

Проф. Е. Л. НИКОЛАИ

Л Е К Ц И И
по
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

I. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

II. КИНЕМАТИКА

А

Проф. Е. Л. НИКОЛАИ

Депозитарий

32739. 53.1
243

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ I

I. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
II. КИНЕМАТИКА

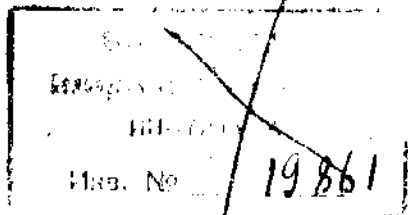
ДЕСЯТОЕ ИЗДАНИЕ

Допущено в качестве учебного пособия к переизданию в 1934 г. Комитетом по высшему техническому образованию при ЦИК СССР.



1326761

сн



О НТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА



РЕГИСТР

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Предлагаемое новое издание первой части „Лекций по теоретической механике“ отличается от предыдущего тем, что в нем соединены в одно целое первые две части прежних изданий — часть I „Статика твердого тела“ и часть II „Кинематика“.

Текст прежних изданий оставлен без изменения, исправлены лишь опечатки и устранены недочеты.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Статика, кинематика, динамика.

Механика есть наука о движении материальных тел.

В *теоретической механике* исследуются общие законы движения материальных тел и устанавливаются общие приемы и методы для решения всех вопросов, относящихся к движению тел. Применение начал механики к решению специальных технических задач (как, например, к исследованию прочности сооружений, к изучению движения машин и т. д.) составляет содержание различных отделов *механики прикладной*.

Механические явления (т. е. явления движения материальных тел) принадлежат к категории явлений физических. В этом смысле теоретическая механика является одним из отделов *теоретической физики*.

Частным случаем движения является *равновесие* тел. Отдел механики, в котором изучаются условия равновесия тел, называется *статикой*. Явления равновесия по существу гораздо проще явлений движения; отсюда понятно, что статика гораздо проще и элементарнее тех отделов механики, которые посвящены исследованию явлений движения тел. В виду этого мы и начнем в этой первой части нашего курса изучение механики с изложения статики (отдел первый). Такой порядок изложения соответствует и историческому ходу развития механики. Основные теоремы статики были известны еще древним, плодотворное же изучение явлений движения стало возможным лишь в связи с изобретением анализа бесконечно малых в XVII веке.

Затем мы перейдем к изучению *движения* материальных тел. При этом сначала (во втором отделе настоящей части) мы будем заниматься исследованием движения тел с чисто *геометрической* стороны. Отдел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения, называется *кинематикой*. В кинематике движение тел рассматривается вне связи с физическими причинами движения.

Потом (во второй части курса) мы обратимся к исследованию движения материальных тел в связи с *физическими* причинами, его определяющими. Посвященный этому исследованию отдел теоретической механики называется *динамикой* (или *кинетикой*). В динамике устанавливаются самые общие законы движения материальных тел.

Таким образом, курс теоретической механики распадается на три отдела: статика, кинематика, динамика.

§ 2. Векторы. Геометрическое сложение и геометрическое вычитание.

Всякая физическая величина, имеющая не только некоторое численное значение, но также и некоторое направление, называется *величиной векториальной* или *вектором*. Во всех отделах механики нам придется иметь дело с векториальными величинами; таковы: сила, скорость и т. д. Скажем здесь несколько слов об этих величинах¹.

Возьмем прямолинейный отрезок AB (черт. 1), длину которого обозначим через l , и припишем этому отрезку определенное направление, например, от точки A к точке B ; на чертеже это направление отмечено стрелкой, поставленной у точки B . Такой отрезок, которому приписано определенное направление, является простейшим примером векториальной величины.

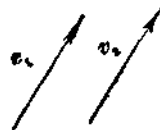
Всякий вектор, имеющий определенное численное значение v и определенное направление, может быть *графически* изображен прямолинейным отрезком AB (черт. 2), длина которого содержит v единиц длины (произвольно выбранных), а направление совпадает с направлением вектора;



Черт. 1.



Черт. 2.



Черт. 3.

на чертеже это направление отмечено стрелкой. Точка A называется началом вектора, точка B — концом вектора. Мы будем обозначать данный вектор или одной буквой v , или же двумя буквами AB , причем в последнем случае условимся писать на первом месте букву, поставленную у начала вектора, а на втором — букву, поставленную у конца вектора. Если бы вектор v имел направление от точки B к точке A , то его нужно было бы обозначить через BA .

Два вектора v_1 и v_2 (черт. 3) называются *геометрически равными*, если они численно равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону. Для обозначения геометрического равенства векторов мы будем писать обыкновенный знак равенства, но над каждой частью равенства будем ставить черточку:

$$\overline{v_1} = \overline{v_2}.$$

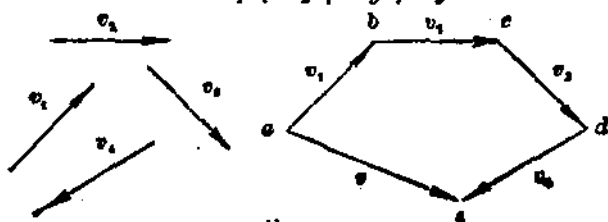
Представим себе несколько векторов, например, четыре вектора v_1, v_2, v_3, v_4 (черт. 4), и сделаем следующее построение. Из произвольной точки a проведем отрезок ab , геометрически равный вектору v_1 ; из конца b построенного отрезка проведем отрезок bc , геометрически равный вектору v_2 ; из конца c этого отрезка проведем отрезок cd , геометрически равный вектору v_3 ; наконец, из точки d проведем отрезок de , геометрически равный вектору v_4 . Затем соединим прямой линией начало a первого отрезка с концом e последнего отрезка; отрезок ae (которому

¹ Здесь приведены лишь немногие элементарнейшие сведения о векторах, которые необходимы на первых же порах при изложении статики. Подробное изложение теории векторов можно найти в книге Н. Е. Кочина, *Векторное исчисление* (ГТТИ, 1933).

мы приписываем направление от точки a к точке e) обозначим буквой v . Построенный таким образом вектор v называется *геометрической суммой* данных векторов v_1, v_2, v_3, v_4 , а только что описанное построение называется *геометрическим сложением* векторов; векторы v_1, v_2, v_3, v_4 получают название *составляющих* векторов.

Для обозначения геометрического сложения мы будем писать обыкновенный знак сложения, но над каждым слагаемым, а также над геометрической суммой будем ставить черточку:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4.$$



Черт. 4.

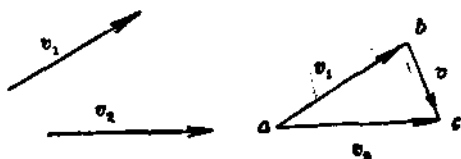
Если нам заданы n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ и если их геометрическая сумма есть v , то мы будем писать:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n.$$

Возьмем два вектора v_1 и v_2 (черт. 5). Отложим от произвольной точки a отрезки ab и ac , геометрически равные векторам v_1 и v_2 , и соединим точки b и c прямой линией; отрезок bc (которому приписываем направление от b к c) обозначим буквой v . Вектор v , который, будучи геометрически сложен с вектором v_1 , дает вектор v_2 , называется *геометрической разностью* векторов v_2 и v_1 ; описанное построение называется *геометрическим вычитанием*.

Для обозначения геометрического вычитания будем писать обыкновенный знак вычитания, но над уменьшаемым и вычитаемым, а также над геометрической разностью будем ставить черточки:

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$



Черт. 5.

Предоставляем читателю убедиться, что *геометрическое вычитание* данного вектора приводится к *геометрическому прибавлению* вектора, равного и параллельного данному, но направленного в противоположную сторону.

§ 3. Умножение вектора на положительное число.

Положим, нам дан некоторый вектор v (черт. 6). Построим новый вектор, численное значение которого равно численному значению данного вектора, умноженному на какое-либо положительное число m , а направление совпадает с направлением данного вектора. Полученный новый вектор называется *произведением* вектора v на положительное число m и обозначается через mv .

Итак, чтобы умножить данный вектор на какое-либо положительное число, нужно умножить численное значение вектора на это число, не изменяя его направления.

Если два вектора v_1 и v_2 геометрически равны, то и векторы mv_1 и mv_2 , полученные от умножения данных векторов на какое-либо положительное число m , также геометрически равны. Следовательно, если

$$\overline{v_1} = \overline{v_2},$$

$$\overline{mv_1} = \overline{mv_2}.$$



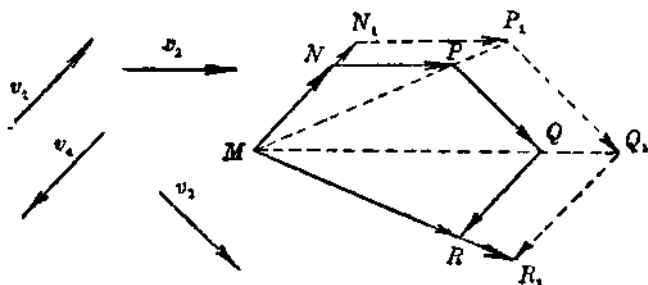
Черт. 6.

Итак, геометрическое равенство не нарушается от умножения обеих его частей на одно и то же положительное число.

Возьмем несколько векторов v_1, v_2, v_3, v_4 (черт. 7) и сложим их геометрически. Для этого построим многоугольник $MNPQR$, стороны которого геометрически равны данным векторам. Геометрическую сумму MR данных векторов обозначим через v . Следовательно,

$$\overline{v} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3} + \overline{v_4}.$$

Соединим теперь точки P и Q с точкой M прямыми линиями и отложим от точки M по направлениям отрезков MN, MP, MQ, MR отрезки $MN_1 = m \cdot MN, MP_1 = m \cdot MP, MQ_1 = m \cdot MQ, MR_1 = m \cdot MR$, где m есть какое-либо положительное число. Соединив точки N_1, P_1, Q_1, R_1 последовательно прямыми линиями, получим новый



Черт. 7.

многоугольник $MN_1P_1Q_1R_1$, подобный многоугольнику $MNPQR$. Стороны этого нового многоугольника параллельны сходственным сторонам многоугольника $MNPQR$ и равны этим сходственным сторонам, умноженным на данное число m . Отсюда следует, что отрезки $MN_1, N_1P_1, P_1Q_1, Q_1R_1, MR_1$ геометрически равны векторам $mv_1, mv_2, mv_3, mv_4, mv$.

Но отрезок MR_1 есть геометрическая сумма отрезков MN_1, N_1P_1, P_1Q_1 и Q_1R_1 . Следовательно, получаем:

$$\overline{mv} = \overline{mv_1} + \overline{mv_2} + \overline{mv_3} + \overline{mv_4}.$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом: чтобы умножить геометрическую сумму векторов на данное положительное число, достаточно умножить каждый составляющий вектор на это число.

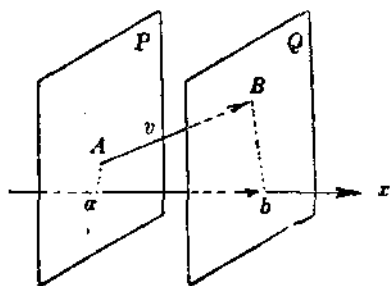
§ 4. Проекции вектора на ось и на плоскость.

Осью называется неограниченная прямая линия, которой приписано определенное направление.

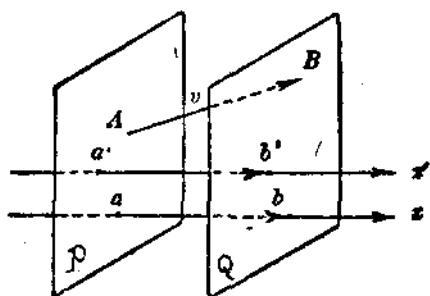
Возьмем вектор v и ось x (черт. 8), которой приписываем направление, указанное на чертеже стрелкой. Обозначим начало и конец вектора v буквами A и B и проведем через точки A и B плоскости P и Q , перпендикулярные к оси x . Точки пересечения a и b этих плоскостей с осью x называются проекциями точек A и B на ось x .

Отрезок ab (которому мы приписываем направление от a к b), взятый со знаком $+$, если его направление совпадает с направлением оси x , и со знаком $-$ в противном случае, называется *проекцией вектора v на ось x* ; обозначим эту проекцию через v_x . Итак, $v_x = \pm ab$, причем тот или другой знак в этой формуле берется согласно только что формулированному правилу.

Заметим, что для построения точек a и b можно и не проводить плоскостей P и Q . Достаточно опустить из точек A и B перпенди-



Черт. 8.



Черт. 9.

куляры Aa и Bb на ось x ; основания a и b этих перпендикуляров и будут проекциями точек A и B на ось x .

Возьмем теперь две параллельные и одинаково направленные оси x и x' (черт. 9) и спроектируем на них вектор v . Для этого проведем через начало и конец вектора A и B плоскости P и Q , перпендикулярные к осям x и x' . Отметим проекции a и b точек A и B на ось x и проекции a' и b' тех же точек на ось x' .

Проекции ab и $a'b'$ вектора v на оси x и x' численно равны (как отрезки параллельных, заключенные между параллельными плоскостями) и имеют одинаковые знаки. Итак, *проекции вектора на две параллельные и одинаково направленные оси равны между собой*.

Этим обстоятельством можно воспользоваться при построении проекции данного вектора на данную ось. Вместо того, чтобы проектировать вектор на данную ось, часто представляется более удобным проектировать вектор на ось, параллельную данной и одинаково с нею направленную, но проходящую через начало вектора. В таком случае построение проекции вектора на ось представляется в следующем виде.

Дан вектор v и ось x (черт. 10). Через начало вектора A проводим ось x' , параллельную оси x и одинаково с нею направленную. Из конца вектора B опускаем перпендикуляр Bb на ось x' . Отрезок Ab и есть проекция v_x вектора v на ось x . Согласно сделанному выше условию мы

считаем ее положительной, если ее направление совпадает с направлением оси x , и отрицательной в противном случае.

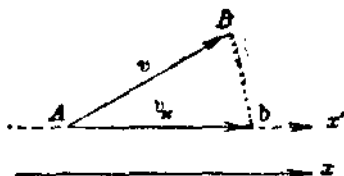
В дальнейшем при проектировании вектора на данную ось мы будем обыкновенно пользоваться построением, указанным на черт. 10.

Из треугольника ABb (прямоугольного при вершине b) следует, что

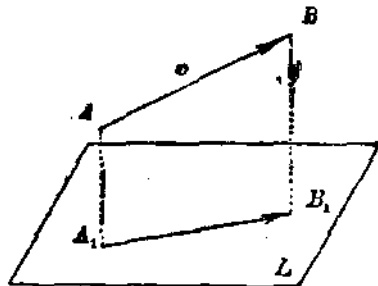
$$v_x = v \cos(\varphi, x), \quad (1)$$

где (φ, x) есть угол, заключенный между направлением вектора v и направлением оси x . На черт. 10 проекция v_x положительна; предлагаем читателю убедиться, что формула (1) остается справедливой и в случае отрицательной проекции v_x .

Положим, нам дан вектор v и плоскость L (черт. 11). Опустим из начала и конца вектора A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость



Черт. 10.



Черт. 11.

кость L . Основания этих перпендикуляров A_1 и B_1 называются проекциями точек A и B на плоскость L . Отрезок же A_1B_1 (которому мы приписываем направление от A_1 к B_1) называется проекцией вектора v на плоскость L .

§ 5. Проекции геометрической суммы векторов на ось и на плоскость.

Возьмем несколько векторов v_1, v_2, v_3, v_4 и ось x (черт. 12). Построим геометрическую сумму v данных векторов и спроектируем векторы v_1, v_2, v_3, v_4 , а также их геометрическую сумму v на ось x . Для этого из точек M, N, P, Q, R опускаем перпендикуляры Mm, Nn, Pp, Qq, Rr на ось x . Обозначая проекции векторов v_1, v_2, v_3, v_4, v на ось x через $v_{1x}, v_{2x}, v_{3x}, v_{4x}, v_x$, имеем:

$$v_{1x} = mn, v_{2x} = np, v_{3x} = -pq, v_{4x} = qr, v_x = mr.$$

Но из чертежа видно, что

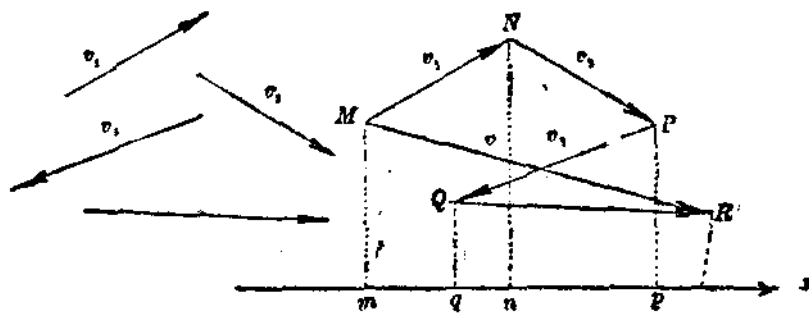
$$mr = mn + np - pq + qr.$$

Следовательно:

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} + v_{4x}.$$

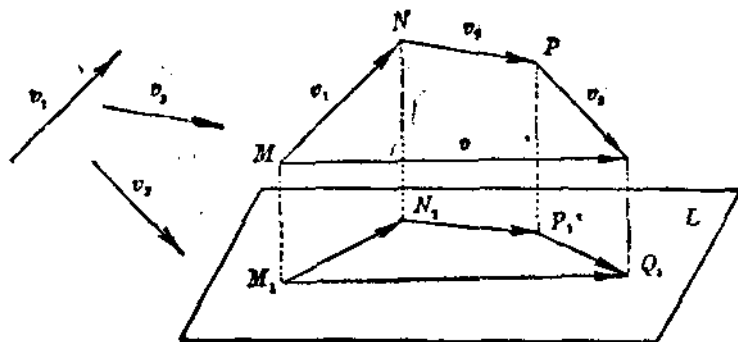
Итак, проекция геометрической суммы векторов на данную ось равна алгебраической сумме проекций составляющих на ту же ось.

Возьмем опять несколько векторов v_1, v_2, v_3 и плоскость L (черт. 13). Построим геометрическую сумму v данных векторов и спроектируем векторы v_1, v_2, v_3 , а также их геометрическую сумму v на плоскость L . Для этого из точек M, N, P, Q опускаем перпендикуляры MM_1, NN_1 ,



Черт. 12.

PP_1, QQ_1 на плоскость. Отрезки M_1N_1, N_1P_1, P_1Q_1 суть проекции данных векторов на плоскость L , а отрезок M_1Q_1 есть проекция их геометрической суммы v на ту же плоскость.



Черт. 13.

Но из чертежа видно, что отрезок M_1Q_1 есть геометрическая сумма отрезков M_1N_1, N_1P_1, P_1Q_1 . Следовательно, проекция геометрической суммы векторов на данную плоскость равна геометрической сумме проекций составляющих на ту же плоскость.

ГЛАВА I. АКСИОМЫ СТАТИКИ.

§ 6. Материальная точка. Первая аксиома. Сила.

Все науки, входящие в круг теоретического естествознания, построены по одному и тому же плану: в основание науки полагается ограниченное число истин, которые называются *аксиомами* данной науки и которые являются результатом наблюдения окружающего нас мира; затем все остальное содержание науки выводится как следствие из принятых аксиом. По такому же плану построена и теоретическая механика. Полная система аксиом механики была установлена впервые Ньютоном в его сочинении „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“¹.

Изложение ньютоновых общих аксиом механики мы отложим до начала части II этих лекций, посвященной динамике. Теперь же, приступая к изложению статики, мы ограничимся установлением частных аксиом, которые достаточны, чтобы обосновать на них статику (но недостаточны для обоснования всей механики).

Заметим, что в число этих аксиом статики войдут некоторые из ньютоновых общих аксиом; другие же аксиомы статики могут быть выведены из ньютоновых аксиом как следствия. Сейчас мы примем и те и другие аксиомы статики без доказательства, рассматривая их как результат наблюдения.

Всякое материальное тело мы можем представить себе мысленно раздробленным на весьма малые частицы. Частица вещественного тела настолько малая, что размерами ее можно пренебречь, называется *материальной точкой*. В механике все вещественные тела представляются как собрания или системы материальных точек.

Представим себе отдельную материальную точку и предположим, что она настолько удалена от всех остальных вещественных тел, что не испытывает никакого влияния со стороны других тел. Такую находящуюся вне воздействия других тел материальную точку назовем *изолированной материальной точкой*.

Аксиома 1. Изолированная материальная точка или находится в покое, или движется прямолинейно и равномерно. Эта аксиома, называемая также принципом инерции, была открыта Галилеем.

¹ Первое издание сочинения Ньютона появилось в 1687 году. Сочинение Ньютона переведено на русский язык А. Н. Крыловым под заглавием „Математические начала натуральной философии“ в „Известиях Морской академии“ 1915, 1916.

Заметим, что движение точки называется прямолинейным, если она движется по прямой линии; оно называется равномерным, если в равные промежутки времени точка проходит равные пути.

Представим себе теперь материальную точку, которая движется непрямолинейно или неравномерно. На основании только что установленной аксиомы мы заключаем, что эта точка — неизолированная, что она находится под действием других вещественных тел. Действие других вещественных тел на данную материальную точку, результатом которого является непрямолинейное или неравномерное движение этой точки, называется силой.

Мы говорим, что сила, действующая на данную материальную точку, приложена² к этой точке. Данная точка называется точкой приложения силы.

Следует подчеркнуть, что всякая сила есть действие одного тела на другое. Простейшим и всем известным примером силы является сила тяжести. Силой тяжести или весом называется сила, с которой всякое тело, находящееся вблизи земной поверхности, притягивается землей. Сила тяжести направлена вертикально вниз.

Не входя в перечисление существующих в природе сил, заметим, что всякая сила имеет определенную величину, которая может быть измерена. Некоторую произвольную силу мы выбираем за единицу силы; измерить данную силу — значит найти, во сколько раз данная сила больше или меньше той силы, которая принята за единицу. Для сравнения и измерения сил служат приборы, называемые динамометрами.

Мы примем за единицу силы вес 1 литра воды при 4°C ; эта единица силы называется килограммом.¹ Единицами, производными от килограмма, являются грамм ($= 0,001 \text{ кг}$) и тонна ($= 1000 \text{ кг}$).

Величина силы, измеренная в принятых единицах, выражается некоторым числом; обозначим его буквой F .

Кроме определенной численной величины, всякая сила имеет определенное направление; так, сила тяжести направлена вертикально вниз. Следовательно, сила есть величина векторная.

Сила F , приложенная к точке A , графически изображается отрезком AB (черт. 14), отложенным от точки приложения A по направлению силы. Длина отрезка AB содержит F единиц длины (произвольно выбранных).

Точка A называется началом силы F , точка B — концом силы; у конца B ставится стрелка, указывающая направление силы.

Прямая KL , на которой расположен отрезок, графически изображающий силу, называется линией действия силы.

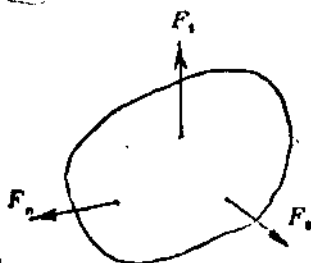
Если материальная точка A , к которой приложены силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, то говорят, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ взаимно уравновешиваются.

¹ Точнее единица силы килограмм определяется как вес платинового прототипа (хранящегося в Севре, близ Парижа) на уровне океана и на широте 45° . Вес этого прототипа не равняется в точности весу 1 литра воды при 4°C .

§ 7. Силы внутренние и внешние. Абсолютно твердое тело. Вторая аксиома. Третья аксиома. Перенесение силы вдоль ее линии действия.

Представим себе теперь какое-либо вещественное тело конечных размеров. Как уже было объяснено в предыдущем параграфе, всякое материальное тело (твердое, жидкое или газообразное) мы представляем себе как собрание или систему материальных точек. Все силы, действующие на материальные точки, входящие в состав данного тела, мы распределим на две группы: на силы внутренние и силы внешние. *Внутренними* силами называются силы взаимодействия между материальными точками данного тела. *Внешние* же силы суть силы, испытываемые материальными точками данного тела со стороны других вещественных тел.

Представим себе тело, к которому приложены внешние силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ (черт. 15). Эти внешние силы вызывают появление внутренних сил, действующих между материальными точками данного тела; внутренние силы на чертеже не изображены. Если данное тело находится в покое, то говорят, что внешние силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ *взаимно уравниваются*; также говорят, что данное тело находится в *равновесии*.



Черт. 15.

В нашем курсе статики мы не будем заниматься изучением внутренних сил. Внутренние силы, действующие между материальными точками твердого тела, исследуются в теории сопротивления материалов и в теории упругости; изучение внутренних сил в жидком и газообразном теле относится к области гидромеханики и теории газов.

Нашей задачей будет установить те условия, которым должны удовлетворять внешние силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, чтобы тело находилось в равновесии. Но и эту задачу мы еще ограничим. Во всех дальнейших теоретических исследованиях мы будем изучать условия равновесия только одной категории тел, именно абсолютно твердых тел.

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояния между любыми двумя точками которого при всех условиях остаются неизменными.

В природе не существует тел, отвечающих определению абсолютно твердого тела. Все вещественные тела, как бы тверды они ни были, при известных условиях испытывают хотя бы небольшие изменения формы. Но во многих вопросах эти незначительные изменения формы (или „деформации“) играют второстепенную роль. Тогда ими можно пренебречь и рассматривать тела как абсолютно твердые.

Итак, задача нашего курса статики может быть сформулирована следующим образом: *исследовать условия равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу*. В какой мере результаты, полученные при изучении равновесия абсолютно твердого тела, имеют значение для решения вопроса о равновесии тел нетвердых, будет выяснено в § 10.

Так как в дальнейших теоретических исследованиях нам не придется упоминать о внутренних силах, то условимся для сокращения речи вместо

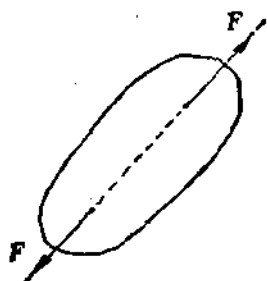
слов „внешняя сила“ говорить просто „сила“. Условимся также термин „абсолютно твердое тело“ заменять более кратким „твердое тело“. Итак, в дальнейшем под словом „сила“ (если нет определенного указания на внутреннюю силу) нужно понимать „внешняя сила“, а под термином „твердое тело“ следует понимать „абсолютно твердое тело“.

Условие равновесия двух сил, приложенных к твердому телу, устанавливается второй аксиомой статики.

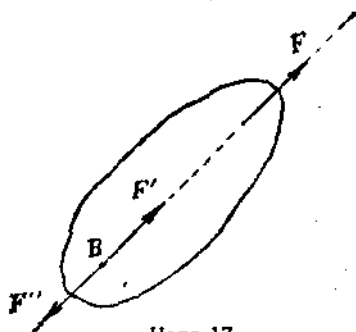
Аксиома II. *Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравниваются тогда и только тогда, когда они равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны* (черт. 16).

Перейдем к третьей аксиоме.

Положим, что некоторое твердое тело находится в равновесии под действием приложенных к нему сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Положим далее, что $S_1, S_2, \dots, S_m$ есть группа сил, взаимно уравнивающих. Присоединим силы $S_1, S_2, \dots, S_m$ к силам, действующим на наше твердое тело.



Черт. 16.



Черт. 17.

Мы примем как аксиому, что присоединение взаимно уравнивающих сил $S_1, S_2, \dots, S_m$ не нарушит равновесия данного тела, т. е. что при одновременном действии сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ и $S_1, S_2, \dots, S_m$ оно будет оставаться в равновесии.

Положим опять, что некоторое твердое тело находится в равновесии под действием приложенных к нему сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, и положим, что в число этих сил входит группа сил $F_1, F_2, \dots, F_k$, взаимно уравнивающих. Отбросим силы $F_1, F_2, \dots, F_k$. Мы примем как аксиому, что отбрасывание взаимно уравнивающих сил $F_1, F_2, \dots, F_k$ не нарушит равновесия данного тела, т. е. что, находясь под действием сил $F_{k+1}, \dots, F_n$, оно будет оставаться в равновесии.

Итак, резюмируя только что сказанное, мы можем формулировать следующую третью аксиому.

Аксиома III. *Присоединение и отбрасывание сил, взаимно уравнивающих, не нарушают равновесия тела.*

Этой аксиомой постоянно пользуются в исследованиях статики. Сделаем сейчас же приложение этой аксиомы к выводу важного свойства силы, приложенной к твердому телу.

Положим, что твердое тело находится в равновесии под действием силы F , приложенной к точке A (черт. 17), и других сил, не изображенных на чертеже. Возьмем на линии действия силы F какую-либо

точку B и приложим в этой точке две силы F' и F'' , равные силе F (так что $F = F' = F''$); силу F' направим по линии действия силы F в ту же сторону, в которую направлена сила F , а силу F'' — в сторону противоположную. Так как силы F' и F'' взаимно уравниваются (аксиома II), то от их присоединения равновесие тела не нарушается (аксиома III). Но силы F и F'' также взаимно уравниваются (аксиома II); следовательно, не нарушая равновесия, их можно отбросить (аксиома III). Отбросив их, получим одну силу F' , которой заменена первоначально данная сила F . Следовательно, замена силы F силой F' не нарушает равновесия тела.

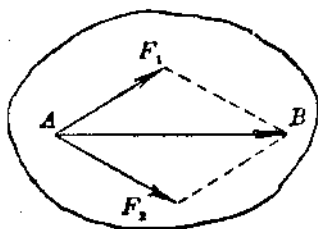
Итак, равновесие твердого тела не нарушается от перенесения силы вдоль ее линии действия в любую точку.

Следовательно, мы имеем возможность, не нарушая равновесия тела, переносить каждую из приложенных к нему сил вдоль ее линии действия в любую точку. Мы будем часто пользоваться этим приемом.¹

§ 8. Статически эквивалентные системы сил. Равнодействующая. Четвертая аксиома.

Две системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ и $P_1, P_2, \dots, P_m$, приложенные к твердому телу, называются *статически эквивалентными*, если одну систему можно заменить другой, не нарушая равновесия тела.

Если система сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ эквивалентна одной силе R , то сила R называется *равнодействующей* данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$; эти последние силы получают наименование *составляющих сил*. Замена системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ их равнодействующей R называется *сложением сил*. Обратный процесс замены силы R ее составляющими силами $F_1, F_2, \dots, F_n$ называется *разложением* данной силы R на составляющие силы.



Черт. 18.

Положим, что сила R есть равнодействующая системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Возьмем силу R' , равную R и направленную по той же прямой, что сила R , но в противоположную сторону. Сила R' уравнивается с силой R . Но, не нарушая равновесия, мы можем заменить силу R эквивалентной ей системой сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Эта сила R' называется *уравнивающей* систему сил $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Итак, равнодействующая и уравнивающая силы равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Заметим сейчас же, что не всякая система сил имеет равнодействующую (и следовательно не всякая система сил может быть уравновешена

¹ Во избежание недоразумений следует заметить, что присоединение и отбрасывание взаимно уравнивающих внешних сил, не нарушая равновесия тела, в то же время существенно изменяют картину распределения внутренних сил в теле. Поэтому применение аксиомы III, вполне законное при исследовании вопросов о равновесии внешних сил, никоим образом недопустимо при изучении внутренних сил, возникающих в теле. В частности и перенесение внешних сил вдоль их линий действия не может быть допустимо при решении вопроса о распределении внутренних сил в теле.

одной силой). В дальнейшем будет установлено условие, которому должна удовлетворять система сил для того, чтобы существовала равнодействующая.

Положим, что в точке A твердого тела приложены две силы F_1 и F_2 (черт. 18). Мы примем за аксиому, что такие две силы имеют равнодействующую, которая определяется следующим образом.

Аксиома IV. *Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в этой же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.*

Следовательно, равнодействующая R сил F_1 и F_2 приложена в точке A , равна диагонали AB параллелограмма, построенного на силах F_1 и F_2 , и направлена от точки A к точке B .

§ 9. Пятая аксиома. Действие и противодействие. Примеры.

Пятая аксиома формулируется следующим образом:

Аксиома V. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

Мы уже знаем (§ 6), что всякая сила есть действие одного тела на другое. Смысл только что сформулированной аксиомы состоит в том, что, если на материальную точку A (черт. 19) действует некоторая сила со стороны материальной точки B , то и на точку B действует сила со стороны точки A , примем эти две силы равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Одна из этих сил получает наименование „действия“, а другая — „противодействия“.

Таким образом, пятой аксиомой устанавливается, что в природе не может быть одностороннего действия силы. Иногда говорят короче: „действие равно противодействию“. Эта аксиома была открыта Ньютоном.

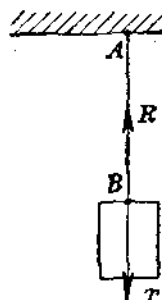
Поясним сказанное примерами.

1. **Всемирное тяготение.** *Всемирным тяготением* называется сила притяжения, действующая между всякими двумя материальными телами. Земля и луна взаимно притягиваются, причем сила притяжения луны землею и сила притяжения земли луною равны по величине и направлены по одной прямой (по прямой, соединяющей центры земли и луны) в противоположные стороны.

2. **Напряжение нити и реакция нити.** Положим, что к неподвижной точке A прикреплен конец нити AB (черт. 20), к концу B которой подвешен груз. К нижнему концу нити B приложена сила T ,

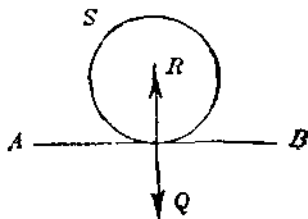
¹ Во избежание недоразумений следует отметить, что если материальные точки A и B (черт. 19) не принадлежат к одному и тому же твердому телу, то приложенные к ним силы F , которые мы называли действием и противодействием, отнюдь не уравнивают друг друга, хотя они и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Аксиома II к этим силам не применима; эта аксиома говорит о силах, приложенных к одному и тому же твердому телу. Совершенно очевидно, что если материальные точки A и B ничем не связаны между собой, то под действием приложенных к ним сил F они не могут оставаться в равновесии; они придут в движение, удаляясь одна от другой.

которая представляет действие на нить подвешенного к ней груза, эта сила, называемая *натяжением* нити, равна весу подвешенного груза и направлена вертикально вниз. В то же время к той точке груза, к которой прикреплен конец B нити, приложена сила R , которая представляет действие нити на груз; эта сила называется *реакцией* (или *сопротивлением*) нити; она равна натяжению T и направлена вертикально вверх.



Черт. 20.

3. *Давление на плоскость и реакция плоскости.* Положим, что на горизонтальной плоскости AB покоится шар S (черт. 21). К плоскости AB приложена в точке касания плоскости и шара сила Q ; эта сила называется *давлением* шара на плоскость; она равна весу шара и направлена вертикально вниз. К шару

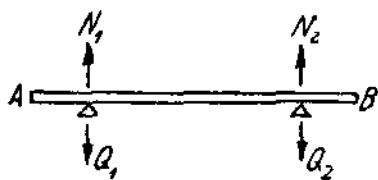


Черт. 21.

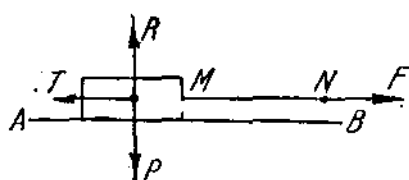
S приложена, в точке касания шара с плоскостью, сила R , которая называется *реакцией* плоскости; эта сила равна давлению Q и направлена вертикально вверх.

4. *Давления на опоры и опорные реакции.* Представим себе горизонтальную балку AB , лежащую на двух опорах (черт. 22). Балка производит давления на опоры; эти давления Q_1 и Q_2 приложены к опорам и направлены вертикально вниз. Наоборот, к балке приложены в точках соприкосновения ее с опорами силы N_1 и N_2 , которые представляют действие опор на балку. Эти силы N_1 и N_2 называются *опорными реакциями*; они равны соответственно давлениям Q_1 и Q_2 , но направлены вертикально вверх.

5. *Сила трения.* Опыт показывает, что, если одно тело скользит по поверхности другого, то к движущемуся телу приложена сила, на-



Черт. 22.



Черт. 23.

вленная в сторону, противоположную движению, которая называется *силой трения*. Представим себе, что на горизонтальной плоскости AB (черт. 23) находится тело M , к которому прикреплена нить MN . Положим, что взяв в руку конец N этой нити, мы заставим тело M скользить по плоскости AB в сторону, указанную стрелкой (слева направо), причем сообщим телу M движение прямолинейное и равномерное. К телу M будут приложены его вес P , реакция плоскости R (равная весу P) и сила трения T , направленная в сторону, противоположную движению. Опытами Кулона (1781) и Морена (1833) было установлено,

что сила трения T пропорциональна реакции R (или, что все равно, сила трения пропорциональна давлению тела на плоскость), так что можно написать

$$T = kR,$$

где k есть коэффициент пропорциональности, зависящий от вещества трущихся тел и от степени шероховатости их поверхностей, но не зависящий от величины трущихся поверхностей и от скорости скольжения; этот коэффициент k называется *коэффициентом трения*¹. Поверхности трущихся тел называются *абсолютно гладкими* в том случае, если $k = 0$. Заметим, что угол φ , определенный условием $\operatorname{tg} \varphi = k$, называется *углом трения*.

Так как, по предположению, тело M движется прямолинейно и равномерно, то силы, к нему приложенные, должны взаимно уравновешиваться. Отсюда следует, что сила трения T должна уравновешиваться с натяжением F нити MN , т. е. должно быть $T = F$ или

$$F = kR.$$

Предположим теперь, что мы приложим к концу N нити MN силу F направленную, как показано на черт. 23, но меньшую, чем величина kR .

Из сказанного следует, что, прилагая такую силу F , мы не сможем сдвинуть тело M : оно останется в покое. Силы, приложенные к телу M , и теперь должны взаимно уравновешиваться. Следовательно и теперь должна существовать сила трения T , уравновешивающая силу F ; эта сила трения T должна быть направлена в сторону, противоположную направлению силы F , и должна быть равна силе F .

Так как по предположению $F < kR$, то отсюда следует

$$T < kR.$$

Итак, в случае *скольжения* тела M по плоскости AB мы имеем

$$T = kR,$$

в случае же *покоя* тела M имеем

$$T < kR.$$

Предельное (наибольшее) значение силы трения в случае покоящегося тела определяется формулой $T = kR$, так что вообще в случае *покоя* можно написать:

$$T \leq kR.$$

6. Внутренние силы. Внутренние силы, действующие между частями тела, подчинены аксиоме „действие равно противодействию“. Согласно этой аксиоме внутренние силы взаимодействия между двумя частицами тела равны и направлены по прямой, соединяющей эти частицы, в противоположные стороны. Мы уже заметили, что вопрос об определении внутренних сил не входит в рамки излагаемого курса. Однако, чтобы дать понятие о том, каким образом могут быть определяемы внутренние силы, рассмотрим следующий простой пример.

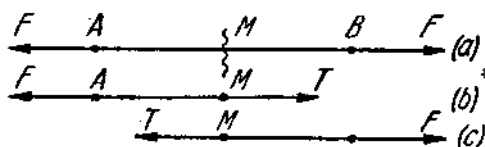
¹ Позднейшие опыты показали, что коэффициент трения k в некоторой степени зависит также от скорости, с которой одно тело скользит по поверхности другого; об этом будет сказано подробнее в части II наших лекций.

Представим себе брусок AB (черт. 24, a) который растягивается равными силами F , приложенными к его концам. Возьмем на оси бруска какую-либо точку M и проведем мысленно в точке M сечение, перерезывающее брусок на две части AM и MB . В этом сечении мы имеем две внутренние силы: одна из них приложена к концу M части AM и представляет действие части MB на часть AM , другая же приложена к концу M части MB и представляет действие части AM на часть MB . По аксиоме „действие равно противодействию“, эти две внутренние силы равны и направлены в противоположные стороны; обозначим их общую величину буквой T .

Чтобы определить величину T интересующих нас внутренних сил, обратимся к рассмотрению равновесия одной из частей бруска AM или MB (для большей наглядности эти части бруска изображены в отдельности на черт. 24, b и 24, c). Например, возьмем часть бруска AM . Как весь брусок AB , так и часть его AM находятся в равновесии; следовательно, силы, приложенные к части AM , должны взаимно уравновешиваться.

К части AM приложена сила F в точке A и сила T в точке M ; из условия их равновесия заключаем что

$$T = F.$$



Черт. 24.

Итак, в любом сечении бруска, растягиваемого внешними силами F , действуют внутренние силы T , равные внешним силам F ; каждая из этих внутренних сил называется *растягивающим усилием*.

Если бы внешние силы F не растягивали, а сжимали брусок AB , то и в сечении M мы получили бы не растягивающие, а *сжимающие усилия*, равные внешним силам F . Заметим, что растягивающие усилия принято обозначать буквой T , а сжимающие — буквой S .

Для бруска AB обе равные силы T являются внутренними; но для каждой из частей бруска AM и MB , взятых в отдельности, соответствующая сила T , приложенная к каждой из этих частей, является внешней. Таким образом, проведя сечение M , мы перевели интересующие нас внутренние силы в разряд внешних; в этом и состоит идея изложенного метода, который можно назвать *методом сечений*.

Этим методом пользуются всегда для определения внутренних сил. Проведя надлежащее сечение, отсекают часть тела, равновесие которой затем и рассматривают. В число сил, приложенных к выделенной части тела, входят внутренние силы, действующие в проведенном сечении; притом, если рассматривать только выделенную часть тела, отбросив остальную его часть, то эти внутренние (по отношению ко всему телу) силы оказываются в числе внешних сил (по отношению к выделенной части тела). Затем эти силы определяются из условий равновесия выделенной части тела.

§ 10. Равновесие нетвердых тел. Шестая аксиома.

Остановимся теперь на вопросе о равновесии нетвердых тел.

Положим, что некоторое материальное тело A , которое предполагаем нетвердым, находится в равновесии под действием приложенных к нему

сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Представим себе тело B , тождественное по форме с данным телом A , но абсолютно твердое. Мы примем как аксиому, что если нетвердое тело A находится в равновесии под действием сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, то и твердое тело B , находясь под действием тех же сил, также будет оставаться в равновесии.

Замену данного нетвердого тела A твердым телом B можно представить себе как *затверждение* тела A . В таком случае высказанная аксиома получает следующую формулировку:

Аксиома VI. *Равновесие нетвердого тела не нарушается от затвердевания данного тела.*

Этой аксиомой, которую называют иногда *принципом затвердевания*, пользуются весьма часто при изучении равновесия нетвердых тел. Из этой аксиомы следует, что силы, под действием которых находится в равновесии нетвердое тело, должны удовлетворять тем же условиям равновесия, которым удовлетворяют силы, приложенные к твердому телу. Другими словами, условия равновесия твердого тела применимы и к телам нетвердым.

Следует, однако, иметь в виду, что условия равновесия, необходимые и достаточные для равновесия твердого тела, оказываются необходимыми, но еще недостаточными для равновесия нетвердого тела. Для того, чтобы было обеспечено равновесие нетвердого тела, силы, к нему приложенные, должны удовлетворять не только условиям равновесия твердого тела, но еще и некоторым добавочным условиям. Выясним это на следующем простом примере.



Черт. 25.

Представим себе нить AB , которая находится в равновесии под действием двух сил, приложенных к ее концам (черт. 25). Представим себе нить затвердевшей, т. е. мысленно заменим ее абсолютно твердым стержнем AB . На основании аксиомы II условие равновесия такого стержня, находящегося под действием двух сил, приложенных к его концам, состоит в том, что эти две силы должны быть равны по величине и направлены по прямой AB в противоположные стороны. Этому же условию равновесия должны удовлетворять и силы, приложенные к концам нашей нити. Но это условие, необходимое и достаточное для равновесия твердого стержня, еще не достаточно для равновесия нити. Силы, приложенные к концам стержня, могут либо растягивать его, либо сжимать. Добавочное условие, которому должны удовлетворять силы, приложенные к концам нити, состоит в том, чтобы эти силы растягивали нить, но не сжимали ее, т. е. чтобы они были направлены так, как показано на черт. 25; под действием сжимающих сил равновесие нити невозможно.

Итак, необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела являются вместе с тем необходимыми, но недостаточными условиями равновесия нетвердого тела.

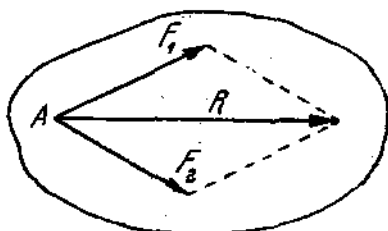
Из сказанного явствует, какое значение имеет статика твердого тела для изучения равновесия любых, вообще говоря нетвердых, тел. Силы, приложенные к нетвердому телу, должны удовлетворять двояким условиям равновесия: условиям равновесия твердого тела и добавочным условиям, зависящим от физических свойств данного тела.

СЛОЖЕНИЕ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ И ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ.

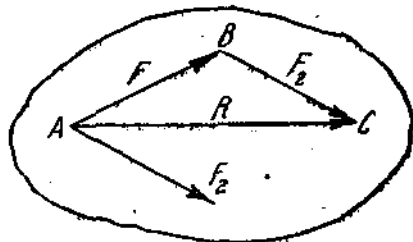
§ 11. Параллелограмм сил. Треугольник сил.

Мы обратимся теперь к исследованию вопроса о сложении сил, приложенных к твердому телу; разобрав этот вопрос, мы установим вместе с тем и условия равновесия таковых сил. В первых главах (главы II—VI) мы будем предполагать, что все заданные нам силы лежат в одной плоскости; в последующих главах (главы VII—X) рассмотрим случаи, когда силы не лежат в одной плоскости. В настоящей главе разберем вопрос о сложении сил, лежащих в одной плоскости и приложенных в одной точке.

Остановимся сначала на случае двух сил, приложенных в одной точке.



Черт. 26.



Черт. 27.

Положим, что в точке A твердого тела приложены две силы F_1 и F_2 (черт. 26). Мы уже знаем (§ 8), что эти две силы приводятся к одной равнодействующей R , которая приложена в той же точке A и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.

Параллелограмм, построенный на данных силах, называется *параллелограммом сил*, и изложенное построение равнодействующей сил F_1 и F_2 называется *правилом параллелограмма сил*.

Заметим, что построение параллелограмма сил может быть заменено также следующим более простым построением.

Положим опять, что в точке A твердого тела приложены две силы F и F_2 (черт. 27). Из конца B силы F проведем отрезок BC , геометрически равный силе F_2 (т. е. численно равный и параллельный силе F_2 и направленный в ту же сторону, что сила F_2). Соединим начало A силы F с концом C только что построенного отрезка. Очевидно, что отрезок AC и изображает равнодействующую R данных сил.

Треугольник ABC , составленный из отрезков F , F_2 и R , называется *треугольником сил*, и указанное построение называется *правилом треугольника сил*.

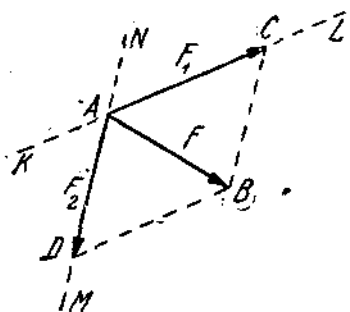
Следует обратить внимание на следующее *правило стрелок* в треугольнике сил: составляющие силы F и F_2 направлены в одну сторону

по отводу треугольника сил, равнодействующая же R направлена в сторону обратную.

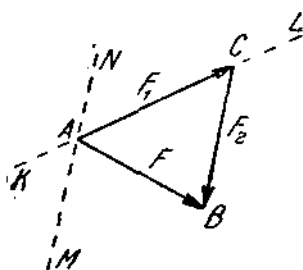
Построением параллелограмма сил или треугольника сил легко решается и обратная задача о *разложении* данной силы на две составляющие, приложенные в той же точке, линии действия которых заданы.

Положим, дана сила F , приложенная в точке A твердого тела (черт. 28);¹ требуется разложить ее на две составляющие, приложенные в той же точке A , линии действия которых KL и MN заданы. Из конца B силы F проводим прямую, параллельную MN , до пересечения с KL в точке C и прямую, параллельную KL , до пересечения с MN в точке D . Получим параллелограмм сил $ACBD$; стороны его AC и AD дают как величины, так и направления искомых составляющих F_1 и F_2 .

Чтобы решить ту же задачу при помощи построения треугольника сил, проводим из конца B силы F (черт. 29) прямую, параллельную MN , до пересечения с KL в точке C . Получили треугольник сил ACB . При-



Черт. 28.



Черт. 29.

писываем сторонам AC и CB направления, одинаковые по обводу треугольника и противоположные направлению силы F . Стороны AC и CB дают величины и направления искомых составляющих F_1 и F_2 .

§ 12. Многоугольник сил. Условие равновесия сил, приложенных в одной точке.

Перейдем теперь к случаю какого угодно числа сил, приложенных в одной точке.

Положим, что в точке A приложены силы F_1, F_2, F_3, F_4 , лежащие в одной плоскости, которую принимаем за плоскость чертежа (черт. 30); требуется сложить эти силы. Мы ограничимся рассмотрением случая четырех сил, приложенных в одной точке; наше рассуждение остается справедливым для какого угодно числа сил.

Будем складывать заданные нам силы последовательно. Сначала складываем силы F_1 и F_2 ; по правилу треугольника сил находим их равнодействующую R_1 . Затем складываем силы R_1 и F_3 ; строя опять треугольник этих сил, находим их равнодействующую R_2 . Наконец, скла-

¹ Очертания тела здесь и в дальнейшем на чертеже не изображаем, так как оно не имеет значения.

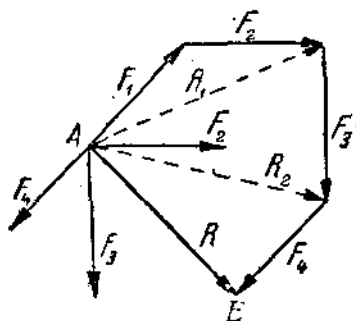
дывая силы R_2 и F_4 , находим их равнодействующую R , которая и есть искомая равнодействующая всех заданных сил.

Из сказанного следует, что для нахождения равнодействующей сил F_1, F_2, F_3, F_4 достаточно произвести следующее построение.

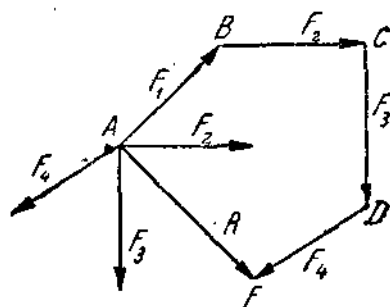
Из конца B силы F_1 (черт. 31) проводим отрезок BC , геометрически равный силе F_2 ; затем из конца C построенного отрезка проводим отрезок CD , геометрически равный силе F_3 , и продолжаем так поступать, пока не исчерпаем всех заданных сил. Получим незамкнутый многоугольник $ABCDE$, который называется *многоугольником сил*. Соединяем первую и последнюю вершины многоугольника сил отрезком AE и приписываем этому стрелку направление от первой вершины A к последней E . Этот отрезок AE , замыкающий многоугольник сил, дает как величину, так и направление равнодействующей R заданных сил.

Изложенное построение равнодействующей R называется *правилом многоугольника сил*.

Обратим внимание на *правило стрелок* в многоугольнике сил: составляющие F_1, F_2, F_3, F_4 направлены в одну сторону по обводу



Черт. 30



Черт. 31.

многоугольника сил, равнодействующая же R направлена в сторону противоположную.

Вспоминая определение понятия геометрической суммы векторов (§ 2), мы можем формулировать полученный результат следующим образом: *равнодействующая какого угодно числа сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и равна геометрической сумме данных сил.*

Этот результат справедлив, каково бы ни было число заданных сил. Если нам заданы n сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, то, называя их равнодействующую через R и применяя обычный способ для обозначения геометрического суммирования, можем написать

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

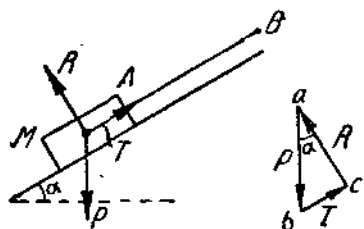
Из полученного результата легко вывести *условие равновесия сил*, приложенных в одной точке. Силы, приложенные в одной точке, взаимно уравновешиваются, если их равнодействующая R равна нулю. В этом случае последняя вершина многоугольника сил совпадает с первой вершиной, и многоугольник сил называется *замкнутым*. Следовательно, *условие равновесия сил*, приложенных в одной точке, состоит в том, чтобы *многоугольник данных сил был замкнут*. Или иначе: *силы*

приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их геометрическая сумма равна нулю.

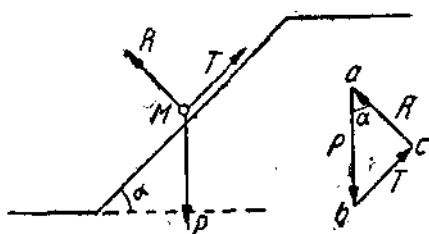
Приложим это условие равновесия к решению нескольких задач.

Задача 1. На абсолютно гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (черт. 32), покоится тело M , удерживаемое нитью AB , которая расположена параллельно наклонной плоскости и прикрепена к неподвижной точке B . Вес тела M равен P . Найти натяжение нити AB .

Тело M находится в равновесии под действием следующих трех сил: его собственного веса P , реакции наклонной плоскости R (которая направлена перпендикулярно к наклонной плоскости) и реакции нити T , которая равна искомому натяжению нити. Эти три силы мы будем считать приложенными в одной точке (в центре тяжести тела M). Следовательно, мы имеем три силы, которые приложены в одной точке и находятся в равновесии; согласно вышеизложенному, многоугольник этих сил должен быть замкнут.



Черт. 32.



Черт. 33.

Строим многоугольник сил P , T и R и требуем, чтобы он был замкнут. Для этого из произвольной точки a проводим отрезок ab , геометрически равный весу тела P , затем из точки b проводим прямую, параллельную линии действия силы T , а из точки a прямую, параллельную линии действия силы R , последние две прямые пересекаются в точке c . Мы получим замкнутый многоугольник abc (в данном случае прямоугольный треугольник). Стороны bc и ca этого многоугольника дают нам величины сил T и R . Имея в виду, что угол при вершине a равен α , получаем:

$$T = P \sin \alpha.$$

Задача 2. Найти угол естественного откоса грунта, для которого коэффициент трения равен 0,8.

Угол естественного откоса называется наибольший угол, который откос насыпи может образовать с горизонтом. Угол естественного откоса определяется как наибольший угол наклона откоса насыпи, при котором частица земли M (черт. 33), находящаяся на откосе насыпи, удерживается в равновесии силой трения T . Из этого условия легко определить величину угла естественного откоса.

Частица земли M находится в равновесии под действием трех сил: ее веса P , реакции наклонной плоскости откоса R и силы трения T . Строим многоугольник сил P , T и R и требуем, чтобы он был замкнут. Для этого из произвольной точки a проводим отрезок ab , геометрически

равный силе P ; затем из точек b и a проводим прямые, соответственно параллельные линиям действия сил T и R . Получаем замкнутый многоугольник сил abc , в котором стороны bc и ca равны силам T и R . Обозначая угол, образованный откосом насыпи с горизонтом, через α и замечая, что в прямоугольном треугольнике abc угол при вершине a также равен α , выводим из этого треугольника

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{R}.$$

С другой стороны, мы знаем (§ 9), что

$$T \leq kR,$$

где k есть коэффициент трения. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha \leq k.$$

Этому условию должен удовлетворять угол α для того, чтобы было возможно равновесие частицы M , находящейся на откосе насыпи. Наибольшее значение угла α , удовлетворяющее полученному условию, и есть угол естественного откоса. Обозначая угол естественного откоса через α_0 , получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = k.$$

Полагая здесь $k = 0,8$, находим $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0,8$, откуда $\alpha_0 = 38^\circ 40'$.

Мы назвали углом трения (§ 9) угол, тангенс которого равен коэффициенту трения; следовательно, полученный теперь результат можно формулировать так: угол естественного откоса равен углу трения для данного грунта. Отсюда следует, что, измеряя угол естественного откоса, можно определить угол трения, а значит и коэффициент трения для любого грунта.

Задача 3. Бруска AC и BC (черт. 34) прикреплены в точках A и B к вертикальной стенке, а в точке C соединены между собой; брусок AC горизонтален, брусок CB образует с горизонтом угол α ; соединения в точках A , B и C — шарнирные. К шарнирному болту C приложена вертикальная сила P . Найти усилия в брусках AC и BC .

Заметим прежде всего, что под действием нагрузки P бруски AC и BC будут либо растянуты, либо сжаты; изгибающих усилий в них быть не может. В самом деле, брусок AC находится под действием двух сил, приложенных к его концам со стороны шарнирных болтов A и C . Так как брусок AC находится в равновесии, то эти две силы должны взаимно уравновешиваться, т. е. должны быть равны по величине и должны быть направлены по одной прямой, именно по оси бруска AC , в противоположные стороны. Следовательно, эти силы будут либо растягивать, либо сжимать брусок. То же можно повторить и про брусок BC .

Заметим здесь, что то же самое относится к брускам, входящим в состав любой конструкции, составленной из прямолинейных брусков, соединенных своими концами, если все соединения шарнирные и если нагрузки приложены к шарнирным болтам. Все бруска такой конструкции



Черт. 34.

испытывают усилия растягивающие или сжимающие, но не изгибающие. В этом состоит идея мостовой фермы. Подробнее об этом будет сказано в главе VI.

Обратимся теперь к шарнирному болту C .

Шарнирный болт C находится в равновесии под действием трех сил: данной нагрузки P и реакций брусьев AC и BC .

Эти реакции направлены по прямым AC и BC , равны тем силам, которые приложены к концам брусьев AC и BC со стороны шарнирного болта C , а следовательно равны и искомым усилиям в брусьях.

Строим многоугольник упомянутых трех сил и требуем, чтобы он был замкнут. Для этого из произвольной точки a проводим отрезок ab , геометрически равный силе P , затем из точек b и a проводим прямые, соответственно параллельные прямым AC и BC . Получаем замкнутый многоугольник сил abc , в котором стороны bc и ca равны реакциям брусьев AC и BC . Направления этих реакций указывают, что брусок AC сжат, а брусок BC растянут. Обозначая реакции брусьев AC и BC (или, что все равно, усилия в этих брусьях) через S_1 и T_2 (напомним, что сжимающие усилия обозначаются буквой S , а растягивающие — буквой T), находим из треугольника abc

$$S_1 = P \operatorname{ctg} \alpha, \quad T_2 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

§ 13. Проекция силы на ось.

В § 4 было дано определение понятия проекции вектора на ось. Применим теперь высказанные в этом параграфе соображения к понятию проекции силы на ось.

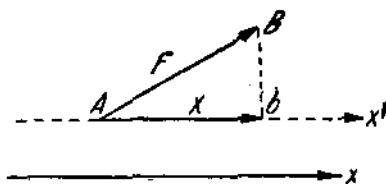
Дана сила F , приложенная в точке A , и ось x (черт. 35), которой приписываем направление, указанное на чертеже стрелкой. Через точку A проводим ось x' , параллельную оси x и одинаково с нею направленную. Из конца B силы F опускаем перпендикуляр Bb на ось x' . Отрезок Ab , которому приписываем направление от точки A к точке b , называется *проекцией* силы F на ось x ; обозначим эту проекцию буквой X . Мы считаем проекцию X положительной, если ее направление совпадает с направлением оси x , и отрицательной в противном случае.

Из прямоугольного треугольника ABb следует, что

$$X = F \cos (F, x), \quad (1)$$

где (F, x) есть угол, заключенный между направлением силы F

и направлением оси x . На черт. 35 проекция X положительна; легко видеть, что равенство (1) справедливо и при отрицательном X . Заметим, что величина F в равенстве (1) всегда положительна; из этого равенства видно, что $X > 0$, если угол (F, x) острый, и $X < 0$, если угол (F, x) тупой. Если $(F, x) = 0^\circ$, т. е. направление силы F совпадает с направлением оси x , то $X = F$; если же $(F, x) = 180^\circ$, т. е. направление силы F прямо противоположно направлению оси x , то $X = -F$. Важно



Черт. 35.

значит, что $X=0$ при $(F, x)=90^\circ$; таким образом, проекция силы на ось обращается в нуль, если сила направлена перпендикулярно к оси.

Покажем теперь, что, зная проекции силы на две взаимно-перпендикулярные оси, легко определить как величину, так и направление силы.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 36). Возьмем две взаимно-перпендикулярные оси x и y и спроектируем силу F на эти две оси. Назовем проекции силы F на оси x и y через X и Y .

Из чертежа видно, что сила F представляется диагональю прямоугольника, построенного на проекциях X и Y . Отсюда следует, что

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (2)$$

Далее для проекции X и Y имеем равенства:

$$X = F \cos(F, x), \quad Y = F \cos(F, y),$$

отсюда следует, что

$$\cos(F, x) = \frac{X}{F}, \quad \cos(F, y) = \frac{Y}{F}. \quad (3)$$

Формулами (2) и (3) определяются величина и направление силы F , если известны ее проекции X и Y .

§ 14. Нахождение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций.

Черт. 36.

Воспользуемся соображениями, высказанными в конце предыдущего параграфа, для определения равнодействующей сил, приложенных в одной точке.

Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке A (черт. 37). Требуется найти вычислением величину и направление их равнодействующей R .

Возьмем две взаимно-перпендикулярные оси x и y . Согласно замеченному в конце предыдущего параграфа, задача будет решена, если мы найдем проекции равнодействующей R на оси x и y .

Мы уже знаем, что равнодействующая R равна геометрической сумме данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. С другой стороны, в § 5 было показано, что проекция геометрической суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих на ту же ось. Отсюда мы заключаем, что про-

екция равнодействующей R на какую угодно ось равна сумме проекций составляющих $F_1, F_2, \dots, F_n$ на ту же ось.

Следовательно, называя проекции сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ на оси x и y через $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots, X_n, Y_n$, а проекции равнодействующей R на те же оси через X, Y , имеем

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

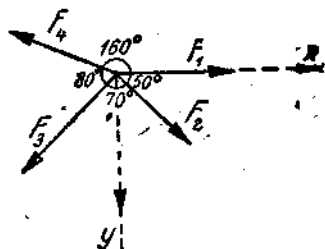
Входящие сюда проекции сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ легко вычисляются по формулам:

$$X_1 = F_1 \cos(F_1, x), X_2 = F_2 \cos(F_2, x), \dots, X_n = F_n \cos(F_n, x), \\ Y_1 = F_1 \cos(F_1, y), Y_2 = F_2 \cos(F_2, y), \dots, Y_n = F_n \cos(F_n, y).$$

Вычислив проекции равнодействующей X и Y , находим затем величину и направление равнодействующей по формулам:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \cos(R, y) = \frac{Y}{R}.$$



Черт. 38.

Задача 4. Даны силы $F_1 = 10$ кг, $F_2 = 10$ кг, $F_3 = 15$ кг, $F_4 = 20$ кг, приложенные в одной точке. Направления сил указаны на черт. 38: $(F_1, F_2) = 50^\circ$; $(F_2, F_3) = 70^\circ$; $(F_3, F_4) = 80^\circ$; $(F_4, F_1) = 160^\circ$. Найти равнодействующую этих сил.

Выбираем за ось x линию действия силы F_1 , ось y проводим через точку приложения данных сил перпендикулярно к оси x , как показано на чертеже.

При помощи тригонометрических таблиц находим:

$$X_1 = 10, \\ X_2 = 10 \cos 50^\circ = 6,428, \\ X_3 = 15 \cos 120^\circ = -7,500, \\ X_4 = 20 \cos 160^\circ = -18,794. \\ Y_1 = 0, \\ Y_2 = 10 \cos 40^\circ = 7,660, \\ Y_3 = 15 \cos 30^\circ = 12,990, \\ Y_4 = 20 \cos 70^\circ = -6,840.$$

Отсюда

$$X = -9,866, Y = 13,810 \\ R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 16,972 \text{ кг.}$$

Далее:

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R} = -0,5813, \cos(R, y) = \frac{Y}{R} = 0,8137,$$

откуда

$$(R, x) = 125^\circ 32', 5 \quad (R, y) = 35^\circ 32', 5.$$

§ 15. Уравнения равновесия сил, приложенных в одной точке.

Применим полученные в предыдущем параграфе уравнения к тому случаю, когда данные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ взаимно уравновешиваются. В § 12 мы видели, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая R равна нулю. Но из равенства:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

следует, что $R = 0$, если $X = 0$ и $Y = 0$.

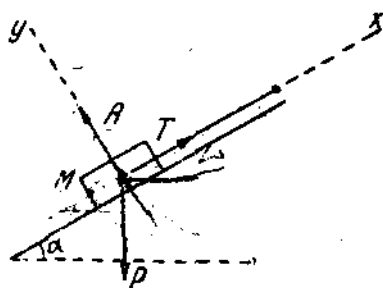
Вспомогательные выражения, полученные для проекций равнодействующей X и Y , заключаем, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если удовлетворены уравнения

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0,$$

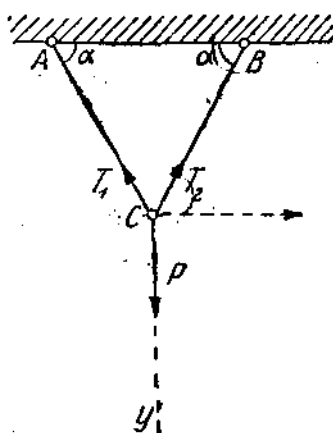
$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0.$$

Эти уравнения называются *уравнениями равновесия сил*, приложенных в одной точке.

В рассматриваемом случае мы получаем два уравнения равновесия. Мы сможем решить при помощи этих уравнений задачу (в которой имеются силы, приложенные в одной точке и находящиеся в равновесии), если число неизвестных (искомых) величин в задаче равно двум. Если число неизвестных в задаче больше, чем две, то имеющихся в нашем распоряжении уравнений будет недостаточно для определения всех неизвестных. Задачи, которые не могут быть решены при помощи уравнений статики твердого тела, называются *статически неопределенными*. Для решения таких задач необходимо принять в расчет незначительные изменения формы



Черт. 39.



Черт. 40.

(или „деформации“), испытываемые всеми телами под действием приложенных к ним сил; методы решения статически неопределенных задач излагаются в курсе сопротивления материалов. Задачи, решаемые при помощи уравнений статики твердого тела, мы будем называть *статически определенными*.

Из сказанного следует, что задача, в которой имеются силы, приложенные в одной точке и находящиеся в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно двум.

При решении задач важно надлежащим образом выбрать оси проекций. При выборе этих осей следует, вообще говоря, руководствоваться следующим правилом: оси проекций следует направлять *перпендикулярно* к линии действия одной из неизвестных сил. При таком выборе осей проекций неизвестная сила исключается из соответствующего уравнения равновесия, и решение уравнений равновесия упрощается.

Задача 5. Решить задачу 1 при помощи уравнений равновесия. Тело M (черт. 39) находится в равновесии под действием силы тя-

жести P , реакции наклонной плоскости R и реакции нити T . Незвестными величинами являются реакции R и T ; следовательно задача статически определенная.

Возьмем линии действия сил T и R за оси проекций x и y , направив эти оси, как показано на черт. 39. Проектируя силы T , R и P на эти оси, получаем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} T + P \cos (90^\circ + \alpha) &= 0, \\ R + P \cos (180^\circ - \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} T - P \sin \alpha &= 0, \\ R - P \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} T &= P \sin \alpha, \\ R &= P \cos \alpha. \end{aligned}$$

Задача 6. Бруски AC и BC , наклоненные к горизонту под углом α , прикреплены в точках A и B к горизонтальной стенке, а в точке C соединены между собой (черт. 40); соединения в точках A , B и C — шарнирные. К шарнирному болту C приложена вертикальная сила P . Найти усилия в брусках AC и BC .

Шарнирный болт C находится в равновесии под действием нагрузки P и реакций брусков AC и BC . Эти реакции направлены по прямым AC и BC и равны искомым усилиям в брусках; обозначим их через T_1 и T_2 .

Возьмем за оси x и y горизонтальную и вертикальную прямые, проходящие через точку C , и направим оси x и y , как показано на черт. 40. Проектируя силы P , T_1 и T_2 на эти оси, получаем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} T_2 \cos \alpha + T_1 \cos (180^\circ - \alpha) &= 0, \\ P + T_1 \cos (90^\circ + \alpha) + T_2 \cos (90^\circ + \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} T_2 \cos \alpha - T_1 \cos \alpha &= 0, \\ P - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

§ 16. Сложение сил, направленных по одной прямой.

Положим, что в точке A (черт. 41) приложены силы F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , направленные по одной прямой, причем силы F_1 и F_2 направлены в одну сторону, а силы F_3 и F_4 в сторону противоположную. Требуется сложить эти силы.

Воспользуемся графическим решением задачи о сложении сил, приложенных в одной точке, т. е. решим задачу построением многоугольника сил. Мы знаем, что равнодействующая R данных сил приложена в той же точке A ; для нахождения величины и направления равнодействующей R строим многоугольник данных сил; замыкающая сторона

этого многоугольника определяет как величину, так и направление равнодействующей R . Этот многоугольник построен на черт. 41. В данном случае все стороны многоугольника сил лежат на одной прямой; для большей ясности, на черт. 41 стороны F_1 , F_2 и стороны F_3 , F_4 , R изображены на двух параллельных прямых. Черт. 41 построен в предположении, что

$$F_1 + F_2 > F_3 + F_4.$$

В этом случае, как видно из чертежа,

$$R = F_1 + F_2 - F_3 - F_4;$$

направление равнодействующей R совпадает с направлением сил F_1 и F_2 . Следовательно, *равнодействующая сил, направленных по одной прямой, равна алгебраической сумме данных сил.*

Конечно, если бы было:

$$F_3 + F_4 > F_1 + F_2,$$

то мы получили бы

$$R = F_3 + F_4 - F_1 - F_2,$$

Черт. 41.

а направление равнодействующей R совпадало бы с направлением сил F_3 и F_4 .

Силы F_1 , F_2 , F_3 , F_4 взаимно уравниваются в том случае, если $R = 0$ или

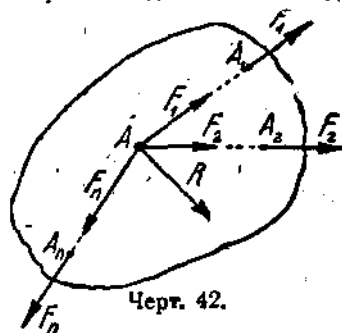
$$F_1 + F_2 - F_3 - F_4 = 0.$$

Итак, *силы, направленные по одной прямой, взаимно уравниваются, если их алгебраическая сумма равна нулю.*

§ 17. Сложение сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Эта задача сводится непосредственно к вопросу о сложении сил, приложенных в одной точке, стоит только перенести данные силы вдоль их линий действия в общую точку пересечения этих прямых.

В самом деле, положим, что даны силы $F_1, F_2 \dots F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2 \dots A_n$ (черт. 42); линии действия данных сил пересекаются в общей точке A . Перенесем все заданные силы вдоль их линий действия в точку A . Тогда мы будем иметь силы $F_1, F_2 \dots F_n$, приложенные в одной точке A . Складывая эти силы, мы найдем их равнодействующую R , которая будет приложена в той же точке A и будет равна геометрической сумме данных сил $F_1, F_2 \dots F_n$.



Черт. 42.

Итак, *равнодействующая сил, линии действия которых пере-*

секаются в одной точке, равна геометрической сумме данных сил и приложена в общей точке пересечения линий действия составляющих сил.

Силы $F_1, F_2 \dots F_n$ находятся в равновесии, если $R=0$. Следовательно, силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, взаимно уравниваются, если геометрическая сумма данных сил равна нулю.

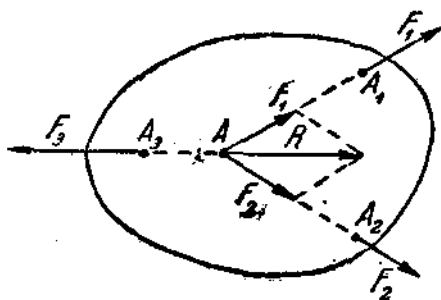
§ 18. Равновесие трех непараллельных сил

Докажем следующую теорему:

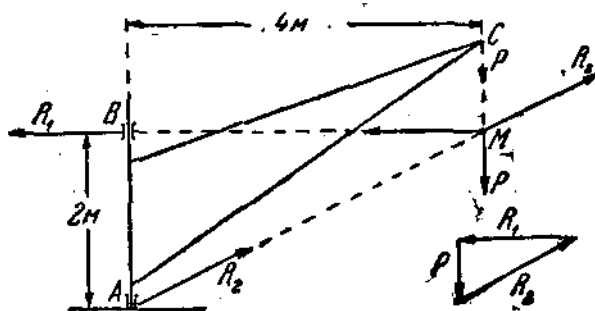
Три силы, взаимно уравнивающиеся и непараллельные, пересекаются в одной точке.

В самом деле, положим, что в точках A_1, A_2, A_3 приложены силы F_1, F_2, F_3 (черт. 43), непараллельные и взаимно уравнивающиеся. Так как данные силы непараллельны, то линии действия двух из них, напр. F_1 и F_2 , наверно пересекутся в некоторой точке A . Перенесем силы F_1 и F_2 вдоль их линий действия в точку A ; сложив эти силы, найдем их равнодействующую R , приложенную также в точке A .

Но, по условию, силы F_1, F_2, F_3 находятся в равновесии. Следовательно, сила F_3 должна взаимно уравниваться с равнодействующей R сил F_1 и F_2 ; а это возможно только в том случае, если силы F_3 и R равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, линия действия силы F_3 проходит через точку A , что и требовалось доказать.



Черт. 43.



Черт. 44.

Задача 7. Вертикальная стойка подъемного крана (черт. 44) опирается на подпятник A и подшипник B ; в точке C приложена вертикальная нагрузка $P=2\text{ м}$; длина стойки AB равна 2 м ; вылет крана (расстояние точки C от оси вращения крана) равен 4 м . Найти опорные реакции крана.

Реакция R_1 подшипника B направлена горизонтально; реакция же R_2 подпятника A складывается из вертикальной и горизонтальной составляющих и, следовательно, направлена наклонно к горизонту. Для определения линии действия реакции R_2 воспользуемся только что доказанной теоремой.

Так как три силы P , R_1 и R_2 взаимно уравновешиваются и непараллельны, то они должны пересекаться в одной точке. Построим точку пересечения M линий действия P и R_1 и соединим точку M прямой линией с точкой A . Прямая AM и есть искомая линия действия реакции R_2 .

Перенесем теперь силы P , R_1 и R_2 вдоль их линий действия в точку M . Получим три силы, приложенные в одной точке и взаимно уравновешивающиеся; многоугольник этих сил должен быть замкнут. Строим многоугольник сил P , R_1 и R_2 и замечаем, что он подобен треугольнику ABM . Из подобия выводим:

$$R_1 = P \frac{4}{2} = 4 \text{ м},$$

$$R_2 = P \frac{\sqrt{20}}{2} = 4,472 \text{ м}.$$

ГЛАВА III.

СЛОЖЕНИЕ ПАР, ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ.

§ 19. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону.

В предыдущей главе мы разобрали вопрос о сложении сил, лежащих в одной плоскости и приложенных в одной точке. Нам предстоит теперь обратиться к тем случаям, когда заданные нам силы приложены в различных точках тела и расположены как угодно в данной плоскости. В дальнейшем (в главе IV) мы увидим, что задача сложения таких сил

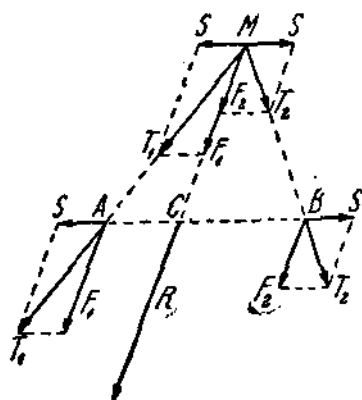
может быть приведена к двум более простым задачам, а именно: к сложению сил, приложенных в одной точке, и к сложению так называемых *пар сил*. С первой из этих задач мы уже ознакомились. В настоящей главе мы рассмотрим теорию сложения пар.

Однако, предварительно остановимся на вопросе о сложении двух параллельных сил, приложенных к твердому телу.

В двух точках A и B одного и того же твердого тела (которое на чертеже не изображено) приложены силы F_1 и F_2 , параллельные и направленные в одну и ту же сторону (черт. 45). Требуется сложить эти силы.

Соединим точки A и B прямой линией и приложим в точках A и B две равные силы S , направленные по прямой AB в противоположные стороны. (Такие две равные силы S как взаимно уравновешивающиеся имеем право приложить согласно аксиоме III).

Сложив силы F_1 и S , приложенные в точке A , по правилу параллелограмма сил, получим их равнодействующую T_1 . Точно так же,



Черт. 45.

складывая силы F_2 и S , приложенные в точке B , получим их равнодействующую T_2 .

Продолжим линии действия сил T_1 и T_2 до пересечения в точке M и перенесем силы T_1 и T_2 вдоль их линий действия в точку M .

Разлагая силу T_1 , перенесенную в точку M , на две составляющие, параллельные силам F_1 и S , получим составляющие, равные силам F_1 и S (это следует из равенства параллелограммов, построенных при точке A и при точке M). Точно так же, разлагая силу T_2 , перенесенную в точку M , на две составляющие, параллельные силам F_2 и S , получим составляющие, равные F_2 и S .

Две силы S , приложенные в точке M , взаимно уравниваются. Силы F_1 и F_2 , приложенные в точке M , направлены по одной прямой в одну и ту же сторону. Складывая эти две силы, получим их равнодействующую R , которая равна их сумме:

$$R = F_1 + F_2$$

и направлена по той же прямой в ту же сторону.

Эта сила R и есть равнодействующая заданных параллельных сил F_1 и F_2 .

Итак, силы F_1 и F_2 имеют равнодействующую, которая равна их сумме, и параллельна и направлена в ту же сторону.

Продолжим линию действия силы R до пересечения с прямой AB в точке C и перенесем силу R вдоль ее линии действия в точку C .

Определим положение точки C на прямой AB . Из подобия треугольников MCA и MF_1T_1 имеем:

$$\frac{AC}{S} = \frac{MC}{F_1} \text{ или } AC \cdot F_1 = MC \cdot S. \quad (1)$$

Из подобия треугольников MCB и MF_2T_2 имеем:

$$\frac{BC}{S} = \frac{MC}{F_2} \text{ или } BC \cdot F_2 = MC \cdot S. \quad (2)$$

Из равенства (1) и (2) заключаем:

$$AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$$

или

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (3)$$

Итак, отрезки AC и BC обратно пропорциональны силам F_1 и F_2 .

Следовательно, точка C делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные силам F_1 и F_2 .

Перепишем пропорцию (3) так:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}.$$

В пропорции каждый предыдущий член относится к своему после-

дующему как сумма предыдущих относится к сумме последующих; следовательно:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC+BC}{F_1+F_2}.$$

Но $AC+BC=AB$ и $F_1+F_2=R$. Следовательно

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}.$$

Отрезки AC и BC проще всего определяются из последних равенств. Получаем:

$$AC = AB \cdot \frac{F_2}{R}$$

$$BC = AB \cdot \frac{F_1}{R}.$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R} \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}$$

При помощи полученных результатов легко решается задача о *разложении* данной силы на две составляющие, ей параллельные и направленные в ту же сторону.

Положим, дана сила F , приложенная в точке M (черт. 46). Требуется разложить эту силу на две составляющие F_1 и F_2 , направленные по прямым I и II, параллельным линии действия данной силы F .

Проведем через точку M прямую, пересекающую прямые I и II в точках A и B ; эти точки можно принять за точки приложения искомых составляющих F_1 и F_2 . Составляющие F_1 и F_2 должны удовлетворять уравнениям:

Черт. 46.

$$F_1 + F_2 = F,$$

$$\frac{AM}{F_2} = \frac{BM}{F_1} = \frac{AB}{F}$$

Из последних равенств находим:

$$F_1 = F \cdot \frac{BM}{AB}, \quad F_2 = F \cdot \frac{AM}{AB}.$$

§ 20. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны.

В точках A и B одного и того же твердого тела приложены силы F_1 и F_2 , параллельные и направленные в противоположные стороны (черт. 47). Требуется сложить эти силы.

Предполагаем, что силы F_1 и F_2 не равны (случай равных сил будет рассмотрен в следующем параграфе). Положим, что $F_1 > F_2$.

Разложим силу F_1 на две составляющие, ей параллельные и направленные в ту же сторону, из которых одна равна F_2 и приложена

в точке B . Величина второй составляющей R и ее точка приложения C найдутся из условий:

$$F_1 = F_2 + R,$$

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}.$$

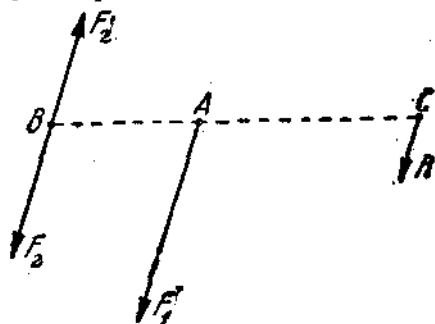
откуда

$$R = F_1 - F_2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} AC &= AB \frac{F_2}{R} \\ BC &= AB \frac{F_1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Но две равные и противоположные силы, приложенные в точке B , взаимно уравновешиваются. Остается сила R , которая и есть искомая равнодействующая данных сил F_1 и F_2 .

Мы видим, что и в этом случае отрезки AC и BC обратно пропорциональны силам F_1 и F_2 .



Черт. 47.

§ 21. Пара сил. Момент пары.

Совокупность двух равных, параллельных и противоположно направленных сил (черт. 48) называется *парой сил*. Пару, состоящую из сил F и F , будем обозначать знаком (F, F) . Понятие пары сил введено в науку Пуансо.¹

Если положим $F_1 = F_2 = F$ в равенствах (1) и (2) предыдущего параграфа, то получим:

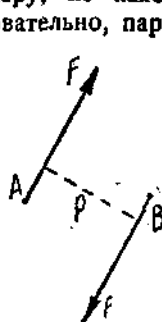
$$R = 0, \quad AC = \infty, \quad BC = \infty.$$

Отсюда заключаем, что пара сил не имеет равнодействующей.

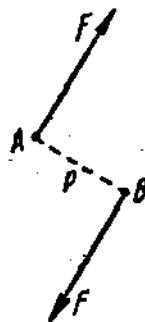
Вместе с тем силы, составляющие пару, не находятся в равновесии (по аксиоме II). Следовательно, пара сил представляет пример совокупности сил, не находящихся в равновесии и не имеющих равнодействующей.

Расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, называется *плечом пары*; обозначим его буквой p . *Моментом пары* называется взятое со знаком $+$ или $-$ произведение величины одной из сил пары на плечо. Обозначая момент пары буквой m , имеем:

$$m = \pm F \cdot p.$$



Черт. 48.



Черт. 49.

Тот или другой знак в этой формуле определяется по следующему

¹ L. Poinsot. *Eléments de statique*. Первое издание сочинения Пуансо появилось в 1803 г. Существуют русские переводы этой книги.

правилу. Если пара (F, F) стремится повернуть плоскость чертежа в сторону вращения часовой стрелки, то в выражении момента пары берем знак $+$; в противном случае берем знак $-$.

Заметим, что силы, составляющие пару, взаимно уравниваются в том частном случае, когда плечо p равно нулю; в этом случае и момент равен нулю.

Заметим еще, что, перенося точку приложения одной из сил, составляющих пару, вдоль ее линии действия, всегда можно достигнуть того, чтобы прямая, соединяющая точки приложения сил A и B , была перпендикулярна к линиям действия сил пары (черт. 49). Тогда отрезок AB и есть плечо пары. В дальнейшем всегда будем считать, что прямая соединяющая точки приложения сил пары, перпендикулярна к линиям действия этих сил.

Как видно из самого определения, момент пары есть величина, имеющая размерность силы, умноженной на длину. Если силы, составляющие пару, выражены в кг, а плечо пары — в м, то момент будет выражен в кг-м. Так, например, если силы, составляющие пару, равны каждая по 10 кг, а плечо пары равно 2 м, причем направление вращения пары — по часовой стрелке, то момент пары будет

$$m = +20 \text{ кг-м}$$

За единицу момента мы принимаем кг-м, т. е. момент пары, состоящей из двух сил по 1 кг каждая, приложенных на концах плеча длиной в 1 м.

§ 22. Условие эквивалентности пар.

В этом параграфе мы покажем замечательное свойство пар сил, которое и лежит в основании теории сложения пар. Это свойство состоит в том, что, не нарушая равновесия, можно всегда заменить всякую данную пару всякой другой парой, момент которой равен моменту данной пары. Другими словами, мы покажем, что *две пары, моменты кото-*

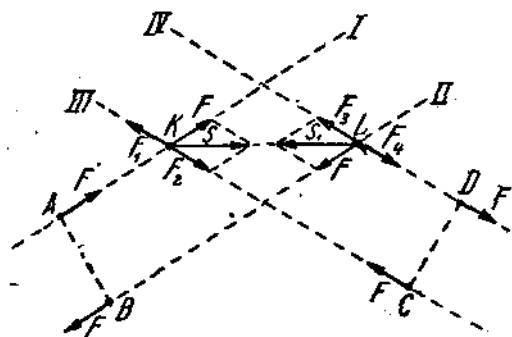
рых равны, статически эквивалентны.

Прежде чем доказать это условие эквивалентности пар, обратимся к следующей вспомогательной теореме.

Вспомогательная теорема. Не нарушая равновесия, можно перенести данную пару в любое положение в ее плоскости.

Дана пара (F, F) с плечом AB (черт. 50). Возьмем произвольно расположенный отрезок $CD = AB$ и покажем, что, не нарушая равновесия, можно перенести пару (F, F) так, чтобы ее плечо совпало с отрезком CD .

Проведем линии действия I и II сил, составляющих пару (F, F) , и восставим в точках C и D перпендикуляры III и IV к отрезку CD .



Черт. 50.

Отметим точку пересечения K прямых I и III, а также точку пересечения L прямых II и IV.

Перенесем теперь силы, составляющие пару (F, F) , вдоль их линий действия I и II в точки K и L . Затем приложим в точках K и L взаимно уравновешивающиеся силы F_1, F_2, F_3 и F_4 , равные F и направленные соответственно по прямым III и IV.

Сложим силу F , приложенную в точке K , с силой F_1 . Построив на силах F и F_1 параллелограмм (в данном случае ромб), получим их равнодействующую S .

Точно так же, складывая силу F , приложенную в точке L , с силой F_2 , получим их равнодействующую S_1 .

Но параллелограммы, построенные при точках K и L , равны; следовательно, $S_1 = S$. Далее, сила S (как диагональ ромба) делит пополам угол между силами F

и F_1 . Но прямая KL (как диагональ ромба, образованного прямыми I, II, III и IV) также делит пополам этот угол. Отсюда следует, что сила S направлена по прямой KL . Точно также убедимся, что и сила S_1 направлена по той же прямой KL .

Значит силы S и S_1 равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны и, следовательно, взаимно уравновешиваются. Остаются силы F_3 и F_4 , направленные соответственно по прямым III и IV. Перенесем эти силы вдоль прямых III и IV в точки C и D .

После всех этих операций пара (F, F) оказывается перенесенной в требуемое положение.

Перейдем теперь к доказательству указанного выше условия эквивалентности пар.

Теорема. Две пары, моменты которых равны, статически эквивалентны.

Даны пары (F, F) с плечом AB и (S, S) с плечом CD (черт. 51).

Предполагаем, что моменты этих пар равны (т. е. имеют равные численные значения и одинаковые знаки), и докажем, что пары статически эквивалентны (т. е. одна из пар может быть заменена другой без нарушения равновесия).

Обозначим $AB = p$, $CD = q$. Обозначая моменты данных пар через m_1 и m_2 , имеем:

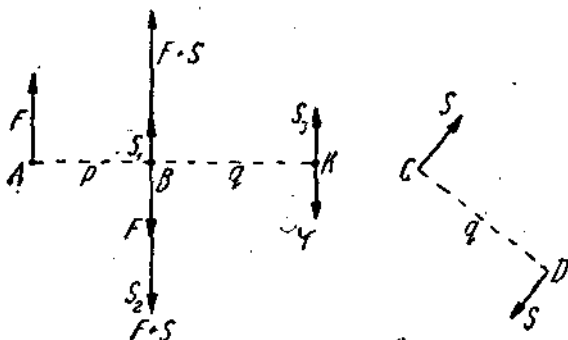
$$m_1 = F \cdot p, \quad m_2 = S \cdot q,$$

причем согласно чертежу (черт. 51) оба момента взяты со знаком $+$.

По условию $m_1 = m_2$, т. е.

$$F \cdot p = S \cdot q, \quad (1)$$

¹ Предлагаем читателю убедиться, что доказываемая теорема остается справедливой и в том случае, если моменты обеих данных пар отрицательны.



Черт. 51.

Отложим от точки B по продолжению отрезка AB отрезок $BK = CD = q$ и приложим в точках B и K взаимно-уравновешивающиеся силы S_1, S_2, S_3, S_4 , равные S и направленные перпендикулярно к прямой BK ($S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S$).

Складывая силу F , приложенную в точке B , с силой S_2 , получим равнодействующую, равную $F + S$, приложенную в точке B и направленную перпендикулярно к прямой AK в ту же сторону, что сила S_2 . Сложим также силу F , приложенную в точке A , с силой S_3 ; мы получим равнодействующую, равную $F + S$, направленную перпендикулярно к прямой AK в ту же сторону, что сила S_3 , и приложенную в точке, делящей отрезок AK на части, обратно-пропорциональные силам F и S_3 . Но отрезок AK делится на части, обратно-пропорциональные силам F и S_3 (или S) в точке R , ибо по условию (1) имеем:

$$\frac{AB}{BK} = \frac{p}{q} = \frac{S}{F}.$$

Следовательно, и вторая равнодействующая $F + S$ приложена в точке B . Итак, в точке B приложены две силы, равные $F + S$ и направленные по одной прямой в противоположные стороны; эти силы взаимно уравновешиваются. Остаются силы S_1 и S_4 , которые образуют пару с плечом BK .

Таким образом данная пара (F, F) с плечом AB заменена парой (S_1, S_4) с плечом BK . На основании вспомогательной теоремы эта последняя пара может быть перенесена так, чтобы ее плечо совпало с отрезком CD . После этого данная пара (F, F) с плечом AB оказывается замененной парой (S, S) с плечом CD , т. е. пары (F, F) и (S, S) оказываются статически эквивалентными.

§ 23. Сложение пар. Условие равновесия пар.

Даны пары (F_1, F_1) , (F_2, F_2) , (F_3, F_3) и (F_4, F_4) с плечами p_1, p_2, p_3 и p_4 (черт. 52); пары (F_1, F_1) и (F_2, F_2) стремятся повернуть плоскость чертежа по часовой стрелке, пары (F_3, F_3) и (F_4, F_4) — против часовой стрелки. Обозначая моменты этих пар через m_1, m_2, m_3 и m_4 , имеем:

$$m_1 = F_1 p_1, \quad m_2 = F_2 p_2, \\ m_3 = -F_3 p_3, \quad m_4 = -F_4 p_4.$$

Возьмем произвольный отрезок $AB = d$ и приведем данные пары к плечу d , т. е. заменим данные пары эквивалентными им парами (P_1, P_1) , (P_2, P_2) , (P_3, P_3)

и (P_4, P_4) с плечом d . Величины сил P_1, P_2, P_3 и P_4 определяются из равенств:

$$m_1 = P_1 d, \quad m_2 = P_2 d, \quad m_3 = -P_3 d, \quad m_4 = -P_4 d.$$

Складываем силы P_1, P_2, P_3 и P_4 , приложенные в точке A . Эти

силы направлены по одной прямой; предполагая, что $P_1 + P_2 > P_3 + P_4$, получим их равнодействующую:

$$R = P_1 + P_2 - P_3 - P_4.$$

направленную по той же прямой в ту же сторону, в которую направлена сила P_1 .

Так же сложим силы P_1, P_2, P_3 и P_4 , приложенные в точке B . Их равнодействующая равна силе R , приложенной в точке A , ей параллельна и направлена в противоположную сторону.

Итак, данные пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), (F_3, F_3)$ и (F_4, F_4) приводятся к одной паре (R, R) , которая называется их *равнодействующей парой*.

Покажем, что *момент равнодействующей пары равен сумме моментов составляющих пар*.

В самом деле, обозначая момент равнодействующей пары через m , имеем:

$$m = Rd = (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)d = P_1d + P_2d - P_3d - P_4d = m_1 + m_2 + m_3 + m_4.$$

Мы предположили, что $P_1 + P_2 > P_3 + P_4$. Легко убедиться, что полученный результат не изменится и в случае $P_1 + P_2 < P_3 + P_4$.

Если $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$, то силы, приложенные в точках A и B , а следовательно, и эквивалентные им пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), (F_3, F_3)$ и (F_4, F_4) находятся в равновесии.

В этом случае имеем $R = 0$; следовательно

$$m = 0 \text{ и } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0.$$

Итак, *данные пары взаимно уравновешиваются, если сумма их моментов равна нулю*. В этом состоит *условие равновесия пар*.

Полученные результаты остаются справедливыми, каково бы ни было число данных пар. Если нам даны n пар с моментами $m_1, m_2, \dots, m_n$, то они складываются в одну равнодействующую пару, момент которой m равен:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

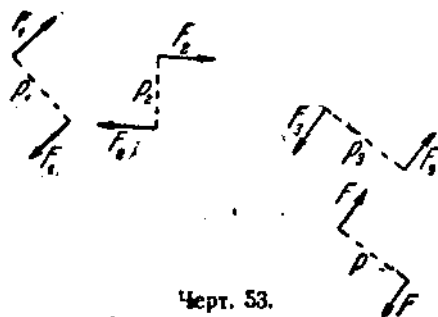
Конечно, момент каждой составляющей пары должен быть взят в этой сумме со своим знаком, определяемым направлением вращения данной пары. Равновесие пар имеет место в том случае, когда

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0.$$

Задача 8. Даны пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), (F_3, F_3)$ (черт. 53); $F_1 = 5 \text{ кг}$, $F_2 = 2 \text{ кг}$, $F_3 = 3 \text{ кг}$, плечи $p_1 = 20 \text{ см}$, $p_2 = 30 \text{ см}$, $p_3 = 40 \text{ см}$. Требуется сложить эти пары.

Определяем момент равнодействующей пары:

$$m = 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 - 3 \cdot 40 = 40 \text{ кг-см}.$$



Черт. 53.

За равнодействующую пару можно взять любую пару (F, F) с плечом p , момент которой равен $m = 40$ кг-см. Например:

$$\begin{array}{ll} F = 2 \text{ кг} & p = 20 \text{ см} \\ F = 4 \text{ кг} & p = 10 \text{ см} \\ F = 10 \text{ кг} & p = 4 \text{ см и т. д.} \end{array}$$

Задача 9. Изменить силы пары (F_3, F_3) в предыдущем примере так, чтобы (F_1, F_1) , (F_2, F_2) , (F_3, F_3) находились в равновесии.

Имеем условие равновесия:

$$5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 - F_3 \cdot 40 = 0,$$

откуда следует

$$F_3 = 4 \text{ кг.}$$

ГЛАВА IV.

СЛОЖЕНИЕ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ КАК УГОДНО НА ПЛОСКОСТИ

§ 24. Момент силы относительно точки.

Приступая к вопросу о сложении сил, расположенных как угодно на плоскости, остановимся прежде всего на понятии момента силы относительно какой-либо точки.

Дана сила F и точка O (черт. 55). Опустим перпендикуляр из точки O на линию действия силы F . Этот перпендикуляр назовем *плечом* силы F относительно точки O ; длину плеча обозначим буквой p .

Моментом силы F относительно точки O называется взятое со знаком $+$ или $-$ произведение величины силы F на длину плеча p . Обозначая момент силы F символом $m(F)$, имеем

$$m(F) = \pm F \cdot p.$$

Тот или другой знак в этой формуле определяется по следующему правилу. Если сила F стремится повернуть плоскость чертежа вокруг точки O в сторону вращения часовой стрелки, то в выражении момента берем знак $+$; в противном случае берем знак $-$.

Точка O называется *центром* момента.

Произведение $F \cdot p$ равно удвоенной площади треугольника AOB (черт. 54). Следовательно, имеем еще другое выражение момента силы F относительно точки O :

$$m(F) = \pm 2\Delta AOB.$$

Отметим важный частный случай. Имеем

$$m(F) = 0,$$

если $p = 0$, т. е. момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через центр момента.

Заметим еще, что момент силы, как и момент пары, есть величина, имеющая размерность силы, умноженной на длину. Если сила выражена в кг, а плечо в м, то момент силы выражается в кг-м.

правилу. Если пара (F, F) стремится повернуть плоскость чертежа в сторону вращения часовой стрелки, то в выражении момента пары берем знак $+$; в противном случае берем знак $-$.

Заметим, что силы, составляющие пару, взаимно уравниваются в том частном случае, когда плечо p равно нулю; в этом случае и момент равен нулю.

Заметим еще, что, перенося точку приложения одной из сил, составляющих пару, вдоль ее линии действия, всегда можно достигнуть того, чтобы прямая, соединяющая точки приложения сил A и B , была перпендикулярна к линиям действия сил пары (черт. 49). Тогда отрезок AB и есть плечо пары. В дальнейшем всегда будем считать, что прямая соединяющая точки приложения сил пары, перпендикулярна к линиям действия этих сил.

Как видно из самого определения, момент пары есть величина, имеющая размерность силы, умноженной на длину. Если силы, составляющие пару, выражены в кг, а плечо пары — в м, то момент будет выражен в кг-м. Так, например, если силы, составляющие пару, равны каждая по 10 кг, а плечо пары равно 2 м, причем направление вращения пары — по часовой стрелке, то момент пары будет

$$m = +20 \text{ кг-м}$$

За единицу момента мы принимаем кг-м, т. е. момент пары, состоящей из двух сил по 1 кг каждая, приложенных на концах плеча длиной в 1 м.

§ 22. Условие эквивалентности пар.

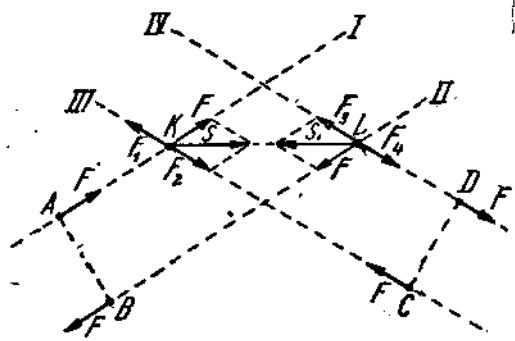
В этом параграфе мы покажем замечательное свойство пар сил, которое и лежит в основании теории сложения пар. Это свойство состоит в том, что, не нарушая равновесия, можно всегда заменить всякую данную пару всякой другой парой, момент которой равен моменту данной пары. Другими словами, мы покажем, что *две пары, моменты которых равны, статически эквивалентны.*

Прежде чем доказать это условие эквивалентности пар, обратимся к следующей вспомогательной теореме.

Вспомогательная теорема. Не нарушая равновесия, можно перенести данную пару в любое положение в ее плоскости.

Дана пара (F, F) с плечом AB (черт. 50). Возьмем произвольно расположенный отрезок $CD = AB$ и покажем, что, не нарушая равновесия, можно перенести пару (F, F) так, чтобы ее плечо совпало с отрезком CD .

Проведем линии действия I и II сил, составляющих пару (F, F) , и составим в точках C и D перпендикуляры III и IV к отрезку CD .



Черт. 50.

Проведем линии действия I и II сил, составляющих пару (F, F) , и составим в точках C и D перпендикуляры III и IV к отрезку CD .

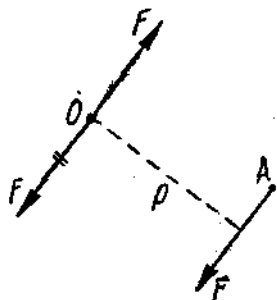
§ 25. Приведение силы к данной точке.

Дана сила (F), приложенная в точке A (черт. 55). Возьмем произвольную точку O и приложим к ней две взаимно уравнивающиеся силы, равные силе F , ей параллельные и направленные одна в ту же сторону, что сила F , другая — в сторону противоположную. Данная сила F заменена силой F , приложенной в точке O (и отмеченной на чертеже двумя черточками), и парой (F, F) .

Следовательно, указанным способом данную силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку, присоединяя к ней некоторую пару. Замену данной силы F , приложенной в точке A , силой F , приложенной в точке O (и отмеченной двумя черточками), и парой (F, F) , будем называть *приведением данной силы F к точке O* ; пару (F, F) , получаемую при приведении силы F к точке O , будем называть *присоединенной парой*.

Найдем момент присоединенной пары (F, F) . Опуская перпендикуляр из точки O на линию действия той силы F , которая приложена в точке A , получим плечо пары p ; момент пары равен

$$m = F \cdot p$$



Черт. 55.

(в выражении момента берем знак $+$, соответственно черт. 55). Но произведение $F \cdot p$ равно моменту также данной силы F (приложенной в точке A) относительно точки O . Следовательно, обозначая этот момент знаком $m(F)$, получаем

$$m = m(F),$$

т. е. *момент присоединенной пары, получаемой при приведении силы F к точке O , равен моменту данной силы F относительно точки O .*

§ 26. Приведение системы сил, расположенных как угодно на плоскости, к силе и паре. Главный вектор и главный момент.

Обращаемся теперь к задаче сложения сил, расположенных как угодно на плоскости.

Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 56). Требуется сложить эти силы.

Следуя примеру Пуансо,¹ воспользуемся способом приведения всех сил к одной точке. Возьмем произвольную точку O , которую назовем центром приведения, и приведем все данные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ к точке O , как было объяснено в предыдущем параграфе.

В результате этого приведения получим силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке O и отмеченные на черт. 56 двумя черточками, и присоединенные пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), \dots, (F_n, F_n)$. Моменты этих пар

¹ L. Poinso. Eléments de statique.

$m_1, m_2, \dots, m_n$, согласно замеченному выше, равны моментам данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно точки O , т. е.

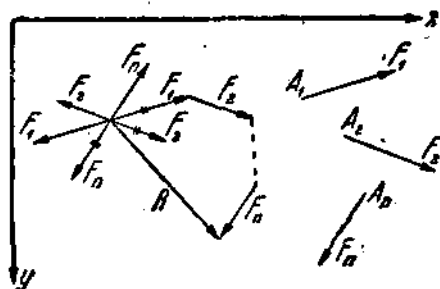
$$m_1 = m(F_1),$$

$$m_2 = m(F_2),$$

$$m_n = m(F_n),$$

где $m(F_1), m(F_2), \dots, m(F_n)$ суть моменты данных сил относительно точки O .

Силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, отмеченные двумя черточками, приложены в одной точке O . Складывая эти силы, получаем их равнодействующую R , приложенную в той же точке и равную геометрической сумме сил $F_1, F_2, \dots, F_n$.



Черт. 56.

Складывая пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), \dots, (F_n, F_n)$, получаем равнодействующую пару, момент которой m равен сумме моментов составляющих пар. Следовательно;

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n),$$

т. е. момент равнодействующей пары равен сумме моментов данных сил относительно точки O .

Заметим, что геометрическая сумма R сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, расположенных как угодно на плоскости, называется иначе **главным вектором** этих сил; сумма же моментов m этих сил относительно точки O называется их **главным моментом** относительно точки O .

Вводя эти термины, мы можем формулировать полученный результат так:

Силы, расположенные как угодно на плоскости, всегда могут быть приведены к силе, равной их главному вектору и приложенной в произвольной точке O , и к паре, момент которой равен главному моменту данных сил относительно точки O .

Для вычисления главного вектора R данных сил можно воспользоваться методом проекций. Возьмем две взаимно перпендикулярные оси x и y (черт. 56) и вычислим проекции главного вектора R на эти оси. Обозначая эти проекции буквами X и Y , а проекции данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$

на те же оси буквами $X_1, Y_1; X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$ и имея в виду, что главный вектор R равен геометрической сумме сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, получаем на основании теоремы о проекции геометрической суммы:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \end{aligned}$$

Вычислив проекции главного вектора X и Y , находим величину R по формуле

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Направление главного вектора определяется углами (R, x) и (R, y) , образованными главным вектором с осями x и y . Имеем:

$$X = R \cos(R, x), \quad Y = R \cos(R, y),$$

откуда получаем:

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}.$$

Этими формулами определяется направление главного вектора.

§ 27. Случай, когда силы находятся в равновесии. Уравнения равновесия.

Предположим, что главный вектор R данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ и их главный момент m относительно центра приведения равны нулю, т. е.

$$R = 0, \quad m = 0.$$

Так как $R = 0$, то силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, отмеченные на черт. 66 двумя черточками, взаимно уравниваются. Так как $m = 0$, то и присоединенные пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), \dots, (F_n, F_n)$ также взаимно уравниваются. Следовательно, в рассматриваемом случае данные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ находятся в равновесии.

В предыдущем параграфе мы имели формулу:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Следовательно, для того, чтобы было $R = 0$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Вспомяня зависимости:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ m &= m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n), \end{aligned}$$

мы заключаем, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, расположенные как угодно на плоскости, находятся в равновесии, если они удовлетворяют трем

уравнениям:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\ m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) &= 0. \end{aligned}$$

Таковы уравнения равновесия сил, расположенных как угодно на плоскости.

§ 28. Случай когда силы приводятся к паре.

Положим, что главный вектор R данных сил равен нулю, но их главный момент m относительно центра приведения не равен нулю, т. е.

$$R = 0, \quad m \neq 0.$$

В этом случае силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, отмеченные на черт. 56 двумя черточками, взаимно уравновешиваются, но присоединенные пары не находятся в равновесии. Следовательно, данные силы приводятся к *паре*, момент которой равен

$$m = m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n).$$

§ 29. Случай, когда силы приводятся к одной равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей.

Предположим, теперь, что главный вектор R данных сил не равен нулю, т. е.

$$R \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае данные силы приводятся к одной *равнодействующей*, равной их главному вектору R .

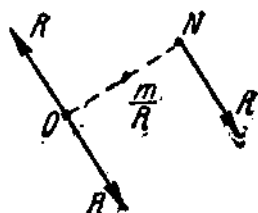
В самом деле, если $m = 0$, то пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2) \dots (F_n, F_n)$ взаимно уравновешиваются, и данные силы приводятся к равнодействующей R , приложенной в центре приведения O .

Положим теперь, что $m \neq 0$; положим для определенности $m > 0$.

Выберем силы, составляющие равнодействующую пару (т. е. пару, полученную от сложения присоединенных пар), равными R ; тогда

плечо этой пары придется взять равным $\frac{m}{R}$.

Расположим равнодействующую пару так, чтобы одна из сил пары была приложена в точке O и была направлена в сторону, противоположную равнодействующей R (черт. 57); другая сила пары приложена в точке N , лежащей на перпендикуляре, восстановленном в точке O к линии действия силы R на расстоянии $\frac{m}{R}$ от точки O ; перпендикуляр должен быть восстановлен в такую сторону от точки O , чтобы момент равнодействующей пары имел надлежащий знак (черт. 57 соответствует случаю $m > 0$).



Черт. 57.

Две силы, равные R и приложенные в точке O , взаимно уравновешиваются. Следовательно, данные силы приводятся к одной равнодействующей R , приложенной в точке N .

Покажем теперь, что если данные силы приводятся к одной равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

В самом деле, возьмем момент равнодействующей R , приложенной в точке N , относительно центра приведения O (черт. 57). Обозначая этот момент $m(R)$, будем иметь:

$$m(R) = R \cdot \frac{m}{R} = m = m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n),$$

т. е. момент равнодействующей относительно центра приведения равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

Но центр приведения O есть произвольно взятая точка. Следовательно, момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

§ 30. Выражение момента силы через проекции силы на координатные оси.

Воспользуемся только что доказанной теоремой о моменте равнодействующей для вывода выражения момента силы через проекции силы на координатные оси.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 58). Требуется вычислить момент этой силы относительно точки O .

Возьмем взаимно-перпендикулярные координатные оси x и y и обозначим координаты точки A относительно этих осей через x и y , а координаты центра момента O относительно тех же осей через a и b .

Построим проекции силы F на оси x и y , обозначим эти проекции буквами X и Y . Рассматривая силу F как равнодействующую ее проекций X и Y , имеем на основании теоремы о моменте равнодействующей:

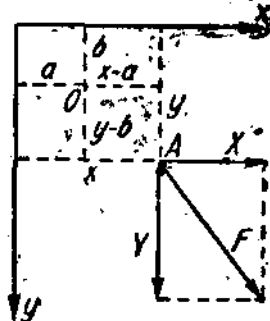
$$m(F) = m(X) + m(Y).$$

Но из чертежа следует, что

$$m(X) = -(y-b)X; \quad m(Y) = (x-a)Y.$$

Следовательно:

$$m(F) = (x-a)Y - (y-b)X.$$



Черт. 58.

Если центр момента O совпадает с началом координат, то $a=0$ и $b=0$. Следовательно, момент силы F относительно начала координат выражается формулой

$$m(F) = xY - yX.$$

§ 31. Задачи статически определенные и статически неопределенные.

В § 27 мы вывели следующие три уравнения равновесия сил, расположенных как угодно на плоскости:

$$\begin{aligned}X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, \\Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) &= 0.\end{aligned}$$

В следующих параграфах мы покажем на примерах применение этих уравнений к решению задач статики, в которых мы имеем дело с телами, находящимися в равновесии под действием сил, лежащих в одной плоскости. Пока же подчеркнем то обстоятельство, что равновесие тела, находящегося под действием сил, расположенных в одной плоскости, оказывается обеспеченным, если приложенные к нему силы удовлетворяют *трем* уравнениям равновесия: двум уравнениям проекций и одному уравнению моментов.

Напомним, что в § 15 мы называли *статически определенными* такие задачи статики, которые могут быть решены при помощи уравнений статики твердого тела, — в отличие от задач *статически неопределенных*, для решения которых уравнения, доставляемые статикой твердого тела, оказываются недостаточными (и при решении которых необходимо принимать во внимание деформации, испытываемые телами под действием приложенных к ним сил). При помощи нескольких уравнений мы можем найти столько неизвестных (искомых) величин, сколько имеется уравнений. Отсюда следует, что, сосчитав число неизвестных в данной задаче и сравнив это число с числом уравнений, доставляемых статикой твердого тела, мы всегда можем определить, имеем ли мы дело с задачей статически определенной или неопределенной. Задача будет статически определенной, если число неизвестных равно числу уравнений.

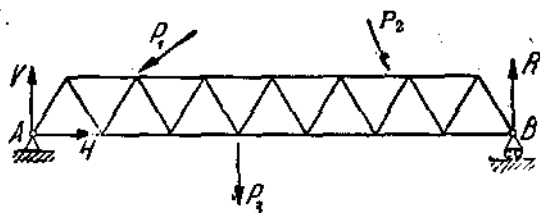
Если в рассматриваемой нами задаче мы имеем дело с телом, находящимся в равновесии под действием сил, лежащих в одной плоскости, то, как мы сейчас видели, для решения нашей задачи статика твердого тела доставляет нам три уравнения равновесия. Следовательно, такая задача будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно 3.

Если же рассматривается равновесие системы, состоящей из двух тел (на которые действуют силы, лежащие в одной плоскости), то мы можем написать по 3 уравнения равновесия для каждого из этих тел. Отсюда следует, что задача окажется статически определенной, если число неизвестных в ней равно 6. Точно так же задача о равновесии системы, состоящей из трех тел (при условии действия сил в одной плоскости), будет статически определенной, если число неизвестных равно 9, и т. д.

Поясним сказанное несколькими примерами.

Представим себе мостовую ферму, которая опирается на неподвижную опору A и подвижную опору B и находится под действием сил (нагрузок) P_1 , P_2 и P_3 (черт. 59). Такая ферма заменяет простую балку и называется балочной фермой. Требуется определить опорные реакции, вызываемые силами P_1 , P_2 и P_3 .

Нашу ферму можно рассматривать как твердое тело, находящееся в равновесии под действием приложенных к нему сил P_1, P_2, P_3 и опорных реакций в точках A и B . Так как подвижная опора может оказывать только вертикальное давление на опорную плоскость, то и опорная реакция R в точке B может быть только вертикальной. Неподвижная же опора может воспринимать давление как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. Отсюда следует, что опорная реакция в точке A складывается из вертикальной составляющей V и горизонтальной составляющей H . Таким образом мы имеем три неизвестные силы (опорные реакции): R, V и H . Мы заключаем, что поставленная задача является статически определенной.

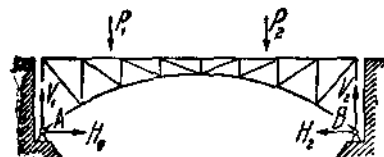


Черт. 59.

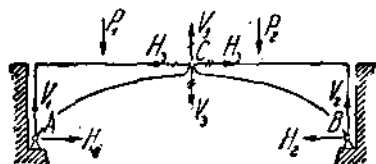
Положим теперь, что требуется определить опорные реакции для арочной фермы (черт. 60). Даны нагрузки P_1 и P_2 . Пять арок A и B шарнирно прикреплены к неподвижным опорам; такая арка называется *двухшарнирной*.

Так как обе опоры — неподвижные, то каждая опора дает по две опорные реакции — вертикальные реакции V_1 и V_2 и горизонтальные реакции H_1 и H_2 . Так как мы имеем 4 неизвестные реакции, то задача определения этих реакций оказывается статически неопределенной; двухшарнирная арка является в отношении определения опорных реакций системой „статически неопределимой“.

Однако, дело меняется, если арка будет сконструирована из двух полуарок, соединенных в ключе арки посредством шарнира C (черт. 61); получается конструкция, называемая *трехшарнирной* аркой. Каждую полуарку мы можем рассматривать как твердое тело и для каждой полу-



Черт. 60.



Черт. 61.

арки можем написать по три уравнения равновесия. Сосчитаем число неизвестных сил. На левую полуарку (кроме нагрузки P_1) действуют пятые опорные реакции V_1 и H_1 ; затем в ключевом шарнире C приложена сила, испытываемая левой полуаркой со стороны правой. Разложим эту силу на вертикальную и горизонтальную составляющие V_3 и H_3 ; на черт. 61 эти силы отмечены одной черточкой. Так как действие равно протрводействию, то на правую полуарку со стороны левой действуют в ключевом шарнире C силы, равные и противоположные только что упомянутым силам V_3 и H_3 (силы V_3 и H_3 , приложенные к правой полуарке, отмечены на черт. 61 двумя черточками); кроме того на правую полуарку действует нагрузка P_2 и пятые опорные реакции V_2

и H_2 . Таким образом в числе сил, приложенных к той и другой полуарке, мы имеем 6 неизвестных сил: $V_1, H_1, V_2, H_2, V_3, H_3$. Так как число неизвестных равно числу уравнений, то задача определения этих неизвестных оказывается статически определенной; в отношении определения опорных реакций трехшарнирная арка является системой „статически определимой“.

§ 32. Примеры на определение опорных реакций.

Переходя к решению задач при помощи уравнений равновесия

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\ m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) &= 0, \end{aligned}$$

заметим прежде всего, что мы имеем полную свободу в выборе тех осей x и y , на которые мы проектируем наши силы, а также центра моментов, относительно которого берем их моменты. Так как оси проекций и центр моментов вполне произвольны, то мы должны заключить, что если наши силы находятся в равновесии, то сумма их проекций на *всякую* ось и сумма их моментов относительно *всякой* точки должны быть равны нулю. Этим произволом в выборе осей проекций и центра моментов следует пользоваться в целях возможного упрощения тех вычислений, которые связаны с решением уравнений равновесия. Оси проекций следует, вообще говоря, направлять перпендикулярно к направлению одной из *неизвестных* сил, которая в таком случае исключается из соответствующего уравнения равновесия. Что же касается центра моментов, то его следует, вообще говоря, выбирать в точке пересечения линий действия *двух неизвестных* сил; при таком выборе обе эти неизвестные силы оказываются исключенными из уравнения моментов; в этом уравнении, следовательно, остается лишь одна неизвестная величина.

Заметим еще, что нет необходимости каждую задачу решать при помощи двух уравнений проекций и одного уравнения моментов. В некоторых случаях может оказаться удобным проектировать силы лишь на одну ось, но зато составить два уравнения моментов относительно двух различных точек, или же, оставляя уравнения проекций совсем в стороне, написать три уравнения моментов относительно трех различных точек. Этим замечанием мы будем иметь случай воспользоваться в следующем параграфе.

Может показаться, что, проектируя силы на всевозможные оси и составляя моменты относительно различных точек, мы можем получить для одного и того же тела сколько угодно уравнений равновесия и при помощи этих уравнений определить сколько угодно неизвестных величин. Конечно, такое заключение было бы неправильно. Мы можем написать для данного тела сколько угодно уравнений равновесия, но уже четвертое уравнение, а также все последующие будут следствиями первых трех уравнений; при помощи всех этих уравнений мы сможем определить только три неизвестные величины.

В этом параграфе мы остановимся на некоторых примерах определения опорных реакций при помощи уравнений равновесия.

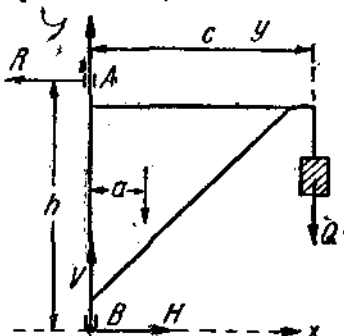
Задача 10. Определить опорные реакции крана (черт. 62) по следующим данным; вес крана $P=2\text{ т}$, расстояние его центра тяжести от оси вращения $a=1\text{ м}$, вылет $c=4\text{ м}$, длина вертикальной стойки $h=5\text{ м}$, вес груза, подвешенного к крану, $Q=3\text{ т}$.

Реакция подшипника A направлена горизонтально; обозначим ее буквой R . Реакция подпятника B складывается из вертикальной составляющей V и горизонтальной составляющей H . Требуется определить силы R , V и H .

Так как кран находится в равновесии под действием сил P , Q , R , V и H , то эти пять сил должны удовлетворять трем уравнениям равновесия.

Выберем оси x и y так, как показано на черт. 62. Проектируя все силы на эти оси, получим первые два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} H - R &= 0, \\ V - P - Q &= 0. \end{aligned}$$



Черт. 62.

Затем составим уравнение моментов, взяв центр моментов в точке B , получим:

$$-Rh + Pa + Qc = 0.$$

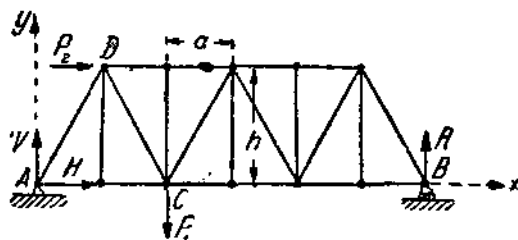
Составленные три уравнения решаем относительно неизвестных R , V и H . Подставляя заданные значения известных величин, найдем:

$$R = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{5} = 2,8\text{ т},$$

$$V = 2 + 3 = 5\text{ т},$$

$$H = 2,8\text{ т}.$$

Задача 11. Балочная ферма (черт. 63) опирается на неподвижную опору A и подвижную опору B ; длина панели a , высота фермы h ; к узлам C и D приложены вертикальная сила P_1 и горизонтальная сила P_2 . Найти опорные реакции.



Черт. 63.

Ферма находится в равновесии под действием сил P_1 , P_2 , R , V и H , то эти пять сил должны удовлетворять уравнениям равновесия.

Направив оси x и y , как показано на черт. 63, и взяв центр моментов в точке A , получим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} H + P_2 &= 0, \\ V + R - P_1 &= 0, \\ -6Ra + 2P_1a + P_2h &= 0, \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$R = \frac{1}{3}P_1 + \frac{h}{6a}P_2,$$

$$V = \frac{2}{3}P_1 - \frac{h}{6a}P_2,$$

$$H = -P_2.$$

Отрицательный знак у реакции H указывает, что эта сила направлена не так, как предположено на черт. 63, а в противоположную сторону.

Задача 12. Определить опорные реакции в пятах A и B трехшарнирной арки и реакции в ключевом шарнире C , вызываемые вертикальными нагрузками $P_1 = 20 \text{ т}$ и $P_2 = 40 \text{ т}$, приложенными соответственно на расстояниях 12 м и 8 м от середины арки (черт. 64). Пролет арки равен 40 м ; высота ключевого шарнира над уровнем пят равна 8 м .

Обозначим опорные реакции в пятовых шарнирах A и B через V_1 , H_1 и V_2 , H_2 ; реакции в ключевом шарнире C обозначим через V_3 и H_3 ; на черт. 64 одной черточкой отмечены силы V_3 и H_3 , приложенные к левой полуарке, двумя черточками — те силы V_3 и H_3 , которые действуют на правую полуарку.

Составим три уравнения равновесия для сил, приложенных ко всей арке (к обеим полуаркам). Проектируя на горизонтальную и вертикальную оси x

и y и составляя моменты относительно пятового шарнира A , будем иметь:

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= 0, \\ V_1 + V_2 - 20 - 40 &= 0, \\ 20 \cdot 8 + 40 \cdot 28 - 40V_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений находим:

$$V_1 = 28 \text{ т}, \quad V_2 = 32 \text{ т}.$$

Составим теперь три уравнения равновесия для одной левой полуарки. Проектируя на те же оси x и y и составляя моменты относительно точки C , имеем

$$\begin{aligned} H_1 - H_3 &= 0, \\ V_1 + V_3 - 20 &= 0, \\ 20V_1 - 8H_1 - 20 \cdot 12 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$H_1 = H_2 = H_3 = 40 \text{ т}, \quad V_3 = -8 \text{ т}.$$

Отрицательный знак у реакции V_3 указывает, что направления сил V_3 противоположны тем направлениям, которые приняты на черт. 64: сила V_3 , приложенная к левой полуарке, направлена вниз, а сила V_3 , действующая на правую полуарку, направлена вверх.

§ 33. Другие примеры на применение уравнений равновесия.

Рассмотрим еще несколько примеров применения уравнений равновесия.

Задача 13. Горизонтальная балка AB на конце A прикреплена шарнирно к вертикальной стене, а в точке B поддерживается тягой BC , образующей с горизонтом угол $\alpha = 32^\circ$ (черт. 65). Длина балки AB равна $l = 4$ м, ее вес P равен 200 кг и приложен по середине балки; кроме того, балка несет вертикальную нагрузку $Q = 500$ кг, приложенную на расстоянии $c = 3$ м от точки A . Определить натяжение тяги BC и реакцию шарнира A .

Рассматриваем силы, приложенные к балке AB . Эта балка находится в равновесии под действием следующих сил: собственный вес балки P , нагрузка Q , реакция тяги T (равная натяжению тяги) и реакция шарнира A , которую мы разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие V и H . Так как балка находится в равновесии, то эти силы должны удовлетворить нашим уравнениям равновесия.

Для определения реакции V составим уравнение моментов относительно точки B :

$$4V - 2 \cdot 200 - 500 = 0,$$

откуда получаем $V = 225$ кг.

Для нахождения реакции H напишем уравнение моментов относительно точки C , замечая, что

$$AC = AB \operatorname{tg} \alpha = 4 \operatorname{tg} 32^\circ = 2,50 \text{ м},$$

имеем:

$$2 \cdot 200 + 3 \cdot 500 - 2,50 H = 0,$$

откуда находим $H = 760$ кг.

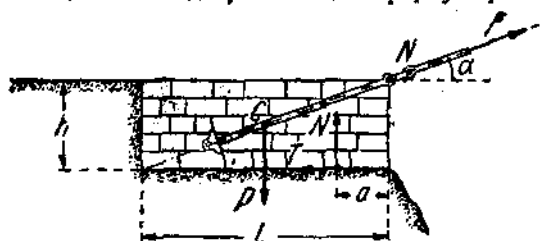
Наконец, для определения реакции T проектируем все наши силы на горизонтальную ось; получаем:

$$H - T \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$T = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{760}{\cos 32^\circ} = 896 \text{ кг}.$$

Задача 14. Концы цепи, поддерживающей цепной мост, заложен в каменной кладке, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда



Черт. 66.

кладкой и грунтом, на котором она лежит. Определить необходимый вес кладки.

(черт. 66); цепь расположена по диагонали прямоугольного продольного сечения кладки и образует угол α с горизонтом. Чтобы удержать концы цепи, кладка должна быть достаточно тяжелой. Даны натяжение цепи F и коэффициент трения k между

На кладку действуют следующие силы: ее вес P , реакция цепи, равная натяжению F , реакция N грунта, на котором лежит кладка, и сила трения T со стороны грунта. Точка приложения реакции N нам наперед неизвестна; обозначим ее расстояние от правого края кладки через a . Если кладка в состоянии удержать конец цепи, т. е. если она под действием приложенных к ней сил остается в равновесии, то эти силы должны удовлетворять уравнениям равновесия. Проектируя силы на горизонтальную и вертикальную оси и составляя моменты относительно центра тяжести C кладки, получаем:

$$F \cos \alpha - T = 0, \quad F \sin \alpha - P + N = 0,$$

$$T \cdot \frac{h}{2} - N \left(\frac{l}{2} - a \right) = 0,$$

где l — длина кладки, h — ее высота.

Решая эти уравнения относительно неизвестных величин N , T и a , будем иметь:

$$N = P - F \sin \alpha,$$

$$T = F \cos \alpha,$$

$$a = \frac{l}{2} - \frac{h F \cos \alpha}{2(P - F \sin \alpha)}.$$

Заметим теперь, что эти величины N , T и a должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) $N \geq 0$, ибо реакция грунта не может быть направлена вниз;
- 2) $T \leq kN$ по известному закону трения (§ 9);
- 3) $a \geq 0$, ибо реакция грунта N не может быть приложена справа от правого края кладки.

Отсюда получаем условия:

$$P - F \sin \alpha \geq 0,$$

$$F \cos \alpha \leq k(P - F \sin \alpha),$$

$$l(P - F \sin \alpha) - h F \cos \alpha \geq 0.$$

Решая эти неравенства относительно P , находим:

$$P \geq F \sin \alpha,$$

$$P \geq F \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{k} \right),$$

$$P \geq F \left(\sin \alpha + \frac{h}{l} \cos \alpha \right).$$

Имея в виду, что $h = l \operatorname{tg} \alpha$, можем написать вместо последнего неравенства:

$$P \geq 2F \sin \alpha.$$

Таковы условия, которым должен удовлетворять вес кладки P . Если $\alpha < 45^\circ$ и $k < 1$, то $\cos \alpha > \sin \alpha$ и подавно $\frac{\cos \alpha}{k} > \sin \alpha$. В таком случае мы удовлетворим всем условиям для P , если положим

$$P \geq F \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{k} \right).$$

Этим неравенством и определится необходимый вес кладки.

Положим, что $F = 20 \text{ т}$, $\alpha = 20^\circ$, $k = 0,6$. Наименьший допустимый вес кладки будет

$$P = 20 \left(0,342 + \frac{0,940}{0,6} \right) = 38,2 \text{ т}.$$

§ 34. Определение линии действия равнодействующей.

В том случае, когда силы, расположенные на плоскости, приводятся к одной равнодействующей (т. е. когда их главный вектор не равен нулю), величина и направление равнодействующей R могут быть вычислены по тем формулам, которые приведены в конце § 26. Линия же действия равнодействующей R может быть найдена при помощи теоремы о моменте равнодействующей следующим образом.

Положим, что даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 67). Предполагаем, что главный вектор R данных сил не равен нулю. Следовательно, данные силы приводятся к одной равнодействующей, равной R и приложенной в некоторой точке N .

Заметим, что за точку приложения N можно взять любую точку, лежащую на линии действия равнодействующей R . Постараемся составить уравнение этой прямой линии относительно некоторых координатных осей x и y (черт. 67).

Для этой цели возьмем моменты данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ и момент равнодействующей R относительно начала координат O и напомним, что момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих.

Обозначим координаты (относительно осей x и y) точки N , лежащей на линии действия равнодействующей, буквами x и y , а проекции равнодействующей R (на те же оси) буквами X и Y . На основании формулы, выведенной в § 30, момент силы R , приложенной в точке N , относительно начала координат будет равен $xY - yX$.

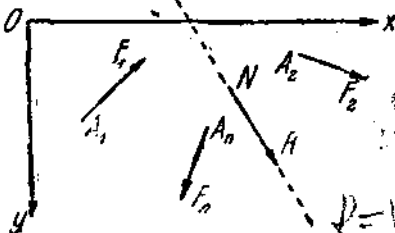
Обозначая сокращенно сумму моментов данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно начала координат знаком $\Sigma m(F_i)$, будем иметь:

$$xY - yX = \Sigma m(F_i).$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты x и y всякой точки, лежащей на линии действия равнодействующей R . Следовательно, это уравнение и есть уравнение линии действия равнодействующей.

Чтобы получить координаты (x, y) какой-нибудь точки приложения равнодействующей, можем задать одну координату произвольно и определить другую из уравнения линии действия равнодействующей.

Задача 15. На мостовую ферму (черт. 68) действуют вертикальные силы $P_1 = 20 \text{ т}$ и $P_2 = 40 \text{ т}$ соответственно на расстоянии 10 м и 40 м от левого конца фермы и горизонтальная сила $P_3 = 30 \text{ т}$ в уровне верхнего пояса фермы; высота фермы равна 6 м. Определить равнодействующую сил P_1, P_2 и P_3 .



Черт. 67.

Направив оси x и y , как показано на черт. 68, и проектируя данные силы на эти оси, находим проекции X и Y равнодействующей:

$$X = 30 \text{ м}$$

$$Y = 20 + 40 = 60 \text{ м.}$$

Отсюда находим величину R равнодействующей:

$$R = \sqrt{30^2 + 60^2} = 67,08 \text{ м.}$$

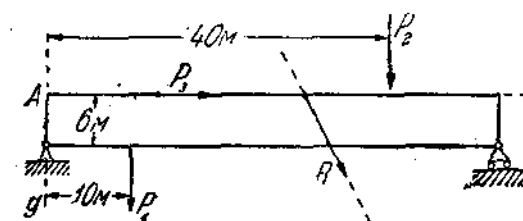
Теперь найдем линию действия равнодействующей. Составляя моменты относительно точки A (т. е. относительно начала координатных осей x и y) и замечая, что сумма моментов данных сил относительно этой точки равна

$$10 \cdot 20 + 40 \cdot 40 = 1800 \text{ м-м,}$$

получаем уравнение:

$$60x - 30y = 1800.$$

Это и есть уравнение линии действия равнодействующей, отнесенное к осям x и y . Найдем точки пересечения этой линии действия с верхним и нижним поясами фермы.



Черт. 68.

Полагая в только что полученном уравнении $y = 0$, получаем $x = 30$ м; полагая же $y = 6$ м, находим $x = 33$ м. Таким образом, точки пересечения линии действия равнодействующей R с верхним и нижним поясами фермы находятся соответственно на расстоянии 30 м и 33 м от левого конца фермы. Соединяя эти точки прямой линией, находим линию действия равнодействующей; любая точка этой прямой может быть принята за точку приложения равнодействующей.

§ 35. Сложение параллельных сил на плоскости. Уравнения равновесия параллельных сил.

Изложенная в этой главе теория сложения сил, расположенных как угодно на плоскости, остается применимой и в том случае, когда требуется сложить какое угодно число *параллельных* сил на плоскости. Следует только иметь в виду, что в случае параллельных сил геометрическая сумма (или главный вектор) R данных сил обращается в алгебраическую сумму этих сил.

В самом деле, положим, что даны параллельные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, причем силы $F_1, F_2, \dots, F_k$ направлены в одну сторону, а силы $F_{k+1}, \dots, F_n$ — в сторону противоположную (черт. 69). Желая найти главный вектор R этой системы сил, строим многоугольник сил и проводим замыкающую его сторону. На черт. 69 предположено, что

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k > F_{k+1} + \dots + F_n.$$

В этом случае, как видно из чертежа, имеем:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_k - F_{k+1} - \dots - F_n,$$

причем главный вектор R направлен параллельно данным силам в ту же сторону, в которую направлены силы $F_1, F_2, \dots, F_k$.

Конечно, если бы было:

$$F_{k+1} + \dots + F_n > F_1 + F_2 + \dots + F_k,$$

то мы имели бы:

$$R = F_{k+1} + \dots + F_n - F_1 - F_2 - \dots - F_k,$$

и главный вектор R был бы направлен параллельно данным силам в ту сторону, в которую направлены силы $F_{k+1}, \dots, F_n$.

Вспоминая результаты, изложенные в §§ 27, 28 и 29, мы заключаем, что если главный вектор R данных сил, а также их главный момент m относительно произвольной точки O равны нулю, то силы находятся в равновесии; если $R = 0$, $m \neq 0$, то силы приводятся к паре, момент которой равен главному моменту m ; если $R \neq 0$, то силы приводятся к одной равнодействующей, равной главному вектору R .

Что касается уравнений равновесия, то, направив ось y параллельно данным силам, а ось x — перпендикулярно к этим силам и спроектировав все силы на ось x , мы получим тождество:

$$0 = 0.$$

Проектируя же на ось y и составляя моменты относительно произвольной точки O , получаем два уравнения равновесия:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k - F_{k+1} - \dots - F_n = 0,$$

$$m(F_1) + m(F_2) + \dots + m(F_n) = 0.$$

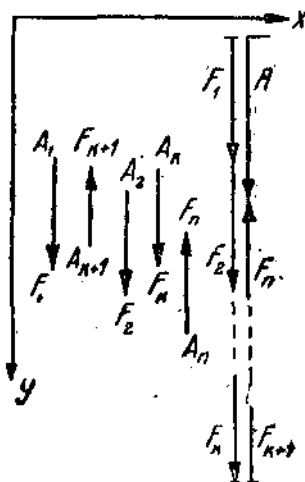
Итак, в случае параллельных сил мы имеем лишь два уравнения равновесия. Отсюда мы заключаем, что задача, в которой мы имеем дело с параллельными силами, находящимися в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно 2.

Задача 16. К балке AB в точках M_1, M_2, M_3 приложены вертикальные силы $P_1 = 1$ т, $P_2 = 2$ т, $P_3 = 3$ т; $AM_1 = 2$ м, $M_1M_2 = 3$ м, $M_2M_3 = 3$ м, $M_3B = 2$ м (черт. 70). Требуется сложить эти силы.

Находим главный вектор R сил P_1, P_2, P_3 :

$$R = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ т.}$$

Так как $R \neq 0$, то заключаем, что данные силы приводятся к одной равнодействующей, равной главному вектору R . Чтобы найти точку приложения C этой равнодействующей, воспользуемся теоремой о мо-



Черт. 69.

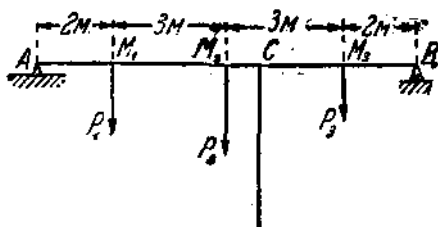
менте равнодействующей. Обозначим $AC = x$ и напомним, что момент равнодействующей R относительно точки A равен сумме моментов составляющих P_1, P_2, P_3 относительно той же точки. Получим уравнение:

$$6x = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 36,$$

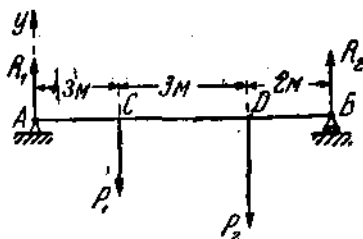
откуда

$$x = 6 \text{ м.}$$

Итак, точка приложения равнодействующей находится на расстоянии 6 м от левого конца балки.



Черт. 70.



Черт. 71.

Задача 17. К балке AB , лежащей на неподвижной опоре A и подвижной опоре B , приложены в точках C и D вертикальные силы $P_1 = 2 \text{ т}$, $P_2 = 3 \text{ т}$; $AC = 3 \text{ м}$, $CD = 3 \text{ м}$, $DB = 2 \text{ м}$ (черт. 71). Найти опорные реакции.

Обозначим опорные реакции через R_1 и R_2 . Так как балка находится в равновесии под действием параллельных сил P_1, P_2, R_1, R_2 , то эти 4 силы должны удовлетворять двум уравнениям равновесия параллельных сил.

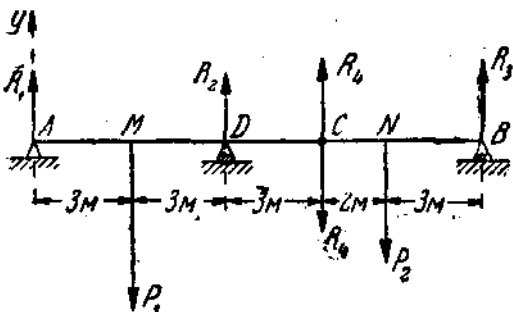
Проектируя все силы на вертикальную ось y и составляя моменты относительно точки A , получаем уравнения равновесия:

$$R_1 + R_2 - 2 - 3 = 0,$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - 8R_2 = 0,$$

откуда

$$R_2 = 3 \text{ т}, \quad R_1 = 2 \text{ т}.$$



Черт. 72.

Заметим, что если балка лежит не на двух, а на трех опорах, то вопрос об определении опорных реакций не может быть решен при помощи уравнений равновесия балки (ибо двух уравнений равновесия недостаточно для определения трех неизвестных реакций). Следовательно, балка, перекрывающая несколько пролетов (многопролетная или „неразрезная“ балка), представляет систему, статически определенную.

Задача 18. Составная балка ACB , состоящая из двух балок AC и BC , соединенных шарнирно в точке C , лежит на трех опорах A, D

и B (черт. 72). В точках M и N приложены вертикальные силы $P_1 = 10 \text{ т}$ и $P_2 = 5 \text{ т}$. Размеры указаны на чертеже. Найти опорные реакции.

Составная балка ACB представляет систему статически определимую. В самом деле, мы можем написать по два уравнения равновесия для каждой из балок AC и BC ; в эти четыре уравнения равновесия войдут четыре неизвестные реакции: три опорные реакции и реакция шарнира C .

Обозначим реакции опор A , D и B через R_1 , R_2 , R_3 , реакцию шарнира C — через R_4 . Заметим, что в точке C следует различать две силы, равные R_4 , из которых одна приложена к концу балки AC , а другая — к концу балки CB ; по принципу „действие равно противодействию“ эти две силы равны и направлены в противоположные стороны.

Так как требуется найти лишь опорные реакции R_1 , R_2 и R_3 , то достаточно составить три уравнения равновесия. Составим следующие три уравнения: спроектируем на вертикальную ось y все силы, приложенные ко всей составной балке ACB , и составим уравнения моментов для каждой из балок AC и CB , взяв центр моментов в точке C . Получим уравнения:

$$R_1 + R_2 + R_3 - 10 - 5 = 0,$$

$$9R_1 + 3R_2 - 10 \cdot 6 = 0,$$

$$5 \cdot 3 - 5R_3 = 0.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$R_3 = 2 \text{ т}, R_1 = 3,5 \text{ т}, R_2 = 9,5 \text{ т},$$

ГЛАВА V.

СПОСОБ ВЕРЕВОЧНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА.

§ 36. Первый случай. Многоугольник сил не замкнут.

В предыдущей главе мы изложили принадлежащее Пуансо аналитическое решение задачи сложения сил, расположенных как угодно на плоскости. Покажем теперь прием для графического решения той же задачи — способ „веревочного многоугольника“, предложенный Кульманом¹.

Пусть даны 3 силы F_1 , F_2 , F_3 , приложенные в точках M_1 , M_2 , M_3 (черт. 73), и требуется их сложить.

Начинаем с того, что на другом чертеже (черт. 74) строим многоугольник данных сил. Для этого берем произвольную точку a , от которой откладываем отрезок ab , равный и параллельный F_1 , затем отрезок bc , равный и параллельный F_2 , и отрезок cd , равный и параллельный F_3 . Положим, мы получили незамкнутый многоугольник сил. На основании исследования, изложенного в § 29, мы можем заключить, что данные

¹ К. Culmann. Die graphische Statik (1866). В настоящей главе изложены лишь основания способа веревочного многоугольника. Более подробное изложение этого приема можно найти в сочинениях В. Л. Кирпичева, Основания графической статики (3-е изд., 1914).

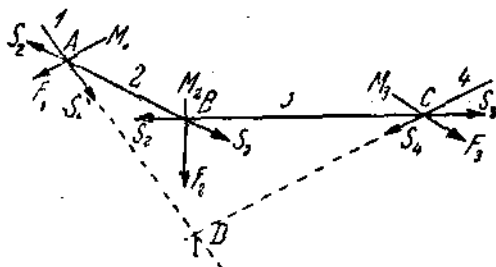
силы F_1, F_2, F_3 приводятся к одной равнодействующей R , равной замыкающему боку ad многоугольника сил.

Таким образом, построением многоугольника сил мы определили графически как величину, так и направление равнодействующей этих сил.

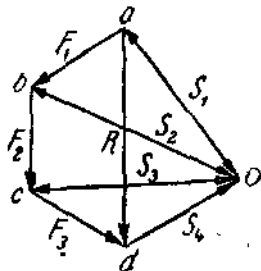
Остается построить точку приложения равнодействующей. Для этого послужит построение второго многоугольника — „веревочного многоугольника“.

Возьмем на черт. 74 произвольную точку O , которую назовем полюсом, и соединим ее прямыми с вершинами a, b, c, d многоугольника сил. Полученные отрезки Oa, Ob, Oc, Od называются лучами; обозначим их буквами S_1, S_2, S_3, S_4 и заметим, что число лучей всегда на единицу больше числа данных сил.

Затем вернемся к черт. 73 и проведем на нем прямую (1), параллельную лучу S_1 , до встречи с линией действия силы F_1 в точке A ; из полученной точки A проведем прямую (2), параллельную лучу S_2 , до встречи с линией действия силы F_2 в точке B ; из точки B проведем прямую



Черт. 73.



Черт. 74.

(3), параллельную лучу S_3 , до встречи с линией действия силы F_3 в точке C и, наконец, из точки C проведем прямую (4), параллельную лучу S_4 . Прямые (1), (2), (3), (4) образуют так называемый *веревочный многоугольник*. Заметим, что число сторон веревочного многоугольника равно числу лучей и, следовательно, на единицу больше числа данных сил.

Продолжим крайние стороны (1) и (4) веревочного многоугольника и отметим точку их пересечения D . Мы покажем, что точка D и есть искомая точка приложения равнодействующей R данных сил F_1, F_2, F_3 .

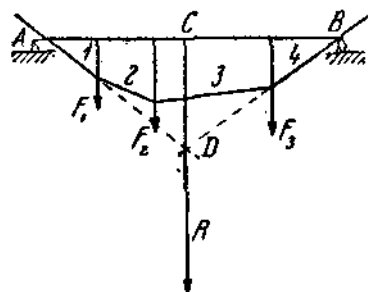
Чтобы в этом убедиться, перенесем силы F_1, F_2, F_3 вдоль их линий действия в вершины A, B, C веревочного многоугольника. Затем силу F_1 , приложенную в точке A , разложим на две составляющие, приложенные в той же точке и направленные по прямым (1) и (2). Чтобы получить величины и направления этих составляющих, воспользуемся правилом треугольника сил. Заметим, что нового построения делать не придется, ибо требуемый треугольник уже имеется на черт. 74: это треугольник aOb . Из этого треугольника мы заключаем, что величины искомых составляющих суть S_1 и S_2 ; направления этих составляющих определяем по известному правилу (составляющие направлены в одну сторону по обводу треугольника сил, равнодействующая направлена в сторону

обратную). Найденные составляющие S_1 и S_3 , надлежащим образом направленные, откладываем от точки A .¹

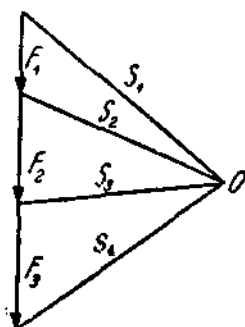
Точно таким же образом разлагаем силу F_2 , приложенную в точке B , на две составляющие, направленные по прямым (2) и (3). Соответствующий треугольник сил находим на черт. 74 (треугольник bOc). Заключаем, что величины искоемых составляющих суть S_2 и S_3 . Определив их направления по указанному правилу, откладываем эти составляющие от точки B .

Таким же способом разлагаем силу F_3 , приложенную в точке C , на две составляющие S_3 и S_4 , направленные по прямым (3) и (4).

Теперь замечаем, что в точках A и B приложены две силы, равные S_2 и направленные по прямой (3) в противоположные стороны; эти силы взаимно уравниваются и могут быть отброшены. Точно так же взаимно уравниваются и могут быть отброшены две силы, равные S_3 , приложенные в точках B и C и направленные по прямой (3) в противоположные стороны. Остаются лишь две силы S_1 и S_4 , приложенные



Черт. 75.



Черт. 76.

в точках A и C и направленные по крайним сторонам (1) и (4) веревочного многоугольника.

Чтобы сложить эти две силы S_1 и S_4 , переносим их вдоль линий действия в точку пересечения линий действия, т. е. в точку D . Равнодействующая сил S_1 и S_4 будет приложена в той же точке D ; ее величина и направление найдутся по правилу треугольника сил. Требуемый треугольник находим на черт. 74 — треугольник aOd , откуда заключаем, что равнодействующая сил S_1 и S_4 равна R .

Итак, данные силы F_1 , F_2 , F_3 приведены к одной силе R , приложенной в точке D .

Задача 19. К балке AB приложены вертикальные силы F_1 , F_2 , F_3 (черт. 75). Построить их равнодействующую.

На черт. 76 строим многоугольник сил. Замыкающий бок многоугольника сил определяет величину и направление равнодействующей R . Следовательно, $R = F_1 + F_2 + F_3$ и направлена вертикально вниз.

Чтобы найти точку приложения равнодействующей R , строим лучи S_1 , S_2 , S_3 , S_4 и веревочный многоугольник (1), (2), (3), (4). Точка пересечения D крайних сторон (1) и (4) и есть одна из точек приложения равнодействующей.

¹ На черт. 73 силы S_1 , S_2 , S_3 , S_4 изображены в уменьшенном масштабе.

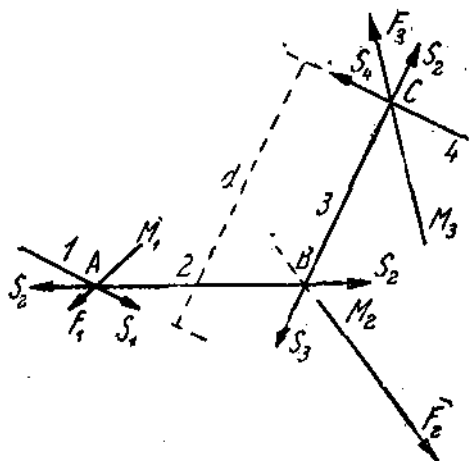
Проведя вертикальную прямую через точку D , находим линию действия равнодействующей R . Равнодействующую можно перенести в любую точку, лежащую на этой прямой, например, в точку C .

§ 37. Второй случай. Многоугольник сил замкнут.

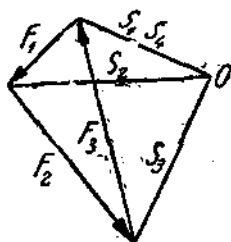
Даны силы F_1, F_2, F_3 , приложенные в точках M_1, M_2, M_3 (черт. 77). Требуется их сложить.

На черт. 78 строим многоугольник сил F_1, F_2, F_3 , и положим, что он оказался замкнутым. На основании исследования, изложенного в §§ 27 и 28, мы уже знаем, что в этом случае данные силы или приводятся к паре, или находятся в равновесии.

Возьмем полюс O и проведем лучи S_1, S_2, S_3, S_4 . Так как последняя вершина многоугольника совпадает с первой, то и последний луч S_4 совпадает с первым лучом S_1 .



Черт. 77.



Черт. 78.

Затем на черт. 77 строим веревочный многоугольник (1), (2), (3), (4), как объяснено выше. Заметим, что крайние его стороны (1) и (4) параллельны, так как они обе параллельны одному и тому же лучу S_1 и S_4 .

Перенеся силы F_1, F_2, F_3 вдоль их линий действия в вершины A, B, C веревочного многоугольника, разлагаем каждую из них на две составляющие, приложенные в тех же точках и направленные по сторонам веревочного многоугольника. Величины и направления составляющих определяем по правилу треугольника сил, причем все требуемые треугольники находим на черт. 78. Повторяя рассуждения, изложенные выше, убеждаемся, что силы, направленные по 2-й и 3-й сторонам веревочного многоугольника (и равные лучам S_2 и S_3), взаимно уравновешиваются и что, следовательно, данные силы F_1, F_2, F_3 приводятся к двум силам S_1 и S_4 , направленным по крайним сторонам веревочного многоугольника (1-й и 4-й) в противоположные стороны¹.

Так как $S_1 = S_4$, то данные силы приведены к паре сил. Момент этой пары m равен

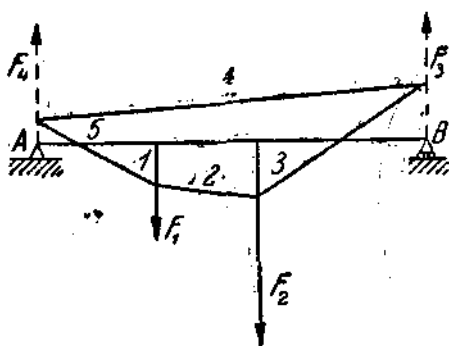
$$m = -S_1 d,$$

¹ На черт. 77 силы S_1, S_2, S_3, S_4 изображены в уменьшенном масштабе.

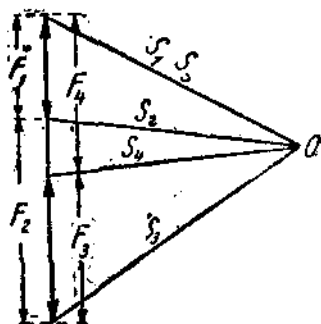
где S_1 есть величина первого луча (черт. 78), а d есть расстояние между крайними сторонами веревочного многоугольника (черт. 77); мы приписали моменту m знак —, так как пара (S_1, S_4) представляется вращающей плоскостью чертежа против часовой стрелки.

Для того чтобы силы F_1, F_2, F_3 находились в равновесии, необходимо, чтобы силы S_1 и S_4 , направленные по крайним сторонам веревочного многоугольника, взаимно уравновешивались; а для этого нужно, чтобы крайние стороны веревочного многоугольника лежали на одной прямой.

Условимся называть веревочный многоугольник, крайние стороны которого лежат на одной прямой, *замкнутым*. В таком случае условия равновесия сил, как угодно расположенных на плоскости, могут быть сформулированы следующим образом: для равновесия сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы многоугольник сил



Черт. 79.



Черт. 80.

и веревочный многоугольник были замкнуты. Таковы графические условия равновесия сил на плоскости.

Конечно, все результаты, полученные в этом и предыдущем параграфах, остаются справедливыми, каково бы ни было число заданных сил. Резюмируя еще раз все изложенное, заключаем, что:

- 1) если многоугольник данных сил не замкнут, то силы приводятся к одной равнодействующей;
- 2) если многоугольник сил замкнут, но веревочный многоугольник не замкнут, то силы приводятся к паре;
- 3) если многоугольник сил и веревочный многоугольник замкнуты, то силы находятся в равновесии.

Задача 20. К балке AB (черт. 79), лежащей на двух опорах A и B, приложены вертикальные силы F_1 и F_2 . Определить (графически) опорные реакции.

Обозначим искомые реакции буквами F_3 и F_4 ; неизвестные силы F_3 и F_4 нанесены на черт. 79 пунктиром. Силы F_1, F_2, F_3, F_4 должны удовлетворять установленным двум графическим условиям равновесия.

На черт. 80 строим многоугольник сил. Так как сила F_3 неизвестна, то неизвестна 4-я вершина многоугольника сил (конец стороны F_3 и начало стороны F_4); 5-я вершина многоугольника сил (конец стороны F_4) совпадает с первой, ибо многоугольник сил должен быть

Затем проводим лучи S_1, S_2, S_3, S_4 ; луч S_4 остается неизвестным, луч S_5 совпадает с лучом S_1 .

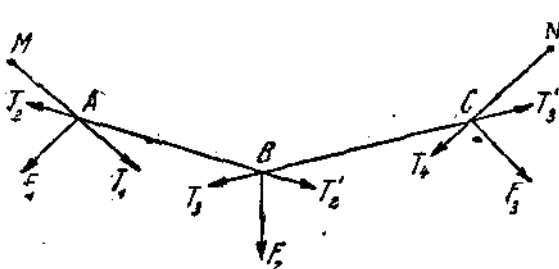
На черт. 79 строим веревочный многоугольник. Проводим стороны (1), (2), (3); сторона (4) неизвестна, сторона же (5) лежит на одной прямой со стороной (1), ибо веревочный многоугольник должен быть замкнут.

Соединив прямой линией точку пересечения стороны (3) и силы F_3 с точкой пересечения стороны (5) и силы F_4 , получаем недостающую сторону (4) веревочного многоугольника. Затем возвращаемся к черт. 80 и, проведя через полюс O прямую, параллельную стороне (4) веревочного многоугольника, получаем недостающий луч S_4 . Этим лучом определяется недостающая 4-я вершина в многоугольнике сил и, следовательно, определяются величины искомых сил F_3 и F_4 .

§ 38. О фигуре равновесия нити.

Нам остается сделать замечание, разъясняющее самое наименование „веревочного“ многоугольника. Остановимся на вопросе о фигуре равновесия нити, концы которой прикреплены к двум неподвижным точкам и которая находится под действием приложенных к ней сил.

Положим, что нить MN , концы которой прикреплены к двум неподвижным точкам M и N , находится в равновесии под действием сил F_1, F_2, F_3 , приложенных в точках A, B, C (черт. 81). Мы покажем, что фигура равновесия нити есть веревочный многоугольник для сил F_1, F_2, F_3 .



Черт. 81.

Для этого нужно доказать, что можно построить такой многоугольник сил F_1, F_2, F_3 , лучи которого будут параллельны участкам MA, AB, BC, CN нашей нити.

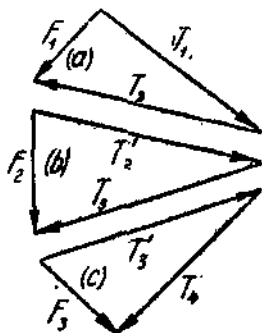
Чтобы в этом убедиться, найдем натяжения отдельных участков нити. Чтобы найти натяжения участков MA и AB , разлагаем силу F_1 на две составляющие T_1 и T_2 , приложенные в точке A и направленные по прямым MA и AB . Величины и направления составляющих T_1 и T_2 находим по правилу треугольника сил. Для этого на черт. 82 (а) откладываем отрезок, равный и параллельный силе F_1 , и проводим через начало и конец этого отрезка прямые, параллельные прямым MA и AB ; получаем треугольник сил, из которого и находим составляющие T_1 и T_2 .

Таким же образом разлагаем силу F_2 на две составляющие T_3 и T_4 , приложенные в точке B и направленные по прямым AB и BC , и силу F_3 — на составляющие T_5 и T_6 , приложенные в точке C и направленные по прямым BC и CN . Соответствующие треугольники сил построены на черт. 82 (б) и (в)¹.

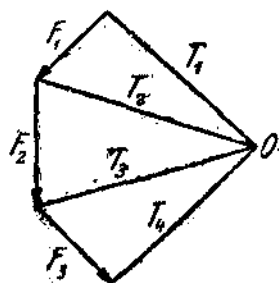
¹ На черт. 81 силы $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ изображены в уменьшенном масштабе.

Заметим теперь, что так как участок нити AB находится в равновесии под действием двух сил T_2 и T'_2 , то должно быть $T_2 = T'_2$. Точно так же из равновесия участка BC заключаем, что $T_3 = T'_3$. Силы T_1, T_2, T_3, T_4 суть искомые натяжения участков MA, AB, BC, CN .

Обращаясь к черт. 82 и замечая, что $T_2 = T'_2$ и $T_3 = T'_3$, приложим треугольник (b) к треугольнику (a) так, чтобы сторона T'_2 совпала со стороной T_2 ; затем к треугольнику (b) приложим треугольник (c) так, чтобы совпали стороны T'_3 и T_3 . Мы получим черт. 83, который представляет многоугольник сил F_1, F_2, F_3 с лучами T_1, T_2, T_3, T_4 , причем



Черт. 82.



Черт. 83.

из построения явствует, что эти лучи параллельны участкам MA, AB, BC, CN нашей нити.

Этим доказано, что фигура равновесия нити есть веревочный многоугольник для сил F_1, F_2, F_3 .

Этим обстоятельством объясняется наименование „веревочного“ многоугольника.

ГЛАВА VI.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В БРУСКАХ ФЕРМЫ.

§ 39. Диаграмма Максвелла-Кремона.

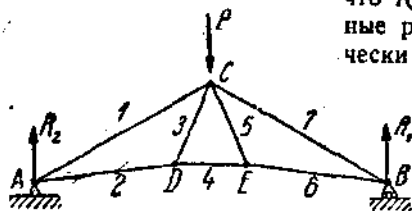
В этой главе мы покажем применение общих приемов, изложенных в предыдущих главах, к решению вопроса об определении усилий в частях фермы. В настоящем параграфе мы изложим графический способ решения этой задачи, предложенный английским физиком *Максвеллом* и разработанный итальянским математиком *Кремоном*.

Представим себе стропильную ферму, состоящую из 7 брусков, соединенных шарнирно (черт. 84). Предположим, что ферма опирается на неподвижную опору в точке A и на подвижную опору в точке B ; к шарнирному болту C приложена вертикальная сила P . Требуется определить вызываемые этой нагрузкой усилия в брусках фермы.

Заметим прежде всего, что если ферма состоит из прямолинейных брусков, соединенных своими концами, если все соединения — шарнирные

и если все внешние силы приложены к шарнирным болтам, то все брусья фермы могут испытывать только усилия растягивающие или сжимающие; изгибающих усилий в них быть не может. В самом деле, возьмем, например, брусок CD нашей фермы. К нему приложены лишь две силы, а именно: силы, испытываемые им со стороны шарнирных болтов C и D . Но брусок CD находится в равновесии. Следовательно, две силы, к нему приложенные, должны взаимно уравновешиваться, т. е. должны быть равны по величине и должны быть направлены по одной прямой, а именно по прямой CD , в противоположные стороны. Такие силы будут или растягивать или сжимать наш брусок.

Желая определить растягивающие или сжимающие усилия в брусках фермы, найдем прежде всего внешние силы, приложенные к ферме. В число внешних сил входят, во-первых, заданная нагрузка P , во-вторых — опорные реакции R_1 и R_2 . Эти реакции направлены вертикально вверх и равны (вследствие предполагаемой нами симметрии фермы), так что $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}P$. Вообще говоря, опорные реакции могли бы быть найдены графически по способу веревочного многоугольника (как объяснено в § 37).



Черт. 84.



Черт. 85.

Обратимся теперь к определению усилий в брусках. Обозначим бруски нашей фермы номерами от 1 до 7 (как показано на черт. 84) и будем обозначать растягивающие усилия буквой T с соответствующим номером бруска (например, T_1), а сжимающие усилия — буквой S также с соответствующим номером (например, S_7). Желая определить эти усилия, будем рассматривать силы, приложенные к шарнирным болтам, находящимся в узлах A, B, C, D, E нашей фермы. В число этих сил входят, с одной стороны, внешние силы, с другой стороны — реакции брусков. Так как реакции брусков равны искомым усилиям в брусках, то вопрос сводится к определению этих реакций. По поводу этих реакций брусков заметим, что если какой-либо брусок, например MN (черт. 85), *растягивается* шарнирными болтами M и N , находящимися на его концах, то реакция бруска, приложенная к болту M , направлена от точки M к точке N ; реакция же, приложенная к болту N , направлена от N к M , т. е. реакции бруска направлены *внутрь* бруска; наоборот, если брусок *сжимается* шарнирными болтами, находящимися на его концах, то реакции бруска направлены *наружу* бруска. Следует обратить внимание на это правило; оно позволяет быстро разбираться, какие бруски фермы растянуты и какие сжаты. Заметим еще, что, будет ли брусок растянут или сжат, реакции, приложенные к болтам, находящимся на концах бруска, всегда равны и направлены в противоположные стороны.

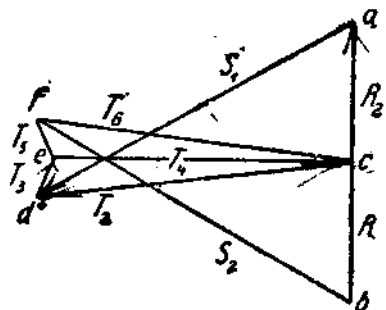
Так как вся ферма, а следовательно и каждый шарнирный болт находятся в равновесии, то силы, приложенные к каждому шарнирному болту, должны взаимно уравновешиваться, т. е. многоугольник этих сил должен быть замкнут. Будем строить последовательно многоугольники сил для всех узлов нашей фермы. Оказывается возможным построить

все эти многоугольники на одном чертеже. Таким образом мы и приходим к построению, которое называется диаграммой Максвелла-Кремона. Из этой диаграммы могут быть определены усилия во всех брусках фермы.

Построение диаграммы выполним в следующем порядке:

Заметим, что так как внешние силы P , R_1 и R_2 находятся в равновесии, то многоугольник этих сил также должен быть замкнут. Начнем с построения многоугольника внешних сил. Для этого из точки a (черт. 86) отложим отрезок ab , геометрически равный силе P ; далее отложим отрезки bc и ca , геометрически равные опорным реакциям R_1 и R_2 .

Обратимся теперь к узлу A . К болту A приложены опорная реакция R_2 и реакция брусков 1 и 2. Многоугольник этих сил должен быть замкнут; строим этот многоугольник. Опорная реакция R_2 изображена на черт. 86 отрезком ca . Из конца a этого отрезка проведем прямую, параллельную бруску 1, а из начала его c проведем прямую, параллельную бруску 2. Получаем замкнутый многоугольник $cadc$, который и есть многоугольник сил, приложенных к болту A . Величины отрезков ad и dc дают величины реакций брусков 1 и 2 или, что все равно, искомые усилия в этих брусках. Так как реакция ad направлена внаружу бруска 1, а реакция dc внутрь бруска 2, то брусок 1 сжат, а брусок 2 растянут. Следовательно, найденные усилия в этих брусках должны быть обозначены через S_1 и T_2 .



Черт. 86.

Переходим к узлу D . К болту D приложены реакции брусков 2, 3 и 4. Мы уже знаем, что реакция бруска 2, приложенная к болту D , равна и противоположна реакции того же бруска, приложенной к болту A . Следовательно, на черт. 86 реакция бруска 2, приложенная к болту D , изображается отрезком cd . Проведем из конца d этого отрезка прямую, параллельную бруску 3, а из начала его c прямую, параллельную бруску 4. Получаем замкнутый многоугольник $cdec$; это есть многоугольник сил, приложенных к болту D . Искомые реакции брусков 3 и 4 изображаются отрезками de и ec . Так как обе реакции направлены внутрь соответствующих брусков, то оба бруска растянуты; найденные усилия в них должны быть обозначены через T_3 и T_4 .

Перейдем к узлу E . Реакция бруска 4, приложенная к болту E , изображается на черт. 86 отрезком ce . Проведа через точки e и c прямые, параллельные соответственно брускам 5 и 6, получаем замкнутый многоугольник сил $cefc$. Его стороны cf и fe равны реакциям брусков 5 и 6. Обе реакции направлены внутрь соответствующих брусков. Значит, бруски 5 и 6 растянуты; найденные усилия в них обозначаем через T_5 и T_6 .

Наконец, доходим до узла B . Из трех сил, приложенных к этому узлу (опорная реакция R_1 и реакции брусков 6 и 7), две силы, а именно опорная реакция R_1 и реакция бруска 6, нам уже известны; на черт. 86 они изображаются отрезками bc и cf . Остается замкнуть многоугольник

бсf отрезком fb, чтобы получить реакцию последнего бруса 7. Этот брусок сжат; усилие в нем обозначаем через S_7 .

Этим заканчивается построение диаграммы. Конечно, отрезок fb, изображающий реакцию бруса 7, должен быть параллелен этому брусу. Проверка этой параллельности дает контроль правильности построений.

Заметим, что при построении диаграммы мы не рассматривали условия равновесия сил, приложенных к болту C. Легко заметить, что замкнутый многоугольник этих сил (нагрузки P и реакции брусьев 7, 5, 3, 1) уже имеется на диаграмме: это есть многоугольник *abfeda*.

Фигура, полученная на черт. 86, называется диаграммой Максвелла-Кремона; она дает полную картину усилий во всех брусьях нашей фермы.

В диаграмме мы имеем на одном чертеже замкнутые многоугольники сил для всех узлов нашей фермы. Конечно, можно было бы строить эти многоугольники и на отдельных чертежах. Упрощение, которое вносится построением диаграммы, состоит в том, что на диаграмме реакция каждого бруса (или усилие в нем) появляется только один раз (в виде одного отрезка). Следует иметь в виду, что это упрощение достигается лишь в том случае, если при построении многоугольника внешних сил (с которого мы начали построение диаграммы) и многоугольников сил для отдельных узлов фермы мы будем строить силы в определенном порядке. Этот порядок определяется следующими правилами:

1) делаем обход внешнего контура фермы, обходя его по часовой стрелке, и замечаем, в каком порядке встречаем внешние силы, приложенные к ферме. В этом порядке и наносим силы при построении многоугольника внешних сил.

Так, в нашем примере, обходя контур фермы, изображенной на черт. 84, по часовой стрелке, мы встречаем внешние силы в следующем порядке: P, R_1, R_2 . В этом порядке они и нанесены на черт. 86.

2) Обходим каждый узел фермы, делая обход вокруг узла по часовой стрелке, и замечаем, в каком порядке встречаем брусья фермы, а также внешние силы (если таковые к узлу приложены). В этом порядке и наносим реакции брусьев и внешние силы при построении многоугольника сил для данного узла.

Так, обходя узел A (черт. 84) по часовой стрелке, встречаем внешние силы и брусья фермы в следующем порядке: $R_2, 1, 2$. В этом порядке опорная реакция R_2 и реакции брусьев 1 и 2 и нанесены при построении многоугольника *cadc* на черт. 86. Обходя узел D по часовой стрелке, встречаем брусья фермы в порядке 2, 3, 4; в этом же порядке нанесены реакции этих брусьев в многоугольнике *cdec* и так далее.

Следует заметить, что внешние силы, приложенные к углам фермы, должны быть начерчены вне контура фермы (так, как на черт. 84 начерчена нагрузка R).

Мы не будем останавливаться здесь на обосновании указанных двух правил, отсылая интересующихся к уже цитированному сочинению В. Л. Кирпичева „Основания графической статики“. Заметим только, что не для всяких ферм возможно построение диаграммы усилий и не всегда указанные правила приводят к цели. На вопросе о том, каким условиям должна удовлетворять ферма для того, чтобы для нее было возможно построение диаграммы Максвелла-Кремона, мы также не будем останавливаться.

§ 40. Способ Риттера.

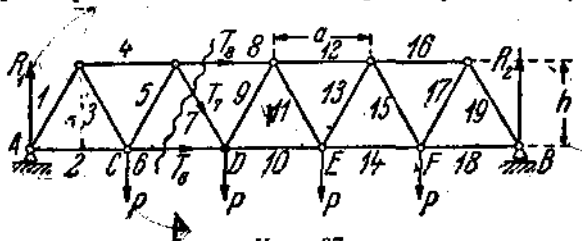
Мы наложим способ Риттера¹ на следующем примере.

Дана мостовая ферма, состоящая из 19 брусков, соединенных шарнирно (черт. 87). Ферма опирается на неподвижную опору в точке A и на подвижную опору в точке B . К шарнирным болтам C, D, E и F приложены равные вертикальные нагрузки P . Требуется определить усилия в брусках фермы.

Горизонтальные бруски образуют верхний и нижний пояса фермы; наклонные бруски называются раскосами. Предполагаем длины всех брусков верхнего и нижнего поясов равными; обозначим длину этих брусков через a ; высоту фермы обозначим через h . Длины раскосов предполагаем также равными; раскосы наклонены к горизонту под углом α , который определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{a}.$$

Так же, как при построении диаграммы Максвелла-Кремона, мы начинаем с определения опорных реакций. Находим опорные реакции при помощи уравнения равновесия, как объяснено в § 32. В данном случае очевидно, что опорные реакции R_1 и R_2 направлены вертикально вверх и равны; так как их сумма равна $4P$, то $R_1 = R_2 = 2P$.



Черт. 87.

Переходим к определению усилий в брусках. Обозначим бруски фермы номерами от 1 до 19 (как показано на черт. 87). Положим, мы желаем определить усилие в бруске 8.

Применим „метод сечений“, о котором было сказано в § 9. Проведем мысленно сечение, перерезывающее брусок 8 и два других бруска 6 и 7. Это сечение разрежет ферму на две части: левую и правую; будем рассматривать условия равновесия одной из этих частей, например, левой.

Рассмотрим, какие силы действуют на левую часть фермы. В узлах A и C к ней приложены опорная реакция R_1 и нагрузка P . Кроме того, в тех точках, в которых перерезаны бруски 6, 7 и 8, приложены силы, представляющие действие правой части фермы на левую. Эти силы являются внутренними по отношению ко всей ферме, но внешними по отношению к левой части фермы; эти силы не что иное как искомые усилия (растягивающие или сжимающие) в брусках 6, 7 и 8. Условимся вести дальнейшие вычисления в предположении, что все бруски нашей фермы растянуты, т. е. что усилия во всех брусках — растягивающие; если на самом деле какой-либо брусок сжат, то для усилия в нем мы получим отрицательное число. Соответственно этому мы будем обозна-

¹ A. Ritter. *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach und Brücken-Constructionen* (1-е изд., 1868). Это сочинение, изложенное вполне элементарно, содержит большое число примеров расчета ферм.

часть все усилия буквой T (с соответствующим номером бруса), причем будем помнить, что положительные усилия суть растягивающие, а отрицательные — сжимающие. Так как бруски 6, 7 и 8 предполагаем растянутыми, то усилия T_6 , T_7 и T_8 , приложенные к левой части фермы, направляем так, как показано на черт. 87.

Левая часть фермы находится в равновесии под действием 5 сил: P , R_1 , T_6 , T_7 и T_8 . Следовательно, эти силы должны удовлетворять уравнениям равновесия. Напишем такое уравнение равновесия, в которое входила бы только одна неизвестная сила, именно интересующее нас усилие T_8 . Для этого составим уравнение моментов относительно узла D , в котором сходятся перерезанные нами бруски 6 и 7. Получим уравнение

$$2R_1a - Pa + T_8h = 0$$

или, так как $R_1 = 2P$,

$$3Pa + T_8h = 0,$$

откуда:

$$T_8 = -3P \frac{a}{h}.$$

Мы получили отрицательное усилие; следовательно, брусок 8 сжат.

Так же точно мы можем найти усилия в брусках 6 и 7. Напишем уравнение моментов относительно узла верхнего пояса, в котором сходятся бруски 7 и 8; получим

$$\frac{3}{2} R_1a - \frac{1}{2} Pa - T_8h = 0,$$

откуда

$$T_8 = \frac{5}{2} P \frac{a}{h}.$$

Так как бруски 6 и 8 не пересекаются, то нельзя написать уравнения моментов, из которого были бы исключены силы T_6 и T_8 . Напишем уравнение проекций на вертикальную ось, направив эту ось вертикально вверх; получим уравнение, содержащее одну неизвестную T_7 :

$$R_1 - P - T_7 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$T_7 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Так как T_6 и T_7 положительны, то бруски 6 и 7 растянуты.

Проводя другие сечения, мы могли бы таким же образом определить усилия во всех брусках нашей фермы (что мы и предлагаем сделать читателю). Как видно, удобство способа Риттера состоит в том, что он позволяет сразу определить усилие в любой бруске фермы, не производя предварительно подсчета усилий в прочих брусках.

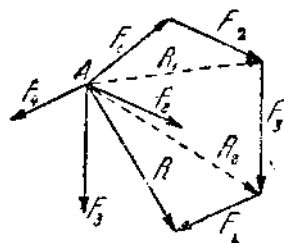
СЛОЖЕНИЕ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ И НЕ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ.

§ 41. Многоугольник сил. Параллелепипед сил.

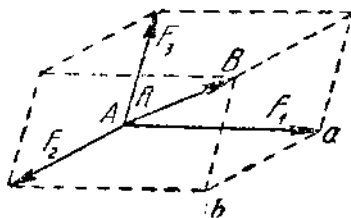
Переходим к исследованию вопроса о сложении и о равновесии сил приложенных к твердому телу и не лежащих в одной плоскости. В этой главе рассмотрим случай сил, приложенных в одной точке.

Положим, в точке A приложены силы F_1, F_2, F_3, F_4 (черт. 88); требуется сложить эти силы.

Складываем заданные силы последовательно. Сначала складываем силы F_1 и F_2 ; по правилу треугольника сил находим их равнодействующую R_1 . Затем складываем силы R_1 и F_3 ; строя опять треугольник сил, находим их равнодействующую R_2 . Наконец, складывая силы R_2 и F_4 , находим их равнодействующую R , которая и есть искомая равнодействующая всех заданных сил. Как видно из черт. 88, равнодействующая



Черт. 88.



Черт. 89.

ящая R представляется замыкающим боком многоугольника, построенного на заданных силах F_1, F_2, F_3, F_4 , т. е. равна геометрической сумме этих сил.¹

Изложенное рассуждение остается справедливым при каком угодно числе заданных сил. Мы заключаем, что равнодействующая какого угодно числа сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и равна геометрической сумме данных сил.

Итак, силы, приложенные в одной точке (и не лежащие в одной плоскости), складываются по правилу многоугольника сил.

Остановимся на случае трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости. В этом частном случае правило сложения сил можно формулировать несколько иначе.

Положим, что в точке A приложены силы F_1, F_2, F_3 , не лежащие в одной плоскости (черт. 89). Построим параллелепипед на этих силах: проведем диагональ параллелепипеда AB и припишем этой диагонали направление от точки A к точке B . Диагональю AB и представляется равнодействующая R данных сил.

Действительно, отрезок AB есть замыкающий бок многоугольника

¹ Следует заметить, что так как силы F_1, F_2, F_3, F_4 предполагаются не лежащими в одной плоскости, то и стороны многоугольника этих сил не лежат в одной плоскости.

АабВ. Так как этот многоугольник есть не что иное, как многоугольник сил F_1, F_2, F_3 , то, согласно доказанному выше, отрезок AB и представляет равнодействующую этих сил.

Изложенное правило сложения трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости, называется *правилом параллелепипеда сил*.

Возвратимся к общему случаю какого угодно числа сил, приложенных в одной точке. Силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая R равна нулю. Следовательно, *условие равновесия сил*, приложенных в одной точке, можно формулировать следующим образом:

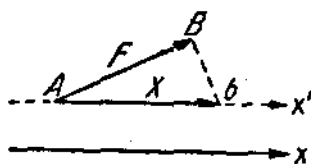
Силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если многоугольник этих сил замкнут.

Иначе: силы, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их геометрическая сумма равна нулю.

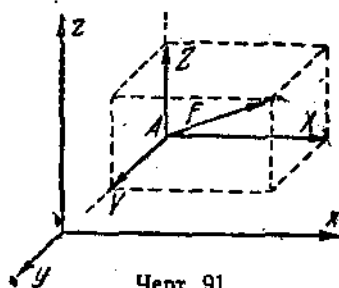
§ 42. Проекция силы на ось.

Выведем теперь формулы для вычисления равнодействующей сил, приложенных в одной точке. Но предварительно остановимся на понятии *проекции силы на ось*.

Дана сила F , приложенная к точке A , и ось x , которой приписано определенное направление, указанное стрелкой (черт. 90); предполагаем, что сила F и ось x не лежат в одной плоскости. Проведем через точку A прямую, параллельную оси x и одинаково с нею направленную. Из конца B силы F опустим перпендикуляр Bb на эту прямую. Отрезок Ab ,



Черт. 90.



Черт. 91.

которому приписываем направление от точки A к точке b , называется *проекцией силы F на ось x* ; обозначим эту проекцию буквой X . Считаем проекцию X положительной, если ее направление совпадает с направлением оси x ; если же направление проекции противоположно направлению оси x , считаем ее отрицательной.

Из треугольника Abb следует, что $X = F \cos(F, x)$, где (F, x) есть угол, образованный направлением силы F и направлением оси x . Заметим, что $X = 0$, если

$$\angle(F, x) = 90^\circ.$$

Положим, дана сила F , приложенная в точке A (черт. 91). Возьмем три взаимно перпендикулярные оси x, y, z и спроектируем силу F на эти три оси. Для этого строим прямоугольный параллелепипед, которого ребра параллельны осям x, y, z и в котором сила F является диагональю.

Ребра этого прямоугольного параллелепипеда и будут проекциями силы F на оси x, y, z ; обозначим эти проекции буквами X, Y, Z .

Вспомогая правило параллелепипеда сил, заключаем, что всякую силу F можно представить как равнодействующую трех ее проекций X, Y, Z на три взаимно перпендикулярные оси.

Заметим теперь, что, зная проекции X, Y, Z , легко определить величину и направление силы F . В самом деле, так как сила F представляется диагональю прямоугольного параллелепипеда, которого ребра суть X, Y, Z , то

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (1)$$

Далее, для проекций X, Y, Z имеем равенства

$$X = F \cos(F, x), \quad Y = F \cos(F, y), \quad Z = F \cos(F, z),$$

откуда следует

$$\cos(F, x) = \frac{X}{F}; \quad \cos(F, y) = \frac{Y}{F}; \quad \cos(F, z) = \frac{Z}{F}. \quad (2)$$

Формулами (1) и (2) определяются величина и направление силы F , если известны ее проекции X, Y, Z .

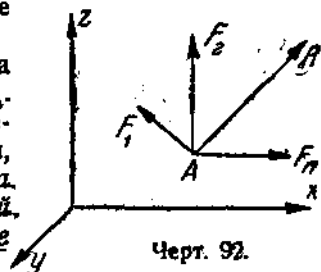
§ 43. Определение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций. Уравнения равновесия.

Воспользуемся соображениями, изложенными в конце предыдущего параграфа, для определения равнодействующей сил, приложенных в одной точке.

Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке A (черт. 92). Требуется найти вычислением величину и направление их равнодействующей R .

Возьмем три взаимно перпендикулярные оси x, y, z .

Мы знаем, что равнодействующая R равна геометрической сумме данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Вспомогая теорему о проекции геометрической суммы каких-либо векторов, заключаем, что проекция равнодействующей R на какую угодно ось равна сумме проекций составляющих $F_1, F_2, \dots, F_n$ на ту же ось.



Черт. 92.

Следовательно, называя проекции сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ на оси x, y, z через $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots; X_n, Y_n, Z_n$, а проекции равнодействующей R на те же оси через X, Y, Z , имеем

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n. \end{aligned}$$

Входящие сюда проекции сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 \cos(F_1, x), & X_2 &= F_2 \cos(F_2, x), & \dots & X_n &= F_n \cos(F_n, x), \\ Y_1 &= F_1 \cos(F_1, y), & Y_2 &= F_2 \cos(F_2, y), & \dots & Y_n &= F_n \cos(F_n, y), \\ Z_1 &= F_1 \cos(F_1, z), & Z_2 &= F_2 \cos(F_2, z), & \dots & Z_n &= F_n \cos(F_n, z). \end{aligned}$$

Вычислив проекции равнодействующей X, Y, Z , находим затем величину и направление равнодействующей по формулам

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}; \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}; \quad \cos(R, z) = \frac{Z}{R}.$$

Мы видели, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если их равнодействующая R равна нулю. Но из равенства

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

следует, что $R = 0$, если $X = 0, Y = 0, Z = 0$.

Вспоминая выражения, полученные для проекций равнодействующей X, Y, Z , заключаем, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в одной точке, находятся в равновесии, если удовлетворены уравнения

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0, \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0, \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения называются *уравнениями равновесия сил*, приложенных в одной точке.

ГЛАВА VIII.

СЛОЖЕНИЕ ПАР В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 44. Условие эквивалентности пар.

В этой главе мы остановимся на вопросе о сложении пар, не лежащих в одной плоскости. Но предварительно нам придется дополнить те сведения о паре сил, которые были изложены в главе III.

В § 22 было доказано, что две пары, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если их моменты равны (численно и по знаку). Другими словами, две пары эквивалентны, если они лежат в одной плоскости и имеют численно равные моменты и одинаковые направления вращения. Покажем теперь, что две пары эквивалентны, если они лежат в параллельных плоскостях и имеют численно равные моменты и одинаковые направления вращения.

Положим, дана пара (F, F) с плечом AB , лежащая в плоскости P (черт. 93). Возьмем плоскость Q , параллельную плоскости P , и докажем, что, не нарушая равновесия, можно заменить данную пару любой парой, лежащей в плоскости Q , момент которой численно равен моменту данной пары, а направление вращения совпадает с направлением вращения данной пары. Чтобы в этом убедиться, покажем сначала, что, не нарушая равновесия, можно перенести данную пару в плоскость Q так, чтобы плечо пары оставалось себе параллельным.

Возьмем в плоскости Q отрезок CD , равный и параллельный отрезку AB ; в точках C и D приложим взаимно уравновешивающиеся силы F_1, F_2, F_3, F_4 , равные и параллельные силам данной пары ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$).

Складывая силу F , приложенную в точке A , с силой F_2 . Так как эти силы равны, параллельны и направлены в одну сторону, то их равнодействующая равна $2F$, им параллельна, направлена в ту же сторону, и ее точка приложения делит отрезок AD пополам.

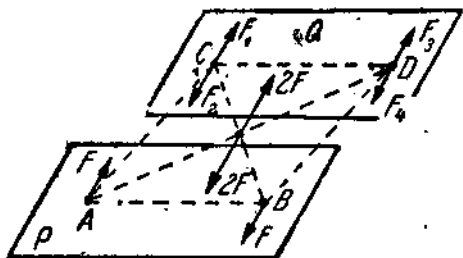
Точно так же, складывая силу F , приложенную к точке B , с силой F_1 , получим их равнодействующую, равную $2F$, им параллельную и направленную в ту же сторону, что эти силы; точка приложения этой равнодействующей делит пополам отрезок BC .

Но отрезки AD и BC делятся пополам в точке пересечения (как диагонали параллелограмма $ABDC$). Следовательно, обе равнодействующие $2F$ приложены в одной точке и, значит, взаимно уравниваются.

Остаются силы F_1 и F_2 , которые составляют пару с плечом CD .

Следовательно, данная пара (F, F) заменена парой (F_1, F_2) , т. е. перенесена в плоскость Q , причем плечо пары осталось себе параллельным.

Заметим теперь, что в плоскости Q пара (F_1, F_2) может быть заменена всякой другой парой с одинаковым моментом и одинаковым направлением вращения. Отсюда мы заключаем, что данную пару (F, F) , лежащую в плоскости P , можно заменить всякой другой парой, лежащей в плоскости Q , момент которой равен моменту данной пары и направление вращения которой совпадает с направлением вращения данной пары.



Черт. 93.

§ 45. Момент пары как вектор.

В дальнейшем мы будем рассматривать момент пары как величину векторальную, т. е. будем приписывать моменту пары не только определенное численное значение, но также и определенное направление.

Положим, дана пара (F, F) с плечом $AB = p$, лежащая в плоскости P (черт. 94). Моменту пары m мы будем приписывать, как раньше, численное значение

$$m = Fp,$$

направление же момента пары определим следующим образом. В точке O , делящей пополам отрезок AB , восставим перпендикуляр к плоскости пары P . Величину момента пары m отложим от точки O по этому перпендикуляру и притом в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по отложенному нами моменту,¹ пара представлялась вращающей плоскость P по направлению вращения часовой стрелки.

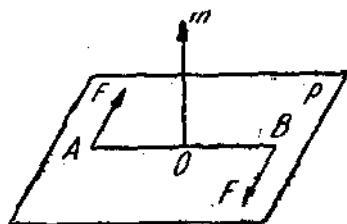
Заметим, что величину момента пары мы будем считать теперь всегда положительной.

Пользуясь указанным определением момента пары как величины векторальной, мы получим новую формулировку условия эквивалентности

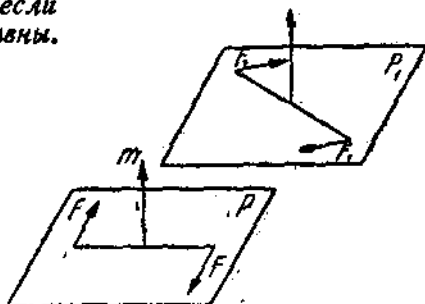
¹ Так, чтобы момент шел от ног к голове.

пар. Предположим, в параллельных плоскостях P и P_1 даны эквивалентные пары (F, F) с плечом p и (F_1, F_1) с плечом p_1 (черт. 95). Строя моменты этих пар $m = Fp$ и $m_1 = F_1 p_1$ согласно указанному правилу, убеждаемся, что эти моменты равны, параллельны и направлены в одну и ту же сторону, т. е. геометрически равны. Таким образом мы приходим к следующей формулировке условия эквивалентности пар.

Две пары эквивалентны, если их моменты геометрически равны.



Черт. 94.



Черт. 95.

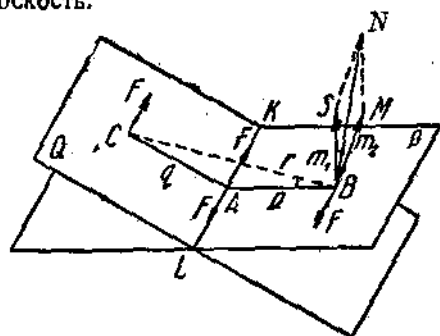
Это предложение можно формулировать еще и таким образом: не нарушая равновесия, можно перенести момент пары в какую угодно точку пространства (не изменяя его направления).

§ 46. Сложение пар. Условие равновесия пар.

В главе III было показано сложение пар, лежащих в одной плоскости. К этому случаю приводится также и сложение пар, лежащих в параллельных плоскостях, ибо пары, лежащие в параллельных плоскостях, могут быть перенесены в одну плоскость.

Предположим теперь, что даны две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях P и Q (черт. 96), и требуется сложить эти пары.

Расположим пару (F, F) , лежащую в плоскости P , так, чтобы одна из сил этой пары была приложена в точке A , лежащей на линии пересечения KL плоскостей P и Q , и была направлена по прямой KL . В таком случае плечо этой пары $AB = p$ будет направлено перпендикулярно к прямой KL .



Черт. 96.

Пару, лежащую в плоскости Q , преобразуем так, чтобы силы, составляющие эту пару, равнялись F ; затем расположим эту пару так, чтобы одна из сил этой пары была приложена в точке A и была направлена по прямой KL в сторону, противоположную направлению той силы F , которая принадлежит первой паре и которая приложена в точке A . В таком случае плечо второй пары $AC = q$ будет направлено перпендикулярно к прямой KL .

Две силы, приложенные в точке A , как равные и направленные по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются. Следовательно, в результате сложения данных пар мы получаем новую пару (F, F) с плечом BC , которую назовем *равнодействующей парой*. Обозначим $BC = r$.

Покажем теперь, что *момент равнодействующей пары равен геометрической сумме моментов составляющих пар*.

Построим моменты $m_1 = Fr$ и $m_2 = Fq$ составляющих пар. Так как момент пары можно переносить в любую точку пространства, отложим эти моменты от точки B ; заметим, что момент m_1 перпендикулярен к плоскости P , а момент m_2 перпендикулярен к плоскости Q .

Затем построим параллелограмм на моментах m_1 и m_2 и проведем диагональ BN . Покажем, что BN и есть момент равнодействующей пары.

Для этого нам нужно доказать: 1) что $BN = Fr$, 2) что BN перпендикулярно к плоскости равнодействующей пары, 3) что для наблюдателя, расположенного по отрезку BN , равнодействующая пара представляется вращающей свою плоскость по часовой стрелке.

1) Заметим, что треугольники ABC и BSN подобны, ибо стороны BS и SN пропорциональны сторонам AB и AC (так как $m_1 : m_2 = Fr : Fq = r : q$) и $\angle BSN$ и $\angle CAB$ равны (стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого). Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{BN}{m_1} = \frac{r}{p},$$

откуда

$$BN = m_1 \frac{r}{p} = Fr \frac{r}{p} = Fr.$$

2) Чтобы доказать, что отрезок BN перпендикулярен к плоскости равнодействующей пары, достаточно показать, что этот отрезок перпендикулярен к силе F и к плечу r .

Заметим, что $m_1 \perp F$ и $m_2 \perp F$. Следовательно, плоскость параллелограмма $BMNS$ перпендикулярна к силе F , а значит и диагональ BN перпендикулярна к F .

С другой стороны, имеем

$$\angle SBA = 90^\circ$$

$$\angle CBA = \angle SBN,$$

откуда

$$\angle CBN = 90^\circ,$$

т. е. диагональ BN перпендикулярна к плечу r .

Итак, диагональ BN перпендикулярна к плоскости равнодействующей пары.

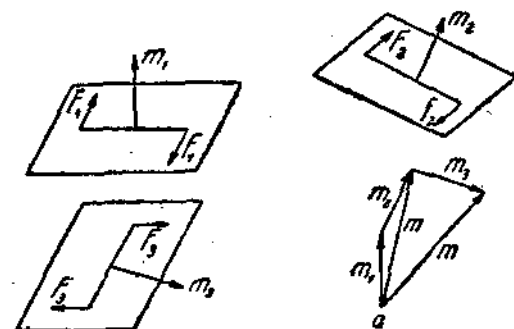
3) Из чертежа видно, что наблюдателю, расположенному по отрезку BN , равнодействующая пара представляется вращающей свою плоскость по часовой стрелке.

Из всего сказанного следует, что отрезок BN и есть момент равнодействующей пары.

Итак, момент равнодействующей пары представляется диагональю параллелограмма, построенного на моментах составляющих пар. Иначе: *момент равнодействующей пары равен геометрической сумме моментов составляющих пар.*

Это правило сложения моментов пар можно назвать *правилом параллелограмма моментов*. Конечно, построение параллелограмма моментов может быть заменено построением треугольника моментов, совершенно так же, как построение параллелограмма сил может быть заменено построением треугольника сил.

При помощи доказанного правила сложения двух пар может быть решена и обратная задача — разложение данной пары на две составляющие пары. Для того чтобы произвести это разложение, достаточно разложить момент данной пары на два составляющих момента, построив либо параллелограмм моментов, либо треугольник моментов.



Черт. 97.

Предположим теперь, что дано несколько пар, расположенных как угодно в пространстве, и требуется сложить эти пары.

Положим даны пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), (F_3, F_3)$ (черт. 97); ограничиваемся случаем трех пар, — рассуждение справедливо для какого угодно числа пар.

Строим моменты данных пар m_1, m_2, m_3 .

Затем складываем первые две пары. Для этого строим

треугольник моментов, откладывая момент m_1 от произвольной точки a и проводя из конца этого момента отрезок, равный и параллельный моменту m_2 . Замыкающая сторона m' есть момент пары, полученной от сложения пар (F_1, F_1) и (F_2, F_2) .

Полученную пару складываем с парой (F_3, F_3) . Применяя опять правило треугольника моментов, проводим из конца момента m' отрезок, равный и параллельный моменту m_3 . Замыкающая сторона m есть момент пары, получаемой от сложения всех трех данных пар.

Из сказанного следует, что от сложения нескольких пар, расположенных как угодно в пространстве, получается новая пара, называемая *равнодействующей парой*. Момент равнодействующей пары представляется замыкающим боком многоугольника, построенного на моментах составляющих пар. Иначе: *момент равнодействующей пары равен геометрической сумме моментов составляющих пар.*

Пары, расположенные как угодно в пространстве, находятся в равновесии, если момент их равнодействующей пары равен нулю. Следовательно, условия равновесия пар, расположенных как угодно в пространстве, можно формулировать следующим образом:

Пары, расположенные как угодно в пространстве, находятся в равновесии, если геометрическая сумма их моментов равна нулю.

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ.

§ 47. Момент силы относительно точки.

С понятием момента силы относительно точки мы уже встречались в „Статике на плоскости“. Теперь мы несколько видоизменим то определение этого понятия, которое было дано в § 24. Именно, в дальнейшем мы будем рассматривать момент силы относительно точки как величину векторную, т. е. будем приписывать этому моменту не только определенное численное значение, но также и определенное направление.

Положим, дана сила F и точка O (черт. 98). Опустим перпендикуляр из точки O на линию действия силы F . Этот перпендикуляр назовем плечом силы F относительно точки O ; длину плеча обозначим буквой p .

Моменту силы F относительно точки O (обозначим этот момент буквой L) мы будем приписывать численное значение

$$L = Fp;$$

направление же момента L определим следующим образом:

Восставим в точке O перпендикуляр к плоскости, проходящей через точку O и через силу F ; величину момента L отложим от точки O по этому перпендикуляру и притом в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по отложенному нами моменту,¹ сила F представлялась направленной слева направо (по часовой стрелке).

Заметим, что величину момента L мы будем считать теперь всегда положительной.

Точка O называется *центром* момента.

Произведение Fp равно удвоенной площади треугольника AOB (черт. 98). Следовательно, имеем еще другое выражение величины момента силы F относительно точки O :

$$L = 2\Delta AOB.$$

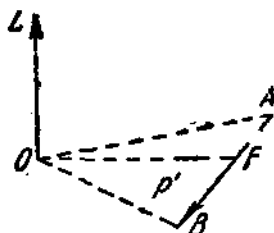
Заметим, что $L = 0$, если $p = 0$, т. е. если линия действия силы F проходит через центр момента O .

§ 48. Момент силы относительно оси.

Рядом с понятием момента относительно точки введем новое понятие момента силы относительно оси.

Положим, даны сила F и ось z (черт. 99); оси z приписываем определенное направление, которое указано стрелкой. Проведем плоскость P перпендикулярно к оси z и спроектируем силу F на эту плоскость; обозначим проекцию A_1B_1 силы F на плоскость P буквой F_1 . Затем

¹ Наблюдатель расположен таким образом, чтобы момент шел от ног к голове.



Черт. 98.

из точки O_1 , в которой ось z пересекает плоскость P , опустим перпендикуляр на линию действия только что построенной проекции F_1 . Этот перпендикуляр назовем плечом силы F относительно оси z ; длину плеча обозначим буквой p_1 . (Плечо p_1 есть кратчайшее расстояние между силой F и осью z).

Моментом силы F относительно оси z называется взятое со знаком $+$ или $-$ произведение проекции силы F_1 на длину плеча p_1 . Обозначая момент силы F относительно оси z через L_z , имеем.

$$L_z = \pm F_1 p_1.$$

Тот или другой знак в этом выражении будем определять по следующему правилу. Если для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z , сила F представляется вращающей вокруг оси z по направлению вращения часовой стрелки, в выражении момента L_z будем брать знак $+$; в противном случае берем знак $-$.

Определенный таким образом момент L_z условимся откладывать от точки O_1 по оси z в сторону положительной оси z , если $L_z > 0$, и в сторону отрицательной оси z , если $L_z < 0$.

Произведение $F_1 p_1$ равно удвоенной площади треугольника $A_1 O_1 B_1$ (черт. 99). Следовательно, имеем еще другое выражение момента силы F относительно оси z :

$$L_z = \pm 2 \Delta A_1 O_1 B_1.$$

Важно заметить, что момент L_z обращается в нуль в двух случаях. Мы имеем $L_z = 0$: 1) если $F_1 = 0$, т. е. если сила F параллельна оси z , 2) если $p_1 = 0$, т. е. линия действия силы F пересекает ось z .

§ 49. Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси.

Дана сила F (черт. 100). Возьмем какую-либо точку O и построим момент L силы F относительно точки O . Имеем

$$L = 2 \Delta AOB$$

направление момента L перпендикулярно к плоскости треугольника AOB .

Затем проведем через точку O какую-либо ось z (которой припишем определенное направление, указанное стрелкой) и составим момент L_z силы F относительно оси z . Имеем:

$$L_z = 2 \Delta A_1 O B_1,$$

где $A_1 B_1$ есть проекция силы F на плоскость P , проходящую через точку O и перпендикулярную к оси z ; соответственно черт. 100 мы взяли в выражении момента L_z знак $+$. Момент L_z мы откладываем

от точки O по оси z (в сторону положительной оси z , так как $L_z > 0$).

Треугольник A_1OB_1 представляет проекцию треугольника AOB на плоскость P . Следовательно, по известной теореме, площадь треугольника A_1OB_1 равна площади треугольника AOB , умноженной на косинус угла между плоскостью треугольника AOB и плоскостью P . Но угол между плоскостью треугольника AOB и плоскостью P равен углу между перпендикулярами к этим двум плоскостям, т. е. углу (L, z) между направлением момента L и осью z . Итак, имеем

$$\Delta AOB \cos(L, z) = \Delta A_1OB_1.$$

Умножая обе части этого равенства на 2, получаем

$$2\Delta AOB \cos(L, z) = 2\Delta A_1OB_1$$

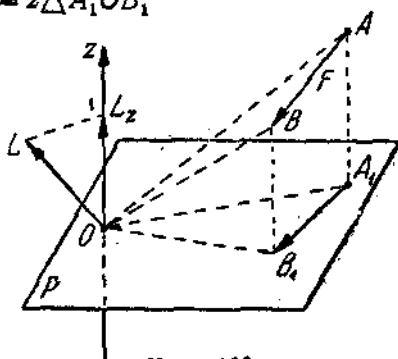
или

$$L \cos(L, z) = L_z,$$

т. е. проекция момента силы F относительно точки O на ось z , проходящую через точку O , равна моменту силы F относительно оси z .

Такова зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси. Следует обратить особое внимание на эту важную теорему; нам придется в дальнейшем неоднократно ею пользоваться и не только в статике, но и в динамике.

Мы вывели эту зависимость между моментами L и L_z , предполагая, что $L_z > 0$; предоставляем читателю убедиться, что эта зависимость остается справедливой и в случае $L_z < 0$.



Черт. 100.

§ 50. Главный момент системы сил относительно точки и относительно оси.

Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ и направленные как угодно в пространстве (черт. 101). Возьмем произвольную точку O и построим моменты данных сил относительно точки O ; обозначим эти моменты через $L_1, L_2, \dots, L_n$.

Геометрическая сумма моментов $L_1, L_2, \dots, L_n$ называется главным моментом системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно точки O . Обозначая этот главный момент буквой L , имеем

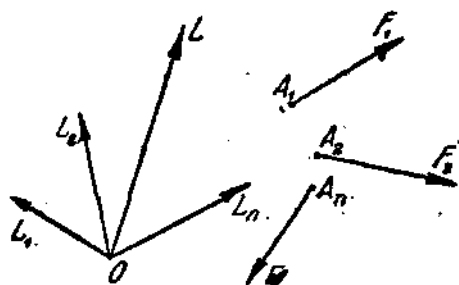
$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n.$$

Даны опять силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ и направленные как угодно в пространстве (черт. 102). Возьмем произвольную ось z (которой припишем направление, указанное на чертеже стрелкой) и составим моменты данных сил относительно оси z ; обозначим эти моменты через $L_{1z}, L_{2z}, \dots, L_{nz}$.

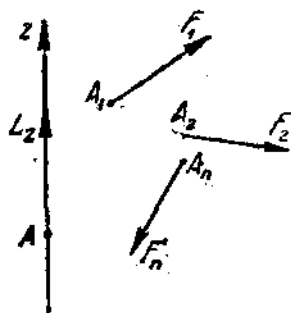
Алгебраическая сумма моментов $L_{1z}, L_{2z}, \dots, L_{nz}$ называется главным моментом системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно оси z . Обозначая этот главный момент буквой L_z , имеем

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{nz}.$$

Главный момент L_z , как сумма положительных и отрицательных слагаемых, может быть и положительным и отрицательным. Условимся откладывать главный момент L_z по оси z от произвольной точки A , лежащей



Черт. 101.



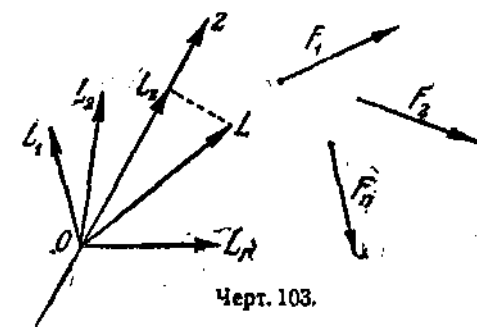
Черт. 102.

на этой оси, в сторону положительной оси z , если $L_z > 0$, и в сторону отрицательной оси z , если $L_z < 0$.

§ 51. Зависимость между главными моментами системы сил относительно точки и относительно оси.

Дана система сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ (черт. 103). Возьмем произвольную точку O и построим моменты $L_1, L_2, \dots, L_n$ данных сил относительно точки O , а также их главный момент L относительно этой точки.

Затем проведем через точку O произвольную ось z (которой припишем направление, указанное на чертеже стрелкой) и проектируем как моменты $L_1, L_2, \dots, L_n$, так и главный момент L на эту ось. Так как



Черт. 103.

главный момент L равен геометрической сумме моментов $L_1, L_2, \dots, L_n$, а проекция геометрической суммы равна сумме проекций составляющих, то имеем:

$$L \cos(L, z) = L_1 \cos(L_1, z) + L_2 \cos(L_2, z) + \dots + L_n \cos(L_n, z).$$

С другой стороны, на основании уже известной нам зависимости между моментами силы относительно точки и относительно оси имеем

$$L_1 \cos(L_1, z) = L_{1z}; L_2 \cos(L_2, z) = L_{2z}, \dots, L_n \cos(L_n, z) = L_{nz},$$

где $L_{1z}, L_{2z}, \dots, L_{nz}$ суть моменты данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно оси z . Следовательно, получаем:

$$L \cos(L, z) = L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{nz}.$$

Но сумма, стоящая в правой части этого равенства, равна главному моменту L_z данной системы сил относительно оси z . Итак, окончательно получаем:

$$L \cos(L, z) = L_z,$$

т. е. проекция главного момента системы сил относительно некоторой точки O на ось, проходящую через точку O , равна главному моменту системы сил относительно этой оси.

Следовательно между главными моментами сил относительно точки и относительно оси существует такая же зависимость, какая имеет место между моментами отдельной силы относительно точки и относительно оси.

ГЛАВА X.

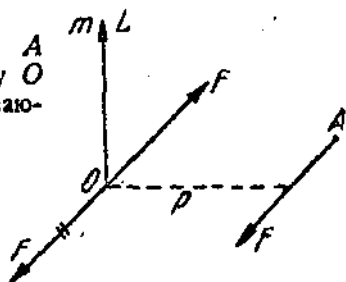
СЛОЖЕНИЕ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ КАК УГОДНО В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 52. Приведение силы к данной точке.

Обратимся теперь к вопросу о сложении сил, приложенных в различных точках твердого тела и направленных как угодно в пространстве. Для решения этого вопроса мы воспользуемся тем же способом приведения всех сил к одной точке, которым мы уже имели случай пользоваться в главе IV при сложении сил, лежащих в одной плоскости.

Напомним прежде всего, каким образом данная сила приводится к данной точке.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 104). Возьмем произвольную точку O и приложим в ней две взаимно-уравновешивающиеся силы, равные силе F , ей параллельные и направленные одна в ту же сторону, что сила F , другая — в сторону противоположную. Данная сила F заменена силой F , приложенной в точке O (и отмеченной на чертеже двумя черточками), и парой (F, F) , которую мы называем присоединенной парой.



Черт. 104.

Замену данной силы F , приложенной в точке A , силой F , приложенной в точке O (и отмеченной двумя черточками), и присоединенной парой (F, F) мы и называем приведением данной силы F к точке O .

Найдем момент присоединенной пары (F, F) . Опустив перпендикуляр из точки O на линию действия данной силы F , получим плечо пары p ; момент пары m равен

$$m = Fp$$

и направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку O и через данную силу F , в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по моменту m , пара представлялась вращающей свою плоскость по направлению вращения часовой стрелки. Так как момент пары может быть перенесен в любую точку пространства, то отложим момент m по указанному направлению от точки O .

Построим теперь момент L данной силы F относительно точки O . Величина момента L равна

$$L = Fr = m,$$

направление же момента L совпадает с направлением моментом пары m , т. е. моменты m и L геометрически равны:

$$\vec{m} = \vec{L}.$$

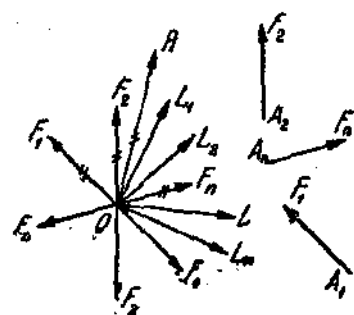
Итак, момент присоединенной пары геометрически равен моменту данной силы F относительно точки O .

§ 53. Приведение системы сил, расположенных как угодно в пространстве, к силе и паре.

Обращаемся теперь к задаче сложения сил, приложенных в различных точках твердого тела и направленных как угодно в пространстве.

Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ какого-либо твердого тела и направленные как угодно в пространстве (черт. 105).

Возьмем произвольную точку O , которую назовем центром приведения, и приведем все данные силы к точке O .



Черт. 105.

В результате этого приведения получим силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке O и отмеченные на чертеже двумя черточками, и присоединенные пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), \dots, (F_n, F_n)$. Обозначая моменты этих пар буквами $m_1, m_2, \dots, m_n$, имеем, согласно замеченному выше:

$$\vec{m}_1 = \vec{L}_1, \vec{m}_2 = \vec{L}_2, \dots, \vec{m}_n = \vec{L}_n,$$

где $L_1, L_2, \dots, L_n$ суть моменты данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно точки O .

Складывая силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке O и отмеченные двумя черточками, получаем равнодействующую R , которая приложена в той же точке O и равна геометрической сумме составляющих сил

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

На черт. 105 эта сила R также отмечена двумя черточками.

Складывая же присоединенные пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), \dots, (F_n, F_n)$, получаем равнодействующую пару, момент которой m равен геометрической сумме моментов составляющих пар, т. е.

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n.$$

Но геометрическая сумма моментов $L_1, L_2, \dots, L_n$ равна главному моменту L данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно точки O . Следовательно,

$$\vec{m} = \vec{L},$$

т. е. момент равнодействующей пары геометрически равен главному моменту данных сил относительно O .

Заметим, что геометрическая сумма R данных сил иначе называется их главным вектором. Вводя этот термин, мы можем формулировать полученный результат следующим образом:

Силы, расположенные как угодно в пространстве, всегда могут быть приведены к одной силе, равной их главному вектору и приложенной в произвольной точке O , и к паре, момент которой равен главному моменту данных сил относительно точки O .

Приводя данную систему сил указанным способом к силе и паре, мы встретимся с одним из следующих четырех случаев, которые рассмотрим последовательно в § 54 — 57.

§ 54. Случай, когда силы находятся в равновесии.

Предположим, что главный вектор R и главный момент L равны нулю.

Так как $R=0$, то силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке O и отмеченные на черт. 105, двумя черточками, взаимно уравниваются; так как $L=0$, то и присоединенные пары $(F_1, F_1), (F_2, F_2), \dots, (F_n, F_n)$ также взаимно уравниваются. Следовательно, в рассматриваемом случае данные нам силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ находятся в равновесии.

Итак, силы, приложенные в различных точках твердого тела и направленные как угодно в пространстве, взаимно уравниваются при выполнении двух условий: их главный вектор R и главный момент L (относительно произвольной точки O) должны равняться нулю:

$$R=0, L=0.$$

Таковы условия равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве.

§ 55. Случай, когда силы приводятся к паре.

Предположим, что главный вектор R равен нулю, главный момент L не равен нулю.

Так как $R=0$, то силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точке O и отмеченные двумя черточками, взаимно уравниваются. Остается пара, полученная от сложения присоединенных пар. Следовательно, в настоящем случае данные нам силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ приводятся к паре.

Момент этой пары m геометрически равен главному моменту L данных сил относительно точки O :

$$m=L.$$

§ 56. Случай, когда силы приводятся к равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей.

Предположим теперь, что главный вектор R не равен нулю, главный момент L или равен нулю или перпендикулярен к главному вектору.

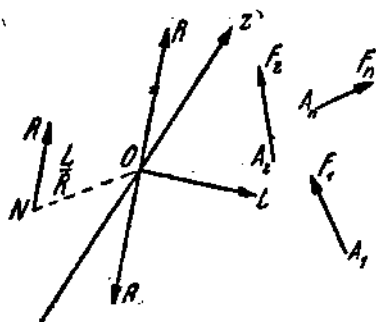
Покажем, что в этом случае данные нам силы приводятся к одной равнодействующей.

Рассмотрим отдельно случаи $L = 0$ и $L \neq 0$.

Предположим сначала, что главный момент L равен нулю. В таком случае присоединенные пары взаимно уравниваются, и остается одна сила R , приложенная в точке O и полученная от отложения сил, отмеченных на черт. 105 двумя черточками. Итак, данные нам силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ приводятся к одной равнодействующей, равной их главному вектору R и приложенной в центре приведения O .

Предположим теперь, что главный момент L не равен нулю, но перпендикулярен к главному вектору R .

Мы имеем силу R , приложенную в точке O (и отмеченную двумя черточками), и пару с моментом L , перпендикулярным к R (черт. 106). Распорядимся этой парой следующим образом. Возьмем силы, составляющие пару, равными R ; тогда плечо этой пары должно быть равно $L : R$.



Черт. 106.

Расположим пару так, чтобы одна из сил пары была приложена в точке O и была направлена в сторону, противоположную направлению силы R , отмеченной двумя черточками; другая сила пары будет приложена в точке N , лежащей на перпендикуляре, восставленном в точке O к плоскости, проходящей через R и через L на расстоянии $L : R$ от точки O , при этом перпендикуляр должен быть восставлен в такую сторону от точки O , чтобы для наблюдателя, расположенного по моменту L , пара представлялась вращающей свою плоскость по часовой стрелке.

Две силы, равные R и приложенные в точке O , взаимно уравниваются; остается одна сила R , приложенная в точке N . Следовательно, данные нам силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ приводятся к одной равнодействующей, равной их главному вектору R и приложенной в точке N .

Итак, если главный вектор R не равен нулю, а главный момент L или равен нулю, или перпендикулярен к главному вектору, то данные силы приводятся к одной *равнодействующей*.

В самом начале курса (в § 8) было замечено, что не всякая система сил имеет равнодействующую. Мы видим теперь, что условие, при котором система сил приводится к одной равнодействующей, состоит в том, чтобы главный вектор данной системы сил не был равен нулю, а главный момент (относительно некоторой точки) был или равен нулю, или перпендикулярен к главному вектору. Это условие приводимости системы сил к одной равнодействующей было установлено Пуансо¹.

Покажем теперь, что в том случае, когда данные нам силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ приводятся к одной равнодействующей, момент равнодействующей относительно какой угодно точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки, а момент равнодействующей относительно какой угодно оси

¹ L. Poinsot *Eléments de statique*.

равен алгебраической сумме моментов составляющих относительно той же оси.

Вернемся к черт. 106. Составим момент равнодействующей R , приложенной в точке N , относительно центра приведения O . Обозначая этот момент через $L(R)$, имеем

$$L(R) = R \cdot \frac{L}{R} = L;$$

определяя же направление момента $L(R)$ согласно известному правилу, видим, что оно совпадает с направлением главного момента L . Следовательно, момент $L(R)$ геометрически равен главному моменту L :

$$\overline{L(R)} = \overline{L}.$$

С другой стороны, главный момент L относительно точки O равен геометрической сумме моментов $L_1, L_2, \dots, L_n$ данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно той же точки:

$$\overline{L} = \overline{L_1} + \overline{L_2} + \dots + \overline{L_n}.$$

Следовательно

$$\overline{L(R)} = \overline{L_1} + \overline{L_2} + \dots + \overline{L_n},$$

т. е. момент равнодействующей относительно центра приведения равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Так как центр приведения есть точка совершенно произвольная, то отсюда вытекает первая часть доказываемой теоремы.

Проведем теперь через центр приведения O какую-либо ось z (черт. 106) и составим момент равнодействующей R (приложенной в точке N) относительно оси z ; обозначим этот момент через $L_z(R)$.

По известной теореме, момент $L_z(R)$ равен проекции на ось z момента $L(R)$ равнодействующей R относительно точки O , а так как

$$\overline{L(R)} = \overline{L},$$

то следовательно момент $L_z(R)$ равен проекции на ось z главного момента L :

$$L_z(R) = L \cos(L, z).$$

Но, с другой стороны, проекция главного момента L на ось z равна главному моменту L_z данных сил относительно оси z :

$$L \cos(L, z) = L_z,$$

и, следовательно,

$$L_z(R) = L_z.$$

Вспоминая, что главный момент L_z равен алгебраической сумме моментов $L_{1z}, L_{2z}, \dots, L_{nz}$ данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно оси z :

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{nz},$$

получаем

$$L_z(R) = L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{nz},$$

т. е. момент равнодействующей относительно оси z равен алгебраической сумме моментов составляющих относительно той же оси.

Имея в виду, что ось z есть совершенно произвольная ось, получаем вторую часть доказываемой теоремы.

§ 57. Случай, когда силы приводятся к динаме. Центральная ось.

Предположим, что главный вектор R не равен нулю, главный момент L не равен нулю и не перпендикулярен к главному вектору.

Мы имеем силу R , приложенную в точке O (и отмеченную двумя черточками) и пару с моментом L (черт. 107). Разложим эту пару на две пары так, чтобы плоскость одной составляющей пары была перпендикулярна к главному вектору R , а плоскость другой составляющей пары была ему параллельна. Для этого разлагаем (по правилу параллелограмма моментов) момент L на два момента L_0 и L_1 , направленные один по линии действия силы R , другой — перпендикулярно к силе R . Величины этих составляющих моментов суть:

$$L_0 = L \cos (L, R), \quad L_1 = L \sin (L, R),$$

Возьмем силы, составляющие пару с моментом L_1 , равными R ; тогда плечо этой пары должно быть равно $L_1 : R$. Затем расположим эту пару так, чтобы одна из сил пары была приложена в точке O и была направлена в сторону, противоположную направлению силы R , отмеченной двумя черточками; другая сила пары будет приложена в точке N , лежащей на перпендикуляре, восстановленном в точке O к плоскости, проходящей через R и через L , на расстоянии $L_1 : R$ от точки O ; при этом перпендикуляр должен быть восстановлен в такую сторону от точки O , чтобы для наблюдателя, расположенного по моменту L_1 , пара представлялась вращающей свою плоскость по часовой стрелке.

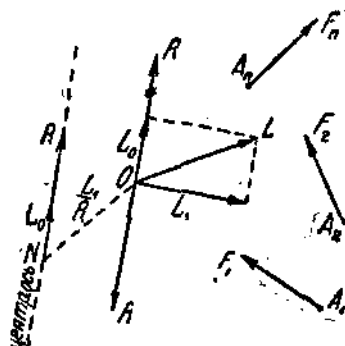
Две силы, равные R и приложенные в точке O , взаимно уравновешиваются; остается сила R , приложенная в точке N , и пара с моментом L_0 , плоскость ко-

торой перпендикулярна к главному вектору R . Момент этой пары L_0 перенесем в точку N (не изменяя его направления).

Итак, в рассматриваемом случае данные нам силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ приводятся к силе, равной главному вектору (и приложенной в точке N), и к паре, плоскость которой перпендикулярна к главному вектору. Этот результат принадлежит Пуансо.¹

Для обозначения совокупности силы и пары, плоскость которой перпендикулярна к силе, предложены различные термины. В английской литературе принят термин *wrench*, предложенный Боллом (R. S. Ball) (слово *wrench* означает „винтовое усилие“, т. е. совокупность усилий, производимых при завинчивании винта). Пользуясь терминологией Пля-

Черт. 107.



¹ L. Poinso. Éléments de statique.

к е р а, мы будем называть совокупность силы и пары, плоскость которой перпендикулярна к силе, *динамой* (dyname).

Применяя эту терминологию, мы можем сказать, что в рассматриваемом случае данные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ приводятся к *динаме, состоящей из силы R и пары с моментом L_0* . Линию действия силы R Пуансо называет *центральной осью* данной системы сил (черт. 107).

Заметим, что результаты, установленные в § 54, 55 и 56, можно рассматривать как частные случаи этого общего результата: в первом случае и сила R и момент L_0 равны нулю; во втором случае сила R равна нулю, но момент L_0 не равен нулю; в третьем случае сила R не равна нулю, а момент L_0 равен нулю.

Величина и направление главного вектора R , очевидно, не зависят от выбора центра приведения O ; величина же и направление главного момента L , вообще говоря, зависят от выбора центра приведения. Выясним зависимость.

Вернемся к черт. 107. Обозначая отрезок $ON = L_1 : R$ (т. е. расстояние центра приведения O от центральной оси данной системы сил) буквой r , имеем

$$L_1 = rR$$

и, следовательно,

$$L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2} = \sqrt{L_0^2 + r^2 R^2}$$

$$\sin(L, R) = \frac{L_1}{L} = \frac{rR}{\sqrt{L_0^2 + r^2 R^2}}.$$

Отсюда следует, что для всех центров приведения O , находящихся на одном и том же расстоянии r от центральной оси (т. е. лежащих на поверхности кругового цилиндра, которого ось есть центральная ось данной системы сил и которого радиус равен r), главный момент L имеет одну и ту же величину и образует один и тот же угол с направлением главного вектора R . Этим обстоятельством объясняется смысл наименования центральной оси.

Как видно из формулы:

$$L = \sqrt{L_0^2 + r^2 R^2},$$

главный момент L непрерывно возрастает с увеличением расстояния центра приведения O от центральной оси. Наименьший главный момент соответствует центрам приведения, лежащим на самой центральной оси; при $r = 0$ имеем

$$L = L_0.$$

Итак, момент L_0 есть наименьший главный момент данной системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Из формулы

$$L_0 = L \cos(L, R)$$

следует, что наименьший главный момент L_0 равен проекции главного момента L (относительно произвольной точки O) на направление главного вектора R .

Отсюда можно заключить, что проекция главного момента L на направление главного вектора R не зависит от выбора центра приведения O .

§ 58. Выражения моментов силы относительно координатных осей через проекции силы на те же оси.

Воспользуемся установленной в § 56 теоремой о моменте равнодействующей для вывода часто применяемых формул, выражающих моменты силы относительно координатных осей через проекции силы на те же оси.

Дана сила F , приложенная в точке A (черт. 108). Возьмем три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z и построим координаты точки приложения A относительно этих осей; обозначим эти координаты буквами x , y , z .

Затем построим проекции силы F на оси x , y , z . Для этого строим прямоугольный параллелепипед, которого ребра параллельны осям x , y , z и в котором сила F является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда и будут проекциями силы F на оси x , y , z ; обозначим их буквами X , Y , Z .

По правилу параллелепипеда сила F есть равнодействующая трех ее проекций X , Y , Z . Следовательно, по теореме о моменте равнодействующей имеем

$$L_x = L_x(X) + L_x(Y) + L_x(Z),$$

где L_x , $L_x(X)$, $L_x(Y)$, $L_x(Z)$ суть моменты сил F , X , Y , Z относительно оси x .

Вспомянув определение понятия момента силы относительно оси, легко находим

$$L_x(X) = 0, \quad L_x(Y) = -zY, \quad L_x(Z) = yZ$$

и, следовательно,

$$L_x = yZ - zY.$$

Совершенно так же составляются формулы для моментов силы F относительно осей y и z :

$$L_y = zX - xZ$$

$$L_z = xY - yX.$$

Выведенными формулами моменты силы F относительно осей x , y , z выражаются через проекции силы F на те же оси.

§ 59. Вычисление главного вектора и главного момента по способу проекций.

Перейдем теперь к составлению формул для вычисления главного вектора R и главного момента L по способу проекций.

Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ и расположенные как угодно в пространстве (черт. 109). Выбираем произвольный центр приведения O и приводим данные силы, как было объяснено выше, к одной силе, приложенной в точке O и равной главному вектору R , и к одной паре, момент которой равен главному моменту L .

относительно точки O . Мы знаем, что

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \\ \vec{L} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n\end{aligned}$$

где $L_1, L_2, \dots, L_n$ суть моменты данных сил относительно точки O .

Для вычисления главного вектора R и главного момента L воспользуемся методом проекций.

Проведем через центр приведения O три взаимно-перпендикулярные оси x, y, z и спроектируем, как показано на черт. 109, главный вектор R на эти оси; обозначим проекции главного вектора на оси x, y, z буквами X, Y, Z .

Так как главный вектор R равен геометрической сумме сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, то по теореме о проекции геометрической суммы имеем

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ суть проекции данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ соответственно на оси x, y, z .

Вычислив проекции главного вектора по только-что написанным формулам, находим величину главного вектора (как диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на проекциях X, Y, Z) по формуле:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Далее, имеем

$$X = R \cos(R, x), \quad Y = R \cos(R, y), \quad Z = R \cos(R, z),$$

откуда следует

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(R, z) = \frac{Z}{R}.$$

Этими формулами определяется направление главного вектора.

Переходя к вычислению главного момента L , проектируем главный момент L на оси x, y, z . Для этого строим прямоугольный параллелепипед, которого ребра расположены по осям x, y, z и в котором главный момент L является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда и будут проекциями главного момента L на оси x, y, z .

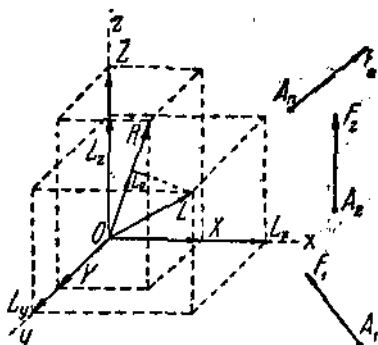
Вспоминая зависимость между главным моментом относительно точки и главным моментом относительно оси, мы заключаем, что только что построенные проекции главного момента L на оси x, y, z равны главным моментам L_x, L_y, L_z относительно осей x, y, z .

Эти главные моменты L_x, L_y, L_z вычисляются по формулам

$$L_x = L_{1x} + L_{2x} + \dots + L_{nx}$$

$$L_y = L_{1y} + L_{2y} + \dots + L_{ny}$$

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{nz}$$



Черт. 109.

где $L_{1x}, L_{2x}, \dots, L_{nx}$ суть моменты данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ соответственно относительно осей x, y, z .

Затем находим величину главного момента L (как диагональ прямоугольного параллелепипеда) по формуле

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}.$$

Далее, имеем

$$L_x = L \cos(L, x), \quad L_y = L \cos(L, y), \quad L_z = L \cos(L, z),$$

откуда следует:

$$\cos(L, x) = \frac{L_x}{L}, \quad \cos(L, y) = \frac{L_y}{L}, \quad \cos(L, z) = \frac{L_z}{L}.$$

Этими формулами определяется направление главного момента L .

Заметим, что моменты $L_{1x}, L_{2x}, \dots, L_{nx}$ данных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ относительно осей x, y, z могут быть вычислены или на основании самого определения момента силы относительно оси, или при помощи формул, выведенных в предыдущем параграфе. Обозначая координаты точки A_i (т. е. точки приложения силы F_i) относительно осей x, y, z через x_i, y_i, z_i , а проекции силы F_i на те же оси через X_i, Y_i, Z_i , имеем

$$\begin{aligned} L_{ix} &= y_i Z_i - z_i Y_i, \\ L_{iy} &= z_i X_i - x_i Z_i, \\ L_{iz} &= x_i Y_i - y_i X_i. \end{aligned}$$

Следовательно, главные моменты L_x, L_y, L_z могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} L_x &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) \\ L_y &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i) \\ L_z &= \sum (x_i Y_i - y_i X_i), \end{aligned}$$

причем суммирование распространено на все значения i от 1 до n .

В заключение вычислим еще наименьший главный момент L_0 данной системы сил.

В конце § 57 было замечено, что наименьший главный момент L_0 равен проекции главного момента L на направление главного вектора R . Проектируя главный момент L на направление главного вектора (черт. 109), получаем

$$L_0 = L \cos(L, R).$$

С другой стороны, главный момент L представляется как геометрическая сумма главных моментов L_x, L_y, L_z . Применяя теорему о проекции геометрической суммы и имея в виду, что направления главных моментов L_x, L_y, L_z совпадают с направлениями осей x, y, z , получаем

$$L_0 = L_x \cos(R, x) + L_y \cos(R, y) + L_z \cos(R, z).$$

Подставляя сюда найденные выше значения косинусов $\cos(R, x), \cos(R, y), \cos(R, z)$, имеем

$$L_0 = \frac{XL_x + YL_y + ZL_z}{R}.$$

§ 60. Уравнения равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве.

Мы видели, что силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, расположенные как угодно в пространстве, находятся в равновесии, если их главный вектор R и главный момент L равны нулю. Мы имеем формулы

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ L &= \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \end{aligned}$$

откуда видно, что главный вектор R и главный момент L обращаются в нуль при выполнении шести условий:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad L_x=0, \quad L_y=0, \quad L_z=0.$$

Имея в виду формулы для проекций главного вектора X, Y, Z и для главных моментов L_x, L_y, L_z , установленные в предыдущем параграфе, заключаем, что данные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ находятся в равновесии при выполнении следующих шести уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n &= 0 \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n &= 0 \\ L_{1x} + L_{2x} + \dots + L_{nx} &= 0 \\ L_{1y} + L_{2y} + \dots + L_{ny} &= 0 \\ L_{1z} + L_{2z} + \dots + L_{nz} &= 0. \end{aligned}$$

Таковы уравнения равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве; первые три уравнения будем называть уравнениями проекций, а последние три уравнения — уравнениями моментов.

Заметим, что уравнения моментов могут быть написаны также следующим образом:

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

где x_i, y_i, z_i суть координаты точки приложения силы F_i .

Так как в рассматриваемом самом общем случае распределения сил имеем 6 уравнений равновесия, то заключаем, что задача, в которой имеются силы, приложенные в различных точках твердого тела, направленные как угодно в пространстве и находящиеся в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней будет равно 6.

Назовем те оси, на которые проектируются силы при составлении уравнений проекций, осями проекций, а те оси, относительно которых берутся моменты сил при составлении уравнений моментов, осями моментов. В составленных нами 6 уравнениях равновесия оси проекций совпадают с осями моментов. Однако в виду произвольности осей x, y, z нет необходимости, чтобы оси моментов совпадали с осями проекций. Заметим, что при решении задач оси проекций следует направлять, вообще говоря, перпендикулярно к направлению какой-либо из неизвестных сил, а оси моментов следует брать, вообще говоря, или параллельными одной из неизвестных сил, или пересекающими линию действия

одной из неизвестных сил. При таком выборе осей проекций и осей моментов сказанные неизвестные силы исключаются из соответствующих уравнений равновесия.

§ 61. Условие равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками. Определение опорных реакций.

Как пример на применение 6 уравнений равновесия твердого тела, рассмотрим вопрос о равновесии твердого тела, две точки которого закреплены неподвижно.

Представим себе твердое тело, у которого две точки O_1 и O_2 закреплены неподвижно. При этом условии единственным движением, которое может совершать данное тело, является вращение вокруг прямой, проходящей через точки O_1 и O_2 . К этому твердому телу приложены силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ (черт. 110). Требуется найти условие, которому должны удовлетворять приложенные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, чтобы данное тело оставалось в равновесии.

К нашему твердому телу, кроме заданных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложены еще две силы, а именно реакции закрепленных точек O_1 и O_2 ; обозначим эти реакции буквами N_1 и N_2 . Так как под действием сил $F_1, F_2, \dots, F_n, N_1, N_2$ твердое тело должно оставаться в равновесии, то эти силы должны удовлетворять 6 уравнениям равновесия.

Выберем взаимно перпендикулярные оси x, y, z следующим образом: за начало координат возьмем одну из закрепленных точек, например точку O_1 ;

ось z направим по прямой O_1O_2 (т. е. по оси вращения нашего твердого тела); оси x и y проведем через точку O_1 перпендикулярно к оси вращения O_1O_2 . Реакции закрепленных точек N_1 и N_2 разложим на три составляющие по осям x, y, z ; обозначим эти составляющие через N_{1x}, N_{1y}, N_{1z} и N_{2x}, N_{2y}, N_{2z} . Реакции N_1 и N_2 могут быть заменены их составляющими.

Реакции N_{1x}, N_{1y} и N_{2x}, N_{2y} , направленные перпендикулярно к оси вращения z , назовем боковыми реакциями закрепленных точек, а реакции N_{1z} и N_{2z} , направленные по оси вращения, — продольными реакциями.

Напишем 6 уравнений равновесия для сил $F_1, F_2, \dots, F_n, N_{1x}, N_{1y}, N_{1z}, N_{2x}, N_{2y}, N_{2z}$. Полагая $O_1O_2 = a$, получим

$$\Sigma X_i + N_{1x} + N_{2x} = 0$$

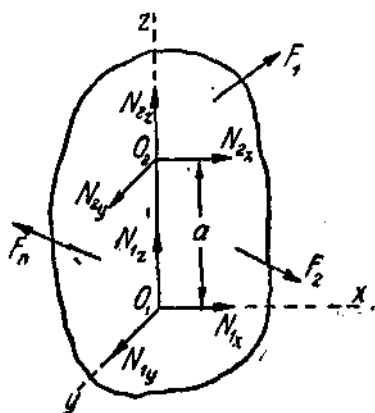
$$\Sigma Y_i + N_{1y} + N_{2y} = 0$$

$$\Sigma Z_i + N_{1z} + N_{2z} = 0$$

$$\Sigma L_{ix} - aN_{2y} = 0$$

$$\Sigma L_{iy} + aN_{2x} = 0$$

$$\Sigma L_{iz} = 0.$$



Черт. 110.

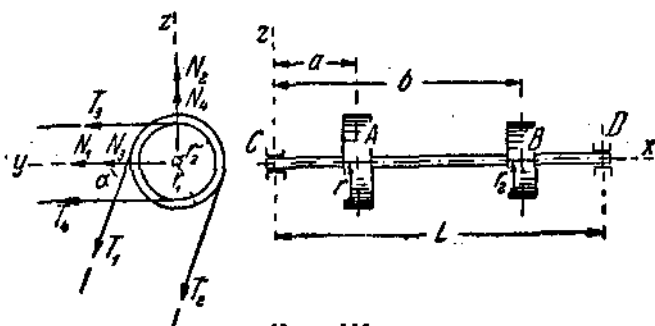
Здесь X_i, Y_i, Z_i обозначают проекции силы F_i на оси x, y, z , а L_{ix}, L_{iy}, L_{iz} суть моменты силы F_i относительно тех же осей; суммирования распространены на все значения i от 1 до n .

Последнее уравнение равновесия

$$\Sigma L_{iz} = 0$$

есть единственное, в которое не входят реакции закрепленных точек. Следовательно, это уравнение представляет единственное условие, которому должны удовлетворять приложенные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ для того, чтобы твердое тело оставалось в равновесии.

Итак, условие равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками состоит в том, чтобы сумма моментов приложенных сил относительно оси вращения равнялась нулю.



Черт. 111.

Первые 5 уравнений равновесия могут послужить для определения реакций закрепленных точек. Из 4-го и 5-го уравнений находим

$$N_{2x} = -\frac{1}{a} \Sigma L_{iy}, \quad N_{2y} = \frac{1}{a} \Sigma L_{ix};$$

затем из 1-го и 2-го уравнений получаем

$$N_{1x} = \frac{1}{a} \Sigma L_{iy} - \Sigma X_i, \quad N_{1y} = -\frac{1}{a} \Sigma L_{ix} - \Sigma Y_i;$$

наконец, из 3-го уравнения находим

$$N_{1z} + N_{2z} = -\Sigma Z_i.$$

Как видно, боковые реакции определяются вполне; что же касается продольных реакций, то может быть найдена лишь сумма этих реакций, каждая же реакция в отдельности уравнениями равновесия не определяется. В этом смысле задача определения реакций закрепленных точек оказывается задачей статически неопределенной.

Заметим, что статическая неопределенность в определении продольных реакций устраняется, если предположить, что точка O_1 закреплена неподвижно, а точка O_2 может свободно (без трения) скользить вдоль оси z . В этом случае продольная реакция N_{2z} обращается в нуль, и 3-е уравнение равновесия принимает вид:

$$\Sigma Z_i + N_{1z} = 0,$$

откуда получаем

$$N_{1z} = -\Sigma Z_i.$$

Задача 21. На валу трансмиссии находятся два шкива A и B для ременной передачи (черт. 111). Радиусы шкивов равны r_1 и r_2 ; расстояния шкивов от подшипника C равны a и b ; расстояние между подшипниками C и D равно l . Ветви ремня, надетого на шкив A , образуют угол α с горизонтом; ветви ремня, надетого на шкив B , горизонтальны. Даны натяжения T_1 и T_2 ветвей первого ремня и натяжение T_3 верхней ветви второго ремня. Найти, при каком натяжении T_4 нижней ветви второго ремня вал, находясь под действием приложенных к нему сил, будет оставаться в равновесии, а также определить боковые реакции подшипников, вызываемые натяжениями ремней.

На вал действуют натяжения ремней и реакции подшипников; напишем уравнения равновесия для этих сил. Возьмем взаимно перпендикулярные оси x , y , z , выбрав за начало осей точку C и направив ось x по оси вала; ось y направим горизонтально, ось z — вертикально. Боковые реакции подшипника C по осям y и z обозначим через N_1 и N_2 , боковые реакции подшипника D по тем же осям — через N_3 и N_4 .

Чтобы определить натяжение T_4 , составим уравнение моментов относительно оси x ; получим

$$T_2 r_1 - T_1 r_1 - T_3 r_2 + T_4 r_2 = 0,$$

откуда

$$T_4 = T_3 - \frac{r_1}{r_2} (T_2 - T_1).$$

Чтобы найти боковые реакции N_3 и N_4 подшипника D , составим уравнения моментов относительно осей y и z ; будем иметь

$$a T_1 \sin \alpha + a T_2 \sin \alpha - l N_4 = 0$$

$$a T_1 \cos \alpha + a T_2 \cos \alpha + b T_3 + b T_4 + l N_3 = 0,$$

откуда

$$N_4 = \frac{a}{l} (T_1 + T_2) \sin \alpha$$

$$N_3 = -\frac{a}{l} (T_1 + T_2) \cos \alpha - \frac{b}{l} (T_3 + T_4).$$

Наконец, чтобы определить боковые реакции N_1 и N_2 подшипника C , спроектируем силы на оси y и z :

$$N_1 + N_3 + T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha + T_3 + T_4 = 0$$

$$N_2 + N_4 - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N_1 = -N_3 - (T_1 + T_2) \cos \alpha - (T_3 + T_4)$$

$$N_2 = -N_4 + (T_1 + T_2) \sin \alpha.$$

Сделаем вычисления, положив $T_1 = 200$ кг, $T_2 = 400$ кг, $T_3 = 500$ кг, $r_1 = 25$ см, $r_2 = 20$ см, $a = 1$ м, $b = 3$ м, $l = 4$ м, $\alpha = 70^\circ$.

$$T_4 = 500 - \frac{25}{20} (400 - 200) = 250 \text{ кг}$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot 600 \sin 70^\circ = 141 \text{ кг}$$

$$N_3 = -\frac{1}{4} \cdot 600 \cos 70^\circ - \frac{3}{4} \cdot 750 = -614 \text{ кг}$$

$$N_1 = 614 - 600 \cos 70^\circ - 750 = -314 \text{ кг}$$

$$N_2 = -141 + 600 \sin 70^\circ = 423 \text{ кг}.$$

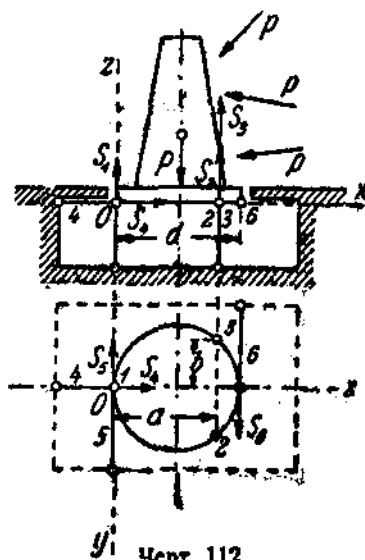
§ 62. Определение главного вектора и главного момента опытным путем

В качестве примера на применение уравнений равновесия рассмотрим еще следующий прием экспериментального определения главного вектора и главного момента сил, приложенных к твердому телу.¹

Данное тело (например модель сооружения) поставлено на круглой платформе, опирающейся на 6 стержней (черт. 112); 3 стержня вертикальны и 3 стержня горизонтальны; расположение стержней указано на черт. 112 (в разрезе и в плане; стержни отмечены номерами от 1 до 6). На данное тело действуют какие-либо силы p (например давление ветра). Требуется измерить главный вектор R и главный момент L этих сил, взяв за центр приведения, например, точку O .

Проведем через точку O взаимно перпендикулярные координатные оси x, y, z (направление этих осей указаны на черт. 112). Обозначим проекции главного вектора R и главного момента L на эти оси через X, Y, Z, L_x, L_y, L_z (три последние величины являются в то же время главными моментами сил p относительно осей x, y, z). Мы найдем эти 6 величин, написав 6 уравнений равновесия для сил, приложенных к телу и к платформе, на которой оно стоит.

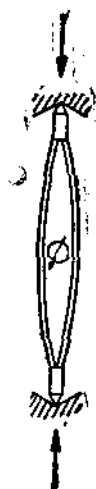
К телу и платформе приложены силы p , вес P тела и платформы, приложенный в их общем центре тяжести, и реакции стержней, на которые опирается платформа. Будем считать все стержни сжатыми и обозначим их реакции (или сжимающие усилия в них) через $S_1, S_2, \dots, S_6$; если какой-либо стержень растянут, то будем рассматривать растягивающее усилие в нем как отрицательное сжимающее усилие. Так как все



Черт. 112.

¹ H. Müller-Breslau. „Ueber die Messung der Größe und Lage unbekannter Kräfte (Winddruck, Erddruck), die auf ruhende Körper wirken“. Zentralblatt der Bauverwaltung, 24 (1904), S. 366.

перечисленные силы взаимно уравновешиваются, то они должны удовлетворять полученным нами 6 уравнениям равновесия. Проектируя все силы на оси x, y, z и составляя моменты относительно тех же осей, будем иметь уравнения равновесия



$$\begin{aligned} X + S_4 &= 0 \\ Y - S_5 + S_6 &= 0 \\ Z - P + S_1 + S_2 + S_3 &= 0 \\ L_x + S_2 b - S_3 b &= 0 \\ L_y + P \frac{d}{2} - S_2 a - S_3 a &= 0 \\ L_z + S_6 d &= 0. \end{aligned}$$

где буквы a, b и d имеют значение, указанное на черт. 112.

Отсюда находим

$$\begin{aligned} X &= -S_4 \\ Y &= S_5 - S_6 \\ Z &= P - S_1 - S_2 - S_3 \\ L_x &= (S_2 - S_3)b \\ L_y &= (S_3 + S_2)a - P \frac{d}{2} \\ L_z &= -S_6 d. \end{aligned}$$

Черт. 113.

Таким образом, зная величины P, a, b, d и определив из опыта усилия $S_1, S_2, \dots, S_6$, мы можем вычислить проекции главного вектора и главного момента интересующих нас сил p . По этим проекциям можем затем вычислить, конечно, и величины и направления главного вектора R и главного момента L ; если силы p приводятся к одной равнодействующей, то мы можем найти величину, направление и точку приложения их равнодействующей и т. д.

Усилия $S_1, S_2, \dots, S_6$ могут быть легко определены, если сконструировать стержни 1, 2, ..., 6 в виде динамометров: каждый стержень должен быть составлен из двух слегка изогнутых упругих брусков (черт. 113). Усилия, приложенные к концам стержня, вызывают прогиб брусков, который может быть легко измерен.

Такой прием был применен Мюллер-Бреслау для изучения давления земли на подпорные стенки.

§ 63. Сложение параллельных сил в пространстве. Уравнения равновесия параллельных сил

Применим результаты, полученные при сложении сил, расположенных как угодно в пространстве, к случаю параллельных сил.

Даны параллельные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 114). Требуется сложить эти силы.

Выбираем произвольный центр приведения O и (согласно изложенному в § 53) приводим данные силы к силе, приложенной в точке O и равной

главному вектору R данных сил, и к паре, момент которой равен главному моменту L данных сил относительно точки O .

Начнем с вычисления главного вектора R и главного момента L . Для этого вычисления воспользуемся формулами, выведенными в § 59).

Проведем через центр приведения O три взаимно перпендикулярные оси x, y, z , причем ось z направим параллельно данным силам (тогда оси x и y будут перпендикулярны к этим силам).

Вычисляем проекции X, Y, Z главного вектора R на оси x, y, z . Имеем формулы

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i,$$

где Σ есть знак суммирования; а X_i, Y_i, Z_i — проекции силы F_i на оси x, y, z (причем $i = 1, 2 \dots n$).

Но так как данные силы параллельны оси z , то

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = \pm F_i,$$

причем $Z_i = +F_i$, если сила F_i направлена в сторону положительной оси z (как, например, сила F_1 на черт. 114), и $Z_i = -F_i$, если сила F_i направлена в сторону отрицательной оси z (как, например, сила F_2).

Следовательно,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \Sigma (\pm F_i).$$

Так как $X = 0$ и $Y = 0$, то главный вектор R направлен по оси z ; его величина равна численному значению его проекции Z :

$$R = |Z| = |\Sigma (\pm F_i)|;$$

если $Z = \Sigma (\pm F_i) < 0$, то главный вектор R направлен в сторону положительной оси z , если же $Z = \Sigma (\pm F_i) > 0$, то главный вектор направлен в сторону отрицательной оси z . (На черт. 114 предположено $Z = \Sigma (\pm F_i) > 0$).

Перейдем к вычислению главного момента L . Вычисляем сначала проекции L на оси x, y, z или, что все равно, главные моменты L_x, L_y, L_z относительно этих осей.

Имеем формулы

$$L_x = \Sigma L_{ix}, \quad L_y = \Sigma L_{iy}, \quad L_z = \Sigma L_{iz},$$

где L_{ix}, L_{iy}, L_{iz} суть моменты силы F_i относительно осей x, y, z .

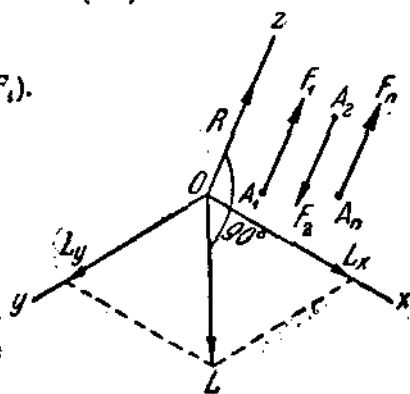
Так как все данные силы параллельны оси z , то

$$L_{iz} = 0$$

и, следовательно

$$L_z = 0$$

Отсюда следует, что главный момент L перпендикулярен к оси z , т. е. лежит в плоскости xy . Чтобы его построить, остается построить прямоугольник на главных моментах L_x и L_y (отложенных от точки O



Черт. 114.

по осям x и y) и провести в нем диагональ через вершину O . Величина главного момента L равна

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}.$$

Итак, главный вектор R направлен по оси z , а главный момент L лежит в плоскости xy . Следовательно,

$$(R, L) = 90^\circ$$

Рассмотрим теперь, какие результаты получаются от сложения данных параллельных сил. Относительно величины главного вектора R и главного момента L сделаем три предположения:

1) Главный вектор R и главный момент L равны нулю.

В этом случае данные силы находятся в равновесии.

2) Главный вектор R равен нулю, но главный момент L не равен нулю.

В этом случае данные силы приводятся к паре, момент которой равен главному моменту L .

3) Главный вектор R не равен нулю.

Относительно главного момента L можно сделать два предположения: или $L = 0$, или $L \neq 0$. Но если $L \neq 0$, то как показывает предыдущее исследование, L перпендикулярно к R . Значит, главный момент L или равен нулю или перпендикулярен к главному вектору R . Вспоминая изложенное в § 56, мы заключаем, что в рассматриваемом случае данные силы приводятся к одной равнодействующей, равной главному вектору R .

Как видно, параллельные силы ни в каком случае не приводятся к динаме.

Мы видели, что данные нам параллельные силы находятся в равновесии в том случае, когда их главный вектор R и главный момент L равны нулю. Мы имели формулу

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}.$$

Следовательно, для того, чтобы было $L = 0$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$L_x = 0, \quad L_y = 0.$$

Вспоминая зависимости

$$R = |\Sigma(\pm F_i)|, \quad L_x = \Sigma L_{ix}, \quad L_y = \Sigma L_{iy}$$

мы заключаем, что параллельные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ находятся в равновесии, если они удовлетворяют 3 уравнениям:

$$\Sigma(\pm F_i) = 0, \quad \Sigma L_{ix} = 0, \quad \Sigma L_{iy} = 0.$$

Таковы уравнения равновесия параллельных сил, не лежащих в одной плоскости. Напомним, что в сумму $\Sigma(\pm F_i)$ силы, направленные в одну сторону, входят со знаком $+$, а силы направленные в противоположную сторону, со знаком $-$.

Так как в рассматриваемом случае имеем три уравнения равновесия, то задача, в которой имеются параллельные силы, не лежащие в одной плоскости и находящиеся в равновесии, будет статически определенной, если число неизвестных в ней равно 3.

§ 64. Сложение параллельных сил по способу последовательного сложения.

В вышеизложенном мы показали сложение заданных нам параллельных сил при помощи приведения всех сил к одной точке. Заметим теперь, что сложение этих сил может быть произведено также и по способу последовательного сложения.

Даны параллельные силы $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$, приложенные в точках $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (черт. 115); из них силы F_1, F_2, F_3 направлены в одну сторону, силы F_4, F_5, F_6 в противоположную сторону. Требуется сложить эти силы (ограничиваемся случаем 6 сил; рассуждение остается справедливым для какого угодно числа сил).

Складываем силы F_1 и F_2 по правилу сложения двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону; получаем их равнодействующую $R_1 = F_1 + F_2$, приложенную в точке C_1 ; точка C_1 лежит на отрезке A_1A_2 и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные силам F_1 и F_2 , так что

$$\frac{A_1C_1}{C_1A_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

Затем складываем силу R_1 с силой F_3 ; получаем равнодействующую $R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$, приложенную в точке C_2 на отрезке C_1A_3 , причем

$$\frac{C_1C_2}{C_2A_3} = \frac{F_3}{R_1}$$

Точно так же складываем силы F_4 и F_5 ; причем равнодействующую $R_3 = F_4 + F_5$, приложенную в точке C_3 на отрезке A_4A_5 , причем

$$\frac{A_4C_3}{C_3A_5} = \frac{F_5}{F_4}$$

Наконец, складывая силы R_2 и F_6 , получаем их равнодействующую $R_4 = R_2 + F_6 = F_1 + F_2 + F_3 + F_6$, приложенную в точке C_4 на отрезке C_2A_6 , причем

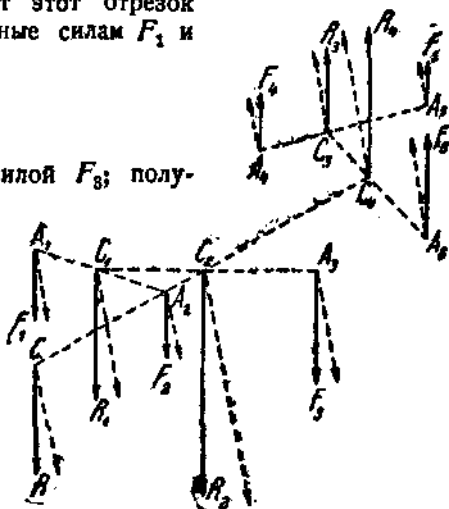
$$\frac{C_2C_4}{C_4A_6} = \frac{F_6}{R_2}$$

Итак, данная система сил приведена к двум параллельным силам R_2 и R_4 , направленным в противоположные стороны.

Может представиться один из следующих 3 случаев.

1) Силы R_2 и R_4 не равны.

Положим для определенности, $R_2 > R_4$. Складывая силы R_2 и R_4 по правилу сложения двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, получаем их равнодействующую $R = R_2 - R_4$. Равнодействующая R направлена в сторону большей силы (т. е. R_2) и при-



Черт. 115.

лежа к точке C , лежащей на продолжении отрезка C_2C_4 со стороны большей силы, причем

$$\frac{CC_2}{CC_4} = \frac{R_4}{R_2}.$$

Итак, в рассматриваемом случае данная система сил приводится к одной *равнодействующей* R .

2) Силы R_2 и R_4 равны, но их линии действия не совпадают. Силы R_2 и R_4 составляют пару сил (R_2, R_4). Следовательно, в этом случае данная система параллельных сил приводится к паре (R_2, R_4).

3) Силы R_2 и R_4 равны и их линии действия совпадают. В этом случае силы R_2 и R_4 взаимно уравниваются и, следовательно, данные силы $F_1, F_2, \dots, F_6$ находятся в *равновесии*.

Мы приходим таким образом иным путем к тем же самым результатам, которые уже были установлены в § 63.

§ 65. Центр параллельных сил.

Остановимся еще на том случае, когда параллельные силы приводятся к одной равнодействующей. Рассуждения, изложенные в предыдущем параграфе, привели нас к построению точки приложения равнодействующей; на черт. 115 эта точка обозначена буквой C .

Отметим важное свойство точки C . Оно состоит в том, что если вращать данные силы вокруг их точек приложения, не нарушая их параллельности, то равнодействующая, оставаясь параллельной данным силам, будет вращаться вокруг точки C .

Повернем данные силы $F_1, F_2, \dots, F_6$ вокруг их точек приложения $A_1, A_2, \dots, A_6$, не нарушая их параллельности (черт. 115). Покажем, что при этом равнодействующая R , оставаясь параллельной данным силам, повернется вокруг точки C .

В самом деле, найдем равнодействующую сил F_1 и F_2 в их новом положении. Так как в новом положении силы F_1 и F_2 остаются параллельными и направленными в одну сторону, то их равнодействующая попрежнему равна $F_1 + F_2 = R_1$ и приложена в точке, делящей отрезок A_1A_2 на части, обратно пропорциональные силам F_1 и F_2 , т. е. в точке C_1 . Следовательно, мы получим равнодействующую сил F_1 и F_2 в их новом положении, повернув прежнюю равнодействующую R_1 вокруг точки C_1 .

Точно так же равнодействующую сил R_1 и F_3 в их новом положении мы получим, повернув прежнюю равнодействующую R_2 вокруг точки C_2 . Применяя то же рассуждение к силам F_4 и F_5 , а затем к силам R_3 и F_6 , убедимся, что их равнодействующие в новом положении соответственно равны силам R_3 и R_4 , повернутым вокруг точек C_3 и C_4 .

Складывая теперь силы R_2 и R_4 (приложенные в точках C_2 и C_4), мы увидим, что их равнодействующая попрежнему равна $R_2 - R_4 = R$ и приложена в той же точке C , что и раньше. Таким образом мы получаем равнодействующую сил $F_1, F_2, \dots, F_6$ в их новом положении поворотом прежней равнодействующей R вокруг точки C .

Точка C называется *центром параллельных сил* $F_1, F_2, \dots, F_6$.

§ 66. Координаты центра параллельных сил.

Когда параллельные силы приводятся к одной равнодействующей, то за точку приложения этой равнодействующей удобнее всего взять центр данных параллельных сил. Выведем теперь формулы для вычисления координат центра параллельных сил.

Даны параллельные силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенные в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 116). Составим алгебраическую сумму сил

$$F_1 - F_2 \pm \dots + F_n = \Sigma (\pm F_i)$$

(в эту сумму взяты со знаком $+$ те силы, которые направлены в сторону силы F_1).

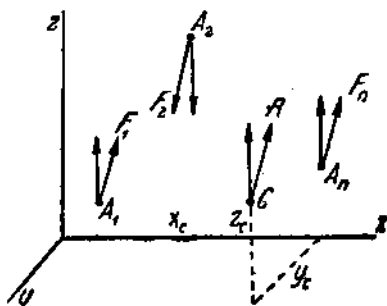
Предполагаем, что $\Sigma (\pm F_i) \neq 0$. Положим для определенности $\Sigma (\pm F_i) > 0$. Тогда данные силы приводятся к равнодействующей

$$R = \Sigma (\pm F_i),$$

направленной в сторону силы F_1 . За точку приложения равнодействующей R возьмем центр данных параллельных сил C .

Возьмем координатные оси x, y, z и обозначим координаты точек приложения данных сил: $A_1 (x_1, y_1, z_1), A_2 (x_2, y_2, z_2), \dots, A_n (x_n, y_n, z_n)$; координаты центра параллельных сил обозначим $C (x_c, y_c, z_c)$.

Повернем все силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ вокруг точек приложения $A_1, A_2, \dots, A_n$ (не нарушая их параллельности) так, чтобы все силы были параллельны оси z (и притом так, чтобы сила F_1 была направлена в сторону положительной оси z). Тогда равнодействующая R повернется вокруг точки C и тоже будет параллельна оси z (и притом будет направлена в сторону положительной оси z).



Черт. 116.

Составим теперь моменты сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ и равнодействующей R относительно оси x и напомним, что момент равнодействующей равен алгебраической сумме моментов составляющих; получим (черт. 116):

$$R y_c = F_1 y_1 - F_2 y_2 \pm \dots + F_n y_n = \Sigma (\pm F_i y_i),$$

откуда полагая $R = \Sigma (\pm F_i)$, находим

$$y_c = \frac{\Sigma (\pm F_i y_i)}{\Sigma (\pm F_i)}. \quad (1)$$

Важно заметить, что силы, входящие со знаком $+$ в сумму $\Sigma (\pm F_i)$, входят с тем же знаком в сумму $\Sigma (\pm F_i y_i)$; силы, входящие в сумму $\Sigma (\pm F_i)$ со знаком $-$, входят и в сумму $\Sigma (\pm F_i y_i)$ со знаком $-$.

Повернув все силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ вокруг их точек приложения так, чтобы все силы были параллельны оси y , и взяв моменты сначала отно-

сительно оси z , а потом относительно оси x , получим две другие формулы:

$$x_c = \frac{\Sigma(\pm F_i x_i)}{\Sigma(\pm F_i)}; \quad z_c = \frac{\Sigma(\pm F_i z_i)}{\Sigma(\pm F_i)}. \quad (2)$$

И в этих формулах каждая сила входит в суммы

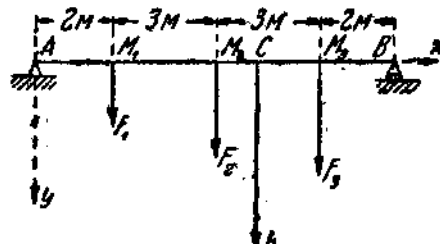
$$\Sigma(\pm F_i x_i) \quad \text{и} \quad \Sigma(\pm F_i z_i)$$

с тем же самым знаком, с каким она входит в сумму $\Sigma(\pm F_i)$.

Формулами (1) и (2) определяются координаты центра параллельных сил. Представим читателю убедиться, что эти формулы, выведенные в предположении $\Sigma(\pm F_i) > 0$, остаются справедливыми в случае

$$\Sigma(\pm F_i) < 0.$$

Задача 22. На балку AB в точках M_1, M_2, M_3 действуют вертикальные силы $F_1 = 1 \text{ т}$, $F_2 = 2 \text{ т}$, $F_3 = 3 \text{ т}$; $AM_1 = 2 \text{ м}$, $M_1 M_2 = 3 \text{ м}$, $M_2 M_3 = 3 \text{ м}$, $M_3 B = 2 \text{ м}$ (черт. 117): требуется сложить эти силы.



Черт. 117.

Находим равнодействующую R :

$$R = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ ж.}$$

За точку приложения равнодействующей возьмем центр данных сил. Так как точки приложения сил F_1, F_2, F_3 лежат на прямой AB , то и центр этих сил лежит на той же прямой. Направим ось x по прямой AB , взяв

начало координат в точке A , и вычислим координату x_c центра S данных сил.

Имеем

$$x_c = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8}{6} = 6 \text{ м.}$$

Этой координатой определяется точка приложения равнодействующей S .

ГЛАВА XI.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

§ 67. Центр тяжести твердого тела. Центр тяжести объема.

Когда твердое тело находится вблизи земной поверхности, то к каждой частице M_i этого твердого тела приложена вертикально направленная сила тяжести p_i , т. е. сила притяжения земным шаром (черт. 118). Силы тяжести p_i , приложенные к отдельным частицам твердого тела, можно считать параллельными. Равнодействующая параллельных сил p_i

$$P = \Sigma p_i$$

называется весом твердого тела, а центр S этих параллельных сил называется *центром тяжести* твердого тела.

Важно заметить, что центр тяжести твердого тела занимает в этом теле вполне определенное положение независимо от положения самого тела в пространстве. В самом деле, будем менять положение тела. Как бы мы его ни поворачивали, силы тяжести p_i отдельных его частиц останутся приложенными в тех же точках тела M_i . Эти силы p_i , сохраняя неизменное вертикальное направление в пространстве, будут изменять свое направление по отношению к телу; относительно тела они будут поворачиваться вокруг своих точек приложения M_i , сохраняя свою параллельность. Но мы знаем, что при таком повороте параллельных сил их центр не меняет своего положения. Отсюда и следует, что как бы мы ни поворачивали тело, его центр тяжести не будет изменять своего положения в теле.

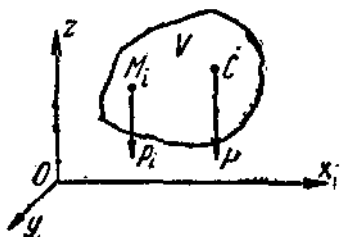
Для определения положения центра тяжести твердого тела можно воспользоваться формулами для координат центра параллельных сил, выведенными в § 86.

Обозначая координаты центра тяжести C (относительно каких-либо координатных осей x, y, z) через x_c, y_c, z_c , а координаты любой частицы M_i твердого тела через x_i, y_i, z_i , имеем

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i x_i}{P}$$

$$y_c = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i y_i}{P}$$

$$z_c = \frac{\sum p_i z_i}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i z_i}{P},$$



Черт. 118.

где суммирования распространены на все частицы твердого тела.

Применим теперь эти формулы к частному случаю однородного тела.

Обозначим бесконечно малый объем частицы M_i через Δv_i . Если вещество тела однородно, то отношение $p_i : \Delta v_i$ имеет одно и то же значение для всех частиц тела; положим

$$\frac{p_i}{\Delta v_i} = \omega,$$

откуда

$$p_i = \omega \Delta v_i$$

Вес однородного тела выражается формулой

$$P = \sum p_i = \sum \omega \Delta v_i = \omega \sum \Delta v_i = \omega V,$$

где V есть объем тела. Полагая здесь $V = 1$, получаем $P = \omega$: следовательно, ω — вес единицы объема данного однородного вещества.

Для координат центра тяжести однородного тела получаем формулы:

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P} = \frac{\sum \omega x_i \Delta v_i}{\omega V} = \frac{\omega \sum x_i \Delta v_i}{\omega V} = \frac{\sum x_i \Delta v_i}{V}$$

и точно так же

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta v_i}{V}, \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V}.$$

Как видно, эти координаты не зависят от постоянной σ , характеризующей вещество данного однородного тела, а зависят лишь от объема V , занимаемого этим телом. На этом основании центр тяжести однородного тела получает название центра тяжести объема V .

Итак, центром тяжести объема называется центр тяжести однородного тела, заполняющего данный объем.

§ 68. Центр тяжести площади. Статический момент плоской фигуры. Центр тяжести линии.

С понятием центра тяжести твердого тела связаны также понятия центра тяжести площади и центра тяжести линии.

Представим себе плоскую фигуру, ограниченную каким-либо замкнутым контуром (черт. 119); площадь этой плоской фигуры обозначим через S . В плоскости данной плоской фигуры возьмем взаимно перпендикулярные оси x и y (ось z , перпендикулярная к осям x и y , не изображена на чертеже).

Представим себе теперь весьма малую тонкую плоскую пластинку, имеющую очертание данной плоской фигуры; весьма малую толщину этой пластинки будем предполагать постоянной, а вещество пластинки — однородным.

Около точки M_i выделим элемент пластинки, площадь которого назовем ΔS_i , а вес p_i .

Отношение $p_i : \Delta S_i$ имеет одно и то же значение для всех элементов пластинки: положим

$$\frac{p_i}{\Delta S_i} = \sigma,$$

откуда

$$p_i = \sigma \Delta S_i.$$

Вес такой однородной пластинки равен

$$P = \Sigma p_i = \Sigma \sigma \Delta S_i = \sigma \Sigma \Delta S_i = \sigma S,$$

где S есть площадь плоской фигуры, ограниченной данным контуром. Полагая здесь $S = 1$, получаем $P = \sigma$; следовательно, σ есть вес единицы площади данной однородной пластинки.

Для координат центра тяжести C пластинки получаем формулы

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P} = \frac{\Sigma \sigma x_i \Delta S_i}{\sigma S} = \frac{\sigma \Sigma x_i \Delta S_i}{\sigma S} = \frac{\Sigma x_i \Delta S_i}{S}$$

и точно так же:

$$y_c = \frac{\Sigma y_i \Delta S_i}{S};$$

здесь x_i , y_i суть координаты точки M_i , и суммирование распространены на все элементы пластинки; что касается координаты z_i , то очевидно,

$$z_i = 0.$$

Как видно, координаты центра тяжести C не зависят от постоянной σ , характеризующей вещество пластинки. На этом основании центр тяжести однородной пластинки получает название центра тяжести площади S .

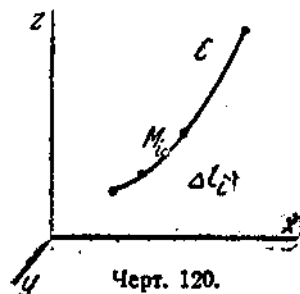
Итак, центром тяжести площади плоской фигуры называется центр тяжести однородной пластинки постоянной толщины, имеющей очертание данной плоской фигуры.

Заметим, что сумма произведений площади каждого элемента плоской фигуры на его расстояние до некоторой оси (лежащей в плоскости фигуры)¹ называется статическим моментом плоской фигуры относительно этой оси. Согласно этому, суммы $\sum x_i \Delta s_i$ и $\sum y_i \Delta s_i$ суть статические моменты нашей плоской фигуры относительно осей y и x . Обозначая эти статические моменты через M_y и M_x , т. е. полагая;

$$\sum x_i \Delta s_i = M_y, \quad \sum y_i \Delta s_i = M_x,$$

имеем для координат центра тяжести площади плоской фигуры формулы;

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S}.$$



По этим формулам вычисляются координаты центра тяжести, если известны статические моменты M_x и M_y . Наоборот, если известно положение центра тяжести, то статические моменты M_x и M_y могут быть найдены по формулам

$$M_x = Sy_c, \quad M_y = Sx_c.$$

Перейдем к понятию центра тяжести линии.

Представим себе отрезок кривой линии длины L (черт. 120). Представим себе далее весьма тонкую проволоку круглого сечения, ось которой расположена по данному отрезку кривой линии;² весьма малую толщину проволоки считаем постоянной, а вещество проволоки — однородным.

Около точки M_i выделим элемент проволоки длины Δl_i ; вес этого элемента обозначим через p_i . Так как проволока однородна, то отношение $p_i : \Delta l_i$ имеет одно и то же значение для всех элементов

$$\frac{p_i}{\Delta l_i} = p,$$

откуда

$$p_i = p \Delta l_i.$$

Вес проволоки равен:

$$P = \sum p_i = \sum p \Delta l_i = p \sum \Delta l_i = pL,$$

где L есть длина проволоки. Полагая здесь $L = 1$, получаем $F = p$; следовательно, p есть вес единицы длины проволоки.

¹ Причем эти расстояния считаются положительными в одну сторону от оси и отрицательными в другую.

² Осью проволоки называется общее место центров поперечных сечений проволоки.

Координаты центра тяжести C проволоки определяются формулами:

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P} = \frac{\sum p_i \Delta l_i}{pL} = \frac{p \sum x_i \Delta l_i}{pL} = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L}$$

$$y_c = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{L},$$

$$z_c = \frac{\sum z_i \Delta l_i}{L};$$

здесь x_i, y_i, z_i суть координаты точки M_i , и суммирования распространены на все элементы проволоки.

Координаты центра тяжести C не зависят от постоянной p , характеризующей вещество проволоки. На этом основании центр тяжести однородной проволоки можно назвать центром тяжести линии L .

Итак, *центром тяжести линии* называется центр тяжести однородной весьма тонкой проволоки постоянной толщины, ось которой совпадает с данной линией.

§ 69. Некоторые элементарные приемы определения центров тяжести и статических моментов.

Суммы $\sum p_i x_i, \sum x_i \Delta v_i, \sum x_i \Delta s_i, \sum x_i \Delta l_i$ и т. д., входящие в числители формул для координат центров тяжести твердого тела, объема, площади и линии, состоят из бесчисленного множества бесконечно малых слагаемых. Правила для вычисления таких сумм излагаются в курсе интегрального исчисления. Здесь мы отметим некоторые простые соображения, которые позволяют иногда вычислять координаты центров тяжести (а также статические моменты плоских фигур) элементарным путем.

Покажем, что если данный объем имеет плоскость симметрии, то центр тяжести этого объема лежит в плоскости симметрии.

Положим, что плоскость P есть плоскость симметрии данного объема V (черт. 121). Возьмем оси x, y, z так, чтобы оси x и y лежали в плоскости P , а ось z была перпендикулярна к плоскости P . Вычислим координату z_c центра тяжести C объема V .

Имеем

$$z_c = \frac{\sum z_i \Delta v_i}{V},$$

где z_i есть координата точки M_i , лежащей внутри объема V , а Δv_i есть элементарный объем, выделенный около точки M_i .

Так как плоскость P есть плоскость симметрии объема V , то, опустив перпендикуляр $M_i K_i$ из точки M_i на плоскость P и отложив на продолжении этого перпендикуляра $K_i M'_i = M_i K_i$, получим точку M'_i , которая также лежит внутри объема V . Если координаты точки M_i суть x_i, y_i, z_i , то координаты точки M'_i будут $x_i, y_i, -z_i$.

Выделив около точки M'_i элементарный объем, равный элементарному объему Δv_i , выделенному около точки M_i , замечаем, что в сумме $\sum z_i \Delta v_i$ члены, соответствующие точкам M_i и M'_i , численно равны и имеют противоположные знаки.

Таким же точно образом все члены суммы $\sum z, \Delta v$, могут быть разбиты на пары членов, численно равных и имеющих противоположные знаки. Отсюда следует, что

$$\sum z, \Delta v = 0,$$

а значит, и $z_c = 0$. Следовательно, центр тяжести C лежит в плоскости симметрии P .

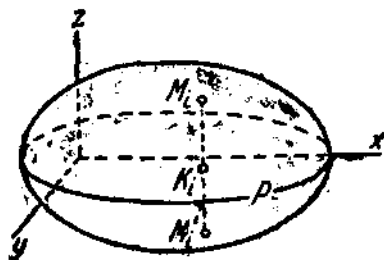
Покажем теперь, что если данный объем имеет ось симметрии, то центр тяжести объема лежит на оси симметрии.

Положим, ось AB есть ось симметрии данного объема V (черт. 122). Возьмем оси x, y, z так, чтобы ось z совпадала с осью симметрии AB , и вычислим координаты x , и y , центра тяжести C объема V . Имеем

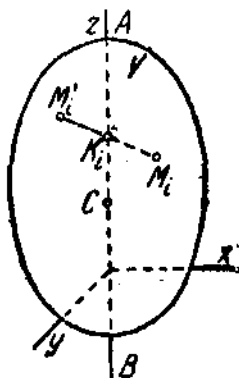
$$x_c = \frac{\sum x, \Delta v}{V}, \quad y_c = \frac{\sum y, \Delta v}{V},$$

где x , и y , суть координаты точки M , лежащей внутри объема V , а Δv , есть элементарный объем, выделенный около точки M .

Так как ось z есть ось симметрии объема V , то, опустив перпендикуляр M, K , из точки M , на ось z и отложив на продолжении этого



Черт. 121.



Черт. 122.

перпендикуляра $K, M' = M, K$, получим точку M' , которая также лежит внутри объема V . Если координаты точки M , суть x, y, z , то координаты точки M' будут $-x, -y, z$.

Выделив около точки M' элементарный объем, равный элементарному объему Δv , выделенному около точки M , замечаем что в суммах $\sum x, \Delta v$, и $\sum y, \Delta v$, члены, соответствующие точкам M , и M' , численно равны и имеют противоположные знаки.

Таким же образом все члены сумм $\sum x, \Delta v$, и $\sum y, \Delta v$, могут быть разбиты парно на члены, численно равные и имеющие противоположные знаки. Отсюда следует, что

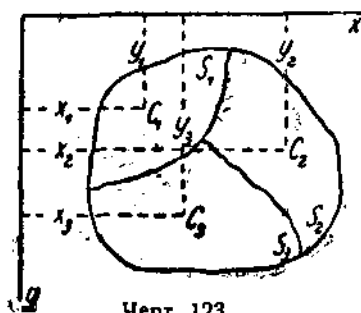
$$\sum x, \Delta v = 0, \quad \sum y, \Delta v = 0,$$

а значит, и $x_c = 0, y_c = 0$. Следовательно, центр тяжести C лежит на оси симметрии z .

Рассуждая совершенно так же, можно убедиться, что если плоская

фигура или линия имеют ось симметрии, то центр тяжести площади плоской фигуры или центр тяжести линии лежит на оси симметрии.

Иногда удается определить положение центра тяжести площади плоской фигуры, а также ее статические моменты, разбивая данную фигуру на такие части, центры тяжести которых известны.



Черт. 123.

Положим, требуется определить центр тяжести C площади плоской фигуры S , причем эта фигура может быть разбита на такие 3 части S_1, S_2, S_3 , центры тяжести которых C_1, C_2, C_3 известны (черт. 123).

Возьмем координатные оси x и y . Обозначая статические моменты плоской фигуры S относительно этих осей через M_x и M_y , имеем

$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S},$$

где x_c и y_c — координаты искомого центра тяжести C .

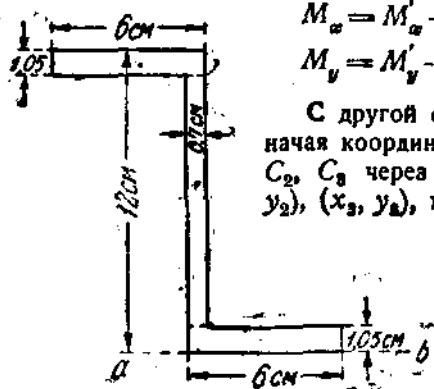
Обозначим статические моменты площадей S_1, S_2, S_3 относительно осей x и y через $M'_x, M''_x, M'''_x, M'_y, M''_y, M'''_y$.

Тогда

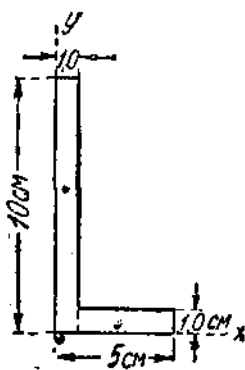
$$M_x = M'_x + M''_x + M'''_x$$

$$M_y = M'_y + M''_y + M'''_y.$$

С другой стороны, обозначая координаты точек C_1, C_2, C_3 через $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, имеем



Черт. 124.



Черт. 125.

$$M'_x = S_1 y_1, \quad M''_x = S_2 y_2, \quad M'''_x = S_3 y_3$$

$$M'_y = S_1 x_1, \quad M''_y = S_2 x_2, \quad M'''_y = S_3 x_3.$$

Следовательно,

$$M_x = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3$$

$$M_y = S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3.$$

Таким образом определяются статические моменты данной фигуры. Координаты же x_c и y_c находим по формулам

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S}, \quad y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S}.$$

Поясним сказанное примерами.

Задача 23. Определить статический момент Z -образного сечения относительно оси ab (черт. 124); размеры указаны на чертеже.

Разбивая данную фигуру на три прямоугольника, получаем

$$M_{ab} = 6,3 \times 11,475 + 6,93 \times 6 + 6,3 \times 0,525 = 117,18 \text{ см}^3.$$

Задача 25. Определить центр тяжести уголка (черт. 125); размеры указаны на чертеже.

Возьмем оси x и y , как показано на чертеже. Разбивая уголок на два прямоугольника (см. чертеж), имеем

$$x_c = \frac{10 \times 0,5 + 4 \times 3}{10 + 4} = \frac{17}{14} = 1,21 \text{ см.}$$

$$y_c = \frac{10 \times 5 + 4 \times 0,5}{10 + 4} = \frac{52}{14} = 3,71 \text{ см.}$$

Таким же приемом можно пользоваться и при определении центров тяжести объемов и линий.

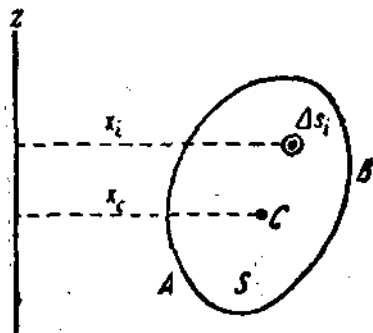
$\Delta x_i = S_{\Delta x_i} \cdot x_i$

§ 70. Первая теорема Гульдена.

В некоторых случаях оказывается возможным весьма просто определять центры тяжести площадей и линий на основании двух теорем, обычно называемых теоремами Гульдена.¹ В настоящем параграфе докажем первую из этих теорем.

Представим себе плоскую фигуру, ограниченную замкнутым контуром AB (черт. 126); площадь этой фигуры обозначим через S . Возьмем в плоскости фигуры какую-либо ось z и будем вращать контур AB вокруг этой оси. При вращении вокруг оси z кривая AB опишет некоторую замкнутую поверхность, которая называется поверхностью вращения. Тело, ограниченное этой замкнутой поверхностью, называется телом вращения. Вычислим объем V этого тела.

Для этой цели разобьем всю площадь S на бесчисленное множество бесконечно малых (или элементарных) площадок Δs . При вращении нашей фигуры вокруг оси z каждая элементарная площадка Δs_i опишет элементарное круговое кольцо, радиус которого равен расстоянию площадки от оси z ; назовем это расстояние через x_i . Искомый объем V равен сумме объемов всех элементарных колец, описанных всеми элементарными площадками Δs_i .



Черт. 126.

¹ Сочинение Гульдена „De centro gravitatis“ появилось в 1635 г. Однако эти теоремы были высказаны еще в IV веке Паппусом александрийским, поэтому правильнее их называть (как это и делается иногда) теоремами Паппуса.

Объем элементарного кольца, описанного площадкой Δs_i , равен $2\pi x_i \Delta s_i$. Отсюда мы заключаем, что

$$V = \sum 2\pi x_i \Delta s_i = 2\pi \sum x_i \Delta s_i$$

где суммирование распространено на все площадки, на которые разбита данная площадь S .

Отметим центр тяжести C площади S и обозначим его расстояние от оси z через x_c . На основании изложенного в § 68 мы знаем, что

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta s_i}{S},$$

откуда

$$\sum x_i \Delta s_i = x_c S.$$

Итак, окончательно получаем

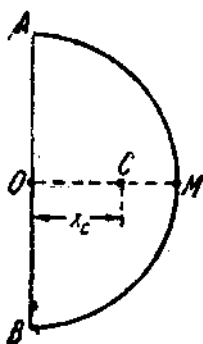
$$V = 2\pi x_c S,$$

т. е. объем тела вращения, описанного площадью S , равен произведению этой площади на длину окружности, описанной центром тяжести площади.

В этом и состоит первая теорема Гильдена.

Эта теорема позволяет определять объем V , если известно положение центра тяжести площади S . И, наоборот, на основании этой же теоремы удается в некоторых случаях весьма просто находить центр тяжести площади S , если известен объем того тела вращения, которое описывается этой площадью.

Рассмотрим следующий пример.



Черт. 127.

Дана площадь S , ограниченная дугой полуокружности AMB и диаметром AB (черт. 127). Требуется определить центр тяжести этой площади.

Так как радиус OM , перпендикулярный к диаметру AB , является осью симметрии данной площади, то искомый центр тяжести C лежит на этом радиусе. Найдем его расстояние x_c от диаметра AB .

Представим себе, что площадь S вращается вокруг диаметра AB ; при этом вращении дуга AMB описывает поверхность шара. Обозначая объем этого шара через V , а радиус дуги AMB через R , имеем

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

С другой стороны, площадь S нашей фигуры равна половине площади круга радиуса R , т. е.

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

На основании теоремы Гильдена имеем

$$x_c = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4}{3\pi} R = 0,4244 R.$$

Этим вполне определяется положение центра тяжести C .

§ 71. Вторая теорема Гульдена.

Аналогичным изложенному в предыдущем параграфе способом удастся иногда находить и центр тяжести кривой линии.

Дана плоская кривая AB , длину которой обозначим через L (черт. 128). Возьмем ось z , лежащую в плоскости этой кривой. Вращая кривую AB вокруг оси z , получим некоторую поверхность вращения. Определим площадь S этой поверхности.

Разобьем кривую AB на бесчисленное множество бесконечно малых элементов Δl_i . При вращении кривой AB вокруг оси z все эти элементы нашей кривой опишут элементарные кольцеобразные поверхности, сумма площадей которых и равна искомой площади S . Рассматривая элемент

Δl_i — в виду его малости — как отрезок прямолинейный, мы можем трактовать ту кольцеобразную поверхность, которая этим элементом описана, как поверхность усеченного конуса бесконечно малой высоты. Отсюда следует, что площадь этой кольцеобразной поверхности равна $2\pi x_i \Delta l_i$, где x_i — расстояние элемента Δl_i от оси z . Следовательно,

$$S = \sum 2\pi x_i \Delta l_i = 2\pi \sum x_i \Delta l_i,$$

Черт. 128.

причем суммирование распространено на все элементы Δl_i .

С другой стороны, обозначая через x_c расстояние центра тяжести C кривой AB от оси z , имеем

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L},$$

откуда

$$\sum x_i \Delta l_i = x_c L,$$

Окончательно получаем

$$S = 2\pi x_c L,$$

т. е. площадь поверхности вращения, описанной кривой AB , равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной центром тяжести кривой. Это — вторая теорема Гульдена.

Применение этой теоремы поясним следующим примером.

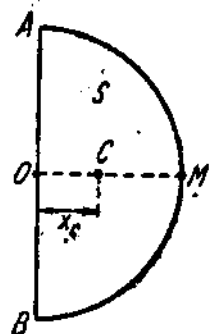
Требуется определить положение центра тяжести дуги полуокружности AMB (черт. 129).

Так как радиус OM , перпендикулярный к диаметру AB , есть ось симметрии дуги AMB , то искомый центр тяжести C лежит на этом радиусе. Вращая дугу AMB вокруг диаметра AB , получаем шаровую поверхность. Обозначая поверхность этого шара через S , а радиус дуги AMB через R , имеем

$$S = 4\pi R^2.$$

С другой стороны, длина дуги AMB равна

$$L = \pi R.$$



Черт. 129.

По доказанному имеем

$$x_c = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

$$x_c = \frac{S}{2\pi L} = \frac{2}{\pi} R = 0,6366 R,$$

где x_c есть расстояние искомого центра тяжести от центра дуги.

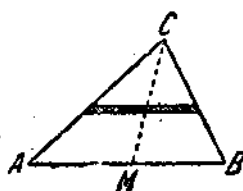
§ 72. Центры тяжести некоторых простейших геометрических фигур.

В этом параграфе мы остановимся на определении центров тяжести некоторых простейших геометрических фигур, часто встречающихся в приложениях. На этих примерах мы будем иметь случай познакомиться еще с некоторыми простыми приемами, применяемыми при отыскании центров тяжести.

1. Центр тяжести площади треугольника.

Требуется найти центр тяжести площади треугольника ABC (черт. 130).

Прямыми, параллельными основанию AB , разобьем площадь треугольника на бесчисленное множество полосок бесконечно малой ширины. Центры тяжести площадей всех этих полосок лежат на медиане CM , проведенной из вершины C к середине стороны AB . Отсюда заключаем, что и центр тяжести площади всего треугольника лежит на этой медиане.



Черт. 130.

Совершенно так же мы можем убедиться, что центр тяжести площади нашего треугольника должен лежать и на двух других медианах, проведенных из вершины A и B к серединам противоположных им сторон. Следовательно, искомый центр тяжести лежит в точке пересечения всех трех медиан треугольника.

Отсюда следует, между прочим, что расстояние центра тяжести от основания треугольника равно одной трети высоты.

2. Центр тяжести площади трапеции.

Дана трапеция $ACDB$ (черт. 131); обозначим $AB = a$, $CD = b$; высоту трапеции назовем h . Требуется найти центр тяжести площади трапеции.

Разбив площадь трапеции на полоски бесконечно малой ширины прямыми, параллельными основаниям трапеции, легко убеждаемся, что искомый центр тяжести лежит на прямой MN , соединяющей середины оснований AB и CD . Вычислим его расстояние y_c от основания AB .

Для этой цели разобьем нашу трапецию прямой BC на два треугольника ABC и BCD . Обозначая их площади через S_1 и S_2 , а расстояния их центров тяжести от прямой AB через y_1 и y_2 , будет иметь

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}.$$

Подставляя здесь

$$S_1 = \frac{ah}{2}, \quad S_2 = \frac{bh}{2}, \quad y_1 = \frac{h}{3}, \quad y_2 = \frac{2h}{3},$$

получаем

$$y_0 = \frac{\frac{ah^2}{6} + \frac{2bh^2}{6}}{\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}.$$

Итак, искомый центр тяжести есть точка, лежащая на прямой MN на только что вычисленном нами расстоянии y_0 от прямой AB . Эту точку можно построить следующим образом.

Отложим $AK = b, DL = a$ и проведем прямую KL (черт. 131). Эта прямая пересекается с прямой MN в точке E . Покажем, что точка E и есть искомая.

В самом деле, опустив из точки E перпендикуляр EF на прямую AB , имеем



Черт. 131.

$$\frac{EF}{h} = \frac{EM}{MN},$$

откуда

$$EF = h \frac{EM}{MN}.$$

С другой стороны, из подобия треугольников KEM и ENL вы-
водим

$$\frac{EM}{EN} = \frac{KM}{NL} = \frac{\frac{a}{2} + b}{a + \frac{b}{2}} = \frac{a+2b}{2a+b},$$

или, так как $EN = MN - EM$,

$$\frac{EM}{MN - EM} = \frac{a+2b}{2a+b},$$

откуда

$$EM = MN \cdot \frac{a+2b}{3(a+b)}.$$

Подставляя это значение отрезка EM в формулу для отрезка EF , получаем

$$EF = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} = y_0.$$

Итак, точка E и является центром тяжести площади нашей трапеции.

3. Центр тяжести дуги окружности.

Дана дуга окружности AB радиуса R (черт. 132). Требуется найти центр тяжести этой дуги.

Так как радиус OM , проходящий через середину дуги, является осью симметрии дуги AB , то искомым центр тяжести C лежит на этом радиусе. Вычислим его расстояние OC от центра дуги O .

Разобьем дугу AB на бесчисленное множество бесконечно малых элементов Δl , один из которых изображен на чертеже. Направим ось x по среднему радиусу OM и примем центр O за начало координат. Обозначая абсциссу середины элемента Δl через x_1 и полагая $OC = x_c$, имеем

$$x_c = \frac{\sum x_1 \Delta l_1}{L},$$

где L — длина дуги AB , а суммирование распространено на все элементы Δl_1 .

Чтобы вычислить сумму, стоящую в числителе этой формулы, поступим следующим образом. Обозначим середину элемента Δl_1 через D_1 , а основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось x , — через E_1 ; в таком случае $OE_1 = x_1$. Далее, проводя через конечные точки элемента Δl_1 две прямые, соответственно параллельную и перпендикулярную хорде

AB , получим при элементе Δl_1 бесконечно малый треугольник (сторону Δl_1 в этом треугольнике — ввиду ее малости — можно считать прямолинейной), который подобен треугольнику OD_1E_1 (по перпендикулярности сторон). Обозначая ту сторону бесконечно малого треугольника, которая параллельна хорде AB , через Δy_1 , выводим из подобия этих треугольников

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta l_1} = \frac{OE_1}{OD_1} = \frac{x_1}{R}.$$

Отсюда получаем

$$x_1 \Delta l_1 = R \Delta y_1$$

и, следовательно,

$$x_c = \frac{\sum R \Delta y_1}{L} = \frac{R}{L} \sum \Delta y_1.$$

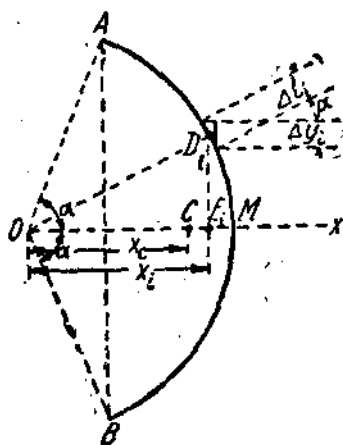
Но сумма всех отрезков Δy_1 равна хорде AB . Обозначая длину этой хорды через S , получаем

$$x_c = R \frac{S}{L}.$$

Этим определяется положение центра тяжести C .

Полученный результат можно представить несколько иначе, вводя центральный угол $\angle AOB = 2\alpha$. Имеем

$$L = 2R\alpha, \quad S = 2R \sin \alpha.$$



Черт. 132.

Следовательно

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Применим эту формулу к нахождению центра тяжести дуги полуокружности. В этом случае имеем $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

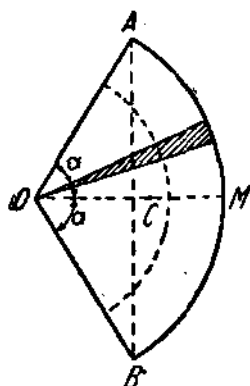
$$x_c = \frac{2}{\pi} R,$$

что совпадает с результатом, полученным в § 71.

4. Центр тяжести площади кругового сектора.

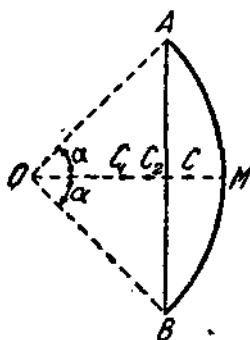
Дан круговой сектор, ограниченный дугой окружности AB и радиусами OA и OB (черт. 133); радиус дуги AB обозначим через R . Требуется найти центр тяжести площади этого сектора.

Проведем бесчисленное множество бесконечно близких радиусов, разобьем данный сектор на бесчисленное множество элементарных секторов,



Черт. 133.

один из которых изображен на чертеже. Каждый из этих элементарных секторов можно рассматривать как элементарный треугольник (дугу, которой ограничен такой сектор, можно рассматривать — в виду ее малости — как прямолинейный отрезок). Отсюда следует, что центр тяжести площади каждого элементарного сектора находится на расстоянии $\frac{2}{3} R$



Черт. 134.

от центра O . Мы заключаем, что искомым центром

тяжести площади всего данного сектора совпадает с центром тяжести дуги окружности радиуса $\frac{2}{3} R$.

Итак, центр тяжести площади сектора находится на среднем радиусе OM на расстоянии

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{S}{L} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

от центра O . Здесь S — длина хорды AB , L — длина дуги AB , 2α — центральный угол $\angle AOB$.

В случае полуокруга мы имеем $\alpha = \frac{\pi}{2}$; подставляя в полученную формулу, находим

$$OC = \frac{4}{3\pi} R,$$

что совпадает с результатом, полученным в § 70.

5. Центр тяжести площади кругового сегмента.

Дан круговой сегмент, ограниченный дугой окружности AMB и хордой AB (черт. 134); радиус дуги AMB обозначим через R . Требуется найти центр тяжести площади сегмента.

Проведя радиусы OA и OB , получим круговой сектор OAB . Хордой AB этот сектор делится на две части: на данный нам сегмент и на треугольник OAB . Центры тяжести сегмента (C), треугольника (C_1) и сектора (C_2) лежат на радиусе OM , перпендикулярном к хорде AB . Обозначая расстояния этих центров тяжести от центра O через x , x_1 и x_2 , имеем

$$x_2 = \frac{Sx + S_1x_1}{S_2},$$

где S — площадь сегмента, S_1 — площадь треугольника OAB , S_2 — площадь сектора. Отсюда

$$x = \frac{S_2x_2 - S_1x_1}{S} = \frac{S_2x_2 - S_1x_1}{S_2 - S_1}.$$

Подставляя сюда

$$S_1 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$x_1 = \frac{2}{3} R \cos \alpha$$

$$S_2 = R^2 \alpha$$

$$x_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где $2\alpha = \angle AOB$, получим

$$x = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Этой формулой определяется положение центра тяжести площади сегмента.

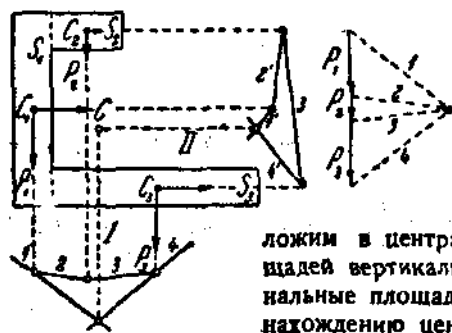
§ 73. Применение веревочного многоугольника к определению центров тяжести площадей.

Центры тяжести площадей могут быть определяемы также графически посредством построения веревочного многоугольника. Поясним этот прием на следующем примере.

Положим, требуется определить центр тяжести площади S , ограниченной изображенной на черт. 135 фигурой. Площадь S может быть разбита на три части (прямоугольники) S_1 , S_2 и S_3 , центры тяжести которых известны. При-

ложим в центрах тяжести C_1 , C_2 и C_3 этих площадей вертикальные силы P_1 , P_2 и P_3 , пропорциональные площадям S_1 , S_2 и S_3 . Вопрос сводится к нахождению центра этих трех параллельных сил.

Мы знаем, что центр параллельных сил лежит на линии действия равнодействующих данных сил.



Черт. 135.

Построим линию действия равнодействующей сил P_1, P_2 и P_3 посредством веревочного многоугольника. Для этого построим многоугольник сил P_1, P_2 и P_3 с лучами 1, 2, 3, 4 и веревочный многоугольник 1, 2, 3, 4. Вертикальная прямая I, проходящая через точку пересечения его крайних сторон, и есть линия действия равнодействующей.

Воспользуемся теперь тем свойством центра параллельных сил, что он не меняет своего положения при повороте всех сил вокруг их точек приложения на один и тот же угол. Повернем силы P_1, P_2 и P_3 вокруг точек C_1, C_2 и C_3 на 90° . Построим опять линию действия равнодействующей этих сил. Очевидно, что точка пересечения этой прямой с ранее построенной прямой I есть искомый центр параллельных сил. Легко заметить, что нет надобности строить новый многоугольник сил P_1, P_2 и P_3 (соответствующий их повернутому положению). Можно сразу построить веревочный многоугольник $1', 2', 3', 4'$, проводя его стороны не параллельно, а перпендикулярно к соответствующим лучам 1, 2, 3, 4 ранее построенного многоугольника сил. Горизонтальная прямая II, проходящая через точку пересечения крайних сторон $1'$ и $4'$ нового веревочного многоугольника, есть линия действия равнодействующей сил P_1, P_2 и P_3 в их повернутом положении.

Искомый центр тяжести C данной площади находится в пересечении прямых I и II.

$$x_2 = \frac{\sum x + S_1 x_1}{\sum S}$$

$$S_2 x_2 = \sum S x + S_1 x_1$$

$$x = \frac{\sum S x_2 - S_1 x_1}{S}$$

$$R^2 \sin \alpha \cos \alpha +$$

$$S_1 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad x = \frac{2}{3} R \cos \alpha$$

$$x_2 = \frac{2}{3} R \sin \alpha \quad x_2 =$$

$$S = \frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$R^2 =$$

$$\frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \frac{2}{3} R \cos \alpha$$

$$\frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$x = \frac{2}{3} R \cos \alpha \quad R^2 = R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$R^2 (2 - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= \frac{2}{3} R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ГЛАВА XII.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

§ 74. Кинематика. Динамика.

В отделе I этих мы изучали те условия, при которых тело (мы имели в виду твердое тело), находясь под действием приложенных к нему сил, остается в равновесии. Если силы, приложенные к телу, не удовлетворяют условиям равновесия, то тело приходит в состояние движения. Как будет двигаться данное тело под действием приложенных к нему сил, какова связь между силами, приложенными к телу, и вызываемым ими движением, — вот основной вопрос, который приходится ставить в механике при изучении движения тел.

Но можно подойти к изучению движения и с другой, более узкой точки зрения. Движением тела называется происходящее с течением времени непрерывное изменение его положения в пространстве. Геометрическими свойствами пространства обуславливаются и геометрические свойства движения, в этом пространстве происходящего. Оставляя временно в стороне вопрос о силах, вызывающих движение тел, можно сосредоточить свое внимание на изучении этих геометрических свойств движения. С этой именно точки зрения изучается движение тел в *кинематике*.

Кинематику можно назвать геометрическим учением о движении. Как уже сказано, в кинематике вопрос о силах, обуславливающих движение тела, остается совершенно в стороне. Более широкая постановка задачи о движении тел, в которой на первый план выдвигается связь между движением тела и приложенными к нему силами, принадлежит *динамике*. Понятно, что изучением движения с кинематической точки зрения может быть подготовлено и облегчено более широкое динамическое исследование вопроса. Отсюда следует, что изучение кинематики должно предшествовать изучению динамики.

В отделе II наших лекций будут изложены основы кинематики. Подобно тому, как в статике мы занимались изучением только условий равновесия тел абсолютно твердых, так точно и здесь мы ограничим свою задачу изучением кинематики твердого тела. Изложение кинематики изменяемых тел (напр. жидкостей) относится к соответствующим специальным курсам.

Как уже сказано, кинематику можно трактовать как введение в динамику. Однако, следует иметь в виду, что результаты, устанавливаемые в кинематике, имеют и большое самостоятельное значение. Во многих

механизмах вопрос о действующих силах имеет сравнительно второстепенное значение; правильное же действие механизма обеспечивается исчерпывающим кинематическим анализом движений отдельных его частей. Приложение результатов кинематики к изучению движения механизмов налагается в курсе „кинематики механизмов“; в нашем изложении мы коснемся относящихся сюда вопросов лишь в общих чертах.

Мы начнем изучение кинематики с рассмотрения движения простейшего геометрического элемента — геометрической точки.

§ 75. Траектория. Уравнение движения.

Представим себе геометрическую точку, которая движется в пространстве. Движущаяся точка вычерчивает в пространстве некоторую линию; эта линия называется *траекторией* точки. В частном случае траектория точки может быть прямой линией; тогда движение точки называется *прямолинейным*. Если траектория точки — кривая линия, то движение точки называется *криволинейным*.

Положим, точка M (черт. 136) совершает некоторое движение по траектории AB . Движение точки M будет нами вполне определено, если мы будем в состоянии указать положение точки на ее траектории в каждый данный момент времени.

Момент времени определяется следующим образом. Выбираем некоторый произвольный момент времени за начало отсчета времени. Промежуток времени (выраженный в частях, минутах, секундах и т. д.), протекающий от выбранного начала до данного момента, обозначаем буквой t и называем данный момент *моментом t* . Момент $t=0$, от которого отсчитываем время, будем называть *начальным моментом*.

Положение точки M на ее траектории может быть определено следующим образом.

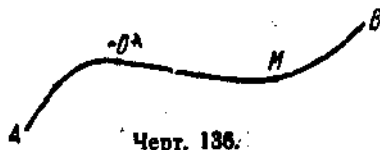
Возьмем на траектории некоторую произвольную (неподвижную) точку O . Измерим длину дуги OM и условимся приписывать этой длине знак $+$, если точка M находится на траектории по одну сторону от точки O , и знак $-$, если точка M находится по другую сторону от точки O . (В которую сторону считать длину дуги OM положительной, зависит от нашего произвола). Длину дуги OM , выраженную в сантиметрах, метрах, километрах и т. д. и взятую с надлежащим знаком, обозначим буквой s и назовем *пройденным путем*. Точку O назовем началом отсчета пройденных путей. Заданием пройденного пути s вполне определяется положение точки на ее траектории.

При движении точки пройденный путь s изменяется с течением времени. Следовательно, s есть некоторая функция от t :

$$s = f(t).$$

Это уравнение называется *уравнением движения точки*.

Заданием траектории и уравнения движения вполне определяется движение точки. Действительно, зная уравнение движения, мы можем для каждого данного момента t найти соответствующее s , а следовательно и указать положение точки на ее траектории.



§ 76. Уравнения движения в прямоугольных координатах.

Можно определить движение точки еще другим способом.

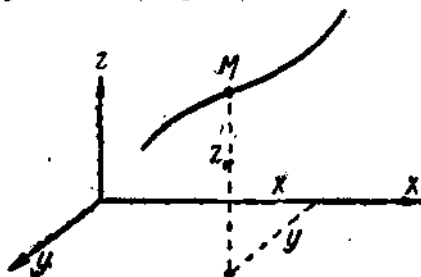
Положим, что точка M (черт. 137) совершает некоторое движение в пространстве. Возьмем три взаимно-перпендикулярные координатные оси x , y , z . Положение точки M в пространстве вполне определяется ее тремя координатами x , y , z .

При движении точки M ее координаты x , y , z изменяются с течением времени. Следовательно координаты x , y , z суть некоторые функции времени t :

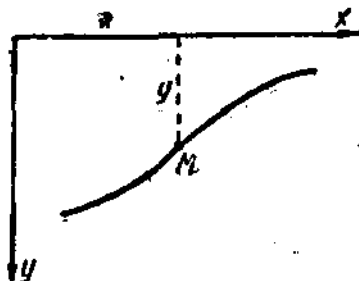
$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Заданием этих уравнений вполне определяется движение точки. Действительно, зная эти уравнения, мы можем для каждого данного момента t найти соответствующие координаты x , y , z , а следовательно и указать положение точки в пространстве.

Уравнения (1) называются *уравнениями движения точки в прямоугольных координатах*.



Черт. 137.



Черт. 138.

В приложениях обыкновенно приходится иметь дело с тем случаем движения точки, когда точка движется, оставаясь в одной плоскости; в этом случае движение точки называется *плоским*. Рассмотрим этот случай.

Положим, что точка M (черт. 138) движется, оставаясь в одной плоскости, которую примем за плоскость чертежа. Возьмем на этой плоскости взаимно-перпендикулярные координатные оси x и y . Положение точки M на плоскости вполне определяется ее двумя координатами x и y .

При движении точки M ее координаты x и y суть некоторые функции времени t :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таковы уравнения движения в прямоугольных координатах в частном случае плоского движения точки.

Положим, что нам заданы уравнения движения (2). Найдем уравнение траектории точки M . Исключим время t из уравнений движения (2).

Для этого решим, например, первое уравнение относительно t ; получим

$$t = \psi(x)$$

и подставим полученное для t выражение во второе уравнение:

$$y = f_2[\psi(x)]. \quad (3)$$

Мы получили уравнение между координатами x и y , которому удовлетворяют координаты точки M во всякий момент времени t . Другими словами, уравнению (3) удовлетворяют координаты всех точек траектории, т. е. уравнение (3) и есть уравнение траектории.

Итак, чтобы найти уравнение траектории точки M , нужно исключить время t из уравнений движения (2).

Исключая время t из уравнений (2), мы получим вообще уравнение вида

$$F(x, y) = 0$$

между координатами x и y . Это и есть уравнение траектории.

Остановимся еще на частном случае *прямолинейного* движения.

Возьмем прямолинейную траекторию точки M (черт. 139) за ось x . Возьмем на этой оси начало координат O .

Положение точки M на ее прямолинейной траектории вполне определяется одной координатой $OM = x$, и движение точки M вполне определяется одним уравнением движения

$$x = f(t).$$

Заметим, что в данном случае координата x является в то же время и пройденным путем (если взять точку O за начало отсчета пройденных путей).

Задача 1. Представим себе линейку AB (черт. 140), концы которой скользят по двум взаимно-перпендикулярным прямым $x'x$ и $y'y$. Линейка движется

так, что угол $BAO = \varphi$ изменяется пропорционально времени:

$$\varphi = \omega t,$$

где ω — постоянное число. Составить уравнения движения точки M , лежащей на линейке AB , определить ее траекторию.

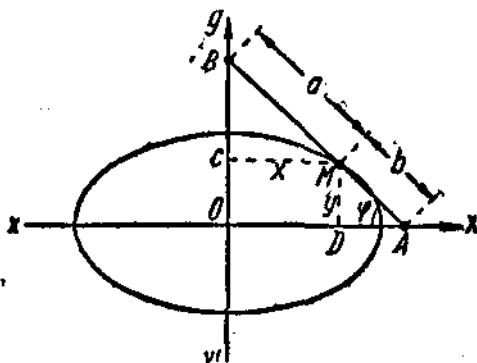
Обозначим $BM = a$, $AM = b$. Возьмем прямые $x'x$ и $y'y$ за координатные оси. Из треугольников BMC и AMD имеем:

$$x = a \cos \varphi,$$

$$y = b \sin \varphi.$$



Черт. 139.



Черт. 140.

или, подставляя $\varphi = \omega t$:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

Таковы уравнения движения точки M . Чтобы определить траекторию, исключаем время t из этих уравнений.

Имеем:

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \omega t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t,$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это есть уравнение эллипса. Следовательно, траектория точки M есть эллипс.

Итак, всякая точка линейки AB описывает эллипс. Рассматриваемый механизм может служить для вычерчивания эллипсов; он называется *эллипсографом*.

Задача 2. В цилиндре Z паровой машины (черт. 141) ходит поршень M , который соединен поршневым штоком BM с крейцкопфом B . Крейцкопф в свою очередь соединен шатуном AB с концом A кривошипа OA , вращающегося вместе с валом O . Этот механизм называется *кривошипным механизмом*. Обозначим длины кривошипа OA и шатуна AB соответственно через r и l и



Черт. 141.

предположим, что вал O вращается равномерно, т. е. что угол φ , образованный кривошипом с осью цилиндра, изменяется пропорционально времени:

$$\varphi = \omega t,$$

где ω — постоянное число. Требуется составить уравнение движения поршня.

Очевидно, что движение поршня M ничем не отличается от движения крейцкопфа B . Вопрос сводится к составлению уравнения движения крейцкопфа. Примем ось цилиндра за ось x , назовем начало отсчета x -ов в точке O и обозначим $OB = x$. Требуется выразить x как функцию от времени t .

Опуская из точки A перпендикуляр AK на ось x , имеем

$$x = OK + KB.$$

С другой стороны, обозначая угол, образованный шатуном AB с осью x , через β , имеем

$$OK = r \cos \varphi, \quad KB = l \cos \beta$$

и, следовательно,

$$x = r \cos \varphi + l \cos \beta.$$

Найдем зависимость между углами β и φ . Из треугольника OAB по теореме синусов имеем

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{r}{l}, \quad \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

Обозначим для сокращения

$$\frac{r}{l} = \lambda.$$

Тогда

$$\sin \beta = \lambda \sin \varphi, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставляя найденное значение $\cos \beta$ в формулу для x , получаем

$$x = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Остается подставить здесь $\varphi = \omega t$; сделав эту подстановку, получаем искомое уравнение движения

$$x = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}. \quad (1)$$

Число λ (отношение длины кривошипа к длине шатуна) всегда бывает правильной дробью; обычно это число содержится в пределах между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$. Имея в виду, что λ^2 — сравнительно малая величина, мы можем упростить полученное уравнение движения поршня.

В самом деле, мы имеем

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Применяя к этому выражению формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2} \lambda^4 \sin^4 \varphi + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Число $\frac{1}{8} \lambda^4$ очень мало (при $\lambda = \frac{1}{4}$ имеем $\frac{1}{8} \lambda^4 = \frac{1}{2048}$);

еще меньше следующие члены этого ряда, содержащие λ^6 , λ^8 и т. д. Отбрасывая все эти члены, получим приближенно

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\varphi.$$

Отсюда

$$x = r \cos \varphi + l \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\varphi \right),$$

или, так как $\lambda l = r$,

$$x = r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right) + l - \frac{\lambda r}{4}.$$

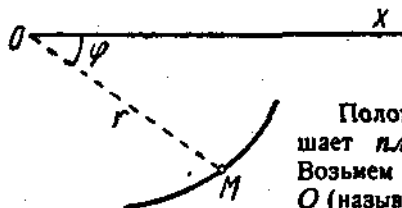
Подставляя здесь $\varphi = \omega t$, получаем приближенное уравнение движения крещкопфа (или поршня):

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda r}{4}. \quad (2)$$

Это уравнение представляется более удобным для применения, чем точное уравнение (1). Точность этого приближенного уравнения в большинстве случаев достаточна для практических целей.

§ 77. Уравнения движения в полярных координатах.

В предыдущем параграфе мы видели, каким образом движение точки может быть определено при помощи ее декартовых координат x, y, z . Как известно, декартовы координаты далеко не единственная координатная система, служащая для определения положения точки. Для этой же цели могут быть применены полярные координаты на плоскости, цилиндрические и сферические координаты в пространстве и т. д. Всякая координатная система, при помощи которой можно определять положение точки на плоскости или в пространстве, может быть использована также и для определения движения точки. Мы остановимся здесь на применении полярных координат к определению плоского движения точки.



Черт. 142.

Положим, что точка M (черт. 142) совершает *плоское* движение в плоскости чертежа. Возьмем в этой плоскости неподвижную точку O (называемую полюсом) и неподвижную прямую Ox . *Полярными* координатами точки M называются длина r отрезка OM (называемого радиусом-вектором точки M) и угол φ , образованный радиусом-вектором с осью x ; этот угол мы будем считать положительным, если он отложен от оси x по направлению вращения часовой стрелки, в противном случае мы будем считать его отрицательным.

Положение точки M на плоскости вполне определяется ее полярными координатами r и φ . При движении точки координаты r и φ изменяются с течением времени, т. е. являются функциями от времени t :

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t). \quad (1)$$

Этим уравнениями вполне определяется движение точки на плоскости; мы назовем их *уравнениями движения точки в полярных координатах*.

Если заданы уравнения движения (1), то легко найти и уравнение траектории в полярных координатах — нужно только исключить время t из уравнений (1). В результате исключения времени из этих уравнений получим уравнение вида

$$F(r, \varphi) = 0,$$

которому должны удовлетворять полярные координаты точки во всякий момент времени. Это и есть уравнение траектории в полярных координатах.

Задача 3. Движение точки на плоскости задано уравнениями движения в полярных координатах:

$$r = at, \quad \varphi = bt,$$

где a и b — постоянные величины. Найти уравнение траектории.

Исключим время из заданных уравнений движения. Из второго уравнения имеем

$$t = \frac{\varphi}{b}.$$

Подставляя это значение t в первое уравнение, получаем

$$r = \frac{a}{b} \varphi$$

или, обозначая для краткости

$$\frac{a}{b} = c, \quad r = c\varphi.$$

Это и есть уравнение траектории. Кривая, определяемая этим уравнением, называется *архимедовой спиралью*.

ГЛАВА XIII.

СКОРОСТЬ.

§ 78. Скорость равномерного движения.

Движение точки называется *равномерным*, если в каждые два равных промежутка времени точка проходит равные пути.

Представим себе равномерно движущуюся точку M (черт. 143).

Положим, что в каждую единицу времени (например, секунду) точка M проходит путь a .

Составим уравнение равномерного движения точки M .

Положим, что в начальный момент $t = 0$ точка занимает положение M_0 , которое назовем *начальным положением* точки; буквой M обозначено положение точки, занимаемое ею в момент t . Выберем начало отсчета пройденных путей O и условимся, в какую сторону от точки O будем считать пройденные пути положительными. Тогда длина дуги OM (взятая с надлежащим знаком) есть пройденный путь s ; длину дуги OM_0 (также взятую с надлежащим знаком) обозначим через s_0 и назовем *начальным пройденным путем*.

Из чертежа имеем

$$OM = OM_0 + M_0M.$$

Но $OM = s$, $OM_0 = s_0$; длина же дуги M_0M есть путь, пройденный точкой в течение t единиц времени; так как в каждую единицу времени точка проходит путь a , то $M_0M = at$. Следовательно, получаем

$$s = s_0 + at.$$



Черт. 143.

Это и есть уравнение движения точки M .

Величина a , характеризующая большую или меньшую быстроту движения точки, называется скоростью равномерного движения.

Итак, *скоростью равномерного движения* называется путь, проходимый равномерно движущейся точкой в единицу времени.

Обозначая скорость буквой v , т. е. полагая $a = v$, получаем *уравнение равномерного движения* в следующем окончательном виде:

$$s = s_0 + vt.$$

Решая это уравнение относительно буквы v , находим

$$v = \frac{s - s_0}{t},$$

откуда следует, что *скорость равномерного движения равна отношению пути, пройденного за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени.*

Если равномерно движущаяся точка проходит единицу длины в единицу времени, то ее скорость равна

$$v = \frac{1}{1} = 1.$$

Отсюда следует, что за *единицу скорости* мы должны принять скорость такого равномерного движения, при котором точка проходит единицу длины в единицу времени.

Например, если за единицу длины принят сантиметр, а за единицу времени — секунда, то за единицу скорости мы должны принять скорость такого равномерного движения, при котором точка проходит один сантиметр в одну секунду; эта единица скорости обозначается так: $\frac{см}{сек}$.

Если же за единицу длины принят метр, а за единицу времени — минута, то за единицу скорости мы должны принять $\frac{м}{мин}$. И вообще каждому выбору единицы длины и единицы времени соответствует своя единица скорости.

Положим, скорость некоторого равномерного движения есть $v = 120 \frac{м}{мин}$. Требуется выразить эту скорость в $\frac{см}{сек}$.

В данном случае точка проходит в 1 минуту 120 м или 12 000 см, а, значит, в 1 секунду она проходит $\frac{12\,000}{60} = 200$ см, т. е.

$$v = 200 \frac{см}{сек}.$$

Отсюда вытекает простое правило для перехода от одних единиц скорости к другим: напишите данную скорость с надлежащим наименованием единицы скорости; в этом наименовании выразите данные единицы длины и времени через новые единицы длины и времени; произведя перемножение, получите требуемый результат.

Например:

$$v = 120 \frac{\text{м}}{\text{мин}} = 120 \frac{100 \text{ см}}{60 \text{ сек}} = \frac{12.000 \text{ см}}{60 \text{ сек}} = 200 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

§ 79. Скорость какого угодно движения.

Представим себе точку M , совершающую какое-либо движение в пространстве (черт. 149). На траектории AB точки M выберем начало отсчета пройденных путей O и положим, что уравнение движения точки M есть

$$s = f(t).$$

Возьмем два момента времени t и $t + \Delta t$, положим, что в момент t наша движущаяся точка занимает положение M , а в момент $t + \Delta t$ — положение M_1 ; длину дуги MM_1 пройденной движущейся точкой за время Δt , обозначим через Δs .

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* нашей точки за время Δt .



Черт. 144.

Будем теперь уменьшать промежуток времени Δt , приближая его к нулю. Тогда и длина дуги Δs будет приближаться к нулю, средняя же скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет приближаться к некоторому пределу. Этот предел называется *скоростью точки M в момент t* .

Обозначая скорость точки M в момент t буквой v , имеем

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]. \quad (1)$$

Но пройденный путь s есть функция времени t ; так как Δt есть приращение независимой переменной t , а Δs — соответствующее приращение функции s , то предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при приближении Δt к нулю есть производная от s по t .

Следовательно

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (2)$$

т. е. *скорость равна производной пройденного пути по времени*.

Заметим, что, определяя скорость v по формуле (1) или (2), мы получим для скорости v величину положительную или отрицательную. На черт. 144 мы предполагаем, что точка M движется в сторону возрастающих s ; в этом случае $\Delta s > 0$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > 0 \text{ и } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] > 0.$$

Если бы точка M двигалась в сторону убывающих s , то было бы $\Delta s < 0$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < 0 \text{ и } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] < 0.$$

Следовательно, знак скорости определяет направление движения точки: скорость положительна, если точка движется в сторону возрастающих s , и отрицательна, если точка движется в сторону убывающих s .

В дальнейших исследованиях представляется удобным рассматривать скорость как величину *векториальную*. Соответственно этому мы условимся в дальнейшем считать скорость величиной всегда положительной, определяя ее как численное значение производной $\frac{ds}{dt}$, т. е.

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right|;$$

вместе с тем, мы условимся приписывать скорости направление касательной к траектории в данной точке, проведенной в сторону движения (черт. 145). [Напомним, что касательной MT к некоторой кривой в данной точке M называется предельное положение, к которому приближается секущая MS , когда M_1 приближается к точке M (черт. 146)].



Черт. 145

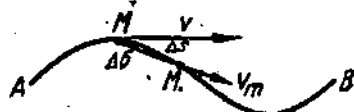


Черт. 146.

При таком способе изображения скорости направление движения определяется не знаком скорости, а стрелкой, поставленной у конца отрезка, графически изображающего скорость.

Рассматривая скорость как величину векториальную, сделаем замечание, которым придется воспользоваться в дальнейших исследованиях.

Представим себе точку M , движущуюся по траектории AB (черт. 147). Положим, что в моменты t и $t + \Delta t$ движущаяся точка занимает положения M и M_1 . Обозначая длину дуги MM_1 через Δs ,¹ имеем:



Черт. 147.

$$v = \lim \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0};$$

направление скорости v есть направление касательной к траектории AB в точке M , проведенной в сторону движения.

Проведем теперь прямолинейную хорду MM_1 , длину которой обозначим через $\Delta \sigma$, и представим себе фиктивное движение точки M , при котором она проходит за время Δt хорду MM_1 , двигаясь равномерно. Обозначая скорость этого фиктивного равномерного движения по хорде через v_m , имеем:

$$v_m = \frac{\Delta \sigma}{\Delta t};$$

направление же фиктивной скорости v_m есть направление самой хорды MM_1 .

¹ Символом Δs мы обозначаем теперь численное значение длины дуги MM_1 .

Будем приближать промежуток времени Δt к нулю и покажем, что фиктивная скорость v_m приближается при этом к некоторому пределу,¹ который есть не что иное, как скорость v .

В самом деле, определим предельную величину и предельное направление фиктивной скорости v_m . Вычисляя ее предельную величину, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_m]_{\Delta t=0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\Delta s}{\Delta s} \right]_{\Delta t=0} = \\ \text{Но} \quad &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta s=0} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta s} \right]_{\Delta s=0} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} \\ &\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta s} \right]_{\Delta s=0} = 1, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = v. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_m]_{\Delta t=0} = v,$$

т. е. предельная величина фиктивной скорости v_m равна величине скорости v .

С другой стороны, предельное направление фиктивной скорости v_m есть предельное направление хорды MM_1 , т. е. направление касательной к траектории в точке M . Значит, предельное направление фиктивной скорости v_m совпадает с направлением скорости v .

Итак, *скорость v геометрически равна пределу, к которому приближается скорость v_m фиктивного равномерного движения по хорде, когда промежуток времени Δt приближается к нулю*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\vec{v}_m]_{\Delta t=0}.$$

§ 80. Проекция скорости на прямоугольные координатные оси.

Положим, что движение точки M (черт. 148) задано уравнениями движения в прямоугольных координатах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Вычислим проекции скорости v на координатные оси x, y, z . Построим проекцию скорости v на ось z и обозначим эту проекцию через v_z (черт. 148).

Для вычисления проекции v_z воспользуемся замечанием, сделанным в конце предыдущего параграфа. Поступим так: построим сначала скорость v_m фиктивного равномерного движения по хорде, вычислим ее проекцию на ось z и затем перейдем к пределу $\lim \Delta t = 0$; в пределе мы и получим искомую величину v_z .

Итак, возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$ и отметим положения движущейся точки в эти моменты M и M_1 (черт. 149). Проведем хорду $MM_1 = \Delta s$ и построим скорость

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

¹ Мы называем вектор A *пределом* вектора B и пишем

$$A = \lim[B],$$

если величина вектора A равна предельной величине вектора B , а направление вектора A совпадает с предельным направлением вектора B .

фиктивного равномерного движения по хорде MM_1 . Опустив из конца A скорости v , перпендикуляр AB на прямую, проходящую через точку M и параллельную оси z , получим проекцию MB скорости v на ось z ; обозначим эту проекцию через v_{ms} .

Опустим также из точки M_1 перпендикуляр M_1C на упомянутую прямую, проходящую через точку M и параллельную оси z . Обозначим координаты точки M через x, y, z , а координаты точки M_1 через $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$. Очевидно, что $MC = \Delta z$.

Из подобия треугольников $MA B$ и MM_1C выводим:

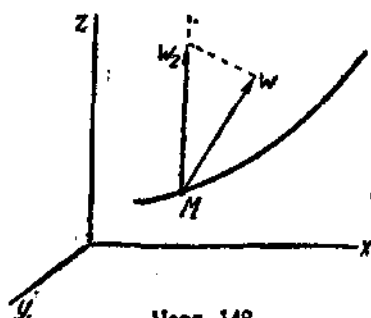
$$\frac{v_{ms}}{v} = \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

или

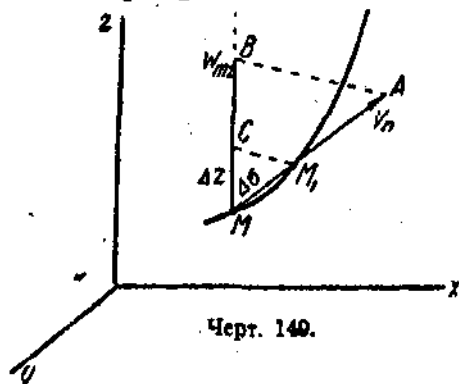
$$v_{ms} = v \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\Delta s \Delta z}{\Delta t \Delta s} = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Отсюда, переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, получаем

$$v_z = \lim [v_{ms}]_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim \left[\frac{\Delta z}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0}.$$



Черт. 148.



Черт. 149.

Но координата z есть функция от t ; Δz есть приращение этой функции, соответствующее приращению Δt независимой переменной t ; следовательно, предел $\lim \left[\frac{\Delta z}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0}$ есть производная от координаты z по времени t :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = z'.$$

Рассуждая совершенно так же, мы могли бы получить аналогичные результаты для проекций v_x и v_y скорости v на оси x и y :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y'.$$

Итак, проекции скорости на прямоугольные координатные оси равны производным от соответствующих координат по времени.

Выведенными формулами можно воспользоваться для *вычисления скорости* в том случае, когда движение точки задано *уравнениями движения в прямоугольных координатах*.

Положим, что движение точки M задано уравнениями движения

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

отнесенными к осям x, y, z (черт. 150).

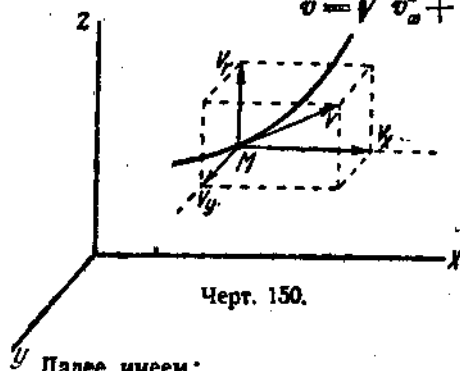
Для вычисления скорости v построим прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям x, y, z и в котором скорость v является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда равны проекциям v_x, v_y, v_z .

Вычисляем эти проекции по формулам

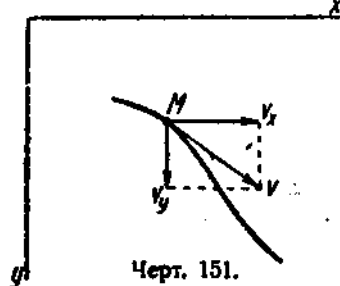
$$v_x = x', \quad v_y = y', \quad v_z = z'.$$

Затем находим величину скорости v по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$



Черт. 150.



Черт. 151.

Далее имеем:

$$v_x = v \cos(v, x), \quad v_y = v \cos(v, y), \quad v_z = v \cos(v, z),$$

откуда

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(v, y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(v, z) = \frac{v_z}{v}.$$

Этими формулами определяется направление скорости v .

Отметим частный случай *плоского* движения точки.

Положим, что точка M (черт. 151) совершает *плоское* движение в плоскости xu ; ее движение задано уравнениями движения

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t).$$

Желая определить скорость v , вычисляем проекции скорости v_x и v_y по формулам

$$v_x = x', \quad v_y = y'.$$

Затем находим величину скорости v как диагональ прямоугольника построенного на проекциях v_x и v_y :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Направление скорости v определяется формулами:

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v},$$

$$\cos(v, y) = \frac{v_y}{v}.$$

Остановимся еще на частном случае *прямолинейного* движения точки. Положим, что точка M (черт. 152) совершает прямолинейное движение по оси x ; ее движение задано уравнением

$$x = f(t).$$

Вычисляем проекцию скорости v_x по формуле

$$v_x = x'.$$

Так как скорость v направлена по оси x (в сторону положительной оси x , если $v_x > 0$, и в сторону отрицательной оси x , если $v_x < 0$), то величина скорости v равна численному значению проекции v_x , т. е.

$$v = |v_x|.$$

Направление же скорости v определяется, как только что указано, знаком проекции v .

Задача 3а. Определить скорость точки M эллипсографа (см. задачу 1).

Движение точки M определяется уравнениями:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

Отсюда получаем:

$$v_x = x' = -a\omega \sin \omega t,$$

$$v_y = y' = b\omega \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}.$$

Задача 4. Вычислить скорость поршня паровой машины (см. задачу 2).

Движение поршня тождественно с движением кривокопфа. Возьмем приближенное уравнение движения кривокопфа

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

Отсюда получаем

$$v_x = x' = -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right).$$

Величина скорости v поршня равна численному значению этого выражения; знак проекции v_x указывает на направление движения поршня.

УСКОРЕНИЕ

§ 81. Ускорение прямолинейного равнопеременного движения.

Движение точки называется *равнопеременным*, если в каждые два равных промежутка времени ее скорость изменяется на одну и ту же величину. Если при этом скорость увеличивается, движение называется *равноускоренным*; если же скорость уменьшается, оно называется *равнозамедленным*.

Представим себе точку M , движущуюся прямолинейно и равнопеременно (черт. 153). Положим, что в каждую единицу времени (например, секунду) скорость точки изменяется на одну и ту же (положительную или отрицательную) величину c .

Положим, что в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начальном положении M_0 и имела в этот момент скорость v_0 , которую назовем *начальной скоростью*; в момент t точка занимает положение M и имеет скорость v . Так как за t единиц времени скорость точки изменилась на величину ct , то

$$v = v_0 + ct.$$



Черт. 153.

Величина c , характеризующая большую или меньшую быстроту изменения скорости, называется *ускорением* прямолинейного равнопеременного движения.

Итак, *ускорением прямолинейного равнопеременного движения* называется изменение скорости за единицу времени.

Обозначая ускорение буквой w , т. е. полагая $c = w$, получим закон изменения скорости при равномерном движении в следующем окончательном виде:

$$v = v_0 + wt. \quad (1)$$

Решим это уравнение относительно буквы w :

$$w = \frac{v - v_0}{t}, \quad (2)$$

т. е. ускорение прямолинейного равнопеременного движения равно отношению изменения скорости за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени.

Составим еще уравнение рассматриваемого прямолинейного равнопеременного движения, т. е. выразим пройденный путь s как функцию времени t . Для этого выберем начало отсчета пройденных путей O и назовем, в какую сторону будем считать пройденные пути положительными. Тогда $OM = s$ есть пройденный путь для момента t ; отрезок OM_0 , т. е. пройденный путь, соответствующий начальному моменту $t = 0$, обозначим через s_0 и назовем начальным пройденным путем.

Вспоминая, что скорость есть производная пути по времени, и имея в виду уравнение (1), получаем

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + wt.$$

Интегрируя по t , находим

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2} + C,$$

где C есть постоянная произвольная. Эту постоянную легко определим, если примем во внимание, что только-что написанное уравнение должно быть справедливо для всякого момента t , а значит, и для начального момента $t=0$; применяя это уравнение к начальному моменту, получим

$$s_0 = C,$$

т. е. постоянная C есть не что иное, как начальный пройденный путь. Окончательно получаем для s выражение

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2};$$

это и есть уравнение нашего равнопеременного движения. Как видно, в рассматриваемом случае пройденный путь s есть целая функция второй степени от времени t .

Представим себе прямолинейное равнопеременное движение точки, при котором в каждую единицу времени скорость изменяется на единицу скорости. По формуле (2) ускорение этого движения равно

$$w = \frac{1}{1} = 1.$$

Отсюда следует, что за единицу ускорения мы должны принять ускорение такого прямолинейного равнопеременного движения, при котором скорость изменяется на единицу скорости в единицу времени.

Например, если за единицу длины принят сантиметр, а за единицу времени — секунда, то за единицу ускорения мы должны принять ускорение такого прямолинейного равнопеременного движения, при котором в каждую секунду скорость изменяется на $1 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$; эта единица ускорения обозначается так:

$$\frac{\frac{\text{см}}{\text{сек}}}{\text{сек}} = \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

Если же за единицу длины принят метр, а за единицу времени — минута, то за единицу ускорения мы должны принять $\frac{\text{м}}{\text{мин}^2}$. И вообще каждому выбору единицы длины и единицы времени соответствует своя единица ускорения.

Положим ускорение некоторого равнопеременного движения есть $w = 3 \frac{\text{м}}{\text{мин}^2}$. Требуется выразить это ускорение в $\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$.

В данном случае скорость точки изменяется в каждую минуту на $3 \frac{\text{м}}{\text{мин}}$ или на $3 \cdot \frac{100 \text{ см}}{60 \text{ сек}} = 5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$; значит, в каждую секунду ско-

рость изменяется на $\frac{5 \text{ см}}{60 \text{ сек}} = \frac{1 \text{ см}}{12 \text{ сек}}$. Следовательно

$$w = \frac{1 \text{ см}}{12 \text{ сек}^2}.$$

Откуда вытекает следующее правило для перехода от одних единиц ускорения к другим: напишите данное ускорение с надлежащим наименьшим единицы ускорения; в этом наименовании выразите данные единицы длины и времени через новые единицы длины и времени; произведя перемножение, получите требуемый результат. Например:

$$w = 3 \frac{\text{м}}{\text{мин}^2} = 3 \frac{100 \text{ см}}{(60 \text{ сек})^2} = \frac{3 \cdot 100 \text{ см}}{3600 \text{ сек}^2} = \frac{1 \text{ см}}{12 \text{ сек}^2}.$$

Задача 5. На прямолинейном участке железнодорожного пути происходит торможение поезда; в момент начала торможения поезд имел скорость $20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$; будучи заторможен, он останавливается в течение 20 сек . Предполагая движение заторможенного поезда равнозамедленным, найти тормозной путь, т. е. путь, пройденный поездом за время торможения.

Воспользуемся формулами равнопеременного движения:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2},$$

$$v = v_0 + wt.$$

Возьмем момент начала торможения за начало отсчета времени а соответствующее этому моменту положение поезда — за начало отсчета пройденных путей. В таком случае

$$s_0 = 0, v_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

По условию поезд останавливается в момент $t = 20 \text{ сек}$. Полагая $t = 20 \text{ сек}$, $v = 0$ во втором из написанных выше уравнений, получаем:

$$0 = 20 + 20w,$$

откуда

$$w = -1 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Полагая теперь $t = 20 \text{ сек}$, $w = -1 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ в первом из написанных уравнений, находим

$$s = 200 \text{ м}.$$

Итак, за время торможения поезд проходит путь в 200 м .

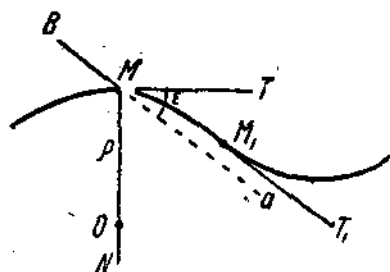
§ 82. Некоторые сведения из геометрии.

Прежде чем перейти к установлению понятия ускорения в общем случае какого угодно движения точки, сделаем небольшое отступление в область геометрии.

Представим себе кривую, расположенную в пространстве (вообще

говоря, неплоскую) (черт. 154). Возьмем на кривой точку M и проведем касательную MT . Затем возьмем на кривой другую точку M_1 и проведем в ней касательную M_1T_1 . Через касательную MT проведем плоскость, параллельную касательной M_1T_1 . Для этой цели проведем через точку M прямую Ma , параллельную касательной M_1T_1 ; плоскость, проходящая через прямые MT и Ma , и есть требуемая. Будем теперь приближать точку M_1 к точке M . Когда точка M_1 приближается до совпадения с точкой M , упомянутая плоскость приближается к некоторому предельному положению, которое называется *плоскостью кривизны* в точке M или *соприкасающейся плоскостью*.

Все прямые, проходящие через точку M и перпендикулярные к касательной MT , называются *нормальными* к кривой в точке M . Понятно, что все нормали, проходящие через точку M , лежат в одной плоскости, именно в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к касательной MT ; эта плоскость называется *нормальной плоскостью* к кривой в точке M .



Черт. 154.

Та нормаль, которая лежит в плоскости кривизны, называется *главной нормалью*; другими словами, главная нормаль есть пересечение плоскости кривизны и нормальной плоскости. Нормаль, перпендикулярная к главной нормали, называется *бинормалью*. Очевидно, что касательная MN и бинормаль MB (черт. 154) взаимно перпендикулярны.

Когда кривая плоская, то плоскость кривизны кривой совпадает с плоско-

стью, в которой лежит кривая. В этом случае под термином „нормаль“ принято подразумевать ту нормаль, которая лежит в плоскости кривой, т. е. главную нормаль.

Угол, заключенный между касательными MT и M_1T_1 , или, что все равно, между касательной MT и прямой Ma , называется *углом смежности*, соответствующим дуге MM_1 ; обозначим этот угол буквой α (черт. 154). Длину дуги MM_1 обозначим через Δs . Отношение $\frac{\alpha}{\Delta s}$

называется *средней кривизной* дуги MM_1 . Если будем приближать точку M_1 до совпадения с точкой M или, другими словами, будем приближать длину дуги Δs к нулю, то средняя кривизна $\frac{\alpha}{\Delta s}$ будет приближаться к некоторому пределу, который называется *кривизной* данной кривой в точке M . Обозначая кривизну буквой K , имеем

$$K = \lim \left[\frac{\alpha}{\Delta s} \right]_{\Delta s \rightarrow 0}$$

Величина $\frac{1}{K}$ называется *радиусом кривизны* кривой в точке M ; мы будем обозначать радиус кривизны буквой ρ . Следовательно,

$$\rho = \frac{1}{K} = \lim \left[\frac{\Delta s}{\alpha} \right]_{\Delta s \rightarrow 0}$$

Отложим от точки M по главной нормали MN в сторону вогнутости кривой отрезок $MO = \rho$. Точка O называется *центром кривизны* кривой в точке M .

В случае плоской кривой можно еще иначе определить понятие центра кривизны. Представим себе плоскую кривую (черт. 155). Возьмем на ней точки M и M_1 и проведем касательные MT и M_1T_1 и нормали MN и M_1N_1 ; отметим точку пересечения нормалей A . Когда точка M_1 приближается до совпадения с точкой M , точка A приближается к некоторому предельному положению. Покажем, что это предельное положение точки A есть не что иное, как центр кривизны кривой в точке M .

Для этого достаточно показать, что предел, к которому приближается отрезок MA , когда точка M_1 приближается к точке M , равен радиусу кривизны ρ .

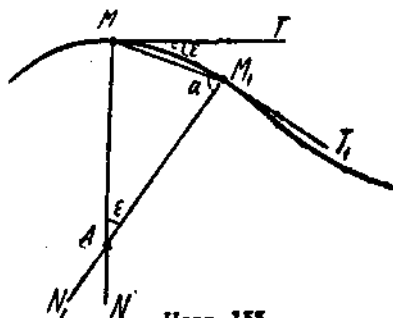
Соединим точки M и M_1 прямолинейной хордой; длину этой хорды обозначим через Δs , длину же дуги MM_1 обозначим Δs .

В треугольнике MM_1A угол при вершине A , равный углу между касательными MT и M_1T_1 , есть не что иное, как угол смежности ε ; угол при вершине M_1 обозначим через α . В таком случае из треугольника MM_1A выводим

$$\frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{MM_1}{\sin \varepsilon}$$

или

$$MA = \frac{\Delta s \sin \alpha}{\sin \varepsilon}.$$



Черт. 155.

Теперь будем искать предел отрезка MA при приближении Δs к нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \lim [MA]_{\Delta s \rightarrow 0} &= \lim \left[\frac{\Delta s \sin \alpha}{\sin \varepsilon} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} = \lim \left[\frac{\Delta s \Delta s}{\Delta s \varepsilon \sin \varepsilon} \sin \alpha \right]_{\Delta s \rightarrow 0} = \\ &= \lim \left[\frac{\Delta s}{\Delta s} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} \cdot \lim \left[\frac{\Delta s}{\varepsilon} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} \cdot \lim \left[\frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} \cdot \lim [\sin \alpha]_{\Delta s \rightarrow 0}, \end{aligned}$$

но

$$\lim \left[\frac{\Delta s}{\Delta s} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} = 1, \lim \left[\frac{\Delta s}{\varepsilon} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} = \rho, \lim \left[\frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \right]_{\Delta s \rightarrow 0} =$$

предел же угла α есть угол между касательной MT и нормалью MN , т. е. $\lim [\alpha]_{\Delta s \rightarrow 0} = 90^\circ$ и, следовательно,

$$\lim [\sin \alpha]_{\Delta s \rightarrow 0} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim [MA]_{\Delta s \rightarrow 0} = 1 \cdot \rho \cdot 1 \cdot 1 = \rho,$$

т. е. предельное значение отрезка MA равно радиусу кривизны ρ . А это и значит, что предельное положение точки A есть центр кривизны кривой в точке M .

Итак, для случая плоской кривой можно определить центр кривизны как точку пересечения двух бесконечно-близких нормалей.

Представим себе дугу окружности радиуса R (черт. 155а). Возьмем на дуге две точки M и M_1 и проведем в них нормали к дуге. Эти нормали совпадают с радиусами дуги и пересекаются в центре дуги O . Если мы будем приближать точку M_1 к точке M , точка пересечения нормалей будет оставаться неизменной. Значит, и предельное ее положение, т. е. центр кривизны дуги, будет совпадать с центром дуги O .

Отсюда следует, что радиус кривизны дуги окружности равен геометрическому радиусу дуги:

$$\rho = R.$$

Черт. 155а.

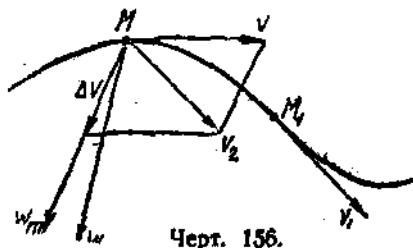
Всякие две нормали к прямой линии параллельны, т. е. точка их пересечения находится в бесконечности. Следовательно, центр кривизны прямой линии находится в бесконечности, и радиус кривизны прямой линии бесконечно велик:

$$\rho = \infty.$$

§ 83. Ускорение какого угодно движения.

Вернемся теперь к установлению понятия ускорения в случае какого угодно движения точки.

Представим себе точку M , совершающую какое-либо движение в пространстве. В момент t она занимает положение M и имеет скорость v , в момент $t + \Delta t$ она занимает положение M_1 и имеет скорость v_1 (черт. 156). Отложим от точки M отрезок, геометрически равный скорости v_1 , и построим при точке M параллелограмм, в котором скорость v_1 является диагональю, а скорость v одною из сторон. Вторую сторону этого параллелограмма обозначим через Δv и назовем **геометрическим изменением скорости** за время Δt .



Средним ускорением w_m за время Δt называется вектор, равный отношению $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ и направленный по изменению скорости Δv . Предел же, к которому приближается среднее ускорение w_m , когда Δt приближается к нулю, называется **ускорением** в данный момент t . Обозначая ускорение буквой w , имеем

$$w = \lim [w_m]_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0}.$$

Следует заметить, что только-что написанный предел не равен производной от скорости v по времени t (ибо Δv есть не алгебраическое,

а *геометрическое* приращение скорости за время Δt .¹ В §§ 84 и 85 будут указаны два способа для вычисления ускорения w .

Плоскость параллелограмма, изображенного на черт. 156, проходит через скорость v и параллельна скорости v_1 ; следовательно предельное положение этой плоскости при $\lim \Delta t = 0$ есть не что иное, как плоскость кривизны траектории в точке M . Так как среднее ускорение w_m лежит в плоскости упомянутого параллелограмма, а ускорение w есть предел среднего ускорения при $\lim \Delta t = 0$, то заключаем, что ускорение w лежит в плоскости кривизны траектории.

§ 84. Проекции ускорения на прямоугольные координатные оси.

Положим, что движение точки M (черт. 157) задано уравнениями движения в прямоугольных координатах:

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t),$$

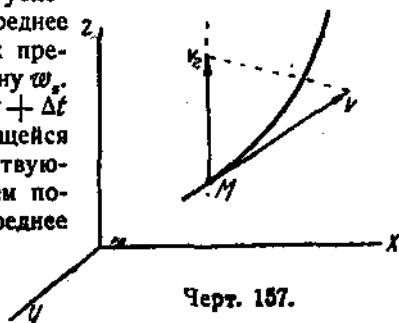
$$z = f_3(t).$$

Вычислим проекции ускорения w на координатные оси x, y, z .

Возьмем проекцию ускорения w на ось z ; обозначим эту проекцию через w_z (черт. 157). Для вычисления проекции w_z воспользуемся тем, что ускорение w есть предел среднего ускорения w_m ; спроектируем на ось z среднее ускорение w_m за время Δt ; переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, получим искомую величину w_z .

Итак, возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$ и отметим положения M и M_1 движущейся точки в эти моменты, а также соответствующие скорости v и v_1 (черт. 158). Затем построим изменение скорости Δv и среднее ускорение w_m за время Δt , причем

$$w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$



Черт. 157.

Спроектируем среднее ускорение w_m и изменение скорости Δv на ось z и обозначим эти проекции через w_{mz} и $(\Delta v)_z$ (черт. 158). Из подобия треугольников выводим:

$$\frac{w_{mz}}{w_m} = \frac{(\Delta v)_z}{\Delta v}.$$

откуда

$$w_{mz} = w_m \frac{(\Delta v)_z}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \frac{(\Delta v)_z}{\Delta v} = \frac{(\Delta v)_z}{\Delta t}.$$

С другой стороны, так как вектор v_1 есть геометрическая сумма

¹ Предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right]$ можно назвать *геометрической производной* от скорости по времени.

векторов v и Δv и так как проекция геометрической суммы равна сумме проекций составляющих, имеем:

$$v_{1z} = v_z + (\Delta v)_z,$$

откуда

$$(\Delta v)_z = v_{1z} - v_z,$$

где v_z и v_{1z} суть проекции скоростей v и v_1 на ось z .

Но мы уже знаем, что

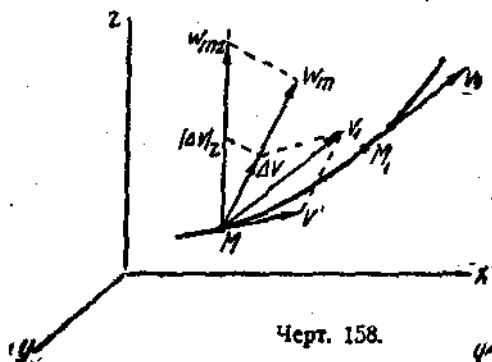
$$v_z = z',$$

и мы можем положить

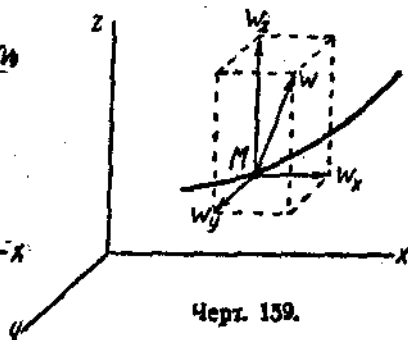
$$v_{1z} = z' + \Delta z',$$

где $\Delta z'$ есть приращение, получаемое величиной z' за время Δt . Следовательно,

$$(\Delta v)_z = z' + \Delta z' - z' = \Delta z'.$$



Черт. 158.



Черт. 159.

Отсюда следует, что

$$w_{sz} = \frac{\Delta z'}{\Delta t},$$

Переходя теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$, получаем

$$w_s = \lim [w_{sz}]_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim \left[\frac{\Delta z'}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{dz'}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = z''.$$

Совершенно так же мы могли бы получить аналогичные результаты для проекций w_x и w_y , ускорения w на оси x и y :

$$w_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = x'',$$

$$w_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = y''.$$

Итак, проекции ускорения на прямоугольные координатные оси равны вторым производным от соответствующих координат по времени.

Вспользуемся выведенными формулами для вычисления ускорения в том предположении, что движение задано уравнениями движения в прямоугольных координатах.

Положим, что движение точки M задано уравнениями движения:

$$\dot{x} = f_1(t),$$

$$y = f_2(t),$$

$$z = f_3(t),$$

отнесенным к осям x, y, z (черт. 159).

Построим прямоугольный параллелепипед, которого ребра параллельны осям x, y, z и в котором ускорение w является диагональю. Ребра этого прямоугольного параллелепипеда равны проекциям w_x, w_y, w_z .

Вычисляем эти проекции по формулам

$$w_x = x'', \quad w_y = y'', \quad w_z = z''.$$

Затем находим величину ускорения w по формуле

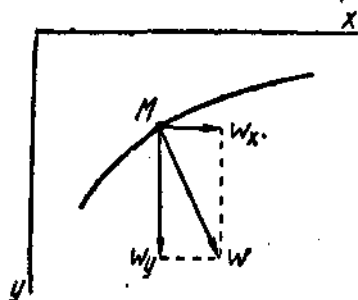
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Далее, имеем:

$$w_x = w \cos(w, x), \quad w_y = w \cos(w, y), \quad w_z = w \cos(w, z),$$

откуда

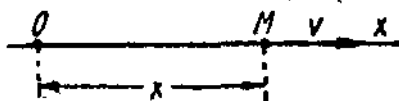
$$\cos(w, x) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(w, y) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(w, z) = \frac{w_z}{w}.$$



Черт. 160.

Этими формулами определяется направление ускорения w .

Остановимся на частном случае *плоского* движения точки.



Черт. 161.

Положим, что точка M (черт. 160) совершает плоское движение в плоскости xu ; ее движение задано уравнениями движения

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t).$$

Вычисляем проекции ускорения w_x и w_y по формулам

$$w_x = x'',$$

$$w_y = y''.$$

Затем находим величину ускорения w как диагональ прямоугольника, построенного на проекциях w_x и w_y :

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}.$$

Направление ускорения w определяется формулами:

$$\cos(w, x) = \frac{w_x}{w},$$

$$\cos(w, y) = \frac{w_y}{w}.$$

Отметим еще случай *прямолинейного* движения точки. Положим, что точка M (черт. 161) совершает прямолинейное движение по оси x ; ее движение задано уравнением

$$x = f(t).$$

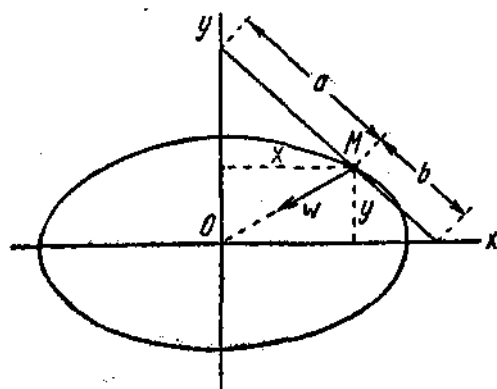
Вычисляем проекцию ускорения w_x по формуле

$$w_x = x''.$$

Так как ускорение w направлено по оси x (в сторону положительной оси x , если $w_x > 0$, и в сторону отрицательной оси x , если $w_x < 0$), то величина ускорения w равна численному значению проекции w_x , т. е.

$$w = |w_x|.$$

Направление же ускорения w определяется, как сейчас указано, знаком проекции w_x .



Черт. 162.

Задача 6. Определить ускорение точки M эллипсографа (см. задачу 1).

Движение точки M определяется уравнениями:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t.$$

Отсюда получаем:

$$w_x = x'' = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x,$$

$$w_y = y'' = -b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y.$$

Следовательно,

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}, \quad \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

Но $\sqrt{x^2 + y^2} = OM$ (черт. 162); обозначая отрезок OM буквой r , получаем окончательно

$$w = \omega^2 r.$$

Что касается направления ускорения w , то оно определяется формулами

$$\cos(w, x) = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(w, y) = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}.$$

Легко видеть (черт. 162), что направление отрезка MO (от точки M к точке O) образует с осями x и y углы, косинусы которых суть $-\frac{x}{r}$ и $-\frac{y}{r}$; отсюда мы заключаем, что ускорение w направлено от точки M к точке O .

Итак, ускорение точки M направлено к центру описываемого ею эллипса и пропорционально расстоянию точки M от этого центра.

Задача 7. Вычислить ускорение поршня паровой машины (см. задачу 2).

Движение поршня тождественно с движением ползуна B (черт. 163). Мы имели приближенное уравнение движения ползуна B .

$$x = r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

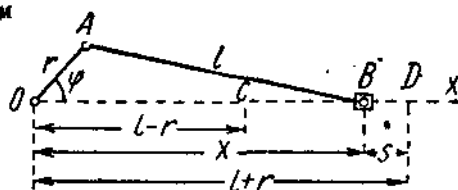
Дифференцируя два раза, получаем

$$x' = -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right),$$

$$x'' = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

Отсюда

$$w_x = -r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$



Черт. 163.

Величина ускорения w ползуна B равна численному значению этого выражения; знак проекции w_x указывает на направление ускорения w . Полагая $\omega t = \varphi$, получаем

$$w_x = -r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (1)$$

Эта формула дает зависимость величины w_x от угла φ (черт. 163). Сделав эту же подстановку $\omega t = \varphi$ в формуле для x , будем иметь

$$x = r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right) + l - \frac{\lambda}{4} r.$$

По этой формуле мы можем вычислять значения x (т. е. определять положения ползуна B) для любых заданных значений угла φ . Ползун B перемещается между крайними положениями C и D , в которых его скорость обращается в нуль и которые называются его мертвыми положениями. Расстояние точек C и D от точки O равны $l - r$ и $l + r$; отрезок CD (ход ползуна или ход поршня) равен $2r$.

Будем определять положение ползуна B его расстоянием s от мертвого положения D . Для величины s имеем выражение

$$s = l + r - x = r + \frac{\lambda}{4} r - r \left(\cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi \right)$$

или, обозначая ход поршня CD через d , т. е. полагая $2r = d$:

$$s = \frac{d}{2} \left\{ 1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\}. \quad (2)$$

По формулам (1) и (2) легко вычислить значения величин w_x и s для любых значений угла φ . В нижеследующей таблице даны значения величин

$$\frac{s}{d} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right\},$$

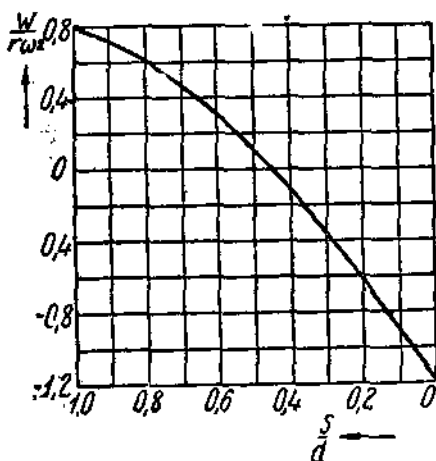
$$\frac{w_x}{r\omega^2} = -(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi)$$

для углов φ между 0° и 180° через каждые 15° , причем положено

$$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{5}.$$

φ	$\frac{s}{d}$	$\frac{w_x}{r\omega^2}$	φ	$\frac{s}{d}$	$\frac{w_x}{r\omega^2}$
0°	0	-1,200	105°	0,676	0,432
15°	0,020	-1,139	120°	0,787	0,600
30°	0,079	-0,966	135°	0,879	0,707
45°	0,171	-0,707	150°	0,945	0,766
60°	0,287	-0,400	165°	0,986	0,793
75°	0,417	-0,086	180°	1	0,800
90°	0,550	0,200			

Откладывая величины $\frac{s}{d}$ по горизонтальной оси, а соответствующие величины $\frac{w_x}{r\omega^2}$ по вертикальной оси, получаем график зависимости между этими величинами (черт. 164). По этому графику легко определить величину и направление ускорения для всякого положения поршня, если даны величины r и ω . Значение величины ω (это не что иное, как угловая скорость вала машины) будет выяснено в главе XV. Построенный нами график играет существенную роль в динамике поршневых машин (в частности — в расчете махового колеса). Мы положим $\lambda = \frac{1}{5}$; легко построить такой же график для всякого иного значения λ .



Черт. 164.

§ 85. Касательное ускорение и нормальное ускорение.

Представим себе точку M , совершающую какое-либо движение в пространстве. Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$ и отметим соответствующие положения точки M и M_1 .

и соответствующие скорости v и v_1 . Затем отложим от точки M отрезок MA , равный и параллельный скорости v_1 , и построим геометрическое изменение скорости Δv и среднее ускорение w_m (черт. 165).

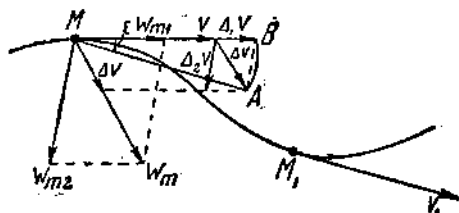
Разложим теперь изменение скорости Δv и среднее ускорение w_m на две составляющие следующим образом. Отложим от точки M по направлению скорости v отрезок MB , равный скорости v_1 , соединим точки B и A прямой линией и проведем из конца скорости v отрезок, равный и параллельный отрезку BA . Мы получим параллелограмм, в котором изменение скорости Δv является диагональю; стороны этого параллелограмма обозначим через $\Delta_1 v$ и $\Delta_2 v$ (черт. 165). Затем построим другой параллелограмм, в котором среднее ускорение w_m является диагональю и стороны которого параллельны отрезкам $\Delta_1 v$ и $\Delta_2 v$. Составляющие, на которые таким образом разложено среднее ускорение w_m , обозначим через w_{m1} и w_{m2} .

Из подобных треугольников мы выводим:

$$\frac{w_{m1}}{w_m} = \frac{\Delta_1 v}{\Delta v}$$

или, так как $w_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$,

$$w_{m1} = w_m \frac{\Delta_1 v}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \frac{\Delta_1 v}{\Delta v} = \frac{\Delta_1 v}{\Delta t}.$$



Черт. 165.

Совершенно так же из подобия тех же треугольников выводим, что

$$w_{m2} = \frac{\Delta_2 v}{\Delta t}.$$

Разложив среднее ускорение w_m на составляющие w_{m1} и w_{m2} , перейдем к пределу $\lim \Delta t = 0$. В пределе среднее ускорение w_m обратится в ускорение w , соответствующее моменту t , и мы получим разложение ускорения w на две составляющие.

Выясним прежде всего направления этих составляющих ускорения w . Для этого нам нужно выяснить предельные направления составляющих w_{m1} и w_{m2} среднего ускорения.

Составляющая w_{m1} направлена по касательной к траектории в точке M_1 ; ее направление не зависит от величины промежутка времени Δt , а значит и в пределе, при $\lim \Delta t = 0$, эта составляющая будет направлена по касательной к траектории в точке M .

Составляющая w_{m2} направлена параллельно отрезку BA . Посмотрим, каково предельное направление этого отрезка. Обозначая $\angle MBA = \angle MAB = \alpha$ и замечая, что $\angle BMA$ есть угол смежности ε , выводим из треугольника MBA :

$$\varepsilon + 2\alpha = 180^\circ$$

или

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\varepsilon}{2}.$$

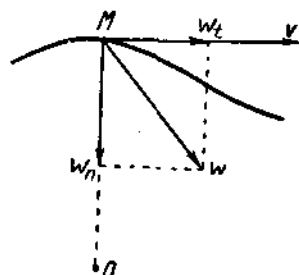
Но $\lim [\varepsilon]_{\Delta t \rightarrow 0} = 0$ и, следовательно, $\lim [\alpha]_{\Delta t \rightarrow 0} = 90^\circ$, т. е. предельное направление отрезка BA перпендикулярно к касательной MB . Значит, и предельное направление составляющей w_{m2} перпендикулярно к касательной.

тельной к траектории в точке M , т. е. составляющая w_{m2} в пределе, при $\lim \Delta t = 0$, направлена по нормали к траектории в точке M .

Так как предельное положение плоскости параллелограмма, которого стороны суть w_{m1} и w_{m2} , есть плоскость кривизны траектории в точке M , то составляющая w_{m2} направлена в пределе по той нормали, которая лежит в плоскости кривизны, т. е. по главной нормали.

Заметим еще, что составляющая w_{m2} направлена в сторону вогнутости траектории (черт. 165). Значит, и в пределе эта составляющая направлена по главной нормали в сторону вогнутости траектории, т. е. к центру кривизны.

Итак, в пределе при $\lim \Delta t = 0$ параллелограмм, которого стороны суть w_{m1} и w_{m2} , обращается в прямоугольник, и мы получаем разложение ускорения w на две составляющие, из которых одна направлена по касательной к траектории в точке M , а другая — по главной нормали к центру кривизны O (черт. 166). Эти две составляющие называются



черт. 166.

касательным ускорением и нормальным ускорением; мы будем обозначать касательное ускорение через w_t , а нормальное ускорение через w_n .

Остается вычислить величины касательного и нормального ускорений. Имеем:

$$w_t = \lim [w_{m1}]_{\Delta t=0} = \lim \left[\frac{\Delta_1 v}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0},$$

$$w_n = \lim [w_{m2}]_{\Delta t=0} = \lim \left[\frac{\Delta_2 v}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0}.$$

Но $\Delta_1 v = v_1 - v$ есть алгебраическое приращение скорости за время Δt . Следовательно,

$$w_t = \lim \left[\frac{\Delta_1 v}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \frac{dv}{dt}.$$

С другой стороны, $\Delta_2 v$ равно отрезку BA ; следовательно,

$$w_n = \lim \left[\frac{\Delta_2 v}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \lim \left[\frac{BA}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0}.$$

Проведем через точки B и A дугу окружности с центром в точке M , радиус этой дуги равен v_1 , а центральный угол, ей соответствующий, равен ϵ ; следовательно, $\cup BA = v_1 \epsilon$. Обозначим дугу MM_1 через Δs и напишем:

$$\begin{aligned} w_n &= \lim \left[\frac{BA}{\cup BA} \cdot \frac{\cup BA}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \lim \left[\frac{BA}{\cup BA} v_1 \frac{\epsilon}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \\ &= \lim \left[\frac{BA}{\cup BA} \right]_{\Delta t=0} \cdot \lim [v_1]_{\Delta t=0} \cdot \lim \left[\frac{\epsilon}{\Delta s} \right]_{\Delta t=0} \cdot \lim \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \lim \left[\frac{BA}{\cup BA} \right]_{\Delta t=0} &= 1, \quad \lim [v_1]_{\Delta t=0} = v, \quad \lim \left[\frac{\epsilon}{\Delta s} \right]_{\Delta t=0} = \frac{1}{\rho}, \\ \lim \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} &= v, \end{aligned}$$

где ρ есть радиус кривизны траектории в точке M . Следовательно,

$$w_n = 1 \cdot v \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho}.$$

Полученными формулами можно воспользоваться для определения величины и направления ускорения w . Сначала вычисляем касательное и нормальное ускорения по формулам:

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Затем находим величину ускорения w как диагональ прямоугольника, построенного на касательном и нормальном ускорениях:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}.$$

Направление же ускорения определяется формулами:

$$\cos(w, v) = \frac{w_t}{w}, \quad \cos(w, \rho) = \frac{w_n}{w},$$

где (w, v) и (w, ρ) суть углы, образованные направлением ускорения с направлением скорости и с направлением главной нормали к траектории, проведенной к центру кривизны.

Заметим, что при *прямолинейном* движении имеем $\rho = \infty$, $w_n = 0$ и, следовательно,

$$w = w_t = \frac{dv}{dt},$$

т. е. при *прямолинейном* движении ускорение равно производной от скорости по времени.

При *равномерном* движении имеем $v = \text{const}$, $\frac{dv}{dt} = 0$ и $w_t = 0$; следовательно,

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Следует особо заметить, что при равномерном криволинейном движении ускорение не равно нулю; в этом случае в нуль обращается лишь касательное ускорение, так что полное ускорение состоит из одной нормальной составляющей.

Наконец, при *прямолинейном* и *равномерном* движении имеем $\rho = \infty$, $\frac{dv}{dt} = 0$, т. е. $w_t = 0$, $w_n = 0$ и, следовательно, $w = 0$.

Задача 8. Железнодорожный поезд проходит кривую радиуса $R = 300$ м с постоянной скоростью $v = 60 \frac{\text{км}}{\text{час}}$. Определить ускорение поезда.

Так как движение поезда равномерное, то его ускорение равно

$$w = w_n = \frac{v^2}{R}$$

и направлено к центру описываемой им кривой.

Имеем

$$v = 60 \frac{\text{км}}{\text{час}} = 60 \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ сек}} = \frac{50 \text{ м}}{3 \text{ сек}}.$$

Следовательно,

$$w = \frac{2500}{9 \cdot 300} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = \frac{25}{27} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 0,926 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Задача 9. Железнодорожный поезд проходит кривую радиуса $R = 300 \text{ м}$ равноускоренным движением. Длина кривой равна $l = 200 \text{ м}$; при входе на кривую поезд имеет скорость $v_0 = 30 \frac{\text{км}}{\text{час}}$, при выходе с кривой его скорость равна $v_1 = 48 \frac{\text{км}}{\text{час}}$. Вычислить ускорение поезда в момент входа на кривую, а также в момент выхода с кривой.

Так как движение поезда равноускоренное, то мы имеем для скорости v и пройденного пути s формулы

$$v = v_0 + ct$$

$$s = v_0 t + \frac{ct^2}{2}$$

(в последней формуле мы положили начальный пройденный путь s_0 равным нулю, начиная счет времени с момента входа поезда на кривую).

Отсюда

$$w_t = \frac{dv}{dt} = c.$$

Следовательно, касательное ускорение сохраняет постоянное значение c во все время прохождения поездом кривой, нормальное же ускорение, равное $\frac{v^2}{R}$, непрерывно изменяется с изменением скорости. В моменты входа на кривую и выхода с нее полное ускорение поезда имеет соответственные значения:

$$w_0 = \sqrt{c^2 + \frac{v_0^4}{R^2}} \quad \text{и} \quad w_1 = \sqrt{c^2 + \frac{v_1^4}{R^2}}.$$

Остается вычислить постоянную c . Обозначая время прохождения поездом кривой через T , имеем

$$v_1 = v_0 + cT,$$

$$l = v_0 T + \frac{cT^2}{2} = T \left(v_0 + \frac{cT}{2} \right) = \frac{1}{2c} [cT(2v_0 + cT)].$$

Из первого равенства имеем

$$cT = v_1 - v_0.$$

Подставляя это значение cT в формулу для l , получаем

$$l = \frac{(v_1 - v_0)(v_1 + v_0)}{2c} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2c}.$$

Отсюда

$$c = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2l}.$$

Имеем

$$v_0 = 30 \frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{25}{3} \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \quad v_1 = 48 \frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{40}{3} \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Следовательно,

$$w_1 = c = \frac{1600 - 625}{9 \cdot 400} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 0,2708 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Далее

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{625}{9 \cdot 300} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 0,2315 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$$

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{1600}{9 \cdot 300} = 0,5926 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Отсюда

$$w_0 = \sqrt{(0,2708)^2 + (0,2315)^2} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 0,356 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2},$$

$$w_1 = \sqrt{(0,2708)^2 + (0,5926)^2} \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 0,652 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

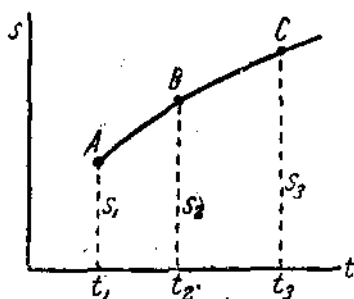
§ 86. Графики пути, скорости и ускорения.

Положим, что движение точки задано уравнением движения

$$s = f(t).$$

Мы можем вычислить по этому уравнению для каждого момента времени t соответствующее этому моменту значение пройденного пути s . Возьмем две взаимно перпендикулярные оси (черт. 167) и будем откладывать на оси абсцисс моменты времени t , а на оси ординат — соответствующие значения s . Совокупность построенных таким образом точек образует кривую, которая изображает графически зависимость пройденного пути от времени; эта кривая называется *графиком пути*.

Легко построить график пути, если известно уравнение движения. Но важное значение этого графического построения состоит в том, что им можно пользоваться и в таких случаях, когда уравнение движения, дающее аналитическую зависимость между s и t , нам неизвестно.



Черт. 167.

Такие случаи встречаются нередко. Часто бывает, что движение задано лишь рядом отдельных значений пройденного пути $s_1, s_2, s_3, \dots$, соответствующих отдельным моментам времени $t_1, t_2, t_3, \dots$, причем аналитическая зависимость между s и t (т. е. уравнение движения) остается неизвестной. В таких случаях, откладывая значения $t_1, t_2, t_3, \dots$ и $s_1,$

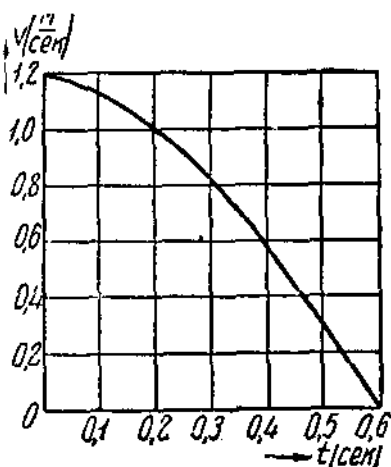
$s_2, s_3, \dots$, соответственно по осям t и s , строим точки $A, B, C, \dots$ (черт. 167). Проведем через эти точки плавную кривую; это и будет приближенно график пути, соответствующий данному движению. В иных случаях график пути вычерчивается автоматически при помощи участвующих в движении самопишущих приборов.

Во всяком случае графиком пути вполне заменяется уравнение движения. Если дана траектория точки и дан график пути, то этим движением точки вполне определено.

Возьмем теперь скорость нашей точки

$$v = \frac{ds}{dt} = f(t).$$

Зависимость между скоростью и временем также можно изобразить графически, откладывая по оси абсцисс значения t , а по оси ординат —



Черт. 168.

соответствующие значения v ; построенная таким образом кривая называется **графиком скорости**. Аналогичная кривая, изображающая зависимость между ускорением и временем, называется **графиком ускорения**.

Следует заметить, что если известен один из только-что указанных трех графиков, то по этому данному графику легко построить и два других. Приближенный способ, которым для этого нужно пользоваться, мы покажем на следующем примере.

Задача 10. График скорости подъемной машины при торможении изображен на черт. 168¹. Как видно из этого графика, машина двигалась до начала торможения со скоростью

$1,19 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$; через 0,6 сек после на-

чала торможения скорость машины падает до нуля (машина останавливается). Требуется построить графики пути и ускорения.

Таблица I

t (сек)	v ($\frac{\text{м}}{\text{сек}}$)
0	1,19
0,1	1,13
0,2	1,01
0,3	0,82
0,4	0,57
0,5	0,29
0,6	0

Таблица II

t (сек)	s (м)
0	0
0,1	0,116
0,2	0,223
0,3	0,314
0,4	0,384
0,5	0,427
0,6	0,441

¹ H. Stahl, Untersuchung des Auslaufweges elektrischer Aufzüge*, Zeltschr. des Ver. deutsch. Ing., 49 (1905), S. 511.

Определим по графику скорости значения скорости v , соответствующие моментам времени 0, 0,1 сек., 0,2 сек., ... 0,6 сек. Эти значения выписаны в таблице 1.

Обратимся к построению графика пути. Примем за начало отсчета пройденного пути то положение машины, в котором она находилась в момент начала торможения. В таком случае при $t=0$ мы будем иметь $s_0=0$. Найдем значение $s=s_1$, соответствующее моменту $t=0,1$ сек.

Мы не сделаем большой ошибки при вычислении пути, пройденного машиной за время от $t=0$ до $t=0,1$ сек., если примем, что машина двигалась за это время равномерно со скоростью, средней между скоростями $1,19 \frac{м}{сек.}$ и $1,13 \frac{м}{сек.}$, т. е. со скоростью

$$\frac{1,19 + 1,13}{2} = 1,16 \frac{м}{сек.}$$

При таком предположении путь, пройденный машиной за рассматриваемое время, т. е. приближенное значение s_1 пройденного пути при $t=0,1$ сек., будет

$$s_1 = 1,16 \frac{м}{сек.} \cdot 0,1 \text{ сек.} = 0,116 \text{ м.}$$

Чтобы найти значение $s=s_2$ пройденного пути при $t=0,2$ сек., вычислим путь, пройденный машиной за время от $t=0,1$ сек. до $t=0,2$ сек. Предположив опять, что за это время машина двигалась равномерно со скоростью

$$\frac{1,13 + 1,01}{2} \frac{м}{сек.} = 1,07 \frac{м}{сек.},$$

найдем, что за рассматриваемое время пройден путь

$$1,07 \frac{м}{сек.} \cdot 0,1 \text{ сек.} = 0,107 \text{ м.}$$

Следовательно, путь s_2 , пройденный за время от $t=0$ до $t=0,2$ сек., равен

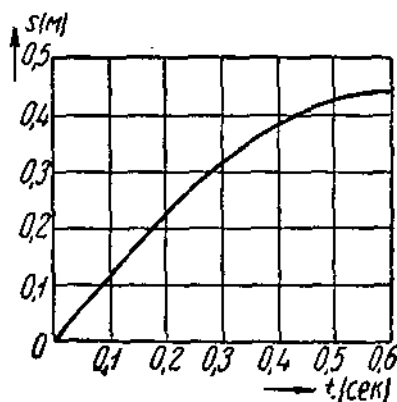
$$s_2 = 0,116 \text{ м} + 0,107 \text{ м} = 0,223 \text{ м.}$$

Продолжая поступать таким образом, найдем значения $s_1, s_2, \dots, s_6$ пройденного пути, соответствующие моментам $t=0,1$ сек., 0,2 сек., ..., 0,6 сек.; эти значения приведены в таблице II. (стр. 152).

Как видно, от момента начала торможения до остановки машина проходит путь 0,441 м. По найденным значениям s строим график пути (черт. 169).

Переходя к построению графика ускорения, найдем среднее ускорение машины за время от $t=0$ до $t=0,1$ сек. Это среднее ускорение равно

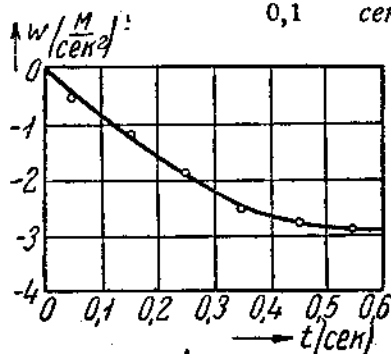
$$\frac{1,13 - 1,19}{0,1} \frac{м}{сек.^2} = -0,6 \frac{м}{сек.^2}.$$



Черт. 169.

Допуская небольшую погрешность, мы можем принять, что таково было ускорение машины в момент, средний между моментами $t=0$ и $t=0,1$ сек., т. е. в момент $t=0,05$ сек. Точно также найдем, что в момент $t=0,15$ сек. ускорение машины равнялось (приблизительно)

$$\frac{1,01 - 1,13}{0,1} \frac{м}{сек^2} = -1,2 \frac{м}{сек^2}.$$



Черт. 170.

Таблица III

$t(сек)$	$w\left(\frac{м}{сек^2}\right)$
0,05	-0,6
0,15	-1,2
0,25	-1,9
0,35	-2,5
0,45	-2,8
0,55	-2,9

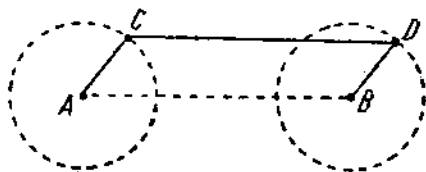
Таким образом найдутся значения ускорения машины w в момент 0,05 сек., 0,15 сек., ..., 0,55 сек.; эти значения выписаны в таблице III. По этим значениям w строим график ускорения (черт. 170).

ГЛАВА XV.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

§ 87. Поступательное движение твердого тела.

Мы перейдем теперь к изучению движения твердого тела. Твердое тело мы будем трактовать как абсолютно твердое, т. е. будем предполагать, что расстояния между любыми двумя точками твердого тела при всех условиях остаются неизменными. Наше исследование мы начнем с рассмотрения двух простейших типов движения твердого тела: поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Впоследствии мы увидим, что к этим двум типам может быть приведено и самое общее движение твердого тела. В настоящем параграфе рассмотрим поступательное движение твердого тела.



Черт. 171.

Движение твердого тела называется *поступательным*, если при его движении всякая прямая, проведенная в теле, остается себе параллельной.

Например, представим себе механизм, состоящий из кривошипов AC и BD одинаковой длины, насаженных на валы A и B и соединенных спарником CD , длина которого равна расстоянию между осями валов

AB (черт. 171). Ясно, что при всех положениях механизма фигура $ACDB$ остается параллелограммом, и, значит, спарник CD остается параллельным прямой AB . Следовательно, движение стержня CD есть движение поступательное.

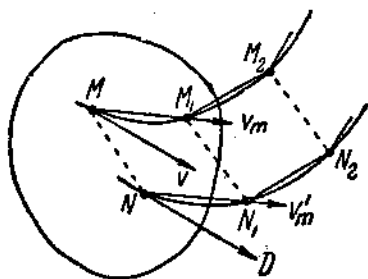
Докажем следующее основное свойство поступательного движения: при поступательном движении все точки твердого тела описывают тождественные и параллельно расположенные траектории¹ и имеют в каждый данный момент геометрически равные скорости и геометрически равные ускорения.

Представим себе твердое тело, движущееся поступательно. Докажем, что любые две его точки, например M и N (черт. 173), описывают тождественные и параллельно расположенные траектории.

Возьмем ряд последовательных моментов времени: $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$ следующих один за другим через промежуток времени Δt , и отметим последовательные положения $M, M_1, M_2, \dots$ и $N, N_1, N_2, \dots$ наших двух точек в эти моменты времени. Соединив прямыми линиями точки $M, M_1, M_2, \dots$, а также точки $N, N_1, N_2, \dots$, получим две ломаные линии, вписанные в траектории точек M и N .



Черт. 172.



Черт. 173.

Соединим еще прямыми линиями точки M и N, M_1 и N_1, M_2 и N_2 и т. д. Отрезки $MN, M_1N_1, M_2N_2, \dots$, представляют последовательные положения отрезка MN , движущегося вместе с твердым телом; следовательно, все эти отрезки между собою равны. Так как движение тела предполагается поступательным, то все эти отрезки, кроме того, параллельны. Отсюда следует, что фигуры $MM_1N_1N, M_1M_2N_2N_1, \dots$ суть, параллелограммы, а следовательно стороны ломаных $MM_1M_2, \dots$ и $NN_1N_2, \dots$ соответственно равны и параллельны. Значит, эти ломаные тождественны и параллельно расположены.

Перейдем теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$. В пределе ломаные $MM_1M_2, \dots$ и $NN_1N_2, \dots$ обращаются в траектории точек M и N . Так как ломаные тождественны и параллельно расположены, то и кривые, к которым они приближаются, также тождественны и параллельно расположены.

Итак, траектории точек M и N тождественны и расположены параллельно.

Обратимся к рассмотрению скоростей точек M и N в момент t .

Скорость v точки M в момент t можно рассматривать как предел

¹ Две кривые мы называем тождественными, если при наложении они совмещаются. Две точки M и M' двух тождественных кривых AB и $A'B'$ (черт. 172), совпадающие при совмещении кривых, назовем друг другу соответствующими. Мы назовем две тождественные кривые расположенными параллельно, если касательные к ним, приведенные в соответствующих точках, параллельны.

скорости фиктивного равномерного движения по хорде MM_1 за время Δt . Эта фиктивная скорость v_m имеет величину $v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}$ и направлена по хорде MM_1 (черт. 173).

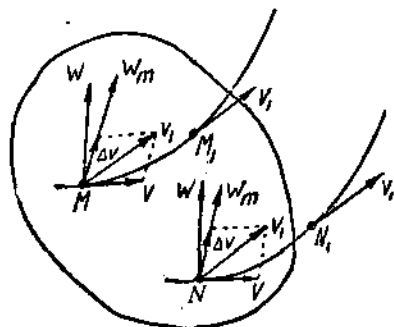
Совершенно так же скорость точки N в момент t (обозначим ее v') есть предел скорости v'_m фиктивного равномерного движения по хорде NN_1 за время Δt ; скорость v'_m имеет величину $v'_m = \frac{NN_1}{\Delta t}$ и направлена по хорде NN_1 .

Но мы видели, что отрезки MM_1 и NN_1 равны и параллельны; следовательно,

$$\overline{v_m} = \overline{v'_m};$$

Переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, получаем

$$\overline{v} = \overline{v'},$$



Черт. 174.

т. е. скорости точек M и N в момент t геометрически равны.

Остается рассмотреть ускорения точек M и N в момент t .

Отметим скорости v и v_1 точки M в моменты t и $t + \Delta t$ (черт. 174); затем построим изменение скорости Δv и среднее ускорение w_m ; переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, получаем ускорение w точки M в момент t .

Повторив то же построение для точки N , замечаем, что скорости точки N в моменты t и $t + \Delta t$ (по доказанному) геометрически равны скоростям

v и v_1 ; следовательно, и изменения скорости и средние ускорения точек M и N геометрически равны. Переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, заключаем, что и ускорения точек M и N в момент t геометрически равны.

Общую для всех точек твердого тела скорость и общее для всех точек ускорение мы можем назвать *скоростью* и *ускорением твердого тела*. Заметим, что такая терминология допустима лишь в случае поступательного движения твердого тела; в других случаях движения твердого тела (как мы увидим в дальнейшем) различные точки твердого тела имеют различные скорости и различные ускорения.

§ 88. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z (черт. 175). Вращательное движение твердого тела может быть определено следующим образом.

Проведем через ось вращения z две полуплоскости:¹ неподвижную полуплоскость P и подвижную полуплоскость Q , вращающуюся вместе с твердым телом. Отметим двугранный угол между этими полуплоско-

¹ Прямая линия, проведенная на плоскости, делит неограниченную плоскость на две полуплоскости.

стями и условимся считать его положительным, если он представляется отложенным от неподвижной полуплоскости P по направлению вращения часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z). Обозначим этот двугранный угол, взятый с надлежащим знаком, через φ и назовем его **углом поворота**. Заданием угла поворота φ вполне определяется положение подвижной полуплоскости Q , а вместе с тем и положение всего вращающегося тела.

При движении тела угол поворота φ изменяется с течением времени, т. е. угол φ представляется некоторой функцией времени t :

$$\varphi = f(t).$$

Это уравнение называется **уравнением вращения**. Этим уравнением вполне определяется вращательное движение твердого тела, ибо, зная это уравнение, мы можем для любого момента времени t вычислить соответствующее значение угла поворота φ и, следовательно, указать соответствующее положение вращающегося тела.

Для характеристики большей или меньшей быстроты вращения введем понятие **угловой скорости**.

Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$. В момент $t + \Delta t$ вращающаяся полуплоскость Q занимает положение Q_1 и угол поворота φ за время Δt получает приращение $\Delta\varphi$ (черт. 175). Отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ на-

зывается **средней угловой скоростью** вращающегося тела за время Δt . Предел же, к которому приближается средняя угловая скорость, когда Δt приближается к нулю, называется **угловой скоростью** тела в момент t .

Обозначая угловую скорость буквой ω , имеем:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

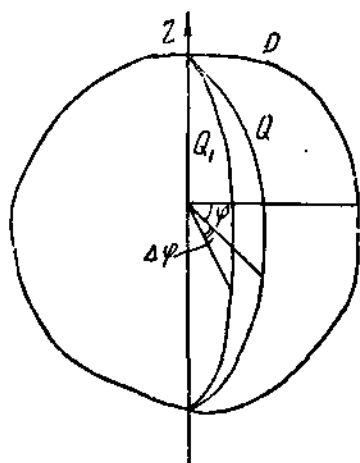
т. е. **угловая скорость равна производной от угла поворота по времени**.

Заметим, что когда для наблюдателя, смотрящего со стороны положительной оси z , твердое тело представляется вращающимся по часовой стрелке, мы имеем $\Delta\varphi > 0$, а следовательно и $\omega > 0$; если же вращение тела представляется происходящим против часовой стрелки, то $\Delta\varphi < 0$, а следовательно и $\omega < 0$.

Отметим тот частный случай вращения, при котором **угловая скорость есть величина постоянная**:

$$\omega = \text{const.}$$

В этом случае вращение называется **равномерным**. Составим уравнение равномерного вращения.



Черт. 175.

Мы имеем зависимость

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Интегрируя и имея в виду, что в данном случае ω есть величина постоянная, получаем

$$\varphi = \omega t + C,$$

где C есть постоянная произвольная. Положим, что в начальный момент $t=0$ угол поворота φ имеет значение φ_0 ; этот угол φ_0 назовем *начальным углом поворота*. Применяя последнее уравнение к начальному моменту $t=0$, находим

$$\varphi_0 = C.$$

Определив таким образом значение постоянной C , получаем окончательно

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (1)$$

Таково уравнение равномерного вращения.

Заметим, что надлежащим выбором неподвижной полуплоскости P и подвижной полуплоскости Q можно всегда достигнуть того, чтобы было $\varphi_0 = 0$ (стоит только выбрать полуплоскости P и Q так, чтобы в начальный момент $t=0$ они совпадали). Следовательно, не ограничивая общности, можно написать уравнение равномерного вращения и в таком виде:

$$\varphi = \omega t.$$

Решая уравнение (1) относительно буквы ω , имеем:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

т. е. *угловая скорость равномерного вращения равна отношению изменения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени*.

Представим себе такое равномерное вращение, при котором угол поворота изменяется на единицу угла в единицу времени. Угловая скорость такого вращения равна

$$\omega = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, за единицу угловой скорости мы должны принять угловую скорость такого равномерного вращения, при котором угол поворота изменяется на единицу угла в единицу времени.

Например, если условимся измерять углы отношением дуги к соответствующему радиусу, т. е. за единицу угла примем *абсолютную единицу угла* или *радиан*,¹ и если за единицу времени примем секунду, то за единицу угловой скорости мы должны принять угловую скорость такого равномерного вращения, при котором тело поворачивается на один радиан в одну секунду. Эту единицу угловой скорости

¹ Радианом называется угол, для которого дуга равна радиусу; он равен $57^{\circ}17'44''{,}8$. Измеряя углы отношением дуги к соответствующему радиусу, мы выражаем углы отвлеченными числами.

мы назовем *абсолютной единицей угловой скорости* и будем обозначать $\frac{1}{\text{сек}}$.

Весьма часто угловая скорость измеряется числом оборотов в минуту, т. е. за единицу угла принимается полный оборот (или 360°), а за единицу времени — минута; соответствующая единица угловой скорости обозначается $\frac{\text{оборот}}{\text{мин}}$.

Правило перехода от одних единиц угловой скорости к другим остается тем же, как оно было формулировано в аналогичном случае для скорости и ускорения точки: напишите данную угловую скорость с надлежащим наименованием единицы угловой скорости; в этом наименовании выразите данные единицы угла и времени через новые единицы угла и времени; произведя перемножение, получите требуемый результат.¹

Например:

$$\omega = 100 \frac{\text{оборот}}{\text{мин}} = 100 \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = \frac{10\pi}{3} \frac{1}{\text{сек}}.$$

Перейдем к установлению понятия углового ускорения. Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$. Положим, что в момент t угловая скорость имеет значение ω , а в момент $t + \Delta t$ она равна $\omega + \Delta\omega$. Отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется *средним угловым ускорением* за время Δt . Предел же, к которому приближается среднее угловое ускорение, когда Δt приближается к нулю, называется *угловым ускорением* в момент t .

Обозначая угловое ускорение буквой ϵ , имеем

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right] = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

т. е. *угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.*

Заметим, что $\epsilon > 0$, если $\Delta\omega > 0$, т. е. если угловая скорость возрастает за время Δt , и $\epsilon < 0$, если $\Delta\omega < 0$, т. е. если угловая скорость убывает.

Остановимся на том частном случае вращения, при котором *угловое ускорение есть величина постоянная*:

$$\epsilon = \text{const.}$$

Такое вращение называется *равнопеременным* (равноускоренным или равнозамедленным). Составим уравнение равнопеременного вращения. Имеем зависимость:

$$\frac{d\omega}{dt} = \epsilon.$$

¹ При этом нужно помнить, что один оборот, измеренный в радианах, выражается отвлеченным числом 2π .

Интегрируя и имея в виду, что по предположению ε есть величина постоянная, получаем:

$$\omega = \varepsilon t + C,$$

где C есть постоянная произвольная. Положим, что в начальный момент $t=0$ угловая скорость имеет значение ω_0 , которое назовем *начальной угловой скоростью*. Применяя последнее уравнение к начальному моменту $t=0$, находим:

$$\omega_0 = C.$$

Подставив найденное значение постоянной C в предыдущее уравнение, будем иметь:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (2)$$

Таков закон изменения угловой скорости при равнопеременном вращении.

Далее имеем зависимость:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1,$$

где C_1 есть новая постоянная произвольная. Обозначая начальный угол поворота (т. е. значение угла поворота φ при $t=0$) через φ_0 и применяя последнее уравнение к начальному моменту $t=0$, получаем:

$$\varphi_0 = C_1.$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Таково уравнение равнопеременного вращении.

Решая уравнение (2) относительно буквы ε , находим:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

т. е. угловое ускорение равнопеременного вращении равно отношению изменения угловой скорости за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка времени.

Представим себе такое равнопеременное вращение, при котором угловая скорость изменяется на единицу угловой скорости в каждую единицу времени; угловое ускорение такого вращении равно

$$\varepsilon = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, за единицу углового ускорения мы должны принять угловое ускорение такого равнопеременного вращении, при котором

угловая скорость изменяется на единицу угловой скорости и единицу времени.

Если примем за единицы угла и времени радиан и секунду, то будем иметь единицу углового ускорения, которая называется *абсолютной единицей углового ускорения* и обозначается:

$$\frac{1}{\text{сек}^2}.$$

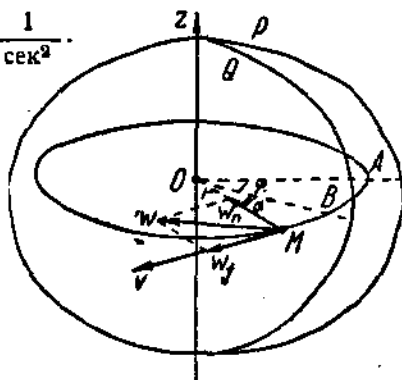
Принимая за единицы угла и времени один оборот и минуту, получаем единицу углового ускорения $\frac{\text{оборот}}{\text{мин}^2}$ и т. д.

Правило перехода от одних единиц к другим остается прежним. Например:

$$\omega = 10 \frac{\text{оборот}}{\text{мин}^2} = 10 \frac{2\pi}{(60 \text{ сек}^2)} = \frac{\pi}{180} \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

Мы закончим настоящий параграф изучением скоростей и ускорений различных точек вращающегося тела.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z , и отметим какую-либо точку M этого тела (черт. 176). Траектория точки M есть окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения z и центр O которой лежит на этой оси; радиус этой окружности (или расстояние точки M от оси вращения) обозначим буквой r .



Черт. 176.

Скорость точки M мы определим по формуле:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Возьмем неподвижную и подвижную полуплоскости P и Q и отметим те радиусы окружности, описываемой точкой M , которые лежат в этих полуплоскостях; радиус OA , лежащий в полуплоскости P , неподвижен, радиус же OB , лежащий в полуплоскости Q , вращается вместе с твердым телом. Угол, заключенный между радиусами OA и OB , есть угол поворота φ .

Если мы условимся взять за начало пройденных путей s точку A и если возьмем за положительное направление пути s то же направление, в котором условились считать положительным угол поворота φ , то будем иметь:

$$s = r(\varphi + \alpha), \quad (3)$$

где α есть угол, заключенный между радиусами OB и OM ; так как оба радиуса OB и OM вращаются вместе с твердым телом, то угол α есть величина постоянная. Заметим, что в формуле (3) углы φ и α должны быть выражены в радианах.

Вычисляя теперь величину скорости v , находим:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \quad (4)$$

Направление же скорости v есть направление касательной к окружности, описываемой точкой M ; другими словами, скорость v перпендикулярна к плоскости, проходящей через точку M и ось вращения z .

Скорость v получает в данном случае название *вращательной* или *окружной скорости*. Так как угол φ в формуле (3) должен быть выражен в радианах, то и угловая скорость ω в формуле (4) должна быть выражена в абсолютных единицах.

Из формулы (4) следует, что вращательные скорости различных точек вращающегося тела пропорциональны соответствующим радиусам, т. е. расстояниям данных точек от оси вращения.

Переходя к вычислению ускорения точки M , воспользуемся разложением полного ускорения w на касательное ускорение w_t и нормальное ускорение w_n . Имея в виду, что радиус кривизны траектории точки M равен r , получаем:

$$\left. \begin{aligned} w_t &= \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon, \\ w_n &= \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ускорение w_t направлено по касательной к окружности, описываемой точкой M ; ускорение w_n направлено к центру O этой окружности. Ускорения w_t и w_n получают в данном случае название *вращательного* и *центростремительного ускорений*.

Полное ускорение w находится как диагональ прямоугольника, построенного на вращательном и центростремительном ускорениях:

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (6)$$

Заметим, что в формулах (5) и (6) угловая скорость ω и угловое ускорение ε должны быть выражены в абсолютных единицах.

Если тело вращается *равномерно*, то мы имеем:

$$\omega = \text{const}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$w_t = r\varepsilon = 0.$$

Следовательно, в случае равномерного вращения полное ускорение w точки M состоит из одной только центростремительной составляющей; оно равно —

$$w = w_n = r\omega^2$$

и направлено к центру O окружности, описываемой точкой M .

Задача 11. Маховик, находившийся в начальный момент в покое, вращается равноускоренно; в первые 2 минуты после начала движения он совершает 300 оборотов. Определить угловое ускорение маховика, а также его угловую скорость через 3 минуты после начала движения.

Вспользуемся формулами:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{a t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + a t.$$

В данном случае имеем $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$. Угловое ускорение a определяется из уравнения:

$$300 = \frac{4a}{2},$$

откуда

$$a = 150 \frac{\text{обор}}{\text{мин}^2}.$$

Угловая скорость через 3 мин. после начала движения равна

$$\omega = 150 \cdot 3 = 450 \frac{\text{обор}}{\text{мин}}.$$

Найденные величины a и ω , выраженные в абсолютных единицах, равны

$$a = 150 \frac{2\pi}{(60 \text{ сек})^2} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\text{сек}^2},$$

$$\omega = 450 \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = 15\pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

Задача 12. Маховик радиуса $R = 1,5 \text{ м}$ вращается равномерно, совершая $90 \frac{\text{обор}}{\text{мин}}$. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Имеем

$$\omega = 90 \frac{\text{обор}}{\text{мин}} = 90 \frac{2\pi}{60 \text{ сек}} = 3\pi \frac{1}{\text{сек}},$$

$$a = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$v = R\omega = 1,5 \cdot 3\pi = 4,5\pi \frac{\text{м}}{\text{сек}} = 14,13 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

$$w_t = R\epsilon = 0,$$

$$w_n = R\omega^2 = 1,5 \cdot 9\pi^2 = 13,5\pi^2 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = 133,2 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2},$$

$$w = w_n = 133,2 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Окружная скорость v направлена по касательной к окружности маховика, а ускорение w — к его центру.

Задача 13. В опытах Henriot и Huguenard ¹ была получена угловая скорость вращения, равная $11\,000 \frac{\text{обор}}{\text{сек}}$; это, повидимому, наибольшая угловая скорость, осуществленная в лабораторных условиях. В этих опытах ротором служил маленький конус с диаметром основания $d = 1,17 \text{ см}$, вращавшийся вокруг своей оси; вращение вызывалось и поддерживалось потоком воздуха. Вычислить окружную скорость v и ускорение w точки на окружности основания конуса.

Вычисляем скорость v и ускорение w по формулам

$$v = r\omega, \quad w = r\omega^2.$$

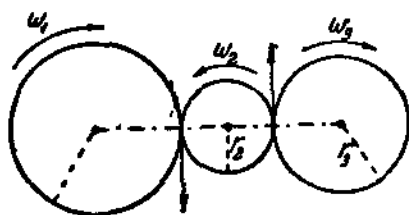
Полагая здесь

$$r = \frac{d}{2} = 0,585 \text{ см}, \quad \omega = 11\,000 \cdot \frac{2\pi}{\text{сек}} = 69\,100 \frac{1}{\text{сек}} = 691 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{сек}},$$

получаем

$$v = 40\,400 \frac{\text{см}}{\text{сек}} = 404 \frac{\text{м}}{\text{сек}}; \quad w = 279 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Задача 14. Даны три шестерни, сцепленные между собой (черт. 177). Радиусы шестерен равны соответственно $r_1 = 20 \text{ см}$, $r_2 = 12 \text{ см}$, $r_3 = 15 \text{ см}$. Первая шестерня вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_1 = 90 \frac{\text{обор}}{\text{мин}}$. Найти



Черт. 177.

угловую скорость третьей шестерни.

Так как зубчатое зацепление исключает возможность скольжения одной шестерни по другой, то в точках касания касающиеся шестерни должны иметь одинаковые окружные скорости. С другой стороны, на окружности каждой шестерни окружные скорости тоже одинаковы. Отсюда следует,

что на всех трех окружностях мы имеем равные окружные скорости. Это приводит к равенству $r_1\omega_1 = r_3\omega_3$, откуда $\omega_3 = \frac{r_1}{r_3}\omega_1 = \frac{20}{15} \cdot 90 \frac{\text{обор}}{\text{мин}} = 120 \frac{\text{обор}}{\text{мин}}$.

Чтобы определить направление вращения третьей шестерни, отметим окружные скорости точек касания A и B . Так как по заданию первая шестерня вращается по часовой стрелке, то скорость точки A направлена вниз. Этим определяется направление вращения второй шестерни: она вращается против часовой стрелки. Отсюда следует, что скорость точки B направлена вверх. Значит, третья шестерня вращается по часовой стрелке.

¹ Henriot et Huguenard, „Les grandes vitesses angulaires obtenues par les rotors sans axe solide“. Journ. de Physique, t. VIII (1927), № 11, p. 433.

ГЛАВА XVI. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

§ 89. Относительное движение точки.

Откладывая исследование более сложных случаев движения твердого тела до следующих глав, мы остановимся теперь на теории относительного движения. Результатами, которые будут установлены в настоящей главе, нам придется воспользоваться при дальнейшем изучении кинематики твердого тела.

Представим себе двух наблюдателей, из которых один сидит на палубе движущегося парохода, а другой остается неподвижным на берегу. Положим, что оба наблюдателя следят за движением какого-либо объекта, происходящим на палубе парохода, например за движением гуляющего по палубе пассажира. То движение пассажира, которое воспринимается наблюдателем, движущимся вместе с пароходом, мы назовем *относительным движением* пассажира по отношению к движущемуся пароходу; движение же того же пассажира, наблюдаемое неподвижным наблюдателем, мы назовем *абсолютным движением* пассажира.

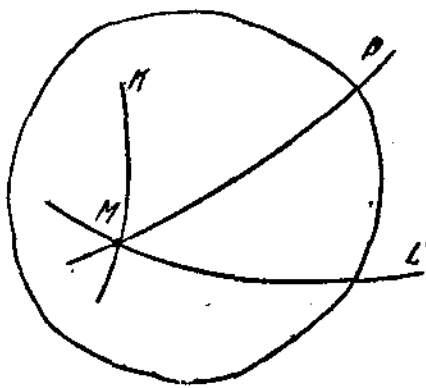
От этого конкретного примера перейдем к общим представлениям.

Под термином „*неизменяемая среда*“ мы будем понимать неограниченную среду, расстояния между какими двумя точками которой остаются неизменными. Представим себе неизменяемую среду, движущуюся каким-либо образом в пространстве, и представим себе двух наблюдателей, из которых один остается неподвижным по отношению к среде (т. е. не изменяет своего положения по отношению к точкам среды) и, следовательно, движется вместе со средою, а другой остается неподвижным в пространстве.

Положим, что оба наблюдателя следят за движением некоторой точки M (черт. 178). Для наблюдателя, движущегося вместе со средою, точка M представляется описывающей в среде кривую K , а для неподвижного наблюдателя она представляется движущейся по кривой P .

То движение точки M , которое наблюдается наблюдателем, движущимся вместе со средою, называется *относительным движением* точки M по отношению к среде, а то движение точки M , которое наблюдается неподвижным наблюдателем, называется ее *абсолютным движением*.

Кривая K , описываемая точкой M в ее относительном движении, называется ее *относительной траекторией*; кривая же P , по которой движется точка M в ее абсолютном движении, называется ее *абсолютной траекторией*. Относительную траекторию K можно определить как общее место точек среды, с которыми в последовательные моменты времени совпадает движущаяся точка M , а абсолютная траектория P

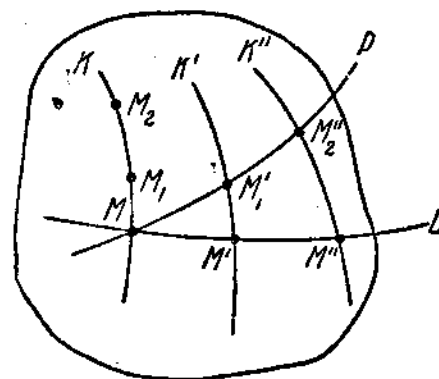


Черт. 178.

есть общее место точек неподвижного пространства, с которыми в последовательные моменты времени совпадает точка M . Относительная траектория K переносится в пространстве, двигаясь вместе со средой, абсолютная же траектория P есть кривая неподвижная.

Движение самой неизменяемой среды мы будем называть *переносным движением*. В переносном движении среды каждая ее точка описывает некоторую траекторию; в частности отметим траекторию L (черт. 178), описываемую той точкой среды, с которой в данный момент совпадает точка M . Если бы точка M не совершала относительного движения по отношению к среде, то ее абсолютное движение происходило бы по кривой L .

Покажем, что, зная относительное движение точки, а также переносное движение среды, легко определить абсолютное движение точки.



Черт. 178.

Представим себе неизменяемую среду и движущуюся в ней точку M (черт. 179). Возьмем ряд последовательных моментов времени $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$. Положим, что в момент t среда и точка M занимают положения, указанные на чертеже. Отметим относительную траекторию K и траекторию L , описываемую той точкой среды, с которой точка M совпадает в момент t .

Чтобы построить положения, занимаемые точкой M в моменты $t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$ в ее абсолютном движении, поступаем следующим образом.

Отметим на относительной траектории K положение M_1 , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$, и на траектории L положение M' , занимаемое в тот же момент той точкой среды, с которой в момент t совпадает точка M ; отметим также положение K' , занимаемое относительной траекторией K (движущейся вместе со средой) в момент $t + \Delta t$. Отложив по кривой K' от точки M' дугу $M'M'_1$, равную дуге MM_1 , мы получим положение M'_1 , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$ в ее абсолютном движении. Совершенно так же может быть построено положение M'_2 , занимаемое точкой M в ее абсолютном движении в момент $t + 2\Delta t$ и т. д. Общее место точек $M, M'_1, M'_2, \dots$ есть абсолютная траектория P .

Итак, зная относительное движение точки и переносное движение среды, мы можем построить абсолютную траекторию точки и указать положение точки на ее абсолютной траектории в любой момент времени.

Только что указанный процесс, при помощи которого определяется абсолютное движение точки по данным относительному и переносному движениям, называется *сложением движений* относительного и переносного. Абсолютное движение называется *составным* из движений относительного и переносного; относительное и переносное движения называются *составляющими* движениями. Обратный процесс замены составного движения двумя составляющими движениями называется *разложением* данного движения на два составляющих движения.

Мы назвали абсолютным движением точки то движение, которое наблюдается неподвижным наблюдателем. Мы говорим, что точка совершает абсолютное движение, если с течением времени изменяется ее положение по отношению к абсолютно неподвижным телам. Но как судить об абсолютной неподвижности этих тел? Мы подходим здесь к вопросу о том, существует ли абсолютно неподвижное пространство. Оставаясь в области кинематики, мы не можем ответить на этот вопрос; путь к его решению открывается в динамике. С точки зрения кинематики всякое движение есть движение относительное. Тем не менее, мы сохраним в дальнейшем термин „абсолютное движение“ и условимся понимать под этим термином то движение, которое наблюдается наблюдателем, неподвижным на земной поверхности; строго говоря, это движение нужно было бы назвать относительным движением по отношению к земному шару. Основания, по которым упомянутому движению может быть присвоено наименование абсолютного движения, будут изложены в курсе динамики.

§ 90. Уравнения относительного движения, относительная скорость и относительное ускорение.

К исследованию относительного движения точки мы можем применить все те методы, при помощи которых мы изучали в первых трех главах абсолютное движение точки.

Представим себе неизменяемую среду, совершающую переносное движение в пространстве, и точку M , совершающую относительное движение по отношению к среде (черт. 180). Относительное движение точки M может быть определено заданием относительной траектории K и уравнения движения

$$s_r = f(t),$$

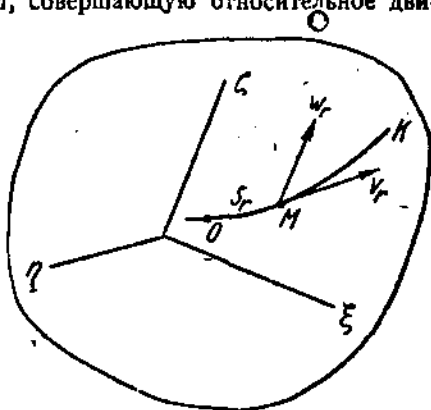
где s_r есть пройденный путь в относительном движении, отсчитанный по относительной траектории от некоторого произвольно выбранного начала O . Только что написанное уравнение мы назовем *уравнением относительного движения*.

Для определения относительного движения можно воспользоваться также координатным методом. Возьмем три взаимно-перпендикулярные координатные оси ξ , η , ζ , связанные со средой и, следовательно, движущиеся вместе со средой. Обозначая координаты точки M относительно этих осей буквами ξ , η , ζ (мы будем называть эти координаты *относительными координатами* точки M), имеем:

$$\xi = f_1(t),$$

$$\eta = f_2(t),$$

$$\zeta = f_3(t).$$



Черт. 180.

Этими уравнениями, которые мы будем называть *уравнениями относительного движения в прямоугольных координатах*, вполне определяется относительное движение точки M .

Скорость точки M в ее относительном движении мы будем называть ее *относительной скоростью* и будем обозначать v_r . Имеем

$$v_r = \left| \frac{ds_r}{dt} \right|;$$

направление скорости v_r есть направление касательной к относительной траектории, проведенной в сторону движения.

Обозначая проекции относительной скорости v_r на оси ξ, η, ζ через $v_{r\xi}, v_{r\eta}, v_{r\zeta}$, будем иметь

$$v_{r\xi} = \xi', \quad v_{r\eta} = \eta', \quad v_{r\zeta} = \zeta'.$$

Ускорение точки M в ее относительном движении мы будем называть ее *относительным ускорением* и будем обозначать w_r . Проекции $w_{r\xi}, w_{r\eta}, w_{r\zeta}$ этого ускорения на оси ξ, η, ζ определяются формулами

$$w_{r\xi} = \xi'', \quad w_{r\eta} = \eta'', \quad w_{r\zeta} = \zeta''.$$

Вообще все результаты, установленные в главах VIII—XV остаются справедливыми и в применении к относительному движению.

Скорость и ускорение точки M в ее абсолютном движении мы условимся называть ее *абсолютной скоростью* и *абсолютным ускорением*. Нашей ближайшей задачей будет установить зависимость между относительной скоростью точки и ее абсолютной скоростью, а также между относительным ускорением и абсолютным ускорением. Эти зависимости даются теоремой сложения скоростей и теоремой сложения ускорений.

§ 91. Теорема об элементарном перемещении точки. Девияция.

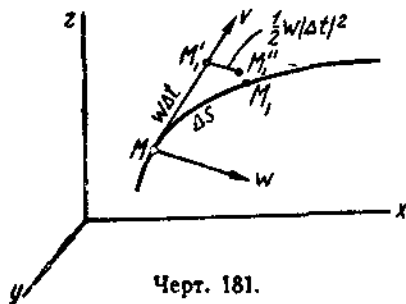
Прежде чем приступить к выводу двух упомянутых в конце предыдущего параграфа важных теорем, установим вспомогательное предложение, касающееся элементарного перемещения точки. Этим предложением мы затем воспользуемся при выводе интересующих нас теорем.

Представим себе точку M , совершающую некоторое (абсолютное или относительное) движение, определяемое уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

отнесенными к осям x, y, z (черт. 181).

Положим, что в момент t движущаяся точка занимает положение, обозначенное на чертеже буквой M , и имеет в этот момент скорость v и ускорение w ; в момент $t + \Delta t$ точка занимает положение M_1 , пройдя за время Δt дугу MM_1 , которую обозначим через Δs и назовем *элемен-*



Черт. 181.

тарным перемещением точки. Промежуток времени Δt мы будем рассматривать как малую величину первого порядка малости.

Предложим себе построить приближенно точку M_1 , предполагая, что известны точка M , а также скорость v и ускорение w . Мы покажем два приближенных построения точки M_1 — одно с точностью до малых величин первого порядка малости (включительно) и другое с точностью до малых величин второго порядка малости (включительно).

Обозначим координаты точки M через x, y, z , а координаты точки M_1 — через x_1, y_1, z_1 . Координаты x, y, z определяются уравнениями (1), координаты же x_1, y_1, z_1 находим из уравнений:

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t + \Delta t), \\y_1 &= f_2(t + \Delta t), \\z_1 &= f_3(t + \Delta t).\end{aligned}$$

Разложим величину x_1 в ряд Тейлора по степеням малой величины Δt :

$$x_1 = f_1(t) + f_1'(t) \Delta t + \frac{1}{2} f_1''(t) (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_1'''(t) (\Delta t)^3 + \dots$$

Замечая, что

$$f_1(t) = x, \quad f_1'(t) = v_x, \quad f_1''(t) = w_x,$$

где v_x и w_x суть проекции скорости v и ускорения w на ось x , получаем

$$x_1 = x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_1'''(t) (\Delta t)^3 + \dots \quad (2)$$

Точно так же находим

$$\left. \begin{aligned}y_1 &= y + v_y \Delta t + \frac{1}{2} w_y (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_2'''(t) (\Delta t)^3 + \dots \\z_1 &= z + v_z \Delta t + \frac{1}{2} w_z (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} f_3'''(t) (\Delta t)^3 + \dots\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Отбросим теперь в разложениях (2) и (3) малые величины второго и высших порядков малости, сохраняя лишь малые величины 1-го порядка малости. Мы получим приближенные формулы

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= x + v_x \Delta t, \\y_1 &= y + v_y \Delta t, \\z_1 &= z + v_z \Delta t,\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

точные до малых величин первого порядка малости (включительно).

Легко построить точку, координаты которой определяются формулами (4). Отложим от точки M по направлению скорости v отрезок MM_1' , равный $v \Delta t$; точка M_1' и есть требуемая точка. В самом деле, координаты точки M_1' равны координатам x, y, z точки M , сложенным с проекциями отрезка MM_1' на соответствующую ось, т. е.

$$\begin{aligned}x + v \Delta t \cos(v, x) &= x + v_x \Delta t, \\y + v \Delta t \cos(v, y) &= y + v_y \Delta t, \\z + v \Delta t \cos(v, z) &= z + v_z \Delta t.\end{aligned}$$

Как видно, координаты точки M_1' действительно удовлетворяют уравнениям (4).

Итак, в первом приближении, с точностью до малых величин первого порядка малости (включительно), можно заменить элементарное перемещение Δs прямолинейным отрезком, равным $v\Delta t$ и отложенным от точки M по направлению скорости v . Заменяя точку M_1 ее приближенным положением M_1' , мы делаем погрешность не ниже 2-го порядка малости.

Переходя ко второму приближению, отбросим в разложениях (2) и (3) малые величины третьего и высших порядков малости, сохраняя малые величины 1-го и 2-го порядков малости. Будем иметь приближенные формулы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2, \\ y_1 &= y + v_y \Delta t + \frac{1}{2} w_y (\Delta t)^2, \\ z_1 &= z + v_z \Delta t + \frac{1}{2} w_z (\Delta t)^2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

точные до малых величин второго порядка малости (включительно).

Чтобы построить точку, координаты которой определяются формулами (5), отложим от точки M_1' отрезок $M_1'M_1''$, равный $\frac{1}{2} w (\Delta t)^2$ и направленный параллельно ускорению w ; точка M_1'' есть искомая. Действительно, координаты точки M_1'' равны одноименным координатам точки M_1' , сложенным с проекциями отрезка $M_1'M_1''$ на соответствующую ось, т. е.

$$\begin{aligned} x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} w (\Delta t)^2 \cos(w, x) &= x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2, \\ y + v_y \Delta t + \frac{1}{2} w (\Delta t)^2 \cos(w, y) &= y + v_y \Delta t + \frac{1}{2} w_y (\Delta t)^2, \\ z + v_z \Delta t + \frac{1}{2} w (\Delta t)^2 \cos(w, z) &= z + v_z \Delta t + \frac{1}{2} w_z (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Итак, во втором приближении, с точностью до малых величин 2-го порядка малости (включительно), можно заменить элементарное перемещение Δs ломаной линией $MM_1'M_1''$. Заменяя точку M_1 ее приближенным положением M_1'' , мы делаем погрешность не ниже 3-го порядка малости.

Отрезок $M_1'M_1''$ называется девиацией движущейся точки.

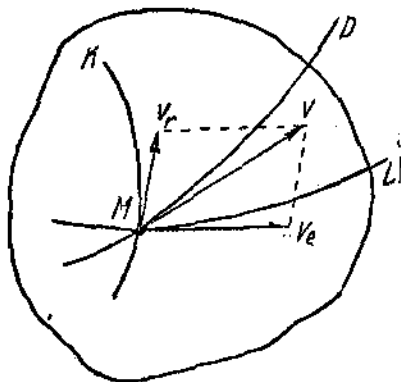
§ 92. Теорема сложения скоростей.

Представим себе неизменяемую среду и движущуюся в ней точку M (черт. 182). В момент t среда и точка M занимают то положение, которое указано на чертеже. Отметим относительную траекторию K , абсолютную траекторию P и траекторию L , описываемую той точкой среды, с которой в момент t совпадает точка M .

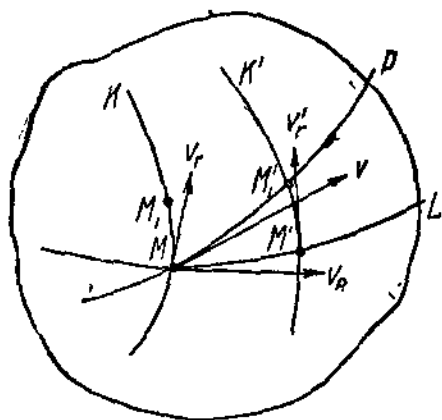
В момент t точка M имеет относительную скорость v , и абсолютную скорость v . Отметим еще скорость той точки среды, с которой совпадает точка M в данный момент; обозначим эту скорость v_r и назовем ее *переносной скоростью*; эта скорость направлена по касательной к кривой L .

Мы покажем, что *абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей*. В этом состоит *теорема сложения скоростей*.

Чтобы доказать эту теорему, построим положение точки M в момент $t + \Delta t$ (черт. 183). Отметим положение M_1 , занимаемое точкой M' в момент $t + \Delta t$ на относительной траектории K , и положение M' , занимаемое в тот же момент точкой среды, описывающей кривую L ; отметим также смещенное положение относительной траектории, перенесенной



Черт. 182.



Черт. 183.

за время Δt вместе со средою в положение K' . Отложив по кривой K' от точки M' дугу $M'M_1'$, равную MM_1 , получим положение M_1' , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$ в ее абсолютном движении.

Построим скорости v , v_r , v_r' . Относительную скорость v_r , перенесенную за время Δt вместе со средою в новое положение, обозначим через v_r' . Конечно, $v_r = v_r'$; но направления скоростей v_r и v_r' , вообще говоря, не параллельны: скорость v_r направлена по касательной к кривой K , а скорость v_r' — по касательной к кривой K' .

Будем рассматривать промежуток времени Δt как малую величину 1-го порядка малости. Пренебрегая малыми величинами 2-го и высших порядков малости, мы можем (согласно изложенному в § 89) заменить элементарные перемещения MM' , $M'M_1$, MM_1' прямолинейными отрезками, равными $v_r \Delta t$, $v_r' \Delta t$, $v \Delta t$ и направленными по скоростям v_r , v_r' , v (черт. 184).

В прямолинейном треугольнике $MM'M_1'$ сторона MM_1' равна геометрической сумме двух других сторон MM' и $M'M_1'$, т. е.

$$\overline{v \Delta t} = \overline{v_r \Delta t} + \overline{v_r' \Delta t}.$$

Это геометрическое равенство неточное, так как мы получили его

пренебрегая малыми величинами 2-го и высших порядков малости.¹ Чтобы исправить погрешность этого результата, мы должны прибавить к правой части равенства (неизвестную нам) величину 2-го порядка малости; обозначая эту величину через ϵ_2 , получаем вполне точное равенство

$$\overline{v\Delta t} = \overline{v_e\Delta t} + \overline{v_r\Delta t} + \epsilon_2.$$

Разделив обе части этого геометрического равенства на Δt , находим

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r} + \epsilon_1,$$

где ϵ_1 есть некоторая величина 1-го порядка малости.

Перейдем теперь к пределу $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t = 0$. Замечая, что

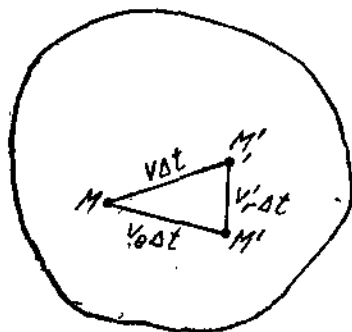
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\overline{v_r}] = \overline{v_r}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\epsilon_1] = 0,$$

получаем:

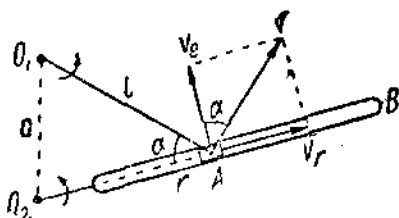
$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r},$$

т. е. абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Другими словами, *абсолютная скорость есть диагональ параллелограмма, построенного на переносной и относительной скоростях* (черт. 182). Только что упомянутый параллелограмм называется *параллелограммом скоростей*.



Черт. 184.



Черт. 185.

Задача 15. На конце кривошипа O_1A , вращающегося вокруг неподвижной оси O_1 , имеется ползун, скользящий вдоль кулисы O_2B , которая вращается вокруг неподвижной оси O_2 (черт. 185); $O_1A = l$, $O_1O_2 = a$, причем $l > a$. Кривошип O_1A вращается с угловой скоростью ω_1 ; найти угловую скорость кулисы O_2B . Обозначим искомую угловую скорость кулисы O_2B через ω_2 . Мы найдем эту угловую скорость ω_2 , если будем знать вращательную скорость какой-либо одной точки кулисы O_2B . Найдем вращательную скорость той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает конец кривошипа A .

Для этой цели будем рассматривать абсолютное движение точки A как составное из переносного движения вместе с кулисой O_2B и из от-

¹ Треугольник $MM'M_1'$ (черт. 184) на самом деле не смыкается; но мы знаем, что остающаяся невязка есть малая величина 2-го порядка малости.

носительного движения по отношению к этой кулиссе. Абсолютная скорость v точки A нам известна: это есть вращательная скорость вокруг оси O_1 ; следовательно, она равна

$$v = l\omega_1$$

и направлена перпендикулярно к кривошипу O_1A . Нас интересует переносная скорость точки A .

Строим параллелограмм скоростей, причем замечаем, что переносная скорость v , точки A (как вращательная вокруг оси O_2) перпендикулярна к кулиссе O_2B , а относительная скорость v_r должна быть направлена по касательной к относительной траектории, т. е. вдоль прямой O_2B .

Обозначая угол между скоростями v и v_r буквой α , выводим из параллелограмма скоростей

$$v_r = v \cos \alpha = l\omega_1 \cos \alpha.$$

Но так как переносная скорость v_r есть вращательная вокруг оси O_2 , то

$$v_r = r\omega_2,$$

где буквой r обозначено переменное расстояние O_2A . Следовательно

$$\omega_2 = \frac{v_r}{r} = \frac{l\omega_1 \cos \alpha}{r}.$$

Выразим еще $\cos \alpha$ через переменную величину r . Замечаем, что в треугольнике O_1AO_2 угол при вершине A равен α ; следовательно,

$$a^2 = l^2 + r^2 - 2lr \cos \alpha,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{l^2 + r^2 - a^2}{2lr} = \frac{r}{2l} \left(1 + \frac{l^2 - a^2}{r^2} \right).$$

Окончательно получаем;

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2} \left(1 + \frac{l^2 - a^2}{r^2} \right).$$

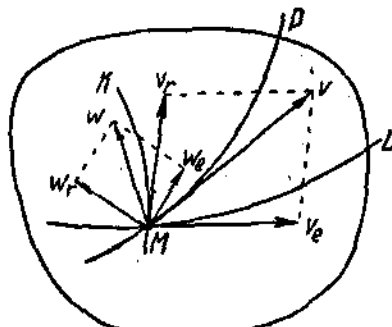
Отсюда видно, что если $\omega_1 = \text{const}$, т. е. кривошип O_1A вращается равномерно, то ω_2 есть величина переменная, т. е. кулисса O_2B вращается неравномерно. Предлагаем читателю найти $\max \omega_2$ и $\min \omega_2$, а также определить те положения механизма, при которых $\omega_2 = \omega_1$.

§ 93. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение поступательное.

Представим себе неизменяемую среду, совершающую какое-либо переносное движение в пространстве, и движущуюся в среде точку M . В данный момент точка M имеет относительное ускорение w_r и абсолютное ускорение w . Ускорение той точки среды, с которой в данный момент совпадает точка M , назовем *переносным ускорением* и обозначим w_0 . Установим зависимость между ускорениями w , w_r и w_0 .

Не рассматривая самого общего случая, мы ограничимся выводом упомянутой зависимости в двух частных случаях: 1) когда переносное движение среды поступательное и 2) когда переносное движение среды есть вращение вокруг неподвижной оси. В настоящем параграфе остановимся на первом из этих двух случаев.

Итак представим себе неизменяемую среду, движущуюся *поступательно*, и движущуюся в среде точку M (черт. 186). В момент t точка M имеет относительную скорость v_r , абсолютную скорость v , относительное ускорение w_r и абсолютное ускорение w . Отметим также переносную скорость v_e и переносное ускорение w_e .



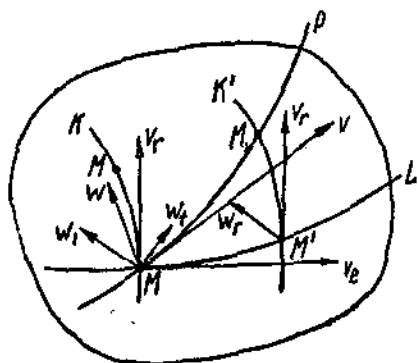
Черт. 186.

Мы покажем, что если среда движется поступательно, то *абсолютное ускорение равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений*.

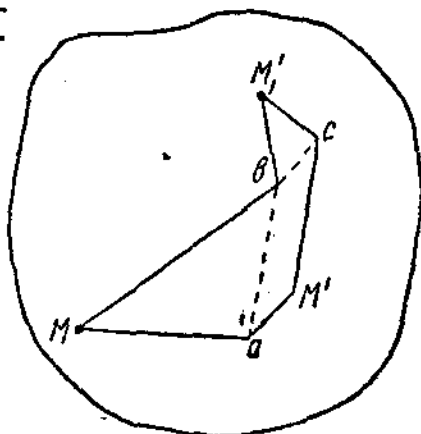
Чтобы в этом убедиться, построим (совершенно так же, как в предыдущем параграфе) положение M_1' точки M в момент $t + \Delta t$ (черт. 187). Заметим при этом, что так как среда дви-

жется поступательно, то кривая K' (смещенное положение относительной траектории) расположена параллельно кривой K ; относительная скорость v_r и относительное ускорение w_r , смещаясь вместе со средой, также остаются себе параллельными.

Рассматривая промежуток времени Δt как малую величину 1-го порядка малости и пренебрегая малы-



Черт. 187.



Черт. 188.

ми величинами 3-го и высших порядков малости, заменим каждое из элементарных перемещений MM' , MM_1' , $M'M_1'$ (согласно изложенному в § 91) ломаными линиями MaM' , MbM_1' , M'_cM_1' (черт. 188), причем

$$\overline{Ma} = \overline{v, \Delta t}, \quad \overline{aM'} = \frac{1}{2} w, (\Delta t)^2,$$

$$\overline{Mb} = \overline{v, \Delta t}, \quad \overline{bM_1'} = \frac{1}{2} w (\Delta t)^2,$$

$$\overline{M'_c} = \overline{v, \Delta t}, \quad \overline{cM_1'} = \frac{1}{2} w, (\Delta t)^2.$$

Проведем еще отрезки ab и bc . В треугольнике $Maб$ сторона Mb есть геометрическая сумма двух других сторон Ma и ab , т. е.

$$\overline{Mb} = \overline{Ma} + \overline{ab},$$

или

$$\overline{v\Delta t} = \overline{v_0\Delta t} + \overline{ab}, \quad (1)$$

С другой стороны, по теореме сложения скоростей имеем:

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{v_r},$$

откуда по умножении на Δt получаем:

$$\overline{v\Delta t} = \overline{v_0\Delta t} + \overline{v_r\Delta t}. \quad (2)$$

Сравнивая геометрические равенства (1) и (2), заключаем, что

$$\overline{ab} = \overline{v_r\Delta t}.$$

Следовательно, отрезок ab равен и параллелен отрезку $M'c$, а, значит, четырехугольник $abcM'$ есть параллелограмм; откуда следует, что

$$\overline{bc} = \overline{aM'} = \frac{1}{2} w_r (\Delta t)^2.$$

Теперь из треугольника bM'_1c выводим:

$$\overline{bM'_1} = \overline{bc} + \overline{cM'_1},$$

или

$$\frac{1}{2} w (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} w_r (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} w_r (\Delta t)^2 \quad (3)$$

При выводе этого равенства мы пренебрегали малыми величинами 3-го и высших порядков малости. Чтобы исправить погрешность полученного результата, прибавим к правой части равенства некоторую (неизвестную нам) малую величину 3-го порядка малости; обозначая эту величину через ε_3 , получаем вполне точное равенство:

$$\frac{1}{2} w (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} w_r (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} w_r (\Delta t)^2 + \overline{\varepsilon_3}.$$

Разделив обе части этого равенства на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$, найдем:

$$\overline{w} = \overline{w_r} + \overline{w_r} + \overline{\varepsilon_1},$$

где ε_1 есть малая величина 1-го порядка малости.

Переходим теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$. Так как

$$\lim [\varepsilon_1]_{\Delta t \rightarrow 0} = 0,$$

то получаем:

$$\overline{w} = \overline{w_r} + \overline{w_r},$$

т. е. абсолютное ускорение равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений.

Другими словами, абсолютное ускорение есть диагональ параллелограмма, построенного на переносном и относительном

ускорениях (черт. 186). Упомянутый параллелограмм называется *параллелограммом ускорений*.¹

Задача 16. Механизм состоит из кривошипа OA (черт. 189), вращающегося вокруг неподвижной оси O , и из горизонтального стержня BC , совершающего поступательное возвратное движение в горизонтальном направлении; на конце кривошипа имеется ползун, скользящий вдоль вертикальной кулисы DE , прикрепленной к стержню BC ; $OA = a$. Кривошип вращается равномерно с угловой скоростью ω ; найти ускорение стержня BC .

Так как стержень BC движется поступательно, то все его точки, а также точки кулисы DE имеют одинаковое ускорение; это общее для всех точек ускорение и требуется определить.

Найдем ускорение той точки кулисы DE , с которой в данный момент совпадает конец кривошипа A .

Для этой цели рассматриваем абсолютное движение точки A как составное из переносного движения вместе с кулисой DE и из относительного движения по отношению к этой кулисе. Требуется определить переносное ускорение точки A .

Абсолютное ускорение точки A нам известно: так как кривошип OA вращается равномерно, то оно состоит из одной лишь центростремительной составляющей, т. е. оно равно

$$w = a\omega^2$$

и направлено от точки A к точке O .

Имея в виду, что переносное движение кулисы DE есть движение

поступательное, мы можем воспользоваться теоремой сложения ускорений в том виде, как она только что была выведена. Строим параллелограмм ускорений, причем замечаем, что переносное ускорение w , должно быть направлено горизонтально, а относительное ускорение w' , должно быть направлено вдоль кулисы DE .

Из параллелограмма ускорений выводим

$$w_x \equiv w \cos \varphi = a\omega^2 \cos \varphi,$$

где φ есть угол поворота кривошипа OA (черт. 189). Это и есть искомое ускорение стержня BC .

Конечно, этот результат можно было бы получить и без помощи теоремы сложения ускорений. Предлагаем читателю проверить этот результат при помощи метода проекций, изложенного в § 84.

Из уравнения

$$\vec{w} = \vec{w}_x + \vec{w}'$$

следует, по умножении на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$, вполне точное равенство

$$\frac{1}{2} w (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} w_x (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} w' (\Delta t)^2.$$

Следовательно, равенство (3) не включает в себе никакой погрешности; введенный нами добавочный член a_2 на самом деле обращается в нуль.

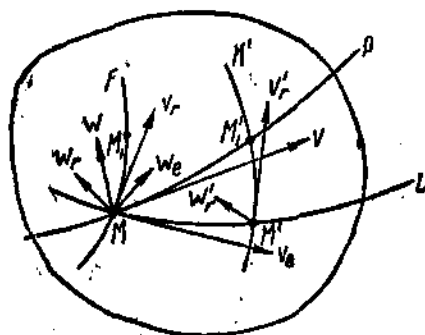
§ 94. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси. Добавочное или Кориолисово ускорение.

Обратимся теперь к рассмотрению того случая, когда переносное движение среды есть вращение вокруг неподвижной оси.

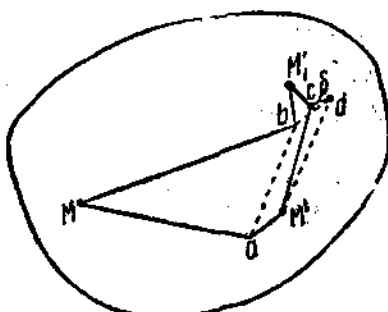
Чтобы выяснить зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорениями, будем поступать также, как в предыдущем параграфе.

Представим себе неизменяемую среду, вращающуюся вокруг неподвижной оси, и точку M , движущуюся внутри среды (черт. 190; ось вращения среды не изображена на чертеже). Положим, что в момент t среда и точка M занимают то положение, которое показано на чертеже.

Построим положение M' , занимаемое точкой M в момент $t + \Delta t$ в ее абсолютном движении. Заметим при этом, что теперь кривая K' (смещенное положение относительной траектории K) расположена, вообще говоря, непараллельно кривой K . Если среда, вращаясь вокруг своей оси,



Черт. 190.



Черт. 191.

повернулась за время Δt на угол $\Delta \varphi$, то и относительная траектория K , двигаясь вместе со средой, повернулась за время Δt вокруг оси вращения среды на тот же угол. Следовательно, кривая K' получается поворотом кривой K вокруг оси вращения среды на угол $\Delta \varphi$. Относительная скорость v_r и относительное ускорение w_r , перемещаясь вместе со средой, также поворачиваются за время Δt вокруг оси вращения среды на угол $\Delta \varphi$; смещенную относительную скорость и смещенное относительное ускорение обозначим через v'_r и w'_r .

Рассматривая промежуток времени Δt как малую величину 1-го порядка малости и пренебрегая малыми величинами 3-го и высших порядков малости, заменяем элементарные перемещения MM' , MM'_1 , $M'M'_1$ ломаными линиями MaM , MbM'_1 , $M'cM'_1$ (черт. 191), причем

$$\overline{Ma} = \overline{v \Delta t}, \quad \overline{aM'} = \frac{1}{2} \overline{w_r (\Delta t)^2},$$

$$\overline{Mb} = \overline{v'_r \Delta t}, \quad \overline{bM'_1} = \frac{1}{2} \overline{w (\Delta t)^2},$$

$$\overline{M'c} = \overline{v'_r \Delta t}, \quad \overline{cM'_1} = \frac{1}{2} \overline{w'_r (\Delta t)^2}.$$

Отложим еще от точки M' отрезок $M'd$, равный $v_s \Delta t$ и параллельный скорости v_s , т. е.

$$\overline{M'd} = \overline{v_s \Delta t},$$

и проведем прямые ab , bd , dc .

Из треугольника Mab мы заключаем, что

$$\overline{Mb} = \overline{Ma} + \overline{ab}$$

или

$$\overline{v \Delta t} = \overline{v_s \Delta t} + \overline{ab}. \quad (1)$$

С другой стороны, по теореме сложения скоростей имеем:

$$\overline{v} = \overline{v_s} + \overline{v_r}$$

откуда по умножении на Δt получаем:

$$\overline{v \Delta t} = \overline{v_s \Delta t} + \overline{v_r \Delta t}. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$\overline{ab} = \overline{v_r \Delta t}.$$

Следовательно,

$$\overline{ab} = \overline{M'd},$$

т. е. четырехугольник $abdM'$ есть параллелограмм. Отсюда следует, что

$$\overline{bd} = \overline{aM'} = \frac{1}{2} \overline{w_s (\Delta t)^2}.$$

Теперь из четырехугольника bM'_1cd находим

$$\overline{bM'_1} = \overline{bd} + \overline{dc} + \overline{cM'_1}$$

или, обозначая для краткости отрезок dc буквой δ ,

$$\frac{1}{2} \overline{w (\Delta t)^2} = \frac{1}{2} \overline{w_s (\Delta t)^2} + \frac{1}{2} \overline{w'_s (\Delta t)^2} + \overline{\delta}.$$

Это равенство неточное, так как при его выводе мы пренебрегали малыми величинами 3-го и высших порядков малости.¹ Чтобы исправить погрешность полученного результата, прибавляем к правой части равенства малую величину 3-го порядка малости, которую обозначаем через ϵ_2 . Тогда получаем вполне точный результат:

$$\frac{1}{2} \overline{w (\Delta t)^2} = \frac{1}{2} \overline{w_s (\Delta t)^2} + \frac{1}{2} \overline{w'_s (\Delta t)^2} + \overline{\delta} + \overline{\epsilon_2}.$$

Разделяя это уравнение на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$, находим:

$$\overline{w} = \overline{w_s} + \overline{w'_s} + \frac{2\overline{\delta}}{(\Delta t)^2} + \overline{\epsilon_1}.$$

¹ Четырехугольник bM'_1cd на самом деле не замыкается; остающаяся невязка есть малая величина 3-го порядка малости.

Переходим теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$. Имея в виду, что

$$\lim (\overline{w_r})_{\Delta t \rightarrow 0} = \overline{w_r}, \quad \lim [a_1]_{\Delta t \rightarrow 0} = 0,$$

и обозначая

$$\lim \left[\frac{2\delta}{(\Delta t)^2} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} = \overline{w_c}, \quad (3)$$

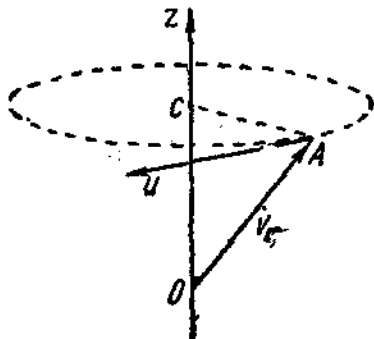
получаем

$$\overline{w} = \overline{w_r} + \overline{w_r} + \overline{w_c}.$$

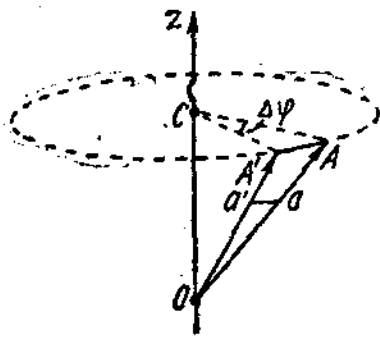
Величина w_c называется *добавочным* или *Кориолисовым ускорением*.

Итак, если переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси, то абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного и Кориолисова.

Нам остается вычислить величину Кориолисова ускорения и определить его направление.



Черт. 192.



Черт. 193.

Кориолисово ускорение w_c определяется геометрическим равенством (3); следовательно, его величина равна

$$w_c = \lim \left[\frac{2\delta}{(\Delta t)^2} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} \quad (4)$$

направление же совпадает с предельным направлением отрезка δ .

Покажем, что как величина, так и направление Кориолисова ускорения могут быть найдены при помощи следующего простого построения.

Представим себе ось вращения среды; назовем ее осью z (черт. 192). От некоторой точки O , лежащей на оси z , отложим отрезок OA , геометрически равный относительной скорости v_r , и найдем вращательную (вокруг оси z) скорость той точки A среды, которая совпадает с концом A построенного отрезка; обозначим эту вращательную скорость буквой u .

Мы покажем, что

$$\overline{w_c} = 2u,$$

т. е. Кориолисово ускорение w_c геометрически равно удвоенной вращательной (вокруг оси z) скорости точки A .

Чтобы в этом убедиться, построим положение точки A в момент $t + \Delta t$. Так как среда повернулась за время Δt на угол $\Delta\varphi$, то мы получим смещенное положение A' точки A , повернув радиус OA окружности, описываемой точкой A , на угол $\Delta\varphi$ в сторону вращения среды (черт. 193). Отрезок OA' геометрически равен смещенной относительной скорости v_r .

Величина скорости u найдется по формуле

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\cup AA'}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0}.$$

Проведем хорду AA' ; имеем:

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\cup AA'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{AA'}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0},$$

так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\cup AA'}{AA'} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} = 1.$$

Отложим от точки O по направлениям OA и OA' отрезки Oa и Oa' (черт. 193), где

$$\overline{Oa} = \overline{v_r \Delta t}, \quad \overline{Oa'} = \overline{v_r' \Delta t}.$$

Сравним треугольник Oaa' на черт. 193 с треугольником $M'dc$ на черт. 191. Стороны Oa и Oa' одного треугольника геометрически равны сторонам $M'd$ и $M'c$ другого треугольника; следовательно, геометрически равны и их третьи стороны, т. е.

$$\overline{aa'} = \overline{dc} = \delta.$$

Теперь из подобия треугольников OAA' и Oaa' заключаем, что

$$\frac{AA'}{aa'} = \frac{OA}{Oa},$$

откуда

$$AA' = aa' \frac{OA}{Oa} = \delta \frac{v_r}{v_r \Delta t} = \frac{\delta}{\Delta t}.$$

Следовательно, получаем

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{AA'}{\Delta t} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\delta}{(\Delta t)^2} \right]_{\Delta t \rightarrow 0}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (4), находим, что

$$w_c = 2u.$$

С другой стороны, направление скорости u , как направление касательной к окружности, описываемой точкой A , есть предельное направление хорды AA' ; направление же Кориолисова ускорения w_c есть предельное направление отрезка δ , т. е. отрезка aa' . Но отрезки AA' и aa' параллельны; следовательно, параллельны и их предельные направления, т. е. скорость u параллельна Кориолисову ускорению w_c .

Итак, Кориолисово ускорение ω , не только численно, но и геометрически равно удвоенной вращательной скорости ω :

$$\overline{\omega} = 2\omega.$$

Пользуясь полученным результатом, вычислим величину Кориолисова ускорения, вводя в расчет угловую скорость вращения среды. Обозначим угловую скорость среды буквой ω , имеем (черт. 192),

$$\omega = CA \cdot \omega.$$

Но из треугольника OAC следует

$$CA = v \sin(\varphi, z).$$

Следовательно,

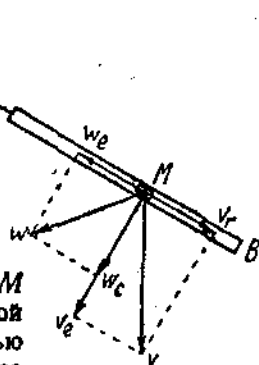
$$\omega = v \cdot \omega \sin(\varphi, z).$$

Удвоив этот результат, получаем для Кориолисова ускорения формулу

$$\overline{\omega} = 2v \cdot \omega \sin(\varphi, z).$$

Что касается направления Кориолисова ускорения, важно отметить, что Кориолисово ускорение $\overline{\omega}$ направлено перпендикулярно к относительной скорости v , и к оси вращения среды z .

Задача 17. Кулисса OB (черт. 194) равномерно вращается вокруг оси O (в сторону, указанную стрелкой) с угловой скоростью ω ; ползун M движется вдоль кулисы OB от O к B с постоянной относительной (по отношению к кулиссе) скоростью $v_r = c$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна M в тот момент, когда $MO = a$.



Черт. 194.

Рассматриваем абсолютное движение точки M как составное из переносного движения вместе с кулиссой OB и из относительного движения по отношению к кулиссе.

Для нахождения абсолютной скорости точки M пользуемся теоремой сложения скоростей. Найдем переносную скорость точки M как вращательную вокруг оси O ; она равна

$$v_e = a\omega$$

и направлена перпендикулярно к кулиссе OB .

Абсолютная скорость v есть диагональ прямоугольника, построенного на относительной и переносной скоростях. Следовательно,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{c^2 + a^2\omega^2}.$$

Переходя к вычислению абсолютного ускорения точки M , обращаемся к теореме сложения ускорений. Так как переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси O , то абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного, переносного и Кориолисова ускорений. Вычисляем каждое из этих ускорений в отдельности.

Так как относительное движение точки M есть движение прямолинейное и равномерное, то

$$\overline{w}_r = 0.$$

Так как переносное движение есть равномерное вращение, то переносное ускорение w , есть ускорение центростремительное; оно равно $w_r = a\omega^2$ и направлено к точке O .

Наконец, чтобы найти Кориолисово ускорение w_c , откладываем от точки O отрезок OA , геометрически равный относительной скорости v , и находим вращательную (вокруг оси O) скорость u точки A ; она равна

$$u = v\omega = c\omega$$

и направлена перпендикулярно к кулиссе OB . Следовательно, Кориолисово ускорение равно

$$w_c = 2c\omega$$

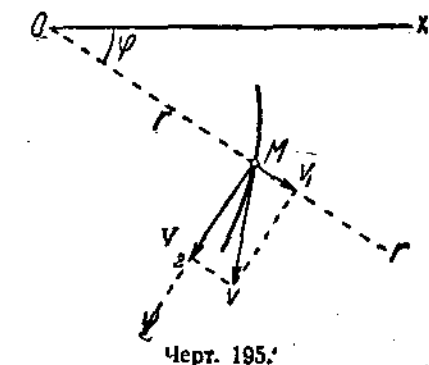
и также направлено перпендикулярно к кулиссе OB .

Абсолютное ускорение w есть диагональ прямоугольника, построенного на переносном и Кориолисовом ускорениях. Следовательно,

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_c^2} = \sqrt{a^2\omega^4 + 4c^2\omega^2}.$$

§ 95. Проекции скорости и ускорения на оси полярных координат.

В некоторых случаях представляется удобным применять для определения плоского движения точки не декартовы, а полярные координаты; об этом уже было сказано несколько слов в § 74. Для определения скорости и ускорения плоского движения точки в тех случаях, когда это движение задано в полярных координатах, можно с пользой применить теорему сложения скоростей и теорему сложения ускорений.



Положим, что плоское движение точки M (черт. 195) задано уравнениями движения в полярных координатах

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t),$$

и остановимся сначала на вычислении скорости точки M .

Продолжим радиус-вектор точки M в сторону возрастающих r и проведем через точку M прямую, перпендикулярную к радиусу-вектору, которой припишем направление в сторону возрастающих φ . Построенные

таким образом при точке M оси называются *осями полярных координат* (заметим, что оси полярных координат — в отличие от осей декартовых координат — изменяют свое направление при переходе от точки к точке). Обозначим проекции скорости v точки M на оси r и φ через v_1 и v_2 . Очевидно, что если мы сумеем вычислить проекции v_1 и v_2 , то мы будем знать как величину, так и направление скорости v . Таким образом вопрос об определении скорости точки M сводится к вычислению проекций этой скорости на оси полярных координат.

Для вычисления проекций v_1 и v_2 воспользуемся теоремой сложения скоростей.

Разложим абсолютное движение точки M на два составляющих движения: на переносное движение вместе с радиусом-вектором r и на относительное движение вдоль этого радиуса-вектора. Для этого вообразим себе прямолинейную кулису, которая вращается вокруг полюса O и по направлению постоянно совпадает с радиусом-вектором r . Переносное движение точки M вместе с этой воображаемой кулисой будем называть ее переносным движением вместе с радиусом-вектором r ; относительное же движение точки M вдоль кулисы назовем ее относительным движением вдоль радиуса-вектора.

По теореме сложения скоростей абсолютная скорость v точки M равна диагонали параллелограмма, построенного на относительной и переносной скоростях v_r и v_φ .

Относительная скорость v_r точки M по отношению к ее радиусу-вектору (или по отношению к воображаемой кулиссе) направлена по оси r и равна

$$v_r = r'$$

(так как r есть пройденный путь в относительном движении); переносная же скорость v_φ , как вращательная вокруг точки O , направлена по оси φ и равна

$$v_\varphi = r\varphi'$$

(так как φ есть угол поворота во вращательном движении радиуса-вектора или воображаемой кулисы).

Имея в виду, что скорости v_r и v_φ направлены соответственно по осям r и φ , мы заключаем, что параллелограмм, построенный на этих скоростях, совпадает с параллелограммом, построенным на черт. 195 на скоростях v_1 и v_2 . Следовательно,

$$v_1 = v_r, \quad v_2 = v_\varphi,$$

откуда

$$v_1 = r', \quad v_2 = r\varphi'. \quad (1)$$

Таковы формулы, определяющие проекции скорости на оси полярных координат.

Определив проекции v_1 и v_2 по только что написанным формулам, находим величину скорости v по формуле

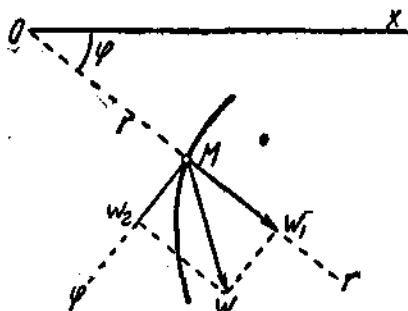
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}.$$

Перейдем к нахождению ускорения точки M .

Обозначим проекции ускорения w точки M на оси r и φ через w_1 и w_2 (черт. 196) и займемся вычислением этих проекций.

Разложим опять абсолютное движение точки M на переносное (вращательное) движение вместе с радиусом-вектором r и на относительное движение вдоль радиуса-вектора. По теореме сложения ускорений абсолютное ускорение w точки M складывается из трех ускорений: относительного ускорения w_r , переносного ускорения w_φ и Кориолисова ускорения w_φ' :

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_\varphi + \vec{w}_\varphi'.$$



Черт. 196.

Найдем каждое из этих трех составляющих ускорений (черт. 197).
Относительное ускорение w_r , направлено по оси r и равно

$$w_r = r''.$$

Переносное ускорение w_e в свою очередь складывается из касательной составляющей w_{en} , направленной по оси φ , и нормальной составляющей w_{en} , направленной по отрицательной оси r (к центру вращения O): эти составляющие равны

$$w_{en} = r\varphi'', \quad w_{en} = r\varphi'^2.$$

Наконец, Кориолисово ускорение направлено по оси φ и равно

$$w_c = 2v_r\varphi' = 2r'\varphi'.$$

Спроектируем теперь абсолютное ускорение w , а также его составляющие w_r , w_e и w_c на оси r и φ . Имеем в виду, что проекция геометрической суммы равна сумме проекций составляющих, получим

$$w_1 = r'' - r\varphi'^2, \quad w_2 = r\varphi'' + 2r'\varphi'. \quad (2)$$

Этими формулами определяются проекции ускорения на оси полярных координат. Величину ускорения найдем по формуле

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}.$$

Задача 18. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями

$$r = at^3, \quad \varphi = bt^3,$$

где a и b — постоянные величины. Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

Исключая время из заданных уравнений движения, получаем

$$r = \frac{a}{b} \varphi.$$

Это — уравнение архимедовой спирали.

Переходя к определению скорости, находим проекции скорости v на оси полярных координат по формулам (1):

$$v_1 = r' = 3at^2, \quad v_2 = r\varphi' = 3abt^3.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 3at \sqrt{1 + b^2 t^2}.$$

Далее находим проекции ускорения w на оси полярных координат по формулам (2):

$$w_1 = r'' - r\varphi'^2 = 6a - 4ab^2 t^4,$$

$$w_2 = r\varphi'' + 2r'\varphi' = 6abt^2 + 8abt^2 = 14abt^2.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(6a - 4ab^2 t^4)^2 + 100a^2 b^2 t^4} = \\ &= 2a \sqrt{1 + 21b^2 t^4 + 4b^4 t^8}. \end{aligned}$$

§ 96. Относительное движение твердого тела.

Представим себе твердое тело A , совершающее некоторое движение в пространстве, а также движущуюся неизменяемую среду B . Затем представим себе двух наблюдателей: одного, неподвижного по отношению к среде B и движущегося вместе со средою, и другого — неподвижного в пространстве. Движение тела A , наблюдаемое наблюдателем, движущимся вместе со средою, мы называем *относительным движением* тела A по отношению к среде B ; движение же тела A , наблюдаемое неподвижным наблюдателем, мы называем *абсолютным движением* тела A . Движение самой среды B мы назовем *переносным движением*.

Абсолютное движение тела A называется *составным* из движений относительного и переносного: последние два движения получают наименование *составляющих движений*.

Если мы отметим в теле A какую-либо точку M , то абсолютное движению этой точки также можно рассматривать как составное из относительного движения по отношению к среде B и из переносного движения самой среды. Абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки M найдутся при помощи теоремы сложения скоростей и теоремы сложения ускорений.

Понятие составного движения твердого тела можно распространить на случай какого угодно числа составляющих движений.

Например, представим себе твердое тело A и две неизменяемые среды B и C , движущиеся в пространстве. Абсолютное движение тела A мы назовем *составным* из следующих трех движений: относительного движения тела A по отношению к среде B , относительного движения среды B по отношению к среде C и переносного движения среды C ; эти три движения называются *составляющими движениями*.

Так же точно распространяется понятие составного движения на случай какого угодно числа составляющих движений.

ГЛАВА XVII.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

§ 97. Разложение плоского движения на поступательное движение и на вращение. Уравнения плоского движения. Угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры.

В главе XV мы рассмотрели два простейших типа движения твердого тела: движение поступательное и вращение вокруг неподвижной оси. Перейдем теперь к изучению других более сложных случаев движения твердого тела. В настоящей главе мы рассмотрим так называемое *плоское движение* твердого тела.

Движение твердого тела A (черт. 198) называется *плоским* в том случае, если плоская фигура S , получаемая в сечении тела некоторой неподвижной плоскостью P , во все время движения остается в этой плоскости. Движение тела A называется в этом случае также *параллельным неподвижной плоскости P* .

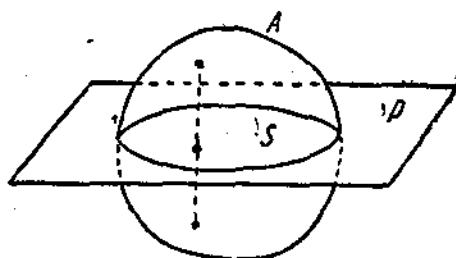
Очевидно, что вращение твердого тела вокруг неподвижной оси есть частный случай плоского движения. Плоское движение твердого тела представляет значительный интерес с точки зрения приложений; в боль-

шинстве существующих механизмов отдельные части механизма совершают плоское движение.

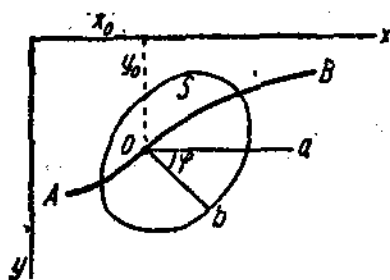
Движение тела A , движущегося параллельно неподвижной плоскости P , вполне определяется движением плоской фигуры S ; все точки тела, лежащие на одном перпендикуляре в плоскости P , движутся тождественным образом. В виду этого мы можем ограничиться в дальнейшем изучением движения плоской фигуры S в плоскости P ; рассматриваемый теперь случай движения твердого тела можно назвать также „движением плоской фигуры в ее плоскости“.

Покажем, что *плоское движение твердого тела можно рассматривать как составное из поступательного движения и из вращения*.

Представим себе плоскую фигуру S (черт. 199), совершающую не которое движение в плоскости чертежа. Возьмем на этой фигуре какую-нибудь (произвольную) точку, которую обозначим буквой O и назовем



Черт. 198.



Черт. 199.

полюсом. Положим, что при движении фигуры S полюс O описывает кривую AB . Затем представим себе неизменяемую среду, которая движется *поступательно* вместе с полюсом O . Фигура S , совершая свое абсолютное движение в данной плоскости, вместе с тем совершает некоторое относительное движение по отношению к только-что упомянутой среде; это относительное движение по отношению к среде, движущейся поступательно вместе с полюсом O , условимся называть для сокращения речи „относительным движением по отношению к полюсу O^* “. Таким образом абсолютное движение фигуры S представляется как составное из переносного движения вместе с полюсом O и из относительного движения по отношению к этому полюсу.

Переносное движение вместе с полюсом O есть движение поступательное; так как в относительном движении полюс O остается в (относительном) покое, то относительное движение фигуры S есть вращение вокруг точки O (или, точнее, вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости чертежа). Итак, абсолютное движение фигуры S представляется как составное из поступательного движения вместе с полюсом O и из вращения вокруг этого полюса.

Поступательная часть движения фигуры S вполне определяется движением самого полюса O . Обозначим координаты точки O , отнесенные к прямоугольным осям x и y , через x_0 , y_0 ; движение полюса O , а вместе

с тем поступательная часть движения плоской фигуры вполне определяется уравнением движения в прямоугольных координатах

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы определить вращательную часть движения фигуры S , составим уравнение вращения. Для этого проведем через полюс O две полупрямые Oa и Ob , из которых первая остается в относительном покое (т. е. движется поступательно вместе с полюсом O), а вторая связана с фигурой S и вместе с нею вращается вокруг полюса O^1 . Угол между полупрямыми Oa и Ob обозначим через φ и назовем углом поворота¹. Вращение фигуры S вокруг полюса O определяется уравнением вращения

$$\varphi = f_3(t). \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) вполне определяется движение фигуры S . Назовем эти уравнения *уравнениями плоского движения твердого тела*.

Угловая скорость ω и угловое ускорение $\dot{\omega}$ вращения фигуры S вокруг полюса O определяются известными формулами:

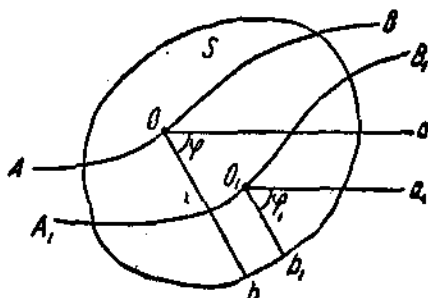
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

За полюс O мы выбрали совершенно произвольную точку плоской фигуры; любая точка плоской фигуры может быть взята за полюс. Принимая различные точки плоской фигуры за полюсы, мы получаем бесчисленное множество разложений плоского движения на поступательную и вращательную части. Конечно, с изменением полюса изменяется поступательная часть движения плоской фигуры. Мы покажем теперь, что *вращательная часть движения плоской фигуры не зависит от выбора полюса*.

Представим себе плоскую фигуру S , совершающую некоторое движение в плоскости чертежа (черт. 200). Возьмем за полюс точку O , описывающую кривую AB , и составим уравнение вращения вокруг этого полюса. Для этого строим угол поворота φ , проведем полупрямую Oa которая движется поступательно вместе с полюсом O , и полупрямую Ob связанную с фигурой S ; получаем уравнение вращения вокруг полюса O

$$\varphi = f_3(t).$$

Теперь возьмем за полюс какую-нибудь точку O_1 , описывающую при движении фигуры S кривую A_1B_1 . Составим уравнение вращения вокруг этого нового полюса. Чтобы построить угол поворота вокруг



Черт. 200.

¹ Полупрямая Oa остается себе параллельной во все время движения; на черт. 199 она проведена параллельно неподвижной оси x .

² Угол поворота φ будем считать положительным, когда он отложен от полупрямой Oa по направлению вращения часовой стрелки.

полюса O_1 , мы должны провести полупрямые O_1a_1 и O_1b_1 , на которых первая движется поступательно вместе с полюсом O_1 , а вторая связана с фигурой S . Так как выбор этих полупрямых находится в нашем распоряжении, то проведем $O_1a_1 \parallel Oa$ и $O_1b_1 \parallel Ob$. В таком случае во все время движения полупрямые Oa и O_1a_1 будут оставаться параллельными (ибо обе движутся поступательно), а также полупрямые Ob и O_1b_1 будут оставаться параллельными (ибо обе связаны с фигурой S). Обновляя угол между полупрямыми O_1a_1 и O_1b_1 через φ_1 , мы будем иметь во все время движения

$$\varphi_1 = \varphi$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = f_3(t).$$

Итак, уравнение вращения вокруг полюса O_1 тождественно с уравнением вращения вокруг полюса O , т. е. вращательная часть движения плоской фигуры S не зависит от выбора полюса.

Обозначая угловую скорость и угловое ускорение вращения вокруг полюса O через ω и ε , а угловую скорость и угловое ускорение вращения вокруг полюса O_1 через ω_1 и ε_1 , имеем:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

т. е. угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры в ее вращении вокруг какого-либо полюса не зависят от выбора полюса. Общие для всех полюсов угловую скорость ω и угловое ускорение ε мы будем называть просто *угловой скоростью* и *угловым ускорением плоской фигуры* (не делая при этом никаких указаний на то, какая точка фигуры берется за полюс).

§ 98. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей.

Обратимся к рассмотрению скоростей различных точек плоской фигуры в данный момент.

Представим себе движение плоской фигуры S (черт. 201) разложенным на переносное движение вместе с полюсом O и на относительное движение по отношению к этому полюсу. Скорость какой-либо точки M плоской фигуры может быть найдена при помощи теоремы сложения скоростей; абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме ее перенесенной и относительной скоростей.

Так как в данном случае переносное движение есть движение поступательное, то переносная скорость точки M геометрически равна скорости полюса O ; обозначим эту скорость через v_0 . А так как относительное движение есть вращение вокруг полюса O , то относительная скорость v_r есть вращательная скорость вокруг этого полюса; она равна

$$v_r = OM \cdot \omega,$$

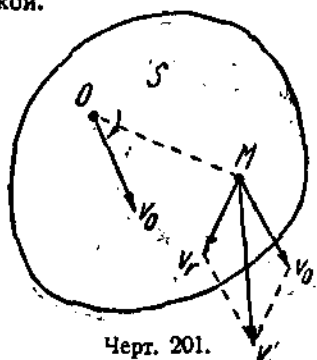
где ω есть угловая скорость плоской фигуры и направлена перпендикулярно к отрезку OM в сторону вращения фигуры S (на чертеже направление вращения фигуры S указано стрелкой).

Абсолютная скорость v точки M есть диагональ параллелограмма, построенного на скоростях v_0 и v_r .

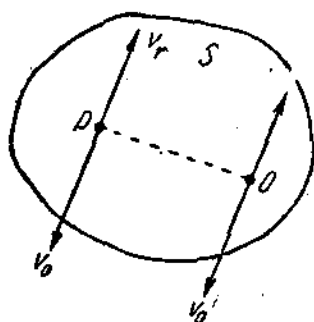
Итак, мы получаем следующую теорему: *скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости данной точки вокруг этого полюса.*

Пользуясь этим результатом, покажем, что во всякий момент существует точка плоской фигуры, скорость которой в этот момент равна нулю.

Представим себе плоскую фигуру S , совершающую некоторое движение в плоскости чертежа (черт. 202). Возьмем за полюс точку O и отметим скорость полюса v_0 ; угловую скорость фигуры S обозначим через ω ; направление вращения вокруг полюса O указано на чертеже стрелкой.



Черт. 201.



Черт. 202.

Отложим от точки O перпендикулярно к скорости v_0 отрезок $OP = \frac{v_0}{\omega}$ в такую сторону, чтобы для наблюдателя, смотрящего от P к O , скорость полюса представлялась направленной в сторону вращения фигуры S (на черт. 202 по часовой стрелке). Легко видеть, что скорость точки P равна нулю.

В самом деле, вращательная скорость v_r точки P вокруг полюса O равна

$$v_r = OP \cdot \omega = \frac{v_0}{\omega} \cdot \omega = v_0,$$

направление же этой вращательной скорости, как видно из чертежа, противоположно направлению скорости v_0 . Следовательно, абсолютная скорость точки P , равная геометрической сумме скоростей v_0 и v_r , равна нулю.

Точка P , скорость которой в данный момент равна нулю, называется мгновенным центром скоростей¹.

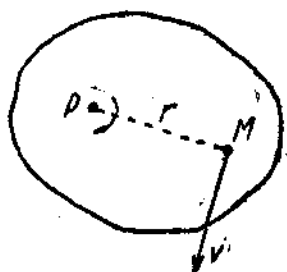
¹ Заметим, что если $\omega = 0$, $OP = \frac{v_0}{\omega} = \infty$ и, следовательно, в этом случае мгновенного центра скоростей не существует (или он находится в бесконечности). Если $\omega = 0$, то вращательные скорости всех точек плоской фигуры вокруг

Представим себе теперь, что мгновенный центр скоростей P взят за полюс. Применяя теорему, установленную в начале этого параграфа, и имея в виду, что скорость полюса теперь равна нулю, мы получаем следующий результат: *скорость любой точки плоской фигуры есть вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей*. Обозначая расстояние PM точки M от мгновенного центра скоростей P буквой r (черт. 203), заключаем, что скорость v точки M равна

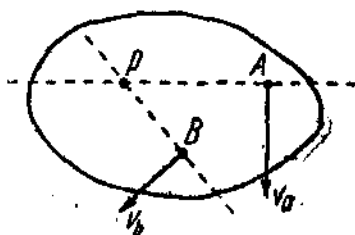
$$v = r\omega$$

и направлена перпендикулярно к отрезку PM в сторону вращения плоской фигуры.

Итак, в каждый данный момент скорости точек плоской фигуры таковы, как будто бы фигура совершала простое вращение вокруг неподвижной точки P ; поэтому-то точка P и называется „центром скоростей“. Словом „мгновенный“ мы подчеркиваем, что точка P является центром скоростей лишь для данного момента; различным моментам времени соответствуют различные „мгновенные“ центры скоростей.



Черт. 203.



Черт. 204.

Мы видим, что скорости всех точек плоской фигуры вполне определены, если для данного момента известны мгновенный центр скоростей P и угловая скорость фигуры ω .

Что касается мгновенного центра скоростей, то весьма часто он может быть найден следующим простым способом. Из чертежа (черт. 203) видно, что мгновенный центр скоростей P находится на перпендикуляре, восстановленном в точке M к направлению ее скорости. Отсюда следует, что, если известны направления скоростей v_A и v_B двух точек плоской фигуры A и B (черт. 204), то мгновенный центр скоростей P найдется в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям скоростей v_A и v_B . Этим простым приемом часто удается построить мгновенный центр скоростей.

В приложениях нередко приходится иметь дело с движением плоской фигуры, периметр которой катится без скольжения по некоторой неподвижной кривой (например — подвижная шестерня, катящаяся по окружности неподвижной шестерни). И в этом случае легко определить мгновенный центр скоростей подвижной фигуры; он находится в точке касания катящегося периметра и неподвижной кривой.

В самом деле, представим себе плоскую фигуру S , ограниченную произ-

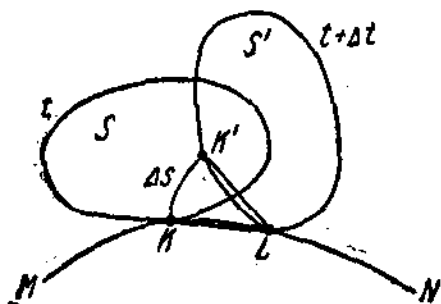
вольным полюсом O равны нулю, откуда следует, что абсолютные скорости всех точек плоской фигуры геометрически равны скорости полюса. Другими словами, в случае $\omega = 0$ все точки плоской фигуры имеют геометрически равные скорости.

вольным периметром, который катится без скольжения по неподвижной кривой MN (черт. 205). Отметим положение S и S' , занимаемые плоской фигурой в моменты t и $t + \Delta t$; в момент t точкой касания подвижной и неподвижной кривых является точка K , в момент $t + \Delta t$ точкой касания служит точка L . Покажем, что скорость точки K в момент t равна нулю.

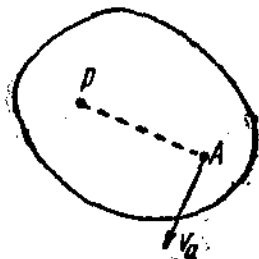
В момент $t + \Delta t$ точка K катящегося периметра занимает положение K' ; за время Δt она прошла путь KK' , который обозначим через Δs . Обозначая скорость точки K в момент t через v , имеем

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right].$$

Так как фигура S катится по кривой MN без скольжения, то дуга $K'L$ равна дуге KL . Проведем хорды KL и $K'L$; пренебрегая малыми величинами высших порядков малости, мы можем считать, что эти хорды



Черт. 205.



Черт. 206.

также равны. Пренебрегая опять малыми величинами высших порядков малости, мы можем рассматривать дугу KK' как дугу окружности радиуса $KL = K'L$ с центром в точке L . В таком случае, обозначая угол между хордами KL и $K'L$ через α , будем иметь приближенное равенство

$$\Delta s = KL \cdot \alpha.$$

Будем теперь рассматривать промежуток времени Δt как малую величину 1-го порядка малости. Отрезок KL и угол α будут также малыми величинами 1-го порядка малости; дуга же Δs , как видно из последнего равенства, будет малой величиной 2-го порядка малости. Следовательно, отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть малая величина 1-го порядка малости, откуда сле-

дует, что $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = 0$.

Итак, скорость точки K в момент t равна нулю. А это и значит, что точка K есть мгновенный центр скоростей для момента t .

В заключение этого параграфа заметим, что, если мгновенный центр скоростей для данного момента известен, что для определения угловой скорости плоской фигуры достаточно знать величину скорости какой-либо одной точки фигуры. Положим, что нам известна скорость v_a

точки A (черт. 206). Так как скорость v_a есть вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей P , то

$$v_a = PA \cdot \omega,$$

где ω есть искомая угловая скорость плоской фигуры. Отсюда

$$\omega = \frac{v_a}{PA}.$$

Итак, для определения угловой скорости плоской фигуры достаточно разделить скорость какой-либо одной точки фигуры на расстояние этой точки до мгновенного центра скоростей.

Задача 19. Кривошипный механизм состоит из кривошипа OA , вращающегося вокруг оси O , шатуна AB и ползуна B , скользящего по направляющей прямой ON (черт. 207); $OA = r$, $AB = l$. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω_1 . Найти мгновенный центр скоростей и угловую скорость ω_2 шатуна AB .

Нам известны направления скоростей двух точек шатуна A и B : скорость точки A перпендикулярна к кривошипу OA , а скорость точки B направлена по прямой ON . Восставим в точках A и B перпендикуляры к направлениям этих скоростей; точка пересечения P только-что проведенных прямых и есть мгновенный центр скоростей шатуна.

Чтобы найти угловую скорость шатуна ω_2 , обратимся к скорости точки A . Так как точка A принадлежит к кривошипу OA , то ее скорость v_a есть вращательная скорость вокруг точки O , и, следовательно,

$$v_a = OA \cdot \omega_1 = r\omega_1.$$

Но так как точка A принадлежит и к шатуну AB , то ее скорость v_a в то же время должна быть вращательной скоростью вокруг точки P , т. е.

$$v_a = AP \cdot \omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{v_a}{AP} = \frac{r\omega_1}{AP}.$$

Затем, опуская из точки A перпендикуляры AK и AL на прямые BP и ON и обозначая $\angle AON$ (угол поворота кривошипа) буквой φ , имеем

$$AP = \frac{AK}{\cos \varphi},$$

$$AK = LB = \sqrt{AB^2 - AL^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$$

и, следовательно,

$$AP = \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

Окончательно получаем

$$\omega^2 = \frac{r\omega_1 \cos \varphi}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}.$$

После того как найдены мгновенный центр скоростей P и угловая скорость ω , мы можем легко определить скорость любой точки шатуна AB , как вращательную скорость вокруг мгновенного центра P .

Задача 20. На вал O (черт. 208) насажен кривошип OA , соединенный с шатуном AB . На конце B шатун сочленен с ползуном, скользящим вдоль прямолинейной кулисы. В точке C шатун соединен шарнирно с тягой CD , передающей движение посредством ползуна D и вертикального штока DE золотнику E^1 . Дана скорость v_a точки A ; требуется определить скорость золотника E .

Так как стержень DE движется поступательно, то скорость золотника E равна скорости точки D . Найдем эту скорость.

Сначала найдем скорость точки C . Для этого построим мгновенный центр скоростей P_1 шатуна AB . Направления скоростей точек A и B нам известны; мгновенный центр P_1 определится как точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A и B к направлениям скоростей этих точек. Направление вращения шатуна AB вокруг мгновенного центра P_1 определяется направлением скорости v_a ; на черт. 208 направление вращения шатуна вокруг мгновенного центра P_1 указано стрелкой.

Скорость v_c точки C , как вращательная скорость вокруг мгновенного центра P_1 , направлена перпендикулярно к прямой P_1C в сторону вращения. Так как вращательные скорости пропорциональны соответствующим радиусам, то

$$\frac{v_c}{v_a} = \frac{P_1C}{P_1A},$$

откуда

$$v_c = v_a \frac{P_1C}{P_1A}.$$

Определив скорость точки C , перейдем к точке D . Так как точка D принадлежит тяге CD , то скорость v_d этой точки есть вращательная скорость вокруг мгновенного центра скоростей тяги CD . Обозначим мгновенный центр скоростей тяги через P_2 .

Направление скоростей точек C и D нам известны. Восставив перпендикуляры в точках C и D к направлениям этих скоростей, найдем мгновенный центр P_2 в точке их пересечения. Направление вращения

¹ Рассматриваемый механизм представляет схему кулисного механизма Гакворта.

тяги CD вокруг мгновенного центра P_2 мы определим, имея в виду уже известное нам направление скорости точки C ; направление этого вращения указано стрелкой на черт. 208.

Теперь легко найдем величину скорости v_d точки D из соотношения

$$\frac{v_d}{v_c} = \frac{P_2 D}{P_2 C},$$

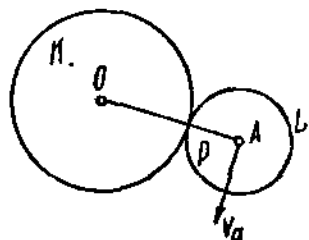
откуда получаем

$$v_d = v_c \cdot \frac{P_2 D}{P_2 C}$$

или, подставляя найденную выше величину скорости v_c ,

$$v_d = v_a \cdot \frac{P_1 C}{P_1 A} \cdot \frac{P_2 D}{P_2 C}.$$

Такова величина скорости ползуна D , а следовательно и золотника E . Что касается направления этой скорости, то оно определяется направлением вращения тяги CD вокруг мгновенного центра P_2 ; при том положении механизма, которое изображено на черт. 208, скорость v_d направлена вниз.



Черт. 209.

Задача 21. На неподвижную ось O насажены неподвижная шестерня K радиуса a и вращающийся стержень OA длины $a + b$; на конце A этого стержня насажена подвижная шестерня L радиуса b , сцепленная с неподвижной шестерней K (черт. 209). Стержень OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_1 . Найти угловую скорость ω_2 шестерни L .

Так как при вращении стержня OA подвижная шестерня L катится без скольжения по неподвижной шестерне K , то мгновенный центр скоростей P шестерни L находится в точке касания окружностей шестерен. Чтобы найти угловую скорость шестерни L , обращаемся к скорости v_a точки A .

Так как точка A принадлежит к стержню OA , то

$$v_a = OA \cdot \omega_1 = (a + b) \omega_1.$$

Так как точка A принадлежит и к шестерне L , то

$$v_a = PA \cdot \omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{v_a}{PA} = \frac{(a + b) \omega_1}{b}.$$

Точки, лежащие на окружности шестерни L , описывают эпициклоиды; рассматриваемое соединение зубчатых колес называется эпициклическим.

§ 99. План скоростей.

Отметим скорости v_a, v_b, v_c, v_d точек A, B, C, D какой-либо движущейся плоской фигуры (черт. 210).

Из произвольной точки O отложим отрезки Oa, Ob, Oc, Od , гео-

метрически равные скоростям v_a, v_b, v_c, v_d , и соединим точки a, b, c, d прямыми линиями. Полученное построение называется *планом скоростей*; отрезки Oa, Ob, Oc, Od будем называть лучами, а точки a, b, c, d — вершинами плана скоростей.

Итак, абсолютные скорости точек A, B, C, D изображаются лучами Oa, Ob, Oc, Od плана скоростей. Покажем, что отрезок ab , соединяющий вершины a и b , геометрически равен вращательной скорости точки B вокруг точки A .

В самом деле, примем точку A за полюс. В начале предыдущего параграфа было установлено, что скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости данной точки вокруг этого полюса. На основании этой теоремы, обозначая вращательную скорость точки B вокруг точки A через v_{ab} , имеем:

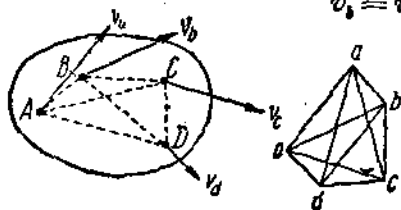
$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \vec{v}_{ab}.$$

С другой стороны, из треугольника Oab следует:

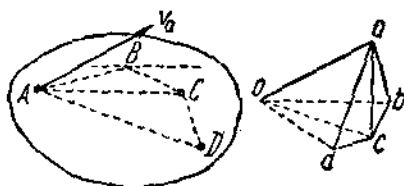
$$\vec{Ob} = \vec{Oa} + \vec{ab}$$

или

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \vec{ab}. \quad (2)$$



Черт. 210.



Черт. 211.

Сравнивая геометрические равенства (1) и (2), заключаем, что

$$\vec{ab} = \vec{v}_{ab}.$$

Совершенно так же мы убедимся, что

$$\vec{bc} = \vec{v}_{bc}, \quad \vec{ac} = \vec{v}_{ac} \text{ и т. д.,}$$

где v_{bc}, v_{ac} и т. д. суть вращательные скорости C вокруг точки B , точки C вокруг точки A и т. д.

Обозначая угловую скорость плоской фигуры через ω , мы заключаем, что

$$ab = AB \cdot \omega, \quad bc = BC \cdot \omega, \quad ac = AC \cdot \omega \text{ и т. д.;}$$

направления же отрезков ab, bc, ac и т. д. перпендикулярны к отрезкам AB, BC, AC и т. д. Отсюда следует, что фигура $abca$ подобна фигуре $ABCD$ и повернута относительно этой последней на 90° .

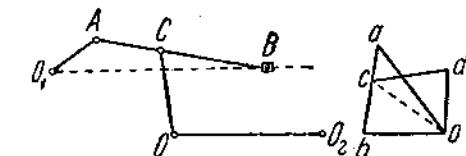
Итак, отрезки, соединяющие вершины плана скоростей, перпендикулярны к отрезкам, соединяющим соответствующие точки плоской фигуры.

Последнее обстоятельство дает возможность построить план скоростей, если известны величина и направление скорости одной точки и направление скорости другой точки плоской фигуры.

Положим, даны величина и направление скорости v_a точки A и направление скорости точки B (черт. 211); направление скорости точки B указано на чертеже пунктиром. Требуется построить план скоростей для точек A, B, C, D .

Для этого из произвольной точки O откладываем отрезок Oa , геометрически равный скорости v_a . Затем проводим через точку O прямую Ob , параллельную заданному направлению скорости точки B , а из точки a проводим прямую $ab \perp AB$; в точке пересечения проведенных прямых находится вершина b плана скоростей. Далее проводим $ac \perp AC$ и $bc \perp BC$; пересечением прямых ac и bc определяется вершина c . Наконец; проведя $ad \perp AD$ и $cd \perp CD$, находим вершину d . Лучи Ob, Oc, Od определяют как величину, так и направление скоростей точек B, C, D .

Построение плана скоростей является весьма удобным приемом для графического определения скоростей различных точек механизма, отдельные части (или звенья) которого



Черт. 212.

совершают плоское движение. Мы можем построить планы скоростей для отдельных звеньев механизма так, как только-что было объяснено. Существенное упрощение достигается тем, что все эти отдельные планы скоростей можно построить на одном чертеже.

Таким образом мы получаем план скоростей для всего механизма.

Поясним сказанное примерами.

Задача 22. К шатуну AB кривошипного механизма O_1AB в точке C шарнирно прикреплен стержень CD , конец которого D соединен с коромыслом DO_2 , вращающимся вокруг неподвижной оси O_2 (черт. 212). Дана скорость v_a точки A . Построить план скоростей для точек A, B, C, D .

Строим сначала план скоростей для шатуна AB . Нам даны величина и направление скорости v_a точки A и направление скорости точки B . Из произвольной точки O откладываем отрезок Oa , геометрически равный скорости v_a (конечно, $v_a \perp O_1A$). Затем из точки O проводим прямую $Ob \parallel O_1B$, а из точки a прямую $ab \perp AB$; пересечение этих прямых определяет вершину b плана скоростей. Разделив отрезок ab в отношении $AC : BC$, находим точку c ; луч Oc определяет величину и направление скорости точки C .

Переходим теперь к стержню CD . Мы только что определили величину и направление скорости точки C ; кроме того, нам известно направление скорости точки D (оно перпендикулярно к O_2D). План скоростей для стержня CD строим на том же чертеже, на котором построили план скоростей для шатуна AB . Для этого из точки O проводим прямую Od , параллельную направлению скорости точки D (т. е. $Od \perp O_2D$), а из точки c прямую $cd \perp CD$, в пересечении этих прямых получим вершину d .

Лучами Oa, Ob, Oc, Od представляются скорости точек A, B, C, D .

Задача 23. Инверсор Поселье состоит из семи стержней; четыре

¹ Рассматриваемый механизм составляет часть кулисного механизма Джоя.

стержня одинаковой длины образуют ромб $ABDC$, точка A соединена со стержнем O_1A , вращающимся вокруг неподвижной оси O_1 , а точки B и C соединены со стержнями одинаковой длины O_2B и O_2C , вращающимися вокруг неподвижной оси O_2 . Дана скорость v_a точки A . Построить план скоростей для точек A, B, C, D (черт. 213).

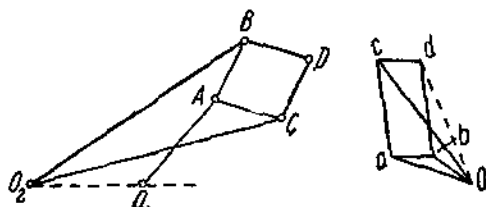
Обращаемся к стержню AB . Из произвольной точки O откладываем отрезок Oa , геометрически равный скорости v_a точки A (конечно, скорость v_a перпендикулярна к стержню O_1A). Затем проводим через точку O прямую Ob , параллельную скорости точки B (т. е. перпендикулярно к стержню O_2B), а через точку a — прямую ab , перпендикулярно к AB . В пересечении этих прямых получаем вершину b .

Переходим к стержню AC . Через точку O проводим прямую Oc параллельную скорости точки C (т. е. перпендикулярную к стержню O_2C), а через точку a — прямую ac , перпендикулярную к AC . В пересечении этих прямых находим вершину c .

Наконец, обращаемся к стержням BD и CD . Через точку b проводим прямую bd , перпендикулярную к BD , а через точку c — прямую cd перпендикулярную к CD . Пересечение этих прямых даст вершину d .

Лучами Oa, Ob, Oc, Od определяются величины и направления скоростей точек A, B, C, D .

Можно сказать, что если $O_1A = O_1O_2$, то точка D описывает прямую линию, перпендикулярную к прямой O_1O_2 ; если же O_1A не равно O_1O_2 , то точка D описывает дугу окружности, центр которой находится на прямой O_1O_2 . Мы не будем останавливаться на доказательстве этого предложения.



Черт. 213.

§ 100. Ускорение точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений.

Обратимся к исследованию ускорений различных точек плоской фигуры. Представим себе движение плоской фигуры (черт. 214) разложенным на переносное (поступательное) движение вместе с полюсом O и на относительное (вращательное) движение по отношению к этому полюсу. Ускорение какой-либо точки M плоской фигуры может быть найдено при помощи теоремы сложения ускорений: так как переносное движение поступательное, то абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме ускорений переносного и относительного.

Переносное ускорение точки M геометрически равно ускорению w_o полюса O . Относительное же ускорение w_r точки M есть ускорение во вращательном движении этой точки вокруг полюса O ; оно складывается из центростремительного ускорения

$$w_{r, \text{с}} = OM \cdot \omega^2,$$

направленного от точки M к полюсу O , и вращательного ускорения

$$w_{r, \text{в}} = OM \cdot \varepsilon,$$

С другой стороны, ускорение w , образуя с направлением отрезка OQ угол β (черт. 215), который удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_{rt}}{w_{rn}} = \frac{OQ \cdot \varepsilon}{OQ \cdot \omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Угол β мы можем считать заключенным в пределах между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (причем $\beta > 0$, если $\varepsilon > 0$, и $\beta < 0$, если $\varepsilon < 0$); в таком случае из предыдущего равенства получаем

$$\beta = \alpha.$$

Следовательно, ускорение w , равно ускорению полюса w_0 и направлено прямо противоположно. Отсюда мы заключаем, что абсолютное ускорение точки Q , равное геометрической сумме ускорений w_0 и w , равно нулю.

Точка Q , ускорение которой в данный момент равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений*.¹

Предположим теперь, что мгновенный центр ускорений Q взят за полюс. В таком случае, применяя теорему, установленную в начале этого параграфа, и имея в виду, что теперь ускорение полюса равно нулю, получаем следующий результат: *ускорение любой точки плоской фигуры есть ускорение во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений*. Обозначая расстояние QM точки M от мгновенного центра ускорений Q через r_1 (черт. 216), мы заключаем, что ускорение w точки M складывается из составляющей

$$w_{rt} = r_1 \varepsilon,$$

направленной перпендикулярно к отрезку QM , и составляющей

$$w_{rn} = r_1 \omega^2,$$

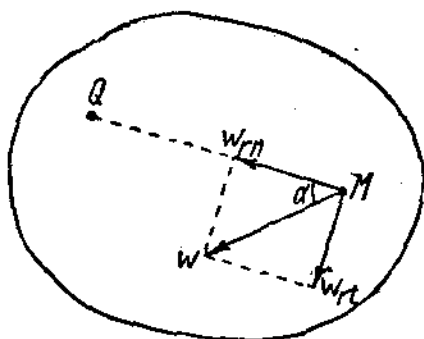
направленной от точки M к точке Q ; величина ускорения w определяется формулой

$$w = r_1 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

направление же ускорения w образует с отрезком MQ угол α , определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{rt}}{w_{rn}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

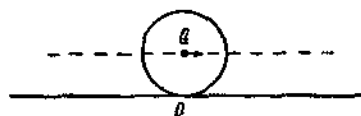
¹ Заметим, что если $\omega = 0$ и $\varepsilon = 0$, то $OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \infty$, и, следовательно, мгновенный центр ускорений не существует (или он находится в бесконечности). Если $\omega = 0$ и $\varepsilon \neq 0$, то ускорения всех точек плоской фигуры во вращательном движении вокруг полюса O равны нулю; откуда следует, что абсолютные ускорения всех точек фигуры геометрически равны ускорению полюса. Другими словами, в случае $\omega = 0$ и $\varepsilon \neq 0$ все точки плоской фигуры имеют геометрически равные ускорения.



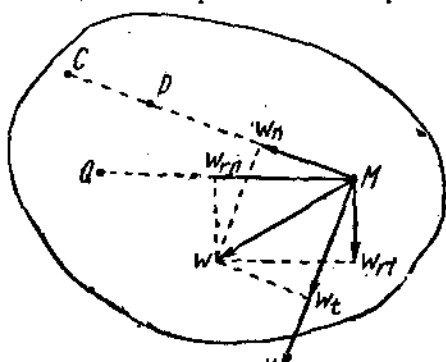
Черт. 216.

Мы видим, что в каждый данный момент ускорения точек плоской фигуры таковы, как будто бы фигура совершала простое вращение вокруг неподвижной точки Q , почему точка Q и получает наименование „центра ускорений“: словом „мгновенный“ подчеркивается то обстоятельство, что точка Q является центром ускорений лишь для данного момента времени; различным моментам времени соответствуют различные „мгновенные“ центры ускорений.

Следует заметить, что мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q , вообще говоря, не совпадают. В этом можно убедиться из следующего простого примера. Представим себе окружность круга, которая равномерно катится (без скольжения) по прямой линии (черт. 217). Так как центр окружности движется прямолинейно и равномерно, то его ускорение равно нулю, и, следовательно, он является мгновенным центром ускорений Q для катящегося круга. Мгновенный же центр скоростей P находится, как уже знаем, в точке касания окружности с той прямой, по которой она катится.



Черт. 217.



Черт. 218.

Заметив, что мгновенный центр ускорений Q , вообще говоря, не совпадает с мгновенным центром скоростей P , следует обратить внимание также и на то, что составляющие w_n и w_t , на которые представляется разложенным ускорение w точки M на черт. 216, вообще говоря, не совпадают с касательным и нормальным ускорениями точки M . В самом деле, чтобы разложить ускорение w точки M на касательное и нормальное ускорения, нужно разложить его на две составляющие, направленные по касательной и по нормали к траектории точки M . Направление же касательной к траектории точки M совпадает с направлением ее скорости v (черт. 218), а, значит, направление нормали к траектории совпадает с направлением отрезка MP , соединяющего точку M с мгновенным центром скоростей P (но с мгновенным центром ускорений Q). Итак, чтобы получить касательное и нормальное ускорения точки M , мы должны разложить ускорение w на две составляющие, направленные по прямой MP и перпендикулярно к этой прямой. Величины касательного и нормального ускорений w_t и w_n удовлетворяют равенства

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ есть радиус кривизны траектории.¹

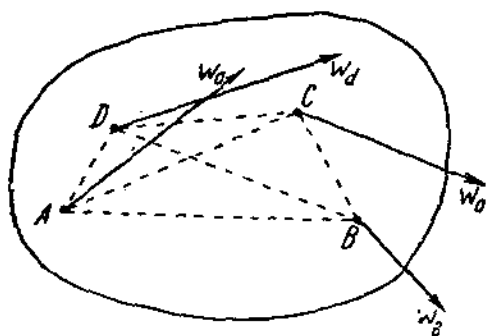
¹ Если C (черт. 218) есть центр кривизмы траектории, то $\rho = MC$. Не следует думать, что центр кривизмы C совпадает с мгновенным центром скоростей P .

§ 101. План ускорений.

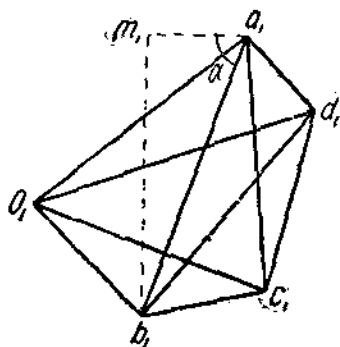
Отметим ускорения w_a, w_b, w_c, w_d точек A, B, C, D какой-либо движущейся фигуры (черт. 219). Из произвольной точки O_1 (черт. 220), отложим отрезки $O_1a_1, O_1b_1, O_1c_1, O_1d_1$, геометрически равные ускорениям w_a, w_b, w_c, w_d , и соединим точки a_1, b_1, c_1, d_1 прямыми линиями. Полученный многоугольник называется *планом ускорений*; отрезки $O_1a_1, O_1b_1, O_1c_1, O_1d_1$ мы будем называть лучами, а точки a_1, b_1, c_1, d_1 — вершинами плана ускорений.

Покажем, что отрезок a_1b_1 , соединяющий вершины a_1 и b_1 , геометрически равен ускорению точки B во вращательном движении вокруг точки A .

В самом деле, примем точку A за полюс. В начале § 100 было показано, что ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращатель-



Черт. 219



Черт. 220.

ном движении вокруг этого полюса. На основании этой теоремы, обозначая ускорение точки B во вращательном движении вокруг точки A через w_{ab} , имеем:

$$\overline{w_b} = \overline{w_a} + \overline{w_{ab}}, \quad (1)$$

С другой стороны, из треугольника $O_1a_1b_1$ следует:

$$\overline{O_1b_1} = \overline{O_1a_1} + \overline{a_1b_1}$$

или

$$\overline{w_b} = \overline{w_a} + \overline{a_1b_1}. \quad (2)$$

Сравнивая геометрические равенства (1) и (2), заключаем, что

$$\overline{a_1b_1} = \overline{w_{ab}}.$$

Разложим теперь отрезок a_1b_1 на две составляющие a_1m_1 и m_1b_1 , из которых одна направлена параллельно отрезку AB , а другая к нему перпендикулярна. Эти составляющие представляют не что иное, как центростремительную и вращательную составляющие ускорения w_{ab} ; следовательно,

$$a_1m_1 = AB \cdot \omega^2, \quad m_1b_1 = AB \cdot \epsilon,$$

где ω и ε суть угловая скорость и угловое ускорение данной плоской фигуры. Отсюда мы заключаем, что

$$a_1 b_1 = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$\angle m_1 a_1 b_1 = \alpha,$$

причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Следовательно, направление отрезка $a_1 b_1$ образует с направлением отрезка AB угол, равный $180^\circ - \alpha$.

Все, что сказано относительно отрезка $a_1 b_1$, может быть повторено и по отношению к отрезкам $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ и т. д. Мы заключаем, что

$$b_1 c_1 = BC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad a_1 c_1 = AC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ и т. д.};$$

направления же отрезков $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ и т. д. составляют с направлениями отрезков BC , AC и т. д. углы, равные $180^\circ - \alpha$.

Отсюда следует, что фигура $a_1 b_1 c_1 d_1$ подобна фигуре $ABCD$ и повернута относительно этой последней на угол $180^\circ - \alpha$.

Положим, что фигура $Oabcd$ (черт. 221) есть план скоростей для точек A, B, C, D (построенный так, как было объяснено в § 99). Мы знаем, что отрезок ab представляет вращательную скорость точки B вокруг точки A , т. е.

$$ab = AB \cdot \omega.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$a_1 m_1 = AB \cdot \omega^2 = \frac{\overline{ab}^2}{AB}.$$

Полученная зависимость между отрезками AB , ab и $a_1 m_1$ дает возможность построить план ускорений, если заданы величина и направление ускорения одной точки плоской фигуры, направление ускорения другой точки и если, кроме того, известен план скоростей.

В самом деле, положим, что нам заданы величина и направление ускорения ω_a точки A (черт. 219), направление ускорения ω_b точки B , а также задан план скоростей $Oabcd$ (черт. 221). Чтобы построить план ускорений для точек A, B, C, D , мы откладываем от произвольной точки O_1 (черт. 220) отрезок $O_1 a_1$, геометрически равный данному ускорению ω_a . Затем от точки a_1 параллельно направлению BA откладываем отрезок

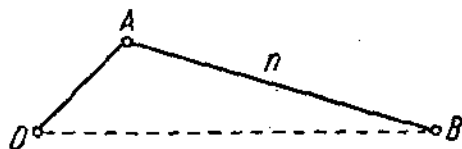
$$a_1 m_1 = \frac{\overline{ab}^2}{AB}.$$

Проведя из точки m_1 прямую, перпендикулярную к направлению AB , а из точки O_1 прямую, параллельную данному направлению ускорения ω_b , находим в точке пересечения этих прямых вершину b_1 . Построив точку b_1 , проводим отрезок $a_1 b_1$ и находим угол $\alpha = \angle m_1 a_1 b_1$.

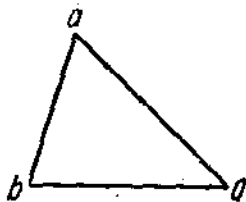
Чтобы закончить построение плана ускорений, нам остается провести прямые $a_1 c_1$ и $b_1 c_1$, $a_1 d_1$ и $b_1 d_1$ под углом $180^\circ - \alpha$ к направлениям

AC , BC , AD и BD ; пересечение первых двух из этих прямых определит вершину c_1 , а пересечение последних двух прямых — вершину d_1 .

Желая определить графически ускорения различных точек какого-либо плоского механизма, мы строим планы ускорений для отдельных звеньев механизма. Все эти отдельные планы ускорений можно построить на одном чертеже. Тогда получаем план ускорений для всего механизма.



Черт. 222.



Черт. 223.

Задача 24. Кривошип OA кривошипного механизма OAB (черт. 222) вращается равномерно с угловой скоростью ω . Построить план ускорений для шатуна AB .

Предварительно строим план скоростей для шатуна AB . От точки O (черт. 223) откладываем отрезок Oa , геометрически равный скорости v_a точки A ; мы знаем, что

$$v_a = OA \cdot \omega;$$

на чертеже скорость v_a может быть взята в произвольном масштабе. Затем проводим из точки a прямую, перпендикулярную к AB , а из точки O прямую, параллельную направлению скорости точки B , т. е. параллельную направлению OB . Пересечением этих прямых определяется точка b . Фигура Oab есть план скоростей для шатуна AB .

Переходим к построению плана ускорений. Нам известны величина и направление ускорения w_a точки A и направление ускорения точки B ; имеем

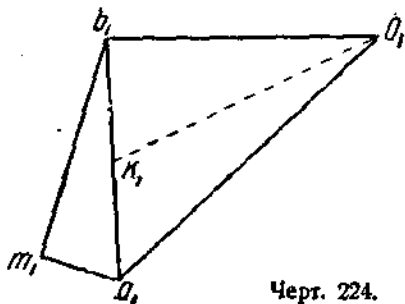
$$w_a = OA \cdot \omega^2 = \frac{v_a^2}{OA} = \frac{\overline{Oa}^2}{OA};$$

ускорение w_a направлено от точки A к точке O , ускорение же точки B направлено по прямой OB .

От точки O_1 (черт. 224) откладываем отрезок O_1a_1 , геометрически равный ускорению w_a . Из точки a_1 параллельно направлению BA откладываем отрезок

$$a_1m_1 = \frac{\overline{ab}^2}{AB}.$$

Затем из точки m_1 проводим прямую, перпендикулярную к AB , а из точки O_1 прямую, параллельную направлению ускорения точки B , т. е. параллельную прямой OB . Пересечением этих прямых определяется точка b_1 .



Черт. 224.

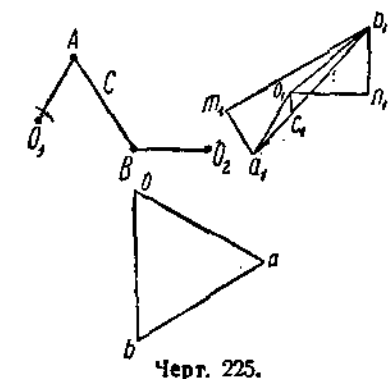
Остается соединить точки a_1 и b_1 прямой линией. Фигура $O_1a_1b_1$ есть план ускорения для шатуна AB . Если мы желаем определить ускорение какой-либо точки K шатуна AB , то, деля отрезок a_1b_1 в отношении $AK:KB$, находим точку k_1 ; луч O_1k_1 геометрически равен ускорению точки K .

Задача 25. Коромысла O_1A и O_2B , вращающиеся соответственно вокруг неподвижных осей O_1 и O_2 , соединены шатуном AB ; $O_1A = O_2B = 20$ см, $AB = 30$ см (черт. 225). Посредством построения плана ускорений найти в том положении механизма, которое указано на чертеже, ускорение точки шатуна C , находящейся на расстоянии $AC = 10$ см от конца его A , предполагая, что точка A движется (в направлении указанном на чертеже) с постоянной скоростью $v_a = 40 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

Начнем с построения плана скоростей. Выбрав для этого построения масштаб $1 \text{ см} = 10 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, откладываем от точки o отрезок oa , изображающий (по величине и по направлению) данную нам скорость v_a точки A . Затем проводим из точки o прямую Ob , перпендикулярную к коромыслу O_2B , и из точки a прямую ab , перпендикулярную к шатуну AB . Пересечением этих двух прямых определяется вершина в плане скоростей. Отрезками ob и ab изображаются соответственно абсолютная скорость v_b точки B и вращательная скорость v_{ab} точки B вокруг точки A ; измерив эти отрезки в принятом масштабе, получаем

$$v_b = 41,3 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

$$v_{ab} = 40,5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$



Перейдем теперь к построению плана ускорений. Ускорение точки A нам известно. Так как эта точка движется по окружности с постоянной скоростью v_a , то ее ускорение направлено к центру O_1 и равно

$$w_a = \frac{v_a^2}{O_1A} = 80 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

Ускорение w_b точки B нам не известно ни по величине, ни по направлению. Эта точка вращается вокруг центра O_2 , двигаясь, вообще говоря, неравномерно; ее ускорение складывается из нормальной и касательной составляющих. Из этих двух составляющих нам известна только нормальная составляющая w_{bn} : она направлена от точки B к точке O_2 и равна

$$w_{bn} = \frac{v_b^2}{O_2B} = 85,3 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}.$$

Для построения плана ускорений поступим следующим образом. Выбрав масштаб $1 \text{ см} = 20 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$, откладываем от точки o_1 (черт. 225)

параллельно направлению AO_1 отрезок o_1a_1 , изображающий в принятом масштабе ускорение w_a . Затем откладываем от точки o_1 параллельно направлению BO_2 отрезок o_1n_1 , изображающий нормальную составляющую w_n ускорения точки B . Вершина b_1 плана ускорений должна лежать на прямой n_1b_1 , проведенной из точки n_1 перпендикулярно к отрезку o_1n_1 .

Переходя к ускорению точки B во вращательном движении вокруг точки A , вычисляем нормальную составляющую этого ускорения; она равна

$$\frac{v_{ab}^2}{AB} = 54,7 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$$

и направлена от точки B к точке A . Отложив в плане ускорений от точки a_1 отрезок a_1m_1 , изображающий это ускорение, и проведя через точку m_1 прямую m_1b_1 , перпендикулярную к отрезку a_1m_1 , получаем вторую прямую, на которой должна лежать вершина b_1 . Отсюда следует, что точка b_1 есть пересечение построенных нами прямых n_1b_1 и m_1b_1 . Проведением прямой a_1b_1 заканчивается построение плана скоростей.

Луч o_1b_1 изображает ускорение точки B . Взяв на прямой a_1b_1 отрезок $a_1c_1 = \frac{1}{3}a_1b_1$, находим точку c_1 , соединение которой с точкой o_1 дает луч o_1c_1 , изображающий искомое ускорение w_c точки C . Измерив отрезок o_1c_1 в принятом масштабе, получаем

$$w_c = 22 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2};$$

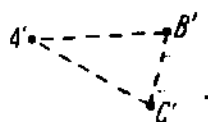
направление этого ускорения определяется направлением луча o_1c_1 .

§ 102. Теорема о перемещении плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей как предельное положение центра вращения.

В нашем исследовании плоского движения твердого тела мы исходили из разложения плоского движения на поступательную и вращательную части. Это разложение дало нам возможность определить скорости и ускорения точек плоской фигуры, а также привело нас к понятиям мгновенного центра скоростей и мгновенного центра ускорений. Покажем теперь, что к понятию мгновенного центра скоростей можно прийти еще другим путем.

Начнем с доказательства следующей теоремы (называемой *теоремой Шалля*): *плоскую фигуру можно переместить из всякого данного положения во всякое другое положение простым вращением вокруг некоторой точки.*

Заметим предварительно, что положение плоской фигуры, движущейся в данной плоскости, вполне определяется положением двух ее точек. В самом деле, положим, что две точки A и B плоской фигуры S (черт. 226) занимают в некоторый момент положения A' и B' . Этим



Черт. 226.

полное определяется положение всей плоской фигуры в рассматриваемый момент: чтобы найти положение, занимаемое в этот момент какой-либо третьей точкой C нашей фигуры, достаточно построить на отрезке $A'B'$ треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC .

На основании этого замечания исследование движения плоской фигуры может быть заменено исследованием движения двух ее точек или, что все равно, отрезка, соединяющего эти точки.

Перейдем теперь к доказательству нашей теоремы.

Положим, что отрезок AB (принадлежащий плоской фигуре, которая на чертеже не изображена) совершает какое-либо движение в плоскости

чертежа (черт. 227). Положим, что в момент t этот отрезок занимает положение AB , а в момент $t + \Delta t$ положение A_1B_1 . Мы покажем, что отрезок может быть перемещен из первого положения во второе простым вращением вокруг некоторой точки.

Проведем отрезки AA_1 и BB_1 и в точках, делящих эти отрезки пополам, восставим к ним перпендикуляры. Мы сейчас увидим, что точка пересечения этих перпендикуляров P_1 и есть тот центр вращения, поворотом вокруг которого отрезок AB может быть перемещен в положение A_1B_1 .

Чтобы в этом убедиться, проведем прямые AP_1 , BP_1 , A_1P_1 , B_1P_1 . Треугольники ABP_1 и $A_1B_1P_1$ равны (по равенству трех сторон). Следовательно,

$$\angle AP_1B = \angle A_1P_1B_1.$$

Вычитая из обеих частей этого равенства по углу A_1P_1B , получим

$$\angle AP_1A_1 = \angle BP_1B_1.$$

Обозначим равные углы $\angle AP_1A_1$ и $\angle BP_1B_1$ через $\Delta\varphi$ и повернем отрезок AB вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi$. После этого поворота точка A займет положение A_1 , а точка B — положение B_1 . Следовательно, отрезок AB может быть перемещен в положение A_1B_1 поворотом вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi$.

Итак, мы убедились, что плоская фигура может быть перемещена из положения, занимаемого ею в момент t , в положение, соответствующее моменту $t + \Delta t$, простым поворотом вокруг некоторой точки P_1 на некоторый угол $\Delta\varphi$ ¹. Будем теперь приближать промежуток времени Δt к нулю. Тогда второе положение фигуры будет приближаться к ее первому положению. Вместе с тем центр вращения P_1 будет приближаться к некоторому предельному положению, которое обозначим буквой P .

¹ Конечно, это не значит, что действительное движение плоской фигуры за время Δt есть вращение вокруг точки P_1 . Мы лишь показали, что фигура может быть перемещена из первого положения во второе поворотом вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi$.

а отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ будет приближаться к некоторому пределу, который есть не что иное, как угловая скорость ω плоской фигуры в момент t

$$\lim \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \omega.$$

Мы покажем, что предельное положение P центра вращения P_1 есть не что иное, как мгновенный центр скоростей данной фигуры (соответствующий моменту t).

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что скорость любой точки плоской фигуры в момент t есть вращательная скорость вокруг точки P . Возьмем какую-нибудь точку M нашей плоской фигуры (черт. 228) и отметим положения, занимаемые ею в моменты t (оно обозначено буквой M) и $t + \Delta t$ (положение M_1). Чтобы вычислить скорость v точки M в момент t , воспользуемся тем обстоятельством, что скорость v есть предел скорости v_m фиктивного равномерного движения точки M по хорде MM_1 (см. § 79).

Мы имеем:

$$v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Соединяя точки M и M_1 прямыми линиями с центром вращения P_1 , получаем равнобедренный треугольник MM_1P_1 , в котором угол при вершине P_1 равен $\Delta\varphi$. Из этого треугольника выводим

$$MM_1 = 2 P_1M \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$

и, следовательно,

$$v_m = 2 P_1M \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, получаем

$$v = \lim [v_m]_{\Delta t=0} = \lim \left[P_1M \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0}$$

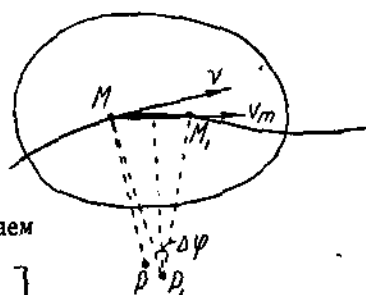
Но

$$\lim [P_1M]_{\Delta t=0} = PM, \quad \lim \left[\frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right]_{\Delta t=0} = 1, \quad \lim \left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right]_{\Delta t=0} = \omega.$$

Следовательно, обозначая $PM = r$, находим:

$$v = r\omega.$$

С другой стороны, направление скорости v_m образует с направлением MP_1 угол, равный $90^\circ - \frac{\Delta\varphi}{2}$. Переходя к пределу и замечая, что $\lim [\Delta\varphi]_{\Delta t=0} = 0$, заключаем, что направление скорости v образует с направлением MP угол, равный 90° .



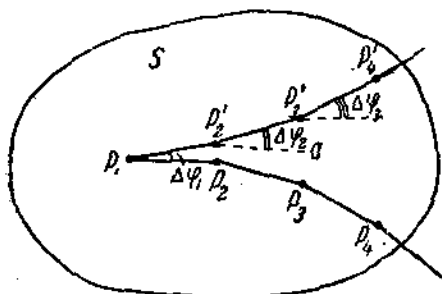
Черт. 228.

Итак, скорость v точки M равна $v = r\omega$ (где $r = MP$) и направлена перпендикулярно к направлению PM , т. е. скорость v есть вращательная скорость вокруг точки P .

Отсюда следует, что точка P есть мгновенный центр скоростей данной плоской фигуры, соответствующий моменту t .

§ 103. Центроиды.

Возьмем ряд последовательных моментов времени $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, t + 3\Delta t$ и т. д. и назовем положения, занимаемые в эти моменты движущейся плоской фигурой S (черт. 229), 1-м, 2-м, 3-м, 4-м и т. д. положениями фигуры. Мы знаем, что плоская фигура может быть перемещена из всякого данного положения во всякое другое положение простым вращением вокруг некоторой точки на некоторый угол. Положим, что из 1-го положения во 2-е фигура S может быть перемещена вращением вокруг точки P_1 на угол $\Delta\varphi_1$, из 2-го положения в 3-е — вращением вокруг точки P_2 на угол $\Delta\varphi_2$, из 3-го положения в 4-е — вращением вокруг точки P_3 на угол $\Delta\varphi_3$ и т. д. Для краткости речи условимся вращения вокруг точек P_1, P_2, P_3 и т. д. называть 1-м, 2-м, 3-м и т. д. вращениями.



Черт. 229.

Соединив точки $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ последовательно прямолинейными отрезками, мы получим многоугольник $P_1P_2P_3P_4\dots$, вершинами которого являются последовательные центры вращения фигуры S , назовем этот многоугольник многоугольником центров, и притом „неподвижным“ многоугольником центров, в отличие от другого многоугольника центров, о котором сейчас будет идти речь.

Построим ту точку P'_2 плоской фигуры, которая после первого вращения совпадает с точкой P_2 и, следовательно, является центром вращения при втором вращении. Для этого откладываем от точки P_1 отрезок $P_1P'_2 = P_1P_2$ под углом $\Delta\varphi_1$ к прямой P_1P_2 , причем угол $\Delta\varphi_1$ откладываем от прямой P_1P_2 в сторону, обратную вращению фигуры S вокруг точки P_1 (на черт. 229 вращения вокруг точек $P_1, P_2, P_3, \dots$ предполагаются происходящими по часовой стрелке).

Затем строим ту точку P'_3 фигуры S , которая после второго вращения совпадает с точкой P_3 и, следовательно, является центром вращения при третьем вращении. Для этого откладываем $\angle P_1P'_2a = \angle P_1P_2P_3$ и из точки P'_2 проводим отрезок $P'_2P'_3 = P_2P_3$ под углом $\Delta\varphi_2$ к прямой P'_2a , причем угол $\Delta\varphi_2$ откладываем от прямой P'_2a в сторону, обратную вращению фигуры S вокруг точки P_2 .

Таким же точно образом мы можем построить точки $P'_4, P'_5, \dots$ фигуры S , которые после 3-го, 4-го, ... вращения совпадают с точками $P_4, P_5, \dots$

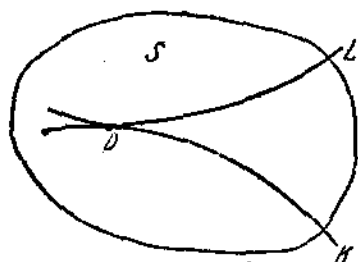
Таким же точно образом мы можем построить точки $P'_4, P'_5, \dots$ фигуры S , которые после 3-го, 4-го, ... вращения совпадают с точками $P_4, P_5, \dots$

Таким же точно образом мы можем построить точки $P'_4, P'_5, \dots$ фигуры S , которые после 3-го, 4-го, ... вращения совпадают с точками $P_4, P_5, \dots$

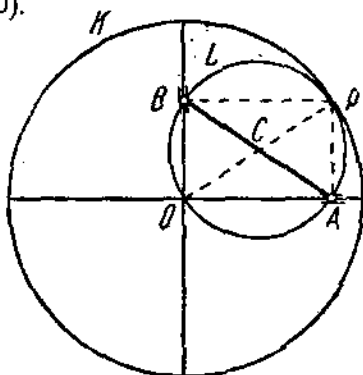
$P_0, \dots$ и, следовательно, являются центрами вращения при 4-м, 5-м, ... вращениях. Многоугольник $P_1P_2P_3P_4 \dots$ мы назовем „подвижным“ многоугольником центров; его вершины суть точки фигуры S , которые являются центрами вращения при последовательных вращениях фигуры. Этот многоугольник неизменно связан с фигурой S и движется вместе в нею. Его движение мы можем кратко характеризовать, сказав, что при фиктивном движении фигуры S , состоящем из ряда последовательных вращений, подвижной многоугольник центров катится без скольжения по неподвижному многоугольнику центров.

Перейдем теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$. Предельными положениями центров вращения P_1, P_2, P_3 и т. д. являются мгновенные центры скоростей фигуры S , соответствующие последовательным моментам времени. Предельное положение центра вращения P_1 есть мгновенный центр P , соответствующий моменту t (черт. 230).

Вместе с тем при уменьшении Δt до нуля стороны неподвижного многоугольника центров также уменьшаются до нуля, а число их возра-



Черт. 230.



Черт. 231.

стает беспрельдно. В пределе неподвижный многоугольник центров обращается в кривую, которая представляет общее место мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости. Эта кривая называется *неподвижной центроидой*; обозначим ее буквой K .

Подвижной многоугольник центров в пределе также обращается в кривую, которая представляет общее место мгновенных центров на движущейся фигурой S . Эта кривая неизменно связана с фигурой S и движется вместе с нею; она называется *подвижной центроидой*; обозначим ее буквой L .

Так как угол $\Delta \varphi_1$ при $\lim \Delta t = 0$ обращается в нуль, то обе центроиды K и L касаются в своей общей точке P . Точка касания центроиды является мгновенным центром скоростей для данного момента t .

Мы видели, что при фиктивном движении фигуры S , состоящем из ряда последовательных вращений, подвижной многоугольник центров катится без скольжения по неподвижному многоугольнику центров. Отсюда мы заключаем, что при действительном движении плоской фигуры *подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде*.

Итак, всякое плоское движение может быть представлено как катание без скольжения некоторой подвижной кривой, неизменно связанной с плоской фигурой, по некоторой неподвижной кривой.

Задача 26. Построить центроиды для линейки AB эллипсографа (черт. 231).

Обозначим $AB = 2a$. Строим мгновенный центр скоростей P для линейки AB , как пересечение перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям скоростей этих точек.

Обозначим точку пересечения направляющих прямых, по которым движутся концы A и B линейки эллипсографа, через O . Замечаем, что

$$OP = AB = 2a.$$

Отсюда заключаем, что общее место мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости есть окружность, центр которой находится в точке O , а радиус равен $2a$. Эта окружность и есть неподвижная центроида; обозначим ее буквой K .

Далее, обозначая середину отрезка AB буквой C , замечаем, что

$$CP = \frac{1}{2} OP = a,$$

откуда следует, что общее место мгновенных центров скоростей на плоскости, движущейся вместе с линейкой AB , есть окружность, центр которой находится в точке C , а радиус равен a . Эта вторая окружность L и есть подвижная центроида.

При движении линейки AB окружность L катится без скольжения по окружности K . Мы можем сказать, что движение линейки эллипсографа тождественно с движением окружности, катящейся без скольжения внутри неподвижной окружности вдвое большего радиуса.

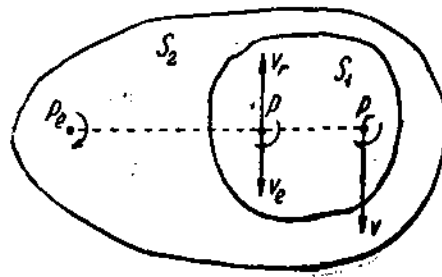
Мы видим, что точки A и B , лежащие на окружности L , описывают диаметры окружности K . Но точки A и B ничем не отличаются от всех прочих точек окружности L . Отсюда мы заключаем, что все точки, лежащие на окружности L , описывают диаметры окружности K .

Это свойство движения окружности L , катящейся без скольжения внутри неподвижной окружности K вдвое большего радиуса, было замечено итальянским математиком Карданом, по имени которого окружности K и L называются Кардановыми окружностями.

§ 104. Сложение вращений плоской фигуры.

Представим себе две плоские фигуры S_1 и S_2 (черт. 232), совершающие какие-либо движения в плоскости чертежа. Фигура S_1 , совершая свое абсолютное движение в данной плоскости, вместе с тем совершает некоторое относительное движение по отношению к фигуре S_2 ; очевидно, что это относительное движение есть движение плоское. Движение фигуры S_2 назовем переносным движением. Мы можем сказать, что абсолютное движение фигуры S_1 есть составное из движений переносного вместе с фигурой S_2 и относительного по отношению к фигуре S_2 .

В каждом из трех плоских движений — абсолютном движении фигуры S_1 , переносном движении фигуры S_2 и относительном движением



Черт. 232.

фигуры S_1 по отношению к фигуре S_2 — существуют в данный момент, свой мгновенный центр скоростей и своя угловая скорость. Мгновенные центры скоростей, соответствующие указанным трем движениям, назовем абсолютным, переносным и относительным мгновенными центрами скоростей и обозначим через P , P_1 и P_2 ; угловые скорости тех же трех движений назовем абсолютной, переносной и относительной угловыми скоростями и обозначим через ω , ω_1 и ω_2 .

Требуется установить зависимость между тремя мгновенными центрами скоростей P , P_1 и P_2 и между тремя угловыми скоростями ω , ω_1 и ω_2 .

Разберем три случая, которые здесь могут представиться.

Первый случай. Переносное и относительное вращения направлены в одну и ту же сторону.

Положим, что переносное и относительное вращения направлены (вокруг соответствующих мгновенных центров P_1 и P_2) по часовой стрелке (черт. 232). Возьмем на отрезке P_1P_2 точку P , делящую этот отрезок на части, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_1 и ω_2 , т. е. удовлетворяющую условию

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (1)$$

и покажем, что эта точка P и есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Чтобы в этом убедиться, нужно показать, что абсолютная скорость точки P равна нулю. На основании теоремы сложения скоростей абсолютная скорость v любой точки фигуры S_1 равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей v_1 и v_2 . Применим эту теорему к точке P .

Для точки P имеем

$$v = P_1P \cdot \omega_1, \quad v = PP_2 \cdot \omega_2.$$

Но из условия (1) следует

$$P_1P \cdot \omega_1 = PP_2 \cdot \omega_2, \quad (2)$$

откуда

$$v = v_2.$$

Направление скоростей v_1 и v_2 , как видно из чертежа, взаимно противоположны. Геометрическая сумма скоростей v_1 и v_2 , равных и направленных в противоположные стороны, равна нулю. Следовательно, абсолютная скорость точки P равна нулю, т. е. точка P есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Итак, абсолютный мгновенный центр скоростей P лежит на отрезке, соединяющем переносный и относительный мгновенные центры P_1 и P_2 , и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_1 и ω_2 .

Применим теперь теорему сложения скоростей к точке P_2 . Так как относительная скорость v_2 этой точки равна нулю, то по упомянутой теореме ее абсолютная скорость v должна быть геометрически равна ее переносной скорости v_1 . Для точки P_2 имеем

$$v = PP_2 \cdot \omega, \quad v_1 = P_1P_2 \cdot \omega_1.$$

Приравнявая скорости v и v_r , получаем

$$PP_r \cdot \omega = P_e P_r \cdot \omega_e,$$

откуда

$$\omega = \frac{P_e P_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \frac{(P_e P + PP_r) \omega_e}{PP_r} = \frac{P_e P \cdot \omega_e + PP_r \cdot \omega_e}{PP_r},$$

или, на основании равенства (2),

$$\omega = \frac{PP_r \cdot \omega_r + PP_r \cdot \omega_e}{PP_r} = \omega_r + \omega_e,$$

т. е. абсолютная угловая скорость равна сумме относительной и переносной угловых скоростей.

Что касается направления абсолютного вращения, то из направления абсолютной скорости v точки P_r (которая совпадает с ее переносной скоростью v_r) можно заключить, что абсолютное вращение направлено (вокруг абсолютного мгновенного центра P) по часовой стрелке.

Итак, направление составного вращения совпадает с направлениями составляющих вращений.

Второй случай. Переносное и относительное вращения направлены в противоположные стороны; их угловые скорости не равны.

Положим, что относительное вращение направлено по часовой стрелке, а переносное против часовой стрелки (черт. 233), и предположим, что $\omega_r > \omega_e$.

Возьмем на продолжении отрезка $P_e P_r$ со стороны мгновенного центра P_r точку P , удовлетворяющую условию

$$\frac{P_e P}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}, \quad (3)$$

и покажем, что эта точка P есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Приложим теорему сложения скоростей к точке P . Для точки P имеем

$$v_e = P_e P \cdot \omega_e, \quad \omega_r = PP_r \cdot \omega_r.$$

На основании условия (3) имеем

$$P_e P \cdot \omega_e = PP_r \cdot \omega_r, \quad (4)$$

откуда

$$v_e = v_r.$$

Так как направления скоростей v_e и v_r прямо противоположны, то их геометрическая сумма равна нулю. Следовательно, абсолютная скорость точки P равна нулю, т. е. точка P есть абсолютный мгновенный центр скоростей.

Итак, абсолютный мгновенный центр скоростей P лежит

на продолжении отрезка, соединяющего переносный и относительный мгновенные центры P_o и P_r со стороны того из этих центров, которому соответствует большая угловая скорость; расстояния P_oP и PP_r обратно пропорциональны угловым скоростям ω_o и ω_r .

Теперь применим теорему сложения скоростей к точке P_r . Для этой точки имеем

$$v = PP_r \cdot \omega, \quad v_o = P_oP_r \cdot \omega_o, \quad v_r = 0.$$

Так как $v_r = 0$, то по теореме сложения скоростей должно быть

$$\vec{v} = \vec{v}_o.$$

Приравнявая скорости v и v_o , получаем

$$PP_r \cdot \omega = P_oP_r \cdot \omega_o,$$

откуда

$$\omega = \frac{P_oP_r \cdot \omega_o}{PP_r} = \frac{(P_oP - PP_r) \cdot \omega_o}{PP_r} = \frac{P_oP \cdot \omega_o - PP_r \cdot \omega_o}{PP_r},$$

или, на основании равенства (4),

$$\omega = \frac{PP_r \cdot \omega_r - PP_r \cdot \omega_o}{PP_r} = \omega_r - \omega_o,$$

т. е. абсолютная угловая скорость равна разности угловых скоростей составляющих движений.

Направление абсолютной скорости v точки P_r указывает, что абсолютное вращение (вокруг абсолютного мгновенного центра P) направлено по часовой стрелке.

Отсюда мы заключаем, что направление составного вращения совпадает с направлением того из составляющих вращений, которому соответствует большая угловая скорость.

Третий случай. Переносное и относительное вращения направлены в противоположные стороны; их угловые скорости равны.

Положим, что относительное вращение направлено по часовой стрелке, а переносное — против часовой стрелки (черт. 234), причем

$$\omega_o = \omega_r.$$

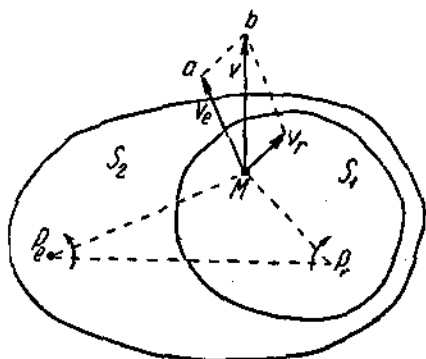
Покажем, что в этом случае абсолютные скорости всех точек фигуры S_1 геометрически равны.

Возьмем какую-нибудь точку M фигуры S_1 и найдем ее абсолютную скорость по теореме сложения скоростей.

Абсолютная скорость v точки M представляется диагональю параллелограмма, построенного на переносной скорости v_o и относительной скорости v_r . Величины скоростей v_o и v_r суть

$$v_o = P_oM \cdot \omega_o, \quad v_r = P_rM \cdot \omega_r = P_rM \cdot \omega_o;$$

направления скоростей v_o и v_r перпендикулярны соответственно к отрезкам P_oM и P_rM .



Черт. 234.

Мы замечаем, что треугольники Mab и P_1MP_2 подобны, так как стороны Ma и ab пропорциональны сторонам P_1M и P_2M и $\angle Mab = \angle P_1MP_2$ (стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого). Из подобия этих треугольников выводим

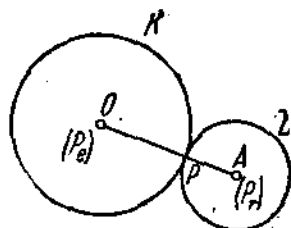
$$\frac{v}{P_1P_2} = \frac{v}{P_1M} = \omega.$$

или

$$v = P_1P_2 \cdot \omega.$$

Далее, так как две стороны Ma и ab одного треугольника перпендикулярны к двум сторонам P_1M и P_2M другого треугольника, то и третьи их стороны Mb и P_1P_2 должны быть взаимно перпендикулярны. Следовательно, скорость v направлена перпендикулярно к отрезку P_1P_2 .

Итак, абсолютная скорость v любой точки M плоской фигуры S_1 направлена перпендикулярно к отрезку P_1P_2 и равна $v = P_1P_2 \cdot \omega$. Значит, абсолютные скорости всех точек фигуры S_1 геометрически равны.



Черт. 235.

Отсюда можно заключить, что если не только в данный момент, но во все время движения направления составляющих вращений взаимно противоположны, а их угловые скорости равны, то составное движение есть движение поступательное. Итак, плоское поступательное движение можно рассматривать как составное из двух вращений в противоположные

стороны с равными угловыми скоростями. Совокупность двух вращений в противоположные стороны с равными угловыми скоростями называется парой вращений.

Задача 27. Решить задачу 21 при помощи сложения вращений.

Рассматриваем абсолютное движение шестерни L (черт. 235) как составное из переносного движения вместе со стержнем OA и из относительного движения по отношению к этому стержню.

Переносный мгновенный центр P_1 совпадает с точкой O , относительный мгновенный центр P_2 совпадает с центром A шестерни L , а абсолютный мгновенный центр P находится в точке касания окружностей шестерен K и L . Переносная угловая скорость ω_1 равна данной угловой скорости ω_1 стержня OA . Искомая угловая скорость ω_2 есть абсолютная угловая скорость шестерни L .

Так как абсолютный мгновенный центр P находится между мгновенными центрами P_1 и P_2 , то все три вращения (абсолютное, переносное и относительное) направлены в одну и ту же сторону. В таком случае имеем:

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_r.$$

С другой стороны,

$$\frac{\omega_r}{\omega_1} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{a}{b},$$

откуда, полагая $\omega_1 = \omega_1$, находим:

$$\omega_r = \frac{a}{b} \omega_1.$$

Следовательно,

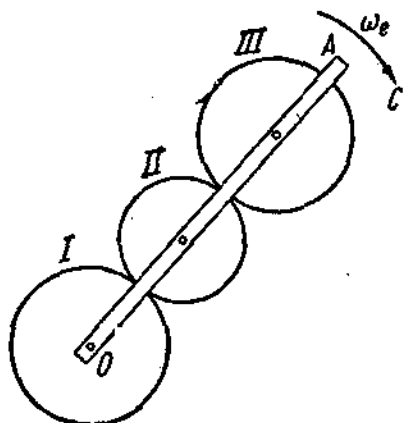
$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_2 = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \omega_1.$$

Задача 28. На неподвижную ось O насажена шестерня I и рычаг OA (черт. 236). Шестерня I закреплена неподвижно, рычаг OA вращается вокруг неподвижной оси O и несет оси подвижных шестерен II и III. Радиусы шестерен соответственно равны: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 15$ см, $r_3 = 20$ см. Рычаг OA вращается вокруг оси O по часовой стрелке, делая 60 оборотов в минуту. Найти угловую скорость шестерни III.

Рассматривая абсолютное движение шестерни III как составное из переносного движения вместе с рычагом OA и из относительного движения по отношению к этому рычагу.

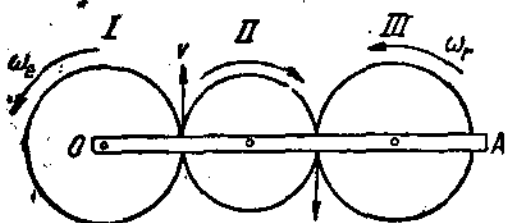
В таком случае переносное вращение шестерни III направлено по часовой стрелке, и переносная угловая скорость равна

$$\omega_2 = 60 \frac{\text{оборот}}{\text{мин}}.$$



Черт. 236.

Чтобы найти относительную угловую скорость шестерни III, посмотрим на наш механизм с точки зрения наблюдателя, участвующего во вращении рычага OA . Этому наблюдателю рычаг OA представляется неподвижным, шестерня же I представится ему вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = 60 \frac{\text{оборот}}{\text{мин}}$ (черт. 237). Шестерни II и III также будут представляться нашему наблюдателю



Черт. 237.

вращающимися вокруг неподвижных осей; шестерня II будет вращаться по часовой стрелке, шестерня III — против часовой стрелки. Эти движения шестерни I, II и III, наблюдаемые наблюдателем, вращающимся вместе с рычагом OA , являются относительными движениями по отношению к этому рычагу.

Теперь легко найти относительную угловую скорость ω_3 шестерни III. Имея в виду, что при вращении вокруг неподвижных осей шестерни I, II и III должны иметь в точках касания одинаковые окружные скорости и обозначая эту общую окружную скорость через v , имеем

$$v = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 = r_3 \omega_3.$$

откуда

$$\omega_r = \frac{r_1}{r_3} \omega_c = 60 \frac{\text{обор}}{\text{мин}}.$$

Следовательно, в своем относительном движении по отношению к рычагу OA шестерня III вращается против часовой стрелки, делая 60 оборотов в минуту.

Так как переносное и относительное вращения шестерни III происходят в противоположные стороны, то абсолютную угловую скорость ω этой шестерни найдем как разность переносной и относительной угловых скоростей:

$$\omega = \omega_c - \omega_r = 60 \frac{\text{обор}}{\text{мин}} - 60 \frac{\text{обор}}{\text{мин}} = 0.$$

Итак, в своем абсолютном движении шестерня III совсем не вращается, — она движется поступательно.

§ 105. Применение сложения вращений к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма.

В предыдущем параграфе мы видели, что три мгновенных центра скоростей P , P_c и P_r лежат на одной прямой; в исключительном же случае, когда мгновенный центр P находится в бесконечности, скорость v перпендикулярна к прямой, проходящей через мгновенные центры P_c и P_r .

Это предложение может быть с пользой применено к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма.

Представим себе плоский механизм, состоящий из n звеньев, которые будем рассматривать как плоские фигуры $S_1, S_2, \dots, S_n$. Условимся обозначать мгновенный центр скоростей в относительном движении какого-либо звена S_a по отношению к звену S_b через P_{ab} и заметим, что мгновенный центр скоростей в относительном движении звена S_b по отношению к звену S_a совпадает с мгновенным центром скоростей в относительном движении звена S_a по отношению к звену S_b , т. е. что точка P_{ba} совпадает с точкой P_{ab} .

Возьмем теперь какие-либо три звена S_a, S_b, S_c . Относительное движение звена S_a по отношению к звену S_c можно рассматривать как составное движение из относительного движения звена S_a по отношению к звену S_b и относительного движения S_b по отношению к звену S_c . Применяя к данному случаю предложение, сформулированное в начале этого параграфа, мы приходим к следующему результату.

*Мгновенные центры P_{ab} , P_{ac} и P_{bc} лежат на одной прямой*¹. Если же один из этих мгновенных центров, например P_{ac} , находится в бесконечности, то скорость звена S_a в его относительном движении по отношению к звену S_c перпендикулярна к прямой, проходящей через два других мгновенных центра P_{ab} и P_{bc} .

Применяя эту теорему (которую будем называть теоремой о трех мгновенных центрах скоростей) к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма, следует рассматривать неподвижный устой механизма как $n+1$ -е звено S_{n+1} , а абсолютное движение звена S_a как относительное движение по отношению к звену S_{n+1} .

¹ Эту теорему называют иногда теоремой Аригольда. На самом деле исследование, изложенное в предыдущем параграфе, принадлежит Пуансо.

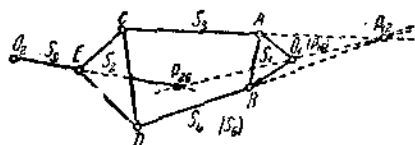
В таком случае мгновенный центр скоростей в абсолютном движении звена S_a должен быть обозначен через $P_{a, n+1}$.

Задача 29. Механизм состоит из звеньев S_1 и S_2 , соединенных стержнями S_3 и S_4 ; звено S_1 вращается вокруг неподвижной оси O_1 , а к звену S_2 присоединен стержень S_6 , вращающийся вокруг неподвижной оси O_2 (черт. 238). Построить мгновенный центр скоростей для звена S_2 .¹

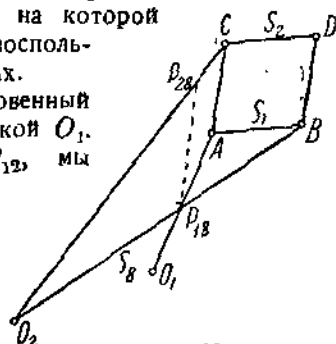
Обозначим неподвижный устоя механизма через S_6 . Требуется построить мгновенный центр P_{26} .

Нам известно направление скорости точки E : оно перпендикулярно к прямой EO_2 . Так как мгновенный центр P_{26} должен лежать на перпендикуляре, восставленном в точке E к направлению ее скорости, то, следовательно, он лежит на прямой EO_2 . Чтобы построить другую прямую, на которой должен находиться мгновенный центр P_{26} , воспользуемся теоремой о трех мгновенных центрах.

Возьмем звенья S_1 , S_2 и S_6 . Мгновенный центр P_{16} совпадает с неподвижной точкой O_1 . Желая построить мгновенный центр P_{12} , мы



Черт. 238.



Черт. 239.

замечаем, что в относительном движении звена S_2 по отношению к звену S_1 нам известны направления скоростей точек C и D . Они перпендикулярны к прямым AC и BD . Следовательно, мгновенный центр P_{12} лежит в пересечении прямых AC и BD . Проведем теперь прямую через точки P_{16} и P_{12} ; по теореме о трех мгновенных центрах на этой прямой должен лежать и мгновенный центр P_{26} .

Итак, искомый мгновенный центр P_{26} находится в пересечении прямых EO_2 и O_1P_{12} .

Задача 30. Построить мгновенный центр скоростей для звена CD инверсора Поселье (черт. 239).

Инверсор Поселье состоит из 7 стержней. Обозначим стержень AB через S_1 , стержень CD через S_2 , а неподвижный устоя механизма через S_3 . Требуется построить мгновенный центр P_{28} .

Нам известно направление скорости точки C : оно перпендикулярно к CO_2 . Следовательно, мгновенный центр P_{28} лежит на прямой CO_2 . Чтобы построить другую прямую, на которой должен лежать мгновенный центр P_{28} , воспользуемся теоремой о трех мгновенных центрах.

Возьмем звенья S_1 , S_2 и S_3 . Мгновенный центр P_{13} находится в пересечении перпендикуляров, восставленных в точках A и B к направлениям их скоростей, т. е. в пересечении прямых AO_1 и BO_2 . Относительное же движение звена S_2 по отношению к звену S_1 , есть движение посту-

¹ Механизм, изображенный на черт. 238, представляет схему части кулисного механизма Стефенсона.

пательное (ибо при всяком положении механизма $CD\|AB$). Следовательно, мгновенный центр P_{12} находится в бесконечности.

Скорость звена S_2 в его относительном движении по отношению к звену S_1 перпендикулярна к прямой AC . Прямая, проходящая через точки P_{18} и P_{28} , должна быть перпендикулярна к этой скорости, т. е. должна быть параллельна прямой AC .

Итак, проведя через точку P_{18} прямую, параллельную AC , находим искомый мгновенный центр P_{28} в пересечении этой прямой с прямой CO_2 .

ГЛАВА XVII

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

§ 106. Эйлеровы углы. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Движение твердого тела называется *вращением вокруг неподвижной точки*, если во все время движения одна точка твердого тела остается неподвижной.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O (черт. 240). Чтобы определить аналитически вращательное движение твердого тела вокруг точки O , возьмем три взаимноперпендикулярные неподвижные оси x, y, z с началом в точке O и три взаимноперпендикулярные и неизменно связанные с твердым телом оси ξ, η, ζ , с началом в той же точке O .

Отметим пересечение плоскостей xOy и $\xi O\eta$; пусть это будет прямая OJ . Введем следующие обозначения:

$$\angle(z, \zeta) = \vartheta, \angle(x, J) = \psi, \angle(J, \xi) = \varphi,$$

причем условимся считать углы ϑ, ψ, φ положительными в том случае, если для наблюдателей, смотрящих соответственно со стороны положительных осей J, z, ζ , эти углы представляются отложенными от осей z, x, J в сторону вращения часовой стрелки.

Заданием углов ϑ, ψ, φ вполне определяется положение осей ξ, η, ζ , а следовательно и положение твердого тела, с которым эти оси неизменно связаны. Углы ϑ, ψ, φ называются *Эйлеровыми углами*.

Если твердое тело совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки O , то углы ϑ, ψ, φ непрерывно изменяются с течением времени, т. е. являются некоторыми функциями времени t :

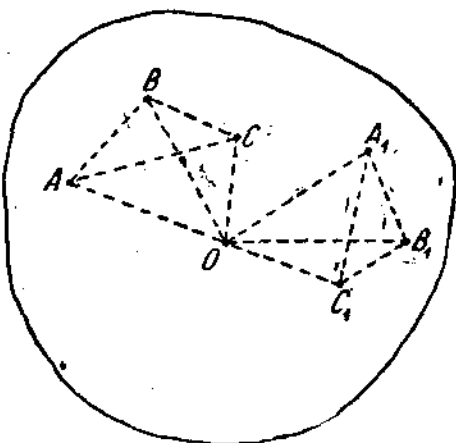
$$\vartheta = f_1(t), \psi = f_2(t), \varphi = f_3(t).$$

Эти уравнения, которыми вполне определяется вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки O , называются *уравнениями вращения твердого тела вокруг неподвижной точки*.

§ 107. Теорема о перемещении твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось и угловая скорость твердого тела.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Покажем, что *твердое тело может быть перемещено из всякого данного положения во всякое другое положение простым вращением вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.*

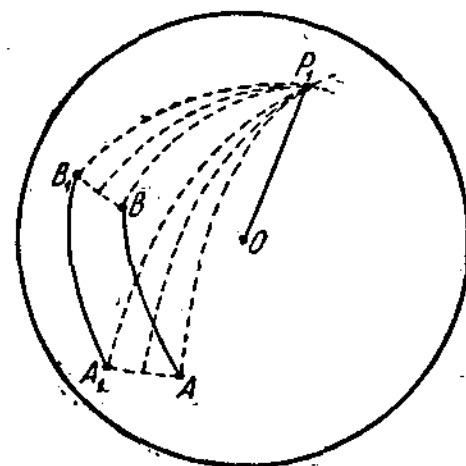
Заметим предварительно, что положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O (черт. 241), вполне определяется положением двух его точек A и B , не лежащих на одной прямой с неподвижной точкой O . В самом деле, если точки A и B в некоторый момент занимают положения A_1 и B_1 , то положение любой третьей точки C в рассматриваемый момент мы найдем, построив на треугольнике OA_1B_1 , как на основании, тетраэдр $OA_1B_1C_1$, равный тетраэдру $OABC$.



Черт. 241.

Перейдем теперь к доказательству сформулированной выше теоремы.

Представим себе твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O (черт. 242; очертание тела на чертеже не изображено). Про-



Черт. 242.

ведем внутри этого тела из неподвижной точки O , как из центра, поверхность сферы произвольного радиуса. На этой сферической поверхности возьмем какие-нибудь две точки A и B и введем через эти точки дугу большого круга AB . Положением точек A и B или, что все равно, положением дуги AB вполне определяется положение нашего твердого тела.

Возьмем моменты времени t и $t + \Delta t$. Положим, что в момент t дуга AB занимает положение, указанное на чертеже, а в момент $t + \Delta t$ она занимает положение A_1B_1 . Покажем, что из первого положения во второе наша дуга может быть перемещена простым

вращением вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку O .

Проведем дуги больших кругов AA_1 и BB_1 . Через точки, делящие эти дуги пополам, проведем дуги больших кругов, перпендикулярные к дугам AA_1 и BB_1 . Отметим точку пересечения P_1 только что про-

веденных двух дуг и соединим точку P_1 с неподвижной точкой O прямой линией. Прямая OP_1 и есть та ось, вращением вокруг которой можно переместить дугу AB в положение A_1B_1 .

В самом деле, проведем еще дуги больших кругов AP_1 , BP_1 , A_1P_1 , B_1P_1 . Сферические треугольники ABP_1 и $A_1B_1P_1$ равны (по равенству трех сторон).

Следовательно,

$$\angle AP_1B = \angle A_1P_1B_1.^1$$

Вычитая из обеих частей этого равенства по углу $\angle A_1P_1B$, получаем $\angle AP_1A_1 = \angle BP_1B_1$.

Обозначим каждый из равных углов $\angle AP_1A_1$ и $\angle BP_1B_1$ через $\Delta\alpha$. Если повернем дугу AB вокруг оси OP_1 на угол $\Delta\alpha$, то точка A займет положение A_1 , точка B займет положение B_1 , и, следовательно, дуга AB переместится в положение A_1B_1 .

Итак, дугу AB (а вместе с нею и все твердое тело) можно переместить из первого положения во второе поворотом вокруг оси OP_1 на угол $\Delta\alpha$.

Перейдем теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$. При приближении Δt к нулю второе положение дуги AB приближается к ее первому положению и второе положение твердого тела приближается к его первому положению. Вместе с тем, ось вращения OP_1 приближается к некоторому предельному положению OP , которое называется *мгновенной осью* для данного момента t . Предел же, к которому приближается отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, когда Δt приближается к нулю, называется *угловой скоростью* твердого тела в момент t . Обозначим угловую скорость буквой ω ; следовательно,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right].$$

Конечно, этот предел не равен производной $\frac{d\alpha}{dt}$ (ибо нет никакого угла α). В дальнейшем (в § 111) будет показано, как может быть вычислена угловая скорость ω , если заданы уравнения вращения твердого тела.

Угловую скорость ω мы условимся рассматривать как величину векториальную, приписывая угловой скорости направление мгновенной оси, причем условимся откладывать угловую скорость ω по мгновенной оси от неподвижной точки O в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по угловой скорости (ногами в точке O), вращение твердого тела вокруг мгновенной оси представлялось происходящим по часовой стрелке.

§ 108. Скорости точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Возьмем какую-нибудь точку M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O (черт. 243). Отметим положения, занимаемые точкой M в момент t (положение M) и в момент $t + \Delta t$ (положение M_1).

¹ Под углом $\angle AP_1B$ мы понимаем угол между касательными, проведенными в точке P_1 к дугам P_1A и P_1B .

Скорость v точки M в момент t определим как предел скорости v_m фиктивного равномерного движения по хорде MM_1 .

Имеем:

$$v_m = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Мы знаем, что наше твердое тело может быть перемещено из первого положения во второе поворотом вокруг некоторой оси OP_1 на некоторый угол $\Delta\alpha$. Опустив из точек M и M_1 перпендикуляры MK_1 и M_1K_1 на ось вращения OP_1 , получим равнобедренный треугольник MK_1M_1 , в котором угол при вершине K_1 равен $\Delta\alpha$. Из этого треугольника выводим

$$MM_1 = 2MK_1 \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$$

и, следовательно,

$$v_m = 2MK_1 \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t = 0$, получаем

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [v_m] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[2MK_1 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t} \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[MK_1 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

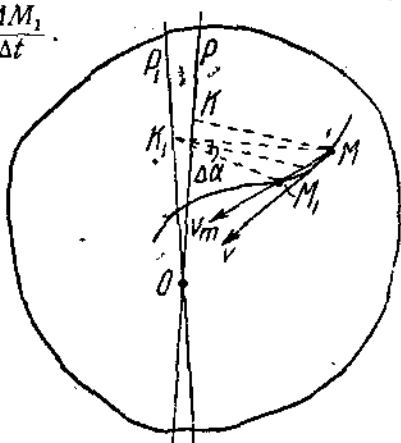
Но

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [MK_1] &= MK, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \right] = 1, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right] &= \omega, \end{aligned}$$

где MK есть перпендикуляр, опущенный из точки M на мгновенную ось OP . Обозначая $MK = r$, находим

$$v = r\omega.$$

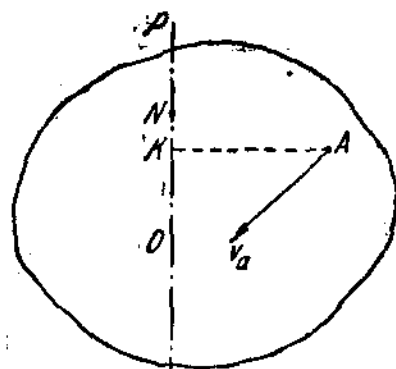
С другой стороны, направление фиктивной скорости v_m перпендикулярно к оси вращения OP_1 (ибо плоскость треугольника MK_1M_1



Черт. 243.

перпендикулярна к оси OP_1 и образует угол $90^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2}$ с отрезком MK_1 .

Переходя к пределу $\lim \Delta t = 0$, мы заключаем, что направление скорости v перпендикулярно к мгновенной оси OP и к перпендикуляру MK , опущенному из точки M на мгновенную ось. Другими словами, направление скорости v перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку M и мгновенную ось OP .



Черт. 244.

Полученные для величины и направления скорости v результаты можно кратко формулировать, сказав, что *скорость любой точки твердого тела есть вращательная скорость вокруг мгновенной оси.*

Для точек, лежащих на мгновенной оси, имеем $r = 0$, а следовательно и $v = 0$. Значит, мгновенную ось можно определить как общее место точек твердого тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

Чтобы построить мгновенную ось, соответствующую данному моменту, до-

статочно найти одну точку N твердого тела, скорость которой в этот момент равна нулю. Прямая, проходящая через точку N и неподвижную точку O , и есть мгновенная ось OP (черт. 244).

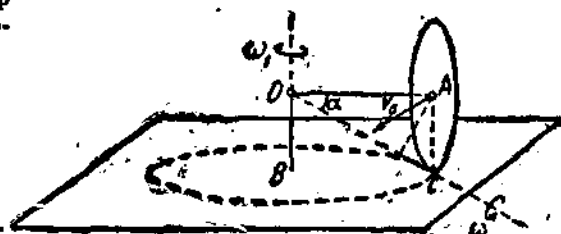
Если мгновенная ось уже построена, то для нахождения угловой скорости ω достаточно знать скорость v_A какойнибудь точки A (не лежащей на мгновенной оси).

Опуская перпендикуляр AK из точки A на мгновенную ось, имеем:

$$v_A = AK \cdot \omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_A}{AK},$$



Черт. 245.

т. е. для нахождения угловой скорости ω следует

разделить скорость v_A на расстояние точки A до мгновенной оси.

Задача 31. Круглый диск катится по горизонтальной плоскости, причем горизонтальная ось его OA вращается вокруг неподвижной оси OB с угловой скоростью ω_1 (черт. 245); $OA = a$, $OB = b$. Найти угловую скорость диска, предполагая, что он катится без скольжения.

Движение диска можно рассматривать как вращение вокруг неподвижной точки O . Прежде всего найдем мгновенную ось этого вращения.

Мгновенная ось должна проходить через неподвижную точку O и через ту точку диска, скорость которой в данный момент равна нулю. Так как по предположению диск катится без скольжения, то этой точкой является точка касания диска с горизонтальной плоскостью, то

которой он катится. Обозначая эту точку буквой C и соединяя ее прямой линией с неподвижной точкой O , получаем мгновенную ось OC .

Чтобы найти угловую скорость диска ω , обратимся к величине скорости v_a его центра A . Так как точка A принадлежит стержню OA , вращающемуся с угловой скоростью ω_1 вокруг неподвижной оси OB , то скорость v_a должна быть вращательной скоростью вокруг оси OB , т. е.

$$v_a = OA \cdot \omega_1 = a\omega_1.$$

Но точка A принадлежит также нашему диску, а следовательно ее скорость v_a должна быть в то же время вращательной скоростью вокруг мгновенной оси OC . Опуская из точки A перпендикуляр AD на мгновенную ось AC , обозначая угол AOC через α и замечая, что $AD = OA \sin \alpha = a \sin \alpha$, получаем

$$v_a = AD \cdot \omega = a \omega \sin \alpha,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_a}{a \sin \alpha} = \frac{a \omega_1}{a \sin \alpha} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha}.$$

Далее, обращаясь к треугольнику AOC , легко заметить, что

$$\sin \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{OB}{OC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Следовательно,

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Направление вращения диска вокруг мгновенной оси определяется направлением скорости v_a точка A ; это направление указано на черт. 245 стрелкой.

§ 109. Аксоиды.

Возьмем ряд последовательных моментов времени $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, t + 3\Delta t$ и т. д. и отметим положения занимаемые нашим твердым телом в эти моменты; назовем их 1-м, 2-м, 3-м, 4-м и т. д. положениями тела. Положим, что из 1-го положения во 2-ое тело может быть перемещено вращением вокруг оси OP_1 на угол $\Delta\alpha_1$, из 2-го положения в 3-е — вращением вокруг оси OP_2 на угол $\Delta\alpha_2$, из 3-го положения в 4-е — вращением вокруг оси OP_3 на угол $\Delta\alpha_3$ и т. д. (черт. 246). Для краткости речи условимся вращения вокруг осей OP_1, OP_2, OP_3 и т. д. называть 1-м, 2-м, 3-м и т. д. вращениями.

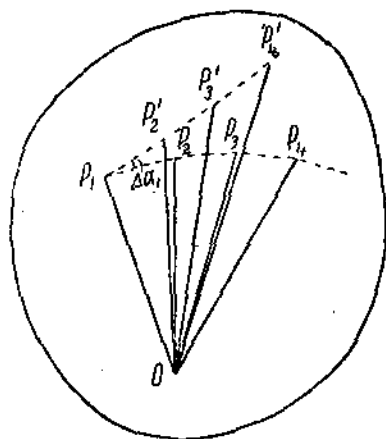
Проведя плоскости последовательно через прямые OP_1 и OP_2, OP_2 и OP_3, OP_3 и OP_4 и т. д., мы получим многогранник $OP_1P_2P_3P_4 \dots$ с вершиной в неподвижной точке O . Ребрами этого многогранника являются последовательные оси вращения нашего тела; назовем этот многогранник многогранником осей, и притом „неподвижным“ многогранником осей, в отличие от другого многогранника осей, о котором сейчас будет идти речь.

Построим ту прямую OP'_2 твердого тела, которая после 1-го вращения совпадает с прямой OP_2 , и, следовательно, является осью вращения при 2-м вращении. Для этого проводим через прямую OP_1 полу-

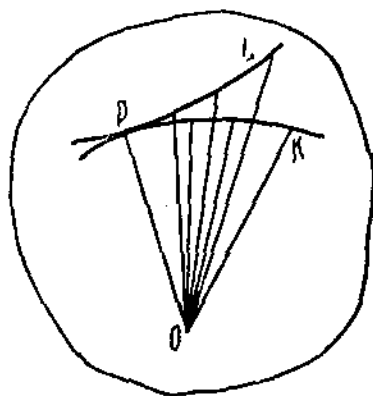
плоскость, образующую двугранный угол $\Delta\alpha_1$ с гранью P_1OP_2 (причем двугранный угол $\Delta\alpha_1$ откладываем от грани P_1OP_2 в сторону, обратную вращению твердого тела вокруг оси OP_1); в этой полуплоскости проводим через точку O прямую OP'_2 , образующую с прямой OP_1 угол, равный углу P_1OP_2 .

Затем строим те прямые OP_3 , OP'_4 и т. д. нашего твердого тела, которые после 2-го, 3-го и т. д. вращений совпадают с прямыми OP_3 , OP_4 и т. д. и, следовательно, являются осями вращения при 3-м, 4-м и т. д. вращении.

Многогранник $OP_1P'_2P'_3P'_4 \dots$, в котором прямые OP_1 , OP'_2 , OP'_3 , OP'_4 и т. д. служат ребрами, мы назовем „подвижным“ многогранником осей. Его ребрами являются те прямые твердого тела, которые служат



Черт. 246.



Черт. 247.

осями вращения при последовательных вращении тела. Этот многогранник неизменно связан с твердым телом и движется вместе с ним. Его движение мы можем кратко характеризовать, сказав, что при фиктивном движении твердого тела, состоящем из ряда последовательных вращений, подвижной многогранник осей катится без скольжения по неподвижному многограннику осей.

Перейдем теперь к пределу $\lim \Delta t = 0$. Предельными положениями осей вращения OP_1 , OP_2 , OP_3 и т. д. являются мгновенные оси, соответствующие последовательным моментам времени. Предельное положение оси OP_1 есть мгновенная ось OP , соответствующая моменту t (черт. 247).

Вместе с тем неподвижный многогранник осей в пределе обращается в коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке Q , которая представляет общее место мгновенных осей в неподвижном пространстве. Эта коническая поверхность называется *неподвижным аксоидом*; обозначим ее буквой K .

Подвижной многогранник осей в пределе также обращается в коническую поверхность с вершиной в точке O , которая представляет общее место мгновенных осей в движущемся твердом теле. Эта коническая поверхность неизменно связана с твердым телом и движется вместе

с ним; она называется *подвижным аксоидом*; обозначим ее буквой L .

Так как угол $\Delta\alpha$, при $\lim \Delta t = 0$ обращается в нуль, то оба аксоида касаются по своей общей производящей OP ; эта общая производящая является мгновенной осью для момента t .

Мы видели, что при фиктивном движении твердого тела, состоящем из ряда последовательных вращений, подвижной многогранник осей катится без скольжения по неподвижному многограннику осей. Отсюда мы заключаем, что при действительном движении твердого тела *подвижной аксоид катится без скольжения по неподвижному аксоиду*.

Итак, всякое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки может быть представлено как катание без скольжения некоторой подвижной конической поверхности, неизменно связанной с твердым телом, по некоторой неподвижной конической поверхности.

§ 110. Теорема сложения угловых скоростей.

Представим себе твердое тело A , вращающееся вокруг неподвижной точки O , и неизменяемую среду B , вращающуюся вокруг той же точки. Твердое тело A , совершая свое абсолютное движение в пространстве, в то же время совершает некоторое относительное движение по отношению к среде B . Ясно, что это относительное движение тела A также есть вращение вокруг неподвижной точки O .

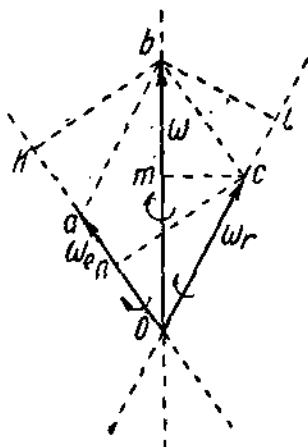
Назовем движение среды B переносным движением. Абсолютное движение тела A мы можем рассматривать как составное из относительного движения по отношению к среде B и переносного движения этой среды.

В каждом из трех движений — абсолютном, относительном и переносном — существует в данный момент своя мгновенная ось и своя угловая скорость. Обозначим эти три угловые скорости через ω , ω_r и ω_e , и будем их называть абсолютной, относительной и переносной угловыми скоростями. Мы будем рассматривать угловые скорости ω , ω_r и ω_e как величины векториальные, откладывая их по соответствующим мгновенным осям (как было объяснено в § 107).

Покажем, что *абсолютная угловая скорость равна геометрической сумме переносной и относительной угловых скоростей*.

В самом деле, построим на угловых скоростях ω_r и ω_e (отложенных по соответствующим мгновенным осям) параллелограмм $Oabc$ (черт. 248) и покажем, что диагональ Ob этого параллелограмма есть угловая скорость ω .

Чтобы в этом убедиться, нужно показать, во-первых, что прямая Ob есть мгновенная ось в абсолютном движении, во-вторых, что величина диагонали Ob измеряет величину абсолютной угловой скорости ω , и, в-третьих, что для наблюдателя, расположенного по диагонали Ob (ногами в точке O), абсолютное вращение представляется направленным по часовой стрелке.



Черт. 248.

1. Покажем, что абсолютная скорость точки b равна нулю. По теореме сложения скоростей абсолютная скорость v любой точки данного твердого тела равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей v_e и v_r :

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}.$$

Применим эту теорему к точке b . Переносная и относительная скорости v_e и v_r точки b суть вращательные скорости вокруг соответствующих мгновенных осей. Следовательно, опуская перпендикуляры bk и bl из точки b на эти мгновенные оси, имеем:

$$v_e = bk \cdot \omega_e = bk \cdot Oa$$

$$v_r = bl \cdot \omega_r = bl \cdot Oc.$$

Но произведения $bk \cdot Oa$ и $bl \cdot Oc$ равны площади параллелограмма $Oabc$. Следовательно, $bk \cdot Oa = bl \cdot Oc$ и

$$v_e = v_r.$$

Направления же скоростей v_e и v_r взаимно противоположны: скорость v_e направлена перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению к читателю, а скорость v_r — перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению от читателя (направление переносного и относительного вращений указаны на чертеже стрелками).

Следовательно, геометрическая сумма скоростей v_e и v_r равна нулю, т. е. абсолютная скорость v точки b равна нулю.

Отсюда следует, что прямая Ob есть мгновенная ось в абсолютном движении тела.

2. Применим теорему сложения скоростей к точке c . Так как точка c лежит на мгновенной оси относительного вращения, то ее относительная скорость v_r равна нулю. Следовательно, абсолютная скорость v точки c должна быть геометрически равна ее переносной скорости v_e . Абсолютная же и переносная скорости точки c суть вращательные скорости вокруг соответствующих мгновенных осей. Опуская из точки c перпендикуляры cm и cn на эти мгновенные оси, имеем:

$$v = cm \cdot \omega, v_e = cn \cdot \omega_e = cn \cdot Oa = 2\Delta Oab = 2\Delta Obc = Ob \cdot cm$$

Приравнявая эти скорости, получаем:

$$cm \cdot \omega = Ob \cdot cm$$

или

$$\omega = Ob.$$

3. Направление абсолютной скорости v точки c совпадает с направлением ее переносной скорости v_e ; следовательно, скорость v точки c направлена перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению к читателю. Отсюда видно, что для наблюдателя, расположенного на отрезке Ob (ногами в точке O), абсолютное вращение будет представляться происходящим по часовой стрелке.

Доказанная теорема сложения угловых скоростей может быть названа также *правилом параллелограмма угловых скоростей*.

Эта теорема легко обобщается на случай какого-угодно числа составляющих движений.

Например, представим себе твердое тело A и две неизменяемые среды B и C . Представим себе, что как тело A , так и среды B и C вращаются вокруг одной и той же неподвижной точки O . Абсолютное движение тела A мы можем рассматривать как составное из трех движений: относительного движения тела A по отношению к среде B , относительного движения среды B по отношению к среде C и переносного движения среды C . Все эти движения суть вращения вокруг неподвижной точки O . Назовем угловые скорости трех составляющих движений соответственно через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а угловую скорость составного движения через ω .

Рассматривая сначала абсолютное движение тела A как составное из относительного его движения по отношению к среде B и переносного движения среды B и обозначая угловую скорость среды B (в ее переносном движении) через ω'_2 , имеем по доказанному:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}'_2$$

Но переносное движение среды B можно рассматривать как составное из относительного ее движения по отношению к среде C и переносного движения среды C . Следовательно, по доказанному имеем:

$$\bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$$

Итак, получаем

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$$

Черт. 249.

т. е. угловая скорость составного движения равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих движений.

И вообще, если имеем вращение вокруг неподвижной точки, которое представляется как составное из n составляющих вращений вокруг той же точки, то угловая скорость ω составного вращения равна геометрической сумме угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ составляющих вращений.

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_n$$

Другими словами, угловая скорость ω есть замыкающий бок многоугольника, построенного на угловых скоростях $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Этот результат можно назвать *правилом многоугольника угловых скоростей*.

Задача 32. Решить задачу 31 при помощи параллелограмма угловых скоростей.

Движение диска можно рассматривать как составное из двух движений: переносного вращения вокруг оси OB вместе со стержнем OA и относительного вращения вокруг этого стержня.

Переносная угловая скорость ω_1 должна быть направлена по оси OB (вверх, если, как мы предполагаем, вращение стержня OA вокруг оси OB происходит по часовой стрелке); относительная угловая скорость ω_2 и искомая нами абсолютная угловая скорость диска ω направлены соответственно по прямой OA и по мгновенной оси OC . Построим

параллелограмм угловых скоростей (черт. 249), находим из этого параллелограмма выражение абсолютной угловой скорости:

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin \alpha}$$

или, имея в виду, что

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}.$$

Направление абсолютного вращения определяется направлением абсолютной угловой скорости ω .

§ III. Проекции угловой скорости на координатные оси, неизменно связанные с твердым телом.

Представим себе твердое тело A , вращающееся вокруг неподвижной точки O . Возьмем взаимно-перпендикулярные неподвижные оси x, y, z и взаимно-перпендикулярные неподвижные оси ξ, η, ζ , неизменно связанные с твердым телом (черт. 250; очертание тела A на чертеже не изображено). Введем Эйлеровы углы ϑ, ψ, φ и положим, что движение нашего твердого тела определяется уравнениями движения

$$\vartheta = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Построим угловую скорость ω тела A в момент t и предположим себе вычислить проекции угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ .

Для этой цели воспользуемся теоремой сложения угловых скоростей.

Представим себе две неизменяемые среды B и C , из которых среда C вращается вокруг неподвижной оси z вместе с прямой OJ ,¹

а среда B совершает относительное движение по отношению к среде C , вращаясь вокруг оси OJ вместе с осью ζ . Относительное движение тела A по отношению к среде B будет не что иное, как вращение вокруг оси ζ .

Абсолютное движение тела A мы можем рассматривать как составное из его относительного движения по отношению к среде B , относительного движения среды B по отношению к среде C и переносного движения среды C . Следовательно, обозначая угловые скорости этих трех составляющих движений соответственно через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, имеем

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3.$$

¹ Напомним, что прямая OJ есть пересечение плоскостей xOy и $\xi O\eta$.

Так как составляющие движения суть вращения вокруг постоянных осей, то угловые скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вычисляются легко; они равны производным по времени от соответствующих углов поворота.

Углом поворота в относительном вращении тела A по отношению к среде B является угол φ , в относительном вращении среды B по отношению к среде C — угол θ , а в переносном вращении среды C — угол ψ . Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega_3 = \frac{d\psi}{dt}.$$

Эти угловые скорости должны быть отложены по соответствующим осям вращения, т. е. ω_1 по оси ξ , ω_2 по оси OJ , ω_3 по оси z .

Обозначим искомые проекции угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ через p, q, r , а проекции на те же оси угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ через $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; p_3, q_3, r_3$. Имея в виду, что проекция геометрической суммы равна сумме проекций составляющих, получаем

$$p = p_1 + p_2 + p_3, \quad q = q_1 + q_2 + q_3, \quad r = r_1 + r_2 + r_3.$$

Остается вычислить проекции $p_1, q_1, \dots, r_3$.

Обращаясь к черт. 250, находим:

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$p_2 = \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi, \quad q_2 = -\frac{d\theta}{dt} \sin \varphi, \quad r_2 = 0.$$

Чтобы вычислить проекции p_3, q_3, r_3 , разложим сначала угловую скорость ω_3 на две составляющие, из которых одна направлена по оси ζ , а другая лежит в плоскости $\xi O \eta$. Первая составляющая равна $\frac{d\psi}{dt} \cos \theta$,

а вторая равна $\frac{d\psi}{dt} \sin \theta$ и направлена по прямой OK , лежащей в плоскости $\xi O \eta$ и перпендикулярной к прямой OJ . Разлагая затем эту вторую составляющую по осям ξ и η и замечая, что прямая OK образует с осями ξ и η углы, равные $90^\circ - \varphi$ и φ , находим:

$$p_3 = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi, \quad q_3 = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi, \quad r_3 = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta.$$

Итак, мы приходим к следующим окончательным формулам:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi \\ q &= \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi \\ r &= \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

По этим формулам могут быть вычислены проекции p, q, r угловой скорости ω , если Эйлеровы углы θ, φ, ψ заданы как функции времени t .

Вычислив эти проекции, мы можем затем найти величину и направление угловой скорости ω по формулам

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$\cos(\omega, \xi) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(\omega, \eta) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(\omega, \zeta) = \frac{r}{\omega}.$$

Формулы (1) являются основными при аналитическом исследовании вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

ГЛАВА XIX.

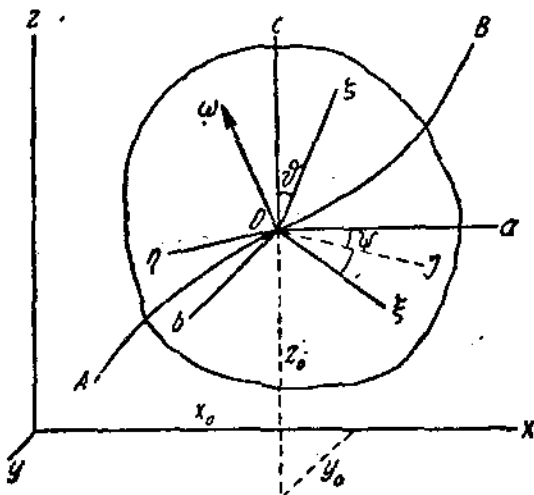
ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

§ 112. Разложение движения твердого тела на поступательное движение и на вращение. Уравнения движения твердого тела. Угловая скорость.

Обратимся к изучению самого общего случая движения твердого тела. Представим себе твердое тело, совершающее какое угодно движение.

Покажем, что *самое общее движение твердого тела может быть разложено на поступательное движение и на вращение.*

В самом деле, возьмем какую-нибудь точку O твердого тела (черт. 251), которую назовем полюсом; положим, что кривая AB есть траектория, описываемая точкой O при движении тела. Затем представим себе неизменяемую среду, которая движется поступательно вместе с полюсом O . Твердое тело, совершая свое абсолютное движение в пространстве, в то же время совершает некоторое относительное движение по отношению к только-что указанной среде; это относительное движение условимся для



Черт. 251.

грамотности речи называть относительным движением тела „по отношению к полюсу O^* . Так как в этом относительном движении тела полюс O не участвует (т. е. остается в относительном покое), то относительное движение тела по отношению к полюсу O есть не что иное, как вращение вокруг этого полюса.

Итак, абсолютное движение твердого тела представляется как составное из поступательного движения вместе с полюсом O и из вращения вокруг этого полюса.

Поступательная часть движения твердого тела вполне определяется движением полюса O . Обозначим координаты точки O относительно взаимно-перпендикулярных координатных осей x, y, z через x_0, y_0, z_0 . Движение полюса O (а вместе с тем и поступательная часть движения твердого тела) вполне определяется уравнениями движения

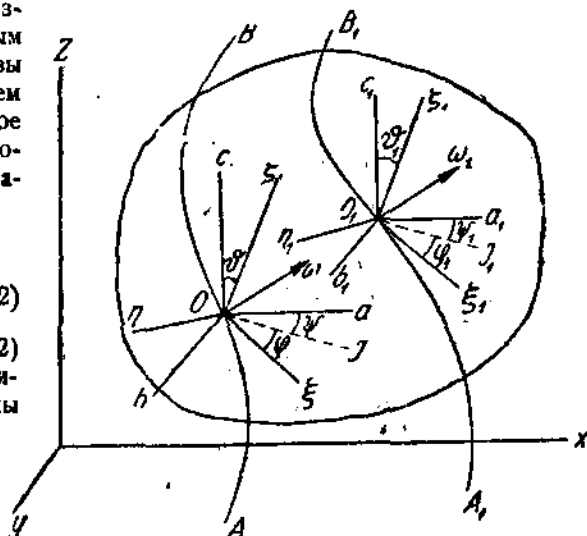
$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad z_0 = f_3(t). \quad (1)$$

Вращение же тела вокруг полюса O может быть определено так, как было объяснено в § 104. Проведем через точку O три взаимно-перпендикулярные оси a, b, c , которые движутся поступательно вместе с точкой O , оставаясь параллельными неподвижным осям x, y, z . Затем возьмем три взаимно-перпендикулярные оси ξ, η, ζ с началом в той же точке O , которые неизменно связаны с твердым телом. Введя Эйлера углы ϑ, ψ, φ , мы можем определить вращательное движение тела вокруг полюса O уравнениями вращения

$$\begin{aligned} \vartheta &= f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \\ \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнениями (1) и (2) вполне определяется движение твердого тела; мы назовем эти уравнения *уравнениями движения твердого тела*.

Во вращательном движении твердого тела вокруг точки O существует в каждый дан-



Черт. 252.

ный момент некоторая мгновенная ось (проходящая через точку O) и угловая скорость ω . Угловую скорость ω мы будем рассматривать как величину векторную, откладывая ее от точки O по направлению мгновенной оси (как было объяснено в § 107). Если заданы уравнения вращения (2), то величина и направление угловой скорости ω могут быть определены по формулам, выведенным в § 111.

Так как за полюс может быть взята любая точка твердого тела, то, выбирая различные точки тела за полюсы, мы можем получить бесчисленное множество разложений движения твердого тела на поступательную и вращательную части. Конечно, поступательная часть движения изменяется с изменением полюса. Покажем, что *вращательная часть движения твердого тела не зависит от выбора полюса*.

Возьмем за полюс точку O , описывающую кривую AB (черт. 252), и составим уравнения вращения вокруг этого полюса. Для этого проведем через точку O оси a, b, c , которые движутся поступательно, оставаясь параллельными неподвижным осям x, y, z , и оси ξ, η, ζ , неизменно

связанные с твердым телом. Отметим Эйлеровы углы ϑ, ψ, φ , получаем уравнения вращения вокруг полюса O :

$$\vartheta = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t).$$

Теперь возьмем за полюс другую точку тела O_1 , описывающую траекторию A_1B_1 . Составим уравнения вращения вокруг этого нового полюса. Для этого проведем через точку O_1 оси a_1, b_1, c_1 , которые движутся поступательно, оставаясь параллельными неподвижным осям x, y, z , и оси ξ_1, η_1, ζ_1 , неизменно связанные с твердым телом. Так как выбор этих последних осей находится в нашем распоряжении, то проведем оси ξ_1, η_1, ζ_1 параллельно осям ξ, η, ζ . В таком случае во все время движения оси a_1, b_1, c_1 будут оставаться параллельными осям a, b, c (ибо и те и другие движутся поступательно), а оси ξ_1, η_1, ζ_1 будут оставаться параллельными осям ξ, η, ζ (ибо и те и другие неизменно связаны с твердым телом). Следовательно, обозначив Эйлеровы углы, построенные при точке O_1 , через $\vartheta_1, \psi_1, \varphi_1$, мы будем иметь во все время движения: $\vartheta_1 = \vartheta, \psi_1 = \psi, \varphi_1 = \varphi$.

Итак, уравнения вращения вокруг полюса O_1 : $\vartheta_1 = f_4(t), \psi_1 = f_5(t), \varphi_1 = f_6(t)$ тождественны с уравнениями вращения вокруг полюса O , т. е. вращательная часть движения тела не зависит от выбора полюса.

Отсюда мы можем заключить, что и угловая скорость вращательной части движения тела не зависит от выбора полюса, т. е. что угловые скорости ω и ω_1 вращательного движения вокруг полюсов O и O_1 геометрически равны.

На этом основании мы имеем право называть общую для всех полюсов угловую скорость ω просто *угловой скоростью твердого тела* (не делая при этом никаких указаний на то, какая точка тела предполагается принятой за полюс).

§ 113. Скорости точек твердого тела. Мгновенная винтовая ось

Представим себе движение твердого тела разложенным на переносное (поступательное) движение вместе с полюсом O и на относительное (вращательное) движение по отношению к этому полюсу (черт. 253). Скорость какой-либо точки M твердого тела может быть найдена при помощи теоремы сложения скоростей; абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей.

Переносная скорость точки M геометрически равна скорости полюса O ; обозначим эту скорость через v_0 . Относительная же скорость v_r точки M есть вращательная скорость, вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O ; обозначая угловую скорость тела через ω , а длину перпендикуляра, опущенного из точки M на мгновенную ось, через r , имеем

$$v_r = r\omega;$$

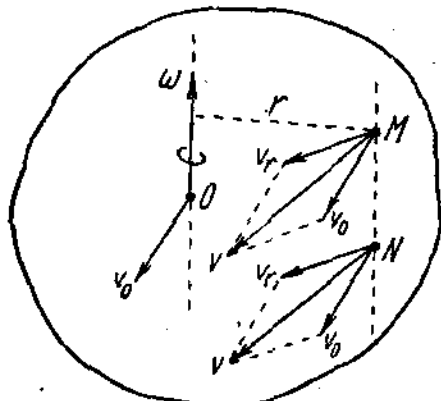
направление скорости v_r перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку M и мгновенную ось (или угловую скорость ω).

Абсолютная скорость точки M есть диагональ параллелограмма, построенного на скоростях v_0 и v_r . Итак, *скорость любой точки твердого тела равна геометрической сумме скорости полюса и скорости данной точки во вращательном движении вокруг этого полюса.*

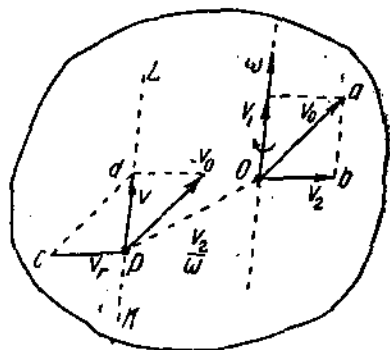
Проведем через точку M прямую, параллельную угловой скорости ω , и возьмем на этой прямой какую-нибудь точку N . Вращательная ско-

рость точки N вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O , геометрически равна вращательной скорости ω точки M ; следовательно, и абсолютная скорость точки N геометрически равна абсолютной скорости v точки M . Итак, все точки твердого тела, лежащие на прямой, параллельной угловой скорости ω , имеют геометрически равные скорости. Покажем теперь, что в каждый данный момент существует бесчисленное множество точек тела, скорости которых направлены параллельно угловой скорости ω .

Возьмем за полюс точку O (черт. 254); отметим скорость полюса v_0 и угловую скорость твердого тела ω . Разложим скорость v_0 на две составляющие v_1 и v_2 , из которых первая направлена параллельно угловой скорости ω , а вторая — к ней перпендикулярно. Затем восставим в точке O



Черт. 253.



Черт. 254.

к плоскости, проходящей через v_0 и ω , перпендикуляр в такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположенного по этому перпендикуляру (ногами в точке O) и смотрящего по направлению угловой скорости ω , скорость v_0 представлялась направленной слева направо. На этом перпендикуляре отложим от точки O отрезок $OP = \frac{v_2}{\omega}$. Найдем скорость точки P .

Скорость v точки P есть диагональ параллелограмма, построенного на скорости полюса v_0 и на вращательной скорости v_r точки P вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O . Величина скорости v , равна

$$v_r = OP \cdot \omega = \frac{v_2}{\omega} \cdot \omega = v_2;$$

направление же скорости v_r перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку P и мгновенную ось, т. е. параллельно направлению составляющей v_2 ; как видно из чертежа, скорость v направлена противоположно скорости v_2 .

Следовательно, стороны Oa и Ob треугольника Oab геометрически равны сторонам cd и cp треугольника cdP . Отсюда следует, что и третьи стороны ba и Pd этих треугольников также геометрически равны, т. е. скорость v точки P геометрически равна составляющей v_1 скорости точки O .

Итак, скорость точки P направлена параллельно угловой скорости ω . Проведем теперь через точку P прямую KL , параллельную угловой ско-

рости ω . Мы уже знаем, что все точки, лежащие на этой прямой, имеют геометрически равные скорости.

Следовательно, скорости всех точек, лежащих на прямой KL , параллельны угловой скорости ω ; другими словами, скорости всех этих точек направлены по самой прямой KL .

Возьмем теперь за полюс какую-нибудь точку O_1 , лежащую на прямой KL (черт. 255), и найдем скорость какой-нибудь точки M твердого тела. Скорость полюса v_1 и угловая скорость ω направлены по прямой KL . Скорость v точки M есть диагональ параллелограмма, построенного

на скорости полюса v_1 и на вращательной скорости v_r точки M вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O_1 , т. е. вокруг прямой KL . Обозначая длину перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую KL , через r , имеем

$$v_r = r\omega;$$

направление скорости v_r перпендикулярно в плоскости, проходящей через точку M и прямую KL .

Отсюда видно, что скорости точек твердого тела в данный момент таковы, как будто бы движение твердого тела складывалось из поступательного движения вдоль прямой KL и из вращения вокруг этой прямой. Движение, составленное из поступательного движения вдоль некоторой

прямой и из вращения вокруг этой же прямой, называется винтовым движением (таково движение винта в гайке). Следовательно, скорости точек твердого тела в данный момент таковы, как будто бы тело совершало винтовое движение вдоль и вокруг прямой KL . На этом основании прямая KL называется *мгновенной винтовой осью*.

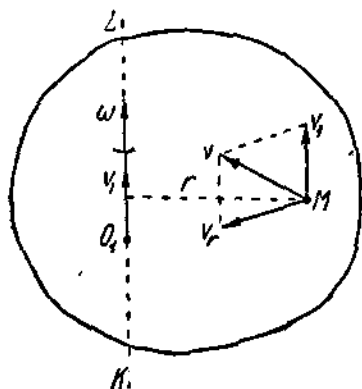
Различным моментам времени соответствуют различные мгновенные винтовые оси. Мгновенная винтовая ось изменяет с течением времени свое положение и в неподвижном пространстве и в движущемся твердом теле. Общее место мгновенных винтовых осей в неподвижном пространстве есть линейчатая поверхность,¹ которая называется *неподвижным аксоидом мгновенных винтовых осей*; а общее место тех же осей в движущемся теле есть другая линейчатая поверхность, которая называется *подвижным аксоидом мгновенных винтовых осей*.

Можно убедиться, что в каждый данный момент оба аксоида касаются по общей производящей, которая и является мгновенной винтовой осью для данного момента.

При движении твердого тела подвижной аксоид катится по неподвижному аксоиду и в то же время скользит вдоль общей их производящей.

Итак, самое общее движение твердого тела может быть представлено как катание одной линейчатой поверхности по другой, соединяемое со скольжением вдоль их общей производящей.

¹ Линейчатой поверхностью называется поверхность, описываемая прямой линией, перемещающейся в пространстве.



Черт. 255.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

ВВЕДЕНИЕ.

Стр.

§	1. Статика, кинематика, динамика	5
§	2. Векторы. Геометрическое сложение и геометрическое вычитание .	6
§	3. Умножение вектора на положительное число	7
§	4. Проекции вектора на ось и на плоскость	9
§	5. Проекции геометрической суммы векторов на ось и на плоскость .	10

ГЛАВА I

Аксиомы статики.

§	6. Материальная точка. Первая аксиома. Сила	12
§	7. Силы внутренние и внешние. Вторая аксиома. Третья аксиома . .	14
§	8. Статически эквивалентные системы сил. Четвертая аксиома . . .	16
§	9. Пятая аксиома. Примеры	17
§	10. Равновесие твердых тел. Шестая аксиома	20

ГЛАВА II.

Сложение сил, приложенных в одной точке и лежащих в одной плоскости.

§	11. Параллелограммы сил. Треугольник сил	22
§	12. Многоугольник сил	23
§	13. Проекция силы на ось	27
§	14. Нахождение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций	28
§	15. Уравнения равновесия сил, приложенных в одной точке	29
§	16. Сложение сил, направленных по одной прямой	31
§	17. Сложение сил, линии действия которых пересекаются в одной точке	32
§	18. Равновесие трех непараллельных сил	33

ГЛАВА III.

Сложение пар, лежащих в одной плоскости.

§	19. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону	34
§	20. Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны	36
§	21. Пара сил. Момент пары	37
§	22. Условие эквивалентности пар	38
§	23. Сложение пар. Условие равновесия пар	40

ГЛАВА IV.

Сложение сил, расположенных как угодно на плоскости.

§ 24. Момент силы относительно точки	42
§ 25. Приведение силы к данной точке	43
§ 26. Приведение системы сил, расположенных как угодно на плоскости, к силе и паре. Главный вектор и главный момент	—
§ 27. Случай, когда силы находятся в равновесии. Уравнения равновесия	45
§ 28. Случай, когда силы приводятся к паре	46
§ 29. Случай, когда силы приводятся к одной равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей	—
§ 30. Выражение момента силы через проекции силы на координатные оси	47
§ 31. Задачи статически определенные и статически неопределенные	48
§ 32. Примеры на определение опорных реакций	50
§ 33. Другие примеры на применение уравнений равновесия	53
§ 34. Определение линии действия равнодействующей	55
§ 35. Сложение параллельных сил на плоскости. Уравнения равновесия параллельных сил	56

ГЛАВА V.

Способ веревочного многоугольника.

§ 36. Первый случай. Многоугольник сил не замкнут	59
§ 37. Второй случай. Многоугольник сил замкнут	62
§ 38. О фигуре равновесия нити	64

ГЛАВА VI.

Определение усилий в брусках фермы.

§ 39. Диаграмма Максвелла-Кремона	65
§ 40. Способ Риттера	69

ГЛАВА VII.

Сложение сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости.

§ 41. Многоугольник сил. Параллелепипед сил	71
§ 42. Проекция силы на ось	72
§ 43. Определение равнодействующей сил, приложенных в одной точке, по способу проекций. Уравнения равновесия	73

ГЛАВА VIII.

Сложение пар в пространстве.

§ 44. Условие эквивалентности пар	74
§ 45. Момент пары как вектор	75
§ 46. Сложение пар. Условие равновесия пар	76

ГЛАВА IX.

Момент силы относительно точки и относительно оси.

§ 47. Момент силы относительно точки	79
§ 48. Момент силы относительно оси	—
§ 49. Зависимость между моментом силы относительно точки и моментом силы относительно оси	80
§ 50. Главный момент системы сил относительно точки и относительно оси	81
§ 51. Зависимость между главными моментами системы сил относительно точки и относительно оси	82

ГЛАВА X.

Сложение сил, расположенных как угодно в пространстве.

§ 52. Приведение силы к данной точке	83
§ 53. Приведение системы сил, расположенных как угодно в пространстве, к силе и паре	84
§ 54. Случай, когда силы находятся в равновесии	85
§ 55. Случай, когда силы приводятся к паре	—
§ 56. Случай, когда силы приводятся к равнодействующей. Теорема о моменте равнодействующей	—
§ 57. Случай, когда силы приводятся к динаме. Центральная ось	88
§ 58. Выражения моментов силы относительно координатных осей через проекции силы на те же оси	90
§ 59. Вычисление главного вектора и главного момента по способу проекций	—
§ 60. Уравнения равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве	93
§ 61. Условие равновесия твердого тела с двумя закрепленными точками. Определение опорных реакций	94
§ 62. Определение главного вектора и главного момента опытным путем	97
§ 63. Сложение параллельных сил в пространстве. Уравнения равновесия параллельных сил	98
§ 64. Сложение параллельных сил по способу последовательного сложения	101
§ 65. Центр параллельных сил	102
§ 66. Координаты центра параллельных сил	103

ГЛАВА XI.

Центр тяжести.

§ 67. Центр тяжести твердого тела, Центр тяжести объема	104
§ 68. Центр тяжести площади. Статический момент плоской фигуры. Центр тяжести линии	106
§ 69. Некоторые элементарные приемы определения центров тяжести и статических моментов	108
§ 70. Первая теорема Гульдена	111
§ 71. Вторая теорема Гульдена	113
§ 72. Центры тяжести некоторых простейших геометрических фигур	114
§ 73. Применение веревочного многоугольника к определению центров тяжести площадей	118

ОТДЕЛ ВТОРОЙ. КИНЕМАТИКА.

ГЛАВА XII

Уравнения движения точки.

§ 73. Кинематика. Динамика	120
§ 75. Траектория. Уравнение движения	121
§ 76. Уравнения движения в прямоугольных координатах	122
§ 77. Уравнения движения в полярных координатах	126

ГЛАВА XIII

Скорость.

§ 78. Скорость равномерного движения	127
§ 79. Скорость какого угодно движения	129
§ 80. Проекция скорости на прямоугольные координатные оси	131

ГЛАВА XIV

Ускорение.

§ 81. Ускорение прямолинейного равнопеременного движения	135
§ 82. Некоторые сведения из геометрии	137
§ 83. Ускорение какого угодно движения	140
§ 84. Проекция ускорения на прямоугольные координатные оси	141
§ 85. Касательное ускорение и нормальное ускорение	146
§ 86. Графики пути, скорости и ускорения	151

ГЛАВА XV

Поступательное движение твердого тела и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

§ 87. Поступательное движение твердого тела	154
§ 88. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	156

ГЛАВА XVI

Относительное движение.

§ 89. Относительное движение точки	165
§ 90. Уравнения относительного движения, относительная скорость и относительное ускорение	167
§ 91. Теорема об элементарном перемещении точки. Девияция	168
§ 92. Теорема сложения скоростей	170
§ 93. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение поступательное	173
§ 94. Теорема сложения ускорений в том случае, когда переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси. Добавочное или Кориолисово ускорение	177
§ 95. Проекция скорости и ускорения на оси полярных координат	182
§ 96. Относительное движение твердого тела	185

ГЛАВА XVII

Плоское движение твердого тела

§ 97. Разложение плоского движения на поступательное движение и на вращение. Уравнения плоского движения. Угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры	185
§ 98. Скорости точек плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей	188
§ 99. План скоростей	194
§ 100. Ускорения точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений	197
§ 101. План ускорений	201
§ 102. Теорема о перемещении плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей как предельное положение центра вращения	205
§ 103. Центроиды	208
§ 104. Сложение вращений плоской фигуры	210
§ 105. Применение сложения вращений к нахождению мгновенных центров скоростей для звеньев плоского механизма	216

ГЛАВА XVIII

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

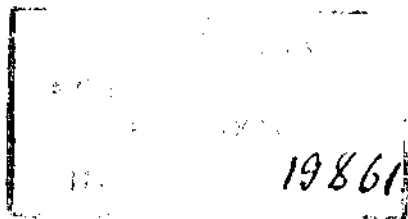
§ 106. Эйлеровы углы. Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки	218
§ 107. Теорема о сложении вращений твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось и угловая скорость твердого тела	219

	Стр.
§ 108. Скорости точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки	220
§ 109. Аксоиды	223
§ 110. Теорема сложения угловых скоростей	225
§ 111. Проекция угловой скорости на координатные оси, неизменно связанные с твердым телом	228

ГЛАВА XIX

Общий случай движения твердого тела.

§ 112. Разложение движения твердого тела на поступательное движение и на вращение. Уравнения движения твердого тела. Угловая скорость	230
§ 113. Скорости точек твердого тела. Мгновенная винтовая ось	232



19861

Ответственный редактор **Е. В. Пушкина.**

Сдана в набор 21/IV 1934 г.

Формат 62x94¹/₁₆.

Ленгорт № 14155.

Т-80-5-2. ГТТИ № 265.

Бум. листов 7¹/₂.

Тираж 25.000 — авт. л. 21¹/₂.

Технический редактор **В. Д. Фомини.**

Подписана к печати 22/V 1934 г.

Тип. ан. в 1 бум. л. 115664.

Заказ № 232.