И. В. МЕЩЕРСКИЙ

ДЕП

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1/240392

Издание двенадцатое
переработанное

21095

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Ф. Г. ШМИДТА

Допущено в качестве учебного пособия к изданию в 1937 г. Комитетом по высшей технической школе при СНК СССР

9 6040

Рэспубліканская
навукова-тэхнічная бібліятэка
Атрымана ў дар ад Бібліятэкі
НАН Беларусі

ОНТИ
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1937 МОСКВА

720—5—2

Книга является задачником по теоретической механике (статике, кинематике, динамике) применительно к курсу вузов и втузов. Все задачи имеют ответы. В отдельных случаях даны указания к решению.

Книга является учебным пособием для втузов и вузов при прохождении курса теоретической механики.

Сдано в набор 16/VII 1937 г.
Поступило к печати 27/IX 1937 г.
Формат бумаги 82×110/32
Количество бум. листов 8¼
Уч.-авторских листов 18,56
Количество тип. знаков в 1 бум. листе 172032
Ленгорлит № 3437

Ответственный редактор *Ф. Г. Шмидт*
Технический редактор *Е. В. Пулькина*

Заказ № 3439
Тираж 50000 экз.
Изд. № 433

Набрано в 3-ей типографии ОНТИ, Ленинград, ул. Моисеенко, 10
Отпечатано с матриц во 2-ой типографии ОНТИ им. Евг. Соколовой, Ленинград. проспект Красных Командиров, 29

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

„Сборник задач по теоретической механике" И. В. Мещерского, составленный первоначально по мысли и под редакцией И. В. Мещерского группой преподавателей теоретической механики б. Петербургского политехнического института, как пособие для преподавания механики в этом Институте, постепенно получил самое широкое распространение в наших вузах. Начиная с 1914 г., когда вышло первое издание „Сборника", он переиздавался при жизни И. В. Мещерского восемь раз; первому печатному изданию предшествовало еще несколько литографированных изданий.

Предлагаемое читателям новое издание „Сборника" — первое издание, которое выходит без участия в нем покойного составителя. Заботу об этом посмертном издании Главная редакция технико-теоретической литературы ОНТИ возложила на нижеподписавшихся.

В новом издании „Сборника" в основном сохранен план прежних его изданий. Книга делится на четыре отдела: статику, кинематику, динамику материальной точки и динамику материальной системы. В отдельных случаях нам представлялось целесообразным переменить порядок отдельных более мелких подразделений текста; внутри этих подразделений во многих случаях изменен порядок задач.

В это издание включено 406 новых задач. Бывшие в „Сборнике" задачи вновь пересмотрены и отчасти переработаны, некоторые из них, представлявшиеся менее интересными, не включены в новое издание. Всего в новом издании 892 задачи; из них 486 старых и 406 новых. Особо значительно переработан отдел кинематики.

Составителями задач, помещенных в первом издании „Сборника" (1914 г.), были Л. В. Ассур, Б. А. Бахметьев, И. И. Бентковский, А. А. Горев, К. М. Дубяга, А. М. Ларионов, И. В. Мещерский, В. Ф. Миткевич, Е. Л. Николаи, К. Э. Рерих, Д. Л. Тагеев, В. В. Таклинский, С. П. Тимошенко, А. И. Тудоровский, А. П. Фандер-Флит, А. К. Федерман и В. Д. Шатров. В последующих изданиях приняли участие также Е. К. Митропольский и М. Л. Франк.

Для настоящего издания предоставили новые задачи М. И. Акимов, М. И. Бать, Б. А. Берг, Ю. В. Долголенко, А. С. Кельзон, Ю. Г. Корнилов, А. И. Лурье, К. В. Меликов, П. И. Неюбин, Н. П. Неронов, Е. Л. Николаи, А. А. Смирнов, С. А. Сороков, К. И. Страхович, А. И. Чекмарев и Ф. Г. Шмидт.

Редакция „Сборника" была разделена между нижеподписавшимися следующим образом: статику редактировал К. И. Страхович, кинематику — Ф. Г. Шмидт, динамику материальной точки и динамику материальной системы — Е. Л. Николаи; А. И. Лурье составил и отредактировал последний раздел „Уравнения Лагранжа".

Ленинград
15 сентября 1935 г.

А. Лурье, Е. Николаи,
К. Страхович, Ф. Шмидт.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании исправлены замеченные недостатки предыдущих изданий; условия, чертежи и ответы задач вновь пересмотрены и проверены; отдельные задачи подверглись значительной переработке или заменены новыми (с сохранением старой нумерации). Значительная часть ответов задач подверглась изменениям в целях унификации степени точности всех расчетов, проведенных с относительной погрешностью, не превышающей 0,1%.

Указанная переработка задачника произведена сотрудниками кафедры теоретической механики Ленинградского индустриального института. Кроме лиц, упомянутых в предисловии к десятому изданию, в настоящем издании приняли также участие: Горчин Н. К., Наугольная Н. Н., Пекин В. Ф., Семенов П. Н.

Для осуществления единства методических установок при переработке задачника Редакционная коллегия и Издательство сочли целесообразным возложить всю работу по руководству переработкой и редактированию задачника на одно лицо.

Фр. Шмидт

1—VII—37.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

I. СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

1. Силы, действующие по одной прямой

1. К некоторой точке приложены силы $P_1 = 10$ *кг*, $P_2 = 20$ *кг*, $P_3 = 12$ *кг* и $P_4 = 18$ *кг*.

Определить графически силу, их уравновешивающую, для случаев:

1) все данные силы действуют по одной прямой в одну сторону;

2) первые две в одну, а вторые две в противоположную сторону.

Отв. 1) 60 *кг*; 2) 0.

2. Пружинные весы подвешены к неподвижному крюку и нагружены гирей в 10 *кг*.

1) Какую силу нужно употребить, чтобы удержать такие весы, снятые с крюка? 2) Сколько они покажут, если вместо гири они будут нагружены силой руки другого человека, причем каждая сила будет равна 10 *кг*? (Собственным весом прибора пренебречь).

Отв. 10 *кг*.

3. Две гири, в 10 *кг* и 5 *кг*, висят на одной веревке, укрепленные на ней в разных местах, большая гиря ниже меньшей. Каково натяжение веревки?

Отв. 10 и 15 *кг*.

4. Буксирный пароход тянет три баржи различных размеров, следующие одна за другою. Сила тяги пароходного винта в данный момент равна 1800 *кг*. Сопротивление воды движению парохода равно 600 *кг*, первой баржи — тоже 600 *кг*, второй баржи 400 *кг* и третьей 200 *кг*. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает безопасно силу растяжения в 200 *кг*. Сколько канатов надо протянуть от парохода к первой барже, от первой ко второй и от второй к третьей?

Отв. 6 канатов, 3 и 1 канат.

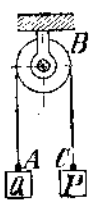
5. Поезд идет по прямолинейному горизонтальному пути с постоянной скоростью; вес поезда, не считая паровоза, 180 *т*. Какова сила тяги паровоза, если сопротивление трения равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Отв. 900 *кг* = 8,82 *сн*.

6. Пассажирский поезд состоит без паровоза из тендера в 45 *т*, багажного вагона в 20 *т* и 5 пассажирских вагонов по 48 *т* каждый. С какой силой будут натянуты вагонные стяжки и какова сила тяги паровоза, если сопротивление движению поезда можно считать $\frac{1}{200}$ веса поезда и при решении задачи принять, что это сопротивление распределяется между составом поезда пропорционально весу?

Отв. Сила тяги паровоза 1525 *кг*. $T_6 = 240$ *кг*, $T_5 = 2 \cdot 240 = 480$ *кг* и т. д.

7. Груз $Q = 30$ *кг* удерживается в равновесии при помощи противовеса P, прикрепленного к концу троса ABC, перекинутого через блок B. Длина троса 10 *м*, вес его 5 *кг*. Определить вес P и усилия F_a, F_b и F_c, растягивающие трос в его концах A и C, а также в середине B, в случаях: 1) когда точки A и C находятся на одной высоте, 2) когда точка A занимает высшее положение и 3) когда точка A занимает низшее положение. Размерами блока и трением пренебрегаем.



Указание. Рассматриваем равновесие гибкой нерастяжимой нити; блок только меняет направление силы.

Отв. 1) $P = 30$ *кг*; $F_a = 30$ *кг*; $F_b = 32{,}5$ *кг*; $F_c = 30$ *кг*;
2) $P = 25$ *кг*; $F_a = 30$ *кг*; $F_b = 27{,}5$ *кг*; $F_c = 25$ *кг*;
3) $P = 35$ *кг*; $F_a = 30$ *кг*; $F_b = 32{,}5$ *кг*; $F_c = 35$ *кг*.

8. На дне шахты находится человек весом 64 *кг*; он поднимает с помощью каната, перекинутого через неподвижный блок, груз 48 *кг*. 1) Какое давление оказывает человек на дно шахты? 2) Какой наибольший груз он может поднять с помощью каната?

Отв. 1) 16 *кг*; 2) 64 *кг*.

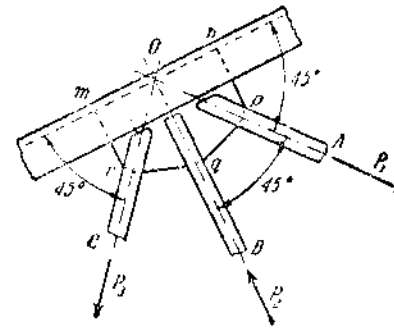
2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

9. В центре правильного шестиугольника по направлениям к его вершинам действуют силы 1, 3, 5, 7, 9 и 11 *кг*. Найти величину и направление равнодействующей и уравновешивающей.

Отв. 12 *кг* по направлению силы в 9 *кг*.

12

10. Определить усилие, передаваемое листом *mnpqr* на стержень *MN*, если величины и направления усилий, действующих по линиям *OA*, *OB* и *OC*, равны соответственно $P_1 = P_3 = 141$ *кг* и $P_2 = 100$ *кг*.



Отв. 100 *кг* и действует по *OB* в сторону, обратную P_2.

13

11. Силу в 8 *кг* разложить на две по 5 *кг* каждая. Можно ли ту же силу разложить на две по 10 *кг*, 15 *кг*, 20 *кг* и т. д.? На две по 100 *кг*?

Отв. Да, если не заданы направления разложения.

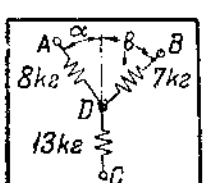
15

12. Два трактора, идущие по берегам канала с постоянною скоростью, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов равны 80 *кг* и 96 *кг*; угол между ними равен 60°. Найти сопротивление воды P, испытываемое баркою при ее движении, и углы α и β, которые должны составлять канаты с берегами канала, если барка движется параллельно берегам.

Отв. $P = 152{,}6$ *кг*; $\alpha = 33°$, $\beta = 27°$.

16

13. Кольца *A*, *B* и *C* трех пружинных весов укреплены неподвижно на горизонтальной доске. К крючкам весов привязаны три веревки, которые натянуты и связаны в один узел *D*. Показания весов: 8, 7 и 13 *кг*. Определить углы α и β, образуемые направлениями веревок, как указано на чертеже.

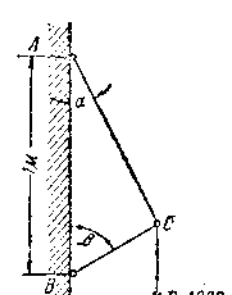


Отв. $\alpha = 27{,}8°$; $\beta = 32{,}2°$.

17

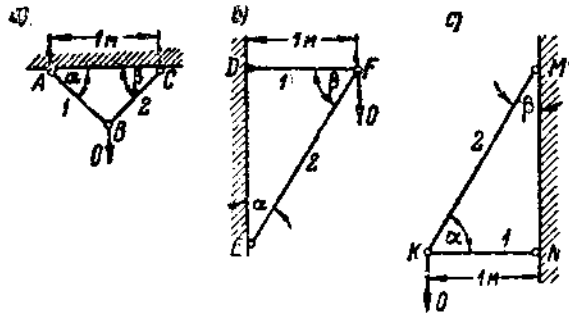
14. Бруски *AC* и *BC* соединены между собой и вертикальной стеной при помощи шарниров. На шарнирный болт *C* действует вертикальная сила $P = 1000$ *кг*.

Определить реакции этих брусков на шарнирный болт *C*, если углы, составляемые брусками со стеной, $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$. Длина $AB = 1$ *м*.



Отв. 865 *кг*.
500 *кг*.

18 **15.** На чертежах *a*, *b* и *c*, как и в предыдущей задаче, схематически изображены бруски, соединенные между собой потолком и стенами посредством шарниров. К шарнирным болтам *B*, *F*, и *K* подвешены грузы $Q = 1000$ *кг*.

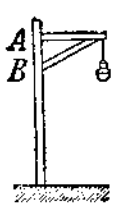


Определить усилия в брусках для случаев:

a) $\alpha = \beta = 45°$;
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$;
c) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Усилием в бруске называем силу, действующую вдоль бруска: или растягивающую, или сжимающую брусок. Для отличия величину сжимающей силы выражаем отрицательным числом.

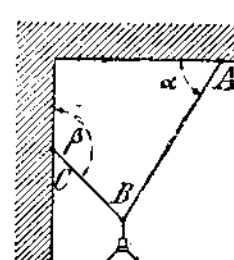
Отв. a) $S_1 = S_2 = 709$ *кг*.
b) $S_1 = 578$ *кг*; $S_2 = -1156$ *кг*.
c) $S_1 = -578$ *кг*; $S_2 = 1156$ *кг*.



16. Дуговая лампа весом 30 *кг* подвешена к вертикальному столбу с помощью горизонтальной поперечины $AC = 1{,}2$ *м* и подкоса $BC = 1{,}5$ *м*. Найти усилия S_1 и S_2 в брусках *AC* и *BC*.

Отв. $S_1 = 40$ *кг*;
$S_2 = -50$ *кг*.

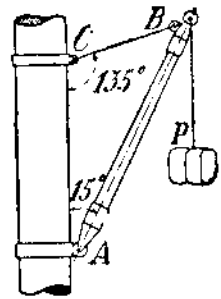
21 **17.** Электрическая лампа весом 2 *кг* подвешена к потолку на шнуре *AB* и затем оттянута к стене с помощью веревки *BC*. Определить натяжения: T_a шнура *AB* и T_c веревки *BC*, если известно, что угол $\alpha = 60°$, а угол $\beta = 135°$.



Отв. $T_a = 1{,}46$ *кг*.
$T_c = 1{,}04$ *кг*.

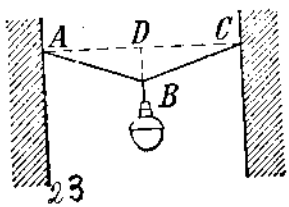
22

18. Мачтовый кран состоит из стрелы AB, прикрепленной шарниром A к мачте, и цепи CB. К концу B стрелы подвешен груз $P = 200$ *кг*; углы: $BAC = 15°$, $ACB = 135°$. Определить натяжение T цепи CB и напряжение Q в стреле AB.



Отв. $T = 104$ *кг*.
$Q = 283$ *кг*.

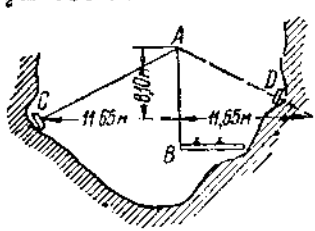
19. Дуговая лампа подвешена к точке B к середине троса ABC, прикрепленного концами к крюкам A и C, находящимся на одной горизонтали. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC, если вес лампы 15 *кг*, длина всего троса $ABC = 20$ *м* и стрелка его провисания $BD = 0{,}1$ *м*.



Отв. $T_1 = T_2 = 750$ *кг*.

23

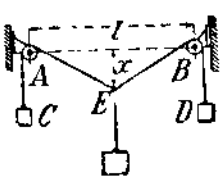
20. На одной железной дороге в скалистых горах участок пути в ущелье подвешен так, как показано на чертеже. Размеры указаны на чертеже. Предполагая подвеску AB нагруженной силой $P = 50$ *т*, найти усилия в стержнях AC и AD.



Отв. Стержни AC и AD сжаты одинаковым усилием 53,9 *т*.

24

21. Через два ничтожно малые блока A и B, находящиеся на горизонтальной прямой $AB = l$, перекинута веревка $CAEBD$. К концам C и D веревки подвешены гири одинакового веса p, а к точке E — гиря веса P. Определить расстояние x точки E от прямой AB в положении равновесия.



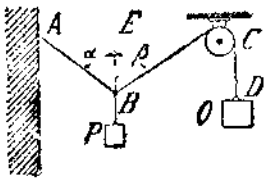
Отв. $x = \dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$.

25

22. Груз 25 *кг* удерживается двумя веревками, перекинутыми через блоки и натягиваемыми грузами. Один из этих грузов весит 20 *кг*; синус угла, образуемого соответственной веревкой с вертикалью, равен 0,6. Найти величину p второго груза и угол α, образуемый второй веревкой с вертикальной линией.

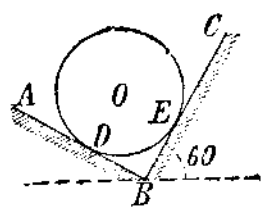
Отв. $p = 15$ *кг*; $\sin\alpha = 0{,}8$.

26 **23.** На веревке AB, один конец которой закреплен в точке A, привязаны в точке B груз P и веревка BCD, перекинутая через блок; к концу ее D привязана гиря $Q = 10$ *кг*. Определить натяжение T веревки AB и величину груза P, если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью BE, равны: $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$.

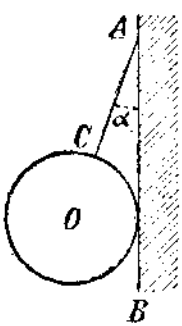


Отв. $T = 12{,}25$ *кг*;
$P = 13{,}66$ *кг*.

28 **24.** На двух взаимно перпендикулярных наклонных плоскостях AB и BC лежит шар O весом 6 *кг*. Определить давление шара на каждую плоскость, зная, что плоскость BC составляет с горизонтом угол 60°.



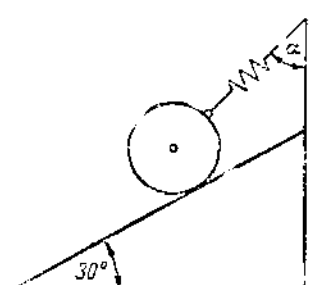
Отв. $N_a = 5{,}2$ *кг*;
$N_c = 3$ *кг*.



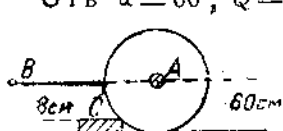
25. К вертикальной гладкой стене AB подвешен шар O на веревке AC. Веревка составляет со стеной угол α, вес шара P. Определить натяжение веревки T и давление Q шара на стену.

Отв. $T = \dfrac{P}{\cos\alpha}$; $Q = P \operatorname{tg} \alpha$.

26. Шар весом 20 *кг* удерживается на наклонной плоскости веревкой, которая привязана к пружинным весам, укрепленным над плоскостью; показание пружинных весов 10 *кг*. Угол, образуемый наклонной плоскостью с горизонтом, равен 30°. Определить угол α, составляемый направлением веревки с вертикалью, и давление Q шара на плоскость.



Отв $\alpha = 60°$; $Q = 17{,}3$ *кг*.

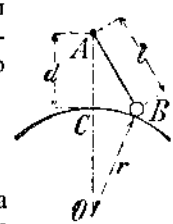


27. Вес трамбовочного катка равен 2 *т*, радиус его 60 *см*. Определить горизонтальное усилие P, необходимое для перетаскивания трам-

бовки через камень в 8 *см* высотою и в положении, указанном на чертеже.

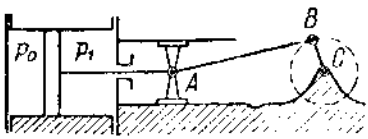
Отв. $P = 1{,}15\ m = 11{,}27\ сн.$

3| 28. Шарик B веса P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r; расстояние точки A от поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая AO вертикальна. Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Размером шарика пренебречь.



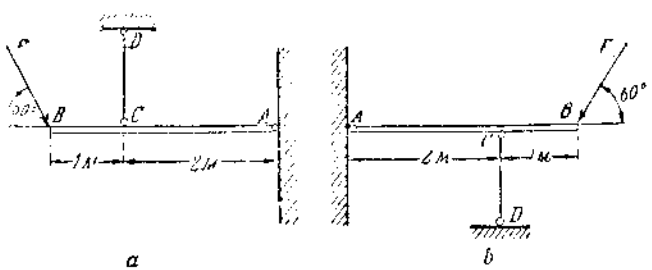
Отв. $T = P\dfrac{l}{d+r}$; $Q = P\dfrac{r}{d+r}$.

29. В паровой машине площадь поршня равна 0,1 $м^2$, длина шатуна $AB = 2$ *м*; длина кривошипа $BC = 0{,}4$ *м*, давление пара в цилиндре за поршнем $p_0 = 6$ атм., перед поршнем $p_1 = 1$ атм. Найти силу P, вращающую кривошип, и давление N крейцкопфа A на направляющие параллели при том положении поршня, когда угол $ABC = 90°$. 1 атм. $= 1\ кг/см^2$. Трением между крейцкопфом и параллелями пренебрегаем.



Отв. $P = 5{,}1\ m$; $N = 1\ m$.

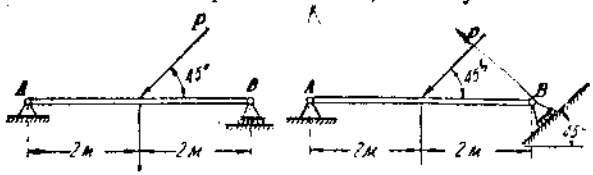
30. На черт. *a* и *b* изображены балки AB, удерживаемые в горизонтальном положении вертикальными стержнями CD. На концах



балок действуют силы $F = 3\ m$ под углом 60° к горизонту. Взяв размеры с чертежей, определить усилия в стержнях CD и давление балки на стену, если крепления в A, C и D шарнирные. Весами пренебречь.

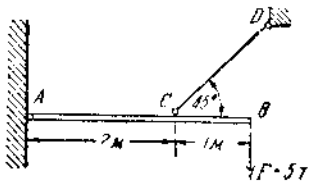
Отв. a) $T = 3{,}9\ m$, $R_A = 1{,}99\ m$.
b) $S = 4{,}325\ m$, $R_A = 2{,}2\ m$.

31. Балка AB шарнирно закреплена на опоре A, конец ее B положен на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси,



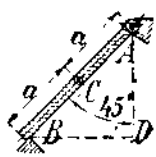
действует сила $P = 2$ m. Определить реакции опор для случаев a и b, взяв размеры с чертежей, пренебрегая весом балки.

Отв. а) $R_A = 1{,}58$ m; $R_B = 0{,}7$ m. b) $R_A = 2{,}24$ m; $R_B = 1$ m.

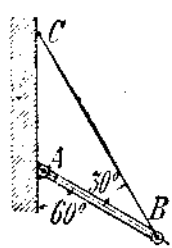


32. Балка AB подпирается в горизонтальном положении стержнем CD; крепления в A, C и D шарнирные. Определить реакции опор A и D, если на конце балки действует сила $F = 5$ m. Размеры указаны на чертеже. Весами пренебречь.

Отв. $R_A = 7{,}9$ m; $R_D = 10{,}6$ m.



33. Оконная рама AB, изображенная на чертеже в разрезе, может вращаться вокруг шарнира A и свободно опирается в точке B. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 $кг$, приложен к середине рамы C и $AD = BD$.

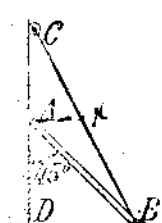


Отв. $R_a = 70{,}5$ $кг$; $R_b = 31{,}5$ $кг$.

34. Стержень AB прикреплен к вертикальной стене при помощи шарнира A и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи веревки BC, образующей с ним угол 30°. Определить величину и направление реакции R шарнира, если известно, что вес стержня равен 2 $кг$.

Отв. $R = 1$ $кг$; угол $(R, AC) = 60°$.

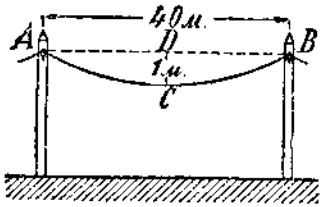
35. Верхний конец A однородного бруса AB, длина которого 2 $м$, а вес 5 $кг$, упирается в гладкую вертикальную стену. К нижнему концу B привязана веревка BC. Найти, на каком расстоянии AC нужно прикрепить веревку к стене для того, чтобы брус находился в равновесии, образуя угол $BAD = 45°$. Найти натяжение T нити и реакцию стены R.



Отв. $AC = AD = 1{,}41$ $м$; $T = 5{,}6$ $кг$; $R = 2{,}5$ $кг$.

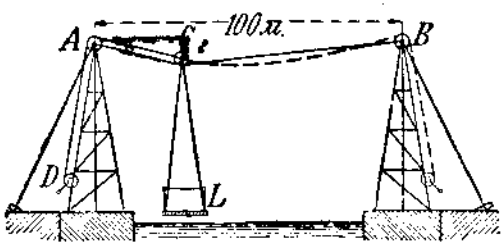
36. Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрелка провисания которой $CD = f = 1$ *м*. Расстояние между столбами $AB = l = 40$ *м*. Вес провода $Q = 40$ *кг*. Определить натяжение провода: T_c в средней точке, T_a и T_b на концах.

При решении можно считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $\frac{l}{4}$ от ближайшего столба.



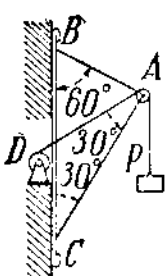
Отв. $T_c = \frac{Ql}{8f} = 200$ *кг*; $T_a = T_b = 201$ *кг*.

37. Для переправы через реку устроена люлька L, которая посредством ролика C подвешена к стальному тросу AB, закрепленному в вершинах башен A и B. Для передвижения ролика C к левому берегу служит канат CAD, перекинутый через блок A и наматываемый на ворот D; такой же канат имеется для подтягивания люльки к правому берегу. Точки A и B находятся на одном горизонте в расстоянии $AB = 100$ *м* друг от друга; длина троса $ACB = 102$ *м*; вес люльки 5 *т*. Пренебрегая весом канатов и троса, определить натяжение каната CAD и натяжение троса ACB в тот момент, когда длина ветви $AC = 20$ *м*.



Отв. $T_{cd} = 0{,}79$ *т*; $T_{cb} = T_{ca} = 9{,}56$ *т*.

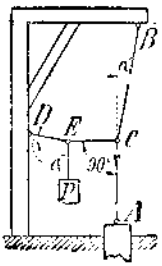
38. С помощью магазинного крана BAC груз 2 *т* поднимается посредством цепи, перекинутой через блок A и через блок D, который укреплен на стене так, что угол $CAD = 30°$. Углы между стержнями крана: $ABC = 60°$, $ACB = 30°$. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях AB и AC.



Отв. $Q_1 = 0$; $Q_2 = -3{,}46$ *т*.

39. Чтобы вытянуть из земли сваю, рабочий привязал к ней веревку в точке A; закрепив другой конец веревки B, он связал эту веревку в точке C с другой веревкой, закрепленной в точке D.

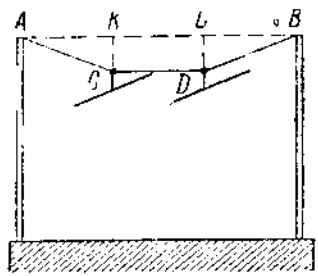
Затем рабочий схватился руками за веревку CD в точке E; тогда часть веревки AC получила вертикальное направление, CE — горизонтальное; части CB и DE образовали одинаковые углы α, равные 4°, — первая с вертикальной линией, вторая с горизонтальной ($\operatorname{ctg} 4^\circ = 14{,}3$). Определить натяжение T веревки AC, если вес рабочего равен 80 *кг*.



Отв. $T = 16{,}36$ *т*.

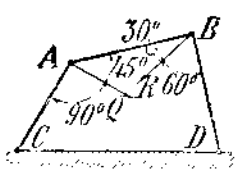
Указание. Сначала рассматриваем равновесие узла E, а потом узла C.

40. Два трамвайные провода подвешены к поперечным проволочным канатам, из коих каждый прикреплен к двум столбам. Столбы расставлены вдоль пути на расстоянии 40 *м* друг от друга. Для каждого поперечного каната расстояния $AK = KL = LB = 5$ *м*; $KC = LD = 0{,}5$ *м*. Пренебрегая весом проволочного каната, найти натяжения T_1, T_2 и T_3 в частях его AC, CD и DB, если вес 1 *м* провода равен 0,75 *кг*.



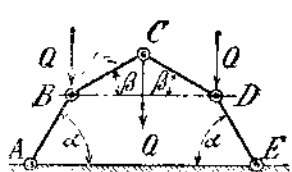
Отв. $T_1 = T_3 = 301{,}5$ *кг*; $T_2 = 300$ *кг*.

41. К шарниру A стержневого шарнирного четыреугольника $ABCD$, сторона CD которого закреплена, приложена сила $Q = 10$ *кг* под углом $BAQ = 45^\circ$. Определить величину силы R, приложенной в шарнире B под углом $ABR = 30^\circ$, таким образом, чтобы четыреугольник $ABCD$ был в равновесии, если углы: $CAQ = 90^\circ$, $DBR = 60^\circ$.



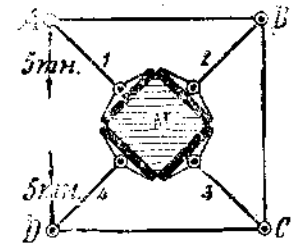
Отв. $R = 16{,}3$ *кг*.

42. Стержневой многоугольник состоит из четырех равных стержней; концы A и E закреплены; узлы B, C и D загружены одинаковой нагрузкой Q. В положении равновесия угол наклонения крайних стержней $\alpha = 65^\circ$. Определить угол наклонения средних стержней β.



Отв. $\beta = 30^\circ$.

43. Для сжатия цементного кубика M по четырем граням пользуются шарнирным механизмом, в котором стержни AB, BC и CD совпадают со сторонами квадрата $ABCD$, а стержни 1, 2, 3, 4 равны между собой и направлены по диагоналям того же квадрата; две равные и прямопротивоположные сжимающие силы P прилагаются в точках A и D. Определить силы N_1, N_2, N_3, N_4, сжимающие кубик, и усилия S_1, S_2, S_3 в стержнях AB, CB и CD, если величина сжимающих сил $P = 5$ *т*.



Ответ. $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 7{,}07\ \ m = 69{,}3$ *сн*.
Растяжение: $S_1 = S_2 = S_3 = 5$ *т*.

44. Железная плита весом 40 *кг* перемещается равномерно и прямолинейно по чугунной станине при отсутствии смазки.

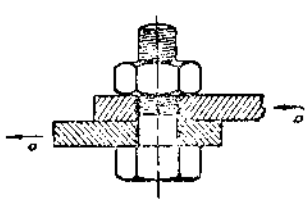
Определить силу, необходимую для этого перемещения, если коэффициент трения 0,18.

Ответ. 7,2 *кг*.

45. Каким усилием можно при слабой смазке привести в движение по станине суппорт токарного станка, весящий 50 *кг*?

Материал трущихся тел — чугун, коэффициент трения 0,15.

Ответ. 7,5 *кг*.



46. Определить необходимую затяжку болта, скрепляющего две железные полосы, разрываемые силою $P = 2000$ *кг*. Болт поставлен с зазором и не должен работать на срез. Коэффициент междулистового трения $f = 0{,}2$.

Указание. Болт не должен работать на срез, поэтому его надо затянуть такою силою, чтобы развивающееся между листами трение могло предотвратить скольжение листов. Сила, действующая вдоль по оси болта, и является искомой затяжкой.

Ответ. 10 000 *кг*.

47. Листы бумаги, сложенные, как показано на чертеже, склеиваются свободными концами через один таким образом, что получаются две самостоятельных кипы A и B. Вес каждого листа 6 *г*, число всех листов 200, коэффициент трения бумаги о бумагу, а также о стол, на котором бумага лежит, равен 0,2. Предполагая,

что одна из кип удерживается неподвижно, определить наименьшее горизонтальное усилие P, необходимое для того, чтобы вытащить вторую кипу.

Цель задачи — уяснить идею, на которой основано устройство пластинчатых фрикционных муфт.

Ответ. При вытаскивании A из B, $P = 24{,}12$ *кг*;

B из A, $P = 23{,}88$ *кг*.

48. Поезд поднимается по прямоугольному пути, имеющему уклон 0,008, с постоянной скоростью; вес поезда, не считая паровоза, 180 *т*. Какова сила тяги паровоза P, если сопротивление трения равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Ответ. $P = 2340$ *кг* $= 22{,}9$ *кн*.

49. Вагон, спускающийся с уклона в 0,008, достигнув некоторой определенной скорости, движется затем равномерно. Определить сопротивление R, которое испытывает вагон при этой скорости, если вес вагона равен 10 *т*.

Уклоном пути называется тангенс угла наклонения пути к горизонту; вследствие малости уклона синус может быть принят равным тангенсу этого угла.

Ответ. $R = 80$ *кг*.

50. Негладкой наклонной плоскости придан такой угол α наклона к горизонту, что тяжелое тело, помещенное на эту плоскость, спускается с тою постоянною скоростью, которая ему сообщена в начале движения. Определить коэффициент трения k.

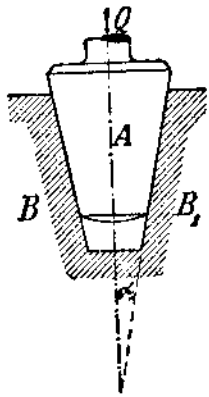
Ответ. $k = \operatorname{tg} \alpha$.

51. Найти угол естественного откоса земляного грунта, если коэффициент трения для этого грунта $k = 0{,}8$.

Углом естественного откоса называется тот наибольший угол наклона откоса к горизонту, при котором частица грунта, находящаяся на откосе, остается в равновесии.

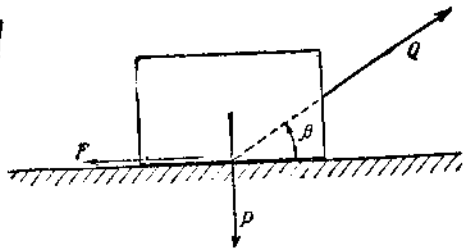
Ответ. 30° 40′.

52. Клин A, уклон которого $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}05$, загоняется в углубление BB_1 усилием $Q = 6$ *т*. Определить нормальное давление N на щеки клина, а также усилие P, необходимое для того, чтобы вытащить клин, если коэффициент трения $k = 0{,}1$.



Отв. $N = 20$ *т* $= 196$ *сн*; $P = 2$ *т* $= 19{,}6$ *сн*.

53. Ящик веса P стоит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k. Определить, под каким углом β надо приложить силу Q и величину этой силы, при условии сдвинуть ящик при наименьшей величине Q.



Отв. $\beta = \operatorname{arctg} k$; $Q_{\min} = \dfrac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$.

3. Силы параллельные и пары сил

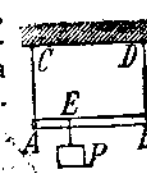
54. Определить вертикальные реакции опор, на которых лежит своими концами горизонтальная балка длины l, нагруженная равномерно по p килограммов на единицу длины.

Отв. $R_1 = R_2 = \dfrac{1}{2} pl$ *кг*.

55. Определить вертикальные реакции опор горизонтальной балки пролета l, если груз P *кг* помещен на ней в расстоянии x от первой опоры.

Отв. $R_1 = P\dfrac{l-x}{l}$ *кг*; $R_2 = P\dfrac{x}{l}$ *кг*.

56. Однородный стержень AB, длина которого 1 *м*, а вес 2 *кг*, подвешен горизонтально на двух параллельных веревках AC и BD. К стержню в точке E на расстоянии $AE = {}^1/_4$ *м* подвешен груз $P = 12$ *кг*. Определить натяжения веревок T_1 и T_2.



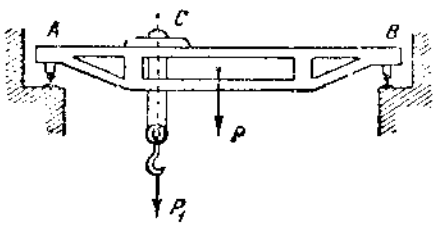
Отв. $T_1 = 10$ *кг*, $T_2 = 4$ *кг*.

РЕСПУБЛІКАНСКАЯ НАВУКОВА-ТЭХНІЧНАЯ БІБЛІЯТЭКА

57. На горизонтальную балку, лежащую на двух опорах, расстояние между которыми равно 4 *м*, надо положить два груза,— один C в 200 *кг*, другой D в 100 *кг*, — так, чтобы реакция A была в два раза больше реакции опоры B, если пренебречь весом балки. Расстояние CD между грузами должно быть равно 1 *м*. Каково должно быть расстояние x груза C от опоры A?

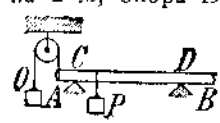
Ответ. $x = 1$ *м*.

58. Найти величины давлений мостового крана AB на рельсы в зависимости от положения тележки C, на которой укреплена лебедка. Положение тележки определить расстоянием ее середины от левого рельса в долях общей длины моста. Вес моста $P = 6\,m$, вес тележки с поднимаемым грузом $P_1 = 4\,m$.



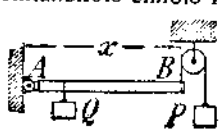
Ответ. $F_A = (7 - 4n)m$,
$F_B = (3 + 4n)m$,
где $n = \frac{AC}{AB}$.

59. Балка AB, длиною 10 *м* и весом 200 *кг*, лежит на двух опорах C и D. Опора C отстоит от конца A на 2 *м*, опора D от конца B на 3 *м*. Конец балки A оттягивается вертикально вверх при посредстве груза $Q = 300$ *кг* и веревки, перекинутой через блок. На расстоянии 3 *м* от конца A к балке подвешен груз $P = 800$ *кг*. Определить реакции опор.



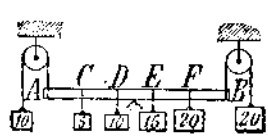
Ответ. $R_c = 300$ *кг*; $R_d = 400$ *кг*.

60. Горизонтальный стержень AB весом 100 *г* может вращаться вокруг неподвижной точки A. Конец B оттягивается кверху вертикальною силою $P = 150$ *г* при помощи гири и веревки, перекинутой через блок. В точке, находящейся на расстоянии 20 *см* от конца B, подвешен груз $Q = 500$ *г*. Как велика длина x стержня AB, если он находится в равновесии?



Ответ. $x = 25$ *см*.

61. Конец A горизонтального стержня AB весом 20 *кг* и длиною 5 *м* оттягивается кверху силою 10 *кг* при помощи груза и веревки, перекинутой через блок. Конец B таким же образом оттягивается кверху силою 20 *кг*. В точках C, D, E и F, отстоящих одна от другой и от точек A и B на 1 *м*, подвешены грузы: 5, 10, 15 и



20 *кг*. В каком месте надо подпереть стержень, чтобы он оставался в равновесии?

Ответ. В середине.

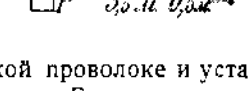
62. К однородному стержню, длина которого 3 *м*, а вес 6 *кг*, подвешены 4 груза на равных расстояниях друг от друга, два крайние на концах. Первый груз слева весит 2 *кг*, каждый последующий тяжелее предыдущего на 1 *кг*. На каком расстоянии x от левого конца нужно подвесить стержень, чтобы он оставался горизонтальным?

Ответ. $x = 1{,}75$ *м*.

63. Однородная горизонтальная балка соединена со стеной шарниром и подперта в точке, лежащей на расстоянии 160 *см* от стены. Длина балки 400 *см*, ее вес 320 *кг*. На расстояниях 120 *см* и 180 *см* от стены на балке лежат два груза: 160 *кг* и 240 *кг*. Определить опорные реакции.

Ответ. 790 *кг* — вверх; 70 *кг* — вниз.

64. Железная балка, длиною в 4 *м* и весом $^1/_2$ *т*, заложена в стену, толщина которой равна $^1/_2$ *м*, так, что опирается на нее в точках A и B. Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки подвешен груз $P = 4$ *т*.



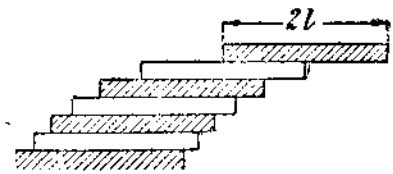
Ответ. $R_a = 34$ *т* — вверх;
$R_b = 29{,}5$ *т* — вниз.

65. Магнитная стрелка подвешена на тонкой проволоке и установлена горизонтально в магнитном меридиане. Горизонтальные составляющие силы земного магнитного поля, действующие на полюсы стрелки в противоположных направлениях, равны каждая 2 *мг*, расстояние между полюсами 10 *см*. На какой угол нужно закрутить проволоку, чтобы стрелка составила угол 30° с магнитным меридианом, если известно, что для закручивания проволоки на угол 1° нужно приложить пару, момент которой равен 5 *мг·см*?

Момент закручивающей пары пропорционален углу закручивания.

Ответ. 32°.

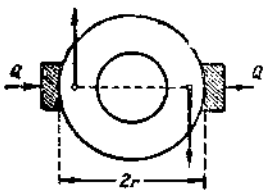
66. Несколько однородных прямоугольных плит одинакового веса и одинаковой длины $2l$ сложены так, что часть каждой плиты выступает над плитой ниже-



лежащей. Определить предельные длины выступающих частей, при которых плиты будут находиться в равновесии.

При решении складываются последовательно веса плит, начиная с верхней.

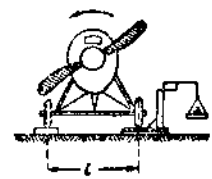
Отв. l, $^1/_2\,l$, $^1/_3\,l$, $^1/_4\,l$, $^1/_5\,l$ и т. д.



67. К валу приложена пара сил с моментом $M = 100$ *кг·м*. На валу заклинено тормозное колесо, радиус r которого равен 25 *см*. Найти, с какой силой Q надо прижимать к колесу тормозные колодки, если коэффициент трения k между колесами и колодками равен 0,25.

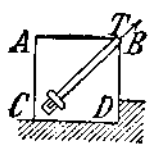
Отв. $Q = 800$ *кг*.

68. Аэроплан установлен горизонтально, причем одно колесо его поставлено на десятичные весы. Вертикальное давление на платформу весов составляет при работающем моторе 640 *кг*, а при остановленном 460 *кг*. Увеличение давления при работе мотора объясняется появлением особого (реактивного) момента, стремящегося опрокинуть аппарат, снабженный пропеллером, в сторону, противоположную вращению пропеллера. Направление вращения пропеллера указано стрелкой. Определить величину этого момента при $l = 2{,}5$ *м*.



Отв. 450 *кг·м*.

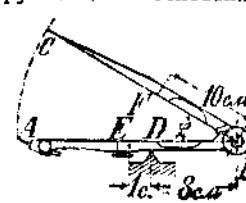
69. Концевая цепь цепного моста заложена в каменное основание, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, среднее сечение которого $ABCD$. Стороны $AB = AC = 5$ *м*, удельный вес кладки 2,5; цепь расположена по диагонали BC. Найти необходимую длину a третьей стороны параллелепипеда, если натяжение цепи $T = 100$ *т*.



Основание должно быть рассчитано против опрокидывания вокруг D; при расчете пренебрегаем сопротивлением окружающего основание грунта.

Отв. $a \geqslant 2{,}3$ *м*.

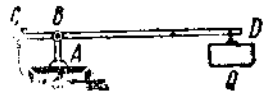
70. Определить, на какой угол φ нужно растворить циркуль, чтобы ножка AB, лежащая на острии ножа D, была в горизонтальном положении. Вес ножки AB равен



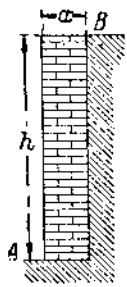
16 *г* и приложен в точке *E*; вес ножки *CB* равен 12 *г* и приложен в точке *F*; расстояния: $BD = 8$ *см*, $ED = 1$ *см*, $BF = 10$ *см*.

Ответ. $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$; равновесие неустойчивое. При том же угле φ равновесие будет устойчивым, если циркуль повернуть на 180° так, что ножка *CB* будет ниже ножа.

71. Предохранительный клапан *A* парового котла соединен стержнем *AB* с однородным рычагом *CD* длины 50 *см* и веса 1 *кг*, вращающимся вокруг неподвижной точки *C*; диаметр клапана $d = 6$ *см*, $BC = 7$ *см*. Какой груз *Q* нужно подвесить к концу *D* рычага для того, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле, равном 11 атм. (1 атм. $= 1$ *кг/см*^{2})?



Ответ. $Q = 44$ *кг*.

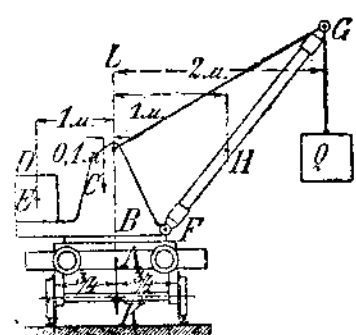


72. Земляная насыпь высоты $h = 5$ *м* подпирается вертикальной каменной стеной *AB*. Найти необходимую толщину стены *a*, предполагая, что давление земли на стену направлено горизонтально, приложено на $\frac{1}{3}$ ее высоты и равно 6 *m*; уд. вес кладки 2.

Стена должна быть рассчитана против опрокидывания вокруг ребра *A*.

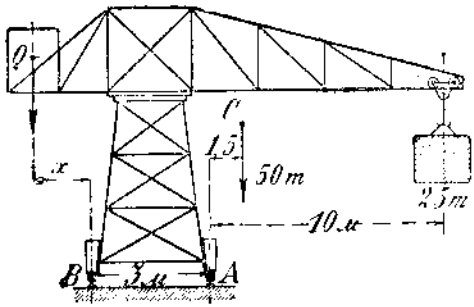
Ответ. $a \geqslant 1{,}41$ *м*.

73. Железнодорожный кран опирается на рельсы, расстояние между которыми равно 1,5 *м*. Вес тележки крана равен 3 *m*, центр тяжести ее находится в точке *A*, лежащей на линии *KL* пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью чертежа. Вес лебедки *B* крана равен 1 *m*, и центр тяжести ее лежит в точке *C* на расстоянии 0,1 *м* от прямой *KL*. Вес противовеса *D* равен 2 *m*, и центр тяжести его лежит в точке *E* на расстоянии 1 *м* от прямой *KL*. Вес укосины *FG* равен 0,5 *m*, и центр тяжести ее находится в точке *H* на расстоянии 1 *м* от прямой *KL*. Вылет крана $LG = 2$ *м*. Определить наибольший груз *Q*, который не опрокидывает крана.



Ответ. $Q = 5{,}18$ *m*.

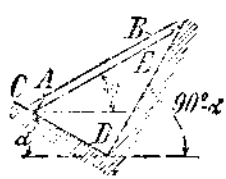
74. Вес травеллера без противовеса равен 50 *т* и действует по прямой, расстояние которой от вертикали правого рельса *A* равно 1,5 *м*. Подъемная сила крановой тележки равна 25 *т* и вылет 10 *м* от вертикали правого рельса. Определить наименьший вес *Q* и наибольшее расстояние *x* противовеса от вертикали левого рельса *B* так, чтобы кран не опрокинулся при всех положениях тележки как нагруженной, так и ненагруженной, пренебрегая ее собственным весом.



Отв. $Q = 33\frac{1}{3}$ *т*; $x = 6{,}75$ *м*.

4. Силы, как угодно расположенные в плоскости

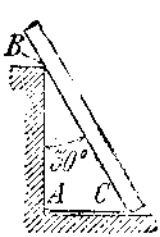
75. Однородная балка *AB*, вес которой *P*, опирается на две гладкие наклонные прямые *CD* и *DE*, заключающиеся в вертикальной плоскости; первая из них составляет с горизонтом угол α, вторая угол $90° - \alpha$. Найти угол θ, составляемый балкой с горизонтом в положении равновесия и давления ее на опорные прямые.



Отв. $N_a = P\cos\alpha$; $N_b = P\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg} 2\alpha$,

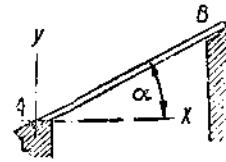
откуда $\theta = 90° - 2\alpha$ при $\alpha \leqslant 45°$.

76. Однородная балка, весом 60 *кг* и длиною 4 *м*, опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой *B* на столб высотою 3 *м*, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении веревкою *AC*, протянутой по полу. Определить натяжение веревки *T* и реакции столба R_b и R_c, пренебрегая трением.



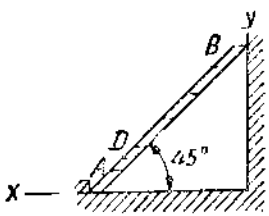
Отв. $T = 15$ *кг*; $R_b = 17{,}3$ *кг*;
$R_c = 51{,}4$ *кг*.

77. Стропила односкатной крыши состоят из бруска AB, верхним концом B свободно лежащего на гладкой опоре, а нижним A упирающегося в стену. Наклон крыши $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; на брус AB приходится вертикальная нагрузка 900 *кг*, приложенная в середине бруса. Определить реакции опор в точках A и B.



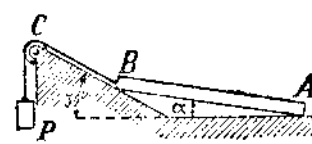
Отв. $X_a = 180$ *кг*; $Y_a = 540$ *кг*;
$R_b = 402$ *кг*.

78. К гладкой стене прислонена лестница AB под углом 45° к горизонту; вес лестницы 20 *кг*; в точке D на расстоянии, равном $^1/_3$ длины лестницы от нижнего конца, находится человек, весом 60 *кг*. Найти давление лестницы на опору A и на стену.



Отв. $X_a = 30$ *кг*; $Y_a = -80$ *кг*;
$X_b = -30$ *кг*; $Y_b = 0$.

79. Однородный брус AB весом 100 *кг* опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту. Конец B стержня поддерживается кроме того веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P; часть веревки BC параллельна плоскости. Определить груз P и давления N_a и N_b на пол и на наклонную плоскость.

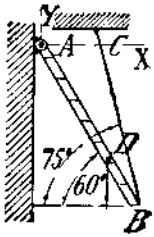


Отв. $P = 25$ *кг*; $N_a = 50$ *кг*;
$N_b = 43{,}3$ *кг*.

80. Однородная балка AB весом 20 *кг* опирается на гладкий горизонтальный пол в точке B под углом 60° и кроме того поддерживается двумя опорами C и D. Определить реакции опор в точках B, C и D, если длина $AB = 3$ *м*; $CB = 0{,}5$ *м*; $BD = 1$ *м*.

Отв. $R_b = 20$ *кг*; $R_c = 30$ *кг*; $R_d = 30$ *кг*.

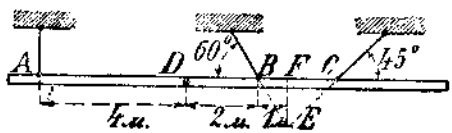
81. На подъемной лестнице длины 6 *м* и веса 240 *кг*, вращающейся около горизонтальной оси A и составляющей угол 60



с горизонтом, в точке D стоит человек весом 80 *кг* на расстоянии 2 *м* от конца B. Конец B поддерживается веревкой BC, составляющей угол 75° с горизонтом. Определить натяжение веревки T и реакцию оси A.

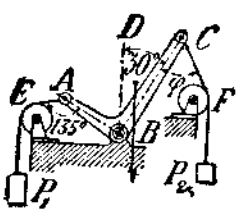
Ответ. $T = 334{,}8$ *кг*; $X_a = 86{,}7$ *кг*; $Y_a = -3{,}6$ *кг*.

82. При сборке моста пришлось поднимать часть мостовой фермы ABC тремя канатами, расположенными, как указано на чертеже. Вес этой части фермы 4200 *кг* и приложен в точке D. Расстояния: $AD = 4$ *м*; $DB = 2$ *м*; $EF = 1$ *м*. Найти натяжение канатов, если прямая AC горизонтальна.



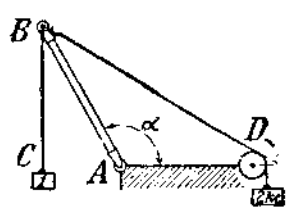
Ответ. $T_a = 1800$ *кг*; $T_b = 1757$ *кг*; $T_c = 1242{,}5$ *кг*.

83. Ломаный рычаг ABC, имеющий неподвижную ось B, весит 8 *кг*; расстояние $AB = 4$ *дм*; плечо $BC = 1$ *м* и составляет с вертикалью BD угол $CBD = 30°$; центр тяжести рычага находится на расстоянии $1{,}5\sqrt{2}$ *дм* от прямой BD. В точках A и C привязаны веревки, перекинутые через блоки E и F и натягиваемые гирями $P_1 = 31$ *кг* и $P_2 = 10$ *кг*. Определить угол $BCF = \varphi$ в положении равновесия, если угол $BAE = 135°$.



Ответ. $\varphi = 45$; $\varphi = 135°$.

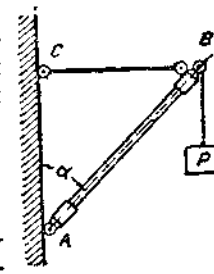
84. К стержню AB, вращающемуся около шарнира A, подвешена в точке B на веревке гиря C в 1 *кг*. От конца стержня B идет веревка, перекинутая через блок D и поддерживающая гирю 2 *кг*. Найти величину угла $BAD = \alpha$, при которой стержень будет находиться в положении равновесия, зная, что $AB = AD = 1$ *м* и вес стержня 2 *кг*.



Ответ. $\alpha = 120°$.

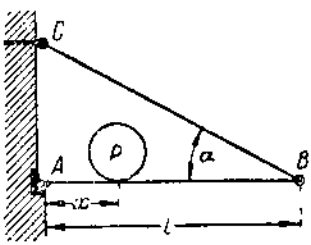
85. Кран для подъема тяжестей состоит из балки AB, нижний конец которой соединен со стеной шарниром A, а верхний удер-

живается горизонтальной веревкой BC. Определить натяжение T веревки BC и вертикальную составляющую Y_a давления на опору A, если известно, что вес груза $P = 200$ *кг*, вес балки AB равен 100 *кг*, а угол $\alpha = 45°$.



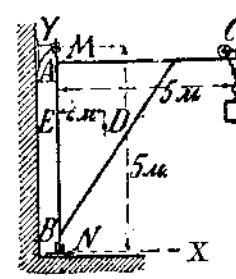
Ответ. $T = 250$ *кг*; $Y_a = 300$ *кг*.

86. Горизонтальная балка крана, длина которой равна l, одним концом шарнирно укреплена в точке A, а другим концом B подвешена к стене при помощи тяги BC, составляющей угол α с горизонтом. По балке может перемещаться груз P, положение которого определяется переменным расстоянием $AP = x$. Определить натяжение T тяги BC в зависимости от положения груза.



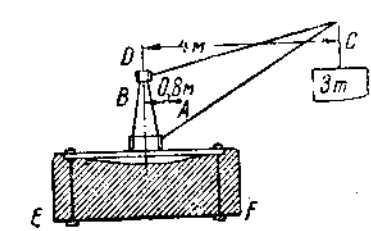
Ответ. $T = \dfrac{Px}{l \sin \alpha}$.

87. Литейный кран ABC имеет ось вращения MN; расстояния: $MN = 5$ *м*; $AC = 5$ *м*; вес крана 2 *т*; центр тяжести его D находится на расстоянии $ED = 2$ *м* от оси вращения; вес груза, подвешенного в точке C, равен 3 *т*. Найти реакции подшипника M и подпятника N.

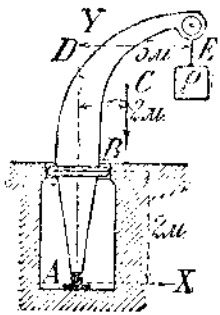


Ответ. $X_m = -3{,}8$ *т*; $Y_m = 0$;
$X_n = 3{,}8$ *т*; $Y_n = 5$ *т*.

88. Подъемный кран установлен на каменном фундаменте. Вес крана равен $Q = 2{,}5$ *т* и приложен в центре тяжести A на расстоянии $AB = 0{,}8$ *м* от оси крана; вылет крана $CD = 4$ *м*. Фундамент имеет квадратное основание, сторона которого $EF = 2$ *м*; удельный вес кладки 2. Вычислить необходимую глубину фундамента, если кран предназначен для подъема тя-



жестей до 3 *м*, причем фундамент должен быть рассчитан против опрокидывания вокруг ребра *F*.

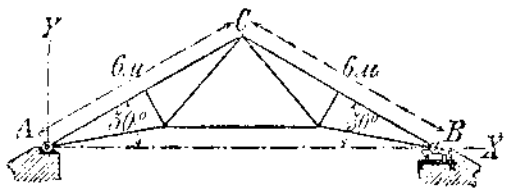


Отв. 1,1 *м*.

89. Кран в шахте, поднимающий груз $P = 4$ *т*, имеет подпятник *A* и в точке *B* опирается на гладкую цилиндрическую поверхность, ось которой *AY* вертикальна. Длина хвоста $AB = 2$ *м*. Вылет крана $DE = 5$ *м*. Вес крана равен 2 *т* и действует по прямой, расстояние которой от вертикали *AY* равно 2 *м*. Определить реакции опор *A* и *B*.

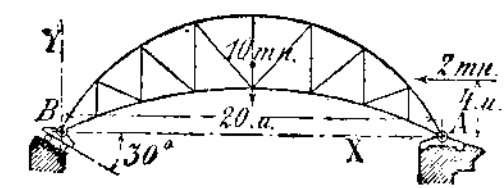
Отв. $X_a = 12$ *т*; $Y_a = 6$ *т*;
$X_b = -12$ *т*; $Y_b = 0$.

90. Симметричная стропильная ферма *ABC* одним концом укреплена в неподвижной точке *A*, а другим концом *B* опирается на гладкую горизонтальную плоскость катками. Вес фермы 10 *т*. Сторона *AC* находится под равномерно распределенным, перпендикулярным к ней, давлением ветра, равным 0,8 *т*. Длина $AC = 6$ *м*; угол $CAB = 30°$. Определить опорные реакции.



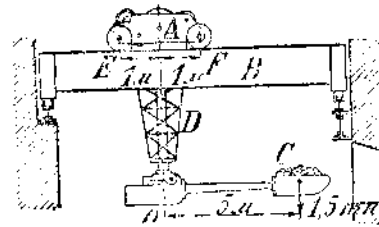
Отв. $X_a = -0,4$ *т*; $Y_a = 5,46$ *т*;
$X_b = 0$; $Y_b = 5,23$ *т*.

91. Арочная ферма имеет неподвижный опорный шарнир в точке *A*, а в точке *B* подвижную гладкую опору, плоскость которой составляет угол 30° с горизонтом. Пролет $AB = 20$ *м*. Собственный вес фермы со снегом 10 *т*. Горизонтальное давление ветра 2 *т* направлено параллельно *AB*, и точка приложения его отстоит от *AB* на 4 *м*. Определить опорные реакции.



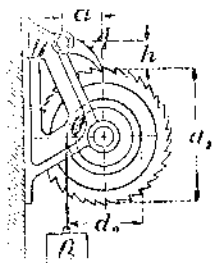
Отв. $X_a = -1,12$ *т*; $Y_a = 4,6$ *т*;
$R_b = 6,24$ *т*.

92. Кран для загрузки материалов в мартеновскую печь состоит из лебедки A, ходящей на колесах по рельсам, уложенным на балках передвижного моста B. К нижней части лебедки прикреплена опрокинутая колонна D, служащая для укрепления лопаты C. Какой вес P должна иметь лебедка с колонной, чтобы груз 1,5 $т$, помещенный на лопате на расстоянии 5 $м$ от вертикальной оси OA лебедки, не опрокидывал ее? Вес лебедки предполагается действующим по оси OA; расстояние каждого из колес от оси OA равно 1 $м$.



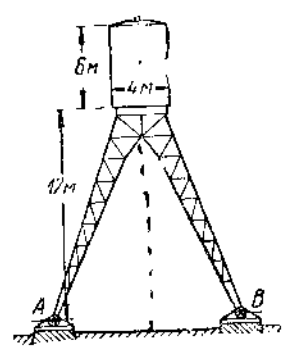
Отв. $P \geqslant 6$ $т$.

93. Лебедка снабжена храповым колесом диаметра d_1 с собачкой A. На барабан диаметра d_2, неподвижно скрепленный с колесом, намотана веревка, поддерживающая груз Q. Определить давление R на ось B собачки. Дано: $Q = 50$ $кг$, $d_1 = 420$ $мм$, $d_2 = 240$ $мм$, $h = 50$ $мм$; $a = 120$ $мм$.



Отв. $R = Q \dfrac{d_2}{d_1} \cdot \dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} = 31$ $кг$.

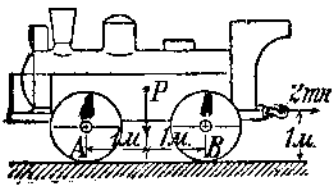
94. Водонапорная башня состоит из цилиндрического резервуара высотой 6 $м$ и диаметром 4 $м$, укрепленного на четырех симметрично расположенных столбах, наклонных к горизонту; дно резервуара находится на высоте 17 $м$ над уровнем земли; вес башни 8 $т$; давление ветра рассчитывается на площадь проекции поверхности резервуара на плоскость, перпендикулярную к направлению ветра, причем давление ветра принимается равным 125 $кг/м^2$. Определить необходимое расстояние AB между основаниями столбов.



Расстояние AB должно быть рассчитано против опрокидывания давлением ветра при горизонтальном его направлении.

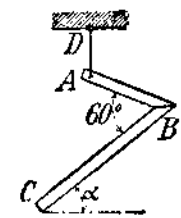
Отв. 15 $м$.

95. Паровоз на двух осях, весом $P = 20$ *т*, тянет поезд с силою 2 *т*. Определить вертикальное давление колес паровоза на рельсы и коэффициент трения колес о рельсы. Размеры указаны на чертеже.



Ответ. $N_a = 9$ *т*; $N_b = 11$ *т*, $k = 0{,}1$.

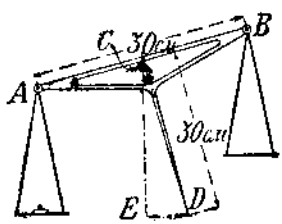
96. Два однородные стержня AB и BC одинакового сечения, из которых AB вдвое короче CB, соединенные своими концами под углом 60°, образуют ломаный рычаг ABC. Конец A рычага подвешен на нити AD. Определить угол α, образуемый плечом BC с горизонтом, пренебрегая поперечными размерами стержней.



Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{3}$.

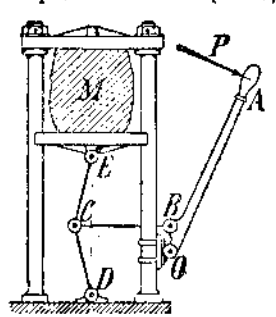
97. Длина коромысла весов $AB = 30$ *см*; вес коромысла 300 *г*; длина стрелки $CD = 30$ *см*. Перегрузка в 0,01 *г* одной из чашек отклоняет конец D стрелки от вертикального ее положения на расстояние $DE = 3$ *мм*.

Определить расстояние центра тяжести коромысла от ребра призмы C.



Ответ. 0,05 *см*.

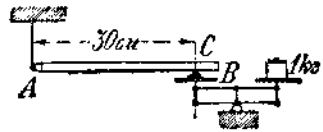
98. Найти величину усилия, сжимающего предмет M в прессе, при следующих условиях: усилие $P = 20$ *кг* и направлено перпендикулярно к рычагу OA, имеющему неподвижную ось O; в рассматриваемом положении пресса тяж BC перпендикулярен к OB и делит угол ECD пополам, причем $\angle CED = \operatorname{arctg} 0{,}2 = 11°20'$; длина $OA = 1$ *м*; $OB = 10$ *см*.



Указание. Рассматриваем сначала равновесие рычага OA, а затем рычагов DC и CE.

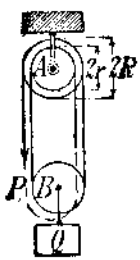
Ответ. 500 *кг*.

99. Для определения расстояния x от точки A до центра тяжести неоднородного бруска AB конец его A подвесили к неподвижной точке и затем брусок положили горизонтально на чашку весов, на которую он опирается в точке C. Расстояние AC равно 30 *см*, вес бруска 1,5 *кг*, а вес гири, уравновешивающей давление бруска на чашку весов, равен 1 *кг*. Определить расстояние x.



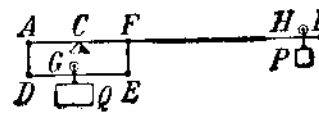
Отв. $x = 20$ *см*.

100. Главную часть дифференциального блока Вестона составляют два неизменно связанные между собою шкива A, ось которых подвешена к неподвижному крюку. Желоба их снабжены зубцами, захватывающими бесконечную цепь, образующую две петли, в одну из которых помещен подвижной блок B. К подвижному блоку подвешивается поднимаемый груз Q, а к свисающей с большого блока ветви свободной петли приложено движущее усилие P. Радиусы шкивов A суть R и r, причем $r < R$. Требуется найти, пренебрегая трением, зависимость усилия P от величины поднимаемого груза Q и определить это усилие в случае: $Q = 500$ *кг*; $R = 25$ *см*, $r = 24$ *см*.



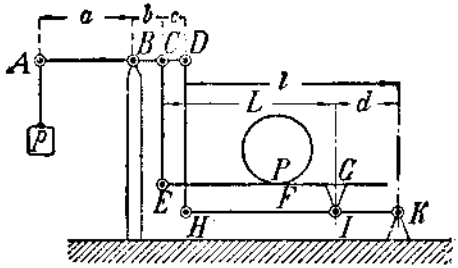
Отв. $P = \frac{1}{2} Q \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ *кг*.

101. Дифференциальный рычаг состоит из стержня AB, имеющего неподвижную опорную призму в точке C, и перекладины DE, соединенной с рычагом AB посредством шарнирных серег AD и EF. Груз $Q = 1$ *т* подвешен к перекладине в точке G посредством призмы. Расстояние между вертикалями, проведенными через точки C и G, равно 1 *мм*; $AC = CF = 25$ *см*; $DG = 24{,}9$ *см*; $GE = 25{,}1$ *см*. Определить вес гири P, которую нужно подвесить к рычагу AB в точке H на расстоянии $CH = 1$ *м* для того, чтобы уравновесить груз Q.



Отв. $P = 1$ *кг*.

102. На платформе весов Квинтенца в точке F находится груз P. Длина $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $IK = d$; $HK = l$; длина платформы $EG = L$. Определить соотношение между длинами b, c,

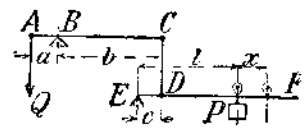


d и l, при котором вес гири p, уравновешивающий груз P, не зависит от положения его на платформе, и найти вес гири p в этом случае

Отв. $\frac{b+c}{b}=\frac{l}{a}$;

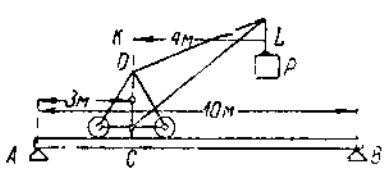
$p=\frac{b}{a}P$.

103. Для измерения больших усилий Q устроена система двух неравноплечих рычагов ABC и EDF, соединенных между собою тяжом CD. В точках B и E имеются неподвижные опоры. По рычагу EDF может передвигаться груз P весом 12,5 *кг*. Сила Q, приложенная в точке A, уравновешивается грузом P, помещенным на расстоянии l от точки E. На какую длину x надо передвинуть для сохранения равновесия груз P при увеличении силы Q на 1000 *кг*? Указанные на чертеже размеры: $a=3{,}3$ *мм*; $b=66$ *мм*, $c=50$ *мм*.



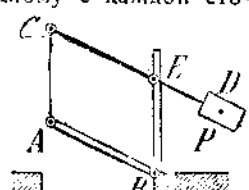
Отв. $x=2$ *см*.

104. На балке AB длиной 10 *м* уложен путь для подъемного крана. Вес крана равен 5 *т*, и центр тяжести его находится на оси CD; вес груза P равен 1 *т*; вес балки AB равен 3 *т*; вылет крана $KL=4$ *м*; расстояние $AC=3$ *м*. Найти опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.



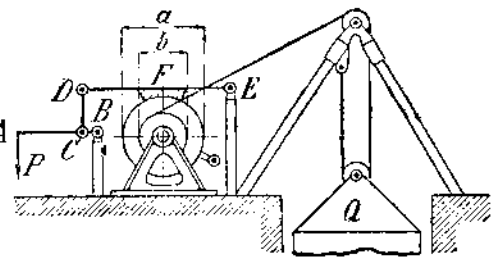
Отв. $R_a=5{,}3$ *т*; $R_b=3{,}7$ *т*.

105. Подъемный мост AB поднимается с помощью двух брусьев CD длиною 8 *м*, весом 400 *кг*, по одному с каждой стороны моста; длина моста $AB=CE=5$ *м*; длина цепи $AC=BE$; вес моста 3 *т* и может считаться приложенным в середине AB. Рассчитать противовесы P, уравновешивающие мост.



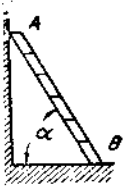
Отв. $P=1383$ *кг*.

106. Для опускания грузов в шахту употребляется ворот с тормозом, изображенный на чертеже. С барабаном, на который намотана цепь, скреплено концентрическое деревянное колесо, которое тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединенного цепью CD с концом D тормозного рычага ED. Диаметр колеса $a = 50$ *см*; диаметр барабана $b = 20$ *см*; $D = 120$ *см*; $FE = 60$ *см*; $B = 1$ *м*; $BC = 10$ *см*. Определить силу P, уравновешивающую груз $Q = 800$ *кг*, подвешенный к подвижному блоку, если коэффициент трения дерева о железо $k = 0{,}4$. Размерами колодки F пренебрегаем.



Ответ. $P = 20$ *кг*.

107. Лестница AB веса P упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Сила трения в точке B не более kR, где k коэффициент трения, а R нормальная реакция пола. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться до верху человек, вес которого p?



Ответ. $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \dfrac{P+2p}{2k(P+p)}$.

108. Для определения коэффициента трения употребляется прибор, состоящий из подшипника AA_1, надетого на вращающийся около горизонтальной оси шип B. Обе половины подшипника прижимаются к шипу при помощи скобы C двух рычагов D, D_1, короткие плечи которых, длиной $a = 30$ *мм*, производят на нижнюю половину подшипника A_1 давление, вызываемое грузами P. Вес всего прибора, т. е. подшипника, скобы, рычагов и грузов, $Q = 40$ *кг*; центр тяжести

лежит ниже оси шипа на расстоянии $h = 120$ *мм*; вес каждого из рычагов $p = 7$ *кг* приложен в точке F на расстоянии $b = 510$ *мм* от оси рычага E; грузы же P каждый по 8 *кг* действуют в точках на расстоянии $c = 900$ *мм* от оси E. Вес q нижней половины подшипника равен 6 *кг*. При вращении шипа ось YY прибора отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 5°$. Определить коэффициент трения k между шипом и подшипником, если диаметр шипа $d = 100$ *мм*.

Коэффициент k находим из уравнения:

$$\left\{\left(2\frac{pb+Pc}{a}-q\right)+\left[2\frac{pb+Pc}{a}+(Q-q)\right]\right\}k\frac{d}{2}=Qh\operatorname{tg}\alpha.$$

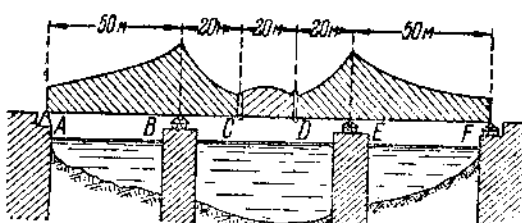
Ответ. $k = 0{,}0051$.

109. Трамвайная дверь отодвигается с трением в нижнем пазу. Коэффициент трения k не более 0,5. Определить наибольшую высоту h, на которой можно поместить ручку двери, чтобы дверь при отодвигании не опрокидывалась. Ширина двери $l = 0{,}8$ *м*; центр тяжести двери находится на ее вертикальной оси симметрии.

Ответ. $h = \frac{l}{2k} = 0{,}8$ *м*.

5. Смешанные задачи

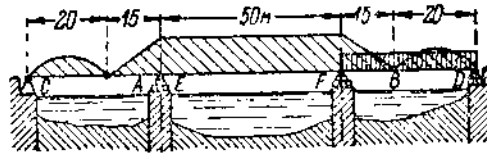
110. Консольный мост состоит из трех частей: AC, CD и DE, из которых крайние опираются каждая на две опоры. Размеры:



$AC = DE = 70$ *м*; $CD = 20$ *м*; $AB = EF = 50$ *м*. Нагрузка на погонный метр длины моста равна 6 *т*. Найти давления на опоры A и B, производимые этой нагрузкой.

Ответ. $N_a = 102$ *т*; $N_b = 378$ *т*.

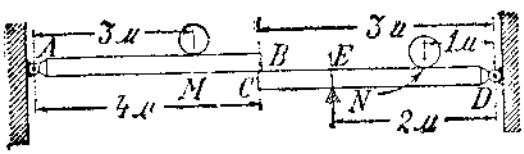
111. Консольный мост состоит из главной фермы AB и двух боковых ферм AC и BD. Собственный вес, приходящийся на погонный метр фермы AB, равен 1,5 $т$, а ферм AC и ED равен 1 $т$. Определить реакции всех опор в тот момент, когда весь правый пролет FD загружен поездом веса 3 $т$ на погонный метр.



Размеры: $AC = BD = 20$ $м$; $AE = FB = 15$ $м$; $EF = 50$ $м$.

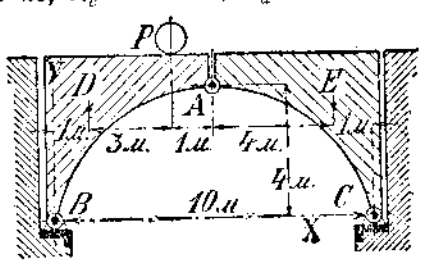
Отв. $R_c = 10$ $т$; $R_d = 40$ $т$; $R_e = 54{,}25$ $т$; $R_f = 160{,}75$ $т$.

112. Балка AB длиною 4 $м$, весом 200 $кг$, могущая вращаться около оси A, опирается концом B на другую балку CD, длиною 3 $м$, весом 160 $кг$, которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D. В точках M и N помещены грузы по 80 $кг$ каждый. Расстояния $AM = 3$ $м$; $ED = 2$ $м$; $ND = 1$ $м$. Определить опорные реакции.

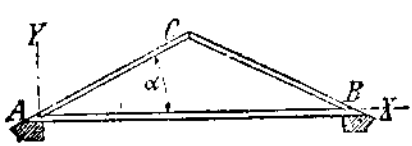


Отв. $R_a = 120$ $кг$; $R_b = 160$ $кг$; $R_c = 400$ $кг$; $R_d = 0$.

113. Мост состоит из двух частей, связанных между собою шарниром A и прикрепленных к береговым устоям шарнирами B и C. Вес каждой части моста 4 $т$; их центры тяжести D и E; на мосту находится груз $P = 2$ $т$; размеры указаны на чертеже. Определить давление в шарнире A и реакции в точках B и C.



Отв. $X_a = 2$ $т$; $X_b = -X_c = 2$ $т$;
$Y_a = 0{,}8$ $т$; $Y_b = 5{,}2$ $т$; $Y_c = 4{,}8$ $т$.

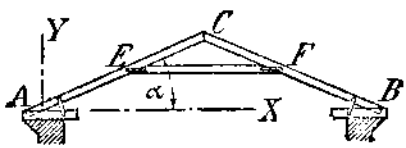


114. Стропила состоят из двух брусьев AC и BC одинаковой длины 5 $м$, скрепленных в точке C и врубленных нижними концами в горизонталь-

ную затяжку AB. Наклон крыши $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; нагрузка на каждый из брусьев равна 900 *кг* и приложена в середине бруса. Определить давление между брусьями в точке C и давление на затяжку в точке A.

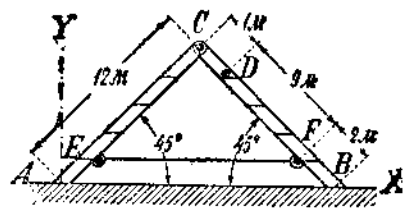
Отв. $X_a = -900$ *кг*; $Y_a = -900$ *кг*; $X_c = 900$ *кг*; $Y_c = 0$.

115. Стропила состоят из двух брусьев AC и BC одинаковой длины 4 *м*, свободно лежащих нижними концами на стенах и связанных горизонтальной затяжкой EF. Наклон крыши $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; $AC = 3CE$; нагрузка на каждый из брусьев AC и BC равна 800 *кг* и приложена в середине бруса. Определить давление на стену в точке A и распор S в затяжке EF, пренебрегая трением.



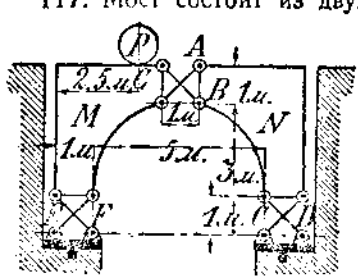
Отв. $X_a = 0$; $Y_a = -800$ *кг*; $S = 2400$ *кг*.

116. На гладкой горизонтальной плоскости стоит переносная лестница, состоящая из двух частей AC и BC, длиной по 12 *м*, весом по 18 *кг* каждая, соединенных шарниром C и веревкой EF; расстояние $BF = AE = 2$ *м*. В точке D на расстоянии $CD = 1$ *м* стоит человек, весящий 72 *кг*. Определить реакции пола и шарнира и натяжение T веревки EF, если углы: $BAC = ABC = 45°$.



Отв. $R_a = 51$ *кг*; $R_b = 57$ *кг*; $X_c = 50{,}4$ *кг*; $Y_c = 33$ *кг*; $T = 50{,}4$ *кг*.

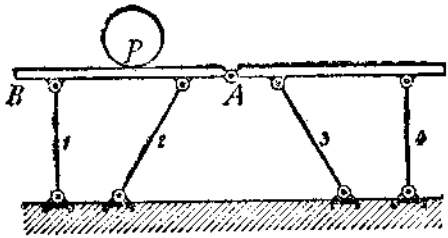
117. Мост состоит из двух одинаковых частей M и N, соединенных между собою, и с неподвижными опорами посредством шести стержней, наклоненных к горизонту под углом 45° и снабженных на концах шарнирами. Размеры указаны на чертеже. В точке G помещен груз весом P. Определить те усилия в стержнях, которые вызваны действием этого груза.



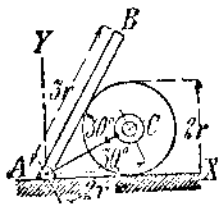
Отв. $R_a = 0$; $R_b = P\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $R_c = 0$;

$$R_d = P\frac{\sqrt{2}}{3}; \quad R_e = P\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad R_e = P\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

118. Две горизонтальные балки, соединенные шарниром A, прикреплены шарнирно к основаниям стержнями *1*, *2*, *3*, *4*. Определить графически, взяв размеры с чертежа, усилия в этих стержнях, вызываемые действием на балку AB вертикальной нагрузки P.

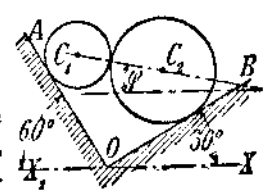


119. Брусок AB, могущий вращаться около горизонтальной оси A, опирается на поверхность гладкого цилиндра радиуса r, удерживаемого нитью AC и лежащего на горизонтальной плоскости. Вес бруска 16 *кг*; дл на $AB = 3r$; $AC = 2r$. Определить натяжение нити T и давление бруска на шарнир A.



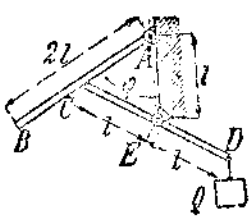
Отв. $T = 6{,}93$ *кг*; $X_a = -6$ *кг*;
$Y_a = -12{,}54$ *кг*.

120. Между двумя гладкими наклонными плоскостями OA и OB положены два соприкасающиеся шара: шар с центром C_1 весом $P_1 = 10$ *кг* и радиусом r_1, и шар, имеющий центр C_2, весом $P_2 = 30$ *кг* и радиусом r_2. Определить угол φ, составляемый прямой C_1C_2 с горизонтальною осью XOX_1, давления N_1 и N_2 шаров на плоскости, а также величину N взаимного давления шаров, если угол $AOX_1 = 60°$, а угол $BOX = 30°$.



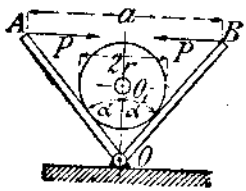
Отв. $\operatorname{tg}\varphi = 0$; $N_1 = 20$ *кг*; $N_2 = 34{,}64$ *кг*;
$N = 17{,}32$ *кг*.

121. Стержень AB длиной $2l$ и весом P может вращаться вокруг конца A. Он опирается на стержень CD той же длины $2l$, могущий вращаться вокруг своей середины E. Точки A и E лежат на одной вертикали в расстоянии $AE = l$. К концу D подвешен груз $Q = 2P$. Определить величину угла φ, образуемого стержнем AB с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением.



Отв. $\varphi_1 = \arccos\frac{1}{8}$; $\varphi_2 = 0$.

122. Между двумя пластинами AO и BO, соединенными шарниром O, помещен цилиндр, ось которого O_1 параллельна оси шарнира; обе оси горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости. Пластины сжимают цилиндр под действием двух горизонтальных равных и прямо противоположных сил P, приложенных в точках A и B. Вес цилиндра Q, его радиус r, коэффициент трения цилиндра о пластины равен k, угол $AOB = 2\alpha$, расстояние $AB = a$. Какому условию должна удовлетворять величина сил P для того, чтобы цилиндр находился в равновесии?

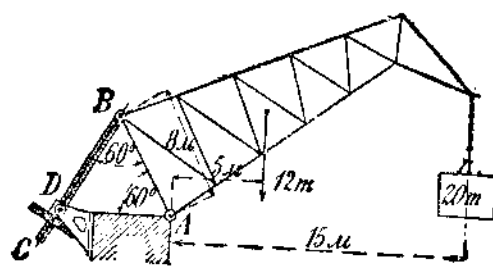


Отв. 1) $\operatorname{tg}\alpha \geqslant k$; $\dfrac{r}{a}\cdot\dfrac{Q}{\sin\alpha + k\cos\alpha} \leqslant P \leqslant \dfrac{r}{a}\cdot\dfrac{Q}{\sin\alpha - k\cos\alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha < k$; $P \geqslant \dfrac{r}{a}\cdot\dfrac{Q}{\sin\alpha + k\cos\alpha}$.

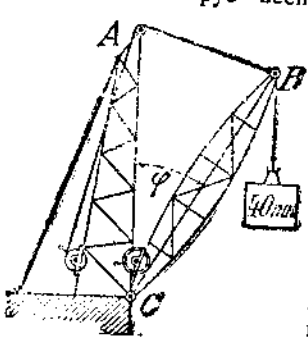
6. Общий отдел статики на плоскости

123. Кран имеет шарнир в точке A и может наклоняться посредством винта BC, соединенного с фермой крана шарниром B и проходящего через гайку D, причем $AB = AD = 8$ *м*. Вес фермы равен 12 *т* и в тот момент, когда треугольник ABD равносторонний, направлен по вертикали, расстояние которой от точки A равно 5 *м*. Вылет крана, считая от точки A, при этом равен 15 *м*. Поднимаемый груз весит 20 *т*. Определить опорные реакции и натяжение T винта.



Отв. $X_a = 26$ *т*; $Y_a = 77$ *т*; $T = 52$ *т*.

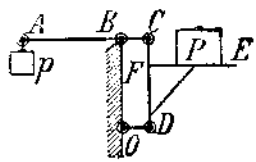
124. Кран состоит из неподвижной башни AC и подвижной фермы BC, которая имеет шарнир C и удерживается тросом AB. Груз 40 *т* висит на цепи, перекинутой через блок в точке B и идущей к вороту по прямой BC. Длина $AC = BC = 15$ *м*. Определить, пренебрегая весом фермы, натяжение T троса AB



и силу P, сжимающую ферму по прямой BC как функции угла $ACB = \varphi$.

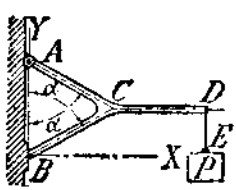
Отв. $T = 80 \sin \frac{\varphi}{2} m$; $P = 40\ m$, независимо от угла φ.

125. К неравноплечему рычагу первого рода ABC, имеющему неподвижную точку B, подвешена на шарнире C платформа CDE, соединенная посредством шарнира D со стержнем OD, который свободно вращается вокруг неподвижной точки O. Какую гирю p надо привесить в точке A, чтобы уравновесить груз $P = 100$ *кг*, лежащий на платформе EF, если прямая CD вертикальна, OD равна и параллельна BC, а $BC = 0{,}1\ AB$.



Отв. $p = 10$ *кг*.

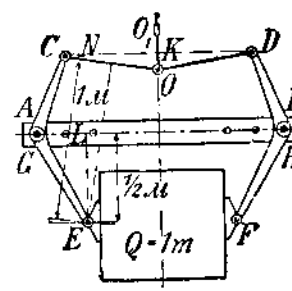
126. Вешалка, состоящая из трех равных стержней: AC, BC и CD веса p, неизменно соединенных друг с другом, висит на шарнире A, а концом B упирается в гладкую вертикальную стену AB. К концу D вешалки подвешен на веревке DE груз, вес которого P. Определить реакции стены в точках A и B.



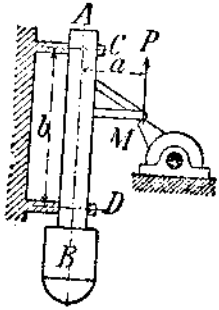
Отв. $-X_a = X_b = \frac{2(P+2p)\sin\alpha + p + 2P}{4\cos\alpha}$.

$Y_a = 3p + P$; $Y_b = 0$.

127. Цепь OO_1 самозахватывающего грузы приспособления соединена шарниром O со стержнями $OC = OD = 60$ *см*, которые соединены шарнирами же с двумя равными ломаными рычагами CAE и DBF, могущими вращаться вокруг точек A и B соединительного стержня GH. В шарнирах E и F особые колодки удерживают груз $Q = 1\ m$ трением. Расстояние точки F от стержня GH равно $EL = 50$ *см*, а расстояние ее от стержня OC равно $EN = 1$ *м*. Высота треугольника COD равна $OK = 10$ *см*. Найти силу, растягивающую соединительный стержень GH, пренебрегая весом частей механизма.



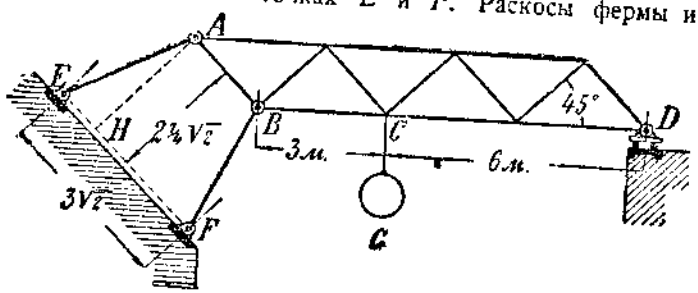
Отв. 6 *m*.



128. Пест AB приводится в движение пальцами M, насаженными на валу. Вес песта 180 *кг*. Расстояние между направляющими C и D равно $b = 1{,}5$ *м*. Расстояние точки прикосновения пальца к выступу от оси песта $a = 0{,}15$ *м*. Найти силу P, необходимую для подъема песта, если принять во внимание силу трения между направляющими C и D и пестом, равную 0,15 давления между трущимися частями.

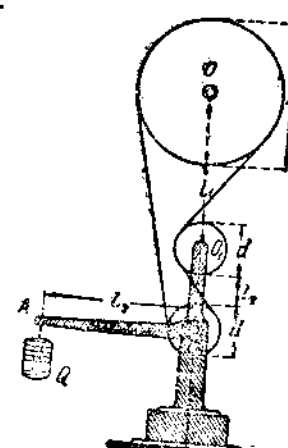
Ответ. $P = 186$ *кг*.

129. Ферма $ABCD$ в точке D опирается на каток, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF наклонены к горизонту под углом 45°; длина панели $BC = 3$ *м*; стержни AE и BF одинаковой длины; расстояние $EF = 3\sqrt{2}$ *м*; $AH = 2^1/_4\sqrt{2}$ *м*. Вес фермы, поддерживающих ее стержней и нагрузки равен 7,5 *т* и направлен по прямой CG. Найти реакцию катка R_d.



Ответ. $R_d = 1{,}5$ *т*.

130. Натяжение приводного ремня, осуществляемое при помощи ломаного рычага AO_2O_1 и натяжного ролика O_1, равно по ту и другую сторону ролика P *кг*. Найти величину груза Q. Система находится в равновесии. $\angle AO_2O_1 = 90°$.

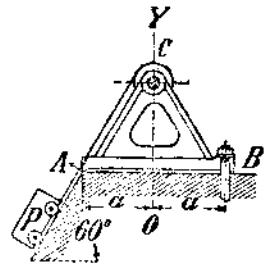


Данные:

$D = 55$ *см*; $\quad l_2 = 15$ *см*;
$d = 15$ *см*; $\quad l_3 = 45$ *см*;
$l_1 = 35$ *см*; $\quad P = 18$ *кг*.

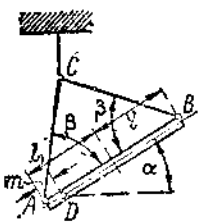
Ответ. 12 *кг*.

131. Груз $P = 480$ *кг* удерживается на наклонной плоскости, составляющей угол 60° с горизонтом, посредством веревки, параллельной плоскости и намотанной на неподвижный вал лебедки ABC. Вес лебедки $Q = 240$ *кг* и направлен по прямой CO; лебедка опирается в точке A на гладкий пол, а в точке B прикреплена к полу болтом. Найти опорные реакции, пренебрегая расстоянием веревки от плоскости.



Отв. $X_a = 0$; $Y_a = 480$ *кг*; $X_b = 207{,}8$ *кг*; $Y_b = 120$ *кг*.

132. Доска AB, длина которой $2l$, а вес p, подвешена на двух веревках AC и CB равной длины. Каждая из веревок составляет с доской угол β. В точке D на расстоянии $AD = m$ стоит человек, вес которого P. Определить угол α, составляемый доской с горизонтом в положении равновесия, и натяжения веревок T_a и T_b.

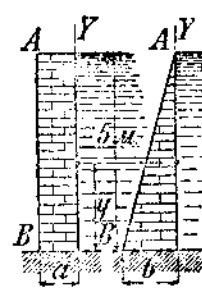


Отв. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(l-m)P}{l(P+p)}\operatorname{ctg}\beta;$$

$$T_a = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{2\sin 2\beta}(P+p);$$

$$T_b = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2\sin 2\beta}(P+p).$$

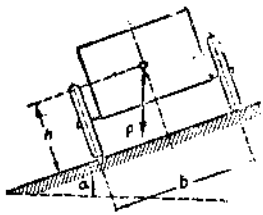
133. Давление воды на маленькую площадку плотины возрастает пропорционально расстоянию ее от свободной поверхности воды и равно весу столба воды, высота которого равна этому расстоянию, а площадь основания равна взятой площадке. Определить толщину плотины в ее основании в двух случаях: 1) когда поперечное сечение плотины прямоугольное; 2) когда это сечение треугольное. Плотина должна быть рассчитана против опрокидывания вокруг ребра B давлением воды, причем коэффициент устойчивости должен быть равен 2. Высота плотины такая же, как глубина воды, и равна 5 *м*. Вес 1 *см*³ воды 1 *г*, а 1 *см*³ материала плотины весит 2,2 *г*.



Коэффициентом устойчивости называется отношение момента веса массива к моменту опрокидывающей силы. Давление воды на площадку плотины длины 1 *м* и высоты dy, где y расстояние площадки от дна, равно в тоннах $(5-y)\,dy$. Момент этого давления относительно точки B

равен $(5-y)\,y\,dy$. Опрокидывающий момент будет $\int_0^5 (5-y)\,y\,dy = 20\frac{5}{6}$ *т·м*.

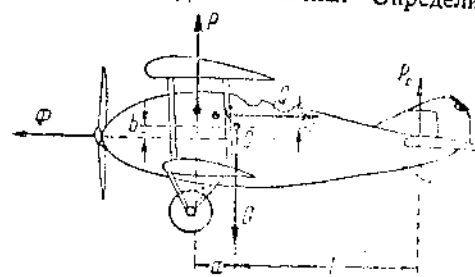
Ответ. $a = 2{,}75$ *м*, $b = 3{,}37$ *м*.



134. Нормальное давление на грунт каждого из задних колес автомобиля на горизонтальной дороге составляет 500 *кг*. Как велико будет нормальное давление этих колес на односкатной дороге с поперечным уклоном $\alpha = 5°$, если возвышение центра тяжести $h = 0{,}8$ *м*, $b = 1{,}4$ *м*?

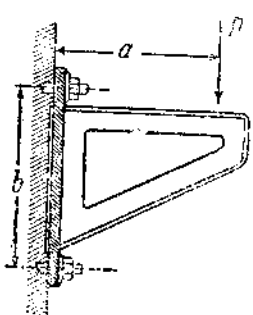
Ответ. Для ниже стоящего колеса ~ 548 *кг*.

135. При горизонтальном установившемся полете самолета силы, действующие на него, должны быть уравновешены. Определить силу сопротивления Q, подъемную силу P, давление на оперение P_0, если вес самолета $G = 3000$ *кг*, сила тяги винта $\Phi = 400$ *кг*; расстояния, указанные на чертеже, имеют значения: $a = 200$ *см*; $b = 10$ *см*; $c = 5$ *см*; $l = 5{,}0$ *м*.



Ответ. $Q = 400$ *кг*; $P = 2873$ *кг*; $P_0 = 127$ *кг*.

136. Кронштейн, нагруженный вертикальной силой $P = 600$ *кг*, прикреплен к стене двумя болтами. Определить затяжку болтов, необходимую для укрепления кронштейна на стене. Коэффициент трения между кронштейном и стеной $f = 0{,}3$. Для большей осторожности расчет произвести в предположении, что затянут только верхний болт и что болты поставлены с зазором. $a = 40$ *см*, $b = 44$ *см*.



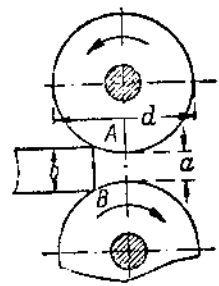
Указание. Затяжкой называется усилие, действующее вдоль по оси болта. Полная затяжка верхнего болта состоит из двух частей: первая устраняет возможность отрыва кронштейна и опрокидывания его вокруг нижнего болта,

вторая обеспечивает то нормальное давление верхней части кронштейна на стену, которое вызовет необходимую силу трения.

Для работы стана необходимо, чтобы лист захватывался вращающимися валами, т. е. чтобы равнодействующая приложенных к листу реакций и сил трения в точках A и B была направлена по горизонтали вправо.

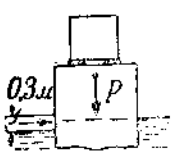
Ответ. 2545 *кг*.

137. Прокатный стан состоит из двух валов диаметра $d = 50$ *см*, вращающихся в противоположные стороны, указанные стрелками на чертеже; расстояние между валами $a = 0{,}5$ *см*. Какой толщины b листы можно прокатывать на этом стане, если коэффициент трения для раскаленного железа и чугунных валов $k = 0{,}1$?



Ответ. $b \leqslant 0{,}75$ *см*.

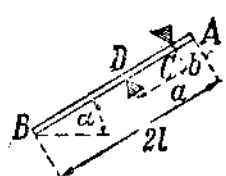
138. Быки Канзасского моста на реке Миссури были рассчитаны на ледоход в том предположении, что усилие, раздробляющее льдину по всей ширине быка, равной 3,25 *м*, уравновешивается трением каменной кладки части быка, находящейся выше уровня воды, по нижней части быка. Определить коэффициент k запаса сопротивляемости быка ледоходу, если толщина льда 0,3 *м*; усилие, раздробляющее лед, 30 *кг/см*^{2}; вес части быка над уровнем воды вместе с приходящейся на него нагрузкою от верхнего строения моста $P = 720$ *т* и коэффициент трения камня о камень 0,61.



Коэффициент k равен отношению наименьшей силы, необходимой для того, чтобы сдвинуть верхнюю часть быка, к силе, раздробляющей лед.

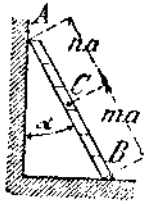
Ответ. $k = 1{,}5$.

139. Тяжелый стержень AB лежит на двух опорах C и D, расстояние между которыми $CD = a$; $AC = b$. Коэффициент трения стержня об опоры равен k. Угол, образуемый стержнем с горизонтом, равен α. Какому условию должна удовлетворять длина стержня $2l$ для того, чтобы стержень находился в равновесии, если толщиной его можно пренебречь?



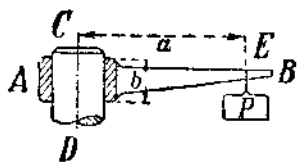
Ответ. $2l \geqslant 2b + a + \frac{a}{k} \operatorname{tg} \alpha$.

140. К вертикальной стене приставлена лестница AB, опирающаяся своим нижним концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену k_1, о пол k_2. Вес лестницы вместе с находящимся на ней человеком равен p и приложен в точке C, которая делит длину лестницы в отношении $m : n$. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций стены N_a и пола N_b для этого значения α.



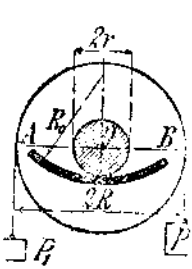
Отв. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(m+n)k_2}{m-nk_1k_2}$; $N_a = \dfrac{pk_2}{1+k_1k_2}$; $N_b = \dfrac{p}{1+k_1k_2}$.

141. Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым надет на вертикальную круглую стойку CD; длина втулки $b = 2$ *см*; в точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню привешен груз P. Определить, пренебрегая весом стержня AB, расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $k = 0{,}1$.



Отв. $a \geqslant 10$ *см*.

142. Блок радиуса R снабжен двумя шипами радиуса r, симметрично расположенными относительно его средней плоскости. Шипы опираются на две цилиндрические поверхности AB с горизонтальными образующими. На блок намотана нить, к которой подвешены грузы P и P_1, причем $P > P_1$. Определить наименьшую величину груза P_1, при которой блок будет находиться в равновесии, предполагая, что коэффициент трения шипов о цилиндрические поверхности AB равен k, а вес блока с шипами Q.

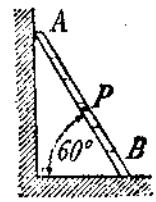


Указанное на чертеже положение системы не может быть положением равновесия; последнее требуется предварительно найти.

Отв. В положении равновесия плоскость, проходящая через оси цилиндра AB и блока, образует с вертикалью угол, равный углу трения.

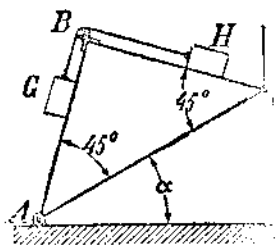
$$P_1 = \frac{P(R\sqrt{1+k^2} - kr) - krQ}{R\sqrt{1+k^2} + kr}.$$

143. Лестница AB опирается на негладкую стену и негладкий пол, составляя с последним угол 60°. На лестнице помещается груз P. Пренебрегая весом лестницы, определить графически наибольшее расстояние BP, при котором лестница остается в покое. Угол трения, тангенс которого называется коэффициентом трения, для стены и пола равен 15°.



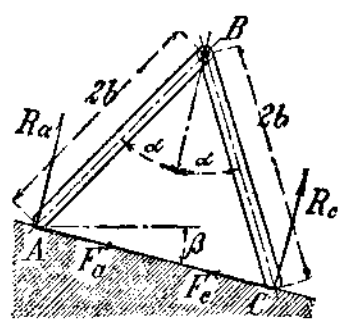
Ответ. $BP = \frac{1}{2} AB$.

144. На гранях AB и BC призмы ABC помещены два одинаковые тела G и H веса P, связанные нитью, перекинутой через блок в точке B. Коэффициент трения между телами и гранями призмы равен k. Углы: $BAC = BCA = 45°$. Определить величину угла α между гранью AC и горизонтом, необходимую для того, чтобы груз G начал опускаться.



Ответ. $\operatorname{tg} \alpha = k$.

145. Стремянка, в которой две одинаковые лестницы AB и BC соединены шарниром в B, поставлена на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол β. Пренебрегая трением в шарнире, определить: 1) наибольший и наименьший углы растворения стремянки 2α, при котором возможно равновесие; 2) условия, при которых сила трения в точке A при равновесии равна нулю. Коэффициент трения между стремянкой и плоскостью равен k, причем $k > \operatorname{tg} \beta$.



Принимая во внимание, что при малых значениях α возможно опрокидывание стремянки вокруг точки C вправо, находим: $\operatorname{tg} \alpha \geqslant 0{,}5 \operatorname{tg} \beta$. Затем из уравнений моментов относительно точек A и C получаем:

$$R_a = P(\cos \beta - 0{,}5 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha); \quad R_c = P(\cos \beta + 0{,}5 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha),$$

где P — вес как той, так и другой лестницы. Далее, рассматривая равновесие каждой лестницы отдельно, из уравнений моментов относительно точки B находим:

$$F_a = -P(\sin \beta - 0{,}5 \cos \beta \operatorname{tg} \alpha); \quad F_c = P(\sin \beta + 0{,}5 \cos \beta \operatorname{tg} \alpha).$$

Равновесие возможно только при таких значениях α, при которых $kR_a > F_a > -kR_a$ и $kR_c > F_c > -kR_c$, откуда получаем четыре неравен-

ства, содержащие $\operatorname{tg}\alpha$ во второй степени, вида $mx^2+nx+p\gtrless 0$, если через x обозначим $\operatorname{tg} a$, причем $m>0$.

Пусть x_1 и x_2 будут корнями уравнения: $mx^2+nx+p=0$, где $x_1>x_2$, тогда найденные неравенства могут быть представлены в виде: $m(x-x_1)(x-x_2)\lessgtr 0$.

Верхнее неравенство удовлетворяется при значениях $x>x_1$ и $x<x_2$, нижнее — при значениях $x_1>x>x_2$. Таким образом получим восемь неравенств, определяющих пределы для $\operatorname{tg}\alpha$; при исследовании их удобно положить $\operatorname{tg}\beta=\mu k$, где, согласно условию, $1>\mu>0$. Отрицательные пределы не имеют значения в настоящей задаче. Наибольший из положительных нижних пределов представляет искомое значение $\operatorname{tg}\alpha_{\min}$, а наименьший из верхних пределов — искомое значение $\operatorname{tg}\alpha_{\max}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta\leqslant\operatorname{tg}\alpha\leqslant k-\operatorname{tg}\beta+\sqrt{(k-\operatorname{tg}\beta)^2+k\operatorname{tg}\beta}$;

2) при $R_a=0$, когда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$, или при $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$, если только это значение не выходит за пределы первого ответа.

7. Графическая статика

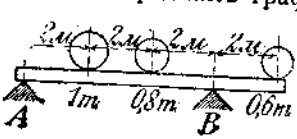
146. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции балки с пролетом 8 *м*, вызываемые тремя грузами: 2 *т*, 3 *т* и 1 *т*, которые расположены, как указано на чертеже.

Ответ. $R_a=3{,}25$ *т*; $R_b=2{,}75$ *т*.

147. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции консольной балки длины 8 *м* с пролетом 5 *м*, вызываемые грузами 2 *т* и 3 *т*, которые помещены на концах, как указано на чертеже.

Ответ. $R_a=2{,}2$ *т*; $R_b=2{,}8$ *т*.

148. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции консольной балки длины 8 *м* с пролетом 6 *м*, вызываемые тремя грузами: 1 *т*, 0,8 *т* и 0,6 *т*, которые расположены, как указано на чертеже.

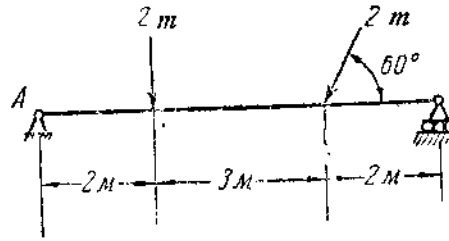


Ответ. $R_a=0{,}73$ *т*; $R_b=1{,}67$ *т*.

149. Балка AB нагружена двумя силами так, как это показано на чертеже.

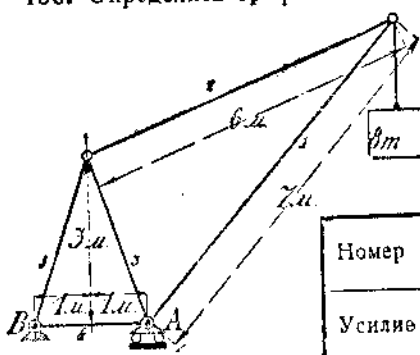
Определить графически и проверить аналитически реакции опор.

Отв. $R_B = 1{,}80\ m$,
$R_A = 2{,}17\ m$.



150. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях крана, изображенного на чертеже, при нагрузке в 8 m.

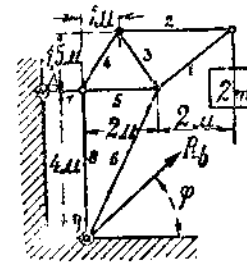
Отв. $R_a = 26\ m$;
$R_b = 18\ m$ — вниз.



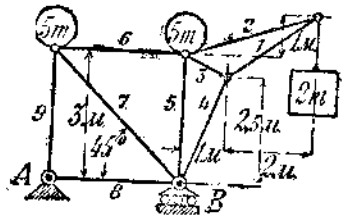
Номер	1	2	3	4	5
Усилие	−16,3	+11,4	−14,4	−6	+19

151. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях крана, изображенного на чертеже, при нагрузке в 2 m.

Отв. $R_a = 2\ m$;
$R_b = 2{,}8\ m$;
$\varphi = 45°$.



Номер	1	2	3	4	5	6	7	8
Усилие	−3,33	+2,67	−2,41	+2,41	+0,67	−4,48	+2	+2

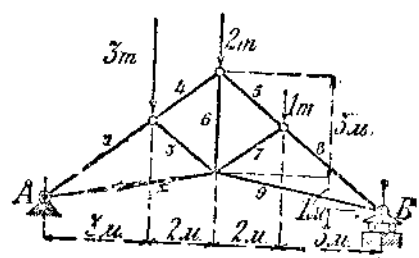


152. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях крана, изображенного вместе с приложенными к нему силами на чертеже.

Ответ. $R_a = 3$ *т*;
$R_b = 9$ *т*.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие	−6,(	+5,1	−3,14	−5,4	−2,0	+2,0	−2,82	0	−3,0

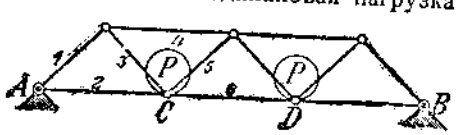
153. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях стропильной фермы, изображенной вместе с приложенными к ней силами на чертеже.



Ответ. $R_a = 3{,}4$ *т*;
$R_b = 2{,}6$ *т*.

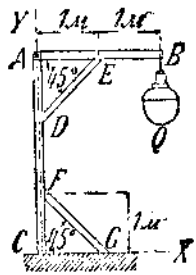
Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие	−7,3	+5,8	−2,44	−4,7	−4,7	+3,87	−0,82	−5,6	+4,42

154. В мостовой ферме, изображенной на чертеже, на узлы *C* и *D* приходится одинаковая нагрузка $P = 10$ *т*; наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*, вызываемые данной нагрузкой.



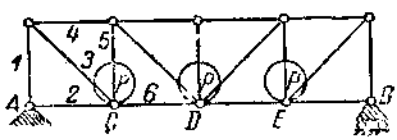
Ответ. $S_1 = -14$ *т*; $S_2 = +10$ *т*; $S_3 = +14$ *т*;
$S_4 = -20$ *т*; $S_5 = 0$; $S_6 = +20$ *т*.

155. Горизонтальная балка AB длиной 2 $м$, прикрепленная к вертикальному столбу AC в точке A и подпертая откосом DE, несет на конце груз $Q = 500$ $кг$; столб AC укреплен подкосом FG; $AE = CG = 1$ $м$; подкосы DE и FG наклонены под углом 45° к горизонту. Найти усилия S_c и S_f в подкосах DE и FG и реакцию грунта в точке C.



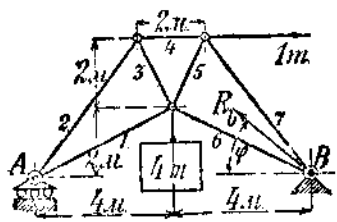
Отв. $S_c = 1410$ $кг$;
$S_f = 1410$ $кг$;
$X_c = 1000$ $кг$;
$Y_c = -500$ $кг$.

156. В мостовой ферме, изображенной на чертеже, узлы C, D и E загружены одинаковой нагрузкой $P = 10$ $т$. Наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*, вызываемые данной нагрузкой.



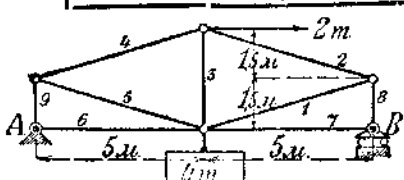
Отв. $S_1 = -15$ $т$ — сжатие; $S_2 = 0$; $S_3 = +21{,}2$ $т$ — растяжение; $S_4 = -15$ $т$; $S_5 = -5$ $т$; $S_6 = +15$ $т$.

157. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на чертеже.



Отв. $R_a = 1{,}5$ $т$;
$R_b = 2{,}7$ $т$,
$\varphi = 68°$.

Номер	1	2	3	4	5	6	7
Усилие	+5,03	−3	+2,68	−3	+3,6	+1 5	−4

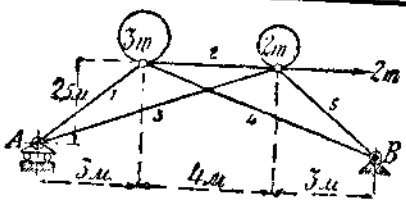


158. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на чертеже.

Как в этой, так и в двух следующих задачах, ось OX направлена по горизонтальной прямой AB, а ось OY по вертикали вверх.

Ответ. $X_a = -2$ *т*; $Y_a = 1{,}4$ *т*; $X_b = 0$; $Y_b = 2{,}6$ *т*.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие	+4,5	−4,5	+2,0	−2,44	+2,44	+2,0	0	−2,6	−1,4



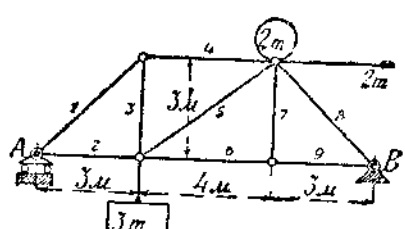
159. Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с приложенными к нему силами на чертеже. Стержни 3-й и 4-й не соединены шарниром в точке их пересечения.

Ответ: $X_a = 0$; $Y_a = 2{,}2$ *т*; $X_b = -2$ *т*; $Y_b = 2{,}8$ *т*.

Номер	1	2	3	4	5
Усилие	−6	−7	+4,9	+2,53	−5,7

160. Определить опорные реакции и усилия в стержнях мостовой фермы, которая вместе с приложенными к ней силами изображена на чертеже.

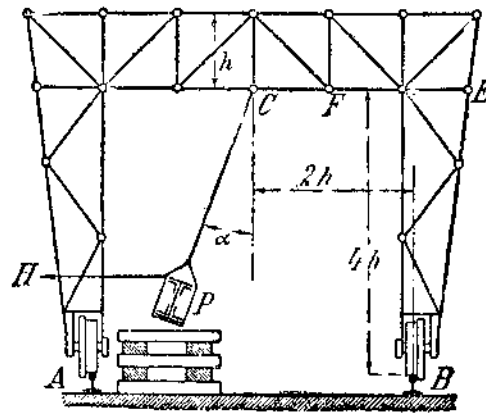
Ответ. $X_a = 0$;
$Y_a = 2{,}1$ *т*;
$X_b = -2$ *т*;
$Y_b = 2{,}9$ *т*.



Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие	−3,0	+2,1	+2,1	−2,1	+1,5	+0,9	0	−4,1	+0,9

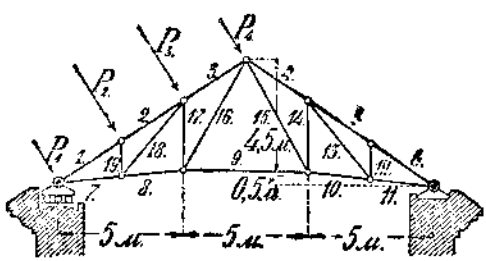
161. Для сборки моста устроен временный деревянный кран, перемещающийся по рельсам A и B на колесах. К среднему узлу C

нижнего пояса DE крана подвешен блок, служащий для поднятия тяжестей с помощью цепи. Вес поднимаемого с подмостей груза $P = 5\ m$, причем в момент отделения его от подмостей направление цепи составляет с вертикалью угол $\alpha = 20° = \operatorname{arc\,tg} 0{,}364$; во избежание колебаний груза он оттягивается горизонтальным канатом PH. Предполагая, что горизонтальная составляющая натяжения цепи воспринимается одним правым рельсом B, определить усилие S_1 в горизонтальном стержне CF в момент отделения груза от подмостей и сравнить его с тем усилием S_2, которое получилось бы при угле $\alpha = 0$. Размеры указаны на чертеже.



Ответ. $S_1 = 10{,}46\ m$; $S_2 = 5\ m$.

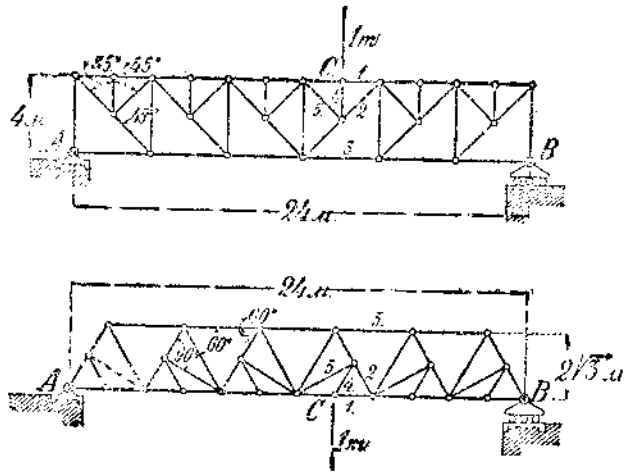
162. Вследствие давления ветра в узлах стропильной фермы с равными панелями приложены силы, перпендикулярные к кровле: $P_1 = P_4 = 312{,}5\ кг$ и $P_2 = P_3 = 625\ кг$. Определить вызываемые ветром усилия в стержнях фермы, размеры которой указаны на чертеже.



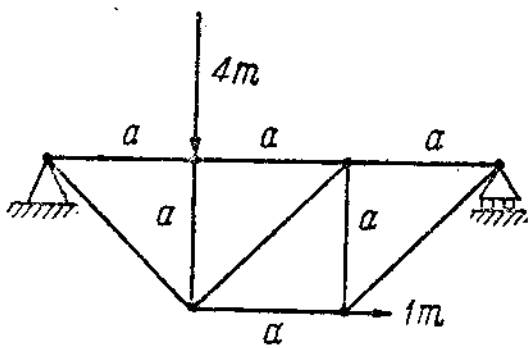
Ответ. $S_1 = -1530\ кг$; $S_2 = -1950\ кг$; $S_3 = -1570\ кг$; $S_4 = S_5 = S_6 = -980\ кг$; $S_7 = +1100\ кг$; $S_8 = +440\ кг$; $S_9 = -210\ кг$; $S_{10} = S_{11} = -230\ кг$; $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$; $S_{15} = -25\ кг$; $S_{16} = +1340\ кг$; $S_{17} = -1130\ кг$; $S_{18} = +1070\ кг$; $S_{19} = -760\ кг$.

163. Две изображенные на чертеже мостовые фермы с равными панелями имеют в точке A неподвижную опору, в точке B — по-

движную. Определить усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4* и *5* этих ферм под действием силы, равной 1 *т* и приложенной в узле *C*. Размеры ферм указаны на чертеже.



Ответ. В первой ферме: $S_1 = -1750$ *кг*; $S_2 = +1420$ *кг*; $S_3 = +1166$ *кг*; $S_4 = -1050$ *кг*; $S_5 = +710$ *кг*.



Во второй ферме: $S_1 = +1687$ *кг*; $S_2 = -675$ *кг*; $S_3 = -1350$ *кг*; $S_4 = +1156$ *кг*; $S_5 = -1000$ *кг*.

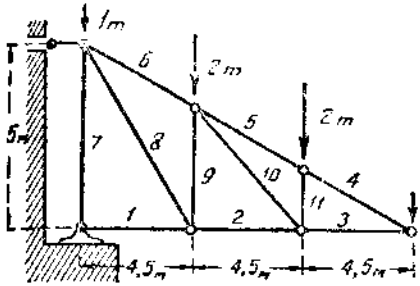
164. Определить опорные реакции и усилия в стержнях раскосной фермы, изображенной на чертеже вместе с нагрузкой.

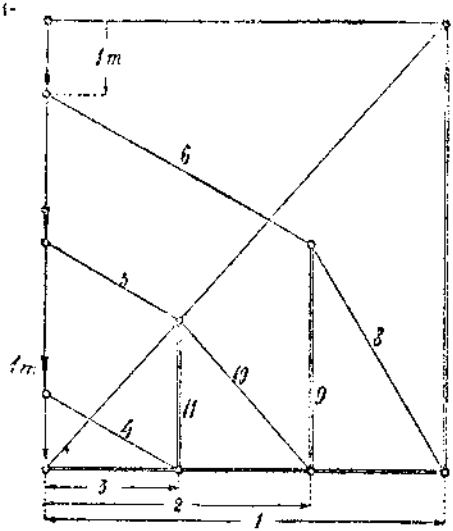
Ответ. $X_a = -1$ *т*; $Y_a = 3$ *т*; $Y_b = 1$ *т*.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие	−2	−2	−1	+1,41	+2	+4,25	−4	+1,41	−1

165. Определить усилия в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на чертеже.

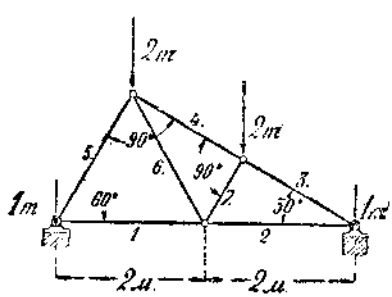
Отв.

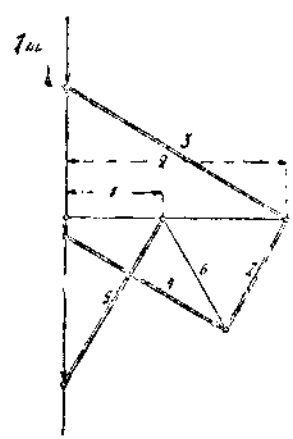




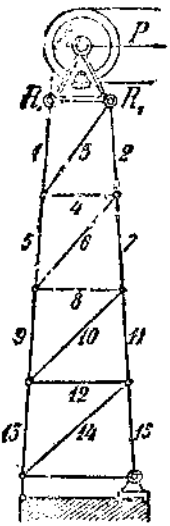
166. Определить усилия в стержнях пильчатой фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на чертеже.

Отв.

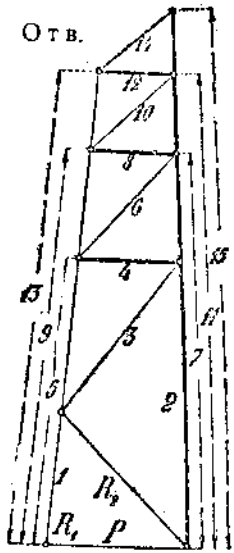




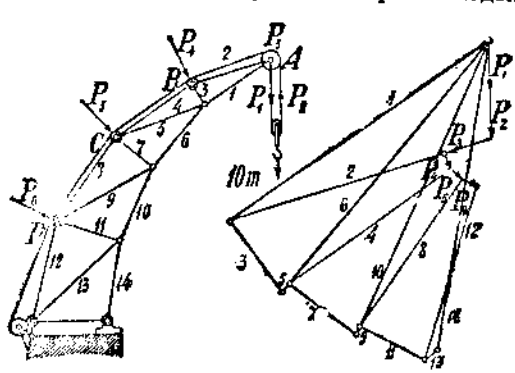
167. Определить графически усилия в стержнях фермы решетчатой башни для шкива канатной передачи, зная, что натяжения канатов вызывают в подшипнике A горизонтальную силу P. Размеры фермы должны быть взяты с чертежа.



Отв.

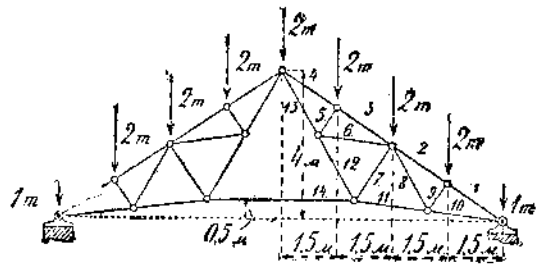


168. Определить графически усилия в стержнях фермы понтонного крана в том случае, когда к подвижному блоку подвешен поднимаемый груз, а цепь переброшена через неподвижные блоки

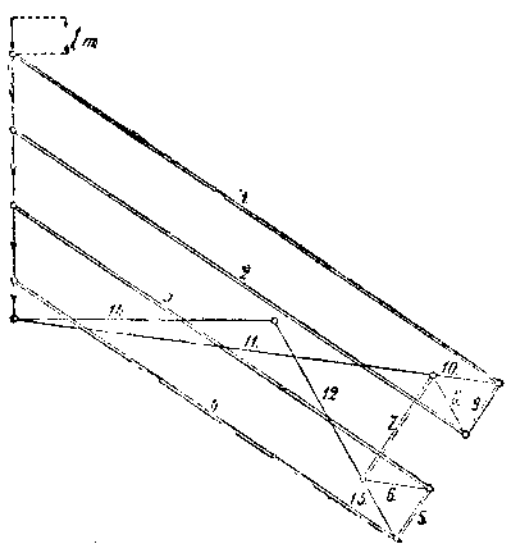


A, B, C и D. К узлу A приложены силы P_1, P_2, P_3, а к узлам B, C, D равные силы P_4, P_5 и P_6. Размеры фермы и направления сил взять с чертежа.

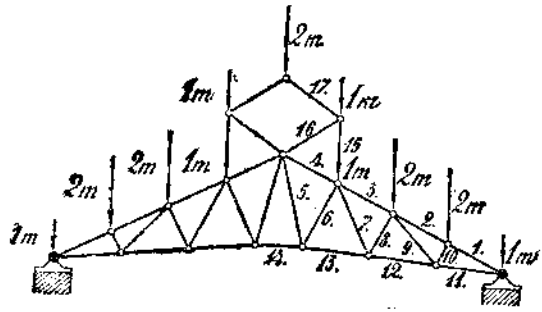
169. Определить графически усилия в стержнях фермы Полонсо, изображенной вместе с действующими на нее силами на чертеже.



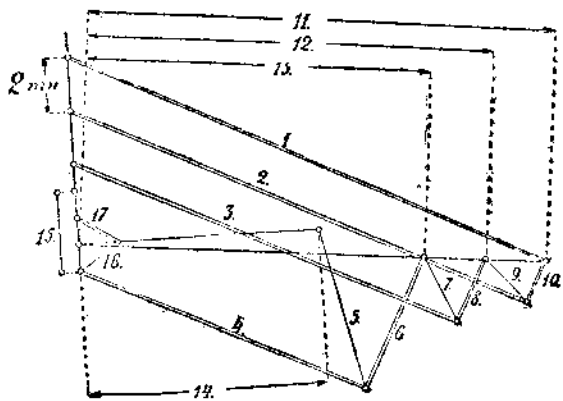
Отв.



170. Определить графически усилия в стержнях фермы Полонсо с фонарем, взяв размеры фермы и направления действующих сил с чертежа.

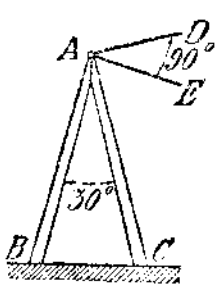


Отв.



II. СТАТИКА В ПРОСТРАНСТВЕ

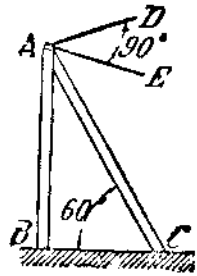
8. Силы, приложенные в одной точке



171. Угловой столб составлен из двух одинаково наклоненных брусьев AB и AC, скрепленных в вершине. Угол $BAC = 30°$. Столб поддерживает два горизонтальных провода AD и AE, составляющих друг с другом прямой угол. Натяжение каждого провода равно 100 *кг*. Определить усилия в брусьях, предполагая, что плоскость BAC делит пополам угол DAE, пренебрегая весами столбов.

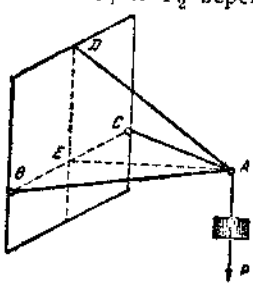
Отв. $S_b = -S_c = 273$ *кг*.

172. Горизонтальные провода телеграфной линии подвешены к вертикальному столбу AB с подкосом AC и составляют угол $DAE = 90°$. Натяжения проводов AD и AE соответственно равны 12 и 16 *кг*. Найти угол α между плоскостями BAC и BAE, при котором столб не испытывает бокового изгиба, и определить усилие S в подкосе, если он поставлен под углом 60° к горизонту.



Отв. $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$; $S = 40$ *кг*.

173. Воздушный шар, удерживаемый двумя веревками, находится под действием ветра. Веревки образуют между собою прямой угол: плоскость, в которой они находятся, составляет с горизонтом угол 60°. Направление ветра перпендикулярно к линии пересечения этих плоскостей и само заключается в горизонтальной плоскости. Вес шара и заключенного в нем газа 250 *кг*; объем шара 215,4 $м^3$, вес куб. метра воздуха 1,3 *кг*. Определить натяжения T_1 и T_2 веревок и давление P ветра на шар.



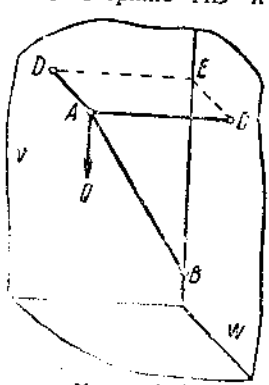
Отв. $T_1 = T_2 = 24{,}5$ *кг*;
$P = 17{,}3$ *кг*

174. Найти усилия S' в стержнях AB и AC и усилие T в тросе AD крана, если дано, что $\angle CBA = \angle BCA = 60°$, $\angle EAD = 30°$. Вес груза P равен 300 *кг*. Плоскость ABC горизонтальна.

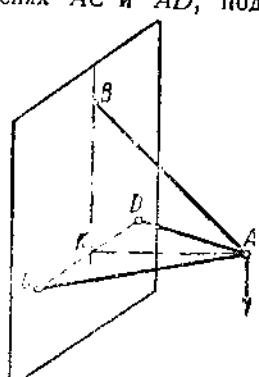
Отв. $T = 600$ *кг*; $S' = 300$ *кг*.

175. Найти усилия в стержне AB и цепях AC и AD, поддерживающих груз $Q = 42$ *кг*, если $AB = 145$ *см*, $AC = 80$ *см*, $AD = 60$ *см*, плоскость прямоугольника $CADE$ горизонтальна, а плоскости V и W вертикальны.

Отв. $T_C = 32$ *кг*;
$T_D = 24$ *кг*;
$S_B = 58$ *кг*.

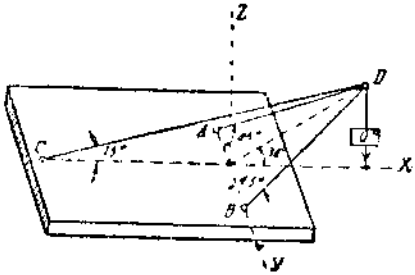


К зад. 175



К зад. 176

176. Определить усилия в тросе AB и стержнях AC и AD, поддерживающих груз $Q = 180$ *кг*, если $AB = 170$ *см*, $AC = AD = 100$ *см*, $CD = 120$; $CK = KD$ и плоскость $\triangle CDA$ горизонтальна.



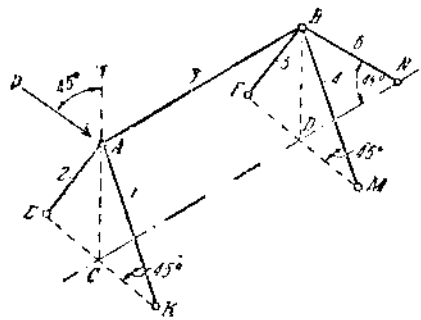
Ответ. 204 *кг*; 60 *кг*.

177. Груз $Q = 1$ *т* подвешен в точке D, как указано на чертеже. Определить реакции опор A, B и C.

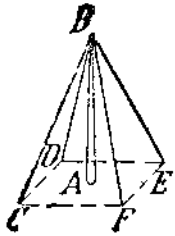
Ответ. $R_A = R_B = 2{,}64$ *т*, $R_C = 3{,}86$ *т*.

178. На чертеже изображена пространственная ферма, составленная из шести стержней *1, 2, 3, 4, 5, 6*. Сила P действует на узел A плоскости прямоугольника $ABCD$; при этом линия ее действия составляет с вертикалью CA угол 45°. $\triangle EAK = \triangle FBM$. Углы равнобедренных $\triangle$-ков: AEK, FBM и MDB при вершинах A, B и D прямые.

Определить усилия в стержнях, если $P = 1$ *т*.



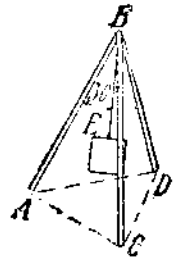
Ответ. $S_1 = -0{,}5$ *т*; $S_2 = -0{,}5$ *т*; $S_3 = -0{,}707$ *т*; $S_4 = +0{,}5$ *т*; $S_5 = +0{,}5$ *т*; $S_6 = -1$ *т*.



179. Мачта AB удерживается в вертикальном положении посредством четырех симметрично расположенных оттяжек. Угол между каждыми двумя смежными оттяжками равен 60°. Определить давление мачты на землю, если натяжение каждой из оттяжек равно 100 *кг*, а вес мачты 200 *кг*.

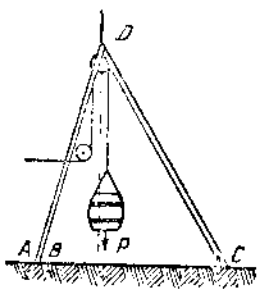
Ответ. 482 *кг*.

180. К вершине B треножника $ABCD$ подвешен груз E, вес которого 10 *кг*. Ножки имеют равную длину, укреплены на горизонтальном полу и образуют между собою равные углы. Определить усилие в каждой из ножек, если известно, что они образуют с веревкой BE углы 30°.

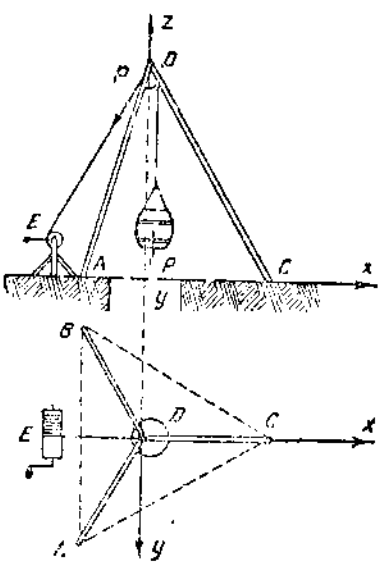


Отв. 3,85 *кг*.

181. Найти усилия S' в ногах AD, BD и CD треноги, образующих 60° с горизонтом, если вес P поднимаемого груза равен 3 *т*. При этом $AB = BC = AC$.



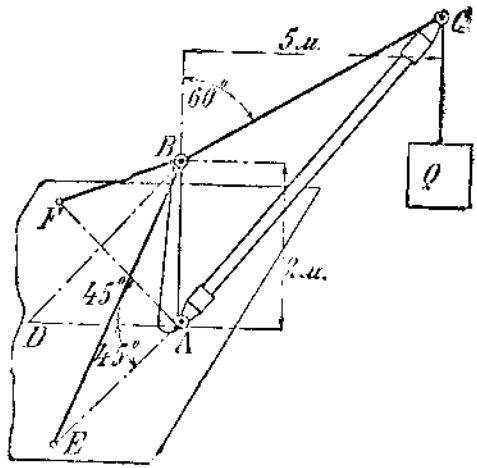
Отв. $S' = 1{,}15$ *т*

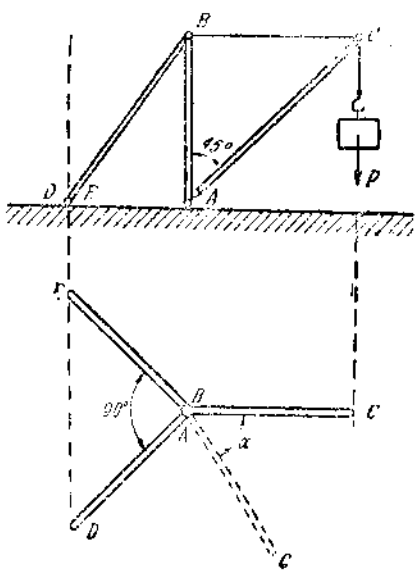


182. Для подъема из шахты груза $P = 3$ *т* установлена тренога $ABCD$ и лебедка E. Определить усилия в ногах треноги, если длины их равны между собой, треугольник ABC равносторонний и углы, образованные ногами и тросом DE с горизонтальной плоскостью, равны 60°. Расположение лебедки по отношению к треноге видно из чертежа.

Отв. $S_A = S_B = 3{,}155$ *т*.
$S_C = 0{,}155$ *т*.

183. Переносный кран, поднимающий груз $Q = 2$ *т*, устроен так, как указано на чертеже; $AB = AE = AF = 2$ *м*; угол $EAF = 90°$; плоскость крана ABC делит прямой двугранный угол $EABF$ пополам. Определить силу P_1, сжимающую вертикальную стойку AB, а также силы P_2, P_3 и P_4, растягивающие струну BC и тросы BE и BF, пренебрегая весами частей крана.





Ответ. $P_1 = 4{,}19\ т$,

$P_2 = 5{,}76\ т$,

$P_3 = P_4 = 5\ т$.

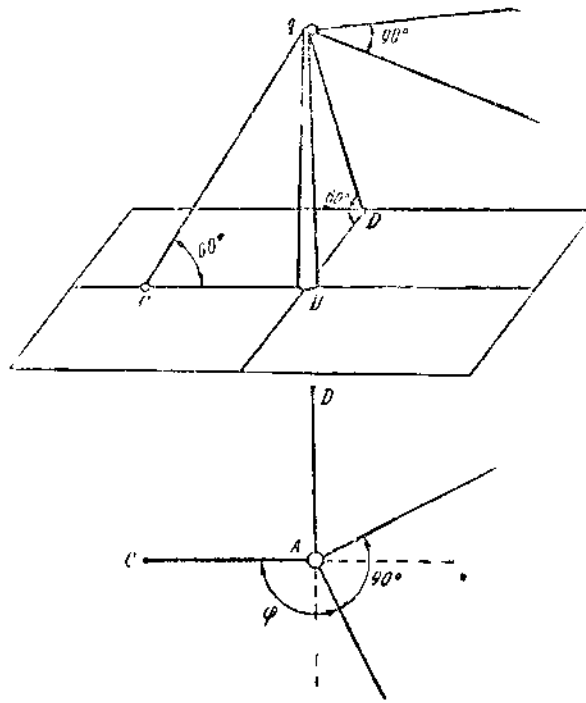
184. Определить усилия в вертикальной стойке и в ногах крана-деррик в зависимости от угла α. Дано: $AB = BC = AD = AE$.

Ответ. $S_{BD} = P(\cos\alpha - \sin\alpha)$;

$S_{BE} = P(\cos\alpha + \sin\alpha)$;

$S_{AB} = -P\sqrt{2}\cos\alpha$.

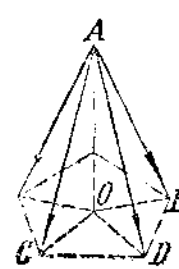
185. Угловой столб AB, поддерживающий воздушный кабель, удерживается двумя оттяжками AC и AD, причем $\angle CBD = 90°$.



Определить усилия в столбе и оттяжках в зависимости от угла φ, образованного одной из ветвей кабеля с плоскостью CBA. Две ветви кабеля горизонтальны и взаимноперпендикулярны, натяжения в них одинаковы и равны T.

Ответ. $S_{AC} = 2T(\sin\varphi - \cos\varphi)$. $S_{AD} = 2T(\sin\varphi + \cos\varphi)$. $S_{AB} = -2\sqrt{3}\cdot T\sin\varphi$.

186. Четыре ребра AB, AC, AD и AE правильной пятиугольной пирамиды изображают по величине и направлению четыре силы в масштабе 1 $м = 1$ $кг$. Зная высоту пирамиды $AO = 10$ $м$ и радиус круга, описанного около основания, $OC = 4{,}5$ $м$, найти равнодействующую R и расстояние x от точки O до точки B пересечения равнодействующей с основанием.



Ответ. $R = 40{,}25$ $кг$; $x = 1{,}125$ $м$.

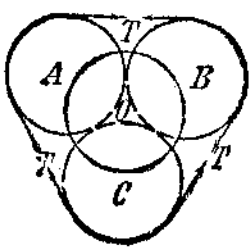
187. На гладком полу стоит трехногий штатив; нижние концы его ножек связаны веревками, так что ножки и веревки штатива образуют правильный тетраэдр. К верхней точке штатива подвешен груз P. Определить реакцию пола R в точках опоры и натяжение веревок T, выразив искомые величины в частях P.

Отв. $R=\frac{1}{3}P$; $T=\frac{P}{3\sqrt{6}}$.

188. Решить предыдущую задачу в том случае, когда ножки штатива связаны веревками не в концах, а в серединах, принимая при этом во внимание, что вес каждой ножки равен p и приложен в ее середине.

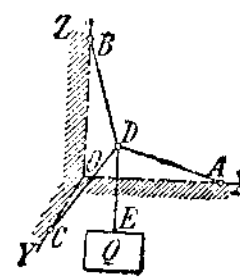
Отв. $R=\frac{1}{3}P+p$; $T=\frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}$.

189. Четыре шара A, B, C и O одинакового веса 10 *кг* и одинакового радиуса образуют пирамиду; три шара A, B и C положены на гладкую горизонтальную плоскость, взаимно прикасаются и обвязаны шнуром, огибающим их в экваториальной плоскости, а четвертый шар O лежит на трех нижних. Определить натяжение шнура T, вызываемое давлением верхнего шара.



Отв. $T=1{,}36$ *кг*.

190. В точках A, B и C, лежащих на прямоугольных координатных осях в одинаковом расстоянии l от начала координат O, закреплены нити: $AD=BD=CD=L$, связанные в точке D, координаты которой суть:



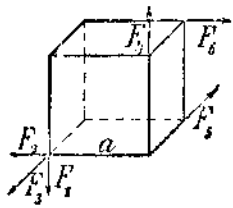
$$x=y=z=\frac{1}{3}\left(l-\sqrt{3L^2-2l^2}\right).$$

В этой точке подвешен груз Q. Определить натяжения нитей T_1, T_2 и T_3, предполагая, что $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l<L<l$.

Отв. $T_1=T_2=\frac{l-\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}\cdot LQ$; $T_3=\frac{l+2\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}\cdot LQ$.

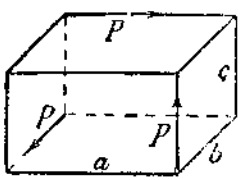
9. Приведение системы сил к простейшему виду

191. К вершинам куба приложены силы так, как это указано на чертеже. Найти, каким условиям должны удовлетворять силы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6 для того, чтобы они находились в равновесии.



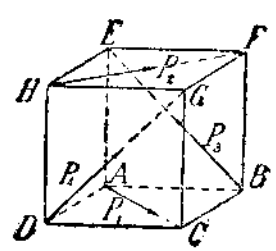
Отв. $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$.

192. По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямого прямоугольного параллелепипеда действуют три равные силы P. Какое соотношение должно существовать между ребрами a, b и c, чтобы эта система приводилась к одной равнодействующей?



Отв. $b = a - c$.

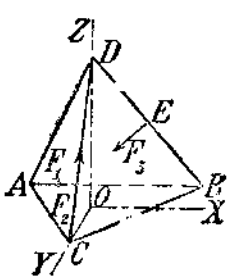
193. К четырем вершинам A, B, D и H куба приложены четыре равные силы: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, причем сила P_1 направлена по AC, P_2 по HF, P_3 по BE и P_4 по DG. Привести эту систему к простейшему виду.



Отв. Равнодействующая равна $2P$ и направлена по диагонали DG.

194. К правильному тетраэдру $ABCD$, ребра которого равны a, приложены силы: F_1 по стороне AB, F_2 по CD и F_3 в точке E, середине стороны BD. Величины сил F_1 и F_2 какие угодно, а проекции силы F_3 на оси OX, OY и OZ суть:

$$-\frac{F_2}{2};\quad +F_2\frac{\sqrt{3}}{6};\quad -F_2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$



Приводится ли эта система сил к одной равнодействующей, и если приводится, то

найти координаты y и z точки пересечения равнодействующей с плоскостью YOZ.

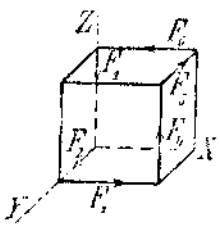
Ответ. Приводится, так как проекции главного вектора и главного момента равны:

$$V_x = F_1 - 0{,}5F_2; \quad V_y = F_2\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad V_z = 0;$$

$$M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = a\frac{\sqrt{3}}{6}(F_1 + F_2);$$

Координаты: $y = -\dfrac{M_z}{V_x} = \dfrac{-a\sqrt{3}(F_1+F_2)}{6F_1 - 3F_2}$; $z = 0$.

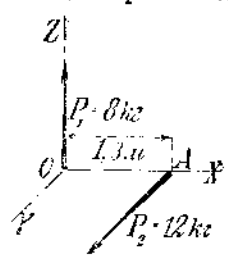
195. К вершинам куба, ребра которого имеют длину 5 *см*, приложены, как указано на чертеже, шесть равных сил, по 2 *кг* каждая. Привести эту систему сил к простейшему виду.



Ответ. Система приводится к паре, главный момент которой $M = 20\sqrt{3}$ *кг·см* и составляет с координатными осями углы:

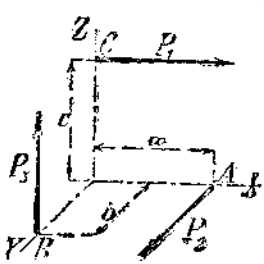
$$\cos\alpha = -\cos\beta = -\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

193. Систему сил: $P_1 = 8$ *кг*, направленную по OZ, и $P_2 = 12$ *кг*, направленную параллельно OY, как указано на чертеже, где $OA = 1{,}3$ *м*, привести к каноническому виду, определив главный вектор этих сил V и главный момент их M относительно центральной винтовой оси. Найти углы α, β и γ, составляемые центральною винтовою осью с координатными осями, а также координаты x и y точки встречи ее с плоскостью XOY.



Ответ. $V = 14{,}42$ *кг*; $M = 8{,}65$ *кг·м*; $\alpha = 90°$; $\beta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{3}$;

$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{2}$; $x = 0{,}9$ *м*; $y = 0$.



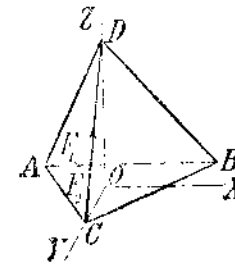
197. Три силы: P_1, P_2 и P_3 лежат в координатных плоскостях и параллельны осям координат, но могут быть направлены как в ту, так и в другую сторону. Точки их приложения A, B и C находятся на заданных расстояниях a, b и c от начала координат. Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы они приводились к одной равнодействующей? Какому условию

должны удовлетворять величины этих сил, чтобы существовала центральная винтовая ось, проходящая через начало координат?

При решении второго вопроса можно обойтись без уравнения центральной оси, исходя только из ее определения.

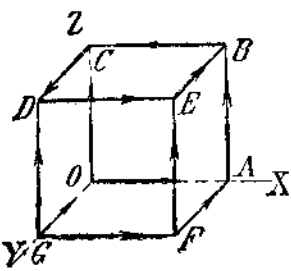
Отв. $\frac{a}{P_1}+\frac{b}{P_2}+\frac{c}{P_3}=0;\quad \frac{P_1}{bP_3}=\frac{P_2}{cP_1}=\frac{P_3}{aP_2}$.

198. К правильному тетраэдру $ABCD$ с ребрами, равными a, приложена сила F_1 по стороне AB и сила F_2 по стороне CD. Найти координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью XOY.



Отв. $x=-\frac{a}{2}\cdot\frac{F_1F_2}{F_1^2+F_2^2}$;

$y=\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2F_2^2-F_1^2}{F_1^2+F_2^2}$.

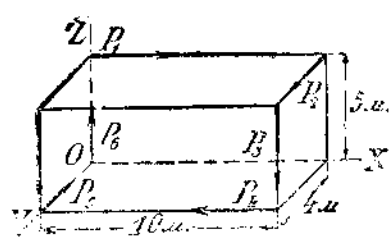


199. По ребрам куба, сторона которого равна a, действуют двенадцать равных сил P, как указано на чертеже. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью XOY.

Отв. $V=2P\sqrt{6};\ M=-\frac{2}{3}Pa\sqrt{6};$

$\cos\alpha=-\cos\beta=\frac{1}{2}\cos\gamma=\frac{1}{6}\sqrt{6};\quad x=y=\frac{2}{3}a.$

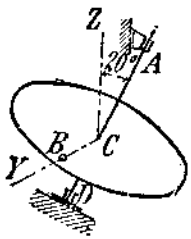
200. По ребрам прямоугольного параллелепипеда, 10 *м*, 4 *м* и 5 *м* длиною, действуют шесть сил, указанных на чертеже: $P_1=4$ *кг*; $P_2=6$ *кг*; $P_3=3$ *кг*; $P_4=2$ *кг*; $P_5=6$ *кг*; $P_6=8$ *кг*. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью XOY.



Отв. $V=5{,}4$ *кг*; $M=47{,}5$ *кг·м*; $\cos\alpha=0{,}371$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=0{,}928$ $x=-10$ *м*; $y=-11{,}9$ *м*.

10. Равновесие сил, приложенных к твердому телу. Определение реакций

201. Круглая наклонная площадка конного топчака, вращающаяся вокруг оси CA, наклоненной к вертикали под углом $\alpha = 20°$, приводится во вращение лошадью веса 400 *кг*, остающеюся в точке B на конце горизонтального радиуса $CB = 3$ *м*. Определить вращающий момент.



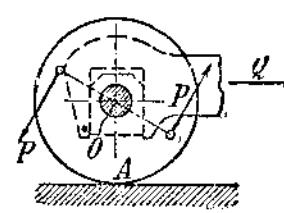
Вращающим моментом называется сумма моментов сил, приложенных к телу, относительно оси вращения: $\sin 20° = 0{,}342$.

Ответ. 410 *кг·м*.

202. Ветряная мельница имеет 4 крыла, наклоненных под углом $\alpha = 15° = \arcsin 0{,}259$ к плоскости, перпендикулярной к оси вращения; давление ветра на каждое крыло равно 100 *кг*, направлено по перпендикуляру к плоскости крыла и приложено в точке, отстоящей на 3 *м* от оси вращения. Найти вращающий момент.

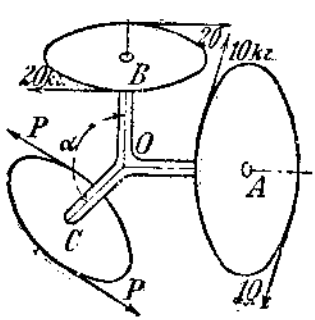
Ответ. 311 *кг·м*.

203. Электродвигатель, помещенный на оси O колесного ската трамвайного вагона, стремится повернуть ось против часовой стрелки, причем величина момента вращающей пары сил $(P — P)$ равна 600 *кг·м*, а радиус колес 60 *см*. Определить силу тяги Q колесного ската, предполагая, что он стоит на горизонтальных рельсах.



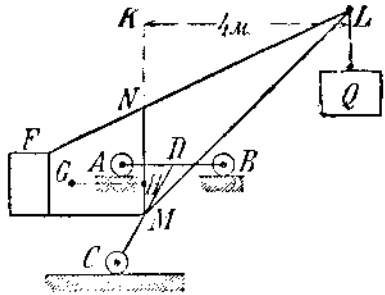
Ответ. $Q = 1$ *т*.

204. К окружностям трех дисков: A радиуса 15 *см*, B радиуса 10 *см* и C радиуса 5 *см* приложены пары сил, величины которых соответственно равны 10 *кг*, 20 *кг* и P. Оси OA, OB и OC лежат в одной плоскости; угол AOB прямой. Определить величину силы P и угол $BOC = \alpha$ так, чтобы система трех дисков, будучи совершенно свободною, оставалась в равновесии.



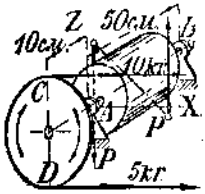
Ответ. $P = 50$ *кг*;
$\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$.

205. Подъемный кран установлен на трехколесной тележке ABC. Размеры $AD = DB = 1$ *м*; $CD = 1{,}5$ *м*; $CM = 1$ *м*; $KL = 4$ *м*. Кран уравновешивается противовесом F. Вес крана с противовесом равен $P = 10$ *т* и приложен в точке G, лежащей в плоскости $LMNF$ на расстоянии $GH = 0{,}5$ *м* от оси крана MN; поднимаемый груз Q весит 3 *т*. Найти давления колес на рельсы, когда плоскость крана LMN параллельна AB.



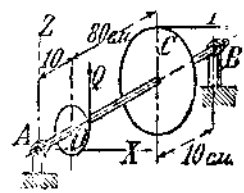
Отв. $N_a = {}^5/_6\ T$; $N_b = 7{}^5/_6\ T$; $N_c = 4{}^1/_3\ T$.

206. Ременный шкив CD динамомашины имеет радиус 10 *см*; размеры вала AB указаны на чертеже. Натяжение верхней ведущей ветви ремня равно 10 *кг*, нижней ведомой 5 *кг*. Определить вращающий момент M и реакции подшипников A и B в случае равномерного вращения, пренебрегая весами частей машины



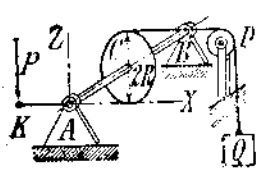
Отв. $M = 50$ *кг·см*; $X_a = -18$ *кг*; $X_b = 3$ *кг*.

207. На горизонтальном валу AB насажено зубчатое колесо C радиуса 1 *м* и шестерня D радиуса 10 *см*. Другие размеры указаны на чертеже. К колесу C по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P = 10$ *кг*, а к шестерне D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Определить силу Q и реакции подшипников A и B в положении равновесия.



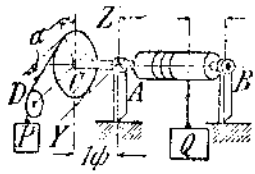
Отв. $Q = 100$ *кг*; $X_a = -1$ *кг*; $Z_a = -90$ *кг*; $X_b = -9$ *кг*; $Z_b = -10$ *кг*.

208. Рабочий поднимает груз $Q = 80$ *кг* с помощью ворота, схематически изображенного на чертеже; радиус барабана $R = 5$ *см*; длина рукоятки $AK = 40$ *см*; $AC = CB = 50$ *см*. Определить давление P на рукоятку и давления оси ворота на опоры A и B при том положении ворота, когда рукоятка AK горизонтальна; сила P вертикальна.



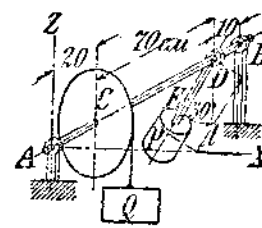
Отв. $P = 10$ *кг*; $X_a = -40$ *кг*; $Z_a = 10$ *кг*; $X_b = -40$ *кг*.

209. На вал AB ворота навита веревка, поддерживающая груз Q. Радиус колеса C, насаженного на вал, в 6 раз больше радиуса вала; другие размеры указаны на чертеже. Веревка, навитая на окружность колеса и натягиваемая грузом $P = 6$ *кг*, сходит с колеса по касательной, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Определить величину груза Q, при которой ворот остается в равновесии, а также реакции подшипников A и B, пренебрегая весом вала.



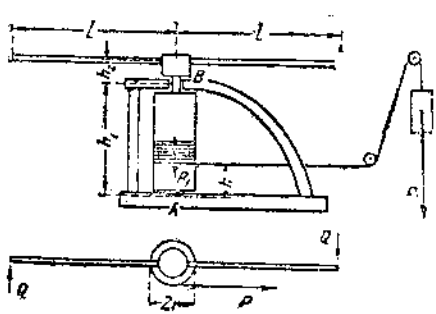
Ответ. $Q = 36$ *кг*; $Y_a = -6{,}93$ *кг*; $Z_a = 16$ *кг*; $Y_b = 1{,}732$ *кг*; $Z_b = 23$ *кг*.

210. На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B, действуют: с одной стороны вес гири $Q = 25$ *кг*, привязанной к шкиву C радиуса 20 *см* посредством нити, а с другой стороны вес гири P в 100 *кг*, надетой на стержень DE, неизменно скрепленный с валом AB. Расстояния: $AC = 20$ *см*; $CD = 70$ *см*; $BD = 10$ *см*. В положении равновесия стержень DE отклонен от вертикали на 30°. Определить расстояние l центра тяжести гири P от оси вала AB и реакции подшипников A и B.



Ответ. $l = 10$ *см*; $Z_a = 30$ *кг*; $Z_b = 95$ *кг*.

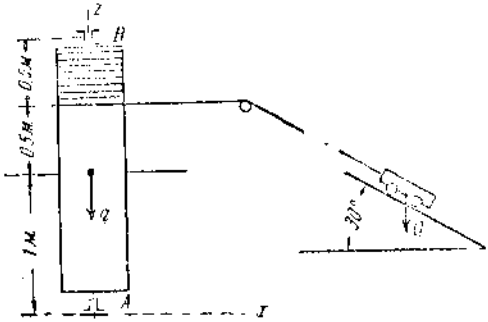
211. Для подъема копровой бабы весом $P = 300$ *кг* служит вертикальный ворот, вал которого радиуса $r = 20$ *см* опирается нижним концом на подпятник A, а верхним концом удерживается в подшипнике B. Вал приводится во вращение двумя людьми, вращающими рычаги длиною $l = 1{,}5$ *м*. Найти необходимое для подъема бабы усилие Q каждого из людей и реакции в подпятнике A и подшипнике B при указанном на чертеже положении рычагов. При этом дано: $h_1 =$



$= 1$ *м*, $h = 30$ *см*, $h_2 = 20$ *см* и вес вращающихся частей ворота $P_1 = 100$ *кг*.

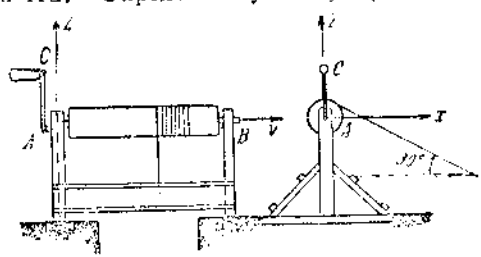
Отв. $Q = 20$ *кг*; $X_B = -90$ *кг*; $X_A = -210$ *кг*; $Z_A = P_1 = 100$ *кг*; $Y_B = 0$; $Y_A = 0$.

212. При помощи приспособления, изображенного на чертеже, поднимается груженая вагонетка веса Q. Определить усилия P, прикладываемые к 4 рычагам, перпендикулярным оси барабана, а также реакции опор A и B, если вес барабана $q = 0{,}1$ *т*; его диаметр $d = 24$ *см*; $Q = 1$ *т*, длина рычагов $l = 1$ *м*. Ось барабана укреплена вертикально при помощи подпятника A и подшипника B.



Отв. $X_a = -125$ *кг*, $Z_a = 100$ *кг*, $X_b = -375$ *кг*, $P = 15$ *кг*.

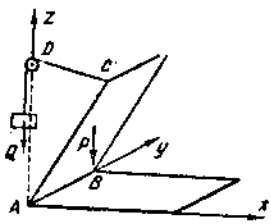
213. Ручной ворот, служащий для подъема породы из наклонного шурфа, состоит из деревянного вала 0,25 *м* в диаметре, 1,5 *м* длины, приводимого во вращение в подшипниках A и B при помощи рукоятки AC. Определить усилие, приложенное в точке C



перпендикулярно к рукоятке и реакции подшипников при вертикальном положении рукоятки, указанном на чертеже, если вес вала равен 30 *кг*, вес санок с грузом равен 100 *кг*, коэффициент трения санок по деревянному настилу равен 0,5, угол, составленный шурфом с горизонтом, равен 30°, длина рукоятки равна 0,5 *м*, и место схода веревки с вала находится в расстоянии 50 *см* от подшипника B. Расстоянием точки C от вертикали подшипника A пренебречь.

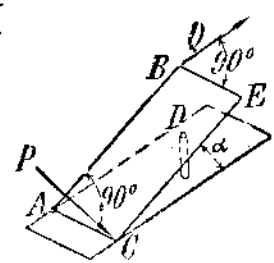
Отв. $X_A = -3{,}61$ *кг*; $Y_A = 0$; $Z_A = 30{,}55$ *кг*; $X_B = -53{,}9$ *кг*, $Y_B = 0$; $Z_B = 46{,}1$ *кг*; $Q = 23{,}3$ *кг*.

214. Квадратная крышка веса $P = 40$ *кг* удерживается приоткрытой на 60° над горизонтом противовесом Q. Определить вес Q и реакции подшипников A и B, если блок D укреплен на одной вертикали с A и $AD = AC$.

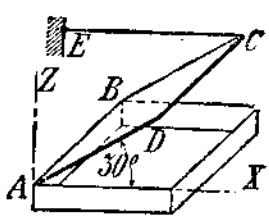


Отв. $Q = 10{,}35$ *кг*; $X_A = 10$ *кг*; $Y_A = 0$; $Z_A = 17{,}32$ *кг*; $X_B = 0$; $Y_B = 0$; $Z_B = 20$ *кг*.

215. Прямоугольная пластинка со сторонами $AB = 4$ *м* и $AC = 2$ *м* наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30°$. В точке D она опирается на гвоздь; точка A закреплена неподвижно. В точке B приложена горизонтальная сила $Q = 5$ *кг*, составляющая со стороной BE прямой угол; в точке C действует давление $P = 4$ *кг*, перпендикулярное к пластинке. Зная, что $AD = 3$ *м*, и пренебрегая весом пластинки, найти расстояние h точки D от стороны AC и реакции в точках A и D.



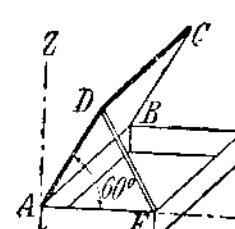
Отв. $h = 2{,}34$ *м*; $R_a = 4{,}87$ *кг*; $R_d = 4{,}27$ *кг*.



216. Квадратная крышка $ABCD$ ящика может вращаться вокруг горизонтальной оси AB на петлях в точках A и B. Горизонтальная веревка CE, параллельная AX, удерживает крышку под углом $DAX = 30°$. Определить реакции в петлях, если вес крышки 2 *кг*.

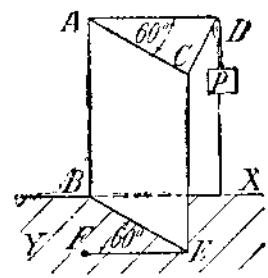
Отв. $Z_a = 1$ *кг*; $X_b = 1{,}732$ *кг*; $Z_b = 1$ *кг*.

217. Крышка прямоугольного ящика $ABCD$ подперта с одной стороны палочкой DE. Вес крышки 12 *кг*; длина ее $AB = 90$ *см*; ширина $AE = AD = 60$ *см*; угол $DAE = 60°$. Определить реакции шарниров A и B, а также усилие S в палочке, пренебрегая ее весом.



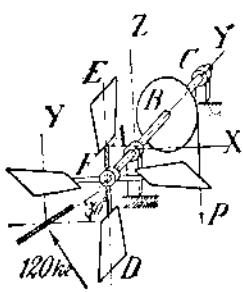
Отв. $X_a = 1{,}732$ *кг*; $Z_a = 3$ *кг*; $X_b = 0$; $Z_b = 6$ *кг*; $S = 3{,}464$ *кг*.

218. Прямоугольная дверь, вращающаяся около вертикальной оси AB, открыта на угол $CAD = 60°$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна CD перекинута через блок и натягивается грузом $P = 32$ *кг*, другая EF привязана к точке F пола. Вес двери 64 *кг*; ее ширина $AD = AC = 18$ *дм*; высота $AB = 24$ *дм*. Определить натяжение T веревки FE, а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B.



Отв. $T = 32$ *кг*; $X_a = -28$ *кг*;
$Y_a = 6{,}93$ *кг*; $X_b = 44$ *кг*;
$Y_b = 20{,}8$ *кг*; $Z_b = 64$ *кг*.

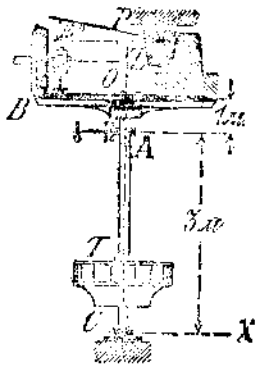
219. Ветряная мельница с горизонтальной осью AC имеет 4 симметрично расположенные крыла, плоскости которых составляют с вертикальною плоскостью, перпендикулярною к оси AC, равные углы 30°. На расстоянии 2 *м* от оси к каждому крылу приложена нормально к его плоскости равнодействующая сил давления ветра, равная 120 *кг*. Ось мельницы опирается в точке A на подшипник, в точке C на подпятник и удерживается в покое вертикальным давлением P на зубец колеса B, производимым непоказанною на чертеже шестернею. Радиус колеса $B = 1{,}2$ *м*; расстояния: $BC = 0{,}5$ *м*; $AB = 1$ *м*; $AF = 0{,}5$ *м*. Определить давление P и реакции опор в двух случаях: 1) когда ветер давит на все 4 крыла, и 2) когда крыло D снято, а линия DE вертикальна.



Отв. 1) $P = 400$ *кг*; $Z_a = 133\frac{1}{3}$ *кг*; $Y_c = -416$ *кг*; $Z_c = 266\frac{2}{3}$ *кг*.

2) $P = 300$ *кг*; $X_a = 80$ *кг*; $Z_a = -38{,}57$ *кг*;
$X_c = -20$ *кг*; $Y_c = -312$ *кг*; $Z_c = 338{,}6$ *кг*.

220. Пара, вращающая водяную турбину T и имеющая момент 120 *кг. м*, уравновешивается давлением на зубец B кониче-



ского зубчатого колеса OB и реакциями опор. Давление на зубец перпендикулярно к радиусу $OB = 0{,}6$ *м* и составляет с горизонтом угол $\alpha = 15° = \operatorname{arctg} 0{,}268$. Определить реакции подпятника C и подшипника A, если вес турбины с валом и колесом равен 1,2 *т* и направлен вдоль оси OC, а расстояния: $AC = 3$ *м*, $AO = 1$ *м*.

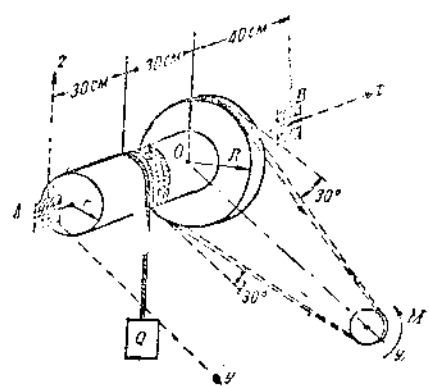
Отв. $X_a = -X_c = 10{,}72$ *кг*;

$Y_a = 266^2/_3$ *кг*;

$Y_c = -66^2/_3$ *кг*;

$Z_c = 1253{,}6$ *кг*.

221. При помощи бесконечной цепи и мотора M груз Q равномерно поднимается вверх. Определить реакции опор A и B и натяжение в цепи, если цепи составляют с горизонтом углы 30° (O_1Y_1 параллельна AY). Известно, что $r = 10$ *см*, $R = 20$ *см*, $Q = 1$ *т*; натяжение ведущей части цепи вдвое больше натяжения ведомой части, т. е. $T_1 = 2T_2$.



Отв. $T_1 = 1$ *т*;

$T_2 = 0{,}5$ *т*;

$Y_a = -0{,}52$ *т*;

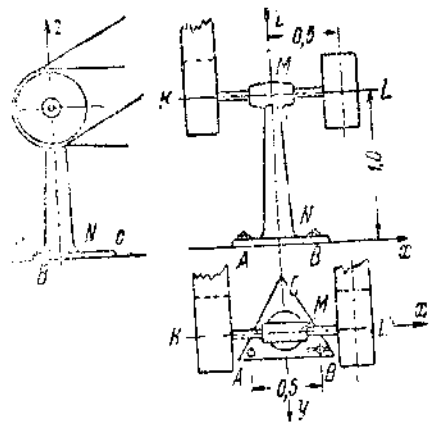
$Y_b = -0{,}779$ *т*;

$Z_a = 0{,}6$ *т*;

$Z_b = 0{,}15$ *т*.

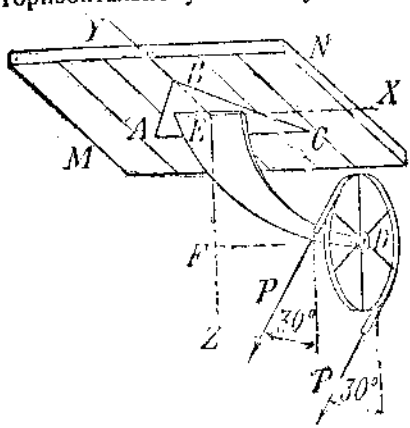
222. Для передачи вращения с одного вала на другой, ему параллельный, установлены два одинаковые вспомогательные шкива, заклиненные на горизонтальной оси KL, вращающейся в подшипнике M, укрепленном на колонке MN. Треугольное основание этой колонки притянуто к полу двумя болтами A и B и свободно опирается точкой C. Болт A проходит через круглое отверстие в основании, болт же B — через продолговатое отверстие, имеющее направление линии AB. **Ось колонки проходит через центр** $\triangle ABC$.

Определить проекции реакций R_A, R_B и R_C, если расстояние оси KL от пола равно 1 $м$, расстояние середин шкивов от оси колонки равны 0,5 $м$ и натяжения всех четырех ветвей ремней принимаются одинаковыми и равными 60 $кг$. Ветви правого ремня горизонтальны, а левого — образуют угол в 30° с горизонтом. Вес всей установки равен 300 $кг$; $AB = BC = CA = 50$ $см$.



Ответ. $X_A = 0$; $Y_A = 147{,}8$ $кг$;
$Z_A = -238{,}6$ $кг$;
$Y_B = 180$ $кг$;
$Z_B = -118{,}6$ $кг$;
$Z_C = 597$ $кг$.

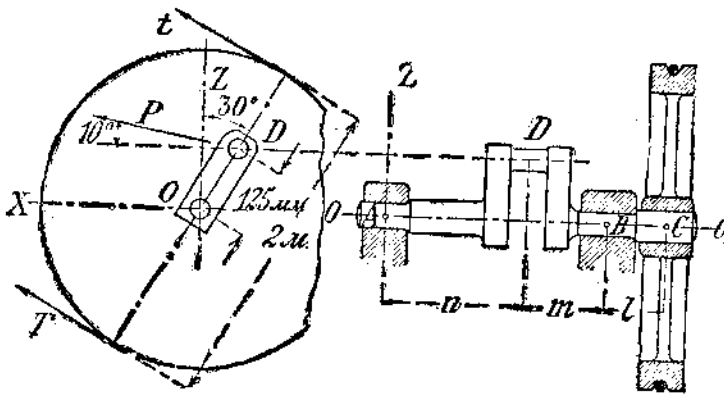
223. Подвеска ременного шкива D прикреплена к гладкому горизонтальному потолку MN подшипниками в точках A и C и упирается в него точкой B. Эти точки лежат в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 30 $см$. Положение центра ременного шкива D определяется вертикалью $EF = 40$ $см$, опущенной из центра E треугольника ABC, и горизонталью $FD = 50$ $см$, параллельною стороне AC. Плоскость шкива перпендикулярна к прямой FD. Натяжение P каждой ветви ремня равно 120 $кг$ и наклонено к вертикали под углом 30°. Определить реакции в опорах A, B и C, пренебрегая весом частей.



Ответ. $Y_a = 140$ $кг$ $Z_a = 184{,}7$ $кг$; $Z_b = 115{,}5$ $кг$;
$Y_c = -260$ $кг$; $Z_c = -508$ $кг$.

224. Давление шатуна паровой машины, сосредоточенное в середине D шейки коленчатого вала, равно $P = 2000$ $кг$ и напра-

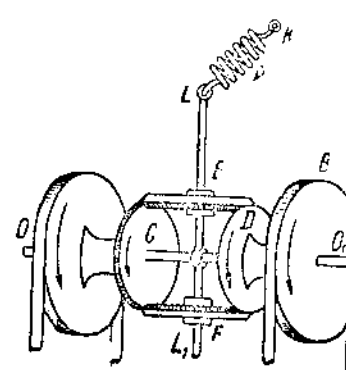
влено под углом 10° к горизонту, причем плоскость ODO_1, проходящая через оси вала OO_1 и шейки D, образует с вертикалью угол 30°. От маховика M усилие передается на завод с помощью каната, ветви которого параллельны и составляют с горизонтом угол 30°. Действие силы P уравновешивается натяжениями T и t ветвей каната и реакциями подшипников A и B. Вес маховика



1300 *кг*, а диаметр его $d = 2$ *м*, сумма натяжений ветвей каната $T + t = 750$ *кг*, а указанные на чертеже расстояния: точки D от оси OC_1 равно $r = 125$ *мм*, $l = 250$ *мм*, $m = 300$ *мм*, $n = 450$ *мм*. Определить реакции подшипников A и B и натяжения t и T.

Ответ. $X_a = -571$ *кг*; $Z_a = -447{,}5$ *кг*; $X_b = -2048$ *кг*; $Z_b = 1024$ *кг*; $T = 417{,}7$ *кг*, $t = 332{,}7$ *кг*.

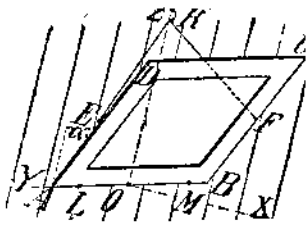
225. Для измерения силы, передаваемой ременным шкивом A шкиву B, служит динамометр Уайта, схематически изображенный на чертеже. Шкивы A и B свободно вращаются на неподвижной оси OO_1; шкив A составляет одно целое с зубчаткой C, а шкив B с зубчаткой D. Эти две зубчатки сцепляются с зубчатками E и F, свободно вращающимися вокруг вертикальной оси LL_1. Диаметры зубчаток C, D, E и F одинаковы, каждый по 20 *см*. Момент



силы, вращающей шкив A, 1200 *кг·см*, равен моменту силы, тормозящей шкив B. Ось LL_1 удерживается от вращения вокруг оси OO_1 пружинными весами P, прикрепленными к неподвижной точке K. Найти давления N, оказываемые зубчатками E и F на ось LL_1, и предсказать показание весов P, если $LE = 50$ *см*; направление LK перпендикулярно к плоскости OLO_1.

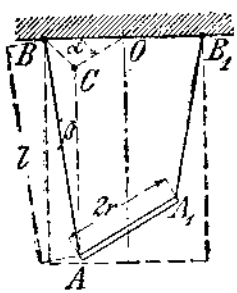
Отв. $N_e = N_f = 120$ *кг*; $P = 40$ *кг*.

226. Картина в раме, имеющей форму прямоугольника $ABCD$, повешена на вертикальной стене при помощи шнура EKF, надетого на крюк K так, что край AB горизонтален; точки E и F — середины сторон AD и BC. Картина наклонена к стене под углом $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$ и опирается на два гвоздя L и M, вбитые в стену; причем $AL = MB$. Размеры картины: $AB = 60$ *см*; $AD = 75$ *см*; вес картины 20 *кг* и приложен в центре прямоугольника $ABCD$; длина шнура 85 *см*. Определить натяжение T шнура и давления на гвозди L и M.



Отв. $T = 8{,}5$ *кг*; $X_l = X_m = -4{,}5$ *кг*; $Z_l = Z_m = -6$ *кг*.

227. Бифиляр состоит из стержня AA_1, подвешенного на двух нерастяжимых нитях длины l, которые укреплены в точках B и B_1. Длина стержня $AA_1 = BB_1 = 2r$, а вес P. Стержень повернут вокруг вертикальной оси на угол α. Определить момент M пары, которую нужно приложить к стержню, чтобы удержать его в равновесии, а также натяжение T нитей.



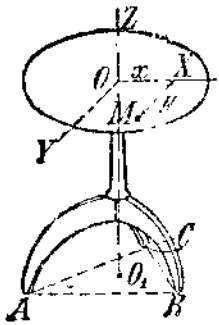
Отв. $M = \dfrac{Pr^2 \sin\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$;

$$T = \frac{lP}{2\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

228. Круглый стол $A_1A_2A_3$ стоит на трех ножках A_1, A_2 и A_3; в центре O помещен груз. Какому условию должны удовлетворять центральные углы φ_1, φ_2 и φ_3 для того, чтобы давления на ножки A_1, A_2 и A_3 относились как $1 : 2 : \sqrt{3}$?

Отв. $\varphi_1 = 150°$; $\varphi_2 = 90°$; $\varphi_3 = 120°$.

229. Стол стоит на трех ножках, концы которых A, B и C образуют равносторонний треугольник со стороной a. Вес стола P направлен по вертикали ZO_1, проходящей через центр O_1 треугольника ABC. На столе помещен груз p в точке M, координаты которой суть x и y, если ось OX параллельна AB. Определить давление каждой ножки на пол.



Ответ. $N_a = \frac{P+p}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}y + x\right)\frac{p}{a}$;

$N_b = \frac{P+p}{3} + \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}y\right)\frac{p}{a}$;

$N_c = \frac{P+p}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{y}{a}p$.

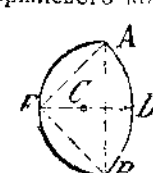
230. Глубина заложения опор железнодорожного моста, перекинутого через реку, рассчитана в том предположении, что вес опоры с приходящимся на нее грузом уравновешивается давлением грунта на дно опоры и боковым трением, причем грунт — мелкозернистый песок, насыщенный водою, — принимается за жидкое тело. Вычислить глубину h заложения этих опор, если нагрузка на опору 150 m, вес опоры на 1 метр ее высоты 8 m, высота опоры над дном реки 9 $м$, высота воды над дном 6 $м$, площадь основания опоры 3,5 $м^2$, боковая поверхность опоры на 1 метр высоты 7 $м^2$, вес 1 куб. метра песку, насыщенного водою, 1,8 m, вес 1 куб. метра воды 1 m и коэффициент трения о песок железного футляра, в котором заключена каменная опора, 0,18.

При расчете трения принимаем во внимание, что среднее боковое давление на 1 $м^2$ равно в тоннах: $6 + 0{,}9\,h$.

Ответ. $h = 11$ $м$.

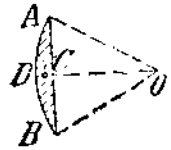
11. Центр тяжести

231. Определить положение центра тяжести C стержневого контура $AFBD$, состоящего из дуги ADB четверти окружности радиуса $FD = R$ и из дуги полуокружности AFB, построенной на хорде AB как на диаметре. Линейные плотности стержней одинаковы.



Ответ. $CF = R\,(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2})$.

232. Найти центр тяжести C площади кругового сегмента ADB радиуса $AO = 30$ *см*, если угол $AOB = 60°$.



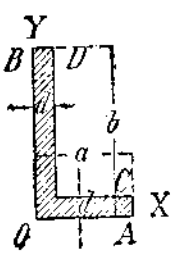
Отв. $OC = 27{,}7$ *см*.

233. Определить положение C центра тяжести площади, ограниченной полукругом AOB радиуса R и двумя прямыми равной длины AD и DB, причем $OD = 3R$.

Отв. $OC = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R = 1{,}19\,R$.

234. Провести через вершину D однородного прямоугольника $ABCD$ прямую DE так, чтобы при подвешивании отрезанной по этой прямой трапеции $ABED$ за вершину E сторона $AD = a$ была горизонтальна.

Отв. $BE = 0{,}366a$.

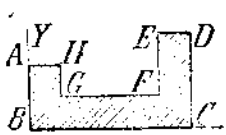


235. Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину: $OA = a$, $OB = b$ и толщину $AC = BD = d$.

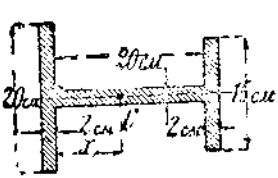
Отв. $x = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}$;

$y = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(b + a - d)}$.

236. Найти центр тяжести однородной пластинки, изображенной на чертеже, зная, что $AH = 2$ *см*; $HG = 1{,}5$ *см*; $AB = 3$ *см*; $BC = 10$ *см*; $EF = 4$ *см*; $ED = 2$ *см*.



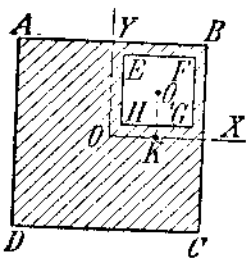
Отв. $x = 5\frac{10}{13}$ *см*; $y = 1\frac{10}{13}$ *см*.



237. Найти центр тяжести двутаврового профиля, размеры которого указаны на чертеже.

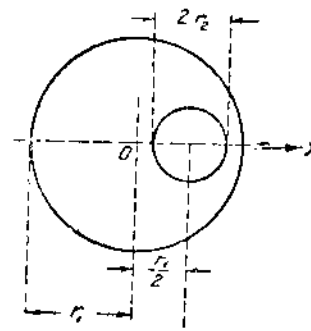
Отв. $x_c = 9$ *см*.

238. В однородной квадратной доске $ABCD$ со стороной $AB = 2$ *м* вырезано квадратное отверстие $EFGH$, стороны которого соответственно параллельны сторонам $ABCD$ и равны 0,7 *м* каждая. Определить координаты x и y центра тяжести оставшейся части доски, зная, что $OK = O_1K = 0{,}5$ *м*, где O и O_1 центры квадратов, OK и O_1K соответственно параллельны сторонам квадратов.

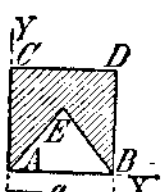


Ответ. $x = y = -0{,}0670$ *м*.

239. Определить положение центра тяжести диска эксцентрика, предполагая радиус диска r_1, радиус круглого отверстия r_2 и центр этого отверстия находящимся на расстоянии $\frac{r_1}{2}$ от центра диска.



Ответ. $x_c = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.



240. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна a; найти внутри него такую точку E, чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник AEB.

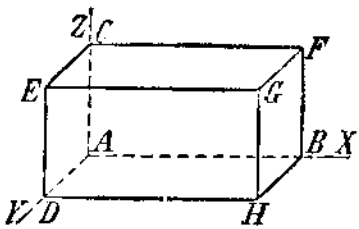
Ответ. $x = \frac{a}{2}$; $y = 0{,}634a$.

241. Четыре человека несут однородную треугольную пластину. Двое взялись за две вершины, остальные за стороны, примыкающие к третьей вершине. На каком расстоянии от третьей вершины они должны поместиться для того, чтобы каждый из четырех поддерживал четверть полного веса пластины?

Ответ. На расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ длины соответствующей стороны от вершины.

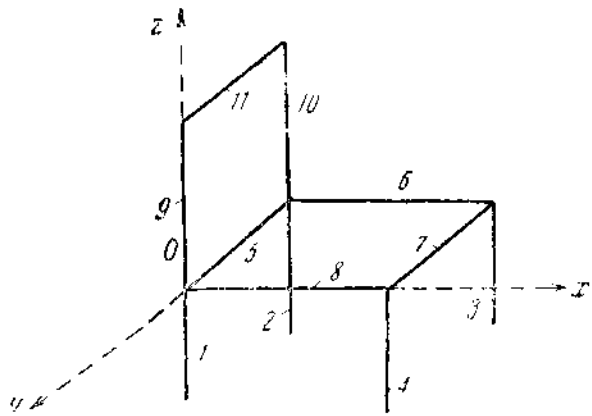
242. Определить центр тяжести системы грузов, расположенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, стороны которого:

$AB = 20$ *см*; $AC = 10$ *см*; $AD = 5$ *см*. Веса грузов в вершинах: A, B, C, D, E, F, G, H соответственно равны 1 *кг*, 2 *кг*, 3 *кг*, 4 *кг*, 5 *кг*, 3 *кг*, 4 *кг*, 3 *кг*.



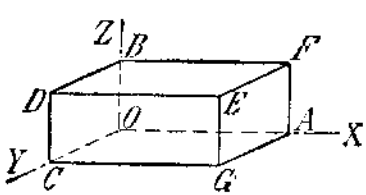
Отв. $x = 9{,}6$ *см*; $y = 3{,}2$ *см*; $z = 6$ *см*.

243. Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинаковой длины и веса. Длина стержня $= 44$ *см*.



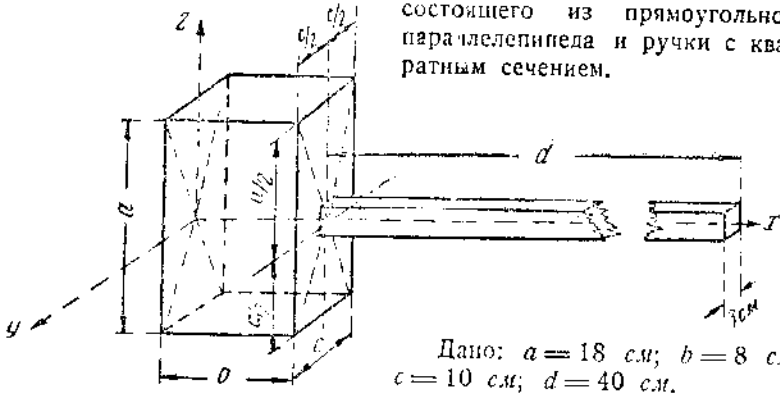
Отв. $x_c = 16$ *см*; $y_c = -22$ *см*; $z_c = 0$.

244. Определить координаты центра тяжести контура прямоугольного параллелепипеда, ребра которого суть однородные бруски длиною: $OA = 8$ *дм*; $OB = 4$ *дм*; $OC = 6$ *дм*. Веса брусков: OA — 250 *г*; OB, OC и CD по 75 *г*; CG — 200 *г*; AF — 125 *г*; AG и GE по 50 *г*; BD, BF, DE и EF по 25 *г*.



Отв. $x = 4$ *дм*; $y = 2{,}625$ *дм*; $z = 1{,}05$ *дм*.

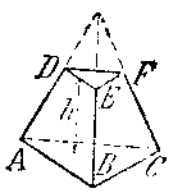
245. Найти координаты центра тяжести деревянного молотка, состоящего из прямоугольного параллелепипеда и ручки с квадратным сечением.



Дано: $a = 18$ *см*; $b = 8$ *см*; $c = 10$ *см*; $d = 40$ *см*.

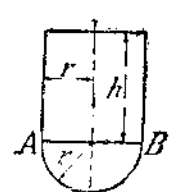
Отв. $x_c = 8{,}8$ *см*.

246. Дан однородный тетраэдр $ABCDEF$, усеченный параллельно основанию; площадь $ABC = a$, площадь $DEF = b$, расстояние между ними h. Найти расстояние z центра тяжести данного тетраэдра от основания ABC.

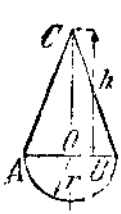


Отв. $z = \frac{h}{4} \cdot \frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}$.

247. Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, состоящее из цилиндра и полушара одинаковой плотности и одинакового радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия, когда оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость.



Центр тяжести всего тела должен совпадать с центром полушара. Расстояние центра тяжести однородного полушара от его основания равно $\frac{3}{8} r$.



Отв. $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

248. Найти предельную высоту h конуса, при которой тело, состоящее из конуса и полушара одинаковой плотности и радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия при условии предыдущей задачи.

Отв. $h = r\sqrt{3}$.

I. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

1. Траектория и уравнения движения точки

249. Сколько времени потребуется для прострожки на станке проверочной плиты шириной $b = 500$ *мм*, длиною $l = 750$ *мм*, если скорость рабочего хода стола станка $v = 150$ *мм/сек*; толщина снимаемого слоя $h = 9$ *мм*, глубина строгания 3 *мм*, подача резца $s = 1{,}2$ *мм*; скорость холостого хода в два раза больше скорости рабочего хода.

Ответ. 156 мин. 20 сек.

250. Два паровоза идут по параллельным колеям. Уравнения их движения: для 1-го паровоза: $s = 3600 - 200\,t^2$; для 2-го паровоза: $s = 600\,t$ (t — в минутах; s — в метрах; начало отсчета расстояний взято в одном и том же пункте). Определить аналитическим и графическим способом время и место их встречи, а также пути, пройденные 1-м паровозом за 1-ю, 2-ю и 3-ю минуты.

Ответ. $t = 3$ мин; $s = 1{,}8$ *км*. 1-й паровоз прошел в 1-ю минуту — 200 *м*; во 2-ю — 600 *м*; в 3-ю — 1000 *м*.

251. Составить уравнение движения по траектории точки M обхода маховика в период пуска машины, если диаметр маховика $D = 1{,}5$ *м*, а угол, составленный радиусом-вектором точки M с горизонтальным диаметром, изменяется по уравнению: $\varphi = 2\,t^2$ (где φ — в радианах; t — в секундах). Определить, кроме того, путь точки обода за весь период пуска, если он длился 12 сек., и построить кривую расстояний этой точки.

Ответ. $s = 1{,}5\,t^2$ *м*; $s_{t=12} = 216$ *м*.

252. Груз, поднятый на упругом канате, колеблется по уравнению: $x = a \sin\left(kt + \frac{3}{2}\pi\right)$ · (a — b *см*, k — в 1/сек). Определить

амплитуду колебаний груза и коэфициент частоты, если период колебаний равен 0,4 сек. и в начальный момент $x_0 = -4$ *см*. Построить также кривую расстояний.

Отв. $a = 4$ *см*; $k = 5\pi \frac{1}{\text{сек}}$.

253. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории:

1) $x = 20t^2 + 5$;
$y = 15t^2 + 3$.

Отв. Прямая линия:
$3x - 4y - 3 = 0$.

2) $x = 4t - 2t^2$;
$y = 3t - 1{,}5t^2$.

Отв. Прямая линия:
$3x - 4y = 0$.

3) $x = 5 + 3\cos t$;
$y = 4\sin t$.

Отв. Эллипс:
$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

4) $x = at^2$;
$y = bt$.

Отв. Парабола:
$ay^2 - b^2x = 0$.

5) $x = 5\sin\frac{\pi}{2}t$;
$y = 4\cos\frac{\pi}{2}t$.

Отв. Эллипс:
$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

6) $x = 5\cos t$;
$y = 3 - 5\sin t$.

Отв. Окружность:
$x^2 + (y-3)^2 = 25$.

7) $x = 3 + 4\cos t$;
$y = 2 + 5\sin t$.

Отв. Эллипс:
$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.

8) $x = 3\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi t\right)$;
$y = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi t\right)$.

Отв. Эллипс:
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{xy}{6}\sin\frac{\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8}$.

254. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать уравнение движения по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки:

1) $x = 3t^2$;
$y = 4t^2$.

Отв. Прямая:
$4x - 3y = 0$;
$s = 5t^2$.

2) $x = 3\sin t$;
$y = 3\cos t$.

Отв. Окружность:
$x^2 + y^2 = 9$;
$s = 3t$.

3) $x = a\cos^2 t$;
$y = a\sin^2 t$.

Ответ. Прямая:
$x + y - a = 0$;
$s = a\sqrt{2}\sin^2 t$.

4) $x = 5\cos 5t^2$;
$y = 5\sin 5t^2$.

Ответ. Окружность:
$x^2 + y^2 = 25$;
$s = 25t^2$.

255. Палец кривошипа паровой машины движется по уравнениям

$$x = 0{,}3\cos 3\pi t; \quad y = 0{,}3\sin 3\pi t$$

(x, y — в метрах; t — в секундах).

Найти: 1) уравнение траектории пальца, 2) время T одного оборота; 3) моменты времени, в которые палец будет находиться в правом, верхнем, левом и нижнем крайнем положениях, если ось OX направлена горизонтально вправо; ось OY — вертикально вверх.

Ответ. 1) $x^2 + y^2 = 0{,}09$;

2) $T = \frac{2}{3}$ сек;

3) $\frac{2}{3}k$; $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k$; $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}k$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}k$,

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

256. Шпиндель вертикальносверлильного станка вращается по уравнению

$$\varphi = \frac{\pi}{30}t$$

(t — в секундах).

Шаг нарезки на шпинделе 6 *мм*. Диаметр сверла 8 *мм*. Составить уравнение движения точки на поверхности нарезки сверла и определить время сверления дыры в пластине толщиной в 12 *мм*.

Ответ. $x = 4\cos\frac{\pi}{30}t$;

$y = 4\sin\frac{\pi}{30}t$;

$z = 0{,}1\,t$.

Время сверления = 2 мин.

257. Литейный кран поворачивается вокруг вертикальной оси по уравнению:

$$\varphi = \frac{\pi}{20}t \ (\varphi \text{ — в радианах}; \quad t \text{ — в секундах}).$$

Вылет крана $a = 5$ *м*. Найти уравнения движения ковша, если цепь укорачивается со скоростью $v = 0{,}2$ *м/сек*. Сколько времени

потребуется для подъема ковша на высоту 3 *м*? Определить также координаты ковша в конце подъема.

Указание: Начало координат взять на оси крана на уровне начального положения ковша; угол φ отсчитывается от плоскости xOz; ось Ox направлена вдоль начального положения вылета крана в сторону ковша; ось Oz — вертикально вверх.

Ответ. Ур-ния движения ковша:

$$x = 5\cos\frac{\pi}{20}t;$$

$$y = 5\sin\frac{\pi}{20}t;$$

$$z = 0{,}2\,t;$$

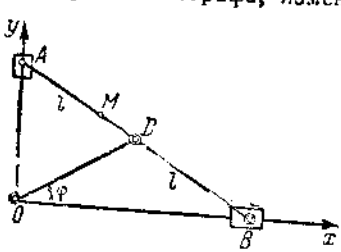
$$T = 15 \text{ сек};$$

координаты ковша в конце подъема: — 3,536 *м*; 3,536 *м*; 3 *м*.

258. Мостовой кран движется вдоль мастерской по уравнению $x = t$; по нему катится в поперечном направлении тележка по уравнению: $y = 1{,}5\,t$ (x, y — в метрах, t — в секундах). Цепь укорачивается со скоростью $v = 0{,}5$ *м/сек*. Определить траекторию груза; в начальном положении ковш находился в горизонтальной плоскости xOy; Oz — направлена вертикально вверх.

Ответ. Траектория — прямая: $y = 1{,}5\,x$; $z = 0{,}5\,x$.

259. Угол наклона кривошипа OD, приводящего в движение линейку эллипсографа, изменяется по закону $\varphi = 2t$ (t — в секундах), $OD = AD = BD$. Длина линейки $2l = 40$ *см*. Составить уравнения движения точки M линейки и уравнение траектории этой точки, если $BM = 25$ *см*. Определить также моменты t, когда линейка AB вертикальна, — горизонтальна. Оси координат указаны на чертеже.



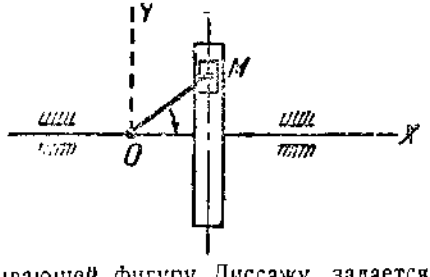
Ответ. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{625} = 1$ (уравнение траектории);

$$t = (0{,}785 + 1{,}57\,k) \text{ сек}; \quad t = 1{,}57\,k \text{ сек},$$

где

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

260. Кривошип OM кулисы Вольфа равномерно вращается около неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{4}$ 1/сек. Длина OM равна 15 *см*. В начальный момент кривошип OM составлял с осью OX угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Составить уравнение движения кулисы.



Ответ. $x = 15 \sin \frac{\pi}{4} t$ *см*.

261. Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнениями: $x = 3 \sin t$; $y = 2 \cos 2t$ (t — в секундах). Найти уравнение траектории, вычертить ее и указать направление движения точки в различные моменты времени. Указать также ближайший после начала движения момент времени, когда траектория пересекает ось OX.

Ответ. Парабола: $4x^2 + 9y - 18 = 0$; $t = \frac{\pi}{4}$ сек.

262. Определить траекторию точки, совершающей одновременно два гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, направленных по 2 взаимноперпендикулярным осям:

$$x = a \sin (kt + \alpha);$$
$$y = b \sin (kt + \beta).$$

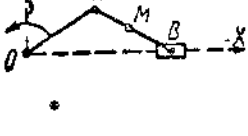
Ответ. Эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos (\alpha - \beta) = \sin^2 (\alpha - \beta).$$

263. Найти траекторию сложного движения точки, получающегося при сложении взаимноперпендикулярных колебаний разной частоты:

1) $x = a \sin 2\omega t$; $y = a \sin \omega t$.
2) $x = a \cos 2\omega t$; $y = a \cos \omega t$.

Ответ. 1) $x^2 a^2 = 4y^2 (a^2 - y^2)$;
2) $2y^2 - ax - a^2 = 0$.



264. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \frac{1}{\text{сек}}$. Длина $OA = AB = 80$ *см*. Найти уравнения движения и траекторию средней точки шатуна M и урав-

нение движения ползуна B, если в начальный момент ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на чертеже.

Ответ. 1) Траектория точки M:

$$\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{40^2}=1;$$

2) уравнение движения ползуна B:

$$x=160\cos 10t \text{ см}.$$

265. Точка обода колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, движется по уравнениям:

$$x=a(kt-\sin kt);\ y=a(1-\cos kt)$$
(x, y — в *см*; t — в сек).

Определить моменты времени, когда точка занимает низшее, среднее и высшее положения на траектории.

Ответ. 1) $\frac{2\pi}{k}\lambda$ сек; 2) $\left(\frac{\pi}{2k}+\frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ сек;

3) $\left(\frac{\pi}{k}+\frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ сек,

где

$$\lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

236. Определить уравнения движения на траекторию точки обода колеса радиуса $R=1$ *м* паровоза, если паровоз движется по горизонтальному пути со скоростью 20 *м/сек*. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять начальное положение точки на пути, принятом за ось OX.

Ответ. Циклоида:

$$x=20t-\sin 20t;$$
$$y=1-\cos 20t.$$

267. Бомба, брошенная с бомбовоза, движется по уравнениям: $x=40t$; $y=4{,}9t^2$ (x, y — в метрах, t — в секундах); начало координат взято в точке сброса бомбы; ось OX — горизонтальна, ось OY — направлена вертикально вниз. Найти уравнение траектории бомбы и определить время падения и дальность полета бомбы по горизонтальному направлению, если бомбовоз летит на высоте $h=3000$ *м*.

Ответ. $y=0{,}003x^2$ — парабола;

$t=24{,}74$ сек; $s=988$ *м*.

268. Даны уравнения движения снаряда:

$$x = 250\,t,\ y = 430\,t - 4{,}9\,t^2$$

(t — в секундах; x, y — в метрах).

Определить время, дальность полета и траекторию снаряда.

Ответ. $y = 1{,}72\,x - 0{,}0000784\,x^2$,
$t = 87{,}8$ сек; $s = 21{,}94$ *км*.

2. Скорость движения точки

269. Поезд движется по уравнению:

$$s = 0{,}1\,t^2 + t$$ (t — в секундах; s — в метрах).

Определить: 1) средние скорости движения поезда в последовательные 6 промежутков времени, по 10 сек. каждый, от начального момента и 2) среднюю скорость за 1-ю минуту.

Ответ. 1) 2, 4, 6, 8, 10, 12 *м/сек*; 2) 7 *м/сек*.

270. Рамка круглого эксцентрика пресса движется по уравнению: $x = e(1 - \cos \omega t)$, где x — в *см*, t — в сек, e — эксцентриситет; ω — угловая скорость эксцентрика (e и ω — постоянные). Определить: 1) ближайшие два момента времени после момента $t = 0$, в которые изменяется направление движения; 2) ближайший момент времени, когда скорость достигает максимального значения; 3) период движения.

Ответ. 1) $\frac{\pi}{\omega}$ сек; $\frac{2\pi}{\omega}$ сек; 2) $\frac{\pi}{2\omega}$ сек; 3) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ сек.

271. Груз, подвешенный к пружине, совершает прямолинейные гармонические колебания. Написать уравнение движения груза, если 1) при $t = 0$, $x_0 = 0$; $v_0 = 62{,}8$ *см/сек*; 2) число колебаний в минуту равно 120. Построить также диаграммы перемещений и скоростей груза.

Ответ. $x = 5 \sin 4\pi t$ *см* (начало координат совпадает со средним положением груза).

272. Движение пальца кривошипа задано уравнениями:

$$x = 15 \sin \frac{\pi}{4} t;\quad y = 15 \cos \frac{\pi}{4} t$$

(x, y — в сантиметрах; t — в секундах).

Определить проекции скорости пальца, когда он находится на осях координат. Найти также годограф скорости.

Отв.

При $x=0$; $y=15$ *см*; $v_x=\frac{15}{4}\pi$ *см/сек*; $v_y=0$.

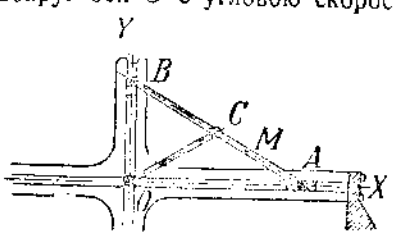
„ $x=15$ *см*; $y=0$; $v_x=0$; $v_y=-\frac{15}{4}\pi$ *см/сек*

„ $x=0$; $y=-15$ *см*; $v_x=-\frac{15}{4}\pi$ *см/сек*; $v_y=0$.

„ $x=-15$ *см*; $y=0$; $v_x=0$; $v_y=\frac{15}{4}\pi$ *см/сек*.

Годограф — окружность: $x_1^2+y_1^2=\frac{225}{16}\pi^2$.

273. Длина линейки эллипсографа $AB=40$ *см*, длина кривошипа $OC=20$ *см*; $AC=CB$. Кривошип равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω. Найти уравнение траектории и годографа скорости точки M, лежащей на линейке в расстоянии $AM=10$ *см* от конца A.



Отв. $\frac{x^2}{900}+\frac{y^2}{100}=1$;

$\frac{x_1^2}{900\omega^2}+\frac{y_1^2}{100\omega^2}=1$.

274. Точка описывает фигуру Лиссажу по уравнениям:

$$x=2\cos t;\quad y=4\cos 2t.$$

Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси OY (x, y — в сантиметрах, t — в секундах).

Отв. 1) $v=2$ *см/сек*; $\cos(v, x)=-1$.
2) $v=2$ *см/сек*; $\cos(v, x)=1$.

275. Точка описывает фигуру Лиссажу по уравнениям:

$$x=4\sin\frac{\pi}{2}t;\quad y=3\sin\frac{\pi}{2}t$$

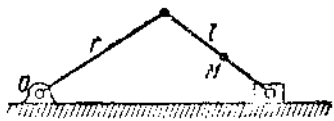
(t — в секундах, x, y — в сантиметрах). Определить величину и направление скорости точки при $t=0$, 1 и 2 сек.

Отв. 1) $v_0=\frac{5}{2}\pi$ *см/сек*; $\cos(v_0, x)=\frac{4}{5}$; $\cos(v_0, y)=\frac{3}{5}$.
2) $v_1=0$.
3) $v_2=\frac{5}{2}\pi$ *см/сек*; $\cos(v_2, x)=-\frac{4}{5}$; $\cos(v_2, y)=-\frac{3}{5}$.

276. Найти скорость середины M шатуна кривошипно-шатунного механизма и скорость ползуна при $r = l = a$ и $\varphi = \omega t$, ω — пост.

Отв. 1) $v = \frac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}$;

2) $v = -2a\omega\sin\omega t$.



277. Бомба, сброшенная с бомбовоза, движется по уравнениям:

$$x = v_0 t; \quad y = h - \frac{gt^2}{2};$$

ось OX направлена горизонтально, ось OY — вертикально вверх. Найти: 1) уравнение траектории,

2) скорость (величину и направление) в момент, когда бомба пересечет ось OX,

3) дальность полета,

4) годограф скорости бомбы и скорость v_1 точки, вычерчивающей годограф.

Отв. 1) $y = h - g\frac{x^2}{2v_0^2}$;

2) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$; $\cos(v, x) = \frac{v_0}{v}$; $\cos(v, y) = -\frac{\sqrt{2gh}}{v}$.

3) $x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$;

4) вертикальная прямая, отстоящая от начала координат на v_0; $v_1 = -g$.

278. Определить уравнения движения и траекторию точки колеса радиуса $R = 1$ *м* паровоза, лежащей на расстоянии $a = 0{,}5$ *м* от оси, если паровоз движется без скольжения по горизонтальному прямолинейному участку пути со скоростью $v = 10$ *м/сек*. Ось OX совпадает с рельсом, ось OY — с радиусом точки при ее начальном нижнем положении. Определить также скорость этой точки, когда она находится на 1) горизонтальном и 2) вертикальном диаметре колеса.

Отв. Укороченная циклоида:

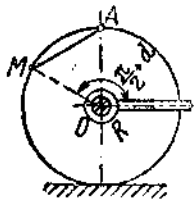
$x = 10t - 0{,}5\sin 10t$;

$y = 1 - 0{,}5\cos 10t$.

Скорость: 1) 11,18 *м/сек*;

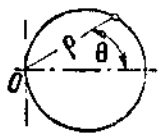
2) 5 *м/сек*; 15 *м/сек*.

279. Скорость паровоза $v_0 = 72$ *км/час*; радиус колеса его $R = 1$ *м*; колесо катится по рельсу без скольжения.



1) Определить величину и направление скорости v той точки M на ободе колеса, радиус которой составляет с направлением скорости v_0 угол $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

2) Найти уравнение годографа скорости точки M и определить скорость v_1 точки, вычерчивающей годограф.



Ответ. 1) Скорость $v = 40 \cos \frac{\alpha}{2}$ *м/сек* и направлена по прямой MA.

2) $\rho = 2v_0 \cos \theta$, где $\theta = \frac{\alpha}{2}$,

окружность радиуса $r = v_0$;

$$v_1 = \frac{v_0^2}{R} = 400 \text{ м/сек}.$$

280. Определить уравнения движения и траекторию точки M колеса вагона радиуса $R = 0{,}5$ *м*, отстоящей от оси на расстоянии $a = 0{,}6$ *м* и лежащей в начальный момент на $0{,}1$ *м* ниже рельса, если вагон движется по прямолинейному пути со скоростью $v = 10$ *м/сек*. Найти также моменты времени, когда эта точка будет проходить свое нижнее и верхнее положения, и проекции ее скорости в эти моменты времени. Ось OX совпадает с рельсом; ось OY проходит через начальное нижнее положение точки.

Ответ. Удлиненная циклоида:

$$x = (10t - 0{,}6 \sin 20t) \text{ м};$$

$$y = (0{,}5 - 0{,}6 \cos 20t) \text{ м};$$

при $t = \frac{\pi \cdot k}{10}$ сек — нижнее положение точки: $x' = -2$ *м/сек*; $y' = 0$;

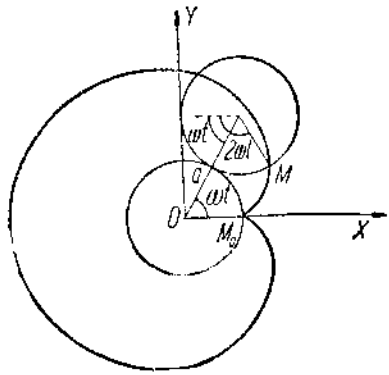
при $t = \frac{\pi}{20}(1 + 2k)$ сек — верхнее положение точки; $x' = 22$ *м/сек*;

$y' = 0$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

281. Точка M шестеренки радиуса a, катящейся по неподвижной шестеренке того же радиуса, описывает кардиоиду;

имея следующие уравнения движения:

$$x = a\ (2\cos\omega t - \cos 2\omega t);$$
$$y = a\ (2\sin\omega t - \sin 2\omega t).$$



Найти величину и направление скорости и ее значение в тот момент, когда точка M находится на наибольшем расстоянии от центра неподвижной шестеренки.

Отв. 1) Скорость $v = 4a\omega$ направлена вертикально вниз.

282. Найти в полярных координатах (r,φ) уравнение кривой, которую опишет корабль, сохраняющий постоянный курсовой угол α на неподвижную точку (угол между скоростью и направлением на точку). Дано: α и $r|_{\varphi=0} = r_0$. Принять, что корабль движется на плоскости, и за полюс взять неподвижную точку. Исследовать частные случаи при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 0 или π.

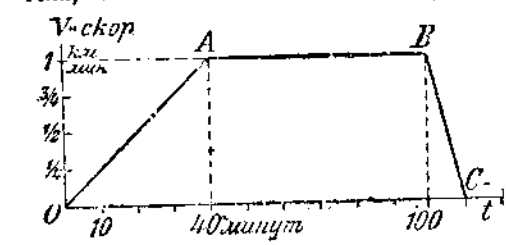
Отв. Логарифмическая спираль $r = r_0 e^{\varphi \operatorname{ctg}\alpha}$.

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — окружность: $r = r_0$.

„ $\alpha = 0$ или π — прямая.

3. Ускорение движения точки

283. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений для тела, свободно падающего по вертикали без начальной скорости.



284. Линия $OABC$ и часть оси Ot, следующая за точкой C, представляют кривую скоростей поезда в километрах в минуту. Найти пройденный путь, как функцию времени, для промежутков: 1) от $t = 0$ до $t = 40$ мин; 2) от 40 до 100 мин; 3) от 100 до 110 мин; 4) от 110 до 120 мин. За начало расстояний принять точку, в которой поезд находился в момент $t = 0$.

Отв. 1) $s = 0{,}0125\,t^2$ *км*, 2) $s = (t - 20)$ *км*;
3) $s = (11\,t - 0{,}05\,t^2 - 520)$ *км*; 4) $s = 85$ *км*.

285. Поезд движется со скоростью 72 *км/час*; при торможении он получает замедление, равное 0,4 *м/сек*^{2}. Найти, за сколько времени до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.

Ответ. 50 сек; 500 *м*.

286. Копровая баба, ударив сваю, движется затем вместе с нею в течение 0,02 сек. до остановки, причем свая углубляется в землю на 6 *см*. Определить начальную скорость движения сваи, считая его равнозамедленным.

Ответ. 6 *м/сек*.

287. Водяные капли вытекают из отверстия вертикальной трубочки через 0,1 сек. одна после другой и падают с ускорением 981 *см/сек*^{2}. Определить расстояние между первой и второй каплями через 1 сек. после момента истечения первой капли.

Ответ. 93,2 *см*.

288. При трогании с места трамвай вначале движется, перемещаясь по прямолинейному пути и увеличивая свой путь пропорционально кубу времени; в течение первой минуты он прошел путь 90 *м*. Найти скорость и ускорение в моменты $t=0$ и $t=5$ сек. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Ответ. $v_0=0$; $w_0=0$;

$$v_5=\frac{15}{8}\ м/мин;\quad w_5=45\ м/мин^2.$$

289. Локомотив имеет скорость 15 *м/сек*. На протяжении 34 *м* дается контр-пар, после чего скорость падает до 5 *м/сек*. Определить, сколько времени давали контр-пар и величину вызванного им замедления.

Ответ. $t=3{,}40$ сек; $w=-2{,}94$ *м/сек*^{2}.

290. Считая посадочную скорость аэроплана 100 *км/час*, определить замедление его при посадке на пути $l=100$ *м*.

Ответ. $w=-3{,}86$ *м/сек*^{2}.

291. Баба падает с высоты 3,6 *м*, а для ее поднятия на ту же высоту требуется втрое больше времени, чем на падение. Сколько ударов она делает в минуту?

Ответ. 17,5 ударов.

292. Поезд, имея начальную скорость 54 *км/час*, прошел в последующие 30 сек. 600 *м*. Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение поезда происходит на закруглении радиуса $R = 1$ *км*.

Ответ. $v = 25$ *м/сек*; $w = 0{,}703$ *м/сек*^{2}.

293. Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением $w = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ *м/сек*^{2}. Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $v_0 = 2\pi$ *м/сек*, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Ответ. $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$ *м*.

294. Поезд движется равнозамедленно по дуге круга радиуса $R = 800$ *м* и проходит путь $s = 800$ *м*, имея начальную скорость $v_0 = 54$ *км/час* и конечную $v = 18$ *км/час*. Определить полное ускорение поезда в начале и конце дуги, а также время движения по этой дуге.

Ответ. $w_0 = 0{,}308$ *м/сек*^{2};
$w = 0{,}129$ *м/сек*^{2}; $T = 80$ сек.

295. Закругление трамвайного пути состоит из двух дуг радиусов $\rho_1 = 300$ *м* и $\rho_2 = 400$ *м*. Центральные углы $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$. Построить график нормального ускорения вагона, идущего по закруглению со скоростью $v = 36$ *км/час*.

296. Точка обода маховика в период разгона движется по уравнению $s = 0{,}1\, t^3$ (t — в секундах; s — в метрах). Радиус маховика $R = 2$ *м*. Определить нормальное и касательное ускорения точки в момент, когда ее скорость $v = 30$ *м/сек*.

Ответ. $w_n = 450$ *м/сек*^{2}; $w_t = 6$ *м/сек*^{2}.

297. Точка маятника движется по дуге окружности радиуса $R = 20$ *см*. Закон ее движения по траектории: $s = 20 \sin \pi t$ (t — в сек., s — в *см*). Найти и построить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t = 5$ сек. Построить также кривые скорости, касательного и нормального ускорений.

Ответ. $v = -20\pi$ *см/сек*; $w_t = 0$;
$w = w_n = 20\,\pi^2$ *см/сек*^{2}.

298. Дано движение точки уравнениями:

$$x = 10 \cos 2\pi \frac{t}{5},$$

$$y = 10 \sin 2\pi \frac{t}{5}$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах).

Найти траекторию точки, величину и направление скорости v, а также величину и направление ускорения w.

Ответ. Окружность радиуса 10 *см*; $v = 4\pi$ *см/сек* и направлена по касательной в сторону перехода от оси OX к оси OY поворотом на 90°; $w = 1{,}6\pi^2$ *см/сек*^{2} и направлено к центру.

299. Движение точки определяется уравнениями:

$$x = 20t^2 + 5;$$
$$y = 15t^2 - 3$$

(t — в секундах; x, y — в сантиметрах).

Определить величину и направление скорости и ускорения в моменты $t = 2$ сек. и $t = 3$ сек.

Ответ. При $t = 2$ сек $v = 100$ *см/сек*.
„ $t = 3$ сек $v = 150$ *см/сек*.
$w = w_x = \text{const} = 50$ *см/сек*^{2}.
$\cos(v, x) = \cos(w, x) = 0{,}8$.
$\cos(v, y) = \cos(w, y) = 0{,}6$.

300. Определить радиус кривизны траектории точки в начале движения, если уравнения ее движения имеют вид: $x = 2t$, $y = t^2$ (t — в секундах; x, y — в метрах).

Ответ. $\rho_0 = 2$ *м*.

301. Определить скорость и ускорение, построить кривые расстояний, скоростей и ускорений для точки, движущейся по уравнениям: $x = a\cos^2 t$; $y = a\sin^2 t$ (t — в секундах; x, y — в сантиметрах).

Ответ. $v = a\sqrt{2}\sin 2t$ *см/сек*.
$w = w_t = 2a\sqrt{2}\cos 2t$ *см/сек*^{2}.

302. Палец кривошипа паровой машины в период пуска движется по уравнениям: $x = 75\cos 4t^2$; $y = 75\sin 4t^2$ (x, y — в *см*; t — в секундах).

Найти скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

Ответ. $v = 600t$ *см/сек*; $w_t = 600$ *см/сек*^{2};
$w_n = 4800t^2$ *см/сек*^{2}.

303. Найти ускорение и радиусы кривизны траекторий точек, описывающих фигуры Лиссажу, в момент $t = 1$ сек.

$$1)\quad x = 4\sin\frac{\pi}{2}t; \qquad y = 3\sin\frac{\pi}{2}t;$$

$$2)\quad x = -2\cos\frac{\pi}{3}t; \quad y = 2\cos\frac{\pi}{4}t.$$

(t — в секундах; x, y — в сантиметрах).

Ответ. 1) $w = 1{,}25\pi^2$ *см/сек*^{2}; $\rho = \infty$.
2) $w = 1{,}398$ *см/сек*^{2}; $\rho = 17{,}86$ *см*.

304. Найти радиус кривизны при $x = y = 0$ траектории точки, описывающей фигуру Лиссажу по уравнениям:

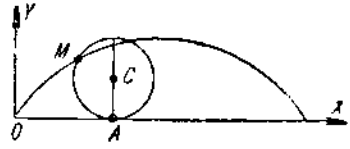
$$x = a\sin(2\omega t - \pi);$$
$$y = a\sin(\omega t - \pi).$$

Построить также эту фигуру при $a = 4$ *см*.

Ответ. $\rho = \infty$.

305. Найти величину и направление ускорения и радиус кривизны траектории точки колеса, катящегося по горизонтальной оси OX, если точка описывает циклоиду по уравнениям:

$$x = 20t - \sin 20t;$$
$$y = 1 - \cos 20t.$$



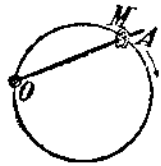
(t — в секундах; x, y — в метрах). Определить также значение ρ при $t = 0$.

Ответ. Ускорение $w = 400$ *м/сек*^{2} и направлено по MC к центру C катящегося круга; $\rho = 2MA$; $\rho_0 = 0$.

306. Найти траекторию точки M шатуна кривошипно-шатунного механизма, если $r = l = 60$ *см*; $MB = \frac{1}{3}l$; $\varphi = 4\pi t$ (t — в секундах), а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории этой точки в момент, когда $\varphi = 0$.

Ответ. Эллипс $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$; $v_{\varphi=0} = 80\pi$ *см/сек*.
$w_{\varphi=0} = 1600\pi^2$ *см/сек*^{2}; $\rho = 4$ *см*.

307. На проволочной окружности радиуса 10 *см* надето колечко M; через него проходит стержень OA, который равномерно вращается около точки O, лежащей на той же окружности; угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол в 5 сек. Определить скорость v и ускорение w колечка.



Ответ. $v = 2\pi$ *см/сек*; $w = 0{,}4\pi^2$ *см/сек*^{2}.

308. При обстреле Парижа в 1918 г. германцами снаряд (весом 120 *кг*) выбрасывался из 21-сантиметрового орудия с начальной скоростью $v_0 = 1600$ *м/сек* под углом $\alpha_0 = 55°$ к горизонту. Определить теоретическую дальность и высоту обстрела без учета сопротивления воздуха (фактические данные: $s = 120$ *км*; $h = 40$ *км*).

Ответ. $s = 245$ *км*; $h = 87{,}5$ *км*.

309. Показать, что при отклонении угла обстрела от угла наибольшей теоретической дальности ($\alpha = 45°$) вверх и вниз на одну и ту же величину, получается одна и та же дальность обстрела.

310. Движение точки выражается уравнениями:

$$x = v_0 t \cos\alpha_0, \quad y = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

причем ось OX горизонтальна, ось OY направлена по вертикали вверх, v_0, g и $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ — величины постоянные. Определить кинематическое значение величин v_0 и α_0 и найти: 1) траекторию точки, 2) координаты наивысшего ее положения, 3) проекции скорости в тот момент, когда точка находится на оси OX.

Ответ. 1) Парабола: $y = x \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2$;

2) $x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0$; $y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha_0$;

3) $v_x = v_0 \cos\alpha_0$; $v_y = -v_0 \sin\alpha_0$.

311. Движение точки выражается теми же уравнениями, что и в предыдущей задаче, причем $v_0 = 20$ *м/сек*, $\alpha_0 = 60°$, $g = 9{,}81$ *м сек*^{2}. Найти: с какою скоростью v_1 должна выйти из начала координат в момент $t = 0$ вторая точка для того, чтобы, двигаясь равномерно по оси OX, она встретилась с первой точкой, и определить расстояние x_1 до места встречи.

Ответ. $v_1 = 10$ *м/сек*; $x_1 = 35{,}3$ *м*.

312. Определить высоты: h_1, h_2 и h_3 над поверхностью воды трех пунктов прямого отвесного берега, если известно, что три пули, выпущенные одновременно в этих пунктах с горизонтальными скоростями: 50, 75 и 100 *м/сек*, одновременно же упали в воду, причем кратчайшее расстояние точки падения первой пули от берега равно 100 *м*; принимаем во внимание только ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}. Определить также продолжительность T полета пуль и их скорости v_1, v_2 и v_3 в момент падения в воду.

Ответ. $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ *м*; $T = 2$ сек.;

$v_1 = 53{,}7$ *м/сек*; $v_2 = 77{,}5$ *м/сек*; $v_3 = 101{,}9$ *м/сек*.

313. Из орудия, ось которого образует угол 30° с горизонтом, выпущен снаряд со скоростью 500 *м/сек*. Предполагая, что снаряд имеет только ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}, найти годограф скорости снаряда и скорость v_1 точки, вычерчивающей годограф.

Ответ. Годограф — вертикальная прямая, отстоящая от начала координат на 432 *м*; $v_1 = 981$ *м/сек*.

314. Движение снаряда задано уравнениями:

$$x = v_0 t \cos \alpha_0; \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

где v_0 и α_0 — постоянные величины. Найти радиус кривизны траектории при $t = 0$ и в момент падения на землю.

Ответ. $\rho = \dfrac{v_0^2}{g \cos \alpha_0}$.

315. Снаряд движется в вертикальной плоскости по уравнениям: $x = 300t$; $y = 400t - 5t^2$ (t — в секундах; x, y — в метрах). Найти: 1) скорость и ускорение в начальный момент; 2) высоту и дальность обстрела; 3) радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей точке.

Ответ. $v_0 = 500$ *м/сек*; $w = 10$ *м/сек*^{2};

$h = 8$ *км*; $s = 24$ *км*;

$\rho_0 = 41{,}7$ *км*; $\rho = 9$ *км*.

316. Определить движение снаряда (уравнения движения, траекторию, высоту и дальность обстрела), если известно, что ускорение движения $w = g = 9{,}81$ *м/сек*^{2} всегда направлено по верти-

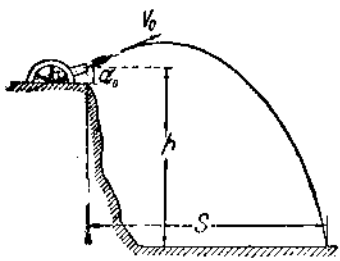
кали вниз; начальная скорость $v_0 = 1000$ *м/сек* наклонена под углом $\alpha_0 = 60°$ к горизонту.

Ответ. $x = 500t$ *м*; $y = (866t - 4{,}905t^2)$ *м*.

$y = 1{,}732x - 10^{-8}\ 1962x^2$; $h = 38{,}24$ *км*;

$s = 88{,}3$ *км*.

317. Из орудия береговой артиллерии, с высоты $h = 30$ *м* над уровнем моря, сделан выстрел под углом $\alpha_0 = 45°$ к горизонту с начальной скоростью снаряда $v_0 = 1000$ *м/сек*. Определить, на каком расстоянии от орудия снаряд попадет в цель, находящуюся на уровне моря. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Ответ. 102 *км*.

318. Из орудия, ось которого составляет угол 30° с горизонтом, выпущен снаряд со скоростью 500 *м/сек*. Ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Определить радиус кривизны ρ траектории снаряда в наивысшей точке.

Ответ. $\rho = 19\,100$ *м*.

319. Найти касательное и нормальное ускорения тяжелой точки, движение которой выражается уравнениями: $x = \alpha t$; $y = \beta t - \frac{gt^2}{2}$.

Ответ. $w_t = -\frac{g(\beta - gt)}{v}$; $w_n = \frac{g\alpha}{v}$,

где v — скорость точки.

320. При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает величины 72 *км/час* через 3 мин. после отхода; путь расположен на закруглении радиуса 800 *м*. Определить касательное, нормальное и полное ускорения поезда через 2 мин. после момента отхода от станции.

Ответ. $w_t = \frac{1}{9}$ *м/сек*^{2}; $w_n = \frac{2}{9}$ *м/сек*^{2}; $w = 0{,}25$ *м/сек*^{2}.

321. Точка совершает равномерное винтовое движение, выражаемое уравнениями: $x = 2\cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $z = 2t$, причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ. $\rho = 2\frac{1}{8}$ *м*.

II. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

322. 1) Определить угловую скорость: а) секундной стрелки часов, б) минутной стрелки часов, в) часовой стрелки часов, г) вращения земли вокруг своей оси, д) паровой турбины Лаваля, делающей 15 000 об/мин.

Ответ. а) $\omega = \frac{\pi}{30}$ 1/сек;

б) $\omega = \frac{\pi}{1800}$ 1/сек;

в) $\omega = \frac{\pi}{21600}$ 1/сек;

г) $\omega = \frac{\pi}{43200}$ 1/сек;

д) $\omega = 1571$ 1/сек.

323. Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ сек. угловая скорость диска соответствует $n = 810$ об/мин.

Ответ. $\varphi = \pi t^3$ радианов.

324. Маятник центробежного регулятора Уатта, вращающийся вокруг вертикальной оси AB, делает 120 об/мин. В начальный момент угол поворота равен $\frac{\pi}{6}$ радианов. Найти полный угол поворота и угловое перемещение маятника за время $t = {}^1/_2$ сек.

Ответ. $\varphi = \frac{13}{6}\pi$ радианов; $\Delta\varphi = 2\pi$ радианов.

325. Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 мин.

Определить угловое ускорение ε.

Ответ. $\varepsilon = \pi$ 1/сек^2.

326. Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 сек. он совершает 12,5 оборотов. Какова его угловая скорость по истечении этих 5 сек?

Ответ. $\omega = 5$ об/сек $= 10\pi$ 1/сек.

327. Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 мин. после начала движения оно имеет угловую скорость, соответствующую 120 об/мин. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 мин?

Ответ. 600 оборотов.

328. Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную угловую скорость 2π 1/сек; сделав 10 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках остановилось. Определить угловое ускорение ε колеса, предполагая, что вращение его было равнозамедленным.

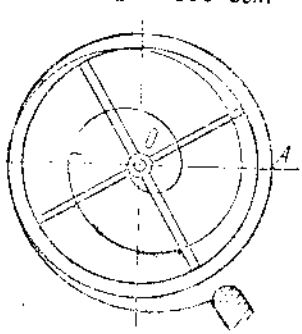
Ответ. $\varepsilon = 0{,}1\pi$ 1/сек^2.

329. С момента выключения мотора пропеллер аэроплана, вращавшийся с угловой скоростью, соответствующей $n = 1200$ об/мин, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным.

Ответ. 8 сек.

330. Тело совершает колебания около неподвижной оси, причем угол поворота φ выражается уравнением: $\varphi = 20^\circ \sin\left(10^\circ \cdot \frac{t}{5}\right)$. Определить: угловую скорость ω тела в момент $t = 0$, ближайшие моменты t_1 и t_2, в которые изменяется направление вращения, и период колебания T.

Ответ. $\omega = \frac{1}{810}\pi^2$ 1/сек; $t_1 = 45$ сек; $t_2 = 135$ сек; $T = 180$ сек.



331. Часовой балансир совершает крутильные гармонические колебания с периодом $T = \frac{1}{2}$ сек. Наибольший угол отклонения точки обода балансира от положения равновесия $\alpha = \frac{\pi}{2}$ радианов. Найти угловую скорость и угловое ускорение балансира через 2 сек. после начала движения.

Ответ. $\omega = 2\pi^2$ 1/сек; $\varepsilon = 0$.

332. Маятник колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси O.

Выйдя в начальный момент из положения равновесия, он достигает наибольшего отклонения $\alpha = \frac{\pi}{16}$ радианов через 2/3 сек.

1) Написать закон колебаний маятника, считая, что он совершает гармонические колебания.

2) В каком положении маятник будет иметь наибольшую угловую скорость и чему она равна?

Отв. 1) $\varphi = \frac{\pi}{16} \sin \frac{3}{4} \pi t$ радианов.

2) В отвесном положении

$$\omega = \frac{3}{64} \pi^2 \text{ 1/сек}.$$

333. Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение земли вокруг своей оси; широта Ленинграда 60°; радиус земли 6000 *км*.

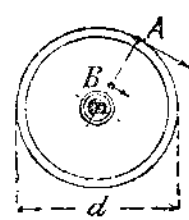
Отв. $v = 0{,}218$ *км/сек*.

$w = 0{,}016$ *м/сек*^{2}.

334. Маховое колесо радиуса 0,5 *м* вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 *м/сек*. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

Отв. $n = 38{,}2$ об/мин.

335. Точка A шкива движется со скоростью 50 *см/сек*, а точка B со скоростью 10 *см/сек*; расстояние $AB = 20$ *см*. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.



Отв. $\omega = 2$ 1/сек; $d = 50$ *см*.

336. Маховое колесо радиуса $R = 2$ *м*, вращаясь равноускоренно из состояния покоя через $t = 10$ сек., обладает на ободе линейной скоростью $v = 100$ *м/сек*. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента $t = 15$ сек.

Отв. $v = 150$ *м/сек*; $w_n = 11250$ *м/сек*^{2}, $w_t = 10$ *м/сек*^{2}.

337. Найти горизонтальную скорость v, которую нужно сообщить телу, находящемуся на экваторе, для того чтобы оно, двигаясь равномерно вокруг земли по экватору в особых направляющих, имело ускорение свободного падения. Определить также время T, по истечении которого тело вернется в первоначальное

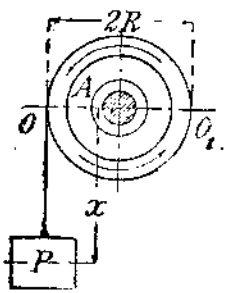
положение. Радиус земли $R = 637 \cdot 10^6$ *см*, а ускорение силы тяжести на экваторе $g = 978$ *см/сек*^{2}.

Ответ. $v = 7{,}9$ *км/сек*; $T = 1{,}4$ часа.

338. Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60°. Касательное ускорение ее в данный момент $w_t = 10\sqrt{3}$ *м/сек*^{2}. Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r = 0{,}5$ *м*. Радиус махового колеса $R = 1$ *м*.

Ответ. $w_n = 5$ *м/сек*^{2}.

339. Вал A, радиуса $R = 10$ *см*, приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением: $x = 100\,t^2$, где x расстояние гири от неподвижной горизонтали OO_1, выраженное в *см*. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t.



Ответ. $\omega = 20\,t$ 1/сек;

$\varepsilon = 20$ 1/сек^2;

$w = 200\sqrt{1 + 400\,t^4}$ *см/сек*^{2}.

340. На обод колеса, имеющего горизонтальную ось, намотана нить, на конце которой подвешен груз P. В некоторый момент груз начинает падать с ускорением $w = c$ *см/сек*^{2}, приводя во вращение колесо. Найти полное ускорение точек обода колеса в функции от высоты h, на которую опускается груз. Радиус колеса R. Начальная скорость груза равнялась нулю.

Ответ. $w = \frac{c}{R}\sqrt{R^2 + 4h^2}$ *см/сек*^{2}.

341. Шарик A, подвешенный на нити длиною $l = 32$ *см*, колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси O по уравнению:

$$\varphi = \frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{2}t \quad (\varphi \text{ — в радианах, } t \text{ — в секундах}).$$

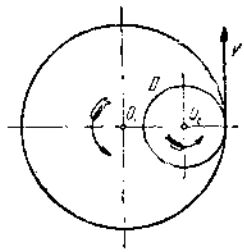
Определить: 1) ближайший момент времени, при котором нормальное ускорение шарика будет равно нулю; 2) ближайший мо-

мент времени, при котором касательное ускорение шарика равно нулю; 3) полное ускорение шарика при $t = 1/2$ сек.

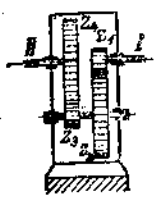
Отв. 1) $t = 1$ сек;
2) $t = 2$ сек;
3) $w = \frac{\pi^3}{16}\sqrt{128 + \pi^2}$ *см/сек*^{2}.

5. Преобразование простейших движений твердого тела

342. Зубчатое колесо *I* диаметром $D_1 = 360$ *мм* делает $n_1 = 100$ об/мин. Чему должен равняться диаметр зубчатого колеса *II*, находящегося с колесом *I* во внутреннем зацеплении и делающего 300 об/мин?



Отв. $D_2 = 120$ *мм*.

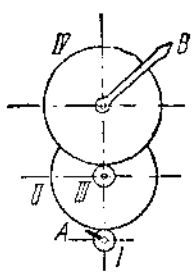


343. Редуктор скорости, служащий для замедления вращения вала *I*, передающий свое вращение валу *II*, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубцов; $z_1 = 10$; $z_2 = 60$; $z_3 = 12$; $z_4 = 70$. Определить передаточное число механизма.

Отв. $k = \frac{1}{35}$.

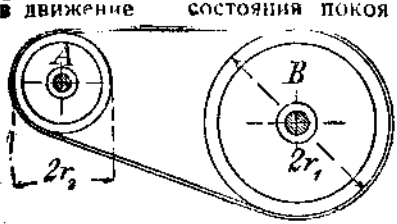
344. Зубчатая передача часового механизма от секундной стрелки *A* к минутной стрелке *B* состоит из четырех зубчатых колес с числом зубцов: $z_1 = 8$; $z_2 = 60$; $z_4 = 64$.

Определить число зубцов шестерни *III*.



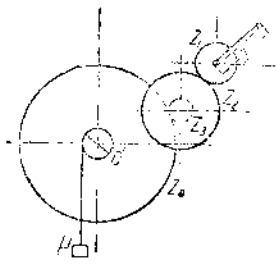
Отв. $z_3 = 8$.

345. Динамомашина со шкивом *A* приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнем от шкива *B* паровой машины; радиусы шкивов: $r_1 = 75$ *см*; $r_2 = 30$ *см*; после пуска в ход паровой машины угловое ее ускорение равно $0{,}4\,\pi$ 1/сек^2. Определить, пренебрегая скольжением ремня по шкивам, через сколько времени динамомашина будет делать 300 об/мин.



Отв. 10 сек.

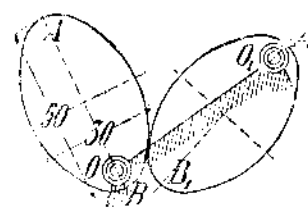
346. Изображенный на чертеже механизм лебедки осуществляет при вращении рукоятки a вертикальное перемещение груза P. Вследствие неисправности тормозного устройства груз начал внезапно опускаться. Уравнение движения груза: $x = 5t^2$ *см* (t — в секундах) (ось OX направлена по канату вниз). Диаметр барабана $d = 200$ *мм*. Числа зубцов механизма лебедки: $z_1 = 13$, $z_2 = 39$, $z_3 = 11$, $z_4 = 77$.



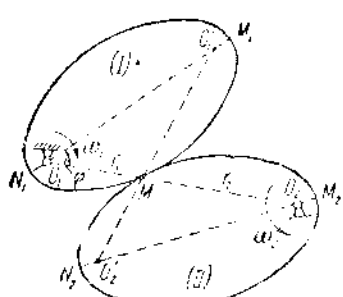
Определить скорость и ускорение конца рукоятки длины $a = 400$ *мм* через 2 сек. после начала движения.

Отв. $v = 16{,}80$ *м/сек*.
$w = 705{,}60$ *м/сек*^{2}.

347. Для получения периодически изменяющихся угловых скоростей сцеплены два одинаковые эллиптические зубчатые колеса, из которых одно вращается равномерно вокруг оси O, делая 270 оборотов в минуту, а другое приводится первым во вращательное движение вокруг оси O_1. Оси O и O_1 параллельны и проходят через фокусы эллипсов. Расстояние OO_1 равно 50 *см*; полуоси эллипсов 25 и 15 *см*. Определить наименьшую и наибольшую угловые скорости колеса O_1.



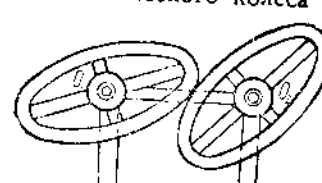
Отв. $\omega_{min} = \pi$ 1/сек; $\omega_{max} = 81\pi$ 1/сек.



348. Вывести закон передачи вращения пары эллиптических зубчатых колес с полуосями a и b. Угловая скорость колеса 1 $\omega_1 = \text{const}$. Расстояние между осями: $O_1O_2 = 2a$; φ — угол, образованный прямой, соединяющей оси вращения, и большой осью эллиптического колеса 1.

Отв. $\omega_2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2}\,\omega_1$,

где c — линейный эксцентриситет эллипсов; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

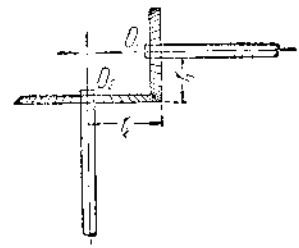


349. Найти наибольшую и наименьшую угловые скорости овального ко-

леса *II*, сцепленного с колесом *I*, делающим 240 об/мин. Оси вращения колес находятся в центрах овалов. Расстояние между осями равно 50 *см*. Полуоси овалов равны: 40 и 10 *см*.

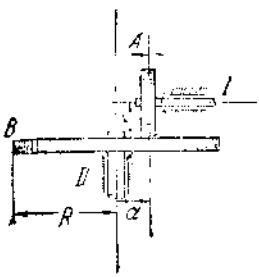
Ответ. $\omega_{min} = 2\pi$ 1/сек; $\omega_{max} = 32\pi$ 1/сек.

350. Определить, через сколько времени зубчатое коническое колесо O_1 радиуса $r_1 = 10$ *см* будет иметь угловую скорость, соответствующую $n_1 = 4320$ об/мин, если оно приводится во вращение таким же колесом O_2 радиуса $r_2 = 15$ *см* вращающимся равноускоренно, из состояния покоя с угловым ускорением 2 об/сек².



Ответ. $t = 24$ сек.

351. Ведущий вал *I* фрикционной передачи делает 600 об/мин, и на ходу передвигается (направление указано стрелкой) так, что расстояние d меняется по закону $d = (10 - 0{,}5\,t)$ *см* (t — в секундах).



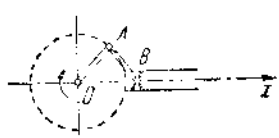
Определить: 1) угловое ускорение вала *II* как функцию от расстояния d;

2) полное ускорение точки на ободе колеса *B* в момент, когда $d = r$; даны радиусы фрикционных колес: $r = 5$ *см*, $R = 15$ *см*.

Ответ. 1) $\varepsilon = \dfrac{50\pi}{d^2}$ 1/сек²;

2) $w = 30\,\pi\sqrt{40000\,\pi^2 + 1}$ *см/сек²*.

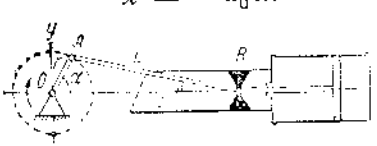
352. Найти закон движения, скорость и ускорение ползуна *B* кривошипно-шатунного механизма *OAB*, если длины шатуна и кривошипа одинаковы: $AB = OA = r$, а вращение кривошипа *OA* вокруг вала *O* равномерно: $\omega = \omega_0$. Ось *OX* направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний — в центре *O* кривошипа.



Ответ. $x = 2r\cos\omega_0 t$;

$x' = -2r\omega_0 \sin\omega_0 t$,

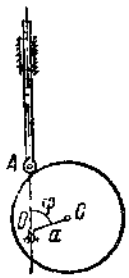
$x'' = -\omega_0^2 x$.



353. Определить закон движения, скорость и ускорение ползуна *B* кривошипно-шатунного механизма, если кривошип *OA*

вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Длина кривошипа $OA = r$, шатун $AB = l$.

Ось OX направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний, пройденных ползуном, в центре O кривошипа $\frac{r}{l} = \lambda$, $\alpha = \omega_0 t$.



Ответ. $x = r(\cos\omega_0 t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\omega_0 t) + l - \frac{\lambda}{4}r;$

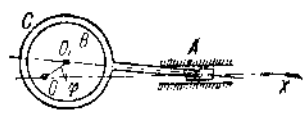
$x' = -r\omega_0(\sin\omega_0 t + \frac{\lambda}{2}\sin 2\omega_0 t);$

$x'' = -r\omega_0^2(\cos\omega_0 t + \lambda\cos 2\omega_0 t).$

354. Найти закон движения стержня, если диаметр эксцентрика $d = 2r$, а ось вращения O отстоит от оси диска C на расстоянии $OC = a$; ось OX направлена по стержню, начало отсчета на оси вращения, $\frac{a}{r} = \lambda$.

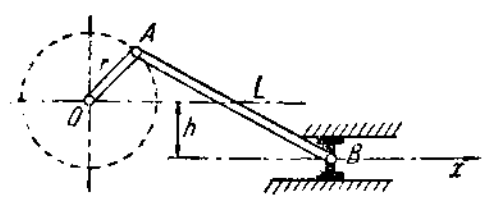
Ответ. $x = a\cos\varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}$.

355. Найти закон движения и длину хода ползуна A, шарнирно соединенного с хомутом C, надетым на эксцентрик B. Геометрический центр эксцентрика B находится в O_1; O — центр вращения эксцентрика. Дано: $OO_1 = 10$ *см*, $O_1A = 50$ *см*. Ось OX направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний в точке O.



Ответ. $x = 10(\cos\varphi + \sqrt{25 - \sin^2\varphi})$ *см*.

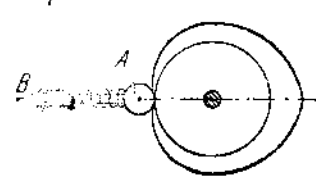
$s = 20$ *см*.



356. Написать уравнение движения поршня дезаксиального кривошипно-шатунного механизма. Дезаксиал — h, длина кривошипа — r; длина шатуна — l; ось OX направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний — в крайнем правом положении ползуна; $\frac{l}{r} = \lambda$; $\frac{h}{r} = k$.

Ответ. $x = r[(\sqrt{(\lambda + 1)^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - (\sin\varphi + k)^2} - \cos\varphi)]$.

357. Написать уравнение контура кулака, создающего равномерное возвратно-поступательное движение стержня AB.



Уравнение движения стержня: $x = 5t + 30$; (x — в сантиметрах; t — в секундах). Кулак делает 7,5 об/мин.

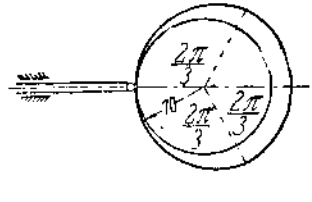
Ответ. $r = \frac{20}{\pi}\varphi + 30$ — Архимедова спираль.

358. Найти скорость равномерного движения стержня, если задано уравнение контура кулака:

$$r = \left(\frac{15}{\pi}\varphi + 25\right) \text{ см}.$$ Кулак делает 20 об/мин.

Ответ. $v = 10$ *см/сек*.

359. Написать уравнение контура кулака, у которого полный ход стержня, $h = 20$ *см*, соответствовал бы одной трети оборота кулака, затем в течение следующей трети оборота стержень оставался бы в покое и, наконец, на протяжении последней трети оборота совершал бы обратный ход. Кулак делает $n = 20$ об/мин. Наименьшее расстояние стержня от центра вращения кулака равно 70 *мм*.

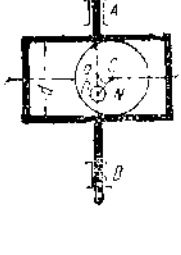


Ответ. Уравнение контура кулака, соответствующего первой трети оборота, есть Архимедова спираль:

$$r = \left(\frac{30}{\pi}\varphi + 70\right) \text{ см}.$$

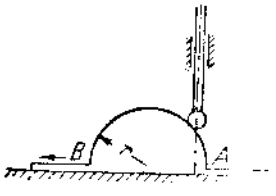
Второй трети оборота соответствует окружность с радиусом $r = 90$ *см*. Для последней трети оборота контур кулака тоже Архимедова спираль:

$$r = \left(90 - \frac{30}{\pi}\varphi\right) \text{ см}.$$



360. Круглый эксцентрик диаметра d помещен в раме, движущейся прямолинейно в подшипниках A и B. Определить скорость движения рамы, если эксцентрик вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси O, отстоящего от оси C диска на расстоянии $OC = a$.

Ответ. $s = a(1 - \cos \omega t)$,
$v = a\omega \sin \omega t$.



361. Найти длину опускания стержня, опирающегося своим концом о круговой контур радиуса $r = 30$ *см* возвратно-поступательно движущегося кулака со скоростью $v = 5$ *см/сек*. Время опускания стержня $t = 3$ сек. В начальный момент стержень находится в наивысшем положении.

Отв. $h = 4{,}020$ *см*.

362. Найти ускорение кругового поступательно движущегося кулака, если при его равноускоренном движении без начальной скорости стержень опустился за 4 сек. из наивысшего положения на $h = 4$ *см*. Радиус кругового контура кулака $r = 10$ *см*.

Отв. $w = 1$ *см/сек*^{2}.

III. СЛОЖЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТОЧКИ

6. Уравнения движения и траектория сложного движения точки

363. Для регистрации переменных периодически изменяющихся сил на практике применяются различные приборы (индикаторы), главная часть которых, состоящая из тяжелого груза, подвешенного на упругой пружине и подверженного действию переменной силы, совершает сложное движение, складывающееся из гармонических колебаний разной частоты. Построением графиков слагаемых синусоид

$$x = a \sin \omega t + b \sin 2\omega t;$$
$$x = a \sin \omega t + b \sin \left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$
$$x = a \sin \omega t + b \sin (2\omega t + \pi)$$

выяснить графики результирующего движения и проследить за влиянием разности фаз на форму результирующего графика, если $\omega = 1, 2, 3$ ^{1}/сек; $a = 5$ *см*; $b = 8$ *см* (t — в секундах).

Указание. Отдельные графики построить на миллиметровой бумаге цветными карандашами.

364. Показать, что движение, совершаемое подвешенным к пружине тяжелым грузом по закону $x = a \sin kt + b \cos kt$, есть простое гармоническое колебание, и указать величину амплитуды, частоты и начальной фазы этого колебания.

Отв. $x = A \sin (\omega t + \varepsilon)$;

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{a}; \quad \sin \varepsilon = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

365. Показать, что при сложении двух гармонических колебаний, происходящих по одной прямой с одинаковой частотой:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2),$$

получается гармоническое колебание той же частоты.

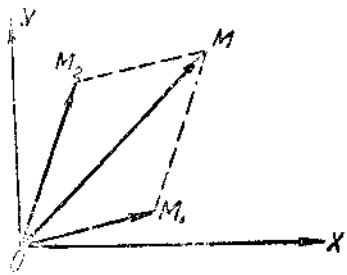
Ответ. $x = a \sin(\omega t + \alpha)$,

где

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}.$$

366. Для графического построения сложного перемещения двойного золотника паровой машины, участвующего в двух гармонических движениях одинаковой частоты $y = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$, Цейнер дал следующую векторную диаграмму: из начала координат проводится вектор $\overline{OM_1}$ длины a_1 под углом α_1 к оси OX и вектор $\overline{OM_2}$ длины a_2 под углом α_2 к оси OX. На обоих векторах $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ строится вектор $\overline{OM}$ как диагональ соответствующего параллелограма. Показать, что результирующее перемещение получится проектированием на вертикальную ось OY вектора $\overline{OM}$, вращающегося вместе с векторами $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ с угловой скоростью ω против часовой стрелки вокруг центра O.



Ответ. $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$,

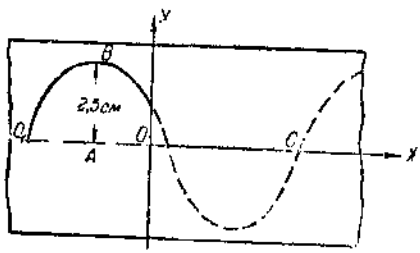
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}.$$

367. Применяя векторную диаграмму, показать, что в результате сложения нескольких гармонических колебаний одинаковой частоты получается гармоническое колебание той же частоты, амплитуда и фаза определяются замыкающей многоугольника, построенного на вектор-амплитудах слагаемых движений, а закон движения может быть получен проектированием этой замыкающей на неподвижную ось OY при вращении многоугольника против

часовой стрелки вокруг центра диаграммы с угловой скоростью, равной угловой частоте колебаний.

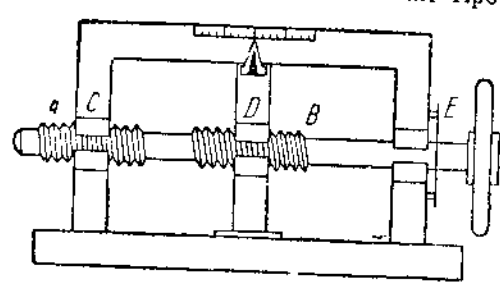
Ответ. $$y = \sum a_k \sin(\omega t + \alpha_k) = a \sin(\omega t + \alpha);$$
$$a = \sqrt{(\sum a_k \cos\alpha_k)^2 + (\sum a_k \sin\alpha_k)^2};$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sum a_k \sin\alpha_k}{\sum a_k \cos\alpha_k}.$$

368. Лента прибора (онлографа), служащего для записи колебательных движений, движется по направлению XO со скоростью 2 *м/сек*. Колеблющееся вдоль оси OY тело вычерчивает на ленте синусоиду, наибольшая ордината которой $AB = 2{,}5$ *см*, а длина $O_1C = 8$ *см*. Найти уравнение колебательного движения тела, предполагая, что точка O_1 синусоиды соответствуют положению тела при $t = 0$.



Ответ. $y = 2{,}5 \sin(50\pi t)$ *см*.

369. В некоторых измерительных и делительных приборах для перемещения указателя применяется диференциальный винт Прони, состоящий из оси AB, имеющей в части A винтовую нарезку с шагом h_1 *мм*, а в части B — нарезку с шагом $h_2 < h_1$. Часть A вращается в неподвижной гайке C, а часть B охватывается элементом D, лишенным вращательного движения и соединенным с указателем, скользящим вдоль неподвижной шкалы.



Определить перемещение указателя при повороте маховичка оси на $1/n$ оборота (соответствующая шкала нанесена на диске E), если $n = 200$, $h_1 = 0{,}5$ *мм* и $h_2 = 0{,}4$ *мм*. Обе нарезки правые или левые.

Ответ. $s = \frac{1}{n}(h_1 - h_2) = 0{,}0005$ *мм*.

370. Как изменится показание предыдущего прибора, если в части A сделать левую нарезку, а в части B — правую.

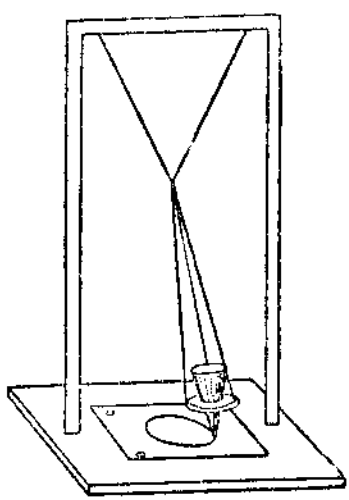
Отв. $s = \frac{1}{n}(h_1 + h_2) = 0{,}0045$ *мм*.

371. Найти уравнения движения и траекторию свободно падающего тела относительно пластинки, совершающей горизонтальное равномерное движение со скоростью u.

В начальный момент свободно падающее тело находилось в начале координат, не обладая скоростью.

Отв. $\xi = -ut$; $\eta = \frac{gt^2}{2}$; $\eta = \frac{g}{2u^2}\xi^2$ — парабола; оси $O\xi$ и $O\eta$ нанесены на пластинке и направлены: ось $O\xi$ горизонтально в сторону движения пластинки, ось $O\eta$ — вертикально вниз.

372. Трамвай движется по прямолинейному горизонтальному участку пути со скоростью $v = 18$ *км/час*, причем кузов совершает на рессорах колебания амплитуды $a = 0{,}8$ *см* и периода $T = 0{,}5$ сек. Найти уравнение траектории центра тяжести кузова, если его среднее расстояние от полотна дороги $h = 1{,}5$ *м*. При $t = 0$ центр тяжести находится в среднем положении и скорость колебания направлена вверх.



Отв. $y = 1{,}5 + 0{,}008 \sin 0{,}8\pi x$.

373. Определить траекторию сложного движения конца двойного маятника Airy, совершающего одновременно два взаимноперпендикулярных гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если уравнения указанных колебаний имеют вид:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha),$$
$$y = b \sin(\omega t + \beta).$$

Отв. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$.

374. Конец маятника Airy описывает фигуру Лиссажу, получающуюся при сложении двух взаимноперпендикулярных гармонических колебаний:

$$x = a \sin 2\omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Найти уравнение траектории.

Ответ. $a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$.

375. Железнодорожный поезд движется равномерно со скоростью 30 *км/час*; сигнальный фонарь, привешенный к последнему вагону, срывается с кронштейна. Определить траекторию абсолютного движения фонаря и длину пути s, который будет пройден поездом за время падения фонаря, если фонарь находился на высоте 4,905 *м* от земли; оси координат провести через начальное положение фонаря, — ось OX горизонтально в сторону движения поезда, ось OY — вертикально вниз.

Ответ. Парабола с вертикальной осью: $y = 0{,}0706\,x^2$;

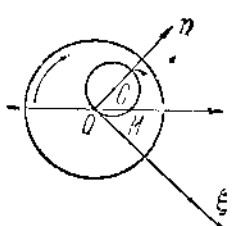
$s = 8\frac{1}{3}$ *м*.

376. Паровоз движется по горизонтальному прямолинейному участку пути со скоростью $v = 72$ *км/час*, радиус его колес $R = 1$ *м*. Принимая движение паровоза за переносное движение, найти уравнения абсолютного движения и построить траекторию точки колеса, отстоящей от центра на расстоянии $r = 1{,}05$ *м* (на реборде), если колесо катится без скольжения. Ось OX совпадает с рельсом; ось OY проходит через начальное низшее положение точки.

Ответ. Уравнения удлиненной циклоиды:

$$x = 20t - 1{,}05\sin 20t; \quad y = 1 - 1{,}05\cos 20t$$

(x, y — в метрах; t — в секундах).



377. Резец совершает поперечное возвратно-поступательное движение по закону $x = a\sin\omega t$. Найти уравнение траектории конца резца относительно диска, вращающегося равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси O, пересекающей абсолютную траекторию резца.

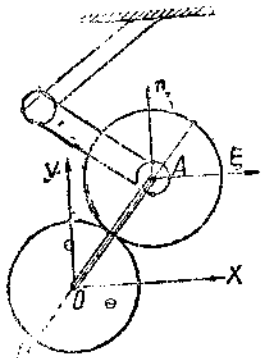
Ответ. $\xi^2 + \left(\eta - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ — окружность радиуса $\frac{a}{2}$.

378. Резец совершает поперечное равномерное движение по закону: $x = at$. Пользуясь полярными координатами, найти уравнение траектории конца резца относительно диска, равномерно вра-

щающегося с угловой скоростью ω вокруг оси O, пересекающей абсолютную траекторию резца.

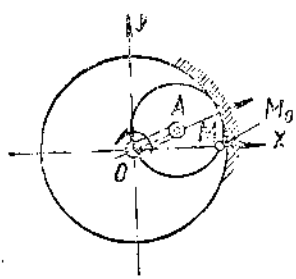
Ответ. Спираль Архимеда: $r = \frac{a}{\omega}\varphi$.

379. Разлагая движение подвижной шестеренки эпициклической передачи на переносное поступательное вместе с вспомогательными осями, движущимися с концом A кривошипа, и относительное вращение вокруг точки A, указать переносную и относительную траектории точки M подвижной шестеренки. Радиусы шестеренок одинаковы и равны r.



Ответ. Переносная траектория — окружность радиуса $2r$ с центром в точке O_1, относительная — окружность радиуса r с центром в точке A.

380. Употребляемый в скоропечатных станках механизм Лагира состоит из подвижной шестерни радиуса r, катящейся внутри неподвижной шестерни радиуса $R = 2r$ и приводимой в движение кривошипом OA (лежащим в параллельной плоскости с шестернями), равномерно вращающимся со скоростью ω вокруг центра неподвижной шестерни. Определить: 1) траекторию точки M произвольно взятого зубца подвижной шестерни относительно неподвижных осей, проходящих через точку O; 2) уравнения движения относительно тех же осей той точки M, которая при $t = 0$ находилась в точке M_0 касания шестерен на оси OX.

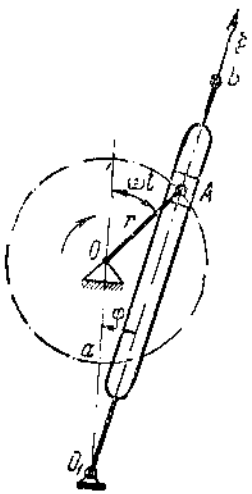


Ответ. Траектория — диаметр неподвижной шестерни.

Уравнения движения: $x = 2r\cos\omega t$, $y = 0$.

381. Разлагая движение подвижной шестеренки эпициклической передачи (см. черт. к зад. 379) на переносное поступательное вместе с вспомогательными осями $A\xi$ и $A\eta$, движущимися с концом A кривошипа, и относительное вращательное движение вокруг точки A, найти уравнения движения точки подвижной шестеренки, которая при $t = 0$ находилась в точке M_0 касания шестеренок на оси OX; радиусы шестеренок одинаковы и равны a; кривошип

вращается равномерно в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, с угловой скоростью ω вокруг центра O неподвижной шестеренки, принятого за начало координатных осей OX и OY.



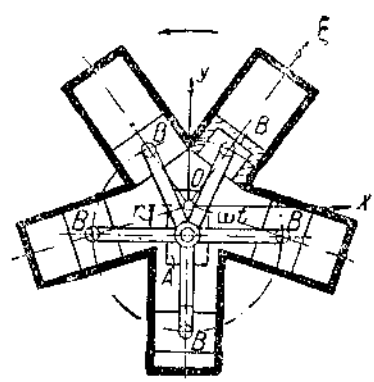
Ответ. $x = a(2\cos\omega t - \cos 2\omega t)$,
$y = a(2\sin\omega t - \sin 2\omega t)$ — кардиоида (ср. зад. 281).

382. Ускорительный механизм строгательного станка (механизм Витворта) состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B. Конец кривошипа OA шарнирно соединен с ползуном, скользящим вдоль прорези в кулисе O_1B. Найти уравнение относительного движения ползуна в прорези кулисы и уравнение вращения самой кулисы, если кривошип OA длиной r вращается с постоянной угловой скоростью ω; расстояние между осями валов $OO_1 = a$.

Ответ. $\xi = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t}$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\sin\omega t}{a + r\cos\omega t}.$$

383. В ротативном двигателе Гнома, схематически показанном на чертеже, цилиндры, прикрепленные к картеру, вращаются вместе с ним вокруг неподвижной оси вала O, а шатуны поршней вращаются вокруг пальца A неподвижного кривошипа OA. Указать: 1) траекторию абсолютного движения точек B поршней и 2) приближенное уравнение их относительного движения по отношению к цилиндрам, если цилиндры вращаются с угловой скоростью ω.



Дано: $OA = r$ и $AB = l$. Оси OX и OY имеют начало в центре вала. Принято, что $\lambda = \frac{r}{l}$ — мало.

Ответ. 1) Окружность: $x^2 + (y + r)^2 = l^2$.

2) $\xi = l\left(1 + \lambda\cos\omega t - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\omega t\right)$.

7. Сложение скоростей точки

384. Пароход идет от Горького до Астрахани 5 суток, а обратно 7 суток. Сколько времени идут по течению плоты от Горького до Астрахани?

Ответ. 35 суток.

385. Три парохода движутся равномерно и прямолинейно с параллельными скоростями. Первый движется в одну сторону со скоростью $v_1 = 4$ *км/час*, а два другие — в другую. Скорость второго парохода $v_2 = 3$ *км/час*, и его траектория делит расстояние между траекториями первого и третьего пароходов внутренним образом соответственно в отношении $k = \frac{1}{3}$.

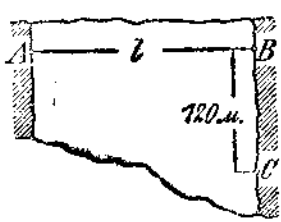
Определить скорость третьего парохода, если известно, что при движении все три парохода находятся на одной прямой.

Ответ. $v_3 = \frac{1}{k}(v_1 + v_2) + v_2$.

386. Отвесно падающий дождь оставляет на боковых стеклах автомобиля, движущегося по горизонтальной дороге, полосы под углом 40° к вертикали; скорость автомобиля 72 *км/час*. Определить абсолютную скорость v падения дождевых капель.

Ответ. $v = 23{,}8$ *м/сек*.

387. Берега реки параллельны; лодка вышла из точки A и, держа курс перпендикулярно к берегам, достигла противоположного берега через 10 мин. после отправления. При этом она попала в точку C, лежащую на 120 *м* ниже точки A по течению реки.

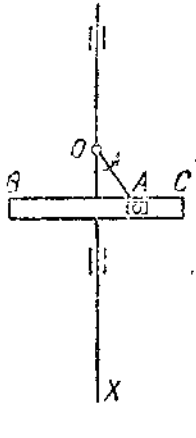


Чтобы попасть из точки A в точку B, лежащую на прямой AB, перпендикулярной к берегам, лодке надо держать курс под некоторым углом к прямой AB и против течения; в этом случае лодка достигает противоположного берега через 12,5 мин. Определить ширину реки l, относительную скорость u лодки по отношению к воде и скорость течения реки v.

Ответ. $l = 200$ *м*; $u = 20$ *м/мин*; $v = 12$ *м/мин*.

388. В кривошипно-кулисном механизме с поступательно движущейся кулисой BC кривошип OA (расположенный позади кулисы) длиною $l = 200$ *мм* вращается с постоянной угловой ско-

ростью, соответствующей $n = 90$ об/мин. Концом A, соединенным шарнирно с камнем, скользящим в прорези кулисы, он сообщает кулисе BC возвратно-поступательное движение. Определить скорость v кулисы в момент, когда кривошип образует с осью кулисы угол $XOA = 30°$.

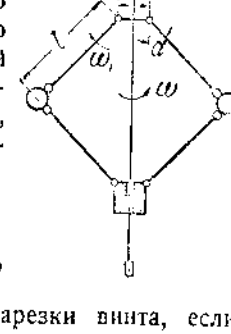


Ответ. $v = 0{,}942$ *м/сек*.

389. Поступательно движущийся кулак представляет собой полудиск радиуса r, движущийся по направлению своего диаметра AB со скоростью v_0. Определить скорость стержня, опирающегося на кулак и свободно ходящего в прорези державки, ось которой перпендикулярна диаметру диска. Радиус ролика ρ. В начальный момент стержень находился в наивысшем положении (см. черт. к задаче 361).

Ответ. $v = -\dfrac{v_0^2 t}{\sqrt{(r+\rho)^2 - v_0^2 t^2}}$.

390. Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ 1/сек, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней угловую скорость $\omega_1 = 1{,}2$ 1/сек. Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $l = 50$ *см*, расстояние между осями их привеса $2e = 10$ *см*, углы, образованные стержнями с осью регулятора, $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$.



Ответ. $v = 306$ *см/сек*.

391. Винт входит в неподвижную гайку, делая $n = 6$ об/мин. Шаг винта $h = 5$ *мм*. Найти скорость относительно гайки точки нарезки винта, если внешний радиус нарезки $r = 1{,}5$ *см*.

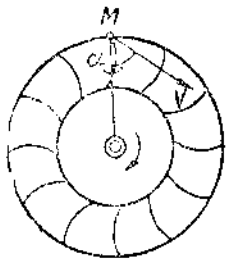
Ответ. $v = 9{,}44$ *мм/сек*.

392. Винт с правой резьбой и шагом $h = 5$ *мм*, лишенный поступательного движения, вращается с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 30$ об/мин. Гайка вращается с угловой скоростью, соответствующей $n_2 = 36$ об/мин. Определить скорость продольного перемещения гайки по винту: 1) если гайка вращается в том же направлении, что и винт, 2) если гайка вращается в на-

правлении, обратном направлению вращения винта. (Задача дает схему подачи резцов в станках для расточки цилиндров.)

Ответ. $v_1 = 30$ *мм/мин*; $v_2 = 330$ *мм/мин*.

393. В гидравлической турбине вода из направляющего аппарата попадает во вращающееся рабочее колесо, лопатки которого поставлены, во избежание входа воды с ударом, так, чтобы относительная скорость v_r касалась лопатки. Найти относительную скорость частицы воды на наружном ободе колеса (в момент входа), если ее абсолютная скорость при входе $v = 15$ *м/сек*, угол между абсолютной скоростью и радиусом $\alpha = 60°$, радиус входа $R = 2$ *м*, угловая скорость колеса соответствует $n = 30$ об/мин.

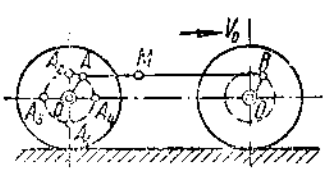


Ответ. $v_r = 10{,}06$ *м/сек*; $(\widehat{v_r, R}) = 41°50'$.

394. На токарном станке обтачивается цилиндр диаметра $d = 80$ *мм*. Шпиндель делает $n = 30$ оборотов в минуту. Скорость продольной подачи $v = 0{,}2$ *мм/сек*. Определить относительную скорость v_r резца по отношению к обрабатываемому предмету.

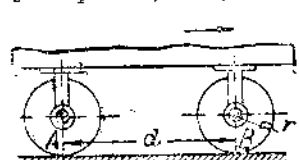
Ответ. $v_r = 125{,}7$ *мм/сек*; $\operatorname{tg}\alpha = 628$, где α — угол между v_r и осью шпинделя.

395. Найти абсолютную скорость какой-либо точки M спарника AB, соединяющего кривошипы OA и O_1B паровозных осей O и O_1, если радиусы колес одинаковы: $R = 1$ *м*, радиусы кривошипов: $OA = O_1B = r = 0{,}5$ *м*. Скорость паровоза $v_0 = 20$ *м/сек*. Скорость точки M определить для четырех моментов, когда кривошипы OA и O_1B либо вертикальны, либо горизонтальны. Колеса катятся по рельсам без скольжения.



Ответ. $v_1 = 10$ *м/сек*; $v_2 = 30$ *м/сек*; $v_3 = v_4 = 22{,}36$ *м/сек*.

396. Определить относительную скорость v_r центра вагонного колеса A по отношению к другому колесу B, катящемуся по тому же рельсу, если известно, что радиусы этих колес одинаковы и равны r, расстояние между

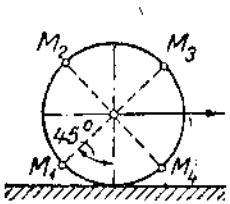


осями $AB = d$ и скорость поезда равна v. Движение колес по рельсам происходит без скольжения.

Ответ. Скорость $v_r = \frac{vd}{r}$ перпендикулярна к AB и направлена вниз.

397. Определить переносные и относительные скорости по отношению к кузову точек колеса вагона, двигающегося по прямолинейному пути со скоростью $v = 36$ *км/час* без скольжения, если указанные точки отстоят от оси на расстоянии, равном половине радиуса.

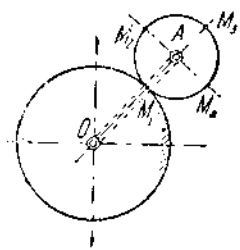
Ответ. $v_e = 36$ *км/час*;
$v_r = 18$ *км/час*.



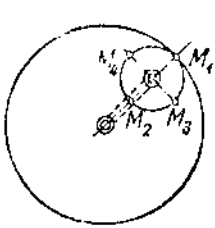
398. Найти скорости концов двух взаимноперпендикулярных диаметров колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения, если ось колеса движется со скоростью v_0. Указанные диаметры в данный момент составляют углы в 45° с вертикалью.

Ответ. $v_1 = v_4 = 0{,}765\, v_0$;
$v_2 = v_3 = 1{,}85\, v_0$.

399. Определить переносные и относительные скорости точек M_1, M_2, M_3 и M_4 подвижной шестеренки радиуса $r_2 = 10$ *см*, катящейся по неподвижной шестеренке радиуса $r_1 = 20$ *см*, если вращение кривошипа OA вокруг центра O, принимаемое за переносное движение, совершается с угловой скоростью $\omega = 6$ 1/сек. Точки лежат на концах двух взаимноперпендикулярных диаметров, из которых один совпадает с направлением кривошипа.



Ответ. $v_{r_1} = v_{r_3} = v_{r_2} = v_{r_4} = 120$ *см/сек*;
$v_{e_1} = 120$ *см сек*;
$v_{e_2} = v_{e_4} = 190$ *см/сек*; $v_{e_3} = 240$ *см/сек*.



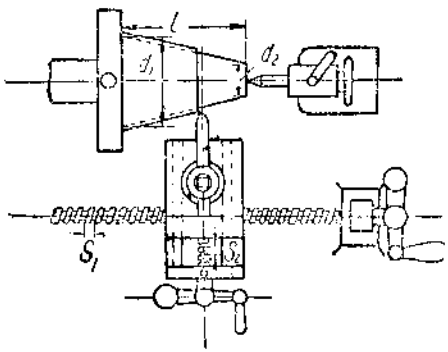
400. Найти скорости точек M_1 M_2, M_3, M_4 подвижной шестеренки радиуса $r = 5$ *см*, катящейся внутри неподвижной шестеренки радиуса $R = 15$ *см* и приводимой в движение кривошипом, равномерно вращающимся с угловой скоростью $\omega = 3$ 1/сек вокруг оси O.

Ответ. $v_1 = 0$; $v_2 = 60$ *см/сек*;
$v_3 = v_4 = 42{,}4$ *см/сек*.

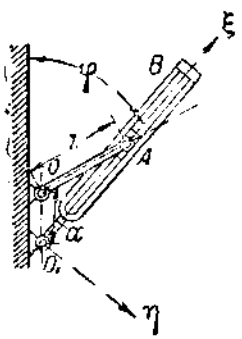
401. Найти скорости точек M_1, M_2, M_3 и M_4 подвижной шестеренки радиуса $r = 5$ *см*, катящейся снаружи неподвижной шестеренки радиуса $R = 15$ *см* и приводимой в движение кривошипом OA, вращающимся равномерно с угловой скоростью $\omega = 4$ 1/сек вокруг центра неподвижной шестеренки; точки M_1, M_2, M_3 и M_4 лежат на диаметрах, образующих углы в 45° с кривошипом OA.

Ответ. $v_1 = v_4 = 61{,}2$ *см/сек*;
$v_2 = v_3 = 147{,}8$ *см/сек*.

402. Для обточки усеченного конуса высотою $l = 200$ *мм* с диаметром основания $d_1 = 80$ *мм*, а $d_2 = 60$ *мм*, работают ходовым винтом и винтом ручной поперечной подачи; на один оборот поперечная подача дает $s_2 = 0{,}504$ *мм*. Сколько оборотов в минуту должен делать винт поперечной подачи, если продольный самоход подает суппорт со скоростью $v_1 = 20{,}16$ *мм/мин*?



Ответ. $n_2 = 2$ об/мин.



403. Ускорительный механизм строгательного станка состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B; конец A кривошипа OA скользит вдоль прорези в кулисе O_1B; расстояние между осями валов OO_1 равно a, длина кривошипа OA равна l, причем $l > a$. Вал O вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти: 1) угловую скорость ω_1 вала O_1 и относительную скорость точки A по отношению к кулисе O_1B, выразив их через переменную величину $O_1A = s$; 2) наибольшее и наименьшее значения этих величин; 3) те положения кривошипа и кулисы, когда $\omega_1 = \omega$.

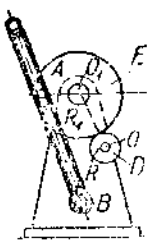
Ответ. $\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{s^2}\right)$; $\omega_{1\max} = \omega\frac{l}{l-a}$; $\omega_{1\min} = \omega\frac{l}{l+a}$;

$\omega_1 = \omega$ при $O_1B \perp O_1O$; $v_{r\max} = a\omega$;

$$v_{r\min} = 0;$$

$$v_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)}.$$

404. Камень A качающейся кулисы механизма строгательного станка приводится в движение зубчатой передачей, состоящей из зубчатки D и зубчатки E, несущей на себе ось камня A в виде пальца. Радиусы зубчаток $R = 100$ *мм*, $R_1 = 350$ *мм*, расстояние между осью зубчатки E и центром качания кулисы $O_1B = 700$ *мм*. Определить угловую скорость кулисы в моменты, когда отрезок O_1A либо вертикален (верхнее и нижнее положения), либо перпендикулярен к кулисе AB (левое и правое положения), если зубчатка D имеет угловую скорость $\omega = 7$ 1/сек, $O_1A = 300$ *мм*. Точки O_1 и B расположены на одной вертикали.



Ответ. $\omega_I = 0{,}6$ 1/сек;
$\omega_{III} = 1{,}5$ 1/сек;
$\omega_{II} = \omega_{IV} = 0$.

405. Определить угловую скорость вращающейся кулисы кривошипно-кулисного механизма при четырех положениях кривошипа: двух вертикальных и двух горизонтальных, если $a = 60$ *см*; $l = 80$ *см*, а угловая скорость кривошипа соответствует $n = 30$ об/мин. (см. черт. к зад. 403).

Ответ. $\omega_I = \frac{4}{7}\pi$ 1/сек; $\omega_{III} = 4\pi$ 1/сек;
$\omega_{II} = \omega_{IV} = 0{,}64\pi$ 1/сек.

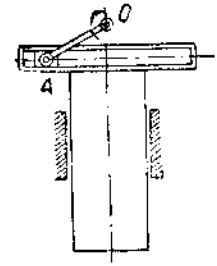
406. Определить абсолютную скорость поршня ротативного двигателя при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях шатуна AB, если длина кривошипа $OA = r = 80$ *мм*, длина шатуна $AB = l = 240$ *мм*, число оборотов цилиндров с картером $n = 1200$ об/мин. (см. черт. к зад. 383).

Ответ. $v_I = 20{,}1$ *м/сек*; $v_{III} = 40{,}2$ *м/сек*;
$v_{II} = v_{IV} = 33{,}5$ *м/сек*.

8. Сложение ускорений точки при переносном поступательном движении

407. Кривошипно-кулисный механизм приводного молота состоит из прямолинейной кулисы, совершающей возвратно-поступательное

движение, получаемое через камень A, соединенный с концом кривошипа $OA = r = 40$ *см*, вращающегося равномерно с угловой скоростью, соответствующей $n = 120$ об/мин. При $t = 0$ кулиса занимает низшее положение. Найти ускорение кулисы.

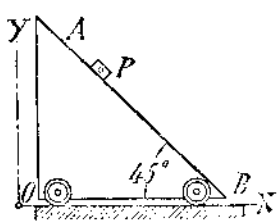


Ответ. $w = 6320 \cos 4\pi t$ *см/сек*^{2}.

408. Кривошип $OA = r = 0{,}5$ *м*, приводящий в движение прямолинейную кулису, которая совершает возвратно-поступательное движение, в момент, когда $\sphericalangle XOA = 60°$, имеет угловую скорость $\omega = 1$ 1/сек и ускорение $\varepsilon = \pm 1$ 1/сек^2. Найти ускорение кулисы в указанный момент для двух случаев: 1) когда $\varepsilon > 0$ и 2) когда $\varepsilon < 0$ (см. черт. к зад. 388).

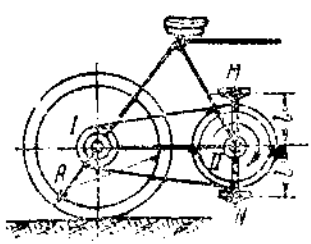
Ответ. $w_1 = 0{,}683$ *м/сек*^{2};
$w_2 = 0{,}183$ *м/сек*^{2}.

409. Наклонная плоскость AB, составляющая угол 45° с горизонтом, движется прямолинейно параллельно оси OX с постоянным ускорением 1 *дм/сек*^{2}. По этой плоскости спускается тело P с постоянным относительным ускорением $\sqrt{2}$ *дм/сек*^{2}, начальные скорости плоскости и тела равны нулю; начальное положение тела определяется координатами: $x = 0$; $y = h$. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела.



Ответ. $y = h - \frac{x}{2}$; $v = \sqrt{5}\, t$ *дм/сек*;
$w = \sqrt{5}$ *дм/сек*^{2}.

410. Велосипедист на некотором участке горизонтального прямолинейного пути движется по закону: $s = 0{,}1\, t^2$ (s в *м*; t — в сек.). Дано: $R = 350$ *мм*; $l = 180$ *мм*; $z_1 = 18$ зубцов; $z_2 = 48$ зубцов. Определить абсолютные ускорения осей M и N велосипедных педалей (предполагая, что колеса катятся без скольжения) при $t = 10$ сек, если в этот момент кривошип MN расположен вертикально.



Ответ. $w_M = 0{,}848$ *м/сек*^{2};
$w_N = 0{,}841$ *м/сек*^{2}.

411. Определить абсолютное ускорение какой-нибудь точки спарника AB, соединяющего кривошипы паровозных осей O и O_1, если паровоз движется по прямолинейному участку пути равномерно со скоростью $v_0 = 36$ *км/час*. Радиусы колес $R = 1$ *м*, радиусы кривошипов $r = 0{,}75$ *м* (см. черт. к зад. 395).

Ответ. $w = 75$ *м/сек*^{2}.

412. Поезд движется по прямолинейному участку пути со скоростью $v_0 = 36$ *км/час* с ускорением $w_0 = 10$ *м/сек*^{2}.

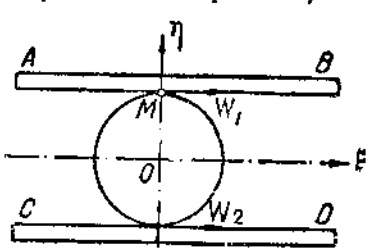
Определить ускорения концов горизонтального и вертикального диаметров колеса вагона в данный момент времени; радиус колеса $R = 1$ *м*; колесо катится без скольжения.

Ответ. $w_1 = 110{,}5$ *м/сек*^{2};
$w_2 = 102$ *м/сек*^{2};
$w_3 = 90{,}6$ *м/сек*^{2};
$w_4 = 100$ *м/сек*^{2}.

413. Определить величины и направления ускорений концов двух взаимноперпендикулярных диаметров колеса, наклоненных в данный момент к горизонту под углом $\alpha = 45°$, если в этот момент вагон движется по прямолинейному участку пути со скоростью $v_0 = 10$ *м/сек* и с ускорением $w_0 = 10$ *м/сек*^{2}. Указать также угловое ускорение колеса, если радиус колеса $R = 0{,}5$ *м*.

Ответ. $w_1 = 207{,}8$ *м/сек*^{2};
$w_2 = 193{,}7$ *м/сек*^{2};
$w_3 = 193$ *м/сек*^{2};
$w_4 = 207$ *м/сек*^{2}.
$\varepsilon = 20$ 1/сек^2.

414. Зубчатое колесо радиуса $R = 0{,}5$ *м* зажато между двумя параллельными рейками, скользящими в одну сторону с ускорениями $w_1 = 1{,}5$ *м/сек*^{2} и $w_2 = 2{,}5$ *м/сек*^{2}. Найти ускорение w_0 центра колеса O и угловое ускорение колеса. Поступательное движение системы осей $\xi O \eta$ вместе с центром колеса принять за переносное.

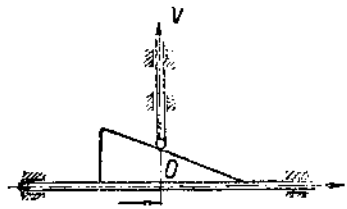


Ответ. $\varepsilon = 1$ 1/сек^2;
$w_0 = 2$ *м/сек*^{2}.

415. Найти ускорение центра колеса и угловое его ускорение; радиус колеса $R = 1$ *м*. Оно зажато между двумя параллельными

рейками, скользящими в разные стороны с ускорениями $w_1 = 1$ *м/сек²* и $w_2 = 2$ *м/сек²*.

Ответ. $\varepsilon = 1{,}5$ 1/сек²,
$w_0 = 0{,}5$ *м/сек²*.



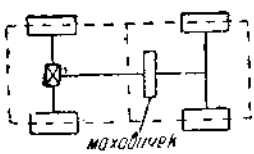
416. Поступательно движущийся кулак имеет форму треугольника, ведущая сторона которого наклонена к оси OX под углом α.

Определить ускорение стержня, опирающегося на кулак и свободно скользящего в подшипниках, если кулак движется с постоянным ускорением w_0, а стержень перпендикулярен к оси OX.

Ответ. $w = w_0 \operatorname{tg} \alpha$.

417. Поступательно движущийся кулак имеет форму полудиска, скользящего по направлению своего диаметра AB с постоянной скоростью v_0. Определить ускорение движения стержня, опирающегося на кулак, перпендикулярного его диаметру AB и свободно скользящего в прорези державки. Радиус ролика ρ. В начальный момент стержень находится в наивысшем положении (см. черт. к задаче 361).

Ответ. $$w = \frac{v_0^2 (r+\rho)^2}{[(r+\rho)^2 - v_0^2 t^2]^{3/2}}.$$



418. Автомобиль идет по прямолинейному пути с ускорением $w_0 = 2$ *м/сек²*. На продольном валу насажен маховичок радиуса $R = 0{,}25$ *м*, вращающийся в данный момент с угловой скоростью $\omega = 4$ 1/сек и угловым ускорением $\varepsilon = 4$ 1/сек². Найти абсолютное ускорение точек обода маховичка.

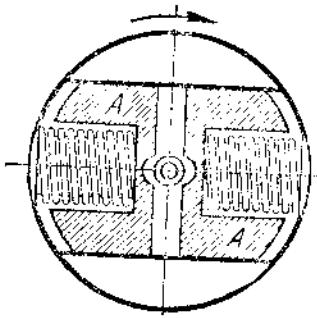
Ответ. $w = 4{,}58$ *м/сек²*.

419. Самолет движется прямолинейно с ускорением $w_0 = 4$ *м/сек²*, пропеллер диаметра $d = 1{,}8$ *м* вращается равномерно с угловой скоростью, соответствующей $n = 1800$ об/мин. Найти траекторию, скорость и ускорение конца пропеллера; линию движения самолета принять за ось OX. Начальная скорость самолета $v_0 = 0$.

Ответ. $x = 2t^2$ *м*;
$y = 0{,}9 \cos 60\pi t$ *м*;
$z = 0{,}9 \sin 60\pi t$ *м*.

9. Сложение ускорений точки при переносном вращательном движении вокруг неподвижной оси

420. В плоском регуляторе Гартунга, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью при $n = 180$ об/мин, тяжелые гири A, прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяется по закону: $x = (10 + 5 \sin 8\pi t)$ *см*.



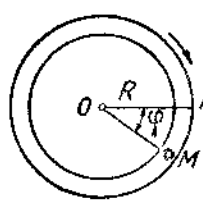
Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда Кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать также значения Кориолисова ускорения при крайних положениях гири.

Ответ. $w_a = 600\pi^2$ *см/сек*^{2}; $w_c = 0$.

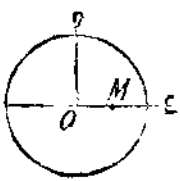
421. Струя воды течет по горизонтальной трубке AO, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси при $n = 60$ об/мин. Определить Кориолисово ускорение w_c в той точке струи, где относительная скорость $v_r = \frac{21}{11}$ *м/сек* и направлена по OA $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Ответ. $w_c = 24$ *м/сек*^{2}.

422. Круглая трубка радиуса $R = 1$ *м* вращается около центра O по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ 1/сек. В трубке около одной из ее точек, точки A, колеблется шарик M так, что угол $\varphi = \sin \pi t$. Определить абсолютные ускорения шарика: касательное w_t и нормальное w_n в момент $t = 2^1/_6$ сек.



Ответ. $w_t = -4{,}93$ *м/сек*^{2}, $w_n = 13{,}84$ *м/сек*^{2}.



423. Диск вращается около своего центра по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 1/сек^2; в момент $t = 0$ угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi = \sin \pi t$ *дм*. Определить проекции абсолютного ускорения точки M: w_ξ и w_η в момент $t = 1^2/_3$ сек.

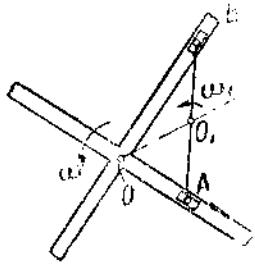
Ответ. $w_\xi = 10{,}95$ *дм/сек*^{2}; $w_\eta = -4{,}37$ *дм/сек*^{2}.

424. Точка движется равномерно с относительной скоростью v_r

по хорде диска, который вращается вокруг его оси O, перпендикулярной к плоскости диска оси с постоянной угловой скоростью ω. Определить абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она находится на кратчайшем расстоянии h от оси, в предположении, что относительное движение точки происходит в сторону вращения диска.

Ответ. $v = v_r + h\omega$; $w = \omega^2 h + 2\omega v_r$.

425. Для передачи вращения от одного вала к другому, параллельному первому, применяется муфта Галовея, которая является обращенным эллиптическим циркулем с закрепленным кривошипом OO_1. Кривошип AB вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1 и приводит во вращение крестовину вокруг оси O вместе со вторым валом.



Определить угловую скорость вращения крестовины, а также переносную и относительную (по отношению к крестовине) скорости и ускорение (переносное, относительное и Кориолисово) точки A ползуна при $\omega_1 = \text{const}$, если $OO_1 = AO_1 = O_1B = a$.

Ответ. $\omega = \frac{\omega_1}{2}$; $v_e = a\omega_1 \sin\frac{\omega_1}{2}t$, $v_r = a\omega_1 \cos\frac{\omega_1 t}{2}$;

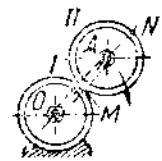
$$w_e = w_r = \frac{a\omega_1^2}{2}\left|\sin\frac{\omega_1 t}{2}\right|; \quad w_c = a\omega_1^2 \cos\frac{\omega_1 t}{2}.$$

426. Шестеренка радиуса r катится внутри неподвижной шестеренки радиуса $R = 2r$. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω.

Определить скорость и ускорение точки M произвольного зубца подвижной шестеренки (см. черт. к зад. 380).

Ответ. $v_M = 2r\omega \sin\omega t$; $w_M = 2r\omega^2 \cos\omega t$.

427. Кривошип OA вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω; на пальце A свободно надето колесо II радиуса r, катящееся без скольжения по неподвижному колесу I того же радиуса, центр которого находится в точке O. Определить величины и направления ускорений точек M и N колеса II, лежащих на концах диаметра, совпадающего по направлению с кривошипом.

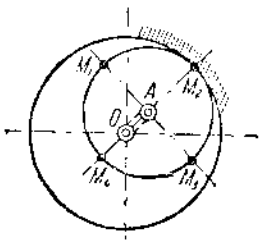


Ответ. $w_M = 2r\omega^2$; $w_N = 6r\omega^2$.

428. Найти ускорения точек M_1, M_2, M_3 и M_4 шестеренки радиуса $r = 5$ *см*, катящейся снаружи неподвижной шестеренки радиуса $R = 15$ *см* и приводимой в движение кривошипом OA, равномерно вращающимся вокруг центра неподвижной шестеренки O с угловой скоростью $\omega = 3$ 1/сек (см. черт. к зад. 399).

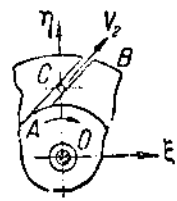
Ответ. $w_1 = 540$ *см/сек*^{2};
$w_2 = w_4 = 742$ *см/сек*^{2};
$w_3 = 900$ *см/сек*^{2}.

429. Кривошип OA, вращающийся с угловой скоростью $\omega = 15$ 1/сек, приводит в движение шестеренку радиуса $r_1 = 12$ *см*, катящуюся внутри неподвижной шестеренки радиуса $r_2 = 16$ *см*. Определить ускорения концов двух взаимноперпендикулярных диаметров подвижной шестеренки, из коих один совпадает по направлению с кривошипом.



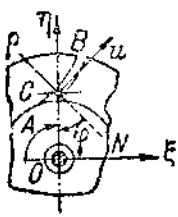
Ответ. $w_1 = w_3 = 949$ *см/сек*^{2};
$w_2 = 1200$ *см/сек*^{2};
$w_4 = 600$ *см/сек*^{2}.

430. Турбина с прямолинейными каналами равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Вода течет по каналам с постоянной относительной скоростью v_r. Найти проекции абсолютной скорости и ускорения на оси координат для частицы воды, находящейся в точке C канала AB, при следующих данных: канал AB наклонен к радиусу под углом 45°, $OC = 0{,}5$ *м*, $\omega = 4\pi$ 1/сек, $v_r = 2$ *м/сек*.



Ответ. $v_\eta = 1{,}414$ *м/сек*; $v_\xi = 7{,}7$ *м/сек*;
$w_\eta = 114{,}5$ *м/сек*^{2}; $w_\xi = 35{,}55$ *м/сек*^{2}.

431. Решить предыдущую задачу для случая криволинейного канала, если радиус кривизны канала в точке C равен ρ, а угол между нормалью CN и радиусом CO равен φ. Радиус CO равен r.



Ответ. $v_\xi = v_r \cos\varphi + r\omega$; $v_\eta = v_r \sin\varphi$;

$$w_\xi = \left(2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\sin\varphi;$$

$$w_\eta = -\left[r\omega^2 + \left(2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\cos\varphi\right].$$

432. Выразить в функции от времени угловое ускорение качающейся кулисы поперечно-строгального станка, если кривошип длиною r вращается равномерно с угловой скоростью ω; расстояние между осями вращения кривошипа и кулисы $a > r$ (см. черт к зад. 382).

Ответ. $\varepsilon_1 = \dfrac{(r^2 - a^2)\, ar\omega^2 \sin \omega t}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t)^2}$.

433. Камень вращающейся кулисы совершает переносное движение вместе с кулисой, обладающей неравномерным вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости кулисы, и относительное прямолинейное неравномерное движение вдоль прорези кулисы. Определить проекции абсолютного ускорения камня на подвижные оси координат (см. черт. к зад. 403).

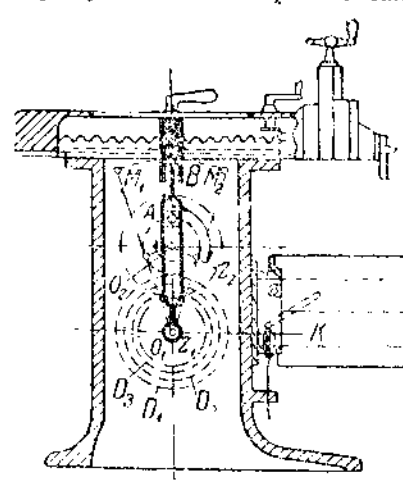
Ответ. $w_\xi = w_r - s\omega^2$;
$w_\eta = s\varepsilon + 2v_r\omega$.

434. Определить угловое ускорение вращающейся кулисы кривошипно-кулисного механизма строгального станка при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа, если длина кривошипа $l = 40$ *см*, расстояние между осями кривошипа и кулисы $a = 30$ *см*, угловая скорость равномерного вращения кривошипа $\omega = 3$ 1/сек. (см. черт. к зад. 403).

Ответ. $\varphi = 0$ и $\varphi = 180°$; $\varepsilon = 0$;
$\varphi = 90°$; $\varepsilon = 1{,}21$ 1/сек^2;
$\varphi = 270°$; $\varepsilon = -1{,}21$ 1/сек^2.

435. Найти ускорение относительного движения камня предыдущей кулисы вдоль ее прорези при указанных четырех положениях кривошипа.

Ответ. $w_r = 154{,}3$ *см/сек*^{2};
$\varphi = 0$;
$w_r = 103{,}7$ *см/сек*^{2};
$\varphi = 90$ и $\varphi = 270°$;
$w_r = 1080$ *см/сек*^{2}.
$\varphi = 180°$.



436. Кривошипно-кулисный механизм поперечно-строгательного станка (шепинга) состоит из кривошипа O_2A и качающейся кулисы O_1B, конец которой B несет ползушку, ходящую в вертикальном прорезе державки резца, сообщая резцу возвратно-поступательное дви-

жение. Определить уравнение движения резца, скорость и ускорение его движения в зависимости от угла поворота кривошипа и его радиуса, если $O_2A = r$ длина кулисы $O_1B = l$, расстояние между центром вращения кривошипа и центром качания кулисы $O_1O_2 = a$. Угловая скорость кривошипа $\omega = \text{const}$.

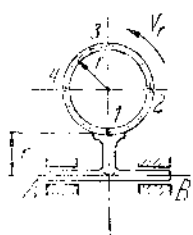
Отв. $$x = l\frac{r\sin\omega t}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega t}},$$

$$v = rl\omega\frac{(a - r\cos\omega t)(a\cos\omega t - r)}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega t)^{3/2}}.$$

437. Найти ускорение резца строгательного станка (шепинга) с качающейся кулисой при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа, если длина кривошипа $r = 10$ *см*, расстояние между центром вращения кривошипа и кулисы $a = 30$ *см*, длина кулисы $l = 60$ *см*, скорость вращения кривошипа $\omega = 4$ 1/сек (см. черт. к зад. 436).

Отв. При $\varphi = 0$ и $\varphi = 180°$, $w = 0$;
» $\varphi = 90°$ и $\varphi = 270°$, $w = \pm 221{,}5$ *см/сек*^{2}.

438. Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом AB и притом так, что вал расположен в плоскости кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с относительной скоростью $v_r = r\omega$, где ω — постоянная угловая скорость вала AB, вращающегося по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от A к B.



Предлагаемая схема сложного движения жидкости имеет место в гидравлических центробежных муфтах сцепления.

Определить величины и направления абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках *1*, *2*, *3* и *4*.

Отв. $w_1 = 0$;
$w_2 = w_4 = 3r\omega^2$;
$w_3 = 4r\omega^2$ и направлено от точки *3* к точке *1*.

439. По условиям предыдущей задачи, измененным лишь в том отношении, что плоскость кольца будет перпендикулярна к валу AB, определить те же величины в двух случаях:

1) переносное и относительное движения одного направления;
2) составляющие движения противоположны по направлению.

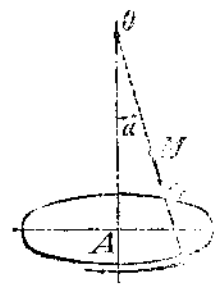
Ответ.

1) $w_1 = 2r\omega^2$ и направлено от точки 1 к точке 3; $w_3 = 6r\omega^2$ и направлено от точки 3 к точке 1; $w_2 = w_4 = 2\sqrt{5}\,r\omega^2$ и направлены от точек 2 и 4 к точке, лежащей на прямой 0—3 в середине отрезка 1—0_1;

2) абсолютные ускорения отмеченных точек расположены в плоскости вращения, параллельны между собою, направлены в одну сторону от точки 3 к точке 1 и равны по величине:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 2r\omega^2.$$

440. Точка M равномерно движется по образующей кругового конуса с осью OA от вершины к основанию с относительной скоростью v_r; угол $MOA = \alpha$. В момент $t = 0$ расстояние $OM = a$. Конус равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти абсолютное ускорение точки M.



Ответ. Ускорение лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и представляет гипотенузу треугольника с катетами:

$$w_{e_n} = \omega^2 (a + v_r t) \sin\alpha \quad \text{и} \quad w_c = 2v_r \omega \sin\alpha.$$

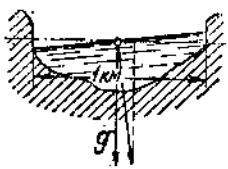
441. Определить в предыдущей задаче величину абсолютного ускорения w точки M в момент $t = 1$ сек в том случае, когда она движется по образующей конуса с постоянным относительным ускорением w_r, направленным от вершины конуса к основанию, при следующих данных: $\alpha = 30°$; $a = 15$ *см*, $w_r = 10$ *см/сек*^{2}; $\omega = 1$ 1/сек; в момент $t = 0$ относительная скорость точки v_r равна нулю.

Ответ. $w = 14{,}14$ *см/сек*^{2}.

442. Полагая в задаче № 440, что конус вращается вокруг своей оси равноускоренно с угловым ускорением ε, определить величину абсолютного ускорения w точки M в момент $t = 2$ сек, при следующих данных: $\alpha = 30°$, $a = 18$ *см*, $v_r = 3$ *см/сек*, $\varepsilon = 0{,}5$ 1/*сек*^{2}, в момент $t = 0$ угловая скорость ω равна нулю.

Ответ. $w = 15$ *см/сек*^{2}.

443. Река, шириною 1 *км*, течет с юга на север со скоростью 5 *км/час*. Определить Кориолисово ускорение w_c частиц воды, находящихся на 60° северной широты. Определить затем, у какого берега вода выше и насколько, если известно, что поверхность воды должна быть перпендикулярна к направлению вектора, составленного из ускорения силы тяжести g и вектора, равного и противоположного Кориолисову ускорению.



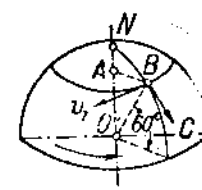
Ответ. Кориолисово ускорение $w_c = 0{,}0175$ *см/сек*^{2} и направлено к западу. Вода выше у правого берега на 1,782 *см*.

444. Магистраль южных железных дорог к северу от Мелитополя идет прямо по меридиану. Паровоз движется со скоростью $v_r = 90$ *км/час* на север; широта места $\varphi = 47°$. Найти Кориолисово ускорение паровоза.

Ответ. $w_c = 0{,}266$ *см/сек*^{2}.

445. По железнодорожному пути, проложенному по параллели 30° сев. широты, движется паровоз со скоростью $v_r = 20$ *м/сек* с запада на восток. Найти добавочное (Кориолисово) ускорение w_c паровоза.

Ответ. $w_c = 0{,}291$ *см/сек*^{2}.



446. Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° сев. широты со скоростью $v_r = 4$ *км/час*. Определить сумму проекций на касательную BC к соответствующему меридиану тех составляющих ускорений частиц воды, которые зависят от скорости течения. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ *м*.

Ответ. $w_{BC} = 1396 \cdot 10^{-5}$ *см/сек*^{2}.

447. Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° сев. широты со скоростью $v_r = 4$ *км/час*. Найти составные части абсолютного ускорения частицы воды. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ *м*.

Ответ. $w_e = 1692 \cdot 10^{-3}$ *см/сек*^{2};
$w_r = 3{,}86 \cdot 10^{-7}$ *см/сек*^{2};
$w_c = 1616 \cdot 10^{-5}$ *см/сек*^{2}.

448. Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если он вращается вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{2}$ 1/сек, при угловом ускорении $\varepsilon =$

$= 1/\text{сек}^2$, скорость расхождения шаров $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ $1/\text{сек}^2$, при ускорении $\varepsilon_1 = 0{,}4$ $1/\text{сек}^2$. Длина рукояток шаров $l = 50$ *см*, расстояние между осями их привеса $2e = 10$ *см*, угол раствора регулятора в рассматриваемый момент $2\alpha = 90°$ (см. черт. к зад. 390).

Ответ. $w = 293{,}7$ *см/сек*^{2}.

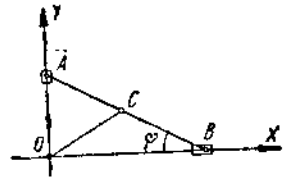
449. Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если после изменения нагрузки машины у него установилась скорость вращения $\omega = \pi$ $1/\text{сек}$, причем шары продолжают опускаться в данный момент со скоростью $v_r = 100$ *см/сек* и ускорением $w_{rt} = 10$ *см/сек*^{2}. Угол раствора регулятора $2\alpha = 60°$, длина рукояток шаров $l = 50$ *см*, расстоянием между их осями привеса можно пренебречь.

Ответ. $w = 671$ *см/сек*^{2}.

IV. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

10. Уравнения движения плоской фигуры и ее точек.

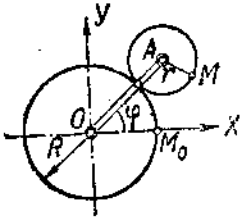
450. Найти уравнения движения колеса вагона радиуса R, если колесо катится без скольжения по прямолинейному рельсу, принятому за ось OX, и скорость оси колеса $v = \text{const}$. При $t = 0$ центр колеса находился на оси OY. Принять центр колеса за полюс.



Ответ. $x_0 = vt$, $y_0 = R$, $\varphi = -\frac{v}{R}t$.

451. Линейка эллипсографа приводится в движение кривошипом OC, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси O. Принимая ползун B за полюс, найти уравнение плоского движения линейки эллипсографа, если $OC = BC = AC = r$.

Ответ. $x_0 = 2r\cos\omega_0 t$; $y_0 = 0$; $\varphi = \omega_0 t$.



452. Шестеренка радиуса r, катящаяся по шестеренке радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равноускоренно с угловым ускорением ε_0 вокруг оси O неподвижной шестеренки.

Найти уравнения движения подвижной шестеренки, принимая за полюс ее центр A, если при $t = 0$ угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 0$ и начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$.

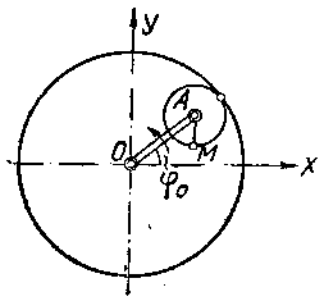
Вычертить траектории точки M зубца шестеренки, если

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}.$$

Ответ. $x_0 = (R+r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$; $y_0 = (R+r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$.

$$\varphi = \left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

453. Шестеренка радиуса r, катящаяся внутри неподвижной шестеренки радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равномерно вокруг оси O неподвижной шестеренки с угловой скоростью ω_0. При $t = 0$, $\sphericalangle \varphi_0 = 0$.



Найти уравнения движения подвижной шестеренки, принимая ее центр A за полюс.

Вычертить траектории точки M зубца шестеренки при

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}.$$

Ответ. $x_0 = (R-r)\cos\omega_0 t$; $y_0 = (R-r)\sin\omega_0 t$;

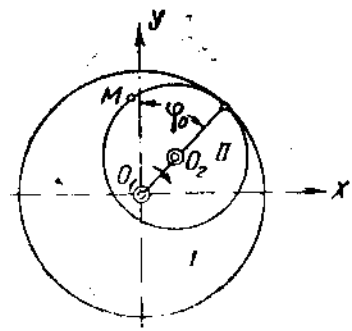
$$\varphi = -\left(\frac{R}{r}-1\right)\omega_0 t.$$

454. Найти уравнения движения шатуна паровой машины, если кривошип вращается равномерно; за полюс шатуна взять точку A на оси пальца кривошипа; r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω_0 — угловая скорость кривошипа. При $t = 0$, $\sphericalangle \alpha = 0$ (см. черт. к зад. 353).

Ответ. $x_0 = r\cos\omega_0 t$; $y_0 = r\sin\omega_0 t$;

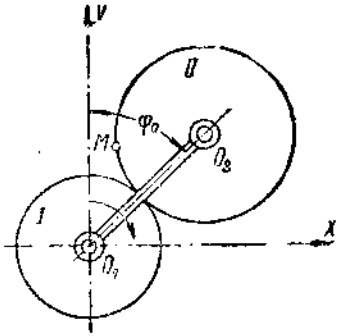
$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right).$$

455. Внутри неподвижного зубчатого колеса I радиуса $r_1 = 20$ *см* катится без скольжения колесо II радиуса $r_2 = 12$ *см*. Относительно осей O_1X и O_1Y, проходящих через центр неподвижного колеса, определить уравнения движения точки M колеса VII, которая в начальный момент при $\varphi_0 = 0$ лежала на оси O_1Y и служила точкой касания колес. Стержень O_1O_2, приводящий в движение колесо II, делает $n = 270$ об/мин $= \text{const}$.



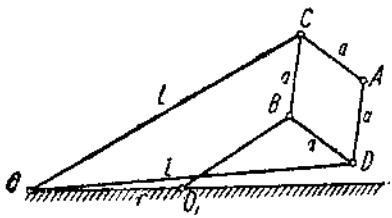
Ответ. $x_M = 8\sin 9\pi t - 12\sin 6\pi t$; $y_M = 8\cos 9\pi t + 12\cos 6\pi t$.

456. Зубчатое колесо II радиуса $r_2 = 16$ *см* катится без скольжения снаружи неподвижного колеса I радиуса $r_1 = 12$ *см*. Относительно осей OX и OY, проходящих через центр неподвижного колеса, определить уравнения движения точки M колеса II, которая в начальный момент при $\varphi = 0$ лежала на оси OY и являлась точкой касания колес, если кривошип O_1O_2 делает $n = 240$ об/мин $=$ $=$ const.



Ответ. $x_M = 28 \sin 8\pi t - 16 \sin 14\pi t$;

$y_M = 28 \cos 8\pi t - 16 \cos 14\pi t$.



457. Инверсор или прямило Поселье-Липкина представляет собой шарнирный механизм, состоящий из ромба $ADBC$ со сторонами длиною a, причем вершины C и D двигаются по одной окружности при помощи стержней OC и OD длины l, вершина B — по другой окружности при помощи стержня O_1B длиною $r = OO_1$.

Найти траекторию вершины A.

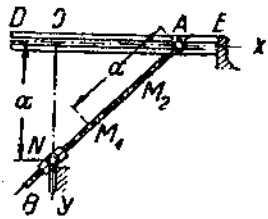
Ответ. Прямая, перпендикулярная к OO_1 и отстоящая от точки O на расстоянии $x = \dfrac{l^2 - a^2}{2r}$.

458. Стержень AB совершает плоское движение, которое можно представить как падение без начальной скорости под действием силы тяжести и вращение вокруг центра тяжести C с угловой скоростью $\omega \cdot AC = BC = l$. Определить траекторию точки B, если в начальный момент стержень AB был горизонтален, а точка B была справа. Ускорение силы тяжести g; начальное положение точки C взять за начало координат; ось OY направить вертикально вниз, ось OX — горизонтально вправо.

Ответ. $x = l \cos \omega t$;

$$y = \frac{gt^2}{2} + l \sin \omega t.$$

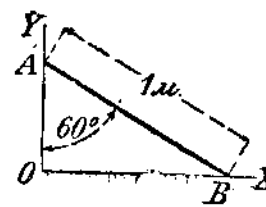
459. Конхоидограф состоит из линейки AB, которая шарнирно соединена в точке A с ползушкой, скользящей в прямолинейной прорези DE, и проходит через поворотную трубочку, свободно вращающуюся около неподвижной оси N; расстояние оси N от оси OX прорези равно a. Найти уравнения кривых, описываемых точками M_1 и M_2 линейки AB, если расстояния $AM_1 = a$ и $AM_2 = \frac{a}{2}$; оси координат указаны на чертеже.



Ответ. 1) $x^2y^2 = (a-y)^2(a^2-y^2)$;
2) $4x^2y^2 = (a-y)^2(a^2-4y^2)$.

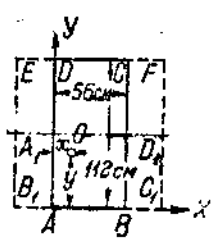
11. Центр вращения и центроиды плоской фигуры.

460. Стержень AB длиной 1 *м* движется, опираясь все время своими концами на две взаимноперпендикулярные прямые OX и OY. Найти координаты x и y мгновенного центра в тот момент, когда угол $OAB = 60°$.



Ответ. $x = 0{,}866$ *м*; $y = 0{,}5$ *м*.

461. Найти центроиды для движения стержня AB, которое указано в предыдущей задаче.

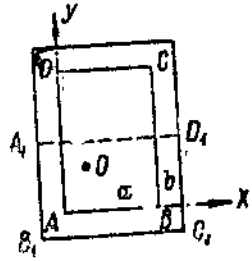


Ответ. Подвижная центроида — окружность радиуса, равного 0,5 *м*, с центром в середине AB; неподвижная центроида — окружность радиуса, равного 1 *м*, с центром в точке O.

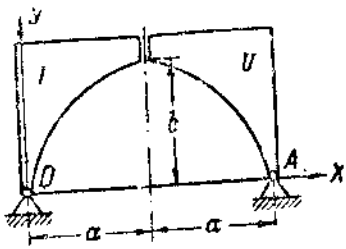
462. Доска складного стола, имеющая форму прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 56$ *см* и $AD = 112$ *см*, поворачивается вокруг оси шипа O так, что занимает положение $A_1B_1C_1D_1$, где $AB_1 = BC_1$; при раскладывании затем получается квадрат B_1EFC_1. Найти положение оси шипа.

Ответ. $x = 14$ *см*; $y = 42$ *см*.

463. Доска складного ломберного стола, имеющая форму прямоугольника со сторонами a и b, поворотом вокруг оси шипа O приводится из положения $ABCD$ в положение $A_1B_1C_1D_1$ и, раскладываясь, дает прямоугольник со сторонами b и $2a$. Найти положение оси шипа O относительно сторон AB и AD.



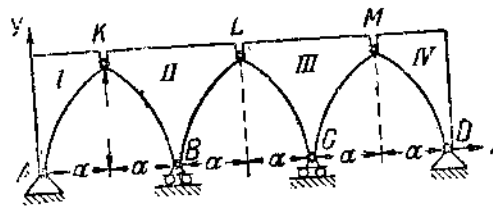
Отв. $x_0 = \frac{a}{4}$; $y_0 = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.



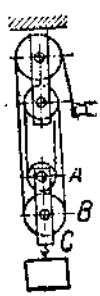
464. Найти положение мгновенных центров вращения для I и II части трехшарнирной арки моста в момент, когда, благодаря деформациям, опора A получает весьма малое перемещение: 1) по горизонтали, 2) по вертикали. Размеры и оси координат указаны на чертеже.

Отв. 1) $x_{cI} = 0$; $y_{cI} = 0$; $x_{cII} = 2a$; $y_{cII} = 2b$.
2) $x_{cI} = 0$; $y_{cI} = 0$; $x_{cII} = 0$; $y_{cII} = 0$.

465. Мост состоит из четырех частей, соединенных шарнирами K, L и M; опоры A и D — неподвижны, опоры B и C — подвижные. Найти положения мгновенных центров вращения всех частей моста, если в начале деформации опора D получает горизонтальное смещение; размеры сооружения и оси указаны на чертеже.



Отв. $x_{cI} = y_{cI} = 0$; $x_{cII} = 2a$; $y_{cII} = 2b$;
$x_{cIII} = 4a$; $y_{cIII} = 0$; $x_{cIV} = 6a$; $y_{cIV} = 2b$.

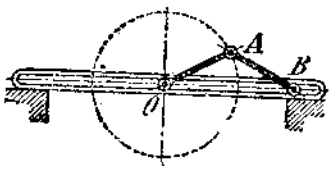


466. Определить подвижные и неподвижные центроиды блоков A и B полиспаста, радиусы которых соответственно равны r_a и r_b, предполагая, что обойма C движется поступательно.

Отв. Подвижные центроиды: блока A — окружность радиуса r_a; блока B — окружность радиуса $^1/_3\, r_b$.

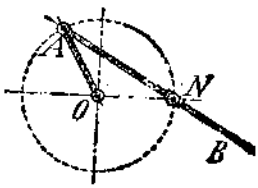
Неподвижные центроиды: вертикальные касательные к подвижным центроидам с правой стороны их.

467. Найти геометрически неподвижную и подвижную центроиды шатуна AB, длина которого равна длине кривошипа. $AB = OA = r$.



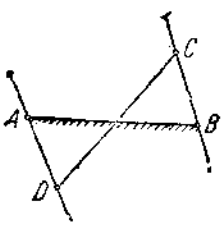
Ответ. Неподвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке O, а подвижная — окружность радиуса r с центром в точке A пальца кривошипа.

468. Построить графически подвижную и неподвижную центроиды шатуна кривошипного механизма, у которого длина шатуна равна удвоенной длине кривошипа: $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$.



469. Стержень AB движется таким образом, что одна из его точек A описывает окружность радиуса r с центром в точке O, а самый стержень проходит постоянно через данную точку N, лежащую на той же окружности. Найти центроиды.

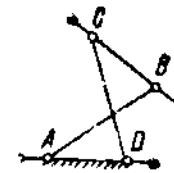
Ответ. Неподвижная центроида — окружность радиуса r с центром в точке O; подвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке A.



470. Найти неподвижную и подвижную центроиды звена CD антипараллелограмма, поставленного на большое звено, причем $AB = CD = b$, $AD = BC = a$, где $a < b$.

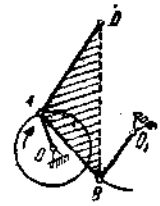
Ответ. Неподвижная центроида — гипербола с фокусами в точках A и B, а подвижная центроида — такая же гипербола с фокусами в точках C и D. Действительные полуоси гипербол равны $\frac{a}{2}$.

471. Найти подвижную и неподвижную центроиды звена BC механизма, называемого антипараллелограммом, состоящего из двух пар звеньев: $AB = CD = b$; $AD = CD = a$, где $a < b$, причем концы звена AD закреплены неподвижно.



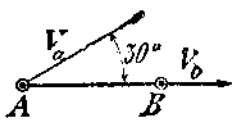
Ответ. Неподвижная центроида — эллипс с фокусами в точках A и D и полуосями $\frac{b}{2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$. Подвижная центроида такой же эллипс, но с фокусами в точках B и C.

472. Построить графически центроиды шатуна AB механизма вязального аппарата Мак-Кормика, изображенного на чертеже.



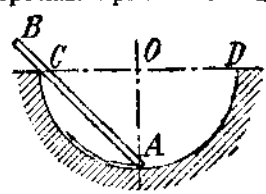
12. Скорости точек плоской фигуры.

473. Прямая AB, длина которой произвольна, движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени скорость V_a точки A составляет с прямой AB угол 30° и равна 180 *см/сек*; направление скорости точки B в этот момент совпадает с направлением прямой AB. Определить скорость V_b точки B.

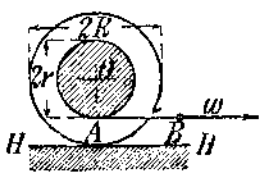


Ответ. $V_b = 156$ *см/сек*.

474. Прямая AB движется в плоскости чертежа, причем конец ее A все время находится в полуокружности CAD, а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD. Определить скорость v_c точки прямой, совпадающей с точкой C в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен к CD, если известно, что скорость точки A в этот момент 4 *м/сек*.



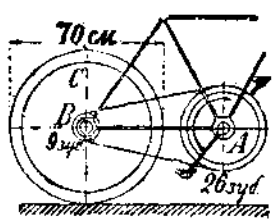
Ответ. $v_c = 2{,}83$ *м/сек*.



475. Катушка радиуса R катится по горизонтальной плоскости HH без скольжения. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить, конец которой B обладает при этом движении скоростью u по горизонтальному направлению. Определить скорость v перемещения оси катушки.

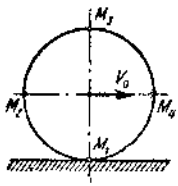
Ответ. $v = u\dfrac{R}{R-r}$.

476. Цепная передача в велосипеде состоит из цепи, охватывающей зубчатое колесо A с 26 зубцами и шестерню B с 9 зубцами. Шестерня B неизменно соединена с задним колесом C, диаметр которого равен 70 *см*. Определить скорость велосипеда, когда колесо A



делает в секунду 1 оборот и катится при этом без скольжения по прямолинейному пути.

Отв. 22,87 *км/час.*

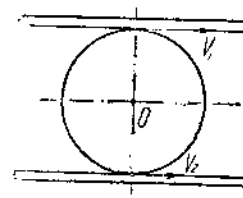


477. Колесо радиуса $R = 0{,}5$ *м* катится без скольжения с постоянной скоростью $v_0 = 10$ *м/сек* по прямолинейному участку пути. Найти скорость концов вертикального и горизонтального диаметров колеса: M_1, M_2, M_3 и M_4 и указать угловую скорость колеса.

Отв. $\omega = 20$ 1/сек;

$v_1 = 0$;
$v_2 = 14{,}14$ *м/сек*;
$v_3 = 20$ *м/сек*;
$v_4 = 14{,}14$ *м/сек*.

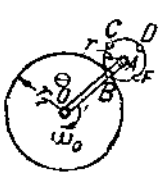
478. Две параллельные рейки двигаются в одну сторону с постоянными скоростями: $v_1 = 6$ *м/сек* и $v_2 = 2$ *м/сек*. Между рейками зажат диск радиуса $a = 0{,}5$ *м*, катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость и скорость центра диска.



Отв. $\omega = 4$ 1/сек;
$v_0 = 4$ *м/сек*.

479. Скорости центров задних колес автомобиля на повороте горизонтального пути перпендикулярны к оси и различны: $v_1 = 180$ *м/сек* и $v_2 = 240$ *м/сек*. Определить радиус закругления пути средней точки оси, если расстояние между колесами $l = 2$ *м*.

Отв. $\rho = 7$ *м*.

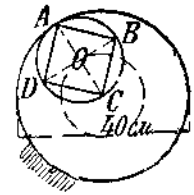


480. Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega_0 = 2{,}5$ 1/сек вокруг оси O неподвижной шестеренки радиуса $r_2 = 15$ *см*, приводит в движение насаженную на его конце A шестеренку радиуса $r_1 = 5$ *см*. Определить величину и направление скоростей точек A, B, C, D и E подвижной шестеренки, если $CE \perp BD$.

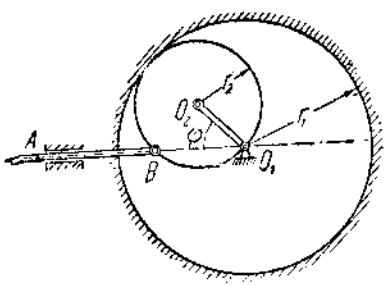
Отв. $v_A = 50$ *см/сек*;

$v_B = 0$;
$v_D = 100$ *см/сек*;
$v_C = v_E = 70{,}7$ *см/сек*.

481. По окружности круга, радиус которого 20 *см*, катится без скольжения круг, радиус которого вдвое меньше. Указать подвижную и неподвижную центроиды. Определить скорости вершин A, B, C квадрата, вписанного в меньшую окружность, в тот момент, когда вершина A находится на большой окружности, зная, что центр круга $ABCD$ движется равномерно и описывает окружность в 1 сек.



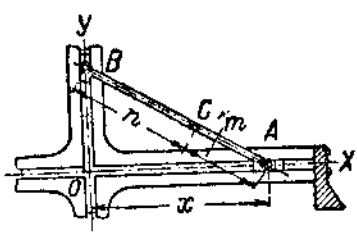
Ответ. $v_a = 0$;
$v_b = 88{,}9$ *см/сек*;
$v_c = 125{,}7$ *см/сек*.



482. Окружность радиуса $r_2 = 9$ *см* катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса $r_1 = 18$ *см*. С подвижной окружностью шарнирно связан стержень AB, движущийся в особых направляющих. Определить скорость стержня AB, когда $\varphi = 45°$, если стержень O_1O_2 делает $n = 180$ об/мин.

Ответ. $v_B = 240$ *см/сек*.

483. Линейка эллипсографа AB, длины l, движется концом A по оси OX, а концом B по оси OY. Конец линейки A совершает гармоническое колебательное движение $x = a \sin \omega t$, где $a < l$. Определить величину скорости v точки C, зная, что $CA = m$, $BC = n$.



Ответ. $v = \frac{a\omega}{l} \cos \omega t \sqrt{n^2 - m^2 + \frac{m^2 l^2}{l^2 - a^2 \sin^2 \omega t}}$.

484. Доказать следующее правило построения скоростей точек прямолинейного отрезка по заданным скоростям его концов: соединив концы отрезка с концами скоростей его концов, проводим из данной точки отрезка до пересечения с указанными линиями прямые, параллельные скоростям его концов; диа-

гональ параллелограмма, построенного на полученных отрезках, является скоростью рассматриваемой точки.

485. В кривошипном механизме длина кривошипа $OA = 40$ *см* и шатуна $AB = 2$ *м*; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, соответствующей 180 об/мин. Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки M при четырех положениях кривошипа, для которых угол AOB соответственно равен: нулю, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

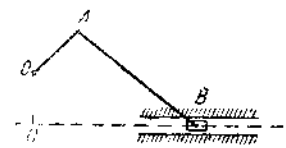
Ответ. I. $\omega = \frac{6}{5}\pi$ 1/сек; $v = 377$ *см/сек*;

II. $\omega = 0$; $v = 754$ *см/сек*;

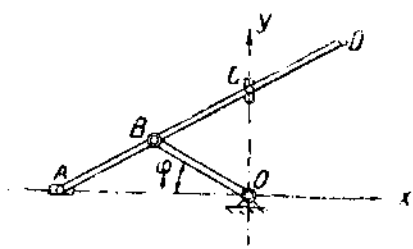
III. $\omega = -\frac{6}{5}\pi$ 1/сек; $v = 377$ *см/сек*;

IV. $\omega = 0$; $v = 754$ *см/сек*.

486. Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega_0 = 1{,}5$ 1/сек, если $OA = 40$ *см*, $AB = 200$ *см*, $OC = 20$ *см*.



Ответ. $v_1 = v_3 = 6{,}03$ *см/сек*.
$v_2 = v_4 = 60$ *см/сек*.

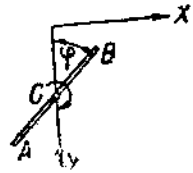


487. Стержень OB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ 1/сек и приводит в движение стержень AD, точки A и C которого движутся по осям: A — по горизонтальной OX, C — по вертикальной OY. Определить скорость точки D стержня при $\varphi = 45°$ и указать уравнение траектории этой точки, если $AB = OB = BC = CD = 12$ *см*.

Ответ. $v_D = 53{,}7$ *см/сек*;

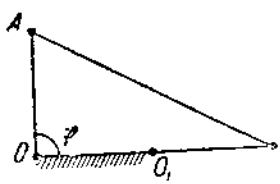
$$\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1.$$

488. Однородный стержень падает в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, вращаясь с постоянной угловой скоростью $\omega = 2{,}75$ 1/сек. вокруг оси, перпендикулярной к плоскости падения. В начальный момент скорость центра тяжести равна нулю, а стержень вертикален. Определить скорости точек A и B в момент, когда стержень повернулся на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ радиана, если $AB = 66$ *см*.



Примечание. Центр тяжести стержня падает по вертикали с ускорением $g = 980$ *см/сек*^{2}.

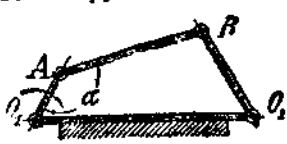
Ответ. $v_a = 225$ *см/сек*.
$v_b = 350$ *см/сек*.

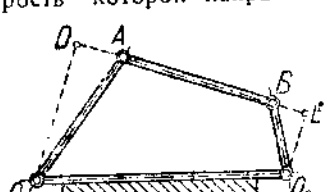


489. Определить угловую скорость стержня AB и кривошипа O_1B двухкривошипного механизма $OABO_1O$ в момент, когда $\varphi = 90°$, а кривошип O_1B составляет продолжение звена OO_1, если $OA = O_1B = \frac{1}{2}AB$; кривошип OA имеет угловую скорость $\omega = 3$ 1/сек.

Ответ. $\omega_{AB} = 3$ 1/сек.
$\omega_{O_1B} = 5{,}2$ 1/сек.

490. Стержни O_1A и O_2B, соединенные со стержнем AB посредством шарниров A и B, могут вращаться вокруг неподвижных точек O_1 и O_2, оставаясь в одной плоскости и образуя шарнирный четырехсторонник. Даны: длина стержня $O_1A = a$ и его угловая скорость ω. Определить построением ту точку M стержня AB, скорость которой направлена вдоль этого стержня, а также найти величину скорости v точки M в тот момент, когда угол O_1AB имеет данную величину α.





Ответ. $v = a\omega \sin\alpha$.

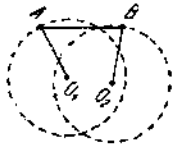
491. Угловая скорость стержня O_1A шарнирного четырехсторонника равна ω_1. Выразить угловую скорость ω_2 стержня O_2B через ω_1 и кратчайшие расстояния O_1D и O_2E от осей

вращения стержней O_1A и O_2B до шатуна AB, пользуясь геометрическим способом.

Строим мгновенный центр шатуна.

Ответ. $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{O_1D}{O_2E}$.

492. В грохоте Маркуса, служащем для сортировки руды, кривошип O_1A вращается равномерно вокруг оси O_1, делая 60 об/мин. Посредством вилки AB он передает движение кривошипу O_2B, вращающемуся вокруг оси O_2. Дано $O_1A = O_2B = AB = 10$ *см*; $O_1O_2 = 4$ *см*. Определить линейную скорость точки B для трех положений механизма, когда: 1) точка A занимает положение на продолженной налево линии центров O_1O_2, 2) вилка AB параллельна линии центров, 3) точка B находится на продолженной направо линии центров.



Ответ. $v_1 = 44{,}9$ *см/сек*; $v_2 = 62{,}8$ *см/сек*; $v_3 = 88$ *см/сек*.

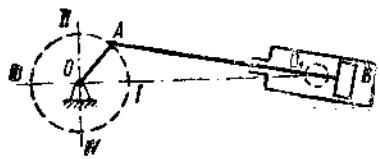
493. Для передачи вращения от одного вала к другому, параллельному первому, при незначительном несовпадении их осей, применяется механизм, называемый муфтой Ольдгейма.

На оба вала I и II насажены наглухо два диска A и B, имеющие по диаметральному пазу a—a и b—b; между дисками вставляется диск D, имеющий с каждой стороны по диаметральному выступу a' и b', пригнанному к пазу соответствующего диска так, чтобы он мог свободно скользить в этом пазу, оба выступа диска D взаимноперпендикулярны. Доказать, что угловые скорости обоих валов одинаковы и указать мгновенный центр вращения диска D.

Ответ. Мгновенный центр вращения диска D совпадает с точкой пересечения прямых, проведенных через центры O_1 и O_2 на осях валов I и II перпендикулярно к выступам a' и b'. Движение диска D сводится к движению прямого угла $a'ob'$, катеты которого все время проходят через неподвижные центры O_1 и O_2.

494. К полиспасту, состоящему из четырех блоков, привязаны грузы M_1 и M_2. Определить скорости наинизших точек блоков подвижной обоймы, угловые скорости блоков и скорости груза M_2, если груз M_1 опускается со скоростью $v_1 = 12$ *см/сек*, $r_1 = 6$ *см*, $r_2 = 9$ *см*.

Отв. $v_a = 4{,}24$ *см/сек*;
$v_b = 9{,}49$ *см/сек*;
$\omega_I = 0{,}5$ 1/сек;
$\omega_{II} = 1$ 1/сек;
$v_2 = 3$ *см/сек*.

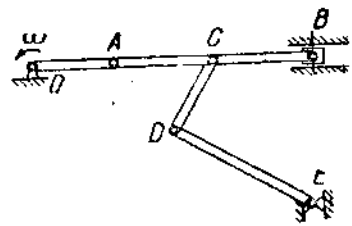


495. В схеме паровой машины с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = 12$ *см*; расстояние между осью вала и осью цапф цилиндра $OO_1 = 60$ *см*; длина шатуна $AB = 60$ *см*. Определить скорость поршня при четырех положениях кривошипа (горизонтальных и вертикальных), если угловая скорость кривошипа $\omega = 5$ 1/сек.

Отв. $v_1 = 15$ *см/сек*, $v_3 = 10$ *см/сек*.
$v_2 = v_4 = 58{,}8$ *см/сек*.

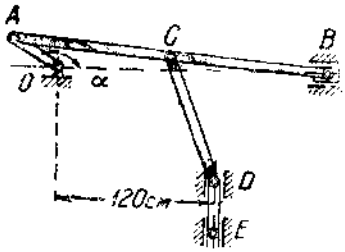
496. В паровой машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = 15$ *см*; угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 15$ 1/сек. Найти скорость поршня и угловую скорость цилиндра в момент, когда кривошип перпендикулярен шатуну (см. черт. к зад. 495).

Отв. $\omega = 0$;
$v = 225$ *см/сек*.



497. Кривошипный механизм связан шарнирно в средине шатуна со стержнем CD, а последний со стержнем DE, который может вращаться вокруг точки E. Определить угловую скорость стержня DE в указанном на чертеже положении кривошипного механизма, если точки B и E расположены на вертикали; угловая скорость кривошипа OA $\omega = 8$ 1/сек; $OA = 25$ *см*, $DE = 100$ *см*, $\angle CDE = 90°$ и $\angle BED = 30°$.

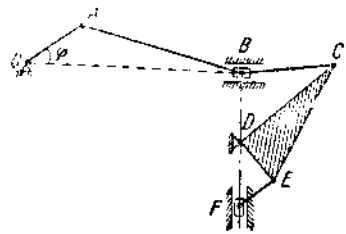
Отв. $\omega_{de} = 0{,}5$ 1/сек.



498. Определить скорость штанги DE пароораспределительного механизма при четырех положениях кривошипа OA: двух вертикальных и двух горизонтальных, если угловая скорость кривошипа $\omega = 20$ 1/сек; $OA = 40$ *см*; $AC = 20\sqrt{37}$, $CB = 20\sqrt{37}$.

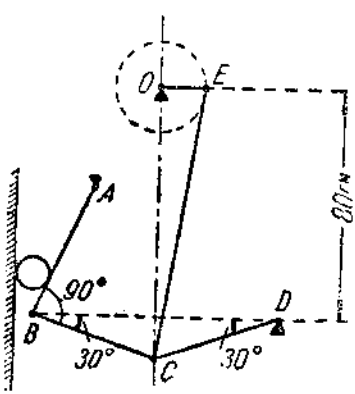
Ответ. $v_1 = 400$ *см/сек* при $\alpha = 0°$;
$v_2 = 0$ при $\alpha = 90°$;
$v_3 = 400$ *см/сек* при $\alpha = 180°$;
$v_4 = 0$ при $\alpha = 270°$.

499. Для передачи движения от паровой машины к воздушному насосу применяется механизм, схема которого изображена на чертеже. Угол $CDE = 90°$. Определить скорость точки F в тот момент, когда угол $\varphi = 30°$, $\angle DEF = 90°$ и $\angle FDE = 30°$. Точки B, D и F находятся в этот момент на одной вертикальной прямой; $OA = 10$ *см*, $BD = 24{,}4$ *см*, $AB = 40$ *см*, $DE = 20$ *см*, угловая скорость кривошипа OA: $\omega = 4$ 1/сек.



Ответ. $v_F = 39{,}94$ *см/сек*.

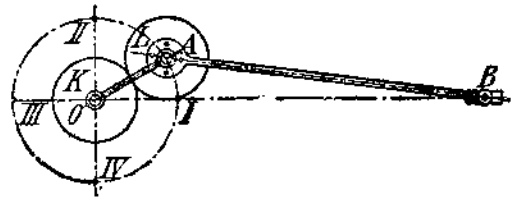
500. Качающаяся вокруг центра A подвижная щека AB дробилки Блека длиной 60 *см* приводится в движение кривошипом OE длины 10 *см*, делающим 100 об/мин, посредством системы рычагов BC, CD, длиной 40 *см* каждый, и CE. Найти угловую скорость щеки AB при положении механизма, указанном на чертеже.



Ответ. $\omega = 1{,}852$ 1/сек.

501. На ось O насажены: зубчатое колесо K диаметра 20 *см* и кривошип OA длины 20 *см*, не связанные между собой. С шатуном AB наглухо скреплено зубчатое колесо L

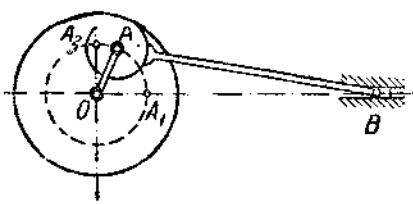
того же диаметра 20 *см*; длина шатуна $AB = 1$ *м*. Колесо K вращается равномерно с угловой скоростью, соответствующей $n = 60$ об/мин. и, захватывая зубцы колеса L, приводит в движение шатун AB и кривошип OA. Весь механизм заключается в вертикальной плоскости.



Определить угловую скорость ω_1 кривошипа OA в четырех положениях его: двух горизонтальных и двух вертикальных.

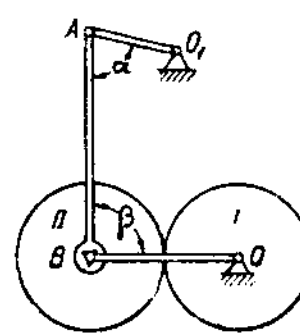
Ответ. I. $\omega_1 = \frac{10}{11}\pi$ 1/сек; III. $\omega_1 = \frac{10}{9}\pi$ 1/сек;
II. $\omega_1 = \pi$ 1/сек; IV. $\omega_1 = \pi$ 1/сек.

502. В планетном механизме Уатта кривошип насажен свободно на ось шестерни радиуса $R = 25$ *см*, вращающейся вокруг той же оси с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ 1/сек. С кривошипом OA соединен шатун $AB = 150$ *см*, заканчивающийся наглухо с ним связанной шестерней радиуса $r = 10$ *см*. Найти угловую скорость кривошипа при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа.

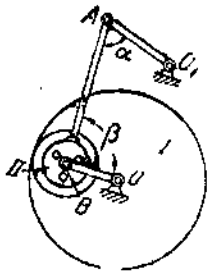


Ответ. $\omega_I = 17{,}86$ 1/сек;
$\omega_{II} = \omega_{IV} = 16{,}67$ 1/сек;
$\omega_{III} = 15{,}62$ 1/сек.

503. Механизм Уатта состоит из балансира O_1A, который, качаясь вокруг оси O_1, передает при помощи шатуна AB движение кривошипу OB, свободно насаженному на оси O. На той же оси O сидит колесо I; шатун AB оканчивается колесом II, наглухо связанным с шатуном. Определить угловые скорости кривошипа OB и колеса I в момент, когда $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, если $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ *см*, $O_1A = 75$ *см*, $AB = 150$ *см*, угловая скорость балансира $\omega_0 = 6$ 1/сек.



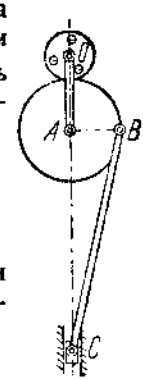
Ответ. $\omega_I = 6$ 1/сек;
$\omega = 3{,}75$ 1/сек.



504. Планетный механизм состоит из балансира O_1A, приводящего в движение шатун AB, кривошип OB и шестеренку I радиуса $r_1 = 25$ *см*; шатун AB оканчивается шестеренкой II радиуса $r_2 = 10$ *см*, наглухо с ним связанной. Определить угловую скорость балансира O_1A и колеса I в момент, когда $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, если $= O_1A = 30\sqrt{2}$ *см*; $AB = 150$ *см*, угловая скорость кривошипа OB $\omega = 8$ 1/сек.

Ответ. $\omega_1 = 5{,}12$ 1/сек;
$\omega_0 = 4$ 1/сек.

505. Кривошип $OA = 30$ *см* вращается вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_0 = 0{,}5$ 1/сек. Зубчатое колесо радиуса $r_2 = 20$ *см* катится без скольжения по неподвижному колесу радиуса $r_1 = 10$ *см* и приводит в движение связанный с ним шатун $BC = 20\sqrt{26}$ *см*. Определить угловую скорость шатуна и скорость точек B и C в момент, когда радиус AB перпендикулярен кривошипу OA.



Ответ. $\omega_{шат} = 0{,}15$ 1/сек;
$v_B = 21{,}2$ *см/сек*;
$v_C = 18$ *см/сек*.

506. Показать, что проекции на неподвижные оси скорости любой точки $M(x, y)$ плоской фигуры могут быть выражены по следующим формулам:

$$v_x = x_0' - (y - y_0)\omega,$$

$$v_y = y_0' + (x - x_0)\omega,$$

где x_0, y_0 — координаты полюса O фигуры, ω — угловая скорость фигуры.

507. Показать, что координаты мгновенного центра скоростей плоской фигуры относительно неподвижных осей определяются следующими формулами:

$$x_c = x_0 - \frac{y_0'}{\omega}, \qquad y_c = y_0 - \frac{x_0'}{\omega},$$

где x_0, y_0 — координаты полюса, ω — угловая скорость фигуры.

508. Найти приближенные выражения для проекций на координатные оси скоростей и ускорения любой точки M шатуна AB кривошипного механизма при равномерном вращении вала с угловой скоростью ω, предполагая, что длина кривошипа r мала по сравнению с длиной шатуна l. Положение точки M определяется ее расстоянием от оси пальца крейцкопфа: $MB = z$.

Примечание. В формулы, получаемые при решении задачи, входит $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}$, где $\varphi = \omega t$ обозначает угол AOB; этот радикал разлагаем в ряд и удерживаем только два первых члена.

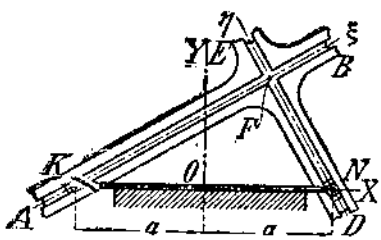
Ответ.

$$v\cos(v, x) = -\omega\left[r\sin\varphi + \frac{(l-z)r^2}{2l^2}\sin 2\varphi\right];$$

$$v\cos(v, y) = \frac{zr}{l}\omega\cdot\cos\varphi;$$

$$w\cos(w, x) = -\omega^2\left[r\cos\varphi + \frac{(l-z)r^2}{l^2}\cos 2\varphi\right];$$

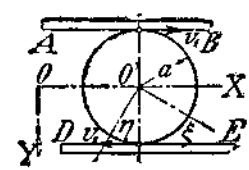
$$w\cos(w, y) = -\frac{zr}{l}\omega^2\sin\varphi.$$



509. Два стержня AB и DE, наглухо соединенные под прямым углом в точке F, движутся таким образом, что один из них AB всегда проходит через неподвижную точку K, а другой DE через неподвижную точку N; расстояние $KN = 2a$. Найти уравнение центроид в этом движении; оси координат указаны на чертеже.

Ответ. 1) $x_c^2 + y_c^2 = a^2$;
2) $\xi_c^2 + \eta_c^2 = 4a^2$.

510. Две параллельные рейки AB и DE движутся в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2. Между рейками находится диск радиуса a, который вследствие движений реек и трения катится по ним без скольжения. Найти уравнения центроид



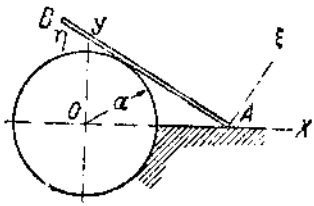
диска, а также определить скорость v_0 центра O' диска и его угловую скорость ω; оси координат указаны на чертеже.

Ответ. 1) $y_c = a\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$;

2) $\xi_c^2 + \eta_c^2 = a^2\left(\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2$.

3) Скорость центра диска направлена в сторону большей из данных скоростей. Величина v_0 равна полуразности величин данных скоростей.

4) $\omega = \dfrac{v_1 + v_2}{2a}$.



511. Найти уравнения центроид стержня AB, который, опираясь на окружность радиуса a, концом A скользит вдоль прямой OX, проходящей через центр этой окружности; оси координат указаны на чертеже.

Ответ. 1) $x_c^2(x_c^2 - a^2) - a^2 y_c^2 = 0$;

2) $\eta_c^2 = a\xi_c$.

512. Найти приближенные уравнения неподвижной и подвижной центроид шатуна AB кривошипного механизма, предполагая, что длина шатуна $AB = l$ настолько велика по сравнению с длиной кривошипа $OA = r$, что для угла $ABO = \alpha$ можно принять $\sin\alpha = \alpha$ и $\cos\alpha = 1$; оси координат указаны на чертеже.

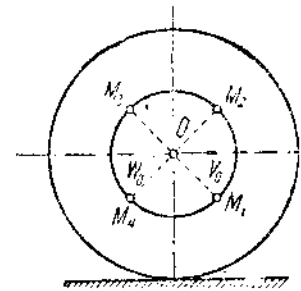
Ответ. 1) $(x_c - l)^2(x_c^2 + y_c^2) = r^2 x_c^2$.

2) $l^4\xi_c^2\eta_c^2 = (l\xi_c + \xi_c^2 + \eta_c^2)^2(r^2\eta_c^2 - l^2\xi_c^2)$.

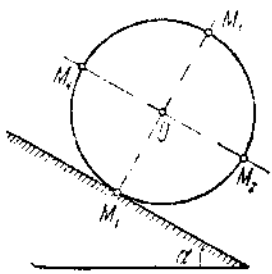
13. Ускорения точек плоской фигуры

513. Показать, что в момент, когда $\omega = 0$, проекции ускорений двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, одинаковы.

514. Вагон трамвая движется по прямолинейному горизонтальному участку пути с замедлением $w_0 = 2$ *м/сек*², имея в данный момент скорость $v_0 = 1$ *м/сек*. Колеса катятся по рельсам без скольжения. Найти ускорения концов двух диаметров ротора, образующих с вертикалью углы по 45°, если радиус колеса $R = 0{,}5$ *м*, а ротора $r = 0{,}25$ *м*.



Отв. $w_1 = 2{,}45$ *м/сек*²;
$w_2 = 3{,}414$ *м/сек*²;
$w_3 = 2{,}45$ *м/сек*²;
$w_4 = 0{,}586$ *м/сек*².



515. Колесо катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному прямолинейному пути. Найти ускорение концов двух взаимноперпендикулярных диаметров колеса, из которых один параллелен рельсу, если в рассматриваемый момент времени скорость центра колеса $v_0 = 1$ *м/сек*, ускорение центра колеса $w_0 = 3$ *м/сек*²; радиус колеса $R = 0{,}5$ *м*.

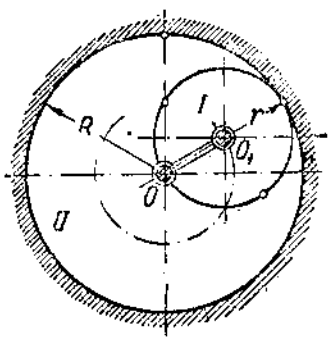
Отв. $w_1 = 2$ *м/сек*²;
$w_2 = 3{,}16$ *м/сек*²;
$w_3 = 6{,}32$ *м/сек*²;
$w_4 = 5{,}83$ *м/сек*².

516. Колесо радиуса $R = 0{,}5$ *м* катится без скольжения по прямолинейному рельсу, имея в данный момент в центре O скорость $v_0 = 0{,}5$ *м/сек* и замедление $w_0 = 0{,}5$ *м/сек*². Найти мгновенный центр ускорений колеса, ускорение мгновенного центра скоростей w_c, ускорение точки M и радиус кривизны ее траектории, если $OM = MC = 0{,}5R$.

Отв. 1) $r = 0{,}3536$ *м*; $\theta = -\frac{\pi}{4}$.
2) $w_c = 0{,}5$ *м/сек*²;
3) $w_M = 0{,}3536$ *м/сек*²;
4) $\rho = 0{,}25$ *м*.

517. Определить ускорение мгновенного центра скоростей C и ему диаметрально противоположной точки M, а также положение мгновенного центра ускорений K шестеренки радиуса $R = 12$ *см*, приводимой в движение снаружи неподвижной шестеренки того же радиуса кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестеренки и имеющим в данный момент угловую скорость $\omega_0 = 2$ 1/сек и угловое ускорение $\varepsilon_0 = 8$ 1/сек^2.

Ответ. 1) $w_C = 96$ *см/сек*^{2};
2) $w_M = 480$ *см/сек*^{2};
3) $CK = 4{,}24$ *см*; $\angle ACK = 45°$.



518. Найти мгновенный центр ускорений и его скорость v_k, а также ускорение w_c мгновенного центра скоростей шестеренки I радиуса r, катящейся внутри шестеренки II радиуса $R = 2r$, если кривошип OO_1, приводящий в движение бегающую шестеренку, имеет постоянную угловую скорость ω_0.

Ответ. 1) Мгновенный центр ускорений совпадает с центром O неподвижной шестеренки; $v_k = 2r\omega_0$;
2) $w_c = 2r\omega_0^2$.

519. Найти радиус кривизны траектории точки M подвижной шестеренки предыдущей задачи в момент наибольшего удаления и приближения точки M к центру O; расстояние $O_1M = a$.

Ответ.

$$\rho_1 = \frac{(r-a)^2}{r+a}; \quad \rho_2 = \frac{(r+a)^2}{r-a}.$$

520. Найти ускорения концов двух диаметров шестеренки радиуса $r = 5$ *см*, катящейся снаружи неподвижной шестеренки радиуса $R = 15$ *см* при помощи кривошипа OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 3$ 1/сек. вокруг центра O неподвижной шестеренки; один из диаметров совпадает с линией OA, другой — ей перпендикулярен.

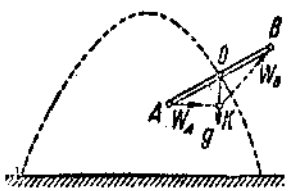
Ответ. $w_1 = 540$ *см/сек*^{2};
$w_2 = w_4 = 742$ *см/сек*^{2};
$w_3 = 900$ *см/сек*^{2}.

521. Найти мгновенный центр ускорений, угловую скорость и ускорение плоской фигуры, если для данного момента времени известны: ускорение точки A, $w_a = 15$ *см/сек²*; ускорение точки B, $w_b = 10$ *см/сек²*, причем ускорения w_a и w_b перпендикулярны к отрезку AB; $AB = 10$ *см*.

Ответ.

1) $\omega = 0$; $\varepsilon = 0{,}5$ 1/сек²;
2) мгновенный центр ускорений лежит на прямой AB на расстоянии $AK = 30$ *см*.

522. Однородный стержень AB, брошенный наклонно вверх, движется в вертикальной плоскости так, что его центр тяжести O описывает параболу, имея постоянное вертикальное ускорение $w_0 = g = 9{,}81$ *м/сек²*. Стержень вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости падения, с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 10$ 1/сек. Найти ускорения концов стержня в момент, когда стержень образует с вертикалью угол $\alpha = 60°$, если $AB = 39{,}24$ *см*. Указать также положение мгновенного центра ускорений стержня в указанный момент времени.



Ответ. $w_a = 17$ *м/сек²*;
$w_b = 25{,}96$ *м/сек²*;
$OK = 0{,}0981$ *м*.

523. Линейка эллипсографа AB длиною $2l = 20$ *см* приводится в движение кривошипом OD, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ 1/сек; $AD = DB = l$ (см. черт. к зад. 259).

Найти мгновенный центр ускорений линейки, ускорений ее концов A и B и ускорение мгновенного центра скоростей в момент, когда $\sphericalangle ABO = 30°$.

Ответ. Мгновенный центр ускорений совпадает с точкой пересечения осей, вдоль которых двигаются концы A и B.

$w_a = 40$ *см/сек²*;
$w_b = 69{,}3$ *см/сек²*;
$w_c = 80$ *см/сек²*.

524. Найти ускорение ползуна B и мгновенный центр ускорений K шатуна AB кривошипно-шатунного механизма при двух горизонтальных и одном вертикальном положениях кривошипа OA,

вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 15$ 1/сек. вокруг вала O.

Длина кривошипа $OA = 40$ *см*, длина шатуна $AB = 200$ *см*.

Ответ. Мгновенный центр ускорений K лежит на оси направляющей ползуна при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$.

1) $\alpha = 0^\circ$, $w_b = 108$ *м/сек*^{2}; $BK = 12$ *м*.
2) $\alpha = 90^\circ$, $w_b = 18{,}37$ *м/сек*^{2}; $BK = 40$ *см*; $AK = 196$ *см*;
3) $\alpha = 180^\circ$ $w_b = 72$ *м/сек*^{2}; $BK = 8$ *м*.

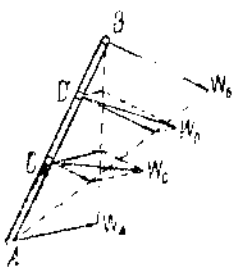
525. Кривошип OA длиною 20 *см* вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ 1/сек. и приводит в движение шатун AB длиною 100 *см*; ползун B двигается по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна и ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимноперпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Ответ. $\omega = 2$ 1/сек;
$\varepsilon = 24$ 1/сек^2;
$w_b = 566$ *см/сек*^{2}.

526. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 и через посредство шатуна AB, лежащего в параллельной плоскости и имеющего на конце A наглухо с ним связанную шестеренку радиуса r, приводит в движение шестеренку радиуса $r_1 = r$, свободно сидящую на валу O. Найти угловую скорость ω и ускорение ε этой шестеренки при горизонтальном (I) и вертикальном (II) положениях кривошипа, если $AB = l$ (см. черт. к зад. 501).

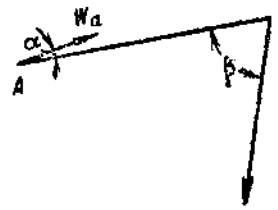
Ответ. I: $\omega = 2\left(1 + \frac{r}{l}\right)\omega_0$; $\varepsilon = 0$;

II: $\omega = 2\omega_0$; $\varepsilon = \frac{2r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - 4r^2}}$.



527. Доказать следующее правило построения ускорений точек прямолинейного отрезка по заданным ускорениям его концов: соединив каждый конец отрезка с концом вектора ускорения другого конца, проводим из данной точки отрезка прямые, параллельные ускорениям концов пересечения с указанными прямыми, проведенными из концов отрезка. Диагональ параллелограмма, построенного на полученных отрезках, и является ускорением рассматриваемой точки.

528. Найти ускорение середины стержня, если известны величины ускорений его концов: $w_a = 10$ *см/сек*^{2}; $w_b = 20$ *см/сек*^{2} и углы, образованные ускорениями с прямой AB: $\alpha = 10°$ и $\beta = 70°$.



Отв.

$$w = \frac{1}{2}\sqrt{w_a^2 + w_b^2 - 2w_a w_b \cos(\beta - \alpha)} = \\ = 8{,}66 \text{ см/сек}^2.$$

529. Показать, что при аналитическом исследовании плоского движения проекции на оси координат ускорения точки $M(x, y)$ плоской фигуры определяются формулами:

$$w_x = w_{ox} - \varepsilon(y - y_0) - \omega^2(x - x_0),$$
$$w_y = w_{oy} + \varepsilon(x - x_0) - \omega^2(y - y_0),$$

где w_{ox} и w_{oy} — проекции ускорения полюса $O(x_0, y_0)$;

$$\omega = \varphi'; \quad \varepsilon = \varphi''.$$

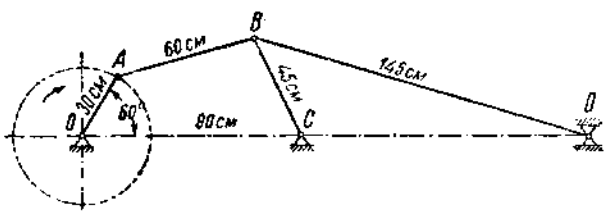
530. Доказать, что координаты мгновенного центра ускорений плоской фигуры определяются формулами:

$$x = x_0 + \frac{\omega^2 w_{ox} - \varepsilon w_{oy}}{\omega^4 + \varepsilon^2}; \quad y = y_0 + \frac{\omega^2 w_{oy} + \varepsilon w_{ox}}{\omega^4 + \varepsilon^2};$$

где $O(x_0, y_0)$ — полюс плоской фигуры.

14. План скоростей и ускорений точек плоской фигуры

531. Найти скорость и ускорение ползуна D двукривошипного механизма.

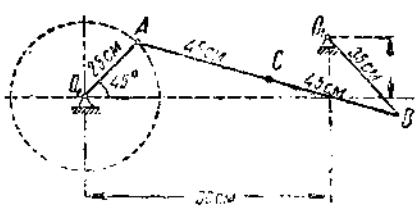


Кривошип OA делает 60 об/мин. Размеры указаны на чертеже.

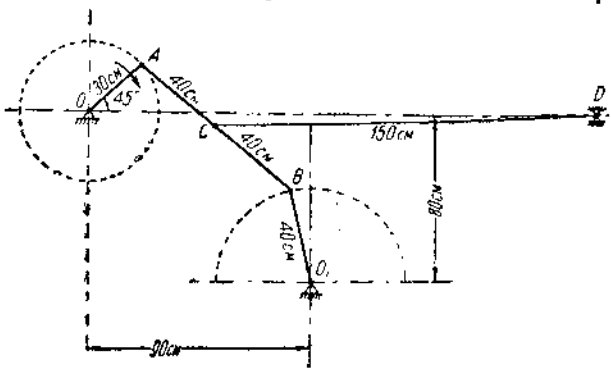
Отв. $v_d = 103$ *см/сек*; $w_d = 260$ *см/сек*^{2}.

532. Найти скорость и ускорение точки C механизма Маршала в положении, указанном на чертеже.

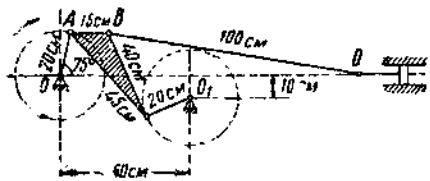
Кривошип OA делает 120 об/мин.



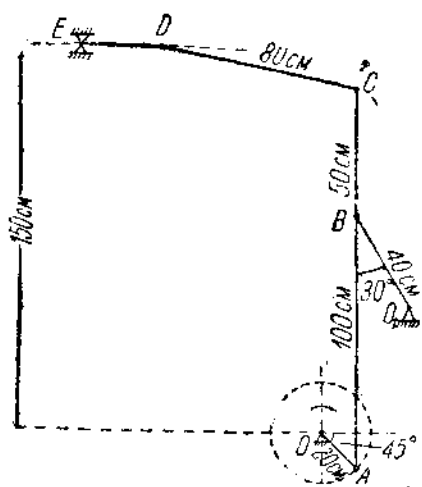
533. Найти скорость и ускорение ползуна D, изображенного на чертеже механизма. Кривошип OA делает 90 об/мин.



Ответ. $v_d = 316$ *см/сек*; $w_d = 5200$ *см/сек*^{2}.



534. Найти скорость и ускорение поршня E насоса Holst'a в положении, указанном на чертеже. Кривошип OA делает 80 об/мин.

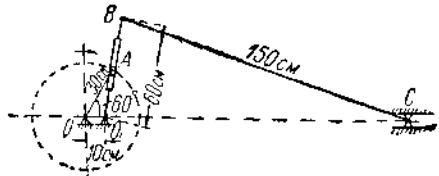


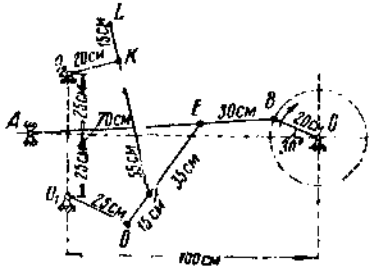
535. Найти скорость и ускорение ползуна E механизма сенного пресса. Кривошип OA делает 60 об/мин. Размеры указаны на чертеже.

Ответ. $v_e = 7$ *см/сек*; $w_e = 940$ *см/сек*^{2}.

536. Найти скорость ползуна C кулисного механизма, изображенного на чертеже.

Кривошип OA делает 30 об/мин.

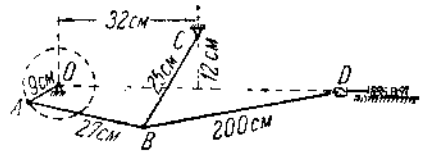




537. Найти скорость и ускорение точки L кулисы Джоя. Размеры и положение механизма указано на чертеже.

Кривошип OB делает 60 об/мин.

538. В приводе Эйкгоффа, применяющемся в рудничных конвейерах, кривошип OA длины 9 *см* равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью, соответствующей $n = 72$ об/мин. При помощи стержня AB длиной 27 *см* движение передается балансиру BC длиной 25 *см*, совершающему колебательное движение вокруг оси C; тяга BD длиной 2 *м* сообщает прямолинейное колебательное движение точке D и связанному с ней жолобу с перемещаемой породой. Используя ряд последовательных положений кривошипа OA, построить графики пути, скорости и ускорения ползуна D.



15. Сложение движений плоской фигуры

539. Даны два сцепленных между собою зубцами цилиндрических колеса I и II радиусов r_1 и r_2; оси их неподвижны. Найти отношение между угловыми скоростями этих колес ω_1 и ω_2, а также относительную угловую скорость $\omega_{2,1}$ колеса II по отношению к колесу I при внешнем и внутреннем зацеплениях.

Отв. При внешнем зацеплении:

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{r_1}{r_2};$$

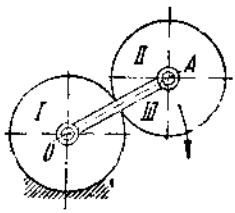
$$\omega_{2,1} = -\omega_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

При внутреннем зацеплении:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2};$$

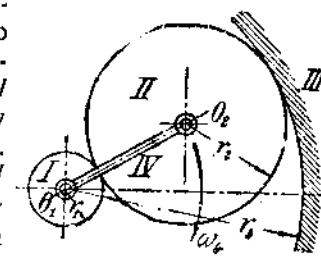
$$\omega_{2,1} = \omega_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2}.$$

540. Найти относительную и абсолютную угловые скорости зубчатого колеса *II* радиуса r, катящегося по неподвижному зубчатому колесу *I* того же радиуса и приводящегося в движение кривошипом *III*, вращающимся вокруг оси неподвижного колеса O с угловой скоростью ω_0; движение кривошипа OA принять за переносное.



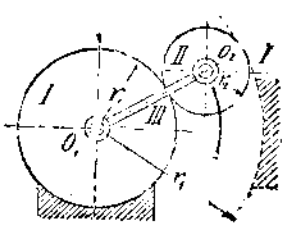
Ответ. $\omega_{2,3} = \omega_0$;
$\omega_2 = 2\omega_0$.

541. Зацепление, приводящее в быстрое вращение точильный камень, устроено следующим образом: стержень *IV* посредством особой ручки приводится во вращение вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_4; на конце стержня O_2 находится палец, на который свободно надето колесо *II* радиуса r_2. При вращении ручки палец заставляет колесо *II* катиться без скольжения по наружному неподвижному кругу *III* радиуса r_3. При этом, благодаря трению, колесо *II* вращает без скольжения колесо *I* радиуса r_1, свободно насаженное на ось O_1 и неизменно связанное с осью точила. По данному радиусу r_3 наружной неподвижной обоймы найти такое значение r_1, чтобы отношение $\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12$, т. е. чтобы точило вращалось в 12 раз быстрее приводящей его в движение ручки.



Отв. $r_1 = \frac{1}{11} r_3$.

542. Кривошип *III* соединяет оси O_1 и O_2 двух зубчатых колес *I* и *II*, причем зацепление может быть или внешнее, или внутреннее, как указано на чертеже; колесо *I* остается неподвижным, а кривошип *III* вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_3. Зная радиусы колес r_1 и r_2 вычислить для колеса *II* его абсолют-



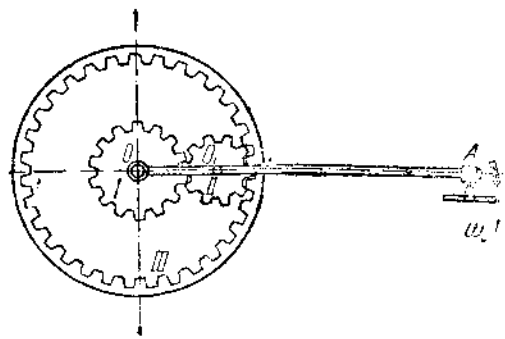
ную угловую скорость ω_2 и относительную угловую скорость $\omega_{2,3}$ по отношению к кривошипу.

Ответ. Внешнее зацепление:

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{r_1 + r_3}{r_2}; \quad \omega_{2,3} = \omega_3 \frac{r_1}{r_2}.$$

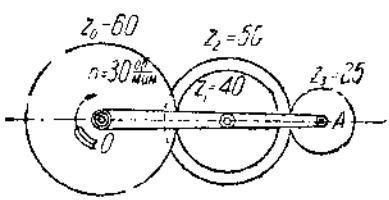
Внутреннее зацепление:

$$\omega_2 = -\omega_3 \frac{r_1 - r_2}{r_2}; \quad \omega_{2,3} = -\omega_3 \frac{r_1}{r_2}.$$



543. В эпициклическом механизме Баррета, применяемом в конных приводах молотилок, водило OA и колесо I радиуса r_1 насажены на вал O свободно; ось O_1 колеса II радиуса r_2 укреплена на водиле, а колесо III радиуса r_3 может свободно вращаться вокруг оси O. Определить угловую скорость ω_1 колеса I, если водилу OA сообщена угловая скорость ω_0, а колесу III от другого двигателя (тоже конного) сообщена угловая скорость ω_3 противоположного направления.

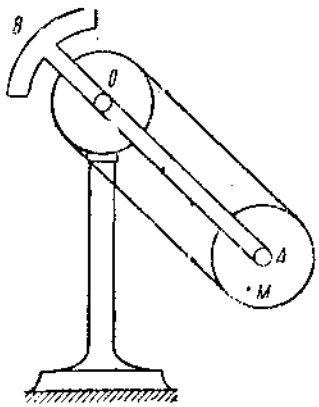
Ответ. $\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right) - \frac{r_3}{r_1}\omega_3$, где ω_0 и ω_3 разных знаков.



544. Найти число оборотов в минуту шестерни с числом зубцов $z_3 = 25$, если кривошип OA вращается вокруг оси O неподвижной шестерни (с числом зубцов $z_0 = 60$) с угловой скоростью, соответствующей $n_0 = 30$ об/мин, и несет на себе ось двойной шестерни с числом зубцов $z_1 = 40$, $z_2 = 50$.

Ответ. $n_3 = n_0 \left(1 - \frac{z_0 z_2}{z_1 z_3}\right) = -60$ об/мин.

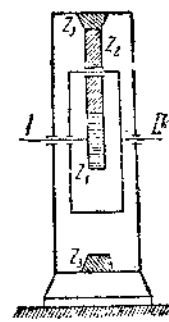
545. Кривошип OA с противовесом B вращается с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$ вокруг оси O неподвижной шестеренки и несет на конце A ось другой шестеренки того же размера, соединенной с неподвижной шестеренкой бесконечной цепью. Определить угловую скорость и ускорение подвижной шестеренки, а также скорость и ускорение произвольной ее точки M, если длина кривошипа $OA = l$.



Ответ. $\omega = \varepsilon = 0$ — шестеренка совершает круговое поступательное движение вместе с центром A; $v_M = v_A = l\omega_0$, $w_M = w_A = l\omega_0^2$.

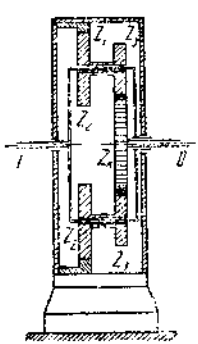
546. Редуктор скоростей состоит из трех зубчатых колес с числами зубцов:

$$z_1 = 20,\ z_2 = 25,\ z_3 = 70.$$



Первое колесо насажено на ведущий вал I, делающий $n_1 = 4500$ об/мин, второе свободно насажено на раму, жестко связанную с ведомым валом II. Третье колесо с внутренним зацеплением неподвижно. Найти число оборотов в минуту ведомого вала и бегающего колеса.

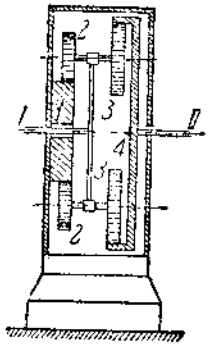
Ответ. $n_{II} = 1000$ об/мин; $n_2 = -1800$ об/мин.



547. Ведущий вал I редуктора делает $n_1 = 1200$ об/мин. Найти число оборотов в минуту ведомого вала II, если неподвижное зубчатое колесо с внутренним зацеплением имеет $z_1 = 180$ зубцов, бегающие шестеренки, спаренные между собою, имеют $z_2 = 60$ и $z_3 = 40$ зубцов, шестеренка, закрепленная на ведомом валу, имеет $z_4 = 80$ зубцов.

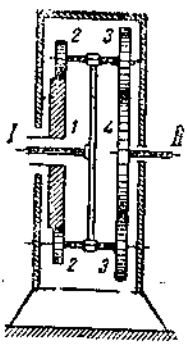
Ответ. $n_{II} = 3000$ об/мин.

548. Редуктор скоростей состоит из неподвижной шестеренки радиуса $r_1 = 40$ *см*, двух бегающих шестеренок радиуса $r_2 = 20$ *см* и $r_3 = 30$ *см*, спаренных между собой, и шестеренки с внутренним зацеплением радиуса $r_4 = 90$ *см*, сидящей на ведомом валу. Ведущий вал и кривошип, несущий оси бегущих шестеренок, делают $n_1 = 1800$ об/мин. Найти число оборотов в минуту ведомого вала.



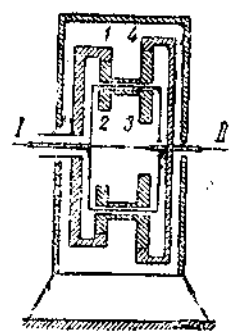
Ответ. $n_{II} = 3000$ об/мин.

549. Найти угловую скорость ведомого вала в редукторе с дифференциальной передачей, если ведущий вал с кривошипом, несущим на себе передаточные шестеренки, спаренные между собою, вращается с угловой скоростью $\omega_I = 120$ 1/сек. Колесо *1* вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 180$ 1/сек и имеет число зубцов $z_1 = 80$; бегающие колеса имеют числа зубцов: $z_2 = 20$; $z_3 = 40$; колесо, сидящее на ведомом валу, $z_4 = 60$.



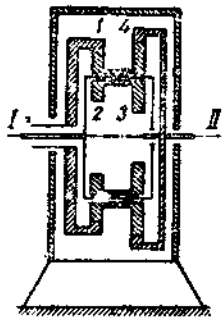
Ответ. $\omega_{II} = 280$ 1/сек.

550. Редуктор скоростей с дифференциальной передачей состоит из четырех зубчатых колес, из которых первое — с внутренним зацеплением — делает 160 об/мин и имеет $z_1 = 70$ зубцов; второе и третье спарены между собою и сидят на оси, вращающейся вокруг оси ведущего вала *I* вместе с последним, делая $n_1 = 1200$ об/мин; числа зубцов $z_2 = 20$, $z_3 = 30$; четвертое — с внутренним зацеплением — имеет $z_4 = 80$ зубцов и заклинено на ведомом валу. Найти число оборотов в минуту ведомого вала, если вал *I* и колесо *1* вращаются в противоположных направлениях.



Ответ. $n_{II} = -585$ об/мин.

551. Редуктор скоростей имеет неподвижную шестеренку *1*, спаренные между собою подвижные шестеренки с внутренним за-



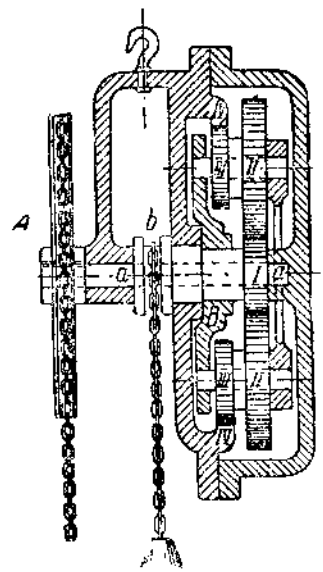
цеплением — 2 и 3 и шестерню 4, вакли-ненную на ведомом валу. Найти угловую скорость ведомого вала, если числа зубцов:

$$z_1 = 30,\ z_2 = 80,\ z_3 = 70,\ z_4 = 20;$$

ведущий вал вращается с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 1200$ об/мин.

Ответ. $n_2 = -375$ об/мин.

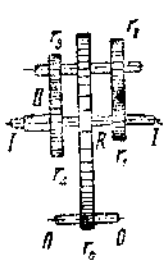
552. В блоке системы „Триплекс" на валу $a - a$ жестко насажен цепной блок A; на том же валу свободно насажена втулка b с подъемной цепью и грузом, наглухо соединенная с рукоятью B. На каждый палец рукоятки свободно насажены 2 шестерни II и III, спаренные между собою; шестерня II сцеплена с шестерней I, заклиненной на валу $a - a$, шестеренка III сцеплена с неподвижным зубчатым колесом IV. Определить отношение угловых скоростей вращения вала $a - a$ и втулки b, если числа зубцов колес I, II, III и IV соответственно равны:



$$z_1 = 12,\ z_2 = 28,$$
$$z_3 = 14,\ z_4 = 54.$$

Ответ. $\frac{\omega_a}{\omega_b} = 10.$

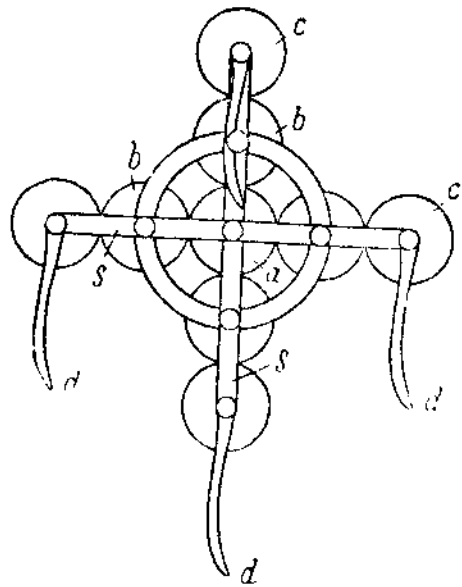
553. В цилиндрическом дифференциале зубчатое колесо радиуса R свободно насажено на вал $I - I$ и несет на себе шестерни радиусов r_2 и r_3, спаренные друг с другом. Колесо R приводится в движение шестеренкой радиуса r_0. Шестеренки радиусов r_2 и r_3 зацепляются с шестеренками радиусов r_1 и r_4, заклиненными соответственно на валах $I - I$ и II, из которых последний выполнен в виде втулки. Найти угловую скорость вала II, если известны скорости вра-



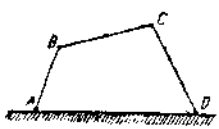
щения валов $I-I$ и $O-O$, n_1 и n_0, причем эти валы вращаются в одну сторону.

Ответ. $n_2 = \left(n_1 + n_0 \frac{r_0}{R}\right) \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} - n_0 \frac{r_0}{R}$.

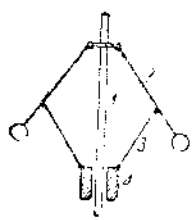
554. В планетарном приводе картофелекопателя завода Stock центральная шестеренка a, совершающая поступательное прямолинейное равномерное движение вместе со своей осью, соединена при помощи паразитных шестеренок b с подвижными шестеренками c, к втулкам которых прикреплены крылья d; оси шестеренок b и c насажены на водило s, вращающееся вокруг оси центральной шестеренки a с угловой скоростью ω_0. Определить абсолютную угловую скорость шестеренок c, а также характер движения крыльев d, если радиусы всех шестеренок одинаковы.



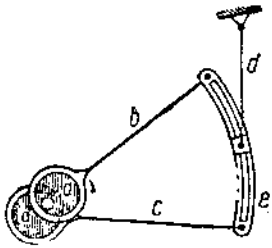
Ответ. $\omega = 0$; крылья совершают поступательное циклоидальное движение вместе с центрами шестеренок c.



555. Пользуясь теоремой о трех центрах вращения, построить в шарнирном четырехугольнике $ABCD$ взаимные относительные мгновенные центры вращений всех его звеньев.

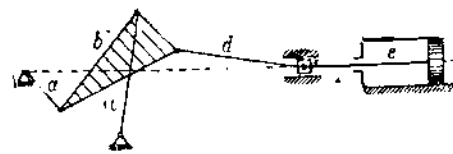


556. Построить мгновенные центры вращений звеньев механизма центробежного регулятора при движении шаров в плоскости регулятора.



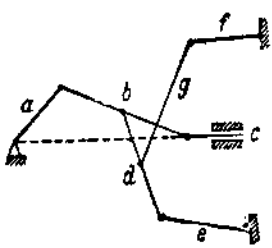
557. Пользуясь теоремой о трех центрах вращения, найти абсолютный мгновенный центр вращения звена e кулисы Стефенсона.

Указание. Нужно предварительно найти относительный центр вращения звеньев b и c.



558. Пользуясь теоремой о трех центрах вращения, найти мгновенный центр абсолютного вращения звена d кривошипного механизма поршневого насоса.

Указание. Предварительно нужно найти абсолютный центр вращения звена b.



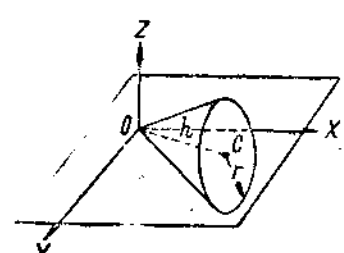
559. Пользуясь теоремой о трех центрах вращения, найти мгновенный центр абсолютного вращения звена g кулиссы Джоя.

Указание. Предварительно нужно найти абсолютные центры вращения звеньев b и d.

V. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

16. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

560. Конус, высота которого $h = 4$ *см* и радиус основания $r = 3$ *см*, катится по плоскости без скольжения, имея неподвижную вершину в точке O. Определить угловую скорость конуса, координаты точки, вычерчивающей годограф угловой скорости, и угловое ускорение конуса, если скорость центра основания конуса $v_c = 48$ *см/сек*.



Ответ. $\omega = 20$ 1/сек;

$x_1 = 20 \cos 15\ t$;

$y_1 = 20 \sin 15\ t$;

$z_1 = 0$;

$\varepsilon = 300$ $1/сек^2$.

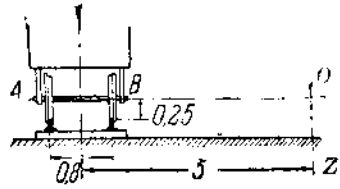
561. Вращение тела вокруг неподвижной точки задано углами Эйлера:

$$\varphi = 4t, \psi = \left(\frac{\pi}{2} - 2t\right), \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Определить координаты точки, вычерчивающей годограф угловой скорости, угловую скорость и угловое ускорение тела относительно неподвижных осей x, y, z.

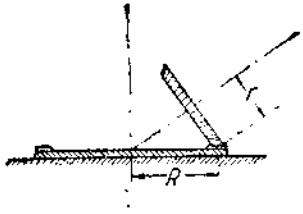
Ответ.
$$x = \omega_x = 2\sqrt{3}\cos 2t;$$
$$y = \omega_y = 2\sqrt{3}\sin 2t;$$
$$z = \omega_z = 0;$$
$$\omega = 2\sqrt{3}\ 1/сек;$$
$$\varepsilon = 4\sqrt{3}\ 1/сек^2.$$

562. Найти подвижный и неподвижный аксоид внешнего колеса вагона, катящегося по горизонтальному пути, радиус кривизны которого (средний) 5 *м*, радиус колеса вагона 0,25 *м*, ширина колеи 0,80 *м*.



Примечание. Колесо вращается вместе с вагоном вокруг вертикальной оси OZ, проходящей через центр закругления пути, и относительно вагона вокруг оси AB, т. е. вращается вокруг неподвижной точки O.

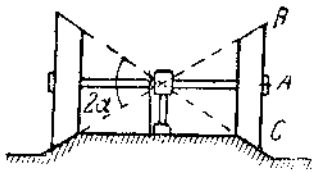
Ответ. Неподвижный аксоид — конус, ось которого совпадает с осью OZ и с углом при вершине $\alpha = 2$ arc cos 0,0463. Подвижный аксоид — конус с осью AB и углом при вершине $\beta = 2$ arc sin 0,0463.



563. Коническое зубчатое колесо, ось которого пересекается с геометрической осью плоской опорной шестерни в центре последней, обегает 5 раз в минуту опорную шестерню. Определить угловую скорость ω_r вращения колеса вокруг его оси и угловую скорость ω вращения вокруг мгновенной оси, если радиус опорной шестерни вдвое больше радиуса колеса: $R = 2r$.

Ответ. $\omega_r = 1{,}047$ 1/сек; $\omega = 0{,}907$ 1/сек.

564. Найти скорости и ускорения точек C и B конического катка, катящегося без скольжения по горизонтальной конической кольцевой опоре, если радиус основания катка $R = 10\sqrt{2}$ *см*, угол при вершине $2\alpha = 90°$, скорость движения центра A катка по своей траектории $v_a = 20$ *см/сек*.



Ответ. $v_c = 0$; $w_c = 40$ *см/сек*^{2};

$v_b = 40$ *см/сек*; $w_b = 40\sqrt{5}$ *см/сек*^{2}.

565. Угловая скорость тела $\omega = 7$ 1/сек; мгновенная ось его составляет в данный момент с координатными осями острые углы: α, β и γ;

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}; \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}.$$

Найти величину скорости v и проекции ее: x', y', z' на координатные оси для точки тела, координаты которой, выраженные в метрах, в данный момент суть: 0, 2, 0, а также расстояние d этой точки от мгновенной оси.

Ответ. $x' = -12$ *см/сек*; $y' = 0$; $z' = 4$ *м/сек*;
$v = 12{,}65$ *см/сек*; $d = 1{,}82$ *м*.

566. Угловая скорость тела $\omega = 6$ 1/сек. Направление мгновенной оси составляет в данный момент времени с осями координат углы: α, β и γ;

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{3}; \quad \gamma > 90°.$$

Найти такую точку тела, находящуюся на плоскости $z = 0$, проекции скорости которой на координатные оси OX и OY суть:

$$x' = y' = 2 \text{ } м/сек.$$

Ответ. Координаты искомой точки суть:

$$x = -\frac{1}{2} \text{ } м, \quad y = +\frac{1}{2} \text{ } м, \quad z = 0.$$

567. Найти уравнения мгновенной оси и величину угловой скорости ω тела, если известно, что проекции скорости точки M_1 (0, 0, 2) на координатные оси суть:

$$x_1' = 1 \text{ } м/сек, \quad y_1' = 2 \text{ } м/сек, \quad z_1' = 0,$$

а направление скорости точки M_2 (0, 1, 2) определяется косинусами углов, образованных с осями координат: $-\frac{2}{3}$, $+\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

Ответ. $\begin{cases} x+2y=0; \\ 3x+z=0; \end{cases}$ $\omega = 3{,}2$ 1/сек.

568. Вращение тела вокруг неподвижной точки задано при помощи Эйлеровых углов следующими уравнениями: $\varphi = nt$, $\psi = \frac{\pi}{2} + ant$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Определить проекции угловой скорости и ускорения тела на неподвижные оси, если a и n — постоянные величины. Указать также то значение параметра a, при котором неподвижным аксоидом тела будет плоскость XOY.

Ответ. 1) $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant$,

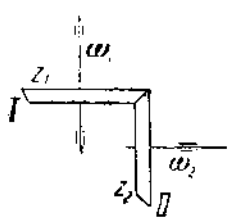
$\omega_z = n\left(a+\frac{1}{2}\right)$;

2) $\varepsilon_x = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2}\sin ant$, $\varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\varepsilon_z = 0$,

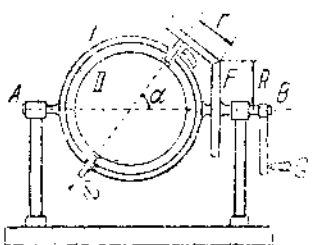
3) $a = -\frac{1}{2}$.

17. Сложение вращений твердого тела, происходящих вокруг пересекающихся осей

569. Два конических зубчатых колеса I и II, у которых числа зубцов соответственно равны $z_1 = 40$ и $z_2 = 30$, имеют взаимно-перпендикулярные неподвижные оси. Колесо делает $n_1 = 60$ об/мин. Определить относительную угловую скорость колес.



Ответ. $n_r = 100$ об/мин.



570. Шаровая дробилка состоит из полого шара II (в котором находятся шары и вещество, подвергающееся дроблению), сидящего на оси CD, на которой закреплено коническое зубчатое колесо E радиуса r. Ось CD сидит в подшипниках в раме I, составляющей одно целое с осью AB и приводящейся во вращение при помощи рукоятки G. Колесо E сцепляется с неподвижным колесом F радиуса R. Определить абсолютную угловую скорость шаровой дробилки,

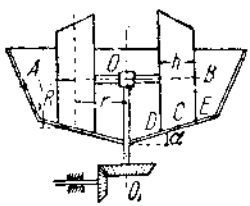
если рукоятка вращается с угловой скоростью ω_0; угол между осями AB и CD равен α.

Ответ. $\omega_A = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\alpha}$.

571. Определить абсолютное угловое ускорение шаровой дробилки предыдущей задачи при $\omega_0 = \text{const}$.

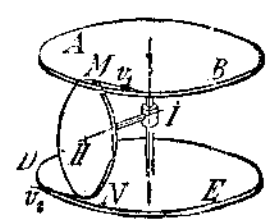
Ответ. $\varepsilon = \omega_0^2 \frac{R}{r}\sin\alpha$.

572. Для растирания руды применяются бегуны в виде чугунных колес со стальными ободами, катящимися по дну конической чаши. Бегуны вращаются вокруг горизонтальной оси AOB, которая вращается вокруг вертикальной оси OO_1, представляющей с ней одно целое. Найти абсолютные скорости точек D и E обода бегуна, если известно, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину C линии касания обода бегуна с дном чаши. Скорость вращения вокруг вертикальной оси $\omega_e = 1$ 1/сек, ширина бегуна $h = 50$ *см*. Средний радиус бегуна $R = 1$ *м*, средний радиус вращения $r = 60$ *см*, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.



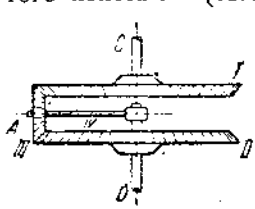
Ответ. $v_d = v_e = 28$ *см/сек*.

573. Дифференциальная передача состоит из двух дисков AB и DE, центры которых находятся на их общей оси вращения; эти диски сжимают колесо MN, ось которого HI перпендикулярна к оси дисков. Определить для колеса MN скорость v центра H и угловую скорость ω вращения вокруг оси HI, если скорости точек касания колеса с дисками равны: $v_1 = 3$ *м/сек*; $v_2 = 4$ *м/сек*; радиус колеса $r = 5$ *см*.



Ответ. $v = 0{,}5$ *м/сек*; $\omega = 70$ 1/сек.

574. Дифференциальная передача состоит из конического зубчатого колеса *III* (сателита), насаженного свободно на кривошип *IV*, который может вращаться вокруг неподвижной оси CD. Сателит соединен с коническими зубчатыми колесами *I* и *II*, вращающимися вокруг той же оси CD с угловыми скоростями $\omega_1 = 5$ 1/сек и $\omega_2 = 3$ 1/сек, причем вращения происходят в одну сторону. Радиус сателита $r = 2$ *см*, а радиусы колес *I* и *II* одинаковы



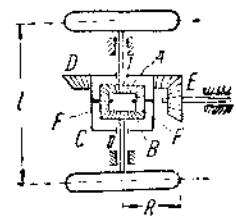
и равны $R = 7$ *см*. Определить угловую скорость кривошипа IV — ω_4, угловую скорость сателита по отношению к кривошипу — $\omega_{3,4}$ и скорость точки A.

Отв. $v_a = 28$ *см/сек*;
$\omega_4 = 4$ 1/сек;
$\omega_{3,4} = 3{,}5$ 1/сек.

575. В дифференциальном механизме предыдущей задачи конические зубчатые колеса I и II вращаются в разные стороны с угловыми скоростями: $\omega_1 = 7$ 1/сек, $\omega_2 = 3$ 1/сек. Определить v_a, ω_4 и $\omega_{3,4}$, если $R = 5$ *см*; $r = 2{,}5$ *см*.

Отв. $v_a = 10$ *см/сек*;
$\omega_4 = 2$ 1/сек;
$\omega_{3,4} = 10$ 1/сек.

576. При движении автомобиля по закругленному пути внешние колеса автомобиля, проходя больший путь, должны вращаться быстрее внутренних колес, проходящих меньший путь. Во избежание поломки задней ведущей оси автомобиля применяется зубчатая передача, называемая дифференциальной и имеющая следующее устройство.



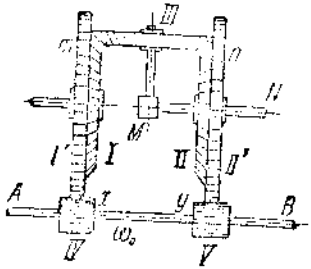
Задняя ось, несущая два колеса, делается из двух отдельных частей I и II, на концах которых наглухо насажены два одинаковых зубчатых колеса A и B. На этих частях вала в подшипниках вращается коробка C с коническим колесом D, наглухо с ней соединенным, получающая вращение от главного (продольного) вала, приводимого в движение мотором, через посредство зубчатки E.

Вращение коробки C передается зубчатым колесам A и B при помощи двух конических шестеренок F (сателитов), свободно вращающихся вокруг осей, укрепленных в коробке перпендикулярно задней оси I — II автомобиля.

Найти угловые скорости задних колес автомобиля в зависимости от угловой скорости вращения коробки C и угловую скорость ω_r сателитов по отношению к коробке, если автомобиль движется со скоростью $v = 36$ *км/час* по закруглению среднего радиуса $\rho = 5$ *м*; радиус колес $R = 0{,}5$ *м*; расстояние между колесами задней оси $l = 2$ *м*. Радиусы колес A и B вдвое больше радиусов сателитов: $R_0 = 2r$.

Отв. $\omega_1 = 24$ 1/сек;
$\omega_2 = 16$ 1/сек;
$\omega_r = 8$ 1/сек.

577. При применении дифференциального зацепления для получения назначенного отношения числа оборотов осей AB и MN к коническим колесам I и II дифференциального зацепления присоединяют наглухо цилиндрические зубчатые колеса I' и II', которые сцепляются с шестеренками IV и V, насаженными наглухо на ось AB. Найти соотношение между угловыми скоростями ω_0 и ω валов AB и MN, если радиусы колес I и II одинаковы, числа зубцов колес I', II', IV и V известны: m, n, x, y.

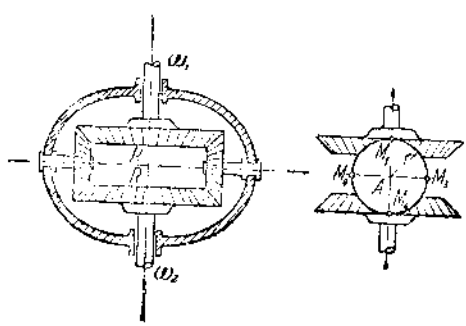


Отв. $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n}\right)$.

578. В дифференциальной передаче предыдущей задачи между зубчатыми колесами I' и IV введено паразитное колесо с неподвижной осью вращения. Требуется найти соотношение между угловыми скоростями ω_0 и ω валов AB и MN, сохраняя все остальные условия задачи.

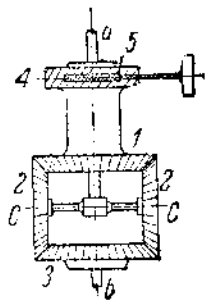
Отв. $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m} - \dfrac{y}{n}\right)$.

579. Дифференциальная передача, соединяющая обе половины задней оси автомобиля, состоит из двух шестеренок одинакового радиуса $R = 6$ *см*, насаженных на половины оси, вращающиеся при движении автомобиля на поворот их с разными угловыми скоростями $\omega_1 = 6$ 1/сек. и $\omega_2 = 4$ 1/сек. одинакового направления. Между шестеренками зажат бегущий сателит радиуса $r = 3$ *см*, свободно насаженный на ось. Ось сателита жестко заделана в кожухе и может вращаться вместе с ним вокруг задней оси автомобиля. Найти угловое ускорение сателита и абсолютное ускорение четырех точек M_1, M_2, M_3 и M_4, лежащих на концах двух диаметров, как показано на рисунке.



Отв. $\varepsilon = 10$ 1/сек^2; $w_1 = 210{,}4$ *см/сек*^{2};
$w_2 = 90{,}8$ *см/сек*^{2}; $w_3 = w_4 = 173{,}4$ *см/сек*^{2}.

580. В дифференциале зуборезного станка ускорительное колесо *4* сидит на ведущем валу *a* свободно вместе со сцепленным с ним колесом *1*. На конце ведущего вала *a* сидит головка, несущая ось *CC* сателитов *2 — 2*. Определить угловую скорость ведомого вала *b* с наглухо заклиненным колесом *3* в пяти случаях.



1) Угловая скорость ведущего вала ω_a, угловая скорость ускорительного колеса $\omega_4 = 0$.

2) Угловая скорость ведущего вала ω_a, ускорительное колесо вращается в ту же сторону, что и ведущий вал, с угловой скоростью ω_4.

3) Ускорительное колесо и ведущий вал вращаются в одну сторону с равными угловыми скоростями $\omega_4 = \omega_a$.

4) Ускорительное колесо и ведущий вал вращаются в одну сторону, причем $\omega_4 = 2\omega_a$.

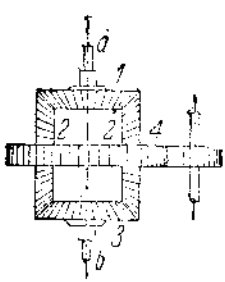
5) Угловая скорость ведущего вала ω_a, ускорительное колесо вращается в противоположную сторону с угловой скоростью ω_4.

Отв. 1) $\omega_b = 2\omega_a$; 2) $\omega_b = 2\omega_a - \omega_4$; 3) $\omega_b = \omega_a$; 4) $\omega_b = 0$; 5) $\omega_b = 2\omega_a + \omega_4$.

581. В дифференциале зуборезного станка, описанном в предыдущей задаче, угловая скорость ведущего вала $\omega_a = 60$ об/мин. Определить, какова должна быть угловая скорость ускорительного колеса, чтобы ведомый вал был неподвижен.

Отв. $\omega_4 = 120$ об/мин.

582. В дифференциале зуборезного станка ускорительное колесо *4* несет на себе ось сателитов. Угловая скорость ведущего вала ω_a; $r_1 = r_2 = r_3$. Определить угловую скорость в следующих трех случаях.

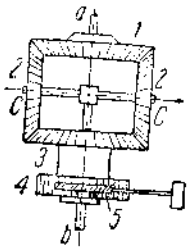


1) Ускорительное колесо *4* вращается в сторону ведущего вала с угловой скоростью $\omega_4 = \omega_a$.

2) То же, но вращение ведущего вала и ускорительного колеса противоположны по направлению.

3) Ускорительное колесо и ось сателитов неподвижны.

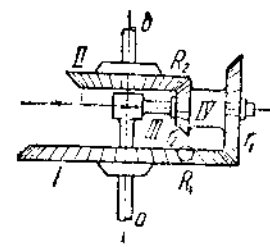
Отв. 1) $\omega_b = \omega_a$;
2) $\omega_b = -3\omega_a$;
3) $\omega_b = -\omega_a$.



583. В станочном дифференциале коническое колесо *I* заклинено на ведущем валу *a*, на конце ведомого вала *b* сидит головка, несущая ось *C*—*C* сателитов *2*—*2*. На том же валу свободно сидит коническое колесо *3*, составляющее одно целое с червячным колесом *4*. Определить передаточное число при неподвижном червяке *5*, а следовательно и колесах *4* и *3*, если все конические колеса одного радиуса.

Ответ. $\frac{\omega_b}{\omega_a} = 0{,}5$.

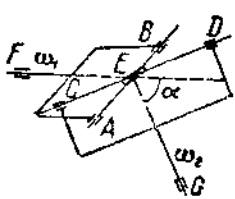
584. Двойной дифференциал состоит из кривошипа *III*, который может вращаться вокруг неподвижной оси *ab*. На кривошипе свободно насажен сателит *IV*, состоящий из двух наглухо скрепленных между собою конических зубчатых колес $r_1 = 4{,}5$ *см* и $r_2 = 2{,}5$ *см*. Колеса эти соединены с двумя коническими зубчатыми колесами *I* и *II* радиусов $R_1 = 9$ *см* и $R_2 = 5$ *см*, вращающимися вокруг оси *ab*, но с кривошипом не связаны. Угловые скорости колес *I* и *II* $\omega_1 = 4$ 1/сек. и $\omega_2 = 9$ 1/сек. Определить скорость кривошипа ω_3 и угловую скорость сателита по отношению к кривошипу $\omega_{4,3}$, если оба колеса вращаются в одну сторону.



Ответ. $\omega_3 = 6{,}5$ 1/сек;
$\omega_{4,3} = 5$ 1/сек.

585. Решить предыдущую задачу, предполагая, что зубчатые колеса *I* и *II* вращаются в разные стороны.

Ответ. $\omega_3 = 2{,}5$ 1/сек;
$\omega_{4,3} = 13$ 1/сек.



586. Крестовина *ABCD* универсального шарнира Кардана-Гука, употребляемого при передаче вращения между пересекающимися осями, вращается вокруг неподвижной точки *E*. Найти отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ для валов, связанных крестовиной, в двух случаях:

1) Когда плоскость вилки *ABF* горизонтальна, а плоскость вилки *CDG* вертикальна.

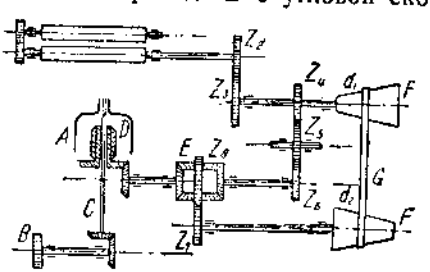
2) Когда плоскость вилки ABF — вертикальна, а плоскость вилки CDG — ей перпендикулярна.

Угол между осями валов постоянный: $\alpha = 60°$.

Отв. 1) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\cos\alpha} = 2$.

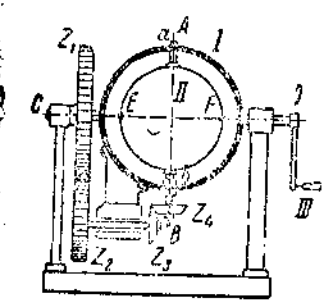
2) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \cos\alpha = 0{,}5$.

587. В прядильной машине веретено A, служащее для кручения пряжи-ровницы, получает вращение от привода B с угловой скоростью ω_1. На шпинделе C веретена A сидит свободно катушка D, на которую наматывается крученая пряжа с веретена. Намотка возможна, если угловая скорость катушки D отлична от угловой скорости веретена A, причем угловая скорость катушки D должна меняться по мере изменения диаметра d катушки с пряжей. Эта задача разрешается при помощи дифференциала E, конических барабанов F и автоматического перевода ремня замка G. Угловая скорость вытяжных цилиндроз, выпускающих пряжу-ровницу, равна ω_2. От этих цилиндров получает вращение и катушка D при помощи вышеупомянутых приспособлений. Определить относительную угловую скорость катушки по отношению к веретену, если их вращения направлены в одну сторону; все шестеренки дифференциала E — одинаковы.



Отв. $\omega_r = \omega_2 \frac{z_2}{z_3}\left(2\frac{d_1 z_1}{d_2 z_3} + \frac{z_4}{z_6}\right) - \omega_1$.

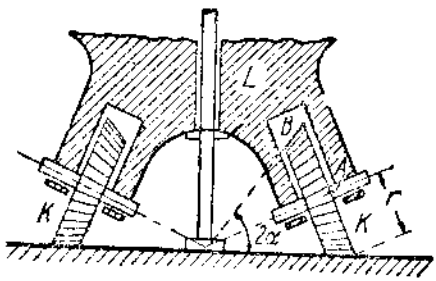
588. Шаровая дробилка состоит из полого шара $d = 10$ *см*, сидящего на оси AB, на которой заклинено зубчатое колесо с числом зубцов $z_4 = 28$. Ось AB закреплена во вращающейся раме I в подшипниках a и b. Рама I составляет одно целое с осью CD, приводящейся во вращение при помощи рукоятки III. Вращение шаровой дробилки вокруг оси AB осуществляется при помощи зубчатых колес с числами зубцов $z_1 = 80$, $z_2 = 43$, $z_3 = 28$, причем первое из них неподвижное. Определить абсолютную угловую скорость, угловое ускорение дробилки и скорости и ускорения двух ее точек E и F,



лежащих в рассматриваемый момент времени на оси CD, если рукоятку вращают с угловой скоростью $\omega = 4{,}3$ 1/сек.

Ответ. $\omega_a = 9{,}08$ 1/сек;
$\varepsilon = 34{,}4$ 1/сек^2;
$v_E = v_F = 40$ *см/сек*;
$w_E = w_F = 320$ *см/сек*^{2}.

589. Поворотная часть моста поставлена на катки в виде конических зубчатых колес K, оси которых закреплены в кольцевой раме L наклонно, так что их продолжения пересекаются в геометрическом центре плоской опорной шестерни, по которой перекатываются опорные зубчатые колеса K. Найти угловую скорость, угловое ускорение конического катка, скорости, вращательные, осестремительные и полные ускорения точек A, B, C, если радиус основания катка $r = 25$ *см*, угол при вершине 2α ($\cos\alpha = 84/85$). Угловая скорость вращения кольцевой рамы вокруг вертикальной оси $\omega_0 = 0{,}1$ 1/сек.



Ответ. $\omega_a = 0{,}646$ 1/сек;
$\varepsilon = 0{,}0646$ 1/сек^2;
$v_a = 16$ *см/сек*;
$v_b = 31{,}84$ *см/сек*;
$v_c = 0$;
$w_{1a} = 10{,}43$ *см/сек*^{2};
$w_{1b} = 10{,}54$ *см/сек*^{2};
$w_{1c} = 10{,}54$ *см/сек*^{2};
$w_{2a} = 10{,}3$ *см/сек*^{2};
$w_{2b} = 20{,}6$ *см/сек*^{2};
$w_{2c} = 0$;
$w_a = 1{,}595$ *см/сек*^{2};
$w_b = 11{,}06$ *см/сек*^{2};
$w_c = 10{,}54$ *см/сек*^{2}.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

I. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Начало Даламбера

590. В шахте опускается равноускоренно бадья весом 280 *кг*; в первые 10 сек. она проходит 35 *м*. Найти натяжение каната, на котором висит бадья.

Ответ. 260 *кг*.

591. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз весом 10 *кг*, опускается вертикально вниз с ускорением 4 $м/сек^2$. Найти давление, производимое грузом на платформу во время их совместного падения.

Ответ. 5,92 *кг*.

592. Поезд, весом без паровоза 200 *т*, двигаясь по горизонтальному пути равноускоренно, через 60 сек. после начала движения приобрел скорость 54 *км/час*. Определить натяжение цепи между паровозом и поездом во время движения, если сила трения равна 0,005 веса поезда.

Ответ. 6,1 *т*.

593. При подъеме клетки лифта диаграмма скоростей имеет вид, изображенный на чертеже. Вес клетки равен 480 *кг*. Определить натяжения T_1, T_2 и T_3 каната, к которому привешена клетка, в течение трех промежутков времени: 1) от $t=0$ до $t=2$ сек, 2) от $t=2$ сек. до $t=8$ сек. и 3) от $t=8$ сек. до $t=10$ сек.

Ответ. $T_1=602{,}4$ *кг*;
$T_2=480$ *кг*;
$T_3=357{,}6$ *кг*.

594. Камень весом 3 *кг*, привязанный к нити длиной 1 *м*, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость камня ω, при которой произойдет разрыв нити, если сопротивление ее разрыву равно 9 *кг*.

Ответ. $\omega = 4{,}49$ 1/сек.

595. На криволинейных участках железнодорожного пути возвышают наружный рельс над внутренним для того, чтобы давление проходящего поезда на рельсы было направлено перпендикулярно к полотну дороги. Определить величину h возвышения наружного рельса над внутренним при следующих данных: радиус закругления 400 *м*, скорость поезда 10 *м/сек*, расстояние между рельсами 1,6 *м*.

Ответ. $h = 4{,}1$ *см*.

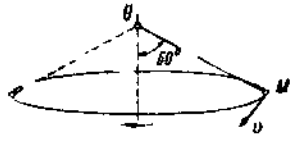
596. В вагоне поезда, идущего по кривой со скоростью 72 *км/час*, производится взвешивание некоторого груза на пружинных весах; вес груза равен 5 *кг*, весы же показывают 5,1 *кг*. Определить радиус закругления пути, пренебрегая массой весов.

Ответ. 202 *м*.

597. Гиря весом 2 *кг* подвешена к концу нити длиной 1 *м*; вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость 5 *м/сек*. Найти натяжение нити непосредственно после толчка.

Ответ. 7,1 *кг*.

598. Груз M весом 1 *кг*, подвешенный на нити длиной 30 *см* в неподвижной точке O, представляет собою конический маятник, т. е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение T нити.



Ответ. $v = 210$ *см/сек*;
$T = 2$ *кг*.

599. Автомобиль веса $Q = 1000$ *кг* движется по выпуклому мосту со скоростью $v = 10$ *м/сек*; радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ *м*. Определить давление автомобиля на мост в момент прохождения автомобиля через середину моста.

Ответ. 796 *кг*.

600. В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. Вес тела равен 5 *кг*; натяжение пружины (показание пружинных весов) равно 5,1 *кг*.

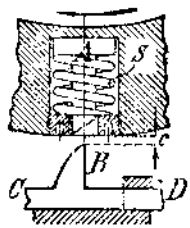
Найти ускорение кабины.

Ответ. 0,196 *м/сек*^{2}.

601. Велосипедист описывает кривую радиуса 10 *м* со скоростью 5 *м/сек*. Найти угол наклона срединной плоскости велосипеда к вертикали, а также тот наименьший коэффициент трения между шинами велосипеда и полотном дороги, при котором будет обеспечена устойчивость велосипеда.

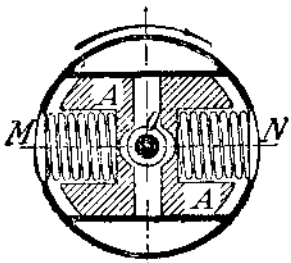
Отв. 14° 20′; 0,255.

602. Во избежание несчастных случаев, происходящих от разрыва маховиков, устраивается следующее приспособление. В ободе маховика помещается тело A, удерживаемое внутри его пружиной S; когда скорость маховика достигнет предельной величины, тело A концом своим задевает выступ B задвижки CD, которая и закрывает доступ пара в машину. Пусть вес тела A равен 1,5 *кг*, расстояние выступа B от маховика $c = 2{,}5$ *см*, предельная угловая скорость маховика 120 оборотов в минуту. Определить необходимый коэффициент жесткости пружины S (т. е. величину силы, под действием которой пружина сжимается на 1 *см*), предполагая, что масса тела A сосредоточена в точке, расстояние которой от оси вращения маховика в изображенном на чертеже положении равно 147,5 *см*.



Отв. 14,5 *кг/см*.

603. В регуляторе Гартунга имеются гири A по 30 *кг* весом, которые могут скользить вдоль горизонтальной прямой MN; эти гири соединены пружинами с точками M и N; центры тяжести гирь совпадают с концами пружин. Расстояние конца каждой пружины от оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, в ненапряженном состоянии равно 5 *см*; изменение длины пружины на 1 *см* вызывается силой в 20 *кг*. Определить расстояние центров тяжести гирь от оси O, когда регулятор, равномерно вращаясь вокруг оси O, делает 120 об/мин.



Отв. 6,58 *см*.

2. Дифференциальные уравнения движения

а) Прямолинейное движение

604. Камень падает без начальной скорости в шахту. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 сек. от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 *м/сек*. Найти глубину шахты.

Отв. 175 *м*.

605. Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, во сколько времени тело пройдет путь 9,6 *м*, если в начальный момент его скорость равнялась 2 *м/сек*.

Ответ. 1,61 сек.

606. При выстреле из орудия снаряд вылетает с горизонтальной скоростью 570 *м/сек*; вес снаряда 6 *кг*. Как велико среднее давление P пороховых газов, если снаряд проходит внутри орудия 2 *м*? Сколько времени движется снаряд в стволе орудия, если считать давление газов постоянным?

Ответ. $P = 49{,}7$ *т*; 0,007 сек.

607. Тело весом P вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости в 5 сек. расстояние $s = 24{,}5$ *м* и остановилось. Определить коэффициент трения k.

Ответ. $k = 0{,}2$.

608. Во сколько времени и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 36 *км/час*, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 300 *кг* на тонну веса вагона?

Ответ. 3,4 сек.; 16,9 *м*.

609. Принимая в первом приближении сопротивление компрессора постоянным, определить продолжительность отката ствола 76 *мм* полевой пушки, принимая начальную скорость отката равной 10 *м/сек* и среднюю длину отката 1 *м*.

Ответ. 0,2 сек.

610. Найти скорость равномерного падения шара веса $P = 10$ *кг* и радиуса $r = 8$ *см*, принимая, что сопротивление воздуха равно $R = k\sigma v^2$, где v — скорость падения, σ — площадь проекции падающего тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его движения, k — численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,024 $\frac{кг/сек^2}{м^4}$.

Ответ. $v = 144$ *м/сек*.

611. Самолет приземляется с горизонтальной скоростью $v_0 = 75$ *км/час*. Коэфициент трения лыж самолета о снег $k = 0{,}08$. Сила сопротивления воздуха движению самолета пропорциональна квадрату скорости. При скорости, равной 1 *м/сек*, горизонталь-

ная составляющая силы сопротивления равна $R_x = 0{,}09$ *кг*, а вертикальная составляющая, направленная вверх, $R_y = 0{,}7$ *кг*. Вес самолета 2000 *кг*. Определить длину и время пробега самолета до остановки.

Отв. $s = 264$ *м*.
$T = 26$ сек.

612. Самолет начинает пикировать без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования.

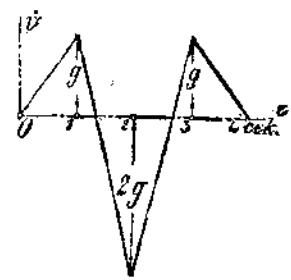
Отв. $v = v_{\max}\sqrt{1 - e^{-\frac{2gy}{v^2_{\max}}}}$.

613. Вожатый трамвая, включая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги возрастает от нуля пропорционально времени, увеличиваясь на 120 *кг* в течение каждой секунды. Найти кривую расстояний s движения вагона при следующих данных: вес вагона 10 *т*, сопротивление трения постоянно и равно 0,2 *т*, а начальная скорость равна нулю.

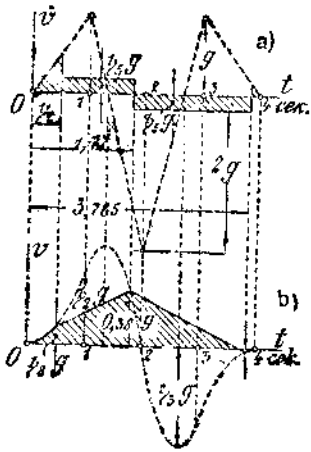
Отв. Движение начнется по истечении $^5/_3$ сек. после включения тока; с этого момента

$$s = 0{,}01962 \cdot \left(t - \frac{5}{3}\right)^3 м.$$

614. Горизонтальный железный желоб, подающий уголь, совершает прямолинейное колебательное движение, полный период которого равен 4 сек. Скорости желоба и угля в начале периода равны нулю. Ускорение желоба в течение каждой четверти периода изменяется, как показано на чертеже, по закону прямой: 1) от нуля до $+g$; 2) от $+g$ до $-2g$; 3) от $-2g$ до $+g$; 4) от $+g$ до нуля. Начертить кривую ускорения для угля, кривые скоростей для желоба и для угля, а также определить путь s, проходимый углем в течение полного периода, если коэффициент трения между железом и углем в случае покоя $k_1 = 0{,}5$, а в случае движения $k_2 = 0{,}2$.



Период движения угля будет также 4 сек., разделяющийся на четыре части:



1) пока ускорение жолоба менее $^1/_2\ g$, уголь движется вместе с жолобом благодаря трению;

2) когда ускорение жолоба более $^1/_2\ g$, уголь движется самостоятельно с ускорением $0{,}2\ g$;

3) как только абсолютная скорость жолоба станет менее абсолютной скорости угля, уголь движется с замедлением $0{,}2\ g$ до того момента, когда скорости жолоба и угля сделаются равными;

4) после этого уголь движется опять вместе с жолобом.

На чертежах a) и b) заштрихованные площади ограничивают кривые ускорений и скоростей угля. Путь, пройденный углем, найдем, вычислив площадь кривой скоростей угля.

Кривые ускорений жолоба и угля (g *см/сек*$^2 = 20$ *мм*) [черт. a)]. Кривые скоростей жолоба и угля (g *см/сек*$^2 = 40$ *мм*) [черт. b)].

Ответ. $s = 6{,}9$ *м*.

615. Тело падает на Землю с высоты h, имея начальную скорость, равную нулю. Сопротивлением воздуха пренебрегаем, а силу притяжения Земли считаем обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли. Найти, какое число T сек. потребуется телу, чтобы достигнуть поверхности Земли, и какую скорость v оно приобретет за это время. Радиус Земли равен R, ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g.

Ответ. $v = \sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$;

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$$

616. Вагон весом $Q = 9216$ *кг* приходит в движение вследствие действия ветра, дующего по направлению полотна, и движется по горизонтальному участку пути. Сопротивление движению вагона равно $\dfrac{1}{200}$ его веса. Сила давления ветра $P = ksu^2$ *кг*, где s — площадь задней стенки вагона, подверженная давлению ветра и равная 6 *м*^{2}, u — скорость ветра относительно вагона, а $k = 0{,}12$. Абсолютная скорость ветра $w = 12$ *м/сек*. Считая начальную скорость вагона равной нулю, определить: 1) наибольшую скорость v_{max} вагона; 2) время T, которое потребовалось бы

для достижения этой скорости; 3) путь x_1, который должен пройти вагон, чтобы приобрести скорость 3 *м/сек*.

Ответ. 1) $v_{max} = 4$ *м/сек*.

Для определения времени принимаем во внимание, что $\frac{dv}{dt} = -\frac{du}{dt}$; представляем уравнение движения в виде:

$$\frac{Q du}{Q - 200\, ksu^2} = \frac{g dt}{200}$$

и вводим затем вместо u переменную $y = u\sqrt{\frac{200\, ks}{Q}}$;

2) $T = \infty$.

Для определения длины пути x_1, воспользовавшись вышеуказанным обозначением y, находим:

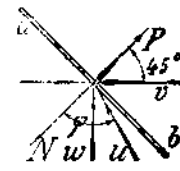
$$\frac{8\,(8y - w)\,dy}{y^2 - 1} = \frac{g dx}{200},$$

откуда

$$x = \frac{3200}{g} \log_n \frac{(y+1)^5}{y-1} + \text{const}.$$

3) $x_1 = 187$ *м*.

617. Буер, весящий вместе с пассажирами $Q = 196{,}2$ *кг*, движется прямолинейно по гладкой поверхности льда вследствие давления ветра на парус, плоскость которого ab образует угол 45° с направлением движения. Абсолютная скорость w ветра перпендикулярна к направлению движения. Величина давления ветра P выражается по формуле Ньютона: $P = ksu^2 \cos^2\varphi$, где φ — угол, образуемый относительной скоростью ветра u с перпендикуляром N к плоскости паруса, $s = 5$ *м*^{2} — величина площади паруса, $k = 0{,}08\sqrt{2}$ — опытный коэффициент. Давление P направлено перпендикулярно к плоскости ab. Пренебрегая трением, найти: 1) какую наибольшую скорость v_{max} может получить буер; 2) какой угол α составляет при этой скорости помещенный на мачте флюгер с плоскостью паруса; 3) какой путь x должен пройти буер для того, чтобы приобрести скорость $v = \frac{2}{3}w$, если его начальная скорость равна нулю.

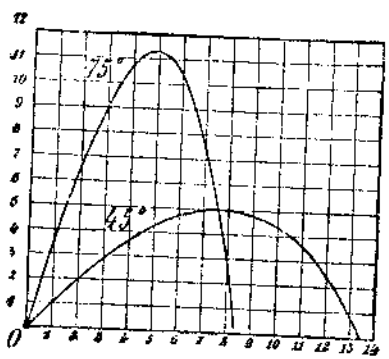


В выражение производной $\frac{dv}{dt}$, получаемое из дифференциального уравнения движения, подставляем $\cos\varphi$, выраженное через скорости v, w и u; находим: $\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{ksg}{Q}(w-v)^2$. С помощью этого уравнения получаем значения v_{max} и угла α. Зависимость между пройденным путем x и скоростью v мы найдем, заменив производную $\frac{dv}{dt}$ через $v\frac{dv}{dx}$ и произведя интегрирование: $\frac{w}{w-v} - 1 + \log\frac{w-v}{w} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{ksg}{Q} x$.

Отв. 1) $v_{max} = w$; 2) $\alpha = 0°$; 3) $x = 100\,(2 - \ln 3) = 90$ *м*.

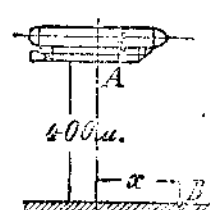
b) Криволинейное движение

618. Морское орудие (105 *мм*, 35 калибров) выбрасывает снаряд (18 *кг*) со скоростью $v_0 = 700$ *м/сек*; действительная траектория снаряда в воздухе изображена на чертеже в двух случаях: 1) когда угол, составляемый осью орудия с горизонтом, равен 45° и 2) когда этот угол равен 75°. Для каждого из двух указанных случаев определить, на сколько километров увеличилась бы как высота, так и дальность полета, если бы снаряд не испытывал сопротивления воздуха.



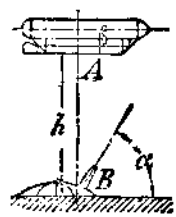
Отв. Увеличение высоты: 1) 7,5 *км*; 2) 12 *км*. Увеличение дальности: 1) 37,6 *км*; 2) 16,7 *км*.

619. Дирижабль A летит на высоте 400 *м* над землей с горизонтальной скоростью 72 *км/час*. На каком расстоянии x, измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки B, должен быть сброшен с дирижабля без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.



Отв. $x = 180{,}6$ *м*.

620. Дирижабль A летит над землей на высоте h с горизонтальной скоростью v_1. Из орудия B делается выстрел по дирижаблю в тот момент, когда дирижабль находится на одной вертикали с орудием. Найти: 1) какому условию должна удовлетворять начальная скорость v_0 снаряда для того, чтобы он мог попасть в дирижабль, и 2) под каким углом α к горизонту должен быть сделан выстрел. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.



Отв. 1) $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

621. Найти, под каким углом α к горизонту нужно бросить камень со скоростью $14\sqrt{2}$ *м/сек*, чтобы он попал в цель, которая находится на уровне его начального положения на расстоянии, равном 32 *м*; сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Отв. Два решения: 1) $\alpha = 26°25'$.
2) $\alpha = 63°25'$.

622. Решить предыдущую задачу в том случае, когда цель будет поднята по вертикали на 4 *м*.

Отв. Два решения: $\alpha = 36°50'$.
$\alpha = 60°15'$.

623. Из вертикальной трубки, помещенной в центре круглого бассейна, выбрасываются наклонные струи воды под различными углами φ к горизонту; начальная скорость струи равна $\sqrt{\frac{4g}{3\cos\varphi}}$ *м/сек*; g — ускорение силы тяжести; высота трубки 1 *м*.

Определить наименьший радиус R бассейна, при котором вся выбрасываемая трубкой вода падает в бассейн, как бы мала ни была высота его стенки.

Принимаем отверстие трубки за начало координат и вертикальную линию за ось OY; составляем уравнение параболы, описываемой какой-либо частицей воды; полагая $y = -1$, получаем уравнение, определяющее соответствующее значение x, из которого затем исключаем угол φ с помощью условия минимума: $\frac{dx}{d\varphi} = 0$.

Отв. $R = 2{,}83$ *м*.

624. Определить движение тяжелой материальной точки массы m граммов, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию. Движение происходит в пустоте; сила притяжения на единице расстояния равна k^2m дин; в мо-

мент $t=0$: $x_0=a$, $x_0'=0$, $y_0=0$, $y_0'=0$, причем ось OY направлена по вертикали вниз.

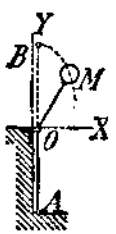
Отв. Гармоническое колебательное движение: $x=a\cos kt$;

$$y=\frac{g}{k^2}(1-\cos kt);\ \text{по прямой:}\ y=\frac{g}{k^2}-\frac{g}{k^2a}x.$$

625. Тело веса p граммов, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления воздуха R. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости: $R=kpv$ дин.

Отв. $h=\frac{1}{k}v_0\sin\alpha-\frac{g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kv_0}{g}\sin\alpha\right)$.

626. Упругая нить, закрепленная в точке A, проходит через неподвижное гладкое кольцо O; к свободному концу ее прикреплен шарик M массы m граммов. Невытянутая длина нити $l=AO$; для удлинения нити на 1 *см* нужно приложить силу, равную k^2m дин. Вытянув нить по прямой AB так, что длина ее увеличилась вдвое, сообщили шарику скорость v_0, перпендикулярную к прямой AB. Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести и считая натяжение нити пропорциональным ее удлинению.



Отв. Эллипс: $\frac{k^2x^2}{v_0^2}+\frac{y^2}{l^2}=1$.

627. Точка M массы m притягивается к n неподвижным центрам C_1, C_2, ... C_i, ... C_n силами, пропорциональными расстояниям; сила притяжения точки M к центру C_i ($i=1, 2, 3, \ldots n$) равна $k_i\cdot m\cdot MC$ дин; точка M и притягивающие центры лежат в плоскости xy. Определить траекторию точки M, если при $t=0$: $x=x_0$, $y=y_0$, $x_0'=0$, $y_0'=v_0$. Действием силы тяжести пренебрегаем.

Отв. Эллипс: $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2+\left[(y-b)+\frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2\cdot\frac{k}{v_0^2}=1$,

где

$$a=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n}k_ix_i;\quad b=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n}k_iy_i;\quad k=\sum_{i=1}^{i=n}k_i.$$

628. Точка M притягивается к двум центрам C_1 и C_2 силами, пропорциональными расстояниям $km\cdot MC_1$ и $km\cdot MC_2$; центр C_1

неподвижен и находится в начале координат, центр C_2 равномерно движется по оси OX так, что $x_2 = 2(a + bt)$.

Найти траекторию точки M, полагая, что в момент $t = 0$ точка M находится в плоскости xy, координаты ее: $x = y = a$, и скорость имеет проекции: $x' = z' = b$, $y' = 0$.

Ответ. Винтовая линия, расположенная на эллиптическом цилиндре, ось которого есть ось OX, а уравнение имеет вид:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{2kz^2}{b^2} = 1;$$ шаг винта равен $\pi b \sqrt{\frac{2}{k}}$.

629. *Отклонение катодных лучей в электрическом поле.* Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества q, вступает в однородное электрическое поле напряжения E со скоростью v_0, перпендикулярною к направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $F = qE$, направленная в сторону, противоположную напряжению E; действием силы тяжести пренебрегаем.

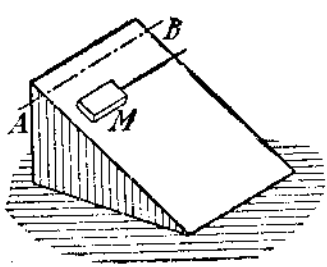
Ответ. Парабола, параметр которой равен $\frac{mv_0^2}{qE}$.

630. *Отклонение катодных лучей в магнитном поле.* Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества q, вступает в однородное магнитное поле напряжения H со скоростью v_0, перпендикулярною к направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что если скорость ее v перпендикулярна к напряжению поля H, то на частицу действует сила $F = qHv$, направленная перпендикулярно к направлению H и к скорости v, как показано на чертеже; действием силы тяжести пренебрегаем.

При решении удобно пользоваться уравнениями движения точки в проекциях на касательную и на главную нормаль к траектории.

Ответ. Окружность радиуса $\frac{mv_0}{qH}$.

631. По негладкой наклонной плоскости движется тяжелое тело M, постоянно оттягиваемое с помощью нити в горизонтальном направлении, параллельном прямой AB. С некоторого момента движение тела становится прямолинейным и равномерным, причем из двух взаимноперпендикулярных составляющих скорости та, которая направлена параллельно AB, равна 12 *см/сек*. Определить вторую составляющую v_1 скорости, а также

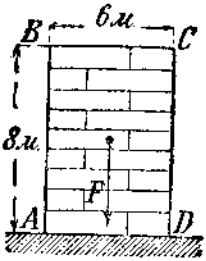


натяжение T нити при следующих данных: уклон плоскости $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{30}$, коэффициент трения $k = 0{,}1$ вес тела 300 $г$.

Отв. $v_1 = 4{,}24$ *см/сек*; $T = 28{,}3$ *г*.

3. Работа и мощность

632. Однородный массив $ABCD$, размеры которого указаны на чертеже, весит $P = 4000$ *кг*. Определить работу, которую необходимо затратить на опрокидывание его вращением вокруг ребра D.



Определяем работу, необходимую для перемещения центра тяжести массива на вертикаль, проходящую через ребро D.

Отв. 4000 *кг* · *м* = 39,24 *кдж*.

633. Определить наименьшую работу, которую нужно затратить для того, чтобы поднять на 5 *м* груз в 2 *т*, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30°; коэффициент трения 0,5.

Отв. 18 660 *кг* · *м* = 183 *кдж*.

634. Для того, чтобы поднять 5000 $м^3$ воды на высоту 3 *м*, поставлен насос с двигателем в 2 *л. с.* Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если коэффициент полезного действия насоса 0,8?

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы — в данном случае работы, затраченной на поднятие воды, — к работе движущей силы, которая должна быть больше полезной работы вследствие вредных сопротивлений.

Отв. 34 часа 43 мин. 20 сек.

635. Как велика мощность в лошадиных силах и киловаттах машины, поднимающей 84 раза в минуту молот весом 200 *кг* на высоту 0,75 *м*, если коэффициент полезного действия машины 0,7?

Отв. 4 *л. с.* = 2,94 *квт*.

636. Вычислить в лошадиных силах и мегаваттах мощность водопадов: Ниагары, Иматры и Наровского; для каждого из них ниже даны: высота падения воды в метрах и средний расход воды в куб. метрах в 1 секунду: Ниагара — 66 *м* и 8800 $м^3$, Иматра — 12 *м* и 400 $м^3$, Наровский — 12 *м* и 250 $м^3$.

Отв. 1) 7 744 000 *л. с.* = 5700 *мгвт*; 2) 64 000 *л. с.* = = 47,1 *мгвт*; 3) 40 000 *л. с.* = 29,4 *мгвт*.

637. Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии 45, вес каждого ва-

гона 10 *т*, сопротивление трения равно 0,02 веса вагона, средняя скорость вагона 12 *км/час* и потери в сети 5%.

Отв. 421 *л. с.* = 309 *квт.*

638. Разгрузка угля с баржи производится мотором, поднимающим бадью. Бадья вмещает 1 *т* угля и весит 200 *кг*. За 12 часов работы должны быть выгружены 600 *т* угля, причем бадью с углем приходится поднимать на высоту 10 *м*.

Определить теоретическую мощность мотора.

Отв. 2,22 *л. с.* = 1,63 *квт.*

639. Вычислить работу, которая производится при подъеме груза в 20 *кг* по наклонной плоскости на расстоянии 6 *м*, если угол, образуемый плоскостью с горизонтом, равен 30°, а коэффициент трения равен 0,01.

Отв. 61,04 *кг* · *м* = 598 *дж.*

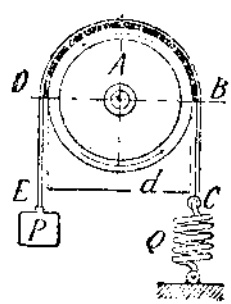
640. Когда пароход идет со скоростью 15 узлов в час, машина его развивает 5144 *л. с.* Определить силу сопротивления воды движению парохода, зная, что коэффициент полезного действия машины и винта равен 0,4, а 1 узел = 0,5144 *м/сек.*

Отв. 20 *т* = 196 *сн.*

641. Найти в лошадиных силах и киловаттах мощность паровой машины, если среднее давление пара на поршень в течение всего хода равно 5 *кг* на 1 *см*^{2}; длина хода поршня 40 *см*; площадь поршня 300 *см*^{2}; число рабочих ходов 120 в минуту и коэффициент полезного действия 0,9.

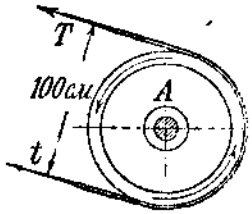
Отв. 14,4 *л. с.* = 10,6 *квт.*

642. Для измерения мощности двигателя на шкив его *A* надета лента с деревянными колодками. Правая ветвь ленты *BC* удерживается пружинными весами *Q*, а левая ее ветвь *DE* натягивается грузом *P*. Определить мощность двигателя в тот момент, когда он делает 120 об/мин., если при этом пружинные весы показывают натяжение правой ветви ленты в 4 *кг*; вес груза *P* равен 1 *кг*; диаметр шкива $d = 63^7/_{11}$ *см*; $\pi = 3^1/_7$.



Разность натяжений ветвей *BC* и *DE* ленты равна силе, тормозящей шкив: определяем работу этой силы в 1 сек.

Отв. 0,16 *л. с.* = 117,8 *вт.*



643. При помощи ремня передается 20 *л. с.* Радиус ременного шкива 50 *см*, число оборотов 150 в минуту. Предполагая, что натяжение T ведущей ветви ремня вдвое больше натяжения t ведомой ветви, определить натяжения T и t.

Отв. $T = 382$ *кг*; $t = 191$ *кг*.

4. Закон живой силы

644. Тело, лежащее на негладком горизонтальном полу, получает начальную скорость 4 *м/сек* и движется затем прямолинейно и равнозамедленно; пройдя 4 *м*, оно останавливается. Определить коэффициент трения.

Отв. 0,204.

645. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 *м* от начала движения?

Отв. 4,02 *м/сек*.

646. Поезд весом 800 *т* движется в данный момент со скоростью 15 *м/сек*. С этого момента машинист закрывает пар, и поезд далее движется равнозамедленно вследствие трения. Пройдя 2000 *м*, поезд имеет скорость 2 *м/сек*. Определить в килограммометрах и килоджоулях работу, затраченную на преодоление трения и величину коэффициента трения k.

Отв. $9{,}01 \cdot 10^6$ *кг · м* $= 88\,400$ *кдж*; $k = 5{,}63 \cdot 10^{-3}$.

647. Материальная точка весом 3 *кг* двигалась по горизонтальной прямой налево со скоростью 5 *м/сек*. К ней приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 сек. и тогда скорость точки оказалась равной 55 *м/сек*. и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

Отв. 0,612 *кг*; 459 *кг · м* $= 4{,}5$ *кдж*.

648. За 500 *м* до станции, стоящей на пригорке высотой 2 *м*, машинист поезда, идущего со скоростью 12 *м/сек*, закрыл пар и начал тормозить. Как велико должно быть сопротивление от торможения, считаемое постоянным, чтобы поезд остановился у станции, если вес поезда равен 1000 *т*, а сопротивление трения 2 *т*?

Отв. 8679 *кг* $= 85$ *сн*.

649. Поезд идет со скоростью 36 *км/час* под уклон, угол которого $\alpha = 0{,}008$. В некоторый момент машинист, увидав опасность, затормаживает поезд. Сопротивление от торможения и трения в осях составляет 0,1 веса поезда. Определить, на каком расстоянии и через сколько времени от момента начала торможения поезд остановится, полагая $\sin\alpha = \alpha$.

Ответ. 55,3 *м*; 11,06 сек.

650. Поезд весом 200 *т* идет по горизонтальному участку пути с ускорением 0,2 *м/сек*². Сопротивление поезда равно 10 *кг* на тонну его веса. Определить развиваемую паровозом мощность в момент $t = 10$ сек., если в момент $t = 0$ скорость поезда равнялась 18 *м/сек*.

Из уравнения живой силы: $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Pds - 0{,}01\ mgds$, где m обозначает массу поезда, а P — силу тяги паровоза, находим элементарную работу паровозной машины:

$$Pds = 0{,}01\ mg\,ds + mv\,dv;$$

отсюда получаем мощность N машины:

$$N = mv\left(0{,}01\ g + \frac{dv}{dt}\right).$$

Ответ. 1620 *л. с.* = 1192 *квт*.

651. Грунт утрамбовывается с помощью ручной бабы веса 60 *кг* и поперечного сечения 12 *дм*², которая падает с высоты 1 *м*. При последнем ударе баба входит в грунт на глубину 1 *см*, причем сопротивление грунта движению бабы можно считать постоянным. Какую наибольшую нагрузку выдержит грунт, не давая осадки?

Допускается, что утрамбованный грунт может выдержать без осадки нагрузку, не превосходящую того сопротивления, которое встречает баба, углубляясь в грунт.

Ответ. 5,05 *кг/см*².

652. Сопротивление, встречаемое железнодорожной платформой при движении и происходящее от трения в осях, равно 15 *кг*, а вес ее 6 *т*. Рабочий уперся в покоящуюся платформу и покатил ее по горизонтальному и прямолинейному участку пути, производя давление, равное 25 *кг*. Пробежав 20 *м*, он предоставил платформе катиться самой. Вычислить, пренебрегая сопротивлением воздуха и трением колес о рельсы, наибольшую скорость v_{max} платформы во время движения, а также весь путь s, пройденный ею до остановки.

Ответ. $v_{max} = 0{,}808$ *м/сек*; $s = 33\frac{1}{3}$ *м*.

653. Главную часть прибора Шарпи для испытания материалов ударом составляет тяжелая стальная отливка M, прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной оси O. Пренебрегая массой стержня, рассматриваем отливку M как материальную точку, для которой расстояние $OM = 0{,}981$ *м*. Определить скорость v этой точки в наинизшем положении B, если она падает из наивысшего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.

Ответ. $v = 6{,}2$ *м/сек*.

654. Написать выражение силовой функции для силы упругости рессоры, прогибающейся на 1 *см* от нагрузки в 0,4 *т*, предполагая, что прогиб x возрастает прямо пропорционально нагрузке.

Ответ. $U = 0{,}2x^2 + \text{const}$.

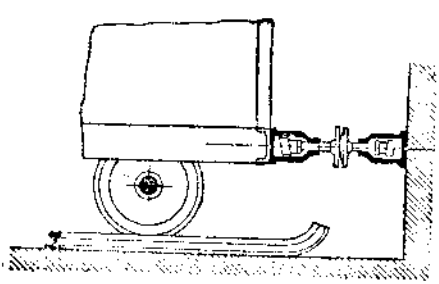
655. Пружина самострела имеет в ненапряженном состоянии длину 20 *см*. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 *см*, равна 0,2 *кг*. С какой скоростью v вылетит из самострела шарик весом 30 *г*, если пружина была сжата до длины 10 *см*?

Ответ. $v = 8{,}1$ *м/сек*.

656. Статический прогиб балки, загруженной по середине грузом Q, равен 2 *мм*. Найти наибольший прогиб балки, пренебрегая ее массой, в двух случаях: 1) когда груз Q положен на неизогнутую балку и отпущен без начальной скорости; 2) когда груз Q падает на середину неизогнутой балки с высоты 10 *см* без начальной скорости.

При решении задачи следует иметь в виду, что сила, действующая на груз со стороны балки, пропорциональна ее прогибу

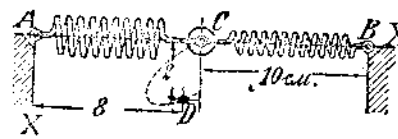
Ответ. 1) 4 *мм*; 2) 22,1 *мм*.



657. Вагон весом в 16 *т* наталкивается со скоростью 2 *м/сек* на два упорных буфера. Определить наибольшее сжатие буферов при ударе вагона, если известно, что пружина буфера сжимается на 1 *см* под действием силы в 5 *т*.

Ответ. 8,08 *см*.

658. Две ненапряженные пружины AC и BC, расположенные на горизонтальной прямой AX, прикреплены шарнирами к неподвижным точкам A и B, а в точке C к гире весом 1,952 *кг*. Пружина AC сжимается на 1 *см* силою в 2 *кг*, а пружина CB вытягивается на 1 *см* силою 4 *кг*. Расстояния: $AC = BC = 10$ *см*. Гире сообщена скорость $v_0 = 2$ *м/сек* в таком направлении, что при последующем движении она проходит через точку D, координаты коей суть: $x_0 = 8$ *см*, $y_0 = 2$ *см*, если за начало координат принять точку A и координатные оси направить, как указано на чертеже. Определить скорость гири в момент прохождения ее через точку D.



Ответ. $v = 1{,}67$ *м/сек*.

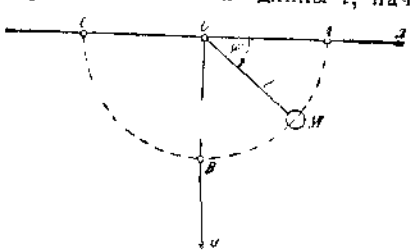
659. На материальную точку действует переменная сила F, проекции которой на оси координат выражаются следующими зависимостями:

$$F_x = y^2;\ F_y = 2xy;\ F_z = \text{const} = 0.$$

Вычислить работу силы F на перемещении точки ее приложения из начала координат в точку M (2, 2, 2). (Сила выражена в килограммах, а координаты в сантиметрах.)

Ответ. 8 *кг·см*.

660. Груз M веса P, подвешенный в точке O на невесомой и нерастяжимой нити длины l, начинает двигаться в вертикальной плоскости без начальной скорости из точки A; при отсутствии сопротивлений груз M достигнет положения C, где его скорость обратится в нуль. Приняв потенциальную энергию силы тяжести груза M в точке B равной нулю, построить графики изменения кинетической и потенциальной энергии, а также их суммы в зависимости от угла φ.



Ответ. Две синусоиды и прямая, имеющие ур-ния:

$$T = Pl\sin\varphi,\quad V = Pl(1-\sin\varphi),\quad T+V = Pl.$$

661. Материальная точка массы m совершает гармонические колебания по прямой OX под действием упругой восстанавливающей силы по следующему закону:

$$x = a\sin(kt+\beta).$$

Пренебрегая сопротивлениями, построить график изменения кинетической T и потенциальной энергии V движущейся точки в зависимости от координаты x; в начале координат $V=0$.

Отв. Оба графика — параболы, имеющие ур-ния:

$$T=\frac{mk^2}{2}(a^2-x^2),\quad V=\frac{mk^2x^2}{2}.$$

662. Поезд движется равномерно со скоростью 36 *км/час* по горизонтальному прямолинейному участку пути. Желая увеличить скорость поезда, машинист устанавливает регулятор так, что сила тяги паровоза увеличивается на 20%. Считая сопротивление движению поезда равным $\frac{1}{200}$ его веса и независящим от скорости, найти, сколько километров должен пройти поезд, чтобы достичь скорости 45 *км/час*.

Отв. 2,87 *км*.

663. К нижнему концу упругого каната подвешен груз $Q=4$ *т*. Определить наибольшее натяжение T_m каната при последующем движении груза Q, предполагая, что натяжение каната пропорционально его удлинению; в начальный момент скорость груза и удлинение каната равны нулю.

Отв. $T_m=2Q=8$ *т*.

664. Тело брошено с поверхности земли вверх по вертикальной линии с начальной скоростью v_0. Определить высоту H поднятия тела, принимая во внимание, что сила тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли; сопротивлением воздуха пренебрегаем. Радиус Земли $R=6370$ *км*; $v_0=1$ *км/сек*.

Отв. $H=\frac{Rv_0^2}{2gR-v_0^2}=51$ *км*.

665. Две частицы заряжены положительным электричеством; заряд первой частицы q_1 равен 100 абс. электрич. ед. *CGS*, заряд второй $q_2=0{,}1\,q_1$; первая частица остается неподвижной, а вторая движется вследствие силы отталкивания F от первой частицы. Масса второй частицы равна 1 *г*; начальное расстояние от первой частицы равно 5 *см*, а начальная скорость равна нулю. Определить высший предел для скорости движущейся частицы, принимая во внимание действие только одной силы отталкивания $F=\frac{q_1q_2}{r^2}$, где r — расстояние между частицами.

Отв. 20 *см/сек*.

666. Сила притяжения внутри Земли пропорциональна расстоянию r движущейся точки от центра Земли и направлена к этому центру. Предположим, что вдоль одного из диаметров Земли вырыт сквозной прямолинейный канал, определить скорость прохождения через центр Земли тела, опущенного в этот канал с поверхности Земли с начальной скоростью, равной нулю. Радиус Земли равен $637 \cdot 10^6$ *см*; ускорение силы притяжения на поверхности Земли равно 980 *см/сек*^{2}.

Отв. 7,9 *км/сек*.

667. Определить скорость v_0, которую нужно сообщить по вертикали вверх телу, находящемуся на поверхности Земли, для того, чтобы оно поднялось на высоту, равную земному радиусу; при этом нужно принять во внимание только силу притяжения Земли, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра Земли. Радиус Земли равен $637 \cdot 10^6$ *см*, ускорение силы притяжения на поверхности Земли равно 980 *см/сек*^{2}.

Отв. 7,9 *км/сек*.

668. Найти, с какой скоростью v_0 нужно выбросить снаряд с поверхности Земли по направлению к Луне, чтобы он достиг точки, где силы притяжения Земли и Луны равны, и остался в этой точке в равновесии. Движением Земли и Луны и сопротивлением воздуха пренебрегаем. Ускорение силы тяжести у поверхности земли $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}. Отношение масс Луны и Земли $m : M = 1 : 80$; расстояние между ними $d = 60R$, где $R = 6000$ *км* — радиус Земли.

Коэффициент f, входящий формулу для величины силы всемирного тяготения, находим из уравнения

$$m_1 g = m_1 f \left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

Отв. $$v_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d} \cdot \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R) - R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R) + R} = 2gR\left(1 - \frac{1}{60}\right)\frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{59}\frac{1}{\sqrt{80}}; \quad v_0 = 10{,}75 \text{ км/сек}.$$

5. Закон количества движения и закон моментов. Движение под действием центральных сил

669. Железнодорожный поезд двигается по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения

скорость поезда равняется 72 *км/час*. Найти время торможения и тормозный путь.

Отв. 20,4 сек.; 204 *м*.

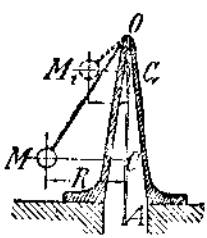
670. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени T тело пройдет путь длиною $l = 39{,}2$ *м*, если коэффициент трения $k = 0{,}2$.

Отв. $T = 5$ сек.

671. Поезд веса 400 m входит на подъем $i = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}006$ (где α—угол подъема) со скоростью 54 *км/час*. Коэффициент трения при движении поезда равен 0,005. Через 50 сек. после входа поезда на подъем его скорость падает до 45 *км/час*. Найти силу тяги паровоза.

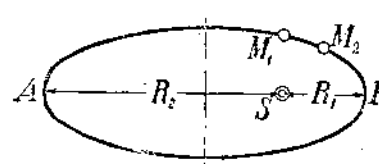
Отв. 2,36 m.

672. Гирька M привязана к концу нерастяжимой нити MOA, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку; гирька вращается вокруг оси трубки по окружности радиуса $MC = R$, делая 120 об/мин. Медленно втягивая нить OA в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_1, при которой гирька описывает окружность радиуса $\frac{1}{2}R$. Найти: 1) сколько оборотов в минуту делает гирька по этой окружности и 2) во сколько раз живая сила гирьки в положении M_1 более, чем в положении M.



Отв. 1) 480 об/мин.; 2) в 4 раза.

673. Два метеорита M_1 и M_2 описывают один и тот же эллипс, в фокусе которого S находится Солнце. Расстояние между ними настолько мало, что дугу эллипса M_1M_2 можем считать за отрезок прямой. Известно, что расстояние M_1M_2 равнялось a, когда середина его находилась в перигелии P. Предполагая, что метеориты движутся с равными секториальными скоростями, определить расстояние M_1M_2, когда середина его будет проходить через афелий A, если известно, что $SP = R_1$ и $SA = R_2$.



Ответ. $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2}a$.

674. Шарик весом p граммов, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити T, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0.

Ответ. В полярных координатах, считая отверстие за начало координат и угол φ_0 равным нулю:

$$r = R - at; \quad \varphi = \frac{v_0 t}{R - at};$$

$$T = \frac{p v_0^2 R^2}{g\,(R - at)^3} \text{ г}.$$

675. Определить массу M Солнца, имея следующие данные: радиус Земли $R = 637 \cdot 10^6$ *см*; средняя плотность ее 5,5; большая полуось земной орбиты a равна $149 \cdot 10^{11}$ *см*; время обращения Земли около Солнца T равно 365,25 суток.

Силу всемирного тяготения между двумя массами, равными 1 *г*, на расстоянии 1 *см* считаем равной $\frac{gR^2}{m}$, где m—масса Земли: из законов Кеплера следует, что сила притяжения Земли Солнцем равна $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}$, где r—расстояние Земли от Солнца.

Ответ. $M = 197 \cdot 10^{31}$ *г*.

676. Точка массы m, подверженная действию силы F, описывает лемнискату: $r^2 = a \cos 2\varphi$, где a—величина постоянная, r—расстояние точки от центра силы; в начальный момент: $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с центром силы. Определить силу F, зная, что она зависит только от расстояния r.

По формуле Бине $F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)$, где c—удвоенная секториальная скорость точки.

Ответ. Сила притяжения $F = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha$.

677. Точка M массы m движется около неподвижного центра O под влиянием силы F, исходящей из этого центра и зависящей только от расстояния $MO = r$. Зная, что скорость точки $v = \frac{a}{r}$, где a—величина постоянная, найти силу F и траекторию точки.

Ответ. Сила притяжения $F = \frac{ma^2}{r^3}$; траектория—логарифмическая спираль.

678. Определить движение точки массы 1 *г* под влиянием центральной силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от центра силы, при следующих данных: на расстоянии, равном 1 *см*, сила равна 1 дине; в начальный момент расстояние точки от центра $r_0 = 2$ *см*, скорость $v_0 = 0{,}5$ *см/сек* и составляет угол 45° с направлением прямой, проведенной из центра к точке.

Секториальная скорость равна $\frac{1}{2} r_0 v_0 \sin(r_0, v_0)$.

Ответ. $r = 2e^{\pm t}$; $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

679. Частица M массы 1 *г* притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния; эта сила равна 8 динам при расстоянии, равном 1 *см*. В начальный момент частица находится на расстоянии $OM_0 = 2$ *см* и имеет скорость, перпендикулярную к OM_0 и равную $v_0 = 0{,}5$ *см/сек*. Определить траекторию частицы.

Ответ. Окружность радиуса 1 *см*.

680. Точка массы 20 *г*, движущаяся под влиянием силы притяжения к неподвижному центру по закону Ньютона, описывает полный эллипс с полуосями 10 *см* и 8 *см* в течение 50 сек. Определить наибольшую и наименьшую величину F силы притяжения при этом движении.

Ответ. $F_{max} = 19{,}7$ дин; $F_{min} = 1{,}2$ дин.

6. Смешанные задачи

681. Груз весом 1 *кг* подвешен на нити длиной 50 *см* в неподвижной точке O. В начальном положении груз отклонен от вертикали на угол 60° и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 210 *см/сек*. Определить: 1) натяжение нити в наинизшем положении; 2) отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимется над этим положением.

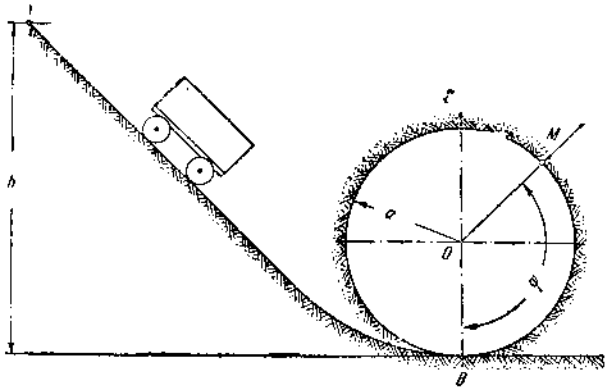
Ответ. 1) 2,9 *кг*.

2) 47,5 *см*.

682. Сохраняются условия предыдущей задачи, кроме величины скорости v_0; найти, при какой величине скорости v_0 груз будет проходить всю окружность.

Ответ. $v_0 > 443$ *см/сек*.

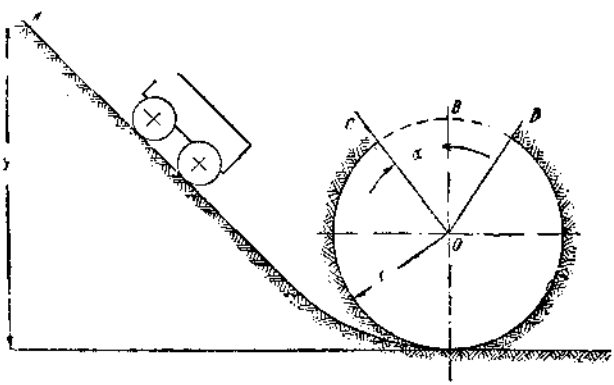
— **683.** По рельсам, проложенным по пути AB и образующим затем петлю в виде кругового кольца BC радиуса a, скатывается вагонетка весом p килограммов. С какой высоты h нужно пустить



вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него. Определить давление N вагонетки на кольцо в точке M, для которой угол $MOB = \varphi$.

Ответ. $h \geqslant 2{,}5a$; $N = p\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right)$ *кг*.

684. Путь, по которому движется вагонетка, скатываясь из точки A, образует разомкнутую петлю радиуса r, как показано на чертеже; $\angle BOC = \angle BOD = \alpha$.



Найти, с какой высоты h должна скатываться вагонетка без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю петлю,

а также то значение угла α, при котором эта высота h наименьшая.

Отв. $h = r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$.

$h_{\min}$ при $\alpha = 45°$.

685. Определить наибольшее давление на ось в приборе Шарпи при условиях, указанных в задаче 653, предполагая, что вес стальной отливки равен 20 *кг*.

Отв. 100 *кг*.

686. Какой угол с вертикалью составляет вращающийся стержень прибора Шарпи (см. задачу 653) в тот момент, когда давление на ось равно нулю?

Отв. $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

687. Груз M веса P падает без начальной скорости с высоты H на плиту A, лежащую на спиральной пружине B. От действия упавшего груза M пружина сжимается на величину h.

Не учитывая веса плиты A и сопротивлений, вычислить время T сжатия пружины на величину h и импульс S упругой силы пружины за время T.

Отв. $T = \sqrt{\frac{h}{2g(H+h)}}\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}\right\}$,

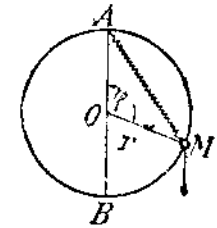
$$S = \sqrt{\frac{P}{2g(H+h)}}\left\{(h+2H)\left[\cos\alpha - \cos(kT+\alpha)\right] + T\sqrt{2g(H+h)}\right\},$$

где $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}$, $k = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}$.

688. При взрыве маховика одна из его частей, наиболее удаленная от места катастрофы, оказалась на расстоянии $s = 280$ *м* от первоначального положения; пренебрегая сопротивлением воздуха при движении указанной части из первоначального положения в конечное, лежащие в одной горизонтальной плоскости, найти наименьшую угловую скорость маховика в момент катастрофы, если радиус маховика $R = 1{,}75$ *м*.

Отв. $n = 286$ об/мин.

– 689. Груз M, подвешенный на пружине к верхней точке A круглого кольца, расположенного в вертикальной плоскости, падает, скользя по кольцу без трения.



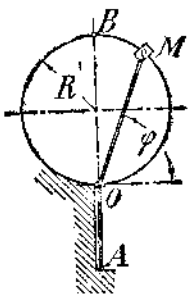
Найти, какова должна быть жесткость пружины для того, чтобы давление груза на кольцо в нижней точке B равнялось нулю при следующих данных: радиус кольца 20 *см*; вес груза 5 *кг*; в начальном положении груза расстояние AM равно 20 *см* и пружина имеет натуральную длину; начальная скорость груза равна нулю; весом пружины пренебрегаем.

Ответ. Пружина должна удлиняться на 1 *см* при действии силы, равной 0,5 *кг*.

– 690. Определить давление груза M на кольцо в нижней точке B (чертеж задачи 689) при следующих данных: радиус кольца 20 *см*, вес груза 7 *кг*; в начальном положении груза расстояние AM равно 20 *см*, причем пружина растянута и длина ее вдвое более натуральной длины, которая равна 10 *см*; жесткость пружины такова, что она удлиняется на 1 *см* при действии силы в 0,5 *кг*; начальная скорость груза равна нулю; весом пружины пренебрегаем.

Ответ. Давление направлено вверх и равно 7 *кг*.

691. Гладкое тяжелое кольцо M весом 1 *г* может скользить без трения по дуге окружности радиуса R *см*, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA, проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закрепленная в точке A. Дано, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо M находится в точке O, и что для вытягивания нити на 1 *см* нужно приложить силу k^2 дин. В начальный момент кольцо находится в точке B в неустойчивом равновесии и при ничтожно малом толчке начинает скользить по окружности. Определить давление N, производимое кольцом на окружность.

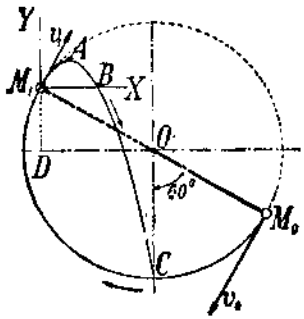


Ответ. $N=[2g+Rk^2+3\,(g+Rk^2)\cos 2\varphi]$ дин; давление направлено наружу при $N>0$, внутрь при $N<0$.

692. Груз весом в 1 *кг* подвешен на нити длиной 50 *см* в неподвижной точке O. В начальном положении M_0 груз отклонен от вертикали на угол 60° и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 350 *см/сек*.

1) Найти то положение M_1 груза, в котором натяжение нити будет равно нулю и скорость v_1 в этом положении.

2) Определить траекторию последующего движения груза до того момента, когда нить будет опять натянута.



Отв. 1) Положение M_1 находится над горизонтом точки O на расстоянии $M_1D = 25$ *см*;

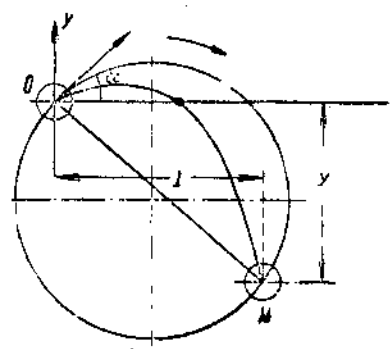
$$v_1 = 157 \text{ см/сек}.$$

2) Парабола M_1ABC, уравнение которой, отнесенное к осям M_1X и M_1Y, будет

$$y = x\sqrt{3} - 0{,}08x^2;$$

груз описывает эту параболу в течение 0,55 сек.

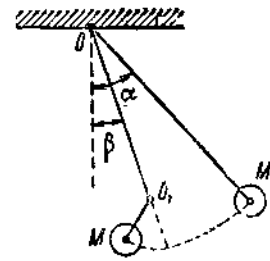
693. Шаровая мельница для дробления руды представляет цилиндрический барабан, вращающийся вокруг горизонтальной оси (на чертеже изображено сечение цилиндрического барабана вертикальной плоскостью, перпендикулярной к его оси), внутри которого дробление руды производится ударами тяжелых металлических шаров. При вращении барабана шар давит на его поверхность и перемещается вместе с ней до определенной высоты, где он отделяется от этой поверхности (в точке O) и продолжает дальнейшее движение по параболе, как тяжелая точка, брошенная под углом к горизонту. Принимая шар за материальную точку, определить положение его M при ударе о поверхность барабана, если известны угловая скорость вращения барабана ω, радиус r рассматриваемого сечения его и ускорение g свободного падения.



Отв. При расположении осей, указанном на чертеже, координаты точки M будут:

$$x = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad y = -\frac{4v_0^2 \sin^2\alpha}{g}, \text{ где } v_0 = r\omega.$$

694. В неподвижной точке O посредством нити OM длины l подвешен груз M массы m. В начальный момент нить OM составляет с вертикалью угол α и скорость груза M равна нулю. При последующем движении нить встречает тонкую проволоку O_1, направление которой перпендикулярно к плоскости движения груза, а положение определяется полярными координатами: $h = OO_1$ и β. Определить наименьшее значение угла α, при котором нить OM после встречи с проволокой будет на нее навиваться, а также изменение натяжения нити в момент ее встречи с проволокой. Толщиной проволоки пренебрегаем.



Ответ. $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)-\frac{3}{2}\right]$;

натяжение нити увеличивается на величину:

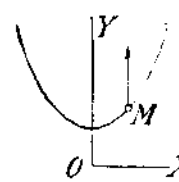
$$2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right).$$

695. Камень M, находящийся на вершине A гладкого полусферического купола радиуса R, получает начальную горизонтальную скорость v_0. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях v_0 камень сойдет с купола в начальный момент?

Ответ. $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3}+\frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$.

696. Точка массы m движется по цепной линии:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a},$$

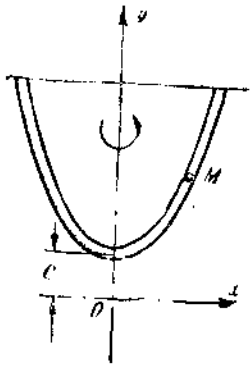


где $a = 1$ *м*, при действии параллельной оси OY силы отталкивания от оси OX, равной kmy при $k = 1$ 1/сек². В момент $t = 0$: $x = 1$ *м*, $x' = 1$ *м/сек*.

Определить давление N точки на кривую и движение точки (сила тяжести отсутствует).

Радиус кривизны цепной линии равен $\frac{y^2}{a}$.

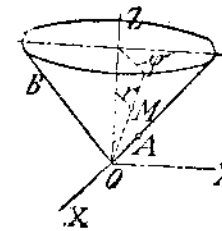
Ответ. $N = 0$; $x = (1+t)$ *м*.



697. По какой плоской кривой следует изогнуть трубку, чтобы помещенный в нее в любом месте шарик остался по отношению трубки в равновесии, если трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OY.

Отв. По параболе $y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 + c$.

698. Точка M массы m граммов движется по гладкой поверхности круглого конуса, имеющего угол растворения 90°, под влиянием силы отталкивания от вершины O, пропорциональной расстоянию: $F = m \cdot OM$ дин. В начальный момент точка M находится в точке A, расстояние OA равно 2 *см*, начальная скорость $v_0 = 2$ *см/сек* и направлена параллельно основанию конуса. Определить движение точки M (сила тяжести отсутствует).

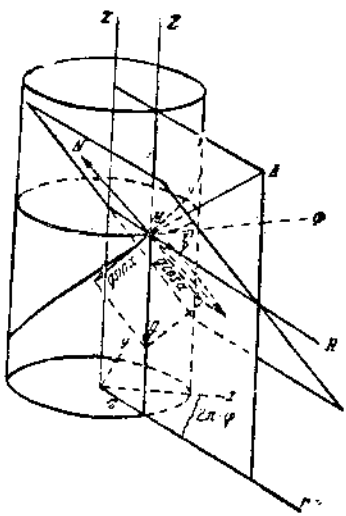


Положение точки M определяем координатою z и полярными координатами r и φ в плоскости, перпендикулярной к оси OZ: уравнение поверхности конуса:

$$r^2 - z^2 = 0.$$

Отв. $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}.$$



699. Дается уравнение винтовой поверхности с вертикальной осью

$$z = a\varphi + f(r),$$

отнесенное к системе цилиндрических координат (r, φ, z), и рассматривается движение тяжелой материальной точки по этой поверхности с трением (k — коэффициент трения). Определить условие, при котором движение происходит на постоянном расстоянии от оси $r = r_0$ (по винтовой линии), и скорость этого движения.

Указание. Для решения задачи следует воспользоваться уравнениями движения точки по поверхности в цилиндрических координатах или уравнениями движения в проекциях на касательную к винтовой линии и рас-

сматриваемом положении M движущейся точки и на прямую MA — прямую пересечения касательной плоскости к поверхности в точке M с вертикальною плоскостью, проходящею через эту точку и ось z. Проекция на эту прямую (как и на касательную) нормальной к поверхности реакции в M равна нулю.

Ответ. Движение возможно на постоянном расстоянии от оси r_0, определяемом из условия

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+\cos^2\alpha\cdot f'^2(r_0)} = 0,$$

где

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{r_0},$$

и происходит с постоянной скоростью

$$v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}.$$

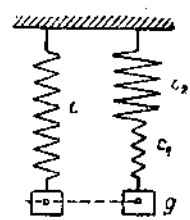
7. Колебательное движение

700. Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если вес фундамента с машиной $G = 90$ $т$, площадь подошвы фундамента $S = 15$ $м^2$, коэффициент жесткости грунта $c = \lambda S$, где $\lambda = 3$ $кг/см^3$ — так называемая удельная жесткость грунта.

Ответ. $T = 0{,}09$ сек.

701. Найти период свободных вертикальных колебаний корабля в спокойной воде, если вес корабля P $т$, площадь его горизонтального сечения равна S $м^2$ и не зависит от высоты сечения; вес 1 $м^3$ воды равен 1 $т$.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{P}{Sg}}$.



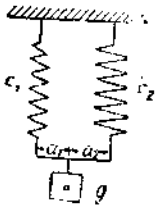
702. Определить коэффициент жесткости C $кг/см$ пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно-включенных пружин с разными коэффициентами жесткости C_1 и C_2, и указать также период колебаний груза веса G $кг$, подвешенного на указанной двойной пружине.

Ответ. $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{G(C_1+C_2)}{gC_1C_2}}$.

703. Определить период свободных колебаний груза веса G, зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{G}{g(C_1+C_2)}}$.

704. Определить период свободных колебаний груза веса G, прикрепленного к двум параллельно-включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости C_1 и C_2, одинаковы.



Отв.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{G}{g(C_1 + C_2)}},\quad C = C_1 + C_2;$$

расположение груза таково, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_2}{C_1}$.

705. При равномерном спуске груза веса $G = 2$ *т* со скоростью $v = 5$ *м/сек* произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором спускался груз, благодаря защемлению троса в обойме блока. Пренебрегая весом троса, определить наибольшее напряжение троса при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $C = 4$ *т/см*.

Отв. $F = 47{,}1$ *т*.

706. Определить наибольшее натяжение троса предыдущей задачи, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $C_1 = 0{,}4$ *т/см*.

Отв. $F = 2{,}43$ *т*.

707. Пружина AB, закрепленная одним концом в точке A, такова, что для удлинения ее на 1 *см* необходимо приложить в точку B при статической нагрузке силу в 20 *г*. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C весом 100 *г* и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, определить ур-ние дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение гири к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.

Отв. $x = -5\cos 14t$ *см*; $a = 5$ *см*; $T = 0{,}45$ сек.

708. На каждую рессору вагона приходится нагрузка P килограммов; под этой нагрузкой рессора прогибается при равновесии

на 5 *см*. Определить период T собственных колебаний вагона на рессорах.

Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле ее прогиба.

Ответ. $T = 0{,}45$ сек.

709. К концу A вертикального упругого стержня с заделанным нижним концом B прикреплен груз $Q = 2{,}5$ *кг*. Груз будет колебаться, если стержень отклонить и затем предоставить самому себе. Известно, что для статического отклонения конца A стержня на 1 *см* в горизонтальном направлении нужно приложить силу 0,1 *кг*. Найти период T малых колебаний груза Q, считая их прямолинейными.

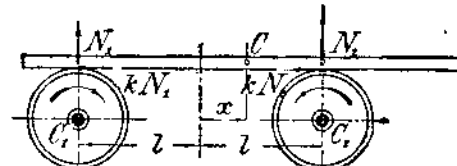
Ответ. $T = 1$ сек.

710. Груз, вес которого равен p граммам, подвешен на упругой нити к неподвижной точке. Выведенный из положения равновесия, он начинает совершать колебания. Выразить длину нити x в функции времени и найти, какому условию должна удовлетворять начальная длина ее x_0, чтобы во время движения гири нить оставалась натянутой. Натяжение нити пропорционально удлинению; длина ее в нерастянутом состоянии равна l; от действия статической нагрузки, равной q граммам, нить удлиняется на 1 *см*. Начальная скорость груза равна нулю.

Ответ. $x = \left(l + \frac{p}{q}\right) + \left(x_0 - l - \frac{p}{q}\right)\cos\sqrt{\frac{qg}{p}}\,t;$

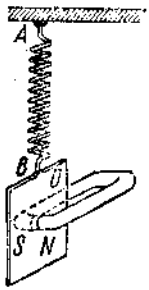
$$l \leqslant x_0 \leqslant l + \frac{2p}{q}.$$

711. На два вращающихся в противоположные стороны, указанные на чертеже, цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шкивов C_1 и C_2 находятся на горизонтальной прямой C_1C_2; расстояние $C_1C_3 = 2l$; стержень приводится в движение силами трения, развивающимися в точках касания его со шкивами; эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k. 1) Определить движение стержня после того, как мы сдвинем его из положения симметрии на x_0 сантиметров. 2) Найти коэффициент трения k, зная, что период колебаний T стержня при $l = 25$ *см* равен 2 сек.



Отв. 1) $x = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{l}}\cdot t\right)$ сантиметров; 2) $k = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25.$

712. Пластинка D, весом 100 $г$, подвешенная на пружине AB в неподвижной точке A, движется между полюсами магнита. Вследствие токов Фуко движение тормозится силой, пропорциональной скорости. Сила сопротивления движению равна $kv\Phi^2$ дин, где $k = 0{,}0001$, v — скорость в $см/сек$, а Φ — магнитный поток между полюсами N и S. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута; удлинение ее на 1 $см$ получается при статическом действии силы в 20 $г$, приложенной в точке B. Определить движение пластинки в том случае, когда $\Phi = 1000\sqrt{5}$ максвеллей.



Ответ. $x = 5 - e^{-2{,}5t}(5\cos 13{,}78\,t + 0{,}907\sin 13{,}78t)$ сантиметров, где x обозначает расстояние какой-либо точки пластинки, отсчитанное от ее начального положения по вертикали вниз.

713. Определить движение пластинки D при условиях предыдущей задачи в том случае, когда магнитный поток $\Phi = 10\,000$ максвеллей.

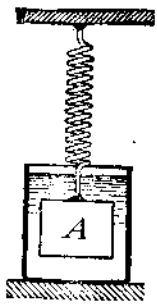
Ответ. $x = 5 - \frac{5}{48}e^{-98t}(49e^{96t} - 1)$.

714. Для определения сопротивления воды движению модели судна при очень малых скоростях эту модель M пустили плавать в сосуде, привязав нос и корму посредством двух одинаковых пружин A и B, сила натяжения которых пропорциональна удлинению. Результаты наблюдений показали, что отклонения модели от положения равновесия после каждого размаха уменьшаются, составляя геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен 0,9, а продолжительность каждого размаха $T = 0{,}5$ сек. Определить в граммах силу R сопротивления воды, приходящуюся на каждый грамм веса модели при скорости ее, равной 1 $см/сек$, предполагая, что сопротивление воды пропорционально первой степени скорости.

Ответ. $R = -\frac{2\log 0{,}9}{gT\log e} = 0{,}00043$ $г$.

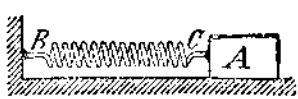
715. Для определения вязкости жидкости Кулон употреблял следующий метод: подвесив на пружине такую пластину A, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем в той жид-

кости, вязкость которой надлежало определить, и находил продолжительность одного размаха T_1 в первом случае и T_2 во втором. Сила трения между пластинкой и жидкостью может быть выражена в граммах формулой $2Skv$, где $2S$ — поверхность пластины, v — ее скорость, k — коэффициент вязкости. Пренебрегая трением между пластиной и воздухом, определить коэффициент k по найденным из опыта величинам T_1 и T_2, если вес пластины равен P граммам.



Отв. $k = \frac{\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$.

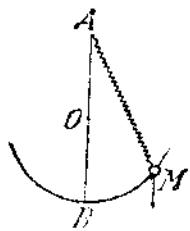
716. Тело A весом 0,5 *кг* лежит на негладкой горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой B пружиной, ось которой BC горизонтальна. Коэффициент трения плоскости 0,2; пружина такова, что для удлинения ее на 1 *см* требуется сила 0,25 *кг*. Тело A отодвинуто от точки B так, что пружина вытянулась на 3 *см*, и затем отпущено без начальной скорости. Найти: 1) число размахов, которые совершит тело A, 2) величины размахов и 3) продолжительность T каждого из них.



Тело остановится, когда в положении, где скорость его равна нулю силы упругости пружины будет равна силе трения или менее ее.

Отв. 1) 4 размаха; 2) 5,2 *см*; 3,6 *см*; 2 *см*; 0,4 *см*; 3) $T = 0{,}141$ сек.

717. Груз M, подвешенный к неподвижной точке A на пружине, совершает малые гармонические колебания в вертикальной плоскости, скользя без трения по дуге круга, диаметр которого AB равен l; натуральная длина пружины a; жесткость пружины такова, что при действии силы, равной весу груза M, она получает удлинение, равное b.



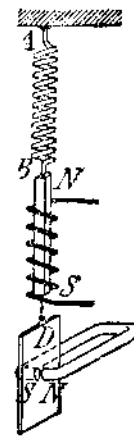
Определить период T колебаний в том случае, когда $l = a + b$; массой пружины пренебрегаем и считаем, что при колебаниях она остается растянутой.

Отв. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

718. На пружине жесткостью $c = 20$ *г/см* подвешен магнитный стержень весом в 100 *г*. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20 \sin 8\pi t$ ампер. Ток идет с момента времени $t = 0$, втягивая стержень в соленоид; до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно.

Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $F = 16\ \pi i$ дин. Определить вынужденные колебания магнита.

Ответ. $x = -0{,}023 \sin 8\pi t$ сантиметров.

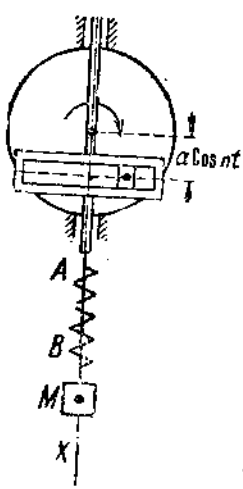


719. На пружине жесткостью $c = 20$ *г/см* подвешен магнитный стержень весом 50 *г*, проходящий через соленоид, и медная пластинка весом 50 *г*, проходящая между полюсами магнита. По соленоиду течет ток $i = 20 \sin 8\pi t$ ампер и дает силу взаимодействия с магнитным стержнем $F = 16\ \pi i$ дин.

Сила торможения медной пластинки вследствие токов Фуко равна $kv\Phi^2$, где $k = 10^{-4}$, и $\Phi = 1000\sqrt{5}$ максвеллей и v — скорость пластинки.

Определить вынужденные колебания пластинки.

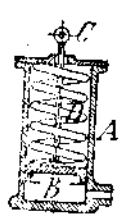
Ответ. $x = 0{,}022 \sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ *см*.



720. Гиря M подвешена на пружине AB, верхний конец которой совершает гармонические колебания по вертикальной прямой амплитуды a и частоты n: $a\cos(nt)$ сантиметров (при помощи кулисы Вольфа).

Определить вынужденные колебания гири M при следующих данных: вес гири равен 400 *г*; от действия силы 40 *г* пружина удлиняется на 1 *см*; $a = 2$ *см*, $n = 7$ 1/сек.

Ответ. $x = 4 \cos 7t$ *см*.

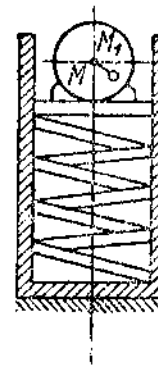


721. Индикатор паровой машины состоит из цилиндра A, в котором ходит поршень B, упирающийся в пружину D; с поршнем соединен стержень BC, к которому прикреплен пишущий

штифт C. Предполагая, что давление пара p на поршень B, выраженное в килограммах на квадратный сантиметр, изменяется согласно формуле: $p = 4 + 3\sin\frac{2\pi}{T}t$, где T — время одного оборота вала, определить амплитуду a вынужденных колебаний штифта C, если вал совершает 3 об/сек, при следующих данных: площадь поршня индикатора $\sigma = 4$ *см*^{2}; вес подвижной части индикатора $Q = 1$ *кг*; пружина сжимается на 1 *см* силой в 3 *кг*.

Ответ. $a = 4{,}5$ *см*.

722. Электрический мотор установлен на платформе M, поддерживаемой спиральною пружиною; общий вес мотора и платформы равен 32,7 *кг*; пружина такова, что уменьшение высоты ее на 1 *см* получается при нагрузке в 30 *кг*; на вал мотора насажен груз M_1, весом 200 *г*, на расстоянии 1,3 *см* от оси O вала; угловая скорость мотора равна 30 1/сек. Определить вынужденные колебания платформы, предполагая, что в начальный момент она находилась в покое. Принимаем $g = 981$ *см*/*сек*^{2}.



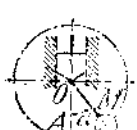
Ответ. $x = 0{,}12t\sin(30t)$ *см*.

8. Относительное движение

723. Точка привеса математического маятника длины l движется по вертикали равноускоренно. Определить период T малых колебаний маятника в двух случаях: 1) когда ускорение точки привеса направлено вверх и имеет какую угодно величину p; 2) когда это ускорение направлено вниз и величина его $p < g$.

Ответ. 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-p}}$.

724. Математический маятник OM длины l в начальный момент отклонен от положения равновесия OA на некоторый угол α и имеет скорость, равную нулю; точка привеса его в этот момент имеет также скорость, равную нулю; но затем падает с постоянным ускорением $p \geqslant g$. Определить длину s дуги окружности, описываемой точкой M вокруг точки O.



Ответ. 1) $p = g$; $s = 0$; 2) $p > g$; $s = 2l\,(\pi - \alpha)$.

725. В вагоне, движущемся по прямому горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным от вертикали на угол 6°.

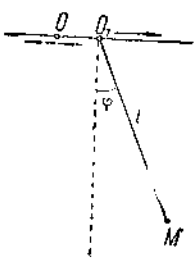
1) Определить ускорение w вагона.

2) Найти разность периодов колебаний маятника: T в случае неподвижного вагона и T_1 в данном случае.

Ответ. 1) $w = 103$ *см/сек*^{2}.

2) $T - T_1 = 0{,}0028\ T$.

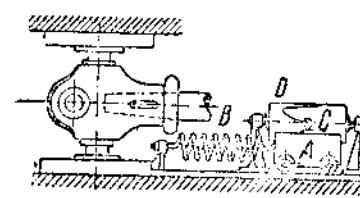
726. Точка привеса маятника длины l совершает горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки O: $OO_1 = a \sin pt$. Определить малые колебания маятника, считая, что в момент $t = 0$ он находился в покое.



Ответ. $\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right)$,

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

727. Для измерения ускорений поршня паровой машины Вилльямс предложил следующий прибор: на ползуне может двигаться по особым рельсам тележка A, связанная с крейцкопфом пружиной B; относительные отклонения тележки от положения равновесия записываются карандашом C на барабане D, движущемся вместе с крейцкопфом; особый часовой механизм вращает барабан равномерно так, что в 1 сек. точка на периферии описывает дугу длиной в 1 *см*. Найти уравнение кривой, вычерчиваемой карандашом на барабане, если движение крейцкопфа выражается уравнением: $x = a + 10 \cos(20t)$, вес тележки Q граммов; пружина вытягивается на 1 *см* силой f граммов, ненапряженная длина ее равна l *см*.

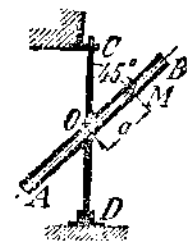


Ответ. $\xi = A\cos\left(\sqrt{\frac{fg}{Q}}\cdot\eta + \alpha\right) + \frac{4000Q}{fg - 400Q}\cos(20\eta_1)$, где $\eta = t$, A и α суть произвольные постоянные величины, определяемые по начальным данным. Ось ξ — горизонтальна, ось η — вертикальна; начало координат совпадает с положением карандаша при недеформированной пружине.

728. Кольцо движется по гладкому стержню, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости около одного из своих концов, делая один оборот в секунду; длина стержня 1 *м*; в момент $t=0$ кольцо находилось на расстоянии 60 *см* от того конца, около которого происходит вращение, и имело скорость, равную нулю. Определить момент t_1, когда кольцо сойдет со стержня.

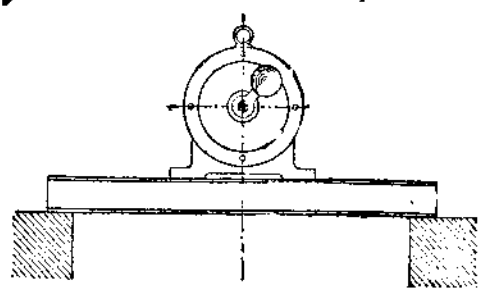
Ответ. $t_1=\frac{1}{2\pi}\log_n 3=0{,}175$ сек.

729. Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней неизменный угол 45°. В трубке находится тяжелый шарик M. Определить движение этого шарика, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки O равна a. Трением пренебрегаем.



Ответ. $OM=\frac{1}{2}\left(a-\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{+0{,}5\omega t\sqrt{2}}+e^{-0{,}5\omega t\sqrt{2}}\right)+\frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}$.

730. Электрический мотор весом 30 *кг* установлен на балке, жесткость которой $c=300$ *кг/см*. На вал мотора насажен груз весом 200 *г* на расстоянии 1,3 *см* от оси вала. Угловая скорость мотора 90 1/сек. Определить амплитуду вынужденных колебаний мотора и критическое число его оборотов в минуту, пренебрегая массой балки.



Ответ. $A=0{,}410$ *мм*;
$n_{кр}=950$ об/мин.

731. Мотор весом $P=50$ *кг* установлен на балке жесткостью $c=500$ *кг/см*.

При свободных колебаниях балки с мотором уменьшение амплитуд последовательных размахов оказалось равным $\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{10}{9}$.

На валу мотора имеется неуравновешенный груз веса $p=0{,}2$ *кг* на расстоянии $r=6$ *см* от оси вращения.

Найти амплитуду и сдвиг фаз вынужденных колебаний мотора, когда угловая скорость вращения вала 980 об/мин.

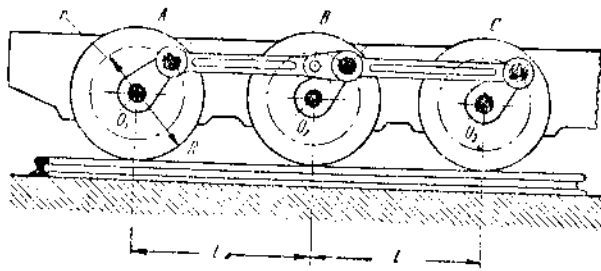
Ответ. $A=0{,}253$ *см*.
$\alpha=137°$.

9. Начало Даламбера

732. Паровоз движется без скольжения по прямолинейному участку пути со скоростью $v = 72$ *км/час*.

Определить добавочное давление на рельс от силы инерции спарника ABC в наинизшем его положении. Спарник весит 200 *кг* и массу его можно считать равномерно распределенной по длине. Длина кривошипа $r = 0{,}3$ *м*, радиус колес $R = 1$ *м*.

Отв. 2,45 *т*.



733. Вагон трамвая совершает гармонические колебания на рессорах амплитуды 2,5 *см* и периода $T = 0{,}5$ сек. Вес кузова с нагрузкой 10 *т*, вес тележки и колес 1 *т*. Определить давление вагона на рельсы.

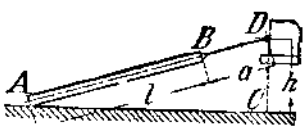
Отв. Давление колеблется между 7 и 15 *т*.

734. Локомотив движется равноускоренно, достигая через 20 сек. после начала движения скорости 72 *км/час*. Определить свободную поверхность воды в тендере.

При равновесии воды относительно тендера равнодействующая сил, приложенных к какой-либо частице жидкости, находящейся на свободной поверхности, направлена по нормали к этой поверхности.

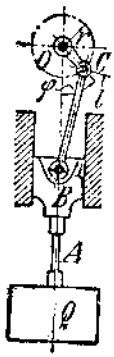
Отв. Плоскость, наклоненная к горизонту под углом $\alpha = 5^\circ 50'$.

735. Бревно AB длины l опирается концом A на горизонтальную дорогу AC; другой конец его B привязан веревкой BD, длины a, в точке D к грузовику, движущемуся равноускоренно, причем высота $CD = h$. Пренебрегая поперечными размерами бревна, определить ускорение w грузовика, при котором веревка и бревно составляют одну прямую.



Отв. $w = \frac{g}{h}\sqrt{(l+a)^2 - h^2}$.

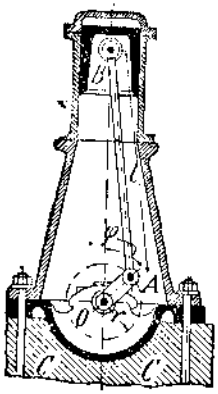
736. Для исследования, по способу Рейнольдса, влияния быстро чередующихся растягивающих и сжимающих сил на металлический брусок, испытуемый брусок A прикрепляют верхним концом к ползуну B кривошипного механизма BCO, а к нижнему концу подвешивают груз Q. Найти силу, растягивающую брусок в том случае, когда кривошип OC вращается вокруг оси O с постоянной скоростью ω и вес груза Q равен p.



Выражение $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}$ разложить в ряд по биному Ньютона и отбросить все члены ряда, содержащие отношение $\frac{r}{l}$ в степени выше второй.

Ответ. $p+\frac{p}{g}r\omega^2\left(\cos\omega t+\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

737. В вертикальном газовом двигателе вес цилиндра, рамы и подшипников равен 10 m; вес поршня 981 $кг$, центр тяжести его находится в крейцкопфе B; ход поршня 60 $см$; число оборотов в минуту 300; отношение длины кривошипа r к длине шатуна l равно $\frac{1}{6}$; массами кривошипа и шатуна пренебрегаем. Двигатель прикреплен к фундаменту C болтами, натяжение которых при отсутствии движения в машине считаем равным нулю.



Определить наибольшее давление N двигателя на фундамент и наибольшее натяжение T, приходящееся на все болты. Учесть указание к предыдущей задаче.

Ответ. $N=45{,}5\ m$; $T=23{,}6\ m$.

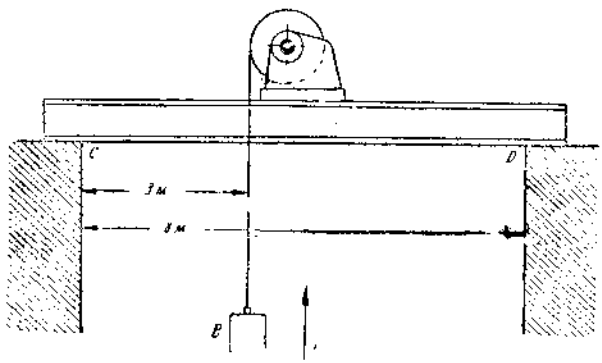
738. Балластный слой железнодорожного пути дает упругую просадку в 1 $см$ при нагрузке в 3,5 $кг/см^2$. Не принимая во внимание жесткости рельса и сжатия шпалы, определить, считая путь горизонтальным, в каких пределах будет изменяться просадка шпал под колесом идущего по пути курьерского паровоза, если давление колеса передается на балласт половиной шпалы. Дано: колесо делает 420 об/мин., несет груз в 7 m и имеет на расстоянии 30 $см$ от своей геометрической оси неуравновешенный противовес 98,1 $кг$; шпала имеет 256 $см$ длины и 25 $см$ ширины.

Ответ. От 0,11 до 1,14 $см$.

739. Велосипедный трек имеет на кривых участках пути виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет прямую, наклонную к горизонту, так что на кривых внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус R и угол наклона к горизонту α, если коэффициент трения резиновых шин о грунт трека равен k?

Отв. $v_{\min}=\sqrt{gR\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-k}{1+k\operatorname{tg}\alpha}}$; $v_{\max}=\sqrt{gR\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha+k}{1-k\operatorname{tg}\alpha}}$.

740. Лебедка A, поднимающая груз B весом 2 m, поставлена на балке, опирающейся на опоры C и D; $CD=8$ $м$, $AC=3$ $м$.

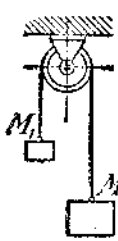


Груз B поднимается равноускоренно с ускорением 0,5 $м/сек^2$. Найти добавочные давления на опоры C и D от силы инерции груза.

Отв. 64 $кг$; 38 $кг$.

741. На паром, привязанный к берегу двумя канатами, въезжает грузовик, весом 7 m со скоростью 12 $км/час$; тормоза останавливают грузовик на протяжении 3 $м$. Определить натяжение T канатов, пренебрегая вертикальными перемещениями парома.

Отв. $T=0{,}66$ m.

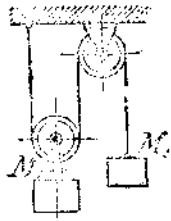


742. Через блок перекинута гибкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы: M_1 веса p_1 и M_2 веса p_2, причем $p_2>p_1$. Найти величину w ускорения грузов и натяжение нити T, пренебрегая массой блока.

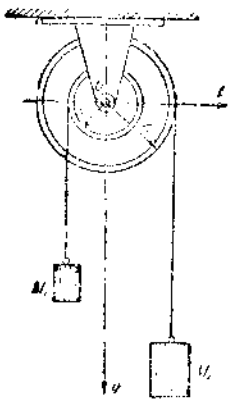
Массами нитей здесь и в следующих задачах пренебрегаем.

Отв. $w=g\frac{p_2-p_1}{p_1+p_2}$; $T=\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$

743. К системе блоков, изображенной на чертеже, подвешены грузы: M_1 веса 10 *кг* и M_2 веса 8 *кг*. Определить ускорение w_2 груза M_2 и натяжение нити T, пренебрегая массами блоков.



Отношение величин ускорений грузов M_1 и M_2 равно 0,5.

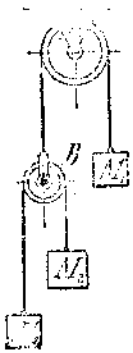


Отв. $w = 2{,}8$ *м/сек*^{2};
$T = 5{,}7$ *кг*.

744. Два груза: M_1 веса p_1 и M_2 веса p_2 подвешены на двух гибких, нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на чертеже, на барабаны радиусов r_1 и r_2, насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием тяжести. Определить угловое ускорение ε барабанов, пренебрегая их массами.

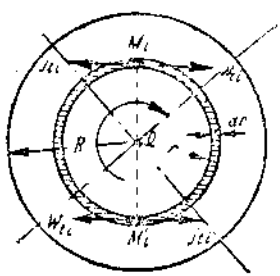
Отв. $\varepsilon = g\,\dfrac{p_2 r_2 - p_1 r_1}{p_2 r_2^2 + p_1 r_1^2}$.

745. Дана система из двух блоков: неподвижного A и подвижного B и трех грузов M_1, M_2 и M_3, подвешенных с помощью нерастяжимых нитей, как указано на чертеже. Массы грузов соответственно равны m_1, m_2 и m_3; при этом $m_1 < m_2 + m_3$ и $m_2 \neq m_3$. Массами блоков пренебрегаем. Найти, при каком соотношении масс m_1, m_2 и m_3 груз M_1 будет опускаться в том случае, когда начальные скорости грузов равны нулю.



Отв. Должно быть $m_1 > \dfrac{4m_2m_3}{m_2+m_3}$.

746. Однородный круглый диск радиуса R, веса P и толщины δ вращается ускоренно с угловым ускорением ε вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости.



Вычислить главный момент L_J сил инерции отдельных частиц диска относительно оси вращения.

Разделив диск на концентрические кольца толщины dr, следует рассмотреть одно из этих колец; выбрав две частицы, расположенные на

одном диаметре кольца, находим, что касательные силы инерции этих частиц дадут пару сил, а центробежные силы уравновесятся.

Ответ. $L_J = -\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\varepsilon$.

747. Проволочное кольцо радиуса R и веса P вращается ускоренно с угловым ускорением ε вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости.

Вычислить главный момент L_J касательных сил инерции массы кольца относительно оси вращения, пренебрегая толщиною проволоки.

Ответ. $L_J = -\frac{P}{g}R^2\varepsilon$.

748. При условиях задачи 742 определить ускорение w грузов и натяжение нитей T_1 и T_2, принимая во внимание вес блока, равный p.

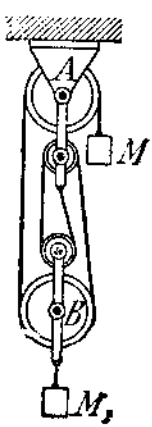
При определении сил инерции блока предполагаем, что масса его равномерно распределена по окружности.

Ответ. $w = g\frac{p_2 - p_1}{p_1 + p_2 + p}$; $T_1 = \frac{p_1(2p_2 + p)}{p_1 + p_2 + p}$; $T_2 = \frac{p_2(2p_1 + p)}{p_1 + p_2 + p}$.

749. При условиях задачи 744 определить угловое ускорение ε и натяжения нитей T_1 и T_2, принимая во внимание массы барабанов, при следующих данных: $p_1 = 20$ *кг*, $p_2 = 34$ *кг*, $r_1 = 5$ *см*, $r_2 = 10$ *см*, веса барабанов: малого 4 *кг* и большого 8 *кг*.

Предполагаем, что массы барабанов равномерно распределены по их внешним поверхностям.

Ответ. $\varepsilon = 49$ 1/сек^2; $T_1 = 25$ *кг*; $T_2 = 17$ *кг*.



750. Груз M веса 101 *кг* поднимает с помощью полиспаста груз M_1, который вместе с подвижной обоймой весит 320 *кг*. Всех блоков четыре; большие блоки весят по 16 *кг*, малые по 8 *кг*; радиусы больших блоков равны r, радиусы малых равны r_1. Определить ускорение груза M.

При определении сил инерции блоков предполагаем, что массы их равномерно распределены по окружностям радиусов r и r_1. Перемещение груза M_1 в 4 раза меньше перемещения груза M; перемещения и ускорения точек нижних блоков находим с помощью кинематики плоского движения.

Ответ. 0,1 g.

751. Тонкий прямолинейный однородный стержень длины $2l$ и веса P вращается вокруг оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его середину, по закону $\varphi = at^2$.

Вычислить для момента времени t главный момент L_J касательных сил инерции массы стержня относительно оси вращения.

Толщиною стержня пренебречь.

Ответ. $L_J = \frac{2}{3} al^2 \frac{P}{g}$.

752. Условие предыдущей задачи изменяется следующим образом: стержень длины l вращается по тому же закону вокруг оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец.

Найти величины, направления и точки приложения главных векторов J_n и J_t центробежных и касательных сил инерции частиц стержня.

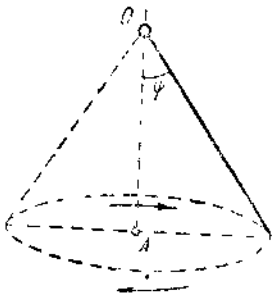
Предварительно необходимо вычислить силы инерции dJ_n dJ_t элемента dr длины стержня, взяв этот элемент на расстоянии r от оси вращения; затем интегрировать по длине стержня по переменному r. При вычислении точки приложения главного вектора J_t воспользоваться теоремой о моменте равнодействующей. Полезно также обозначить через ρ массу единицы длины стержня.

Ответ. Главный вектор касательных сил инерции $J_t = \frac{alP}{g}$, направлен перпендикулярно к стержню и приложен в точке, удаленной от оси вращения на расстояние $\frac{2}{3} l$; главный вектор центробежных сил инерции $J_n = 2\frac{a^2 l^2 P}{g}$ направлен вдоль стержня от оси вращения; за точку его приложения может быть взята любая точка на стержне.

753. На одном итальянском пароходе для успокоения качки во время волнения моря установлено три стабилизатора, основной частью каждого из которых является маховик весом 110 *т* (каждый) и диаметром 3,96 *м*. Во время работы стабилизаторов маховики делают 910 об/мин. Вычислить величину дополнительного бокового давления на направляющие подшипники вала маховика, вызываемого смещением на 1,08 *мм* центра тяжести маховика относительно оси вращения вследствие неоднородности металла и неточности обработки маховика.

Ответ. $N = 110$ *т* и направлено по прямой, проходящей через ось вращения и центр тяжести.

754. Тонкий прямолинейный однородный стержень длины l и веса P вращается с постоянной угловой скоростью ω около непо-



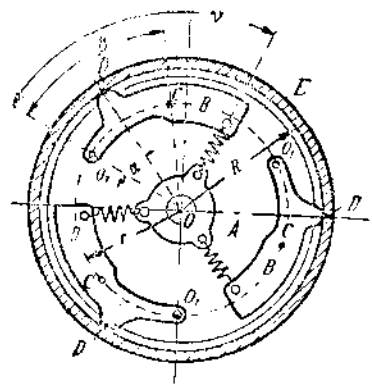
движной точки O (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью OA и вершиной в точке O.

Вычислить угол φ отклонения стержня от вертикального направления, а также величину N давления стержня на шарнир O.

Ответ. $\varphi = \arccos \frac{3g}{2l\omega^2}$;

$$N = \frac{1}{2} \frac{P}{g} l\omega^2 \sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^2\omega^4}}.$$

755. Действие центробежного тормоза, применяемого в подъемных механизмах, состоит в том, что диск A, вращаясь вместе с валом O, увлекает во вращение массивы B весом $p = 7{,}25$ *кг*, соединенные с диском A шарнирно в точках O_1; при некоторой угловой скорости диска A выступы D масс B коснутся неподвижной муфты E, и благодаря силам трения в точках D вращение диска A будет тормозиться.

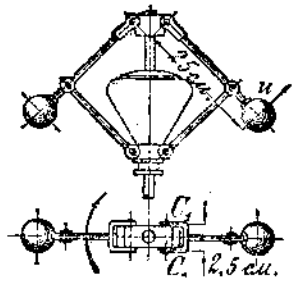


При какой угловой скорости ω наступит равномерное вращение диска A, если к валу приложен постоянный момент $L = 20$ *кг·м*, а коэффициент трения скольжения масс B по поверхности муфты E равен 0,1; в нерабочем состоянии массы B отжимаются к валу при помощи пружин жесткости $c = 5$ *кг/см*, а в рабочем положении тормоза пружины вытягиваются на 1 *см*. Диск вращается слева направо; кроме того $R = 30$ *см*, $r = 25$ *см*, $\alpha = 15°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$; центры тяжестей масс B в точках C.

Ответ. $n = 180$ об/мин.

756. Маятник центробежного регулятора Уатта делает при установившемся движении машины 180 об/мин. Вследствие изменения нагрузки машины регулятор пришел в действие, и шары раздвигаются с относительной скоростью $u = 0{,}2$ *м/сек*. Считая вес каждого шара равным 10 *кг*, пренебрегая весами ручек и пользуясь известным соотношением между силой, массой и ускорением, вы-

числить добавочное давление на подшипники C_1 и C_2 (см. чертеж), вызываемое Кориолисовым ускорением. При этом следует считать угол, образуемый ручкой с осью регулятора, равным 45° и число оборотов не изменившимся, а размеры и устройство подвески взять с чертежа, на котором изображены вид регулятора сбоку и вид сверху.

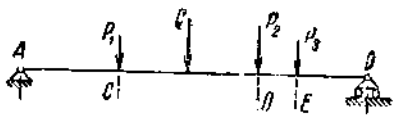


Отв. Давления на подшипники направлены в противоположные стороны и равны приблизительно 54,2 *кг* каждое.

10. Начало возможных перемещений.

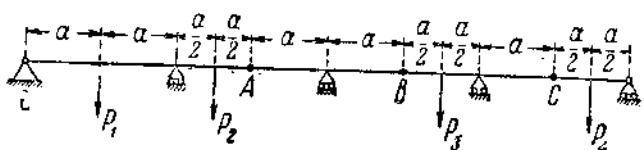
Многие из статических задач, помещенных в первом отделе „Сборника", легко решаются с помощью начала возможных перемещений.

757. К горизонтальной балке AB, лежащей на двух опорах A и B, приложены в точках C, D и E вертикальные нагрузки $P_1 = 2\ m$, $P_2 = 3\ m$, $P_3 = 1\ m$; $AC = 3\ м$, $CD = 4\ м$, $DE = 1\ м$, $EB = 2\ м$; собственный вес Q балки равен 3 m и приложен посередине пролета. Найти методом возможных перемещений реакцию опоры A.



Отв. 4 m.

758. Составная четырехпролетная балка, лежащая на пяти опорах, состоит из четырех балок, шарнирно соединенных в точках

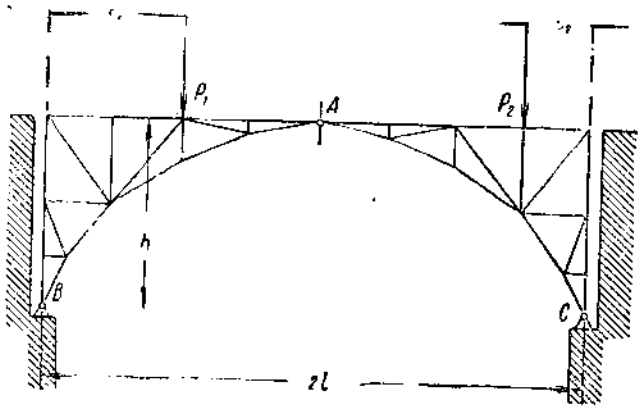


A, B и C. Даны вертикальные нагрузки P_1, P_2, P_3, P_4. Размеры указаны на чертеже.

Найти реакцию средней опоры, не принимая во внимание весов балок.

Отв. Реакция средней опоры равна $P_3 - P_4$.

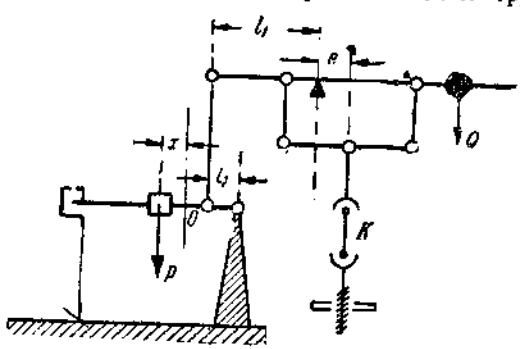
759. Трехшарнирная арка состоит из двух полуарок, шарнирно соединенных в замке A. Даны нагрузки P_1 и P_2, приложенные на расстояниях c_1 и c_2 соответственно от левого и правого концов



арки. Пролет арки равен $2l$, высота замка A над уровнем пят B и C равна h. Найти распор арки H от нагрузок P_1 и P_2.

Ответ. $H=\dfrac{P_1c_1+P_2c_2}{2h}$.

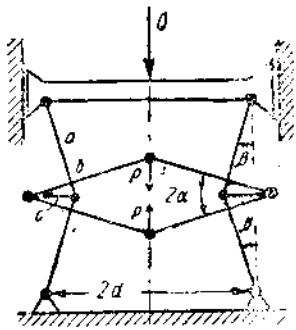
760. Чертеж представляет схему машины Мора и Федергаффа для испытания образцов на растяжение. Определить зависимость между усилием X в образце K и расстоянием x груза P от его



нулевого положения O, если при помощи груза Q машина уравновешена так, что при нулевом положении груза P и отсутствии усилия в K все рычаги горизонтальны. Даны расстояния l_1, l_2 и e.

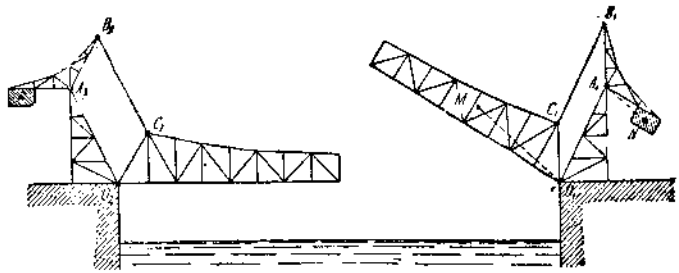
Ответ. $X=P\dfrac{xl_1}{el_2}$.

761. Найти соотношение между силами P и Q для пресса, изображенного на чертеже.



Ответ. $Q = P \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

762. Разводной мост состоит из двух крыльев, могущих вращаться соответственно вокруг неподвижных осей O_1 и O_2. В поднятом состоянии каждое крыло уравновешивается противовесами, жестко связанными с фермами, вращающимися вокруг неподвижных осей A_1 и A_2. Эти фермы связаны с крыльями моста тягами B_1C_1 и B_2C_2; при этом $O_1A_1 = B_1C_1 = O_2A_2 = B_2C_2$. Вес одного крыла равен P и приложен в центре тяжести M; центр тяжести противовеса находится в N. Найти условие, при

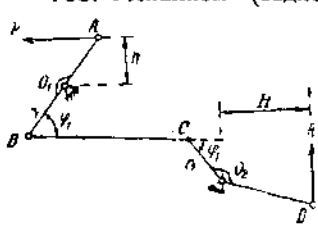


котором крыло будет уравновешено во всяком его положении, а также определить необходимый вес Q противовеса.

Ответ. O_1M должно быть параллельно A_1N;

$$Q = P \frac{O_1M}{A_1N}.$$

763. Механизм (заднего колеса плуга Little Genius № 8) состоит из двух рычагов: прямого AB и ломаного CD, вращающихся вокруг неподвижных шарниров O_1 и O_2. Концы этих стержней B и C соединены шарнирно шатуном BC, который составляет с ними в положении, показанном на чертеже, углы φ_1 и φ_2. В этом же положении механизма превышение точки A над осью O_1 равно h и горизонтальное расстояние между точкой D и осью O_2 равно H. В точке A приложена горизонтальная сила P;

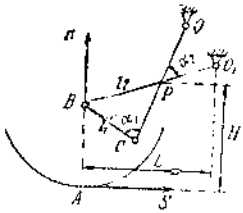


в точке D — вертикальная сила R; $O_1B = r_1$, $O_2C = r_2$. Найти соотношение между силами P и R, при котором механизм будет оставаться в равновесии.

Проекции возможных перемещений концов B и C шатуна на его направление равны.

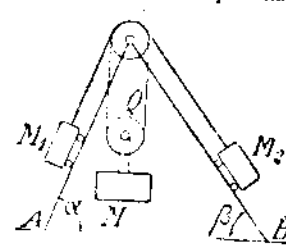
Ответ. $P = R\dfrac{Hr_1 \sin\varphi_1}{hr_2 \sin\varphi_2}$.

764. К шарниру B шарнирного четырехсторонника $OCBO_1$ приложена вертикальная сила R. Звено BC жестко связано с диском, центр которого находится в B и к которому по касательной приложена горизонтальная сила S (механизм для подъема полевого колеса плуга). Длины стержней: $BC = l_1$, $BO_1 = l_2$; другие данные указаны на чертеже (H, L, α_1, α_2). Пренебрегая весом стержней и диска и трением в шарнирах, определить соотношение между величинами сил R и S в показанном на чертеже положении равновесия.



Ответ. $S = R\dfrac{Ll_1 \sin\alpha_1}{Hl_2 \sin\alpha_2}$.

765. Грузы M_1 и M_2 одинакового веса p движутся по двум наклонным направляющим OA и OB, расположенным в вертикальной плоскости под углами α и β к горизонту; нить, соединяющая эти грузы, идет от груза M_1 через блок O, вращающийся около горизонтальной оси, охватывает подвижной шкив Q, несущий груз M веса P, и затем через блок O_1, надетый на ту же ось, что и блок O, идет к грузу M_2.



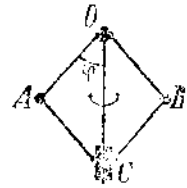
Определить ускорение w груза M, пренебрегая трением, а также массами блока, шкива и нити.

Ответ. Считая ускорение w положительным, когда оно направлено вниз, и отрицательным, когда оно направлено вверх, находим:

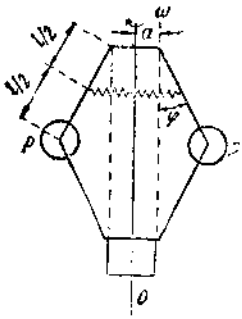
$$w = \frac{P - p(\sin\alpha + \sin\beta)}{P + 2p} \cdot g.$$

766. Регулятор Уатта вращается около вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω; определить угол отклонения ручек

OA и OB от вертикали, принимая во внимание только вес p каждого из шаров и вес p_1 муфты C; все стержни имеют одинаковую длину l.



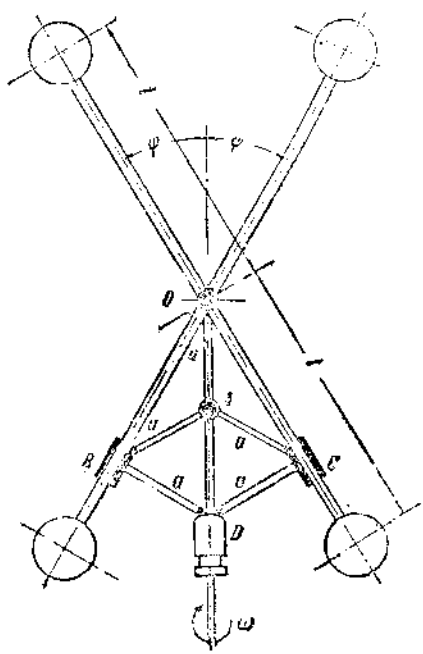
Отв. $\cos\varphi = \dfrac{(p+p_1)g}{pl\omega^2}$.



767. Найти связь между угловой скоростью регулятора и углом φ в равновесном положении, если длины плеч регулятора равны l, вес каждого шара p килограммов, вес муфты Q килограммов, жесткость пружины c килограммосантиметров и при $\varphi = 0$ пружина не растянута и не сжата.

Отв. $\omega^2 = g\dfrac{\left(p+Q+\dfrac{cl}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi}{p\,(a+l\sin\varphi)\cos\varphi}$.

768. В регуляторе Ренкина четыре груза одинакового веса P находятся на концах двух равноплечих рычагов длины $2l$, могущих вращаться в плоскости регулятора вокруг конца шпинделя O и образующих с осью шпинделя переменный угол φ. В точке A, находящейся от конца шпинделя O на расстоянии $OA = a$, со шпинделем шарнирно соединены рычаги AB и AC длины a, которые в точках B и C в свою очередь сочленены со стержнями BD и CD длины a, несущими муфту D. В точках B и C имеются ползунки, скользящие вдоль рычагов, несущих грузы. Вес муфты равен Q. Регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Пренебрегая всеми массами, кроме масс грузов и муфты, найти

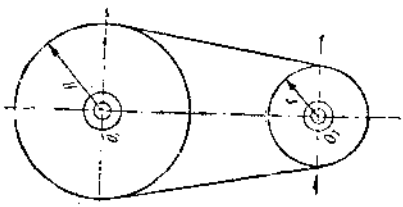


связь между углом φ и угловой скоростью ω в равновесном положении регулятора.

Ответ. Равновесное положение регулятора возможно только при $\omega = \sqrt{\frac{2gQa}{Pl^2}}$ независимо от угла φ.

11. Закон живой силы

769. Большой шкив цепной передачи вращается с угловой скоростью ω; радиус шкива R и момент инерции относительно оси вращения J_1. Малый шкив имеет радиус r и момент инерции J_2 относительно своей оси вращения. Вес натянутой на шкивы цепи равен Q. Вычислить живую силу всей системы.



Ответ. $T = \frac{\omega^2}{2}\left[J_1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{g}R^2\right]$.

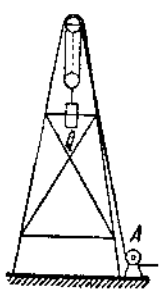
770. Определить живую силу снаряда 76 *мм* полевой пушки тотчас по вылете его из орудия, если вес его равен 6,5 *кг*, скорость 588 *м/сек* и он делает 258 об/сек. (При вычислении момента инерции снаряда принять его за однородный цилиндр.)

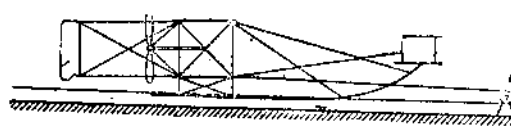
Ответ. $T = 115\,000$ *кг·м*.

771. Определить в киловаттах мощность заряда 76 *мм* полевой пушки, если живая сила снаряда при вылете равна 115 000 *кг·м*, максимальная скорость отката ствола равна 10 *м/сек*, вес ствола с затвором 389 *кг* и продолжительность прохождения снарядом канала орудия равна 0,008 сек.

Ответ. 144 000 *квт*.

772. Для взлета на своем аэроплане в 1908 г. братья Райт употребляли следующее приспособление. Груз $Q = 700$ *кг* подвешивался на четырехкратном полиспасте, трос которого пропускался через неподвижные блоки A и B и прикреплялся к аэроплану веса $P = 450$ *кг*; падая с высоты



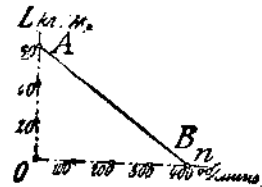


$h = 6$ *м*, груз Q сообщал разгон аэроплану, скользившему вдоль горизонтальных рельсов. Пренебречь трением, сопротивлением воз-

духа, действием пропеллера, массами полиспаста и троса, определить скорость аэроплана в конце разгона.

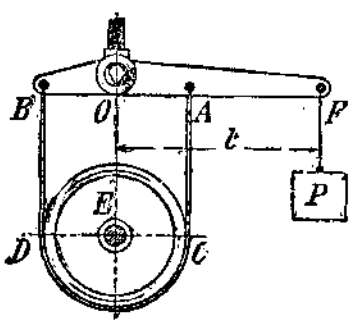
Ответ. $v = 12{,}8$ *м/сек.*

773. Для некоторого гидравлического двигателя зависимость вращающего момента L, выраженного в килограммометрах, от угловой скорости, измеряемой числом n оборотов в минуту, изображается прямой AB. Определить мощность E двигателя в зависимости от числа его оборотов в минуту и найти наибольшее значение мощности.



Ответ. $E = 0{,}084\, n\left(1 - \frac{n}{400}\right)$ *л. с.*; $E_{\max} = 8{,}4$ *л. с.* $= 6{,}18$ *квт.*

774. Динамометр Нальдера, употребляющийся для измерения мощности моторов, состоит из ленты с вертикальными ветвями AC и BD, охватывающей нижнюю половину шкива E испытуемого мотора, и из рычага BF, опирающегося острием призмы на опору O. Приподымая или опуская опору O, можно изменять натяжения ветвей ленты, а вместе с тем и силу трения между лентой и шкивом. Равновесное горизонтальное положение рычага BF достигается подвешиванием гирь P. Определить мощность двигателя в тот момент, когда он делает 240 об/мин., если вес гирь уравновешивающих натяжения ветвей ленты, $P = 3$ *кг*, а плечо $l = 50$ *см*.



Тормозящая сила равна $\frac{Pl}{r}$, где r — радиус шкива.

Ответ. 0,5 *л. с.* $= 0{,}368$ *квт.*

775. Цилиндрический вал диаметра 10 *см*, вращающийся с угловой скоростью 60 об/мин., предоставлен самому себе. Сколько оборотов он еще сделает до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05?

Ответ. 0,16 оборота.

776. Цилиндрический вал диаметра 10 *см* и веса 0,5 *т*, на который насажено маховое колесо диаметра 2 *м* и веса 3 *т*, вращается в данный момент с угловой скоростью 60 об/мин., а затем он предоставлен самому себе. Сколько оборотов еще сде-

лает вал до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05?

При решении задачи массу маховика можно считать равномерно распределенной по его ободу.

Ответ. 110 оборотов.

777. На маховое колесо действует пара, момент которой равен 500 *кг·м*, а плоскость действия перпендикулярна к оси колеса. Вес колеса 9,81 *т*, радиус инерции его относительно оси равен 1 *м*. Через сколько секунд после начала движения колесо будет иметь угловую скорость 120 об/мин., и какая работа будет для этого затрачена?

Ответ. 25,1 сек.; 78 900 $кг \cdot м = 774$ *кдж*.

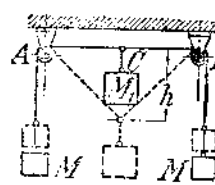
778. Тяжелый однородный стержень OA длины $l = 3{,}27$ *м*, надетый своим концом O на ось, вокруг которой он может вращаться в вертикальной плоскости, находится в положении устойчивого равновесия. Какую скорость надо сообщить другому концу A стержня для того, чтобы он сделал четверть оборота?

Ответ. $v = \sqrt{3lg} = 9{,}81$ *м/сек*.

779. По наклонной плоскости спускаются без начальной скорости два совершенно одинаковых однородных круглых цилиндра. Один, опирающийся на плоскость боковой поверхностью, катится по ней без скольжения; другой же, опирающийся на плоскость основанием, скользит по ней без трения. Определить отношение высот h_1 и h_2, на которые опустятся центры тяжести первого и второго цилиндров в течение одного и того же промежутка времени.

Ответ. $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}$.

780. Через два ничтожно малых блока A и B, находящихся на одном горизонте в расстоянии $AB = 2l$ друг от друга, перекинута нить, к концам которой привешены два равных груза M по p граммов весом. К нити в середине C между блоками привешивают груз M_1 весом p_1 граммов и предоставляют ему падать без начальной скорости. Определить наибольшее расстояние h, на которое опустится груз M_1, предполагая, что длина нити достаточно велика и $p_1 < 2p$.

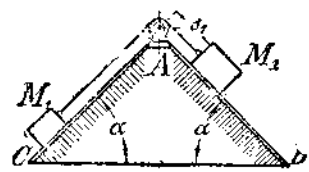


Ответ. $h = \frac{4pp_1l}{4p^2 - p_1^2}$.

781. Нить однородной плотности длины L, часть которой лежит на гладком горизонтальном столе, движется под влиянием веса другой части, которая свешивается со стола. Определить промежуток времени T, по прошествии которого нить покинет стол, если известно, что в начальный момент длина свешивающейся части равна l, а начальная скорость равна нулю.

Ответ. $T = \sqrt{\frac{L}{g}}\,\log_n\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right)$.

782. Две тележки M_1 и M_2, массы которых равны m_1 и m_2, движутся по рельсам AB и AC, наклоненным под углом α к горизонту. Тележки соединены канатом длины l, перекинутым через блок A. В начальный момент $t = 0$ тележка M_1 находится на расстоянии a от точки A и имеет скорость, равную нулю. Определить работу R веса системы на перемещении $s_1 - a$ и движение тележки M_1 при двух предположениях:



1) масса каната не принимается во внимание и $m_1 > m_2$;

2) масса единицы длины каната считается равной k и $m_1 > kl$.

Ответ. 1) $R = (m_1 - m_2)(s_1 - a)\,g\sin\alpha$;

$$s - a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g\sin\alpha\cdot\frac{t^2}{2};$$

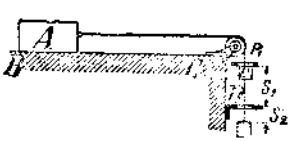
2) $R = [m_1 - m_2 + k(s_1 + a - l)](s_1 - a)\,g\sin\alpha$;

$$s_1 - a = \frac{m_1 - m_2 - kl + 2ka}{4k}\,(e^{nt} - e^{-nt})^2,$$

где

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{kg\sin\alpha}{m_1 + m_2 + kl}}.$$

783. Груз p с наложенной на него нагрузкой p_1 посредством шнура, перекинутого через блок, приводит в движение из состояния покоя тело A веса Q, находящееся на негладкой горизонтальной плоскости BC. Опустившись на расстояние s_1, груз p проходит через кольцо D, которое снимает нагрузку p_1, после чего груз p, опустившись еще на расстояние s_2, приходит в состояние покоя. Определить: 1) коэффициент динамического трения k между телом A и плоскостью, пренебрегая массой шнура и трением в блоке; 2) работу, затраченную на сообщение живой силы на-

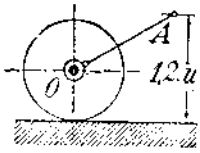


грузке p_1 при опускании ее на расстояние s_1. Дано: $Q = 0{,}8$ *кг* $p = 0{,}1$ *кг*; $p_1 = 0{,}1$ *кг*; $s_1 = 50$ *см*; $s_2 = 30$ *см*.

Отв. 1) $k = \dfrac{s_1(p+p_1)(p+Q) + s_2 p(p+p_1+Q)}{Q[s_1 p + Q) + s_2(p+p_1+Q)]} = 0{,}2.$

2) $p_1 s_1 \left[1 - \dfrac{(1+k)Q}{p+p_1+Q}\right] = 0{,}2$ *кг·см*.

784. Цилиндрический каток, диаметра 60 *см* и веса 392 *кг* приводится в движение человеком, который давит на рукоятку A с постоянной силой P в направлении AO; длина AO равна 1,5 *м*; высота точки A над горизонтом 1,2 *м*. Определить, пренебрегая трениями, силу P, при которой человек, пройдя 2 *м*, сообщит оси катка скорость 80 *см/сек* ($g = 980$ *см/сек*^{2}).



Отв. $P = 12$ *кг*.

785. Определить величину постоянной силы P в предыдущей задаче, если при тех же числовых данных будет принято во внимание сопротивление катанию, коэффициент которого равен 0,5 *см*, и затем найти, на сколько килограммов должна быть уменьшена эта величина силы P для того, чтобы в последующем движении катка скорость его оставалась постоянной.

Момент пары, противодействующей движению при катании, равен произведению нормального давления на коэффициент сопротивления катанию

Отв. 1) $P = 20{,}4$ *кг*.

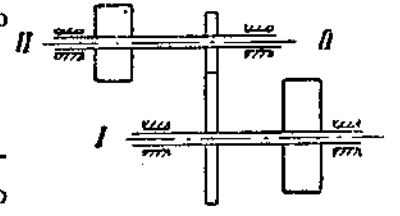
2) На 12,1 *кг*.

786. Валы *I* и *II* вместе с насаженными на них шкивами и зубчатыми колесами имеют моменты инерции соответственно равные:

$J_1 = 500$ *кг·см·сек*^{2}

$J_2 = 400$ *кг·см·сек*^{2};

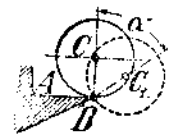
передаточное число зубчатой передачи $k_{12} = \dfrac{3}{2}$. Через сколько



оборотов вал *II* будет делать $n_2 = 120$ об/мин., если система приводится в движение из состояния покоя вращающим моментом $M_1 = 50$ *кг·м*, приложенным к валу *I*? Трением в подшипниках пренебречь.

Отв. $N_2 = 2{,}345$ об.

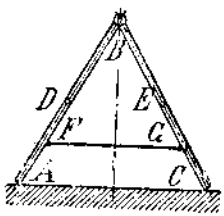
787. Тяжелый однородный цилиндр, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки AB, край которой B заострен и параллелен образующей цилиндра. Вес цилиндра Q и радиус основания r. В момент отделения цилиндра от площадки плоскость, проходящая через ось цилиндра и край B, отклонена от вертикального положения на некоторый угол $CBC_1 = \alpha$. Определить угловую скорость цилиндра, после того как он отделится от площадки, а также угол α. Трением катания и сопротивлением воздуха пренебречь.



В момент отделения цилиндра от площадки составляющая веса по прямой C_1B равна величине центробежной силы цилиндра вокруг ребра площадки $\frac{Q}{g} r\omega^2$.

Ответ. $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}$, $\alpha = \arccos\frac{4}{7} = 55{,}1°$.

788. Стремянка ABC с шарниром в B стоит на гладком горизонтальном полу, длина $AB = BC = 2l$, центры тяжести находятся в середине D и E, вес каждой лестницы равен p и радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен k; расстояние шарнира B от пола равно h. В некоторый момент времени стремянка начинает падать вследствие разрыва стяжки FG. Пренебрегая трением в шарнире, определить скорость v точки B в момент удара ее о пол.



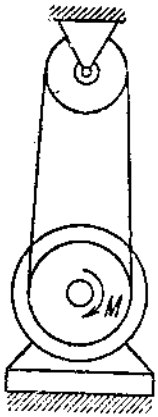
В этот момент точки A и C будут мгновенными центрами.

Ответ. $v = 2l\sqrt{\frac{gh}{l^2 + k^2}}$.

789. В предыдущей задаче определить скорость v точки B в тот момент, когда расстояние ее от пола будет равно $\frac{1}{2}h$.

Находим, что для каждой лестницы угловая скорость равна скорости точки B, разделенной на $\frac{1}{2}AC$, а скорость центра тяжести равна угловой скорости h, умноженной на длину l.

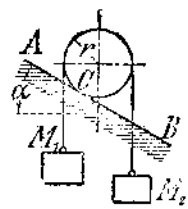
Ответ. $v = \sqrt{gh\frac{16l^2 - h^2}{8(l^2 + k^2)}}$.



790. Трансмиссионный вал с насаженным на него шкивом приводится в движение мотором, вал которого соединен с трансмиссионным валом через посредство бесконечного ремня и шкива, насаженного на вал мотора. К валу мотора приложен вращающий момент M *кг·м*; моменты инерции вала мотора и трансмиссионного вала вместе с их шкивами имеют значения J_1 *кг·м·сек*^{2} и J_2 *кг·м·сек*^{2}; радиус шкива мотора r_1 *м*; передаточное число от мотора к трансмиссии равно k, вес бесконечного ремня — p *кг*. Пренебрегая трением в подшипниках валов, найти угловое ускорение вала мотора.

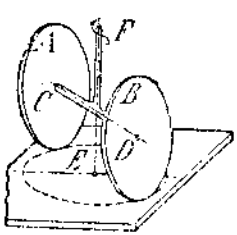
Ответ. $\varepsilon_1 = \dfrac{M \cdot g}{(J_1 + k^2 J_2) g + p r_1^2}$.

791. По наклонной плоскости AB, составляющей угол α с горизонтом, скатывается тяжелый однородный цилиндр C радиуса r и массы M. На цилиндре намотана нить, к концам которой прикреплены грузы M_1 массы m_1 и M_2 массы m_2. Определить угловую скорость цилиндра ω, после того как он сделает n оборотов при начальной скорости, равной нулю.



Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{8\pi n g\,[(M + m_1 + m_2)\sin\alpha + m_2 - m_1]}{r\,[3M + 4m_1 + 4m_2 + 4(m_2 - m_1)\sin\alpha]}}$.

792. Мельничные бегуны A и B насажены на горизонтальную ось CD, которая вращается вокруг вертикальной оси EF; вес каждого бегуна 200 *кг*; диаметры бегунов одинаковые, каждый равен 1 *м*; расстояние между ними CD равно 1 *м*. Найти живую силу бегуна, когда ось CD совершает 20 об/мин., допуская, что при вычислении моментов инерции бегуны можно рассматривать как однородные тонкие диски.

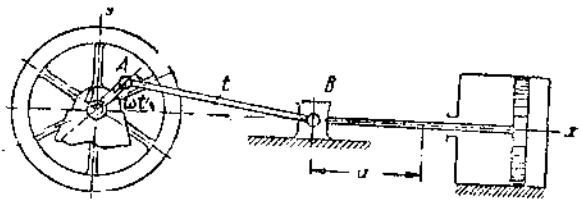


Ответ. 19,5 *кг·м* = 192 *дж*.

12. Закон движения центра инерции

793. Вес маховика с валом паровой машины равен 2000 *кг*, кривошип, длиною 30 *см*, весит 50 *кг* и имеет центр тяжести

в середине своей длины; шатун, длиною 180 *см* и весом 150 *кг* имеет центр тяжести также в середине своей длины; крейцкопф шток и поршень вместе весят 200 *кг* и имеют центр тяжести на расстоянии $a = 60$ *см* от точки B.

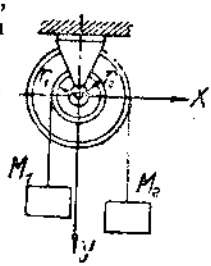


Вычислить координаты x_c и y_c центра инерции данной системы, зная, что маховик вращается с постоянной угловой скоростью ω, а угол поворота кривошипа отсчитывается от оси x против вращения стрелки часов.

Ответ. $x_c = 5 + \frac{75}{16}\cos\omega t + \frac{55}{16}\sqrt{36 - \sin^2\omega t}$ *см*;

$y_c = \frac{5}{4}\sin\omega t$.

794. Грузы M_1 веса p_1 и M_2 веса p_2 подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, навернутых на барабаны радиусов r_1 и r_2, которые насажены на общую ось. Барабан радиуса r_1 весит p_3, а барабан радиуса r_2 имеет вес p_4, причем центры тяжести обоих барабанов лежат на оси вращения.



Пренебрегая сопротивлениями и массами нитей, определить движение центра инерции данной системы, если $p_2 > p_1$, барабаны вращаются с угловым ускорением ε и в момент начала движения системы под действием только сил тяжести грузов M_1 и M_2 их центры тяжестей находились на одинаковом расстоянии h от оси вращения барабанов.

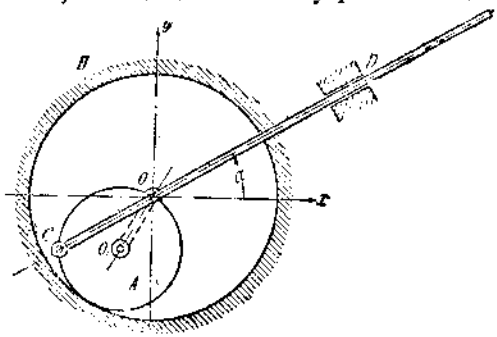
Ответ. Центр инерции системы движется по прямой

$$x_c = \frac{p_2 r_2 - p_1 r_1}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$$

по уравнению:

$$y_c = \frac{(p_1 + p_2)\,h + \frac{1}{2}\varepsilon(p_2 r_2 - p_1 r_1)\cdot t^2}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}.$$

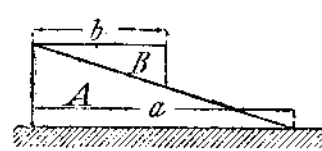
795. Механизм Лагира состоит из зубчатого колеса A радиуса 4 *см*, находящегося во внутреннем зацеплении с колесом B радиуса 8 *см*. В точке C, взятой на линии зацепления колеса A, с последним при помощи шарнира соединен прямолинейный стержень CD длины 32 *см*, проходящий через направляющий подшипник D. Центр тяжести колеса A в точке O_1, центр тяжести стержня CD в середине его длины, причем вес колеса A в три раза больше веса стержня CD.



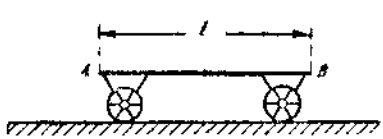
Не учитывая массы кривошипа OO_1, вращающегося с произвольной угловой скоростью вокруг оси O, найти траекторию центра тяжести системы из колеса A и стержня CD в двух случаях: 1) направляющий подшипник D расположен на оси x, 2) тот же подшипник расположен на оси y.

Ответ. 1) $\frac{(x_c-4)^2}{25}+\frac{y_c^2}{9}=1$; 2) $\frac{x_c^2}{9}+\frac{(y_c-4)^2}{25}=1$.

796. На однородную призму A, лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B, как указано на чертеже; поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники; вес призмы A втрое больше веса призмы B. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l, на которую передвинется призма A, когда призма B, спускаясь по A, дойдет до горизонтальной плоскости.



Ответ. $l=\frac{a-b}{4}$.



797. Тележка AB весом P может перемещаться по горизонтальной плоскости с очень малым сопротивлением, которым возможно пренебречь; центр тяжести тележки находится в середине ее длины. Стоящий на первоначально неподвижной тележке человек весом p переходит по платформе на расстояние l из A в B.

В какую сторону и на какое расстояние передвинется при этом тележка за время перехода человека из A в B?

Ответ. Тележка передвинется на расстояние $l \cdot \frac{p}{p+P}$ справа налево.

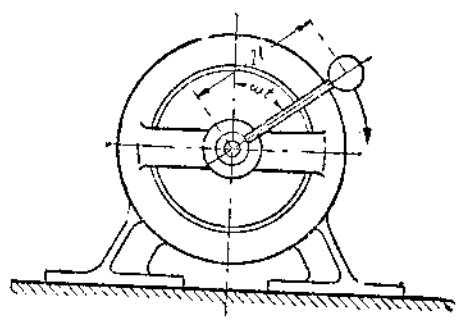
798. Вес ствола с затвором 76 *мм* полевой пушки равен 389 *кг*, вес снаряда 6,5 *кг*, начальная скорость снаряда (скорость у дула) 588 *м/сек*. Определить наибольшую скорость отката ствола.

Ответ. 9,82 *м/сек*.

799. Пароход весом 200 m движется со средней скоростью 10 *м/сек*, представляющей собою скорость общего центра тяжести корпуса и всего оборудования парохода. Поршень горизонтальной пароходной машины весит 100 *кг*, имеет ход 1 *м* и делает 240 ходов в минуту. Считая колебания поршня гармоническими, определить скорость v корпуса парохода, если гребные колеса дают движущее усилие, все время равное сопротивлению воды.

Ответ. $v = (10 - 0{,}00314 \cos 4\pi t)$ *м/сек*.

800. Электрический мотор веса P с горизонтальным валом без всяких креплений установлен на совершенно гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длины $2l$ и веса p, на другом конце которого насажен груз Q; угловая скорость вала ω.



Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R, действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундаменте.

Груз Q принять за материальную точку, а линию действия силы тяжести мотора считать проходящей через ось вращения.

Ответ. 1) Гармонические колебания с амплитудой $\frac{l(p+2Q)}{p+P+Q}$ и периодом $\frac{2\pi}{\omega}$;

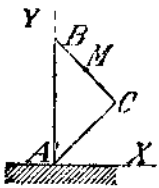
2) $R = \frac{p+2Q}{g} \cdot l\omega^2$.

801. По условиям предыдущей задачи вычислить ту угловую скорость ω вала электромотора, при которой электромотор будет

подпрыгивать над фундаментом, не будучи к нему прикреплен болтами:

Ответ. $\omega \geqslant \sqrt{\frac{(p+P+Q)g}{(p+2Q)l}}$.

802. Пластинка ABC, имеющая форму прямоугольного равнобедренного треугольника, гипотенуза которого AB равна 12 *см*, поставлена вершиной A на гладкую горизонтальную плоскость так, что гипотенуза направлена по вертикали. Предоставленная затем самой себе, пластинка падает под влиянием силы тяжести.



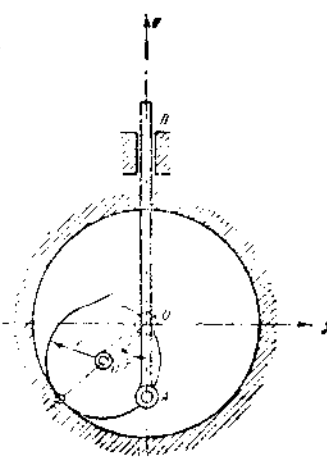
Определить, какую кривую опишет при этом точка M — середина стороны BC.

За все время движения пластинки вершина A остается на горизонтальной плоскости.

Ответ. Дугу эллипса: $9(x-2)^2+y^2=90$.

13. Закон количеств движения

803. Вычислить количество движения изображенной на чертеже ременной передачи, учтя массы обоих шкивов и ремня; центры тяжестей каждого из шкивов лежат на их осях вращения.



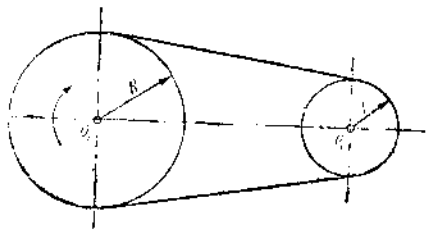
Ответ. Количество движения равно нулю.

804. В механизме Лагира движущееся колесо радиуса r весит p и имеет центр тяжести в точке O_1; прямолинейный стержень AB весит в k раз больше подвижного колеса и имеет центр тяжести на середине его длины. Кривошип OO_1 вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω ($\varphi = \omega t$). Вычислить количество движения системы.

Ответ. Проекции искомой величины на оси координат будут: 1) на ось OX: $\frac{p}{g} r\omega \cos \omega t$; 2) на ось OY: $\frac{p}{g} r\omega (1+2k) \sin \omega t$.

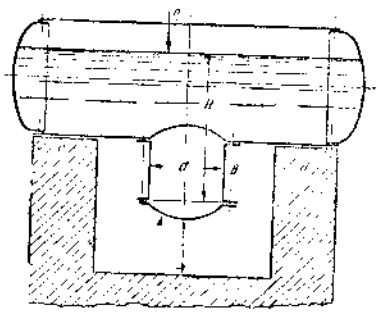
805. Колесо веса $P = 100$ *кг* и радиуса $r = 50$ *см* катится без скольжения по рельсу, делая 60 об/мин.

Вычислить количество движения колеса.



Ответ. $10{,}2\pi$ *кг·сек*.

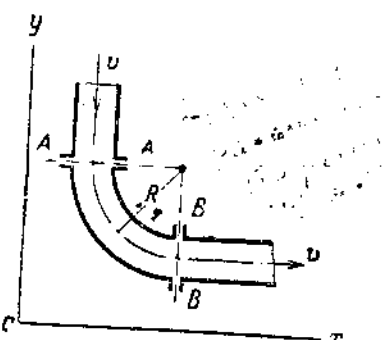
806. Паровой котел веса 10,35 *т* заполнен водой в количестве 15 *т* при давлении на свободной поверхности $p_0 = 10$ *ат* по манометру. В некоторый момент времени происходит разрыв болтов, которыми крышка A прикреплена к патрубку B посредством фланцевого соединения; благодаря срыву крышки A, горячая вода будет вытекать в атмосферу. $H = 1$ *м*, $d = 0{,}4$ *м*, относительный удельный вес горячей воды $\gamma = 0{,}9$.



Пренебрегая гидравлическими сопротивлениями, скоростями частиц воды внутри котла и явлением парообразования воды по выходе из патрубка B, вычислить давление котла на опоры в момент срыва крышки A. Среднюю скорость, с которой вода будет вытекать в атмосферу после срыва крышки, взять по формуле: $v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\gamma}\right)}$ (формула Торичелли).

Ответ. Давление на опоры будет равно нулю.

807. Расход воды в трубопроводе при установившемся режиме $Q = 90$ *литр/сек.*; внутренний диаметр трубопровода $d = 200$ *мм*; средний радиус колена, расположенного в вертикальной плоскости и изогнутого под прямым углом, $R = 300$ *мм*; гидродинамическое давление в сечении $A-A$ $p_a = 0{,}5$ *кг/см*^{2}; в сечении $B-B$

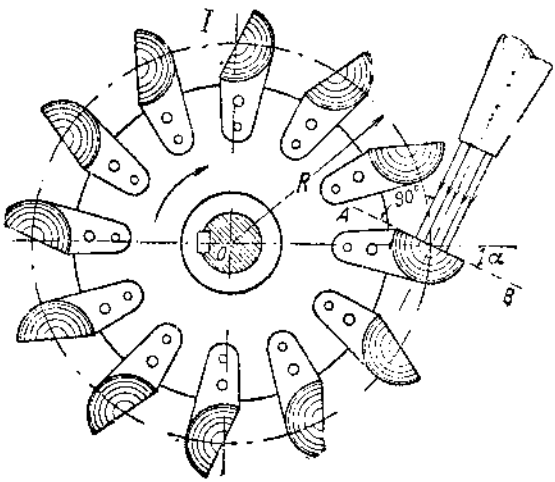


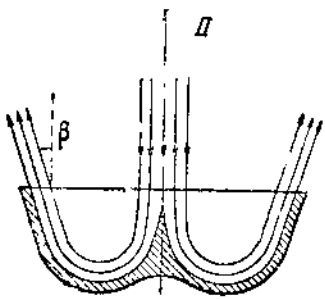
$p_b = 0{,}53$ *кг/см*^{2}. Считая скорости всех точек сечений $A-A$ и $B-B$ равными, определить давление воды на колено; уд. вес воды $\gamma = 1$ *т/м*^{3}.

Отв. $x = -192{,}7$ *кг*;

$y = -212{,}9$ *кг*.

808. Рабочее колесо гидравлической турбины Пельтона состоит из стального круглого диска, насаженного на вал и имеющего по окружности лопатки, форма которых показана на чертеже *I*, а также дана в разрезе на чертеже *II* плоскостью, параллельной оси вращения колеса и проходящей через ось струи.





На лопатки колеса направлена струя воды в количестве 100 *л/сек* со скоростью $v = 20$ *м/сек*.

1) Вычислить касательную к окружности радиуса $R = 0{,}6$ *м*, составляющую N_t давления струи воды на лопатку в тот момент, когда плоскость AB перпендикулярна к скорости струи, а колесо делает 240 об/мин.

2) Ту же составляющую при неподвижном колесе.

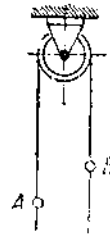
Угол $\alpha = 30°$, угол β, составленный осью струи с направлением относительной скорости в момент схода струи с лопатки равен 10. Считать одинаковой по величине относительную скорость воды по отношению к лопатке как в мо-

мент вступления воды на лопатку, так и в момент схода с лопатки воды.

Ответ. 1) $N_t = 123$ *кг*,
2) $N_t = 350$ *кг*.

14. Закон моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

809. Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинута веревка; в точке A находится человек веса p, в точке B — груз того же веса. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по веревке со скоростью a?



Ответ. Груз будет подниматься вместе с веревкой со скоростью $\frac{a}{2}$.

810. Решить предыдущую задачу, принимая во внимание вес блока, который в 4 раза меньше веса человека.

При определении момента инерции блока предполагаем, что его масса равномерно распределена по окружности.

Ответ. Груз будет подниматься со скоростью $\frac{4}{9}a$.

811. Однородный круглый диск веса $p = 50$ *кг* и радиуса $r = 30$ *см* катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая 60 об/мин. Вычислить главный момент количества движения диска относительно осей: 1) проходящей через центр диска перпендикулярно к плоскости движения; 2) относительно мгновенной оси.

Ответ. 1) 1,44 *кг·м·сек*. 2) 4,32 *кг·м·сек*.

312. Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр; на платформе проложен путь по концентрической окружности радиуса r; по этому пути идет с постоянной относительной скоростью u человек, вес которого равен p. С какою угловою скоростью ω будет при этом вращаться платформа около оси, если вес ее P можно считать равномерно распределенным по площади круга радиуса R, а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю.

Ответ. $\omega = \frac{2pr}{PR^2 + 2pr^2}u$.

813. Возможно ли пустить по экватору с запада на восток поезд, масса которого 2000 m, с такой скоростью, чтобы продолжительность суток увеличилась на одну секунду? (При этом Землю можно считать за однородный шар радиуса 6000 *км* и массы $5 \cdot 10^{21}$ m.)

Ответ. Это невозможно, так как скорость поезда должна была бы равняться $5{,}05 \cdot 10^{12}$ *км/сек*.

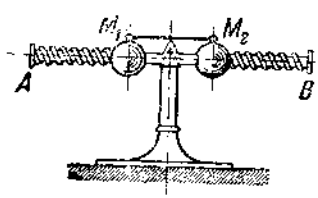
814. Насколько изменится прололжительность суток T, если метеорная пыль, падающая на поверхность Земли, покроет ее равномерно тонким слоем массы $m = 135 \cdot 10^{11}$ m?

При решении задачи можно считать массу Земли равной $M = 5 \cdot 10^{21}$ m и момент инерции слоя метеорной пыли относительно земной оси равным $\frac{2}{3} mR^2$, где R — радиус земли.

Ответ. Продолжительность суток увеличится на величину

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot T = 0{,}00039 \text{ сек.}$$

815. Однородный стержень AB длины $2L = 180$ *см* и веса $Q = 2$ *кг* подвешен в устойчивом положении равновесия на острие, так что ось его горизонтальна. Вдоль стержня могут перемещаться два шара M_1 и M_2, весом каждый $P = 5$ *кг*, прикрепленные к концам двух одинаковых пружин. Стержню сообщается вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 64$ об/мин., причем шары расположены симметрично относительно оси вращения и центры их с помощью нити удерживаются на расстоянии $2l_1 = 72$ *см* друг от друга. Затем нить пережигается, и шары, совершив некоторое число колебаний, устанавливаются под действием пружин и сил трения в положении равновесия на расстоянии $2l_2 = 108$ *см* друг от друга. Рассматривая шары как материальные точки и пренебрегая массами пружин, определить новое число n_2 оборотов стержня в минуту.



Ответ. $n_2 = \frac{6Pl_1^2 + Ql^2}{6Pl_2^2 + Ql^2} \cdot n_1 = 34.$

816. Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик веса 0,5 m; радиус инерции маховика $= 1{,}5$ $м$. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n_0 =$

$= 240$ об/мин.; предоставленный самому себе, он остановился через 20 сек. Определить момент трения, считая его постоянным.

Отв. 144 *кг·м*.

817. Мощность двигателя, передаваемая барабану молотилки при его холостом ходе, тратится частично на преодоление вредных сопротивлений, и остающаяся часть „полезная мощность" идет на увеличение угловой скорости барабана. Определить угловое ускорение барабана при полезной мощности 5 *л. с.* и при двух различных угловых скоростях, соответствующих $n_1 = 950$ об/мин. и $n_2 = 1023$ об/мин. Момент инерции барабана $J = 0{,}795$ *кг·м·сек*^{2}.

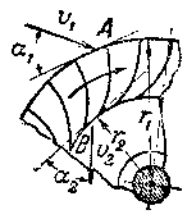
Отв. $\varepsilon_1 = 4{,}74$ 1/сек^2 и $\varepsilon_2 = 4{,}4$ 1/сек^2.

818. Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух диаметрально расположенных полюсов, несущих на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи Фуко, индуктируемые в массе маховика, при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент L_1, пропорциональный скорости v на ободе маховика, $L_1 = kv$, где k — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент L_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным.

Найти, в течение какого времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0, соответствующей $n_0 = 750$ об/мин., если вес маховика $P = 26$ *т*, диаметр $D = 3$ *м*, радиус инерции $\rho = 0{,}365\,D$, $k = 206 \cdot 10^6$ CGS. Момент трения $L_2 = 640$ джоулей.

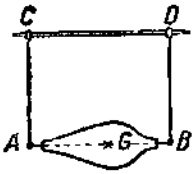
Отв. $t = \dfrac{2J}{kD} \ln\left(1 + \dfrac{kD\omega_0}{2L_2}\right) = 60$ сек.

819. Вода вступает в канал радиальной турбины в точке A со скоростью v_1, под углом α_1 к наружной окружности колеса; оставляет колесо в точке B со скоростью v_2 под углом α_2 к внутренней окружности колеса. Вес протекающей в секунду воды равен Q. Радиус наружной окружности r_1, внутренней r_2. Предполагая, что турбина вращается равномерно с угловой скоростью ω, определить ее мощность.



Отв. $\dfrac{Q\omega}{75g}(r_1 v_1 \cos\alpha_1 + r_2 v_2 \cos\alpha_2)$ *л. с.*

820. Для определения момента инерции J данного тела относительно некоторой оси AB, проходящей через центр тяжести тела,



его подвесили веревками AC и BD к неподвижной горизонтальной балке CD так, что ось AB параллельна CD; приведя затем тело в колебательное движение, определили продолжительность T одного размаха.

Как велик момент инерции J, если вес тела p и расстояние между осями AB и CD равно h? Массами веревок пренебрегаем.

Ответ. $J = hp\left(\frac{1}{\pi^2}T^2 - \frac{h}{g}\right)$.

821. Маятник состоит из круглого цилиндрического стержня AB веса p, длины l и радиуса r, на который надет соосный цилиндрический груз CD из того же материала, высоты l_1 и радиуса r_1. Ось привеса EF находится на расстоянии a от верхнего конца стержня A; нижнее основание груза CD отстоит от нижнего конца стержня на расстояние b.

Определить период малых колебаний маятника при следующих данных: $p = 1{,}5$ *кг*; $l = 60$ *см*; $r = 1$ *см*; $l_1 = 12$ *см*; $r_1 = 2$ *см*; $a = b = 5$ *см*.

Момент инерции круглого цилиндра массы m, радиуса r и длины l относительно поперечной оси, проходящей через центр инерции, равен $\frac{1}{4}m\left(r^2 + \frac{1}{3}l^2\right)$.

Ответ. 1,28 сек.

822. Маятник состоит из стержня AB с прикрепленным к нему шаром массы m и радиуса r, центр которого C находится на продолжении стержня. Определить, пренебрегая массой стержня, в какой точке O стержня нужно поместить ось привеса для того, чтобы продолжительность одного размаха при малых качаниях маятника имела данную величину T.

Момент инерции шара, массы m и радиуса r относительно оси, проходящей через центр, равен $\frac{2}{5}mr^2$.

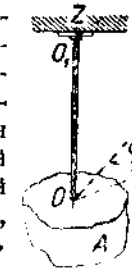
Ответ. $OC = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4 r^2}\right)$.

Так как должно быть $OC \geqslant r$, то решение возможно, если $T^2 \geqslant 1{,}4\frac{\pi^2}{g}r$; решение, соответствующее знаку минус перед радикалом, невозможно.

823. Маятник состоит из стержня с двумя закрепленными на нем грузами, расстояние между которыми равно l; верхний груз имеет массу m_1, нижний массу m_2. Определить, на каком расстоянии x от нижнего груза нужно поместить ось привеса для того, чтобы период малых качаний маятника был наименьший; массою стержня пренебрегаем и грузы считаем материальными точками.

Ответ. $x = l\sqrt{m_1}\,\dfrac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}$.

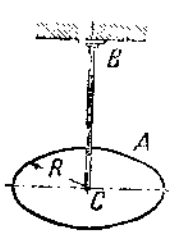
824. Для определения момента инерции J_z тела A относительно вертикальной оси OZ его прикрепили к упругому вертикальному стержню OO_1, закрутили этот стержень, повернув тело A вокруг оси OZ на малый угол φ_0, и пустили колебаться; продолжительность 100 размахов оказалась равной $100\,T_1 = 2$ мин., где T_1 половина периода; колебания были гармонические, так как момент силы упругости стержня пропорционален углу закручивания и равен $k^2\varphi$. Для определения коэффициента k проделали второй опыт: на стержень в точке O был надет однородный круглый диск радиуса $r = 15$ *см*, массы $m = 1610$ *г*, и тогда продолжительность одного размаха оказалась равной $T_2 = 1{,}5$ сек. Определить момент инерции тела J_z.



Ответ. $J_z = \dfrac{mr^2}{2}\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 = 115\,200\ г\cdot см^2$.

825. Упругую проволоку, на которой подвешен однородный шар радиуса r и массы m граммов, закручивают на угол φ_0, а затем предоставляют ей свободно раскручиваться. Момент пары, необходимой для закручивания проволоки на 1 радиан, равен a диносантиметрам. Определить движение, пренебрегая сопротивлением воздуха и считая момент силы упругости скрученной проволоки пропорциональным углу кручения φ.

Ответ. $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{5a}{2mr^2}}\,t$.

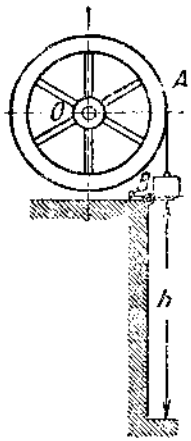


826. Для определения вязкости жидкости наблюдают колебания диска A, подвешенного на упругой закручивающейся проволоке BC, в воздухе и в жидкости; продолжительность размаха в первом случае T_1, во втором T_2; радиус диска равен R, его момент инерции относительно оси проволоки равен J. Определить коэффициент вязкости k, принимая во внимание, что момент кручения проволоки пропорционален углу кручения, а тре-

ние, испытываемое элементом диска в жидкости, равно произведению коэффициента k на площадь элемента и на его скорость; трением при колебаниях диска в воздухе пренебрегаем.

Для определения момента сил трения, действующих на диск, выражаем момент трения для элементарного кругового кольца, принимая во внимание, что трение одинаково на обеих сторонах диска, и затем полученное выражение интегрируем от 0 до R.

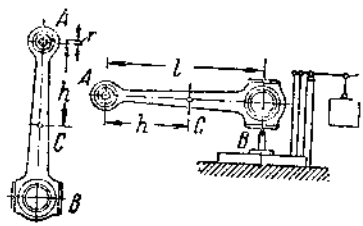
Ответ. $k = \dfrac{2J}{R^4 T_1 T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$.



827. Для определения момента инерции J махового колеса A радиуса $R = 50$ *см* относительно оси, проходящей через центр тяжести, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирю B массы $m_1 = 8$ *кг*, и наблюдали продолжительность $T_1 = 16$ сек. опускания гири с высоты $h = 2$ *м*. Для исключения трения в подшипниках проделали второй опыт с гирей массы $m_2 = 4$ *кг*, причем продолжительность опускания оказалась равной $T_2 = 25$ сек., при прежней высоте. Предполагая момент силы трения постоянным и не зависящим от веса гири, вычислить момент инерции J.

Ответ. $$J = R^2 \frac{\frac{g}{2h}(m_1 - m_2) - \left(\frac{m_1}{T_1^2} - \frac{m_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}} = 1061 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

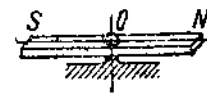
828. Для определения момента инерции шатуна его заставляют качаться около горизонтальной оси, продев через втулку цапфы крейцкопфа тонкий цилиндрический стержень. Продолжительность ста размахов 100 $T = 100$ сек., где T половина периода. Затем, для определения расстояния центра тяжести от оси привеса $AC = h$, шатун положили горизонтально, подвесив его точкой A к талям и оперев точкой B на платформу десятичных весов; давление на нее оказалось при этом равным $P = 50$ *кг*. Определить центральный момент инерции J шатуна относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, имея следующие данные: вес шатуна $Q = 80$ *кг*,



расстояние между вертикалями, проведенными через точки A и B (см. правый чертеж), равно $l = 1$ *м*, радиус цапфы крейцкопфа $r = 4$ *см*.

Ответ. $J = (Pl + Qr)\left(\frac{g}{\pi^2} T^2 - \frac{P}{Q} l - r\right) = 1{,}77$ *кг·м·сек²*.

829. Призматический магнит массы m граммов, длины $2a$ и ширины $2b$ сантиметров, полюсы которого находятся на его концах, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр его тяжести, в земном магнитном поле. Отклонив магнит из положения равновесия SN на весьма малый угол, предоставляют его самому себе. Определить движение магнита, если известно, что горизонтальная составляющая магнитного поля Земли действует на единицу магнетизма с силой H дин, а магнитный момент магнита, т. е. произведение количества магнетизма, сосредоточенного в полюсах, на расстояние $2a$ между полюсами, равно A ед. в системе CGS.



Ответ. Гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2 + b^2)}{3AH}}.$$

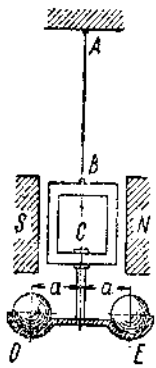
830. В равномерном магнитном поле, вращающемся вокруг вертикальной оси O с постоянной угловой скоростью ω, подвешена за центр тяжести горизонтальная магнитная стрелка ns. Напряжение поля равно H, магнитный момент стрелки A, момент инерции ее относительно оси вращения J. Направление On составляет углы: угол θ с направлением поля NS и угол φ с направлением некоторой неподвижной прямой, лежащей в плоскости nOs. Определить: 1) длину l математического маятника, совершающего в поле силы тяжести такое же движение, какое совершает стрелка по отношению к среде, вращающейся вместе с магнитным полем; 2) движение стрелки в том предположении, что в начальный момент стрелка имеет направление, составляющее с соответствующим направлением поля весьма малый угол θ_0, и угловую скорость, равную угловой скорости поля.

При решении второго вопроса угол θ остается малым, и потому можно заменить $\sin\theta$ через θ.

Ответ. 1) $l = \frac{Jg}{AH}$.

2) $\varphi = \omega t + \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{AH}{J}} \cdot t\right)$.

831. Между полюсами N и S магнита подвешена на тонкой нити AB рамка гальванометра BC, к которой прикреплены вне магнитного поля две ложечки D и E; расстояние между их центрами равно $2a$; обмотка рамки замкнута некоторым внешним сопротивлением. Колебания рамки в том случае, когда в каждую ложечку положен однородный шарик радиуса r и массы m, имеют продолжительность размаха T_1 и логарифмический декремент δ_1; когда же ложечки не нагружены шариками, продолжительность размаха рамки равна T_2, а логарифмический декремент равен δ_2. Момент от кручения нити равен $k\varphi$, где φ — угол отклонения рамки, а момент сил сопротивления воздуха и электромагнитного торможения равен: в первом случае $n_1\omega$, во втором $n_2\omega$, где ω — угловая скорость рамки. 1) Определить момент инерции J рамки относительно оси вращения и коэффициенты: k, n_1 и n_2. 2) Вычислить эти величины, полагая: $T_1 = 11$ сек., $\delta_1 = 0{,}13$, $T_2 = 4{,}5$ сек., $\delta_2 = 0{,}3$, $a = \sqrt{3{,}55}$ *см*, $r = 0{,}5$ *см*, $m = 4$ *г*.



Логарифмическим декрементом затухающих колебаний называется натуральный логарифм отношения двух последовательных наибольших отклонений от положения равновесия в разные стороны.

Ответ. 1) $J = J_0 \dfrac{(\pi + \delta_1)\,T_2^2}{(\pi^2 + \delta_2^2)\,T_1^2 - (\pi^2 + \delta_1^2)\,T_2^2}$,

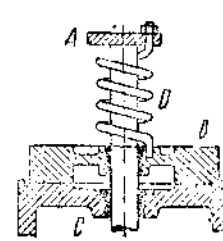
где $J_0 = 2m\left(a^2 + \dfrac{2}{5}r^2\right)$; 2) $J = 6{,}03$ *г·см*^{2},

$k = J\dfrac{\pi^2 + \delta_2^2}{T_2^2}$; $k = 2{,}94$ *дин·см*,

$n_1 = 2(J + J_0)\dfrac{\delta_1}{T_1}$; $n_1 = 0{,}85$ *дин·см·сек*;

$n_2 = 2J\dfrac{\delta_2}{T_2}$. $n_2 = 0{,}80$ *дин·см·сек*.

832. На вертикальный вал A, равномерно вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω, надет груз B, который лежит на горизонтальной плоскости неподвижной подушки C, а с валом соединен посредством спиральной пружины D. Момент инерции груза B относительно оси вала равен J; момент сил упругости пружины при закручивании на угол в 1 радиан равен n; момент сил трения между



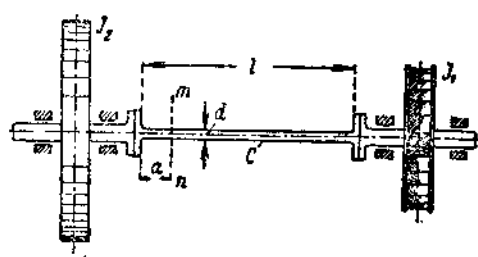
грузом B и плоскостью подушки C сохраняет постоянную величину f. Определить движение груза относительно вала.

Обозначая через $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ угол поворота вала, через ψ угол поворота груза вокруг вертикальной оси, составляем дифференциальное уравнение вращения груза, предполагая, что $\frac{d\psi}{dt} > 0$; общий интеграл этого уравнения будет: $\psi = A_1 \sin \sqrt{\frac{n}{J}}\, t + B_1 \cos \sqrt{\frac{n}{J}}\, t + \omega t + \varphi_0 - \frac{f}{n}$. В начальный момент $t = 0$, $\psi_0 = 0$, $\psi_0' = 0$, $\varphi_0 = \frac{f}{n}$.

Ответ. Гармонические колебания:

$$\psi - \varphi = -\varphi_0 + \omega \sqrt{\frac{J}{n}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{n}{J}}\, t\right).$$

833. Для экспериментального исследования процесса регулирования гидравлических турбин в гидравлической лаборатории Лен. индустриального института сконструирована установка, состоящая из турбины Френсиса, ротор A которой имеет момент инерции относительно оси вращения $J_1 = 5$ *кг·см·сек²*, маховика B с моментом инерции $J_2 = 150$ *кг·см·сек²* и упругого вала C, соединяющего ротор турбины с маховиком; вал имеет длину $l = 1552$ *мм*, диаметр $d = 25{,}4$ *мм* и модуль сдвига $G = 880\,000$ *кг/см²*. Не учитывая массы вала и пренебрегая скручиванием его толстых участков, найти то его сечение mn, которое при свободных колебаниях данной системы остается неподвижным (узловое сечение), а также вычислить период T свободных колебаний системы.



Ответ. $a = 50$ *мм*; $T = 0{,}09$ сек.

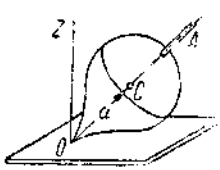
834. Вал радиуса r приводится во вращательное движение около горизонтальной оси AB гирей M, подвешенной с помощью веревки. Для того чтобы угловая скорость вала через некоторое время после начала движения имела величину, близкую к постоянной, с валом соединены n одинаковых пластин S; сопротивление воздуха, испытываемое пластиной, приводится к силе, нормальной к пластине, приложенной на расстоянии R от оси вала и пропорциональной квадрату ее угловой скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Масса гири m; момент инерции всех вра-

щающихся частей относительно оси AB равен J; массой веревки пренебрегаем. Определить угловую скорость ω вала, предполагая, что в начальный момент она равна нулю. Трением в опорах пренебречь.

Ответ. $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}} \cdot \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}$; где $\alpha = \frac{2}{J + mr^2} \sqrt{mgnkrR}$;

при достаточно большом значении t угловая скорость ω близка к постоянной величине: $\sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.

835. Волчок вращается по часовой стрелке вокруг своей оси OA с постоянной угловой скоростью $\omega = 600$ 1/сек.; ось OA наклонена к вертикали; нижний конец оси O остается неподвижен; центр тяжести волчка находится на оси в расстоянии $OC = 30$ *см*, вес волчка равен 1200 *г*, радиус инерции его относительно оси равен 10 *см*. Определить движение оси волчка OA, допуская, что при задании весьма большой угловой скорости ω главный момент количества движения волчка направлен по оси OA и равен $J\omega$.



Ответ. Ось OA вращается вокруг вертикали Oz по часовой стрелке, описывая круглый конус, с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 0{,}49$ 1/сек.

15. Плоское движение твердого тела. Смешанные задачи

836. Тяжелое тело состоит из стержня AB, длины 80 *см* и веса 1 *кг*, и прикрепленного к нему диска радиуса 20 *см* и веса 2 *кг*. В начальный момент при вертикальном положении стержня телу сообщено такое движение, что скорость центра тяжести M_1 стержня равна нулю, а скорость центра тяжести M_2 диска равна 360 *см/сек* и направлена по горизонтали вправо. Найти последующее движение тела, принимая во внимание только действие силы тяжести.

Ответ. Тело равномерно вращается с угловой скоростью 6 1/сек. вокруг его центра тяжести, который описывает параболу: $x^2 = 117{,}5\,y$.

837. Две гири M_1 и M_2 весом $p_1 = 2$ *кг* и $p_2 = 1$ *кг* соединены стержнем длины $l = 60$ *см*. В начальный момент $t = 0$ стержень M_1M_2 горизонтален, гиря M_2 неподвижна, а скорость гири M_1 равна $v_1 = 60\pi$ *см/сек* и направлена по вертикали вверх. Пренебрегая сопротивлением воздуха, весом соединительного стержня и размерами гирь, определить: 1) движение гирь под действием

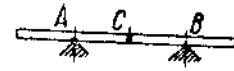
силы тяжести; 2) расстояния h_1 и h_2 гирь в момент $t=2$ сек. от горизонтали M_1M_2, на которой они находились в момент $t=0$; 3) натяжение T стержня.

Отв. 1) Центр тяжести C гирь движется по вертикали: $y_c = -\frac{2}{3}v_1t + \frac{1}{2}gt^2$; стержень вращается вокруг центра тяжести с угловой скоростью π 1/сек. 2) $h_1 = h_2 = 1711$ *см*; 3) $T = \frac{1}{g} \cdot \frac{p_1p_2}{p_1+p_2} l \cdot \omega^2 = 0{,}4$ *кг*.

838. Определить, какой угол α должна составлять с горизонтом наклонная плоскость, для того чтобы положенный на нее тяжелый однородный шар скатывался без скольжения, если известно, что коэффициент трения шара о плоскость равен k.

Отв. $\alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{7}{2} k$.

839. Однородный тонкий стержень длины $2l$ и веса P лежит на двух опорах A и B; центр тяжести C стержня находится на одинаковых расстояниях от опор: $CA = CB = a$; давление на каждую опору равно $\frac{1}{2}P$. Как изменится давление на опору A в тот момент, когда опора B будет удалена?



Составляем дифференциальные уравнения движения стержня для весьма малого промежутка времени, следующего за моментом удаления опоры B, пренебрегая изменением направления стержня и расстояния AC.

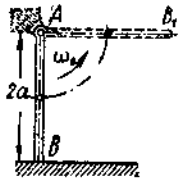
Отв. Давление на опору A получит приращение, равное $\frac{l^2-3a^2}{2(l^2+3a^2)} \cdot P$.

840. Однородная тяжелая балка AB длины $2l$ и веса Q при закрепленных концах находится в горизонтальном положении. В некоторый момент конец A освобождается, и балка начинает падать, вращаясь вокруг конца B; в момент, когда балка становится вертикальной, освобождается и конец B. Определить в последующем движении балки траекторию ее центра тяжести и угловую скорость ω.

Отв. 1) Парабола: $y^2 = 3lx - 3l^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

841. Однородный стержень AB длины $2a$ подвешен за конец A; другой конец B находится у самого пола. Сообщив стержню некоторую начальную угловую скорость ω_0, освобождают конец A

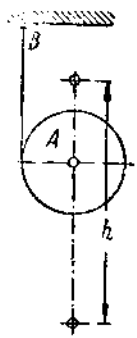
в тот момент, когда стержень окажется в горизонтальном положении. Дальнейшее движение свободного стержня происходит под влиянием одной силы тяжести. Найти выражение величины начальной угловой скорости ω_0, при которой стержень, падая на пол, в момент прикосновения к полу будет вертикален.



Найдя момент инерции стержня относительно одного из его концов, определяем для горизонтального положения стержня угловую скорость и затем скорость центра тяжести; далее находим время, в течение которого центр тяжести придет, сначала поднимаясь, а потом падая, на уровень своего начального положения; выразив затем угол поворота стержня за это время, получаем решение задачи.

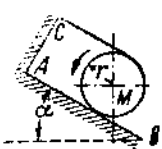
Ответ. $\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{(2k+1)^2\pi^2}{(2k+1)\cdot\pi + 2}\right]$, где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$

842. Тяжелый круглый цилиндр A массы m по середине обмотан тонкой нитью, конец которой B закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость v оси цилиндра, после того как эта ось опустится на высоту h, и найти натяжение T нити.



Ответ. $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$; $T = \frac{1}{3}mg$.

843. Две гибких нити обмотаны вокруг однородного круглого цилиндра M, веса P и радиуса r, так, что завитки их расположены симметрично относительно средней плоскости, параллельной основаниям. Цилиндр помещен на наклонной плоскости AB так, что его образующие перпендикулярны к линии наибольшего ската, а концы нитей C закреплены симметрично относительно вышеуказанной средней плоскости на расстоянии $2r$ от плоскости AB. Цилиндр начинает двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести, преодолевая трение о наклонную плоскость, коэффициент которого равен k. Определить путь S, пройденный центром тяжести цилиндра за время t, и натяжение T нитей, предполагая, что в течение рассматриваемого промежутка времени ни одна из нитей не сматывается до конца.

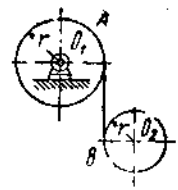


Ответ. $S = \frac{1}{3}g(\sin\alpha - 2k\cos\alpha)t^2$; $T = \frac{1}{6}P(\sin\alpha + k\cos\alpha)$.

Цилиндр остается в покое, если $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2k$.

844. Два однородных круглых цилиндра A и B, веса которых соответственно равны p_1 и p_2, а радиусы оснований r_1 и r_2 об-

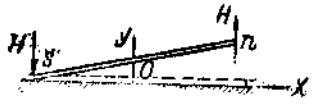
мотаны двумя гибкими нитями, подобно тому как указано в предыдущей задаче; оси цилиндров горизонтальны. Ось цилиндра A неподвижна; цилиндр B падает из состояния покоя под действием силы тяжести. Определить в момент t после начала движения, предполагая, что в этот момент нити еще остаются намотанными на оба цилиндра: 1) угловые скорости цилиндров ω_1 и ω_2, 2) пройденный центром тяжести цилиндра B путь S и 3) натяжение T нитей.



Ответ. 1) $\omega_1 = \dfrac{2gp_2}{r_1(3p_1+2p_2)}t$; $\omega_2 = \dfrac{2gp_1}{r_2(3p_1+2p_2)}t$;

2) $S = \dfrac{g(p_1+p_2)}{3p_1+2p_2}t^2$; 3) $T = \dfrac{p_1p_2}{2(3p_1+2p_2)}$.

845. Тонкий магнитный стержень веса P и длины $2l$ с полюсами на концах лежит на гладкой горизонтальной плоскости между полюсами электромагнита. При замыкании тока электромагнит создает равномерное поле, в котором на каждый полюс стержня действует вертикальная сила H. Если $H > \dfrac{P}{2}$, то стержень начинает двигаться. 1) Определить то наибольшее значение H, при котором стержень во все время движения будет одним концом опираться на плоскость. 2) Предполагая, что стержень все время опирается о плоскость, найти: а) траекторию северного полюса стержня при том условии, что поле электромагнита направлено снизу вверх; б) скорость v_c центра тяжести стержня и угловую скорость его ω при вертикальном положении.



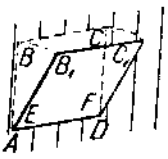
Выражаем геометрически условие первого вопроса: обозначим через ψ угол наклона стержня к плоскости, — получим: $y_c = l\sin\psi$, полагая, что начало координат находится в середине начального положения стержня; с помощью этого условия из закона моментов относительно центра тяжести и закона живой силы находим выражение для реакции плоскости на стержень в зависимости от угла его наклона к плоскости; для того чтобы условие соприкасания было соблюдено, найденное выражение реакции не должно получать отрицательного значения ни при каком положении стержня. Из двух последних вопросов ответ на первый получаем с помощью закона движения центра инерции, а ответ на второй — с помощью закона живой силы.

Ответ. 1) $H = \dfrac{7}{12}P$.

2) а) Половина эллипса с центром в точке O и полуосями l и $2l$; северный полюс совершает колебательное движение по этой кривой;

б) $v_c = 0$, $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{Pl}(2H-P)}$.

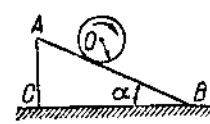
846. Тонкая однородная доска $ABCD$ прямоугольной формы, высота которой $AB = 2l$, а вес Q, прислонена к вертикальной стене и опирается на два гладких гвоздя E и F без головок; расстояние AE равно FD. В некоторый момент доска начинает падать с ничтожно малой начальной скоростью, вращаясь вокруг прямой AD. Определить: какой угол α будет составлять со стеной доска в тот момент, когда она соскочит с гвоздей.



Доска может удерживаться на гвоздях только до тех пор, пока равнодействующая реакций опор будет направлена внутрь того прямого двугранного угла с ребром AD, в котором происходит начальное отклонение доски от вертикального положения. Применяем законы: движения центра инерции, моментов и живой силы.

Ответ. $\alpha = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'$.

847. На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABC веса P, которая может скользить без трения по этой плоскости; по грани призмы AB катится без скольжения однородный круглый цилиндр веса p. Определить движение призмы.



Составляем уравнение живой силы системы, состоящей из призмы и цилиндра; в этом уравнении с помощью закона движения центра инерции скорость оси цилиндра и его угловую скорость выражаем через скорость призмы и затем уравнение дифференцируем по времени.

Ответ. Призма движется влево с постоянным ускорением, равным $\frac{pg\sin 2\alpha}{2P\cos^2\alpha + (P+p)(1+2\sin^2\alpha)}$.

848. На боковой поверхности круглого цилиндра с вертикальною осью, вокруг которой он может вращаться без трения, вырезан гладкий винтовой жолоб с углом подъема α. В начальный момент цилиндр находится в покое; в жолоб опускают тяжелый шарик; он падает по жолобу без начальной скорости и заставляет цилиндр вращаться. Дано: масса цилиндра M, радиус его R, масса шарика m; расстояние шарика от оси считаем равным R и момент инерции цилиндра равным $\frac{1}{2}MR^2$. Определить угловую скорость ω, которую цилиндр будет иметь в тот момент, когда шарик упадет на высоту h.

Применяем закон моментов и закон живой силы.

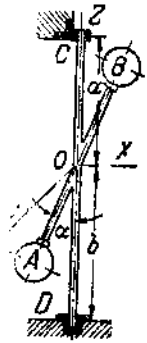
Ответ. $\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$.

16. Давление вращающегося тела на ось

849. Центр тяжести махового колеса, вес которого 3000 *кг*, находится на расстоянии 1 *мм* от оси вала; расстояния подшипников от колеса равны 1 *м*. Найти давления на подшипники, когда вал делает 1200 об/мин.

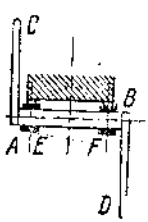
Ответ. Давление на каждый из подшипников есть равнодействующая двух сил, из которых одна равна 1500 *кг* и направлена по вертикали, а другая равна 2400 *кг* и направлена параллельно прямой, соединяющей геометрический центр колеса, находящийся на оси вала, с центром тяжести колеса.

850. Стержень AB длины $2l$, на концах которого находятся грузы равного веса P граммов, вращается равномерно с угловою скоростью ω около вертикальной оси OZ, проходящей через середину O длины стержня. Расстояние точки O от подшипника C равно a, от подпятника D равно b. Угол между стержнем AB и осью OZ сохраняет постоянную величину α. Пренебрегая весом стержня и размерами грузов, определить проекции давлений на подшипник C и подпятник D в тот момент, когда стержень находится в плоскости XOZ.



Ответ. $X_C = -X_D = \dfrac{Pl\omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}$ граммов; $Y_C = Y_D = 0$; $Z_D = 2P$ граммов.

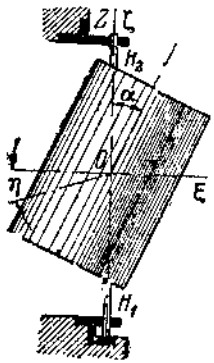
851. На концы средней велосипедной оси AB надеты два одинаковых кривошипа AC и BD длины l, веса Q каждый, заклиненные под углом 180° относительно друг друга. Ось AB, длины $2a$, веса P, вращается с постоянной угловой скоростью ω в подшипниках E и F, расположенных симметрично на расстоянии $2b$ друг от друга. Определить давления N_E и N_F на подшипники в тот момент, когда кривошип AC направлен вертикально вверх. Массу каждого кривошипа можно считать равномерно распределенной вдоль его оси.



Ответ. Давление $N_F = \dfrac{1}{2} P + Q - \dfrac{al\omega^2}{2bg} \cdot Q$, при $N_E > 0$ направлено по вертикали вниз, при $N_E < 0$ — вверх.

Давление $N_F = \dfrac{1}{2} P + Q + \dfrac{al\omega^2}{2bg} \cdot Q$ направлено по вертикали вниз.

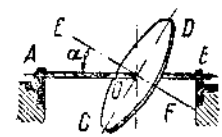
852. Прямой однородный круглый цилиндр веса P, длины $2l$ и радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OZ, проходящей через центр тяжести O цилиндра; угол между осью цилиндра и осью OZ сохраняет при этом постоянную величину α. Расстояние между подпятником H_1 и подшипником H_2: $H_1H_2 = h$. Определить боковые давления: N_1 на подпятник и N_2 на подшипник.



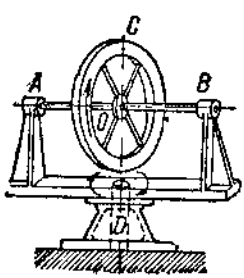
Принимаем центр тяжести O цилиндра за начало координатных осей: $O\zeta$ — ось вращения, $O\eta$ — ось, перпендикулярная к плоскости, заключающей ось вращения и ось цилиндра, и $O\xi$ — ось, перпендикулярная к двум предыдущим; тогда центробежный момент инерции $D = \sum m\eta\xi = 0$; находим центробежный момент инерции $E = \sum m\xi\zeta$; он оказывается равным $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\ (A - C)$, где A и C — главные центральные моменты инерции цилиндра.

Ответ. Давления N_1 и N_2 имеют одинаковую величину $P\frac{\omega^2\sin 2\alpha}{2gh}\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right)$ и противоположны по направлению.

853. Вычислить давления в подшипниках A и B при вращении вокруг оси AB однородного тонкого круглого диска CD паровой турбины, предполагая, что ось AB проходит через центр O диска, но вследствие неправильного рассверливания втулки составляет с перпендикуляром к плоскости диска угол $AOE = \alpha = 0{,}02$ радиана. Дано: вес диска 3,27 *кг*, радиус его 20 *см*; угловая скорость 30 000 об/мин.; расстояния $AO = 50$ *см*, $OB = 30$ *см*; ось AB рассматриваем как абсолютно твердую и принимаем $\sin 2\alpha = 2\alpha$.



Ответ. Давления от веса диска: 1,23 *кг* на подшипник A, 2,04 *кг* на подшипник B; давления на подшипники, вызываемые вращением диска, имеют одинаковую величину 822 *кг* и противоположные направления.



854. Колесо радиуса a и веса $2p$ вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1; ось AB вращается вокруг вертикальной оси CD, проходящей через центр колеса, с постоянной угловой скоростью ω_2; направления вращений показаны стрелками. Найти давления N_A и

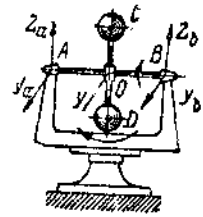
N_B на подшипники A и B, если длина $AO = OB = h$; предполагаем, что масса колеса равномерно распределена по его окружности.

Силы инерции элементов колеса, соответствующие как относительным, так и переносным ускорениям, находятся в равновесии; а силы инерции, соответствующие Кориолисовым ускорениям, дают пары сил; для каждой из них берем горизонтальную составляющую момента, перпендикулярную к оси AB, а затем суммируем; сумма вертикальных составляющих будет равна нулю. Далее применяем начало Даламбера, составляя уравнения равновесия относительно осей: OB, OC и третьей, к ним перпендикулярной.

Более короткое решение как настоящей, так и следующей задачи получаем, принимая во внимание, что, по закону моментов, скорость конца вектора, изображающего главный момент количества движения системы, геометрически равна главному моменту внешних сил.

Отв. $N_A = p\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$; $N_B = p\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$.

855. Вокруг горизонтальной оси AB прибора, описанного в предыдущей задаче, равномерно вращается соединенный с этой осью под прямым углом стержень CD с двумя шарами на концах. Вес каждого шара равен Q; расстояния их центров от оси AB равны между собою: $OC = OD = a$; угловые скорости оси AB и стержня CD соответственно равны ω_1 и ω_2; направления вращений указаны на чертеже стрелками. Пренебрегая весом стержня и считая массы шаров сосредоточенными в их центрах, найти горизонтальные и вертикальные составляющие реакций подшипников A и B.



Отв. $Y_B = -Y_A = -\frac{Qa^2}{gh}\omega_1\omega_2 \sin 2\omega_1 t$;

$Z_B = Q\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right) - \frac{Qa^2}{gh}\omega_1\omega_2 \cos 2\omega_1 t$;

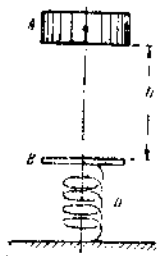
$Z_A = Q\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right) + \frac{Qa^2}{gh}\omega_1\omega_2 \cos 2\omega_1 t$.

17. Удар.

856. Определить отношение масс m_1 и m_2 двух шаров в следующих двух случаях: 1) первый шар находится в покое; происходит центральный удар, после которого второй шар остается в покое; 2) шары встречаются с равными и противоположными скоростями; после центрального удара второй шар остается в покое. Коэффициент восстановления k.

Отв. 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$; 2) $\frac{m_2}{m_1} = 1 + 2k$.

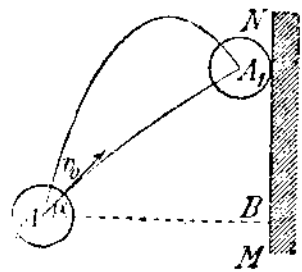
857. Груз A веса P падает без начальной скорости с высоты h на плиту B, укрепленную на пружине, которая имеет коэффициент жесткости c. Найти величину s сжатия пружины после удара: 1) без учета веса плиты B и 2) с учетом веса p плиты B и в предположении, что коэффициент восстановления равен нулю.



Ответ. 1) $s = \frac{P}{c} \pm \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h\frac{P}{c}}$;

2) $s = \frac{P}{c} \pm \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h\frac{P}{c}\frac{P}{P+p}}$.

858. Шар радиуса $r = 5$ *см*, центр которого находится на расстоянии AB от вертикальной стены MN, бросают со скоростью $v_0 = 8{,}4$ *м/сек* под углом $\alpha = 45°$ к горизонту; после удара о стену шар возвращается в начальное положение.

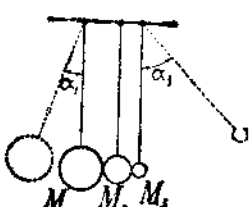


Определить расстояние AB, считая коэффициент восстановления при ударе k равным 0,5.

Сопротивлением воздуха и трением шара о стену пренебрегаем; $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Ответ. $AB = \frac{k}{g(1+k)} v_0^2 \sin 2\alpha + r = 2{,}45$ *м*.

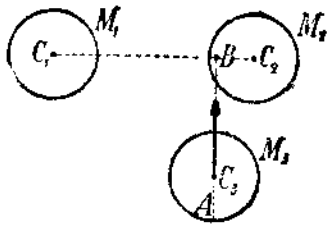
859. Три шара из слоновой кости M_1, M_2 и M_3 подвешены на нитях так, что расстояния их центров от точек привеса, лежащих на одной горизонтальной прямой, равны между собою и шары касаются друг друга; радиусы шаров относятся как 3 : 2 : 1. Шар M_1 отклонен на угол α_1 и затем пущен без начальной скорости. Определить: 1) на какой угол α_3 отклонится шар M_3; 2) какой должен быть угол α_1, для того чтобы шар M_3 после отклонения опускался по той же дуге, по которой он поднимался; коэффициент восстановления $k = 0{,}9$.



Ответ. 1) $\sin\frac{\alpha_3}{2} = 2{,}47 \sin\frac{\alpha_1}{2}$;

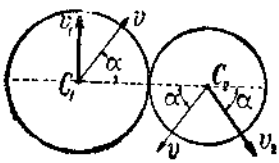
2) $\sin\frac{\alpha_1}{2} < 0{,}286$; $\alpha_1 < 33°20'$.

860. Имеются три одинаковых шара M_1, M_2, M_3 радиуса R, расстояние центров $C_1C_2 = a$. Определить: на какой прямой AB, перпендикулярной к линии C_1C_2, должен находиться центр третьего шара C_3, для того чтобы, получив некоторую скорость по направлению AB, этот шар после удара о шар M_2 нанес центральный удар шару M_1; шары предполагаются вполне упругими.



Ответ. Расстояние прямой AB от центра C_2: $BC_2 = \frac{4R^2}{a}$.

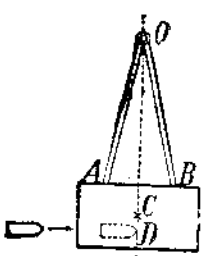
861. Два шара движутся с равными и параллельными скоростями v в противоположные стороны; в момент встречи их скорости составляют угол α с линией центров. Определить скорости шаров v_1 и v_2 после удара в том случае, когда масса первого шара вдвое больше массы второго шара и коэффициент восстановления равен 0,5.



Ответ. Скорость первого шара v_1 равна $v \sin\alpha$ и перпендикулярна к линии центров; скорость второго шара v_2 равна v и составляет угол α с линией центров и угол $\pi - 2\alpha$ с направлением скорости v.

862. Маятник ударной машины состоит из стального диска A радиуса 10 *см* и толщины 5 *см* и из стального круглого стержня B диаметра 2 *см* и длины 90 *см*. На каком расстоянии l от горизонтальной плоскости, в которой лежит ось вращения O, должен быть помещен разбиваемый машиной брусок C, чтобы ось не испытывала удара, если направление удара будем считать горизонтальным.

Ответ. $l = 97{,}5$ *см*.



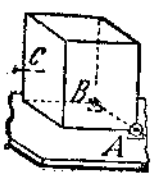
863. Баллистический маятник, употребляющийся для определения скорости снаряда, состоит из цилиндра AB, подвешенного к горизонтальной оси O; цилиндр открыт с одного конца A и наполнен песком; снаряд, влетающий в цилиндр, производит вращение маятника вокруг оси O на некоторый угол. Дано: M — масса маятника, h — расстояние его центра тя-

жести от оси $OC = h$, ρ — плечо инерции относительно оси O; m — масса снаряда, a — расстояние от оси: $OD = a$; α — угол отклонения маятника. Определить скорость снаряда v, предполагая, что ось O маятника не испытывает удара: $ah = \rho^2$.

Выражаем, что момент количества движения системы, состоящей из маятника и снаряда, не изменяется при ударе, а затем применяем закон живой силы.

Отв. $v = \dfrac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

864. Однородная призма с квадратным основанием стоит на горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг ребра AB, лежащего в этой плоскости. Ребро основания призмы равно a, высота ее $3a$, масса $3m$. В середину C боковой грани, противолежащей ребру AB, ударяет шар массы m с горизонтальной скоростью v. Предполагая, что удар не упругий и что масса шара сосредоточена в его центре, который после удара остается в точке C, определить наименьшую величину скорости v, при которой призма опрокинется.



Для определения угловой скорости вращения призмы около ребра AB приравниваем выражения момента количества движения системы, состоящей из шара и призмы, до и после удара; затем применяем закон живой силы; опрокидывание произойдет тогда, когда центр тяжести призмы перейдет через возможное для него наивысшее положение.

Отв. $v = \dfrac{1}{3}\sqrt{53ga}$.

865. Паровой молот весом $12\,m$ падает на наковальню, вес которой вместе с отковываемым куском железа равен $250\,m$, со скоростью 5 *м/сек*. Найти работу R_1, поглощаемую отковываемым куском, и работу R_2, потерянную на сотрясение фундамента, а также вычислить коэффициент η полезного действия молота.

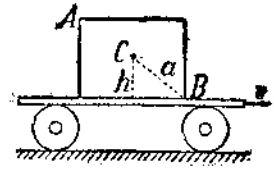
Отв. $R_1 = 14\,600$ *кг·м* $= 143$ *кдж*;
$R_2 = 700$ *кг·м* $= 6{,}86$ *кдж*;
$\eta = 0{,}95$.

866. Два шкива вращаются в одной плоскости вокруг своих осей с угловыми скоростями $\omega_{1,0}$ и $\omega_{2,0}$. Определить угловые скорости шкивов ω_1 и ω_2, после того как на них будет накинут ремень, считая шкивы круглыми дисками одинаковой плотности радиусов R_1 и R_2 и пренебрегая скольжением ремня.

Применяем теорему Карно.

Отв. $\omega_1 = \dfrac{R_1^3\omega_{1,0} + R_2^3\omega_{2,0}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}$; $\omega_2 = \dfrac{R_1^3\omega_{1,0} + R_2^3\omega_{2,0}}{R_2(R_1^2 + R)_2^2}$.

867. Платформа с помещенным на ней призматическим грузом AB катится по горизонтальным рельсам со скоростью v. На платформе у ребра B груза имеется выступ, который не позволяет грузу скользить по платформе вперед, но не препятствует вращению его около ребра B. Дано: вес груза p, высота h его центра тяжести над платформой, расстояние $CB = a$, и плечо инерции груза относительно ребра B равно ρ. Определить угловую скорость ω вращения груза около ребра B в момент мгновенной остановки платформы.



Применяем теорему Карно; при этом потерянная скорость какого-либо элемента груза, расстояние которого от ребра B будет r, а от платформы y равна $\sqrt{v^2 + r^2\omega^2 - 2yv\omega}$; поэтому для всего груза живая сила потерянных скоростей будет:

$$\frac{p}{2g}(v^2 + \rho^2\omega^2 - 2hv\omega).$$

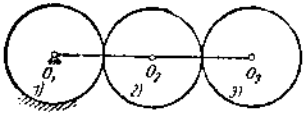
Ответ. $\omega = \frac{hv}{\rho^2}$.

868. Полагая, при условиях предыдущей задачи, что груз есть однородная прямая четыреугольная призма, длина которой вдоль платформы равна 4 *м*, а высота 3 *м*, найти, при какой скорости v произойдет опрокидывание груза.

Ответ. $v = \frac{\rho}{h}\sqrt{2g(a-h)} = 30{,}67$ *км/час*.

18. Уравнения Лагранжа

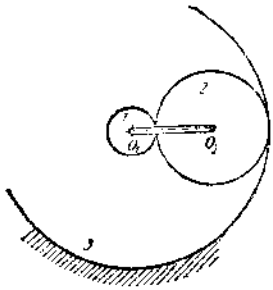
869. В планетарном механизме колесо *1* неподвижно; к рукоятке приложен вращающий момент L; механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти движение системы, считая колеса однородными дисками одинаковой массы m и радиусов r и пренебрегая массой рукоятки.



Ответ. Угловое ускорение рукоятки равно $\frac{L}{22mr^2}$.

870. В зацеплении, показанном на чертеже, колесо *2*, приводимое в движение рукояткой O_1O_2, катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного колеса *3* и приводит во

вращение вокруг неподвижной оси O_1 колеса *1*. Известно, что колесо *1* вращается в 10 раз быстрее рукоятки. Считая колеса однородными дисками одинаковой толщины и из одного и того же материала, найти движение системы в предположении, что к колесу *1* приложен постоянный момент сопротивления L_1, а к рукоятке постоянный вращающий момент L; механизм расположен в горизонтальной плоскости; массой рукоятки пренебречь.

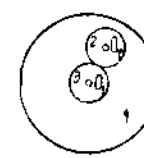


Ответ. Угловое ускорение рукоятки равно

$$\frac{L-10L_1}{1300J_1},$$

где J_1 — момент инерции колеса *1* относительно его оси вращения O_1.

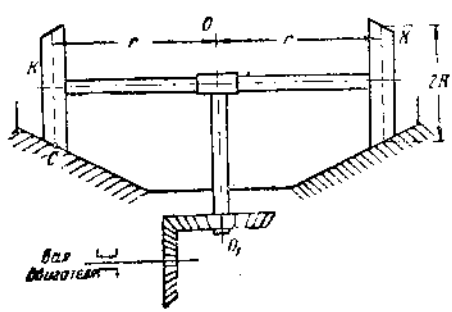
871. Маховик *1*, вращающийся вокруг вертикальной оси O_1 под действием прилагаемого к нему постоянного момента L, несет ось вращения O_2 шестерни *2*. Шестерня *2* находится в сцеплении с шестерней *3*, могущей вращаться вокруг оси O_1 независимо от маховика. Вращению шестерни *3* препятствует не показанная на рисунке спиральная пружина, реактивный момент которой $-c\psi$ пропорционален углу поворота ψ шестерни *3*. Определить движение системы, принимая шестерни за однородные диски одинаковых радиусов a и массы m и считая момент инерции маховика относительно оси O_1 равным $20\,ma^2$. В начальный момент система находилась в покое.



Ответ. $\psi = \frac{L}{26c}\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,1{,}02\,t\right)$;

$$\varphi = \frac{Lt^2}{52\,ma^2} + \frac{1}{676}\frac{L}{c}\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,1{,}02\,t\right),$$

где φ — угол поворота маховика.



872. Бегуны K, K приводятся в движение от вала двигателя при помощи передачи, схема которой показана на чертеже. Вес одного бегуна равен $3m$, средний радиус $R=1$ *м*; радиус вращения $r=0{,}5$ *м*. Считаем, что мгновенная

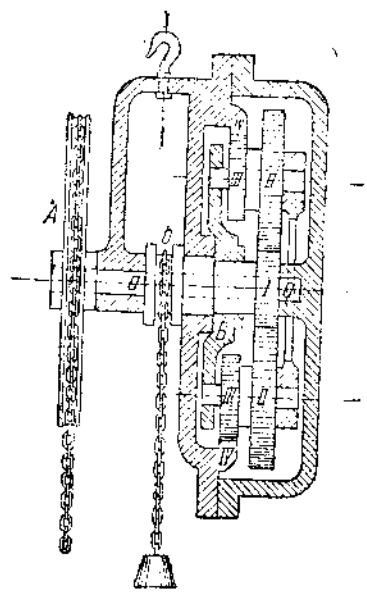
ось вращения бегуна проходит через среднюю точку C обода. Отношение радиусов колес конической передачи от двигателя K вертикальному валу O_1O равно $\frac{2}{3}$. Бегун считаем однородным диском радиуса R и пренебрегаем массой всех движущихся частей по сравнению с массой бегунов. Вычислить, какой постоянный вращающий момент должен быть приложен на валу двигателя, чтобы сообщить вертикальной оси O_1O угловую скорость 120 об/мин. по истечении 10 сек. от момента пуска двигателя; силами сопротивления пренебречь.

Отв. 320 *кг·м*.

873. Найти ускорение тележки, по платформе которой катится без скольжения круглый цилиндр, если сама тележка скатывается тоже без скольжения по плоскости, наклоненной к горизонту под углом α и параллельной платформе тележки; образующие цилиндра перпендикулярны линиям наибольшего ската платформы. Масса тележки без колес M, масса всех колес m, масса цилиндра M_1; колеса считать однородными сплошными дисками.

Отв. $w = \frac{6M + 6m + 2M_1}{6M + 9m + 2M_1} g \sin \alpha$.

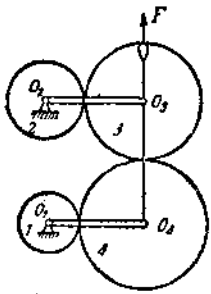
874. На чертеже изображена схема передачи в блоке системы „Триплекс". Цепной блок A и шестерня I жестко насажены на вал $a - a$; на этом же валу вольно сидит блок b с подъемной цепью, при помощи которой поднимают груз веса W. Со втулкой блока b наглухо соединена рукоятка B, на пальцах которой симметрично установлены два одинаковых двойных сателлита $II - III$, причем шестерня III сателлита катится без скольжения по неподвижной зубчатке IV (внутреннее зацепление), а шестерня II сцеплена с зубчаткой I. Для подъема груза W к цепи блока A прикладывается сила $F = \frac{W}{90}$. Требуется, пренебрегая силами трения и весом канатов, найти ускорение груза W при следующих данных: радиусы колес I, III, II от-



носятся как 1 : 2 : 3, момент инерции вала и заклиненных на нем шестерен A и I равен J_1, момент инерции системы шестерен II, III относительно оси, проходящей через их центр, равен J_2, система дает стократный выигрыш в силе, радиус блока A равен r. Шестерни II и III рассматриваются как однородные диски одинаковой толщины и плотности. Массами рукоятки и блока b можно пренебречь.

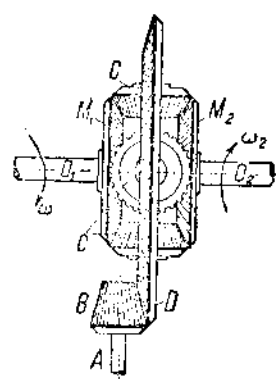
Ответ. $\dfrac{0{,}001\, r^2 F}{J_1 + 0{,}1658\, J_2 + 0{,}0001\, \dfrac{W}{g} r^2}$.

875. Показанный на чертеже эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из трех рукояток O_1O_4, O_4O_3, O_3O_2 и четырех зубчатых колес $1, 2, 3, 4$ соответственно с радиусами $r_1 = 50$ *мм*, $r_2 = 80$ *мм*, $r_3 = 120$ *мм*, $r_4 = 150$ *мм*; $\overline{O_1O_2} = \overline{O_3O_4} = 270$ *мм*, $\overline{O_1O_4} = \overline{O_2O_3} = 200$ *мм*. Колесо 1 неподвижно. Считая колеса однородными дисками одинаковой толщины и из одного и того же материала и пренебрегая массой рукояток и силами трения, вычислить, какое усилие F (считая его постоянным и направленным вдоль O_4O_3) надо приложить к рукоятке O_3O_4, чтобы в течение 1 сек. повернуть рукоятку O_2O_3 на угол 30°, если в начальный момент система была неподвижной и $\sphericalangle O_2O_3O_4 = 90°$; вес подвижных колес равен 30 *кг*.



Ответ. $F = 0{,}48 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} \right]^2 кг = 1{,}03\ кг$.

876. В дифференциальном регуляторе, изображенном на чертеже, валы O_1 и O_2, вращающиеся в противоположные стороны с угловыми скоростями ω_1 и ω_2, снабжены зубчатками M_1 и M_2 и при помощи сателлитов C сцеплены с шестерней D, играющей роль рукоятки сателлитов. Если ω_1 равно ω_2, то шестерня D остается неподвижной. В противном случае D начнет вращаться и через вал A приведет в действие не показанное на чертеже регулирующее приспособление; последнее создает при этом передаваемые валами O_1 и O_2 моменты, причем опережающий вал будет тормо-



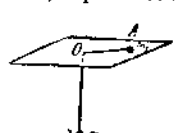
зиться, а отстающий увеличивать свою угловую скорость. Считая эти моменты пропорциональными угловой скорости шестерни (коэффициент пропорциональности обозначается через n) и одинаковыми по величине для того и другого вала и обозначая через J приведенный к оси O_1O_2 момент инерции системы, найти закон изменения угловых скоростей ω_1 и ω_2, если их начальные значения ω_{10} и ω_{20} не равны друг другу. Моменты инерции J_1 и J_2 валов O_1 и O_2 с шестернями M_1 и M_2 считаем равными друг другу; приведенный к оси вращения шестерни D момент инерции этой шестерни и приводимых ею через вал A в движение частей механизма обозначаем через J_D; при решении задачи вводится еще в рассмотрение момент инерции J_c сателлитов относительно оси их собственного вращения (эта величина не фигурирует в окончательном результате). Под приведенным к оси вала моментом инерции системы понимается сумма $J = 2J_1 + J_D + 4J_c'$, где J_c' момент инерции одного сателлита относительно оси O_1O_2.

Ответ. $$\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1 + e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1 - e^{-\lambda t}),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1 + e^{-\lambda t}).$$

$$\lambda = \frac{2n}{J}.$$

877. К концам нити A и B, пропущенной через отверстие O, сделанное в гладкой горизонтальной плоскости стола, присоединены две точечных массы m_1 и m_2. Первая масса все время остается на поверхности стола, тогда как вторая двигается по вертикали, проходящей через точку O. В начальный момент $OA = r_0$, масса m_2 не имеет скорости, тогда как скорость v_0 массы m_1 направлена перпендикулярно начальному положению участка нити OA. Доказать, что при этом условии масса m_2 будет совершать колебательное движение, найти размах a этого колебания и дать выражение для его периода T. Считаем нить невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой.



Ответ.

$$a = |r_0 - r_1|, \quad T = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)}{m_2 g}} \left| \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_0 - r)(r - r_1)(r + r_2)}} \right|,$$

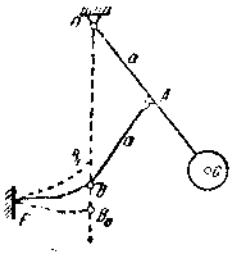
где

$$r_1 = \sqrt{\frac{m_1 v_0^2}{4gm_2}\left(2r_0 + \frac{m_1 v_0^2}{4gm_2}\right)} + \frac{m_1 v_0^2}{4gm_2},$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{m_1 v_0^2}{4gm_2}\left(2r_0 + \frac{m_1 v_0^2}{4gm_2}\right)} - \frac{m_1 v_0^2}{4gm_2}.$$

19. Малые колебания системы

878. Стержень OA маятника при помощи шатуна AB соединен с маленькой стальной рессорой EB жесткости c. В натуральном состоянии рессора занимает положение EB_1; известно, что к рессоре нужно приложить силу F_0, чтобы привести ее в положение EB_0, соответствующее равновесию маятника $OA = AB = a$; массой стержней пренебрегаем; расстояние центра тяжести маятника от оси вращения $OG = l$, вес маятника Q. С целью достижения наилучшего изохронизма (независимость периода колебаний от угла первоначального отклонения) система отрегулирована так, что в уравнении движения маятника



$$\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\varphi + \ldots$$

первый из отброшенных членов будет порядка φ^5. Установить, какая зависимость должна для этого иметь место между постоянными Q, F_0, c, a, l и вычислить период малых колебаний маятника.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2aF_0}{Ql}}}$, $Ql - 2aF_0 = 12a^2c$.

879. Проверить, что при условии предыдущей задачи увеличение периода колебаний при отклонениях маятника от положения равновесия на угол $\varphi_0 = 45°$ не превосходит $0{,}4\%$. Каково будет при этих условиях изменение периода простого маятника?

Ответ. Сохраняя в уравнении движения маятника член φ^5, получим

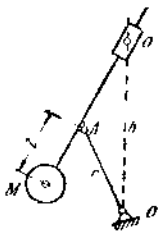
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2aF_0}{Ql}}}\left(1 + \frac{\varphi_0^4}{96}\right);$$

для простого маятника при отклонении на угол 45° изменение периода составляет 4%.

880. В условиях задачи 878 маятник отрегулирован так, что $Ql = 2aF_0$. Найти период малых колебаний маятника при отклонении его от положения равновесия на угол φ_0.

Ответ. $T = 5{,}24 \dfrac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\dfrac{Q}{cg}}$.

881. В маятнике паллографа Шлика груз M маятника подвешен на стержне, свободно проходящем через вращающийся цилиндрик, O и шарнирно соединенном в точке A с коромыслом AO_1, качающимся вокруг неподвижной оси O_1. При каком условии вертикальное положение стержня OM маятника будет положением устойчивого равновесия?

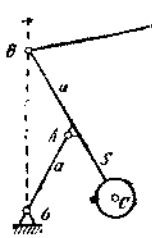


Найти период малых колебаний маятника около этого положения.

Ответ. $h = r + \sqrt{rl}$;

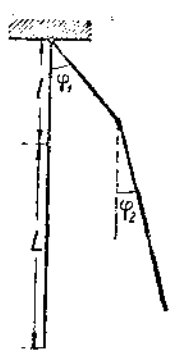
$$T = 2\pi(h - r + l)\sqrt{\frac{1}{rl - (h-r)^2}\cdot\frac{r}{g}}.$$

882. Пренебрегая массой стержней, найти период малых колебаний маятника, изображенного на чертеже. Центр тяжести груза находится на шатуне прямолинейно направляющего механизма Эванса. В положении равновесия стержни OA и BC вертикальны, O_1B горизонтален; $OA = AB = a$, $AC = s$.



Ответ. $T = 2\pi\cdot\dfrac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$.

883. Однородный стержень длины L подвешен при помощи нити длины $l = 0{,}5L$ к неподвижной точке. Пренебрегая массой нити, определить частоты главных колебаний системы и найти отношения отклонений стержня и нити от вертикали при первом и втором главных колебаниях.



Ответ. $k_1 = 0{,}677\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, $k_2 = 2{,}558\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

В первом главном колебании $\varphi_1 = 0{,}847\,\varphi_2$, во втором — $\varphi_1 = -1{,}180\,\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — углы, составляемые нитью и стержнем с вертикалью.

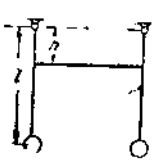
884. Принимая в предыдущей задаче, что длина нити весьма велика по сравнению с длиной стержня и пренебрегая квадратом отношения $\frac{L}{l}$, определить отношение низшей частоты свободных колебаний системы к частоте колебаний математического маятника длины l.

Ответ. $1 - \frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

885. Считая в задаче 883, что длина нити весьма мала по сравнению с длиной стержня и пренебрегая квадратами отношения $\frac{l}{L}$, определить отношение низшей частоты свободных колебаний системы к частоте колебаний физического маятника, который получится, если ось вращения поместить в конце стержня.

Ответ. $1 - \frac{9}{16}\frac{l}{L}$.

886. Два одинаковых маятника длины l соединены на уровне h горизонтальным твердым стержнем пренебрежимо малой массы.



Определить малые колебания системы в плоскости равновесного положения нитей, после того как одному из маятников сообщено отклонение на угол α от положения равновесия.

Ответ. $\varphi_1 = \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \cos \frac{k_2 - k_1}{2} t$,

$$\varphi_2 = \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t,$$

где φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятника от вертикали, $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l-h}}$; движение стержня определяется уравнением

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\alpha}{2} \cos k_1 t,$$

где φ — угол отклонения от вертикали верхней части нити.

887. Платформа тележки опирается в точках A и B на две рессоры одинаковой жесткости c; расстояние между осями рессор $\overline{AB} = l$; центр тяжести платформы C расположен на прямой AB,

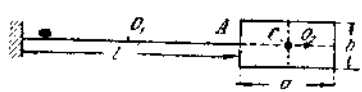
являющейся осью симметрии платформы, на расстоянии $AC = \frac{l}{3}$ от точки A. Радиус инерции платформы относительно оси, проходящей через ее центр тяжести перпендикулярно прямой AB и лежащей в плоскости платформы, принять равным $0{,}2\ l$; вес платформы равен Q. Найти малые колебания платформы, возникающие под действием удара, приложенного в центре тяжести платформы, перпендикулярно к ее плоскости. Импульс удара равен S.

Ответ. Пусть z будет вертикальное смещение центра тяжести платформы, φ — угол поворота ее вокруг оси, указанной в условии задачи (та и другая координата отсчитываются от положения равновесия центра тяжести платформы); найдем:

$$z = \sqrt{\frac{g}{cQ}}\, S\left(0{,}738 \sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + 0{,}00496 \sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t\right),$$

$$l\varphi = \sqrt{\frac{g}{cQ}}\, S\left(0{,}509 \sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t - 0{,}180 \sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t\right).$$

888. Однородная прямоугольная пластинка массы m закреплена в конце A балочки длины l, другой конец которой заделан неподвижно. Система находится в горизонтальной плоскости и совершает в этой плоскости свободные колебания около положения равновесия. Определить частоты и формы этих колебаний. Размеры пластинки $a = 0{,}2\ l$, $b = 0{,}1\ l$. Массой балочки пренебрегаем.



Указание. Сила Q и момент M, которые должны быть приложены к концу A балочки, чтобы создать в этой точке прогиб f и поворот касательной к изогнутой оси балки φ, определяются формулами

$$f = pQ + sM,$$

$$\varphi = sQ + qM,$$

причем в рассматриваемом случае однородной балки, заделанной одним концом,

$$p = \frac{l^3}{3EJ}, \quad q = \frac{l}{EJ}, \quad s = \frac{l^2}{2EJ}.$$

Ответ. Частоты главных колебаний равны соответственно $0{,}804\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$, $20{,}7\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$; первое главное колебание можно рассматривать как колебание поворота вокруг точки O_1, расположен-

ной на оси балки слева от точки A на расстоянии $O_1A = 0{,}612\,l$; второе — вокруг точки O_2, расположенной на продолжении оси балки на расстоянии $\overline{O_2A} = 0{,}10561\,l$ справа от точки A.

889. Горизонтальный однородный стержень AB длины $2a$ подвешен при помощи двух одинаковых вертикальных нитей длины l, привязанных к его концам. К стержню AB подвешен стержень CD той же длины и массы при помощи двух нитей AC и BD, длина которых также равна l. Система совершает малые колебания поворота вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести стержней. Определить частоты и формы главных колебаний.

Ответ. Частоты главных колебаний равны $1{,}326\sqrt{\frac{g}{l}}$ и $3{,}200\sqrt{\frac{g}{l}}$; в первом главном колебании оба стержня поворачиваются в одну сторону, причем отношение угла поворота верхнего стержня к углу поворота нижнего равно 0,414; во втором главном колебании стержни поворачиваются в противоположные стороны и указанное отношение равно — 2,414.

890. Составить уравнения движения математического маятника массы m, подвешенного на упругой нити; длина нити в положении равновесия l_0, ее жесткость при удлинении c.

Ответ. Если φ угол отклонения маятника от вертикали, z относительное удлинение нити, то уравнения движения будут

$$(1+z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + \frac{g}{l_0}\sin\varphi = 0,$$

$$\ddot{z} - (1+z)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}z + \frac{g}{l_0}(1-\cos\varphi) = 0.$$

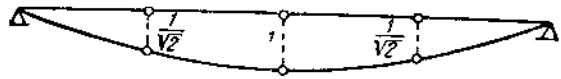
891. Найти движение маятника в предыдущей задаче для случая весьма малых колебаний.

Ответ. $z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha\right)$,

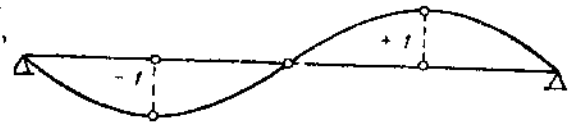
$$\varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l_0}}\,t + \beta\right).$$

892. Найти частоты и формы главных колебаний системы трех одинаковых масс m, закрепленных на балке на одинаковых рас-

стояниях друг от друга и от опор. Балку считаем свободно положенной на опоры, имеющей длину l, момент инерции поперечного сечения J, модуль Юнга материала балки обозначаем буквой E. Массой балки пренебрегаем.



Отв. $k_1 = 493\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$,



$k_2 = 19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$,

$k_3 = 41{,}61\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$.

Формы главных колебаний показаны на чертеже.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие к десятому изданию 3
Предисловие к двенадцатому изданию 4

Отдел первый. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

I. Статика на плоскости.

1. Силы, действующие по одной прямой 5
2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке . . 6
3. Силы параллельные и пары сил 17
4. Силы, как угодно расположенные в плоскости 22
5. Смешанные задачи 32
6. Общий отдел статики на плоскости 36
7. Графическая статика 44

II. Статика в пространстве.

8. Силы, приложенные в одной точке 54
9. Приведение системы сил к простейшему виду 61
10. Равновесие сил, приложенных к твердому телу. Определение реакций 64
11. Центр тяжести 74

Отдел второй. КИНЕМАТИКА.

I. Движение точки.

1. Траектория и уравнения движения точки 79
2. Скорость движения точки 85
3. Ускорение движения точки 89

Стр.

II. **Простейшие движения твердого тела.**

4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 97
5. Преобразование простейших движений твердого тела 101

III. **Сложение и разложение движений точки.**

6. Уравнения движения и траектория сложного движения точки . 106
7. Сложение скоростей точки 113
8. Сложение ускорений точки при переносном поступательном движении 118
9. Сложение ускорений точки при переносном вращательном движении вокруг неподвижной оси 122

IV. **Плоское движение твердого тела.**

10. Уравнения движения плоской фигуры и ее точек 129
11. Центр вращения и центроиды плоской фигуры 132
12. Скорости точек плоской фигуры 135
13. Ускорения точек плоской фигуры 146
14. План скоростей и ускорений точек плоской фигуры 151
15. Сложение движений плоской фигуры 153

V. **Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки.**

16. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки 160
17. Сложение вращений твердого тела, происходящих вокруг пересекающихся осей 163

Отдел третий. ДИНАМИКА

I. **Динамика материальной точки.**

1. Начало Даламбера 171
2. Дифференциальные уравнения движения 173
3. Работа и мощность 182
4. Закон живой силы 184
5. Закон количества движения и закон моментов. Движение под действием центральных сил 189
6. Смешанные задачи 192
7. Колебательное движение 199
8. Относительное движение 205

II. **Динамика материальной системы.** 21095

9. Начало Даламбера 208
10. Начало возможных перемещений 215
11. Закон живой силы 220
12. Закон движения центра инерции 226
13. Закон количеств движения 230
14. Закон моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси 233
15. Плоское движение твердого тела. Смешанные задачи 242
16. Давление вращающегося тела на ось 247
17. Удар 249
18. Уравнения Лагранжа 253
19. Малые колебания системы 258

Список опечаток

№№ задач	Строка сверху	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
251	2	обхода	обода	ред.
313	7	$v_1 = 981$ *м/сек*	$v_1 = 9{,}81$ *м/сек²*	»
379		На чертеже около точки касания поставить букву M		тип.
430	11	$w_{\tau} = 114{,}5$ *м/сек²*	$w_{\tau} = -114{,}5$ *м/сек²*	ред.
447	5	$w_r = 3{,}86 \cdot 10^{-7}$ *см/сек²*	$= 386 \cdot 10^{-7}$ *см/сек²*	»
455	8	VII	II	тип.
565	9	$x' = -12$ *см/сек*	$x' = -12$ *м/сек*	ред.
[illegible]	10	$v = 12{,}65$ *см/сек*	$v = 12{,}65$ *м/сек*	»
715	2	такую	тонкую	»

Зак. № 2439.