутреннем его интервалу сходимости.

Подставляя вместо величин n , их значения, получим

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right\},$$

число k называется *модулем* интеграла K .

5. Интеграл $\int_0^1 x^{nx} dx = \int_0^1 e^{nx \ln x} dx$ разлагается в ряд при помощи формулы

$$e^{nx \ln x} = 1 + nx \ln x + \frac{n^2 x^2 \ln^2 x}{1 \cdot 2} + \frac{n^3 x^3 \ln^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

и интегрирования. Замечая, что

$$\int_0^1 x^m \ln^m x dx = (-1)^m \frac{1 \cdot 2 \dots m}{(m+1)^{m+1}}, \quad (1)$$

получим

$$\int_0^1 x^{nx} dx = 1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \dots$$

При $n=1$

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

[Формула (1) легко выводится интегрированием по частям.]

§ 6. Дифференцирование и интегрирование определенного интеграла по параметру. Если в подынтегральную функцию интеграла

$$J = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

входит некоторый *параметр* α , рассматриваемый как постоянное при интегрировании по x , то J будет, вообще говоря, функцией от α . Например:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{при } \alpha > 0,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \left[\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{при } \alpha > 0 \text{ и т. д.}$$

Обозначая поэтому J через $F(\alpha)$, положим

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx.$$

Если $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция относительно совокупности x и α , когда x изменяется от a до b , а α — в каких-нибудь преде-

лах α_0 и α_1 , то и $F(\alpha)$ — непрерывная функция от α в этих пределах. В самом деле

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)] dx. \quad (1)$$

При достаточно малом $|\Delta\alpha|$, $|f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \varepsilon$, где ε — как угодно малое положительное число, а поэтому

$$|F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)| < \varepsilon |b - a|;$$

следовательно, приращение функции $F(\alpha)$ стремится в нуль вместе с $\Delta\alpha$, что и требуется показать.

Найдем производную этой функции. Для этого замечаем, что

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha),$$

где $0 < \theta < 1$ и f'_α означает частную производную от $f(x, \alpha)$, взятую по α . Написав предыдущую формулу так:

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha [f'_\alpha(x, \alpha) + \eta],$$

где $\eta = f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, \alpha)$, находим по формуле (1)

$$\frac{F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx + \int_a^b \eta dx. \quad (2)$$

Предполагая $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывной в прежних пределах, можем утверждать, что при достаточно малом $|\Delta\alpha|$ значение $|\eta|$ будет меньше любого положительного числа ε , каковы бы ни были значения x

и α в данных пределах, а потому $\int_a^b \eta dx$ будет численно меньше

$\varepsilon(b - a)$, т. е. $\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left[\int_a^b \eta dx \right] = 0$, и формула (2) даст

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx,$$

или

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \quad (3)$$

Эта формула называется формулой дифференцирования по параметру или дифференцирования под знаком интеграла. Формула эта доказана в предположении, что пределы интеграла a и b — конечные числа; ее прилагают и к случаям, когда пределы бесконечны, но в этих случаях она может оказаться неверной, потому что из того, что $|\eta|$ меньше произвольного положительного числа, еще нельзя заключить вообще,

что $\left| \int_a^\infty \eta dx \right|$ будет также меньше любого положительного числа.

В § 7 будет указано условие, достаточное для того, чтобы формула (3) была справедлива и при бесконечных пределах интеграла.

В предыдущем числа a и b считались не зависящими от α . Когда пределы a и b зависят от α , то, обозначая через Δa и Δb их приращения, соответствующие приращению $\Delta \alpha$, будем иметь

$$\begin{aligned} F(\alpha + \Delta \alpha) - F(\alpha) &= \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x, \alpha + \Delta \alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx = \\ &= \int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha + \Delta \alpha) dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x, \alpha + \Delta \alpha) dx - \\ &\quad - \int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx; \end{aligned}$$

применяя ко второму и третьему из интегралов правой части равенства теорему о среднем значении, получим

$$\begin{aligned} F(\alpha + \Delta \alpha) - F(\alpha) &= \int_a^{a+\Delta a} [f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)] dx + \\ &\quad + f(b + \theta \Delta b, \alpha + \Delta \alpha) \Delta b - f(a + \zeta \Delta a, \alpha + \Delta \alpha) \Delta a, \quad (4) \end{aligned}$$

где θ и ζ заключены между нулем и единицей.

Отсюда легко вывести, что $F(\alpha)$ непрерывна при рассматриваемом значении α , если только пределы интегрирования $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ — непрерывные функции α , а подинтегральная функция $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция α и x , когда x принадлежит сегменту $[a(\alpha), b(\alpha)]$. В самом деле, при фиксированном значении α интеграл правой части (4) стремится к 0 вместе с $\Delta \alpha$ (на основании начала этого параграфа), а сомножители $f(b + \theta \Delta b, \alpha + \Delta \alpha)$ и $f(a + \zeta \Delta a, \alpha + \Delta \alpha)$ при Δb и Δa ограничены. Поэтому

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} [F(\alpha + \Delta \alpha) - F(\alpha)] = 0.$$

Следовательно, при бесконечно малом приращении $\Delta \alpha$ приращение функции $F(\alpha)$ тоже бесконечно мало, что и доказывает наше утверждение.

Предполагая наличие производных $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ и существование непрерывной частной производной $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$, разделим обе части (4) на $\Delta \alpha$ и перейдем к пределу при $\Delta \alpha \rightarrow 0$. Тогда легко найдем

$$F'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}. \quad (5)$$

Для примера возьмем

$$y = F(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^{\infty} (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt, \quad (6)$$

где n — целое положительное число, t — переменная интегрирования, x — параметр, от которого зависит интеграл, x_0 — постоянное число. По формуле (4), заменив в ней букву x буквой t и положив $a = x$, $b = x$, $\alpha = x_0$, $f(t, x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} (x-t)^{n-1} \varphi(t)$, мы получим производную интеграла (6), верхний предел которого является переменным. Именно

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^{\infty} (n-1) (x-t)^{n-2} \varphi(t) dt + \\ &+ \frac{(x-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \varphi(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-2)} \int_{x_0}^{\infty} (x-t)^{n-2} \varphi(t) dt; \end{aligned}$$

отсюда далее

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-3)} \int_{x_0}^{\infty} (x-t)^{n-3} \varphi(t) dt, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(t) dt$$

и

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x). \quad (7)$$

Следовательно, выражение (6) дает функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (7).

Формула интегрирования под знаком интеграла или интегрирования по параметру может быть получена при помощи формулы дифференцирования по параметру. Интегрируя функцию $f(x, \alpha)$ по x в пределах a и b , не зависящих от α , получим некоторую функцию $F(\alpha)$:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx. \quad (I)$$

Интегрируя эту функцию по α в пределах α_0 и α_1 , получим некоторое число V :

$$V = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left\{ \int_a^b f(x, \alpha) dx \right\} d\alpha. \quad (II)$$

Взяв ту же функцию $f(x, \alpha)$, интегрируем ее по α в пределах α_0 и α_1 , не зависящих от x , считая при этом интегрировании x постоянным, и получим некоторую функцию $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha. \quad (III)$$

Интегрируя $\Phi(x)$ по x в пределах a и b , получим некоторое число U :

$$U = \int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha \right\} dx. \quad (IV)$$

Докажем, что $U = V$, т. е.

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left\{ \int_a^b f(x, \alpha) dx \right\} d\alpha = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha \right\} dx. \quad (V)$$

Для доказательства будем рассматривать α_1 как число переменное, причем U и V будут функции от α_1 , и сперва докажем, что

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \frac{dU}{d\alpha_1}.$$

По формуле (II), взяв производную интеграла по верхнему пределу, найдем

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = F(\alpha_1) = \int_a^b f(x, \alpha_1) dx,$$

а по формуле (IV), применяя правило дифференцирования под знаком интеграла, найдем

$$\frac{dU}{d\alpha_1} = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha \right] dx,$$

$$\text{или, так как } \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha = f(x, \alpha_1), \text{ то } \frac{dU}{d\alpha_1} = \int_a^b f(x, \alpha_1) dx.$$

Следовательно,

$$\frac{dU}{d\alpha_1} = \frac{dV}{d\alpha_1}.$$

Отсюда следует, что $U - V = C$, где C от α_1 не зависит; но, при $\alpha_1 = \alpha_0$, $U = 0$ и $V = 0$, поэтому

$$C = 0 \text{ и } U = V,$$

что и требовалось доказать.

Формула (V) и называется *формулой интегрирования под знаком интеграла*. Выражения U и V называются *двойными интегралами* функции $f(x, \alpha)$ от двух независимых переменных x и α , взятыми между пределами a и b для x и между пределами α_0 и α_1 для α . Выражения U и V отличаются одно от другого *порядком интегрирований*. Формула (V) показывает, что при вычислении двойного интеграла, при постоянных пределах, можно изменить порядок интегрирований, не изменяя результата.

Замечание. О формуле (V) нужно заметить то же, что и о формуле (3), а именно: в случаях, когда $f(x, \alpha)$ делается разрывной

в пределах интегрирования, или когда пределы интегрирования бесконечны, формула (V) может быть несправедливой.

Справедливость формулы (V), в случае *непрерывности функции* $f(x, \alpha)$ *в конечных пределах интегрирования*, будет впоследствии показана еще иным путем, с помощью простых геометрических соображений.

§ 7. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов по параметру. В предыдущем параграфе мы установили формулы дифференцирования и интегрирования определенных интегралов по параметру для случаев, когда пределы интегралов—конечные числа и подинтегральные функции непрерывны. Мы уже отмечали, что эти формулы могут не иметь места для несобственных интегралов, т. е. для интегралов с бесконечными пределами, равно как в случае обращения подинтегральной функции в бесконечность. Таким образом возникает вопрос, при каких дополнительных условиях, накладываемых на сходящиеся несобственные интегралы, будут для них справедливы выведенные в прошлом параграфе формулы дифференцирования и интегрирования по параметру. Таким достаточным условием является понятие *равномерно сходящегося несобственного интеграла*, представляющее собой аналог известного понятия равномерно сходящегося ряда. С этим понятием мы и должны предварительно познакомиться. Предположим, что $f(x, \alpha)$ есть непрерывная функция относительно совокупности переменных x и α , изменяющихся в областях $x \geq \tilde{a}$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx \quad (1)$$

и допустим, что он сходится при всяком значении α из сегмента $[\alpha_0, \alpha_1]$. В этом случае мы в праве написать

$$\int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx = \int_a^l f(x, \alpha) dx + \int_l^{\infty} f(x, \alpha) dx,$$

где $l > a$ —любое число. В силу сходимости нашего интеграла, при данном значении α в сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$ мы можем, задав по произволу положительное число ε , указать такое число L , чтобы при $l \geq L$,

остаточный член интеграла (1) $\int_l^{\infty} f(x, \alpha) dx$ по абсолютной величине был меньше ε . Число L , обладающее тем свойством, что при $l \geq L$ имеем неравенство

$$\left| \int_l^{\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon, \quad (2)$$

может зависеть не только от ε , но и от выбранного в сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$ значения параметра α . Но часто бывает, что число L , начи-

ная с которого удовлетворяется неравенство (2), возможно принять одним и тем же при данной ε , каково бы ни было значение α в сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$. В этом случае говорят, что интеграл (1) равномерно сходящийся на данном сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Итак, по определению интеграл (1) называют равномерно сходящимся на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, если, во-первых, этот интеграл сходится во всякой точке этого сегмента и, во-вторых, для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число L , не зависящее от α , начиная с которого остаточный член

$\int_l^\infty f(x, \alpha) dx$ по абсолютной величине будет меньше ε , т. е.

$$\left| \int_l^\infty f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon \text{ при } l \geq L; \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1.$$

Нижеследующая теорема дает простое средство убедиться во многих случаях в равномерной сходимости интеграла.

Теорема. Интеграл $I(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ будет равномерно сходящимся на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, если для всех значений α в этом сегменте имеем

$$|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — интегрируемая функция в пределах от a до ∞ . Для доказательства, заметим прежде всего, что данный интеграл абсолютно сходится во всякой точке сегмента $[\alpha_0, \alpha_1]$. В самом деле, из неравенства $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ следует, что

$$\int_a^l |f(x, \alpha)| dx \leq \int_a^l \varphi(x) dx < \int_a^\infty \varphi(x) dx,$$

при неограниченном возрастании l , левая часть возрастает, оставаясь все время меньше постоянного числа $\int_a^\infty \varphi(x) dx$; следовательно, существует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l |f(x, \alpha)| dx = \int_a^\infty |f(x, \alpha)| dx.$$

что и доказывает абсолютную сходимость рассматриваемого интеграла.

Вследствие сходимости интеграла $\int_a^\infty \varphi(x) dx$, при произвольном заданном $\varepsilon > 0$, мы можем указать такое число L , чтобы при $l \geq L$

было $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx < \varepsilon$. С другой стороны, так как по условию теоремы $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ для всех значений α из сегмента $[\alpha_0, \alpha_1]$, то

$$\left| \int_1^{\infty} f(x, \alpha) dx \right| \leq \int_1^{\infty} |f(x, \alpha)| dx \leq \int_1^{\infty} \varphi(x) dx < \varepsilon,$$

при $l \geq L$, где L , в силу его определения, не зависит от α . Итак, доказано, что интеграл $I(\alpha)$ есть равномерно сходящийся. Пользуясь понятием равномерно сходящегося интеграла, мы можем распространить на интегралы с бесконечными пределами известные теоремы о непрерывности суммы ряда, его дифференцировании и интегрировании, что было уже сделано для обыкновенных интегралов.

ТЕОРЕМА I. Если интеграл $I(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, то он представляет непрерывную функцию на этом сегменте.

Возьмем последовательность неограниченно возрастающих чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и обозначим, считая $a_1 = a$,

$$u_l = \int_{a_l}^{a_{l+1}} f(x, \alpha) dx \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходящийся, и сумма его равна $I(\alpha)$, потому что сумма первых его членов

$$S_n = \int_a^{a_2} f(x, \alpha) dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x, \alpha) dx + \dots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, \alpha) dx = \int_a^{a_{n+1}} f(x, \alpha) dx$$

имеет пределом при $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx = I(\alpha).$$

Поэтому можно написать

$$I(\alpha) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Члены этого ряда являются функциями от α , непрерывными на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$ (§ 6). Далее, при нашем условии это — ряд равномерно сходящийся на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, потому что его остаточный

член $\int_{a_{n+1}}^{\infty} f(x, \alpha) dx$ удовлетворяет неравенству:

$$\left| \int_{a_{n+1}}^{\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon,$$

где ε — произвольно заданное положительное число, при $a_{n+1} \geq L$ или, что то же, при $n \geq N$, независимо от значения α в данном сегменте. По известной теореме о непрерывности суммы ряда мы заключаем, что $I(\alpha)$ есть непрерывная функция на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Теорема 2. Если интеграл $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} f(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, то

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, \alpha) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} d\alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha.$$

Последняя формула и дает обобщение правила интегрирования под знаком интеграла на случай бесконечного верхнего предела.

Для доказательства возьмем последовательность неограниченно возрастающих чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ и обозначим, считая $\alpha_1 = \alpha$,

$$u_l = \int_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} f(x, \alpha) dx \quad (l = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходящийся, и сумма его равна $I(\alpha)$, потому что сумма n первых его членов

$$S_n = \int_{\alpha}^{\alpha_2} f(x, \alpha) dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x, \alpha) dx + \dots + \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f(x, \alpha) dx = \int_{\alpha}^{\alpha_{n+1}} f(x, \alpha) dx;$$

имеет пределом при $n \rightarrow \infty$: $\int_{\alpha}^{\infty} f(x, \alpha) dx = I(\alpha)$; поэтому можно написать

$$I(\alpha) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Члены этого ряда являются функциями от α , непрерывными на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$. При нашем условии этот ряд равномерно сходящийся на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, потому что его остаточный член $\int_{\alpha_{n+1}}^{\infty} f(x, \alpha) dx$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_{\alpha_{n+1}}^{\infty} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon,$$

где ε — произвольно заданное положительное число, при $a_{n+1} \geq L$ или, что то же, при $n \geq N$, независимо от значения α в данном сегменте. По известной теореме об интегрировании рядов можем

написать

$$\int_{a_0}^{a_1} I(\alpha) d\alpha = \int_{a_0}^{a_1} u_1 d\alpha + \int_{a_0}^{a_1} u_2 d\alpha + \dots + \int_{a_0}^{a_1} u_n d\alpha + \dots$$

Заметив, что

$$\int_{a_0}^{a_1} u_n d\alpha = \int_{a_n}^{a_{n+1}} dx \int_{a_0}^{a_1} f(x, \alpha) d\alpha,$$

перепишем последний ряд в виде

$$\int_{a_0}^{a_1} I(\alpha) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} dx \int_{a_0}^{a_1} f(x, \alpha) d\alpha = \int_a^{\infty} dx \int_{a_0}^{a_1} f(x, \alpha) d\alpha,$$

что и требовалось доказать.

До сих пор мы считали функцию $f(x, \alpha)$ непрерывной относительно совокупности переменных x и α в области $x \geq a$, $a_0 \leq \alpha \leq a_1$. Допустим, сверх того, что $f'_\alpha(x, \alpha)$ удовлетворяет тому же условию непрерывности. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если интеграл $I(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx$ сходится на сегменте $[a_0, a_1]$, а интеграл $\int_a^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на том же сегменте, то

$$I'(\alpha) = \int_a^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Последняя формула и дает обобщение правила дифференцирования под знаком интеграла на случай бесконечного верхнего предела.

Для доказательства, возьмем последовательность неограниченно возрастающих чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и обозначим, считая $a_1 = a$,

$$u_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x, \alpha) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots).$$

Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходящийся и сумма его равна $I(\alpha)$, потому что сумма n первых его членов

$$S_n = \int_a^{a_1} f(x, \alpha) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x, \alpha) dx + \dots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, \alpha) dx = \int_a^{a_{n+1}} f(x, \alpha) dx$$

имеет пределом при $n \rightarrow \infty$: $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx = I(\alpha)$; поэтому можно написать

$$I(\alpha) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (3)$$

Члены этого ряда являются функциями от α с непрерывными производными на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Рассмотрим в то же время ряд

$$u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n + \dots, \quad (4)$$

где

$$u'_i = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f'_\alpha(x, \alpha) dx$$

есть производная от u_i по α .

Последний ряд сходящийся и сумма его равна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\alpha_{n+1}} f'_\alpha(x, \alpha) dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

При нашем условии этот ряд — равномерно сходящийся на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, потому что его остаточный член

$$\int_{\alpha_{n+1}}^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx$$

удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_{\alpha_{n+1}}^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon,$$

где ε произвольное положительное число, при $\alpha_{n+1} \geq L$ или, что то же, при $n \geq N$, независимо от значения α в данном сегменте. По известной теореме о дифференцировании рядов сумма ряда (4) есть производная суммы ряда (3), т. е.

$$\int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx = \frac{d}{d\alpha} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx,$$

что и требовалось доказать.

Вся изложенная теория непосредственно переносится на интегралы с конечными пределами, у которых подинтегральная функция является неограниченной в пределах интеграла, например, обращается в бесконечность.

Для определенности допустим, что $f(x, \alpha)$ непрерывна относительно совокупности переменных x и α в области $a \leq x < b$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, становясь неограниченной вблизи $x = b$.

Определение. Интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ называют равномер-
но сходящимся на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, если во-первых, этот интеграл
сходится во всякой точке этого сегмента, и, во-вторых для всякого
сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число δ , не зави-
сющее от α , что интеграл $\int_{b-\eta}^b f(x, \alpha) dx$ по абсолютной величине
будет меньше ε , т. е. $\left| \int_{b-\eta}^b f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon$ при всяком η , лежа-
щем между нулем и δ , и всяком значении α из сегмента $[\alpha_0, \alpha_1]$.
Пользуясь этим понятием и применяя рассуждения, использованные
нами при анализе интеграла с бесконечным верхним пределом, легко
установить следующие теоремы:

1. Интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ будет равномерно сходящимся
на сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, если для всех значений α в этом сегменте
имеем

$$|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x), \text{ где } a \leq x < b,$$

причем $\varphi(x)$ — интегрируемая функция в пределах от a до b .

2. Если интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на
сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, то он представляет непрерывную функцию на
этом сегменте.

3. Если интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на
сегменте $[\alpha_0, \alpha_1]$, то

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha) d\alpha.$$

В этих теоремах мы считаем функцию $f(x, \alpha)$ непрерывной в обла-
сти $a \leq x < b$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ и неограниченной вблизи $x = b$. Допу-
стим, сверх того, что $f'_\alpha(x, \alpha)$ удовлетворяет тем же условиям.
Тогда имеет место теорема.

4. Если интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ сходится на сегмент

$[\alpha_0, \alpha_1]$, а интеграл $\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx$ равномерно сходится на том же сегменте, то

$$I'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

§ 8. Вычисление определенных интегралов методами дифференцирования и интегрирования по параметру.

1) Найдем $J = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx$ при a и $b > 0$.

Взяв производную по a , находим

$$\frac{dJ}{da} = - \int_0^1 \frac{x^{a-1} \ln x}{\ln x} dx = - \int_0^1 x^{a-1} dx = - \frac{1}{a}.$$

Отсюда

$$J = - \int \frac{da}{a} = - \ln a + C,$$

где C не зависит от a . При $a = b$, $J = 0$, поэтому $C = \ln b$, $J = \ln \frac{b}{a}$,

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx = \ln \frac{b}{a} \quad (a \text{ и } b > 0).$$

Положив здесь $\ln x = -y$, найдем после очевидных упрощений

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay} - e^{-by}}{y} dy = \ln \frac{b}{a} \quad (a \text{ и } b > 0).$$

Примечание. Выполненная здесь операция дифференцирования является законной, потому что интеграл J сходится при a и $b > 0$, а интеграл

$\int_0^1 x^{a-1} dx$ равномерно сходится для $1 \geq a \geq \varepsilon > 0$. В самом деле, считая $1 \geq a \geq \varepsilon$, имеем $x^{a-1} \leq x^{\varepsilon-1}$, где $x^{\varepsilon-1}$ интегрируема в пределах от 0 до 1.

2) Найти $J = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta$.

Введем параметр α , взяв вместо J более общее выражение

$$F(\alpha) = \int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos \theta} \cos(\alpha \sin \theta) d\theta;$$

тогда $J = F(1)$. Взяв производную по α , находим

$$F'(\alpha) = \int_0^{2\pi} [e^{\alpha \cos \theta} \cos(\alpha \sin \theta) \cos \theta - e^{\alpha \cos \theta} \sin(\alpha \sin \theta) \sin \theta] d\theta. \quad (1)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos \theta} \cos(\alpha \sin \theta) \cos \theta d\theta &= \\ &= \left[\frac{e^{\alpha \cos \theta} \sin(\alpha \sin \theta)}{\alpha} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin(\alpha \sin \theta) e^{\alpha \cos \theta} \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Замечая справедливость следующего равенства:

$$\left[\frac{e^{\alpha \cos \theta} \sin(\alpha \sin \theta)}{\alpha} \right]_0^{2\pi} = 0$$

и, подставляя (2) в (1), получим

$$F'(\alpha) = \int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos \theta} \sin(\alpha \sin \theta) \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos \theta} \sin(\alpha \sin \theta) \sin \theta d\theta,$$

т. е.

$$F'(\alpha) = 0, \quad F(\alpha) = \text{const.}$$

При $\alpha = 0$: $F(0) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. Следовательно, при всяком α ,

$$F(\alpha) = 2\pi,$$

$$J = F(1) = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi.$$

3) Из равенства

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

дифференцированием по α можно вывести новые формулы. Например:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = - \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Дифференцируя $(n-1)$ раз, найдем

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{\alpha^n} \quad (\alpha > 0).$$

Положив $\alpha = 1$, получим при n целом и положительном

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1).$$

Примечание. Операция дифференцирования может быть применена, потому что все интегралы вида $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{n-1} dx$ суть равномерно сходящиеся относительно α при $\alpha \geq \alpha_0$. Действительно, $e^{-\alpha x} x^{n-1} \leq e^{-\alpha_0 x} x^{n-1}$, причем функция $e^{-\alpha_0 x} x^{n-1}$ является интегрируемой в пределах от 0 до $+\infty$.

4) Из известной формулы, получающейся интегрированием по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\alpha > 0),$$

находим, умножая на $d\alpha$ и интегрируя по α от нуля до бесконечности:

$$U = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx \right] d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\beta d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \left[\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{при } \beta > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \beta < 0. \end{cases}$$

Переменив порядок интегрирования:

$$U = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x d\alpha \right) dx$$

и замечая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x d\alpha = \sin \beta x \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} d\alpha = \sin \beta x \left[-\frac{e^{-\alpha x}}{x} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} = \frac{\sin \beta x}{x},$$

находим

$$U = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

и, сравнивая это выражение U с полученным раньше, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2} \quad (+ \text{ при } \beta > 0, \quad - \text{ при } \beta < 0). \quad (3)$$

Примечание. Перемена порядка интегрирования здесь возможна, потому что интеграл $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx$ равномерно сходится относительно a при $a \geq \epsilon > 0$. Действительно

$$|e^{-ax} \sin bx| \leq e^{-ax}$$

и функция e^{-ax} интегрируема в пределах от 0 до ∞ . Поэтому, строго говоря, следовало бы интегрировать по a в пределах от $\epsilon > 0$ до ∞ , а затем в результате устремить ϵ к нулю.

Из этой формулы можно вывести другую формулу, дающую выражение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a \text{ и } b > 0).$$

Замечая, что

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} \{ \sin (a+b)x + \sin (a-b)x \},$$

получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin (a+b)x}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin (a-b)x}{x} dx \right\}.$$

Отсюда, если $a > b$, то, по формуле (3):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Если выполнено неравенство $a < b$, т. е. $a - b < 0$, то мы получаем равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = 1 \quad \text{или} \quad 0,$$

смотря по тому, будет ли $a > b$ или $a < b$.

При $a = b$ имеем $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos ax}{x} dx = \frac{1}{2}.$

Этим интегралом (разрывным множителем) при исследовании многих вопросов пользовался Дирихле; поэтому этот интеграл часто называют разрывным множителем Дирихле.

5) Найдем $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Положив $x = at$ ($a > 0$), находим

$$J = \int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} a dt;$$

умножая на $e^{-a^2} da$, интегрируя по a от 0 до $+\infty$ и меняя порядок интегрирований в правой части, получим

$$\int_0^{\infty} J e^{-a^2} da = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a^2(1+t^2)} a da \right\} dt. \quad (4)$$

В левой части имеем

$$J \cdot \int_0^{\infty} e^{-a^2} da = J \cdot J = J^2;$$

в правой интегрирование по a дает

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2(1+t^2)} a da = \left[-\frac{1}{2} \frac{e^{-(1+t^2)a^2}}{1+t^2} \right]_{a=0}^{a=\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2};$$

поэтому из (4) выводим

$$J^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получаем

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Примечание. Перемена порядка интегрирования здесь законна, потому что

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2(1+t^2)} a dt$$

равномерно сходится относительно a при $\varepsilon \leq a \leq l$. Действительно,

$$e^{-a^2(1+t^2)} a \leq l e^{-\varepsilon^2(1+t^2)},$$

а функция $l e^{-\varepsilon^2(1+t^2)}$ интегрируема в пределах от 0 до ∞ . Поэтому, строго говоря, следовало бы интегрировать по a в пределах от ε до l , а затем в результате ε устремить к нулю, а l к бесконечности.

Заменяя x через ax , где $a > 0$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad (k > 0).$$

Из формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a}^{-\frac{1}{2}}$$

получаем, дифференцируя n раз по a , формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} a^{-(n+\frac{1}{2})},$$

а положив здесь $a=1$, находим

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n}.$$

6) Найдем

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx \, dx}{1+x^2} \quad \text{при } b > 0,$$

пользуясь разрывным множителем Дирихле. Обозначая

$$U = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$$

и замечая, что $U=1$, при $a > b$, $U=0$, при $a < b$, берем

$$V = \int_0^{\infty} U e^{-a} da = \int_0^b U e^{-a} da + \int_b^{\infty} U e^{-a} da = \int_b^{\infty} e^{-a} da = e^{-b},$$

потому что, пока a изменяется от 0 до b , $U=0$, а когда a изменяется от b до ∞ , $U=1$. С другой стороны,

$$V = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \right\} e^{-a} da.$$

Меняя порядок интегрирований, находим

$$V = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-a} \sin xa \, da \right\} \frac{\cos bx}{x} dx.$$

Интегрирование по a выполняется по формуле

$$\int_0^{\infty} e^{-az} \sin \beta z \, dz = \frac{\beta}{a^2 + \beta^2},$$

которая через замену z на x , β на a и a на 1 дает

$$\int_0^{\infty} e^{-a} \sin xa \, da = \frac{x}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{1+x^2} dx = e^{-b} \quad \text{или} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-b}. \quad (5)$$

При $b < 0$ будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^b.$$

Из (5), дифференцированием по b , найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-b} \quad (b > 0).$$

7) Иногда дифференцирование по параметру некоторого интеграла

$$U = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

не дает непосредственного выражения $\frac{dU}{d\alpha}$ в виде такой функции от α , которую умеем интегрировать, но приводит к дифференциальному уравнению, которое умеем интегрировать, и этим путем также пользуются для нахождения U .

Примеры

$$1. \quad U = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \, dx.$$

Дифференцируя по b , получаем

$$\frac{dU}{db} = -2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x \sin 2bx \, dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{\infty} \sin 2bx e^{-a^2 x^2} 2x \, dx = \left[\frac{\sin 2bx e^{-a^2 x^2}}{-a^2} \right]_0^{\infty} + \frac{2b}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \, dx,$$

т. е. $\frac{dU}{db} = -\frac{2b}{a^2} U$. Отсюда $\frac{dU}{U} = -\frac{2b \, db}{a^2}$; следовательно

$$\ln U = -\frac{b^2}{a^2} + \ln C \quad \text{или} \quad U = C e^{-\frac{b^2}{a^2}}, \quad (6)$$

где C не зависит от b . При $b=0$ имеем

$$U = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi},$$

а по (6) найдем:

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\pi} = C.$$

Окончательно находим

$$U = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Примечание. Дифференцирование по параметру b здесь законно, потому что интеграл U сходится, и интеграл $\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} x \sin 2bx \, dx$ равномерно сходится относительно b . В самом деле, $|e^{-a^2x^2} \sin 2bx| \leq xe^{-a^2x^2}$ и функция $xe^{-a^2x^2}$ интегрируема в пределах от 0 до ∞ .

$$2. \quad U = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx; \quad \frac{dU}{da} = - \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \frac{2a \, dx}{x^3}.$$

Положив $y = \frac{a}{x}$, $dy = -\frac{a \, dx}{x^2}$, ($a > 0$), найдем

$$\frac{dU}{da} = +2 \int_{\infty}^0 e^{-y^2 - \frac{a^2}{y^2}} dy = -2 \int_0^{\infty} e^{-y^2 - \frac{a^2}{y^2}} dy = -2U,$$

откуда

$$\frac{dU}{U} = -2da; \quad \ln U = -2a + \ln C; \quad U = Ce^{-2a}.$$

При $a = 0$:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

поэтому

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

и

$$U = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-2a} \quad (a > 0).$$

Примечание. Мы имели право дифференцировать по параметру a , так как интеграл U сходится, а интеграл, полученный после дифференцирования, т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \frac{2a \, dx}{x^3},$$

сходится равномерно относительно a , принадлежащего сегменту $[\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta$.

Действительно,

$$e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \frac{2a}{x^3} \leq \frac{2\beta}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}},$$

а функция $\frac{1}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}$ интегрируема в пределах от 0 до $+\infty$. Кроме того,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

В самом деле, интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$ существует при любом положительном значении a . Точно так же имеет смысл и интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Возьмем какое-нибудь положительное число ε и докажем, что существует такое положительное число η , что при

$$0 < a \leq \eta$$

имеет место неравенство

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx - \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right| < \varepsilon.$$

А это и покажет, что доказываемое нами равенство верно. Для доказательства оценим разность

$$D = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx.$$

Очевидно,

$$0 < \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{\infty} (e^{-x^2} - e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}) dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx = \\ &= \int_0^{\delta} e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx + \int_{\delta}^N e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx + \int_N^{+\infty} e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx, \end{aligned}$$

где δ и N — любые положительные числа, причем $\delta < N$. Легко видно, что

$$\int_0^{\delta} e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx < \int_0^{\delta} e^{-x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_N^{+\infty} e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx < \int_N^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Таким образом,

$$D < \int_0^{\delta} e^{-x^2} dx + \int_{\delta}^N e^{-x^2} (1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}) dx + \int_N^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Возьмем δ таким маленьким, а N таким большим, чтобы

$$\int_0^{\delta} e^{-x^2} dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \int_N^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Считая δ и N зафиксированными, видим, что в интеграле

$$\int_{\delta}^N e^{-x^2} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}\right) dx$$

подинтегральная функция непрерывна относительно x и параметра a , изменяющегося на сегменте $[0, \omega]$, где ω — любое положительное число. Значит этот интеграл непрерывен при $a=0$. Но при $a=0$ он обращается в 0. Следовательно, есть такое положительное число η , что при $0 < a \leq \eta$ имеем

$$\int_{\delta}^N e^{-x^2} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{x^2}}\right) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при $0 < a \leq \eta$ имеют место неравенства

$$0 < D < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

§ 9. Эйлеровы интегралы. I. Основное свойство функций $\Gamma(p)$ и связь между функциями $\Gamma(p)$ и $B(p, q)$.

Во многих отделах математического анализа большую роль играют следующие определенные интегралы

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad \text{и} \quad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Эти интегралы называются *эйлеровскими интегралами, соответственно, первого и второго рода*. Как мы уже видели (гл. V, § 5), первый интеграл имеет смысл для всех положительных значений p и q , второй имеет смысл тоже при $p > 0$. Интегрируя по частям выражение $\Gamma(p)$, считая при этом $p > 1$, найдем

$$\Gamma(p) = [-x^{p-1} e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (p-1) e^{-x} x^{p-2} dx = (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx.$$

Новый интеграл определяет собой, очевидно, функцию $\Gamma(p-1)$; таким образом получаем основное свойство функции $\Gamma(p)$, выражаемое в виде соотношения:

$$\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1). \quad (1)$$

Эта формула показывает, что для составления таблиц значений функции $\Gamma(p)$ достаточно ограничиться значениями p , лежащими в интервале $(0, 1)$. Пусть, в частности, $p = n$, где $n > 1$ — целое число. Применяя $n-1$ раз формулу (1), отправляясь от $\Gamma(1)$ получим

$$\Gamma(n) = (n-1)! \Gamma(1),$$

но $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, и, значит,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (2)$$

Для вывода формулы, выражающей функцию $B(p, q)$ через Γ , выполним в интеграле

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

преобразование переменной помощью подстановки $x = ay$, где $a > 0$. Тогда получим

$$\Gamma(p) = a^p \int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-ay} dy$$

или

$$\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx. \quad (3)$$

Выполним теперь в интеграле

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

преобразование переменной помощью подстановки $x = \frac{y}{1+y}$, откуда $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$. Тогда получим

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{p+q}}.$$

Заменяя в равенстве (3) p через $p+q$ и a через $1+y$, перепишем его в виде

$$\frac{1}{(1+y)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} e^{-(1+y)x} x^{p+q-1} dx.$$

Умножив обе части этого равенства на $y^{p-1} dy$ и проинтегрировав результат в пределах от $y=0$ до $y=\infty$, получим

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} y^{p-1} dy \int_0^{\infty} e^{-(1+y)x} x^{p+q-1} dx. \quad (4)$$

Можно доказать, что изменение порядка интегрирований в (4) законно.

Выполняя эту перестановку интегрирований в соотношении (4), получим

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{p+q-1} \int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-(1+y)x} dy.$$

Заметив, что по формуле (3)

$$\int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-(1+y)x} dy = e^{-x} \frac{\Gamma(p)}{x^p},$$

получим

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-x} dx \quad \text{или} \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (5)$$

Эта формула выражает связь между функциями $B(p, q)$ и $\Gamma(p)$; из нее между прочим усматривается симметричность функции $B(p, q)$ относительно аргументов, т. е.

$$B(p, q) = B(q, p).$$

2. Разложение функции $\Gamma(p)$ в бесконечное произведение (формула Гаусса).

Будем отталкиваться от равенства (3):

$$\Gamma(p) = a^p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx, \quad a > 0.$$

Суживая интервал интегриации до $(0, 1)$, мы получим меньший интеграл, так как подинтегральная функция положительна, т. е.

$$\Gamma(p) > a^p \int_0^1 e^{-ax} x^{p-1} dx.$$

Разложим теперь e^{-x} по формуле Тейлора с остаточным членом Лагранжа:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} e^{-\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как третье слагаемое положительное, то

$$e^{-x} > 1 - x \quad \text{и} \quad e^{-ax} > (1 - x)^a;$$

значит,

$$\Gamma(p) > a^p \int_0^1 (1 - x)^a x^{p-1} dx$$

или

$$\Gamma(p) > a^p B(p, a+1). \quad (6)$$

Чтобы ограничить $\Gamma(p)$ сверху, воспользуемся неравенством

$$e^x > 1 + x,$$

из которого по возведении в степень $-b$, где $b > 0$, получим

$$e^{-bx} < (1+x)^{-b}.$$

Отсюда имеем на основании формулы (3)

$$\Gamma(p) < b^p \int_0^{\infty} (1+x)^{-b} x^{p-1} dx.$$

Полагая здесь $y = \frac{x}{1+x}$, получим окончательно

$$\Gamma(p) < b^p \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{b-p-1} dy = b^p B(p, b-p). \quad (7)$$

Соединяя неравенства (6) и (7), находим

$$a^p B(p, a+1) < \Gamma(p) < b^p B(p, b-p), \quad (8)$$

где $b > p$. До сих пор числа a и $b-p$ были произвольными положительными числами. Теперь положим $a=n$, где $n > 0$ — целое число, $b-p=n+1$. Тогда неравенства запишутся так:

$$n^p B(p, n+1) < \Gamma(p) < (n+1+p)^p B(p, n+1)$$

или

$$1 < \frac{\Gamma(p)}{n^p B(p, n+1)} < \left(1 + \frac{1+p}{n}\right)^p;$$

откуда

$$0 < \left[\frac{\Gamma(p)}{n^p B(p, n+1)} \right]^{\frac{1}{p}} - 1 < \frac{p+1}{n}$$

или

$$0 < \frac{\left[\frac{\Gamma(p)}{n^p B(p, n+1)} \right]^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{p+1}{n}} < 1.$$

Это показывает, что средняя часть неравенств равна некоторому положительному числу $0 < 1$

$$\frac{\left[\frac{\Gamma(p)}{n^p B(p, n+1)} \right]^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{p+1}{n}} = 0,$$

откуда

$$\Gamma(p) = n^p B(p, n+1) \left(1 + \frac{p+1}{n} \theta\right)^p.$$

Раскрывая $B(p, n+1)$ по формулам (5) и (1), найдем

$$B(p, n+1) = \frac{n! \Gamma(p)}{\Gamma(p+n+1)} = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1) \dots p};$$

после чего можем написать

$$\Gamma(p) = \frac{n^p n!}{p(p+1) \dots (p+n)} \left(1 + \frac{p+1}{n} \theta\right)^p.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, найдем окончательно

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^p n!}{p(p+1) \dots (p+n)} \right]. \quad (8')$$

Это и есть формула Гаусса для разложения функции $\Gamma(p)$ в бесконечное произведение. Мы преобразуем эту формулу к более симметричному виду, для чего мы должны предварительно познакомиться с одним замечательным числом, называемым Эйлеровой постоянной.

3. Постоянная Эйлера и формула Вейерштрасса. Известно, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расходится, а потому сумма $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ первых n членов его неограниченно возрастает вместе с n ; тем же свойством обладает $\ln n$. Мы увидим, что разность $S_n - \ln n$ при неограниченном возрастании стремится к определенному конечному пределу, который и называется постоянной Эйлера. Чтобы доказать существование упомянутого предела, разложим функцию $\ln(1+x)$ по формуле Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+\theta x)^2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Полагая в этом равенстве $x = \frac{1}{n}$, получим

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)^2}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Полагая здесь n равным последовательно 1, 2, ..., $(n-1)$, найдем

$$\ln 2 - \ln 1 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_1}{1}\right)^2},$$

$$\ln 3 - \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right)^2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\ln n - \ln(n-1) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_{n-1}}{n-1}\right)^2}.$$

Складывая почленно эти равенства, найдем

$$\ln n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 \left(1 + \frac{\theta_k}{k}\right)^2}.$$

Прибавляя к общим частям по $\frac{1}{n}$, получим

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 \left(1 + \frac{\theta_k}{k}\right)^2};$$

откуда в пределе при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \ln n \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 \left(1 + \frac{\theta_k}{k}\right)^2}.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \left(1 + \frac{\theta_k}{k}\right)^2}$ сходится, то правая часть последнего равенства есть конечное положительное число C . Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \ln n \right] = C. \quad (9)$$

Это число C и есть постоянная Эйлера. До сих пор о природе постоянной C ничего неизвестно: мы не знаем — есть ли это число рациональное или иррациональное, алгебраическое или трансцендентное.

C точно известно до двадцатого десятичного знака

$$C = 0,57721566490153286060 \dots$$

Согласно формуле Гаусса

$$\Gamma(p) = \frac{n^p n!}{p(p+1) \dots (p+n)} \left(1 + \frac{p+1}{n} \theta\right)^p, \quad 0 < \theta \leq 1.$$

Входящий сюда множитель n мы можем представить так:

$$n^p = e^{p \ln n} = e^{p \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - O - \varepsilon_n \right]} = e^{\frac{p}{1}} \cdot e^{\frac{p}{2}} \dots e^{\frac{p}{n}} \cdot e^{-Cp} \cdot e^{-p \varepsilon_n},$$

где число ε_n определяется условием

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = C + \varepsilon_n$$

и, значит, стремится к нулю при неограниченно растущем n . Внося n^p в формулу Гаусса, придадим ей вид

$$\Gamma(p) = \frac{e^{-Op} \cdot e^{-n^p}}{p \left(1 + \frac{p}{1}\right) e^{-\frac{p}{1}} \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{-\frac{p}{2}} \dots \left(1 + \frac{p}{n}\right) e^{-\frac{p}{n}}} \left[1 + \frac{p+1}{n} \theta\right]^p,$$

или

$$\Gamma(p) = \frac{e^{-Op}}{p \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p}{k}\right) e^{-\frac{p}{k}}} e^{-n^p} \left(1 + \frac{p+1}{n} \theta\right)^p;$$

откуда переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$ находим формулу Вейерштрасса:

$$\Gamma(p) = \frac{1}{e^{Op} p \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{k}\right) e^{-\frac{p}{k}}}. \quad (10)$$

4. Формула Стирлинга. Формула Стирлинга имеет целью дать приближенное значение для $n!$. При выводе ее удобно исходить от эйлерова интеграла второго рода:

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Прежде всего найдем наибольшее значение подинтегральной функции. Для этого приравняем нулю ее производную:

$$(x^n e^{-x})' = x^{n-1} e^{-x} (n - x) = 0,$$

откуда

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = n.$$

Так как при прохождении x через n первая производная меняет знак с $+$ на $-$, то рассматриваемая функция при $x = n$ достигает максимума; с другой стороны, наша функция на концах интервала $(0, \infty)$ обращается в нуль, и, следовательно, максимум функции, достигаемый при $x = n$, равный $e^{-n} n^n$, будет наибольшим ее значением при изменении x от 0 до $+\infty$.

Выполним теперь преобразование переменной, полагая

$$e^{-x} x^n = e^{-n} n^n e^{-t^2}. \quad (11)$$

Посмотрим, каковы будут пределы интегрирования по новой переменной t . Когда x возрастает от 0 до n , то левая часть уравнения (11) возрастает от 0 до $e^{-n} n^n$, следовательно, t при этом растет от $-\infty$ до нуля, когда же x возрастает от n до $+\infty$, то левая часть уравнения (11) убывает от $e^{-n} n^n$ до нуля, значит, t должно расти от 0

до бесконечности. Это показывает, что пределами по t будут $-\infty$ и $+\infty$. Поэтому имеем

$$n! = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} n^n e^{-t} \frac{dx}{dt} dt \quad \text{или} \quad n! = e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt} dt.$$

Чтобы выразить $\frac{dx}{dt}$ через t , дифференцируем уравнение (11):

$$e^{-x} x^{n-1} (n-x) dx = -e^{-n} n^n \cdot 2te^{-t} dt;$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2e^{-n} n^n te^{-t}}{e^{-x} x^{n-1} (x-n)}.$$

Пользуясь равенством (11), придадим последнему выражению следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{x-n} = \frac{2t}{1-\frac{n}{x}}.$$

Таким образом

$$n! = 2e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \frac{t dt}{1-\frac{n}{x}}.$$

Остается определить $1-\frac{n}{x}$ в функции от t . С этой целью, логарифмируем равенство (11):

$$-x + n \ln x = -n + n \ln n - t^2,$$

или

$$\ln \frac{x}{n} = \frac{x}{n} - 1 - \frac{t^2}{n}.$$

Развернем левую часть по формуле Тэйлора, ограничиваясь двумя членами

$$\ln \frac{x}{n} = \ln \left[\left(\frac{x}{n} - 1 \right) + 1 \right] = \left(\frac{x}{n} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} - 1 \right)^2 \left[1 + \theta \left(\frac{x}{n} - 1 \right) \right]^{-2}$$

Подставляя это разложение в предыдущее равенство, найдем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} - 1 \right)^2 \frac{1}{\left[1 + \theta \left(\frac{x}{n} - 1 \right) \right]^2} = \frac{t^2}{n},$$

откуда

$$\frac{x}{n} - 1 = \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}} : \left[1 - \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \theta \right],$$

и, значит,

$$\frac{x}{n} = \frac{\sqrt{n} + t\sqrt{2}(1-\theta)}{\sqrt{n} - t\sqrt{2}\theta}, \quad \text{а} \quad 1 - \frac{n}{x} = \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{n} + t\sqrt{2}(1-\theta)}.$$

Подставляя это в наш интеграл, будем иметь

$$n! = \sqrt{2} e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{n} + t \sqrt{2} (1 - \theta)] e^{-t^2} dt$$

или

$$n! = \sqrt{2} e^{-n} n^n \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + 2e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} (1 - \theta) dt.$$

Первый интеграл мы знаем точно (см. § 8, прим. 5), а именно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Что касается второго интеграла, то вследствие присутствия множителя $1 - \theta$, его нельзя точно вычислить, но можно установить его верхнюю границу. В самом деле, так как $0 < \theta < 1$, то, заменив θ нулем, получим неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} (1 - \theta) dt \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt = 1.$$

Таким образом интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} (1 - \theta) dt$$

(обозначим его через ω) по абсолютной величине меньше 1. После всего сказанного будем иметь

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{n} \left[\sqrt{2\pi} + \frac{2\omega}{\sqrt{n}} \right].$$

Из этой формулы мы усматриваем, что отношение

$$n! : e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

стремится к единице, когда n неограниченно возрастает. Отсюда получаем приближенную формулу Стирлинга:

$$n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

Упражнения

$$1. \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx.$$

$$\text{Отв. } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Указание. Предварительно установить формулу приведения и воспользоваться формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

Отв. 0,7468, если возьмем первые семь членов разложения.

3. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$

Отв. $\frac{\pi^2}{12}.$

Указание. Разложить в ряд и воспользоваться формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. $\int_a^b [(x-a)(b-x)]^{-1/2} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x-a} + \frac{\beta^2}{b-x}\right)} dx.$

Отв. $\sqrt{\pi} \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} (b-a)^{-1/2} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}.$

Указание. Положить $\frac{x-a}{b-x} = \frac{\alpha}{\beta} e^{2t}.$

5. $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0.$

Отв. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} \cdot a^{\frac{2n+1}{2}}} \sqrt{\pi}.$

Указание. Вывести формулу приведения и воспользоваться формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{[\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x]^2}.$

Отв. $\frac{\pi}{4|\alpha\beta|} \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right].$

Указание. Воспользоваться легко проверяемой формулой

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2|\alpha\beta|}.$$

7. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1+x^2)} dx.$

Отв. $\frac{\pi}{2} \ln(1+a).$

8. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$

Отв. $\frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}).$

9. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2} dx, \quad a \text{ и } b > 0.$

Отв. $\frac{\pi}{b} \ln(1+ab).$

10. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx dx, \quad \alpha \text{ и } \beta > 0.$

Отв. $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{b}.$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha \text{ и } \beta > 0. \quad \text{Омс. } \frac{\pi}{2} (\beta - \alpha).$$

$$12. \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \parallel \int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\operatorname{tg} x}. \quad \text{Омс. } \frac{\pi}{2} \ln(1 + \alpha) \text{ и } \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Указание. Воспользоваться формулой

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2(1 + \alpha)}.$$

$$13. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx. \quad \text{Омс. } -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Указание. Воспользоваться результатом задачи 12.

$$14. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx. \quad \text{Омс. } \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Указание. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

$$15. \text{Исходя из равенства } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}, \quad a > 0, \text{ найти величину интеграла}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

$$\text{Омс. } \frac{\pi}{2a^{2n-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

16. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin 2tx}{t} dt = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Указание. Воспользоваться методом дифференцирования по параметру.

$$17. \text{Доказать, что } \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2\beta x dx = e^{-\beta^2} \int_0^{\beta} e^{-x^2} dx.$$

Указание. То же, что к задаче 16.

$$18. \text{Исходя из равенства } \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ при } a > 0, \text{ найти величину}$$

$$\text{интеграла } \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx \text{ при } a > 0, b > 0. \quad \text{Омс. } \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}.$$

19. Выразить через функцию Γ интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. *Отв.* $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

20. Найти суммы бесконечных рядов:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} - \dots,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \dots$$

$$\text{Отв. } S_1 = \int_0^1 \frac{(1+x)dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2, \quad S_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Указание. Воспользоваться формулой: $\frac{1}{m+1} = \int_0^1 x^m dx, \quad m > 0$.

21. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{x^n + 1}$.

Отв. Сходящийся при $x > 1$ и расходящийся при $x \leq 1$.

22. Исследовать сходимость ряда с общим членом

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Отв. Сходящийся при $x > 1$, расходящийся при $x \leq 1$.

23. Полагая $X_n = \frac{1}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, вывести формулу

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Указание. Применяя n раз интегрирование по частям к $\int_{-1}^{+1} X_n X_n dx$, находим

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n)}{2^{2n} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx,$$

а подстановка $x = 2z - 1$ приводит интеграл правой части к

$$\frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} \Gamma^2(n+1)}{\Gamma(2n+2)}.$$

По упрощении получим окончательный ответ.

24. Найти $\int_0^{\pi/2} \ln(\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta) d\theta, \quad \alpha$ и $\beta > 0$. *Отв.* $\pi \ln \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}$.

Указание. Продифференцировать по α и вычислить полученный интеграл, положив $\lg \theta = z$. Затем проинтегрировать полученную формулу по α и определить постоянную интегрирования, полагая $\alpha = 0$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Разыскание функции от нескольких переменных по данному полному ее дифференциалу. I. Положим, что дано выражение вида

$$M dx + N dy, \quad (1)$$

где M и N —данные функции от двух независимых переменных x и y . Спрашивается: при каком условии такое выражение можно рассматривать как полный дифференциал некоторой функции U от двух независимых переменных x и y ?

Допустим, что такая функция U существует; полный дифференциал ее, как известно, выражается следующим образом:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy. \quad (2)$$

Следовательно,

$$M dx + N dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

откуда

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial U}{\partial y},$$

так как x и y —независимые переменные, и, следовательно, dx и dy —совершенно произвольные величины. Из этих равенств вытекает, что

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

а замечая, что $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, находим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3)$$

Итак, если выражение $M dx + N dy$ есть полный дифференциал некоторой функции от двух независимых переменных, то необходимо имеет место тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Покажем теперь, что это условие не только необходимо, но и достаточно, т. е. что если условие (3) имеет место, то всегда можно найти такую функцию U , для которой

$$dU = M dx + N dy,$$

или, что все равно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N. \quad (4)$$

Будем искать функцию U , удовлетворяющую первому из условий (4); мы знаем, что самое общее выражение всех функций, ему удовлетворяющих, есть

$$U = \int M dx + \varphi(y), \quad (5)$$

где $\int M dx$ есть один из интегралов от $M dx$, в котором y рассматривается как постоянная, а $\varphi(y)$ — постоянная относительно x , т. е. функция одного y . Из выражений, заключающихся в формуле (5), постараемся найти такое, которое бы удовлетворяло и второму из условий (4). Взяв производную от U по y , находим

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + \varphi'(y);$$

это выражение должно быть равно N , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M dx + \varphi'(y) = N. \quad (6)$$

Если из этого уравнения можно найти функцию $\varphi(y)$, то, найдя ее и подставив в (5), найдем и функцию U , удовлетворяющую обоим поставленным условиям. Но из (6) имеем

$$\varphi'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx; \quad (7)$$

такое уравнение возможно лишь тогда, когда правая часть есть функция одного y , т. е. не зависит от x , а из этого следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right\} = 0. \quad (8)$$

Легко видеть, что это условие действительно имеет место, если выполнено условие (3). В самом деле

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$$

есть функция одного y .

Уравнение (7) может служить для определения функции $\varphi(y)$ и даст

$$\varphi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy + C,$$

где C — постоянная. Подставляя в (5), находим самое общее выражение искомой функции U , а именно:

$$U = \int M dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy + C. \quad (9)$$

Примеры

1. $dU = (2x \sin y - y^2 \sin x) dx + (x^2 \cos y + 2y \cos x + 1) dy.$

$$M = 2x \sin y - y^2 \sin x, \quad N = x^2 \cos y + 2y \cos x + 1;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos y - 2y \sin x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos y - 2y \sin x; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$U = \int (2x \sin y - y^2 \sin x) dx + \varphi(y), \quad U = x^2 \sin y + y^2 \cos x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \cos y + 2y \cos x + \varphi'(y) = N;$$

$$x^2 \cos y + 2y \cos x + \varphi'(y) = x^2 \cos y + 2y \cos x + 1,$$

$$\varphi'(y) = 1, \quad \varphi(y) = y + C,$$

$$U = x^2 \sin y + y^2 \cos x + y + C.$$

2. $dU = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy,$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y,$$

$$U = \int \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right] dx + \varphi(y) = \sqrt{x^2 + y^2} + yx + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x + \varphi'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x; \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = C,$$

$$U = \sqrt{x^2 + y^2} + yx + C.$$

II. Рассмотрим теперь общий вопрос. Дано выражение

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ — данные от них функции. При каких условиях данное выражение есть полный дифференциал и как найти ту функцию U , для которой

$$dU = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n? \quad (10)$$

Если существует функция U , полный дифференциал которой равен данному выражению, то, обозначая через i и k любые два числа из ряда $1, 2, 3, \dots, n$, будем иметь

$$p_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad p_k = \frac{\partial U}{\partial x_k},$$

откуда

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i},$$

следовательно,

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}. \quad (11)$$

Условия (11), число которых равно $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, будут необходимыми условиями интегрируемости выражения (10). Достаточность этих условий докажется тем, что при выполнении их функцию U мы можем найти.

Замечая, что $p_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$, находим

$$U = \int p_1 dx_1 + V,$$

где V — функция от $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Обозначая для краткости $\int p_1 dx_1 = U_1$ и замечая, что $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = p_1$, находим

$$dU = p_1 dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U_1}{\partial x_n} dx_n + dV,$$

а вычитая это выражение из (10), получим

$$dV = q_2 dx_2 + q_3 dx_3 + \dots + q_n dx_n, \quad (12)$$

где $q_i = p_i - \frac{\partial U_1}{\partial x_i}$ ($i = 2, 3, \dots, n$).

Покажем, что $q_2, q_3, \dots, q_n$ не зависят от x_1 и удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i},$$

где i и k означают любые два числа из ряда $2, 3, \dots, n$. Для этого замечаем, что в силу условий (11)

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_i \partial x_1} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_i} = 0,$$

поэтому q_i не зависит от x_1 . Далее

$$q_i = p_i - \frac{\partial U_1}{\partial x_i}, \quad q_k = p_k - \frac{\partial U_1}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Последние равенства и доказывают наше утверждение:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i}.$$

Следовательно, выражение (12) удовлетворяет условиям интегрируемости и заключает в себе лишь $(n-1)$ переменных $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Поступая с выражением (12) так же, как с (10), мы найдем

$$V = \int q_2 dx_2 + W,$$

где W не будет заключать в себе ни x_1 , ни x_2 .

Продолжая таким образом, сведем вопрос к определению функции от одного независимого переменного по ее дифференциалу и составим искомую функцию U по формулам:

$$U = \int p_1 dx_1 + V, \quad V = \int q_2 dx_2 + W \text{ и т. д.}$$

Пример.

$$dU = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x}{z^2} dz, \quad U = \int \frac{dx}{z} + V = \frac{x}{z} + V,$$

$$dU = \frac{dx}{z} - \frac{x}{z^2} dz + dV,$$

$$dV = -\frac{3}{z} dy + \frac{3y}{z^2} dz, \quad V = -3 \int \frac{dy}{z} + W = -\frac{3y}{z} + W,$$

$$dV = \frac{3y}{z^2} dz - \frac{3dy}{z} + dW,$$

$$dW = 0, \quad W = C, \quad U = \frac{x}{z} - \frac{3y}{z} + C.$$

В механике приходится определять функцию от двух или трех переменных по данному полному ее дифференциалу. Это будет задача определения силовой функции U в консервативном поле сил, когда известны проекции на оси координат p_1, p_2, p_3 действующей силы.

Согласно определению силовое поле называют *консервативным*, если в нем выполняются условия:

$$p_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad p_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3},$$

причем U носит название *силовой функции*. Разыскание силовой функции U сводится к ее определению по данному полному дифференциалу:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3.$$

Очевидно, в консервативном поле работа силы, равная

$$\int_A^B p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 = \int_A^B dU = U_B - U_A,$$

не зависит от формы пути, соединяющего две точки A и B , и становится известной, если найдена силовая функция.

Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

§ 2. Определения. Всякое уравнение, в состав которого входят производные неизвестных функций от одной или нескольких независимых переменных, называется *дифференциальным уравнением*.

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если неизвестные функции, в него входящие, зависят от *одной* независимой переменной; если же в уравнение входят частные производные неизвестных функций от нескольких независимых переменных, то уравнение называется дифференциальным уравнением *в частных производных*.

Дифференциальное уравнение называется уравнением *n -го порядка*, если наивысшая из производных, в него входящих, будет *n -го* порядка. Так, например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x$$

есть обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка; уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

есть уравнение в частных производных также 2-го порядка.

Интегрировать данное дифференциальное уравнение, значит, найти все его *решения*, т. е. все функции, ему удовлетворяющие, или, иными словами, обращающие его в тождество.

Займемся сперва исключительно обыкновенными дифференциальными уравнениями и начнем с уравнений 1-го порядка, т. е. уравнений вида

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где y — неизвестная функция от x , а f — функция известного вида от x , y и $\frac{dy}{dx}$.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть получено через исключение произвольного постоянного C из некоторого уравнения вида

$$F(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

и другого уравнения, получаемого через дифференцирование уравнения (1). Дифференцируя уравнение (1), находим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2)$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ — известные функции от x , y и C . Исключая из уравнений (1) и (2) постоянную C , получим некоторую зависимость между x , y , $\frac{dy}{dx}$, т. е. дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (3)$$

Для примера положим, что дано уравнение

$$y^2 - 2Cx = 0;$$

дифференцируя его, находим

$$y \frac{dy}{dx} - C = 0;$$

исключая C , получим, по разделении на y :

$$y - 2x \frac{dy}{dx} = 0.$$

Уравнение (1)

$$F(x, y, C) = 0,$$

из которого получается дифференциальное уравнение (3) через исключение произвольной постоянной C , определяет такую функцию y от x и C , которая удовлетворяет (3). Уравнение (1) называется *общим* интегралом уравнения (3). Итак, *общим интегралом* дифференциального уравнения 1-го порядка

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

называется такое уравнение между x , y и произвольной постоянной C , которое дает для y выражение, удовлетворяющее данному дифференциальному уравнению.

Всякое уравнение, получаемое из общего интеграла, при частном значении произвольного постоянного, называется *частным интегралом*.

Кроме *общего решения*, получаемого из общего интеграла, при произвольном значении постоянной C , и бесчисленного множества *частных решений*, получаемых из общего, при частных значениях того же постоянного, дифференциальное уравнение может еще иметь так называемые *особые решения*, удовлетворяющие данному уравнению, но не получающиеся из общего интеграла ни при каком значении постоянного C . Мы увидим впоследствии, что, зная общий интеграл, можно получить и особые решения, если они существуют, при помощи одного дифференцирования.

Поэтому можно сказать, что *интегрирование дифференциального уравнения 1-го порядка сводится к нахождению его общего интеграла*.

В простейшем случае, когда данное дифференциальное уравнение будет вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

где $f(x)$ — данная функция одного x , интегрирование его есть не что иное, как *интегрирование функции $f(x)$* , и общий интеграл предложенного уравнения есть

$$y = \int f(x) dx + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\int f(x) dx$ — одно из решений того же уравнения.

Между этим частным случаем и общим, когда данное уравнение будет вида

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

имеется существенное различие. В то время как для нашего частного случая достаточно знать одно частное решение, чтобы составить и общий интеграл, в общем случае этого недостаточно; можно знать не одно, а сколько угодно частных решений данного уравнения и тем не менее не знать общего интеграла. Так, например, зная, что уравнение

$$y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

имеет решения:

$$y = 1, \quad y' = x + \sqrt{2}, \quad y = -x + \sqrt{2}$$

(в чем легко удостовериться прямой подстановкой этих выражений в уравнение), мы не можем, однако, при помощи этих решений составить общий интеграл, который будет вида

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2},$$

и нужны особые приемы для того, чтобы его получить.

Вопрос об *интегрировании уравнения* считается *конченным*, когда этот вопрос сведен к *интегрированию функций* или, как говорят, к *квадратурам*, независимо от того, выражаются или не выражаются в конечном виде те интегралы, к вычислению которых будет приведен вопрос. Здесь, как и всегда, решение более сложного вопроса считают *оконченным*, когда оно приведено к решению более элементарного вопроса, для которого имеются свои специальные методы.

Рассмотрим еще вопрос об интегрировании уравнения 1-го порядка с геометрической точки зрения. Уравнение

$$F(x, y, C) = 0$$

можно рассматривать как уравнение бесконечного множества кривых, отличающихся одна от другой различными значениями некоторого параметра C . Уравнение

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (3)$$

общим интегралом которого будет предыдущее уравнение, выражает некоторое свойство, общее всем этим кривым, независимое от значения параметра, характеризующего каждую отдельную кривую. В состав последнего уравнения входит выражение углового коэффициента касательной к кривой; следовательно, вопрос об интегрировании уравнения вида (3) можно рассматривать как вопрос о разыска-

нии общего уравнения всех кривых линий, обладающих некоторым данным свойством относительно касательной или нормали в каждой точке кривой, выражаемым аналитически уравнением (3):

Кривые, изображаемые уравнением $F(x, y, C) = 0$, называются *интегральными кривыми* для уравнения (3).

Так, например, уравнение

$$y - 2x \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{или} \quad y \frac{dx}{dy} = 2x,$$

выражает, что подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания; общий интеграл этого уравнения

$$y^2 = 2Cx$$

изображает общее уравнение всех тех парабол, которые обладают упомянутым свойством, независимо от значения параметра параболы.

Произвольную постоянную в общем интеграле

$$F(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

данного дифференциального уравнения

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (3)$$

можно назначить так, чтобы уравнение (1) определяло функцию y , удовлетворяющую уравнению (3) и принимающую, при данном значении $x = x_0$, заранее заданное значение y_0 . Для этого подставляем в уравнение (1) $x = x_0$, $y = y_0$ и полученное уравнение

$$F(x_0, y_0, C) = 0$$

решаем относительно C ; найденное значение C и будет требуемое.

Например, для того чтобы найти функцию y , удовлетворяющую уравнению

$$y - 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

и принимающую значение y_0 , при $x = 1$, полагаем $x = 1$, $y = y_0$ в общем интеграле $y^2 = 2Cx$, и находим $y_0^2 = 2C$, откуда $C = \frac{y_0^2}{2}$; подставляя это значение C в общий интеграл, получаем

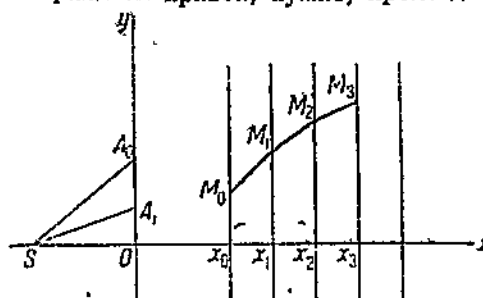
$$y^2 = y_0^2 x, \quad y = y_0 \sqrt{x};$$

это и есть такая функция от x , которая, удовлетворяя данному уравнению, принимает значение y_0 при $x = 1$.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

представляет собой, как мы уже упоминали, зависимость между координатами x , y точки и угловым коэффициентом касательной $\frac{dy}{dx}$ в этой точке. Предполагая $f(x, y)$ однозначной непрерывной функцией аргументов x и y , мы видим, что любой точке плоскости, в которой функция $f(x, y)$ определена, соответствует в силу данного уравнения определенное направление. Отмечая это направление стрелкой, проходящей через соответствующую точку, мы получим на плоскости поле направлений, причем всякое направление связано с некоторой точкой плоскости. Интегральные кривые данного уравнения суть кривые, для которых упомянутые направления являются направлениями касательных. Чтобы вполне определить положение интегральной кривой, нужно, кроме данного дифференциального урав-



Черт. 30.

нения, задать еще какую-нибудь точку, через которую эта кривая должна пройти, например, точку пересечения интегральной кривой с прямой $x = x_0$, параллельной оси Oy , или, что то же самое, начальное значение y_0 искомой функции y , которое она должна принимать при заданном значении $x = x_0$:

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — начальная точка интегральной кривой (черт. 30). Проведем через точку M_0 прямую параллельно оси Oy , а также систему прямых, ей параллельных, на равном расстоянии h друг от друга. Из точки M_0 проводим луч с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до пересечения его в точке M_1 с прямой $x = x_1 = x_0 + h$. Пусть y_1 — ордината точки M_1 . Она определяется, очевидно, формулой

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Из точки $M_1(x_1, y_1)$ проводим луч M_1M_2 с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ до пересечения его в точке M_2 со следующей прямой $x = x_2 = x_0 + 2h$. Ордината точки M_2 будет определяться формулой

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Точно так же, отправляясь от точки $M_2(x_2, y_2)$, можно определить следующую точку $M_3(x_3, y_3)$ и т. д.

Для графического построения ломаной $M_0M_1M_2M_3$ удобно воспользоваться следующим приемом. Отложим от точки O влево по оси Ox отрезок OS , равный единице масштаба, а по оси Oy будем откладывать отрезки OA_0, OA_1, OA_2 , соответственно равные $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$. Соединяя точку S с точками A_0, A_1, A_2 , получим

отрезки SA_0, SA_1, SA_2 , соответственно параллельные M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3 . Построенная ломаная изображает приближенное течение искомой интегральной кривой. В пределе, когда h стремится к нулю, эта ломаная обратится в плавную линию, представляющую искомую интегральную кривую.

Для численного нахождения величины искомой функции y , соответствующей какому-нибудь значению x , нужно сегмент $[x_0, x]$ разбить на отдельные части:

$$[x_0, x_0 + h], [x_0 + h, x_0 + 2h], \dots, [x_0 + (n-1)h, x]$$

и последовательно определить величины $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ по формулам

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h, \dots, \\ y = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Из последних формул последовательной заменой y_{n-1} через y_{n-2} , y_{n-2} через y_{n-3} и т. д. легко найдем

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)h + f(x_1, y_1)h + \dots \\ \dots + f(x_{n-2}, y_{n-2})h + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

В простейшем случае уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

последняя формула будет иметь вид

$$y = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

что, как известно, дает приближенное значение для интеграла

$$y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

т. е. для решения данного уравнения.

Изложенный способ приближенного вычисления интегралов дифференциальных уравнений 1-го порядка принадлежит Эйлера.

Из приведенного способа построения становится наглядно очевидным тот факт, что через заданную точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая данного дифференциального уравнения. Это положение справедливо и может быть строго доказано, если функция $f(x, y)$, кроме непрерывности, обладает еще некоторым свойством. Так, например, если в окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ непрерывна относительно своих аргументов и обладает таковой же частной производной по y , то через точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Эта теорема, которую мы примем без доказательства, называется теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии.

Следует особо отметить тот частный случай, часто встречающийся на практике, когда правая часть $f(x, y)$ данного дифференциального уравнения представляет собой ряд, расположенный по целым положительным степеням разностей $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, сходящийся, когда абсолютные значения этих разностей достаточно малы. В этом случае решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, может быть представлено в виде ряда Тейлора, расположенного по целым положительным степеням разности $(x - x_0)$, причем, отталкиваясь от данного уравнения, мы можем найти все коэффициенты этого ряда.

В самом деле, подставляя в правую часть $f(x, y)$ данного уравнения $x = x_0$, $y = y_0$, получим значение y'_0 первой производной y' при $x = x_0$. Дифференцируя данное уравнение по x , получим

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'$$

и, подставляя в правую часть последнего равенства $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, определим значение y''_0 второй производной y'' при $x = x_0$. Продолжая так поступать далее, найдем последовательно y'''_0 и т. д. Таким образом получим ряд Тейлора:

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1} (x - x_0) + \frac{y''_0}{1 \cdot 2} (x - x_0)^2 + \dots;$$

который и будет давать при значениях x , близких к x_0 , решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

Вместо этого приема последовательного определения производных при $x = x_0$ можно применить и другой способ. Подставим в обе части данного уравнения вместо y степенной ряд с неопределенными коэффициентами

$$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Располагая правую часть по степеням $(x - x_0)$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в левой и правой частях, определим постепенно коэффициенты $a_1, a_2, \dots$. Полученный этим способом ряд будет совпадать с рядом, образованным предыдущим приемом.

§ 3. Уравнения 1-го порядка и первой степени относительно производной неизвестной функции. Общий вид таких уравнений есть

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad M dx + N dy = 0,$$

где M и N — данные функции от x и y .

Рассмотрим теперь различные классы таких уравнений, интегрирование которых сводится к квадратурам.

А. Полные дифференциальные уравнения и, в частности, уравнения с отделенными переменными. Если в уравнении

$$M dx + N dy = 0 \quad (1)$$

функции M и N удовлетворяют условию

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой функции U , и данное уравнение называется *полным*. Общий интеграл его будет

$$U = C,$$

где C — произвольная постоянная, потому что в силу данного уравнения

$$dU = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

что равносильно уравнению

$$U = \text{const.}$$

Функция U определяется по правилам § 1 из условия

$$dU = M dx + N dy$$

и выражается в квадратурах.

Пример. Уравнение

$$(y - \sin x) dx + (x + 1) dy = 0$$

полное, потому что

$$\frac{\partial (y - \sin x)}{\partial y} = \frac{\partial (x + 1)}{\partial x} = 1.$$

Полагая $dU = (y - \sin x) dx + (x + 1) dy$, находим

$$U = \int (x + 1) dy + \psi(x) = y(x + 1) + \psi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y + \frac{d\psi}{dx} = y - \sin x, \quad \frac{d\psi}{dx} = -\sin x,$$

$$\psi(x) = \cos x \quad (\text{подразумеваем постоянное}),$$

$$U = y(x + 1) + \cos x.$$

Общий интеграл данного уравнения

$$y(x + 1) + \cos x = C \quad \text{или} \quad y = \frac{C - \cos x}{x + 1}.$$

Простейший случай, в котором интегрирование уравнения (1) непосредственно приводится к квадратурам, соответствует тому предположению, что M есть функция одного x , а N — функция одного y . В этом случае уравнение (1) называется уравнением с *отделенными переменными*. Общий интеграл его, очевидно, будет

$$\int M dx + \int N dy = C, \quad (2)$$

где C — произвольная постоянная, потому что, дифференцируя уравнение (2), получаем уравнение (1). Например, общий интеграл уравнения

$$x dx + e^y dy = 0$$

есть

$$\int x dx + \int e^y dy = C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x^2}{2} + e^y = C.$$

На этом замечании основан один из главных методов интегрирования уравнений, известный под названием *метода отделения переменных*.

Если уравнение будет вида

$$\varphi(x) \psi(y) dx + \varphi_1(x) \psi_1(y) dy = 0,$$

то отделить переменные можно простым делением. Разделив обе части уравнения на $\psi(y) \varphi_1(x)$, получим уравнение с отделенными переменными:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\psi_1(y)}{\psi(y)} dy = 0.$$

Общий интеграл его будет

$$\int \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\psi_1(y)}{\psi(y)} dy = C.$$

Например:

$$x(1+y^2) dx + y(1+x^2) dy = 0$$

приводится делением к уравнению

$$\frac{x}{1+x^2} dx + \frac{y}{1+y^2} dy = 0,$$

интегрирование которого дает

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = C,$$

или

$$\ln[(1+x^2)(1+y^2)] = 2C = \ln C_1,$$

откуда

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

В других случаях приведение интегрирования данного уравнения к интегрированию другого уравнения с отделенными переменными достигается с помощью *подстановки* или введения новых переменных.

Дифференциальными уравнениями мы весьма часто пользуемся при решении различных задач геометрии, механики и техники. Разберем несколько таких задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям изученного типа.

Задача 1. Найти брус равного напряжения при растяжении. Напряжением называется сила, действующая на 1 см^2 поперечного сечения, т. е. напряжение, равно действующей силе, деленной на площадь. Проведем ось x -ов вертикально вверх; поместим начало в нижнем конце бруса, обозначим площадь в сечении x через S_x (это — искомая функция от x). Пусть удельный вес вещества бруса равен γ и, сверх того, внизу подвешен груз P (черт. 31). Мы получим напряжение в сечении x , если разделим действующую силу, т. е. вес нижней части бруса Q_x и вес груза P , на площадь S_x . Так как это напряжение должно равняться R , то

$$R = \frac{P + Q_x}{S_x}, \text{ или } S_x R = P + Q_x. \quad (3)$$

Переходим к бесконечно близкому сечению $x + dx$ и заменяем приращения дифференциалами, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка. Площадь будет $S_x + dS_x$, сила $P + Q_x + dQ_x$, причем dQ_x , как вес куса стержня от x до $x + dx$, равен $dQ_x = \gamma S_x dx$. Итак, получим

$$(S_x + dS_x)R = P + Q_x + \gamma S_x dx. \quad (4)$$

Вычтя из равенства (4) равенство (3), найдем

$$R dS_x = \gamma S_x dx, \text{ или } dx = \frac{R}{\gamma} \frac{dS_x}{S_x}.$$

Интегрируя образованное дифференциальное уравнение, получим

$$x = \frac{R}{\gamma} \ln S_x + C, \text{ откуда } \ln S_x = \frac{\gamma}{R} x - \frac{C\gamma}{R} = \frac{\gamma}{R} x + \ln C_1;$$

наконец, находим

$$S_x = C_1 e^{\frac{\gamma}{R} x}.$$

Для определения C_1 надо задать площадь S_0 нижнего сечения: при $x = 0$, $S_x = S_0$. Тогда будем иметь $S_0 = C_1$, и окончательный ответ будет

$$S_x = S_0 e^{\frac{\gamma}{R} x}.$$

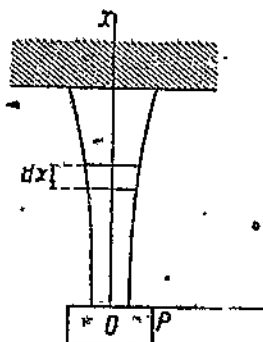
Задача 2. Найти кривую, всякая касательная которой проходит через начало координат.

Угловым коэффициентом касательной в точке (x, y) кривой равен $\frac{dy}{dx}$. С другой стороны, эта касательная по условию проходит через точки $(0, 0)$ и (x, y) и, следовательно, имеет угловой коэффициент $\frac{y}{x}$. Отсюда находим дифференциальное уравнение искомой кривой:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \text{ или } x dy = y dx.$$

Отделяя переменные посредством деления на xy , получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$



Черт. 31.

откуда, интегрируя, найдем

$$\ln y = \ln x + \ln C, \text{ или } y = Cx.$$

Итак, общее решение представляет семейство (пучок) прямых, проходящих через начало координат, что можно было бы предвидеть заранее, так как касательная к прямой есть сама прямая, и она проходит по условию через начало.

В. *Линейные уравнения и приводящиеся к линейным.* Уравнение

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0, \text{ или } M dx + N dy = 0,$$

называется *линейным* относительно y , если N есть функция одного x , а M — линейная функция относительно y ; следовательно, общий вид линейного уравнения 1-го порядка есть:

$$(Py + Q) dx + N dy = 0,$$

где P , Q и N — функции одного x , так что в уравнение не входят члены с высшими степенями y и произведением $u dy$.

* а) *Первый способ интегрирования.* Полагаем в уравнении

$$(Py + Q) dx + N dy = 0 \quad (5)$$

$y = uv$, где u и v — некоторые функции от x . Тогда имеем

$$dy = u dv + v du,$$

и уравнение (5) примет вид

$$(Puv + Q) dx + N(u dv + v du) = 0,$$

или

$$u(Pv dx + N dv) + Nv du + Q dx = 0. \quad (6)$$

Выберем функцию v так, чтобы коэффициент при u в уравнении (6) обратился в нуль, т. е. чтобы

$$Pv dx + N dv = 0. \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) приведет к

$$Nv du + Q dx = 0. \quad (8)$$

В уравнении (7) переменные отделяются делением, и получается

$$\frac{P}{N} dx + \frac{dv}{v} = 0.$$

Определяя отсюда v , причем можно удовлетвориться частным решением без произвольной постоянной, находим

$$\int \frac{P}{N} dx + \ln v = 0, \quad v = e^{-\int \frac{P}{N} dx};$$

подставляя в (8), получим

$$Ne^{-\int \frac{P}{N} dx} du + Q dx = 0.$$

Здесь переменные опять отделяются, и мы находим

$$du = -\frac{Q}{N} e^{\int \frac{P}{N} dx} dx, \text{ откуда } u = -\int \left[\frac{Q}{N} e^{\int \frac{P}{N} dx} dx \right] + C,$$

а перемножая u и v , получаем

$$y = \left[C - \int \left(\frac{Q}{N} e^{\int \frac{P}{N} dx} \right) dx \right] e^{-\int \frac{P}{N} dx}. \quad (9)$$

На практике обыкновенно прилагают не общую формулу (9), а самый метод, с помощью которого эта формула была выведена.

Примеры

$$1. \quad \frac{dy}{dx} + ay - e^{mx} = 0.$$

$$dy + (ay - e^{mx}) dx = 0, \quad y = uv,$$

$$u dv + v du + (a uv - e^{mx}) dx = 0,$$

$$u (dv + av dx) + v du - e^{mx} dx = 0. \quad (a)$$

Полагая $dv + av dx = 0$, находим

$$\frac{dv}{v} + a dx = 0, \quad \ln v = -ax, \quad v = e^{-ax}.$$

Уравнение (a) приводится к

$$u du - e^{mx} dx = 0, \quad \text{т. е.} \quad e^{-ax} du - e^{mx} dx = 0,$$

$$du = e^{(a+m)x} dx, \quad u = \frac{e^{(a+m)x}}{a+m} + C, \quad y = uv = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m}.$$

Если $m = -a$, то $du = dx$ и $u = x + C$; следовательно,

$$y = uv = (x + C) e^{-ax}.$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$dy + \left(y \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = 0, \quad y = uv,$$

$$u dv + v du + \left(uv \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = 0,$$

$$v (du + u \cos x dx) + u dv - \frac{1}{2} \sin 2x dx = 0.$$

Это уравнение распадается на следующие два:

$$du + u \cos x dx = 0, \quad u dv - \frac{1}{2} \sin 2x dx = 0;$$

отсюда

$$\frac{du}{u} = -\cos x dx, \quad \ln u = -\sin x,$$

$$u = e^{-\sin x}, \quad e^{-\sin x} dv = \frac{1}{2} \sin 2x dx, \quad dv = e^{\sin x} \sin x \cos x dx;$$

положив $\sin x = t$, находим

$$v = \int e^t t dt + C = e^t (t - 1) + C = e^{\sin x} (\sin x - 1) + C,$$

$$y = uv = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

б) Второй способ интегрирования (вариация произвольной постоянной). Уравнение

$$(Py + Q) dx + N dy = 0$$

можно написать в виде

$$\frac{dy}{dx} + Ry = S, \quad (10)$$

где $R = \frac{P}{N}$, $S = -\frac{Q}{N}$ — известные функции от x . Найдем сперва интеграл уравнения (10) в частном случае $S = 0$.

Уравнение $\frac{dy}{dx} + Ry = 0$ равносильно уравнению

$$\frac{dy}{y} + R dx = 0, \quad (11)$$

где переменные отделены. Интегрируя, находим

$$\ln y = - \int R dx + C,$$

или, заменив C через $\ln C$:

$$\ln \frac{y}{C} = - \int R dx, \quad y = Ce^{-\int R dx}.$$

Это и есть общий интеграл уравнения (11) при C постоянном.

Возвращаясь к общему случаю, когда $S \neq 0$, будем искать функцию y , удовлетворяющую уравнению (10), представляя эту функцию в той же форме:

$$y = Ce^{-\int R dx},$$

но считая C не постоянным, а функцией от x . В этом случае имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} e^{-\int R dx} - CR e^{-\int R dx},$$

подставляя вместо y и $\frac{dy}{dx}$ полученные значения в уравнение (10), находим для определения C уравнение

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int R dx} = S, \quad \text{откуда} \quad C = \int S e^{\int R dx} dx + C_1,$$

где C_1 — произвольное постоянное. Следовательно,

$$y = [C_1 + \int S e^{\int R dx} dx] e^{-\int R dx}.$$

Это будет общий интеграл уравнения (10).

Примеры

$$1. \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}. \quad (12)$$

Берем уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = 0 \quad (13)$$

или

$$\frac{dy}{y} + \frac{x dx}{1-x^2} = 0;$$

интегрируя его, находим

$$\ln y - \ln \sqrt{1-x^2} = \ln C, \quad y = C \sqrt{1-x^2}. \quad (14)$$

При C постоянном уравнение (14) дает интеграл уравнения (13); при C переменном находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Cx}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \frac{dC}{dx};$$

подставляя в уравнение (12), получим

$$\sqrt{1-x^2} \frac{dC}{dx} = \frac{ax}{1-x^2}, \quad \frac{dC}{dx} = \frac{ax}{(1-x^2)^{3/2}},$$

$$C = a \int \frac{x dx}{(1-x^2)^{3/2}} + C_1 = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C_1;$$

формула (14) даст общий интеграл уравнения (12)

$$y = C_1 \sqrt{1-x^2} + a.$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = ay + \cos x. \quad (15)$$

Общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx} = ay$ есть $y = Ce^{ax}$ при C постоянном.

При C переменном находим для определения C

$$e^{ax} \frac{dC}{dx} = \cos x,$$

откуда

$$C = \int e^{-ax} \cos x dx + C_1 = \frac{e^{-ax} \{ \sin x - a \cos x \}}{a^2 + 1} + C_1;$$

общий интеграл уравнения (15) будет

$$y = C_1 e^{ax} + \frac{\sin x - a \cos x}{a^2 + 1}.$$

с) К линейному уравнению легко приводится уравнение Бернулли:

$$\frac{dy}{dx} + Ry = Sy^n, \quad (16)$$

где R и S — функции одного x . Разделив на y^n , получим

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Ry^{-n+1} = S,$$

а положив $y^{-n+1} = z$ [откуда $-(n-1)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$], получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} - (n-1)Rz = -(n-1)S,$$

линейное относительно z . Найдя общее выражение z , найдем и общее выражение y по уравнению

$$y^{-n+1} = z.$$

Пример.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = y^3.$$

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + 2y^{-2} = 1, \quad y^{-2} = z, \quad y^{-3} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} - 4z = -2.$$

Для интегрирования этого уравнения полагаем $z = Ce^{4x}$ и для определения C получим уравнение

$$e^{4x} \frac{dC}{dx} = -2,$$

откуда

$$C = -2 \int e^{-4x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{-4x} + C_1,$$

$$z = C_1 e^{4x} + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{C_1 e^{4x} + \frac{1}{2}}}.$$

Вместо того чтобы приводить уравнение Бернулли к линейному, возможно интегрировать его непосредственно, применяя к нему первый метод интегрирования линейных уравнений. Для этого полагаем в уравнении (16) $y = uv$, где u и v — некоторые функции от x . Тогда имеем

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

и уравнение (16) примет вид

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Ruv = Su^n v^n,$$

или

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Rv \right) + v \frac{du}{dx} = Su^n v^n. \quad (17)$$

Выберем функцию v так, чтобы коэффициент при u в уравнении (17) обратился в нуль, т. е. чтобы

$$\frac{dv}{dx} + Rv = 0; \quad (18)$$

тогда уравнение (17) приведет к

$$v \frac{du}{dx} = Su^n v^n, \text{ или } \frac{du}{dx} = Su^n v^{n-1}. \quad (19)$$

В уравнении (18) переменные отделяются и получается:

$$\frac{dv}{v} + R dx = 0.$$

Определим отсюда v , причем можно удовлетвориться частным решением без произвольной постоянной. Находим

$$\ln v + \int R dx = 0, \quad v = e^{-\int R dx}.$$

Подставляя в (19), получим

$$\frac{du}{dx} = Su^n e^{-(n-1)\int R dx}.$$

Здесь переменные опять отделяются, и мы находим

$$\frac{du}{u^n} = S e^{-(n-1)\int R dx} dx,$$

откуда

$$\frac{u^{1-n}}{1-n} = \int S e^{-(n-1)\int R dx} dx + C,$$

или

$$u = \left[(1-n) \int S e^{-(n-1)\int R dx} dx + C_1 \right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Наконец, перемножая u и v , найдем y . Этот метод не применяется, когда $n=1$; в этом случае данное уравнение (16) есть линейное без правой части и решается сразу отделением переменных.

В качестве примера проинтегрируем этим способом уже рассмотренное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + 2y = y^3.$$

Полагая $y = uv$, находим

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 2uv = u^3 v^3, \text{ или } u \left(\frac{dv}{dx} + 2v \right) + v \frac{du}{dx} = u^3 v^3.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\frac{dv}{dx} + 2v = 0 \quad \text{и} \quad \frac{du}{dx} = u^3 v^3.$$

Из первого находим $v = e^{-2x}$. После этого второе уравнение примет вид

$$\frac{du}{u^3} = e^{-4x} dx,$$

откуда

$$-\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{C}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2u^2} = \frac{1 + Ce^{4x}}{4e^{4x}}.$$

После легких преобразований мы получим

$$u = \frac{e^{2x}}{\sqrt{C_1 e^{4x} + \frac{1}{2}}}, \quad \text{и, значит,} \quad y = uv = \frac{1}{\sqrt{C_1 e^{4x} + \frac{1}{2}}}.$$

Задача 1. Обозначим через i силу тока. Из физики известно, что электродвижущая сила при сопротивлении R равна Ri , а при самоиндукции L она равна $L \frac{di}{dt}$. Допуская, что к катушке сопротивления R и самоиндукции L приложена электродвижущая сила v , изменяющаяся со временем по закону

$$v = E \sin(\omega t),$$

где E и ω — постоянные величины, найти силу тока в момент t , если, при $t=0$, $i=0$.

Очевидно, дифференциальное уравнение задачи будет

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin(\omega t).$$

Для его интегрирования, согласно второму методу, рассмотрим сначала уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

общее решение которого будет

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (20)$$

Считая C за функцию от t , вносим (20) в данное уравнение:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t),$$

откуда, после выполнения квадратуры, найдем

$$C = \frac{E}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{\frac{R}{L}t} [R \sin(\omega t) - L \omega \cos(\omega t)] + C_1.$$

Внося это выражение в формулу (20), получим общее решение данного уравнения

$$i = \frac{E}{R^2 + L^2 \omega^2} [R \sin(\omega t) - L \omega \cos(\omega t)] + C_1 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

По условию задачи $i=0$ при $t=0$, что дает нам возможность определить значение постоянной C_1 :

$$0 = -\frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} + C_1, \quad \text{т. е.} \quad C_1 = \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2},$$

и, следовательно, окончательно находим

$$i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2} \left[R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t) + L\omega e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

Задача 2. Тяжелая материальная точка движется в сопротивляющейся среде. Траектория движения, очевидно, лежит в плоскости, проходящей через направление вертикали и вектор скорости в начальный момент времени. Принимая начальное положение точки за начало координат, направление оси Oy вертикально вверх и вводя обозначения: m — масса точки, v_0 — ее начальная скорость, α_0 — угол, образованный направлением начальной скорости с положительным направлением оси Ox , g — ускорение силы тяжести, $S = kmgv$ — сопротивление среды, найти траекторию движения.

Проектируя силу тяжести mg на касательную к траектории и принимая во внимание, что проекция ускорения на касательную равна $\frac{dv}{dt}$, где v — величина скорости, получим

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - kmgv, \quad (21)$$

где α — угол, образованный вектором скорости с положительным направлением оси Ox .

Точно так же, проектируя на нормаль, найдем:

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \alpha,$$

где ρ — радиус кривизны траектории. Заменяя здесь ρ его выражением

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = -v \frac{dt}{d\alpha}$$

(знак минус поставлен потому, что вогнутость кривой обращена вниз), мы получим

$$-v \frac{d\alpha}{dt} = g \cos \alpha. \quad (22)$$

Сокращая уравнение (21) на m и деля его на уравнение (22), найдем

$$\frac{dv}{d\alpha} - v \operatorname{tg} \alpha - \frac{kv^3}{\cos \alpha} = 0.$$

Таким образом мы получили дифференциальное уравнение Бернулли для определения v как функции α .

Для его интегрирования положим $v = \xi\eta$, ξ и η — некоторые функции от α . Внося в уравнение, получим

$$\xi \left(\frac{d\eta}{d\alpha} - \eta \operatorname{tg} \alpha \right) + \eta \frac{d\xi}{d\alpha} - \frac{k\xi^2\eta^2}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} - \eta \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{k\xi^2\eta}{\cos^2 \alpha}.$$

Из первого уравнения находим $\eta = \frac{1}{\cos \alpha}$, после чего второе примет вид:

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{k\xi^2}{\cos^3 \alpha}, \quad \text{или} \quad \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{k d\alpha}{\cos^3 \alpha}.$$

Интегрируя его, получим

$$\frac{1}{\xi} = -(k \operatorname{tg} \alpha + C) \quad \text{п, значит,} \quad \frac{1}{v} = -(k \sin \alpha + C \cos \alpha).$$

Для определения постоянной C положим $\alpha = \alpha_0$, $v = v_0$. После легких вычислений окончательно найдем

$$\frac{1}{v} = \frac{(1 + kv_0 \sin \alpha_0) \cos \alpha}{v_0 \cos \alpha_0} - k \sin \alpha. \quad (23)$$

Теперь из уравнения (22) получим уравнение для t :

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v d\alpha}{\cos \alpha}. \quad (24)$$

Чтобы определить уравнения траектории, проектируем вектор скорости на координатные оси и пользуемся уравнением (22):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = -v \cos \alpha \frac{v}{g \cos \alpha} = -\frac{v^2}{g}, \\ \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = -v \sin \alpha \frac{v}{g \cos \alpha} = -\frac{v^2 \operatorname{tg} \alpha}{g}, \end{aligned}$$

и, следовательно, искомые уравнения будут

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 d\alpha, \quad y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tg} \alpha d\alpha. \quad (25)$$

Здесь v означает функцию от α , определенную формулой (23).

Будем считать, что начальное значение α_0 находится в первой четверти. Из уравнения (22) мы усматриваем, что при этом $\frac{d\alpha}{dt}$ отрицательно, т. е. α будет уменьшаться с течением времени от начального значения α_0 (см. черт. 32). Когда α стремится к $-\frac{\pi}{2}$, v будет

стремиться к $\frac{1}{k}$, а время t неограниченно возрастает [см. формулу (24)]. Что касается x и y , то при этом, как показывают формулы (25), x стремится к конечному пределу a :

$$a = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} v^2 d\alpha,$$

y стремится к $-\infty$.

В заключение заметим, что если закон сопротивления среды выражается формулой $S = kmgv^n$, то основным дифференциальным уравнением поперечному будет уравнение типа Бернулли

$$\frac{dv}{d\alpha} - v \operatorname{tg} \alpha - \frac{kv^{n+1}}{\cos \alpha} = 0,$$

и общие заключения сохраняются.

С. Уравнения однородные и приводящиеся к однородным.

1) Уравнение

$$Mdx + Ndy = 0$$

называется однородным, когда M и N — однородные функции одинакового измерения, т. е. когда

$$M = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

По разделении на x^n уравнение примет вид

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (26)$$

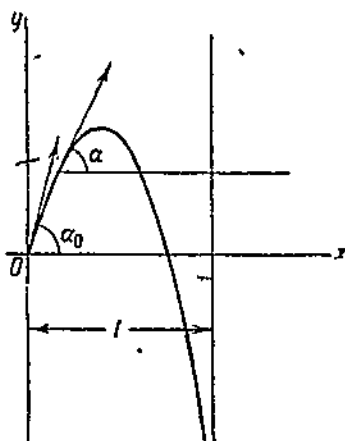
Интегрирование однородного уравнения может быть произведено при помощи подстановки $y = tx$, где t — новая переменная. Так как $dy = tdx + xdt$, то уравнение (26) даст

$$t dx + x dt = f(t) dx. \quad (26')$$

Переменные в (26'), тотчас отделяются, после чего будем иметь уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}, \quad \text{откуда} \quad \ln x = \int \frac{dt}{f(t)-t} + \ln C, \quad x = Ce^{\int \frac{dt}{f(t)-t}};$$

Произведя интегрирование функции и заменив затем t через $\frac{y}{x}$, получим уравнение между x , y и C , которое и будет общим интегралом предложенного уравнения.



Черт. 32.

Примеры

1. $(x^2 + y^2) dx + xy dy = 0.$

Полагая $y = tx$, найдем

$$t(x dt + t dx) + (1 + t^2) dx = 0;$$

отделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x} + \frac{t dt}{1 + 2t^2} = 0;$$

интегрируя, находим

$$\ln x + \ln(1 + 2t^2)^{1/4} = \ln C, \quad x = \frac{C}{(1 + 2t^2)^{1/4}}, \quad x = \frac{C}{\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{1/4}},$$

или

$$x^4 + 2x^2y^2 = C_1.$$

2.

$$xy dy - \left[y^2 + (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} \right] dx = 0.$$

$$y = tx, \quad t(x dt + t dx) - [t^2 + (1 + t)^2 e^{-t}] dx = 0,$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{e^t t dt}{(1 + t)^2} = 0, \quad \ln x = \int \frac{te^t dt}{(1 + t)^2} + C,$$

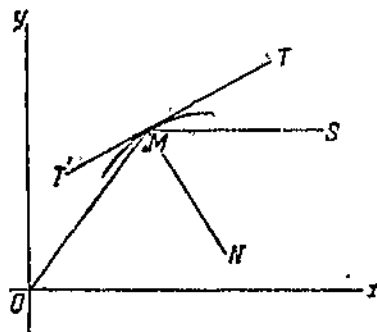
$$\int \frac{te^t dt}{(1 + t)^2} = \int e^t \left\{ \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{(1 + t)^2} \right\} dt = \int d \left[\frac{e^t}{1 + t} \right].$$

Следовательно,

$$\ln x = \frac{e^t}{1 + t} + C,$$

заменяя t через $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл предложенного уравнения:

$$\ln x = \frac{\frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}}{x + y} + C.$$



Черт. 33.

Задача. Найти форму зеркала, собирающего параллельные лучи в одну точку.

За плоскость (xy) принимаем любую плоскость, проходящую через направление лучей и точку, где эти лучи собираются после отражения; эту точку берем за начало координат, оси же выбираем так, чтобы падающие лучи были параллельны Ox . На кривой пересечения зеркала с плоскостью xOy рассмотрим точку $M(x, y)$ (черт. 33). Так как угол падения равен углу отражения, то

$$\angle SMN = \angle NMO,$$

где MN — нормаль к кривой, или

$$\angle SMT = \angle OMT',$$

где TT' — касательная. Угловой коэффициент касательной TT' равен $\frac{dy}{dx}$, а для прямой OM он будет $\frac{y}{x}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} SMT = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{tg} OMT' = \frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

Приравнявая тангенсы равных углов, составим дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x} \frac{dy}{dx}}.$$

Разрешая это уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}.$$

Составленное дифференциальное уравнение принадлежит к типу однородных уравнений. Для его интегрирования вводим подстановку $y = xu$ и получаем

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + u^2}}{u}, \quad \text{или} \quad xu du = (-1 - u^2 \pm \sqrt{1 + u^2}) dx.$$

Отделяя переменные, найдем

$$\frac{u du}{-1 - u^2 \pm \sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, что в данном случае выполняется, получим

$$\pm \sqrt{1 + u^2} = 1 + \frac{C}{x},$$

возвращаясь теперь к старым переменным, будем иметь

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = C + x, \quad \text{откуда} \quad y^2 = 2C \left(x + \frac{C}{2}\right).$$

Полученная кривая — парабола, симметрично расположенная относительно оси Ox , с фокусом в начале координат. Таким образом зеркало, собирающее параллельные лучи в одну точку (фокус зеркала) в пересечении с любой плоскостью, проходящей через направление лучей и фокус, дает параболу; поверхность зеркала есть поверхность вращения дуги параболы около ее оси (параболоид вращения).

2) Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{ax + by + c}\right),$$

где $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — постоянные, легко приводятся к однородным. Полагая

$$x = \xi + h, \quad y = \eta + k,$$

где ξ и η — новые переменные, h и k — постоянные, и подставляя в данное уравнение, находим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta + \alpha h + \beta k + \gamma}{a\xi + b\eta + ah + bk + c}\right).$$

Определим постоянные h и k так, чтобы

$$ah + bk + c = 0, \quad \alpha h + \beta k + \gamma = 0,$$

что возможно, если $a\beta - b\alpha \neq 0$; тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{a\xi + b\eta}\right) = f\left(\frac{\alpha + \beta \frac{\eta}{\xi}}{a + b \frac{\eta}{\xi}}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Это уравнение однородное и интегрируется, как было показано; заменив в его интеграле ξ и η через $x - h$ и $y - k$, получим интеграл данного уравнения.

В частном случае, когда $a\beta - b\alpha = 0$, т. е. $\frac{\beta}{b} = \frac{\alpha}{a} = m$, будем иметь

$$\alpha x + \beta y = m(ax + by),$$

и предложенное уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{m(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right].$$

Полагая $ax + by = z$, имеем

$$dy = \frac{dz - a dx}{b}.$$

Подставляя в данное уравнение, найдем

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{mz + \gamma}{z + c}\right);$$

обозначая для краткости $f\left(\frac{mz + \gamma}{z + c}\right) + \frac{a}{b} = \varphi(z)$, получим

$$dz = b\varphi(z) dx, \quad dx = \frac{1}{b} \frac{dz}{\varphi(z)} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{b} \int \frac{dz}{\varphi(z)} + C.$$

Примеры

1. $(x + y - 2) dx + (x - y + 4) dy = 0.$

Полагая $x = \xi + h$, $y = \eta + k$, для определения h и k будем иметь уравнения

$$h + k - 2 = 0 \quad \text{и} \quad h - k + 4 = 0,$$

откуда $h = -1$, $k = 3$; предложенное уравнение примет вид

$$(\xi + \eta) d\xi + (\xi - \eta) d\eta = 0.$$

Интегрируя его известным способом, получим общий интеграл

$$\xi^2 + 2\eta\xi - \eta^2 = C,$$

а подставляя $\xi = x + 1$, $\eta = y - 3$, находим и общий интеграл данного уравнения:

$$2. \quad \frac{x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y}{(x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy} = C.$$

Полагая $z = x + y$ и исключая y , получим уравнение

$$(z + 1) dx + (2z - 1) (dz - dx) = 0,$$

откуда

$$dx + \frac{2z - 1}{2 - z} dz = 0;$$

интегрируя, находим

$$x - 2z - 3 \ln(2 - z) = C, \quad \text{т. е.} \quad x + 2y + 3 \ln(2 - x - y) = C.$$

3) *Обобщенное однородное уравнение.* Уравнение $M dx + N dy = 0$ называется *обобщенным* однородным, если возможно подобрать такое постоянное число α , чтобы, после подстановки $y = \eta x^\alpha$, уравнение обратилось в *однородное* относительно x и η . Для примера рассмотрим уравнение вида

$$x^m y^n dy + (ax^k + by^n) dx = 0.$$

Полагая $y = \eta x^\alpha$, $dy = \alpha \eta x^{\alpha-1} d\eta$, получим

$$\alpha x^m \eta^{n+1} x^{\alpha-1} d\eta + (ax^k + b\eta^n x^\alpha) dx = 0.$$

Уравнение это будет однородным, если $\alpha a = \mu$, т. е. $\alpha = \frac{\mu}{a}$, при условии, чтобы $m + (n+1) \frac{\mu}{a} - 1 = \mu$. Например, если дано уравнение

$$x^m y^2 dy + (ax^4 + by^2) dx = 0,$$

то, полагая $y = \eta x^2$, находим

$$2x^m \eta^3 d\eta + (ax^4 + b\eta^2) dx = 0;$$

это уравнение будет однородным при $m = -1$.

D. *Уравнение вида*

$$M dx + N dy + P(x dy - y dx) = 0,$$

где M и N — однородные функции одного измерения, а P — однородная функция того же или другого измерения, приводится к уравнению Бернулли подстановкою $y = tx$. В самом деле, если

$$M = x^\lambda f\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^\lambda \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad P = x^{\lambda+\mu} \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

то, положив $\frac{y}{x} = t$, находим

$$x dy - y dx = x^2 dt,$$

После этого данное уравнение примет вид

$$f(t) dx + \varphi(t) (x dt + t dx) + x^{\lambda+\mu+2} \psi(t) dt = 0,$$

или

$$\frac{dx}{dt} + \frac{\varphi(t)x}{f(t) + \varphi(t)t} + \frac{\psi(t)}{f(t) + \varphi(t)t} x^{\lambda-1} = 0.$$

Это — уравнение Бернулли, которое, как показано выше, интегрируется.

Пример.

$$x^2 dx + y^2 dy + x^2 y (x dy - y dx) = 0.$$

Положив $y = tx$, получим

$$\frac{dx}{dt} + \frac{t^2}{1+t^2} x + \frac{t}{1+t^2} x^4 = 0.$$

Общий интеграл будет

$$x^{-3} = C(1+t^2) + (1+t^2) \int \frac{3t dt}{(1+t^2)^2};$$

выполнив интегрирование рациональной дроби, надо заменить в окончательном результате t через $\frac{y}{x}$.

Для упражнения предлагаем показать, что к рассмотренному здесь виду D приводится уравнение Якоби:

$$(ax + by + c) dx + (a_1x + b_1y + c_1) dy + (a_2x + b_2y + c_2) (x dy - y dx) = 0$$

подстановкой $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ и надлежащим выбором постоянных α и β .

Е. Уравнение Риккати (способ Буля). Уравнением Риккати называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m, \quad (27)$$

где b , c и m — постоянные. Это уравнение интегрируется в квадратурах, когда m имеет следующую форму:

$$m = \frac{-4k}{2k \pm 1},$$

где k равно нулю или целому положительному числу, например, при $m = 0$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -4$ и т. д.

Вместо уравнения (27) мы рассмотрим уравнение вида

$$x \frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^n, \quad (28)$$

к которому легко приводится уравнение (27).

Положив в уравнении (27) $y = \frac{u}{x}$, мы находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}; \quad by^2 = b \frac{u^2}{x^2},$$

и уравнение (27) принимает вид (по умножении на x^2):

$$x \frac{du}{dx} - u + bu^2 = cx^{m+2},$$

а это есть частный случай вида (28). Относительно уравнения (28) прежде всего замечаем, что оно интегрируется при $n = 2a$. В самом деле, положив $y = x^a v$, мы находим

$$x^{a+1} \frac{dv}{dx} + bv^2 x^{2a} = cx^n, \quad \text{или} \quad x^{1-a} \frac{dv}{dx} + bv^2 = cx^{n-2a}.$$

При $n = 2a$:

$$x^{1-a} dv + bv^2 dx = c dx; \quad \frac{dv}{c - bv^2} = \frac{dx}{x^{1-a}}.$$

Переменные отделены, и интегрирование выполняется немедленно. Заметив это, можем показать, что уравнение (28) интегрируется, когда $\frac{n \pm 2a}{2n}$ равно целому положительному числу. Преобразуем уравнение (28),

положив $y = A + \frac{x^n}{y_1}$, где A — постоянная, а y_1 — новая неизвестная функция. Составляя $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{y_1} - \frac{x^n}{y_1^2} \frac{dy_1}{dx}.$$

Подставляя в (28), находим

$$(bA^2 - aA) + \frac{x^n}{y_1} \{2bA + n - a\} + b \frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2} \frac{dy_1}{dx} = cx^n. \quad (29)$$

Определим A так, чтобы $bA^2 - aA = 0$, откуда

$$1) \quad A = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad 2) \quad A = 0.$$

Взяв 1) $A = \frac{a}{b}$, т. е. $y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1}$, замечаем, что преобразованное уравнение (по умножении на $\frac{y_1^2}{x^n}$) принимает вид

$$x \frac{dy_1}{dx} - (a + n)y_1 + cy_1^2 = bx^n. \quad (28')$$

Уравнение (28') имеет вид, подобный (28); разница в том, что a заменилось на $a + n$, а b и c поменялись местами. Следовательно, если положим

$$y_1 = \frac{a + n}{c} + \frac{x^n}{y_2},$$

то y_2 будет удовлетворять уравнению

$$x \frac{dy_2}{dx} - (a + 2n)y_2 + by_2^2 = cx^n.$$

Применяя к этому уравнению подстановку $y_2 = \frac{a + 2n}{b} + \frac{x^n}{y_3}$, получим для y_3 уравнение

$$x \frac{dy_3}{dx} - (a + 3n)y_3 + cy_3^2 = bx^n \quad \text{и т. д.}$$

После k преобразований подобного рода придем к уравнению, в котором коэффициент при y_k будет $-(a + kn)$, а вторая часть уравнения bx^n или cx^n . Припомним теперь сказанное раньше об уравнении (28), находим, что при $n = 2(a + kn)$, т. е. $\frac{n-2a}{2n} = k$, уравнение

$$x \frac{dy_k}{dx} - (a + kn)y_k + by_k^2 = cx^n \quad \text{или} \quad x \frac{dy_k}{dx} - (a + kn)y_k + cy_k^2 = bx^n,$$

интегрируется в квадратурах, при помощи подстановки $y_k = x^{a+kn}v$, а потому и данное уравнение (28) интегрируется и дает, например, при $k = 3$, т. е. при $\frac{n-2a}{2n} = 3$, $n = -\frac{2}{5}a$:

$$y = \frac{a}{b} + \frac{\frac{x^n}{c} + \frac{x^n}{\frac{a+2n}{b} + \frac{x^n}{y_3}}}{\frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{\frac{a+2n}{b} + \frac{x^n}{y_3}}},$$

где y_3 выражается в квадратурах из уравнения

$$x \frac{dy_3}{dx} - (a + 3n)y_3 + cy_3^2 = bx^n.$$

(Для нахождения y_3 полагаем $y_3 = x^{a+3n}v$ и получаем, как было показано, уравнение с отделенными переменными.)

Возьмем теперь 2) $A = 0$ в уравнении (29), т. е. $y = \frac{x^n}{y_1}$, тогда получим

$$x \frac{dy_1}{dx} - (n - a)y_1 + cy_1^2 = bx^n.$$

Это уравнение отличается от (28') только тем, что a заменено на $-a$. Прикая сказанное выше, найдем, что уравнение это интегрируется, если $\frac{n+2a}{2n}$ равно целому положительному числу.

Сопоставляя полученные результаты, приходим к заключению что уравнение

$$x \frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^n$$

интегрируется в квадратурах, когда $\frac{n \pm 2a}{2n} = k$, где k равно целому положительному числу.

В случае $\frac{n-2a}{2n} = k$ последовательные подстановки будут

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1}, \quad y_1 = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y_2}, \quad y_2 = \frac{a+2n}{b} + \frac{x^n}{y_3} \text{ и т. д.,}$$

а в случае $\frac{n+2a}{2n} = k$:

$$y = \frac{x^n}{y_1}, \quad y_1 = \frac{n-a}{c} + \frac{x^n}{y_2}, \quad y_2 = \frac{2n-a}{b} + \frac{x^n}{y_3} \text{ и т. д.}$$

Возвращаясь к уравнению Риккати

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m,$$

замечаем, что подстановкой $y = \frac{u}{x}$ оно приводится к виду

$$x \frac{du}{dx} - u + bu^2 = cx^{m+2}.$$

Пологая $a=1$, $n=m+2$, из условия $\frac{n \pm 2a}{2n} = k$ мы находим

$$\frac{m+2 \pm 2}{2m+4} = k,$$

откуда

$$m = -\frac{4k}{2k-1}, \text{ или } m = \frac{-4(k-1)}{2k-1};$$

вторая формула, путем замены $k-1=k_1$, принимает вид

$$m = \frac{-4k_1}{2k_1+1},$$

где k_1 равно нулю или целому положительному числу. Следовательно вообще

$$m = \frac{-4k}{2k \pm 1},$$

где k равно нулю или целому положительному числу. Для всех значений m этого вида уравнение Риккати интегрируется в квадратурах.

Пример.

$$\frac{du}{dx} + u^2 = 2x^{-4};$$

подставляя $u = \frac{y}{x}$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2}$, получаем

$$x \frac{dy}{dx} - y + y^2 = 2x^{-2}, \quad \frac{n-2a}{2n} = \frac{-2-2}{-4} = +1;$$

следовательно, надо сделать одну подстановку $y = 1 + \frac{y_1}{y_1}$, Преобразованное уравнение будет

$$x \frac{dy_1}{dx} + y_1 + 2y_1^2 = x^{-2};$$

здесь уже $n=2a$, поэтому полагаем $y_1 = x^{-1}v = \frac{v}{x}$ и находим

$$x^2 \frac{dv}{dx} + 2v^2 = 1, \quad \frac{dv}{1-2v^2} = \frac{dx}{x^2},$$

откуда

$$-\frac{1}{x} = \int \frac{dv}{1-2v^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{v\sqrt{2}+1}{v\sqrt{2}-1} + C.$$

Под уравнением Риккати понимают также и более общее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R, \quad (30)$$

где P, Q, R — функции от x . Относительно этого уравнения заметим, что если известно какое-нибудь *частное* его решение $y = y_1$, то интегрирование его сводится к квадратурам. В самом деле, если

$$\frac{dy_1}{dx} = Py_1^2 + Qy_1 + R,$$

то уравнение (30) можно написать в виде

$$\frac{d(y - y_1)}{dx} = P'(y^2 - y_1^2) + Q(y - y_1),$$

а положив $y = y_1 + z$ и замечая, что $y^2 - y_1^2 = z(z + 2y_1)$, получим из уравнения (30)

$$\frac{dz}{dx} = (Q + 2Py_1)z + Pz^2,$$

а это есть уравнение Бернулли, интегрируемое известным способом.

§ 4. Множитель дифференциального уравнения.

Имеем уравнение

$$M dx + N dy = 0. \quad (1)$$

Интегрирующим множителем или просто *множителем* уравнения (1) называется такая функция μ от x и y , для которой

$$\mu(M dx + N dy)$$

есть полный дифференциал некоторой функции U .

Интегрирование уравнения (1) можно считать оконченным, когда найдем его множитель, потому что, по умножению на μ , уравнение это принимает вид

$$dU = 0,$$

откуда и вытекает общий его интеграл $U = C$, причем функция U определяется при помощи квадратур из условия

$$dU = \mu M dx + \mu N dy.$$

Покажем, что множитель существует для всякого уравнения вида (1). Чтобы убедиться в этом, положим, что общий интеграл его есть

$$F(x, y, C) = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно C , можем представить общий интеграл в виде

$$\Phi(x, y) = C, \quad (2)$$

где $\Phi(x, y)$ уже не содержит буквы C . Дифференцируя уравнение (2), находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y};$$

сравнивая это выражение с выражением $\frac{dy}{dx}$, получаемым из уравнения (1):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N},$$

находим

$$\frac{M}{N} = \frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Phi / \partial x}{M} = \frac{\partial \Phi / \partial y}{N}. \quad (3)$$

Равенство (3) выведено в том предположении, что y определяется как функция от x из уравнения (2), но легко видеть, что это равенство удовлетворяется тождественно, т. е. при произвольных значениях x и y . В самом деле, равенство (3) не включает в себе буквы C и есть следствие уравнения (2), в котором C — произвольная постоянная. Этой постоянной C можно так распорядиться, чтобы, при произвольно выбранном значении $x = a$, y имело также произвольно выбранное значение b . С этой целью стоит только взять $C = \Phi(a, b)$. Поэтому уравнение (3) удовлетворится при произвольных значениях x и y , т. е. будет тождество, и в нем можно рассматривать x и y как независимые переменные.

Вообще следует заметить, что всякое уравнение между x и y , не заключающее в себе произвольной постоянной и вытекающее как следствие из данного дифференциального уравнения и его общего интеграла, должно быть тождеством, как это видно из приведенного рассуждения.

Полагая

$$\frac{\partial \Phi / \partial x}{M} = \frac{\partial \Phi / \partial y}{N} = \mu,$$

находим

$$\mu M dx + \mu N dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = d\Phi(x, y);$$

следовательно, μ есть множитель уравнения (1). Итак, представив общий интеграл в форме:

$$\Phi(x, y) = C,$$

находим тотчас множитель μ по формуле

$$\mu = \frac{\partial \Phi / \partial x}{M} = \frac{\partial \Phi / \partial y}{N}.$$

Например, для уравнения

$$y dx - x dy = 0$$

общий интеграл есть $y - Cx = 0$, откуда

$$\frac{y}{x} = C, \quad \mu = \frac{\partial(y/x)}{\partial x} : y = \frac{\partial(y/x)}{\partial y} : (-x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Всякое уравнение имеет бесконечное множество множителей. В самом деле, если

$$\mu(M dx + N dy) = dU,$$

то

$$\mu \varphi'(U) \{ M dx + N dy \} = \varphi'(U) dU = d\varphi(U),$$

где $\varphi(U)$ — произвольная функция от U . Поэтому $\mu \varphi'(U)$ есть множитель данного уравнения. Следовательно, найдя один множитель μ , определив функцию U и умножая μ на произвольную функцию от U , получим опять множитель данного уравнения.

Для того чтобы множитель мог служить средством для интегрирования данного уравнения:

$$M dx + N dy = 0,$$

надо уметь его найти, не зная общего интеграла. Уравнение, определяющее множитель μ , есть

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \quad (A)$$

выражающее, что $\mu(M dx + N dy)$ — полный дифференциал.

Уравнение (A) дает

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}. \quad (4)$$

Это уравнение в частных производных, и разыскание его решений есть, вообще говоря, вопрос, равносильный вопросу о нахождении общего интеграла данного обыкновенного дифференциального уравнения. В частных случаях, однако, можно найти решения уравнения (4), не прибегая к интегрированию данного уравнения.

Положим, что уравнение (4) допускает для μ решение, зависящее только от одной из переменных, например от x ; легко найти условие, при котором такое решение существует, и, в случае выполнения этого условия, на самом деле найти это решение. Если в уравнении (4) μ — функция одного x , то само уравнение, в силу того, что $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, принимает вид

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

или

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N}. \quad (5)$$

Такое равенство возможно лишь при условии, если $\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N}$ есть функции одного x , потому что левая его часть — функция одного x . Если упомянутое условие выполнено, то, полагая

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = \varphi(x),$$

для определения μ имеем

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \varphi(x), \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \varphi(x),$$

откуда

$$\ln \mu = \int \varphi(x) dx, \quad \mu = e^{\int \varphi(x) dx}.$$

Поэтому можем высказать следующую теорему:

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы уравнение

$$M dx + N dy = 0$$

имело множитель, не зависящий от y, состоит в том, что

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \varphi(x), \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ — функция одного x, и в этом случае множитель определяется формулой:

$$\mu = e^{\int \varphi(x) dx}.$$

Совершенно так же убеждаемся, что при условии

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} = \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — функция одного y, данное уравнение имеет множитель

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy},$$

*не зависящий от x.**Условие (6), как легко видеть, выполняется для линейного уравнения*

$$(Py + Q) dx + N dy = 0,$$

где P, Q и N — функция одного x. В самом деле, здесь

$$M = Py + Q, \quad \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{P - \partial N/\partial x}{N} \quad (\text{функции одного } x);$$

множитель данного уравнения будет

$$\mu = e^{\int \frac{P - \partial N/\partial x}{N} dx}.$$

Заметим, что, не нарушая общности, всегда можно считать $N=1$, потому что все члены уравнения можно разделить на N. Всякое линейное уравнение 1-го порядка можно поэтому писать в виде:

$$dy + (Py + Q) dx = 0,$$

и множитель его в виде:

$$\mu = e^{\int P dx}.$$

Полученный результат дает третий способ интегрирования линейного уравнения. Умножив левую часть уравнения

$$(Py + Q) dx + dy = 0$$

на $e^{\int P dx}$, приведем его к виду

$$dU = 0,$$

где функция U определится до ее полного дифференциала

$$dU = e^{\int P dx} \{ (Py + Q) dx + dy \},$$

общий интеграл данного уравнения будет

$$U = C.$$

Пример.

$$dy + (ay - e^{mx}) dx = 0,$$

$$\mu = e^{\int a dx} = e^{ax}, \quad dU = e^{ax} dy + e^{ax} (ay - e^{mx}) dx,$$

$$U = ye^{ax} - \frac{e^{(m+a)x}}{m+a} = C, \quad y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a},$$

как и было найдено иным путем.

Подстановка, которой мы пользовались для отделения переменных в однородном уравнении, весьма легко обнаруживает и интегрирующий множитель такого уравнения. Положим, что дано однородное уравнение

$$M dx + N dy = 0, \quad (7)$$

где

$$M = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Полагая $y = tx$, $dy = t dx + x dt$, мы находим

$$\begin{aligned} M dx + N dy &= x^n \varphi(t) dx + x^n \psi(t) (t dx + x dt) = \\ &= x^n [\varphi(t) + t\psi(t)] dx + x^{n+1} \psi(t) dt = \\ &= x^{n+1} [\varphi(t) + t\psi(t)] \left\{ \frac{dx}{x} + \frac{\psi(t) dt}{\varphi(t) + t\psi(t)} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение, стоящее в скобках $\{ \}$, очевидно, полный дифференциал, потому что переменные в нем отделены. Обозначая его через dU и замечая, что

$$x^{n+1} [\varphi(t) + t\psi(t)] = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) x + x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right) y = Mx + Ny,$$

находим из равенства (8):

$$\frac{M dx + N dy}{Mx + Ny} = dU,$$

отсюда видно, что $\frac{1}{Mx + Ny}$ есть множитель однородного уравнения (7).

Результат этого можно проверить непосредственно. Полагая

$$\frac{M}{N} = T = \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ находим}$$

$$\frac{M dx + N dy}{Mx + Ny} = \frac{T dx + dy}{Tx + y} = \frac{T}{Tx + y} dx + \frac{1}{Tx + y} dy.$$

Чтобы убедиться, что это выражение есть полный дифференциал, надо доказать, что

$$\frac{\partial\left(\frac{T}{Tx+y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{1}{Tx+y}\right)}{\partial x}. \quad (9)$$

Производя указанные дифференцирования, получим

$$\frac{\partial\left(\frac{T}{Tx+y}\right)}{\partial y} = \frac{y \frac{\partial T}{\partial y} - T}{(Tx+y)^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{Tx+y}\right)}{\partial x} = -\frac{(T+x \frac{\partial T}{\partial x})}{(Tx+y)^2};$$

отсюда

$$\frac{\partial\left(\frac{T}{Tx+y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{1}{Tx+y}\right)}{\partial x} = \frac{x \frac{\partial T}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial y}}{(Tx+y)^2} = 0,$$

потому что функция T , будучи функцией от $\frac{y}{x}$, т. е. функцией нулевого измерения, удовлетворяет условию

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

следовательно, равенство (9) доказано, и

$$\frac{1}{Mx + Ny}$$

есть множитель данного уравнения.

Полученный результат дает второй способ интегрирования однородного уравнения; разделив уравнение $M dx + N dy = 0$ на $Mx + Ny$, полагаем

$$\frac{M dx + N dy}{Mx + Ny} = dU,$$

определяем U по известным правилам и получаем общий интеграл данного уравнения, приравняв функцию U произвольному постоянному.

Примеры.

1. $(y^2 - x^2) dx - xy dy = 0,$

$$Mx + Ny = (y^2 - x^2)x - xy^2 = -x^3,$$

$$\frac{y^2 - x^2}{-x^3} dx + \frac{y}{x^2} dy = dU, \quad U = \frac{y^2}{2x^2} + \ln x = C$$

есть общий интеграл данного уравнения.

$$2. \quad \begin{aligned} (x^2 + y^2) dx - x^2 dy &= 0, \\ Mx + Ny &= x^3 + xy^2 - x^2y, \\ dU &= \frac{(x^2 + y^2) dx - x^2 dy}{x^3 + xy^2 - x^2y}, \quad U = \ln x - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{x\sqrt{3}} = C \end{aligned}$$

есть общий интеграл данного уравнения.

З а м е ч а н и е. Важнейшие приложения теории интегрирующего множителя относятся к вопросу о разыскании дифференциальных уравнений, интегрирующихся в квадратурах при помощи множителя заданного вида. Начало подобных исследований положено Эйлером в его „Institutiones calculi integralis“. Развитию метода Эйлера посвящены работа Миндинга „Исследования о дифференциальных уравнениях 1-го порядка“, СПб 1862, а также мемуары А. Н. Коркина: 1) Sur les équations diff. ord. du 1-er ordre („Mathém. Annales“, T. 48), 2) Etudes sur les multiplicateurs des équations diff. du 1-er ordre, С.-Петербург 1902.

В этих работах читатель найдет весьма важные способы разыскания интегрируемых (в квадратурах) форм уравнений.

§ 5. Уравнения 1-го порядка, не решенные относительно производной функции. Переходя к уравнениям 1-го порядка,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

в которых левая часть не будет линейной функцией относительно $\frac{dy}{dx}$, рассмотрим следующие случаи.

1) Положим, что уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + p_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n = 0, \quad (1)$$

где n — целое и положительное число, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ — данные функции от x и y , и допустим, что мы умеем решить уравнение (1) относительно $\frac{dy}{dx}$. Вообще говоря, мы получим n различных выражений для $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x, y), \quad \dots, \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_n(x, y). \quad (2)$$

Разыскание решений уравнения (1) приведет к интегрированию уравнений (2), т. е. нескольких уравнений первой степени относительно $\frac{dy}{dx}$. Положим, что общие интегралы уравнений (2) соответственно будут

$$F_1(x, y, C_1) = 0, \quad F_2(x, y, C_2) = 0, \quad \dots, \quad F_n(x, y, C_n) = 0. \quad (3)$$

Составляя уравнение

$$F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \cdot \dots \cdot F_n(x, y, C_n) = 0 \quad (4)$$

и решая его относительно y , мы получим решение уравнения (1), потому что всякое решение уравнения (4) удовлетворит одному из уравнений (3), а следовательно, и одному из уравнений (2), на которые распадается данное уравнение. Нужно заметить, что, не уменьшая общности уравнения (4), мы можем в нем все произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ заменить одной C и написать уравнение

$$F_1(x, y, C) \cdot F_2(x, y, C) \cdot \dots \cdot F_n(x, y, C) = 0, \quad (5)$$

которое и будет *общим интегралом* данного уравнения.

В самом деле, уравнение (5) распадается на следующие:

$$F_1(x, y, C) = 0, \quad F_2(x, y, C) = 0, \quad \dots, \quad F_n(x, y, C) = 0, \quad (6)$$

где C обозначает совершенно произвольную постоянную, а потому все решения, получаемые из уравнений (3), будут заключаться в числе решений, получаемых из совокупности уравнений (6).

Пример.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{xy}{a^2} = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{xy}}{a} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{xy}}{a},$$

или
$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} dx}{a} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{\sqrt{x} dx}{a}.$$

Общие интегралы уравнений будут

$$\sqrt{y} - \frac{1}{3a} \sqrt{x^3} - C = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{y} + \frac{1}{3a} \sqrt{x^3} - C = 0.$$

Общий интеграл данного уравнения будет

$$\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3a} \sqrt{x^3} - C\right) \left(\sqrt{y} + \frac{1}{3a} \sqrt{x^3} - C\right) = 0,$$

или
$$(\sqrt{y} - C)^2 = \frac{x^3}{9a^2}, \quad \text{т. е. } y = \left(C \pm \frac{1}{3a} \sqrt{x^3}\right)^2.$$

Изложенный прием, очевидно, применим в редких случаях, так как основан на решении алгебраических уравнений высших степеней. Укажем случаи, в которых это затруднение можно обойти.

2) Положим, что уравнение не заключает в себе явным образом одной из переменных, и поставим себе задачей решить такое уравнение.

а) Рассмотрим уравнение вида

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

не заключающее в себе явно независимой переменной x . Если это уравнение легко решается относительно $\frac{dy}{dx}$, то оно подходит под равнобренный случай. Рассмотрим другой случай, когда данное уравнение решено или легко разрешимо относительно y , так что его можно представить в виде

$$y = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$ и рассматривая p как независимую переменную, постараемся присоединить к данному уравнению

$$y = \psi(p) \quad (7)$$

еще другое, связывающее x , p и произвольную постоянную C ; исключая p из двух уравнений, найдем зависимость между x , y и C , т. е. общий интеграл данного уравнения. Искомое второе уравнение получим следующим путем; из уравнения $dy = p dx$ имеем

$$dx = \frac{dy}{p}, \quad x = \int \frac{dy}{p} + C;$$

интегрируя по частям, находим

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2} + C = \frac{\varphi(p)}{p} + \int \frac{\varphi(p) dp}{p^2} + C;$$

выполнив интегрирование, получим результат вида

$$x = \psi(p, C), \quad (8)$$

и общий интеграл данного уравнения получится исключением p из (7) и (8).

Во многих случаях выгоднее представляется общий интеграл системой уравнений

$$y = \varphi(p), \quad x = \psi(p, C),$$

не производя исключения p . Рассматривая вопрос с геометрической точки зрения, мы знаем, что кривую линию часто удобнее изучать с помощью выражений координат каждой точки в функциях от одной независимой переменной, чем с помощью уравнения, связывающего координаты.

б) Подобным же образом можно трактовать случай, когда данное уравнение не включает в себе явно зависимой переменной y и легко разрешимо относительно x . Пусть данное уравнение есть

$$x = \psi(p), \quad \text{где} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Из уравнения $dy = p dx$ имеем

$$y = \int p dx = px - \int x dp, \quad y = p\psi(p) - \int \psi(p) dp + C = \varphi(p, C).$$

Общий интеграл данного уравнения есть результат исключения p из уравнений,

$$x = \psi(p), \quad y = \varphi(p, C).$$

с) Заметим, наконец, еще случай, когда в уравнении

$$f(y, p) = 0, \quad \text{где} \quad p = \frac{dy}{dx},$$

y и p легко выразить функциями от одной переменной t . Положим, что из данного уравнения нашли

$$y = \varphi(t), \quad p = \psi(t); \quad \text{тогда} \quad dy = p dx = \varphi'(t) dt,$$

откуда

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt, \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C = F(t) + C;$$

исключив t из уравнений $y = \varphi(t)$ и $x = F(t) + C$, находим общий интеграл данного уравнения.

d) Случай уравнений вида

$$f(x, p) = 0, \quad \text{где} \quad p = \frac{dy}{dx},$$

можно трактовать подобным же образом. Положим, что из данного уравнения нашли $x = w(t)$, $p = u(t)$; тогда

$$dx = \frac{dy}{p} = w'(t) dt,$$

т. е.

$$dy = u(t) w'(t) dt, \quad y = \int u(t) w'(t) dt + C = \Phi(t) + C,$$

и общий интеграл получается исключением t из уравнений

$$x = w(t) \quad \text{и} \quad y = \Phi(t) + C.$$

Примеры

1. $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4, \quad \text{или} \quad y = p^2 + p^4$

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad dx = \frac{dy}{p};$$

$$x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2} = p + p^3 + \int (p^2 + 1) dp = 2p + \frac{4}{3} p^3 + C;$$

общий интеграл получится исключением p из уравнений

$$y = p^2 + p^4, \quad x = 2p + \frac{4}{3} p^3 + C.$$

2.

$$x = p + p^3, \quad p = \frac{dy}{dx},$$

$$y = \int p dx = px - \int x dp = p^2 + p^4 - \int (p + p^3) dp = \frac{1}{2} p^2 + \frac{3}{4} p^4 + C;$$

общий интеграл получится исключением p из уравнений

$$x = p + p^3, \quad y = \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{4}p^4 + C.$$

3. $p^3 - 2px + x^2 = p + 3x$, где $p = \frac{dy}{dx}$.

Полагая $p = tx$, находим

$$x^2(t^2 - 2t + 1) = x(t + 3),$$

откуда

$$x = \frac{t+3}{(t-1)^2},$$

$$dx = \frac{(t-1)^2 - 2(t+3)(t-1)}{(t-1)^4} dt = -\frac{t+7}{(t-1)^3} dt,$$

$$dy = p dx = -\frac{t(t+3)(t+7)}{(t-1)^5} dt,$$

$$y + C = -\int \frac{t(t+3)(t+7)}{(t-1)^5} dt.$$

Интегрируя эту дробь, получим выражение y через t и C , а исключив t из полученного выражения и выражения $x = \frac{t+3}{(t-1)^2}$, найдем общий интеграл данного уравнения.

З а м е ч а н и е. Подстановка $p = tx$, с помощью которой мы нашли в этом примере выражения x и p через t , может быть, приложена с успехом в тех случаях, когда данное уравнение будет вида

$$\varphi_n(x, p) + \varphi_{n-1}(x, p) = 0$$

или вида

$$\varphi_n(x, p) + \varphi_{n-1}(x, p) + \varphi_{n-2}(x, p) = 0,$$

где $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}$ — однородные функции от x и p , степеней, указанных их знаками. В первом случае подстановка $p = tx$ дает уравнение:

$$x\varphi_n(1, t) + \varphi_{n-1}(1, t) = 0,$$

во втором

$$x^2\varphi_n(1, t) + x\varphi_{n-1}(1, t) + \varphi_{n-2}(1, t) = 0,$$

и выражения x через t получатся решением уравнений первой и второй степени относительно x .

3) Уравнение линейное относительно переменных x и y . Уравнение вида

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad \text{где } p = \frac{dy}{dx},$$

интегрируется нижеследующим образом.

Дифференцируя данное уравнение, мы находим

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

или

$$[p - \varphi(p)] dx - [x\varphi'(p) + \psi'(p)] dp = 0.$$

Это уравнение *линейное* относительно x и интегрируется одним из способов, указанных в статье о линейных уравнениях. Общий интеграл его будет уравнение вида

$$F(x, p, C) = 0;$$

исключая p из этого последнего и данного уравнения, найдем уравнение между x , y и C , $\Phi(x, y, C) = 0$, изображающее общий интеграл данного уравнения.

Частный случай рассматриваемого уравнения представляет так называемое *уравнение Клеро*:

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, имеем уравнение

$$y = px + \psi(p). \quad (9)$$

Применяя к нему указанный прием, получим дифференцированием

$$p = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}, \quad \text{т. е.} \quad [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0,$$

откуда или

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad x + \psi'(p) = 0.$$

Из уравнения $\frac{dp}{dx} = 0$ следует $p = C$; исключая p из этого уравнения и данного (9), получим общий интеграл

$$y = Cx + \psi(C). \quad (10)$$

Если же примем во внимание уравнение

$$x + \psi'(p) = 0 \quad (11)$$

и исключим p из этого уравнения и данного, то получим для y выражение, не заключающее в себе произвольной постоянной, удовлетворяющее данному уравнению, но не получающееся из общего интеграла при частном значении *постоянной* C . В самом деле, результат исключения p из данного уравнения (9) и из уравнения (11) дает для y выражение

$$y = px + \psi(p), \quad (12)$$

где p есть функция от одного x , определяемая уравнением (11).

Чтобы доказать, что такое выражение удовлетворяет данному уравнению, дифференцируем уравнение (12) и находим

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = p$$

в силу уравнения (11); подставляя выражения y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, находим тождество

$$px + \psi(p) = px + \psi(p),$$

что и требовалось доказать. С другой стороны, результат исключения p из уравнений (9) и (11), очевидно, совпадает с результатом исключения C из уравнений

$$y = Cx + \psi(C), \quad x + \psi'(C) = 0,$$

т. е. получается из общего интеграла, когда подставим в него, вместо C , не постоянную величину, а ту функцию от x , которую получим для C , решив второе уравнение относительно C . Найденное таким образом решение не может быть получено из общего интеграла ни при каких значениях произвольного постоянного.

В самом деле, допустим, что это решение можно получить из общего интеграла

$$y = Cx + \psi(C)$$

при $C = C_0$. Следовательно, оно будет таково:

$$y = C_0x + \psi(C_0),$$

а его производная $\frac{dy}{dx}$ равна C_0 .

Кроме того, это решение представимо в виде

$$y = p(x)x + \psi[p(x)],$$

где $p(x)$ — функция, определяемая из уравнения

$$x + \psi'[p(x)] = 0.$$

Пользуясь двумя последними равенствами, найдем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p(x) + x \frac{dp(x)}{dx} + \psi'[p(x)] \frac{dp(x)}{dx} = \\ &= p(x) + \{x + \psi'[p(x)]\} \frac{dp(x)}{dx} = p(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(x) = C_0,$$

чего не может быть.

Итак, в нашем примере уравнение имеет общий интеграл

$$y = Cx + \psi(C),$$

дающий бесконечное множество частных решений при различных значениях постоянной C и, кроме того, так называемое особое решение, не совпадающее ни с одним из частных, получаемое исключением C из уравнений

$$y = Cx + \psi(C), \quad x + \psi'(C) = 0.$$

Мы видим отсюда, что общий интеграл уравнения Клеро получается простой заменой $\frac{dy}{dx}$ через C в самом уравнении, а особое решение — исключением C из общего интеграла и того уравнения, которое получим, продифференцировав его по C . Для примера возьмем

$$y = x \frac{dy}{dx} + a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Общий интеграл будет

$$y = Cx + a \sqrt{1 + C^2};$$

особое решение получим, исключая C из уравнений:

$$y = Cx + a \sqrt{1 + C^2}, \quad x + \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}} = 0.$$

Из второго уравнения имеем $x = \frac{-aC}{\sqrt{1 + C^2}}$; подставляя в первое, находим

$$y = \frac{-aC^2}{\sqrt{1 + C^2}} + a \sqrt{1 + C^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + C^2}};$$

отсюда

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2(1 + C^2)}{1 + C^2} = a^2.$$

Так как при решении пришлось возвышать в квадрат обе части предпоследнего равенства, то мы могли ввести посторонние решения. Так оно и есть. В самом деле,

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Если $a > 0$, то все точки графика особого решения имеют положительные ординаты или 0 (при $C = \pm \infty$). Следовательно, графиком особого решения может быть или верхняя полуокружность окружности

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

или часть этой полуокружности. Более подробное исследование показывает, что искомый график — вся верхняя полуокружность. В самом деле, в этом случае

$$y = + \sqrt{a^2 - x^2},$$

и легко показать подстановкой в уравнение, что эта функция ($-a < x < +a$) удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Следовательно, графиком особого решения будет верхняя полуокружность, а касательные к ней образуют семейство интегральных кривых, соответствующих всем частным интегралам уравнения.

В случае отрицательного a рассуждения будут те же, а результат получится такой:

Графиком особого решения будет нижняя полуокружность, а касательные к ней образуют семейство интегральных кривых, соответствующих всем частным интегралам уравнения.

Замечание. Изложенный прием может быть применен и в более общем случае уравнений вида

$$y = \varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right), \quad (13)$$

или

$$x = \varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right), \quad (14)$$

т. е. уравнений, решенных или легко разрешимых относительно одной из переменных.

а) Положив $\frac{dy}{dx} = p$ в уравнении вида (13), получим

$$y = \varphi(x, p); \quad (15)$$

дифференцируя, находим

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

уравнение 1-го порядка и первой степени с двумя переменными p и x . Если умеем его интегрировать и найдем общий его интеграл

$$F(x, p, C) = 0, \quad (16)$$

то, исключив p из уравнений (15) и (16), найдем и общий интеграл данного уравнения.

б) В уравнении вида (14), полагая $\frac{dx}{dy} = q$, получаем уравнение

$$x = \varphi\left(y, \frac{1}{q}\right) = \psi(y, q); \quad (17)$$

дифференцируя по y , находим

$$q = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{dq}{dy},$$

уравнение 1-го порядка и первой степени с двумя переменными q и y ; интегрируя его, находим уравнение вида

$$\Phi(q, y, C) = 0 \quad (18)$$

и, исключая q из уравнений (17) и (18), получаем общий интеграл данного уравнения.

Пример. $y = 2x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, или $y = 2px + p^2$, $p = \frac{dy}{dx}$.

Дифференцируя, находим

$$p = 2p + 2(x + p) \frac{dp}{dx}, \quad \text{т. е.} \quad p + 2(x + p) \frac{dp}{dx} = 0,$$

или

$$p dx + 2(x + p) dp = 0.$$

Это — линейное уравнение относительно x .

Интегрируя это уравнение, найдем

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{3} p;$$

исключая p из уравнений $y = 2px + p^2$, $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{3} p$, после некоторых упрощений находим

$$(2x^2 + 3xy + C_1)^2 - 4(x^2 + y)^3 = 0,$$

общий интеграл данного уравнения.

Это исключение p легко произвести следующим образом. Подставляем в уравнение $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{3} p$ вместо p^2 выражение $y - 2px$, освобождаемся от знаменателя и снова заменяем p^2 через $y - 2px$. Из полученного уравнения находим

$$p = \frac{xy + 3C}{2(x^2 + y)}$$

и подставляем в уравнение $y = 2px + p^2$, которое удобно записать в виде $x^2 + y = (p + x)^2$.

В окончательном результате обозначаем $3C$ через C_1 .

§ 6. Особые решения уравнений 1-го порядка. Особым решением данного уравнения 1-го порядка мы назвали такое решение, которое, не заключая в себе произвольной постоянной, не получается из общего интеграла, при частном значении произвольной постоянной, чем и отличается от частного решения. Предполагая известным общий интеграл, покажем, как найти все особые решения данного дифференциального уравнения, если таковые существуют.

Положим, что, решая данное уравнение $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ относительно $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y); \quad (1)$$

пусть общий интеграл его будет

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

и положим, что, решая его относительно y , получим

$$y = F(x, C). \quad (2)$$

Если в уравнении (2) будем рассматривать C не как постоянную, а как произвольную функцию от x , то уравнение это будет выражать совершенно произвольную зависимость между x и y .

Заметив это, найдем необходимые и достаточные условия того, что выражение $y = F(x, C)$, где C — неизвестная функция от x ,

удовлетворяет уравнению (1). Найдя все значения C , удовлетворяющие этим условиям, и подставив в выражение $F(x, C)$, мы таким образом найдем все решения уравнения (1). Заметим прежде всего, что при C постоянном выражение $y = F(x, C)$, по условию, удовлетворяет данному уравнению; это значит, что если мы это уравнение подставим в (1), то оно обратится в тождество; следовательно,

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial x} = \varphi[x, F(x, C)] \quad (3)$$

тождественно при каких угодно значениях x и C . Возьмем теперь уравнение $y = F(x, C)$ и составим $\frac{dy}{dx}$, рассматривая C как функцию от x ; тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx}. \quad (4)$$

Чтобы и теперь уравнение (1) удовлетворялось, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = \varphi(x, y) \quad (5)$$

обратилось в тождество, когда в него подставим $y = F(x, C)$; делая эту подстановку и принимая во внимание тождество (3), получаем

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0. \quad (6)$$

Это и есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение

$$y = F(x, C),$$

где C — неизвестная функция от x , удовлетворяло данному уравнению (1). Условие (6) распадается на два:

1) $\frac{dC}{dx} = 0$, откуда $C = \text{const}$, тогда $y = F(x, C)$ есть общий интеграл данного уравнения; или

2) $\frac{\partial F(x, C)}{\partial C} = 0$; исключив C из уравнений $y = F(x, C)$, $\frac{\partial F(x, C)}{\partial C} = 0$, получим зависимость между x и y без произвольной постоянной. В числе получаемых отсюда решений будут заключаться все особые, но могут, конечно, заключаться и частные.

Из предыдущего вытекает следующее правило для нахождения особых решений: представив общий интеграл в виде

$$y = F(x, C), \quad (7)$$

присоединяем к этому уравнению второе

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial C} = 0, \quad (8)$$

получаемое дифференцированием по C , и исключаем C из уравнений (7) и (8).

Полученное таким путем уравнение

$$\psi(x, y) = 0$$

будет заключать в себе все особые решения.

Если общий интеграл данного уравнения задан в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (9)$$

и решение этого уравнения относительно y почему-либо затруднительно, то можно обойти это затруднение следующим образом. Рассматриваемое выше выражение $F(x, C)$ есть выражение y , получаемое из уравнения (9); следовательно, выражение $\frac{\partial F(x, C)}{\partial C}$ можно получить, дифференцируя уравнение (9) по C , рассматривая y как функцию от C , а x как постоянное; тогда получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial C} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial C} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = -\frac{\partial \Phi / \partial C}{\partial \Phi / \partial y}.$$

Следовательно, уравнение $\frac{\partial F(x, C)}{\partial C} = 0$ будет следствием или уравнения $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ или уравнения $\frac{1}{\partial \Phi / \partial y} = 0$. Поэтому, чтобы получить все особые решения данного уравнения, надо рассмотреть системы уравнений

$$(A) \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad (B) \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{1}{\partial \Phi / \partial y} = 0. \end{cases}$$

Исключая C из двух уравнений каждой системы, получим уравнения, связывающие x и y ; в числе этих уравнений будут заключаться все особые решения данного уравнения, если таковые существуют. Если уравнения как той, так и другой системы между собой несовместны, то особых решений нет.

Кроме того, необходимо заметить, что в числе получаемых указанным путем выражений для y могут заключаться и частные, а не особые решения, а также и такие, которые данному уравнению не удовлетворяют, т. е. не будут решениями его. В самом деле, может случиться, что одновременно

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

тогда

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial C}$$

может и не быть равно нулю, как то необходимо для того, чтобы удовлетворялось данное уравнение. В силу этого обстоятельства

всякое выражение $y = \varphi(x)$, получаемое из систем (A) и (B), надо испытать, подставив его в данное дифференциальное уравнение. Если уравнение удовлетворится, то $y = \varphi(x)$ будет *решение* уравнения. Чтобы узнать, будет ли оно *частным* или *особым*, надо подставить то же выражение $y = \varphi(x)$ в общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

и посмотреть, удовлетворяется ли уравнение

$$\Phi[x, \varphi(x), C] = 0$$

постоянным или переменным значением C ; в первом случае $y = \varphi(x)$ *частное*, во втором — *особое* решение.

Геометрическое значение особого решения, получаемого исключением C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0,$$

очевидно. Кривая линия, уравнение которой получается таким путем, есть, как известно, *огibaющая* семейства линий, изображаемых общим интегралом

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Огибающая, имеющая с каждой из огибаемых общую касательную в общей точке, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению 1-го порядка, выражающему некоторое свойство этой касательной, как и семейство огибаемых кривых.

Легко пояснить геометрически возможность существования особых решений.

Согласно геометрической интерпретации всякий частный интеграл соответствует интегральной кривой, а общий интеграл есть семейство этих кривых в целом. Когда мы говорим, что данная кривая есть интегральная кривая дифференциального уравнения, то этим самым мы утверждаем только то, что угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке и координаты этой точки удовлетворяют уравнению. Если семейство кривых имеет огибающую, то все эти величины — угловой коэффициент касательной и координаты — совпадают как для точки огибающей, так и для кривой, которая в этой точке касается огибающей. Отсюда следует, что огибающая также является интегральной кривой дифференциального уравнения.

Так как огибающая, вообще говоря, не является кривой семейства, то она не может быть получена заданием частного значения произвольной постоянной интегрирования. Поэтому она является интегральной кривой, не включенной в семейство общего интеграла, и называется *особой интегральной кривой*.

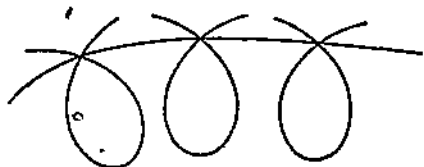
Мы знаем, что уравнение огибающей семейства кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{10}$$

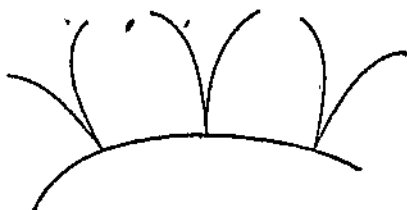
если таковая существует, получится в результате исключения произвольной постоянной C из уравнения (10) и уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0. \quad (11)$$

Предполагая функцию Φ целой рациональной относительно всех ее аргументов, исследуем геометрически все возможные случаи, к которым нас приводит исключение произвольной постоянной C из системы уравнений (10) и (11). Очевидно, в результате такого исключения мы получим уравнение геометрического места тех точек (x, y) плоскости, которым соответствуют кратные значения C . Прежде всего очевидно, что если кривая самопересекается (черт. 34), мы должны ее рассматривать как дважды проходящую через точку ветвления.



Черт. 34.



Черт. 35.

Для всех этих точек, называемых *узловыми*, C должно быть кратным корнем уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$. Ясно, что справедливость этого утверждения не зависит от величины петель. Поэтому, если стянуть эти петли так, чтобы они совсем исчезли, то для полученных точек *возврата 1-го рода* (черт. 35) мы должны иметь также кратные корни для C . Оба эти утверждения очевидны. Однако, как мы знаем, существует третья возможность, приводящая к кратным корням C . Она является наиболее существенной с точки зрения дифференциальных уравнений и наступает, когда семейство кривых имеет огибающую.

Резюмируя, мы можем сказать, что уравнение общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$ представляет собой семейство интегральных кривых, по одной для каждого значения C . Исключая C из этого уравнения и из уравнения $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$, мы получаем уравнение геометрического места точек, которым соответствуют равные значения C . Это геометрическое место может содержать три типа кривых:

1. Кривую, проходящую через все узловые точки семейства (10); она называется *узловой линией*.
2. Кривую, проходящую через все точки возврата семейства (10); она называется *геометрическим местом точек возврата*.
3. Кривую, касающуюся каждой точки некоторой кривой семейства (10); она называется *огибающей*.

Очевидно, только в третьем случае процесс исключения произвольной постоянной C приводит нас к уравнению особого интеграла.

Примеры

1. $y = px + p - p^2$, где $p = \frac{dy}{dx}$.

Общий интеграл есть

$$y = Cx + C - C^2 = F(x, C), \quad \frac{\partial F(x, C)}{\partial C} = x + 1 - 2C;$$

исключая C из системы уравнений $y = Cx + C - C^2$, $x + 1 - 2C = 0$, получим

$$y = \frac{(x+1)^2}{4};$$

это и есть *особое* решение, что вытекает из того, что при C постоянном уравнение $y = Cx + C - C^2$ изображает прямую линию, а $y = \frac{(x+1)^2}{4}$ есть парабола,

2. $y = 2x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Общий интеграл есть

$$\Phi(x, y, C) = (2x^2 + 3xy + C)^2 - 4(x^2 + y)^3 = 0,$$

как было найдено в примере на стр. 253;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 2(2x^2 + 3xy + C).$$

Исключая C из уравнений $\Phi(x, y, C) = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$, получим

$$x^2 + y = 0, \quad \text{откуда } y = -x^2;$$

подставляя в данное уравнение, увидим, что оно не удовлетворяется; первая часть даст $-x^2$, а вторая $-4x^2 + 4x^2 = 0$. Следовательно, $y = -x^2$ не есть ни частное, ни особое решение.

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy \frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0. \quad (12)$

Общий интеграл, как сейчас увидим, будет

$$y = C(x - C)^2; \quad (13)$$

уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

даёт

$$-2(x - C)C + (x - C)^2 = 0, \quad \text{или } (x - C)(x - 3C) = 0,$$

откуда

$$C = x \quad \text{или} \quad C = \frac{x}{3}$$

и соответственно этому

$$y = 0, \quad \text{или} \quad y = \frac{4x^3}{27}.$$

Оба выражения удовлетворяют уравнению (12); первое, $y = 0$, есть *частное* решение, потому что получается из общего интеграла при $C = 0$; второе $y = \frac{4x^3}{27}$, — *особое*, потому что, при C постоянном, выражение

$$y = C(x - C)^2$$

не может приводиться к выражению $\frac{4x^3}{27}$, третьей степени относительно x .

Чтобы проверить, что уравнение (13) есть общий интеграл уравнения (12), стоит только продифференцировать первое и исключить постоянную C . Но можно найти общий интеграл уравнения (12) и с помощью приема, указанного выше для уравнения данного вида. Решая уравнение (12) относительно x и полагая $\frac{dx}{dy} = q$, находим

$$x = 2qy + \frac{1}{4q^2y}, \quad (14)$$

дифференцируя по y , получаем

$$q = 2q + 2y \frac{dq}{dy} - \frac{1}{4} \frac{2y \frac{dq}{dy} + q}{y^2 q^3},$$

или, по упрощении:

$$(4y^2 q^3 - 1) \left(q + 2y \frac{dq}{dy} \right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$4y^2 q^3 - 1 = 0 \quad (\alpha)$$

и

$$q + 2y \frac{dq}{dy} = 0. \quad (\beta)$$

Исключая q из (α) и (14), получили бы особое решение

$$y = \frac{4x^3}{27}.$$

Интегрируя уравнение (β) , находим

$$yq^2 = C,$$

и исключая q из этого уравнения и (14), получаем

$$q = \sqrt{\frac{C}{y}}, \quad x = 2\sqrt{Cy} + \frac{1}{4C}, \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{1}{4C}\right)^2 = 4Cy.$$

Обозначая произвольную постоянную $\frac{1}{4C}$ одной буквой C , окончательно находим

$$y = C(x - C)^2.$$

Замечание о разыскании особых решений без помощи общего интеграла. Положим, что дано уравнение

$$\varphi(x, y, p) = 0, \quad (15)$$

где $p = \frac{dy}{dx}$ и где левая часть — целая рациональная функция относительно p . Предположим, что уравнение (15) имеет особое решение, и посмотрим, нельзя ли его найти, не зная общего интеграла. Наше предположение о существовании особого решения уравнения (15) сводится к тому, что семейство кривых, изображаемых общим интегралом этого уравнения

$$F(x, y, C) = 0,$$

имеет *огibaющую*. Положим, что линии AB и A_1B_1 изображают два *частных* решения нашего уравнения, соответствующих значениям $C = \alpha$ и $C = \alpha + \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha$ — бесконечно малое число, и пусть точка $\mu(x_0, y_0)$ есть точка пересечения этих линий. Угловые коэффициенты касательных к этим линиям AB и A_1B_1 определяются, если в данное уравнение

$$\varphi(x, y, p) = 0$$

подставим $x = x_0$, $y = y_0$ и найдем из него p . При этом получатся, по крайней мере, два различные значения для p (может получиться и больше, если в точке μ пересекаются не две, а большее число *интегральных* кривых). Когда точка μ примет предельное свое положение M на *огibaющей*, т. е. на *особом* решении, то упомянутые две касательные совпадут в одну, и два различных значения p сделаются равными. Следовательно, если рассматривать уравнение

$$\varphi(x, y, p) = 0$$

как алгебраическое уравнение относительно p , то для всех значений (x, y) на *огibaющей* (особом решении) уравнение это должно иметь *равные* корни, а тогда, как известно из алгебры, уравнения

$$\varphi(x, y, p) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'_p(x, y, p) = 0$$

должны иметь общие решения относительно p .

Исключая из этих уравнений p , мы и получим уравнение, которому должны удовлетворять координаты всякой точки M на *огibaющей* (особом решении).

Итак, если особое решение существует, то оно будет заключаться в числе тех уравнений, которые получаются через исключение p из уравнений

$$\varphi(x, y, p) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'_p(x, y, p) = 0.$$

Обратное заключение вообще не будет справедливо. В числе полученных таким путем уравнений могут быть уравнения и не удовлетворяющие данному дифференциальному уравнению, т. е. не дающие вовсе решений, а могут быть и частные, а не особые решения.

Как мы видели, изложенный процесс составления особого интеграла данного дифференциального уравнения геометрически сводится к определению *огibaющей*. В результате исключения y' из уравнений

$\varphi(x, y, y') = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0$ мы получим уравнение геометрического места тех точек (x, y) плоскости, которым соответствуют кратные значения y' уравнения

$$\varphi(x, y, y') = 0.$$

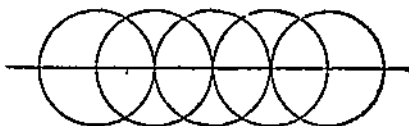
Геометрическое место кратных y' содержит, кроме *огibaющей*, другие кривые. Однако обычно эти кривые не являются *интегральными* для данного дифференциального уравнения.

Если кривые семейства, образующего общий интеграл, имеют точки возврата, как на черт. 35, то две их ветви, встречающиеся в такой точке, имеют одни и те же угловые коэффициенты касательных. Следовательно, если x и y суть координаты точки возврата, то этот угловой коэффициент встретится дважды при решении уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$ относительно y' . Поэтому геометрическое место точек возврата включено в геометрическое место кратных y' уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$, точно так же, как это было для геометрического места кратных C уравнения

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Из черт. 35 легко усмотреть, почему это геометрическое место точек возврата не является, вообще говоря, интегральной кривой дифференциального уравнения. В самом деле, угловой коэффициент касательной этого геометрического места обычно не совпадает с угловым коэффициентом касательной кривой семейства, проходящей через ту же точку; поэтому оно не является интегральной кривой дифференциального уравнения.

Если интегральные кривые представляют такую особенность, как на черт. 36, то для всех точек линии, в которых кривые касаются друг друга, имеем равные значения y' , по одному для каждой из кривых. Отсюда следует, что эта линия также является частью геометрического места кратных y' уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$. Как и для геометрического места точек возврата, такая линия обычно не является интегральной кривой дифференциального уравнения, потому что угловой коэффициент касательной к этой линии обычно отличен от углового коэффициента касательных кривых семейства. Такая линия, в точках которой кривые семейства касаются друг друга, называется *линией прикосновения*.



Черт. 36.

Геометрическое место узловых точек, которое являлось частью геометрического места кратных C уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$, не является частью геометрического места кратных y' уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$. В самом деле, две ветви кривой, пересекающиеся в узловой точке, имеют разные угловые коэффициенты касательных, как на черт. 34. Это геометрическое место не является интегральной кривой дифференциального уравнения, так как угловой коэффициент касательной к этому геометрическому месту отличен вообще от углового коэффициента касательной для каждой из ветвей.

Резюмируя, мы можем сказать, что геометрическое место кратных C уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$ может состоять из трех типов кривых: *огивающей, линии точек возврата и узловой линии*. Геометрическое место кратных y' уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$ тоже может состоять из трех типов кривых: *огивающей, линии точек возврата и линии*

прикосновения. Из них только огибающая является особой интегральной кривой дифференциального уравнения.

Примеры

$$1. \quad xy^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^3 \frac{dy}{dx} + a^2 x = 0.$$

$$\varphi = xy^3 p^3 - y^3 p + a^2 x = 0, \quad \varphi'_p = 2pxy^3 - y^3 = 0, \quad p = \frac{y}{2x};$$

исключая p , находим

$$y^4 = 4a^2 x^2. \quad (16)$$

Подставив в данное уравнение выражение y , получаемое из (16), убеждаемся, что уравнение удовлетворяется. Предлагаем найти общий интеграл данного уравнения и убедиться, что уравнение (16) даст особое решение.

$$2. \quad y - 2x \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

$$\varphi = y - 2px - p^2 = 0, \quad \varphi'_p = -2x - 2p = 0, \quad p = -x,$$

$$y + x^2 = 0, \quad y = -x^2.$$

Это выражение не удовлетворяет данному уравнению.

$$3. \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2x \sqrt{y} \frac{dy}{dx} + 4y \sqrt{y} = 0,$$

$$\varphi = p^2 - 2x \sqrt{y} \cdot p + 4y \sqrt{y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 2p - 2x \sqrt{y} = 0, \quad p = x \sqrt{y},$$

$$4y \sqrt{y} - x^2 y = 0.$$

Отсюда или $y = \frac{x^4}{16}$, или $y = 0$.

Первое решение — особое, второе — частное, получаемое при $c = 0$ из общего интеграла $y = c^2(x - c)^2$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

§ 7. Дифференциальное уравнение как результат исключения нескольких произвольных постоянных. Положим, что дано уравнение

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (1)$$

связывающее две переменные x и y и заключающее в себе n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$. Дифференцируем уравнение (1) n раз по x , рассматривая y как функцию от x ; обозначая через $y', y'', \dots, y^{(n)}$ последовательные производные от y по x , мы придем таким образом к данному уравнению еще n уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = F_1(x, y, y', C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' = F_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

которые определяет y как функцию от x и от n независимых постоянных, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению.

Поясним сказанное примерами.

Примеры

1. Положим, что дано уравнение

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x. \quad (1')$$

Дифференцируя его, получим

$$y' = C_1 e^x + C_2 \cos x - C_3 \sin x, \quad (2')$$

$$y'' = C_1 e^x - C_2 \sin x - C_3 \cos x, \quad (3')$$

$$y''' = C_1 e^x - C_2 \cos x + C_3 \sin x. \quad (4')$$

Чтобы исключить постоянные, достаточно переменить знаки всех членов уравнений (1') и (3') и сложить все четыре уравнения; тогда найдем

$$y''' - y'' + y' - y = 0. \quad (a)$$

Уравнение (1') есть общий интеграл уравнения (a). Постоянные C_1, C_2, C_3 независимы, потому что уравнения (1'), (2') и (3') допускают решение относительно C_1, C_2, C_3 .

2. Положим, что дано уравнение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3. \quad (1'')$$

Дифференцируя его, находим

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + C_3, \quad (2'')$$

$$y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + C_3, \quad (3'')$$

$$y''' = C_1 e^x + 8C_2 e^{2x} + C_3. \quad (4'')$$

Здесь постоянные C_1, C_2, C_3 зависимы, потому что эти три постоянные можно исключить из первых трех уравнений нашей системы, а именно, умножая (1'') на 2, (2'') на -3 , (3'') на 1 и складывая, находим

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (a'')$$

Следовательно, уравнение (1''), хотя и включает в себе три произвольные постоянные, будет общим интегралом дифференциального уравнения 2-го, а не 3-го порядка. Положив $C_2 e^{2x} = C^{(1)}$, можем написать уравнение (1'') в виде

$$y = C_1 e^x + C^{(1)} e^{2x},$$

где C_1 и $C^{(1)}$ будут уже две независимые постоянные, и уравнение (a'') по учтется как результат исключения этих постоянных из трех уравнений:

$$y = C_1 e^x + C^{(1)} e^{2x}, \quad y' = C_1 e^x + 2C^{(1)} e^{2x}, \quad y'' = C_1 e^x + 4C^{(1)} e^{2x}.$$

Под интегрированием данного дифференциального уравнения n -го порядка обыкновенно понимают разыскание его общего интеграла, но должно заметить, что, вообще говоря, найдя общий интеграл, мы не можем еще утверждать, что нашли все решения данного уравнения; кроме бесконечного множества частных решений, получаемых из общего интеграла при частных значениях произвольных постоянных, данное дифференциальное уравнение может иметь еще

так называемые *особые* решения, не получающиеся из общего интеграла ни при каких частных значениях произвольных *постоянных*. Разыскание этих особых решений, когда общий интеграл найден, требует еще интегрирования уравнения $(n-1)$ -го порядка. В нашем курсе мы этим вопросом заниматься не будем. Заметим здесь же, что главный класс уравнений высшего порядка, уравнений *линейных*, как мы увидим впоследствии, особых решений не имеет. Общий интеграл уравнения этого класса действительно обнимает собой *все* решения этого уравнения.

Когда найден общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3)$$

то можно распорядиться произвольными постоянными так, чтобы функция y , удовлетворяющая данному уравнению, а также и все ее последовательные производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, до $(n-1)$ порядка включительно, для данного частного значения $x = x_0$ принимали заранее заданные значения $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0$. В самом деле, если

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

есть общий интеграл уравнения (3), то постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$ независимы, т. е. первые n уравнений системы (2) допускают решение относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Произведя это решение и подставляя в правые части уравнений системы (4) заданные значения:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0,$$

мы и получим требуемые значения постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Основываясь на этом замечании, мы можем общий интеграл дифференциального уравнения определить еще следующим образом:

Общим интегралом уравнения n -го порядка с двумя переменными x и y называется такое уравнение между x, y и n произвольными постоянными, которое дает для y выражение, удовлетворяющее данному уравнению, и в котором произвольные постоянные можно так определить, чтобы функция y и все ее последовательные производные до порядка $(n-1)$ включительно принимали заранее заданные значения для данного частного значения x .

Так, например, уравнение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (5)$$

есть общий интеграл уравнения

$$y'' - y = 0, \quad (6)$$

потому что:

1) выражение y , взятое по формуле (5), удовлетворяет уравнению (6), так как

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \quad y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad (7)$$

откуда

$$y'' = y;$$

2) постоянные C_1, C_2 можно так определить, чтобы, при $x=0$, например,

$$y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

где y_0, y'_0 — произвольно заданные числа. Действительно, для этого стоит только определить C_1 и C_2 из уравнений

$$y_0 = C_1 + C_2, \quad y'_0 = C_1 - C_2,$$

получаемых из (5) и (7) при $x=0, y=y_0, y'=y'_0$. Отсюда находим

$$C_1 = \frac{y_0 + y'_0}{2}, \quad C_2 = \frac{y_0 - y'_0}{2},$$

и функция

$$y = \frac{1}{2} (y_0 + y'_0) e^x + \frac{1}{2} (y_0 - y'_0) e^{-x}$$

удовлетворяет всем поставленным условиям.

С геометрической точки зрения уравнение

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (1)$$

можно рассматривать как уравнение системы кривых, зависящее от n параметров

$$C_1, C_2, \dots, C_n.$$

Уравнение

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

будет дифференциальным уравнением, которому удовлетворяют координаты любой точки на любой кривой данной системы. Всякая кривая этой системы называется *интегральной* кривой дифференциального уравнения (3).

Примеры

1. Возьмем уравнение всех окружностей, лежащих на одной плоскости. Это уравнение можно написать в виде

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0. \quad (8)$$

Оно включает в себе три параметра A, B, C , от которых зависят координаты центра и радиус окружности.

Найдем дифференциальное уравнение этих кривых исключением постоянных A, B , и C . Дифференцируя уравнение (8), находим

$$x + yy' + A + By' = 0, \quad 1 + y'^2 + (B + y)y'' = 0, \\ 3y'y'' + (B + y)y''' = 0.$$

Исключая из последних двух уравнений величину $B + y$, находим искомое уравнение 3-го порядка

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0. \quad (9)$$

Покажем теперь, что, обратно, интегрированием уравнения (9) получается уравнение (8). Предполагая сперва $y'' \neq 0$, напомним уравнение (9) в виде

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2y'y''}{1+y'^2}, \quad \text{т. е.} \quad D_x \ln y'' = \frac{3}{2} D_x \ln (1+y'^2) = D_x \ln (1+y'^2)^{3/2}.$$

Отсюда

$$\ln y'' = \ln (1+y'^2)^{3/2} + \ln C_1,$$

где C_1 — постоянная, или

$$y'' = C_1 (1+y'^2)^{3/2}, \quad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = C_1.$$

Полагая $y' = z$, умножая на dx и интегрируя, находим

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}} = C_1 x + C_2,$$

где C_2 — постоянная, т. е.

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = C_1 x + C_2, \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 x + C_2,$$

откуда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 x + C_2}{\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2}}, \quad y = \int \frac{(C_1 x + C_2) dx}{\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2}} + C'$$

и окончательно

$$C_1 y + C_3 = \sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2}, \quad (10)$$

где $C_3 = -C'C_1$ есть третья постоянная. Уравнение (10) можно написать в виде

$$(C_1 x + C_2)^2 + (C_1 y + C_3)^2 - 1 = 0,$$

которое, очевидно, изображает систему всех окружностей и легко приводится к виду

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

При выводе мы предполагали $y'' \neq 0$; но уравнение (9), очевидно, удовлетворяется и при $y'' = 0$, потому что тогда и $y''' = 0$. Общий интеграл уравнения $y'' = 0$, очевидно, есть

$$y = ax + b,$$

где a и b — постоянные, и изображает систему всех прямых линий на плоскости; следовательно, интегральные линии уравнения (9) суть окружности и прямые линии, что и следовало ожидать, потому что прямую линию можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса. Предлагаем читателю проверить, что дифференциальное уравнение (9) выражает собой то, что его интегральные кривые имеют *постоянную кривизну* — свойство, общее окружностям и прямым линиям.

2. Для второго примера выведем, следуя Альфену (Alphen), дифференциальное уравнение всех конических сечений. Общее уравнение всех конических сечений (если исключить параболу) можно написать в виде

$$y = Mx + N \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \quad (11)$$

с пятью произвольными постоянными. Для исключения их замечаем, что

$$y' = M \pm \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}, \quad y'' = \pm \frac{AC - B^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{3/2}};$$

отсюда видно, что

$$y'' - 2/3 = \frac{(Ax^2 + 2Bx + C)}{(AC - B^2)^{2/3}}$$

есть целый полином второй степени от x ; поэтому производная 3-го порядка от $y'' - 2/3$ равна нулю, т. е.

$$D_x^3 (y'' - 2/3) = 0.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение 5-го порядка, конических сечений. Выполняя указанные три последовательных дифференцирования, получим, после некоторых простых сокращений, искомое уравнение в виде

$$40y''' - 45y''y''' + 9y''^2y' = 0.$$

Интегрирование этого уравнения будет указано позже.

Для парабол надо в уравнении (11) положить $A = 0$; тогда мы найдем, что $y'' - 2/3$ — целый полином первой степени, и дифференциальное уравнение парабол будет

$$D_x^2 (y'' - 2/3) = 0.$$

Выполнив дифференцирования, получим уравнение

$$5y''' - 3y''y' = 0,$$

которое является дифференциальным уравнением 4-го порядка для парабол.

Переходим теперь к рассмотрению некоторых видов уравнений высших порядков, интегрирование которых приводится к квадратурам или к интегрированию уравнений низшего порядка.

§ 8. Понижение порядка и интегрирование уравнений в некоторых частных случаях.

Случай I. Уравнение вида

$$y^{(n)} = \varphi(x), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ — данная функция одного x .

Мы будем искать функцию y , удовлетворяющую уравнению (1) и при $x = x_0$ принимающую, вместе со своими производными до порядка $(n-1)$ включительно, произвольно заданные значения $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Числа $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ будут произвольные постоянные. Написав уравнение (1) в виде

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \varphi(x)$$

и интегрируя его, приняв во внимание, что при $x = x_0, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, находим

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x \varphi(x) dx + y_0^{(n-1)};$$

умножая на dx и снова интегрируя в пределах от x_0 до x , получим

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right] dx + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)},$$

или короче

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \varphi(x) dx^2 + y_0^{(n-1)} (x - x_0) + y_0^{(n-2)}.$$

Продолжая тот же процесс, найдем

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \varphi(x) dx^3 + y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + y_0^{(n-2)} (x - x_0) + y_0^{(n-3)},$$

и, наконец,

$$y = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x \varphi(x) dx^n + \psi_{n-1}(x). \quad (2)$$

Входящая в правую часть равенства (2) функция $\psi_{n-1}(x)$ выражается соотношением

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}(x) &= \frac{y_0^{(n-1)}(x - x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{y_0^{(n-2)}(x - x_0)^{n-2}}{1 \cdot 2 \dots (n-2)} + \dots + y_0 = \\ &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}; \end{aligned}$$

$\psi_{n-1}(x)$ есть целый полином $(n-1)$ -й степени от x с произвольными коэффициентами.

Если бы хотели получить функцию y , удовлетворяющую данному уравнению и обращающуюся в нуль вместе со своими производными до порядка $(n-1)$ включительно, при $x = x_0$, то, очевидно, должны бы были положить $\psi_{n-1}(x) = 0$.

Кратный интеграл во второй части формулы (2) можно представить в виде простого интеграла. В самом деле, формула Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла дает

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^x f^{(n)}(t) (x - t)^{n-1} dt.$$

Полагая $f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x \varphi(x) dx^n$, будем иметь

$$f(x_0) = 0, f'(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(t) = \varphi(t);$$

следовательно,

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x \varphi(x) dx^n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^x \varphi(t) (x - t)^{n-1} dt. \quad (3)$$

Итак, общий интеграл уравнения

$$y^{(n)} = \varphi(x)$$

есть

$$y = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{\omega_0}^{\infty} \varphi(t) (x-t)^{n-1} dt + C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1}. \quad (4)$$

Пример

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1, \quad y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Тот же результат даст общая формула (4); положив $x_0 = 0$, находим

$$\begin{aligned} y &= \int_0^{\infty} (x-t) \sin t dt + C_1 + C_2 x = x \int_0^{\infty} \sin t dt - \int_0^{\infty} t \sin t dt + C_1 + C_2 x = \\ &= x(1 - \cos x) + x \cos x - \sin x + C_1 + C_2 x = \\ &= -\sin x + (1 + C_2)x + C_1; \end{aligned}$$

полагая $1 + C_2 = C^{(1)}$, $C_1 = C^{(2)}$ получим

$$y = -\sin x + C^{(1)} x + C^{(2)}$$

— результат, отличающийся от прежде найденного только обозначением произвольных постоянных.

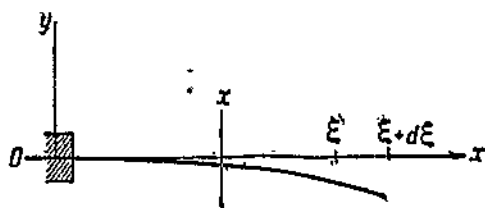
В сопротивлении материалов выводится дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Предполагается, что ось Ox направлена по оси балки, ось Oy вертикально вверх, все силы действуют в вертикальной плоскости, которая является одной из главных плоскостей балки (т. е. плоскость, проходящая через ось балки и главную ось эллипса инерции). Тогда величина прогиба y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ},$$

где E — модуль Юнга (постоянная, зависящая от вещества балки), J — центральный момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси (в случае призматической балки тоже величина постоянная), M — момент внешних сил относительно сечения x . Знак момента M условимся считать положительным, если он правую отсеченную часть вращает против часовой стрелки. В таком случае вогнутость изогнутой оси направлена вверх, и левая часть уравнения положительна. Очевидно, M — функция от x . Вышенаписанное дифференциальное уравнение принадлежит к рассмотренному типу.

Проинтегрировав это уравнение и приняв во внимание начальные условия для определения двух произвольных постоянных, мы найдем уравнение изогнутой оси.

Задача. На балку длины l с заделанным осевым концом (черт. 37) действует равномерная сплошная нагрузка величины q на единицу длины балки. Найти уравнение изогнутой оси.



Черт. 37.

Беря начало координат на левом конце балки, найдем выражение M в сечении x . Для этого возьмем элемент длины $d\xi$ с началом в точке ξ , лежащей вправо от x . Момент, происходящий от его веса $q d\xi$, равен $-q(\xi - x) d\xi$; момент всей правой части балки выразится так:

$$-q \int_x^l (\xi - x) d\xi = -q \frac{(l-x)^2}{2}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -q \frac{(l-x)^2}{2}.$$

Искомую функцию y мы найдем, интегрируя два раза по x .

Для определения произвольных постоянных мы воспользуемся тем фактом, что левый конец заделан, т. е. при $x=0$, ордината $y=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$.

Производя вычисления, будем иметь

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{q(l-x)^3}{6} + C_1.$$

Полагая $x=0$, получим $C_1 = -\frac{ql^3}{6}$.

Итак,

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{q}{6} (l-x)^3 - \frac{ql^3}{6}.$$

Далее имеем

$$EJ y = -\frac{q}{24} (l-x)^4 + \frac{ql^3}{6} x + C_2.$$

Полагая $x=0$, найдем $C_2 = \frac{q}{24} l^4$. Таким образом окончательно получим

$$y = \frac{ql^4}{24EJ} \left[1 - 4 \frac{x}{l} + \left(1 - \frac{x}{l} \right)^4 \right].$$

Прогиб в конце балки, при $x=L$, будет

$$y_L = -\frac{qL^4}{8EJ}.$$

Случай II. Уравнение вида

$$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \text{ и, в частности, } f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

А) Положим, что дано уравнение

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad (5)$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, имеем $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

Таким образом, очевидно, уравнение (5) приведет к виду

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0; \quad (6)$$

это — уравнение 1-го порядка. Положим, что нашли его общий интеграл

$$F(p, x, C_1) = 0 \quad (7)$$

и, решив это уравнение относительно p , получили

$$p = \varphi(x, C_1) = \frac{dy}{dx};$$

тогда

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Если решение уравнения (7) затруднительно, то можно поступить иначе.

1) Если уравнение (6) легко решается относительно $\frac{dp}{dx}$ и даст

$$\frac{dp}{dx} = \psi(p),$$

то

$$dx = \frac{dp}{\psi(p)}, \quad dy = p dx = \frac{p dp}{\psi(p)},$$

$$x = \int \frac{dp}{\psi(p)} + C_1, \quad y = \int \frac{p dp}{\psi(p)} + C_2;$$

произведя интегрирование и исключая p из выражений x и y , найдем зависимость вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

общий интеграл данного уравнения.

2) Если уравнение (6) легко решается относительно p , то, полагая $\frac{dp}{dx} = q$, будем иметь

$$p = \varphi(q),$$

откуда дифференцированием находим

$$dp = \varphi'(q) dq, \quad dx = \frac{dp}{q} = \frac{\varphi'(q) dq}{q}, \quad dy = p dx = \frac{\varphi(q) \varphi'(q) dq}{q};$$

следовательно,

$$x = \int \frac{\varphi'(q) dq}{q} + C_1, \quad y = \int \frac{\varphi(q) \varphi'(q) dq}{q} + C_2;$$

произведя интегрирования и исключив q , получим общий интеграл, данного уравнения.

В) Уравнение

$$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

приводится к рассмотренному виду

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0, \quad (8)$$

если положим $p = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Если проинтегрируем уравнение (8) и найдем $p = \varphi(x, C_1)$, то для определения y будем иметь уравнение

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi(x, C_1),$$

относящееся к случаю I.

Пример. Найти все плоские кривые, у которых проекция радиуса кривизны на ось Ox равна постоянной величине.
Длина радиуса кривизны равна

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

косинус угла, образуемого его направлением, т. е. нормалью к кривой, с осью x -ов, равен

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}};$$

следовательно, уравнение, выражающее условие вопроса, будет

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \frac{dy}{dx} = a \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, имеем $\frac{dp}{dx} = \frac{p(1+p^2)}{a}$,
откуда

$$\begin{aligned} dx &= \frac{a dp}{p(1+p^2)}, & dy &= p dx = \frac{a dp}{1+p^2}; \\ x &= a \int \frac{dp}{p(1+p^2)} + C_1, & y &= a \int \frac{dp}{1+p^2} + C_2; \\ x - C_1 &= a \ln \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, & y - C_2 &= a \operatorname{arctg} p. \end{aligned}$$

Чтобы исключить p из последних равенств, замечаем, что

$$p = \operatorname{tg} \left(\frac{y - C_2}{a} \right), \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \sin \left(\frac{y - C_2}{a} \right),$$

откуда

$$\frac{x - C_1}{a} = \ln \sin \left(\frac{y - C_2}{a} \right), \quad y - C_2 = a \arcsin \left(e^{\frac{x - C_1}{a}} \right) = a \arcsin \left(C e^{\frac{x}{a}} \right).$$

Задача. Определить форму гибкой тяжелой нити при равновесии.

Обозначая через q вес единицы длины нити, рассмотрим элемент ds (черт. 38). На него действуют силы натяжения T и $T + dT$ и сила тяжести $q ds$. Обозначим через H горизонтальную проекцию силы T . Из условий равновесия получим: во-первых, что сумма проекций на ось Ox равна нулю, т. е.

$$-H + H + dH = 0, \quad dH = 0,$$

H равно постоянной, и, во-вторых, что сумма проекций на ось Oy равна нулю, т. е., обозначая вертикальную составляющую T через R , мы получим следующее:

$$\begin{aligned} -R + q ds + R + dR &= 0, \\ dR &= q ds. \end{aligned}$$

Заметив, что $R = H \operatorname{tg} \alpha = H \frac{dy}{dx}$, получим

$$H d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \sqrt{q dx^2 + dy^2},$$

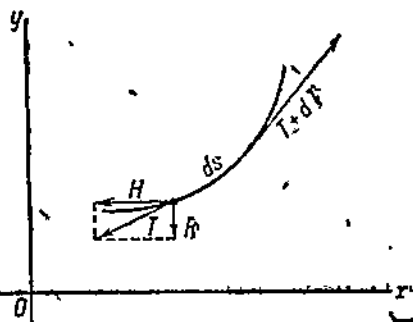
или, деля на $H dx$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение равновесия тяжелой нити и видим, что оно принадлежит к изученному типу. Проинтегрировав его, найдем уравнение нити в конечном виде.

Производя замену, получим

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{q}{H} \sqrt{1+p^2}, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{q}{H} dx.$$



Черт. 38.

Интегрируя, найдем

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{q}{H}(x - C_1); \quad p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{q}{H}(x - C_1)},$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Далее, заметив легко получаемое элементарными преобразованиями тождество:

$$p - \sqrt{1+p^2} = -\frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}} = -e^{-\frac{q}{H}(x - C_1)},$$

получим соотношение

$$2p = e^{\frac{q}{H}(x - C_1)} - e^{-\frac{q}{H}(x - C_1)}.$$

Заменив p через $\frac{dy}{dx}$ и еще раз интегрируя, найдем

$$2(y - C_2) = \frac{H}{-q} e^{\frac{q}{H}(x - C_1)} + \frac{H}{q} e^{-\frac{q}{H}(x - C_1)},$$

или

$$y - C_2 = \frac{H}{2q} \left[e^{\frac{q}{H}(x - C_1)} + e^{-\frac{q}{H}(x - C_1)} \right].$$

Полученное уравнение изображает цепную линию и может быть приведено к его простейшему виду посредством переноса начала координат в точку (C_1, C_2) . Это простейшее уравнение будет

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}),$$

где $a = \frac{H}{q}$.

Случай III. Уравнение вида

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = 0 \quad \text{и, в частности,} \quad f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0.$$

A) Положим, что дано уравнение

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0. \quad (9)$$

1) Если уравнение (9) легко разрешимо относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и дает

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(y),$$

то, полагая $\frac{dy}{dx} = p$, находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy};$$

данное уравнение принимает вид

$$p \, dp = \varphi(y) \, dy,$$

откуда

$$p^2 = 2 \int \varphi(y) \, dy + C_1, \quad p = \sqrt{2 \int \varphi(y) \, dy + C_1}.$$

Последнее равенство дает дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \int \varphi(y) \, dy + C_1}}, \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int \varphi(y) \, dy + C_1}} + C_2;$$

это и будет общий интеграл данного уравнения.

2) Если уравнение (9) легко разрешимо относительно y и дает

$$y = \psi\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right),$$

то, полагая $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, будем иметь

$$y = \psi(q);$$

дифференцируя это уравнение, находим

$$dy = \psi'(q) \, dq, \quad \text{но} \quad dy = p \, dx = \frac{p \, dp}{q},$$

следовательно,

$$p \, dp = \psi'(q) \, q \, dq,$$

откуда

$$p^2 = 2 \int \psi'(q) \, q \, dq + C_1, \quad p = \sqrt{2 \int \psi'(q) \, q \, dq + C_1},$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\psi'(q) \, dq}{\sqrt{2 \int \psi'(q) \, q \, dq + C_1}},$$

$$x = \int \frac{\psi'(q) \, dq}{\sqrt{2 \int \psi'(q) \, q \, dq + C_1}} + C_2; \quad (10)$$

исключая q из уравнения (10) и уравнения $y = \psi(q)$, мы и получим общий интеграл данного уравнения.

В) Уравнение

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = 0$$

подстановкой $z = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$ приводится к рассмотренному частному случаю

$$f\left(\frac{d^2z}{dx^2}, z\right) = 0.$$

Проинтегрировав это последнее уравнение и найдя $z = \varphi(x, C_1, C_2)$, для определения y будем иметь уравнение

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \varphi(x, C_1, C_2),$$

относящееся к случаю I.

Примеры

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y.$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, находим

$$p \frac{dp}{dy} = k^2y, \quad p dp = k^2y dy, \quad p^2 = k^2y^2 + C_1, \quad p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2y^2 + C_1},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 + C_1}}, \quad x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 + C_1}};$$

произведя интегрирование, находим

$$x + C_2 = \frac{1}{k} \ln(ky + \sqrt{k^2y^2 + C_1}), \quad \text{или} \quad \sqrt{k^2y^2 + C_1} + ky = e^{k(x+C_2)}.$$

Чтобы решить это уравнение относительно y , замечаем, что

$$\sqrt{k^2y^2 + C_1} - ky = \frac{C_1}{\sqrt{k^2y^2 + C_1} + ky} = C_1 e^{-k(x+C_2)},$$

отсюда получим

$$2ky = e^{k(x+C_2)} - C_1 e^{-k(x+C_2)},$$

или, полагая для сокращения $\frac{e^{kC_2}}{2k} = C^{(1)}, -\frac{C_1 e^{-kC_2}}{2k} = C^{(2)}$, находим

$$y = C^{(1)} e^{kx} + C^{(2)} e^{-kx}.$$

Случай IV. Уравнение вида

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

в состав которого не входит явно независимая переменная x .

Порядок такого уравнения можно понизить на одну единицу, приняв y за независимую переменную. В самом деле, полагая $y' = p$, имеем

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dx} = p \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Вообще производная порядка m от y по x выразится через производные 1-го, 2-го, ..., до $(m-1)$ -го порядка от p по y , и данное уравнение приведет к уравнению $(n-1)$ -го порядка с двумя переменными p и y . Если проинтегрируем это уравнение $(n-1)$ -го порядка и найдем

$$p = \phi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{\psi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})}, \quad x = \int \frac{dy}{\psi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} + C_n.$$

представит общий интеграл данного уравнения.

В частности, уравнение 2-го порядка

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

сведется к уравнению 1-го порядка

$$f\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Случай V. Уравнение вида

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

в состав которого не входит явно зависящая переменная y .

Данное уравнение приведет к уравнению $(n-1)$ -го порядка:

$$f(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0,$$

если положим $y' = p$. Найдя интегрированием этого уравнения

$$p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

получим

$$y = \int p dx + C_n.$$

В частности, уравнение 2-го порядка

$$f(x, y', y'') = 0$$

сведется к уравнению 1-го порядка

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Замечание. Если в данное уравнение не входят явно y и все его производные до порядка $(m-1)$ включительно, то, полагая $y^{(m)} = p$, можно понизить порядок уравнения на m единиц, потому что $y^{(n)} = p^{(n-m)}$. Интегрируя это уравнение $(n-m)$ -го порядка и найдя

$$p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}),$$

для определения y будем иметь уравнение m -го порядка:

$$f\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = p,$$

относящиеся к случаю I.

Примеры

1. Найти все плоские кривые, для которых радиус кривизны пропорционален длине нормали.

Уравнение, выражающее условие вопроса, есть

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/\mu}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \mu y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{или} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mu y \frac{d^2y}{dx^2},$$

где μ — постоянная. Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}, \quad 1 + p^2 = \mu y p \frac{dp}{dy}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{\mu y} = \frac{p dp}{1 + p^2};$$

откуда интегрированием находим

$$\frac{1}{\mu} \ln y = \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) + \frac{1}{\mu} \ln C,$$

или

$$\ln\left(\frac{y}{C}\right)^{1/\mu} = \ln \sqrt{1 + p^2}, \quad 1 + p^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^{2/\mu},$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2/\mu} - 1}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2/\mu} - 1}},$$

$$x + C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2/\mu} - 1}}.$$

Частные случаи:

$$\text{а) } \mu = 1, \quad x + C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = C \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C} \right),$$

откуда

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C} = e^{\frac{x + C_1}{C}}, \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - C^2}}{C} = e^{-\frac{x + C_1}{C}},$$

$$y = \frac{C}{2} \left\{ e^{\frac{x + C_1}{C}} + e^{-\frac{x + C_1}{C}} \right\};$$

это есть уравнение цепной линии.

$$\text{б) } \mu = -1, \quad x + C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{-2} - 1}},$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = -\sqrt{C^2 - y^2}, \quad \text{или} \quad (x + C_1)^2 + y^2 = C^2;$$

это есть уравнение окружности круга с центром на оси x -ов.

$$\text{с) } \mu = 2, \quad x + C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C} - 1}} = 2 \sqrt{C(y - C)},$$

$$y - C = \frac{(x + C_1)^2}{4C};$$

это уравнение изображает *параболу*.

$$\text{д) } \mu = -2, \quad x + C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{-1} - 1}} = \int \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{C - y}};$$

если положим $y = \frac{1}{2} C(1 - \cos t) = C \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, то

$$\int \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{C - y}} = C \int \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} C \left(t - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} C(t - \sin t);$$

следовательно,

$$x + C_1 = C_2(t - \sin t), \quad y = C_2(1 - \cos t).$$

Исключив t , получим уравнение *циклоиды*.

2. Найти все плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален квадрату абсциссы.

Уравнение, выражающее условие вопроса, есть

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{x^2}{a};$$

полагая $p = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{a(1 + p^2)^{3/2}}{x^2}, \quad \text{или} \quad \frac{a dx}{x^2} = \frac{dp}{(1 + p^2)^{3/2}};$$

интегрируя, находим

$$C - \frac{a}{x} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{C - \frac{a}{x}}{\sqrt{1 - \left(C - \frac{a}{x}\right)^2}} = \frac{Cx - a}{\sqrt{x^2 - (Cx - a)^2}},$$

$$y + C_1 = \int \frac{Cx - a}{\sqrt{x^2 - (Cx - a)^2}} dx.$$

Интеграл этот выразится логарифмической или круговой функцией, смотря по тому, будет ли $|C| < 1$ или $|C| > 1$; при $|C| = 1$ интеграл выразится алгебраически, а именно:

$$y + C_1 = \frac{1}{3} (x - 2a) \sqrt{\frac{2x - a}{a}};$$

это есть уравнение кривой 3-го порядка (*полукубической параболы*).

3. Найти все плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

Уравнение, выражающее условие вопроса, есть

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \mu \left[y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right]^3, \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\mu y^3}.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, получим

$$\frac{p dp}{dy} = \frac{1}{\mu y^3};$$

отсюда

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2\mu y^2} + \frac{C}{2}, \quad p^2 = \frac{C\mu y^2 - 1}{\mu y^2}, \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C\mu y^2 - 1}}{y\sqrt{\mu}},$$

$$dx = \frac{y\sqrt{\mu} dy}{\sqrt{C\mu y^2 - 1}}, \quad x + C_1 = \int \frac{\sqrt{\mu} y dy}{\sqrt{C\mu y^2 - 1}}, \quad \text{т. е.} \quad x + C_1 = \frac{\sqrt{C\mu y^2 - 1}}{C\sqrt{\mu}},$$

или

$$C^2\mu (x + C_1)^2 = C\mu y^2 - 1, \quad y^2 = C(x + C_1)^2 + \frac{1}{C\mu};$$

это есть уравнение кривой 2-го порядка.

Случай VI. Уравнения вида $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, однородные относительно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Порядок таких уравнений можно понизить на единицу при помощи подстановки

$$y = e^{\int z dx},$$

где z — новая неизвестная функция от x ; тогда

$$y' = z e^{\int z dx}, \quad y'' = \left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) e^{\int z dx}$$

и т. д.; вообще $y^{(n)}$ выразится произведением y на выражение, зависящее от производных z по x до порядка $(n-1)$ включительно. Подставляя эти выражения в данное уравнение и сокращая на y , который, в силу однородности уравнения, войдет во все члены в одной и той же степени, получим уравнение $(n-1)$ -го порядка между z и x . Если это уравнение проинтегрируем и найдем

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то общий интеграл данного уравнения получится из уравнения

$$y = e^{\int z dx}, \quad \text{или} \quad \frac{d \ln y}{dx} = z,$$

вводящего еще одну произвольную постоянную, так как

$$\ln y = \int z dx + C_n.$$

Пример.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0,$$

где k — постоянная. Полагая $y = e^{\int z dx}$, получим

$$z^2 + \frac{dz}{dx} + k^2 = 0, \quad \text{или} \quad dx + \frac{dz}{z^2 + k^2} = 0,$$

откуда

$$x + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} = C, \quad z = k \operatorname{tg} k(C - x),$$

$$\int z dx = \int \frac{k \sin k(C - x)}{\cos k(C - x)} dx = \ln \cos k(C - x) + C_1,$$

$$y = e^{\int z dx} = e^{C_1} \cos k(C - x),$$

или

$$y = e^{C_1} \{ \cos kC \cos kx + \sin kC \sin kx \};$$

обозначая для краткости $e^{C_1} \cos kC = C'$, $e^{C_1} \sin kC = C''$, получим

$$y = C' \cos kx + C'' \sin kx.$$

Случай VII. Порядок уравнения

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0$$

можно понизить на одну единицу, если можно подобрать число n так, чтобы уравнение сделалось однородным относительно x , когда будем считать $y, y', y'', \dots$ количествами измерений, соответственно равных $n, n-1, n-2, \dots$ относительно x ; иначе говоря, если при замене $y, y', y'', \dots$ соответственно величинами $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots$ все члены уравнения будут одинаковой степени относительно x . Такие уравнения мы назовем *обобщенными однородными*. Подстановка, дающая понижение порядка, следующая: $x = e^t, y = x^n z = ze^{nt}$; тогда

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + nz \right) e^{(n-1)t},$$

$$y'' = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + (2n-1) \frac{dz}{dt} + n(n-1)z \right) e^{(n-2)t} \text{ и т. д.}$$

Последние равенства можно легко вывести с помощью следующих формул:

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \quad y'' = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} \text{ и т. д.}$$

При подстановке в данное уравнение выражений $y, y', y'', \dots$ заметим, что показательные множители сократятся, вследствие сказанного выше об измерениях $y, y', y'', \dots$ относительно x или e^t , и получится уравнение между z и t того же порядка m , как и данное, но не заключающее в себе независимой переменной t , а порядок такого уравнения, как известно, можно понизить на единицу.

Пример

$$bx^2y'' = (y - xy')^2. \quad (a)$$

Заменяя y , y' , y'' соответственно величинами x^n , x^{n-1} , x^{n-2} , найдем, что левая часть будет степени $n+1$, а правая степени $2n$; делая $n+1=2n$, находим $n=1$. Полагая $x=e^t$, $y=ze^t$, получим

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + z \right), \quad y'' = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \right) e^{-t};$$

уравнение (a) примет вид

$$b \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

а положив $\frac{dz}{dt} = p$, найдем

$$b \left(p \frac{dp}{dz} + p \right) = p^2,$$

откуда

$$\text{или } p=0, \text{ или } b \left(\frac{dp}{dz} + 1 \right) = p.$$

Из первого получается $z=C$, $y=Cx$; это частное решение уравнения (a) с одной произвольной постоянной; из второго

$$b \left(\frac{dp}{dz} + 1 \right) = p,$$

линейного относительно p , получим

$$p = b + Ce^{\frac{z}{b}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dz}{dt} = b + Ce^{\frac{z}{b}}, \quad dt = \frac{dz}{b + Ce^{\frac{z}{b}}}.$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение, находим

$$C_1 - t = \ln(C + be^{-\frac{z}{b}}), \quad z = b \ln \left[\frac{e^t}{C'e^t + C''} \right],$$

$$y = bx \ln \left[\frac{x}{C'x + C''} \right] - \text{общее решение.}$$

Найденное выше частное решение получится из общего при $C''=0$.

§ 9. Интегрирование дифференциальных уравнений конических сечений. Покажем еще интегрирование дифференциального уравнения конических сечений, выведенное в § 7, а именно, уравнения

$$40y'''z - 45y''y'z' + 9y'^2y'' = 0. \quad (1)$$

Полагая $y''=z$, находим

$$40z^2 - 45z'z'' + 9z^2z''' = 0 \quad (2)$$

— уравнение, однородное относительно z , z' , z'' , z''' . Полагая $z = e^{\int u dx}$, имеем

$$z' = uz, \quad z'' = (u^2 + u')z, \quad z''' = (u^3 + 3uu' + u'')z;$$

подставляя в (2), получим

$$4u^3 - 18uu' + 9u'' = 0 \quad (3)$$

— уравнение, не содержащее в себе явно переменной x ; полагая

$$u' = p, \quad u'' = p \frac{dp}{du},$$

находим

$$(4u^3 - 18pu) du + 9p dp = 0; \quad (4)$$

это уравнение делаем однородным, полагая $p = q^2$, а именно:

$$(4u^3 - 18q^2 u) du + 18q^3 dq = 0. \quad (5)$$

Полагая $u = qt$, отделяем переменные и получаем

$$\frac{dq}{q} = \frac{(9 - 2t^2) t dt}{(2t^2 - 3)(t^2 - 3)}; \quad (6)$$

обозначая $t^2 = \tau$ и разлагая дробь на простейшие, получим

$$\frac{dq}{q} = \frac{\frac{1}{2}(9 - 2\tau) d\tau}{(2\tau - 3)(\tau - 3)} = \frac{1}{2} \frac{d\tau}{\tau - 3} - \frac{2d\tau}{2\tau - 3};$$

интегрируя, находим

$$\ln Cq = \ln \sqrt{t^2 - 3} - \ln(2t^2 - 3), \quad Cq = \frac{\sqrt{t^2 - 3}}{2t^2 - 3}, \quad C^2 q^2 = \frac{t^2 - 3}{(2t^2 - 3)^2}.$$

Подставляя сюда, согласно произведенной замене, вместо переменных t и q их выражения $t^2 = \frac{u^2}{q^2}$, $q^2 = p$, получим

$$(2u^2 - 3p)^2 = a(u^2 - 3p), \quad (7)$$

где a — произвольная постоянная. Решая уравнение (7) относительно p , мы находим

$$3p = 2u^2 - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - au^2}$$

или, положив $a = 4a^2$:

$$p = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - u^2} (\pm a - \sqrt{a^2 - u^2}) = \frac{du}{dx}; \quad (8)$$

отсюда

$$dx = \frac{3 \pm a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} du.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$x + \beta = \mp \frac{3}{2} \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{au} - \frac{3}{2u},$$

а отсюда

$$u = -\frac{3(x + \beta)}{(x + \beta)^2 + \delta}, \quad \text{где } \delta = \frac{9}{4a^2}.$$

$$\int u dx = -\frac{3}{2} \ln [(x + \beta)^2 + \delta] + \ln \gamma = \ln \frac{\gamma}{[(x + \beta)^2 + \delta]^{3/2}},$$

где γ — постоянная, откуда

$$z = e^{\int u dx} = \frac{\gamma}{[(x + \beta)^2 + \delta]^{3/2}}, \quad \text{т. е. } y'' = \frac{\gamma}{[(x + \beta)^2 + \delta]^{3/2}};$$

отсюда $y' = \frac{\gamma}{\delta} \frac{x + \beta}{\sqrt{(x + \beta)^2 + \delta}} + m$, где m — постоянная, и, наконец,

$$y = mx + n + \frac{\gamma}{\delta} \sqrt{(x + \beta)^2 + \delta},$$

или

$$y = mx + n \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}, \quad (9)$$

где m , n , $A = \frac{\gamma^2}{\delta^2}$, $B = \frac{\gamma^2 \beta}{\delta^2}$, $C = \frac{\gamma^2 (\beta^2 + \delta)}{\delta^2}$ — произвольные постоянные. Уравнение (9) и есть известное уравнение конических сечений.

Для упражнения предлагаем проинтегрировать дифференциальное уравнение парабол

$$3y''' - 3y''y' = 0,$$

выведенное в том же § 7.

Линейные уравнения

§ 10. Общие свойства линейных уравнений. Линейные уравнения составляют самый важный класс дифференциальных уравнений не только потому, что чаще других встречаются в приложениях, но и потому, что теория их разработана лучше других.

Самым замечательным свойством линейных уравнений нужно считать то, что общее их решение можно найти по известному числу частных решений. Это свойство и лежит в основе всей теории. Общий вид линейного уравнения порядка n есть

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = V,$$

где $y^{(k)}$ обозначает производную порядка k от y по x . $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, V$ — данные функции от x , непрерывные в интервале (a, b) , причем $A_0 \neq 0$. Когда $V \equiv 0$, уравнение называется уравнением без последнего члена и будет однородно относительно y и его производных. Коэффициент A_0 при производной высшего порядка можно принять равным единице, так как все члены уравнения можно разделить на этот коэффициент. Поэтому будем писать линейное уравнение в виде

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = V \quad (1)$$

и рассмотрим сперва уравнение без последнего члена:

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = 0. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА I. Если y_1 есть частное решение уравнения (2), то $C_1 y_1$, где C_1 — постоянная, есть также решение уравнения (2).

Во всем дальнейшем мы будем исключать очевидное частное решение $y \equiv 0$.

Для доказательства подставляем в уравнение (2) $y = C_1 y_1$ и находим

$$C_1 \{y_1^{(n)} + A_1 y_1^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y_1' + A_n y_1\} = 0,$$

потому что, по условию y_1 есть решение уравнения, что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА II. Если $y_1, y_2, \dots, y_k$ — решения уравнения (2), то и $y_1 + y_2 + \dots + y_k$ будет решением его.

В этом случае разность

$$Y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

не будет равна тождественно нулю, является решением нашего уравнения (2) и будет удовлетворять следующим начальным условиям:

$$Y(x_0) = 0, \quad Y'(x_0) = 0, \quad Y''(x_0) = 0, \dots, \quad Y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Функция

$$\Phi(x) = |Y(x)| + |Y'(x)| + \dots + |Y^{(n-1)}(x)|$$

не равна тождественно нулю на интервале (a, b) , так как

$$\Phi(x) \geq |Y(x)|$$

на этом интервале, а в некоторых точках этого интервала

$$|Y(x)| > 0.$$

Кроме того, $\Phi(x)$ — непрерывна на интервале (a, b) , а

$$\Phi(x_0) = 0.$$

Возьмем точку x_1 , в которой значение $\Phi(x)$ положительно. Положим $x_1 > x_0$. В противном случае пришлось бы лишь немного изменить последующие рассуждения.

Итак, $\Phi(x_1) > 0$.

Вследствие непрерывности $\Phi(x)$ можно найти такой интервал (α, x_1) , во всех точках которого

$$\Phi(x) > 0.$$

Очевидно,

$$\alpha \geq x_0,$$

так как в противном случае точка x_0 , где $\Phi(x) = 0$, находилась бы внутри интервала (α, x_1) , что противоречит определению интервала (α, x_1) . Таких интервалов можно найти сколько угодно, и все они принадлежат интервалу (x_0, x_1) . Среди них имеется, очевидно, наибольший. Обозначим его через $(\bar{x}_0, x_1)$. Очевидно,

$$\bar{x}_0 \geq x_0.$$

Кроме того,

$$\Phi(\bar{x}_0) = 0,$$

так как в противном случае можно было бы вследствие непрерывности $\Phi(x)$ найти такой интервал $(\beta, \bar{x}_0)$, на котором

$$\Phi(x) > 0.$$

Но тогда $\Phi(x)$ было бы положительным на всем интервале

$$(\beta, x_1),$$

где $\beta < \bar{x}_0$. Поэтому интервал $(\bar{x}_0, x_1)$ оказался бы не наибольшим из интервалов (α, x_1) , на которых $\Phi(x)$ положительно, что противоречит определению интервала $(\bar{x}_0, x_1)$.

Итак,

$$\Phi(\bar{x}_0) = 0,$$

а во всех точках интервала $(\bar{x}_0, x_1)$ $\Phi(x)$ положительно.

Сегмент $[\bar{x}_0, x_1]$ лежит внутри интервала (α, b) . Поэтому все коэффициенты $A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)$ уравнения (2), будучи непрерывны на интервале (α, b) , окажутся непрерывными и на сегменте $[\bar{x}_0, x_1]$. Вследствие этого все коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ будут ограниченными на этом сегменте. Обозначим через K положительное число, превосходящее абсолютную величину каждого из этих коэффициентов при каждом значении x из сегмента $[\bar{x}_0, x_1]$. Пусть h — такое положительное число, что $\bar{x}_0 + h \leq x_1$. На сегменте $[\bar{x}_0, \bar{x}_0 + h]$ функция $\Phi(x)$ непрерывна. Поэтому она достигает своего максимума $M (M > 0)$ в некоторой точке ξ сегмента $[\bar{x}_0, \bar{x}_0 + h]$. Очевидно,

$$\bar{x}_0 < \xi \leq \bar{x}_0 + h.$$

Из уравнения (2) имеем

$$Y^{(n)}(x) = -A_1(x) Y^{(n-1)}(x) - A_2(x) Y^{(n-2)}(x) - \dots - A_n(x) Y(x). \quad (2')$$

Интегрируя (2') в пределах от $\bar{x}_0$ до x , где $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_0 + h$, получим

$$Y^{(n-1)}(x) = \int_{\bar{x}_0}^x (-A_1 Y^{(n-1)} - A_2 Y^{(n-2)} - \dots - A_n Y) dx.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} |Y^{(n-1)}(x)| &\leq \int_{\bar{x}_0}^x |A_1 Y^{(n-1)} + A_2 Y^{(n-2)} + \dots + A_n Y| dx \leq \\ &\leq \int_{\bar{x}_0}^x K(|Y^{(n-1)}| + |Y^{(n-2)}| + \dots + |Y|) dx = \int_{\bar{x}_0}^x K\Phi(x) dx \leq \\ &\leq \int_{\bar{x}_0}^x KM dx = KM(x - \bar{x}_0) \leq K M h. \end{aligned}$$

Значит,

$$|Y^{(n-1)}(x)| \leq K M h \quad \text{при} \quad \bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_0 + h.$$

Пользуясь последним неравенством, получим

$$|Y^{(n-2)}(x)| = \left| \int_{\bar{x}_0}^x Y^{(n-1)}(x) dx \right| \leq \int_{\bar{x}_0}^x |Y^{(n-1)}(x)| dx \leq \\ \leq \int_{\bar{x}_0}^x K M h dx = K M h (x - \bar{x}_0) \leq K M h^2.$$

Так же найдем

$$|Y^{(n-3)}(x)| \leq K M h^3, \dots, |Y(x)| \leq K M h^n.$$

Пользуясь последними оценками для

$$|Y(x)|, |Y'(x)|, \dots, |Y^{(n-1)}(x)|,$$

находим

$$\Phi(x) \leq K M h + K M h^3 + \dots + K M h^n.$$

Последнее неравенство верно, между прочим, и при $x = \xi$. Поэтому

$$M \leq K M h + K M h^3 + \dots + K M h^n.$$

Сократив на положительное число M , получим

$$1 \leq K(h + h^3 + \dots + h^n).$$

Это неравенство противоречиво, так как K — постоянная величина, а h — можно считать сколь угодно малым. Таким образом лемма доказана.

ТЕОРЕМА III. Условие, необходимое и достаточное для линейной независимости решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ состоит в том, чтобы определитель

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_{n-1} & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (6)$$

не обращался в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала. Этот определитель Δ называют определителем Вронского для n функций $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Доказательство. Предполагая $\Delta \neq 0$, покажем сначала, что функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы. В противном случае между $y_1, y_2, \dots, y_n$ существовала бы линейная зависимость

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = 0,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные, не равные нулю одновременно. Положим, например, $a_n \neq 0$; выражая y_n через $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ и

Рассматривая в уравнениях (8) величины $C_1, C_2, \dots, C_n$ как неизвестные, мы получим для определителя системы (8) значение $\Delta(x_0)$, которое не равно нулю, согласно теореме III, так как $y_1, y_2, \dots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения (2). Следовательно, система (8) из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определив это решение $C_1, C_2, \dots, C_n$ системы (8), составим функцию

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

В силу следствия теорем I и II эта функция является решением дифференциального уравнения (2), вследствие же условий (8) мы имеем при $x = x_0$:

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Эти начальные условия, по вышеупомянутой лемме единственности, позволяют заключить, что решение $\bar{y}(x)$ совпадает с исходным решением $y(x)$, и мы получаем, вспоминая определение функции $\bar{y}(x)$:

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема V. *Порядок линейного уравнения (2) можно понизить на одну единицу, зная одно его частное решение y_1 , подстановкой $y = y_1 \int u \, dx$, и новое уравнение порядка $n - 1$, служащее для определения u , будет также линейное.*

Действительно, пусть $y = y_1$ есть частное решение уравнения (2). Вводим новую искомую функцию z при помощи подстановки

$$y = y_1 z. \tag{9}$$

Соотношение (9) разрешимо относительно z в тех интервалах, где y_1 не обращается в нуль; только такие интервалы мы будем рассматривать. Дифференцируя находим

$$\left. \begin{aligned} y' &= y_1' z + y_1 z', \\ y'' &= y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'', \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} z + n y_1^{(n-1)} z' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_1^{(n-2)} z'' + \dots + y_1 z^{(n)}. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Подставляя выражения для $y, y', \dots, y^{(n)}$ из равенств (9) и (10) в уравнение (2), замечаем, что коэффициент при z :

$$y_1^{(n)} + A_1 y_1^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y_1' + A_n y_1,$$

равен нулю, потому что y_1 есть решение уравнения (2), и находим, по разделении всех членов на y_1 , что z будет удовлетворять уравнению

$$z^{(n)} + B_1 z^{(n-1)} + B_2 z^{(n-2)} + \dots + B_{n-1} z' = 0,$$

где $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ — известные функции от x , непрерывные в интервале (a, b) . Полагая $z' = \left(\frac{y}{y_1}\right)' = u$, находим, что u будет удовлетворять линейному уравнению $(n-1)$ -го порядка:

$$u^{(n-1)} + B_1 u^{(n-2)} + \dots + B_{n-1} u = 0. \quad (11)$$

Так как $z = \int u dx$, а значит, $y = y_1 \int u dx$, то последняя формула дает нам общий интеграл уравнения (2), если мы найдем общее решение уравнения (11).

Замечание. Подстановка $y = y_1 \int u dx$, которую мы здесь применяли, может быть приложена и к уравнению

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = V \quad (1)$$

с последним членом. Преобразованное уравнение, которому будет удовлетворять u , имеет в этом случае вид

$$u^{(n-1)} + B_1 u^{(n-2)} + \dots + B_{n-1} u = \frac{V}{y_1},$$

где $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ имеют такие же значения, как и в уравнении (11), а делитель во второй части появляется при разделении всех членов преобразованного уравнения на коэффициент при $u^{(n-1)}$, равный y_1 , как видно из формул (10).

Применяя сказанное к линейному уравнению 2-го порядка и remembering, что линейное уравнение 1-го порядка интегрируется в квадратурах, получаем такую теорему:

Линейное уравнение 2-го порядка интегрируется в квадратурах, если известно частное решение соответствующего уравнения без последнего члена.

Пример

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Уравнению $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ удовлетворяет $y = x$. Полагая $y = x \int u dx$, найдем

$$y' = xu + \int u dx, \quad y'' = xu' + 2u.$$

Подставив в данное уравнение, находим

$$u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2};$$

интегрируя, получим

$$u = \frac{C}{x} + \frac{\ln x}{x};$$

$$y = x \int u dx = \frac{1}{2} x \ln^2 x + Cx \ln x + Cx.$$

ТЕОРЕМА VI. Если Y есть частное решение уравнения с последним членом

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_n y = V, \quad (12)$$

то самое общее его решение будет

$$y = Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, а $y_1, y_2, \dots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения без последнего члена:

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_n y = 0. \quad (13)$$

В самом деле, положив $y = Y + \eta$ и подставляя в (12), находим

$$\eta^{(n)} + A_1 \eta^{(n-1)} + \dots + A_n \eta + [Y^{(n)} + A_1 Y^{(n-1)} + \dots + A_n Y] = V,$$

а так как Y есть решение уравнения (1), то для определения η получим

$$\eta^{(n)} + A_1 \eta^{(n-1)} + \dots + A_n \eta = 0,$$

откуда $\eta = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, что и доказывает теорему.

Мы увидим на примерах, что во многих случаях частное решение Y уравнения (1) легко найти по способу неопределенных коэффициентов. Не прибегая к этому средству, можно показать, что интегрирование уравнения с последним членом всегда приводится к интегрированию уравнения без последнего члена и к квадратурам, при помощи так называемого *способа изменения произвольных постоянных*.

§ 11. Способ изменения произвольных постоянных. Возьмем выражение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (a)$$

которое, при постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, удовлетворяет уравнению

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_n y = 0, \quad (1)$$

и, рассматривая теперь $C_1, C_2, \dots, C_n$ как функции от x , постараемся определить эти функции так, чтобы выражение (a) удовлетворяло уравнению

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_n y = V. \quad (2)$$

Имея в своем распоряжении n функций и лишь одно уравнение, которому надо удовлетворить, мы можем подчинить эти n функций еще $n-1$ условиям, при выполнении которых производные

$$y', y'', \dots, y^{(n-1)},$$

Итак, решение самого общего линейного уравнения n -го порядка приводится к разысканию n линейно независимых частных решений уравнения без последнего члена и к квадратурам.

Рассмотрим теперь случаи, когда разыскание частных решений уравнения без последнего члена особенно просто.

§ 12. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и приводящиеся к ним. I. Положим, что в уравнении

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = V \quad (1)$$

коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$ — числа постоянные. В этом случае разыскание частных решений уравнения

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0 \quad (2)$$

приводится к решению алгебраического уравнения n -й степени. Чтобы в этом убедиться, полагаем в уравнении (2) $y = e^{kx}$, где k — неизвестная постоянная, и стараемся определить ее так, чтобы уравнение (2) удовлетворилось. Замечая, что $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, $\dots$, $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, найдем, согласно уравнению (2):

$$e^{kx} (A_0 k^n + A_1 k^{n-1} + \dots + A_n) = 0,$$

откуда и заключаем, что $y = e^{kx}$ удовлетворяет уравнению (2), если k есть корень уравнения

$$A_0 k^n + A_1 k^{n-1} + \dots + A_n = 0, \quad (3)$$

получаемого из уравнения (2) заменой $y^{(m)}$ через k^m . Уравнение (3) называют *характеристическим* для данного уравнения (1).

Если уравнение (3) имеет n различных корней $k_1, k_2, \dots, k_n$, то будем иметь n частных решений уравнения (2):

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{k_n x}$$

Решения эти, как легко убедиться, линейно независимы, и общий интеграл уравнения (2) будет

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

В линейной независимости найденных решений можно убедиться при помощи теоремы III, составив определитель Вронского:

$$\Delta = e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-2} & k_2^{n-2} & \dots & k_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

и заметив, что он не равен нулю, так как все k_i различны.

Если в числе корней $k_1, k_2, \dots, k_n$ есть мнимый корень, например, $k_1 = \alpha + \beta i$, то, при действительных коэффициентах $A_0, A_1, \dots, A_n$, будет и другой $k_2 = \alpha - \beta i$, с ним сопряженный. Вместо двух мнимых решений, $e^{(\alpha + \beta i)x}$ и $e^{(\alpha - \beta i)x}$, можно ввести другие два, действительные, пользуясь теоремами I и II, а именно:

$$\frac{e^{(\alpha + \beta i)x} + e^{(\alpha - \beta i)x}}{2} = e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

и

$$\frac{e^{(\alpha + \beta i)x} - e^{(\alpha - \beta i)x}}{2i} = e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Если уравнение (3) имеет равные корни, то число линейно независимых решений, даваемых формулой $y = e^{kx}$, будет меньше n ; но легко убедиться, что когда уравнение

$$\varphi(k) = A_0 k^n + A_1 k^{n-1} + \dots + A_{n-1} k + A_n = 0 \quad (3)$$

имеет l равных корней $k_1 = k_2 = \dots = k_l$, то уравнение (2) будет иметь l независимых решений $e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{l-1} e^{k_1 x}$, так что и в этом случае будем иметь n независимых решений уравнения (2). Чтобы убедиться в этом, обозначим для краткости символом $D(y)$ левую часть уравнения (2), т. е.

$$D(y) = A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y;$$

тогда уравнение (2) напишется в виде

$$D(y) = 0; \quad (2')$$

y в символе $D(y)$ может обозначать какую угодно функцию от x ; предполагая, что y есть функция от двух независимых переменных x и k , заметим, что

$$\frac{\partial^m}{\partial k^m} D(y) = D\left(\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right).$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial k^m} D(y) &= A_0 \frac{\partial^m \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)}{\partial k^m} + A_1 \frac{\partial^m \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)}{\partial k^m} + \dots + \\ &+ A_{n-1} \frac{\partial^m \left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial k^m} + A_n \frac{\partial^m y}{\partial k^m}, \end{aligned}$$

а переставляя порядок дифференцирований, находим

$$\frac{\partial^m D(y)}{\partial k^m} = A_0 \frac{d^n \left(\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right)}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} \left(\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right)}{dx^{n-1}} + \dots + A_n \frac{\partial^m y}{\partial k^m} = D\left(\frac{\partial^m y}{\partial k^m}\right),$$

что и требовалось доказать.

Применяя сказанное к функции $y = e^{kx}$, находим

$$\frac{\partial^m D(e^{kx})}{\partial k^m} = D\left(\frac{\partial^m (e^{kx})}{\partial k^m}\right) = D(x^m e^{kx}), \quad (4)$$

причем $D(e^{kx}) = e^{kx} \varphi(k)$, где $\varphi(k) = A_0 k^n + A_1 k^{n-1} + \dots + A_n$. Полагая в формуле (4) $m = 0, 1, 2, 3, \dots, l-1$, находим

$$\begin{aligned} D(e^{kx}) &= e^{kx} \varphi(k), \\ D(x e^{kx}) &= \frac{\partial}{\partial k} D(e^{kx}) = e^{kx} \{\varphi'(k) + x \varphi(k)\}, \\ D(x^2 e^{kx}) &= \frac{\partial^2}{\partial k^2} D(e^{kx}) = e^{kx} \{\varphi''(k) + 2x \varphi'(k) + x^2 \varphi(k)\}, \\ &\dots \dots \dots \\ D(x^{l-1} e^{kx}) &= \frac{\partial^{l-1}}{\partial k^{l-1}} D(e^{kx}) = e^{kx} \{\varphi^{(l-1)}(k) + \\ &\quad + (l-1)x \varphi^{(l-2)}(k) + \dots + x^{l-1} \varphi(k)\}. \end{aligned}$$

Если k_1 есть корень кратности l уравнения $\varphi(k) = 0$, то

$$\varphi(k_1) = 0, \quad \varphi'(k_1) = 0, \quad \varphi''(k_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(l-1)}(k_1) = 0,$$

откуда

$$D(e^{k_1 x}) = 0, \quad D(x e^{k_1 x}) = 0, \quad \dots, \quad D(x^{l-1} e^{k_1 x}) = 0,$$

т. е. $e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{l-1} e^{k_1 x}$ будут решения уравнения $D(y) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Независимость решений в общем случае вытекает из следующего положения.

Выражение

$$(a_1 x^{l-1} + a_2 x^{l-2} + \dots + a_l) e^{k_1 x} + (b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m) e^{k_2 x} + \dots + (h_1 x^{s-1} + h_2 x^{s-2} + \dots + h_s) e^{k_p x} = 0, \quad (5)$$

где все числа $k_1, k_2, \dots, k_p$ между собой различны, не может быть тождеством. (Коэффициенты $a_1, b_1, \dots, h_1$ высших членов полиномов по условию не равны нулю.)

Это предложение справедливо, когда левая часть состоит только из одного произведения полинома на показательную функцию, так как показательная функция в нуль не обращается, а полином может обратиться в нуль только в конечном числе точек.

Допустим справедливость теоремы для случая, когда левая часть представляет сумму $p-1$ таких произведений, и покажем невозможность тождества (5), левая часть которого представляет сумму p произведений указанного вида. Действительно, если допустим существование тождества (5) и разделим обе части его на $e^{k_1 x}$, затем продифференцируем l раз по x , то получим новое тождество:

$$\begin{aligned} [b_1 (k_2 - k_1)^l x^{m-1} + \dots] e^{(k_2 - k_1)x} + \dots \\ \dots + [h_1 (k_p - k_1)^l x^{s-1} + \dots] e^{(k_p - k_1)x} = 0, \end{aligned}$$

левая часть которого содержит $p-1$ произведений указанного вида. Но это тождество, согласно гипотезе, невозможно, следовательно, невозможно и тождество (5).

Приложим теперь все изложенное к частным примерам.

Примеры

$$1. \quad y'' - 3y' + 2y = x^2. \quad (6)$$

Возьмем уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad (7)$$

Полагая $y = e^{kx}$, получим

$$k^2 - 3k + 2 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x};$$

общий интеграл уравнения (7) будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Рассматривая C_1 и C_2 как функции от x , определяем их из условий:

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0, \\ y_1' C_1 + y_2' C_2 = x^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} e^x C_1' + e^{2x} C_2' = 0, \\ e^x C_1' + 2e^{2x} C_2' = x^2, \end{cases}$$

откуда

$$C_2' = x^2 e^{-2x}, \quad C_1' = -x^2 e^{-x};$$

интегрируя, получим

$$C_1 = - \int x^2 e^{-x} dx + c_1 = e^{-x} \{x^2 + 2x + 2\} + c_1,$$

$$C_2 = \int x^2 e^{-2x} dx + c_2 = -\frac{1}{4} e^{-2x} \{2x^2 + 2x + 1\} + c_2,$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (6) будет

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}.$$

Вместо того, чтобы применять метод изменения произвольных постоянных, можно искать частное решение данного уравнения (6) и, прибавив к этому решению общее решение уравнения без последнего члена, найти общее решение данного уравнения. Чтобы найти частное решение уравнения (6), полагаем

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (8)$$

где a , b , c — неопределенные постоянные; подставляя в данное уравнение, получим

$$2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2;$$

это равенство должно быть тождеством, если выражение (8) удовлетворяет данному уравнению. Последнее заключение дает следующую систему уравнений:

$$2a = 1; \quad 2b - 6a = 0; \quad 2a - 3b + 2c = 0,$$

из которой следует $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{4}$, и искомое частное решение будет

$$Y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4},$$

а следовательно, общий интеграл будет

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4},$$

как и было найдено выше.

2.

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}. \quad (9)$$

Составляя характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$

видим, что оно имеет два корня, равные 2. Следовательно, частные решения уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (10)$$

будут

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = x e^{2x},$$

а общий интеграл

$$y = e^{2x} \{C_1 + C_2 x\}.$$

Рассматривая C_1 и C_2 как функции от x , определяем их из условий

$$e^{2x} C_1' + x e^{2x} C_2' = 0; \quad 2e^{2x} C_1' + (1 + 2x) e^{2x} C_2' = e^{2x},$$

или

$$C_1' + x C_2' = 0; \quad 2C_2' + (1 + 2x) C_2' = 1;$$

отсюда

$$C_1' = -x, \quad C_2' = 1; \quad C_1 = -\frac{x^2}{2} + c_1, \quad C_2 = x + c_2.$$

Общий интеграл данного уравнения будет

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}.$$

В этом примере также легко составить общий интеграл по одному частному решению. Положив в данном уравнении $y = a x^2 e^{2x}$, где a — неопределенная постоянная, получим

$$y' = e^{2x} \{2ax^2 + 2ax\}; \quad y'' = e^{2x} \{4ax^2 + 8ax + 2a\};$$

подставляя в данное уравнение, находим

$$2a = 1, \quad a = \frac{1}{2}, \quad Y = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Следовательно, общий интеграл заданного дифференциального уравнения будет

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + e^{2x} \{c_1 + c_2 x\},$$

как и было найдено другим путем.

Замечание. Частное решение данного уравнения нельзя было искать в форме

$$a e^{2x} \text{ или } a x e^{2x},$$

потому что все функции этой формы удовлетворяют уравнению (10), как показывает интеграл этого уравнения, а потому не могут удовлетворять данному уравнению.

3.

$$y'' + \pi^2 y = \cos x. \quad (11)$$

Здесь характеристическое уравнение, $k^2 + n^2 = 0$, имеет мнимые корни

$$k_1 = n\sqrt{-1}, \quad k_2 = -n\sqrt{-1};$$

действительные решения уравнения

$$y'' + n^2 y = 0 \quad (12)$$

будут

$$\frac{e^{nix} + e^{-nix}}{2} \text{ и } \frac{e^{nix} - e^{-nix}}{2i}, \text{ или } y_1 = \cos nx, \quad y_2 = \sin nx.$$

Общий интеграл уравнения (12):

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx.$$

Чтобы получить общий интеграл уравнения (11), считаем C_1, C_2 функциями от x и подчиняем их условиям:

$$C_1' \cos nx + C_2' \sin nx = 0; \quad -n C_1' \sin nx + n C_2' \cos nx = \cos x.$$

Решая эти уравнения, находим

$$C_1' = -\frac{\cos x \sin nx}{n}; \quad C_2' = \frac{\cos x \cos nx}{n};$$

интегрируя, получим

$$C_1 = -\frac{1}{n} \int \cos x \sin nx \, dx + c_1; \quad C_2 = \frac{1}{n} \int \cos x \cos nx \, dx + c_2,$$

или

$$C_1 = -\frac{1}{2n} \left\{ \int \sin(n+1)x \, dx + \int \sin(n-1)x \, dx \right\} + c_1 = \\ = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right\} + c_1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2n} \left\{ \int \cos(n+1)x \, dx + \int \cos(n-1)x \, dx \right\} + c_2 = \\ = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right\} + c_2.$$

Эти формулы предполагают $n \neq 1$.

При $n = 1$ получим

$$C_1 = \frac{1}{4} \cos 2x + c_1; \quad C_2 = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + c_2.$$

Следовательно, при $n \neq 1$, общий интеграл данного уравнения будет

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx + \frac{1}{2n} \left[\frac{\cos(n+1)x \cos nx + \sin(n+1)x \sin nx}{n+1} \right] + \\ + \frac{1}{2n} \left[\frac{\cos nx \cos(n-1)x + \sin nx \sin(n-1)x}{n-1} \right],$$

или, по упрощению:

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx + \frac{\cos x}{n^2 - 1};$$

при $n = 1$ найдем

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2} x \sin x,$$

или, соединяя $c_1 \cos x + \frac{1}{4} \cos x$ в один член:

$$y = c \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

В этом примере, как и в предыдущих, можно было бы составить общий интеграл данного уравнения

$$y'' + n^2 y = \cos x \quad (11)$$

на основании теоремы VI, с помощью частного решения этого уравнения и общего интеграла без последнего члена. Для получения частного решения полагаем

$$y = \alpha \cos x + \beta \sin x,$$

где α и β — неопределенные постоянные; подставляя в данное уравнение, легко найдем

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{n^2 - 1}, \quad Y = \frac{\cos x}{n^2 - 1};$$

при $n = 1$ частное решение надо искать в другой форме, а именно:

$$y = \alpha x \cos x + \beta x \sin x,$$

потому что при $n = 1$ всякое выражение вида

$$y = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

удовлетворяет уравнению без последнего члена $y'' + y = 0$ и не может удовлетворить данному.

4. Найдем общий интеграл уравнения

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = x. \quad (13)$$

Берем уравнение без последнего члена

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Полагая $y = e^{kx}$, находим

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3;$$

общий интеграл уравнения (13) будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + Y,$$

где Y — частное решение того же уравнения. Чтобы найти такое решение, полагаем в уравнении (13) $y = \alpha x + \beta$ и находим

$$11\alpha - 6(\alpha x + \beta) = x,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{1}{6}, \quad \beta = -\frac{11}{36}, \quad Y = -\frac{1}{6}x - \frac{11}{36}.$$

II. Разыскание частных решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами и последним членом:

$$D(y) = y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = V, \quad (14)$$

когда V есть сумма членов вида $P_m e^{kx}$, где k — постоянная, действительная или мнимая, а P_m — полином от x степени m .

Рассмотренные выше примеры относятся именно к такому виду функции V , если принять во внимание, что

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

так что изложенное ниже будет обобщением тех приемов, которыми мы пользовались в вышеприведенных примерах.

Заметим прежде всего, что если

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_k,$$

то, зная частное решение y_1 уравнения $D(y) = V_1$, частное решение y_2 уравнения $D(y) = V_2$ и т. д., будем знать и частное решение уравнения

$$D(y) = V_1 + V_2 + \dots + V_k,$$

а именно:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_k,$$

потому что

$$D(y_1 + y_2 + \dots + y_k) = D(y_1) + D(y_2) + \dots + D(y_k) = V_1 + V_2 + \dots + V_k.$$

На основании этого замечания достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда V есть *одночлен* вида $P_m x^m$. Предположим сперва, что $k \neq 0$, так что

$$V = P_m = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

и положим, что в уравнении (14) коэффициент $A_n \neq 0$. Тогда этому уравнению удовлетворяет целый полином той же степени m , как и функция P_m . В самом деле, полагая

$$y = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_{m-1} x + c_m$$

составляя y' , y'' , ..., $y^{(n)}$, подставляя в уравнение (14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, начиная с x^m , получим

$$\begin{aligned} a_0 &= A_n c_0, \\ a_1 &= A_n c_1 + m A_{n-1} c_0, \\ a_2 &= A_n c_2 + (m-1) A_{n-1} c_1 + m(m-1) A_{n-2} c_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

в предположении, что $A_n \neq 0$, из первого уравнения найдем c_0 , из второго c_1 , из третьего c_2 и т. д. Если $A_n = 0$, причем и еще несколько коэффициентов подряд могут обращаться в нуль, например:

$$A_{n-1} = 0, \quad A_{n-2} = 0, \dots, \quad A_{n-p+1} = 0,$$

так что уравнение (14) имеет вид

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-p} y^{(p)} = P_m, \quad (14')$$

где $A_{n-p} \neq 0$, то, положив $z = y^{(p)}$, получим уравнение

$$z^{(n-p)} + A_1 z^{(n-p-1)} + \dots + A_{n-p} z = P_m,$$

которому, на основании вышесказанного, удовлетворяет целый полином степени m , потому что коэффициент при z не равен нулю; а если z — целый полином степени m , то из уравнения $y^{(p)} = z$

следует, что y будет целый полином степени $m + p$, который можно написать в виде

$$y = c_0 x^{m+p} + c_1 x^{m+p-1} + \dots + c_m x^p = x^p Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ — целый полином степени m , потому что при определении y по данному z из уравнения $y^{(p)} = z$ коэффициенты при x^{p-1} , x^{p-2} , ..., x , x^0 , очевидно, остаются произвольными, и, при разыскании частного решения y , все эти коэффициенты можно взять равными нулю.

Например, частное решение уравнения

$$y^{IV} + 2y''' + y'' = x + 4,$$

где $m = 1$, $p = 2$, надо искать в виде $y = c_0 x^3 + c_1 x^2$, откуда

$$y' = 3c_0 x^2 + 2c_1 x, \quad y'' = 6c_0 x + 2c_1, \quad y''' = 6c_0, \quad y^{IV} = 0.$$

Следовательно, постоянные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$12c_0 + 2c_1 + 6c_0 x = x + 4, \quad 6c_0 = 1, \quad 12c_0 + 2c_1 = 4,$$

откуда $c_0 = \frac{1}{6}$, $c_1 = 1$, и искомое частное решение будет

$$y = \frac{1}{6} x^3 + x^2.$$

Переходя теперь к общему случаю, когда $V = P_m e^{kx}$, где $k \neq 0$, преобразуем уравнение (14') подстановкой $y = z e^{kx}$; тогда

$$y' = e^{kx} (kz + z'),$$

$$y'' = e^{kx} (k^2 z + 2kz' + z''),$$

$$y''' = e^{kx} (k^3 z + 3k^2 z' + 3kz'' + z'''),$$

и, по формуле Лейбница:

$$y^{(n)} = e^{kx} \left\{ k^n z + nk^{n-1} z' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} k^{n-2} z'' + \dots + nkz^{(n-1)} + z^{(n)} \right\}.$$

Подставляя в данное уравнение, найдем, по сокращении на e^{kx} , что коэффициент при z равен

$$k^n + A_1 k^{n-1} + \dots + A_{n-2} k^2 + A_{n-1} k + A_n = \varphi(k),$$

т. е. левой части характеристического уравнения; коэффициент при z' равен

$$nk^{n-1} + A_1(n-1)k^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}k + A_{n-1} = \varphi'(k);$$

коэффициент при z'' равен $\frac{\varphi''(k)}{1 \cdot 2}$ и т. д. и, наконец, при $z^{(n)}$ коэффициент будет равен единице; преобразованное уравнение будет

$$z^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(k)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} z^{(n-1)} + \dots + \varphi'(k) z' + \varphi(k) z = P_m(x). \quad (15)$$

На основании предыдущего заключаем, что уравнению (15) удовлетворяет целый полином:

$$z = Q_m(x)$$

степени m , а следовательно, уравнению (14'):

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y + A_n y = P_m e^{kx}, \quad (14')$$

удовлетворяет функция

$$y = Q_m(x) e^{kx}.$$

Если же k есть корень кратности p характеристического уравнения, т. е. если

$$\varphi(k) = 0, \quad \varphi'(k) = 0, \dots, \varphi^{(p-1)}(k) = 0, \\ z = x^p Q_m(x),$$

то уравнению (14') удовлетворяет решение вида

$$y = x^p Q_m(x) e^{kx}, \quad (16)$$

где $Q_m(x)$ — целый полином степени m .

В приложениях прямо подставляют выражение вида (16) в уравнение (14'), не переходя к уравнению (15), и определяют неизвестные коэффициенты функции $Q_m(x)$ известным способом.

Если

$$V = e^{\alpha x} P_m \cos \beta x \quad \text{или} \quad V = e^{\alpha x} P_m \sin \beta x,$$

то, представляя V в виде

$$P_m \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2} \quad \text{или} \quad P_m \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i},$$

сведем вопрос к разысканию частных решений уравнений вида

$$D[y] = P_m e^{(\alpha \pm i\beta)x},$$

рассмотренных выше. Но если характеристическое уравнение имеет действительные коэффициенты, то можно избежать вычислений с символом i с помощью следующих соображений. Положим, дано уравнение

$$D[y] = e^{\alpha x} P_m \cos \beta x = P_m \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2}.$$

Частное решение уравнения

$$D[y] = \frac{1}{2} P_m e^{(\alpha+i\beta)x}$$

будет вида

$$x^p Q_m(x) e^{(\alpha+i\beta)x},$$

где $p=0$, если $\alpha + i\beta$ — не корень характеристического уравнения, а если $\alpha + i\beta$ — корень уравнения, то p — показатель его кратности, а $Q_m(x)$ — целый полином степени m ; частное решение урав-

нения $D\{y\} = \frac{1}{2} P_m e^{(\alpha-i\beta)x}$ будет вида

$$x^p Q'_m(x) e^{(\alpha-i\beta)x},$$

где $Q'_m(x)$ — тоже целый полином степени m , а p имеет то же самое значение, как и выше, потому что, если характеристическое уравнение имеет действительные коэффициенты, то $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ будут корнями одинаковой кратности этого уравнения или не будут корнями его. Поэтому решение уравнения

$$D\{y\} = e^{\alpha x} P_m \cos \beta x$$

будет вида

$$x^p \{Q_m e^{(\alpha+i\beta)x} + Q'_m e^{(\alpha-i\beta)x}\},$$

или, замечая, что $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$, вида

$$x^p e^{\alpha x} \{R_m \cos \beta x + S_m \sin \beta x\},$$

где R_m и S_m — целые полиномы степени m . В этом же виде надо искать частное решение и в случае

$$V = e^{\alpha x} P_m \sin \beta x.$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = x e^x + \cos x. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение есть

$$k^4 - 1 = 0; \quad (18)$$

корни его $+1, -1, +i, -i$. Частные решения уравнения без последнего члена $\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$ будут

$$e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}, \text{ или } e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x,$$

а общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Чтобы получить общий интеграл уравнения (17), надо прибавить к предыдущему частное решение уравнения (17). Ищем частное решение уравнения

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = x e^x. \quad (19)$$

Здесь $m=1, p=1$, потому что $k=1$ есть простой корень уравнения (18); следовательно, решение надо искать в форме

$$y = x(c_0 x + c_1) e^x = (c_0 x^2 + c_1 x) e^x.$$

Составляя $\frac{d^4 y}{dx^4}$ и подставляя в уравнение (19), находим

$$8c_0 x + 4c_1 + 12c_0 = x,$$

откуда

$$c_0 = \frac{1}{8}, \quad c_1 = -\frac{3}{8}, \quad y = \frac{x}{8} (x-3) e^x.$$

Ищем далее решение уравнения

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = \cos x. \quad (20)$$

Его надо взять в форме

$$y = x(\alpha \cos x + \beta \sin x),$$

где α и β — постоянные, потому что $\pm i$ — простой корень уравнения (18), $p = 1$, а $m = 0$. Составляя $\frac{d^4 y}{dx^4}$ и подставляя в уравнение (20), найдем

$$4\alpha \sin x - 4\beta \cos x = \cos x,$$

откуда

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{4}, \quad y = -\frac{1}{4} x \sin x.$$

Следовательно, частное решение уравнения (17) будет

$$Y = \frac{x}{8} (x-3) e^x - \frac{1}{4} x \sin x,$$

а общий интеграл

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + Y.$$

III. Интегрирование уравнений вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} (ax+b) y' + A_n y = V,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$, a и b — постоянные, приводится к интегрированию уравнения с постоянными коэффициентами подстановкой

$$ax+b = e^t.$$

В самом деле, из этого уравнения имеем

$$dx = \frac{e^t dt}{a}, \quad y' = a e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = a^2 e^{-2t} \left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right\},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = a^3 e^{-3t} \left\{ \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right\} \text{ и т. д.}$$

При подстановке в данное уравнение показательный множитель сократится, и получится линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример

$$x^2 y'' + x y' + y = 1.$$

Частное решение этого уравнения, очевидно, есть $Y = 1$. Остается найти общий интеграл уравнения

$$x^2 y'' + x y' + y = 0.$$

Полагая $x = e^t$, найдем

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0,$$

откуда

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t;$$

следовательно, общий интеграл предложенного уравнения будет

$$y = C_1 \cos (\ln x) + C_2 \sin (\ln x) + 1.$$

IV. Малые колебания материальной системы с одной степенью свободы вблизи равновесия.

Как пример на колебания системы с одной степенью свободы мы здесь рассмотрим движение математического маятника. Пусть тяжелая материальная точка M массы m подвешена к неподвижной точке O на нерастяжимой нити длины l и движется в одной плоскости. Найти закон ее движения (черт. 39).

Определим положение точки одним координатным параметром — углом θ , который нить OM образует с вертикалью OA . На точку M действует сила тяжести $P = mg$. Разложим ее на две составляющие — силу R вдоль нити и силу Q по касательной к дуге MA окружности. Сила R уничтожается сопротивлением нити, и будет действовать только сила $Q = -P \sin \theta$ (знак минус потому, что сила направлена при положительном θ в сторону его убывания).

Согласно основному уравнению динамики мы получим

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = Q.$$

Так как длина дуги окружности s равна $l\theta$, то

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

Итак, находим

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

При малых углах отклонений можно принять $\sin \theta$ приближенно равным θ , и мы получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Полагая $\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}$, запишем решение уравнения колебания в виде

$$\theta = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t,$$

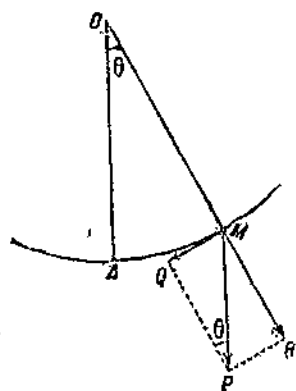
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, λ — постоянная, получаемая из условий задачи.

Введем новые постоянные, имеющие определенный механический смысл. Обозначив период колебания через T , имеем

$$2\pi = \lambda T, \text{ или } \lambda = \frac{2\pi}{T};$$

λ называется *частотой колебания*, так как число колебаний в единицу времени равно $\frac{1}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 введем два новых A и α , связанные с ними соотношениями

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha.$$



Черт. 39.

Вставив все эти выражения в решение, мы получим

$$\theta = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha \right).$$

T есть период колебания, A называется амплитудой (наибольшее отклонение), α — фаза; она характеризует величину отклонения в начальный момент. Само собой понятно, постоянные A и α определяются из начальных условий задачи.

Если движение маятника рассматривать в сопротивляющейся среде и предполагать силу трения пропорциональной скорости, то дифференциальное уравнение колебания маятника будет содержать три члена:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2n \frac{d\theta}{dt} + \lambda^2\theta = 0,$$

где член $2n \frac{d\theta}{dt}$ представляет силу трения. Обычно коэффициент $2n$ — малое число. Общее решение этого уравнения будет

$$\theta = e^{-nt} [C_1 \cos(\sqrt{\lambda^2 - n^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda^2 - n^2} t)],$$

или

$$\theta = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\lambda^2 - n^2} t + \alpha).$$

Итак, мы видим, что амплитуда Ae^{-nt} убывает с возрастанием времени, т. е. мы имеем *затухающее колебание*.

Если на систему действует еще внешняя сила f , периодически изменяющаяся по закону

$$\frac{f}{m} = a \sin pt$$

(p — частота), то мы получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2n \frac{d\theta}{dt} + \lambda^2\theta = a \sin pt.$$

Частное решение мы должны искать в виде

$$C' \cos pt + C'' \sin pt.$$

Внося это выражение в дифференциальное уравнение, мы найдем

$$C' = -\frac{2apn}{(\lambda^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}, \quad C'' = \frac{a(\lambda^2 - p^2)}{(\lambda^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}.$$

Вводя вместо C' и C'' новые постоянные A_1 и α_1 , при помощи формул

$$C' = A_1 \sin \alpha_1, \quad C'' = A_1 \cos \alpha_1,$$

мы получим частное решение в виде

$$A_1 \sin(pt + \alpha_1).$$

Это слагаемое общего решения представляет „вынужденное колебание“. Очевидно, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-2pn}{\lambda^2 - p^2}, \quad A_1 = \frac{a}{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}}.$$

Общее решение запишется в виде

$$\theta = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\lambda^2 - p^2} t + \alpha) + A_1 \sin(pt + \alpha_1).$$

Первое слагаемое (свободное колебание) есть колебание затухающее, ввиду множителя e^{-nt} , который стремится к нулю при неограниченном возрастании t . По истечении некоторого времени главной составляющей движения окажется вынужденное колебание. Исследуем его подробнее.

Фаза α_1 отрицательна, если $\lambda > p$ (λ — частота свободных колебаний при отсутствии сопротивления), т. е. в этом случае вынужденные колебания запаздывают сравнительно с колебанием вынуждающей силы (при $t=0$ фаза силы равна нулю, фаза колебания равна отрицательному числу); если же частота собственных колебаний меньше, чем частота вынуждающей силы, то вынужденные колебания опережают фазу силы. Наконец, если $\lambda = p$, то $\alpha_1 = \pm \frac{\pi}{2}$, и разница в фазах достигает 90° .

Исследуем теперь зависимость амплитуды A_1 от частот собственного колебания и внешней силы.

Если бы в правой части дифференциального уравнения стояла постоянная a , то частное решение было бы

$$A_0 = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Отношение

$$S = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \text{или} \quad S = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{4n^2}{\lambda^2} \cdot \frac{p^2}{\lambda^2}}}.$$

Этот коэффициент S характеризует восприимчивость системы к внешней силе. Вводя обозначения $\frac{p}{\lambda} = q$, $\frac{2n}{\lambda} = \sigma$ (σ — малое число), мы найдем зависимость S от q и σ в виде

$$S = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \sigma^2 q^2}}.$$

Величина S достигает наибольшего значения при q , близком к единице, т. е. когда частота внешней силы близка к частоте собственного колебания. В этом случае мы имеем явление резонанса.

V. *Балка на упругом основании.* Длинный стержень, лежащий на упругом основании, изгибается под влиянием сосредоточенной силы P , приложенной к его середине.

Начало координат выберем в точке приложения силы, ось Ox направим по оси стержня, а ось Oy вертикально вверх. Тогда уравнение изогнутой оси стержня будет

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x), \quad (21)$$

где E и J — постоянные (модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения), а $M(x)$ — момент силы относительно сечения x . Обозначая через $p(x)$ давление, передаваемое стержнем упругому основанию и рассчитанное на единицу длины, будем иметь

$$\frac{dM(x)}{dx} = S(x), \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dS(x)}{dx} = p(x),$$

где $S(x)$ — перерезывающее усилие.

Дифференцируя два раза уравнение (21), получим

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = p(x).$$

Предположим, что понижение упругого основания пропорционально производимому давлению. При этом условии написанное уравнение примет вид

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky, \quad (22)$$

где $(-k)$ есть коэффициент пропорциональности, который надо считать отрицательным, потому что положительным $p(x)$ соответствуют отрицательные y . Полагая $q = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$, перепишем уравнение (22) так:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4q^4 y = 0. \quad (23)$$

Задача приведена к интегрированию линейного уравнения (23) с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения будет

$$y = C_1 e^{qx} \cos qx + C_2 e^{qx} \sin qx + C_3 e^{-qx} \cos qx + C_4 e^{-qx} \sin qx.$$

Чтобы определить произвольные постоянные, рассмотрим часть стержня справа от точки O приложения силы ($x \geq 0$). При больших положительных значениях x множитель e^{qx} будет очень велик, в то время как прогибы y должны быть малы, откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$, и значит

$$y = e^{-qx} (C_3 \cos qx + C_4 \sin qx), \quad x \geq 0.$$

Далее $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$, так как касательная в точке O должна быть параллельна оси Ox . Это нам дает

$$C_3 = C_4 = C,$$

и следовательно,

$$y = Ce^{-qx} (\cos qx + \sin qx), \quad x \geq 0.$$

Наконец, перерезывающее усилие непосредственно справа от точки O должно быть равно $-\frac{P}{2}$, т. е.

$$\left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=+0} = EJ \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P}{2}.$$

Дифференцируя, найдем

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4Cq^3 e^{-qx} \cos qx.$$

и, значит, $EJ 4Cq^3 = -\frac{P}{2}$, откуда $C = -\frac{P}{8EJq^3}$.

Окончательно получим

$$y = -\frac{P}{8EJ} \frac{1}{q^3} e^{-qx} (\cos qx + \sin qx), \quad x \geq 0.$$

Аналогично для левого конца стержня найдем

$$y = -\frac{P}{8EJ} \frac{1}{q^3} e^{qx} (\cos qx - \sin qx), \quad x \leq 0.$$

Легко видеть, что вышенаписанные формулы для y (при $x \geq 0$ и $x \leq 0$) совпадают при $x=0$ и что разрыв непрерывности получается только для $\frac{d^2y}{dx^2}$, что объясняется наличием в точке O сосредоточенной нагрузки. Наибольший прогиб будет иметь место при $x=0$, и его величина равна

$$\frac{P}{8EJq^3} = \frac{Pq}{2k}.$$

Интегрирование уравнений при помощи рядов

§ 13. Решение уравнений с помощью ряда Тейлора. Число классов дифференциальных уравнений, интегрирование которых приводится к квадратурам, весьма ограничено. В большинстве случаев приходится удовлетворяться возможностью найти решение данного дифференциального уравнения приближенно. Один из самых употребительных способов, прилагаемых в этих случаях, есть разложение функции, удовлетворяющей данному уравнению, в ряд. Форма разложения может быть различна, смотря по свойствам предложенного уравнения.

Покажем, прежде всего, каким образом можно воспользоваться тейлоровой строкой для разложения в ряд функции, удовлетворяющей некоторому дифференциальному уравнению. Положим, что

дано дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Мы можем рассматривать это уравнение как уравнение, определяющее высшую производную $y^{(n)}$ как функцию от остальных величин:

$$x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}.$$

Представим себе, что, решив уравнение (1) относительно $y^{(n)}$, найдем

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

где φ будет известная функция от $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Дифференцируя это уравнение несколько раз, мы можем найти выражения всех последовательных производных порядка выше n в виде известных функций от тех же величин. В самом деле, из уравнения (2) получим

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = \psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}),$$

где ψ — известная функция от всех букв, стоящих в скобках. Подставляя сюда выражение $y^{(n)}$, взятое из уравнения (2), получим

$$y^{(n+1)} = \varphi_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3)$$

где φ_1 будет также известная функция от $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Поступая с уравнением (3) так же, как мы поступили с уравнением (2), и продолжая так же далее, мы найдем выражения всех последовательных производных

$$y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots, y^{(n+m)}, \dots$$

в виде известных функций от тех же величин

$$x, y, y', \dots, y^{(n-1)}.$$

Замечая теперь, что данное уравнение не устанавливает никакого соотношения между последними, задаем себе по произволу значения, которые имеют функции $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, при произвольно выбранном частном значении $x = x_0$, и обозначим эти значения соответственно через

$$y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0.$$

Подставляя

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$$

в формулы (2), (3) и следующие, получаемые вышеуказанным путем, получим определенные значения функций

$$y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots, y^{(n+m)}, \dots$$

при $x = x_0$, а именно:

$$\begin{aligned} y_0^{(n)} &= \varphi(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}), \\ y_0^{(n+1)} &= \varphi_1(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Согласно известной формуле Тейлора, находим функцию y в виде ряда

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \dots \\ &\dots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \dots n} y_0^{(n)} + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} y_0^{(n+1)} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Если ряд (4) сходящийся, то он и даст решение данного дифференциального уравнения. В самом деле, легко убедиться, что ряд (4) удовлетворяет данному уравнению (2). Дифференцируя ряд (4), находим

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= y_0^{(n)} + (x - x_0) y_0^{(n+1)} + \dots = \\ &= \varphi(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) + (x - x_0) \varphi_1(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) + \dots; \end{aligned}$$

с другой стороны, разлагая правую часть уравнения (2) по степеням $(x - x_0)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) &= \varphi(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) + \\ &+ (x - x_0) \varphi_1(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) + \dots, \end{aligned}$$

откуда и следует, что

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Для примера возьмем уравнение

$$y'' + ax^2y = 0 \quad (5)$$

и будем искать его решение в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням x , обозначая через y_0 и y_0' значения y и y' при $x = 0$. Уравнение (5) даст

$$y'' = -ax^2y, \quad y''' = -a(x^2y' + 2xy);$$

отсюда, при $x = 0$, находим $y_0'' = 0$, $y_0''' = 0$. Дифференцируя данное уравнение n раз, с помощью формулы Лейбница находим

$$y^{(n+2)} = -a[x^2y^{(n)} + 2nxy^{(n-1)} + n(n-1)y^{(n-2)}],$$

а положив $x = 0$, получим

$$y_0^{(n+2)} = -n(n-1)ay_0^{(n-2)}$$

или, положив $n+2=m$,

$$y_0^{(m)} = -(m-3)(m-2)ay_0^{(m-4)}. \quad (6)$$

Полагая последовательно $m=4, 8, 12, \dots, 4k$ и перемножая получаемые при этом равенства, найдем

$$y_0^{(4k)} = (-1)^k a^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \dots (4k-3)(4k-2)y_0$$

и

$$\frac{y_0^{(4k)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (4k-1) \cdot 4k} = (-1)^k a^k \frac{y_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \dots (4k-1) \cdot 4k}. \quad (7)$$

Полагая в формуле (6) последовательно $m=5, 9, \dots, (4k+1)$, тем же путем получим

$$y_0^{(4k+1)} = (-1)^k a^k \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \dots (4k-2)(4k-1)y_0'$$

и

$$\frac{y_0^{(4k+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 4k \cdot (4k+1)} = (-1)^k a^k \frac{y_0'}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \dots 4k(4k+1)}. \quad (8)$$

Совершенно так же, замечая, что $y_0'' = 0$, $y_0''' = 0$, найдем

$$y_0^{(4k+2)} = 0, \quad y_0^{(4k+3)} = 0.$$

Подставляя найденные значения производных при $x=0$ в формулу Маклорена:

$$y = y_0 + xy_0' + x^2 \frac{y_0''}{1 \cdot 2} + \dots + x^m \frac{y_0^{(m)}}{1 \cdot 2 \dots m} + \dots,$$

находим решение искомого уравнения в следующем виде:

$$y = y_0 \left\{ 1 - \frac{ax^4}{3 \cdot 4} + \frac{a^2 x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \dots + (-1)^k \frac{a^k x^{4k}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \dots (4k-1)4k} + \dots \right\} + y_0' \left\{ x - \frac{ax^5}{4 \cdot 5} + \frac{a^2 x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \dots + (-1)^k \frac{a^k x^{4k+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \dots 4k(4k+1)} + \dots \right\}.$$

Ряды в скобках при y_0 и y_0' абсолютно сходящиеся при всяком значении x , в чем легко убедиться, применяя известный признак сходимости, основанный на рассмотрении отношения двух последовательных членов.

Решение некоторых задач, приводящихся к интегрированию уравнений

§ 14. Задача о траекториях. Положим, что

$$\varphi(x, y, a) = 0 \quad (1)$$

есть общее уравнение системы плоских кривых, отличающихся одна от другой значением параметра a , отнесенное к прямоугольной системе координат. Кривые линии, пересекающие все кривые данной

системы под постоянным углом, называются *траекториями* системы данных кривых. Траектория называется *ортогональной*, если она пересекает все кривые данной системы под *прямым* углом.

Чтобы найти уравнение траекторий данной системы, замечаем, что координаты точки пересечения траектории с некоторой кривой данной системы удовлетворяют уравнению (1) при некотором значении параметра a . Далее, обозначая через μ и μ_1 соответственно угловые коэффициенты касательной к траектории и касательной к рассматриваемой кривой данной системы, а через m тангенс постоянного угла между этими прямыми, будем иметь

$$m = \frac{\mu - \mu_1}{1 + \mu\mu_1},$$

где $\mu_1 = -\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}$ есть значение $\frac{dy}{dx}$, взятое из уравнения (1) и соответствующее данной кривой.

Следовательно, искомый тангенс угла выразится следующей формулой:

$$m = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}}. \quad (2)$$

Координаты точки пересечения траектории с рассматриваемой кривой данной системы удовлетворяют уравнению (2). Исключая параметр a из уравнений (1) и (2), мы получим соотношение между x , y и $\frac{dy}{dx}$, т. е. дифференциальное уравнение 1-го порядка, которому должны удовлетворять координаты точки пересечения траектории с любой из кривых данной системы. Интегрируя это уравнение, получим уравнение траектории в конечном виде. В случае ортогональных траекторий $m = \infty$, уравнение (2) приводится к более простому:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

и дифференциальное уравнение ортогональных траекторий получим через исключение параметра a из уравнений (1) и (3).

Примеры

1. Найти ортогональные траектории системы кривых, заданных уравнением

$$y = ax^n, \quad (1')$$

где n — данное число, a — переменный параметр.

Уравнение (3) в нашем случае принимает вид

$$1 + anx^{n-1} \frac{dy}{dx} = 0; \quad (3')$$

исключая a из (1') и (3'), получим

$$1 + \frac{ny}{x} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{или} \quad xdx + nydy = 0,$$

откуда

$$x^2 + ny^2 = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Следовательно, при $n > 0$ траектории будут эллипсы, при $n < 0$ — гиперболы; при $n = 1$ траектории будут круги, как и следовало предвидеть, потому что в этом случае данные линии $y = ax$ будут прямыми, проходящими через начало координат.

2. Найдем еще траектории (не ортогональные, а наклонные под каким угодно углом) системы прямых:

$$y = ax. \quad (4)$$

Уравнение (2) дает в нашем случае

$$m = \frac{\frac{dy}{dx} - a}{1 + a \frac{dy}{dx}};$$

подставляя сюда $a = \frac{y}{x}$ из уравнения (4), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m + \frac{y}{x}}{1 - m \frac{y}{x}}.$$

Это уравнение однородное и, по интегрировании, даст

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - m \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C. \quad (5)$$

Вводя полярные координаты вместо прямоугольных, находим

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \theta = m \ln \rho + C,$$

откуда

$$\rho = C_1 e^{\frac{\theta}{m}} \text{ — логарифмическая спираль,}$$

что и следовало предвидеть по известному свойству этой кривой.

3. Найти ортогональные траектории системы софокусных эллипсов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - k^2} = 1, \quad (6)$$

где k обозначает постоянный линейный эксцентриситет.

Уравнение (3) § 14 дает здесь

$$\frac{y}{a^2 - k^2} - \frac{x}{a^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (7)$$

Исключая a из (6) и (7), получим уравнение

$$xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2 - k^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0. \quad (8)$$

Для интегрирования этого уравнения введем новые переменные ξ и η , положив

$$x = \sqrt{\xi}, \quad y = \sqrt{\eta};$$

тогда уравнение (8) преобразуется в следующее:

$$\eta = \xi \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{k^2 \frac{d\eta}{d\xi}}{1 + \frac{d\eta}{d\xi}}. \quad (9)$$

Это есть уравнение вида Клеро. Общий его интеграл будет, как известно,

$$\eta = C\xi - \frac{k^2 C}{1 + C}.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (8), очевидно, будет

$$y^2 = Cx^2 - \frac{k^2 C}{1 + C}.$$

Полагая $\frac{k^2}{1+C} = a_1^2$, $\frac{k^2 C}{1+C} = b_1^2$, причем

$$a_1^2 + b_1^2 = k^2, \quad (10)$$

находим

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad (11)$$

Это уравнение изображает систему *гипербол*, софокусных с эллипсами данной системы, как показывает равенство (10).

§ 15. Задача о погонной линии. Некоторая точка N движется равномерно по данной кривой; другая точка M движется также равномерно по неизвестной кривой, причем касательная к этой кривой в точке M всегда проходит через *соответствующее* положение точки N ; известны отношение скоростей движения и начальные положения движущихся точек; требуется найти уравнение неизвестной кривой. Мы примем за ось x -ов прямую, соединяющую начальные положения движущихся точек, за начало координат — начальное положение точки $M(x, y)$ и обозначим координаты точки N через ξ и η . Пусть

$$\varphi(\xi, \eta) = 0 \quad (1)$$

есть уравнение данной кривой. По условию координаты точки $N(\xi, \eta)$ должны удовлетворять уравнению касательной к данной кривой в точке M ; следовательно,

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x). \quad (2)$$

Обозначая через s и s' дуги кривых, соответственно описываемых точками M и N , и через n постоянное отношение скоростей, будем иметь

$$ds = n \cdot ds',$$

т. е.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = n \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}. \quad (3)$$

Принимаем x за независимую переменную; тогда ξ и η можем рассматривать как функции от x , определяемые из уравнений (1) и (2), и написать условие (3) в следующем виде:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = n \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}. \quad (3')$$

Подставив сюда вместо $\frac{d\xi}{dx}$ и $\frac{d\eta}{dx}$ их выражения, взятые из уравнений (1) и (2), мы получим дифференциальное уравнение 2-го порядка между x , y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, определяющее искомую кривую. Произвольные постоянные в общем интеграле этого уравнения определяются из условий относительно начального положения точки M и начального направления касательной. При сделанном выше выборе координатной системы условия эти дают при $x=0$

$$y=0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx}=0.$$

Пример. Положим, что точка N движется по прямой, перпендикулярной к оси x -ов и находящейся от начала координат на расстоянии, равном a . Найдти уравнение кривой, по которой должна двигаться точка M . В нашем примере уравнение (1) будет

$$\xi = a;$$

уравнение (2) дает

$$\eta = y + \frac{dy}{dx}(a-x),$$

откуда

$$\frac{d\xi}{dx} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = (a-x) \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Уравнение (3') приводится, следовательно, к виду

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm n(a-x) \frac{d^2y}{dx^2},$$

где n — некоторое положительное число.

Очевидно, $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} > 0$, $a-x > 0$. Возникает вопрос, какой знак нужно взять перед n . Решение вопроса зависит от того, в какую сторону движется точка N . Если она движется в сторону положительных y , то нужно взять знак плюс. Сначала докажем, что при всех значениях x из интервала $(0, a)$ нужно брать перед n только один знак. Предположим, что это не так и что

$$\sqrt{1 + \left[\frac{dy(x)}{dx}\right]^2}_{x=x_0} = +n(a-x_0) \left[\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0},$$

а

$$\sqrt{1 + \left[\frac{dy(x)}{dx}\right]^2}_{x=x_1} = -n(a-x_1) \left[\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right]_{x=x_1}.$$

Отсюда следует, что

$$y''(x_0) > 0,$$

$$y''(x_1) < 0.$$

Но при изменении x между x_0 и x_1 вторая производная не может изменить знака, не проходя через значение нуль. (Диф. исч., ч. I, гл. V, § 5, примечание). Значит, при некотором значении $x = x_2$ вторая производная должна обратиться в нуль, $y''(x_2) = 0$. Но

$$y''(x_2) = \frac{\sqrt{1 + [y'(x_2)]^2}}{\pm n(a - x_2)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 + [y'(x_2)]^2} = 0,$$

а это невозможно.

Таким образом при всех значениях x из $(0, a)$ нужно взять перед n или только плюс или только минус. Положим, верно последнее, т. е.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = -n(a - x) \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Тогда на интервале $(0, a)$ вторая производная $y''(x)$ отрицательна. Из этого следует, что $y'(x)$ убывает на сегменте $[0, a]$. А так как по условию $y'(0) = 0$, то $y'(x) < 0$ на интервале $(0, a)$. Значит, $y(x)$ убывает на сегменте $[0, a]$. Поэтому $y(x) < 0$ на интервале $(0, a)$, так как $y(0) = 0$ по условию. Рассмотрим теперь

$$\eta = y + \frac{dy}{dx}(a - x).$$

Из всего вышеизложенного следует, что

$$\eta(x) < 0$$

на интервале $(0, a)$. Но $\eta(x)$ означает ординату точки N , движущейся по прямой $\xi = a$. По условию, эта ордината не может быть отрицательной. Полученное противоречие показывает, что

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = +n(a - x) \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Вопрос свелся к интегрированию уравнения

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{n(a - x)}. \quad (4)$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = p$, получим

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{n(a - x)}.$$

Последнее дифференциальное уравнение интегрируется в конечном виде и дает нам

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \ln C - \ln(a - x)^{1/n}, \quad p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{C}{(a - x)^{1/n}},$$

где C — постоянная. По условию, при $x = 0$,

$$p = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \sqrt{1 + p^2} = +1;$$

следовательно, $C = a^{1/n}$; отсюда

$$p + \sqrt{1+p^2} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1/n},$$

$$\sqrt{1+p^2} - p = \frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/n};$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1/n} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/n} \right].$$

Интегрируя, находим

$$y = \frac{an}{2} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/n+1}}{n+1} - \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1-1/n}}{n-1} \right\} + C_1,$$

где C_1 — постоянная, определяемая из условия $y=0$ при $x=0$, которое дает

$$C_1 = \frac{an}{n^2-1}.$$

Выведенная формула справедлива при $n \neq \pm 1$. Если $n=1$, получим

$$y = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 - \ln \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] - \frac{a}{4}.$$

§ 16. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Займемся теперь вопросами, в которых требуется найти несколько неизвестных функций от одной независимой переменной, удовлетворяющих данной системе совокупных дифференциальных уравнений, число которых равно числу неизвестных функций.

Рассмотрим сперва систему уравнений 1-го порядка, причем будем предполагать, что все уравнения системы решены относительно производных неизвестных функций, так что общий вид рассматриваемых систем будет

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z, \dots, \quad \frac{du}{dt} = U, \quad (1)$$

где t обозначает независимую переменную, $x, y, z, \dots, u$ — неизвестные функции от t , а $X, Y, Z, \dots, U$ — данные функции от $t, x, y, z, \dots, u$. Число уравнений, равное числу неизвестных функций, обозначим через n .

Требуется найти функции $x, y, z, \dots, u$, удовлетворяющие данной системе (1) и принимающие при данном значении независимой переменной $t=t_0$ заданные значения:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \dots, \quad u = u_0.$$

Нетрудно убедиться, что поставленными условиями искомые функции вполне определяются. В самом деле, с помощью данной системы уравнений мы можем выразить производные какого угодно порядка

неизвестных функций функциями известного вида от $t, x, y, z, \dots, u$. Для достижения этой цели поступаем следующим образом. Берем первое уравнение данной системы

$$\frac{dx}{dt} = X = f_1(t, x, y, \dots, u), \quad (1)$$

где f_1 — функция известного вида от переменных $t, x, y, z, \dots, u$, и дифференцируем его по t ; тогда найдем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{du}{dt}.$$

Подставляя сюда на место

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{du}{dt}$$

их выражения из данной системы, получим результат вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_2(t, x, y, z, \dots, u), \quad (2)$$

где f_2 будет также известная функция от переменных $t, x, y, z, \dots, u$. Поступая с полученным уравнением (2) так же, как с (1), найдем

$$\frac{d^3x}{dt^3} = f_3(t, x, y, z, \dots, u) \quad (3)$$

и можем таким образом найти выражения всех последовательных производных

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}, \dots$$

в виде известных функций от $t, x, y, z, \dots, u$. Полагая затем $t = t_0, x = x_0, y = y_0, \dots, u = u_0$, найдем значения этих производных для $t = t_0$, которые обозначим через

$$x'_0, x''_0, x'''_0, \dots, x^{(n)}_0, \dots$$

После этих операций мы можем, при помощи теилоровой формулы:

$$x = x_0 + x'_0(t - t_0) + \frac{x''_0}{1 \cdot 2}(t - t_0)^2 + \frac{x'''_0}{1 \cdot 2 \cdot 3}(t - t_0)^3 + \dots,$$

вычислить значение x для какого угодно значения t , достаточно близкого к t_0 .

Все сказанное о функции x применяется, конечно, и к другим неизвестным функциям $y, z, \dots, u$, откуда мы и заключаем, что все эти функции вполне определяются данной системой уравнений (1) и начальными их значениями при $t = t_0$.

Изложенный выше процесс, будучи основан на употреблении бесконечных рядов, сопряжен со многими неудобствами, вытекаю-

вопрос может свестись к последовательному интегрированию нескольких уравнений низшего порядка.

Чтобы это показать, составляем, как было показано, при помощи дифференцирований уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z, \dots, u), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= f_2(t, x, y, z, \dots, u), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} &= f_{n-1}(t, x, y, z, \dots, u), \\ \frac{d^nx}{dt^n} &= f_n(t, x, y, z, \dots, u), \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

решаем первые $(n-1)$ уравнений этой системы относительно $(n-1)$ неизвестных $y, z, \dots, u$ и, получив выражения

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \\ z &= \varphi_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ u &= \varphi_{n-1}\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

подставляем их в последнее уравнение системы (IV). В результате мы получим некоторое дифференциальное уравнение n -го порядка с двумя переменными

$$\frac{d^nx}{dt^n} = \psi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \quad (4)$$

Интегрируя это уравнение, находим его общий интеграл

$$x = F_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (5)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Составляя по этому выражению производные

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$$

и подставляя их в систему (V), находим

$$\left. \begin{aligned} y &= F_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ z &= F_3(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots \dots \dots \\ u &= F_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) дают систему общих интегральных уравнений данной системы дифференциальных уравнений.

Мы предположили, что первые $(n-1)$ уравнений системы (IV) допускают решения относительно $y, z, \dots, u$; в частных случаях все эти переменные могут исключиться из $(n-1)$ или даже меньшего числа уравнений системы (IV). Для определения x в этом случае получится уравнение порядка $(n-1)$ или еще низшего. Проинтегрировав это уравнение, мы можем воспользоваться полученным результатом для приведения данной системы дифференциальных уравнений к другой, с меньшим числом неизвестных, которую и трактуем по предыдущему. Поясним все сказанное примерами.

Примеры

1. Положим, что дана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2t. \quad (7)$$

Дифференцируя первое, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 1,$$

откуда на основании данной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + y + t + x - 2y + 2t + 1 = 2x - y + 3t + 1.$$

Решая первое уравнение данной системы относительно y , находим

$$y = \frac{dx}{dt} - x - t; \quad (8)$$

подставляя в предыдущее, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 3x + 4t + 1.$$

Интегрируя это линейное уравнение, найдем его общий интеграл

$$x = C_1 e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t} - \frac{4}{3}t + \frac{7}{9}.$$

Составляя $\frac{dx}{dt}$ и подставляя в уравнение (8), находим и соответствующее значение y , а именно:

$$y = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{13}) C_1 e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) C_2 e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t} + \frac{1}{3}t - \frac{5}{9}.$$

2. Положим, что дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y + 4z - 2x - 3t, \\ \frac{dy}{dt} &= 7y + 6z - 6x - 7t + 1, \\ \frac{dz}{dt} &= -y + z + x + t. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Дифференцируя первое уравнение и пользуясь двумя другими, находим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3 \frac{dy}{dt} + 4 \frac{dz}{dt} - 2 \frac{dx}{dt} - 3 = 11y + 14z - 10x - 11t. \quad (10)$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11 \frac{dy}{dt} + 14 \frac{dz}{dt} - 10 \frac{dx}{dt} - 11 = 33y + 40z - 32x - 33t. \quad (11)$$

Решаем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 3y + 4z - 2x - 3t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 11y + 14z - 10x - 11t$$

относительно y и z , получаем

$$y = 2 \frac{d^2x}{dt^2} - 7 \frac{dx}{dt} + 6x + t, \quad z = -\frac{3}{2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{11}{2} \frac{dx}{dt} - 4x \quad (A)$$

и подставляя в уравнение (11), находим

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 6 \frac{d^2x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} - 6x = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad (12)$$

составляя $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ и подставляя в формулы (A), находим

$$y = C_1 e^t + 3C_3 e^{3t} + t, \quad (13)$$

$$z = C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t}. \quad (14)$$

Система (12), (13) и (14) и есть система общих решений уравнений данной системы (9).

3. Положим, что дана система

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y. \quad (15)$$

Из нее выводим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z;$$

переменные y и z исключаются из двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

и в результате получается

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

дифференциальное уравнение 2-го порядка, общий интеграл которого есть

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t};$$

отсюда

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t},$$

$$y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z, \quad (16)$$

третье уравнение данной системы даст

$$\frac{dz}{dt} = x + y = 3C_2 e^{2t} - z, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}.$$

Пример. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Складывая эти уравнения, находим

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0, \text{ т. е. } d(x + y + z) = 0; \quad x + y + z = C_1. \quad (19)$$

Умножая первое уравнение системы на x , второе на y , третье на z и складывая, получим

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0, \text{ т. е. } \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \quad (20)$$

Таким образом имеем два интеграла системы.

Решая уравнения (19) и (20) относительно y и z , находим

$$y + z = C_1 - x; \quad y^2 + z^2 = C_2 - x^2, \quad (21)$$

и замечая, что $(y + z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz$, получим

$$2yz = (C_1 - x)^2 - (C_2 - x^2);$$

$$(y - z)^2 = y^2 + z^2 - 2yz = 2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2,$$

$$y - z = \pm \sqrt{2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2}.$$

Первое уравнение данной системы дает

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2} \text{ или } t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2}} + C_3.$$

Интегрирование функции здесь легко выполняется; t , выражается через x , C_1 , C_2 , C_3 , а следовательно, и, наоборот, x через t , C_1 , C_2 , C_3 . Уравнения (21) дадут затем выражения y и z через t , C_1 , C_2 , C_3 .

III. Приведение системы уравнений высших порядков к системе уравнений 1-го порядка.

Всякую систему уравнений высших порядков, в которой число неизвестных функций равно числу уравнений, можно заменить системой уравнений 1-го порядка, в которой число неизвестных функций также будет равно числу уравнений. Положим, что дано n уравнений с n неизвестными функциями $x, y, z, \dots$, и от одной переменной t , и пусть производные наивысших порядков, входящие в данные уравнения, будут

$$x^{(k+1)}, y^{(l+1)}, \dots, u^{(s+1)}.$$

Присоединяем к данным n уравнениям еще следующие:

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \dots, \frac{dx_{k-1}}{dt} = x_k,$$

$$\frac{dy}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2, \dots, \frac{dy_{l-1}}{dt} = y_l,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{du}{dt} = u_1, \quad \frac{du_1}{dt} = u_2, \dots, \frac{du_{s-1}}{dt} = u_s.$$

Рассматривая $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, u_1, u_2, \dots, u_s$ как новые неизвестные функции, замечаем, что данные уравнения будут 1-го порядка относительно $x_k, y_l, \dots, u_s$, потому что

$$x^{(k+1)} = \frac{dx_k}{dt}, y^{(l+1)} = \frac{dy_l}{dt}, \dots, u^{(s+1)} = \frac{du_s}{dt}.$$

Получим систему уравнений с $(n+k+l+\dots+s)$ неизвестными функциями 1-го порядка относительно всех неизвестных³; число уравнений системы будет также равно $(n+k+l+\dots+s)$. Интегрирование такой системы, как известно, приводится вообще к интегрированию одного уравнения порядка $(n+k+l+\dots+s)$ с одной неизвестной функцией, а число произвольных постоянных в общих решениях такой системы равно $(n+k+l+\dots+s)$.

Так, например, система трех уравнений 2-го порядка (таковы будут, между прочим, уравнения механики)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned} \right\}.$$

может быть заменена системой шести уравнений 1-го порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \quad \frac{dy}{dt} = y_1, \quad \frac{dz}{dt} = z_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x, y, z, x_1, y_1, z_1), \\ \frac{dy_1}{dt} &= f_2(t, x, y, z, x_1, y_1, z_1), \\ \frac{dz_1}{dt} &= f_3(t, x, y, z, x_1, y_1, z_1) \end{aligned} \right\}$$

с шестью неизвестными функциями, и в общих решениях системы будут заключаться шесть произвольных постоянных.

IV. Система линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

В § 12 мы рассмотрели задачу малых колебаний маятника около положения равновесия.

В этом случае мы имели систему с одной степенью свободы, так как ее положение определялось одним координатным параметром q , и вопрос сводился к интегрированию одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Однако во многих случаях положение механической системы определяется несколькими независимыми величинами $q_1, q_2, \dots, q_n$, которые называются координатными параметрами. Число их дает число степеней свободы. Так, например, при движении маятника около положения равновесия мы имеем одну степень свободы — угол θ отклонения от положения равновесия. В случае движения точки по плоскости или какой-либо иной поверхности мы будем иметь задачу с двумя степенями свободы. За координатные параметры в случае движения на плоскости можно взять обычные прямоугольные декартовы координаты x, y , в случае же движения по сфере — долготу φ и широту ψ .

При движении материальной системы ее координатные параметры $q_1, q_2, \dots, q_n$ являются функциями от времени t и определяются из системы дифференциальных уравнений и начальных условий. В частности, при изучении малых колебаний системы около положения равновесия, которому соответствуют значения параметров $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, можно сохранить в дифференциальных уравнениях лишь члены первого измерения относительно q_i и $\frac{dq_i}{dt}$ и таким образом получить систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое уравнение будет в общем случае содержать все функции q_i и их производные 1-го и 2-го порядков.

В случае двух степеней свободы система будет вида

$$\left. \begin{aligned} a_1 q_1'' + b_1 q_1' + c_1 q_1 + a_2 q_2'' + b_2 q_2' + c_2 q_2 &= 0, \\ a_2 q_1'' + \beta_1 q_1' + \gamma_1 q_1 + a_2 q_2'' + \beta_2 q_2' + \gamma_2 q_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где q_1' и q_1'' — производные от q_1 1-го и 2-го порядков относительно времени t . Для интегрирования системы (22) изложим простой способ, основанный на применении символических операторов.

Обозначая символически множителем D операцию дифференцирования по t , перепишем систему (22) таким образом:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 D^2 + b_1 D + c_1) q_1 + (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) q_2 &= 0, \\ (a_2 D^2 + \beta_1 D + \gamma_1) q_1 + (a_2 D^2 + \beta_2 D + \gamma_2) q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если на систему действует внешняя сила, то в правой части уравнений (23) будут не нули, а известные функции f . Начальные условия имеют вид

$$q_1 \Big|_{t=0} = q_{10}, \quad q_1' \Big|_{t=0} = q_{10}', \quad q_2 \Big|_{t=0} = q_{20}, \quad q_2' \Big|_{t=0} = q_{20}'$$

и, следовательно, общий интеграл системы (22) должен содержать четыре произвольные постоянные.

Пользуясь символическим методом, покажем, каким образом интегрирование системы (23) приводится к интегрированию одного линейного уравнения 4-го порядка с одной неизвестной функцией. С этой целью введем вспомогательную функцию v от t , полагая

$$q_1 = -(a_2 D^2 + b_2 D + c_2) v, \quad q_2 = (a_1 D^2 + b_1 D + c_1) v. \quad (24)$$

Первое из уравнений (23) будет, очевидно, удовлетворено при любом выборе v , и остается выбрать функцию v так, чтобы было удовлетворено и второе из уравнений (23). Подставляя выражения (24) в это второе уравнение, получим для v уравнение 4-го порядка:

$$(a_1 D^2 + b_1 D + c_1) (a_2 D^2 + \beta_2 D + \gamma_2) v - (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) (a_1 D^2 + \beta_1 D + \gamma_1) v = 0. \quad (25)$$

Мы предполагаем, что $a_1 a_2 - a_2 a_1 \neq 0$.

После того как найдем v , получим q_1 и q_2 из формул (24) простым дифференцированием.

Обозначим через k_1, k_2, k_3, k_4 корни характеристического уравнения

$$(a_1 k^4 + b_1 k^3 + c_1 k^2 + \beta_2 k + \gamma_2) - (a_2 k^4 + b_2 k^3 + c_2 k^2 + \beta_1 k + \gamma_1) = 0; \quad (26)$$

будем иметь

$$v = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_3 e^{k_3 t} + C_4 e^{k_4 t}. \quad (27)$$

Подставляя это выражение в формулы (24), получим общее выражения для q_1 и q_2 . Оно будет представлять собой также линейную комбинацию четы-

решений, каждое из которых будет содержать произвольный постоянный множитель. Так, например, решение $v = C_1 e^{k_1 t}$ дает

$$q_1 = -C_1(a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2) e^{k_1 t}; \quad q_2 = C_1(a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1) e^{k_1 t}. \quad (28)$$

Если характеристическое уравнение (26) имеет мнимые корни, что обычно и встречается в приложениях, то решение уравнений (23) полезно писать в тригонометрической форме. Тогда пара сопряженных корней $k = a \pm bi$ будут соответствовать решения для v :

$$C_1 e^{at} \cos bt \quad \text{и} \quad C_2 e^{at} \sin bt.$$

Наконец, если характеристическое уравнение (26) имеет двукратный корень $k_1 = k_2$, то решения будут

$$C_1 e^{k_1 t} \quad \text{и} \quad C_2 t e^{k_1 t}.$$

Необходимо отметить тот случай, когда предыдущие вычисления не дадут для q_1 и q_2 общего решения, содержащего четыре произвольные постоянные. Положим, что для некоторого корня k_1 уравнения (26) будет

$$a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1 = a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2 = 0. \quad (29)$$

В этом случае формулы (28) дадут для q_1 и q_2 тождественный нуль, и общее решение системы не будет содержать произвольной постоянной C_1 . Чтобы восстановить эту потерянную произвольную постоянную, мы введем вспомогательную функцию v вместо уравнений (24) при помощи уравнений

$$q_1 = (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) v; \quad q_2 = -(a_1 D^2 + b_1 D + c_1) v. \quad (30)$$

Очевидно, при этом второе из уравнений (23) будет удовлетворено при всяком выборе v , и, подставляя выражения (30) в первое из уравнений (23), получим для v то же уравнение (25), что и выше. При этом корень k_1 характеристического уравнения (26) дает для q_1 и q_2 вместо (28) выражения

$$q_1 = C_1(a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2) e^{k_1 t}; \quad q_2 = -C_1(a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1) e^{k_1 t}.$$

Если хоть один из множителей $(a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1)$ и $(a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2)$ будет отличен от нуля, то восстановим таким образом решение, соответствующее корню k_1 уравнения (26).

Наконец, остается рассмотреть тот случай, когда кроме соотношений (29), имеют место соотношения

$$a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1 = a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2 = 0. \quad (31)$$

В этом случае каждый из квадратных трехчленов, стоящих в левой части характеристического уравнения (26), будет иметь корень $k = k_1$, т. е. будет содержать множитель $(k - k_1)$, и, следовательно, вся левая часть уравнения (26) будет содержать множитель $(k - k_1)^2$. Другими словами, при выполнении соотношений (29) и (31) корень $k = k_1$ должен быть кратным корнем характеристического уравнения (26).

Ограничиваясь рассмотрением того случая, когда $k = k_1$ будет двукратным корнем, укажем для решения системы, соответствующей этому двукратному корню. Эти два решения будут

$$q_1 = C_1 e^{k_1 t}; \quad q_2 = 0, \quad (32)$$

$$q_1 = 0; \quad q_2 = C_2 t e^{k_1 t}. \quad (33)$$

В самом деле, подставляя выражение (32) или (33) в левую часть уравнений (23), получим в силу соотношений (29) и (31) тождества.

Указанные два решения будут существенно различны, потому что в первом q_2 есть тождественный нуль, а во втором q_2 отлично от нуля. Заметим, что если в случае кратного корня $k_1 = k_2$ не выполняется, например, одно из соотношений (29), то, подставляя в формулы (24)

$$v = C_1 e^{k_1 t} \text{ и } v = C_2 t e^{k_1 t},$$

мы получим решение (28) и решение, содержащее t множителем:

$$q_1 = -C_2 (a_2 k_1^2 + b_2 k_1 + c_2) t e^{k_1 t} + C_2 p_1 e^{k_1 t};$$

$$q_2 = C_2 (a_1 k_1^2 + b_1 k_1 + c_1) t e^{k_1 t} + C_2 p_2 e^{k_1 t},$$

где p_1 и p_2 — определенные постоянные.

Для иллюстрации рассмотренного метода решим пример.

Принтегрировать систему

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} - z = 0, \quad \frac{dy}{dx} + 2y - \frac{dz}{dx} + z = 0.$$

Перепишав эту систему в виде:

$$(D^2 + D)y + (D^2 - 1)z = 0, \quad (D + 2)y - (D - 1)z = 0,$$

полагаем

$$y = (D - 1)v, \quad z = (D + 2)v.$$

Дифференциальное уравнение для v будет

$$[(D^2 + D)(D - 1) + (D^2 - 1)(D + 2)]v = 0,$$

и его характеристическое уравнение

$$(k^2 + k)(k - 1) + (k^2 - 1)(k + 2) = 0$$

имеет корни: $k = 1, k = -1$ (двойной).

Общее выражение функции v таково:

$$v = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{-x},$$

и, следовательно,

$$y = 2C_2 e^{-x} + C_3 (1 - 2x) e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 (1 + x) e^{-x}.$$

§ 17. Интегрирование уравнений в частных производных 1-го порядка, линейных относительно частных производных неизвестной функции. Ограничимся для простоты случаем двух независимых переменных; все сказанное о нем легко обобщается на случай какого угодно числа независимых переменных. Положим, что дано уравнение

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z, \quad (1)$$

где z — неизвестная функция от двух независимых переменных x, y ; X, Y, Z — данные функции от x, y, z . Положим, что уравнение

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad (2)$$

где C — произвольная постоянная, определяет z как функцию от x, y, C , удовлетворяющую уравнению (1).

Покажем, что функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет условию

$$X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

тождественно. В самом деле, дифференцируя уравнение (2), находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

и умножая первое из этих уравнений на X , второе на Y и складывая, получим, в силу уравнения (1),

$$X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Это уравнение выведено в предположении, что z есть функция от x и y , определяемая уравнением (2), но легко убедиться, что оно удовлетворяется тождественно, т. е. при произвольных значениях x, y, z . В самом деле, уравнение (3) не включает в себе произвольной постоянной C , а этой постоянной C можно так распорядиться, чтобы, при произвольно выбранных значениях x и y , значение z , выведенное из уравнения (2), было равно произвольно заданному числу. Следовательно, уравнение (3) удовлетворяется при произвольно заданных значениях x, y, z , т. е. тождественно. Обратно, если найдем какое-нибудь решение $\varphi(x, y, z)$ уравнения (3) и приравняем его постоянному, то уравнение

$$\varphi(x, y, z) = C \quad (2)$$

определяет z как функцию от x и y , удовлетворяющую уравнению (1), потому что это последнее вытекает, как следствие, из уравнения (3), с помощью уравнений (4), дающих

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y},$$

что, при подстановке в (3), дает, по разделении на $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$,

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z. \quad (1)$$

Итак, чтобы найти все решения уравнения (1), надо уметь найти все решения уравнения (3). Для этой цели рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{X}{Z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Y}{Z}, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \quad (5)$$

Положим, что нашли два независимых интеграла этой системы:

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Покажем, что функции φ_1 и φ_2 будут решениями уравнения (3). Из уравнений (6) имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz = 0,$$

а в силу уравнений (5) находим отсюда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} Y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} Z = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} Y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} Z = 0. \quad (7)$$

Эти равенства (7), хотя и выведены при помощи уравнений (6), удовлетворяются тождественно, потому что не включают в себе произвольных постоянных C_1, C_2 , которыми можно распорядиться так, чтобы, при произ-

вольно выбранном значении z , значения x и y были равны произвольно заданным числам. Следовательно, функции φ_1 и φ_2 будут решениями уравнения (3). Всякая функция от φ_1 и φ_2 будет также решением уравнения (3), потому что если $\varphi = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.\end{aligned}$$

Умножая первое на X , второе на Y , третье на Z и складывая, в силу уравнений (7) получим

$$X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, легко убедиться, что, обратно, всякое решение уравнения (3) будет функцией от φ_1 и φ_2 . В самом деле, положим, что $\varphi(x, y, z)$ есть какое-нибудь решение уравнения (3). Положим, что в уравнении (3) $X \neq 0$. Выразив y и z через x, C_1, C_2 из уравнений (6) и подставив в $\varphi(x, y, z)$, мы представим эту функцию в форме $\varphi(x, y, z) = \Phi(x, C_1, C_2)$, а заменив C_1 и C_2 их выражениями из (6), получим тождественно

$$\varphi(x, y, z) = \Phi(x, \varphi_1, \varphi_2). \quad (8)$$

Нужно показать, что если $\varphi(x, y, z)$ есть решение уравнения (3), то буква x явно в $\Phi(x, \varphi_1, \varphi_2)$ не входит, т. е. что $\varphi(x, y, z) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$. Из тождества (8) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.\end{aligned}$$

Умножая эти равенства соответственно на X, Y, Z и складывая, получим, в силу уравнений (3) и (7),

$$X \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

откуда, так как $X \neq 0$, находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

т. е. x явно в выражение Φ не входит, что и требовалось доказать. Итак, самое общее решение уравнения (3) есть $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$, где Φ — произвольная функция.

Из предыдущего вытекает следующее правило:

Для того чтобы найти общее выражение всех функций z , удовлетворяющих уравнению

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z, \quad (1)$$

надо написать систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad (5)$$

и найти два независимых интеграла этой системы:

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2.$$

Приравняв произвольную функцию Φ от φ_1, φ_2 постоянной или нулю, что равносильно одно другому при произвольной функции Φ , получим уравнение

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad (9)$$

определяющее z как функцию от x и y . Всякая функция z , таким образом определяемая, будет удовлетворять уравнению (1), и, обратно, всякая функция z , удовлетворяющая уравнению (1), будет заключаться в числе тех, которые определяются уравнением (9).

Для случая n независимых переменных имеет место аналогичное правило, доказательство которого совершенно такое, как для случая двух независимых переменных; состоит оно в следующем:

Для того чтобы найти все функции z от n независимых переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

удовлетворяющие уравнению в частных производных

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = V, \quad (10)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n, V$ — данные функции от $x_1, x_2, \dots, x_n$, z надо найти n независимых интегралов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ системы уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{V} \quad (11)$$

и приравнять нулю произвольную функцию от этих интегралов. Полученное уравнение

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0 \quad (12)$$

и определяет z как функцию от $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющую уравнению (10). Уравнение (12) называют общим интегралом уравнения (10).

Примеры

1. Дано уравнение:

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

Берем систему уравнений

$$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда имеем

$$x dx + y dy = 0, \quad dz = 0.$$

Интегралы этой системы будут

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad z = C_2.$$

Обозначая через $\Phi(x^2 + y^2, z)$ произвольную функцию от этих интегралов и приравняв ее нулю, находим

$$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0, \quad \text{или} \quad z = \psi(x^2 + y^2), \quad (14)$$

где ψ — произвольная функция. Уравнение (14) и даст самое общее выражение z , удовлетворяющее уравнению (13).

Проверка. $\frac{\partial z}{\partial x} = \psi'(x^2 + y^2) 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \psi'(x^2 + y^2) 2y$, откуда $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Уравнение (13) есть общее дифференциальное уравнение поверхностей вращения около оси z -ов, а уравнение (14) есть общее уравнение этих поверхностей в конечном виде.

2. Дано уравнение

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad (15)$$

где a и b — постоянные. Берем систему

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}.$$

Последняя система, очевидно, может быть записана в виде

$$dx - a dz = 0, \quad dy - b dz = 0,$$

откуда

$$x - az = C_1, \quad y - bz = C_2.$$

Общий интеграл уравнения (15) будет

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0,$$

или

$$y - bz = \psi(x - az), \quad (16)$$

где ψ — произвольная функция. Уравнение (15) есть общее дифференциальное уравнение цилиндрических поверхностей, а (16) — общее уравнение этих поверхностей в конечном виде.

3. Дано дифференциальное уравнение (конических поверхностей)

$$(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0. \quad (17)$$

Соответствующая система

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}.$$

Интеграл ее

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = C_1, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = C_2.$$

Общий интеграл уравнения (17) $\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$.

4. Дано уравнение (коноидов): $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Общий интеграл $z = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

5. Дано уравнение $x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz$. (18)

Соответствующая ему система уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{mz},$$

которая дает

$$\ln x_1 = \ln x_n + \ln C_1, \quad \text{или} \quad x_1 = C_1 x_n, \quad \frac{x_1}{x_n} = C_1;$$

также

$$\frac{x_2}{x_n} = C_2, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1},$$

$$\frac{1}{m} \ln z = \ln x_n + \ln C, \quad z = C^m x_n^m, \quad \text{или} \quad \frac{z}{x_n^m} = C;$$

(обозначаем постоянную C^m через C_n). Общий интеграл уравнения (18) будет

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n}\right) = 0,$$

или

$$z = x_n^m \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \quad (19)$$

Выражение (19) есть общее выражение всех однородных функций от $x_1, x_2, \dots, x_n$ m -го измерения. Полученный результат доказывает теорему, обратную теореме Эйлера: если некоторая функция удовлетворяет уравнению (18), то эта функция — однородная m -го измерения.

6. Дано уравнение $z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Общий интеграл $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

7. Дано уравнение $y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} = axz$.

Общий интеграл $z = e^{-\frac{ax}{y^3}} \psi(xy)$.

Упражнения

Найти функции по полным их дифференциалам.

1. $dz = \frac{2x(1-ey)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{ey}{1+x^2} dy$. Отв. $z = \frac{ey-1}{1+x^2} + C$.

2. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) dy$.
Отв. $z = xy + \sqrt{x^2+y^2} + C$.

3. $dv = \frac{dx-3dy}{z} + \frac{3y-x}{z^2} dz$. Отв. $v = \frac{x-3y}{z} + C$.

4. Проекции силы на координатные оси равны соответственно: x , $y+z$, $y+z$. Узнать, имеет ли сила силовую функцию, и найти эту функцию.

Отв. $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2yz + z^2) + C$.

Принтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

5. $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^3} = 0$. Отв. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$.

6. $\frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4} dy = 0$; выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(1, 1)$.
Отв. $x^2 - y^2 = Cy^3$; $y = x$.

7. $2x + \frac{3}{y} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5y}} - \left(\frac{3x}{y^2} - \frac{5}{2\sqrt{x^2+2x+5y}}\right)y' = 0$.
Отв. $\frac{x^2y+3x}{y} + \sqrt{x^2+2x+5y} = C$.

$$8. \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x^2+y^2} + \left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-x}{x^2+y^2} + 2y \right) y' = 0.$$

$$\text{Омс. } \sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + y^2 = C.$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}.$$

$$\text{Омс. } (1+x^2)(1+y^2) = Cx^2.$$

10. Найти интегральную кривую уравнения $y \ln y dx + x dy = 0$, проходящую через точку $(1, 1)$.

$$\text{Омс. } y = 1.$$

$$11. y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

$$\text{Омс. } y = x \sqrt{C + 2 \ln x}.$$

$$12. (x^2 - xy - y^2)^2 dx + y^2 dy = 0.$$

$$\text{Омс. } \frac{2x}{x-y} + \ln [(y+x)(y-x)^2] = C.$$

$$13. \frac{dy}{dx} = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}.$$

$$\text{Омс. } (x+y-1)^3 = C(x-y+3).$$

$$14. (x+y+1) dx + (2x+2y-1) dy = 0.$$

$$\text{Омс. } x + 2y + 3 \ln (2-x-y) = C.$$

$$15. xy y' - y^2 = \frac{(x^2 + y^2)x}{y-x}.$$

$$\text{Омс. } \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln (C \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$16. (3x + 5y + 6) y' = 7y + x + 2.$$

$$\text{Омс. } x + 5y + 2 = C(x-y+2)^4.$$

$$17. x(1-x^2) y' + (2x^2-1)y = ax^3.$$

$$\text{Омс. } y = Cx \sqrt{1-x^2} + ax.$$

$$18. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$$

$$\text{Омс. } y = x^2(1 + Ce^{1/x}).$$

19. Найти интегральную кривую уравнения $y' + x^2 y = x^2$, проходящую через точку $M(2, 1)$.

$$\text{Омс. } y = 1.$$

$$20. xy' + y = y^2 \ln x.$$

$$\text{Омс. } (1 + Cx + \ln x)y = 1.$$

$$21. y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Омс. } y = \left(\frac{C + \ln \cos x}{x} + \operatorname{tg} x \right)^3.$$

$$22. y' = \frac{1}{x^2 y^3 + xy}.$$

$$\text{Омс. } x = \frac{1}{Ce^{-y^2/2} - y^2 + 2}.$$

$$23. y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Омс. } y = \frac{1 + \ln x - C}{Cx - x \ln x}.$$

Указание. Найти частное решение вида $\frac{a}{x}$, где a — постоянная.

$$24. x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0. \quad \text{Омс. } x^2 + y^2 = C(y-1)^2.$$

$$25. (xy^2 + y) dx - x dy = 0. \quad \text{Омс. } x^2 + \frac{2x}{y} = C.$$

Указание. Найти множитель вида $\mu = f(y)$.

$$26. (x^3 + y^3 + 1) dx - 2xy dy = 0. \quad \text{Омс. } y^3 - x^3 - Cx + 1 = 0.$$

Указание. Найти множитель вида $\mu = f(x^2 - y^2)$.

$$27. x^2 y'^2 + 3xy y' + 2y^2 = 0. \quad \text{Омс. } (xy - C)(x^2 y - C) = 0.$$

$$28. yy' + y'^2 = x^2 + xy. \quad \text{Омс. } \left(y - \frac{1}{2} x^2 - C \right) (y + x - 1 - Ce^{-x}) = 0.$$

$$29. (xy' - y)^2 - 2xy(1 + y'^2) = 0. \quad \text{Омс. } (x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2.$$

30. $y = y'^3 + 2y'^2$.

Отв. $x = C + 2p + 2p^2$, $y = p^3 + 2p^2$.
Особое решение: $y = 0$.

31. $y = a\sqrt{1+y'^2}$.

Отв. $y = a \operatorname{ch} \frac{x+C}{a}$. Особое решение: $y = a$.

32. $y'^3 - 3y'^2 - 9y' - 12y^2 = 0$.

Отв. $y = 3 \operatorname{tg}(x+C) + 3 \operatorname{tg}^3(x+C)$.Указание. Выразить y^2 и y' рациональными функциями одного параметра.

23. $xy' = \sqrt{1+y'^2}$.

Отв. $y+C = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

34. $y = xy' + y'^2$.

Отв. $y = Cx + C^2$. Особое решение: $x^2 + 4y = 0$.

35. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

Отв. $x = Cy + C^2$. Особое решение: $y^2 + 4x = 0$.Указание. Положить $y = z^2$.

36. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

Отв. $y = (Cx - C^3)^2$. Особое решение: $y = \frac{4x^3}{27}$.

37. $y = xy'^2 + y'^3$.

Отв. $y = (\sqrt{x+1} + C)^3$. Особое решение: $y = 0$.

38. $y = 2xy' - y'^2$.

Отв. $x = \frac{C}{t^2} + \frac{2}{3}t$, $y = \frac{2C}{t} + \frac{1}{3}t^2$.

39. $2y = 2x^2 + 4y' + y'^2$.

Отв. $2y = C^2 + 2Cx - x^2$.

Указание. Следует рассматривать как обобщенное однородное уравнение.

40. $xy^2y'^2 - y^3y' + a^2x = 0$.

Отв. $C^2x^3 = Cy^3 - a^2$.Особое решение: $y^4 = 4a^2x^2$.

Найти особые решения уравнений:

41. $y = xy' + y' + y'^2$.

Отв. $4y + (x+1)^2 = 0$.

42. $2xy(1+y'^2) - (xy' + y)^2 = 0$.

Отв. $y = x$.

43. $y'^3 - xy' + \frac{2x^6}{729} = 0$.

Отв. $y = \frac{x^3}{27}$.

44. Найти ортогональные траектории парабол $y^2 = a(a-2x)$.

Отв. $y^2 = C(C-2x)$.

45. Найти ортогональные траектории семейства кривых $(x^2+y^2)^2 - a^2xy = 0$.

Отв. $(x^2+y^2)^2 - C(x^2-y^2) = 0$.

Указание. Перейти к полярным координатам.

46. Найти уравнение кривой, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью x -ов делится пополам в точке пересечения с осью y -ов.

Отв. Дифференциальное уравнение $2x \frac{dy}{dx} = y$, откуда $y^2 = Cx$.

47. Активность некоторого радиоактивного разложения пропорциональна скорости своего уменьшения. Найти зависимость этой активности от времени, если известно, что в течение четырех дней она уменьшилась вдвое.

Отв. Дифференциальное уравнение $\frac{dR}{dt} = kR$ дает нам $R = R_0 e^{kt}$, причем в силу начальных условий $k = -\frac{\ln 2}{4}$, откуда $R = R_0 e^{-0,1732t}$.

48. В силу закона Ньютона, скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20°C и тело в течение 20 мин. охлаждается от 100 до 60° , то через сколько времени температура его понизится до 30° ?

Отв. Дифференциальное уравнение $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$, откуда в силу начальных условий $T - 20 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; при $T = 30$, время $t = 60$ мин. ≈ 1 час.

49. Доказать, что для тяжелой жидкости, вращающейся около вертикальной оси, свободная поверхность имеет форму параболоида вращения.

Указание. Воспользоваться тем, что равнодействующая силы тяжести и центробежной силы нормальна к поверхности. Принимая ось вращения за ось y -ов и обозначая через ω угловую скорость вращения, получаем для плоского осевого сечения искомой поверхности дифференциальное уравнение: $\omega^2 x = g \frac{dy}{dx}$.

50. Найти форму зеркала, отражающего пучок лучей, стремящихся сойтись в одной точке, так что после отражения все лучи пересекаются в некоторой другой точке.

Отв. Гиперболоид вращения.

51. Найти время, в течение которого вся вода вытекает из конической воронки, если известно, что половина воды вытекает в 2 мин.

Отв. 4,6 мин.

52. Цилиндр, наполненный газом, вращается около своей оси с постоянной угловой скоростью. В конце движения становится стационарным, и вся масса газа вращается как твердое тело. На основании закона Бойля-Мариотта и принимая во внимание центробежную силу, найти закон, связывающий давление газа в данной точке с ее расстоянием от оси.

Отв. $pr = C(e^{1/2 k \omega^2 r^2} - 1)$, где C и k — постоянные.

53. Переходя из среды с коэффициентом преломления μ в другую среду с коэффициентом преломления μ_1 , свет преломляется по закону

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1},$$

где θ и θ_1 суть угол падения и угол преломления. Согласно теории Эйнштейна, гравитационное поле солнца отклоняет световой луч так, как если бы это была среда с коэффициентом преломления $\mu = 1 + \frac{a}{r}$,

где a — постоянная величина, а r — расстояние до центра солнца. Найти путь светового луча.

Отв. $\left(1 + \frac{a}{r}\right) \sin \theta = C$.

54. Найти асимптотические линии кокоида $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Отв. $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 = C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$.

- Указание.* Во всякой точке асимптотической линии соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

55. Найти линии кривизны гиперболического параболоида $z = \frac{xy}{a}$.

Отв. $x^2 + y^2 - 2Axy - a^2(A^2 - 1) = 0$, $z = \frac{xy}{a}$.

У к а з а н и е. Линии кривизны поверхности $z = F(x, y)$ определяются уравнением

$$\frac{(1+p^2)dx + pq dy}{r dx + s dy} = \frac{pq dx + (1+q^2) dy}{s dx + t dy},$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Пронтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

$$56. y'' = x + \sin x. \quad \text{Омс. } y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 + C_2 x.$$

$$57. (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0. \quad \text{Омс. } y = (1+C_1^2) \ln(x+C_1) - C_1 x + C_2.$$

$$58. (y'')^2 = y'. \quad \text{Омс. } y = \frac{1}{12}(x-C_1)^3 + C_2.$$

$$59. y'' = ae^{y'}. \quad \text{Омс. } x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \frac{\sqrt{C_1 + ae^{y'}} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{C_1 + ae^{y'}} + \sqrt{C_1}}.$$

$$60. y''(1+yy') = y'(1+y'^2). \quad \text{Омс. } x = C_1 + C_2 \ln(y + \sqrt{y^3 + 1 - C_1^2}) + \ln(y - C_1 \sqrt{y^3 + 1 - C_1^2}).$$

$$61. y'^2 + 2yy'' = 0; \text{ выделить интегральную кривую, проходящую через точку } (1, 1) \text{ и касающуюся прямой } x = y.$$

$$\text{Омс. } y = C_1(3x + C_2)^{2/3}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{4}}(3x - 1)^{2/3}.$$

$$62. x^4 y'' = (y - xy')^2. \quad \text{Омс. } y = x \left(C - \arcsin \frac{C_1}{x} \right).$$

$$63. x^2 y' y'' - xy' + y = 0. \quad \text{Омс. } [(C+1)\sqrt{x} - \sqrt{2y + (C^2-1)x}]^{C+1} \times \\ \times [(C-1)\sqrt{x} + \sqrt{2y + (C^2-1)x}]^{C-1} = C_1.$$

$$64. y^{(IV)} - 2y''' + y'' = x^3.$$

$$\text{Омс. } y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 + C_4 x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2.$$

$$65. y'' + y = \sin(ax). \quad \text{Омс. } y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{\sin ax}{a^2 - 1} \text{ при } a \neq 1;$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2}x \cos x \text{ при } a = 1.$$

$$66. y^{(IV)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$$

$$\text{Омс. } y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

$$67. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$$

$$\text{Омс. } y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x} - x - 4.$$

$$68. y'' - 7y' + 6y = \sin x. \quad \text{Омс. } y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}.$$

$$69. y'' - 2y' + y = e^{-x} \sin x + 4e^x.$$

$$\text{Омс. } y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x + \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{25} e^{-x}.$$

$$70. y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}.$$

$$\text{Омс. } y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{x}.$$

$$71. x^2 y'' + xy' + y = x, \quad \text{Омс. } y = \frac{1}{2}x + C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x).$$

$$72. x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0. \quad \text{Омс. } y = (C_1 + C_2 \ln x)x + \frac{C_3}{x}.$$

$$73. \text{Пронтегрировать уравнение } y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \text{ зная его частное решение } y = \frac{\sin x}{x}. \quad \text{Омс. } xy = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$74. \text{Если } y_1 \text{ есть частное решение линейного уравнения } y'' + py' + qy = 0, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — функции от } x, \text{ то}$$

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int p dx} \frac{dx}{y_1^2},$$

где C — постоянная, есть также его решение.

Указание. Подставляя в данное уравнение $y = y_1 z$, найдем для определения $\frac{dz}{dx}$ линейное уравнение 1-го порядка, интегрируя которое и получим требуемую формулу.

75. Найти необходимое и достаточное условие, чтобы уравнение

$$y'' + py' + qy = 0$$

(где p и q — функции от x) имело два различных частных решения y_1 и y_2 , удовлетворяющих тождеству $y_1 y_2 = 1$. Для частного случая $p = -\frac{1}{x}$ найти из этого условия q и общий интеграл уравнения.

Указание. Из $y_1 y_2 = 1$ и формулы задачи 74 получим искомое условие в виде $-q = A^2 e^{-2 \int p dx}$, где A — постоянная. При $p = -\frac{1}{x}$, $q = -A^2 x^2$

и общий интеграл уравнения $y'' - \frac{1}{x}y' - A^2 x^2 y = 0$ будет $y = C_1 e^{\frac{Ax^2}{2}} + C_2 e^{-\frac{Ax^2}{2}}$.

76. Если тело не слишком быстро погружается в жидкость, то сопротивление приблизительно пропорционально скорости. Найти закон движения тяжелой материальной точки, погружающейся в жидкость без начальной скорости.

$$\text{Омс. } S = \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m} t} - 1 \right) + \frac{mg}{k} t, \text{ где } m \text{ — масса точки, } g \text{ — ускорение силы тяжести, } k \text{ — коэффициент сопротивления.}$$

77. Если электрон, заряд которого равен e , движется со скоростью v в магнитном поле напряжения H , то он подвергается действию отклоняющей силы, величина которой есть $F = \frac{e}{c} v H \sin \varphi$, где c — скорость распространения света, а φ — угол между направлениями v и H . Направление этой силы перпендикулярно к плоскости векторов v и H и таково, что правое вращение около вектора F на угол φ переводит вектор v в направлении вектора H . Предполагая, что электрон выходит из начала координат с начальной скоростью v_0 , направленной по оси x -ов, найти траекторию движения электрона, если напряжение магнитного поля H постоянно и направлено перпендикулярно к плоскости xOy .

$$\text{Омс. } eH(x^2 + y^2) - 2cmv_0 y = 0.$$

78. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 1 кг, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз весом 2 кг. Найти период колебательного движения, которое получит этот груз, если его слегка оттянуть книзу и затем отпустить.

Отв. Дифференциальное уравнение задачи $\frac{d^2x}{dt^2} + 50gx = 0$, если x отсчитывается от точки, где находится груз в состоянии покоя. Период колебания

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{50g}} = \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{2}{g}} \text{ сек.}$$

79. Тело весом 10 кг подвергается действию упругой силы, стремящейся вернуть его к положению устойчивого равновесия.

Сила пропорциональна смещению и равна 2 кг при смещении в 1 м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после трех колебаний уменьшается в 10 раз. Найти период колебания.

Отв. Дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{10}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad T = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{g}} \sqrt{(6\pi)^2 + \ln^2 10}.$$

80. Пронтегрировать систему

$$\frac{dx}{dt} - 2x - 4y = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} + x + 2y = \sin t.$$

Отв. $x = C_1(1 + 2t) - 2C_2 - 2 \cos t - 3 \sin t$, $y = -C_1t + C_2 + 2 \sin t$.

81. Пронтегрировать систему $\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z}$.

$$\text{Отв. } \frac{z}{y} = C_1, \quad \frac{(x^2 + y^2)y}{x^2} = C_2.$$

82. Пронтегрировать систему $\frac{dx}{dt} = \frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dz}{dt} = x-y+1$.

$$\text{Отв. } x-y = C_1, \quad z-t(x-y+1) = C_2, \quad y - \ln(z-t) = C_3.$$

83. Пронтегрировать систему $\frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$ при начальных условиях $z = -1$, $y = 1$ при $x = 0$.

$$\text{Отв. } z = x-y, \quad y(y-2x)^3 = (x-y)^2.$$

84. Пронтегрировать систему $\frac{dx}{dt} = y-z$, $\frac{dy}{dt} = z-2x$, $\frac{dz}{dt} = 2x-y$.

$$\text{Отв. } x = C_1 + C_2 \cos(t\sqrt{5}) + C_3 \sin(t\sqrt{5}),$$

$$y = 2C_1 - \frac{1}{2} [C_2 - C_3 \sqrt{5}] \cos(t\sqrt{5}) - \frac{1}{2} [C_3 + C_2 \sqrt{5}] \sin(t\sqrt{5}),$$

$$z = 2C_1 - \frac{1}{2} [C_2 + C_3 \sqrt{5}] \cos(t\sqrt{5}) + \frac{1}{2} [C_3 - C_2 \sqrt{5}] \sin(t\sqrt{5}).$$

85. Пронтегрировать систему $\frac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} - 2m^2x = 0$.

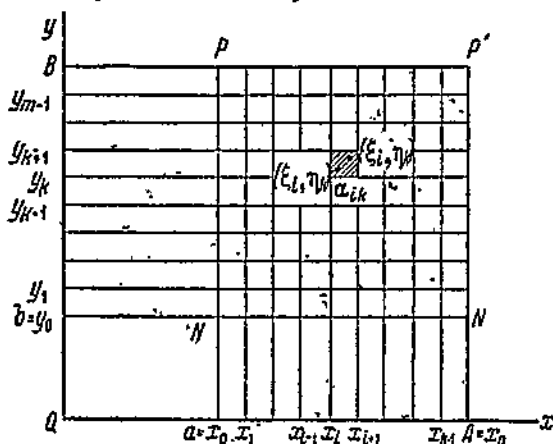
$$\text{Отв. } x = e^{mt} (C_1 \cos mt + C_2 \sin mt) + e^{-mt} (C_3 \cos mt + C_4 \sin mt),$$

$$y = \frac{1}{2} e^{mt} (C_1 \sin mt - C_2 \cos mt) + \frac{1}{2} e^{-mt} (C_4 \cos mt - C_3 \sin mt).$$

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Определение интеграла, распространенного по прямоугольнику. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$ в прямоугольнике R , ограниченном прямыми $x=a$, $x=A > a$ и $y=b$, $y=B > b$ (черт. 40).

Интеграл, вятый по y в предположении постоянного x



Черт. 40.

$$\int_b^B f(x, y) dy, \quad (1)$$

является непрерывной функцией от x на сегменте $[a, A]$ (см. гл. VI, § 6), которая, следовательно, может быть проинтегрирована в свою очередь по этому сегменту. Это интегрирование приводит нас к следующему выражению:

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy, \quad (2)$$

которое содержит два знака интеграла и называется в связи с этим двойным интегралом. Независимые переменные x и y изменяются в прямоугольнике R , который называется областью интегрирования.

Основная задача настоящего параграфа заключается в том, чтобы заменить исходное вышеупомянутое определение двойного интеграла другим, представив выражение (2) в виде предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. С этой целью займемся преобразованием выражения (2).

Положим

$$I(x) = \int_b^B f(x, y) dy; \quad (3)$$

очевидно $I(x)$ есть величина двойного интеграла от функции $f(x, y)$, распространенного на область прямоугольника, ограниченного пря-

мыми $x = a$, $x = x > a$, $y = b$, $y = B$, причем $I(A)$ есть величина данного интеграла, и $I(a) = 0$. Заметив это, разобьем сегмент $[a, A]$ на конечное число n отрезков, помещая между числами a и A $n-1$ возрастающих чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, считая $a = x_0$ и $A = x_n$ и представим величину $I(A)$ данного интеграла в виде

$$I(A) = I(A) - I(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [I(x_{i+1}) - I(x_i)].$$

Так как по формуле Лагранжа $I(x_{i+1}) - I(x_i) = (x_{i+1} - x_i) I'(\bar{\xi}_i)$, где $x_i < \bar{\xi}_i < x_{i+1}$, то $I(A)$ можно записать в виде

$$I(A) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) I'(\bar{\xi}_i). \quad (4)$$

Из формулы (3) вытекает, что

$$I'(x) = \int_b^B f(x, y) dy \quad \text{и, значит,} \quad I'(\bar{\xi}_i) = \int_b^B f(\bar{\xi}_i, y) dy;$$

следовательно, формула (4) примет вид

$$I(A) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_b^B f(\bar{\xi}_i, y) dy. \quad (4')$$

Разобьем теперь сегмент $[b, B]$ на конечное число m отрезков, помещая между числами b и B $m-1$ возрастающих чисел $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$,

считая $b = y_0$, $B = y_m$, и применим к каждому интегралу $\int_b^B f(\bar{\xi}_i, y) dy$,

входящему в формулу (4'), теорему о разбиении промежутка интегрирования на части $[y_k, y_{k+1}]$; тогда получим

$$\int_b^B f(\bar{\xi}_i, y) dy = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\bar{\xi}_i, y) dy \quad (i=0, 1, \dots, n-1). \quad (5)$$

По теореме о среднем значении

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\bar{\xi}_i, y) dy = (y_{k+1} - y_k) f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k), \quad \text{где} \quad y_k < \bar{\eta}_k < y_{k+1}$$

и, следовательно, формула (5) примет вид

$$\int_b^B f(\bar{\xi}_i, y) dy = \sum_{k=0}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k) \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Внося последнее выражение в формулу (4'), найдем

$$I(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k) f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k), \quad (6)$$

где $x_i < \bar{\xi}_i < x_{i+1}$ и $y_k < \bar{\eta}_k < y_{k+1}$.

Обозначим через α_{ik} прямоугольник, содержащийся между прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и $y = y_k$, $y = y_{k+1}$, а также и его площадь. При этом $\alpha_{ik} = (x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)$ (см. черт. 40). Тогда формулу (6) можно записать более кратко:

$$I(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik} f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k), \quad (7)$$

где $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k$ суть координаты некоторой определенной точки, лежащей внутри прямоугольника α_{ik} .

Свойство, выражаемое последним равенством (7), можно формулировать следующим образом: двойной интеграл от $f(x, y)$ по прямоугольнику R равен сумме вида

$$\sum_R \alpha_{ik} \bar{f}_{ik}, \quad (7')$$

получаемой путем разложения R на прямоугольные элементы α_{ik} и сложения произведений площадей всех этих элементов на значения $\bar{f}_{ik}$ функции $f(x, y)$ в некоторых определенных точках этих элементов.

Формула (7), или, что то же, формула (7'), сама по себе не дает средства для вычисления двойного интеграла по данной подинтегральной функции, потому что не удается найти чисел $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k$. Однако, эта формула приводит, как сейчас увидим, к особому аналитическому представлению интеграла, имеющему очень важное значение как теоретическое, так и для приложений интегрального исчисления. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_R \alpha_{ik} f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k),$$

отличающуюся от суммы, стоящей в формуле (7') и изображающей данный интеграл, тем, что вместо значений функции $\bar{f}_{ik}$ в неизвестных точках прямоугольников α_{ik} входят произвольно выбираемые в каждом прямоугольнике α_{ik} точки $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k)$. Мы покажем, что наш интеграл

$$I(A) = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy,$$

при непрерывности функции $f(x, y)$ в прямоугольнике R , есть предел, к которому стремится сумма S , когда максимальная диагональ

прямоугольников α_{ik} стремится к нулю. Для этого замечаем, пользуясь вышеформулированной теоремой, что

$$I(A) - S = \sum_R \alpha_{ik} [\bar{f}_{ik} - f(\xi_i, \eta_k)], \quad (8)$$

где $\bar{f}_{ik}$ — значение функции $f(x, y)$ в некоторой определенной точке M_{ik} прямоугольника α_{ik} , а $f(\xi_i, \eta_k)$ — значение той же функции в любой произвольно выбранной точке $M_{ik}(\xi_i, \eta_k)$ того же прямоугольника α_{ik} .

Вследствие равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ в прямоугольнике R , каково бы ни было положительное число ε , существует другое соответствующее ему положительное число δ , такое, что при $M' M'' < \delta$ имеем $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$, где M' и M'' — любые точки прямоугольника R . Так как точки $\bar{M}_{ik}(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k)$ и M_{ik} лежат в прямоугольнике α_{ik} , то расстояние между ними $\bar{M}_{ik} M_{ik}$ не больше длины диагонали прямоугольника α_{ik} . Считая диагонали всех прямоугольников α_{ik} меньше δ , мы, следовательно, имеем $\bar{M}_{ik} M_{ik} < \delta$ при любых i и k , и, значит,

$$|f(\bar{M}_{ik}) - f(M_{ik})| = |\bar{f}_{ik} - f(\xi_i, \eta_k)| < \varepsilon$$

для всех значений i и k .

Тогда по формуле (8) мы получим следующее:

$$|I(A) - S| < \varepsilon \sum_R \alpha_{ik},$$

а замечая, что $\sum_R \alpha_{ik} = R$, мы находим

$$|I(A) - S| < \varepsilon R. \quad (9)$$

Так как ε — произвольное положительное число, то надлежащим выбором этого числа мы можем сделать εR численно меньшим любого данного числа, и формула (9) показывает, что S будет отличаться как угодно мало от $I(A)$, при достаточно малых длинах диагоналей прямоугольников α_{ik} ; иными словами, $I(A)$ есть предел, к которому стремится S с приближением максимума диагоналей всех прямоугольников α_{ik} к нулю, причем число этих прямоугольников должно неограниченно возрастать, так как сумма площадей всех этих прямоугольников остается постоянно равной R .

Итак мы установили формулу

$$I(A) = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy = \lim \sum_R \alpha_{ik} f(\xi_i, \eta_k) \quad (10)$$

при условии, что максимум длин диагоналей прямоугольников α_{ik} стремится к нулю.

Эта формула показывает, что двойной интеграл $I(A)$ есть предел суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых вида

$f(\xi_i, \eta_k) \alpha_{ik}$, где (ξ_i, η_k) означает любую точку прямоугольника α_{ik} . Во всех предыдущих рассуждениях можно переставить переменные x и y . Так как определение двойного интеграла, как предела суммы, не зависит от порядка, в котором рассматриваются эти переменные, то мы получаем следующую теорему:

Значение двойного интеграла, распространенного на прямоугольник R , не зависит от порядка, в котором производится интегрирование, т. е.

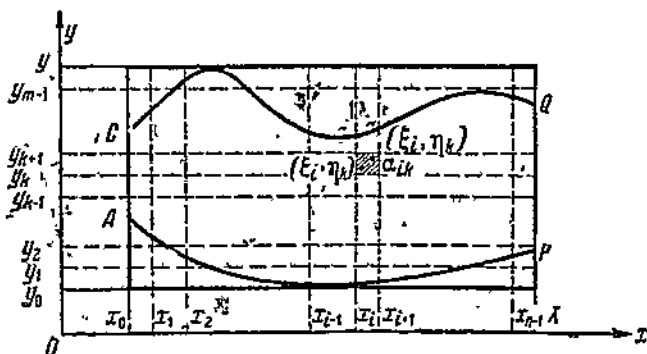
$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx. \quad (11)$$

В дальнейшем, для изображения двойного интеграла, распространенного на прямоугольник R , мы будем применять более краткое обозначение, которое, однако, напоминает нам одновременно и об его определении, как предела суммы, и об его сведении к двум последовательным простым интегрированиям. Мы будем употреблять следующее обозначение:

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

Выражение $f(x, y) dx dy$, к которому применяется двойное интегрирование, называется *элементом двойного интеграла*.

§ 2. Определение двойного интеграла, распространенного по произвольной области. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$ в замкнутой области D (черт. 41), ограниченной следующим обра-



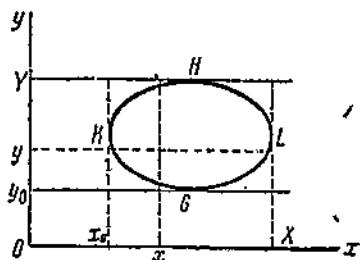
Черт. 41.

зом: двумя прямыми, параллельными OY : $x = x_0$, $x = X > x_0$, и двумя непрерывными кривыми: $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x) > \varphi_1(x)$. Каждая из них пересекается с прямой, параллельной OY , самое большее в одной только точке. В частном случае точки A и C , с одной стороны, а также и точки P и Q — с другой, могут совпа-

дать; так будет, например, в том случае, когда область D ограничена одной замкнутой кривой $F(x, y) = 0$, пересекаемой самое большее в двух точках прямыми, параллельными оси OY (черт. 42). Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, обозначающие пределы изменения y , получаются тогда из уравнения $F(x, y) = 0$ путем разрешения его относительно y ; пределы изменения x , числа x_0 и X , будут наименьшее и наибольшее значения x в данной области, т. е. абсциссы точек, в которых касательные к кривой параллельны оси OY ; эти абсциссы могут быть найдены, как корни уравнения $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Интеграл, взятый по y в предположении постоянного x .

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (1)$$



Черт. 42

является непрерывной функцией от x на сегменте $[x_0, X]$ (глава VI, § 6).

Таким образом функция $F(x)$ может быть проинтегрирована в свою очередь в пределах от x_0 до X . Это интегрирование приводит нас к следующему выражению:

$$\int_{x_0}^X F(x) dx = \int_{x_0}^X dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (2)$$

которое содержит два знака интеграла и называется в связи с этим двойным интегралом. Независимые переменные x и y изменяются в области D , которая называется *областью интегрирования*. Основная задача настоящего параграфа заключается в том, чтобы заменить исходное вышеупомянутое определение двойного интеграла другим, представив выражение (2) в виде предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. С этой целью займемся преобразованием выражения (2). Обозначая через y_0 наименьшее значение функции $\varphi_1(x)$ на сегменте $[x_0, X]$ и через Y — наибольшее значение функции $\varphi_2(x)$ на том же сегменте, проведем прямые $y = y_0$ и $y = Y$. Таким образом мы получим прямоугольник R , ограниченный прямыми $x = x_0$, $x = X$ и $y = y_0$, $y = Y$, описанный около области D (см. черт. 41). На этом прямоугольнике R определим вспомогательную функцию $f_1(x, y)$ следующим образом: $f_1(x, y) = f(x, y)$ в точках области D , $f_1(x, y) = 0$ в точках прямоугольника R , не принадлежащих D . Легко видеть, что

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_{y_0}^Y f_1(x, y) dy. \quad (3)$$

В самом деле

$$\int_{y_0}^Y f_1(x, y) dy = \int_{y_0}^{\varphi_1(x)} f_1(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_1(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^Y f_1(x, y) dy; \quad (4)$$

первый и третий интегралы правой части суть нули, потому что, согласно определению, функция $f_1(x, y)$ при изменении y от y_0 до $\varphi_1(x)$, равно как при изменении y от $\varphi_2(x)$ до Y , тождественно равна нулю, во втором же интеграле первой части $f_1(x, y) = f(x, y)$, так как при изменении y в пределах $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ точка (x, y) находится в области D .

Итак, формула (4) нам показывает, что

$$\int_{y_0}^Y f_1(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3)$$

Заметив это, перепишем данный интеграл (2) в виде

$$\int_{x_0}^X dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y f_1(x, y) dy. \quad (5)$$

При помощи формулы (5) мы заменяем, таким образом, данный интеграл от функции $f(x, y)$, распространенный на область D , через интеграл от вспомогательной функции $f_1(x, y)$, распространенный на область прямоугольника R .

Это позволяет нам в дальнейшем применить рассуждения, которые мы уже проводили в § 1. Итак, положим

$$I(x) = \int_{y_0}^Y f_1(x, y) dy; \quad (6)$$

очевидно $I(x)$ есть величины двойного интеграла от функции $f_1(x, y)$, распространенного на область прямоугольника, ограниченного прямыми $x = x_0$, $x = x > x_0$, $y = y_0$, $y = Y$, причем $I(X)$ есть величина данного интеграла и $I(x_0) = 0$. Заметив это, разобьем сегмент $[x_0, X]$ на конечное число n отрезков, помещая между числами x_0 и X $n-1$ возрастающих чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, считая $X = x_n$, и представим величину $I(X)$ данного интеграла в виде

$$I(X) = I(X) - I(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} [I(x_{i+1}) - I(x_i)].$$

Так как по формуле Лагранжа $I(x_{i+1}) - I(x_i) = (x_{i+1} - x_i) I'(\bar{\xi}_i)$, где $x_i < \bar{\xi}_i < x_{i+1}$, то $I(X)$ можно записать в виде

$$I(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) I'(\bar{\xi}_i). \quad (7)$$

Из формулы (6) вытекает, что

$$I'(x) = \int_{y_0}^Y f_1(x, y) dy \quad \text{и, значит,} \quad I'(\bar{x}) = \int_{y_0}^Y f(\bar{x}, y) dy.$$

Следовательно, формула (7) примет вид

$$I(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_{y_0}^Y f_1(\bar{x}_i, y) dy. \quad (7')$$

Разобьем теперь сегмент $[y_0, Y]$ на конечное число m отрезков, помещая между числами y_0 и Y $m-1$ возрастающих чисел $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$, считая $Y = y_m$, и применяем к каждому интегралу $\int_{y_0}^Y f_1(\bar{x}_i, y) dy$, входящему в формулу (7'), теорему о разбиении промежутка интегрирования на части $[y_k, y_{k+1}]$; тогда получим

$$\int_{y_0}^Y f_1(\bar{x}_i, y) dy = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f_1(\bar{x}_i, y) dy \quad (i=0, 1, \dots, n-1). \quad (8)$$

Рассмотрим произвольное слагаемое суммы (8):

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f_1(\bar{x}_i, y) dy.$$

Когда переменное y изменяется от y_k до y_{k+1} , то точка $(\bar{x}_i, y)$ описывает отрезок с абсциссой $\bar{x}_i$, параллельный оси OY , причем возможны три случая: либо этот отрезок принадлежит области D и тогда

$$f_1(\bar{x}_i, y) = f(\bar{x}_i, y),$$

либо этот отрезок лежит вне D и тогда $f_1(\bar{x}_i, y) = 0$, либо, наконец, он пересекает границу области D . Очевидно, отрезков третьего типа может быть не больше двух для каждого значения $\bar{x}_i$.

Возвращаясь теперь к сумме (8), мы, принимая во внимание сказанное, можем ее выразить при помощи данной функции f , освободившись от вспомогательной функции f_1 , а именно:

$$\int_{y_0}^Y f_1(\bar{x}_i, y) dy = \sum_D \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\bar{x}_i, y) dy + \sigma_i, \quad (8')$$

где суммирование распространено лишь на отрезки первого типа, т. е. принадлежащие области D , а σ_i обозначает сумму не более двух слагаемых, получающихся от интегрирования функции f_1 , вдоль отрезков третьего типа, пересекающих границу области D . Если

обозначить через δ наибольший из всех отрезков $[y_k, y_{k+1}]$, получающихся для $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, то, очевидно, можем написать неравенство

$$|\sigma_i| < 2\delta M$$

при любом $i=0, 1, 2, \dots, n-1$, где M — максимум $|f(x, y)|$ в области D . Применяя теорему о среднем значении к каждому слагаемому суммы (8'), получим

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\bar{\xi}_i, y) dy = (y_{k+1} - y_k) f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k), \quad \text{где } y_k < \bar{\eta}_k < y_{k+1}$$

и, следовательно, формула (8') примет вид

$$\int_{D_i}^y f(\bar{\xi}_i, y) dy = \sum_D (y_{k+1} - y_k) f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k) + \sigma_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Внося последнее выражение в формулу (7'), найдем

$$I(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_D (y_{k+1} - y_k) f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sigma_i, \quad (9)$$

где $x_i < \bar{\xi}_i < x_{i+1}$ и $y_k < \bar{\eta}_k < y_{k+1}$.

Обозначим через α_{ik} прямоугольник, содержащийся между прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и $y = y_k$, $y = y_{k+1}$, а также и его площадь, имея при этом в виду, что $\alpha_{ik} = (x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)$. Тогда формулу (9) можно записать более кратко:

$$I(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_D \alpha_{ik} f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sigma_i, \quad (10)$$

где $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k$ суть координаты некоторой определенной точки, лежащей внутри прямоугольника α_{ik} ; в двойной сумме внутреннее суммирование распространяется по всем k , для которых α_{ik} лежит внутри области D .

Так как сумма не зависит от порядка слагаемых, то двойную сумму формулы (10) можно заменить простой суммой, обозначая через α_j площади прямоугольников α_{ik} , лежащих внутри D , а через $\bar{M}_j$ некоторую определенную точку $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k)$, принадлежащую элементу α_j . В силу этих замечаний формула (10) примет вид

$$I(X) = \sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sigma_i \quad (11)$$

где суммирование распространено на все прямоугольные элементы α_j , лежащие внутри области D , $f(M_j)$ есть значение функции $f(x, y)$ в некоторой определенной точке M_j элемента α_j , c_l удовлетворяет неравенству $|c_l| < 2\delta M$ при любом l . Вторая сумма правой части формулы (11) по абсолютной величине, очевидно, меньше, чем

$$2\delta M \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = 2\delta M (X - x_0).$$

Выбирая диагонали всех элементарных прямоугольников достаточно малыми, мы можем сделать δ , наибольшую высоту этих прямоугольников, сколь угодно малой, а значит, и величину $2\delta M (X - x_0)$ можем считать как угодно малой. Если так, то

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i = 0.$$

Предел взят в предположении, что максимум диагоналей всех элементарных прямоугольников, покрывающих прямоугольник R , стремится к нулю.

После этих замечаний из формулы (11), переходя к пределу в предположении, что максимум диагоналей всех элементарных прямоугольников, покрывающих прямоугольник R , стремится к нулю, найдем

$$I(X) = \lim \sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j). \quad (12)$$

Последний предел взят в предположении, что максимум диагоналей всех α_{ik} стремится к нулю.

Формула (12) сама по себе не дает средства для вычисления двойного интеграла $I(X)$ по данной подинтегральной функции, потому что не удается найти точек $\bar{M}_j$. Однако, эта формула приводит, как сейчас увидим, к особому аналитическому представлению интеграла, имеющему очень важное значение как теоретическое, так и для приложений интегрального исчисления. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j),$$

отличающуюся от суммы, стоящей в формуле (12), тем, что на место определенных, но неизвестных точек $\bar{M}_j$, принадлежащих прямоугольникам α_j , входят произвольно выбираемые в каждом прямоугольнике α_j точки $M_j(\xi_j, \eta_j)$. Мы покажем, что наш интеграл

$$I(X) = \int_{x_0}^X dx \int_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)} f(x, y) dy$$

при непрерывности функции $f(x, y)$ в области D есть предел, к которому стремится сумма S , когда максимум диагоналей всех прямоугольников α_{ik} стремится к нулю.

Другими словами, мы покажем, что предельная формула (12) остается в силе, если вместо входящей в нее суммы взять сумму S . Для этого образуем разность

$$\sum_D \alpha_j f(M_j) - S = \sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j) - \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j),$$

т. е.

$$\sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j) - S = \sum_D \alpha_j [f(\bar{M}_j) - f(\xi_j, \eta_j)], \quad (13)$$

где $\bar{M}_j$ — некоторая определенная точка прямоугольника α_j , а $M_j(\xi_j, \eta_j)$ — любая произвольно выбранная точка того же прямоугольника α_j . Покажем, что эта разность стремится к нулю, когда максимум диагоналей всех $\alpha_{ik} \rightarrow 0$. Вследствие равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ в области D , каково бы ни было положительное число ε , существует другое, соответствующее ему, положительное число δ , такое, что при $M'M'' < \delta$ имеем

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon,$$

где M' и M'' — любые две точки области D . Так как точки $M_j(\xi_j, \eta_j)$ и $\bar{M}_j$ лежат в прямоугольнике α_j , то расстояние между ними $M_j\bar{M}_j$ не больше длины диагонали прямоугольника α_j . Считая диагонали всех прямоугольников α_{ik} меньше δ , мы, следовательно, имеем $\bar{M}_j M_j < \delta$ при любом j , и, значит,

$$|f(\bar{M}_j) - f(M_j)| = |f(\bar{M}_j) - f(\xi_j, \eta_j)| < \varepsilon$$

для всех значений j .

Тогда по формуле (13) мы получаем следующее:

$$|\sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j) - S| < \varepsilon \sum_D \alpha_j \leq \varepsilon D, \quad (14)$$

Так как ε — произвольное положительное число, то надлежащим выбором этого числа мы можем оделать εD численно меньшим любого данного числа, и формула (14) показывает, что S будет отличаться как угодно мало от $\sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j)$, при достаточно малых длинах диагоналей прямоугольников α_{ik} ; иными словами, разность (13) становится бесконечно малой вместе с максимумом длин диагоналей всех прямоугольников α_{ik} .

Возвращаясь к формуле (12), согласно которой сумма $\sum_D \alpha_j f(\bar{M}_j)$ стремится к нашему интегралу $I(X)$, как к пределу, мы видим, что к тому же пределу $I(X)$ должна стремиться отличающаяся от нее бесконечно мало сумма S .

Итак, мы установили формулу

$$I(X) = \int_{x_0}^X dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \lim_D \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) \quad (15)$$

при условии, что максимум диагоналей элементарных прямоугольников α_k стремится к нулю.

Эта формула показывает, что двойной интеграл $I(X)$ есть предел суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых вида $f(\xi_j, \eta_j) \alpha_j$, где (ξ_j, η_j) означает любую точку в прямоугольнике α_j .

До сих пор относительно области D мы лишь предполагали, что ее криволинейная граница пересекается со всякой прямой, параллельной оси OY , не более чем в двух точках. В приложениях часто бывает, что граница рассматриваемой области пересекается не более чем в двух точках не только со всякой прямой, параллельной оси OY , но и со всякой прямой, параллельной оси OX . Другими словами, нашу область D можно задать не только неравенствами

$$x_0 \leq x \leq X, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

где φ_1 и φ_2 — однозначные непрерывные функции, но и неравенствами $y_0 \leq y \leq Y, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ (черт. 42), где $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ — однозначные непрерывные функции. В этом случае во всех предыдущих рассуждениях можно переставить переменные x и y . Так как определение двойного интеграла, как предела суммы, не зависит от порядка, в котором рассматриваются эти переменные, то мы получаем следующую теорему:

При вычислении двойного интеграла можно переставить порядок интегрирования, назначив соответствующие пределы, согласно формуле

$$\int_{x_0}^X dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_{y_0}^Y dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

В дальнейшем для обозначения двойного интеграла, взятого по области D , мы будем применять более краткое обозначение, которое напоминает нам и об его определении, как предела суммы, и об его сведении к двум последовательным простым интегрированиям. Мы будем употреблять следующее обозначение:

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Выражение $f(x, y) dx dy$, к которому применяется двойное интегрирование, называется *элементом двойного интеграла*.

Определение понятия двойного интеграла легко можно распространить на случай произвольной области D , лишь бы только эту область можно было разбить на конечное число областей того типа, какой мы определили в начале настоящего параграфа.

Действительно, составим сумму вида $\sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j)$, распространив ее на все элементарные прямоугольники α_k , лежащие внутри области D , и обозначая через (ξ_j, η_j) любую точку элемента α_j .

Разобьем область D на конечное число областей $D_1, D_2, \dots, D_n$ того типа, какой мы рассматривали в настоящем параграфе, определяя смысл двойного интеграла.

Объединяя вместе те слагаемые суммы $\sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j)$, которые соответствуют прямоугольникам α_j , попавшим соответственно внутрь областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, мы разобьем нашу общую сумму на n соответствующих частных сумм:

$$\begin{aligned} \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) = \sum_{D_1} \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) + \sum_{D_2} \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) + \dots \\ \dots + \sum_{D_n} \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) + \sigma, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\sum_{D_k} \alpha_j f(\xi_j, \eta_j)$ распространена на все прямоугольники α_{ik} , находящиеся внутри D_k ; что касается σ , то это есть сумма всех тех слагаемых, которые соответствуют прямоугольникам α_{ik} , пересекающим границы областей D_k . Очевидно, σ есть величина бесконечно малая вместе с максимальной диагональю прямоугольников α_{ik} .

Заставляя эту максимальную диагональ всех прямоугольников α_{ik} стремиться к нулю, мы видим, что в формуле (16) все слагаемые правой части имеют конечные пределы, вследствие вышедшего, а потому и левая часть этой формулы имеет конечный предел, который мы и принимаем за значение двойного интеграла, распространенного по области D . Итак, из (16) в пределе получаем

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy = \lim \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \\ + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

где предел берется в предположении, что максимум диагоналей всех α_{ik} стремится к нулю. Эта формула, давая определение двойного интеграла, распространенного на произвольную область D , в то же время дает способ его вычисления, показывает что для этого достаточно вычислить все интегралы $\iint_{D_k} f(x, y) dx dy$ и ре-

зультаты сложить. Вычисление же каждого интеграла с областью интегрирования D_k , как известно, производится при помощи двух последовательных интегрирований.

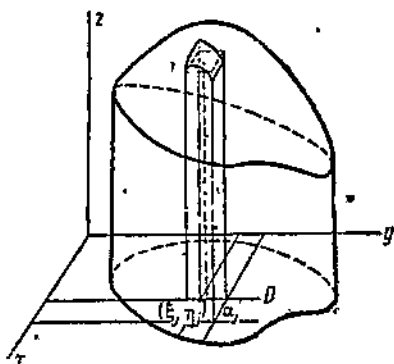
§ 3. Геометрическая интерпретация двойного интеграла. Чтобы дать геометрическое истолкование формулы

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j), \quad (1)$$

служащей определением двойного интеграла от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенного по области D независимых перемен-

ных, будем сначала предполагать функцию $f(x, y)$ положительной при изменении x и y в области D . Рассмотрим в пространстве область, ограниченную кривой поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью xy и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z , направляющей которой служит контур, ограничивающий область D (черт. 43).

Процесс интегрирования, выражаемый формулой (1), будет заключаться в следующем: во-первых, нужно построить в плоскости xy сеть прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, и выбрать все те из этих прямоугольников, которые попадают внутрь области D . Во-вторых, надо составить произведение $f(\xi_j, \eta_j) \alpha_j$ из значения данной функции $f(x, y)$ в произвольно выбранной точке (ξ_j, η_j) , принадлежащей элементарному прямоугольнику α_j , на площадь α_j этого прямоугольника; составленный элемент суммы $f(\xi_j, \eta_j) \alpha_j$ будет равен объему прямоугольного параллелепипеда с основанием, равным α_j и высотой $f(\xi_j, \eta_j)$. В-третьих, нужно образовать сумму элементов $f(\xi_j, \eta_j) \alpha_j$, распространив ее на все элементарные прямоугольники, находящиеся внутри D ; образованная таким образом сумма будет представлять сумму объемов всех прямоугольных параллелепипедов, построенных на элементарных прямоугольниках α_j как на основаниях, имеющих высотами соответствующие $f(\xi_j, \eta_j)$. Наконец, в-четвертых, мы должны взять предел образованной суммы, в предположении, что максимум длин диагоналей всех элементарных прямоугольников стремится к нулю. Как показывает формула (1), в результате мы получим вполне определенное число, равное $\iint_D f(x, y) dx dy$, независимо от того, по какому закону



Черт. 43.

длины диагоналей прямоугольников α_{jk} стремятся к нулю и как мы выбрали точки (ξ_j, η_j) этих прямоугольников. Согласно определению, этот предел мы принимаем за объем области, ограниченной сверху кривой поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью xy и с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z , у которой направляющей служит контур области D . Формула (1) нам показывает, следовательно, что двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ равен объему вышеуказанной области, граница которой состоит из куска плоскости $xy - D$, куска цилиндрической

поверхности, проходящей через контур области D , и соответствующего куска поверхности $z=f(x, y)$.

Все сказанное легко обобщить на случай, когда $f(x, y)$ меняет знак в области D . Если $f(x, y)$ все время в области D меньше нуля, то кусок кривой поверхности $z=f(x, y)$ весь лежит со стороны отрицательных аппликат. Выражение $f(\xi_j, \eta_j) \alpha_j$ будет меньше нуля для всех j , потому что $f(\xi_j, \eta_j) < 0$, а $\alpha_j > 0$. Значит, это выражение равно объему элементарного прямоугольного параллелепипеда, взятому со знаком минус, и

$$\lim \sum_D \alpha_j f(\xi_j, \eta_j) = \int \int_D f(x, y) dx dy,$$

очевидно, будет объем соответствующей области, взятый со знаком минус.

Переходя к общему случаю, когда $f(x, y)$ меняет знак несколько раз в области D , т. е. поверхность $z=f(x, y)$ несколько раз пересекает плоскость xy , легко убедиться, что в этом случае, $\int \int f(x, y) dx dy$ равен алгебраической сумме D объемов областей, лежащих между плоскостью xy , поверхностью $z=f(x, y)$ и цилиндрической поверхностью, проходящей через контур D , причем объемы частей, лежащих со стороны положительных z , берутся со знаком плюс, а лежащих со стороны отрицательных z — со знаком минус.

Примеры.

1. Вычислить объем области, ограниченной гиперболическим параболоидом, уравнение которого есть $z = \frac{xy}{m}$, плоскостью (xy) и четырьмя плоскостями $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=k$ (черт. 44). Проекция поверхности $EFHG$ на плоскость (xy) есть прямоугольник $ABCD$, стороны которого AD и BC параллельны OY , а AB и DC параллельны OX . Объем выражается интегралом

$$V = \int \int z dx dy = \frac{1}{m} \int \int xy dx dy,$$

распространенным по области $ABCD$; уравнения линий, ограничивающих эту область, будут

$$(AD): x=a, (AB): y=c, (BC): x=b, (DC): y=k;$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{m} \int_a^b x dx \int_c^k y dy = \frac{k^2 - c^2}{2m} \int_a^b x dx = \frac{(k^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{4m} = \\ &= \frac{(k-c)(b-a)(k+c)(b+a)}{4m} = (k-c)(b-a) \frac{(b \cdot k + c \cdot b + a \cdot k + a \cdot c)}{4m}. \end{aligned}$$

Обозначая высоты BH , AG , CF , DE соответственно через z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , из уравнения поверхности получим

$$z_1 = \frac{bc}{m}, \quad z_2 = \frac{ac}{m},$$

$$z_3 = \frac{bk}{m}, \quad z_4 = \frac{ak}{m};$$

кроме того, $AB = b - a$, $AD = k - c$, следовательно,

$$V = \frac{1}{4} AB \cdot AD (z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

т. е. объем V равен площади основания $ABCD$, умноженной на среднее арифметическое высот BH , AG , CF и DE .

2. Вычислить объем области, ограниченной плоскостью (xy) , вертикальным цилиндром, у которого основание есть та четверть круга радиуса a с центром в начале координат, которая лежит в угле положительных x и y , и поверхностью $z = \frac{xy}{m}$:

$$V = \iint z \, dx \, dy = \frac{1}{m} \iint xy \, dx \, dy.$$

Интегрирование надо распространить по области круга; уравнение окружности даст

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Интегрируя сперва по y , от $y = 0$ до $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, а потом по x от 0 до a находим

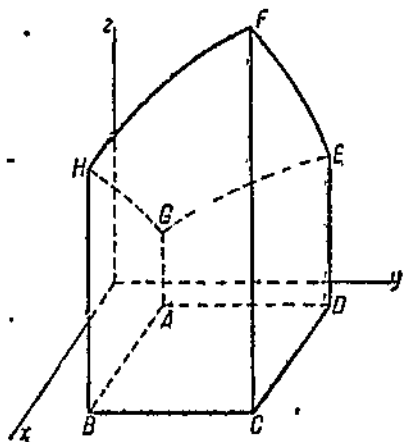
$$V = \frac{1}{m} \int_0^a x \, dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y \, dy = \frac{1}{2m} \int_0^a x (a^2 - x^2) \, dx = \frac{1}{8} \frac{a^4}{m}.$$

§ 4. Обобщение определения двойного интеграла. Предварительно установим одно свойство двойного интеграла, известное под названием *теоремы о среднем значении*.

Если $f(x, y)$ — функция, непрерывная в области D , то

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = D f(\xi, \eta), \quad (1)$$

где (ξ, η) — некоторая определенная точка, лежащая внутри D . В самом деле, обозначая через M и m наибольшее и наименьшее значения функций $f(x, y)$ в области D , имеем $M - f(x, y) \geq 0$ и $f(x, y) - m \geq 0$ для любой точки (x, y) области D . Либо $f(x, y) \equiv M = m$ и тогда формула (1) очевидна; либо найдется точка (x_0, y_0) области D , в которой $M - f(x_0, y_0) > 0$. В силу непрерывности будет существовать окрестность δ этой точки, для всех точек ко-



Черт. 44.

торой $M - f(x, y) > 0$. Очевидно, имеем

$$\iint_d [M - f(x, y)] dx dy > 0,$$

потому что

$$\sum_d [M - f(\xi_j, \eta_j)] \alpha_j \geq \mu d,$$

где $\mu > 0$ — наименьшее значение положительной непрерывной функции $M - f(x, y)$ в окрестности d . В пределе получим

$$\iint_D [M - f(x, y)] dx dy \geq \mu d > 0.$$

Заметив, что

$$\iint_D [M - f(x, y)] dx dy \geq \iint_d [M - f(x, y)] dx dy,$$

так как в области D все время $M - f(x, y) \geq 0$, находим

$$\iint_D [M - f(x, y)] dx dy > 0 \quad \text{или} \quad \iint_D f(x, y) dx dy < MD.$$

Также докажем, что

$$\iint_D f(x, y) dx dy > mD.$$

Из этих двух неравенств заключаем, что

$$\frac{1}{D} \iint_D f(x, y) dx dy$$

есть число, заключенное между M и m . Пусть $m = f(\alpha_1, \beta_1)$, $M = f(\alpha_2, \beta_2)$, где (α_1, β_1) и (α_2, β_2) — точки области D . Соединим эти точки непрерывной кривой, все точки которой лежат внутри D (кроме, быть может, концов). Когда точка (x, y) движется по этой кривой, функция $f(x, y)$, непрерывно изменяясь, переходит от значения m к значению M . Так как число $\frac{1}{D} \iint_D f(x, y) dx dy$ заключено между m и M , то в силу непрерывности найдется точка кривой (ξ, η) , лежащая внутри области D , в которой

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{D} \iint_D f dx dy,$$

что и доказывает формулу (1).

Заметив это, разложим область интегрирования D прямыми или кривыми на элементы, т. е. частные области с площадями α_j . Тогда

можем написать

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_D \iint_{\alpha_i} f(x, y) dx dy = \sum_D \alpha_i f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),$$

где $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$ — определенная точка внутри α_i .

С другой стороны, составим сумму $\sum_D \alpha_i f(\xi_i, \eta_i)$, считая (ξ_i, η_i) произвольно выбранной точкой элемента α_i , и покажем, что предел этой суммы есть

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

когда максимальные размеры всех элементов α_i бесконечно убывают.

В самом деле, разность

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy - \sum_D \alpha_i f(\xi_i, \eta_i) &= \sum_D \alpha_i f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) - \\ &- \sum_D \alpha_i f(\xi_i, \eta_i) = \sum_D \alpha_i [f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) - f(\xi_i, \eta_i)] \quad (2) \end{aligned}$$

по абсолютной величине будет меньше произвольно малого числа ε , если все измерения элементов α_i достаточно малы.

Действительно, в силу равномерной непрерывности,

$$|f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) - f(\xi_i, \eta_i)| < \varepsilon,$$

каково бы ни было i , потому что точки $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$ и (ξ_i, η_i) принадлежат одному и тому же элементу α_i , размеры которого достаточно малы независимо от i .

Из (2) тогда найдем

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy - \sum_D \alpha_i f(\xi_i, \eta_i) \right| < \varepsilon \sum_D \alpha_i = \varepsilon D,$$

т. е.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim \sum_D \alpha_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (3)$$

в предположении, что все элементы α_i бесконечно убывают во всех направлениях.

Формула (3) и дает обобщение определения двойного интеграла, показывая, что результат интегрирования не зависит от того, какой формы мы будем брать элементы α_i .

В связи с этим часто пользуются следующим обозначением двойного интеграла:

$$\iint_D f(x, y) d\varphi.$$

§ 5. Случай, когда результат двух последовательных интегрирований функции $f(x, y)$, в постоянных пределах, может зависеть от порядка действий. Если функция $f(x, y)$ делается разрывной, обращаясь в бесконечность для некоторых значений x и y в области, определяемой неравенствами $x_0 \leq x \leq X$, $y_0 \leq y \leq Y$, тогда определение интеграла как предела суммы теряет свою силу, и заключения, основанные на этом определении, могут не иметь места. Может при этом случиться, несмотря на то, что функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность в данной области, что результаты двух последовательных интегрирований, произведенных над этой функцией, в пределах от $x = x_0$ до $x = X$ и от $y = y_0$ до $y = Y$, имеют смысл, но нет основания утверждать, что эти результаты равны между собой.

Нижеследующий пример, указанный Коши, показывает, что теорема о перемене порядка интегрирования, выражаемая формулой (11) § 1, может быть несправедлива. Рассмотрим

$$J_1 = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx;$$

интегрирование по x дает

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx = \left[\frac{x}{y^2 + x^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2};$$

отсюда

$$J_1 = \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \operatorname{arctg} 1 = +\frac{\pi}{4}.$$

Возьмем теперь

$$J_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy.$$

Интегрирование по y даст

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy = - \left[\frac{y}{y^2 + x^2} \right]_{y=0}^{y=1} = - \frac{1}{1 + x^2}$$

и

$$J_2 = - \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = - \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $J_1 \neq J_2$. Это произошло потому, что подинтегральная функция становится неограниченной в окрестности точки $x=0, y=0$ области интегрирования.

В самом деле, в любой окрестности точки $x=0, y=0$ среди значений функции встречаются значения, равные нулю, если $x = \pm y$. С другой стороны, полагая $y = kx$ и неограниченно уменьшая $|x|$, находим, что значение функции

$$\frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{k^2 - 1}{x^2(k^2 + 1)^2}$$

стремится к $+\infty$, если $k^2 > 1$, и к $-\infty$, если $k^2 < 1$. Таким образом, если точка (x, y) приближается к началу координат по прямой, образующей с осью Ox с той или с другой стороны угол, больший 45° , значение функции стремится к $+\infty$; если угол равен 45° , то значение функции всегда равно нулю; если угол меньше 45° , то значение функции стремится к $-\infty$. Наконец, если приближать точку (x, y) к началу координат по кривой $y = x + ax^2$, то значение функции, как легко видеть, будет стремиться к $\frac{a}{2}$.

Аналогичное соображение лежит в основе чрезвычайно изящного доказательства, данного Гауссом, основной теоремы алгебры о существовании корня (действительного или мнимого) всякого целого полинома. Приведем здесь это доказательство. Пусть

$$F(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$$

целый полином степени m . A_m можно считать не равным нулю, иначе $F(x)$ имела бы очевидный корень $x = 0$, и теорема была бы справедлива для этой функции. Подставив сюда $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, по формуле Муавра будем иметь

$$x^m = r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta), \\ x^{m-1} = r^{m-1} [\cos (m-1)\theta + i \sin (m-1)\theta]$$

и т. д., и поэтому

$$F(x) = P + Qi,$$

где

$$P = A_0 r^m \cos m\theta + A_1 r^{m-1} \cos (m-1)\theta + \dots + A_{m-1} r \cos \theta + A_m, \\ Q = A_0 r^m \sin m\theta + A_1 r^{m-1} \sin (m-1)\theta + \dots + A_{m-1} r \sin \theta.$$

Квадрат модуля $F(x)$ равен $P^2 + Q^2$. Чтобы доказать, что $F(x)$ обращается в нуль при некотором значении x , надо показать, что $P^2 + Q^2$ обращается в нуль при некоторых значениях r и θ . Чтобы это показать, рассмотрим функцию $V = \operatorname{arctg} \frac{P}{Q}$. Для этой функции имеем

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q \frac{\partial P}{\partial r} - P \frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2 + Q^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2};$$

составляя при помощи одной из этих формул, по правилу дифференцирования дробей, функцию $\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta}$, сейчас увидим, что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} = \frac{M}{(P^2 + Q^2)^2}, \quad (1)$$

где M — непрерывная функция от r и θ . Это следует из того, что, при составлении производной по θ от $\frac{\partial V}{\partial r}$, в числителе получится целый полином от P и Q и их производных, а все эти функции, — очевидно, непрерывные функции от r и θ , каковы бы ни были значения последних.

Возьмем теперь интегралы

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \left[d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} dr \right] \quad \text{и} \quad J_2 = \int_0^R \left[dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} d\theta \right],$$

где R — произвольное положительное число. Мы увидим сейчас, что число R можно подобрать так, что J_1 не будет равно J_2 . Из этого надо будет заклю-

чить, что $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \theta}$ разрывна для некоторых значений $\rho < R$ и $0 < \theta < 2\pi$, а так как, по формуле (1), видно, что эта функция может быть разрывна только оттого, что $P^2 + Q^2$ может обратиться в нуль, получим, что для некоторого комплексного значения x , $F(x) = P + Qi$ непременно обратится в нуль, в чем и заключается доказываемая теорема. Чтобы показать, что $J_1 \neq J_2$, при некотором R , замечаем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \theta} d\theta = \left[\frac{\partial V}{\partial \rho} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}.$$

Далее, $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ есть периодическая функция от θ с периодом 2π , как видно из выражения

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{Q \frac{\partial P}{\partial \rho} - P \frac{\partial Q}{\partial \rho}}{P^2 + Q^2}$$

и периодичности функций P и Q . Следовательно,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\theta=0} = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\theta=2\pi} \quad \text{и} \quad \text{разность} \quad \left[\frac{\partial V}{\partial \rho} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0.$$

Поэтому и $J_2 = 0$. Рассматривая J_1 , замечаем, что

$$\int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \theta} d\rho = \left[\frac{\partial V}{\partial \theta} \right]_{\rho=0}^{\rho=R},$$

Вычисляем $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ по формуле

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2}.$$

Для нашей цели достаточно выписать только старшие члены относительно ρ ; находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -mA_0 \rho^m \sin m\theta - \dots, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= mA_0 \rho^m \cos m\theta + \dots, \\ Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - P \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= -mA_0^2 \rho^{2m} - \dots, \\ P^2 + Q^2 &= A_0^2 \rho^{2m} + \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-mA_0^2 \rho^{2m} - \dots}{A_0^2 \rho^{2m} + \dots}; \end{aligned}$$

так как невыписанные члены степени ниже $2m$, то, по делении числителя и знаменателя на $A_0^2 \rho^{2m}$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-m - \dots}{1 + \dots},$$

где невыписанные члены содержат одни отрицательные степени ρ , т. е.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = -m.$$

Поэтому можно взять R достаточно большим, чтобы, при $p = R$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{p=R} = -m + \varepsilon,$$

где $\{\varepsilon\}$ -как угодно мало, и, следовательно, $-m + \varepsilon < 0$. С другой стороны, при $p = 0$, $P = A_{nn}$, $Q = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$; следовательно,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{p=0} = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial p \partial \theta} dp = -m + \varepsilon < 0 \quad \text{и} \quad J_1 = \int_0^{2\pi} (-m + \varepsilon) d\theta < 0.$$

Следовательно, $J_1 \neq J_2$, и теорема доказана.

§ 6. Вычисление площадей поверхностей. Положим, что нам дана некоторая поверхность, уравнение которой есть

$$z = f(x, y),$$

и на этой поверхности взята некоторая часть, ограниченная замкнутым контуром. Проектируя все точки этой части на плоскость xy , получим некоторую область D . Разобьем проекцию на бесконечно малые по всем направлениям элементы двумя системами бесконечно близких линий, например, системами прямых, соответственно параллельных координатным осям. На каждом элементе области D построим прямую призму или прямой цилиндр. Боковыми поверхностями этих призм данная часть поверхности также разделится на бесконечно малые элементы. Пусть m есть некоторая точка на области D внутри плоского элемента $d\omega$, а M — соответствующая ей точка на данной поверхности внутри соответствующего элемента $d\sigma$ кривой поверхности. Этот элемент $d\sigma$ рассматривают как плоский элемент, лежащий в касательной плоскости к данной поверхности в точке M , или, иначе говоря, заменяют этот элемент соответствующим ему элементом на касательной плоскости, образуемым пересечением этой плоскости с боковыми поверхностями призмы или цилиндра, построенных на элементе $d\omega$.

Величиной данной части поверхности или площадью этой части называют предел суммы площадей всех таких элементов $d\sigma$, соответствующих всем элементам $d\omega$ области D . Вычисление этого предела приводится к вычислению двойного интеграла, распространенного по области D . Обозначим через ζ угол, образуемый касательной плоскостью в точке M с плоскостью (xy) ; мы будем иметь

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\cos \zeta},$$

потому что $d\omega$ есть проекция элемента $d\sigma$ на плоскость (xy) . Следовательно, по нашему определению, обозначая через S величину

данной части поверхности, будем иметь

$$S = \lim \sum \frac{d\omega}{\cos Z} = \iint_D \frac{dx dy}{\cos Z},$$

где Z — угол касательной плоскости к поверхности в точке (x, y, z) с плоскостью xy .

Припоминая, что $\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, взятые из уравнения поверхности $z = f(x, y)$, получим

$$S = \lim \sum \sqrt{1+p^2+q^2} d\omega = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy. \quad (1)$$

Примечание. Можно видоизменить наше первоначальное определение, опираясь на следующую лемму. *Площадь части S поверхности, точки которой проектируются на некоторую плоскость P раздельно, равна частному от деления площади проекции S на эту плоскость на косинус угла, составленного с P некоторой надлежащим образом выбранной касательной плоскостью к S .*

Для доказательства достаточно применить теорему о среднем значении к двойному интегралу, выражающему площадь S , принимая плоскость P в качестве плоскости xy . Этот интеграл, как мы знаем, распространяется на проекцию D поверхности S на эту площадь; поэтому, обозначая через Z_0 некоторое промежуточное значение угла Z , имеем

$$S = \iint_D \frac{dx dy}{\cos Z} = \frac{D}{\cos Z_0},$$

что и доказывает лемму.

Новое определение площади кривой поверхности. Площадь части S поверхности есть предел суммы проекции всех ее элементов на какие-либо соответствующие им касательные плоскости, когда S разлагается на части, бесконечно убывающие по всем направлениям. В самом деле, пусть σ_i — один из элементов поверхности, α_i — его проекция на одну из соответствующих касательных плоскостей P_i . Применим предыдущую лемму, обозначая через Z_i угол плоскости P_i с некоторой надлежащим образом выбранной касательной к σ_i плоскостью, мы получим

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}, \quad \text{откуда} \quad S = \sum \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}.$$

Углы Z_i образованы двумя плоскостями, касательными к одному и тому же элементу; поэтому они равномерно стремятся к нулю вместе с самими элементами, косинусы же их — к единице. Вследствие этого можно пренебречь этими косинусами, не изменяя тем предела предшествующей суммы, так что получается

$$S = \lim \sum \alpha_i$$

Это новое определение показывает, что площадь зависит лишь от формы поверхности.

Для примера вычислим поверхность шара радиуса R (черт. 45). Уравнение поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ дает

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Восьмая часть поверхности шара, лежащая в угле положительных x , y , z , выражается интегралом

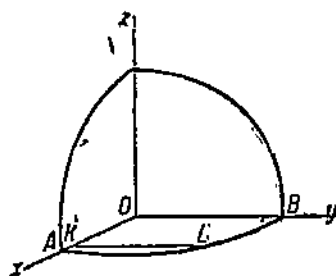
$$\iint \frac{R \, dx \, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

распространенным по области OAB .

Интегрируем сперва по y в пределах от $y=0$ в точке K , до $y=KL = \sqrt{R^2 - x^2}$ в точке L на окружности круга AB , пределы же второго интегрирования по x будут 0 и R . Следовательно, вся поверхность шара

$$\begin{aligned} S &= 8R \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right] dx; \\ &\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

$$S = 8R \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R dx = 4\pi R^2.$$



Черт. 45.

§ 7. Преобразование переменных в двойных интегралах. Как при вычислении простых, так и при вычислении двойных интегралов одним из самых важных средств является преобразование переменных под знаком интеграла. Для вывода формулы преобразования двойного интеграла нужно ввести в рассмотрение одно выражение, играющее для функций от нескольких переменных роль, аналогичную роли производной от функции одной независимой переменной.

Положим, что даны уравнения

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

выражающие x и y через две другие независимые переменные u и v . Выражение

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \text{или} \quad J = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad (2)$$

называется *функциональным определителем* или *якобианом* системы функций (1). Это выражение играет важную роль в вопросе о преобразовании переменных в двойных интегралах. Для большей наглядности мы будем рассматривать числа x и y как декартовы координаты некоторой точки M на плоскости (xy) относительно данной системы осей xOy , а u и v — как декартовы координаты другой точки M_1 относительно той же системы осей. В силу соотношений (1), где функции φ и ψ предполагаются однозначными и непрерывными с таковыми же частными производными 1-го порядка, каждому данному положению точки M_1 соответствует определенное положение точки M . Когда точка M_1 описывает некоторый замкнутый контур (C_1) , точка M опишет соответствующий ему замкнутый контур (C) . Мы предположим, что не только каждой точке (u, v) в области A_1 , ограниченной контуром (C_1) , соответствует определенная точка (x, y) в области A , ограниченной контуром (C) , но и, наоборот, каждой точке области A соответствует одна и только одна точка (u, v) области A_1 . Такие две области A и A_1 мы будем называть *соответствующими по формулам (1)*, и соответствие двух областей, удовлетворяющее вышеуказанному условию, *взаимнооднозначным*. Кроме того, мы предположим, что якобиан J не обращается в нуль в области A_1 , т. е. остается, например, положительным для всех значений u и v в этой области.

Чтобы пояснить сказанное примером, положим

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, \\ y &= u \sin v; \quad (1a) \end{aligned}$$

из этих равенств получим

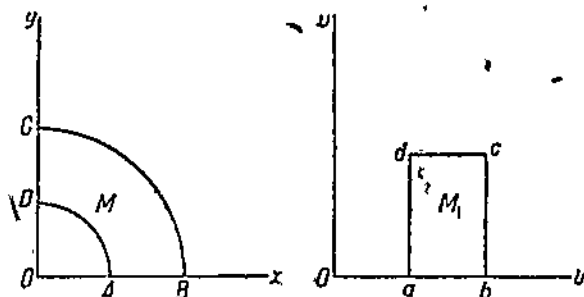
$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ v &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

и добавим еще условия

$$\begin{aligned} u &\geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} &\leq v \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3) \end{aligned}$$

Пусть uOx (черт. 46) изображает систему yOx , перенесенную (для ясности чертежа) в другое место. Положим, что точка (u, v) описывает контур прямоугольника $abcd$, где $Oa = r$, $Ob = R$, $ad = bc = \frac{\pi}{2}$.

Точка (x, y) опишет тогда контур $ABCD$, где $OA = r$, $OB = R$, BC — дуга круга радиуса R , AD — дуга круга радиуса r . В самом деле, на линии ab , $v = 0$, а u изменяется от r до R ; по формулам (1a) находим тогда $y = 0$, $x = u$, следовательно, x изменяется от r до R и точка (x, y) описывает отрезок AB на оси x -ов. На



Черт. 46.

линии bc координата $u = R$, а v изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$x = R \cos v, \quad y = R \sin v, \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

следовательно, точка (x, y) описывает дугу круга BC . На линии cd $v = \frac{\pi}{2}$, а u изменяется от R до r ; поэтому $x = 0$, $y = u$, точка (x, y) описывает отрезок CD . Наконец, на линии da координата $u = r$, v изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, $x = r \cos v$, $y = r \sin v$, и точка (x, y) описывает дугу круга DA . Области $ABCD$ и $abcd$ соответствуют одна другой по формулам (1а), потому что каждой точке $M(x, y)$ внутри контура $ABCD$ соответствует одна и только одна точка $M_1(u, v)$ внутри контура $abcd$, если выполнены условия (3); в самом деле, когда M лежит внутри контура $ABCD$, то

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{x^2 + y^2} = u > r \quad \text{и} \quad < R, \\ \angle XOM &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = v > 0 \quad \text{и} \quad < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

следовательно, точка $M_1(u, v)$, соответствующая M , лежит внутри $abcd$. Якобиан

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = u [\cos^2 v + \sin^2 v] = u$$

остается положительным в области $abcd$.

После предварительных замечаний можем поставить вопрос о преобразовании двойного интеграла к новым переменным, состоящий в следующем.

Дан интеграл

$$\int\int_{(A)} f(x, y) dx dy,$$

распространенный по некоторой области A . Спрашивается, какому интегралу, распространенному по области A_1 , соответствующей A по формулам

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

равен данный интеграл?

Ответом на этот вопрос служит следующая формула:

$$\int\int_{(A)} f(x, y) dx dy = \int\int_{(A_1)} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J| du dv, \quad (4)$$

где $|J|$ есть абсолютное значение якобиана системы (1).

Приступая к доказательству формулы (4), припомним сперва процесс преобразования переменной в простом интеграле. Когда преобразовывается интеграл

$$\int_{u_1}^{\Gamma} F(y) dy$$

введением новой переменной, по формуле $y = \phi(v)$, причем предполагается, что $\phi'(v)$ не меняет знака, когда v изменяется от v_0 до V , при изменении y от y_0 до Y , то получается формула

$$\int_{y_0}^Y F(y) dy = \int_{v_0}^V F[\phi(v)] \phi'(v) dv. \quad (5)$$

Если при возрастании y от y_0 до Y переменная v также постоянно возрастает от v_0 до V , то $\phi'(v) > 0$, и числа dy и dv оба больше нуля; если же при возрастании y от y_0 до Y переменная v постоянно убывает от v_0 до V (так что $v_0 > V$), то $\phi'(v) < 0$, $dy > 0$ и $dv < 0$. Во втором случае формулу (5) можно переписать так:

$$\int_{y_0}^Y F(y) dy = \int_V^{v_0} F[\phi(v)] [-\phi'(v)] dv;$$

тогда и в этой формуле dy и $dv > 0$, $[-\phi'(v)] > 0$. В первом случае $|\phi'(v)| = \phi'(v)$, во втором $|\phi'(v)| = -\phi'(v)$, и в обоих случаях, *подразумевая пределы интеграла*, можем писать формулу преобразования так:

$$\int F(y) dy = \int F[\phi(v)] |\phi'(v)| dv, \quad (5')$$

где $|\phi'(v)|$ обозначает абсолютное значение $\phi'(v)$, а числа dy и $dv > 0$. В таком виде формула преобразования простого интеграла и прилагается при выводе формулы (4) преобразования двойного интеграла.

Переход от точки $M(x, y)$ в области A к соответствующей точке $M_1(u, v)$ в области A_1 , т. е. вычисление u и v по данным x и y из уравнений

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

можно произвести разными способами. Для определенности положим, что это вычисление производится следующим образом. Из уравнения

$$x = \varphi(u, v)$$

выражаем u через x и v и полученное выражение подставляем во второе уравнение системы (1); тогда y представится в виде функции от x и v :

$$y = F(x, v). \quad (6)$$

Отсюда, по данным x и y , определяем v , а определив v , находим u из уравнения

$$x = \varphi(u, v). \quad (1')$$

Сравнивая два выражения y , находим

$$F(x, v) = \psi(u, v), \quad (7)$$

уравнение, которое обращается в тождество, если во второй части его мы будем подразумевать под u функцию от x и v , определяемую уравнением (1').

Описанный выше процесс перехода от точки $M(x, y)$ к точке $M_1(u, v)$ можно рассматривать как результат двух последовательных преобразований, а именно, преобразования I, с помощью которого от точки $M(x, y)$ сперва переходим к точке $M'(x, v)$, имеющей с M общую абсциссу x , а ординату v , вычисляемую, по данному y , из уравнения

$$y = F(x, v),$$

и преобразования II, с помощью которого от точки $M'(x, v)$ переходим к точке $M_1(u, v)$, имеющей с M' общую ординату v , а абсциссу u , вычисляемую, по данному x , из уравнения

$$x = \varphi(u, v).$$

Каждой точке M области A соответствует определенная точка M' промежуточной области A' и каждой точке M' последней — определенная точка M_1 области A_1 . Мы предположим, что соответствие между областями A' и каждой из областей A и A_1 однозначно и обратимо так же, как соответствие между двумя последними.

Описанные два последовательные преобразования I и II мы и применим к преобразованию двойного интеграла

$$V = \int\limits_{(A)} f(x, y) dx dy,$$

которое распадается таким образом на два последовательных преобразования простых интегралов. Полагая, что при вычислении V первое интегрирование производится по y , при x постоянном, напишем V следующим образом:

$$V = \int dx \int f(x, y) dy.$$

(Пределы интегрирований не обозначаем, потому что они различны при разных формах контура (C) .) Преобразуем простой интеграл

$$\int f(x, y) dy,$$

при x постоянном, с помощью уравнения $y = F(x, v)$, и находим

$$\int f(x, y) dy = \int f[x, F(x, v)] \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| dv.$$

($\frac{\partial F}{\partial v}$ не меняет знака в пределах интегрирования, если соответствие между областями A и A' обратимо, как было предположено.)

Следовательно,

$$V = \int dx \int f[x, F(x, v)] \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| dv = \int\limits_{(A_1)} \Phi(x, v) dx dv,$$

где

$$\Phi(x, v) = f[x, F(x, v)] \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right|. \quad (8)$$

Далее замечаем, что при вычислении интеграла, распространенного по области A' , можем первое интегрирование вести по x и писать

$$V = \int dv \int \Phi(x, v) dx.$$

Преобразуем теперь нижеследующий простой интеграл

$$\int \Phi(x, v) dx;$$

при v постоянном, с помощью $x = \varphi(u, v)$, находим

$$\begin{aligned} \int \Phi(x, v) dx &= \int \Phi[\varphi(u, v), v] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| du, \\ V &= \int dv \int \Phi[\varphi(u, v), v] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| du = \int \int_{(A)} \Phi[\varphi(u, v), v] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| du dv. \end{aligned} \quad (4')$$

Подставив вместо функции Φ ее выражение (8) и замечая, что $F(x, v)$, при замене x на $\varphi(u, v)$, обращается в $\psi(u, v)$, находим

$$V = \int \int_{(A)} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| du dv,$$

где в выражении функции $\frac{\partial F}{\partial v}$ или $F'_v(x, v)$ надо также заменить x через $\varphi(u, v)$. Остается показать, что

$$\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = J,$$

и формула (4) будет доказана. С этой целью берем тождество

$$F(x, v) = \psi(u, v), \quad (7)$$

где u — функция от x и v , определяемая уравнением

$$x = \varphi(u, v), \quad (1')$$

и, взяв производную по v , при x постоянном, от обеих частей (7), находим

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v},$$

а из (1'), при x постоянном, имеем

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial u}{\partial v} = - \frac{\partial \varphi / \partial v}{\partial \varphi / \partial u};$$

следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = J,$$

что и требовалось доказать.

Пределы интегрирований по u и по v в преобразованном интеграле (4') определяются по контуру (C_1) , ограничивающему область A_1 , соответствующую данной A . Мы увидим из дальнейшего, что вычерчивание контура (C_1) в большинстве случаев оказывается ненужным, так как пределы интегрирований по новым переменным могут быть найдены непосредственно, когда известна область A , на которую распространяется интегрирование по старым переменным x и y .

Примечание. При выводе нашей формулы мы считали, во-первых, что якобиан J не обращается в нуль в области A_1 , и во-вторых, что соответствие между областями A и A_1 взаимнооднозначное. Однако можно освободиться от этого второго предположения, т. е. наша формула (4) остается справедливой при условии, что J не обращается в нуль в области A_1 . В самом деле, при этой последней гипотезе, можно области A и A_1 разбить на конечное число частей так, чтобы соответствующие части областей A и A_1 отображались друг на друга взаимно однозначно. (См. „Курс дифференц. исч.“ ч. II, гл. I, § 9). Тогда, применяя доказанную формулу для каждой соответствующей пары частей и складывая все эти формулы, мы в результате снова получим формулу (4).

Для примера найдем преобразование интеграла

$$\iint_{(A)} f(x, y) dx dy,$$

распространенного по кругу радиуса R , с центром в начале координат, если переменные x и y связаны с новыми u и v уравнениями

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v,$$

при условиях $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$. По формуле (4) мы будем иметь, приняв во внимание, что в нашем примере $J = u$:

$$\iint_{(A)} f(x, y) dx dy = \iint_{(A_1)} f(u \cos v, u \sin v) u du dv.$$

Вместо того чтобы определять контур (C_1) области A_1 , соответствующей данной области A , замечаем, что числа u и v , которые мы до сих пор рассматривали как декартовы координаты точки M_1 , соответствующей точке $M(x, y)$ по формулам (1), можно в данном примере рассматривать как *полярные координаты самой точки M* , если полюс находится в начале координат и угол v отсчитывается от оси x -ов. Тогда делается очевидным, что если интегрирование по x и по y было распространено по кругу радиуса R , с центром в начале координат, то интегрирования по u и по v надо вести от $u = 0$ до $u = R$ и от $v = 0$ до $v = 2\pi$ в каком угодно порядке.

Поэтому в нашем примере формула преобразования интеграла будет

$$\iint_{(A)} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} dv \int_0^R f(u \cos v, u \sin v) u du.$$

Не мешает заметить, что пределы интегрирования по новым переменным — числа постоянные, тогда как пределы одного из интегрирований по старым переменным — числа переменные, так как, очевидно,

$$\iint_{(A)} f(x, y) dx dy = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-V\sqrt{R^2-x^2}}^{+V\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy$$

при данной в нашем примере форме контура (C) области A.

Из формулы (4) вытекает, как следствие, при $f(x, y) = 1$, формула

$$\iint_{(A)} dx dy = \iint_{(A_1)} |J| du dv.$$

Если обозначим через m и M наименьшее и наибольшее значение $|J|$ в области A_1 , то предыдущую формулу можно написать так:

$$\iint_{(A)} dx dy = |J_1| \iint_{(A_1)} du dv, \quad (9)$$

где $m < |J_1| < M$ и, в случае непрерывности функции $|J_1|$, может быть рассматриваемо как абсолютное значение якобиана J в некоторой точке (u_1, v_1) области A_1 . Интеграл в левой части формулы изображает сумму площадей всех элементов области A, т. е. число A; точно так же интеграл правой части есть A_1 — площадь области A_1 ; поэтому формулу (9) можно писать следующим способом:

$$A = |J_1| A_1.$$

Итак, если области A соответствует по формулам

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (1)$$

некоторая область A_1 , то отношение между площадями этих областей удовлетворяет равенству

$$\frac{A}{A_1} = |J_1|,$$

где J_1 есть значение якобиана системы (1) в некоторой точке (u_1, v_1) области A_1 .

Предполагая, в частности, области A и A_1 бесконечно убывающими во всех направлениях и стягивающимися соответственно к точкам

(x, y) и (u, v) , мы получим:

$$\lim \frac{A}{A_1} = |J(u, v)|,$$

т. е. абсолютное значение якобиана в какой-либо точке (u, v) равно пределу отношения площади отображенной области к площади первоначальной области, когда эта последняя стягивается к данной точке (u, v) .

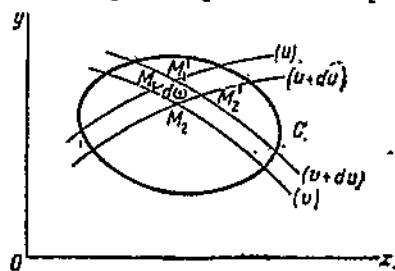
§ 8. Геометрическое истолкование формулы преобразования двойного интеграла (черт. 47). Мы приведем геометрическое истолкование формулы преобразования двойного интеграла, весьма наглядное и простое, которое, однако, нельзя рассматривать как строгое доказательство этой формулы.

Положим, что дан интеграл

$$V = \iint_{(A)} f(x, y) \, d\omega$$

и что декартовы координаты точки $M(x, y)$ выражены как функции от новых переменных u и v формулами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$



Черт. 47.

устанавливающими взаимно однозначное соответствие между точками областей A и A_1 . Вместо того чтобы рассматривать u и v как декартовы координаты другой точки M_1 относительно тех же осей Ox, Oy , будем рассматривать u и v как *криволинейные координаты той же точки M на плоскости yOx* , как мы это сделали в рассмотренном выше примере, где u и v обозначали полярные координаты точки M . Во всякой криволинейной системе координат положение каждой точки M на плоскости определяется пересечением двух линий, получаемых следующим образом. Если в уравнениях (1) дадим числу u некоторое постоянное значение, то уравнения (1) изобразят параметрически некоторую плоскую кривую, различные точки которой соответствуют различным значениям переменного параметра v ; точно так же, при постоянном значении v уравнения (1) изобразят некоторую плоскую кривую, различные точки которой соответствуют различным значениям параметра u . Постоянные значения u и v во втором случае можно назначить по произволу. Изменяя эти постоянные, мы получим два семейства кривых: 1) семейство линий (u) или $u = \text{const}$ и 2) семейство линий (v) или $v = \text{const}$. При наших предположениях относительно соответствия между областями переменных x, y и переменных u, v через каждую точку M пройдет одна, и только одна, линия каждого из семейств (u) и (v) , и положение точки M определится пересечением этих двух линий. Фор-

мулы (1) будут формулы преобразования координат для перехода от декартовых координат к криволинейным и обратно. Двум бесконечно близким значениям параметра u , например u и $u + du$, соответствуют две бесконечно близкие кривые семейства (u) . Эти две линии и две линии семейства (v) , соответствующие двум бесконечно близким значениям v и $v + dv$, причем du и dv считаются *положительными* бесконечно малыми числами, образуют бесконечно малый четырехугольник $M_1 M_2 M'_2 M'_1$; всю область A можно себе представить разбитой на такие четырехугольники линиями (u) и (v) . (В декартовой системе координат эти линии будут линии: $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, т. е. прямые, параллельные осям координат.)

При вычислении двойного интеграла V мы и будем под $d\omega$ понимать площадь четырехугольника $M_1 M_2 M'_2 M'_1$. Криволинейные координаты его вершин будут

$$M_1(u, v), \quad M_2(u + du, v), \quad M'_1(u, v + dv), \quad M'_2(u + du, v + dv),$$

а соответственные им декартовы

$$M_1(x, y), \quad M_2(x_1, y_1), \quad M'_1(x_2, y_2), \quad M'_2(x_3, y_3)$$

вычисляться по формулам (1). Если при этом вычислении ограничимся бесконечно малыми 1-го порядка относительно du и dv , то найдем, обозначив для краткости буквами φ и ψ функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$:

$$\left. \begin{aligned} (x = \varphi, & \quad y = \psi), \\ (x_1 = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du, & \quad y_1 = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} du), \\ (x_2 = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, & \quad y_2 = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv), \\ (x_3 = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, & \quad y_3 = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Рассматривая эти выражения, находим

$$x_1 - x = x_3 - x_2, \quad y_1 - y = y_3 - y_2,$$

откуда следует, что точки, декартовы координаты которых выражаются формулами (2), будут вершинами параллелограмма; следовательно, сделанное нами отбрасывание бесконечно малых высшего порядка относительно du и dv равносильно замене криволинейного четырехугольника $M_1 M_2 M'_2 M'_1$ параллелограмом, координаты вершин которого определяются формулами (2). Эту же замену мы сделаем и при вычислении площади элемента $M_1 M_2 M'_2 M'_1$, т. е. положим $d\omega$ равным площади параллелограмма (2). Тогда, по известной формуле

аналитической геометрии, найдем

$$\begin{aligned} d\omega &= 2 \text{ пл. } \triangle M'_1 M_1 M_2 = |(x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y)| = \\ &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| du dv = |J| du dv. \end{aligned} \quad (3)$$

Это выражение называют *элементом площади в системе криволинейных координат* (u, v) . Умножая каждый элемент $d\omega$ на значение функции

$$f(x, y) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

в любой точке (u, v) этого элемента и взяв предел суммы полученных произведений, находим:

$$\begin{aligned} V &= \iint f(x, y) d\omega = \\ &= \iint f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J| du dv. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, интеграл V , распространенный по области A , который мы писали в виде

$$V = \iint_A f(x, y) dx dy,$$

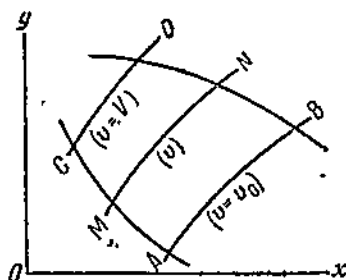
сообразно прежней форме элемента площади, в декартовых координатах изображается в виде (4), сообразно новой форме элемента, в криволинейных координатах. Таким образом снова получается формула (4) § 7.

В преобразованном интеграле интегрирования надо распространить на совокупность всех значений криволинейных координат u и v , соответствующих точкам данной области A . Чтобы показать, как определяются порядок и пределы интегрирований по данному контуру области A , положим сперва, что этот контур C состоит из двух линий одного из семейств (u) или (v) , например линии AB , на которой $v = v_0$, и CD , на которой $v = V > v_0$, и из двух линий, уравнения которых в криволинейных координатах будут

$$(AC) \quad u = \theta_1(v), \quad (BD) \quad u = \theta_2(v) > \theta_1(v),$$

где $\theta_1(v)$ и $\theta_2(v)$ — однозначные непрерывные функции от v (черт. 48). Интегрируем сперва по u , при постоянном v , лежащем между v_0 и V , в пределах от $u = \theta_1(v)$ до $u = \theta_2(v)$; результат этого интегрирования даст сумму элементов интеграла, соответствующих всем точкам отрезка MN , на котором v равно выбранной постоянной; этот результат интегрируем затем по v , в пределах от v_0 до V , получаем сумму всех элементов интеграла, распространенного по данной области, т. е. искомую его величину.

При другой форме контура C разбиваем площадь A на части, ограниченные указанным способом, и, распространив интегрирование на каждую отдельную часть, берем сумму полученных интегралов; она и даст интеграл, распространенный на данную область A .



Черт. 48.

§ 9. Приложение общей формулы преобразования переменных в двойном интеграле к частным случаям. Элементы поверхности в криволинейных координатах.

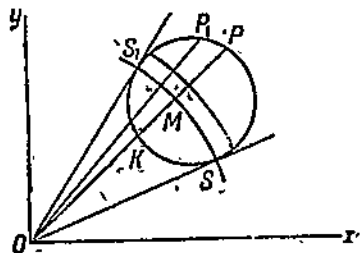
1. Мы уже имели в § 7 формулу преобразования двойного интеграла при переходе от декартовых координат точки $M(x, y)$ к полярным ее координатам. Обозначая последние, как обыкновенно, буквами ρ и θ , имеем

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (1)$$

и

$$V = \iint f(x, y) dx dy = \iint f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta, \quad (2)$$

потому что якобиан $J = \rho$ и элемент площади в полярных координатах $d\omega = \rho d\rho d\theta$. Линии $\rho = \text{const}$ будут окружности кругов с центром в полюсе, линии $\theta = \text{const}$ — лучи, которые проходят через полюс (см. черт. 49).



Черт. 49.

Вычисление двойного интеграла (2) и объема, им изображаемого, можно вести следующим образом. Мы предположим, что контур данной области пересекается прямой, проведенной из точки O , только в двух точках (если бы это условие не было соблюдено, то мы бы разбили область на несколько частей, удовлетворяющих этому условию, и распространили суммирование на каждую часть

отдельно). Положим сперва, что точка O находится вне контура. Обозначая длину OK через ρ_0 , а OP через ρ_1 и $z = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, берем сумму всех элементов, для которых θ и $d\theta$ постоянны; ре-

зультат будет равен $d\theta \int_{\rho_0}^{\rho_1} z \rho d\rho$ и выразит объем слоя, заключенного между двумя плоскостями, соответствующими значениям

$$\theta = \angle POx, \quad \theta + d\theta = \angle P_1Ox.$$

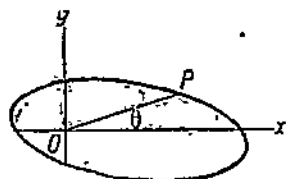
Берем затем сумму объемов всех таких слоев, соответствующих всем значениям θ от $\theta = \theta_0$ до $\theta = \theta_1$, где θ_0 и θ_1 — наименьшее и наибольшее из всех значений θ для точек данного контура. Результат этого второго суммирования и даст объем

$$V = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{\rho_0}^{\rho_1} z \rho d\rho.$$

Пределы первого интегрирования по ρ , т. е. величины ρ_0 и ρ_1 , всегда могут быть найдены по данному уравнению контура и будут, вообще

говоря, функции от θ . Пределы второго интегрирования по θ , т. е. θ_0 и θ_1 , будут *постоянные*, которые определятся как углы, соответствующие радиусам OS и OS_1 , касательным к данной кривой. Если бы точка O лежала внутри контура (черт. 50), то первое интегрирование по ρ , очевидно, надо вести от $\rho=0$ до $\rho=OP=R$, где R выражается как функция от θ из уравнения контура, а второе интегрирование по θ от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$, и

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho r d\rho.$$



Черт. 50.

Для примера рассмотрим следующий вопрос. Дан шар радиуса a ; пусть ABA_1B_1 (черт. 51) есть сечение его поверхности плоскостью (xy) , а круги $ODAE$ и $OD_1A_1E_1$, радиуса $\frac{a}{2}$, с центрами C и C_1 на прямой AA_1 — сечения плоскости (xy) с поверхностями двух прямых цилиндров неопределенной длины, перпендикулярных к плоскости (xy) . Требуется вычислить ту часть объема шара, которая вырезывается этими двумя цилиндрами. Искомая часть, очевидно, равна учетверенному объему тела, ограниченного поверхностью шара

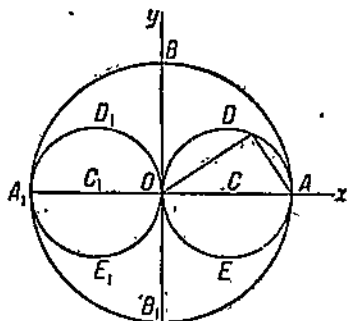
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

поверхностью одного из цилиндров, например, построенного на основании $ODAE$, и плоскостью (xy) . Обозначая объем искомой части через V , получим, следовательно,

$$V = 4 \iint z dx dy,$$

т. е. интегралу, распространенному по области $ODAE$, или

$$V = 8 \iint z dx dy,$$



Черт. 51.

где интегрирование распространено по области ODA , являющейся половиной круга $ODAE$. Введя полярные координаты точки M на плоскости (xy) , вместо прямоугольных, получим

$$V = 8 \iint \rho r d\rho d\theta, \quad \text{где } z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2}.$$

Интегрируя сперва по ρ , считая θ постоянным, найдем для пределов этого интегрирования значения $\rho=0$ и $\rho=OD=a \cos \theta$. Второе интегрирование по θ надо произвести в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$; сле-

довательно,

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \right) d\theta;$$

$$\int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho \, d\rho = \left[-\frac{1}{3} (a^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^{a \cos \theta} = +\frac{1}{3} [a^3 - a^3 \sin^3 \theta] =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 (1 - \sin^3 \theta),$$

откуда

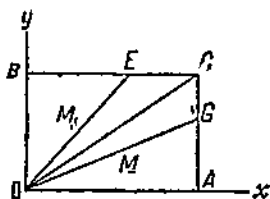
$$V = \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{8}{3} a^3 \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \right\};$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[-\sin^2 \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2} +$$

$$+ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[-\frac{2}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3};$$

следовательно,

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{16}{9} a^3.$$



Черт. 52.

Отсюда видим, что избыток объема всего шара над той частью, которая заключается внутри цилиндров, равен $\frac{16}{9} a^3 = \frac{2}{9}$ объема куба, ребро которого равно диаметру шара $2a$.

Для второго примера преобразуем

$$V = \iint f(x, y) \, dx \, dy,$$

распространенный по прямоугольнику $OACB$, в котором $OA = a$, $OB = b$. По общей формуле имеем

$$V = \int_0^b dy \int_0^a f(x, y) \, dx = \iint f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta, \quad (2')$$

где во второй части нужно распространить интегрирование на все значения ρ и θ , соответствующие точкам, лежащим внутри области $OACB$ (черт. 52). Проведя диагональ OC , распространим интегрирование сперва по области OAC , потом по области OCB и результаты сложим. Для точки M , лежащей внутри OAC , при θ постоянном ρ изменяется от 0 до OG , где $OG = \frac{a}{\cos \theta}$, а угол θ прини-

мает все значения от 0 (на OA) до $\theta = \angle AOC = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. Следовательно, интеграл, распространенный по области OAC , изобразится формулой

$$V_1 = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta. \quad (3)$$

Для точки M_1 , лежащей в треугольнике OCB , при θ постоянном ρ изменяется от 0 до $OE = \frac{b}{\sin \theta}$, а θ принимает все значения от $\theta = \angle AOC = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ (на линии OC) до $\theta = \frac{\pi}{2}$ (на OB). Следовательно, интеграл, распространенный по области OCB , будет

$$V_2 = \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{b}{\sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta$$

и

$$V = V_1 + V_2.$$

Предлагаем проверить этот результат, взяв $f(x, y) = 1$, когда V , очевидно, должно быть равно ab , т. е. площади $OACB$.

II. Рассмотрим еще следующее преобразование интеграла

$$V = \iint f(x, y) dx dy,$$

распространенного по той же области $OACB$, вводя новые переменные u и v , по формулам $y = uv$, $y + x = u$, дающим $u = y + x$, $v = \frac{1}{1 + \frac{x}{y}}$.

Написав эти формулы в виде $x = u - uv$, $y = uv$, находим

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

Следовательно,

$$V = \iint f(x, y) dx dy = \iint f(u - uv, uv) u du dv.$$

Линии $v = \text{const}$, т. е. $\frac{x}{y} = \text{const}$, будут прямые, проходящие через O . Разбиваем область $OACB$ на две, OAC и OCB . Для границ области OAC имеем уравнения в новых переменных u и v следующего вида:

$$\text{для } OA, v = 0; \text{ для } OC, v = \frac{b}{b+a}; \text{ для } AC, u = \frac{a}{1-v},$$

потому что уравнения OA , OC и AC в переменных x и y будут

$$y=0, \quad y=\frac{b}{a}x, \quad x=a.$$

Проведя прямую OG , на которой $v=\text{const}$, интегрируем сперва по u от $u=0$, в точке O , до $u=\frac{a}{1-v}$ в точке G , а потом по v , от $v=0$, на OA , до $v=\frac{b}{b+a}$, на OC . Следовательно,

$$\iint_{(OAG)} f u \, du \, dv = \int_0^{\frac{b}{b+a}} \left[\int_0^{\frac{a}{1-v}} f u \, du \right] dv = V_1.$$

Точно так же найдем интеграл, распространенный по области OCB :

$$\iint_{(OCB)} f u \, du \, dv = \int_{\frac{b}{b+a}}^1 \left[\int_0^{\frac{b/v}{b+a}} f u \, du \right] dv = V_2$$

и

$$V_1 + V_2 = V.$$

III. Приложим теперь общую формулу к преобразованию интеграла

$$S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \quad (4)$$

изображающему величину некоторой части поверхности

$$F(x, y, z) = 0. \quad (5)$$

Здесь $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, и интегрирование распространено по области A , изображающей проекцию данной части поверхности на плоскость (xy) .

Положим, что координаты x, y, z точки поверхности (5) выражены функциями от двух независимых переменных

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \quad (6)$$

и преобразуем интеграл (4) к новым переменным u и v . Для этого надо 1) выразить $\sqrt{1+p^2+q^2}$ в переменных u и v и 2) заменить $dx \, dy$ на $|J| \, du \, dv$, где

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Чтобы найти выражение $\sqrt{1+p^2+q^2}$ в переменных u и v , замечаем сперва, что, согласно уравнению (5), имеем

$$F'_x + F'_y p = 0, \quad F'_y + F'_z q = 0,$$

где F'_x, F'_y, F'_z — частные производные от $F(x, y, z)$, взятые по x , по y и по z ; отсюда

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad \text{и}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|}. \quad (7)$$

Далее, если в уравнение (5) подставим вместо x, y, z их выражения (6), то уравнение это обратится в тождество. Дифференцируя его по u и по v , найдем

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial u} + F'_y \frac{\partial y}{\partial u} + F'_z \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad F'_x \frac{\partial x}{\partial v} + F'_y \frac{\partial y}{\partial v} + F'_z \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Из последних равенств сразу вытекает следующее соотношение:

$$\frac{F'_x}{A} = \frac{F'_y}{B} = \frac{F'_z}{C},$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \\ B &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ C &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = J. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

По формуле (7) находим

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|J|},$$

и преобразованное выражение S будет

$$S = \iint \sqrt{A^2+B^2+C^2} du dv, \quad (9)$$

где интегрирование надо распространить на совокупность значений u и v , соответствующих всем точкам данной части поверхности. Полученное выражение можно представить в другом виде, который весьма важно заметить. Обозначим буквами E, F, G следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Тогда будем иметь

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2. \quad (11)$$

Формула (11) прямо вытекает из тождества

$$(a^2 + a_1^2 + a_2^2)(b^2 + b_1^2 + b_2^2) - (ab + a_1b_1 + a_2b_2)^2 = \\ = (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_2b - b_2a)^2 + (ab_1 - ba_1)^2,$$

если в нем положим $a = \frac{\partial x}{\partial u}$, $a_1 = \frac{\partial y}{\partial u}$, $a_2 = \frac{\partial z}{\partial u}$, $b = \frac{\partial x}{\partial v}$ и т. д.

Поэтому можно написать

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (12)$$

Полученный результат можно интерпретировать геометрически. Если в уравнениях (6) будем по очереди рассматривать u и v как числа постоянные, то получим два семейства кривых (u) и (v) на данной поверхности, аналогично тому, как было объяснено в § 8 для плоскости. Положение каждой точки M на поверхности определится как пересечение двух линий первой и второй систем, соответствующих данным значениям $u = u_0$, $v = v_0$. Поэтому u и v называют *криволинейными координатами точки на данной поверхности*. Вся поверхность можно себе представить покрытой сетью, состоящей из бесконечно близких линий систем (u) и (v) , разбивающей данную часть поверхности на бесконечно малые элементы. Рассмотрим на данной поверхности бесконечно малый четырехугольник $M_1M_2M'_2M'_1$, аналогичный плоскому четырехугольнику на черт. 47, образуемый двумя линиями системы (u) , соответствующими значениями u и $u + du$ первого параметра, и двумя линиями системы (v) , соответствующими значениям v и $v + dv$ второго параметра, причем du и dv считаем положительными бесконечно малыми. Декартовы координаты его вершин вычисляются по криволинейным их координатам с помощью формул (6). Если в этих вычислениях ограничимся бесконечно малыми 1-го порядка относительно du и dv , то найдем, понимая под u и v значения, соответствующие точке M_1 , для вершин четырехугольника

$$\left. \begin{aligned} (M_1) \quad & x = \varphi(u, v), \\ (M_2) \quad & x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial u} du, \\ (M'_1) \quad & x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ (M'_2) \quad & x_3 = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и подобные же формулы для других двух координат y и z . Из этих формул видно, что

$$x_1 - x = x_3 - x_2, \quad y_1 - y = y_3 - y_2, \quad z_1 - z = z_3 - z_2,$$

откуда следует, что точки (x, y, z) , (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) будут вершинами *плоского параллелограмма*. Сделанное нами отбрасывание бесконечно малых высшего порядка равносильно замене криволинейного элемента $M_1 M_2 M'_2 M'_1$ этим плоским параллелограммом. Площадь этого параллелограмма и называют *элементом поверхности* в криволинейных координатах; эта площадь выразится формулой

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (14)$$

где E, F, G имеют вышенаписанные значения (10), как сейчас будет показано. Формула же (12) показывает, что точное значение величины известной части поверхности равно пределу суммы элементов (14), распространенной на значения u и v , соответствующие всем точкам данной части поверхности.

Для доказательства формулы (14) заметим сперва, что квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками $M_1(u, v)$ и $M'_2(u + du, v + dv)$ на данной поверхности (если отбросим бесконечно малые высшего порядка) выразится формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

в прямоугольных координатах.

В силу выражений

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

это выражение приведет к

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (15)$$

Это выражение называют *квадратом линейного элемента поверхности*. Площадь $d\sigma$ параллелограмма $M'_1 M_1 M_2 M'_2$ равна, как известно, произведению его сторон $M_1 M'_1 \times M_1 M_2$, умноженному на синус угла Ω между ними. Обозначая длины сторон $M_1 M'_1$ и $M_1 M_2$ соответственно через ds_1 и ds_2 , мы находим ds_1 из формулы (15) при $dv = 0$, а ds_2 — при $du = 0$ и получаем

$$ds_1 = \sqrt{E} du, \quad ds_2 = \sqrt{G} dv, \quad d\sigma = \sqrt{EG} \sin \Omega du dv.$$

Для вычисления $\sin \Omega$, т. е. синуса угла между направлениями $M_1 M'_1$ и $M_1 M_2$, замечаем, что

$$\cos \Omega = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2,$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — углы направления $M_1 M'_1$ с осями прямоугольной системы координат, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — углы направления $M_1 M_2$ с теми же

осями, а по формулам (13) имеем

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1 - x}{ds} = \frac{\partial x / \partial u}{\sqrt{E}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{x_2 - x}{ds_2} = \frac{\partial x / \partial v}{\sqrt{G}}$$

и т. д., откуда

$$\cos \Omega = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (16)$$

и

$$\sin \Omega = \sqrt{1 - \cos^2 \Omega} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Следовательно,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

что и требовалось доказать.

Система координат (u, v) называется *ортогональной*, если линии (u) с линиями (v) пересекаются под прямым углом, т. е. когда угол $\Omega = \frac{\pi}{2}$; тогда $\cos \Omega = 0$; по формуле (16) находим, что условие ортогональности системы есть

$$F = 0.$$

Квадрат *линейного* элемента поверхности в ортогональных координатах изображается, следовательно, формулой

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

а *поверхностный элемент* формулой

$$d\sigma = \sqrt{EG} du dv.$$

Примеры

1. Найдём выражение элемента сферической поверхности в *сферических* координатах (черт. 53). Сферическими координатами точки M на сфере называют угол $MOz = \varphi$, образуемый радиусом OM с неподвижной прямой Oz , и угол $AOB = \psi$, образуемый плоскостью zOM с неподвижной плоскостью zOx . Если проведем Oy

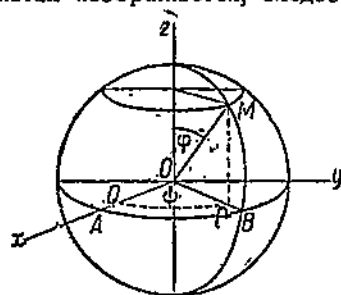
перпендикулярно к плоскости zOx , то декартовы координаты точки M выражаются через сферические формулами

$$x = OQ = OP \cos \psi = OM \sin \varphi \cos \psi = R \sin \varphi \cos \psi,$$

$$y = QP = R \sin \varphi \sin \psi,$$

$$z = MP = R \cos \varphi,$$

где R — радиус сферы. Линии $\psi = \text{const}$ будут меридианы, а линии $\varphi = \text{const}$ — параллели поверхности; ψ — долгота точки M , а φ — дополнение



Черт. 53.

широты до 90° . Составляем выражения

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = R^2 \sin^2 \varphi,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0,$$

откуда заключаем, что система координат (φ, ψ) ортогональна, что, впрочем, можно было предвидеть, так как меридианы и параллели пересекаются под прямым углом. Квадрат линейного элемента

$$ds^2 = E d\varphi^2 + G d\psi^2 = R^2 \{d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\psi^2\}.$$

Поверхностный элемент или элемент поверхности

$$d\sigma = \sqrt{EG} d\varphi d\psi = R^2 \sin \varphi d\varphi d\psi.$$

Чтобы получить все точки сферы, надо φ изменять от 0 до π , ψ от 0 до 2π . Поверхность всей сферы

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\psi = 4\pi R^2.$$

2. Задача Вивинани. На радиусе сферы $OA = R$ построена, как на диаметре, окружность; на этой окружности, как на основании, — прямой цилиндр; требуется вычислить ту часть поверхности сферы, которая заключается внутри этого цилиндра.

На черт. 54 O — центр сферы. AB , AC , BC — пересечения поверхности сферы с координатными плоскостями; ось z -ов параллельна образующим цилиндра, кривая AFC есть пересечение поверхности цилиндра с поверхностью сферы. Искомая часть поверхности, очевидно, состоит из четырех равных между собой частей, из коих одна начерчена на чертеже и ограничена дугами AC и AFC . Проекция этой части на плоскости XOY есть полукруг ODA , половина основания цилиндра. Следовательно, искомая часть поверхности выражается интегралом

$$S = 4 \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

распространенным по области OAD . Из уравнения поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

находим

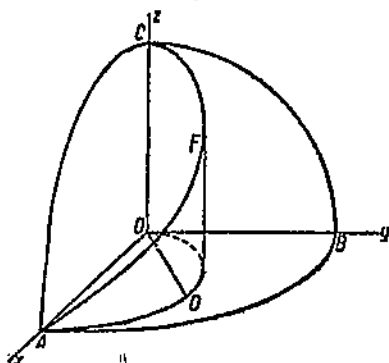
$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}, \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

преобразовывая интеграл к полярным координатам, по формулам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

находим

$$S = 4 \iint_{(OAD)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta.$$



Черт. 54.

Пределы интегрирования по ρ будут 0 и $R \cos \theta$, по θ будут 0 и $\frac{\pi}{2}$, как было уже объяснено в задаче на стр. 379; поэтому

$$S = 4R \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \theta) d\theta,$$

так как

$$\int_0^{R \cos \theta} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R \cos \theta} = R(1 - \sin \theta).$$

После этого окончательно находим площадь искомой поверхности:

$$S = 4R^2 [\theta + \cos \theta]_0^{\pi/2} = 4R^2 \left\{ \frac{\pi}{2} - 1 \right\}.$$

Отсюда получается интересное следствие: *Часть поверхности полусферы, остающаяся после вырезывания цилиндром, равна $2\pi R^2 - S = 4R^2 = (2R)^2$, т. е. в точности равна площади квадрата, сторона которого равна диаметру сферы.*

§ 10. Определение и вычисление тройного интеграла, распространенного по пространственной области или телу. Положим, что $f(x, y, z)$ есть некоторая функция от трех независимых переменных x, y, z , которые можно рассматривать как декартовы (прямоугольные) координаты точки в пространстве. Предположим, что эта функция остается непрерывной, когда точка $M(x, y, z)$ принимает все возможные положения внутри и на границах некоторой части пространства, некоторой области (E) , ограниченной данными поверхностями. Представим себе, что данная область разбита, каким угодно способом, на бесконечно малые по всем направлениям элементы, т. е. такие, что расстояния между любыми двумя точками одного и того же элемента — величины бесконечно малые. Обозначая знаком dv_i объем любого из этих элементов, умножаем dv_i на значение функции $f(x, y, z)$ в любой точке (x_i, y_i, z_i) этого элемента и составляем сумму произведений $f(x_i, y_i, z_i) dv_i$, распространенную на все элементы данной области. Предел M , к которому стремится эта сумма, когда максимум объемов dv_i стремится к нулю, а сумма их остается постоянно равной объему V данной части пространства (E) , называется *тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным по данной области (E) или по данному телу* и обозначается знаком

$$M = \iiint_{(E)} f(x, y, z) dv.$$

Обозначение области интегрирования часто опускают; три знака интегрирования пишут потому, что вычисление такого интеграла приводится к трем последовательным простым интегрированиям. Впрочем, для краткости интегралы, распространенные по телу, обо-

значают иногда и знаком

$$\int f(x, y, z) dv,$$

если указано, что dv обозначает элемент объема, а не площади или линии.

Простейший способ разделения данной области на бесконечно малые по всем направлениям элементы состоит в следующем: проводим ряд плоскостей, параллельных плоскости zOy , в расстояниях dx одна от другой, другой ряд плоскостей, параллельных zOx , в расстояниях dy между двумя смежными плоскостями и третий ряд плоскостей, параллельных xOy , в расстояниях dz между двумя смежными плоскостями. Числа dx , dy , dz рассматриваем как *положительные* бесконечно малые. Этими плоскостями данная область (E) разобьется на бесконечно малые параллелепипеды, объем которых

$$dv = dx dy dz,$$

и на *неправильные* элементы, прилегающие к границам (E) (если эти границы не будут плоскости, параллельные координатным). Сумма элементов

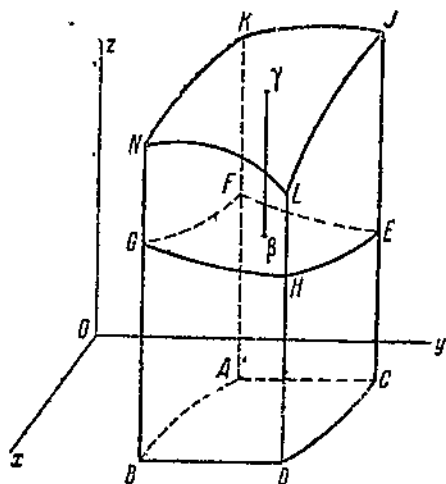
интеграла, соответствующих неправильным элементам, имеет пределом нуль, потому что она численно меньше μw , где μ — наибольшее значение модуля $f(x, y, z)$ в данной области (число конечное), а w — объем тела, ограниченного поверхностями, как угодно близкими одна к другой, т. е. величина бесконечно малая. Поэтому при вычислении M можно все элементы считать правильными и, сообразно этому, писать

$$M = \iiint_{(E)} f(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$

и в то же время

$$V = \iiint_{(E)} dx dy dz, \quad (2)$$

обозначая через V объем данной части пространства (E). Какими бы поверхностями ни была ограничена данная область (E), мы можем ее разбить на части, ограниченные следующим образом (черт. 55): 1) двумя плоскостями, $JKFE$ и $LNGH$, параллельными одной из координатных плоскостей, например плоскости zOy ; уравнения этих



Черт. 55.

плоскостей будут $x = x_0$ и $x = X > x_0$; 2) двумя цилиндрическими поверхностями, $KNGF$ и $JLHE$ с образующими, параллельными Oz . Уравнения этих поверхностей будут

$$y = \psi_1(x) \quad \text{и} \quad y = \psi_2(x) > \psi_1(x);$$

3) двумя поверхностями, $EFGH$ и $JKNL$, произвольного вида, пересекающимися с прямыми, параллельными Oz , самое большее, в одной точке. Уравнения этих поверхностей будут вида

$$z = \varphi_1(x, y), \quad z = \varphi_2(x, y) > \varphi_1(x, y).$$

Область $ABDC$ изображает проекцию поверхностей $EFGH$ и $JKNL$ на плоскости (xy) .

Соберем теперь сперва все элементы интеграла, соответствующие параллелепипедам, лежащим в вертикальном столбе между двумя плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1} = x_i + dx$ и двумя плоскостями $y = y_k$ и $y = y_{k+1} = y_k + dy$, где x_i и y_k — определенные числа в данных границах, или, как можно сказать для краткости, берем сумму элементов, соответствующих всем точкам отрезка прямой $\beta\gamma$, параллельной к прямой Oz , на котором x и y остаются постоянными, а z изменяется от $z_0 = \varphi_1(x, y)$ до $Z = \varphi_2(x, y)$, через бесконечно малые промежутки dz . Сумма этих элементов будет равна

$$dx dy \int_{z_0}^Z f(x, y, z) dz = F(x, y) dx dy,$$

где при интегрировании x и y рассматриваются как постоянные. Результат этого интегрирования будет вообще некоторая функция F от x и y , которые входят и в подинтегральную функцию и в пределы.

Чтобы получить сумму всех элементов интеграла M , остается, очевидно, вычислить двойной интеграл

$$\iint F(x, y) dx dy, \quad (3)$$

распространенный по области $ABDC$, которая изображает область всех значений x и y , удовлетворяющих неравенствам:

$$x_0 \leq x \leq X, \quad \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x),$$

так как $F(x, y) dx dy$ изображает сумму элементов интеграла, соответствующих одной точке (x, y) этой области.

Двойной интеграл (3) изобразится, как известно, формулой

$$\int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y F(x, y) dy,$$

где $y_0 = \psi_1(x)$, $Y = \psi_2(x)$; следовательно,

$$M = \int_{x_0}^X dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (4)$$

где интегрирования надо производить в указанном порядке, считая справа налево.

В приложениях, обыкновенно, данная область (E) ограничена именно указанным или аналогичным ему способом; тогда, конечно, незачем разбивать ее на части, и интеграл, распространенный по этой области, выразится *одним* интегралом вида (4); в общем же случае тройной интеграл представится суммой нескольких интегралов вида (4), соответствующих различным частям области (E) . Случай, когда область интегрирования (E) ограничена одной замкнутой поверхностью, $F(x, y, z) = 0$, которая пересекается каждой прямой, параллельной одной из осей координат, самое большее, в двух точках, является частным случаем рассмотренного нами. Функции

$$z = \varphi_1(x, y), \quad z = \varphi_2(x, y)$$

изображают два значения, получаемые из уравнения

$$F(x, y, z) = 0,$$

при данных x и y ; цилиндрические поверхности

$$y = \psi_1(x), \quad y = \psi_2(x)$$

дают вместе цилиндрическую поверхность, описанную около данной поверхности, с образующими, параллельными Oz ; плоскости $x = x_0$, $x = X$ обращаются в касательные плоскости к этой поверхности, параллельные плоскости zOy , и определяют наименьшее и наибольшее значения x в данной области.

Важно заметить, что при вычислении тройного интеграла можно менять порядок интегрирований (суммирований элементов), но при изменении порядка и пределы интегрирований вообще изменяются. Только в одном частном случае, когда пределы каждого интегрирования — числа *постоянные*, т. е. когда область (E) есть прямоугольный параллелепипед, ограниченный шестью плоскостями:

$$\begin{aligned} x &= x_0, & y &= y_0, & z &= z_0, \\ x &= X, & y &= Y, & z &= Z, \end{aligned}$$

попарно параллельными координатным, при перемене порядка интегрирований пределы для каждой переменной остаются постоянными. В случае же, упомянутом выше, когда (E) ограничена поверхностью

$$F(x, y, z) = 0,$$

если бы желали, например, первое интегрирование вести не по z , а по y , то надо было бы из уравнения $F(x, y, z) = 0$ найти

$$y = \theta_1(x, z) \text{ и } y = \theta_2(x, z)$$

и, если $\theta_2 > \theta_1$, произвести интегрирование по y от θ_1 до θ_2 , а затем от полученного результата

$$dx \, dz \int_{\theta_1(x, z)}^{\theta_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy = \Phi(x, z) \, dx \, dz$$

взять двойной интеграл

$$\iint \Phi(x, z) dx dz,$$

распространенный по области, ограниченной кривой, по которой цилиндр, описанный около данной поверхности, с образующими, параллельными Oy , пересекает плоскость xOz . Пределы интегрирований по всем трем переменным будут совсем иные, чем при указанном выше порядке интегрирований.

Перемена порядка интегрирований может часто упрощать вычисления. Чтобы пояснить сказанное примером, положим, что требуется вычислить

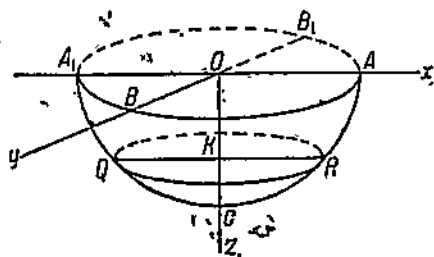
$$M = \iiint z dx dy dz,$$

распространенный по области, ограниченной половиной эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (z \geq 0)$$

и плоскостью

$$z = 0.$$



Черт. 56.

На черт. 56 положительная ось z -ов направлена вниз. Если первое интегрирование желаем вести по z , то должны интегрировать в пределах, от $z=0$ (на пл. xy) до

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = Z,$$

на поверхности эллипсоида, и от полученной функции от x и y взять двойной интеграл по области ABA_1B_1 , т. е. интегрировать по y от

$$y = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{до} \quad y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

и полученный результат по x от $-a$ до $+a$, так что

$$M = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{+b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z dz.$$

Выполняя указанные интегрирования, получим

$$M = \frac{1}{4} \pi abc^2.$$

Очевидно теперь, что мы получим то же самое число M , если возьмем сперва сумму элементов интеграла, соответствующих всем точкам сечения QKR , в расстоянии $OK=z$ от xOy , т. е. сперва возьмем двойной интеграл по области QKR , а затем проинтегрируем по z от 0 до c ; результат двойного интегрирования можно написать без всякого вычисления, потому что

$$dz \iint z dx dy = z dz \iint dx dy,$$

очевидно, равен $Pz dz$, где

$$P = \iint dx dy$$

есть площадь QKR , на которой $z = \text{const}$, т. е. площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} = 1,$$

равная, как известно, $\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})$, а потому

$$M = \int_0^c Pz dz = \pi ab \int_0^c z(1-\frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{\pi abc^2}{4};$$

вычисления при новом порядке интегрирований, очевидно, гораздо проще прежних.

§ 11. Преобразование переменных в тройных интегралах. Элемент объема в криволинейных координатах. Положим, что x, y, z — однозначные и непрерывные функции от переменных u, v, w с такими же частными производными 1-го порядка:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v, w), \\ y &= \varphi_2(u, v, w), \\ z &= \varphi_3(u, v, w). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рассматривая (x, y, z) как декартовы координаты точки M , а (u, v, w) как декартовы координаты другой точки M_1 относительно тех же или других координатных осей, положим, что каждой точке (x, y, z) некоторой области (E) соответствует одна и только одна точка (u, v, w) другой области (E_1) , и обратно. Обозначим через J якобиан или функциональный определитель функции x, y, z относительно переменных u, v, w , а именно:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial w} J_{u, v} + \frac{\partial z}{\partial v} J_{w, u} + \frac{\partial z}{\partial u} J_{v, w}. \quad (2)$$

где

$$J_{u,v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad J_{w,u} = \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w}, \quad J_{v,w} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Предположим, что J не обращается в нуль для всех точек (u, v, w) области (E_1) . Тогда будет иметь место следующая формула преобразования тройного интеграла:

$$M = \iiint_{(E)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(E_1)} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) |J| du dv dw, \quad (3)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ обозначают, для краткости, выражения x, y, z через u, v, w по формулам (1).

Доказательство формулы (3) совершенно аналогично доказательству формулы преобразования двойного интеграла. Положим, что для определения значений u, v, w , соответствующих данным значениям x, y, z , мы поступаем следующим образом: из первых двух уравнений системы (1) выражаем u и v через x, y и w и подставляем найденные выражения в третье уравнение этой системы. Положим, что при этом получается

$$z = F(x, y, w); \quad (4)$$

если в уравнении

$$z = \varphi_3(u, v, w) = F(x, y, w) \quad (5)$$

под u и v будем подразумевать их выражения, определяемые первыми двумя уравнениями системы (1), то уравнение (5) обратится в тождество. Переход от точки (x, y, z) области (E) к соответствующей точке (u, v, w) области (E_1) можно разбить на два последовательных процесса: 1) сперва перейти от точки (x, y, z) к точке (x, y, w) , имеющей с первой две общие координаты x и y , а третью w , определяемую по (x, y, z) из формулы (4), и 2) потом перейти от точки (x, y, w) к точке (u, v, w) , имеющей с первой одну общую координату w и две другие (u, v) , определяемые по (x, y, w) из первых двух уравнений системы (1). Изображая данный интеграл M таким образом:

$$M = \int \int dx dy \int f(x, y, z) dz,$$

где, при первом интегрировании по z , x и y считаются постоянными, мы будем иметь по формуле (4)

$$\int f(x, y, z) dz = \int f(x, y, F) \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right| dw$$

и

$$M = \int \int dx dy \int f(x, y, F) \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right| dw = \iiint_{(E_1)} f(x, y, F) \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right| dx dy dw,$$

где интегрирование распространено по области (E') точки (x, y, w) , соответствующей данной области (E) точки (x, y, z) . Этот интеграл можем написать в виде

$$M = \int dw \int \int_{(A)} f(x, y, F) \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right| dx dy$$

и преобразовать двойной интеграл, распространенный по области A сечения области (E') плоскостью, на которой $w = \text{const}$, вводя новые переменные u и v , по формулам

$$x = \varphi_1(u, v, w), \quad y = \varphi_2(u, v, w). \quad (1^*)$$

По известной формуле преобразования двойного интеграла находим, замечая, что $F(x, y, w) = \varphi_3(u, v, w)$, когда x и y выражены формулами (1^*) :

$$\int \int_{(A)} f(x, y, F) \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right| dx dy = \int \int_{(A_1)} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right| |J_{u,v}| du dv,$$

где

$$J_{u,v} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}. \quad (6)$$

Интегрирование распространено по области A_1 в области (u, v, w) , соответствующей области A в области (x, y, w) , на которой $w = \text{const}$, и в выражении $\frac{\partial F}{\partial w}$ переменные x и y замещены их выражениями (1^*) .

Подставив это выражение второго интеграла в выражение M , находим окончательно

$$M = \int \int \int_{E_1} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \left| \frac{\partial F}{\partial w} J_{u,v} \right| du, dv, dw.$$

Остается показать, что $J_{u,v} \frac{\partial F}{\partial w} = J$, и формула (3) будет доказана.

С этой целью берем уравнение (5) и, рассматривая в нем u и v как функции от (x, y, w) , определяемые формулами (1), дифференцируем его по w , считая x и y постоянными; тогда получим

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial w} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial w}, \quad (7)$$

а из уравнений (1^*) , при x и y постоянных, находим

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w}.$$

Определяя отсюда $\frac{\partial u}{\partial w}$ и $\frac{\partial v}{\partial w}$, подставляя в уравнение (7) и умножая обе части на $J_{u,v}$ находим

$$\frac{\partial F}{\partial w} J_{u,v} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} J_{u,v} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} J_{w,u} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} J_{v,w} = J,$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (3) вытекает следующее следствие. Если положим $f(x, y, z) = 1$, то формула (3) даст, совершенно так же, как было показано в случае двойного интеграла:

$$\iiint_{(E)} dx dy dz = \iiint_{(E_1)} |J| du dv dw = |J_1| \iiint_{(E_1)} du dv dw,$$

где J_1 есть значение J в некоторой точке (u_1, v_1, w_1) области (E_1) ; при этом предполагается, конечно, что J — непрерывная функция в области (E_1) , т. е. что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и их частные производные непрерывны в этой области. Тройные интегралы в предыдущей формуле выражают объемы V и V_1 тех частей пространства, которые определяются границами областей (E) и (E_1) , так что будем иметь между соответствующими объемами этих областей соотношение

$$V = |J_1| V_1. \quad (8)$$

§ 12. Геометрическая интерпретация преобразования тройного интеграла. Геометрическая интерпретация выведенных результатов получится, если введем понятие о *криволинейных координатах точки в пространстве*. Принимая во внимание, что поверхность можно изобразить аналитически тремя уравнениями, дающими выражения координат каждой ее точки в функциях от *двух* независимых переменных, мы можем рассматривать уравнения

$$x = \varphi_1(u, v, w), \quad y = \varphi_2(u, v, w), \quad z = \varphi_3(u, v, w) \quad (1)$$

как уравнения трех *семейств* поверхностей: 1) семейства (u) , на каждой поверхности которого $u = \text{const}$, а v и w — переменные, 2) семейства (v) или $v = \text{const}$ и 3) семейства (w) или $w = \text{const}$. Через каждую точку M пространства проходит одна поверхность каждого из этих семейств, и положение точки определяется пересечением этих трех поверхностей. Числа u, v, w и называются *криволинейными координатами* точки M . Формулы (1) будут формулами преобразования для перехода от системы координат (x, y, z) к системе (u, v, w) . Представим себе ряд бесконечно близких поверхностей каждого из трех семейств. Этими тремя рядами поверхностей данная область (E) разобьется на телесные элементы τ (черт. 57), ограниченные двумя поверхностями (u) и $(u + du)$, двумя поверхностями (v) и $(v + dv)$ и двумя поверхностями (w) и $(w + dw)$, где u, v, w — криволинейные координаты точки M в области (E) , а du, dv, dw — бесконечно малые положительные числа. Эти поверхности будут *гранями* элемента, а *ребрами* его — следую-

щие криволинейные отрезки: отрезок MM' , на линии пересечения поверхностей (v) и (w) , между поверхностями (u) и $(u+du)$, отрезок MM'' , на линии пересечения поверхностей (u) и (w) , между поверхностями (v) и $(v+dv)$, и отрезок MM''' , на линии пересечения поверхностей (u) и (v) , между поверхностями (w) и $(w+dw)$. В области (E_1) точки M_1 [декартовы координаты этой точки относительно осей Ox , Oy , Oz равны криволинейным координатам (u, v, w) точки M] элементу τ соответствует, как легко видеть, прямоугольный параллелепипед, ребра которого равны du, dv, dw . В самом деле, когда M описывает отрезок MM' , на котором v и w — постоянные, а u изменяется от значения u в точке M до $u+du$, точка M_1 опишет прямолинейный отрезок $M_1M'_1$, длины равный du и параллельный оси Ox , и т. д.

Обозначая через dV объем элемента τ , по формуле (8) § 11 найдем

$$dV = |J_1| du dv dw,$$

где J_1 есть значение якобиана J в некоторой точке упомянутого параллелепипеда; в силу непрерывности функции J можем написать

$$dV = (|J| + \varepsilon) du dv dw,$$

где J есть значение якобиана в точке M_1 , а ε — бесконечно малое. Поэтому, отбрасывая бесконечно малую высшего порядка $\varepsilon du dv dw$, т. е. заменяя точное значение объема dV числом ему эквивалентным (что при вычислении пределов сумм позволительно), можем писать

$$dV = |J| du dv dw. \quad (2)$$

Это выражение и называют *элементом объема в криволинейных координатах* (u, v, w) .

На основании предыдущего мы можем теперь дать простое геометрическое толкование формуле преобразования тройного интеграла (3) § 11. Интегралы, стоящие в обеих частях равенства (3), представляют собой два различных изображения одного и того же предела суммы произведений $f(x, y, z) dV$, распространенной на все элементы τ данной области, и соответствуют двум различным формам элемента. Интеграл в первой части формулы изображает этот предел, когда объем элемента

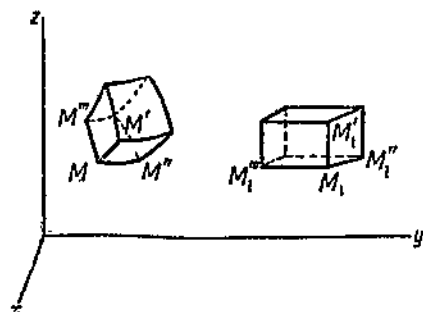
$$dV = dx dy dz,$$

а интеграл во второй части, когда

$$dV = |J| du dv dw.$$

Первая форма элемента, частная, получается при разделении данной области на части плоскостями семейств:

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad z = \text{const},$$



Черт. 57.

соответственно параллельными координатным плоскостям

$$zOy, zOx \text{ и } xOy,$$

а вторая, общая, — при разделении данной области на части поверхностями семейств

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad w = \text{const},$$

где u, v, w выражаются функциями от x, y, z , при помощи формул (1). Вторая форма переходит в первую, если

$$x = u, \quad y = v, \quad z = w,$$

причем J делается равным единице.

Замечание. К выражению элемента объема в криволинейных координатах

$$dV = |J| du dv dw, \quad (2)$$

а следовательно, и к формуле преобразования (3) § 11 можно притти при помощи весьма простых геометрических соображений, совершенно аналогичных тем, которыми мы пользовались при геометрическом выводе элемента площади в криволинейных координатах; но при таком выводе, так же, как и там, не обнаруживается, что выражение (2) отличается от точного значения dV только на бесконечно малое высшего порядка, т. е. ему эквивалентно. Наметим главные пункты этого геометрического доказательства, предоставляя подробное их развитие читателю. Вычисляя декартовы координаты вершин M, M', M'', M''' телесного элемента, объем которого обозначен через dV , по их криволинейным (u, v, w) , $(u + du, v, w)$ и т. д. помощью формул (1) и ограничиваясь при этом членами 1-го порядка относительно du, dv, dw , мы можем рассматривать этот элемент как обыкновенный параллелепипед с плоскими гранями и прямолинейными ребрами. Объем такого параллелепипеда равен ушершенному объему тетраэдра, имеющего вершинами точки M, M', M'', M''' . Объем этого тетраэдра выражается, по известной формуле аналитической геометрии, определителем

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x, & x_2 - x, & x_3 - x \\ y_1 - y, & y_2 - y, & y_3 - y \\ z_1 - z, & z_2 - z, & z_3 - z \end{vmatrix}$$

в декартовых координатах его вершин. Подставив сюда значения x_1, y_1, z_1 и т. д., вычисленные указанным путем, а именно:

$$x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad z_1 = z + \frac{\partial z}{\partial u} du \text{ и т. д.},$$

мы и найдем выражение (2).

§ 13. Элемент объема в полярных и вообще ортогональных координатах. Для приложения общих формул выведем выражение элемента объема в наиболее употребительных из криволинейных

координат, а именно полярных. Эта система *ортогональна*. Это значит, что каждая из трех поверхностей (u) , (v) , (w) пересекает две другие под прямым углом (т. е. касательные плоскости к этим поверхностям в общей точке взаимно перпендикулярны). Полярными координатами точки M называют расстояние $OM = r$ (черт. 58) точки M от данной точки O , угол $MOz = \theta$ направления OM с данным направлением Oz и угол $QOP = \psi$ между плоскостью zOM и данной плоскостью zOx . Для перехода от прямоугольных декартовых координат (x, y, z) относительно осей Ox , Oy , Oz к полярным (r, θ, ψ) служат формулы

$$x = r \sin \theta \cos \psi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta, \quad (1)$$

получаемые из рассмотрения треугольников MOP и POQ , где отрезок MP перпендикулярен к xOy и PQ перпендикулярен к zOx .

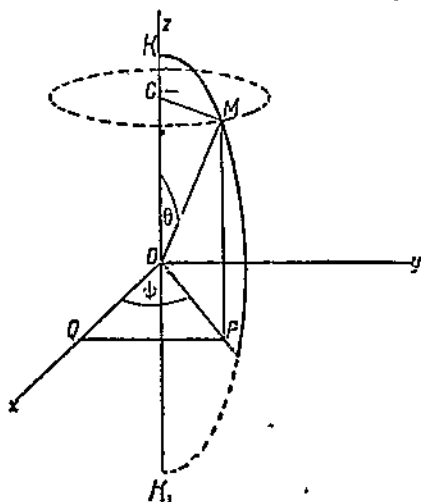
Все точки, для которых $r = \text{const}$, лежат на поверхности шара с центром в точке O ; точки, для которых $\theta = \text{const}$, — на поверхности конуса, ось которого есть ось z -ов; точки, для которых $\psi = \text{const}$, — на полуплоскости, проходящей через ось z -ов. Эти три поверхности и определяют своим пересечением положение данной точки. Пересечение шара с конусом будет линия, на которой $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$; это будет окружность радиуса, равного $r \sin \theta = CM$. Пересечение шара с полуплоскостью zOM — линия $r = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ есть полуокружность радиуса $r = OM$; пересечение конуса с полуплоскостью zOM — линия $\theta = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ есть луч OM . Эти три линии, очевидно, пересекаются под прямым углом, откуда и вытекает ортогональность системы координат (r, θ, ψ) . Чтобы вычислить якобиан J , составляем по формулам (1) производные от x, y, z по r, θ, ψ , а затем и самый определитель J по формуле (2) § 11, заменив в ней буквы u, v, w буквами r, θ, ψ . Результат этого легкого вычисления даст

$$J = r^2 \sin \theta,$$

и элемент объема в полярных координатах будет

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

Вычисление может быть значительно упрощено, если воспользуемся ортогональностью системы. В этом случае телесный элемент τ можно



Черт. 58.

рассматривать как прямоугольный параллелепипед, объем которого

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3,$$

где ds_1 , ds_2 , ds_3 обозначают длины его ребер MM' , MM'' и MM''' , вычисляемые по формуле

$$ds_1^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] du^2,$$

потому что MM' есть элемент дуги кривой, изображаемой уравнениями (1) § 12, при v и w постоянных. Аналогичные формулы имеют место для ds_2 и ds_3 . Таким образом получим

$$dV = \sqrt{e_1 e_2 e_3} du dv dw,$$

где

$$e_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad e_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$e_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2.$$

Таково вообще выражение элемента объема в *ортогональной* системе координат. В рассматриваемом частном случае полярных координат прямо находим

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\psi,$$

потому что линия MM' — прямая, MM'' — дуга круга радиуса r , MM''' — дуга круга радиуса $r \sin \theta$, откуда и получается

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi.$$

Для вычисления объема тела, ограниченного замкнутой поверхностью, заданной уравнением $r = f(\theta, \psi)$, будем иметь формулу

$$V = \int \int \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi,$$

где интегрирование распространено по всему телу. Предполагая, что полюс O лежит внутри тела (см. черт. 58), интегрируем сперва по r от 0 до $f(\theta, \psi)$. Это даст сумму элементов, соответствующих постоянным θ и ψ и всем значениям r на линии OM , где M лежит на данной поверхности. Полученный результат интегрируем по θ от 0 до π ; это даст сумму элементов, соответствующих постоянному ψ , т. е. всем точкам сечения поверхности полуплоскостью KOK_1M , где $\psi = \text{const}$. Последнее интегрирование надо пропзвести по ψ от 0 до 2π , заставив это сечение описать полный оборот около оси z -ов. Следовательно,

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left[\int_0^{f(\theta, \psi)} r^2 dr \right] \sin \theta d\theta \right) d\psi.$$

Примеры

1. Объем шара радиуса R .

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left[\int_0^R \rho^2 d\rho \right] \sin \theta d\theta \right) d\psi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin \theta d\theta \right) d\psi =$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2. Объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a^3xyz$.

Поверхность эта лежит в I, II, III и IV углах между координатными плоскостями, в которых знаки x , y , z соответственно будут $(+++)$, $(+-+)$, $(-++)$ и $(-+-)$, при которых $xyz > 0$, как того требует уравнение. Достаточно вычислить объем части тела, лежащей в угле I, и умножить результат на 4, так как тело, очевидно, симметрично расположено в упомянутых четырех углах. Переходя к полярным координатам, для уравнения поверхности будем иметь

$$\rho^3 = 27 a^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \psi \cos \psi,$$

а объем будет

$$V = 4 \iiint \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi d\rho.$$

В угле положительных (x, y, z) ρ изменяется от 0 до $\rho_1 =$

$$= 3a \sqrt[3]{\sin^2 \theta \cos \theta \sin \psi \cos \psi}, \quad \theta \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}, \quad \psi \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2};$$

следовательно,

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\rho_1} \rho^2 d\rho \right) \sin \theta d\theta \right] d\psi,$$

т. е.

$$V = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \rho_1^3 \sin \theta d\theta \right) d\psi = 36a^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta \sin \psi \cos \psi d\theta d\psi = \frac{9}{2} a^3.$$

Упражнения

1. Определить пределы интегрирования в интеграле $\int \int_{(A)} f(x, y) dx dy$, в котором (A) — параллелограмм со сторонами $y = 0$, $y = a$, $y = x$, $y = x - 2a$.

$$\text{Отв. } \int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x, y) dx = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_0^a f(x, y) dy +$$

$$+ \int_{2a}^3 dx \int_{x-2a}^a f(x, y) dy.$$

2) Переменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$.

$$\text{Отв. } \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$.
 Отв. $\frac{4}{9} (ab)^{3/2}$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ ($a > R$).
 Отв. $\frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} \pi \sqrt{a^2 - R^2}^3$.
5. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $x + y = b$ и поверхностью $cz = 2x^2 + 3y^2 + a^2$.
 Отв. $\frac{5}{12} \frac{b^4}{c} + \frac{a^2 b^2}{2c}$.
6. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z = 0$, цилиндром $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ и поверхностью параболоида $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$.
 Отв. $\frac{\pi abc}{8} \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} \right)$.
7. Вычислить объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью:
 $c(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2 b^2 (x^2 + y^2) z}{a^2 x^2 + b^2 y^2}$.
 Отв. $\frac{\pi ab}{48} \frac{2(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{c^3}$.

Указание. Перейти к полярным координатам в пространстве.

8. Вычислить двойной интеграл $\iint \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2 - b^2) - 4(a^2 - b^2)x^2}}$,
 распространенный по области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
 Отв. $\pi \ln \frac{a+b}{a-b}$.

Указание. Перейти к полярным координатам.

9. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, вырезанной плоскостями $x = a$, $y = b$, $z = 0$.
 Отв. $\frac{2\sqrt{2}}{3} (a+b) \sqrt{ab}$.
10. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$).
 Отв. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$.
11. Доказать, что величины частей двух поверхностей $2az = x^2 + y^2$ и $2z = c(x^2 - y^2) + 2xy \sqrt{1 - c^2}$, которые вырезаются цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, равны между собой, и найти эти величины.
 Отв. $\frac{2\pi}{3a} \{ (a^2 + R^2)^{3/2} - a^3 \}$.

12. Доказать, что

$$P = \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2 - x^2}}^{x+2a} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2 - y^2}}^a f(x, y) dx + \\ + \int_a^{2a} dy \int_0^a f(x, y) dx + \int_{2a}^{3a} dy \int_{y-\frac{1}{2}2a}^a f(x, y) dx$$

и вычислить P при $f(x, y) = 1$.

Отв. При $f = 1$. $P = \frac{5a^3}{2} - \frac{\pi a^2}{4}$.

13. Доказать, что

$$\int_0^a dx \int_0^b f(x, y) dy = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \\ + \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{b}{\sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

для $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Указание. Изобразить геометрически границы области интегрирования в первой части и, переходя к полярным координатам, определить пределы для новых переменных.

14. Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{-b} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$, относительно прямой $y = 0$.

Отв. $\frac{1}{6} Mh^2$, где M — масса всей пластинки.

15. Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$, относительно прямой $y = 0$.

Отв. $\frac{35}{36} Ma^2$, где M — масса всей пластинки.

Указание. Принять за переменные t и y .

16. Вычислить момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$, $z = H$, относительно оси z .

Отв. $\frac{3}{10} MR^2$, где M — масса всего тела.

17. Вычислить момент инерции однородного тела, ограниченного плоскостями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, относительно оси z .

Отв. $\frac{1}{10} M(a^2 + b^2)$.

18. Преобразовать $\iint dx dy$, переходя от декартовых координат (x, y) к эллиптическим.

Указание. Уравнения $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$, $\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1$ при $\lambda^2 > c^2 > \mu^2$

изображают, очевидно, софокусные эллипс и гиперболу. Каждой системе значений (λ, μ) соответствуют определенный эллипс и определенная гипербола. Если ограничиться точками, лежащими в первом квадранте, то этим уравнениям удовлетворяет одна точка пересечения этих двух кривых. Поэтому λ и μ можно рассматривать как координаты точки

на плоскости (в упомянутом угле). Эти координаты называются эллиптическими на плоскости. *Отв.* $\iint dx dy = \iint \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} d\lambda d\mu$.

19. Вычислить площадь области, ограниченной двумя эллипсами $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$, соответствующими значениям $\lambda^2 = \frac{4}{3} c^2$ и $\lambda^2 = \frac{5}{3} c^2$, и двумя гиперболами $\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1$, соответствующими значениям $\mu^2 = \frac{1}{3} c^2$ и $\mu^2 = \frac{2}{3} c^2$. *Отв.* $\frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3}$.

Указание. Перейти к эллиптическим координатам и воспользоваться предыдущей задачей.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Определение криволинейного интеграла. Возьмем функцию $P(x, y)$ от двух переменных x и y , непрерывную в некоторой области. В этой области рассмотрим некоторую непрерывную кривую C и на ней дугу AB , соединяющую точки $A(x_0, y_0)$ и $B(X, Y)$ (черт. 59). Возьмем на этой дуге ряд точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, в направлении движения от A к B , и обозначим координаты любой точки A_i через (x_i, y_i) .

Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i) (x_{i+1} - x_i) \\ (x_n = X, y_n = Y).$$

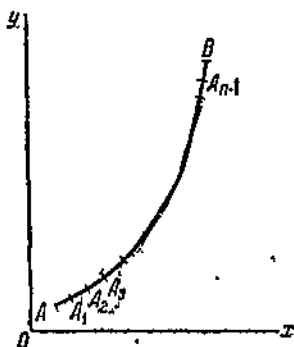
Когда максимум длины всех сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ будет стремиться к нулю (а число их будет возрастать неограниченно), то, как мы сейчас покажем, S_n будет стремиться к определенному конечному пределу, который называется *криволинейным интегралом*, взятым

по дуге AB от A до B , и обозначается знаком $\int_{AB} P(x, y) dx$. Сначала предположим, что дуга AB пересекается всякой прямой, параллельной оси y -ов, самое большее, в одной точке. Тогда уравнение AB будет

$$y = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — однозначная функция на сегменте $[x_0, X]$. Обозначив $P[x, \varphi(x)]$ через $F(x)$, находим

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) (x_{i+1} - x_i) \quad \text{и} \quad \lim S_n = \int_{x_0}^X F(x) dx.$$



Черт. 59.

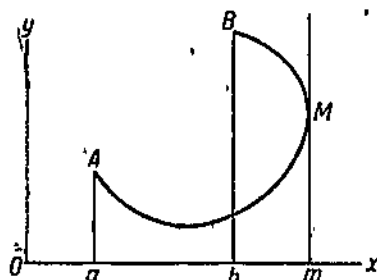
Следовательно,

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

Таким образом вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению обыкновенного определенного интеграла, когда известно уравнение $y = \varphi(x)$ кривой, по которой производится интегрирование и направление интегрирования.

Если бы дуга AB пересекалась некоторыми прямыми, параллельными оси y -ов, более чем в одной точке, то мы разделили бы эту дугу на части, на каждой из которых y — однозначная функция, и, разбив сумму S_n на слагаемые, соответствующие различным частям дуги, переходом к пределу представили бы $\lim S_n$ в виде суммы интегралов, взятых вдоль частей дуги AB .

Для разных частей вид функции $y = \varphi(x)$ будет разный. Например, если кривая C между A и B имеет форму, указанную на черт. 60, то, обозначая через γ абсциссу точки M , получим



Черт. 60.

$$\int_0^{\gamma} P(x, y) dx = \int_0^{\gamma} P[x, \varphi_1(x)] dx + \int_{\gamma}^m P[x, \varphi_2(x)] dx, \quad (1)$$

где $y = \varphi_1(x)$ соответствует ветви AM , а $y = \varphi_2(x)$ — ветви MB . Если начало пути интегрирования A совпадает с концом его B , то кривая C обращается в замкнутый контур и $\int_C P(x, y) dx$ обращается в интеграл, взятый по этому замкнутому контуру.

Аналогично этому определяется и вычисляется интеграл

$$\int_C Q(x, y) dy \text{ и интеграл вида } \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

с которым чаще всего встречаются в приложениях.

Для вычисления такого интеграла удобно выразить x и y функциями от одной переменной t : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, представляющими уравнения кривой интегрирования, и если t_0 и T будут значения t в начале и конце пути интегрирования, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ однозначны и непрерывны, вместе с их производными, на сегменте $[t_0, T]$, то

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_0}^T [P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)] dt. \quad (2)$$

Действительно, возвращаясь к формуле (1), выполним в обоих определенных интегралах подстановку $x = \varphi(t)$; тогда получим

$$\int_a^x P(x, y) dx = \int_{t_0}^{\tau} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt + \\ + \int_{\tau}^T P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt = \int_{t_0}^T P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt,$$

где τ — значение t , соответствующее точке M . Аналогично получили бы, выполняя подстановку $y = \psi(t)$, что

$$\int_a^y Q(x, y) dy = \int_{t_0}^T Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt.$$

Складывая две последние формулы, находим соотношение (2).

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что положительные направления Ox и Oy назначены так, что для наблюдателя, стоящего в точке O на плоскости (xy) и смотрящего по направлению Ox , направление Oy идет влево. Условимся называть *положительным* или *прямым* направлением на замкнутом контуре то, следуя которому, имеем *ограниченную* контуром часть плоскости влево; противоположное этому направление назовем *отрицательным* или *обратным*.

Для примера вычислим

$$\int y dx,$$

взятый по эллипсу $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ в положительном направлении. Переменное t изменяется от 0 до 2π , когда обходим эллипс в указанном направлении. Следовательно

$$\int y dx = - \int_0^{2\pi} b \sin t \cdot a \sin t dt = -ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi ab.$$

Интеграл $\int y dx$, взятый в отрицательном направлении, равен πab .

Следуя Эрмиту, мы часто будем обозначать криволинейный интеграл, взятый по дуге AMB данной кривой, символом (AMB) , указывая порядком букв направление интегрирования. Легко убедиться, что $(BMA) = -(AMB)$, потому что если

$$(AMB) = \int P(x, y) dx \text{ и } x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

$$\text{то } (AMB) = \int_{t_0}^T P(\varphi, \psi) \varphi'(t) dt, \text{ а } (BMA) = \int_T^{t_0} P(\varphi, \psi) \varphi'(t) dt,$$

откуда и следует сказанное.

§ 2. Формула Грина. Выведем условие, при котором

$$\int (Pdx + Qdy),$$

взятый по замкнутому контуру, равен нулю.

ТЕОРЕМА. Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал, то

$$\int (Pdx + Qdy),$$

взятый по контуру, равен нулю, если внутри контура и на нем самом функции P и Q и частные их производные 1-го порядка непрерывны.

Доказательство основано на формуле Грина для преобразования двойного интеграла в интеграл, взятый по контуру, которую сперва и выведем.

Рассмотрим двойной интеграл (черт. 61)

$$J = \iint \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad [P = P(x, y)], \quad (1)$$

распространенный по области, ограниченной кривой

$$F(x, y) = 0,$$

дающей для y два значения

$$y_1 = \varphi_1(x) \text{ и } y_2 = \varphi_2(x)$$

при одном и том же x ($y_2 = AM$, $y_1 = AM'$), а также и два значения x при одном и том же y .

Интегрируя по y , при x -постоянном, от $y = y_1$ до $y = y_2$, находим

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y_2) - P(x, y_1);$$

следовательно,

$$J = \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)] dx,$$

где $a = OK$ и $b = OL$ — абсциссы точек, в которых касательные параллельны Oy . С другой стороны, согласно (1) § 1, $\int P(x, y) dx$, взятый по контуру $GM'HMG$ (в положительном направлении), равен

$$\int_a^b P(x, y_1) dx + \int_b^a P(x, y_2) dx = \int_a^b [P(x, y_1) - P(x, y_2)] dx.$$

Отсюда получаем

$$J = - \int P(x, y) dx = -(GM'NMG). \quad (2)$$

Совершенно так же найдем, что

$$J_1 = \iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy,$$

распространенный по той же области, равен $\int Q(x, y) dy$, взятому по тому же контуру в положительном направлении:

$$J_1 = \int Q(x, y) dy. \quad (3)$$

В самом деле, если при $y = OG$ получаются два значения для x (черт. 62)

$$x_1 = GH, \quad x_2 = GH',$$

то, интегрируя по x , при y постоянном, находим

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x_2, y) - Q(x_1, y),$$

а затем

$$J_1 = \int_c^k [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)] dy,$$

где $c = OA$, $k = OB$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int Q(x, y) dy &= (MH'NMG) = (MH'N) + (NHM) = \int_c^k Q(x_2, y) dy + \\ &+ \int_k^c Q(x_1, y) dy = \int_c^k [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)] dy = J_1. \end{aligned}$$

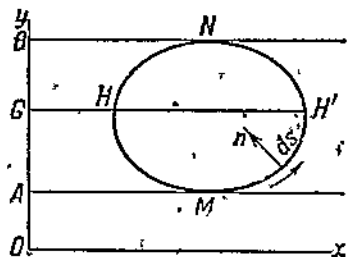
Из (2) и (3) получаем

$$J = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int (P dx + Q dy). \quad (4)$$

В формуле (4) двойной интеграл распространен по области, а криволинейный интеграл — по контуру, ограничивающему область в положительном направлении.

Замечание 1. Формула (4) остается справедливой и в том случае, когда контур пересекается прямыми, параллельными осям, более чем в двух точках.

Возьмем, например, контур $ABCDEF A$ (черт. 63), на котором одному и тому же y могут соответствовать четыре различных зна-



Черт. 62.

чения x . Проведем прямую AEC , разделяющую данную область на три части: $AECB$, AEF и EDC ; в каждой такой части данному u соответствуют только два значения x . Двойной интеграл

$$J = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = J_1 + J_2 + J_3,$$

где J_1, J_2, J_3 обозначают интегралы, соответствующие упомянутым трем частям. К каждому из них можно применить формулу (4), и мы найдем с помощью обозначений Эрмита:

$$J_1 = (ABCEA) = (ABC) + (CE) + (EA),$$

$$J_2 = (AEFA) = (AE) + (EFA),$$

$$J_3 = (ECDE) = (EC) + (CDE).$$

Складывая и замечая, что $(EA) = -(AE)$, $(EC) = -(CE)$, получим

$$J = (ABC) + (CDE) + (EFA) = (ABCDEFA),$$

что и требовалось доказать.

Так же убеждаемся в полной общности формулы (4), замечая, что область можно разбить на части, удовлетворяющие условию, при котором формула (4) была доказана, и что интегралы, взятые по промежуточным линиям, сокращаются.

Замечание 2. Часто приходится рассматривать области, ограниченные несколькими контурами.

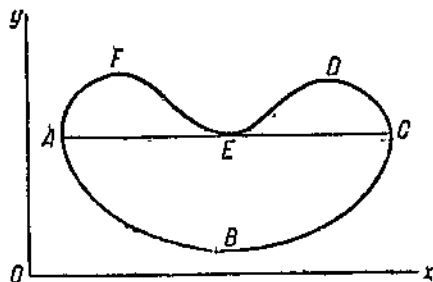
Под областью, ограниченной, например, двумя контурами (чертеж 64) $(AGDHA)$ и $(BECFB)$, понимают полосу, лежащую между внутренним и внешним контурами. Рассмотрим интеграл

$$J = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

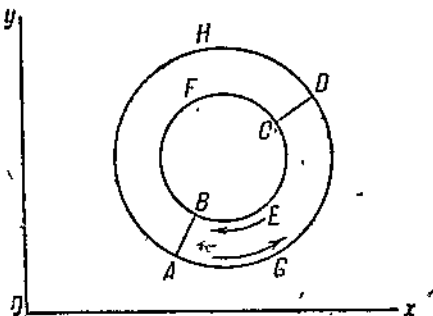
распространенный по этой области. Докажем, что этот интеграл равен

$$\int (P dx + Q dy) = (AGDHA) + (BECFB),$$

т. е. сумме интегралов, взятых по каждому из контуров в положительном направлении относительно полосы, или ограниченной, т. е. лежащей между двумя контурами. Проведем линию AB между двумя точками, лежащими на разных контурах, и таким же



Черт. 63.



Черт. 64.

образом другую CD , разобьем данную область на две:

$$ABFCDHA$$

$$ABECDGA,$$

ограниченные простыми контурами.

$$J = J_1 + J_2,$$

где J_1 и J_2 — двойные интегралы, распространенные по двум областям (а) и (б).

Применяя к ним формулу (4) настоящего параграфа, получим

$$J_1 = (ABFCDHA) = (AB) + (BFC) + (CD) + (DHA),$$

$$J_2 = (AGDCEBA) = (AGD) + (DC) + (CEB) + (BA).$$

Складывая и замечая, что интегралы, взятые по соединительным линиям AB и CD , сокращаются, получим

$$J = (BFC) + (CEB) + (DHA) + (AGD),$$

т. е.

$$J = (AGDHA) + (BFCEB).$$

Следовательно, здесь интеграл J равен сумме криволинейных интегралов, взятых вдоль обоих контуров, причем каждый контур описывается в *положительном* направлении (оставляя влево *полосу*, ограниченную этими контурами). Сказанное, очевидно, распространяется на случай какого угодно числа контуров.

Итак, во всех случаях

$$J = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int (P dx + Q dy), \quad (4)$$

где двойной интеграл распространен по области, а криволинейный — по *всей* границе области в положительном направлении. Формулу (4) называют *формулой Грина*.

Из выведенной формулы и вытекает теорема, которую желали доказать. Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то двойной интеграл обращается в нуль, а потому и интеграл

$$\int (P dx + Q dy),$$

взятый по *всей* границе области, на которой P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ однозначны и непрерывны, равен нулю.

Доказанную теорему можно формулировать еще иначе, а именно: при условии $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ интеграл

$$\int (P dx + Q dy),$$

взятый по дуге кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , не зависит от пути интегрирования, а зависит только от положений начальной и конечной точек дуги. В самом деле, пусть $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ будут данные точки, ACB и $AC'B$ — две различные кривые, их соединяющие. По доказанному

$$(ACB) + (BC'A) = 0,$$

откуда

$$(ACB) = (AC'B),$$

что и требовалось доказать.

В последнем равенстве, конечно, предполагается, что P , Q и их производные непрерывны для всех точек между путями ACB и $AC'B$. Вследствие этого, при условии $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, интеграл, взятый по любой кривой между точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , обозначают знаком

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} (P dx + Q dy),$$

указывая лишь конечные точки пути; форма же пути на значение интеграла не влияет.

Применяя доказанную теорему к случаю полосы, ограниченной двумя контурами (см. черт. 64), получим

$$(AGDA) + (FCEF) = 0, \text{ или } (AGDA) = (FECF).$$

В интеграле $(FECF)$ направление будет положительное относительно области, лежащей внутри контура FEC . Поэтому можем сказать, что при вычислении интеграла $\int (P dx + Q dy)$, при условии $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, взятого по замкнутому контуру, можно этот контур заменить другим, если в части плоскости, ограниченной этими контурами, нет точек, в которых функции P и Q и их производные перестают быть однозначными и непрерывными.

В формуле (4) под знаком двойного интеграла dx и dy обозначают, как всегда, положительные числа, а под знаком криволинейного интеграла dx и dy обозначают, по величине и по знаку, проекции элемента ds дуги кривой, взятого в положительном направлении, на положительные направления осей Ox и Oy (см. черт. 62). Если проведем нормаль к кривой в точке (x, y) и обозначим через (n, x) и (n, y) углы, образуемые направлением нормали, идущим внутрь области, ограниченной данной кривой (направлением внутренней нормали), с направлениями Ox и Oy , а через (ds, x) и (ds, y) — углы касательной, направленной в положительную сторону по кривой, с Ox и Oy , то будем иметь

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos(ds, x) = ds \cos(n, y), \\ dy &= ds \cos(ds, y) = -ds \cos(n, x). \end{aligned}$$

Положив в формуле (4)

$$Q = X, P = -Y,$$

можем написать формулу Грина так:

$$\iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = - \int [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds, \quad (4^*)$$

где ds — положительное число, n — направление внутренней нормали. Если в формуле (4) положим сперва $Q = 0$, $P = y$, а потом $P = 0$, $Q = x$ и заметим, что интеграл

$$\iint dx dy,$$

распространенный по области, ограниченной простым контуром C , изображает площадь этой области S , найдем

$$\left. \begin{aligned} S &= - \int_C y dx, \quad S = \int_C x dy, \\ S &= \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Так выражается интегралом, взятым по замкнутому простому контуру, площадь области, ограниченной этим контуром. В формулах (5) все интегралы берутся в положительном направлении.

Например, площадь эллипса, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, равна

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx) = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos t \cos t + \sin t \sin t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Точно так же для площади петли декартова листа $x = 3a \frac{t}{t^3+1}$,

$$y = 3a \frac{t^2}{t^3+1}$$

(см. § 6, гл. V) получим

$$\frac{1}{2} (x dy - y dx) = \frac{9a^2}{2} \frac{t^2}{(t^3+1)^2} dt$$

и

$$S = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^3+1)^2} = \left[-\frac{3}{2} a^2 \frac{1}{t^3+1} \right]_0^{\infty} = \frac{3}{2} a^2.$$

Замечание. В последующем мы будем рассматривать интегралы, взятые по кривой не плоской:

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx \quad (I)$$

и т. п. Определение, данное выше для интеграла, взятого по плоской кривой, применимо и к таким интегралам. Вычисление их приводится к вычислению обыкновенного простого интеграла. Например, если кривая Γ задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

то интеграл (1) приведет к интегралу

$$\int_0^{t_1} f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Криволинейному интегралу возможно дать простое механическое истолкование.

Будем рассматривать P, Q, R как величины проекций на оси координат переменной силы W , приложенной в точке (x, y, z) . Элементарная работа этой силы при перемещении точки приложения вдоль пути Γ на элемент ds будет равна

$$\text{пр. } W \cdot ds = \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R \frac{dz}{ds} \right) ds = P dx + Q dy + R dz,$$

где проектирование берется на положительное направление касательной к линии Γ в точке (x, y, z) . Отсюда вытекает, что

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz)$$

выражает полную работу силы $W \{P, Q, R\}$ при движении точки ее приложения вдоль всего пути Γ . В частности,

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$$

выражает работу силы $W \{P, Q\}$, лежащей в плоскости (xy) , при перемещении точки ее приложения вдоль плоского пути C . Если на контуре C и внутри него проекции силы P и Q и также их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, будучи однозначными и непрерывными, удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то работа такой силы вдоль контура C равна нулю. Иными словами, работа силы $W \{P, Q\}$ не зависит от формы пути, если в области, ограниченной этими путями, выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

причем $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ однозначны и непрерывны.

§ 3. Интегралы, распространенные по поверхности. Формула Стокса. Во многих вопросах математической физики рассматриваются так называемые *интегралы, распространенные по поверхности*. Представим себе, что дана некоторая часть поверхности, ограниченная каким-нибудь замкнутым контуром. Представим себе далее, что эта часть поверхности S разбита на бесконечно малые элементы $d\sigma$. Обозначим через $f(x, y, z)$ некоторую непрерывную во всех точках данной части поверхности функцию. Интегралом, распространенным по поверхности S , называют предел суммы произведений:

$$f(x, y, z) d\sigma,$$

где (x, y, z) — произвольная точка элемента $d\sigma$ и суммирование распространено на все элементы $d\sigma$ данной конечной части поверхности S . Этот интеграл обозначают знаком

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) d\sigma, \text{ или } \int_{(S)} f d\sigma.$$

Вычисление его приводится к вычислению обыкновенного двойного интеграла следующим образом. Выразив x, y, z функциями от двух независимых переменных u и v :

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v), \quad (1)$$

и элемент $d\sigma$ известной формулой:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (2)$$

где E, G, F обозначают известные функции от u и v , указанные в главе VIII, § 9, находим

$$\int_{(S)} f(x, y, z) d\sigma = \int_{(A)} \int f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (3)$$

Область интегрирования (A) определяется совокупностью значений u и v , соответствующих всем точкам данной части поверхности (S) . В частности, если для всех точек данной части поверхности

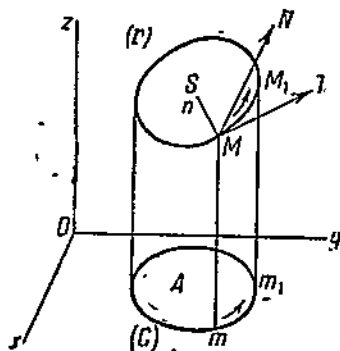
$$z = \varphi(x, y), \quad (4)$$

где $\varphi(x, y)$ — однозначная функция от x и y , т. е. когда за независимые переменные выбраны декартовы координаты (x, y) — проекции точки поверхности на плоскость (x, y) , мы будем иметь

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad \text{где } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{и} \quad \int_{(S)} f d\sigma = \int_{(A)} \int f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad (5)$$

где A — проекция данной части поверхности на плоскость (x, y) .

Формула Стокса, имеющая многие приложения в теоретической физике, дает преобразование некоторого интеграла, распространенного по поверхности, в интеграл, распространенный по контуру (Γ), ограничивающему данную часть поверхности, подобно тому как формула Грина (из которой мы и выведем формулу Стокса) дает преобразование некоторого интеграла, распространенного по данной части плоскости, в интеграл, взятый по контуру этой части. Отнесем данную поверхность к системе прямоугольных осей: Ox , Oy , Oz . Положим, что плоскость xOy горизонтальна, а положительная ось Oz направлена вертикально вверх (черт. 65). Положительные направления Ox и Oy назовем так, как было установлено выше; тогда для наблюдателя, для которого направление Oz идет от ног к голове, направление Ox надо будет повернуть на 90° справа налево, чтобы Ox совпало с Oy . Для простоты предположим, что данная часть поверхности пересекается с каждой прямой, параллельной оси z -ов, самое большее в одной точке и что эта часть ограничена одним (простым) замкнутым контуром (Γ). На этом контуре назовем определенное направление, указанное стрелкой, так, чтобы, следуя этому направлению по всему контуру, мы всегда имели ограниченную



Черт. 65.

контуром часть поверхности влево. Это направление мы назовем положительным на данном контуре (Γ). Ясно, что когда точка M на данной поверхности описывает контур (Γ) в положительном направлении, то проекция ее m на плоскости (xy) опишет проекцию (C) контура (Γ) также в положительном направлении.

Условившись в этом, рассмотрим интеграл

$$\int_{(\Gamma)} (X dx + Y dy + Z dz), \quad (6)$$

взятый по контуру (Γ) в положительном направлении; X , Y , Z обозначают функции от x , y , z , непрерывные во всех точках данной части поверхности (S) вместе с их частными производными 1-го порядка. Замечая, что для каждой точки поверхности

$$z = \varphi(x, y), \quad (4)$$

где $\varphi(x, y)$ — однозначная функция от x и y , мы можем привести данный интеграл к интегралу, взятому по плоскому контуру (C) проекции (Γ). Для этого заменяем z его выражением $\varphi(x, y)$ в X , Y , Z , а dz его выражением

$$dz = p dx + q dy, \quad \text{где} \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

После этой замены подинтегральное выражение интеграла (6):

$$X dx + Y dy + Z dz$$

выразится в двух независимых переменных x и y — координатах проекции точки M на плоскость (xy) , и

$$\int_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_0 [(X + pZ) dx + (Y + qZ) dy] = \int_0 (P dx + Q dy), \quad (7)$$

где

$$P = X + pZ, \quad Q = Y + qZ. \quad (8)$$

Применим теперь к интегралу, взятому по (C) (в положительном направлении), формулу Грина. Мы найдем

$$\int_0 (P dx + Q dy) = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

распространенному по области A , ограниченной контуром (C).

Составляя $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ на основании формул (8), надо помнить, что в этих формулах X, Y, Z — функции от x, y и z , а $z = \varphi(x, y)$ — функция от x и y ; приняв это во внимание, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial z} + Z \frac{\partial q}{\partial x} + q \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + p \frac{\partial Z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial X}{\partial y} + q \frac{\partial X}{\partial z} + Z \frac{\partial p}{\partial y} + p \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, замечая, что $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, находим

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} - p \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - q \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right).$$

Интеграл теперь преобразуется так:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz) &= \\ &= \iint_{(A)} \left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} - p \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - q \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right] dx dy, \quad (9) \end{aligned}$$

Остается ввести в рассмотрение нормаль к поверхности S , чтобы получить формулу Стокса. Представим себе, что в каждой точке M построена нормаль N к поверхности S , и на этой нормали назначено направление, идущее в сторону возрастающих z -ов, т. е. образующее острый угол с Oz ; тогда, как известно,

$$\begin{aligned} \cos(N, x) &= \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos(N, y) = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ \cos(N, z) &= \frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя в (9) вместо $-p$ и $-q$ их выражения из формул (10), а именно:

$$-p = \sqrt{1+p^2+q^2} \cos(N, x), \quad -q = \sqrt{1+p^2+q^2} \cos(N, y),$$

и припоминая, что элемент поверхности $ds = \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$, получаем

$$\int_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz) = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(N, z) \right] dz. \quad (11)$$

Это и есть *формула Стокса*.

Важно заметить, что формула (11) останется справедливой, если изменим направление обхода контура (Γ) на противоположное, изменив в то же время и направление нормали N на противоположное, потому что при этом обе части равенства (11) изменят знак, и равенство сохранится. Поэтому равенство (11) справедливо не только при выбранных выше направлениях на (Γ) и N , но *при известном соответствии* между этими направлениями. Это соответствие можно формулировать в более общем виде, независимо от положения данной части поверхности относительно координатных осей.

Условимся называть систему трех направлений A, B, C , рассматриваемых в написанной последовательности (первое A , второе B , третье C), *прямой* или *правой* системой, если для наблюдателя, для которого направление A идет от ног к голове, направление B надо повернуть *справа налево* на угол, меньший 180° , чтобы B совпало с C ; систему A, B, C будем называть *обратной* или *левой* если, при том же условии, B надо повернуть *слева направо* на угол, меньший 180° , до совпадения с C . В рассмотренном нами при выводе формулы Стокса случае система осей Oz, Ox, Oy была *правой* или *прямой* системой. Если изменим направление A *прямой* системы на противоположное, не изменяя двух других B и C , то новая система будет *обратной* или *левой*. Если же изменим направления A и B на противоположные, не изменяя C , то система будет также *прямой*, как и первоначальная. Чтобы убедиться в этом наглядно, лучше всего начертить направления B и C и им противоположные на прозрачном листе бумаги и посмотреть на чертеж сперва с лицевой, а потом с задней стороны листа. Установив это, положим, что, проведя нормаль MN к поверхности в указанном выше направлении (см. черт. 65), мы проводим еще касательную MT в направлении движения по (Γ), указанному стрелкой, и перпендикуляр Mn к MN и MT , направленный *внутрь* ограниченной контуром (Γ) части поверхности (S). При сделанном нами выборе направлений система MN, MT, Mn — *прямая*; по замеченному выше она останется прямой, если изменим направления MN и MT на

противоположные, не изменяя направления Mn ; при этом, как мы видели, формула (11) остается справедливой. Итак, вообще можем сказать, что формула (11) справедлива, когда направления MN (на нормали к поверхности), MT [направление обхода по контуру (Γ)] и Mn [на перпендикуляре к MN и MT , идущем внутрь ограниченной контуром (Γ) части поверхности] составляют прямую систему, в предположении, что Oz , Ox , Oy составляют также прямую систему. Очевидно, если предположим вторую систему обратной, то и первая должна быть обратной, иначе формула (11) не будет справедливой.

Нетрудно убедиться, что сделанные нами ограничения относительно данной части поверхности не имеют существенного значения и что формула (11) справедлива и тогда, когда данная часть поверхности ограничена не одним, а несколькими контурами, не пересекающимися друг с другом.

Будем рассматривать X , Y , Z как проекции некоторого переменного вектора W , например силы с точкой приложения (x, y, z) .
Выражения

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

примем за проекции другого вектора N , называемого *вихрем* вектора W . Тогда подинтегральное выражение правой части формулы (11) представит произведение проекции вектора N относительно нормали на соответствующий элемент поверхности ds . Это произведение $pr. N \cdot ds$ называют потоком вектора N через площадку ds .

Таким образом правая часть формулы (11) выражает собой полный поток вихревого вектора N через поверхность S . Что касается левой части, то, как мы знаем, она выражает собой работу вектора W вдоль контура Γ . Следовательно, формула Стокса выражает следующее предложение: *работа вектора (силы) вдоль контура равна потоку его вихревого вектора (вихря силы) через поверхность, ограниченную этим контуром.*

Из формулы Стокса вытекает: если

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad (12)$$

то

$$\int (X dx + Y dy + Z dz),$$

взятый по контуру Γ , равен нулю, при условии, что на контуре Γ можно натянуть поверхность S , на которой X , Y , Z и их частные производные 1-го порядка непрерывны. Иными словами,

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

не зависит от формы пути, если при непрерывной деформации этого пути (с закрепленными концами) описывается поверхность, на кото-

рой X, Y, Z , будучи непрерывными вместе с их частными производными 1-го порядка, удовлетворяют условиям (12).

Рассматривая криволинейный интеграл как работу силы, мы можем сказать: *работа силы не зависит от формы траектории, а определяется лишь положениями ее начальной и конечной точек, если при непрерывной деформации этой траектории описывается поверхность, на которой проекции силы, будучи непрерывными вместе с их частными производными 1-го порядка, удовлетворяют условиям (12).*

Наконец, заметим, что на основании формулы Стокса можно дать другое определение вихревого вектора N , не зависящее от выбора осей координат, что соответствует его физическому значению. Для этого окружим точку $M(x, y, z)$ плоским контуром C и примем в формуле Стокса за поверхность S область, ограниченную этим контуром. Обозначая через n соответствующее направление нормали к плоскости контура C мы имеем на основании формулы Стокса:

$$\int_C (X dx + Y dy + Z dz) = \int \int_{(S)} \text{пр}_n N \cdot d\sigma = \int \int \psi d\sigma,$$

где положено $\psi = \text{пр}_n N$.

По теореме о среднем значении мы далее получим

$$\int_C (X dx + Y dy + Z dz) = (\psi)_0 S,$$

где $(\psi)_0$ есть значение ψ в некоторой точке области S .

Из последнего равенства находим

$$(\psi)_0 = \frac{\int_C (X dx + Y dy + Z dz)}{S}$$

и, переходя к пределу в предположении, что контур C стягивается в точку M , получим, вследствие непрерывности ψ :

$$(\psi)_M = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_C (X dx + Y dy + Z dz)}{S}.$$

Из этого мы видим, что проекция ψ вектора N на произвольное направление не зависит от выбора осей координат, а значит, и сам вихревой вектор N не зависит от выбора осей координат.

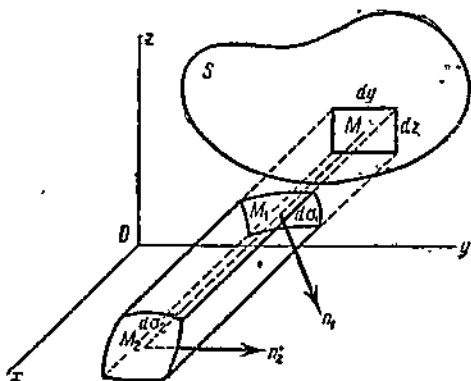
§ 4. Обобщение формулы Грина: преобразование интеграла, распространенного по телу, в интеграл по поверхности. Следствие этой формулы (теорема Грина).

1. Положим, что P есть некоторая функция от x, y, z , непрерывная во всех точках (x, y, z) некоторой части простран-

ства, ограниченной данными поверхностями. Рассмотрим интеграл

$$I = \iiint \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz,$$

распространенный по данному телу. Интегрируя сначала по x , находим сумму элементов интеграла, соответствующих элементам объема, лежащим внутри призмы, построенной на прямоугольнике $dy dz$ плоскости (yz) , с ребрами, параллельными Ox . Эта призма столько же раз входит в данное тело, сколько раз из него выходит (черт. 66). Проведя через какую-нибудь точку M элемента $dy dz$ прямую, параллельную Ox , обозначая через $x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}$ координаты точек входа $M_1, M_2, \dots, M_{2k-1}$, а через $x_2, x_4, \dots, x_{2k}$ — координаты точек выхода $M_2, M_4, \dots$ этой прямой и через P_i значение функции P в точке M_i , найдем, что результат первого интегрирования по x будет равен



Черт. 66.

$$dy dz \int \frac{\partial P}{\partial x} dx = dy dz \{P_2 - P_1 + P_4 - P_3 + \dots + P_{2k} - P_{2k-1}\}. \quad (1)$$

Если обозначим через $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots, d\sigma_{2k}$ элементы поверхностей, ограничивающей данное тело, общая проекция которых на плоскость yOz равна $dy dz$, и проведем в точках $M_1, M_2, \dots, M_{2k}$ этих элементов нормали $n_1, n_2, \dots, n_{2k}$ к поверхности, направленные внутрь данного тела, то найдем для точек входа:

$$dy dz = d\sigma_1 \cos(n_1 x) = d\sigma_3 \cos(n_3 x) = \dots = d\sigma_{2k-1} \cos(n_{2k-1} x),$$

а для точек выхода:

$$dy dz = -d\sigma_2 \cos(n_2 x) = -d\sigma_4 \cos(n_4 x) = \dots = -d\sigma_{2k} \cos(n_{2k} x),$$

потому что для первых углы $(n_1 x)$ острые, и $\cos(n_1 x) > 0$, а для вторых углы $(n_2 x)$ тупые, и $\cos(n_2 x) < 0$, числа же $dy dz$ и $d\sigma_i$ существенно положительны. Вследствие этого формула (1) напишется так:

$$dy dz \int \frac{\partial P}{\partial x} dx = -\{P_1 \cos(n_1 x) d\sigma_1 + P_2 \cos(n_2 x) d\sigma_2 + \dots + P_{2k} \cos(n_{2k} x) d\sigma_{2k}\}.$$

Чтобы получить сумму всех элементов интеграла I , надо взять сумму всех выражений, подобных полученному выше, распространенную на все элементы $dy dz$ той области, по которой проектируется на плоскость (yz) поверхность, ограничивающая данное тело, а тогда получим

$$I = \iiint \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = - \int \int_{(S)} P \cos(nx) d\sigma,$$

где в правой части интеграл распространен по всей поверхности ограничивающей данное тело, и n обозначает направление *внутренней нормали* к поверхности в любой точке элемента $d\sigma$. Обозначая через Q и R еще две непрерывные функции от x, y, z в данной области, можем написать, переставляя буквы x, y, z , две формулы, аналогичные предыдущей:

$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = - \int \int_{(S)} Q \cos(ny) d\sigma,$$

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = - \int \int_{(S)} R \cos(nz) d\sigma,$$

а сложив полученные три формулы, находим обобщенную формулу Грина:

$$\begin{aligned} \iiint_{(E)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = - \int \int_{(S)} [P \cos(nx) + Q \cos(ny) + R \cos(nz)] d\sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

дающую преобразование некоторого интеграла, распространенного по телу, в интеграл, распространенный по поверхности, ограничивающей это тело. Формулу (2) называют также *формулой Гаусса* и *формулой Остроградского*.

Поверхность, ограничивающая тело, может состоять из нескольких отдельных поверхностей; примером может служить слой, ограниченный двумя концентрическими сферами. Интеграл в правой части формулы (2) будет в этом случае равен сумме двух интегралов, распространенных один по поверхности одной, другой по поверхности другой сферы. Направление (n) обозначает направление *внутренней нормали относительно тела, ограниченного данными поверхностями, т. е. идущей, в нашем примере, внутрь слоя*; поэтому в интеграле, взятом по поверхности *внутренней сферы*, под (n) надо понимать направление нормали, идущее от центра к поверхности сферы, а в интеграле по *внешней сфере* — направление, идущее от поверхности сферы к центру.

Если P, Q, R рассматривать как проекции вектора W (например силы), то правая часть формулы (2) представляет собой, как известно, поток вектора W через поверхность S изнутри наружу.

Полагая

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и применяя теорему о среднем значении, мы получим из формулы (2):

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) \cdot V = \text{поток вектора } W \text{ через поверхность } S,$$

где V — объем области E , ограниченной этой поверхностью S , а (x_1, y_1, z_1) — некоторая точка этой области. Заставляя теперь область E стягиваться в точку (x, y, z) и принимая во внимание непрерывность функции φ , мы в пределе получим

$$\varphi(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\text{поток } W \text{ через } S}{V}.$$

Таким образом выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

не зависит от выбора осей координат. В физике это выражение называют *дивергенцией* или *расходом вектора* W в точке (x, y, z) .

Очевидно, подинтегральное выражение левой части формулы (2) представляет расход вектора W в элементарном объеме $dx dy dz$, а вся левая часть — расход этого вектора во всей области E .

Таким образом формула Гаусса-Остроградского выражает собой следующее предложение: *расход вектора (силы) в некоторой области пространства равен потоку этого вектора (силы) через поверхность, ограничивающую данную область. Поток берется изнутри поверхности наружу.*

II. Из формулы (2) вытекает весьма важная для многих вопросов математической физики формула, выражающая так называемую *теорему Грина* (эту формулу в сочинениях по математической физике и называют собственно формулой Грина). Рассмотрим интеграл

$$M = \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (3)$$

где U и V — непрерывные, вместе с их частными производными до 2-го порядка включительно, в области интегрирования функции от x, y, z . Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} - U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, & \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial \left(U \frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} - U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial \left(U \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} - U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

мы находим, что

$$M = \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(U \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] dx dy dz - \\ - \iiint U \Delta V dx dy dz,$$

где $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Прилагая к первому интегралу второй части формулу (2), положив

$P = U \frac{\partial V}{\partial x}$, $Q = U \frac{\partial V}{\partial y}$, $R = U \frac{\partial V}{\partial z}$, получим

$$M = - \iint U \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(nz) \right\} d\sigma - \\ - \iiint U \Delta V dx dy dz. \quad (4)$$

Выражение

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(nz)$$

называют производной от функции V в точке (x, y, z) , взятой по нормали, и обозначают символом $\frac{\partial V}{\partial n}$. С помощью этого символа формулу (4) можно написать так:

$$M = - \iint U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \iiint U \Delta V dx dy dz.$$

Согласно самому определению (3) числа M (оно не изменится при перестановке букв U и V) имеем

$$M = - \iint V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \iiint V \Delta U dx dy dz,$$

откуда, через вычитание, находим:

$$\iint \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] d\sigma = \iiint (V \Delta U - U \Delta V) dx dy dz, \quad (5)$$

где

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(nz),$$

ΔV и $\frac{\partial V}{\partial n}$ имеют аналогичные значения, (n) означает направление внутренней нормали относительно тела, по которому распространён тройной интеграл, и двойной интеграл распространён по всей границе этого тела. Формула (5) и выражает так называемую теорему Грина.

Главнейшие ее приложения относятся к вопросам, в которых играют роль гармонические функции, т. е. функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0.$$

(См., например, сочинение Riemann-Weber „Die partiellen Differ.-Gleichun. der mathem. Physik“.)

Упражнения

1. Найти криволинейный интеграл $\int \left(\frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx \right)$, взятый по кривой (L) , ограничивающей область, внутри которой начало координат
 Отв. 2π .

2. Проверить, что $\int_{(S)} \cos(Nx) d\sigma = 0$, где (S) — замкнутая поверхность, N — нормаль к ней и $d\sigma$ — элемент поверхности.

3. Найти $\int_{(S)} [x \cos(Nx) + y \cos(Ny) + z \cos(Nz)] d\sigma$, распространенный по поверхности какого-нибудь тела.
 Отв. $3V$, где V — объем тела.

4. Проверить, что если

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial z}{\partial x} - b \frac{\partial z}{\partial y} - cz \quad \text{и} \quad G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} - cu,$$

то
$$\int_{(S)} [uF(z) - zG(u)] dx dy = \int_{(L)} (Mdx + Ndy),$$

найдя M и N ; (S) — любая плоская область, (L) — ее контур, интегрирование по (L) выполнено против часовой стрелки.

Отв. $M = z \frac{\partial u}{\partial x} + buz$, $N = u \frac{\partial z}{\partial y} - auz$.

5. Если U — гармоническая функция в некоторой области, а (S) — сфера радиуса R с центром в точке $M(x, y, z)$, лежащая вместе со своими внутренними точками в этой области, то

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{(S)} U d\sigma.$$

- Указание. Проведя маленькую сферу (s) с центром в точке M , применить формулу Грина (5) текста к области, ограниченной сферами (S) и (s) , полагая при этом $V = \frac{1}{r}$:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Наконец, перейти к пределу, заставляя радиус сферы (s) стремиться к нулю.

6. Если U — гармоническая функция в некоторой области и шар объема V радиуса R с центром в точке $M(x, y, z)$ лежит в этой области, то

$$U(x, y, z) = \frac{1}{V} \iiint U(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

- Указание. Выбрав полярные координаты, выполнить последнее интегрирование по радиусу-вектору. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

7. Вычислить криволинейный интеграл $s = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$, распространенный по контуру эволюты эллипса в положительном направлении (площадь, ограниченную эволютой).

Отв. $s = \frac{3\pi}{8} \frac{c^4}{ab}$.

8. Вычислить тот же интеграл, распространенный по контуру петли декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Отв. $\frac{3}{2} a^2$.

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

§ 1. Введение. Во многих приложениях математического анализа, как, например, при исследовании явлений колебания, мы встречаемся с периодическими функциями, т. е. такими функциями, значения которых повторяются через определенный промежуток независимого переменного, называемый периодом этой функции. Периодическая функция с периодом $2l$ характеризуется равенством $f(x + 2l) = f(x)$, справедливым для всех значений независимого переменного. Для изображения периодических функций весьма удобно независимое переменное x представлять посредством точки окружности. Так, если функция $f(x)$ имеет период 2π , то представим x как центральный угол круга радиуса 1, отсчитываемый от произвольно выбранного начального радиуса; тогда периодичность функции $f(x)$ выражается в том, что всем точкам окружности однозначно соответствуют определенные значения функции.

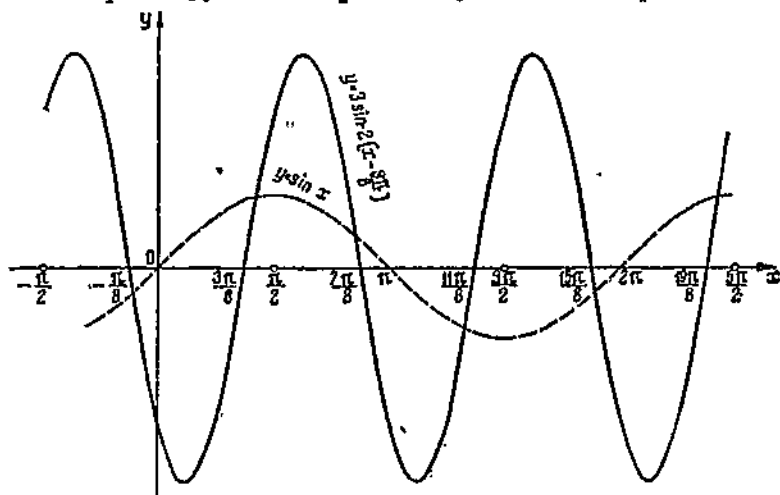
Очевидно, чтобы знать периодическую функцию с периодом $2l$, нам достаточно рассматривать ее течение на любом промежутке длины $2l$, например в области $-l < x \leq l$. Обратно, если нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная в промежутке $-l < x \leq l$, то мы можем ее всегда продолжить как периодическую функцию, назначая вне этого промежутка значения функции посредством равенства $f(x + 2nl) = f(x)$, где n обозначает произвольное целое положительное или отрицательное число. Эта операция продолжения приводит, вообще говоря, к функции разрывной в точках вида $(2n + 1)l$.

Среди точек разрыва, которые может представлять функция $f(x)$ одного переменного, следует особо различать простейший случай разрыва, часто встречающийся в дальнейшем: x_0 называется *точкой разрыва первого рода* для функции $f(x)$, если, при возрастании переменного x до x_0 , $f(x)$ стремится к конечному пределу, который обозначим, следуя Дирихле, через $f(x_0 - 0)$, и если, при убывании x до x_0 , $f(x)$ также стремится к конечному пределу, обозначаемому через $f(x_0 + 0)$ ¹⁾. Если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то функцию $f(x)$ можно считать непрерывной в точке x_0 , принимая $f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, что мы и будем всегда предполагать в дальнейшем.

¹⁾ Ради краткости пишут $f(+0)$ и $f(-0)$ вместо $f(0 + 0)$ и $f(0 - 0)$.

В случае же $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ точка x_0 будет для функции $f(x)$ точкой разрыва первого рода со скачком $D = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, причем D , очевидно, не равно нулю.

Возвращаясь теперь к определению периодической функции $f(x)$, мы заметим, что в силу периодичности, очевидно, значения x_1 и x_2 , отличающиеся друг от друга на кратное $2l$, играют одну и ту же роль в рассуждениях, так что является почти бесполезным различать такие значения x_1 и x_2 . Мы будем в этом случае писать $x_1 \equiv x_2$, заимствуя это обозначение из теории сравнений, и будем называть x_1 конгруэнтным x_2 , подразумевая, что сравнение счи-



Черт. 67.

гается по модулю $2l$. Простейшей периодической функцией будет функция вида $a \sin(\omega x + \xi)$, где $a > 0$ и ω , ξ суть постоянные. Эту функцию называют *гармоникой* с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$; число ω называется ее *частотой*, так как, если $\frac{1}{T}$ есть число колебаний в единицу, то ω равно числу колебаний в промежутке 2π . Число a называется *амплитудой гармоник*; оно дает максимальное значение, которое принимает функция $a \sin(\omega x + \xi)$. Наконец, число $\omega x + \xi$ называют *фазой*, а ξ — *начальной фазой*.

Мы получим график функции $y = a \sin(\omega x + \xi)$ из графика обыкновенной синусоиды, если изменим масштабы по направлениям осей координат в отношениях $1:\omega$ и $a:1$, а затем переместим полученную кривую вдоль оси абсцисс на расстояние $-\frac{\xi}{\omega}$ (черт. 67).

На основании формул сложения тригонометрических функций возможно нашу гармонику представить в виде

$$A \cos \omega x + B \sin \omega x,$$

где $A = a \sin \xi$, $B = a \cos \xi$. Обратно, каждая функция вида $A \cos \omega x + B \sin \omega x$ представляет гармонику $a \sin(\omega x + \xi)$ с амплитудой $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ и начальной фазой ξ , определяемой из уравнений

$$\sin \xi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \xi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отсюда мы можем заключить, что сумма гармоник с одной и той же частотой ω изображает функцию того же вида, т. е. гармонику с частотой ω .

Если мы будем рассматривать x как время, а y как координату движущейся точки, то гармоника $y = a \sin(\omega x + \xi)$ выражает закон гармонического колебательного движения. Хотя такого рода движения весьма часто встречаются в приложениях, однако большинство периодических движений имеют более сложный характер, представляя собой *наложение* простых гармонических колебаний. С математической точки зрения это обозначает следующее: расстояние точки от ее положения равновесия, задается функцией времени, которая является суммой некоторого числа гармоник. Геометрически волны отдельных гармоник тогда прикладываются одна за другой или, как принято говорить, они налагаются. Естественно при этом принимать периоды составляющих гармоник различными, так как сложение двух гармоник с одной и той же частотой дает снова гармонику с той же частотой, только с измененными амплитудой и фазой.

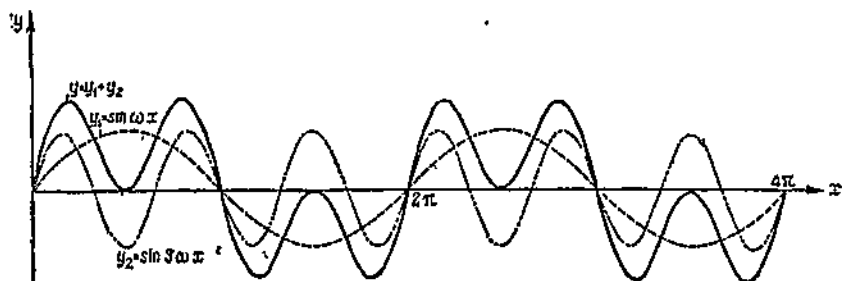
При сложении двух гармоник с частотами ω_1, ω_2 имеется существенное различие, смотря по тому, будут ли их частоты соизмеримы или нет. Рассматривая первый случай, примем сперва как простейший пример для второй частоты значение $\omega_2 = 2\omega_1$. Тогда вторая гармоника имеет вдвое меньший период, так как $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{T_1}{2}$, и, само собой разумеется, она допускает не только период T_2 ,

но также и двойной период T_1 , потому что течение функции очевидно повторяется после изменения ее аргумента на двойной период. Эту гармонику с двойным числом колебаний и половинным периодом называют первой верхней гармоникой к первоначальной.

Аналогично гармоника с частотой $\omega_3 = 3\omega_1$ будет повторяться с периодом $\frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{T_1}{3}$. Эту гармонику называют второй верхней по отношению к данной. Также мы можем рассматривать третью, четвертую и, наконец, $(n-1)$ -ю верхнюю гармонику с частотами $\omega_4 = 4\omega_1, \omega_5 = 5\omega_1, \dots, \omega_n = n\omega_1$; каждая такая верхняя гармоника, очевидно, периодически повторяется с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, и поэтому при сложении любого числа гармоник, которые все являются верхними к данной с основной частотой ω_1 , мы получаем снова

периодическую функцию с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Таким образом, складывая гармоники, начиная с основной и кончая $(n-1)$ -й верхней ее гармоникой, мы получим периодическую функцию вида

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x),$$

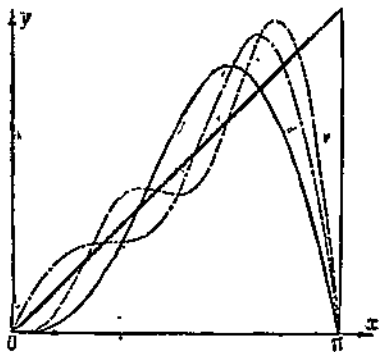


Черт. 68.

причем прибавленное постоянное a_0 очевидно не изменяет периодичности.

Свободно располагая $2n+1$ постоянными, содержащимися в этой формуле, мы получаем возможность образовать весьма сложные кривые с уравнениями $y = s_n(x)$, течение которых совсем не напоминает плавной и симметричной формы обыкновенной синусоиды. В сказанном можно наглядно убедиться, рассматривая черт. 68 и 69.

В общем случае при сложении гармоник, у которых частоты находятся в рациональных отношениях, периоды представляются как целые кратные общего основного периода. Значит и в этом случае мы получаем в результате периодическую функцию с основным периодом. Совсем иначе обстоит дело при сложении двух гармоник с несоизмеримыми частотами ω_1 и ω_2 . Получающаяся в сумме функция



Черт. 69.

не будет периодической. Однако такого рода функции напоминают течение периодических функций, т. е. они „приблизительно“ периодически повторяются, и потому их называют почти периодическими. За последние годы построена полная теория таких функций.

Заставляя в выражении

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

число гармоник n неограниченно расти, мы приходим к бесконечному ряду вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) + \dots, \quad (1)$$

где a_k , b_k и ω суть постоянные числа.

Свободный член берут с множителем $1/2$ для того, чтобы приводимое далее выражение для коэффициентов было вполне общим. Такой ряд называют тригонометрическим. Когда тригонометрический ряд (1) сходится, он изображает функцию переменного x с периодом $2l$, равным $\frac{2\pi}{\omega}$, так как сумма ряда не меняет своего значения, если мы изменим ее аргумент x на любое кратное числа $2l$. Обратно, если мы хотим представить функцию $f(x)$ посредством тригонометрического ряда (1), то мы можем всегда предполагать эту функцию определенной в промежутке $-l < x \leq l$ длины $2l$, продолжая $f(x)$ вне этого промежутка таким образом, чтобы она имела период $2l$.

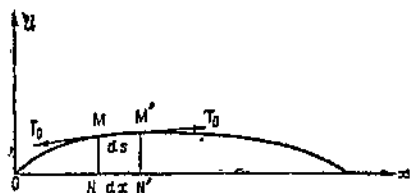
Если в тригонометрическом ряду все коэффициенты b_k суть нули, то имеем ряд из косинусов, если же все a_k — нули, то имеем ряд синусов. Такие неполные тригонометрические ряды рассматривались в самом начале развития их теории, но они представляют неудобства в том отношении, что изменяют форму при преобразовании x в $x+c$, между тем как полные тригонометрические ряды сохраняют свою форму при такой замене переменного.

Иными словами, начало координат $x=0$ не является замечательной точкой для полного тригонометрического ряда, в то время как эта точка играет особую роль для неполных рядов косинусов или синусов. Действительно, в первом из этих двух случаев имеем для суммы $\varphi(x)$ тождество $\varphi(x) = \varphi(-x)$, в силу которого $\varphi(x)$ называется четной функцией; во втором случае для суммы $\psi(x)$ ряда синусов имеем $\psi(x) = -\psi(-x)$, в силу чего $\psi(x)$ называется нечетной функцией. Заметив очевидное равенство $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, мы заключаем, что, вычислив суммы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неполных тригонометрических рядов косинусов и синусов, мы определим сумму $f(x)$ полного тригонометрического ряда, при условии, если все три ряда сходятся. В силу этих соображений можно, как это делает Фурье, заниматься определением коэффициентов неполных тригонометрических рядов косинусов и синусов, служащих для представления функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при изменении x от 0 до l , и уже отсюда вывести формулы, относящиеся к представлению функции $f(x)$ в промежутке $-l < x \leq l$ посредством полного ряда, или же принять обратный метод, рассматривая неполные ряды как частные случаи полного ряда. Мы в дальнейшем пойдем по этому, второму пути.

Теория изображения функций действительного переменного посредством тригонометрических рядов имеет исключительно важное

значение как в силу того факта, что такой способ представления функций постоянно употребляется в различных ветвях математической физики и почти во всех дисциплинах чистой математики вплоть до теории чисел, так и благодаря тому, что эта теория оказала чрезвычайно сильное влияние на развитие современного математического анализа. Еще Эйлер пришел к рассмотрению тригонометрических рядов частного вида, занимаясь некоторыми вопросами астрономии. Ему же принадлежит постановка вопроса о том, всякая ли функция изобразима тригонометрическим рядом. Эта основная проблема была поставлена Эйлером после появления работы Д. Бернулли о колеблющейся струне, в которой исследуется вопрос о форме струны в состоянии поперечного колебания¹⁾. Выведем натянутую

струну длины l , два конца которой закреплены в точках $x=0$ и $x=l$, из ее положения равновесия и предоставим ее, самой себе в момент $t=0$, не сообщая начальной скорости (черт. 70). Обозначим через u ординату точки струны, в момент $t=0$, находящейся на расстоянии x от постоянного начала в положении равновесия.



Черт. 70.

При такой постановке задачи u является функцией двух независимых переменных x и t , удовлетворяющей двум начальным условиям: 1) $u=f(x)$ при $t=0$, каково бы ни было x , заключенное в сегменте $[0, l]$, причем $f(0)=f(l)=0$, 2) $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ при $t=0$ и любом x из сегмента $[0, l]$, и двум граничным условиям: 1) $u=0$ при $x=0$ и любом t , 2) $u=0$ при $x=l$ и любом t . Выведем теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x, t)$, дающая величину поперечного колебания струны, предполагая, что внешние силы отсутствуют, т. е. рассматривая случай свободных колебаний. С этой целью выделим элемент струны $ds=MM'$, который в равновесии занимал положение $NN'=dx$ (черт. 70).

Имеем

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = dx,$$

пренебрегая квадратом малой величины $\frac{\partial u}{\partial x}$ ²⁾. Скорость точки M есть, очевидно, $\frac{\partial u}{\partial t}$, а ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, так как движение точки M

¹⁾ Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться и работает только на растяжение.

²⁾ Мы рассматриваем малые колебания, а потому u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ считаются малыми величинами.

совершается перпендикулярно Ox ; масса же элемента MM' будет ρdx , где ρ обозначает линейную плотность струны. Приравняв произведение массы элемента струны на его ускорение, т. е. $\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, силе, действующей на этот элемент, мы получим искомое уравнение движения. Остается, следовательно, подсчитать величину силы, действующей на выделенный элемент. На элемент MM' действуют силы: натяжение T_0 в точке M' , направленное по касательной в точке M' , и натяжение T_0 в точке M , направленное по касательной в точке M в обратную сторону. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания струны, предполагая, что точки струны движутся параллельно оси Ou , то мы должны ограничиться составляющими по оси Ou , что нам даст

$$T_0 \sin \alpha' - T_0 \sin \alpha, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Замечая, что $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} = \frac{\partial u}{\partial x}$, мы имеем

$$\sin \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M, \quad \sin \alpha' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}.$$

Следовательно, составляющая по оси Ou сил, действующих на выделенный элемент, будет:

$$T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \right] \approx T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Итак уравнение движения будет

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

или, сокращая на dx и обозначая $\frac{T_0}{\rho}$ через a^2 , перепишем его в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде $u = X \cdot T$, где X есть функция одного x , а T зависит только от t . Подставляя $u = X \cdot T$ в наше уравнение, получим

$$XT'' = a^2 X''T, \text{ или } \frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}.$$

Так как левая часть зависит только от t , а правая только от x , то вследствие независимости x и t между собой должно быть

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = \text{const.}$$

Это постоянное будем считать отрицательным, так как

$$\text{const} = a^2 \frac{X''}{X} = a^2 \frac{X'' T}{X T} = a^2 \frac{\partial^2 u / \partial x^2}{u},$$

вторая же производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ имеет знак, противоположный знаку u ¹⁾ (черт. 70). Итак можем положить

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -a^2 n^2.$$

Из уравнения $X'' = -n^2 X$ находим

$$X = A \cos nx + B \sin nx.$$

В силу граничных условий должно быть $X=0$ при $x=0$ и $x=l$, что дает

$$A=0, \quad \sin nl=0,$$

откуда

$$nl = k\pi, \quad \text{или} \quad n = \frac{\pi}{l} k,$$

где k — любое целое число.

Таким образом имеем

$$X = B \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Точно так же из уравнения $T'' = -a^2 n^2 T$ найдем

$$T = A_1 \cos ant + B_1 \sin ant.$$

В силу второго начального условия должны потребовать, чтобы

$$T' = -A_1 na \sin ant + B_1 na \cos ant$$

обращалось в нуль при $t=0$, что будет при $B_1=0$. Итак имеем

$$T = A_1 \cos ant = A_1 \cos \frac{a\pi k}{l} t.$$

Следовательно,

$$u = XT = C \sin \frac{\pi k x}{l} \cos \frac{a\pi k t}{l} \quad (C = A_1 B)$$

будет решением нашего уравнения, причем это решение удовлетворяет обоим граничным условиям и второму из начальных условий. Так как в наших рассуждениях k означает любое целое число, то мы получим бесконечную последовательность частных решений нашего дифференциального уравнения, давая k значения 1, 2, 3, ... (при $k = -1, -2, -3, \dots$ получим те же решения вследствие произвольности постоянного множителя C ; при $k=0$ получим тривиальное решение $u \equiv 0$). Следовательно, мы нашли последовательность частных решений рассматриваемого дифференциального уравнения:

$$u_k = C_k \sin \frac{\pi k x}{l} \cos \frac{a\pi k t}{l} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

¹⁾ При этом мы принимаем, что, когда $u > 0$, кривая $u = u(x, t)$ обращена выпуклостью кверху, когда же $u < 0$, то — вогнутостью кверху.

каждое из которых удовлетворяет обоим граничным условиям и второму начальному условию задачи. Очевидно,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{a\pi t}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2a\pi t}{l} + \dots, \quad (2)$$

будучи суммой из u_k , будет формально удовлетворять как дифференциальному уравнению нашей задачи, так и обоим граничным и второму начальному условиям, каковы бы ни были постоянные C_k . Остается подобрать постоянные C_k так, чтобы u удовлетворяло первому начальному условию задачи, т. е. чтобы при $t=0$ функция u обращалась в заданную а priori функцию $f(x)$. Полагая в формуле для u переменное t равным значению 0, получим

$$f(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (3)$$

Таким образом u , определяемое формулой (2), дает решение поставленной задачи о поперечном колебании струны, где постоянные C_k определяются, согласно формуле (3), как коэффициенты разложения данной функции $f(x)$ в ряд синусов дуг, кратных $\frac{\pi x}{l}$, на сегменте $[0, l]$. Д. Бернулли рассматривает свою формулу (2) как самое общее решение задачи. Для того чтобы это было так, нужно, чтобы функция $f(x)$ могла быть представлена в виде ряда синусов (3) для всякого x , изменяющегося от 0 до l .

В эпоху Эйлера различали два рода кривых: с одной стороны, геометрические кривые, у которых x и y связаны аналитическим соотношением, с другой стороны, произвольные кривые, которые возможно изобразить графически по нашему желанию. Эйлер и его современники полагали, что второй класс кривых более широкий, чем первый. Отсюда понятно, что, для того чтобы утверждение Бернулли, который рассматривал свою формулу как общее решение задачи поперечно колеблющейся струны, было обосновано, нужно было доказать, что произвольная кривая, представляющая начальное положение струны, могла быть определена аналитически с помощью тригонометрического ряда, т. е. в сущности доказать совпадение произвольной кривой с геометрической кривой. Простейший случай, который можно рассмотреть, заключается в том, что за начальное положение струны принимают ломаную линию с двумя звеньями. Если принять справедливым утверждение Бернулли, то выходит, что один и тот же тригонометрический ряд может равняться одной линейной функции в одном сегменте и другой линейной функции в другом сегменте. Отсюда следует, что два аналитических выражения, тригонометрический ряд и линейная функция, равны в одном сегменте и не равны в другом. Все это в ту эпоху казалось невозможным. В то время допускали, что два аналитических выражения, равные в одном сегменте, равны повсюду, и отсюда естественно

заклучали о том, что достаточно задать функцию с аналитическим определением в сколь угодно малом сегменте для того, чтобы она была тем самым и однозначно определена во всей своей области существования. Между прочим, из таких воззрений происходит название „непрерывная“ функция, которое Эйлер дал этим аналитически представимым функциям, постоянным, с точки зрения Эйлера, по своим свойствам. Только Коши дал впервые точное определение непрерывной функции, которым мы пользуемся в настоящее время. Эти ложные воззрения на понятие функции, существовавшие у современников Эйлера и задерживавшие эволюцию этого основного понятия математики, удалось разрушить окончательно Дирихле, которым впервые была строго разрешена основная проблема об изображении функции сходящимся тригонометрическим рядом. Дирихле дал весьма общие условия, накладываемые им на класс функций, представимых с помощью сходящихся тригонометрических рядов. С этими условиями Дирихле мы познакомимся на страницах настоящей главы. До появления работы Дирихле существовали лишь аргументы физического характера, с помощью которых пытались доказать возможность разложения произвольной функции в сходящийся тригонометрический ряд. Например, приводилось такого рода рассуждение: функция $f(x)$ с периодом $2l$, $2l = \frac{2\pi}{\omega}$, повсюду непрерывная, может быть рассматриваема как определяющая в момент x положение конца колеблющейся волны. Эта волна производит звук, который можно разложить на простейшие звуки; его гармоники соответствуют движениям, определяемым функциями вида

$$p_n \sin(n\omega x + \xi_n) = a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x.$$

Таким образом $f(x)$ есть сумма таких простейших функций. Очевидно, такого рода аргументы не могут заменить математического доказательства. Впрочем, что сразу показывает несостоятельность попыток такого рода, существуют непрерывные функции, не разложимые в сходящиеся тригонометрические ряды.

Итак, мы видим, сколь важное принципиальное значение имела проблема о возможности представления произвольной функции тригонометрическим рядом в истории развития самого понятия функции. С другой стороны, к самой постановке этой общей проблемы математики пришли из рассмотрения частных задач математической физики, среди которых задача о колеблющейся струне была лишь первой из многочисленных других физических задач, приводящих к необходимости представления функций тригонометрическими рядами.

§ 2. Приближенное выражение функций тригонометрическими суммами. Во многих вопросах естествознания приходится иметь дело с периодическими функциями, и вследствие этого задача о приближенном изображении таких функций посредством тригонометрических сумм приобретает особо важное значение. Допустим, что единица меры выбрана так, что период данной периодической функ-

ции $f(x)$ равен 2π ¹⁾. Задача состоит в том, чтобы функцию $f(x)$ приближенно изобразить посредством суммы косинусов и синусов аргументов, кратных x , вплоть до n -й кратности с подходяще выбранными постоянными коэффициентами; другими словами, нужно заменить функцию $f(x)$ с возможно малой ошибкой выражением такого вида:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \dots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx. \quad (1)$$

Нам нужно предварительно условиться о том, каким образом мы будем измерять погрешность, происходящую от замены функции $f(x)$ тригонометрической суммой порядка n , при данном значении n . Для этой цели мы воспользуемся идеей, примыкающей к методу наименьших квадратов. Величина погрешности в точке x , получаемая при замене $f(x)$ тригонометрической суммой (1), равна $f(x) - S_n(x)$; за меру погрешности изображения функции $f(x)$ посредством суммы (1) во всем промежутке $-\pi < x \leq \pi$, составляющем один период, примем корень квадратный из среднеарифметического квадратов всех ошибок, т. е. величину I_n , где

$$I_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx.$$

Наилучшее приближение значений функции $f(x)$ доставит, следовательно, та сумма $S_n(x)$, для которой этот интеграл I_n^2 , дающий квадрат так называемой средней квадратичной ошибки, получает наименьшее значение; на основании этого требования мы можем определить значения всех $2n+1$ коэффициентов:

$$a_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n.$$

С этой целью преобразуем прежде всего выражение I_n^2 :

$$\left. \begin{aligned} I_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{[f(x)]^2 - 2f(x)S_n(x) + [S_n(x)]^2\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)S_n(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [S_n(x)]^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставляя во второй интеграл вместо $S_n(x)$ сумму из формулы (1), получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)S_n(x) dx = \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx + \frac{\alpha_1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos x dx +$$

¹⁾ Следовательно частота $\omega = 1$.

$$+ \dots + \frac{a_n}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx + \frac{b_1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin x \, dx + \dots + \\ + \frac{b_n}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{a_0 a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (\alpha_v a_v + \beta_v b_v);$$

при этом мы пользуемся обозначениями

$$\alpha_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos vx \, dx, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin vx \, dx. \quad (I)$$

Интегралы вида (I) называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Прежде чем приступить к образованию третьего интеграла, который отличается от второго тем, что функция $f(x)$ заменена функцией $\frac{1}{2} S_n(x)$, отметим ряд вспомогательных формул. Так как

$$\cos lx \cos mx = \begin{cases} \frac{\cos(l-m)x + \cos(l+m)x}{2}, & \text{если } l \neq m, \\ \frac{1 + \cos 2mx}{2}, & \text{если } l = m, \end{cases}$$

то

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos lx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq m, \\ \pi, & \text{если } l = m. \end{cases} \quad (3')$$

Заметив, что

$$\sin lx \sin mx = \begin{cases} \frac{\cos(l-m)x - \cos(l+m)x}{2}, & \text{если } l \neq m, \\ \frac{1 - \cos 2mx}{2}, & \text{если } l = m, \end{cases}$$

имеем

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin lx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq m, \\ \pi, & \text{если } l = m. \end{cases} \quad (3'')$$

Наконец, замечая, что

$$\sin lx \cos mx = \begin{cases} \frac{\sin(l+m)x + \sin(l-m)x}{2}, & \text{если } l \neq m, \\ \frac{\sin 2mx}{2}, & \text{если } l = m, \end{cases}$$

получим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin lx \cos mx \, dx = 0. \quad (3''')$$

Теперь мы можем легко вычислить коэффициенты Фурье от функции $1/2 S_n(x)$. Действительно, при $v=0, 1, 2, \dots, n$ находим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x) \cos vx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos vx \, dx + a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos x \cos vx \, dx + \dots \\ &\dots + a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos vx \, dx + \beta_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \cos vx \, dx + \dots \\ &\dots + \beta_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos vx \, dx. \end{aligned}$$

Согласно формулам (3', 3''), все члены справа равны нулю, кроме члена, содержащего a_v , который равен $a_v \cdot \pi$.

Таким образом находим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x) \cos vx \, dx = a_v \cdot \pi \quad (v=0, 1, \dots, n).$$

Эта формула справедлива и при $v=0$, благодаря тому, что мы присоединили множитель $1/2$ к коэффициенту a_0 . Таким же образом находим далее, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x) \sin vx \, dx = \beta_v \cdot \pi \quad (v=1, 2, \dots, n).$$

Итак, коэффициенты Фурье от функции $1/2 S_n(x)$ равны

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} S_n(x) \cos vx \, dx = \frac{1}{2} a_v, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} S_n(x) \sin vx \, dx = \frac{1}{2} \beta_v.$$

Следовательно, для третьего интеграла получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x) S_n(x) \, dx = \frac{a_0 \cdot a_0}{4} + \sum_{v=1}^n \left(a_v \frac{a_v}{2} + \beta_v \frac{\beta_v}{2} \right) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n (a_v^2 + \beta_v^2).$$

Подставим найденные значения второго и третьего интегралов в формулу (2) и произведем простые преобразования

$$\begin{aligned} I_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx - \frac{a_0 a_0}{2} - \sum_{v=1}^n (a_v a_v + \beta_v \beta_v) + \frac{a_0^2}{4} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n (a_v^2 + \beta_v^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx + \frac{a_0^2 - 2a_0 a_0 + a_0^2}{4} - \frac{a_0^2}{4} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n [(a_v^2 - 2a_v a_v + a_v^2) + (\beta_v^2 - 2\beta_v \beta_v + \beta_v^2)] - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n (a_v^2 + \beta_v^2). \end{aligned}$$

Таким образом окончательно получаем

$$I_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx + \frac{(a_0 - a_0)^2}{4} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n [(\alpha_v - a_v)^2 + (\beta_v - b_v)^2] - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2). \quad (4)$$

Эта формула обнаруживает, что средняя квадратичная погрешность приближенного выражения функции $f(x)$ посредством тригонометрической суммы n -го порядка будет наименьшей, если коэффициенты этой суммы суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$. В самом деле, в этом и только в этом случае обращаются в нуль все квадраты разностей, т. е. исчезает в сумме целый ряд положительных слагаемых.

Величину I_n наименьшей погрешности получим, подставляя в формулу (4) вместо α_v, β_v соответственно a_v, b_v , что дает

$$I_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2). \quad (4')$$

Эта наименьшая погрешность I_n соответствует тригонометрической сумме Фурье n -го порядка

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx).$$

Весьма важно отметить, что полученные значения коэффициентов Фурье не зависят от общего числа членов тригонометрической суммы. Даже более того, если в аппроксимирующей тригонометрической сумме значения некоторых коэффициентов заранее фиксированы, то и в этом случае, как показывает формула (4), наименьшая квадратичная погрешность получится, очевидно, когда значения остальных коэффициентов будут равны соответствующим коэффициентам Фурье функции $f(x)$, так как при этом обращаются в нуль все находящиеся в нашем распоряжении положительные слагаемые в выражении для I_n^2 . Если, например, мы хотим возможно ближе аппроксимировать функцию $f(x)$ посредством одного только члена с синусом $\beta_v \sin vx$ (т. е. значения всех остальных α и β берем равными нулю), то и в таком случае мы получим для β_v как раз написанное выше значение b_v . Вследствие этого указанный метод приближения оказывается особенно удобным на практике. Действительно, аппроксимируя функцию, ход изменений которой похож на ход изменений синуса, помощью одного только члена с $\sin vx$ и замечая при этом, что это приближение недостаточно точно, мы можем присоединить в виде слагаемых сколько угодно членов на основании того же

принципа наименьшей среднеарифметической суммы квадратов ошибок, не изменяя величины уже найденного первого члена.

Выражение (4) показывает, что при возрастании n , т. е. порядка тригонометрической суммы, погрешность J_n может только уменьшаться, т. е. точность приближения увеличивается при возрастании n . Можно доказать, что при неограниченном возрастании n погрешность J_n стремится к нулю, т. е. точность приближения можно сделать сколь угодно большой. Иными словами, существует замечательное соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v^2 + b_v^2). \quad (5)$$

Весьма важно отметить, что сходимость бесконечного ряда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v^2 + b_v^2)$$

уже вытекает из установленной здесь формулы (4'), которая показывает, что сумма

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^2 + b_v^2),$$

не убывающая при возрастании n , остается при всяком n меньше постоянного числа

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 dx,$$

а следовательно, стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании n .

Так как общий член сходящегося ряда стремится к нулю, то заключаем: *коэффициенты Фурье*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx$$

стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Во всем предыдущем анализе мы считали периодическую функцию $f(x)$ кусочно-непрерывной на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$ (следовательно и в любом конечном сегменте), т. е. могущей иметь в этом сегменте лишь конечное число точек разрыва 1-го рода.

До сих пор мы рассматривали промежуток $-\pi < x \leq \pi$, но мы могли бы, конечно, с таким же успехом взять любой промежуток длины 2π , например $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, так как подинтегральные функции во всех встречающихся интегралах имеют период 2π . В частности,

отметим, что в формулах (1) для a_n и b_n можно заменить пределы $-\pi$ и $+\pi$ соответственно через α и $\alpha + 2\pi$ (α — произвольное число), не изменяя величины a_n и b_n .

Примечание 1. Мы видели, что интегралы

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{и} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , какова бы ни была функция $f(x)$, кусочно-непрерывная на сегменте $[\alpha, \alpha + 2\pi]$. Это заключение остается в силе, если за промежуток интегрирования принять любой сегмент $[a, b]$, т. е. интегралы

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , если $f(x)$ — функция кусочно-непрерывная на $[a, b]$.

Этот случай приводится к доказанному путем введения вспомогательной функции $\varphi(x)$, полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } b < x \leq a + 2\pi. \end{cases}$$

Мы считаем $b \leq a + 2\pi$, что всегда можно предполагать, так как интегралы, у которых промежуток интегрирования равен 2π по предположению, стремятся к нулю с возрастанием n . Тогда, заметив, что

$$\int_a^b f(x) \cos nx \, dx = \int_a^{\alpha+2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx$$

и

$$\int_a^b f(x) \sin nx \, dx = \int_a^{\alpha+2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx,$$

убеждаемся в справедливости нашего утверждения: интегралы правых частей последних равенств стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , так как $\varphi(x)$ есть функция кусочно-непрерывная на $[a, \alpha + 2\pi]$.

Примечание 2. Из доказанной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

вытекает сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}$.

Действительно, так как $(|a_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$, то $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} (a_n^2 + \frac{1}{n^2})$, и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ вытекает из сходимости рядов $\sum a_n^2$ и $\sum \frac{1}{n^2}$.

Аналогично доказывается сходимость ряда $\sum \frac{|b_n|}{n}$.

§ 3. Ряд Фурье. Для всякой функции $f(x)$ периода 2π , кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, +\pi]$, можно составить последовательность коэффициентов Фурье по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots,$$

в котором коэффициенты a_n и b_n определены по формулам (1), называется *рядом Фурье*, соответствующим функции $f(x)$.

Если ряд Фурье сходится при каком-либо значении x_0 , то он сходится и имеет ту же сумму для всех значений x , $x \equiv x_0$. Сумма ряда Фурье есть, следовательно, периодическая функция с периодом 2π . Поэтому всякий ряд Фурье достаточно исследовать в каком-нибудь промежутке длины 2π , например, в промежутке $-\pi < x \leq \pi$.

Основная задача теории рядов Фурье заключается в установлении условий, накладываемых на функцию $f(x)$, при наличии которых эта функция разлагается в ряд Фурье, т. е.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \rightarrow f(x)$$

при $n \rightarrow \infty$ или, что то же,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k и b_k определяются по формулам (1).

При помощи ряда Фурье мы осуществляем разложение сложной периодической функции $f(x)$ на составляющие гармоники, периоды которых относятся как

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \dots$$

Очевидно, что тем самым сложный закон периодического явления, характеризуемый функцией $f(x)$, приводится к ряду простых законов гармонического колебания. Эти простые законы действуют самостоятельно и независимо друг от друга, но действия их складываются. Так, например, рассмотрим вопрос о вынужденных колебаниях упругой системы и предположим, что сила, вызывающая эти колебания, выражается посредством одной гармоники. Тогда легко установить, что при приближении периода этой силы T к периоду τ свободных колебаний рассматриваемой упругой системы амплитуда колебаний резко возрастает, т. е. имеет место явление резонанса. Во многих случаях, однако, внешняя периодическая сила не может быть представлена в виде одной гармоники, и тогда, чтобы разобраться в ее действии, нужно разложить ее на составляющие гармоники, отдельно учесть действия этих составляющих и сложить их действия. Так как периоды этих составляющих гармоник будут $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$, то, очевидно, резкого повышения амплитуды можно ожидать не только тогда, когда τ близко к T , но и когда τ близко к $\frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$.

Итак, мы приходим к необходимости разложения периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Основной метод для решения поставленной задачи состоит в следующем. Заменяя в сумме $(n+1)$ первых членов ряда Фурье коэффициенты a_k и b_k по формулам Фурье, представляем эту сумму $s_n(x)$ в виде интеграла

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \dots + \cos n(\alpha - x) \right] d\alpha \end{aligned}$$

который легко преобразуется к виду

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\cos n(\alpha - x) - \cos(n+1)(\alpha - x)}{1 - \cos(\alpha - x)} d\alpha. \quad (2)$$

В этой цепи преобразований требует доказательства только последнее преобразование суммы

$$s(y) = \frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \dots + \cos ny.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} 2s(y) \cos y &= \cos y + 2 \cos y \cos y + 2 \cos y \cos 2y + \dots + 2 \cos y \cos ny = \\ &= \cos y + 1 + \cos 2y + \cos y + \cos 3y + \dots + \cos(n-1)y + \cos(n+1)y = \\ &= 1 + 2 \cos y + 2 \cos 2y + \dots + 2 \cos(n-1)y + \cos ny + \cos(n+1)y, \end{aligned}$$

откуда

$$2s(y)(1 - \cos y) = \cos ny - \cos(n+1)y$$

и, следовательно,

$$s(y) = \frac{\cos ny - \cos(n+1)y}{2(1 - \cos y)}.$$

Заставляя теперь n стремиться к бесконечности, мы ищем предел выражения (2), каковой и будет представлять сумму ряда Фурье в точке x . К исследованию этой задачи мы вернемся в дальнейшем. Теперь же заметим только, что если $f(x)$ есть произвольная периодическая функция, кусочно-непрерывная на $[-\pi, +\pi]$, то $s_n(x)$ не стремится вообще к определенному пределу при $n \rightarrow \infty$, т. е. такая функция не является суммой ряда Фурье. Более того, можно построить пример периодической всюду непрерывной функции $f(x)$, ряд Фурье которой расходится при отдельных значениях x (точки расходимости могут образовывать бесконечное множество точек, заключенное в сегменте $[-\pi, +\pi]$ ¹⁾. Итак, даже непрерывная периодическая функция должна удовлетворять дополнительным условиям, для того чтобы она могла быть рассматриваема как сумма своего ряда Фурье.

Примечание. Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

можно записать в более сжатой форме, если заметить, что

$$\cos kx + i \sin kx = e^{kxi}, \quad a_k - b_k i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-kxi} dx.$$

Придавая в последней формуле k целые значения как положительные, так и отрицательные, мы замечаем, что при замене k на $-k$ коэффициент a_k останется без изменения, а b_k переменит знак. Таким образом сумма двух выражений вида $(a_k - b_k i) e^{kxi}$ при значениях k , равных по абсолютной величине, но обратных по знаку, будет

$$(a_k - b_k i) e^{kxi} + (a_k + b_k i) e^{-kxi} = 2(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Следовательно, полагая

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-kxi} dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

можно записать ряд Фурье в следующем виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}.$$

¹⁾ Вопрос о том, могут ли точки расходимости заполнять весь промежуток $[-\pi, \pi]$ до сих пор не разрешен и представляет одну из сложнейших проблем теории рядов Фурье.

§ 4. Основная теорема. Основная идея вывода состоит в том, что сумма n первых членов ряда Фурье приводится к такому виду, который позволяет исследовать ее поведение при стремлении n к бесконечности.

Как мы видели [§ 3, формула (2)], сумма $n+1$ первых членов ряда Фурье может быть представлена в виде

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\cos n(\alpha-x) - \cos(n+1)(\alpha-x)}{1 - \cos(\alpha-x)} d\alpha. \quad (1)$$

Замечая, что

$$\cos n(\alpha-x) - \cos(n+1)(\alpha-x) = 2 \sin(2n+1) \frac{\alpha-x}{2} \sin \frac{\alpha-x}{2}$$

и

$$1 - \cos(\alpha-x) = 2 \sin^2 \frac{\alpha-x}{2},$$

напишем $s_n(x)$ так:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha-x}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-x}{2}} d\alpha. \quad (2)$$

Так как подынтегральная функция имеет период 2π , то, очевидно, наш интеграл не изменит своего значения, если вместо сегмента $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ мы его распространим на любой другой сегмент длины 2π . Всего удобнее будет выбрать сегмент интегрирования $x - \pi \leq \alpha \leq x + \pi$.

Тогда мы получаем

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha) \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha-x}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-x}{2}} d\alpha. \quad (2')$$

Введя в (2') новое переменное интегрирования при помощи подстановки $\alpha - x = 2t$, мы находим

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt. \quad (3)$$

Последний интеграл (3) представим в виде суммы двух интегралов. Разбивая промежуток интегрирования на части $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ и $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$$

и, наконец, меняя в первом интеграле знак у переменного интегрирования, найдем

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x-2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt. \quad (4)$$

В этом виде мы и будем исследовать сумму $s_n(x)$ при стремлении n к бесконечности, считая при этом x неизменным.

Теорема. Всякая функция $f(x)$, с периодом 2π , кусочно-непрерывная вместе со своей производной на сегменте $[-\pi, \pi]$, разлагается в соответствующий ей ряд Фурье, причем за значение функции в каждой точке разрыва принимается среднее арифметическое предельных ее значений справа и слева.

Доказательство. За значение функции в произвольной точке x мы должны принять

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

потому что в точке непрерывности

$$f(x+0) = f(x-0) = f(x)$$

и наша дробь обращается в $f(x)$, а в точке разрыва мы так именно должны выбрать значение функции, согласно условию теоремы. Таким образом наша задача заключается в исследовании поведения разности

$$s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

при $n \rightarrow \infty$; теорема будет доказана, если мы покажем, что эта разность стремится к нулю при неограниченном возрастании n . С этой целью, пользуясь формулой (4), представим сначала нашу разность в виде, удобном для ее исследования. Из формулы (4) при $f(x) \equiv 1$, находим

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt,$$

или

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+0) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$$

и

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x-0) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

Вычитая два последних равенства из (4), получим

$$s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) - f(x+0)] \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x-2t) - f(x-0)] \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = I_1 + I_2. \quad (5)$$

Мы покажем при условиях теоремы, что $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0$, откуда в силу (5) заключим о справедливости теоремы.

Итак, займемся исследованием поведения интеграла I_1 при $n \rightarrow \infty$. Перепишем I_1 в виде

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) - f(x+0)] \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) - f(x+0)}{2t} \frac{2t}{\sin t} \sin(2n+1)t dt, \quad (6)$$

Полагая для сокращения письма

$$F(t) = \frac{f(x+2t) - f(x+0)}{2t} \frac{2t}{\sin t}, \quad (7)$$

мы видим, что $F(t)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$, так как

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = 2f'(x+0)$$

есть конечное число; последний предел мы легко найдем, если заметим, что

$$\frac{f(x+2t) - f(x+0)}{2t} = f'(\xi), \quad \text{где } x < \xi < x+2t.$$

Заметив это, представим I_1 в виде

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} F(t) \sin(2n+1)t dt;$$

как было уже доказано (§ 2, примечание 1), $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0$.

Также обнаружим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0$. Итак, теорема доказана.

§ 5. Метод Дирихле. Лемма I. Если a и b — числа одинаковых знаков и ни одно из них не равно нулю, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = 0, \quad (8)$$

где $f(x)$ — любая функция, кусочно-непрерывная на $[a, b]$.

Действительно, мы знаем (§ 2, примечание 1), что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin mx \, dx = 0,$$

какова бы ни была функция $\varphi(x)$, кусочно-непрерывная на $[a, b]$. Полагая $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$, мы видим, что $\varphi(x)$ будет кусочно-непрерывной функцией на сегменте $[a, b]$, так как x не обращается в нуль на сегменте $[a, b]$. Следовательно, лемма доказана.

Примечание. Это предложение остается справедливым в случае $a > 0, b = \infty$, при условии что $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$ существует.

Действительно, замечая, что $\int_a^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} \, dx = \int_a^l + \int_l^\infty$, мы выберем l столь большим, чтобы

$$\left| \int_l^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} \, dx \right| < \frac{1}{l} \int_l^\infty |f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

где положительное число ε — данное сколь угодно малое число.

Считая l фиксированным, мы по лемме заключаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^l f(x) \frac{\sin mx}{x} \, dx = 0, \quad \text{т. е.} \quad \left| \int_a^l f(x) \frac{\sin mx}{x} \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

начиная с достаточно большого значения m . Итак, окончательно находим:

$$\left| \int_a^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} \, dx \right| = \left| \int_a^l + \int_l^\infty \right| \leq \left| \int_a^l \right| + \left| \int_l^\infty \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

при всех достаточно больших значениях m .

Последнее же неравенство равносильно утверждению

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} \, dx = 0.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению второй леммы, введем определение:

Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условию Дирихле на сегменте $[a, b]$, если она ограничена на этом сегменте, и если этот сегмент можно разбить на конечное число таких отрезков, что внутри каждого из них $f(x)$ — функция непрерывная и монотонная¹⁾.

Иными словами, функция $f(x)$ имеет на данном сегменте конечное число максимумов и минимумов.

¹⁾ То-есть или постоянно не убывает, или постоянно не возрастает при возрастании x .

Замечание. Очевидно, из определения следует, что для $f(x)$, удовлетворяющей условию Дирихле на $[a, b]$, существуют конечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$. Кроме того, во всякой точке разрыва x_0 , $a < x_0 < b$ существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Точек разрыва — конечное число.

Примером функции, не удовлетворяющей условию Дирихле, может служить функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, непрерывная и имеющая бесконечное число максимумов и минимумов на сегменте $[-a, a]$, каково бы ни было число a .

Лемма II. Если $b > 0$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0), \quad (II)$$

где $f(x)$ функция, удовлетворяющая условию Дирихле на $[0, b]$.

Прежде всего заметим, что если формула (II) будет верна при b сколь угодно малом, то она будет верна и при b любом, потому что, в последнем случае, полагая $b = b_1 + b_2$, где $b_2 > 0$, b_1 сколь угодно мало, имеем

$$\int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \int_0^{b_1} f(x) \frac{\sin mx}{x} dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x) \frac{\sin mx}{x} dx.$$

Предел второго интеграла второй части в силу леммы I равен нулю, и вопрос приводится к рассмотрению первого, у которого верхний предел сколь угодно мал. Поэтому при выводе формулы (II) можно предполагать b произвольно малым.

Выбирая b достаточно малым, мы можем считать функцию $f(x)$ непрерывной и монотонной в промежутке $0 < x \leq b$. Более того, мы можем считать, что $f(x)$ — невозрастающая функция в пределах интеграла, потому что если формула доказана для такой функции, то она будет верна и для убывающей функции. В самом деле, если $f(x)$ — неубывающая функция, то $-f(x)$ — невозрастающая, и если справедлива формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b [-f(x)] \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} [-f(+0)],$$

то верна и формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0).$$

Наконец, мы можем еще предположить, что $f(x)$ сохраняет положительный знак в пределах интеграла, так как в противном случае можно сначала вместо $f(x)$ взять функцию $F(x) = f(x) + C$, где постоянное C подобрано так, чтобы $F(x)$ было положительным при $0 < x \leq b$, и, доказав формулу

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b F(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} F(+0)$$

для положительной функции $F(x)$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b [f(x) + C] \frac{\sin mx}{x} dx &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx + \lim_{m \rightarrow \infty} C \int_0^b \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} [f(+0) + C], \end{aligned}$$

а так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C \int_0^b \frac{\sin mx}{x} dx = C \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{bm} \frac{\sin y}{y} dy = C \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = C \frac{\pi}{2},$$

то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0),$$

и формула (II) будет доказана и для данной функции $f(x)$.

Из всего сказанного вытекает, что при доказательстве формулы (II) можно считать $f(x)$ — положительной невозрастающей непрерывной функцией в области $0 < x \leq b$. Доказанная при этих ограничениях формула будет доказана и вообще. Покажем теперь, что при упомянутых ограничениях интеграл

$$I = \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx$$

есть число положительное, меньшее некоторого постоянного числа, каково бы ни было m .

Для этого заметим, что подынтегральная функция меняет знак, когда x переходит через значения $x = \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \dots$, для которых $\sin mx$ обращается в нуль. Положим, что $\frac{h\pi}{m}$ есть наибольшее из чисел этого ряда, не превосходящее b , т. е.

$$\frac{h\pi}{m} \leq b < \frac{(h+1)\pi}{m}.$$

Интеграл I можно разбить на сумму интегралов, взятых в пределах

$$\left[0, \frac{\pi}{m}\right], \left[\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}\right], \dots, \left[\frac{(h-1)\pi}{m}, \frac{h\pi}{m}\right] \text{ и } \left[\frac{h\pi}{m}, b\right].$$

В пределах первого интеграла $\sin mx$, а с ним и вся подынтегральная функция > 0 , в пределах второго < 0 и т. д. Обозначая через u_k абсолютную величину интеграла

$$\int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(k+1)\pi}{m}} f(x) \frac{\sin mx}{x} dx,$$

можем написать

$$I = u_0 - u_1 + u_2 - \dots + (-1)^{h-1} u_{h-1} + \int_{\frac{h\pi}{m}}^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx, \quad (1)$$

где $b < \frac{h+1}{m}\pi$. Легко показать, что $u_0 > u_1 > u_2 > \dots$; действительно, полагая $x = \frac{k\pi + y}{m}$, найдем

$$u_k = \int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi + y}{m}\right) \frac{\sin y}{k\pi + y} dy,$$

откуда видно, что с возрастанием k числа u_k убывают, так как $f(x)$ — не возрастающая функция. Что касается последнего интеграла формулы (1), то он по абсолютной величине менее, нежели

$$u_h = \left| \int_{\frac{h\pi}{m}}^{\frac{(h+1)\pi}{m}} f(x) \frac{\sin mx}{x} dx \right|, \quad \text{так как } b < \frac{h+1}{m}\pi.$$

Из сказанного и формулы (1) следует, что $I > 0$ и $I < u_0$, где

$$u_0 = \int_0^{\pi/m} f(x) \frac{\sin mx}{x} dx < f(+0) \int_0^{\pi/m} \frac{\sin mx}{x} dx = f(+0) \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Обозначая через A интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$, мы находим

$$0 < I < Af(+0). \quad (2)$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости формулы (II).

В самом деле, полагая: $f(x) = f(c) + \varphi(x)$, где $0 < c < b$ и $\varphi(x)$ при возрастании x от 0 до c убывает от $f(+0) - f(c)$ до 0, получим

$$I = f(c) \int_0^c \frac{\sin mx}{x} dx + \int_c^b \varphi(x) \frac{\sin mx}{x} dx + \int_c^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx.$$

Замечая, что при стремлении m к бесконечности интеграл

$$\int_0^c \frac{\sin mx}{x} dx = \int_0^{mc} \frac{\sin y}{y} dy$$

стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$, а $f(c)$ можно считать как угодно близким к $f(+0)$, если взять c достаточно малым, перепишем предыдущее равенство таким

образом:

$$I - \frac{\pi}{2} f(+0) = f(c) \left[\int_0^c \frac{\sin mx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right] + \frac{\pi}{2} [f(c) - f(+0)] + \\ + \int_0^c \varphi(x) \frac{\sin mx}{x} dx + \int_c^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx.$$

Отсюда вытекает, что $\left| I - \frac{\pi}{2} f(+0) \right| < \varepsilon$, где $\varepsilon, \varepsilon > 0$, сколь угодно малое число при всех достаточно больших значениях m .

Действительно, в силу неравенства (2):

$$\int_0^c \varphi(x) \frac{\sin mx}{x} dx < A \varphi(+0) = A [f(+0) - f(c)] < \frac{\varepsilon}{4},$$

если взять c достаточно малым; кроме того, можно считать $\frac{\pi}{2} |f(c) - f(+0)|$ меньшим $\varepsilon/4$, выбирая надлежащим образом c . Выбрав c , можем затем выбрать μ так, чтобы при $m \geq \mu$ имели

$$\left| \int_0^c \frac{\sin mx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad \left| \int_c^b f(x) \frac{\sin mx}{x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{лемма I}).$$

После этого можем написать неравенство $\left| I - \frac{\pi}{2} f(+0) \right| < \varepsilon$ при $m \geq \mu$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I = \frac{\pi}{2} f(+0).$$

Примечание. Это предложение остается верным в случае $b = \infty$, при условии, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на некотором сегменте $[0, l]$ и $\int_0^\infty |f(x)| dx$ существует.

В самом деле, из равенства

$$\int_0^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \int_0^l f(x) \frac{\sin mx}{x} dx + \int_l^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} dx$$

переходом к пределу при $m \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^l f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0),$$

так как $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_l^\infty f(x) \frac{\sin mx}{x} dx = 0$ по лемме I (примечание).

Из установленной формулы (II) вытекает следствие:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0) \quad (\text{II}')$$

при $b < \pi$, если $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на сегменте $[0, b]$. Действительно,

$$\int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \int_0^b f(x) \frac{x}{\sin x} \frac{\sin mx}{x} dx = \int_0^b F(x) \frac{\sin mx}{x} dx,$$

где $F(x) = f(x) \frac{x}{\sin x}$ есть функция, удовлетворяющая условию Дирихле на сегменте $[0, b]$ или представима в виде суммы таких функций на этом сегменте¹⁾. Применяя формулу (II) и замечая, что

$$F(+0) = f(+0) \left[\frac{x}{\sin x} \right]_{x=0} = f(+0),$$

находим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0) \quad (b < \pi).$$

Формула (II) здесь применима, так как $F(x)$ есть сумма двух функций, из которых каждая удовлетворяет условию Дирихле.

Возвращаясь к формуле (4) § 3 для суммы первых $n+1$ членов ряда Фурье, применим к ней формулу (II'); мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f(x-2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} f(x+0) + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} f(x-0) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \end{aligned}$$

предполагая, что функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет условию Дирихле на сегменте $[-\pi, \pi]$. Действительно, в этом случае формула (II') может быть применена к обоим вышенаписанным интегралам, так как $f(x+2t)$ и $f(x-2t)$ будут удовлетворять условию Дирихле при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Полученный результат выражает собой теорему Дирихле: всякая функция $f(x)$, с периодом 2π , удовлетворяющая условию Дирихле на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$, разлагается в соответствующий ей ряд Фурье, если значение функции в каждой точке разрыва есть среднее арифметическое предельных ее значений справа и слева.

¹⁾ Это основывается на следующем замечании. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $[a, \beta]$ монотонны и одного знака (например, обе положительны), то их произведение $\varphi\psi$ также положительно. Кроме того, оно представляет монотонную функцию, если φ и ψ изменяются в одном и том же направлении. Если же это не так, например, φ возрастает и ψ убывает, то положим

$$\varphi(x)\psi(x) = \varphi(\beta)\psi(x) - [\varphi(\beta - \varphi(x))]\psi(x).$$

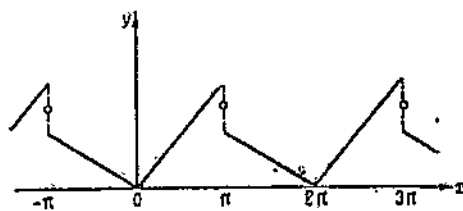
Таким образом $\varphi\psi$ есть разность двух убывающих функций. Случай разных знаков у φ и ψ приводится к предыдущему изменением знака.

§ 6. Примеры. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, определяемую условиями

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x < \pi), \\ bx & (-\pi < x < 0) \end{cases} \quad (\text{черт. 71}).$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ax dx = \\ &= \frac{b}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right)_{-\pi}^0 + \frac{a}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^{\pi} = -\frac{b\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} = \frac{a-b}{2}\pi, \end{aligned}$$



Черт. 71.

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bx \cos mx dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ax \cos mx dx = \end{aligned}$$

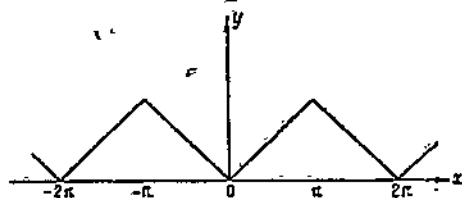
$$\begin{aligned} &= \frac{b}{\pi} \left(x \frac{\sin mx}{m} \right)_{-\pi}^0 - \frac{b}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin mx}{m} dx + \frac{a}{\pi} \left(x \frac{\sin mx}{m} \right)_0^{\pi} - \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{m} dx = \\ &= \frac{b}{\pi m^2} (\cos mx)_{-\pi}^0 + \frac{a}{\pi m^2} (\cos mx)_0^{\pi} = \frac{b-a}{\pi m^2} [1 - (-1)^m]. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$b_m = \frac{a+b}{m} (-1)^{m+1}.$$

Следовательно окончательно находим

$$\frac{a-b}{2}\pi + \frac{2(b-a)}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right] +$$



Черт. 72.

$$\begin{aligned} &+ (a+b) \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right] = \\ &= \begin{cases} ax, & \text{если } 0 \leq x < \pi \\ bx, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ \frac{a-b}{2}\pi & \text{при } x \equiv \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Это разложение имеет место в силу основной теоремы, причем в точках прерывности $x \equiv \pi$ сумма ряда есть среднее арифметическое предельных значений функции $f(x)$ справа и слева.

В частном случае, когда $a = b = 1$, разложение примет вид

$$2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right] = \begin{cases} x, & \text{если } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{при } x \equiv \pi. \end{cases}$$

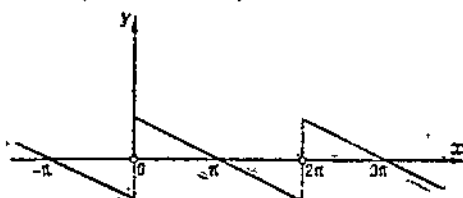
Когда $a = -b = 1$, разложение дает

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right] = |x|,$$

если $-\pi < x \leq \pi$ (черт. 72).

Заменяя в предпоследнем разложении x на $\pi - x$, получим ряд:

$$\begin{aligned} & \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots = \\ & = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{если } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{при } x \equiv 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Черт. 73.

(черт. 73).

§ 7. Неполные тригонометрические ряды. Формулы, определяющие коэффициенты Фурье, упрощаются в тех случаях, когда данная функция $f(x)$ четная или нечетная.

Функция $f(x)$ называется четной, если она обладает свойством: $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если обладает свойством: $f(-x) = -f(x)$; иначе говоря, четная функция имеет график, симметричный относительно оси OY , а нечетная — симметричный относительно начала координат. Если $F(x)$ функция четная, то

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) dx = 2 \int_0^{\pi} F(x) dx,$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx &= \int_{-\pi}^0 F(x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi} F(-x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = 2 \int_0^{\pi} F(x) dx, \end{aligned}$$

в силу тождества $F(-x) = F(x)$ ¹⁾.

Если же $F(x)$ — функция нечетная, то

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) dx = 0,$$

¹⁾ Это следует также из геометрических соображений:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) dx$$

представляет площадь, заключенную между кривой $y = F(x)$, осью OX и двумя прямыми $x = \pm \pi$, которая равна удвоенной площади, заключенной между той же кривой, осью OX и прямыми $x = 0$ и $x = \pi$.

так как алгебраическая величина площади, заключенной между кривой $y = F(x)$, осью OX и прямыми $x = \pm \pi$, есть нуль.

Заметим, что, в частности, функции $\cos kx$ четные, функции же $\sin kx$ нечетные; далее, очевидно, произведение двух четных или нечетных функций есть функция четная, произведение же четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Применяя эти соображения к интегралам, определяющим коэффициенты Фурье, мы получим

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad b_m = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

если $f(x)$ — четная функция, и

$$a_m = 0, \quad b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

если $f(x)$ — нечетная функция.

Таким образом ряд Фурье в случае четной функции будет

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx, \quad (I)$$

где a_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) определяются по формуле (1); в случае же нечетной функции он будет

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx, \quad (II)$$

где b_m определяются по формуле (2).

Пусть нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная на сегменте $[0, \pi]$, и кусочно-непрерывная на этом сегменте. Мы можем образовать для этой функции, с одной стороны, ряд косинусов вида (I), с другой стороны, ряд синусов вида (II). Первый из этих рядов — ряд Фурье функции, получающейся из $f(x)$ четным продолжением в соседний интервал $-\pi < x < 0$, а затем периодическим продолжением с периодом 2π вне промежутка $-\pi < x \leq \pi$.

Второй же ряд есть ряд Фурье функции, получающейся нечетным продолжением функции $f(x)$ в соседний интервал $-\pi < x < 0$, а затем периодическим продолжением с периодом 2π вне промежутка $-\pi < x \leq \pi$.

В частности, при первом продолжении имеем

$$f(-0) = f(+0) \quad \text{и} \quad f(-\pi+0) = f(\pi-0); \quad (3)$$

при втором же

$$f(-0) = -f(+0) \quad \text{и} \quad f(-\pi+0) = -f(\pi-0). \quad (4)$$

Если данная функция на сегменте $[0, \pi]$ удовлетворяет условию основной теоремы, то продолженные из нее функции первым или вторым способом удовлетворяют, очевидно, тому же условию на сегменте $[-\pi, \pi]$. Следовательно, на основании общей теоремы § 5 ряды Фурье (I) и (II) сходятся повсюду и их суммы равны

$$\sim \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

во всякой внутренней точке сегмента $[0, \pi]$, на концах же этого сегмента равны

$$\frac{f(+0) + f(-0)}{2} \quad \text{и} \quad \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Принимая же во внимание равенства (3) и (4) на концах сегмента $[0, \pi]$, мы получим следующие значения рядов (I) и (II):

x	ряд $\cos$	ряд $\sin$
0	$f(+0)$	0
π	$f(\pi-0)$	0

Примеры.

1. В § 6 мы получили два разложения функции, равной x , на сегменте $[0, \pi]$ — одно по синусам и другое по косинусам.

2. Разложить в ряд по синусам функцию, определяемую в интервале $(0, \pi)$ формулой

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \pi).$$

Здесь имеем

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin mx \, dx = \frac{1}{2m} [1 - (-1)^m].$$

Искомое разложение будет

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{при } x=0, \pi. \end{cases}$$

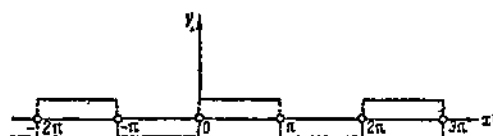
В интервале $-\pi < x < 0$ сумма ряда равна $-\frac{\pi}{4}$, а вне промежутка $-\pi < x < \pi$ ряд изображает функцию, получающуюся периодическим *продолжением* (черт. 74).

3. Разложить в ряд Фурье функцию, определяемую при любом x формулой $f(x) = |\sin x|$.

Эта функция есть четная, а потому она может быть разложена в ряд косинусов. Вычисляем коэффициенты

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos mx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(m+1)x - \sin(m-1)x] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m-1} \right] = -2 \frac{(-1)^{m+1}}{\pi(m^2-1)}, \text{ если } m \neq 1. \end{aligned}$$



Черт. 74.

При $m=1$ получим

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

Таким образом окончательно получаем

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right] = |\sin x|$$

при любом x .

§ 8. Периодические функции периода $2l$. До сих пор мы рассматривали задачу разложения в ряд Фурье периодической функции с периодом 2π . Во многих вопросах бывает нужно находить разложение в тригонометрический ряд функции $f(x)$ с периодом $2l$. Эта задача приводится к предыдущей посредством изменения масштаба для независимого переменного, т. е. введения вместо x вспомогательного переменного t по формуле $x = \frac{lt}{\pi}$. Полагая

$$f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

мы видим, что если $f(x)$ имеет период $2l$, то $\varphi(t)$ будет иметь период 2π . Построив ряд Фурье для функции $\varphi(t)$, получим

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt),$$

где

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos mt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos mt \, dt,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin mt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin mt \, dt,$$

или, возвращаясь к старому переменному x , будем иметь ряд Фурье для функции $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

где

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} \, dx \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} \, dx. \quad (3)$$

В частности, если $f(x)$ функция четная или нечетная, то формулы (2) и (3) упрощаются.

Для четной функции $f(x)$ имеем

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} \, dx, \quad b_m = 0; \quad (2')$$

для нечетной функции $f(x)$ будет:

$$a_m = 0, \quad b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} \, dx. \quad (3')$$

Как и в § 2, ряд Фурье (1) можно записать в комплексной форме:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{\frac{k\pi x i}{l}},$$

где положено

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{k\pi x i}{l}} \, dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Примеры.

1. Разложить по косинусам функцию $f(x)$, определяемую равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$$

В данном случае имеем

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx,$$

так как в промежутке $\frac{l}{2} < x \leq l$ функция $f(x)$ обращается в нуль.

Выполняя подстановку $\frac{\pi x}{l} = t$, находим

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos mt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos(m+1)t + \cos(m-1)t] dt,$$

откуда

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right)_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

и

$$a_m = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(m+1)t}{m+1} + \frac{\sin(m-1)t}{m-1} \right]_0^{\pi/2}, \quad (m > 1),$$

что будет равно $-\frac{2(-1)^{m/2}}{\pi(m^2-1)}$, если m четное, и равно 0, если m нечетное.

Следовательно, находим

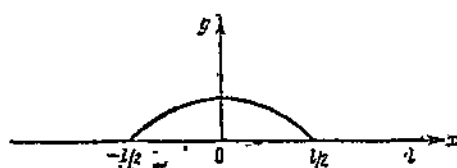
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos \frac{2n\pi x}{l} = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0, & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

То же разложение в интервале $-l < x < 0$ будет представлять функцию, полученную из $f(x)$ четным продолжением, а вне промежутка $-l < x \leq l$ — функцию, получаемую затем периодическим продолжением с периодом $2l$ (черт. 75).

2. Разложить по синусам функцию $f(x)$, определяемую равенствами

$$f(x) = \frac{\pi^2}{4l} x, \quad \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{4l} (l-x), \quad \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l.$$



Черт. 75.

Здесь

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2}{2l^2} \int_0^{l/2} x \sin \frac{m\pi x}{l} dx + \frac{\pi^2}{2l^2} \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Посредством подстановки $\frac{\pi x}{l} = t$ находим

$$b_m = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t \sin mt \, dt + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin mt \, dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t \cos mt}{m} \right)_{\pi/2}^0 + \\ + \frac{1}{2m} \int_0^{\pi/2} \cos mt \, dt + \frac{1}{2} \left[(\pi - t) \frac{\cos mt}{m} \right]_{\pi}^{\pi/2} - \frac{1}{2m} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos mt \, dt = \frac{\sin m \frac{\pi}{2}}{m^2}.$$

Таким образом окончательно получаем

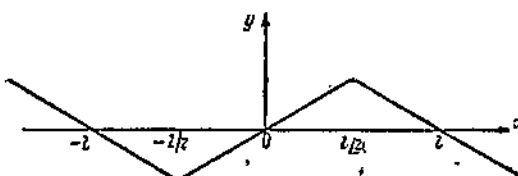
$$\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4l} x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{\pi^2}{4l} (l - x), & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

Это разложение в интервале $(-l, 0)$ изображает функцию, получаемую из $f(x)$ нечетным продолжением, а вне промежутка $-l < x \leq l$ дальнейшим периодическим продолжением с периодом $2l$ (черт. 76).

3. Разложить по синусам функцию $f(x)$, определяемую равенствами

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{l}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{l}, & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

В данном случае имеем

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx =$$


$$= \frac{1}{l} \int_0^{l/2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin m \frac{\pi x}{l} dx - \frac{1}{l} \int_{l/2}^l \sin \frac{\pi x}{l} \sin m \frac{\pi x}{l} dx.$$

Выполняя подстановку $\frac{\pi x}{l} = t$, получаем

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin mt \, dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \sin mt \, dt,$$

откуда, очевидно, $b_1 = 0$.

При $m > 1$,

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos(m-1)t - \cos(m+1)t] dt - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} [\cos(m-1)t - \cos(m+1)t] dt =$$

$$= -\frac{2m \sin(m+1) \frac{\pi}{2}}{\pi(m^2-1)} = -\frac{2m \cos m \frac{\pi}{2}}{\pi(m^2-1)}.$$

Таким образом искомое разложение будет

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m \cos m \frac{\pi}{2}}{m^2-1} \sin m \frac{\pi x}{l} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{l}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{l}, & \text{если } \frac{l}{2} < x \leq l, \\ 0, & \text{если } x = \frac{l}{2}. \end{cases}$$

При $x = l/2$ функция $f(x)$ имеет точку разрыва с предельными значениями, равными $1/2$ и $-1/2$; значит, наше разложение при $x = l/2$ равно нулю. Это разложение в интервале $(-l, 0)$ изображает функцию, получаемую из $f(x)$ нечетным продолжением, а вне промежутка $-l < x \leq l$ дальнейшим периодическим продолжением с периодом $2l$.

§ 9. Порядок коэффициентов Фурье. Задача настоящего параграфа — исследовать зависимость, существующую между характером функции и порядком малости ее коэффициентов Фурье. Относительно функции $f(x)$ периода 2π мы заранее предположим, что она сама и ее последовательные производные, о которых в дальнейшем будет речь, могут допускать лишь точки разрыва 1-го рода в конечном числе на сегменте $[-\pi, +\pi]$. Обозначим через

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{s_0}^{(0)}$$

точки разрыва функции $f(x)$, лежащие внутри сегмента $[-\pi, +\pi]$, через

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{s_1}^{(1)}$$

точки разрыва ее производной $f'(x)$ внутри сегмента $[-\pi, +\pi]$ и вообще через

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{s_k}^{(k)}$$

точки разрыва производной $f^{(k)}(x)$.

К точкам разрыва, очевидно, нужно присоединить один из концов сегмента $[-\pi, +\pi]$, например π , если предельные значения $f(-\pi+0)$ и $f(\pi-0)$, $f'(-\pi+0)$ и $f'(\pi-0)$, ..., $f^{(k)}(-\pi+0)$ и $f^{(k)}(\pi-0)$ между собой не совпадают. Обозначим через $\delta_i^{(k)}$ скачок функции $f^{(k)}(x)$ в точке $x_i^{(k)}$, т. е. положим

$$\delta_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i^{(k)}+0) - f^{(k)}(x_i^{(k)}-0),$$

где

$$i = 1, 2, \dots, s_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ряди симметрии обозначений будем считать $x_{s_k+1}^{(k)} = \pi$, полагая при этом

$$\delta_{s_k+1}^{(k)} = f^{(k)}(-\pi+0) - f^{(k)}(\pi-0), \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Разбив промежуток интегрирования $[-\pi, +\pi]$ на отдельные части:

$$[-\pi, x_1^{(0)}], [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], \dots, [x_{s_0}^{(0)}, \pi],$$

в каждой из которых функция $f(x)$ непрерывна, мы можем, написав равенство

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\omega_1^{(0)}} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1^{(0)}}^{\omega_2^{(0)}} f(x) \cos nx \, dx + \dots + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{s_0}^{(0)}}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

выполнить интегрирование по частям, после чего имеем

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\omega_1^{(0)}} + \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{\omega_1^{(0)}}^{\omega_2^{(0)}} + \dots + \\ & + \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{\omega_{s_0}^{(0)}}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\omega_1^{(0)}} f'(x) \sin nx \, dx - \\ & - \frac{1}{\pi n} \int_{\omega_1^{(0)}}^{\omega_2^{(0)}} f'(x) \sin nx \, dx - \dots - \frac{1}{\pi n} \int_{\omega_{s_0}^{(0)}}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Выполняя указанные подстановки и соединяя все интегралы в один, получим

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{s_0+1} \vartheta_i^{(0)} \sin nx_i^{(0)} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

Положим

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_0+1} \vartheta_i^{(0)} \sin nx_i^{(0)} \quad (1)$$

и обозначим через a'_n, b'_n коэффициенты Фурье производной $f'(x)$.

Тогда формула для a_n примет вид

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{b'_n}{n}. \quad (2)$$

Совершенно так же получим

$$b_n = \frac{A_0}{n} + \frac{a'_n}{n}, \quad (3)$$

где положено

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_0+1} \vartheta_i^{(0)} \cos nx_i^{(0)}. \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) показывают, что если периодическая функция $f(x)$ имеет точки разрыва, то ее коэффициенты Фурье при $n \rightarrow \infty$ будут бесконечно малыми вида $O\left(\frac{1}{n}\right)^1$.

¹⁾ Мы полагаем $r_n = O(\varphi(n))$, если отношение $\frac{r_n}{\varphi(n)}$ по абсолютной величине остается меньше некоторого постоянного положительного числа, каково бы ни было n .

Кроме того, из тех же формул следует, что если периодическая функция $f(x)$ всюду непрерывна, то ее коэффициенты Фурье при $n \rightarrow \infty$ будут бесконечно малыми порядка выше $\frac{1}{n}$, т. е. вида $o\left(\frac{1}{n}\right)^{1)}$. Действительно в этом случае $A_0 = B_0 = 0$, и формулы (2), (3) примут вид

$$a_n = -\frac{b_n}{n}, \quad b_n = \frac{a_n}{n},$$

где a_n' и b_n' как коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. В рассматриваемом случае ряд из коэффициентов Фурье функции $f(x)$ есть абсолютно сходящийся, так как ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n'|}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n'|}{n}$$

сходятся (см. § 2, примечание 2); следовательно, данный ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

Возвращаясь к формулам (2), (3), мы, пользуясь ими, представим коэффициенты Фурье a_n и b_n , которые сами суть бесконечно малые величины при $n \rightarrow \infty$, в виде сумм слагаемых различных порядков малости по сравнению с $\frac{1}{n}$. С этой целью, применяя формулы (2), (3) к a_n' и b_n' , будем иметь

$$a_n' = -\frac{B_1}{n} - \frac{b_n''}{n}, \quad b_n' = \frac{A_1}{n} + \frac{a_n''}{n}, \quad (5)$$

где положено

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_1+1} \delta_i^{(1)} \cos nx_i^{(1)}, \quad (6)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_1+1} \delta_i^{(1)} \sin nx_i^{(1)}, \quad (7)$$

а через a_n'' , b_n'' обозначены коэффициенты Фурье второй производной $f''(x)$.

Внося выражения (5) для a_n' и b_n' в формулы (2), (3), представим a_n и b_n в виде

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} - \frac{a_n''}{n^2}; \quad (8)$$

$$b_n = \frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} - \frac{b_n''}{n^2}. \quad (9)$$

Продолжая эти преобразования, окончательно получим

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} + \frac{B_2}{n^3} + \frac{A_3}{n^4} - \dots + \frac{r_k'}{n^k}, \quad (10)$$

$$b_n = \frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} - \frac{A_2}{n^3} - \frac{B_3}{n^4} + \dots + \frac{r_k''}{n^k}, \quad (11)$$

1) Мы полагаем $r_n = o(\varphi(n))$, если отношение $\frac{r_n}{\varphi(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

где положено

$$A_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \cos nx_i^{(j)}; \quad (12)$$

$$B_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \sin nx_i^{(j)} \quad (j=0, 1, \dots), \quad (13)$$

а через r_k' , r_k'' обозначены с точностью до знака коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(x)$, величины бесконечно малые при $n \rightarrow \infty$.

Из формул (12), (13) мы усматриваем, что A_j и B_j зависят от скачков производной $f^{(j)}(x)$ и обращаются в нуль, если эта производная всюду непрерывна.

Таким образом, если периодическая непрерывная функция $f(x)$ имеет всюду непрерывные производные до $(k-1)$ порядка включительно, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n будут при $n \rightarrow \infty$ порядка выше чем $\frac{1}{n^k}$.

Действительно, из формул (10), (11) в этом случае вытекает

$$a_n = \frac{r_k'}{n^k}, \quad b_n = \frac{r_k''}{n^k},$$

где r_k' и r_k'' стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Более того, в рассматриваемом случае можно утверждать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} [|a_n| + |b_n|]$$

сходится, потому что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_k'|}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_k''|}{n}$$

суть сходящиеся (см. § 2, примечание 2).

В частности, если периодическая непрерывная функция $f(x)$ допускает всюду непрерывные производные любого порядка, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n удовлетворяют условию

$$n^k a_n \rightarrow 0, \quad n^k b_n \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ каково бы ни было k ¹⁾.

Формулы (10), (11) остаются в силе для рядов Фурье в случае сегмента $[-l, +l]$. В этом случае нужно положить

$$A_j = \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \cos \frac{n\pi x_i^{(j)}}{l}; \quad (12')$$

$$B_j = \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \sin \frac{n\pi x_i^{(j)}}{l}, \quad (13')$$

¹⁾ Любопытно отметить, что это условие является не только необходимым, но и достаточным для того чтобы периодическая функция $f(x)$ была сама непрерывна вместе со всеми ее производными.

где $x_{s_j+1}^{(j)} = l$, $x_{s_j+1}^{(j)} = f^{(j)}(-l+0) - f^{(j)}(l-0)$, а r_k' и r_k'' отличаются от прежних лишь множителем $\left(\frac{l}{\pi}\right)^k$ и, следовательно, попрежнему суть величины бесконечно малые при $n \rightarrow \infty$.

В приложениях теории рядов Фурье весьма часто приходится разлагать функцию $f(x)$, заданную на сегменте $[0, l]$, в ряд по косинусам или синусам. В этом случае, как известно (§ 8), коэффициенты рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (14)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (15)$$

определяются по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (16)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

• Оба эти случая приводятся к предыдущему, продолжая функцию $f(x)$, в соседний интервал $-l < x < 0$ четным или нечетным образом. В первом случае мы должны положить

$$f(-x) = f(x), \quad (18)$$

а во втором

$$f(-x) = -f(x). \quad (19)$$

Рассмотрим, например, ряд (14). Допустим, что функция $f^{(j)}(x)$ имеет внутри сегмента $[0, l]$ точки прерывности:

$$\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \dots, \xi_{\sigma_j}^{(j)} \quad (j=0, 1, 2, \dots).$$

При четном продолжении функции $f(x)$ ее производные четного порядка продолжают четным образом, а производные нечетного порядка — нечетным образом, что непосредственно доказывается дифференцированием тождества (18) относительно x . Следовательно, продолженная функция и ее производные четного порядка ($j=0, 2, \dots$) будут иметь точками прерывности внутри сегмента $[-l, l]$ точки вида

$$\pm \xi_l^{(j)} \quad (l=1, 2, \dots, \sigma_j; j=0, 2, \dots);$$

что же касается точек 0 и l , то они не будут точками прерывности, потому что при четном продолжении

$$f^{(j)}(-0) = f^{(j)}(+0); \quad f^{(j)}(-l+0) = f^{(j)}(l-0) \quad (j=0, 1, \dots).$$

Для производных же нечетного порядка, кроме точек

$$\pm \xi_l^{(j)} \quad (j=1, 3, \dots; l=1, 2, \dots, \sigma_j),$$

точками прерывности будут еще точки

$$\xi_0^{(j)} = 0 \quad \text{и} \quad \xi_{\sigma_j+1}^{(j)} = l$$

со скачками в них:

$$\begin{aligned}\delta_0^{(j)} &= f^{(j)}(+0) - f^{(j)}(-0) = 2f^{(j)}(+0); \\ \delta_{\sigma_j+1}^{(j)} &= f^{(j)}(l+0) - f^{(j)}(l-0) = -2f^{(j)}(l-0).\end{aligned}$$

В симметричных точках прерывности $(\pm \xi_l^{(j)})$ скачки функции $f^{(j)}(x)$, при j , равном нулю или четному числу, будут противоположных знаков; при j , равном нечетному числу, эти скачки будут одинаковы.

После всего сказанного мы видим, что формула (12') в рассматриваемом случае при j нечетном дает:

$$A_j = \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \left[\frac{1}{\pi} (\delta_0^{(j)} + \delta_{\sigma_j+1}^{(j)} \cos \pi) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\sigma_j} \delta_i^{(j)} \cos \frac{\pi i \xi_l^{(j)}}{l} \right], \quad (20)$$

а при j четном $A_j = 0$.

Что же касается формулы (13'), то, наоборот, при j четном получаем

$$B_j = \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\sigma_j+1} \delta_i^{(j)} \sin \frac{\pi i \xi_l^{(j)}}{l}, \quad (21)$$

а при j нечетном $B_j = 0$. Очевидно, что формула (11) в этом случае дает $b_n = 0$.

Те же формулы (20), (21) годятся для вычисления b_n по формуле (11) в случае нечетного продолжения функции $f(x)$, причем в этом случае формула (20) справедлива при j четном, а формула (21) при j нечетном.

§ 10. Интеграл Фурье. Пусть функция $f(x)$, определенная для всех значений x , будет кусочно-непрерывной вместе с своей производной на всяком конечном сегменте ¹⁾ и сверх того абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

имеет конечное значение.

Как известно, в силу основной теоремы (§ 4), во всякой точке x , внутренней к сегменту $[-l, l]$, мы имеем

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где положено

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt.$$

¹⁾ Либо удовлетворяет условию Дирихле на всяком конечном сегменте.

Внося выражения a_n , b_n в написанную выше формулу, получим

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi(x-t)}{l} dt. \quad (1)$$

Это равенство (1) имеет место при всяком l .

Спросим себя, как оно преобразуется в пределе при $l \rightarrow \infty$.

Когда $l \rightarrow \infty$, то первое слагаемое правой части, очевидно, стремится к нулю, потому что

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \frac{l}{2l}.$$

Что касается остающегося ряда, то, вводя новое переменное α , которое принимает равноотстоящие значения

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = 2 \frac{\pi}{l}, \dots, \quad \alpha_n = n \frac{\pi}{l}; \dots,$$

получая каждый раз приращение $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l}$, мы его перепишем так:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{(\alpha)} \Delta\alpha \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha(x-t) dt.$$

При больших значениях l интеграл, стоящий под знаком суммы, мало отличается от

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt,$$

и вследствие этого можно предполагать, что когда $l \rightarrow \infty$, вся сумма будет стремиться к пределу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt.$$

Таким образом равенство (1) в пределе при $l \rightarrow \infty$ примет вид

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt. \quad (1)$$

Эта формула, которую мы получили из ряда Фурье путем перехода к пределу при $l \rightarrow \infty$, носит название формулы Фурье. Приведенный вывод формулы (1) не является строгим, справедливость этой формулы должна быть обоснована, что мы и сделаем.

Приступая к строгому доказательству теоремы, выражаемой формулой Фурье, мы сперва точно формулируем это предложение: *если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле на всяком конечном сегменте, будучи абсолютно интегрируемой в интервале $(-\infty, \infty)$, то имеет место формула (1).*

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

Для вывода формулы (1) нам достаточно показать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Обозначая через $I(l, x)$ интеграл, стоящий в левой части под знаком предела, мы можем переставить в нем порядок интегрирования по t , и α и записать его в виде

$$I(l, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^l \cos \alpha(x-t) d\alpha. \quad (2)$$

Возможность такой перестановки порядка интегрирования вытекает из того обстоятельства, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt \quad (3)$$

сходится равномерно относительно α , каково бы ни было α .

В самом деле, подинтегральная функция $f(t) \cos \alpha(x-t)$ не превосходит по абсолютной величине функции $|f(t)|$, интегрируемой в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, что доказывает равномерную сходимость интеграла (3). Как известно, в таком случае интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(x-t) dt$$

можно интегрировать по параметру α под знаком интеграла, что и дает нам формулу (2).

Вычисляя внутренний интеграл формулы (2) непосредственно, мы получим

$$I(l, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin l(x-t)}{x-t} dt, \quad (2')$$

и наша задача приводится к тому, чтобы установить предельное равенство

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin l(x-t)}{x-t} dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (4)$$

Разбивая промежуток интегрирования $(-\infty, \infty)$ на две части $(-\infty, x)$ и (x, ∞) , мы представим $I(l, x)$ так:

$$I(l, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin l(x-t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x + \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty}.$$

Вводя вместо $x-t$ переменное z в первом интеграле правой части и $-z$ во втором, получим

$$I(l, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-z) \frac{\sin lz}{z} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+z) \frac{\sin lz}{z} dz. \quad (5)$$

Применяя к этим интегралам лемму II (§ 5, примечание), мы заключаем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-z) \frac{\sin lz}{z} dz = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} f(x-0) = \frac{1}{2} f(x-0),$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+z) \frac{\sin lz}{z} dz = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} f(x+0) = \frac{1}{2} f(x+0)$$

и, значит, из формулы (5) следует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I(l, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

что и нужно было доказать.

§ 11. Частные случаи интеграла Фурье. Формула Фурье (I) § 10 может быть упрощена, если функция $f(x)$ четная или нечетная. Действительно, заменяя $\cos \alpha(x-t)$ через $\cos \alpha x \cos \alpha t + \sin \alpha x \sin \alpha t$, представим формулу (I) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \cos \alpha x dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t \sin \alpha x dt. \quad (I) \end{aligned}$$

Предположим, что $f(x)$ — функция четная. В этом случае $f(t) \cos \alpha t$ как функция переменного t есть четная, а функция $f(t) \sin \alpha t$ — нечетная, и следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 0.$$

Таким образом находим

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt. \quad (II)$$

Предположим теперь, что $f(x)$ — функция нечетная.

В этом случае $f(t) \cos at$ как функция переменного t есть нечетная, а функция $f(t) \sin at$ четная и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin at dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin at dt.$$

Таким образом получаем

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ax da \int_0^{\infty} f(t) \sin at dt. \quad (\text{III})$$

Допустим теперь, что функция $f(x)$ определена только в промежутке $0 \leq x < \infty$, абсолютно интегрируема на этом промежутке и кусочно-непрерывна вместе со своей производной во всяком сегменте $[0, l]$, каково бы ни было l ¹⁾. Мы можем продолжить эту функцию в соседний интервал $(-\infty, 0)$ четным или нечетным образом и получим соответственно две формулы (II) и (III). При $x > 0$ эти формулы дают изображение одной и той же функции $f(x)$ с помощью двух разных аналитических аппаратов. В частности, если $f(x)$ — функция непрерывная в промежутке $0 \leq x < \infty$, то формулы (II) и (III) при $x > 0$ примут вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ax da \int_0^{\infty} f(t) \cos at dt, \quad (\text{II}')$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ax da \int_0^{\infty} f(t) \sin at dt. \quad (\text{III}')$$

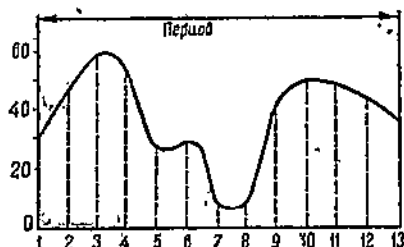
Интересно отметить, что первая из этих формул верна и при $x = 0$, так как при четном продолжении функции $f(x)$ сохраняется ее непрерывность при $x = 0$, этого не будет при нечетном продолжении функции $f(x)$, если $f(0) \neq 0$ и вторая формула (III') неверна при $x = 0$, так как в правой части при $x = 0$ мы получим 0, в левой же $f(0)$.

§ 12. Метод приближенного вычисления коэффициентов Фурье. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то формулы Фурье дают нам коэффициенты тригонометрического разложения функции. Но во многих практических задачах функция $f(x)$ задается графически, и тогда возникает вопрос о методах приближенного вычисления ее коэффициентов Фурье. Все эти методы основаны на применении к выражениям a_k и b_k формул приближенного вычисления интегралов. Мы воспользуемся простейшей из этих формул, так называемой формулой прямоугольников.

Разделим сегмент $[0, 2\pi]$ на n равных частей и обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 = 0, \quad x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 2\pi,$$

¹⁾ Либо удовлетворяет условию Дирихле во всяком сегменте $[0, l]$.



Черт. 77.

1	30	—	—	
2	45	39	22	
3	58	50	29	
4	55	—	—	
5	28	24	14	
6	29	25	14	
7	8	—	—	
8	7	6	3	
9	42	37	21	
10	50	—	—	
11	49	42	24	
12	44	38	22	

Черт. 78.

а значения функции $f(x)$ в этих точках через

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n.$$

По формуле прямоугольников получим

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \cos kx_i,$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i.$$

Помещаем ось абсцисс под графиком функции $f(x)$, по возможности ближе к нему, чтобы избежать отрицательных ординат и не иметь дела с очень большими ординатами. Период графика делим, например, на двенадцать равных частей (черт. 77).

Составляем таблицу на разграфленном листке бумаги, как это показано на черт. 78. В первом столбце выписываем номера абсцисс 1, 2, ..., 12; во втором столбце помещаем соответствующие им ординаты, снимаемые непосредственно с графика функции, причем полезно выбрать масштаб столь малым, чтобы эти ординаты измерялись целыми числами. В третьем столбце помещаем произведения этих ординат на $\cos 30^\circ = 0,87$, в четвертом — произведения ординат на $\cos 60^\circ = 0,50$. В строках 1,

4, 7 и 10 оставлены пустые поля, соответствующие произведению ординат на косинусы дуг, кратных нулю или $\pi/2$. Пятый столбец оставляем пустым, заштриховав правое верхнее его поле.

Теперь ясно, что для определения свободного члена $a_0/2$ нужно взять сумму всех ординат и разделить ее на двенадцать.

Для определения же остальных коэффициентов a_k, b_k ($k=1, 2, \dots, 6$) изготавливают шаблоны из прозрачной восковой бумаги для каждого коэффициента в отдельности следующим образом.

Размеры шаблонов и клеток на них должны в точности совпадать с таковыми же таблицы черт. 78. Те же клетки шаблона, ко-

торые соответствуют положительным слагаемым коэффициента, обводим одним, например красным, цветом, а клетки, соответствующие отрицательным слагаемым этого коэффициента, — другим, например синим, цветом.

Каждый шаблон накладывается на таблицу (черт. 78) и вычисляется сначала сумма $\sum_{(+)}$ чисел, занимающих клетки с красным цветом; затем вычисляется сумма $\sum_{(-)}$ чисел, занимающих клетки с синим цветом.

Проделав это для всех шаблонов, составляем разность соответствующих сумм $\sum_{(+)} - \sum_{(-)}$ и делим каждую из них на 6; получаемые частные и дадут приближенные значения коэффициентов $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_6, b_6$. Мы предполагали $n=12$; при более точных вычислениях берут за n большее число, кратное 4¹⁾.

§13. Уравнение теплопроводности. I. Рассмотрим задачу о движении тепла в прямом цилиндрическом стержне, изолированном от внешнего пространства. Обозначим через $u(x, t)$ температуру в сечении x стержня в момент t и выведем уравнение, которому должна удовлетворять эта функция.

Для вывода этого уравнения мы подсчитаем двумя различными способами количество тепла dq , получаемое за бесконечно малый промежуток времени dt бесконечно малым элементом стержня между сечениями x и $x+dx$. Пусть за промежуток времени dt температура рассматриваемого элемента стержня изменилась на du ; тогда количество тепла dq , затраченного на это, выразится таким образом:

$$dq = c \, dm \, du = c \, dm \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dt,$$

где c обозначает теплоемкость вещества стержня, dm — массу элемента. Так как $dm = \rho \, dv = \rho \, S \, dx$, — где ρ — плотность, а S — площадь поперечного сечения стержня, то количество тепла dq , получаемое элементом стержня, представим в виде

$$dq = c \rho S \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dt \, dx. \quad (1)$$

С другой стороны, то же количество тепла dq можно оценить иначе, вводя понятие о потоке тепла. С этой целью рассмотрим два сечения стержня x и $x+h$ и обозначим разность температур в этих сечениях через Δu . На опыте показано, что при постоянной разности температур на сечениях количество тепла q , получаемое за время dt частью стержня, заключенной между этими сечениями, пропорционально Δu , площади сечения S , промежутку времени dt и обратно пропорционально толщине h . Вследствие этого мы можем написать $q = -k \frac{\Delta u}{h} S \, dt$, где k есть коэффициент пропорциональности, так называемый коэффициент внутренней теплопроводности, знак же $(-)$ указывает на то, что направление движения тепла обратно направлению, в котором увеличивается температура. Переходя к пределу $h \rightarrow 0$, мы получим количество тепла, протекающее через данное сечение x за время dt , которое, следовательно, будет равно

$$-k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} S \, dt = -k \frac{\partial u}{\partial x} S \, dt.$$

¹⁾ Более подробно см. об этом в „Курсе высшей математики“ Смирнова, том II, стр. 356 — 362, ГОНТИ, 1938.

Относя это количество тепла к единице площади и единице времени, мы получим величину $-k \frac{\partial u}{\partial x}$, которая носит название потока тепла через сечение x .

Заметив это, мы видим, что количество тепла dq , поглощаемое за время dt нашим элементом стержня, будет равно разности количества тепла, вошедшего в него через сечение x и вышедшего через сечение $x+dx$, так как по условию обмен тепла через боковую поверхность отсутствует. Таким образом мы находим

$$dq = kSdt \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - kSdt \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = kSdt d \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = Skdt \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt. \quad (2)$$

Приравнявая выражения dq из формул (1) и (2), по сокращении на $Sdt dx$, получим

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или, полагая для сокращения $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, окончательно будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Проблема теплопроводности заключается в интегрировании дифференциального уравнения (3) при начальном условии, дающем распределение температуры в момент $t=0$, и граничных условиях в том случае, когда стержень ограничен с одной или обеих сторон.

Предполагая стержень неограниченным, мы должны будем найти решение дифференциального уравнения (3) при следующем начальном условии: в момент $t=0$ функция u должна равняться заданной функции $f(x)$. Попытаемся найти частное решение уравнения (3), которое возможно представить в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от x , а другая только от t :

$$u = X(x) \cdot T(t). \quad (4)$$

Подставляя u , определяемое формулой (4), в дифференциальное уравнение (3), мы получим

$$X \frac{dT}{dt} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

В полученном равенстве налево стоит функция одного t , направо же функция одного x . Поэтому это равенство может быть выполнено для всех значений переменных x и t , друг от друга независимых, только тогда, когда обе части нашего равенства будут равны одному и тому же постоянному α . Отсюда следует, что $\frac{dT}{dt} = \alpha T$ или $T = Ae^{\alpha t}$. Так как T должно оставаться ограниченным при всяком t , $t > 0$, то постоянное α будет отрицательным, и мы можем положить $\alpha = -a^2 \lambda^2$. Тогда для X получим дифференциальное уравнение $\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X$. Это уравнение имеет два частных решения: $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$. Из формулы (4) находим только два частных решения дифференциального уравнения (3):

$$u = Ae^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x \quad \text{и} \quad u = Be^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x,$$

где λ есть произвольное действительное число, которое мы можем считать положительным, A и B суть произвольные постоянные, которые мы вправе предполагать произвольными функциями от λ .

В силу однородности линейного дифференциального уравнения (3) при суммировании частных его решений мы получаем снова решение того же уравнения; поэтому посредством интегрирования относительно λ мы найдем решение уравнения (3):

$$u = \int_0^{\infty} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda, \quad (5)$$

которое зависит от двух произвольных функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$.

Легко проверить, что формула (5) представляет действительно решение дифференциального уравнения (3). Подставляя функцию, представленную формулой (5), в уравнение (3), мы сразу видим, что оно обращается в тождество, так как подынтегральная функция есть решение уравнения (3). Выполняемые при этом операции дифференцирования под знаком интеграла законны, потому что получающиеся при этом интегралы равномерно сходятся.

В самом деле, $\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^{\infty} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} (-\lambda^2 a^2) d\lambda$; этот интеграл равномерно сходится относительно t , при $t \geq t_0 > 0$, так как абсолютная величина его подынтегральной функции меньше чем $K \lambda^2 e^{-\lambda^2 a^2 t_0}$, где K постоянное [мы будем считать $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ ограниченными функциями при $0 \leq \lambda < +\infty$]. Заметив, что $K \lambda^2 e^{-\lambda^2 a^2 t_0}$ интегрируема в пределах от 0 до ∞ , мы убеждаемся в равномерной сходимости интеграла, изображающего $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Совершенно так же проверяется равномерная сходимость интегралов, изображающих $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Посмотрим, нельзя ли A и B выбрать так, чтобы они были ограниченными функциями λ при $0 \leq \lambda < +\infty$ и чтобы выполнялось начальное условие:

$$u = f(x) \text{ при } t = 0.$$

При этом мы считаем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(a)| da$ существует.

Для доказательства заметим, что согласно интегральной формуле Фурье (см. § 10) непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле во всяком конечном сегменте, может быть представлена в следующей формуле:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos \lambda (x-a) da, \quad (6)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos a\lambda d\lambda + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \sin a\lambda d\lambda] d\lambda. \quad (6')$$

Так как согласно начальному условию из формулы (5) для $t=0$ следует

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) d\lambda, \quad (7)$$

то путем сравнения формул (6') и (7) получим

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos \alpha \lambda \, d\alpha, \quad B = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \sin \alpha \lambda \, d\alpha. \quad (7')$$

Формулы (7') показывают, что A и B действительно ограниченные функции от λ .

Подставляя найденные выражения для A и B в формулу (5), окончательно будем иметь

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos \lambda (x - \alpha) \, d\alpha, \quad (8)$$

причем, действительно, при $t=0$ согласно (8) и (6) u будет равно $f(x)$. Решение задачи теплопроводности, даваемое формулой (8), можно преобразовать к другому, более простому виду. Для этого переставим порядок интегрирования в формуле (8), тогда получим

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \, d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cos \lambda (x - \alpha) \, d\lambda. \quad (8')$$

Внутренний интеграл можно вычислить. В самом деле, имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cos \lambda (x - \alpha) \, d\lambda = \frac{1}{\alpha \sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta \xi \, d\xi = \frac{K(\beta)}{\alpha \sqrt{t}};$$

полагая $\lambda \alpha \sqrt{t} = \xi$, $\frac{x - \alpha}{\alpha \sqrt{t}} = \beta$.

Далее легко получаем

$$K'(\beta) = - \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \xi \sin \beta \xi \, d\xi,$$

откуда интегрированием по частям найдем

$$K'(\beta) = \frac{1}{2} (e^{-\xi^2} \sin \beta \xi)_0^{\infty} - \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta \xi \, d\xi = -\frac{\beta}{2} K(\beta),$$

т. е. $K(\beta) = \text{const } e^{-\frac{\beta^2}{4}}$.

Постоянное определим, полагая $\beta = 0$ и замечая, что

$$K(0) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом получим

$$K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos \beta \xi \, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Возвращаясь к старым обозначениям, будем иметь

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (x-a) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4a^2 t}}. \quad (8'')$$

Внося это выражение интеграла в формулу (8'), окончательно найдем

$$u = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2 t}} d\alpha. \quad (9')$$

Полученной формуле (9) можно придать весьма простую физическую интерпретацию. Рассмотрим частное решение

$$u(x, t) = \frac{\gamma}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4a^2 t}} \quad (10)$$

нашего дифференциального уравнения (3), где γ обозначает постоянное. Формула (10) при $t=0$ дает $u=0$ при всех x , кроме $x=a$. Это решение соответствует, следовательно, тому начальному условию, что во всем стержне температура равна нулю, за исключением малой окрестности сечения $x=a$. Рассмотрим физический смысл этого решения. Выделим бесконечно малый элемент стержня $(\xi, \xi+d\xi)$ и пусть функция $f(x)$ имеет постоянное значение $f(\xi)$ внутри сегмента $(\xi, \xi+d\xi)$ и равна нулю вне его. Физически это значит, что мы в начальный момент сообщили этому элементу количество тепла, которое вызвало повышение температуры на $f(\xi)$. В последующие моменты распределение температуры в стержне дается формулой (9), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{\xi}^{\xi+d\xi} f(\xi) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2 t}} d\alpha \approx \frac{f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{2a \sqrt{\pi t}} d\xi.$$

Следовательно, функция (10) дает при $\gamma=f(\alpha) d\alpha$ распределение температуры, которое вызывается мгновенным источником тепла, помещенным в начальный момент $t=0$ в сечении $x=a$ стержня и повышающим температуру на $f(\alpha)$. Общее же действие от начальных температур $f(\alpha)$ во всех сечениях стержня суммируется из отдельных элементов (10), что и дает нам полученное выше решение (9).

II. Видоизменим теперь условия, которым должна удовлетворять искомая функция u , удовлетворяющая тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

а именно положим, что $u=f(x)$ при $t=0$, где $f(x)$ задана только для неотрицательных значений x , и, кроме того, положим, что $u=0$ при $x=0$ и любом t . Очевидно, мы должны считать $f(0)=0$. Эта задача также встречается в теории теплопроводности. Рассмотренная раньше задача относилась к распространению тепла в неограниченной среде, а настоящая относится к тому случаю, когда дело идет о распространении тепла в стержне, ограниченном с одной стороны плоскостью $x=0$, а второе условие определяет температуру u на границе. Решение, приведенное в предыдущем примере, здесь уже не годится, так как, во-первых, $f(x)$ для $x<0$ не задана и, во-вторых, добавлено новое условие $u=0$ при $x=0$.

Метод для решения этой второй задачи будет тем же, каким мы пользовались для решения первой задачи. Попытаемся найти частное решение уравнения (3), которое возможно представить в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от x , а другая только от t :

$$u = X(x) T(t). \quad (4)$$

Подставляя u , определяемое формулой (4), в дифференциальное уравнение (3), мы получим

$$X \frac{dT}{dt} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

В полученном равенстве налево стоит функция одного t , направо же функция одного x . Поэтому это равенство может быть выполнено для всех значений переменных x и t , друг от друга независимых, только тогда, когда обе части нашего равенства будут равны одному и тому же постоянному α . Отсюда следует, что $\frac{dT}{dt} = \alpha T$ или $T = Ae^{\alpha t}$. Так как T должно оставаться ограниченным при всяком t , $t > 0$, то постоянное α будет отрицательным, и мы можем положить $\alpha = -a^2 \lambda^2$. Тогда для x получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X.$$

Это уравнение имеет два частных решения: $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$, из которых только второе удовлетворяет данному граничному условию $X(0) = 0$. Из формулы (4) находим тогда частное решение дифференциального уравнения (3)

$$u = Ae^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x,$$

удовлетворяющее данному граничному условию, где λ есть произвольное действительное число, которое мы можем считать положительным, A есть произвольное постоянное, которое мы в праве предполагать произвольной функцией от λ .

В силу однородности линейного дифференциального уравнения (3) при суммировании его частных решений мы получаем снова решение того же уравнения; поэтому посредством интегрирования относительно λ мы найдем решение уравнения (3):

$$u = \int_0^\infty Ae^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x d\lambda, \quad (11)$$

которое зависит от произвольной функции $A(\lambda)$ и будет удовлетворять граничному условию. Легко непосредственно проверить, что формула (11) представляет действительно решение дифференциального уравнения (3); для этого нужно поступить так, как мы уже делали при решении первой задачи. Посмотрим, нельзя ли A выбрать так, чтобы выполнялось начальное условие $u = f(x)$ при $t = 0$. Для этого заметим, что, согласно частному случаю интегральной формулы Фурье (см. § 11), непрерывная функция $f(x)$, определенная для $x \geq 0$, удовлетворяющая условиям Дирихле на всяком конечном сегменте $[0, l]$ и абсолютно интегрируемая на интервале $(0, +\infty)$, причем $f(0) = 0$ может быть представлена в следующей форме:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(\alpha) \sin \alpha \lambda d\alpha. \quad (12)$$

Согласно начальному условию получаем при $t=0$ из формулы (11)

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A \sin \lambda x d\lambda. \quad (13)$$

Сравнивая формулы (12) и (13), заключаем, что можем выбрать для A выражение

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\alpha) \sin \alpha \lambda d\alpha. \quad (14)$$

Подставляя взятое для A выражение в формулу (11), будем иметь окончательно

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} f(\alpha) \sin \alpha \lambda \sin \lambda x d\alpha d\lambda. \quad (15)$$

Решение задачи теплопроводности, даваемое формулой (15), можно преобразовать к другому, более простому виду. Для этого представим (15) в виде

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin \alpha \lambda \sin \lambda x d\lambda.$$

Внутренний интеграл можно вычислить, если заметим, что

$$\sin \alpha \lambda \sin \lambda x = \frac{1}{2} [\cos \lambda (x - \alpha) - \cos \lambda (x + \alpha)],$$

и воспользуемся формулой (8''). После этого окончательно находим

$$u = \frac{1}{2\alpha \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\alpha) \left\{ e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\alpha^2 t}} - e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4\alpha^2 t}} \right\} d\alpha. \quad (15')$$

III. Предполагая, наконец, стержень ограниченным с обеих сторон плоскостями $x=0$ и $x=l$, мы должны будем найти решение дифференциального уравнения (3) при наличии начального условия $u=f(x)$ при $t=0$ и любом $0 \leq x \leq l$ и двух граничных условий $u=0$ при $x=0$ и любом t и $u=0$ при $x=l$ и любом t . Очевидно, мы должны считать $f(0)=f(l)=0$. Решение этой задачи мы получим тем же методом, что и решения двух предыдущих задач, с тем однако различием, что в качестве аналитического аппарата нам теперь придется использовать ряд Фурье вместо интеграла Фурье.

Поступая так же, как при решении предыдущей задачи, мы находим сначала частное решение дифференциального уравнения (3) вида

$$u = A e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x,$$

где A и λ — произвольные постоянные, удовлетворяющие первому граничному условию. Чтобы решение удовлетворяло и второму граничному условию, мы должны, очевидно, принять $\sin \lambda l = 0$, откуда $\lambda l = n\pi$ и $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Таким образом мы будем иметь частные решения дифференциального уравнения (3) в виде

$$u_n = A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n=1, 2, \dots),$$

где A_n — произвольные постоянные. Все эти решения удовлетворяют обоим граничным условиям задачи.

В силу однородности линейного дифференциального уравнения (3) при суммировании частных его решений мы получаем снова решение того же

уравнения, т. е.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (16)$$

будет решением уравнения (3), удовлетворяющим обоим граничным условиям. Посмотрим, нельзя ли постоянные A_n выбрать так, чтобы выполнялось начальное условие $u = f(x)$ при $t = 0$. Полагая $t = 0$ в формуле (16), найдем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (17)$$

Известно, что непрерывная функция $f(x)$ на сегменте $[0, l]$, обращаясь в нуль на концах этого сегмента, разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

если она удовлетворяет условию Дирихле на этом сегменте. Сравнивая последнее разложение с формулой (17), мы должны принять

$$A_n = a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (18)$$

Внося эти значения A_n в формулу (16), получим искомого решение дифференциального уравнения:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (19)$$

где A_n определяется по формулам (18).

Легко проверить, что найденная функция действительно удовлетворяет обоим граничным условиям и начальному условию. Также мы легко убедимся, путем подстановки функции u в уравнение (3), что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), потому что каждый член ряда (19) есть решение этого линейного однородного дифференциального уравнения. Выполнимые при этом операции почленного дифференцирования бесконечного ряда (19) законны, потому что получающиеся при этом ряды равномерно сходятся.

В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} n^2 \sin \frac{n\pi x}{l},$$

этот ряд равномерно сходится относительно t , при $t \geq t_0 > 0$, так как абсолютная величина его общего члена меньше чем

$$K n^2 e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t_0}{l^2}},$$

где K постоянное; заметив, что последнее выражение представляет общий член сходящегося ряда, мы убеждаемся в равномерной сходимости ряда, изображающего $\frac{\partial u}{\partial t}$. Совершенно также проверяется равномерная сходимость рядов, изображающих $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
145	14 снизу	$\frac{dx}{x}$	$\frac{dx}{x^2}$
195	3 сверху	$\int_0^{\infty} x^{p+q-1}$	$\int_0^{\infty} x^{p+q-1} dx$
197	11 снизу	возрастании	возрастании n
198	4 сверху	общим	сбем
236	5 снизу	$\frac{x^n}{x_3}$	$\frac{x^n}{y_3}$
274	8 .	$\sqrt{qdx^2 + dy^2}$	$q\sqrt{dx^2 + dy^2}$
355	14 .	кратное	краткое
477	9 сверху	$x = a.$	$x = a$
478	15 .	$-a^2\lambda^2.$	$-a^2\lambda^2.$
478	22 .	$-a^2a^2t$	$-a^3\lambda^2t$