

53
178

Депозитарий

Г. А. ЛОРЕНЦ

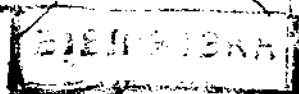
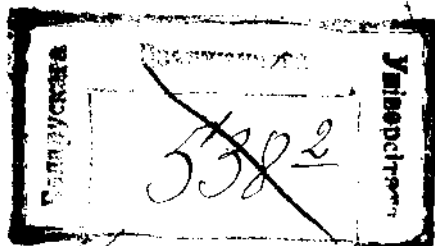
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пров. 1965

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
К. Ф. ТЕОДОРЧИК



Зр. 25 к.
1392398



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ПРОСМОТРЕНО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

T 45-5-2(4)

Vorlesungen über theoretische Physik
an der Universität Leiden

von
Prof. Dr. H. A. LORENZ

Band V

DIE MAXWELLSCHE THEORIE

(1900—1902)

Bearbeitet
von
Dr. K. BREMEKAMP

Leipzig — 1931

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА.

Выпускаемая книга представляет перевод V тома лекций по теоретической физике, читанных Г. А. Лорентцом в 1900—1902 гг. Том этот содержит изложение основ только классической максвелловской теории; молекулярно-кинетические и электронные представления, творцом которых является автор, не входя в круг охватываемых этим курсом вопросов¹.

Это обстоятельство делает настоящую книгу весьма отличной от имеющихся уже на русском языке курсов теории электромагнитного поля², в которых авторы дают более или менее слитное изложение обоих этапов развития учения об электричестве. Несмотря однако на эту односторонность, книга Г. А. Лорентца представляет блестящее введение в круг идей фарадей-максвелловской теории поля и при весьма скромных размерах содержит изложение целого ряда весьма важных вопросов, обычно лишь вскользь затрагиваемых в аналогичных курсах. В качестве примеров укажу на изложение методов электрических изображений и метода инверсии в применении к решению задач электростатики и на систематическое проведение через весь курс теоремы взаимности.

При переводе я старался держаться возможно ближе к тексту подлинника, чтобы с максимальной точностью передать русским читателям мысли автора.

К. Теодорчик.

¹ Издание перевода книги Г. А. Лорентца „Теория электронов“ предполагается Техничко-теоретическим издательством в текущем году.

² И. Е. Тамм, „Основы теории электричества“ или А. А. Эйхен альд, „Теоретическая физика“, т. VI.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие переводчика	3
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ.	
1. Векторы	7
2. Поля	11
3. Теорема Гаусса	14
4. Соленоидальный вектор	20
5. Потенциальный вектор	23
6. Теорема Стокса	27
7. Уравнение Лапласа	28
8. Теорема Грина	30
9. Исследование объемного интеграла $\int \mu(x, y, z) \frac{dS}{r}$	32
10. Уравнение Пуассона	36

Глава I.

ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Электрический ток	40
2. Напряженность магнитного поля	41
3. Магнитное поле замкнутого тока	42
4. Вывод первого уравнения Максвелла	46
5. Намагничивающиеся среды	52
6. Магнитная индукция	55
7. Напряженность электрического поля	57
8. Диэлектрическое смещение	58
9. Второе уравнение Максвелла	59
10. Электродвижущая сила	61
11. Выбор единиц	—
12. Сводка основных уравнений	67

Глава II.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА.

1. Постановка электростатической проблемы	70
2. Примеры	72
3. Теория электрических изображений	80
4. Метод инверсии	84
5. Энергия электрического поля	90
6. Теоремы о минимуме энергии	91
7. Пондеромоторные силы	94

8. Случай нескольких диэлектриков	96
9. Пондеромоторные силы, действующие на диэлектрики	100
10. Произвольные системы проводников	102
11. Заряды на изоляторах	104

Глава III.

ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ.

1. Введение	106
2. Закон Ома	108
3. Электрическое поле, существующее вокруг цепи тока	110
4. Законы Кирхгофа	111
5. Выделение тепла электрическим током	114
6. Энергетические процессы в электрической цепи	119
7. Токи в массивных проводниках	121

Глава IV.

ИНДУКЦИОННЫЕ ТОКИ.

1. Самоиндукция	127
2. Случай, когда электродвижущие силы — произвольные функции времени	130
3. Взаиминдукция	131
4. Случай многих цепей	135
5. Явления, обуславливаемые экстратоками	136
6. Цепи, содержащие конденсатор	139
7. Цепь с емкостью и электродвижущей силой	141
8. Две связанные цепи	144
9. Влияние толщины проводника на коэффициент самоиндукции	146
10. Вычисление магнитных полей в простых случаях	147
11. Кольцеобразная катушка	150
12. Взаиминдукция между обмотками индуктория	151
13. Индукция в движущихся проводниках	152

Глава V.

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

1. Общее уравнение энергии	155
2. Примеры	157
3. Вектор Пойнтинга	159
4. Простой пример	—

Глава VI.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА.

1. Свободный эфир	163
2. Изотропные диэлектрики	165
3. Отражение и преломление	166

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Векторы. При описании физических явлений мы встретимся с двумя родами величин. Величины первого рода вполне определяются указанием их числового значения в некоторых выбранных для каждой величины единицах, величины второго рода для своего определения требуют указания не только величины, но и направления.

Первые величины называются скалярами, а вторые — векторами. Вектор может быть представлен отрезком прямой определенной длины и определенного направления (стрелка).

Вектор определен по величине и направлению, если даны три его проекции на прямоугольные оси координат. В дальнейшем мы применим правую систему прямоугольных координат, т. е. определяем положительное направление оси Z как поступательное перемещение правого винта при повороте его головки на угол 90° от положительного направления оси X к положительному направлению оси Y . То же определение положительного направления мы применим в дальнейшем для определения относительного расположения положительной нормали к поверхности и положительного обхода по контуру площадки (положительного вращения).

Если буква A означает вектор, то проекции этого вектора на оси X , Y , Z мы будем обозначать буквами A_x , A_y , A_z . Аналогично проекцию этого вектора на любое направление h мы будем обозначать буквой A_h и называть составляющей вектора A по направлению h ¹.

Целый ряд соотношений между векторами может быть написан без разложения векторов на составляющие по осям. При этом каждое соотношение между векторами эквивалентно трем соотношениям между составляющими этих векторов по осям.

Так, при помощи известного правила геометрического сложения векторов мы получаем из многих заданных векторов их геометрическую сумму, или результирующий вектор. Так же как и при сложении чисел, результат не зависит от порядка, в котором производится сложение векторов. Если складываемые векторы имеют одинаковое направление, то векторное сложение переходит в обычное алгебраическое. Но и в общем случае мы говорим о векторном сложении и

¹ В дальнейшем мы примем следующие обозначения: если A_x , A_y , A_z суть проекции вектора A на координатные оси, а i , j , k — единичные векторы (т. е. векторы, по величине равные единице, а по направлению совпадающие с направлением соответственных координатных осей), то мы будем писать: $A_x = (i \cdot A)$; $A_y = (j \cdot A)$; $A_z = (k \cdot A)$. Прим. ред.

обозначаем его знаком $+$. Если обозначить слагаемые векторы буквами A , B и т. д., а результирующий вектор — буквой R , то мы пишем:

$$R = A + B + \dots \quad (1)$$

Это векторное равенство равносильно следующим трем обычным:

$$R_x = A_x + B_x + \dots$$

$$R_y = A_y + B_y + \dots$$

$$R_z = A_z + B_z + \dots$$

Аналогичным образом определяется вычитание векторов как действие, обратное сложению. Отсюда следует, что равенство

$$A - B = C$$

эквивалентно соотношению

$$A = B + C.$$

Произведение двух векторов мы определим двумя способами. При первом определении в результате умножения двух векторов мы получим скалярную величину, при втором — векторную.

Скалярное произведение двух векторов A и B мы обозначим $(A \cdot B)$ и определим его как произведение абсолютных значений этих векторов на косинус угла α , образуемого этими двумя векторами. Очевидно, иначе ту же величину можно определить как произведение абсолютной величины одного из векторов на (положительную или отрицательную) проекцию второго вектора на первый. Если угол между векторами равен 90° , то скалярное произведение этих векторов равно нулю; наоборот, скалярное произведение достигает максимума, если направления векторов совпадают, т. е. $\alpha = 0$. Скалярное произведение легко выражается через составляющие векторов по осям:

$$(A \cdot B) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2)$$

Скалярное произведение коммутативно, т. е.

$$(A \cdot B) = (B \cdot A). \quad (3)$$

Если один из векторов является векторной суммой, то имеет место и закон дистрибутивности:

$$(A \cdot B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C). \quad (4)$$

Векторное произведение двух векторов A и B мы будем изображать символом $[A \cdot B]$. Это — вектор, перпендикулярный к плоскости, определяемой двумя данными векторами, и направленный по поступательному движению правого винта, который, вращаясь, поворачивается кратчайшим путем от вектора A к B . Величина этого вектора численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах, т. е. равна произведению абсолютных величин перемножаемых векторов на синус угла α между ними. Таким образом векторное произведение равно нулю, если перемножаемые векторы совпадают по направлению, и получают максимальное значение, когда перемножаемые векторы

взаимно перпендикулярны. Для векторного произведения коммутативный закон не имеет места, так как согласно определению

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = -[\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}]. \quad (5)$$

Распределительный же (дистрибутивный) закон остается в силе:

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] + [\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}] \quad (6)$$

$$[\mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}] = [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}] + [\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}]. \quad (7)$$

Правильность этих соотношений легко проверить простым геометрическим построением. Применив эти соотношения к произведению $[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = [(A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})]$, мы получим для его составляющих по осям следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При помощи этих соотношений легко проверить правильность следующего преобразования:

$$([\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}]). \quad (9)$$

Такое произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на данных векторах как ребрах.

Из (9) следует, что:

$$(\mathbf{A} \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]) = 0. \quad (10)$$

Это следует также непосредственно из определений произведений векторов.

Из механики известно, что если на твердое тело действует система сил, имеющая общую точку приложения, то она может быть заменена равнодействующей силой. Далее известно, что к такой системе можно прибавить или отнять две равные по величине, но противоположные по направлению силы. Системы сил, получающиеся одна из другой при помощи такой операции, называют эквивалентными. Исходя из вышеуказанного, можно доказать, что любая система сил эквивалентна некоторой равнодействующей и паре сил. Приняв любую точку O за начало координат и рассматривая любую из приложений к телу сил $\mathbf{A}$, мы можем согласно вышесказанному прибавить в точке O две силы: $\mathbf{A}_1$, равную и параллельную $\mathbf{A}$, и $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{A}$, т. е. равную, но антипараллельную $\mathbf{A}$. При этом сила $\mathbf{A}$ будет эквивалентна системе $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, в которой силы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_2$ образуют пару сил. Плечо этой пары r , т. е. перпендикуляр, опущенный из O на $\mathbf{A}$, мы можем считать также вектором. Момент этой пары сил равен векторному произведению:

$$[\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}], \quad (11)$$

в котором под r подразумевается вектор, проведенный из O к любой точке $\mathbf{A}$.

В механике доказывается, что две пары сил с равными моментами эквивалентны и что действие нескольких пар может быть заменено

одной парой сил, момент которой равен геометрической сумме моментов данных пар.

Если мы поступим со всеми силами данной нам системы так, как мы поступили с силой A , то мы придем к эквивалентной системе, состоящей из сил, имеющих общую точку приложения в O и сводящихся поэтому к равнодействующей, и из суммы моментов, которую можно также заменить одной равнодействующей парой сил.

Если мы обозначим составляющие данных сил по координатам буквами X_k, Y_k, Z_k ($k=1, 2, 3 \dots$) и координаты их точек приложения через x_k, y_k, z_k , то составляющие равнодействующей будут:

$$X = \sum X_k, Y = \sum Y_k, Z = \sum Z_k. \quad (12)$$

Составляющие же результирующего момента будут:

$$L = \sum (y_k Z_k - z_k Y_k), M = \sum (z_k X_k - x_k Z_k), N = \sum (x_k Y_k - y_k X_k). \quad (13)$$

Из этих выражений очевидно, что момент результирующей пары сил зависит от выбора начала координатной системы. Если мы перенесем начало координат в точку O' с координатами x_0, y_0, z_0 , то получим составляющие нового момента в виде:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= \sum [(y_k - y_0) Z_k - (z_k - z_0) Y_k] = L - (y_0 Z - z_0 Y), \\ M_0 &= \sum [(z_k - z_0) X_k - (x_k - x_0) Z_k] = M - (z_0 X - x_0 Z), \\ N_0 &= \sum [(x_k - x_0) Y_k - (y_k - y_0) X_k] = N - (x_0 Y - y_0 X). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Таким образом новое значение момента (L_0, M_0, N_0) относительно измененного начала координат равно значению момента относительно старого начала, сложенному с вращающим моментом приложенной в прежнем начале равнодействующей относительно нового начала координат.

Если заданные нам векторы не являются силами, а представляют другие физические величины, то весьма часто говорят о равнодействующей и **результирующем** моменте этих векторов по отношению к данной точке. Во всех этих случаях можно применить равенства (12) и (14). Момент каждого вектора относительно начала координат определяется при этом равенством (11).

Легко показать, что скалярное произведение равнодействующей и **результирующего** момента по отношению к какой-либо точке не зависит от положения этой точки. Из (12) и (14) получаем, что это произведение равно:

$$LX + MY + NZ,$$

откуда непосредственно видно, что оно не зависит от x_0, y_0, z_0 .

Этот результат можно выразить непосредственно при помощи векторного равенства. Обозначим равнодействующую через

$$R = \sum A_k$$

и **результирующий** момент относительно точки O буквой

$$K = \sum [r_k A_k],$$

где $\mathbf{r}_k$ обозначает вектор, проведенный от точки O в точку приложения вектора $\mathbf{A}_k$. Результирующий момент по отношению к точке O' будет:

$$\mathbf{K}_0 = \sum [(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}_k] = \mathbf{K} - \sum [\mathbf{r}_0 \mathbf{A}_k] = \mathbf{K} - [\mathbf{r}_0 \mathbf{R}],$$

где $\mathbf{r}_0$ обозначает вектор OO' . Скалярное произведение равнодействующей и результирующего момента будет, согласно (10):

$$(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}) - ([\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{R}] \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}).$$

Так как и величина равнодействующей не зависит от положения точки O' , то вышеуказанное свойство означает, что проекция результирующего момента на равнодействующую постоянна. Отсюда следует, что результирующий момент достигает минимума, если точка x_0, y_0, z_0 выбрана таким образом, что результирующий момент параллелен равнодействующей. Согласно (14), для этого необходимо и достаточно, чтобы:

$$\frac{L - (v_0 Z - z_0 Y)}{X} = \frac{M - (z_0 X - x_0 Z)}{Y} = \frac{N - (x_0 Y - y_0 X)}{Z}. \quad (15)$$

Если в этих равенствах рассматривать x_0, y_0, z_0 как текущие координаты, то они представляют прямую, называемую осью системы векторов.

§ 2. Поля. В дальнейшем мы часто будем встречаться со скалярными и векторными величинами, которые имеют заданные значения в каждой точке некоторой области. Совокупность этих значений мы называем полем данной величины. Поле может простирается и на все безграничное пространство. Если рассматриваемая величина — вектор, то в общем случае от точки к точке будут изменяться как абсолютная величина, так и направление этого вектора. Данная величина будет повсюду определена, если в случае скалара задана его величина как функция координат точек внутри заданной области, а в случае вектора заданы в той же области его проекции на координатные оси. Такие величины называют „функциями точки“. Рассмотрим теперь величину, называемую производной скалярной величины φ по данному направлению h . Пусть φ_P и $\varphi_{P'}$ — значения величины φ в двух точках P и P' , так расположенных, что $PP' = \Delta h$ имеет направление h . Если предел

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{P'} - \varphi_P}{\Delta h}$$

существует, то его величину называют производной скалара φ в точке P , взятой по направлению h . Очевидно, обычные частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ являются частными случаями таких пространственных производных. Ниже мы часто будем брать пространственные производные и от составляющих вектора по осям, рассматривая их как скалярные величины.

Положим, что в поле скалярной величины φ , определенной либо на некоторой поверхности, либо в некотором объеме, проведена кривая между точками A и B . Пусть эта кривая разложена произвольным

образом на элементы длины Δs . Выберем на каждом элементе произвольным образом точку и умножим значение рассматриваемой величины в этой точке на длину элемента Δs . Таким же образом, как и при обычной интеграции, можно показать, что сумма

$$\sum \varphi \Delta s,$$

распространенная на все элементы рассматриваемого отрезка кривой, приближается к определенному пределу при неограниченном уменьшении длин отрезков Δs и соответственном увеличении их числа (это верно при определенных условиях, которым должны удовлетворять функция φ и кривая AB , причем условия эти такого рода, что во всех физических проблемах они всегда удовлетворены). Этот предел мы называем линейным интегралом функции φ , взятым вдоль рассматриваемой кривой, и обозначаем его символом:

$$\int_A^B \varphi ds.$$

При этом путь, по которому производится интеграция, должен быть еще особо указан.

Аналогично мы вводим линейный интеграл от вектора $\mathbf{A}$. С этим выражением мы особенно часто будем встречаться впоследствии. Мы определим его следующим образом. Пусть мы проходим кривую в определенном направлении, положим от A к B , и для каждого элемента ее длины составляем скалярное произведение вектора $\mathbf{A}$ на вектор, величина которого равна Δs , а направление совпадает с направлением касательной к кривой в данной точке, или, что то же, произведение из Δs на проекцию вектора $\mathbf{A}$ на касательную к кривой в рассматриваемой точке. Такой линейный интеграл мы обозначаем символом

$$\int_A^B \mathbf{A}_s ds,$$

где индекс s обозначает направление элемента кривой, или, что то же, касательной к кривой в данной точке. Очевидно, что этот интеграл меняет знак, если мы будем проходить кривую в обратном направлении. Вводя компоненты вектора по осям, мы можем представить интеграл в виде:

$$\int_A^B \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

или

$$\int_A^B (A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

Очевидно, наше определение пригодно и в том случае, когда путь интеграции образует замкнутую линию.

Аналогичным образом мы определяем интеграл по поверхности. При этом необходимо отличать случай замкнутой поверхности от случая поверхности, опирающейся на заданный контур. Под интегралом по поверхности от скалярной величины φ мы понимаем предел, к которому стремится $\sum \varphi \Delta\sigma$, в которой $\Delta\sigma$ обозначает элемент поверхности, а φ — значение функции в некоторой точке этого элемента. В интегральном исчислении доказывается, что (при известных условиях) эта сумма приближается к определенному пределу, не зависящему от того, каким образом первоначально поверхность разделена на элементы и по какому закону эти элементы стремятся к нулю. Таким же образом мы определим, далее, интеграл по поверхности от вектора $\mathbf{A}$. При этом в качестве интегранта мы возьмем скалярное произведение вектора $\mathbf{A}$ на вектор, величина которого равна поверхности элемента $\Delta\sigma$, а направление совпадает с положительной нормалью к поверхности. Другими словами, подинтегральное выражение равно произведению $\Delta\sigma$ на проекцию вектора $\mathbf{A}$ на направление положительной нормали к поверхности. Этот интеграл по поверхности мы будем изображать так:

$$\int A_n d\sigma.$$

Однако наше определение не однозначно, поскольку мы не определили, что мы будем понимать под положительной нормалью к поверхности. Если поверхность замкнута, то мы легко можем отличить внутреннюю ее поверхность от внешней. При этом под положительной нормалью мы будем понимать нормаль к внешней поверхности.

В случае поверхностей, опирающихся на контур, мы ограничимся рассмотрением таких поверхностей, для которых можно следующим образом различить две их стороны. Если мы будем перемещаться по одной из сторон такой поверхности, то мы не сможем перейти на другую сторону, не перейдя через пограничный контур. Для одной из так различных сторон мы считаем нормаль положительной.

Если мы выберем положительное направление обхода по пограничному контуру, то согласно определению, данному в § 1, этим однозначно определяется направление положительной нормали к поверхности. При этом достаточно определить положительное направление нормали для одного элемента поверхности, так как этим определяется положительная нормаль для всей поверхности. Поэтому, если мы возьмем элемент поверхности, прилегающий к контуру, и выберем положительное направление обхода по контуру, то при достаточной малости элемента этим однозначно определяется направление положительной нормали к выбранному элементу поверхности.

Интеграл по поверхности от вектора очень легко выразить через составляющие этого вектора по осям. Если обозначить углы, образованные вектором $\mathbf{A}$ с осями, через $(\mathbf{A}i)$ и т. д., а соответственные углы для положительной нормали к поверхности через (ni) и т. д., то

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\sigma &= \int A \cos(\mathbf{A}n) d\sigma = \int A \{ \cos(\mathbf{A}i) \cos(ni) + \cos(\mathbf{A}j) \cos(nj) + \\ &+ \cos(\mathbf{A}k) \cos(nk) \} d\sigma = \int \{ A_x \cos(ni) + A_y \cos(nj) + A_z \cos(nk) \} d\sigma. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично может быть определен интеграл по объему. При этом обычно интегрированию подвергается скалярная величина φ . Объемный интеграл от такой величины по объему, ограниченному заданной поверхностью, обычно обозначают знаком:

$$\int \varphi dS,$$

причем, конечно, должен быть указан объем, по которому производится интегрирование. И в этом случае значение интеграла не зависит от выбора элементов объема, по которым производится интегрирование. Ниже мы рассмотрим ряд формул, выражающих зависимость между интегралами по объему и интегралами по поверхности, а также между интегралами поверхностными и линейными.

§ 3. Теорема Гаусса. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{\partial A_x}{\partial x} dS,$$

распространенный по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности σ . Мы положим, что компоненты A непрерывны и конечны внутри этого объема и на поверхности σ и, сверх того, имеют непрерывные и конечные производные внутри указанного объема. Для дальнейшего совершенно не существенно, определены ли значения вектора A вне поверхности и, если да, то каковы эти значения. Поэтому мы не исключаем случаев, при которых компонента A_x испытывает скачок конечной величины при переходе через поверхность.

Представим себе цилиндр, пересекающий нашу поверхность, образующая которого параллельна оси X . Он пересечет плоскость YZ по некоторой замкнутой кривой. Разделим ограниченную этой кривой площадь на весьма малые элементы $d\tau_x$ и построим на этих элементах цилиндры с образующими, параллельными оси X . Рассмотрим, что дает для нашего интеграла объем, ограниченный таким элементарным цилиндром и элементами поверхности σ . Для простоты положим, что наш цилиндр пересекает поверхность σ только два раза. Пусть, перемещаясь по оси X , мы входим внутрь поверхности через элемент $d\tau_1$, содержащий точку P_1 , и выходим через элемент $d\tau_2$, содержащий точку P_2 . Разделим рассматриваемый элементарный цилиндр плоскостями, перпендикулярными к его образующим и отстоящими друг от друга на расстоянии dx , на элементы объема $d\tau_x dx$ и вычислим соответствующую часть рассматриваемого интеграла:

$$d\tau_x \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial A_x}{\partial x} dx = (A_{x_1} - A_{x_2}) d\tau_x;$$

A_{x_1} и A_{x_2} обозначают здесь значения A_x в точках P_2 и P_1 поверхности σ .

Обозначим направления внешней нормали в точке P_2 через $\mathbf{n}_2$, а в точке P_1 через $\mathbf{n}_1$. Так как угол $(\mathbf{n}_1, \mathbf{i})$ тупой, а угол $(\mathbf{n}_2, \mathbf{i})$ острый, то

$$d\tau_x = d\tau_2 \cos(\mathbf{n}_2, \mathbf{i}) = -d\tau_1 \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{i}).$$

Поэтому рассматриваемый элементарный цилиндр приносит к нашему интегралу следующие два члена:

$$A_{x_2} \cos(n_2 i) d\sigma_2 + A_{x_1} \cos(n_1 i) d\sigma_1,$$

отсюда далее следует, что весь объемный интеграл равен интегралу $\int A_x \cos(ni) d\sigma$, распространенному по всей поверхности σ , т. е.:

$$\int \frac{\partial A_x}{\partial x} dS = \int A_x \cos(ni) d\sigma.$$

Совершенно аналогичным образом можно распространить доказанное на случаи, когда некоторые элементарные цилиндры пересекают поверхность не в двух, а в большем числе точек. Таким же образом мы получаем равенства:

$$\int \frac{\partial A_y}{\partial y} dS = \int A_y \cos(nj) d\sigma$$

$$\text{и} \quad \int \frac{\partial A_z}{\partial z} dS = \int A_z \cos(nk) d\sigma.$$

Складывая эти три равенства, получаем:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dS &= \int \{ A_x \cos(ni) + A_y \cos(nj) + A_z \cos(nk) \} d\sigma = \\ &= \int A_n d\sigma. \end{aligned} \quad (16)$$

Это равенство и выражает теорему Гаусса.

Теорема эта имеет важное физическое значение. Пусть, например, вектор $\mathbf{A}$ обозначает произведение скорости течения жидкости $\mathbf{v}$ на ее плотность. Очевидно, в этом случае последний интеграл обозначает массу жидкости, вытекающую в единицу времени через поверхность σ . В самом деле, рассмотрим элемент $d\sigma$, содержащий точку P . Через этот элемент за время dt протечет количество жидкости, которое в начале промежутка dt заключалось в косом цилиндре с основанием $d\sigma$ и образующими, параллельными скорости течения в точке P и равными $\mathbf{v} dt$. Объем этого цилиндра (не принимая во внимание знака) равен $v_n dt d\sigma$, а масса жидкости в нем $\rho v_n dt d\sigma = A_n dt d\sigma$.

Если A_n положительна, то это количество жидкости вытекает через элемент $d\sigma$ наружу, в противном случае — втекает внутрь. Поэтому если мы хотим подсчитать массу жидкости, вытекающую в течение элемента времени dt через поверхность σ , или, точнее, избыток вытекающей массы по сравнению с втекающей, то нам необходимо вычислять интеграл по поверхности

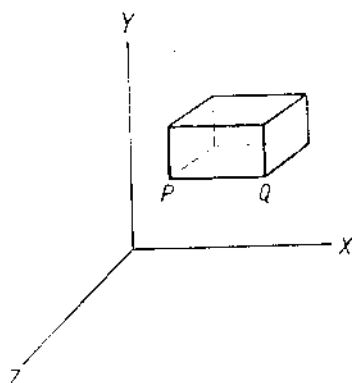
$$dt \int A_n d\sigma.$$

Если жидкость несжимаема, то для каждой замкнутой поверхности σ значение интеграла должно исчезать. Согласно (16) в этом случае

$$\int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dS,$$

распространенный по любому объему, заполняемому рассматриваемой жидкостью, также должен обращаться в нуль. Это возможно только при условии, что для любой точки внутри жидкости

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$



Фиг. 1.

Это последнее утверждение может быть доказано еще следующим образом. Рассмотрим внутри жидкости элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , параллельными координатным осям (фиг. 1), и найдем убыль заключающейся в нем жидкости в течение элемента времени dt .

Если P — точка на левой боковой поверхности параллелепипеда, параллельной YOZ , а Q — точка на соответствующей правой поверхности, то количество жидкости, втекающей слева внутрь параллелепипеда за время dt , будет $A_{xP} dt dy dz$, а количество вытекающей справа будет $A_{xQ} dt dy dz$. Поэтому вследствие течения жидкости через эти грани количество жидкости внутри параллелепипеда уменьшится на

$$(A_{xQ} - A_{xP}) dt dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Аналогичным образом убыль жидкости благодаря ее течению вдоль оси Y и Z выражается через

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz dt$$

и

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Наконец, общая убыль будет:

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \quad (17)$$

При выводе этого выражения мы при подсчете количества жидкости, втекающей, например, через грань $dy dz$, содержащую точку P , не приняли во внимание изменений значения вектора A в различных точках рассматриваемого элемента поверхности. Полученный же нами результат как раз определяется различиями в значении вектора в точках расстояния, между которыми того же порядка величины, что и размеры параллелепипеда. Легко, однако, показать, что поправка, которую мы должны были бы прибавить к нашей формуле, если бы мы приняли во внимание изменения значений A_x в разных точках граней, высшего порядка малости, чем выражение (17). В самом деле, при таком подсчете мы должны были бы поверхность $dy dz$ разделить на меньшие элементы $d\tau$,

подсчитать количество жидкости, втекающее или вытекающее через них, а затем проинтегрировать по всей поверхности грани. Разность таких интегралов дает нам изменение количества жидкости при рассматриваемом течении. Очевидно, мы получим этот результат, если возьмем выражение:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx dt d\tau$$

и проинтегрируем по всей грани, содержащей точку P .

Согласно теореме о среднем значении интеграла, мы можем написать результат интегрирования в форме:

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{P'} dx dy dz dt,$$

где P' обозначает определенную точку боковой поверхности, в общем случае не совпадающую с P . Обозначив $PP' = h$, мы видим, что h того же порядка малости, что и dx, dy, dz . Как известно,

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{P'} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_P + h \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial h \partial x} \right)_{P''},$$

где P'' означает точку, лежащую между точками P и P' .

Для выполнения более точного подсчета мы должны в (17) вместо $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ подставить правую часть написанного равенства и два аналогичных выражения вместо $\frac{\partial A_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial A_z}{\partial z}$. Очевидно, что при этом к вышеприведенному выражению прибавятся только члены, величиной которых благодаря множителю h можно пренебречь по сравнению с остальными.

Выражение

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

называют дивергенцией вектора A и обозначают знаком $\text{div } A$. Из вышеизложенного следует, что в случае течения жидкости, при котором под вектором A мы понимаем произведение ρv , $\text{div } A$ выражает уменьшение массы жидкости, заключающейся в единице объема и происходящее в единицу времени. Если жидкость несжимаема, то во всех точках внутри жидкости

$$\text{div } A = 0. \quad (18)$$

При этом равенство (18) остается в силе и в том случае, если A обозначает не произведение из скорости на плотность, а равно попросту скорости течения.

Дивергенция вектора является скалярной величиной, имеющей в каждой точке поля определенное значение. Для ее вычисления мы применили определенную систему координат. Но из вышеуказанного физического значения, а также непосредственно из равенства (16) следует, что значение дивергенции не зависит от выбора координатной системы.



Легко и простым вычислением показать, что при переходе к новой прямоугольной координатной системе мы получили для $\operatorname{div} \mathbf{A}$ выражение прежнего вида. Это свойство называют инвариантностью по отношению к преобразованию координат.

Из вышесказанного следует, что условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ равносильно условию:

$$\int A_n d\sigma = 0, \quad (19)$$

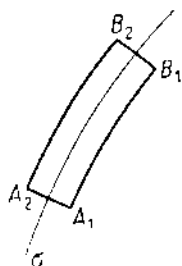
где интеграл распространен по любой замкнутой поверхности.

Однако здесь необходимо рассмотреть еще один вопрос. Выше мы всегда предполагали, что компоненты вектора $\mathbf{A}$ являются непрерывными функциями координат. Однако в физических проблемах весьма часто случается, что рассматриваемые векторные величины имеют различные значения по обеим сторонам некоторой поверхности, служащей, например, поверхностью раздела двух сред. Подобная поверхность является в таком случае поверхностью разрыва непрерывности рассматриваемого вектора, и для ее точек выражение

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

теряет смысл.

Рассмотрим, каким условиям должен удовлетворять вектор скорости течения несжимаемой жидкости $\mathbf{A}$ на границе разрыва непрерывности. Для этого возьмем бесконечно низкий цилиндр с образующими, параллельными нормали к элементу поверхности разрыва $d\sigma$, и основаниями A_1B_1 и A_2B_2 (фиг. 2), расположенными по обеим сторонам от этого элемента.



Фиг. 2.

Площади оснований этого цилиндра мы возьмем настолько малыми, чтобы можно было пренебречь изменениями значений вектора $\mathbf{A}$ в различных точках поверхностей A_1B_1 и A_2B_2 . Несмотря на это, поверхности эти мы будем считать очень большими по сравнению с боковой поверхностью цилиндра.

Из несжимаемости жидкости следует, что общее количество жидкости в рассматриваемом цилиндре остается постоянным, а это значит, что в любой элемент времени столько же жидкости втекает внутрь объема через одну часть его поверхности, сколько вытекает через остальную. Последнее из вышесделанных допущений позволяет нам пренебречь потоком жидкости через боковую поверхность цилиндра по сравнению с потоком через основания. (При этом подразумевается, что вектор $\mathbf{A}$ повсюду остается конечным.) Поток жидкости, втекающей в единицу времени через основание A_1B_1 , может быть выражен произведением:

$$(A_n)_1 d\sigma,$$

где $d\sigma$ обозначает поверхность каждого из оснований A_1B_1 и A_2B_2 , n обозначает направление нормали от B_1 к B_2 , а индекс (1) показывает, что нужно взять значение компоненты A_n на той стороне поверхности

разрыва σ , на которой расположено основание A_1B_1 . Таким же образом мы найдем количество жидкости, вытекающей через основание A_2B_2 , а именно:

$$-(A_n)_2 d\sigma.$$

Сумма этих двух количеств должна быть согласно предыдущему равна нулю, для чего, очевидно, необходимо, чтобы:

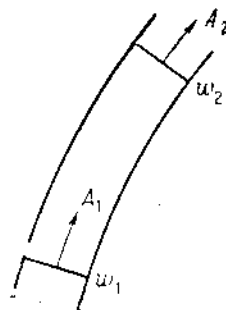
$$(A_n)_1 = (A_n)_2, \quad (20)$$

т. е. нормальная составляющая вектора A должна быть непрерывной и на поверхности разрыва.

Если рассматриваемая жидкость несжимаема, то равенство (19) остается справедливым для любой замкнутой поверхности даже и в том случае, если поверхность эта пересекается поверхностью разрыва вектора A . Обратно, равенство это достаточно для выражения свойства несжимаемости. Во всем объеме, занимаемом такой жидкостью, по обе стороны от поверхностей разрыва остаются в силе прежние наши выводы, т. е. в каждой точке соблюдено равенство (18). В точках же, принадлежащих поверхности разрыва, имеет место соотношение (20). В этом смысле можно утверждать, что (19) равносильно совокупности соотношений (18) и (20).

Рассмотрим теперь построение, которое будет нам во многих случаях полезно для наглядного изображения поля некоторого вектора A . Для этого определим сначала линии направления данного вектора, называемые часто просто векторными линиями. Для этого, начиная от произвольной точки поля, мы перемещаемся на элементарный отрезок длины в направлении рассматриваемого вектора, затем на следующий элементарный отрезок в направлении, которое имеет вектор в конце первого отрезка, и т. д. Описанный нами таким образом путь будет ломаной линией. Предел, к которому стремится эта линия при неограниченном уменьшении элементарных отрезков, есть кривая, имеющая ту особенность, что значение вектора в любой ее точке имеет направление касательной к этой кривой. Такие кривые мы будем называть векторными линиями. В частных случаях, в зависимости от значения рассматриваемого вектора, они получают названия силовых линий, линии смещения, линии тока и т. п.

Возьмем теперь в поле маленькую замкнутую кривую и представим себе, что через каждую ее точку проведена векторная линия. Совокупность таких линий образует трубообразную поверхность, которую мы вообще будем называть векторной трубкой, в частных же случаях силовой трубкой, трубкой тока и т. п. Векторные трубки обладают в случае, когда вектор A обозначает скорость течения несжимаемой жидкости, следующим характерным свойством. Представим себе объем, ограниченный векторной трубкой и двумя перпендикулярными к ней сечениями ω_1 и ω_2 , и напишем условие несжимаемости заполняющей этот объем



Фиг. 3.

жидкости. Через боковую поверхность такой трубки жидкость не протекает, так как направления движения (линии тока) жидкости повсюду параллельны боковым стенкам. Через сечение ω_1 втекает внутрь нашего объема в единицу времени количество жидкости, равное $A_1 \omega_1$, где A_1 обозначает величину вектора $\mathbf{A}$ в какой-либо точке поверхности ω_1 . Чтобы иметь право так вычислять, мы берем элемент поверхности настолько малым, чтобы можно было пренебречь различиями в значении $\mathbf{A}$ в разных точках этого элемента. Через сечение ω_2 жидкость вытекает в количестве $A_2 \omega_2$ в секунду. Очевидно, что эти количества должны быть равными, т. е.

$$A_1 \omega_1 = A_2 \omega_2, \quad (21)$$

т. е. перпендикулярное сечение векторной трубки в любом месте обратно пропорционально значению вектора в этом сечении. Отсюда, далее, следует, что для двух косых сечений ω_1' и ω_2' , нормали к которым образуют с соответственными направлениями векторов острые углы θ_1 и θ_2 , соотношение (21) переходит в

$$A_1 \omega_1' \cos \theta_1 = A_2 \omega_2' \cos \theta_2. \quad (22)$$

Мы можем представить себе все поле подразделенным на такие векторные трубки. Как видно из соотношения (21), такие трубки никогда не могут прерываться таким образом, что их сечение стянется к точке. Каждая такая трубка либо замыкается, либо начинается и оканчивается на границах поля.

§ 4. Соленоидальные векторы. Равенство (21), всегда имеющее место, если вектор $\mathbf{A}$ представляет скорость несжимаемой жидкости, является вместе с тем достаточным условием того, что рассматриваемое поле обладает такими же свойствами, как и поле скоростей несжимаемой жидкости. Это следует из того, что, подразумевая под $\mathbf{A}$ поле скоростей течения некоторой величины, мы из (21) [или равнозначного с ним равенства (22)] всегда можем заключить, что количество этой величины, взятое внутри произвольной замкнутой поверхности, целиком расположенной в поле, остается постоянным. Каждая векторная трубка, входящая внутрь этой поверхности, должна в другом месте выйти снова наружу. Может, конечно, случиться, что подобная трубка входит внутрь ограниченного данной поверхностью объема не один, а несколько раз, но при этом столько же раз она и выходит из рассматриваемого объема. Поэтому во всех случаях вся замкнутая поверхность может быть разбита на пары элементарных площадок, представляющих собою сечения одной и той же векторной трубки при ее входе и выходе из поверхности. (Исключения из этого правила имеют место только в случае, если часть рассматриваемой замкнутой поверхности совпадает с боковой поверхностью одной или многих векторных трубок. Однако как раз через такие участки поверхности поток жидкости отсутствует.) Из равенства (22) следует, что для каждой пары таких сечений количества втекающей и вытекающей жидкости равны. Поэтому, если для каждой векторной трубки соблюдены равенства (21) или (22), то количество жидкости, заключающееся внутри рассматриваемой поверхности, не изменяется.

Если это условие соблюдено, то вектор $\mathbf{A}$ называют соленоидальным вектором.

Согласно вышесказанному свойство это выражается равенством

$$\oint \mathbf{A}_n d\sigma = 0$$

или равносильными ему равенствами (18) и (20).

Если существуют поверхности разрыва непрерывности вектора, то, как мы видели, для соленоидального вектора нормальные его составляющие остаются непрерывными и на этих поверхностях.

Тем же свойством должны обладать в месте пересечения с поверхностями разрывов векторные трубки любого соленоидального вектора. Параллельные поверхностям раздела составляющие, вообще говоря, прерывны (если и они непрерывны, то рассматриваемый вектор не обрывается на такой поверхности раздела никаких особенностей). Отсюда следует, что если мы построим по обе стороны поверхности разрыва направления рассматриваемого вектора, то, вообще говоря, они будут различны. Поэтому векторные линии и векторные трубки испытывают преломление при проходе через поверхность разрыва непрерывности.

По примеру Фарадея, мы построим теперь наглядную картину поля, позволяющую судить не только о направлении, но и о величине образующего поле вектора в разных точках этого поля. Мы достигнем этого, если для произведения $(\mathbf{A}\omega)$, которое по предыдущему остается неизменным вдоль каждой векторной трубки, выберем постоянное для всех трубок значение. Этого всегда можно достигнуть надлежащим выбором поперечного сечения трубки. Представьте себе, например, что мы выбрали достаточно малую единицу площади и подбираем сечения всех векторных трубок так, чтобы $(\mathbf{A}\omega) = 1$. Тогда сечение каждой трубки, равное $\frac{1}{A}$ выбранной единицы площади, будет также весьма

малым. Чтобы пояснить весьма часто встречающееся в литературе выражение „число векторных линий, пересекающих данную поверхность“, мы в каждой выбранной вышесказанным образом единичной векторной трубке выберем векторную линию, проходящую, например, по ее оси. Так как при увеличении A трубки становятся уже, то проведенные таким образом единичные векторные линии в окрестности каждой точки поля будут располагаться тем теснее, чем большее значение принимает в данной точке вектор $\mathbf{A}$. Численное значение вектора $\mathbf{A}$ будет в этом случае повсюду равно числу единичных векторных линий, пересекающих перпендикулярную им площадку единицы площади. Требование выбора достаточно малой единицы площади можно устранить, положив $(\mathbf{A}\omega) = \frac{1}{N}$, где N — достаточно большое число. При таком построении

векторные линии также будут сгущаться при возрастании A , и мы также можем говорить о числе векторных линий, пересекающих единицу поверхности, которое в этом случае будет равняться NA . Чтобы и в этом случае численное значение вектора равнялось числу единичных векторных линий, проходящихся на единицу поверхности, мы

определим это последнее число равным $\frac{1}{N}$ числа, даваемого вышеуказанным построением.

Далее, легко показать, что число единичных векторных линий, пересекающих данную поверхность, всегда равно интегралу по этой поверхности, взятому от нормальной составляющей вектора $\mathbf{A}$.

$$\int A_n d\sigma.$$

В самом деле, возьмем в качестве элементов поверхности сечения ω' этой поверхности векторных трубок (сечения эти неограниченно убывают при неограниченном возрастании числа N). Каждый такой элемент дает при интегрировании слагаемое

$$A \cos(\mathbf{n}, \mathbf{A}) \omega',$$

в котором

$$\omega' \cos(\mathbf{n}, \mathbf{A})$$

равняется перпендикулярному сечению трубки. Поэтому вышенаписанное слагаемое равно $(\mathbf{A}\omega)$, а согласно нашему построению равно $\frac{1}{N}$. Поэтому весь интеграл равняется $\frac{1}{N}$, умноженной на число элементов поверхности, что в свою очередь равняется числу единичных линий, пересекающих поверхность.

Мы приняли, что нормали к рассматриваемой поверхности образуют с направлением вектора $\mathbf{A}$ острые углы. Если мы выберем таким образом направление положительной нормали к какой-либо точке поверхности и затем, переходя к другим точкам, будем проводить положительные нормали все время по той же стороне поверхности, то может случиться, что мы придем к области, где положительная нормаль образует уже тупой угол с направлением вектора. Если поверхность не обладает особенностями, то такие две области ограничены одна от другой кривой, вдоль которой положительная нормаль образует прямой угол с вектором. Вдоль этой кривой векторные линии касаются поверхности, а проходящие по соседству векторные линии могут пересекать поверхность дважды. При подсчете числа линий, пересекающих поверхность, мы можем не учитывать этих последних, так как соответствующие им векторные трубки дают при интегрировании по поверхности два слагаемых, взаимно уничтожающих друг друга.

Вышесказанное вполне определяет понятие числа векторных линий данного соленоидального вектора, проходящих внутри данной замкнутой кривой. Мы видим, что это число равняется значению интеграла от рассматриваемого вектора, распространенного на произвольную поверхность, опирающуюся на данную замкнутую кривую. Два интеграла, взятые по двум поверхностям, опирающимся на одни и тот же контур, всегда при этих условиях равны, если только положительные нормали связаны одинаково с положительным обходом по контуру. Чтобы это

доказать, назовем эти две поверхности O_1 и O_2 . Вместе они образуют замкнутую поверхность, и вследствие соленоидальности рассматриваемого вектора интеграл от него, взятый по этой замкнутой поверхности, равен нулю. Если положительное направление нормали к O_1 совпадает с направлением внешней нормали к замкнутой поверхности, то вдоль поверхности O_2 направления этих нормалей взаимно противоположны. Поэтому интеграл по замкнутой поверхности равен

$$\int_{O_1} A_n d\sigma - \int_{O_2} A_n d\sigma.$$

Так как он равен нулю, то отсюда следует равенство интегралов, которое мы хотели доказать.

Результат этот можно выразить следующим образом: соленоидальность вектора является необходимым и достаточным условием того, чтобы значение поверхностного интеграла от этого вектора зависело только от контура поверхности.

§ 5. Потенциальный вектор. Совершенно аналогичная проблема возникает при исследовании линейных интегралов. Мы можем поставить вопрос: каким свойством должно обладать поле вектора, чтобы значение линейного интеграла зависело только от конечных значений пути интегрирования. Очевидно, что в этом случае интеграл должен исчезать для любой замкнутой кривой. Действительно, взяв на такой кривой s две точки P и Q с промежуточными точками R для одной и S для другой части кривой, мы получим:

$$\int_{PRQ} A_s ds = \int_{PRQ} A_s ds + \int_{QSP} A_s ds = \int_{PRQ} A_s ds - \int_{PSQ} A_s ds.$$

Если значение интеграла зависит только от конечных точек P и Q , но не от пути интегрирования, то оба интеграла правой части этого равенства должны быть равны друг другу, откуда и следует равенство нулю интеграла по замкнутому пути. Очевидно, что это условие является и достаточным.

Если вышеуказанное условие выполнено, то, выбрав постоянной начальную точку интегрирования P , мы получим интеграл, являющийся функцией координат только конечной точки Q . Исследуем подробнее эту зависимость, выбрав в качестве точки P бесконечно удаленную точку.

Ограничение, чтобы точка P была определенной бесконечно удаленной точкой, является излишним, если мы примем, что вектор A убывает с расстоянием настолько быстро, что линейный интеграл, взятый от него по бесконечно удаленной линии, обращается в нуль. В огромном большинстве физических проблем это допущение законно и означает, что состояния, имеющие место в бесконечности, не оказывают на исследуемое нами явление заметного действия. Степень убывания некоторой величины при удалении ее в бесконечность может быть оценена следующим образом. Выберем в рассматриваемом объеме произвольную точку O и назовем через r расстояние от этой точки до

некоторой другой. Мы будем называть функцию φ бесконечно малой n -го порядка, если произведение

$$r^n \varphi$$

остается конечным и не приближается к нулю при бесконечном удалении точки, в которой мы рассматриваем значение φ .

Из вышесказанного следует, что для вектора $\mathbf{A}$ достаточно потребовать, чтобы его значение в бесконечности обращалось в бесконечно малое высшего порядка, чем первый.

Аналогично мы можем пренебречь интегралом, распространенным на бесконечно удаленную поверхность, если подинтегральная величина является бесконечно-малой более высокого порядка, чем второй.

Рассмотренный линейный интеграл является скалярной величиной, зависящей только от координат точки Q . Обозначим эту функцию буквой φ и рассмотрим ее производную, взятую по произвольному направлению h . Пусть Q_1 обозначает точку, которой мы достигнем, переместившись от Q в заданном направлении на величину Δh , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial h} &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\varphi_Q - \varphi_{Q_1}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\int_P^Q A_s ds - \int_P^{Q_1} A_s ds}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta h} \int_{Q_1}^Q A_s ds = A_h, \end{aligned} \quad (23)$$

так как величину последнего интеграла мы можем принять равной $\Delta h A_h$. Величина A_h здесь есть значение составляющей вектора $\mathbf{A}$ по направлению h для некоторой точки между Q и Q_1 , из которых Q_1 неограниченно приближается к точке Q при уменьшении Δh до нуля.

Величина φ называется потенциалом вектора $\mathbf{A}$.

Из уравнения (23) как частные случаи следуют:

$$A_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad A_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad A_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (24)$$

Обратно, можно легко показать, что если вектор $\mathbf{A}$ удовлетворяет этим трем уравнениям, то из них следует равенство (23). Такой вектор мы будем называть потенциальным вектором.

Если нам задано поле скалярной величины φ , то мы всегда можем определить вектор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий повсюду соотношениям (23) и (24) (предполагая, конечно, что функция φ такова, что эти равенства имеют смысл). Вектор, равный $\mathbf{A}$ по абсолютной величине и противоположный по направлению, называют градиентом скалярной величины φ . Связь эту между $\mathbf{A}$ и φ выражают равенством:

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi, \quad (25)$$

которое равносильно равенствам (23) и (24).

И в этом случае можно сделать графически наглядной связь между скалярной величиной φ и вектором $\mathbf{A}$. Для этого строим поверхности

$$\varphi = c,$$

называемые эквипотенциальными поверхностями. Непосредственно ясно, что векторные линии $\mathbf{A}$ повсюду перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Это следует из того, что согласно (24) направляющие косинусы нормали к поверхности в любой точке равны направляющим косинусам вектора. То же заключение может быть получено из (23), согласно которому для любого направления, лежащего в касательной плоскости к поверхности $\varphi = c$, составляющая вектора обращается в нуль.

Представим себе две близкие эквипотенциальные поверхности, соответствующие двум мало отличающимся друг от друга значениям c . Разность потенциалов между любой точкой первой и любой точкой второй поверхности будет при этом постоянна, а следовательно, изменение потенциала, отнесенное к единице расстояния, будет зависеть только от расстояния между рассматриваемыми точками. Предел, к которому стремится такое отношение, при приближении второй точки к первой по заданному направлению называют падением потенциала в данной точке по данному направлению. Из вышеприведенного ясно, что перпендикулярные к эквипотенциальным поверхностям линии вектора $\mathbf{A}$ имеют повсюду направление наиболее быстрого падения потенциала.

Укажем еще на то, что в случае, когда вектор $\mathbf{A}$ обозначает силу, линейный интеграл $\int A_x ds$ обозначает работу, совершаемую этой силой на пути интегрирования. Если сила является потенциальным вектором или, как часто также говорят, зависит от потенциала φ , то работа перемещения ее точки приложения из P в Q равна

$$\varphi_P - \varphi_Q.$$

Если $\mathbf{A}$ является потенциальным вектором, то из (24) следует:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Величины

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (26)$$

можно рассматривать как составляющие по осям некоторого вектора, который (ввиду его значения в теории линейных преобразований) получил название вихрь, или ротор (rot), или керл (curl) вектора $\mathbf{A}$. Мы будем его обозначать:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Применяя к (26) известные из аналитической геометрии формулы преобразования, легко показать, что при переходе к другой прямоугольной системе координат соотношения между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ сохраняют прежнюю форму.

Ротор потенциального вектора равен нулю.

Если в поле имеется поверхность, на которой составляющие вектора $\mathbf{A}$ терпят разрыв, то в таких точках производные составляющих вектора по координатам теряют смысл. В этом случае равенства

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0,$$

выражающие, что во всем поле линейный интеграл, взятый вдоль произвольной замкнутой кривой, обращается в нуль, должны быть дополнены определенными условиями на поверхности разрыва.

Рассмотрим для этого линейный интеграл вектора $\mathbf{A}$ вдоль контура бесконечно низкого прямоугольника $PQ_1Q_1P_1$, стороны которого PQ и P_1Q_1 расположены по обе стороны поверхности разрыва и параллельны касательной к ней плоскости. Остальные две стороны PP_1 и QQ_1 мы считаем исчезающе-малыми по сравнению с первыми. Вследствие этого при вычислении интеграла мы можем в пределе пренебречь составляющими интеграла вдоль этих сторон по сравнению с величинами, получающимися при интегрировании вдоль сторон PQ и P_1Q_1 . Обозначив через s направление этих сторон и считая их настолько малыми, что можно пренебречь изменениями вектора $\mathbf{A}$ на этих отрезках, мы получим:

$$A_s \cdot PQ = A'_s \cdot P_1Q_1.$$

В этом равенстве A_s обозначает составляющую вектора $\mathbf{A}$ с одной стороны от поверхности разрыва, а A'_s — составляющую по другую сторону. Следовательно, искомое дополнительное условие гласит:

$$A_s = A'_s,$$

т. е. тангенциальные составляющие вектора должны оставаться непрерывными и на поверхности разрыва.

В случае отсутствия поверхностей разрывов из (26) непосредственно получается:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

т. е. вихрь любого вектора соленоидален. Обратно, любой соленоидальный вектор мы можем рассматривать как вихрь некоторого другого вектора, причем последняя задача допускает бесконечное количество решений, так как если $\mathbf{B}$ — данный нам вектор и $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнениям (26), то согласно вышеприведенному и вектор

$$\mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi,$$

где φ , произвольный скаляр, будет решением тех же уравнений. Нам остается только показать, что в случае $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ мы всегда можем указать решение (26). Это сделать легко, если мы можем считать, что в бесконечно удаленных точках $\mathbf{B}$ становится бесконечно-малым более

высокого порядка, чем первый. Во многих физически интересных случаях требование это удовлетворено. В этом случае мы можем положить:

$$A_x = \int_{-\infty}^z B_y dz, \quad A_y = - \int_{-\infty}^z B_x dz, \quad A_z = 0.$$

Непосредственно очевидно, что эти величины удовлетворяют первым двум уравнениям (26). Подстановка их в третье равенство при условии $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ дает тождество

$$B_z = \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dz = \int_{-\infty}^z \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = B_z.$$

Условия, позволяющие выполнять дифференцирования под знаком интеграла, в физических приложениях всегда оказываются выполненными. Если в исследуемой области есть разрывы непрерывностей, то необходимо произвести особое исследование проблемы.

§ 6. Теорема Стокса. Значение интеграла по поверхности зависит в случае соленоидального вектора $\mathbf{B}$ только от контура, на который опирается поверхность. При помощи вышеуказанного вектора $\mathbf{A}$ мы можем заменить интеграл по поверхности интегралом по ограничивающему эту поверхность контуру. В этом преобразовании и состоит теорема Стокса. При доказательстве мы сначала допустим, что данный нам контур является плоской кривой. В этом случае мы можем в качестве поверхности интегрирования взять часть плоскости, ограниченной этой кривой (значение интеграла ведь не зависит от выбора поверхности интегрирования). Далее, мы выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость XOY сошла с плоскостью нашей кривой, а ось Z была направлена по положительной нормали к поверхности. При этих условиях:

$$\int B_n d\sigma = \int B_z dx dy = \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$\int \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy.$$

Мы можем выполнять интегрирование по y , т. е. просуммировать по всем элементам поверхности, имеющим общую абсциссу x . Для простоты положим еще, что перпендикуляр к оси X пересекает наш контур только в двух точках. При перемещении в направлении оси Y по такому перпендикуляру пусть мы сначала входим в точки 1 внутрь поверхности, а затем выходим из нее в точке 2. Интегрирование вдоль заданного перпендикуляра к оси X дает $(A_{x2} - A_{x1}) dx$, а для интеграла мы получаем:

$$\int (A_{x2} - A_{x1}) dx = \int A_x dx.$$

Последний интеграл должен быть распространен на весь контур. (Для точек с индексом 2 элемент dx отрицателен. Доказательство может быть легко обобщено на случай, когда некоторые перпендикуляры к оси X пересекают данный контур более чем в двух точках.)

Аналогично получаем:

$$\int \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy = + \int A_y dy$$

и, следовательно,

$$\int B_n d\sigma = \int (A_x dx + A_y dy) = \int A_s ds. \quad (27)$$

Из вида результата можно заключить, что он не зависит от выбора координатной системы. Доказательство для общего случая мы проведем методом перехода к пределу. Для этого мы будем рассматривать данный контур как предел некоторой ломаной, а данную кривую поверхность как предел некоторого многогранника. В согласии с поставленными выше условиями мы выберем для контура каждой грани положительное направление обхода таким образом, чтобы для граней, имеющих общие ребра с заданным контуром, положительное направление обхода по таким ребрам совпадало с положительным обходом по контуру. Для внутренних ребер, каждое из которых принадлежит двум соприкасающимся граням, направление обхода будет для этих двух граней взаимно противоположным. Применяя к площади каждой грани только что доказанное преобразование, мы получим в качестве суммы линейных интегралов интеграл по пограничной ломаной, а в качестве суммы поверхностных интегралов — интеграл по всей поверхности многогранника. Переходя к пределу, мы получаем отсюда теорему Стокса для произвольной замкнутой кривой.

§ 7. Уравнение Лапласа. Если в некоторой области пространства мы имеем поле вектора, который соленоиден и вихрь которого равен нулю, то потенциал этого вектора удовлетворяет в этой области следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (28)$$

Действительно, из равенства нулю ротора следует:

$$A_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad A_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad A_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подстановка же этих равенств в уравнение, выражающее соленоидальность,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

ведет к (28), которое весьма часто пишут сокращенно в виде:

$$\Delta \varphi = 0^1.$$

¹ В русской литературе чаще применяют значок $\nabla^2 \varphi$. См., например, И. Е. Тамм. Основы теории электричества, § 12. *Прим. пер.*

Это дифференциальное уравнение, имеющее большое значение в теории электрических явлений, носит название уравнения Лапласа. Не меньшее значение это уравнение играет в теории тяготения, так как ему подчиняется ньютоновский потенциал тяготеющих масс вне занятого этими массами объема. Действительно, представим себе систему материальных точек с массами μ_k , действующих на данную материальную точку силами, направленными по линиям, их соединяющим, пропорциональными массе действующей точки μ_k и обратно пропорциональными квадрату расстояния r_k между ними. Равнодействующая этих сил будет, с точностью до постоянного множителя, равна взятой с обратным знаком векторной сумме

$$\sum \frac{\mu_k}{r_k^2} \mathbf{r}_1,$$

где $\mathbf{r}_1$ — единичный вектор, имеющий направление от притягивающей точки к притягиваемой. Легко показать, что вектор этот зависит от потенциала, равного

$$\sum \frac{\mu_k}{r_k}.$$

Если притягивающая масса заполняет сплошь некоторый объем, то суммы придется заменить интегралами и мы получим для потенциала выражение:

$$\varphi = \int \frac{\mu(x_1, y_1, z_1)}{r} dS_1. \quad (29)$$

В этом выражении при обозначении координат (и объема) притягивающего элемента массы мы поставили индекс, чтобы отличить их от координат x, y, z точки, в которой мы вычисляем значение потенциала φ . Функция $\mu(x_1, y_1, z_1)$ обозначает плотность в точке x_1, y_1, z_1 , и интегрирование должно быть распространено по всему объему, занимаемому притягивающей массой. Для точек x, y, z , лежащих вне этого объема, мы получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \int \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1.$$

Так как

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

то

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{x - x_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_1)^2}{r^5}$$

и т. д.

Отсюда следует, что

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,$$

а следовательно,

$$\Delta \varphi = 0.$$

§ 8. Теорема Грина. Если две функции удовлетворяют уравнению Лапласа, то между ними существует зависимость, выражаемая теоремой Грина, которую мы сейчас выведем.

Пусть U и V — две любые функции, конечные и непрерывные, в пространстве, ограниченном некоторой поверхностью. Пусть, сверх того, в том же пространстве эти функции обладают конечными и непрерывными производными первого и второго порядка. Наконец на поверхности σ пусть непрерывны и конечны как сами эти функции, так и первые их производные. В этом случае по теореме Гаусса (16)

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(U \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right\} dS \\ &= \int U \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos(ni) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(nj) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(nk) \right) d\sigma = \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dS = \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \int U \Delta V dS. \quad (30)$$

Аналогично, переменив местами U и V , мы получим для правой части равенства (30) (левая часть остается без изменения):

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \int V \Delta U dS.$$

Отсюда следует:

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \int (U \Delta V - V \Delta U) dS. \quad (31)$$

Заметим еще, что хотя поверхность σ должна быть замкнутой, но в общем случае она может состоять из различных совершенно отдельных или окружающих друг друга частей.

Если функции U и V кроме вышеуказанных условий удовлетворяют уравнениям Лапласа, то из (31) следует соотношение:

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0, \quad (32)$$

которое мы будем называть теоремой Грина.

Рассмотрим частный случай, когда $U = \text{const}$, что, очевидно, удовлетворяет уравнению Лапласа. Из (32) следует в этом случае:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0.$$

что можно получить и непосредственно из теоремы Гаусса.

Из (30) мы можем получить еще одно важное свойство функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Положим в этом равенстве: $U = V$, получим:

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\} dS = \int V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma. \quad (33)$$

При помощи этого соотношения мы можем доказать, что не существует двух различных функций, удовлетворяющих повсюду внутри некоторой замкнутой поверхности уравнению Лапласа и принимающих на этой поверхности одинаковые наперед заданные значения. В самом деле, пусть V_1 и V_2 — две такие функции, тогда их разность φ также удовлетворяет уравнению Лапласа и обращается повсюду на поверхности в нуль. Уравнение (33) дает в этом случае:

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dS = 0.$$

Так как подынтегральное выражение не может принимать отрицательных значений, то равенство это возможно только в случае, когда подынтегральное выражение во всем объеме интегрирования тождественно равно нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Отсюда следует, что внутри рассматриваемой поверхности φ постоянно, а так как во всем этом объеме и на поверхности функция φ по условиям непрерывна, а на поверхности обращается в нуль, то она равна тождественно нулю повсюду, т. е. $V_1 = V_2$.

Особый интерес представляет здесь вышеупомянутый случай, когда рассматриваемая поверхность σ состоит из отдельных изолированных частей, из которых одна окружает все остальные. Пространством, ограниченным такой поверхностью, является объем, заключенный между этой внешней поверхностью и внутренними. Могут быть случаи, когда внешняя поверхность целиком лежит в бесконечности. Доказанную теорему можно в этом случае формулировать следующим образом: не может существовать двух различных функций, которые удовлетворяют уравнению Лапласа во всем пространстве, лежащем вне заданной поверхности (которая может состоять и из нескольких отдельных частей), и, оставаясь непрерывными и на этой поверхности, принимают на ней заданные значения.

К вышесказанному необходимо еще добавить условие, позволяющее пренебречь интегралом, распространенным по бесконечно удаленной поверхности. Для этого достаточно, чтобы произведение $\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в бесконечности становилось бесконечно-малым более высокого порядка, чем второй. В приложениях это условие является всегда выполненным. Так, например, ньютоновский потенциал, определенный равенством (29), обращается в бесконечности в бесконечно-малую величину первого порядка. Производные от него, взятые по любому направлению, становятся

бесконечно-малыми второго порядка, а интересующее нас здесь произведение $\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — бесконечно-малым третьего порядка.

Возможен, конечно, случай, когда σ представляет собою единственную замкнутую поверхность, лежащую целиком в бесконечности. В этом случае наша теорема утверждает, что функция, удовлетворяющая во всем пространстве уравнению Лапласа и убывающая с расстоянием так быстро, что можно пренебречь интегралом по бесконечно удаленной поверхности от выражения $\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, тождественно равна нулю повсюду.

В качестве применения вышеуказанных свойств мы докажем, что поле вектора вполне однозначно определено, если во всех точках заданы его вихрь и дивергенция и, сверх того, известно, что с удалением в бесконечность он убывает достаточно быстро.

Действительно, если мы найдем два таких вектора, то их разность была бы во всем поле безвихревым и соленоидальным вектором. Такой вектор является потенциальным и удовлетворяет повсюду уравнению Лапласа. Отсюда по доказанному следует, что потенциал этой разности тождественно равен нулю, т. е. разность наших векторов повсюду равна нулю.

§ 9. Исследование объемного интеграла $\int \frac{\mu(x_1, y_1, z_1)}{r} dS$. Возьмем еще раз к функции φ , определенной равенством (29):

$$\varphi = \int \frac{\mu(x_1, y_1, z_1)}{r} dS_1, \quad (29)$$

причем, отвлекаясь от физического смысла, который имеет функция $\mu(x_1, y_1, z_1)$, мы будем приписывать ей лишь следующие свойства. Внутри объема интегрирования функция, эта однозначна и конечна и остается конечной и на поверхности σ , ограничивающей объем интегрирования. Большая часть результатов, которые мы получим, могут быть обобщены и на случай, когда функция μ испытывает конечной величины скачок на поверхности, частично или целиком расположенной внутри σ . Когда точка $P(x, y, z)$, в которой мы вычисляем значение φ , лежит внутри поверхности σ , то мы можем следующим образом определить значение интеграла (29). Вырежем из объема интегрирования некоторую область, окружающую точку P , и будем искать предел, к которому стремится интеграл, взятый по всему остальному пространству, когда вырезанная область уменьшается по какому-либо закону до нуля. Если такого предела не существует, то рассматриваемый интеграл не имеет смысла. В качестве выделяемого объема мы можем взять шар, радиус которого мы будем стремить к нулю. Далее, мы найдем аналогичным путем значения производных функции φ , а также и значение $\Delta \varphi$. Первую часть этого исследования мы проведем еще несколько более общо, рассмотрев интеграл от некоторой функции U по объему, заключенному внутри заданной поверхности σ :

$$I = \int U dS_1.$$

где U — функция координат x_1, y_1, z_1 объема интегрирования, а x, y, z — координаты точки P , в которой должно быть определено значение I . Мы примем, что точка P лежит внутри объема интегрирования и что функция U конечна и непрерывна во всех точках, за исключением точки $x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z$. Значение I определяется согласно предыдущему равенством:

$$I = \lim_{r=0} I_r,$$

где

$$I_r = \int_{\sigma} U dS_1$$

обозначает интеграл, распространенный по объему, лежащему внутри поверхности σ и вне шаровой поверхности, описанной вокруг точки P радиусом, равным r . Применяя такие обозначения, мы можем положить:

$$I_r = \int_R U dS_1 + \int_r^R U dS_1.$$

Здесь первый интеграл распространен по объему, заключающемуся между данной поверхностью σ и поверхностью шара произвольного радиуса $R > r$, описанного вокруг точки P (значение R ограничено при этом только требованием, чтобы вся поверхность шара лежала внутри σ). Второй интеграл распространен на объем шарового слоя между сферами радиусов R и r . Первый интеграл имеет определенное, не зависящее от r значение I_1 . Исследуем ближе второй интеграл, который мы обозначим через I_2 . Допустим при этом, что существует такое положительное число n , что величина

$$\rho = Ur^n,$$

где r обозначает расстояние до точки P , приближается к конечному пределу при безграничном уменьшении r . Допустим, чтобы фиксировать наши рассуждения, что этот предел положителен. При этих условиях для всех значений r , меньших некоторого определенного значения, функция U будет иметь положительные значения. Если r меньше этого значения, то при дальнейшем уменьшении r значение I_2 может только увеличиваться. Таким образом, очевидно, мы докажем существование предела I_r , если покажем, что I_2 всегда меньше некоторого конечного числа. Мы знаем, что вследствие существования $\lim_{r=0} \rho$ значение ρ остается

внутри шара радиуса R ниже некоторого значения ρ_0 . Следовательно, U всегда меньше, чем $\rho_0 r^{-n}$

и

$$I_2 < \int_r^R \rho_0 r^{-n} dS_1.$$

В этом выражении ρ_0 может быть вынесено за знак интеграла, а оставшийся интеграл может быть вычислен. Разделяя объем интегри-

рования на шаровые концентрические слои, получаем:

$$I_2 < 4\pi\rho_0 \int_r^R r^{-n+2} dr,$$

следовательно,

$$I_2 < \frac{4\pi\rho_0}{-n+3} \{R^{-n+3} - r^{-n+3}\}.$$

Отсюда видно, что при $n < 3$ I_2 остается меньше некоторого конечного числа, а следовательно, I_r приближается к конечному пределу.

Для функции φ в равенстве (29) мы можем считать $n = 1$. Отсюда следует, что φ имеет определенное конечное значение во всем объеме, заключенном внутри поверхности σ .

Рассмотрим теперь производные от интеграла I , например, производную по x . Прежде всего покажем, что

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial I_r}{\partial x},$$

если только $\frac{\partial I_r}{\partial x}$ существует и является непрерывной функцией r и координат.

Мы имеем по определению:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [\lim_{r \rightarrow 0} I_r(x + \delta, y, z) - \lim_{r \rightarrow 0} I_r(x, y, z)],$$

следовательно,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial I_r(x + \delta, y, z)}{\partial x}, \quad 0 < \delta < 1,$$

т. е.

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial I_r}{\partial x}.$$

Здесь мы имели право переместить порядок действий при переходе к пределу, так как $\frac{\partial I_r}{\partial x}$ удовлетворяет вышеизложенным условиям непрерывности.

Найдем теперь выражение производной $\frac{\partial I_r}{\partial x}$:

$$\frac{\partial I_r}{\partial x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[\int_{r, x+\delta} U(x+\delta, y, z) dS_1 - \int_{r, x} U(x, y, z) dS_1 \right],$$

где индексы у знаков интегралов показывают, что в первом интеграле исключается из объема интегрирования внутренность шара радиуса r , описанного около точки $P'(x+\delta, y, z)$, а во втором — объем шара того же радиуса, описанного около точки $P(x, y, z)$ как центра. Оба интеграла отличаются друг от друга по двум причинам. Во-первых,

каждый элемент объема dS_1 даст в этих интегралах различные значения подынтегрального выражения, так как в первом интеграле войдет значение функции U , определяемое положением точки P' и какой-либо точки внутри элемента dS_1 , во втором войдет значение функции U , определяемое точкой P и той же точкой элемента dS_1 . Для разности, стоящей в квадратных скобках, мы поэтому получим:

$$\oint \frac{\partial U(x_1 - \partial z, y, z)}{\partial x} dS_1,$$

где интеграл распространен на весь объем, лежащий вне выделенных шаровых поверхностей. При уменьшении δ до нуля это даст в окончательном результате величину:

$$\int_r \frac{\partial U}{\partial x} dS_1.$$

Во-вторых, как видно из фиг. 5, есть области, которые входят в состав только одного из интегралов. Элементы объемов, входящие только во второй интеграл, дают:

$$-U dB \delta \frac{x_1 - x}{r},$$

где dB обозначает элемент шаровой поверхности, описанной около точки P . Элементы, входящие в первый интеграл, дают

$$U dB \delta \frac{x - x_1}{r}.$$

Таким образом оба выражения имеют одинаковую форму и дают вместе интеграл по поверхности шара радиуса r

$$-\frac{\delta}{r} \int U(x_1 - x) dB.$$

Окончательно мы получаем:

$$\frac{\partial I_r}{\partial x} = \int \frac{\partial U}{\partial x} dS_1 - \frac{1}{r} \int (x_1 - x) U dB. \quad (34)$$

Применим это выражение к функции φ , определенной равенством (29). Введя и здесь функцию φ_r аналогичную I_r , мы получим:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} = \int_r \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS_1 - \frac{1}{r} \cdot \int \frac{x_1 - x}{r} \mu(x_1, y_1, z_1) dB.$$

Первый интеграл дает:

$$\int_r \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r^3} dS_1.$$

Заметив, что функция

$$\mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r}$$

конечна во всем объеме интегрирования, мы можем на основании выше доказанного утверждать, что и

$$\int_r \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r^3} dS_1,$$

остается повсюду конечным. Следовательно, в рассматриваемой области эта часть исследуемого выражения является непрерывной функцией r и координат x, y, z , которая приближается к определенному пределу при приближении $r \rightarrow 0$.

Второе слагаемое исследуемого выражения является интегралом от функции

$$\mu(x_1, y_1, z_1) \frac{x_1 - x}{r},$$

значение которой по абсолютной величине остается меньше некоторого определенного значения ρ . Ввиду этого абсолютная величина этого интеграла меньше, чем $4\pi r\rho$ и, очевидно, приближается к нулю при неограниченном уменьшении r при всех значениях x, y, z . Поэтому окончательно:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \int \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS_1.$$

§ 10. Уравнение Пуассона. Чтобы вычислить значение $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, мы преобразуем сначала последний результат, воспользовавшись тождеством

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r}.$$

Благодаря этому наше уравнение примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \int \mu(x_1, y_1, z_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_1 = - \int \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_1 + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} dS_1.$$

Первый интеграл мы можем преобразовать на основании теоремы Гаусса (16) и получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \int \frac{\mu}{r} \cos(nl) d\tau_1 + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} dS_1. \quad (35)$$

Здесь первый интеграл должен быть распространен на всю поверхность σ , ограничивающую объем, в котором μ отлично от нуля. В этом интеграле подынтегральная функция нигде не обращается в бесконечность, и поэтому при взятии производной по x мы можем дифференцировать под знаком интеграла.

При дифференцировании по x второго интеграла мы можем применить формулу (34), причем последний член этой формулы опять в пределе исчезает. Таким образом мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= - \int \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos(ni) d\sigma_1 + \int \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS_1 = \\ &= + \int \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \cos(ni) d\sigma_1 - \int \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом мы получим выражения для $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ и найдем:

$$\Delta \varphi = \int \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{1}{r} d\sigma_1 - \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right) dS_1.$$

Последнее слагаемое мы вычислим при помощи соотношения (30). При выводе этой формулы мы предполагали, что функции μ и $1/r$, непрерывны и конечны и имеют такие же непрерывные и конечные первые и вторые производные во всех точках внутри поверхности σ . Эти требования не удовлетворяются для функции $1/r$. Поэтому мы и в этом случае выделяем точку P при помощи описанной около нее как центра сферы радиуса r и рассматриваем интеграл, распространенный по объему вне этой сферы:

$$\int_r \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right) dS_1.$$

При $r \rightarrow 0$ интеграл этот обращается в искомый. К этому интегралу мы можем применить преобразование (30) и получим ввиду того, что

$$\Delta \frac{1}{r} = 0,$$

$$\int_r \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right) dS_1 = \int \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{1}{r} d\sigma_1.$$

Поверхность, по которой должно быть распространено интегрирование, в последнем интеграле состоит из внешней поверхности σ_1 и поверхности шара, описанного около точки P . Для этой последней

поверхности направление положительной нормали, которое по определению должно совпадать с направлением внешней к объему интегрирования нормали, совпадает с радиусом и направлено к точке P . Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2},$$

и мы получим:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{r} \right) dS_1 = \\ = \int \mu \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{1}{r} dS_1 + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int \mu dB, \end{aligned}$$

и

$$\Delta \varphi = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int \mu dB.$$

Так как μ является непрерывной функцией координат, то, при достаточно малом значении r значение этой функции μ в любой точке поверхности отличается от значения ее в центре сферы μ_P на величину, меньшую произвольно выбранной величины ε . Величина $\int \mu dB$ заключается при этом между значениями

$$4\pi r^2 (\mu_P - \varepsilon) \quad \text{и} \quad 4\pi r^2 (\mu_P + \varepsilon),$$

а следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int \mu dB = 4\pi \mu_P.$$

Таким образом окончательно

$$\Delta \varphi = -4\pi \mu_P.$$

Это — так называемое уравнение Пуассона. Мы можем сказать, что функция φ удовлетворяет этому уравнению повсюду, так как вне поверхности σ_1 , где $\mu = 0$, уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа.

При выводе уравнения Пуассона, чтобы иметь возможность применить теорему Грина, мы допустили, что функция $\mu(x_1, y_1, z_1)$ и ее первые производные непрерывны и на поверхности σ_1 . От этого допущения мы можем освободиться. Для этого окружим точку P произвольной поверхностью, целиком лежащей внутри σ_1 , и обозначим внутренний ее объем буквой S_1 , а объем, заключенный между обеими поверхностями, буквой S_2 . Разделим интеграл (29) на две части: первую часть φ_1 , распространенную на объем S_1 и вторую φ_2 — на объем S_2 . Тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

и

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2.$$

Согласно § 7 $\Delta\varphi_2 = 0$, к φ_1 же мы можем применить вышеприведенный вывод и получим:

$$\Delta\varphi = -4\pi\mu_P.$$

Легко, далее, доказать, что функция, удовлетворяющая повсюду уравнению Пуассона и обладающая тем свойством, что произведение этой функции на ее производную, взятую по любому направлению, обращается в бесконечности в бесконечно-малую более высокого порядка, чем второй, определяется этими условиями однозначно.

Действительно, если мы найдем две таких функции, то их разность будет повсюду удовлетворять уравнению Лапласа и согласно доказанной в § 8 теореме тождественно обратится в нуль.

Глава I.

ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Основой теории электричества являются два уравнения Максвелла. Уравнения эти связывают между собою различные векторные величины и выражают свойства электромагнитного поля. Свойства этих векторов и их взаимная связь были первоначально получены из наблюдений различных частных случаев поля. Обобщение этих свойств, произведенное при помощи теоретических соображений, привело к вышеуказанным уравнениям, которые мы ниже всегда будем считать приложимыми.

§ 1. Электрический ток. В первую очередь рассмотрим вектор, обозначающий плотность электрического тока. Обозначим этот вектор буквой **C**. Основным свойством вектора плотности тока является его соленоидальность, это значит, что течение электричества происходит всегда аналогично течению несжимаемой жидкости.

Это свойство выражается равенством:

$$\int C_n d\sigma = 0, \quad (1)$$

где интеграл может быть распространен по произвольной замкнутой поверхности. Как мы показали выше, равенство это равнозначно с

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0,$$

или

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = 0. \quad (1')$$

На поверхностях разрыва непрерывности нужно к этому добавить условие:

$$C_n = C_{nII}. \quad (1'')$$

Приложимость уравнения (1) во всех случаях электрического тока является одним из основных допущений теории Максвелла.

В прежних теориях различали два вида токов: замкнутые и разомкнутые, другими словами соленоидальные и несоленоидальные токи. К замкнутым токам относили, например, ток, текущий в замкнутой цепи и поддерживаемый включенным в цепь гальваническим элементом. И в старой и в новой теории токи эти рассматриваются одинаково как соленоидальные. К незамкнутым токам относили, например, ток, заряжающий проводник при соединении его с одним из полюсов батареи, другой полюс которой отведен к земле. В новой теории мы в со-

гласил с идеями Фарадея и Максвелла принимаем, что ток только кажущимся образом оканчивается на поверхности проводника, на самом же деле он продолжается в окружающей проводник среде. Благодаря этому ток и в этом случае остается соленоидальным.

Этот ток, появляющийся в окружающем проводник диэлектрике, при зарядении проводника мы называем током смещения. Ток смещения возникает во всех случаях, когда ток в проводниках кажется не соленоидальным, что часто имеет место.

При помощи вектора $\mathbf{C}$ мы описываем целый ряд весьма различных явлений. В качестве примеров мы укажем следующие: гальванические токи в металлических проводниках и электролитах; токи при электрических разрядах, возникающие, например, при проскакивании искры между положительно и отрицательно заряженными проводниками; далее, солнечные лучи, под которыми мы понимаем конвекционные токи, образованные движением электронов.

Общим во всех этих случаях является действие токов на магниты. Благодаря Эрстеду действие это давно известно для гальванических токов, текущих в металлических проводниках. Давно также известно, что токи в электролитах и разрядные токи действуют на магнитную стрелку. Действие катодных лучей на магнитную стрелку было доказано Гентелем. Долгое время не было экспериментальных доказательств того, что конвекционные токи, вызванные движением микроскопических заряженных тел, также действуют магнитно. В 1878 г. Ровланд в институте Гельмгольца выполнил ряд опытов, при которых исследовалось магнитное поле, вызываемое быстрым вращением эбонитового диска, заряженного до весьма высокого потенциала. При этом оказалось, что такое движение заряженного диска вызывает такое же магнитное поле, как и обычный круговой гальванический ток. Позднее Ровланд и Гутинсон в Балтиморе выполнили эти опыты с большей тщательностью и получили из них со значительной точностью значение отношения электромагнитной к электростатической единице заряда.

Правда, Кремье получил при аналогичном опыте отрицательный результат (что, повидимому, объясняется тем, что большая часть зарядов успевала у него стечь с диска прежде, чем он производил отсчет), но дальнейшие исследования различных физиков подтвердили первоначально полученные результаты и дали хорошее количественное совпадение теории с опытом.

Первое из основных уравнений Максвелла даст связь между электрическим током и магнитными его действиями.

§ 2. Напряженность магнитного поля. Для описания магнитных действий мы вводим вектор $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля, под которым мы понимаем величину, измеряемую силой, действующей в магнитном поле на единицу северного магнетизма. Так как свойство этого вектора и его связь с вектором $\mathbf{C}$ зависят от среды, то мы сначала будем рассматривать только соотношения, имеющие место в воздухе¹.

¹ Точнее говоря, здесь рассматриваются соотношения, имеющие место в вакууме. *Прим. перев.*

В воздухе мы можем и магнитный вектор считать соленоидальным, т. е. для любой замкнутой поверхности:

$$\oint H_n d\sigma = 0,$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

и для поверхностей разрыва

$$H_{nI} = H_{nII}.$$

Эти соотношения остаются приблизительно верными во всех средах за малыми исключениями, к которым в первую очередь относятся железо и сталь.

Легко показать, что напряженность магнитного поля, образованного одним или несколькими магнитами, которая может быть вычислена на основании закона Кулона, удовлетворяет вышеуказанным соотношениям.

В этом случае напряженность магнитного поля является, сверх того, вектором потенциальным, т. е. линейный интеграл $\int_P^Q H_s ds$ не зависит от пути интегрирования, и интеграл по замкнутому пути равен нулю. При этом, конечно, путь, по которому производится интегрирование, не должен проходить через области, где расположены магнитные полюса.

Обозначив магнитный потенциал буквой V , мы получим [Введение (25)]:

$$H_h = -\frac{\partial V}{\partial h}. \quad (2)$$

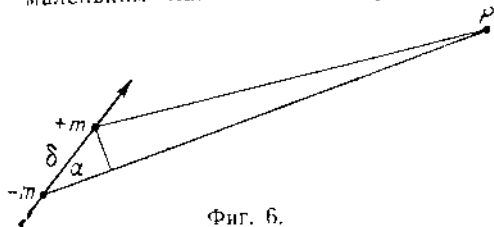
§ 3. Магнитное поле замкнутого тока. Рассмотрим теперь подробнее значения линейных интегралов от напряжения магнитного поля для других случаев. В качестве экспериментального факта мы примем, что ток, текущий по маленькому кольцеобразно замкнутому проводнику, действует на далеко от него расположенный магнитный полюс (расстояние должно быть велико по сравнению с радиусом) так же, как маленький магнит, ось которого перпендикулярна к плоскости тока и магнитный момент которого пропорционален площади кольца и силе тока. Северный полюс этого эквивалентного магнита расположен с той стороны поверхности, где нормаль положительна (положительное направление нормали определяется направлением тока в контуре).

Обозначив силу тока i , площадь контура проводника $d\sigma$, магнитную массу полюса эквивалентного магнита m и его длину δ , мы получим

$$m\delta = fi d\sigma, \quad (3)$$

где f обозначает коэффициент, зависящий от выбора единиц тока и магнитного полюса. Чтобы распространить эти соотношения на токи, текущие по замкнутым контурам конечных размеров, мы воспользуемся еще тем фактом, что два равные и противоположно направленные тока, текущие по совпадающим проводникам, уничтожают действия друг друга. Основываясь на этом мы можем заменить магнитное действие тока,

текущего по конечной величины контуру, действием бесконечно большого числа токов той же силы, текущих по бесконечно малым контурам, заполняющим сетевидно всю обтекаемую током площадь O . Направление токов во всех элементарных контурах должно при этом совпадать с направлением тока в контуре O . По любому внутреннему элементу сети будут при этом протекать два равных, но противоположно направленных тока. Заменяв вышеуказанным образом каждый из элементарных контуров тока маленьким магнитом и выбрав, ради простоты, длины этих магнитов δ одинаковыми, мы получим с обеих сторон поверхности O два слоя, из которых один состоит из северных, а другой из южных магнитных масс. Такой магнитный двойной слой эквивалентен по своему магнитному действию рассматриваемому току во всех точках, за исключением точек, лежащих в самом двойном слое.



Фиг. 6.

Определим сначала магнитный потенциал, создаваемый током, текущим по бесконечно малому контуру, на конечном от контура расстоянии. Заменяем ток магнитом $(-m, +m)$ (см. Фиг. 6) длины δ . Магнитный потенциал в точке P на расстоянии r будет равен

$$f_1 \left(\frac{m}{r} - \frac{m}{r + \delta} \right) = f_1 \frac{m}{r^2} \delta \cos \alpha,$$

где α обозначает угол, образованный направлением оси магнита с линией, соединяющей произвольную точку магнита с P , а f_1 — множитель пропорциональности, зависящий от выбора единицы для m . Положив $ff_1 = k$, мы получим, воспользовавшись (3),

$$ff_1 i \frac{d\Omega \cos \alpha}{r^2} = k \cdot i \cdot d\omega,$$

где $d\omega$ обозначает телесный угол, под которым виден из точки P контур поверхности $d\Omega$. Мы будем считать $d\omega$ положительным, если P расположена по ту же сторону элемента $d\Omega$, что и северный полюс эквивалентного магнита, т. е. если угол α острый. Для потенциала тока, текущего по контуру конечных размеров в точке P , лежащей вне поверхности, мы получим аналогично выражение $ki\Omega$, где i обозначает силу тока, а Ω — телесный угол, под которым виден контур тока из точки P .

Необходимо обратить внимание, что Ω может быть, смотря по обстоятельствам, как положительным, так и отрицательным. Поэтому для данного контура тока и данной точки P , Ω , а следовательно, и потенциал, может принимать различные значения. Если σ и σ_1 — два магнитных двойных слоя, могущие по вышеизложенному заменить магнитное действие тока, то оба они опираются на контур тока. Предположим, что σ и σ_1 расположены таким образом, что точка P находится

величину этого изменения равной произведению ki на телесный угол $P \cdot ba'ib'$. Эту величину можно представить в виде

$$\frac{ki}{r^2} ([\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C}),$$

где векторы $\mathbf{A} = aa'$, $\mathbf{B} = ab$ и $\mathbf{C} = aP$. Произведение $([\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C})$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, а произведение его на $\frac{1}{r^2}$ даст величину телесного угла, под которым из P видна площадка $bb'a'a$. В смысле знака $([\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C})$ положительно, если P расположена с положительной стороны площадки, определяемой направлением обхода по контуру $bb'a'a$.

Найденное выражение можно преобразовать следующим образом: [см. равенство (9) Введения]:

$$\frac{ki}{r^3} (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}]).$$

При таком написании непосредственно видно, что магнитное действие данного замкнутого тока можно считать состоящим из действий отдельных элементов ab , каждый из которых вызывает напряжение магнитного поля, даваемое выражением:

$$\frac{ki}{r^3} [\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}].$$

При перемещении на $aa' = \mathbf{A}$ единичного магнитного полюса работа этого поля выразится вышеприведенным выражением.

Для напряженности магнитного поля мы можем также написать выражение:

$$ki \left[ds \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r^2} \right], \quad (4)$$

в котором $\mathbf{r}_1$ рассматривается как единичный вектор, имеющий направление aP от элемента тока в рассматриваемую точку P . По абсолютной величине напряженность магнитного поля равняется

$$\frac{ki \sin \varphi ds}{r^2},$$

где φ обозначает угол между элементом тока и aP . Направление этого вектора соответствует повороту от направления тока к вектору aP .

Рассмотрим теперь подробнее значения, которые принимает линейный интеграл от напряженности магнитного поля электрического тока. При этом мы будем различать такие замкнутые пути интегрирования, которые не охватывают контура тока, и такие, которые его охватывают. При подсчете значения интегралов по первым путям мы можем заметить ток эквивалентным двойным магнитным слоем, не пересекающимся с путем интегрирования и эквивалентным поэтому току на всем пути интегрирования. В этом случае значение линейного интеграла равно нулю, так как после обхода по замкнутому пути, телесный угол Ω принимает опять начальное значение.

Рассмотрим теперь интеграл по замкнутому пути, охватывающему контур тока. Проведем эквивалентный току двойной магнитный слой, который в этом случае будет пересекаться с путем интегрирования. Пусть A и A' две точки на этом пути, расположенные весьма близко по обе стороны двойного магнитного слоя, и AA' пусть совпадает с направлением интегрирования. Рассматриваемый интеграл, распространенный по замкнутому пути, лишь весьма мало отличается от $\int_{A'}^A H_s ds$.

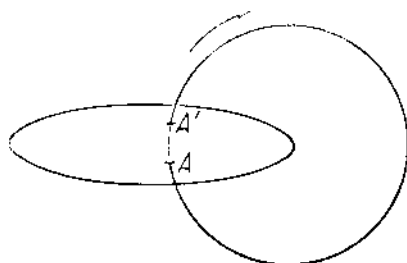
За исключением весьма малого элемента AA' для всех точек пути интегрирования между A' и A двойной магнитный слой дает правильные значения H . Разность между этим интегралом и искомым равна интегралу, распространенному по отрезку AA' , проходящему внутри слоя, и может быть сделана произвольно малой путем надлежащего уменьшения отрезка AA' . Это следует из того, что создаваемое током магнитное поле конечно и в этих точках ввиду того, что эквивалентный магнитный двойной слой может быть проведен через любую точку поля.

Поэтому мы можем написать:

$$\int H_s ds - \int_{A'}^A H_s ds = - \int_{A'}^A \frac{\partial V}{\partial s} ds = V_{A'} - V_A.$$

Знак интеграла изменяется при изменении направления интегрирования по контуру. Мы примем, что направление от A к A' соответствует направлению тока. Согласно вышесказанному

$$V_{A'} - V_A = ki (\Omega_{A'} - \Omega_A).$$



Фиг. 8.

Легко убедиться, что если в точке A' телесный угол имеет некоторое положительное значение $\bar{\Omega}$, то значение его в точке A будет $\bar{\Omega} - 4\pi$. В случае, изображенном на фиг. 8 (плоский контур тока и плоский двойной слой), начальное и конечное значения телесного угла равны соответственно $+2\pi$ и -2π . Окон-

чательно таким образом мы получаем:

$$\int H_s ds = 4\pi ki. \quad (5)$$

§ 4. Вывод первого уравнения Максвелла. До сих пор мы рассматривали только линейные токи. Если ток распределен пространственно (что, конечно, только и соответствует действительности), то мы можем подразделить его на трубки (нити) тока. Магнитное поле такого тока в точке, расположенной вне обтекаемого током пространства, мы найдем тогда как суперпозицию полей отдельных нитей тока. Так как каждая трубка тока замкнута, то ее магнитное поле может быть вычислено,

так выше указано. Для точек же, расположенных внутри обтекаемого оком пространства, выведенные выше законы неприменимы.

Чтобы рассмотреть и эти случаи, нам необходимо предварительно представить полученные выше результаты в несколько другой форме. Магнитное поле линейного тока в точке $P(x, y, z)$, лежащей вне тока, может быть вычислено при помощи закона Био и Савара. Пользуясь этим законом, мы можем написать выражения составляющих по осям напряжения магнитного поля порознь для каждого элемента тока, а затем подсчитать составляющие искомого вектора при помощи интеграла по всему контуру тока. Обозначив координаты некоторой точки элемента длины ds_1 буквами x_1, y_1, z_1 , а составляющие ds_1 через dx_1, dy_1, dz_1 , мы получим согласно (4) (индексы при координатах поставлены для отличия от величин, относящихся к точке P , в которой мы вычисляем магнитный вектор):

$$\begin{aligned} H_x &= ki \cdot \int \left(dy_1 \frac{z - z_1}{r^3} - dz_1 \frac{y - y_1}{r^3} \right), \\ H_y &= ki \cdot \int \left(dz_1 \frac{x - x_1}{r^3} - dx_1 \frac{z - z_1}{r^3} \right), \\ H_z &= ki \cdot \int \left(dx_1 \frac{y - y_1}{r^3} - dy_1 \frac{x - x_1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Введем теперь вспомогательный вектор $\mathbf{F}$, компоненты которого равны:

$$F_x = ki \int \frac{dx_1}{r}, \quad F_y = ki \int \frac{dy_1}{r}, \quad F_z = ki \int \frac{dz_1}{r}. \quad (6')$$

Вектор этот носит название векторпотенциала. Мы получим тогда для $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{F}. \quad (7)$$

Перейдем теперь к токам, заполняющим некоторый объем, и ограничимся сначала определением напряженности вызываемого ими магнитного поля в точках, лежащих вне заполненного токами объема. Для каждой трубки тока, которую мы будем отмечать индексом ν , мы можем вычислить вектор потенциала $\mathbf{F}_\nu$. Написав равенства (7) для всех нитей и просуммировав, мы получим для всего тока аналогичное равенство, в котором $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_\nu$, где суммирование распространено на все нити тока. В уравнениях для компонент $\mathbf{F}_\nu$ мы выразим силы токов i_ν , протекающих по отдельным трубкам через плотность $\mathbf{C}$ тока. Если ω_ν обозначает сечение трубки тока, то величина вектора плотности $\mathbf{C} = \frac{i_\nu}{\omega_\nu}$. Вводя еще углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, образуемые элементом ds_1 (или вектором $\mathbf{C}$) с осями координат, мы получим:

$$F_x = k \cdot \sum \int \frac{i dx_1}{r} = k \cdot \sum \int \frac{C \omega_\nu ds_1 \cos \alpha_1}{r}$$

и аналогичные выражения для других составляющих.

В этом равенстве интегриция распространяется на отдельные элементы каждой трубки тока, а суммирование — на все трубки.

Очевидно, тот же результат может быть получен и непосредственным интегрированием по пространству, занятому током, причем $(\omega, dS_1) = dS_1$ обозначает элемент объема интегрирования. Интеграция может быть при этом распространена и по всему объему поля, так как элементы, в которых не протекают токи, ничего не прибавляют к значению интеграла, потому что в них $\mathbf{C} = 0$.

Таким образом мы получаем:

$$F_x = k \cdot \int \frac{C_x}{r} dS_1, \quad F_y = k \cdot \int \frac{C_y}{r} dS_1, \quad F_z = k \cdot \int \frac{C_z}{r} dS_1 \quad (6)$$

и опять попрежнему

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{F}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что $\text{div } \mathbf{H} = 0$, т. е. что вычисляемый, таким образом, вектор напряженности магнитного поля соленоидален.

Чтобы вычислить линейный интеграл от этого вектора, найдем сначала $\text{rot } \mathbf{H}$. Мы получаем:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right),$$

по вне пространства, занятого током:

$$\Delta F_x = k \cdot \int C_x \Delta \frac{1}{r} dS_1 = 0$$

и

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= k \cdot \int \left\{ C_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + C_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + C_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS_1 = \\ &= -k \cdot \int \left\{ C_x \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r} \right) + C_y \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r} \right) + C_z \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS_1 = \\ &= -k \cdot \int \frac{1}{r} C_n d\tau_1 + k \cdot \int \frac{1}{r} \text{div } \mathbf{C} dS_1^{-1}. \end{aligned}$$

При этом, если объемный интеграл распространен на объем, обтекаемый током, то поверхностный интеграл, полученный из объемного при помощи теоремы Гаусса, должен быть распространен по поверхности, ограничивающей содержащий токи объем (поверхность проводников). На такой поверхности необходимо $C_n = 0$. Последнее слагаемое также исчезает, так как $\text{div } \mathbf{C} = 0$. Поэтому мы получаем, что $\text{div } \mathbf{F} = 0$. Это доказательство легко обобщить для случая, когда в обтекаемом током объеме имеются поверхности разрыва непрерывности вектора $\mathbf{C}$.

* При образовании div от $\mathbf{F}$ надо иметь в виду, что плотность тока $\mathbf{C}$ не зависит от координат x, y, z точки P , которая по условию находится вне объема, обтекаемого токами. *Прим. перев.*

Для этого достаточно выполнить вышеуказанные преобразования для частей объема, ограниченных этими поверхностями разрыва, и принять во внимание, что на них C_n остается непрерывной.

Таким образом мы получаем:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

и аналогично для остальных составляющих:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$$

и

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0,$$

или

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0.$$

Отсюда опять следует, что линейный интеграл от напряженности магнитного поля, взятый по контуру поверхности, целиком расположенной вне токов, равен нулю.

Внутри обтекаемого током объема, где вектор $\mathbf{C}$ отличен от нуля, мы определим вектор $\mathbf{H}$ аналогичным образом и будем называть его напряженностью магнитного поля. Сначала мы исследуем свойства этого вектора, а затем посмотрим, какое физическое значение следует ему приписать.

Из соображений, приведенных в § 9 Введения, следует, что и в этом случае компоненты F вполне определяются равенствами (6) и как сами компоненты, так и их первые производные являются непрерывными и конечными функциями. Вторые их производные также являются конечными функциями.

Далее, остается в силе равенство $\text{div } \mathbf{H} = 0$, следующее непосредственно из $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{F}$, независимо от особых свойств, которыми обладает вектор $\mathbf{F}$. Попрежнему остается верным соотношение:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\Delta F_x + \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{F} \text{ и т. д.}$$

Из равенства (35) § 10 Введения следует далее, что

$$\text{div } \mathbf{F} = 0,$$

но

$$\Delta F_x = -4\pi k C_x.$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi k C_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi k C_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi k C_z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi k \mathbf{C}. \quad (8')$$

Это соотношение остается в силе во всем пространстве, так как в точке, через которую токи не протекают, оно переходит в ранее найденное соотношение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$.

Уравнение (8') и есть первое максвелловское уравнение. Мы будем его в дальнейшем считать всегда выполняющимся. Оба найденные свойства вектора $\mathbf{H}$ могут быть также выражены следующими равенствами:

$$\oint H_n d\sigma = 0$$

для любой замкнутой поверхности и

$$\int H_s ds = 4\pi k \int C_n d\sigma_1,$$

где первый интеграл взят по любой замкнутой кривой, а второй — по любой поверхности, опирающейся на эту кривую. Отсюда, далее, следует, что для любой замкнутой поверхности

$$\int C_n d\sigma = 0.$$

Если вектор $\mathbf{C}$ задан для любой точки поля, то этим однозначно определяется повсюду и вектор $\mathbf{H}$ (см. § 8 Введения).

Теперь нам необходимо исследовать, какое физическое значение имеет введенный нами вектор $\mathbf{H}$. Для этого подсчитаем силу, действующую в поле вектора $\mathbf{H}$ на единичный северный полюс. Для этого единичный полюс должен быть помещен внутри полости проводника, причем полость эта должна окружать точку, для которой мы вычисляем $\mathbf{H}$. Строго говоря, сила эта не равна напряженности магнитного поля, вызываемого рассматриваемым током, так как при образовании полости распределение тока исказится. Можно, однако, доказать, что наблюдаемая сила приближается к пределу, равному значению вектора $\mathbf{H}$ при неограниченном уменьшении размеров полости, притом независимо от того, как было первоначально искажено распределение тока.

Обозначим действительную величину силы, действующей в полости на единичный полюс, буквой H' . Нужно доказать, что

$$\lim H'_x = H_x.$$

H'_x есть компонента напряжения магнитного поля в пространстве, в котором не течет ток. Поэтому

$$H'_x = \frac{\partial F'_z}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial z},$$

где

$$F'_x = k \cdot \int \frac{C'_x}{r} dS_1$$

и т. д., C' обозначает вектор плотности электрического тока, измененный благодаря введению полости. Интеграл должен быть распространен по всему объему вне полости. Так как, с другой стороны,

$$H_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

и т. д., то нам остается доказать, что

$$\lim \frac{\partial F'_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

и т. д.

Образует, с одной стороны, производную $\frac{\partial F'_z}{\partial y}$, для чего вычисляем интегралы

$$k \cdot \int C'_z \frac{\partial S_1}{r}$$

для двух бесконечно близких точек, исключая каждый раз полость из объема интегрирования. С другой стороны, по определению мы получим $\frac{\partial F_z}{\partial y}$, если вычислим значения

$$k \cdot \int C_z \frac{\partial S_1}{r}$$

для двух близких точек, исключая при каждой интеграции объем маленькой сферы, окружающей соответствующую точку, и перейдем к пределу при неограниченном уменьшении этих сфер. По приведенным в математическом введении соображениям указанные различия в объеме интегрирования не имеют влияния на результат. Далее, можно принять, что бесконечно малая полость не изменяет заметным образом значения плотности тока в точках, находящихся на конечном от нее расстоянии.

Разность между

$$\frac{\partial F'_z}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

равна

$$k \cdot \int (C'_z - C_z) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1.$$

Вследствие быстрого уменьшения $C'_z - C_z$ с расстоянием от точки, для которой определяются производные, только ближайшие к полости элементы объема интегрирования прибавляют заметные величины к значению этого интеграла. Допустим, что при заданной величине полости окружающее ее пространство разделено некоторым образом на элементы объема. Представим себе, далее, что все размеры уменьшены в p раз. При таком всестороннем сжатии каждый элемент объема становится меньше в p^3 раз и приближается в p раз ближе к центру.

Допустим, кроме того, что искажение $C'_z - C_z$ остается постоянным. Тогда каждый элемент интеграла, а следовательно, и весь интеграл, становится в p раз меньше и с безграничным увеличением p приближается к значению нуля. Таким образом, действительно,

$$\lim \frac{\partial F'_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

и т. д., откуда и следует вышеуказанная теорема.

§ 5. Намагничивающиеся среды. Совершенно точно вышеуказанные выводы приложимы только к вакууму. Для воздуха и большинства других сред они также выполняются с большой точностью. Но для таких веществ, как железо, и в несколько меньшей степени для ряда других веществ, как, например, никель и кобальт, дело обстоит совершенно иначе. Если эти вещества подвергаются действию магнитного поля, то они сами намагничиваются. Магнитное действие таких намагниченных сред мы можем описать, приняв, что в каждом элементе их объема появляются положительные и отрицательные магнитные массы μ образующие северный и южный полюса. При этом в каждом конечном элементе объема алгебраическая сумма этих масс равна нулю $\sum \mu = 0$. Мы будем считать, что это соотношение остается в силе и для физически бесконечно малых элементов объема. Подсчитывая потенциал, создаваемый магнитными полюсами такого элемента объема в произвольной внешней точке, мы получим $f_1 \sum \frac{\mu}{r}$, где f_1 обозначает уже ранее введенный коэффициент. Введем новую координатную систему с осями, параллельными прежним, и началом, совпадающим с некоторой точкой рассматриваемого элемента объема. Обозначим новые координаты точек элемента объема через x, y, z , а расстояние этой точки от точки P , для которой подсчитывается потенциал, через r . Далее, расстояние точки P от нового начала координат пусть будет r_0 , тогда:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_0} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_0} \right) + z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_0} \right) + \dots,$$

где, например, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_0} \right)$ есть значение, принимаемое выражением $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$ в новом начале координат. При помощи этого разложения мы получим:

$$\sum \frac{\mu}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_0} \right) \sum \mu x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_0} \right) \sum \mu y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_0} \right) \sum \mu z + \dots,$$

причем для достаточно малого элемента объема дальнейшими членами можно пренебречь.

Так как $\sum \mu = 0$, то величины $\sum \mu x$, $\sum \mu y$, $\sum \mu z$ не зависят от положения начала координат внутри элемента объема. Мы можем их рассматривать как компоненты некоторого вектора, независимого от направления осей. Чтобы доказать это последнее утверждение, достаточно

соказать, что если взять новую ось X_1 , образующую углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ по старым осям, то $\Sigma \mu x_1$ является проекцией нашего вектора на новую ось X .

Последнее же утверждение следует непосредственно из тождества:

$$\begin{aligned}\Sigma \mu x_1 &= \Sigma \mu (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1) = \\ &= \cos \alpha_1 \cdot \Sigma \mu x + \cos \beta_1 \cdot \Sigma \mu y + \cos \gamma_1 \cdot \Sigma \mu z.\end{aligned}$$

Вектор этот мы называем магнитным моментом рассматриваемого элемента объема. Магнитный момент единицы объема, являющийся вектором, изменяющимся, вообще говоря, от точки к точке, называют обычно намагничением. Мы будем обозначать этот вектор буквой I . Для потенциала намагниченного тела конечной величины мы получим при помощи ур-ния (30) § 8 Введения выражение:

$$\begin{aligned}f_1 \int \left\{ I_x \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{r} \right) + I_y \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r} \right) + I_z \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS_1 = \\ = f_1 \int \frac{1}{r} I_n d\sigma_1 - f_1 \int \frac{1}{r} \operatorname{div} I dS_1.\end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что внешнее действие намагниченного тела такое же, как будто поверхность его покрыта магнитными массами с поверхностной плотностью, равной I_n , а занимаемый им объем заполнен объемными магнитными зарядами с (объемной) плотностью, равной $-\operatorname{div} I$.

Чтобы выяснить характер магнитного поля, существующего внутри такого намагниченного тела, рассмотрим силу, действующую в произвольной внутренней точке на помещенный туда единичный магнитный полюс. Чтобы измерить эту силу, необходимо вырезать в исследуемом месте полость и поместить в нее маленький магнитик. При этом оказывается, что получающаяся сила зависит от формы вырезанной полости. В связи с этим в этом случае для описания магнитного поля недостаточно одного вектора, а оказывается необходимым ввести два вектора, которые мы назовем напряженностью магнитного поля и магнитной индукцией. Для их определения представим себе полость, вырезанную вокруг точки P , в которой мы хотим определить поле. Намагничение вне полости остается неизменным. Мы представляем себе помещенный внутри такой полости пробный магнитный полюс. Так как он находится вне намагниченного вещества, то согласно предыдущему действующие на него магнитные силы мы можем считать состоящими из трех частей. Во-первых, действия намагниченного вещества, покрытого на своей внешней поверхности магнитными зарядами, распределенными с поверхностной плотностью I_n . Это действие не зависит от формы полости. Во-вторых, действия вещества, намагниченного по всему его объему с объемной плотностью $-\operatorname{div} I$. Так же как для вектора F (см. предыдущий параграф), мы можем доказать, что и это действие не зависит от формы полости и приближается к определенному пределу при неограниченном ее уменьшении. В-третьих, надо принять еще во

нимание действие поверхностных зарядов, расположенных на внутренней поверхности полости. Если мы обозначим через n направление внешней к полости нормали, то поверхностная плотность этих последних будет $-I_n$. Действие их зависит от формы полости. Можно, однако, доказать, что действие это стремится к определенному пределу при равномерном стягивании полости к точке P . Для этого достаточно показать, что разность сил, проявляющихся в точке P в случае двух подобных по форме полостей, может быть сделана меньше произвольного, наперед заданного числа, если размер каждой из обеих полостей остается меньше некоторой величины. При этих условиях и в предположении, что вблизи точки P постоянно, сравним силы, которые вызывают в точке P поверхностные заряды, расположенные на рассматриваемых подобных полостях. Проведём через P произвольный элементарный конус и рассмотрим действие магнитных масс, лежащих на вырезанных из элементах поверхностей обеих полостей. Легко видеть, что действия эти равны, так как величина магнитных масс пропорциональна вырезанным конусом площадям, т. е. пропорциональна квадратам расстояний от P , силы же (по закону Кулона) изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния. Отсюда непосредственно следует истинность вышеприведенного утверждения.

Рассмотрим подробнее два частных случая. В обоих случаях полость пусть имеет цилиндрическую форму с точкой P в середине. Ось цилиндра пусть в обоих случаях совпадает с направлением намагничивания, но в первом случае пусть основания цилиндра бесконечно малы по сравнению с боковой поверхностью (весьма вытянутый цилиндр), а во втором, наоборот, площади оснований бесконечно велики по сравнению с боковой поверхностью (весьма низкий цилиндр). При полости первой формы действие магнитных масс, расположенных на внутренней поверхности полости, на магнитный полюс, помещенный в точке P , равно нулю. Действительно, боковая поверхность цилиндра не оказывает никакого действия, так как для нее $I_n = 0$. Действие же оснований цилиндра, направленное, очевидно, вдоль оси, можно вычислить при помощи следующих соображений: как известно, напряженность магнитного поля, создаваемого полюсом m на расстоянии r , равна $f_1 \cdot \frac{m}{r^2}$.

Если по ограниченной плоской поверхности равномерно распределен магнетизм с поверхностной плотностью d , то нормальная составляющая напряженности магнитного поля в произвольной точке P (считаемая положительной в направлении от плоскости) будет пропорциональна $f \cdot \omega$, где ω обозначает телесный угол, под которым из точки P видна намагниченная поверхность.

На том основании цилиндрической полости, где вектор I выходит из полости, значение поверхностной плотности имеет значение $-I$, а на противоположном основании $+I$. Искомая напряженность магнитного поля имеет поэтому направление I и равна $f_1 I (\omega_1 + \omega_2)$, где ω_1 и ω_2 обозначают телесные углы, под которыми видны из точки P основания цилиндра. Если высота цилиндра бесконечно велика по сравнению с диаметрами оснований, то оба эти угла равны нулю. Силу,

действующую в такой полости на единичный северный полюс, или, точнее говоря, предел, к которому стремится эта сила при безграничном уменьшении объема такой полости, мы будем называть напряженностью магнитного поля в намагниченном теле и будем также обозначать буквой $\mathbf{H}$. Позднее мы исследуем, в какой мере свойства нашего прежнего вектора $\mathbf{H}$ остаются в силе и в этом случае.

§ 6. Магнитная индукция. Рассмотрим теперь второй частный случай, т. е. полость, имеющую форму бесконечно низкого цилиндра. Цилиндрическая поверхность и в этом случае не оказывает никакого действия. Оба основания вызывают поле $f_1 \mathbf{I} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$, и так как высота цилиндра бесконечно мала по сравнению с размерами оснований, то мы получаем для этого поля выражение $4\pi f_1 \cdot \mathbf{I}$. Предел, к которому приближается сила, действующая на единичный северный полюс, помещенный в полости такой формы при беспредельном уменьшении объема полости, мы будем называть магнитной индукцией и обозначать буквой $\mathbf{B}$.

Таким образом в любой точке

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi f_1 \mathbf{I}. \quad (9)$$

В точках, расположенных вне намагниченных тел, $\mathbf{I} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. В таких точках оба эти вектора имеют вышеизложенные свойства. При наличии же в поле намагничивающихся сред, для описания магнитных свойств поля внутри таких сред, необходимы оба вектора $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$. Мы увидим, что изученные нами ранее свойства поля распределятся теперь между обоими этими векторами.

Вектор $\mathbf{H}$ является теперь равнодействующей напряжения магнитного поля, которое существовало до возникновения намагничения помещенных в поле тел и напряжения дополнительного магнитного поля, вызванного поверхностными и объемными магнитными массами, возникшими благодаря намагничению. Так как все эти составляющие поля являются потенциальными полями, то мы можем считать и результирующее поле потенциальным и положить:

$$H_h = -\frac{\partial V}{\partial h}.$$

Вне намагниченных тел $\Delta V = 0$, следовательно, $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Внутри же намагниченного тела мы получаем согласно теории потенциала $\Delta V = 4\pi f_1 \text{div } \mathbf{I}$.

(Это следует из того, что, расположенные на поверхности указательной в предыдущем параграфе полости магнитные массы не оказывают на $\mathbf{H}$ никакого влияния, а следовательно, единственное отличие по сравнению с внешними точками вызывается объемными зарядами, распределенными с объемной плотностью, равной $-\text{div } \mathbf{I}$.) Из последнего равенства следует:

$$\text{div } \mathbf{H} = 4\pi f_1 \text{div } \mathbf{I}, \quad (10)$$

т. е. вектор $\mathbf{H}$ в этом случае не является соленоиальным.

На поверхностях разрывов непрерывности имеют место тоже другие условия. Правда, из вышеизложенного следует, что потенциал всегда непрерывен и что тангенциальные составляющие $\mathbf{H}$ остаются непрерывными и на поверхностях разрыва, но для нормальных составляющих находим:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_I - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{II} = 4\pi f_1 I_n.$$

В более общем случае соприкосновения двух различных намагничивающихся сред мы получим:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_I - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{II} = 4\pi f_1 \{ (I_n)_I - (I_n)_{II} \}. \quad (11)$$

Первое уравнение Максвелла остается в разбираемом случае без изменения.

По отношению к вектору $\mathbf{B}$ очень легко показать, что он всегда соленоиден. Для точек, лежащих вне намагниченных тел, это следует из предыдущего, так как в таких точках $\mathbf{B}$ совпадает с $\mathbf{H}$. Внутри же намагниченных тел из (9) и (10) получается:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{H} + 4\pi f_1 \operatorname{div} \mathbf{I} = 0. \quad (12)$$

Далее, для поверхностей разрывов непрерывности имеем:

$$(B_n)_I - (B_n)_{II} - (H_n)_I + 4\pi f_1 (I_n)_I - (H_n)_{II} - 4\pi f_1 (I_n)_{II} = 0. \quad (12')$$

Отсюда следует, что для любой замкнутой поверхности

$$\oint B_n d\sigma = 0. \quad (12'')$$

Из двух уравнений, которые необходимы для определения вектора в свободном эфире, теперь выполняется только одно, второе же служит для определения вектора $\mathbf{B}$. Поэтому ни один из этих векторов не определен пока полностью. Между этими величинами должно существовать соотношение, характер которого надо найти экспериментально. Для слабых магнитных полей намагничение оказывается пропорциональным напряженности намагничивающего поля. Поэтому мы полагаем:

$$\mathbf{I} = \chi \cdot \mathbf{H}. \quad (13)$$

В качестве уравнения между векторами это равенство показывает также, что векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{H}$ одинаково направлены. Величина χ носит название магнитной восприимчивости. Для ферромагнитных (железо, никель, кобальт) и парамагнитных (например: кислород, хром, марганец) веществ магнитная восприимчивость положительна, а для диамагнитных веществ (каковы висмут и в малой степени, например, вода) она отрицательна.

Так как в изложенной теории на первом плане стоят векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, то для дальнейшего проще ввести соотношение непосредственно между ними. Из (13) при помощи (9) мы получаем:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (14)$$

где

$$\mu = 1 + 4\pi' \chi.$$

Коэффициент μ называется магнитной проницаемостью и согласно предыдущему для пара- и ферромагнитных веществ имеет значения больше единицы, а для диамагнитных — меньше единицы. Числовое его значение в общем случае лишь немного отличается от единицы, только для ферромагнетиков его значение много больше.

Для анизотропных веществ соотношение несколько сложнее:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu_{11}H_x + \mu_{12}H_y + \mu_{13}H_z, \\ B_y &= \mu_{21}H_x + \mu_{22}H_y + \mu_{23}H_z, \\ B_z &= \mu_{31}H_x + \mu_{32}H_y + \mu_{33}H_z, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

причем имеют место соотношения:

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad \mu_{13} = \mu_{31}, \quad \mu_{23} = \mu_{32}.$$

При этом всегда возможно так повернуть систему координат, что равенства эти упрощаются и принимают вид:

$$B_x = \mu_1 H_x, \quad B_y = \mu_2 H_y, \quad B_z = \mu_3 H_z. \quad (15')$$

Условием применимости всех этих соотношений является достаточная малость напряженности магнитного поля. В сильных полях могут наступать осложнения. В этом случае при данной напряженности магнитного поля соответствующая ей индукция не может быть указана однозначно. Получающаяся индукция зависит от механической термической обработки вещества и от величины магнитных полей, действию которых оно подвергалось ранее. Эти явления можно сравнить с явлениями последействия в твердых телах, подвергшихся деформации, их называют магнитным гистерезисом. Сюда относится также остаточный магнетизм, сильнее всего проявляющийся в постоянных стальных магнитах. Для всех этих случаев простое соотношение (14), вообще говоря, уже не имеет места. Только в случае постоянных магнитов можно с некоторым приближением положить $I = \text{const}$.

§ 7. Напряженность электрического поля. Перейдем теперь к рассмотрению второго уравнения Максвелла, относящегося к электрическому вектору, который мы будем ниже всегда обозначать буквой E . Опыт показывает, что на маленькое заряженное тело, помещенное в любой точке электрического поля, действует сила, пропорциональная его заряду. Ограничимся вначале рассмотрением свободного эфира (с большим приближением это относится и к воздуху). Силу, отнесенную к единице заряда такого пробного тела, мы будем называть напряженностью электрического поля в данной точке. В дальнейшем мы будем говорить о напряженности электрического поля не только в свободном эфире или в воздухе, но и в точках, лежащих внутри различных тел, например, внутри проводников. Для определения этой величины мы будем себе представлять полость, вырезанную внутри тела вокруг точки, в которой мы хотим измерить напряженность поля. Измеряя силу, действующую в такой полости на пробное тело, мы можем вычислить

напряженность электрического поля. При этом возникают те же трудности, что и при определении напряжения магнитного поля внутри намагничивающихся сред. Допустим пока, что мы преодолели эти трудности и умеем в любой точке любой среды найти значение вектора, соответствующее напряженности электрического поля в эфире. Вектор этот мы будем называть также электрическим вектором.

Состояние среды, вызывающее электрическое поле, является также причиной другого явления. Если такое состояние имеет место, в проводнике, то силы, проявляющиеся на заряженном пробном шарике, действуют и на находящиеся в проводнике заряды. Благодаря этому в проводнике возникает электрический ток. Исследование этого явления показало, что в изотропных проводниках направления линии тока совпадают с линиями электрического поля, а плотность тока пропорциональна вектору напряженности поля. Эта зависимость выражается векторным равенством:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}, \quad (16)$$

где коэффициент ρ , имеющий различные значения для разных веществ, носит название удельного сопротивления вещества.

§ 8. Диэлектрическое смещение. Теперь мы обратимся к более детальному рассмотрению электрических явлений в диэлектриках. Смещение зарядов (связанных в молекулах диэлектрика) вызывает возникновение квазиупругой силы. Поэтому под действием заданного внешнего поля через сечение каждой силовой трубки будет смещено определенное количество (связанного) заряда, при котором установится равновесие между смещающей внешней силой и квазиупругой силой диэлектрического напряжения. При этом ток смещения прекращается, и электрическое состояние диэлектрика может быть вполне определено указанием количества электричества, протекшего в каждой точке через помещенный в этой точке элемент поверхности. Чтобы вызвать продолжение течения тока смещения, необходимо усилить напряженность внешнего электрического поля. Простой пример такого движения электричества мы находим в уже упоминавшемся случае заряжения проводника. В то время как по проводнику протекает заряжающий его ток проводимости, в окружающем диэлектрике текут токи смещения. При этом в течении этого процесса как заряд проводника, так и напряженность окружающего его электрического поля непрерывно возрастают.

Для описания электрического состояния в данный момент времени мы введем в каждой точке вектор, определенный следующим образом. Составляющая этого вектора, взятая в любом направлении, равняется полному заряду, протекшему в этой точке через элемент поверхности, площадь которого равна единице и который расположен в данной точке перпендикулярно к данному направлению. Этот вектор мы будем обозначать буквой $\mathbf{D}$ и называть диэлектрическим смещением. Обозначая дифференцирование по времени точкой, поставленной над обозначающей вектор буквой, мы получим следующее векторное уравнение:

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{C}, \quad (17)$$

В стационарном состоянии $\dot{\mathbf{D}} = 0$, следовательно, и $\mathbf{C} = 0$. Из этого определения следует, что диэлектрическое смещение, подобно току, соленоидально. Поэтому для любой замкнутой поверхности, расположенной целиком в диэлектрике, $\oint \mathbf{D}_n d\sigma = 0$, или, что то же, $\text{div } \mathbf{D} = 0$. И на поверхностях разрыва непрерывности $(D_n)_I = (D_n)_{II}$.

Связь напряженности электрического поля с диэлектрическим смещением получается из опыта в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (18)$$

Величина ϵ получила название диэлектрической постоянной и является характерной для каждой среды величиной. Для анизотропных сред вместо (18) мы находим более сложную зависимость:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y + \epsilon_{13} E_z, \\ D_y &= \epsilon_{21} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z, \\ D_z &= \epsilon_{31} E_x + \epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

причем

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}, \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{31}, \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{32}.$$

При помощи подходящего выбора координатных осей эта система равенств может быть приведена к следующему более простому виду:

$$D_x = \epsilon_1 E_x, \quad D_y = \epsilon_2 E_y, \quad D_z = \epsilon_3 E_z.$$

§ 9. Второе уравнение Максвелла. В пространстве, окружающем заряженную материальную точку, напряженность электрического поля определяется законом Кулона и является вектором потенциальным. Поэтому линейный интеграл от электрического вектора, взятый в таком поле по любой замкнутой кривой, обращается в нуль:

$$\oint E_s ds = 0. \quad (19)$$

Это соотношение выполняется и в пространстве, окружающем замкнутый проводник, по которому протекает постоянный ток. Рассмотрим, какие значения принимает этот интеграл в других случаях. Вопрос этот может быть всегда легко разрешен экспериментально. Для этого достаточно представить себе замкнутый линейный проводник, помещенный вдоль пути интегрирования. Сила и направление электрического тока, возникающего в таком проводнике, будут определяться значением искомого интеграла по контуру. Если E_s имеет вдоль всего проводника одно и то же направление, которое мы примем за положительное, то в проволоке возникнет ток, текущий в том же положительном направлении [см. уравнение (16)], и $\oint E_s ds$ будет иметь положительное значение. Если E_s повсюду изменит свое направление, то как ток, так и значение интеграла изменят знак на обратный. Если E_s частью положительно, частью отрицательно, причем интеграл по контуру обращается в нуль, то ток в контуре возникнуть не может. Если интеграл не исчезает, то всегда появляется ток того же знака, что и значение

интеграла. Все эти явления могут быть точнее описаны, если мы воспользуемся аналогией с течением несжимаемой жидкости по трубе.

Если значение $\int E_s ds$ постоянно, или, по крайней мере, изменяется так медленно, что в течение времени наблюдения может быть рассматриваемо как постоянное, то течение электричества может быть сравнено со стационарным течением жидкости. Мы можем написать уравнение движения электричества, выражающее стационарность его движения.

Обозначая буквой ω поперечное сечение проводника, α — число подвижных единиц заряда в единице объема, p — силу, аналогичную гидростатическому давлению в жидкости, и β — коэффициент, дающий при умножении на скорость течения u силу трения, мы получим:

$$E_s \alpha \omega ds - \frac{dp}{ds} \omega ds - u \beta \alpha \omega ds = 0.$$

Очевидно, здесь $u \alpha \omega = i$ есть сила тока. Интегрируя вдоль всего проводника, мы получаем:

$$\int E_s ds = i \cdot \int \frac{\beta}{\alpha \omega} ds.$$

Множитель $\int \frac{\beta}{\alpha \omega} ds$ не зависит от поля и зависит только от свойств проводника. Таким образом мы видим, что возникающий в проводнике ток пропорционален линейному интегралу от напряженности поля, взятому по контуру тока.

Как известно, в замкнутом проводнике всегда возникает электрический ток, если в окружающем проводник магнитном поле происходят какие-либо изменения. Если проводник находится в эфире или в воздухе, то сила возникающего в нем тока подчиняется открытому Фарадему закону электромагнитной индукции, который гласит: сила тока, возникающего при индукции, пропорциональна изменению в единицу времени числа магнитных линий, охватываемых контуром тока. Как мы видели, это число линий является наглядным представлением величины поверхностного интеграла от напряженности магнитного поля, распространенного по поверхности, ограниченной контуром тока. Закон этот остается верным и для других сред, если вместо напряженности магнитного поля взять вектор магнитной индукции. Если мы выберем положительное направление обхода по контуру таким образом, чтобы оно соответствовало положительному направлению линии индукции, то сила тока будет получаться положительной при уменьшении значения поверхностного интеграла от магнитной индукции.

Как линейный интеграл от напряженности электрического поля, так и уменьшение в единицу времени потока магнитной индукции пропорциональны силе тока, поэтому мы получаем:

$$\int E_s ds = -k_1 \cdot \frac{d}{dt} \int B_n d\sigma, \quad (20)$$

причем коэффициент k_1 не зависит от природы проводника и определяется только выбором единиц, входящих в соотношение (20) величин.

Это уравнение носит название второго уравнения Максвелла. Оно равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -k_1 \cdot \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -k_1 \cdot \frac{\partial B_y}{\partial t},\end{aligned}\quad (21)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -k_1 \cdot \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

или $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -k_1 \dot{\mathbf{B}}.$ (21')

§ 10. Электродвижущая сила. До сих пор мы не разобрали вполне еще одной проблемы, которая может иметь важное значение в замкнутых электрических цепях. Опыт показывает, что в таких цепях может возникнуть электрический ток, обусловленный иными причинами, чем те электрические силы, которые входят в вышеприведенные уравнения. Так, например, ток возникает благодаря химическим взаимодействиям или неравномерности температуры и т. п. Все силы, действующие в этих случаях на электрические заряды, мы объединим под названием электродвижущих сил и будем обозначать в точках, где они существуют, вектором $\mathbf{E}_e$. Уравнение (16) необходимо в этом случае обобщить следующим образом:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_e). \quad (22)$$

Уравнения (20) и (21) остаются при этом без изменения. Электродвижущая сила вызывает такое же движение зарядов, как и вектор напряженности электрического поля, но проявляется она только в проводниках и имеет другое происхождение.

§ 11. Выбор единиц. В полученные уравнения входит еще ряд коэффициентов, зависящих от выбора единиц. Теперь нам необходимо выбрать эти единицы. При этом будем исходить из следующих соотношений:

1. Из закона

$$K = f_1 \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (23)$$

где K обозначает силу взаимодействия двух магнитных полюсов массы m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r . Это равенство выражает закон Кулона для магнитных полюсов. Множитель f_1 в этом равенстве совпадает с коэффициентом, который мы имели в уравнениях § 3 и 5 и в равенствах (9) и (12) главы первой.

2. Из уравнений (8) и (21), из которых мы выписываем по одному из каждой системы:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 4\pi k C_x \quad (8)$$

и

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -k_1 \cdot \frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (21)$$

3. Из уравнений (17), (18) и (14):

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

4. Из выражения закона Кулона для точечных заряженных электрических тел:

$$K = f_2 \cdot \frac{ee_1}{r^2}, \quad (24)$$

в котором e и e_1 обозначают заряды, а r — их взаимное расстояние, которое должно быть большим по сравнению с их размерами. K обозначает силу их взаимодействия.

Это последнее соотношение может быть выведено из предыдущих. Заряд e , подведенный к телу при его зарядении, равняется благодаря несжимаемости электричества (это следует из соленоидальности электрического тока) количеству электричества, перешедшему в виде тока смещения в окружающий диэлектрик. При этом через любую замкнутую поверхность, окружающую заряженное тело, смещено то же количество электричества. Поэтому мы имеем равенство:

$$e = \int D_n d\sigma.$$

Если в качестве такой поверхности мы выберем шар большего по сравнению с заряженным телом радиуса, центр которого лежит внутри заряженного тела, то на всей поверхности такого шара $\mathbf{D}$ будет направлено по радиусу, т. е. по нормали к поверхности, и будет иметь постоянную величину. Таким образом мы получим:

$$e = 4\pi r^2 D,$$

и при помощи соотношения (18)

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Сила, действующая в этом поле на вторую заряженную точку с зарядом e_1 , находящуюся на расстоянии r от первой, будет

$$\frac{ee_1}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Сравнивая с (24), мы видим, что

$$f_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon}.$$

Далее, между коэффициентами f (§ 3 гл. I) и k_1 (§ 9 гл. I) существует соотношение, которое может быть выведено из закона сохранения энергии. Для этого вернемся еще раз ко второму равенству приведенному в § 9 настоящей главы. Первое слагаемое этого равенств

представляет силу, действующую на количество электричества, находящегося в элементе dS . Умножив эту силу на скорость u , мы получим работу этой силы в единицу времени $iE_s ds$. Пронтегрировав это выражение по всей цепи тока и принимая во внимание постоянство вдоль цепи i , мы получим всю работу, совершаемую электрическими силами в единицу времени:

$$i \int E_s ds.$$

Работа эта должна равняться (выраженному в единицах работы) количеству тепла, развивающемуся в цепи в единицу времени. Написав третье уравнение (§ 9 гл. I) в форме:

$$\int E_s ds = i\omega$$

(величина ω есть омическое сопротивление цепи), мы получим:

$$i \int E_s ds = i^2\omega;$$

$i^2\omega$ выражает, таким образом, количество тепла, развиваемое током в единицу времени (закон Джоуля). Если в цепи имеются и электродвижущие силы, то мы должны написать:

$$i \int E_s ds + i \int E_{es} ds = i^2\omega.$$

Второй член левой части представляет при этом работу электродвижущих сил.

Рассмотрим теперь следующий опыт. Пусть в конечной величины контуре 1 действуют постоянной величины электродвижущие силы E_e , которые при отсутствии других вызывающих ток причин поддерживают в контуре ток i постоянной силы. В некоторой точке создаваемого этим током магнитного поля H мы помещаем замкнутую плоскую катушку 2 настолько малых размеров, чтобы по всему ее сечению поле можно было считать равномерным. Выберем вдоль цепи 2 положительное направление обхода, а следовательно, и положительное направление нормали к поверхности π . Пусть катушка 2 может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к H . При таком вращении угол θ , образованный π и H , будет принимать всевозможные значения. Положим, что при помощи какого-либо механизма мы заставляем катушку совершать произвольное периодическое вращение вокруг вышеуказанной оси. При этом в катушке 2 будут индуцироваться (переменные) токи, которые будут оказывать обратное действие (реакцию) на цепь 1. Допустим, кроме того, что сила тока в 1, несмотря на эту реакцию, остается постоянной, благодаря действию добавочных электродвижущих сил $\bar{E}_e$, соответственным образом подобранных (действующих сверх постоянных электродвижущих сил E_e).

Из закона сохранения энергии следует, что в любой элемент времени работа внешних сил, т. е. сумма работ электродвижущих сил и

действующих на контур (2) механических сил должна быть равна изменению энергии системы. Применим это к целому периоду. Так как в конце периода состояние системы то же, что и в начале, то нам нет необходимости учитывать энергию, которая, как мы увидим ниже, имеется в занимаемом полем пространстве. Изменения энергии системы состоят в этом случае только в выделении тепла в цепях (1) и (2). Если i' обозначает силу тока в цепи (2), ω — сопротивление цепи (1), ω' — сопротивление (2), A — работу механических сил, необходимых для преодоления сил, действующих в поле на катушку, то мы получим:

$$\int i F_e dt + \int i \bar{F}_e dt + A = \int i^2 \omega dt + \int i'^2 \omega' dt,$$

где для сокращения буквами F_e и $\bar{F}_e$ обозначены значения линейных интегралов от E_e и E_e , взятых по контуру (1).

Заметим, что кроме вышеупомянутых механических сил должны действовать еще и другие, а именно те, которые необходимы для сообщения (2) тех же движений в отсутствии токов. С этими силами мы, однако, можем не считаться, так как производимая ими работа превращается в кинетическую энергию движения катушки.

Электродвижущие силы E_e должны нейтрализовать индукционные действия в цепи (1). Поэтому должно иметь место равенство [см. уравнение (20)]:

$$\bar{E}_e = k_1 \cdot \frac{dN}{dt},$$

где N обозначает число линий индукции, пронизывающих контур (1). N , как и все другие переменные величины, изменяется периодически, поэтому $\int \bar{E}_e dt$, взятый за целый период, равняется нулю. Так как сила тока i постоянна, то второй член в уравнении энергии исчезает. Кроме того, первые члены правой и левой частей равны, так как они имеют то же значение, которое они имели бы, если бы цепь (2) не двигалась, а в этом случае они являлись бы единственными отличиями от нуля членами уравнения энергии. Отсюда мы заключаем, что:

$$A = \int i'^2 \omega' dt,$$

т. е. развивающаяся в цепи (2) теплота равна работе механических сил.

Если ω обозначает площадь витка (2), то число пронизывающих ее магнитных линий равно

$$\omega H \cos \vartheta,$$

а скорость изменения этого числа

$$= \omega H \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}.$$

Поэтому из закона индукции (20) следует:

$$i' \omega' = k_1 \omega H \sin \theta \cdot \dot{\theta},$$

что дает для развиваемой за период теплоты выражение:

$$k_1 \omega H \int i' \sin \theta d\theta,$$

где интеграл должен быть распространен на весь период.

Чтобы вычислить механические силы, вспомним (см. гл. I, § 3), что катушка (2) действует, как магнит, момент которого равен

$$f \omega i',$$

и имеет направление $\mathbf{n}$. Опыт показывает, что, будучи помещен в магнитное поле, такой виток испытывает такое же действие, как и эквивалентный магнит.

Отсюда следует, что внешняя сила, необходимая для вращения витка, является парой сил, момент которой равен

$$f \omega H i' \sin \theta.$$

Для величины работы A это дает:

$$f \omega H \int i' \sin \theta d\theta.$$

Сравнивая полученные для A и $\int i' \omega' dt$ выражения и приняв во внимание, что они не могут быть равными нулю, так как в присутствии тока i' количество выделяющегося тепла положительно, мы заключаем, что $f = k_1$. В связи с соотношением $f f_1 = k$ (§ 3 гл. I) это дает:

$$k_1 \cdot f_1 = k.$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентами формул (23), (8) и (21).

Заметим еще, что формула (23) относится к случаю, когда оба магнитных полюса находятся в свободном эфире, и что при выводах § 3 гл. I и при получении вышеприведенного соотношения между коэффициентами мы предполагали, что рассматриваемые токи окружены свободным эфиром. Подобным же образом в § 5 мы допустили, что вырезанная в намагниченном теле полость заполнена только эфиром.

Мы считаем, что уравнения Максвелла (8) и (21) остаются применимыми во всех средах при постоянных значениях коэффициентов k_1 и k . Особенности среды проявляются при этом в том, что в правой части (21) входит магнитная индукция $\mathbf{B}$, зависящая в разных телах по-разному от напряжения магнитного поля, а также в том, что плотность тока $\mathbf{C}$, входящая в уравнение (8), по-разному зависит от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ (и от электродвижущих сил $\mathbf{E}_p$). В диэлектриках имеют место равенства (17) и (18), в проводниках — (22).

В законе Кулона (24), если заряженные частицы находятся в свободном эфире, мы должны согласно вышенайденному значению f_2 написать:

$$f_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

где ϵ_0 обозначает диэлектрическую постоянную свободного эфира, значение которой зависит от выбора единиц. Напротив, значение μ согласно тому, как мы ввели эту величину, имеет для свободного эфира фиксированное значение $\mu = 1$. Это вытекает из того, что не имеет смысла вводить понятие о намагничивании эфира, а для $I = 0$ согласно (9) $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

А. Электромагнитные единицы мы получим, если введем в (23) в качестве коэффициента f_1 числовую величину нулевой размерности и положим ее равной 1. Если, далее, мы выберем $k = 1$, то из предыдущего следует, что и $k_1 = 1$. Этим выбором значений коэффициентов однозначно определяются все единицы, в которых должны быть выражены встречающиеся в уравнениях величины. Во-первых, этим определяется единица магнетизма [из (23)] далее, единицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, так как эти величины определены силами, действующими на установленную уже единицу магнетизма. Далее, единицы для $\mathbf{C}$ и $\mathbf{E}$ определяются уравнениями (8) и (21). Определив в каком-либо частном случае числовое значение $\mathbf{C}$, т. е. количества протекающего в единицу времени электричества, мы, очевидно, тем самым устанавливаем единицу электрического заряда. В этом случае определяется и числовое значение $\mathbf{D}$, после чего из (18) получается значение ϵ , а из него мы найдем коэффициент f_2 . Значение этого коэффициента мы можем, таким образом, получить из опыта, мы обозначим это значение c^2 . На основании изложенного можно показать, что c имеет размерность скорости, и мы ниже увидим, что значение c совпадает со скоростью распространения света в свободном эфире.

Б. Электростатические единицы мы получим, если положим в (24) $f_2 = 1$. Благодаря этому числовое значение $\epsilon\epsilon_1$ становится больше, чем в предыдущем случае в c^2 раз. Следовательно, электростатическая единица заряда в c раз меньше электромагнитной. Определенная этим электростатическая единица силы тока также в c раз меньше электромагнитной. Поэтому численные значения входящих в наши равенства векторов изменятся: $\mathbf{C}$ будет иметь значение, в c раз большее, а $\mathbf{E}$ в c раз меньшее ($\mathbf{E}$ будет в этом случае измеряться силой, действующей на единицу заряда, в c раз меньшую). Значение же смещения $\mathbf{D}$ увеличится в c раз. В то время как при электромагнитной системе единиц мы имели для свободного эфира

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \mathbf{E}.$$

теперь мы будем иметь

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Положив в уравнение (8) опять $k = 1$, мы получим, что численное значение $\mathbf{H}$, так же, как и $\mathbf{C}$, увеличится в c раз, т. е. единица магнит-

ного полюса в электростатической системе в c раз больше, чем в электромагнитной. Отсюда следует, что f_1 в (23) получит значение c^2 . Так как далее численное значение B увеличится, а E уменьшится в c раз, то коэффициент k_1 должен получить значение $k_1 = \frac{1}{c^2}$. Как видим, при этом соотношение $k_1 f_1 = k$ опять удовлетворяется.

В. Можно, далее, определить единицу электрического заряда, а вместе с ней и единицы для E , C и D в электрической системе, а единицу количества магнетизма и единицы H и B — в электромагнитной системе. Левая часть уравнения (8) остается при этом выраженной в электромагнитной системе, но C станет в c раз больше, так что k получается равным $\frac{1}{c}$. Так как $f=1$, то $k_1 = \frac{1}{c}$ и из $f_2=1$ следует, что $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$. Это — система единиц Герца.

Г. В последней системе единиц мы введем еще следующее предложенное Хевизайдом изменение, благодаря которому из уравнения (8) и из отношения E к D выпадает множитель 4π . Благодаря этому уравнения становятся более симметричными, и в них лучше выступают взаимные соотношения между магнитными и электрическими явлениями. Мы достигнем этого упрощения, если положим в (23) $f_1 = \frac{1}{4\pi}$ и в (24) $f_2 = \frac{1}{4\pi}$. Таким образом мы выбираем единицу заряда в $\sqrt{4\pi}$ раз меньшую, чем электростатическая, и единицу магнитного полюса в $\sqrt{4\pi}$ раз меньшую, чем электромагнитная единица.

Благодаря этому $4\pi k = k_1 = \frac{1}{c}$ и в свободном эфире $D = E$.

§ 12. Сводка основных уравнений. Система уравнений, с которой мы будем иметь дело, в дальнейшем получает теперь следующий вид:

$$\int H_s ds = \frac{1}{c} \int C_n d\tau, \quad (I)$$

$$\int E_s ds = -\frac{1}{c} \int \dot{B}_n d\tau. \quad (II)$$

Значение этих интегралов достаточно ясно после всего вышеизложенного:

$$B = \mu H, \quad (III)$$

$$C = \dot{D} \text{ в диэлектрике,} \quad (IV)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon E \text{ „} \\ C &= \frac{1}{\rho} (E + E_e) \text{ в проводнике.} \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Уравнения (III) и (V) должны быть заменены в случае анизотропных тел другими, более сложными (см. § 6 и 7 гл. I), и должны быть

рассматриваемы вообще как эмпирические зависимости, приложимые только в простых случаях. Для свободного эфира $\mu=1$ и $\epsilon=1$.

Уравнения (I) и (II) равносильны следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} C_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} C_y \\ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} C_z \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{C}, \quad (I)$$

а следовательно, $\text{div } \mathbf{C} = 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_z \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \quad (II)$$

и, следовательно, $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

К этим уравнениям должны быть присоединены следующие условия для поверхностей разрыва непрерывности:

$$\begin{aligned} (C_n)_I &= (C_n)_{II}, & (B_n)_I &= (B_n)_{II}; \\ (H_s)_I &= (H_s)_{II}, & (E_s)_I &= (E_s)_{II}. \end{aligned}$$

Два верхних уравнения выражают непрерывность нормальных составляющих тока и магнитной индукции, следующую непосредственно из соленоидального характера этих векторов. Два нижних выражают непрерывность тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей. Последние равенства могут быть выведены из (I) и (II). Пусть AB будет произвольная кривая на поверхности разрыва. Пусть далее A_1A_2 будет бесконечно малый отрезок прямой, перпендикулярной к поверхности, середина которого лежит на AB . Представим себе, что A_1A_2 скользит вдоль AB , и обозначим буквой σ поверхность, описанную им при этом движении. Применим к этой поверхности интегральные соотношения (I) и (II) и перейдем к пределу, предполагая, что длина A_1A_2 уменьшается до нуля. Если рассматриваемые электромагнитные величины остаются конечными и на поверхности разрыва непрерывности, то как в (I), так и во (II) правые части уравнений обращаются в пределе в нули. Равным образом исчезают и части линейных интегралов левых частей (I) и (II), относящиеся к отрезкам A_1A_2 и A_2A_1 . Отсюда следует, что линейные интегралы от векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, взятые по линиям, описанным движением точек A_1 и A_2 , равны, что и доказывает непрерывность тангенциальных составляющих H_s и E_s .

Если не все электромагнитные величины остаются на поверхности разрыва конечными, то мы получим другие результаты. Пусть ток конечной силы протекает по тонкому лентообразному проводнику, и мы представим себе, что толщина этого проводника уменьшается до нуля, сила же тока остается постоянной. Таким образом мы приходим к понятию (фиктивного) поверхностного тока, для которого C бесконечно велико. Легко видеть, чему в этом случае будет равна разность тангенциальных составляющих H_z по обе стороны от поверхностного тока.

После того как мы выбрали систему единиц, которой и будем придерживаться в дальнейшем, мы обратим еще внимание на следующее. В нашей системе сила взаимодействия двух (находящихся в эфире) магнитных полюсов равняется $\frac{mm_1}{4\pi r^2}$. Сила взаимодействия двух точечных

зарядов: $-\frac{ee_1}{4\pi r^2}$, и виток площади ω , несущий ток силы i , эквивалентен

магниту с моментом $\frac{i\omega}{c}$.

Глава II.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА.

§ 1. Постановка электростатической проблемы. В электростатике мы рассматриваем электрическое состояние системы, образованной произвольно расположенными заряженными проводниками и диэлектриками, причем предполагается, что нигде не протекают токи ($C=0$) и магнитная индукция повсюду постоянна. При этом может, конечно, существовать постоянное магнитное поле, как, например, магнитное поле земли, но мы увидим, что такие поля в рассматриваемых явлениях не играют никакой роли. Благодаря последнему предположению второе уравнение Максвелла принимает вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Это означает, что существует электрический потенциал φ , так что

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi.$$

Эта величина играет существенную роль в электростатике, особенно в математических ее проблемах. Поэтому мы в первую очередь исследуем свойства этого потенциала. Он непрерывен во всем поле. Внутри проводников вектор $\mathbf{E}$ должен удовлетворять условию: $C = \frac{\mathbf{E}}{\varphi}$ (мы считаем электродвижущие силы отсутствующими). Поэтому в электростатическом поле внутри проводников $\mathbf{E} = 0$. Отсюда следует, что потенциал внутри и на поверхности каждого проводника имеет постоянное значение. Другими словами, поверхность каждого проводника является эквипотенциальной поверхностью, поэтому напряженность электрического поля повсюду перпендикулярна к поверхности проводника.

Если мы имеем дело с изотропным диэлектриком, то имеет место соотношение $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, т. е. вектор $\mathbf{D}$ повсюду параллелен $\mathbf{E}$.

Интеграл $D_n d\sigma$, распространенный по поверхности проводника, дает, как мы видели, общий заряд проводника. Так как $\int D_n d\sigma$, взятый по любой замкнутой поверхности, равняется находящемуся внутри этой поверхности заряду, то, как легко видеть, D_n в любой точке поверхности проводника равняется имеющейся в этой точке (поверхностной) плотности электричества. Для доказательства достаточно применить вышеказанное свойство $\int D_n d\sigma$ к цилиндру, образующие которого перпенди-

куляры к поверхности, а основания расположены по обе стороны от поверхности.

Напомним, что потенциал определяется с точностью до постоянной слагаемой, которую мы выберем таким образом, чтобы потенциал в бесконечно удаленных точках обращался в нуль.

Ближайшей задачей электростатики является определение электрического поля, если нам заданы потенциалы всех проводников. Задача эта будет решена, если мы сумеем найти значение потенциала в любой точке пространства.

В диэлектрике мы имеем повсюду:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

Следовательно, для изотропного диэлектрика:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (1)$$

Если диэлектрики однородны и соприкасаются друг с другом по некоторым поверхностям, на которых ε изменяется скачком, то для любой точки, расположенной внутри каждого из диэлектриков, мы получим:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2)$$

Потенциал φ , определяемый значением линейного интеграла от конечной величины $\mathbf{E}$, остается непрерывным и на поверхностях соприкосновения различных диэлектриков. В силу непрерывности D_n мы имеем на этих поверхностях:

$$\varepsilon_I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_I = \varepsilon_{II} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{II};$$

во Введении мы видели, что эти уравнения в соединении с вышеуказанными условиями на поверхности проводников и в бесконечно удаленных точках однозначно определяют потенциальную функцию.

Рассмотрим теперь случай отдельного проводника. Если мы нашли для него какое-либо решение φ , то ввиду линейности уравнений все условия будут удовлетворены, если мы увеличим повсюду (в том числе и на поверхностях проводников) значения потенциала в некоторое число (например A) раз. При этом, конечно, значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, а следовательно, и величины зарядов тоже увеличатся в A раз. Если мы обозначим заряд, который имеет проводник при потенциале, равном единице, буквой C , то из вышесказанного очевидно, что заряд этого проводника при потенциале φ единиц будет равен $C\varphi$. Величину C называют емкостью проводника.

Соотношение, которое мы только что вывели для одного проводника, пользуясь тем обстоятельством, что φ определяется линейными уравнениями, является частным случаем гораздо более общей теоремы. Если две функции точки φ_1 и φ_2 удовлетворяют в некоторой области пространства системе линейных уравнений, то в той же области

система эта удовлетворяется и функцией $A\varphi_1 + B\varphi_2$ (принцип суперпозиции). Граничные значения, заданные для поверхности проводников, должны быть при этом соответственным образом изменены.

Ниже мы приводим ряд конкретных примеров решений электростатических задач, причем для упрощения мы будем предполагать, что заряженные проводники находятся в однородном изотропном диэлектрике, например в воздухе. И в этом случае мы сможем решить возникающие проблемы только в отдельных частных случаях. При нахождении решений мы, вообще говоря, будем поступать следующим образом. Найдя при помощи подходящего преобразования уравнения Лапласа какое-либо из его решений, мы при помощи, например, подбора постоянных будем стремиться привести его к виду, удовлетворяющему заданным на границах условиям.

§ 2. Примеры. Рассмотрим, во-первых, изолированный заряженный проводник, имеющий форму шара радиуса a . В этом случае электрическое поле вполне симметрично по отношению к центру шара. На любой концентрической проводящей шаровой поверхности все характеризующие поле величины имеют постоянное значение. Ввиду этого и потенциал φ является функцией только расстояния r от центра. Введя сферические координаты, мы получим уравнение Лапласа как функцию только одного r в виде:

$$a^2 \varphi'' + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

или после умножения на r^2 в виде:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{c}{r^2}$$

и

$$\varphi = -\frac{c}{r} + C_1.$$

Константы интегрирования необходимо выбрать таким образом, чтобы, во-первых, для бесконечно большого расстояния получилось $\varphi = 0$. Это дает $C_1 = 0$, и, во-вторых, на поверхности проводника, т. е. для $r = a$, должно быть

$$\varphi = \varphi_1 = -\frac{c}{a},$$

откуда

$$c = -a\varphi_1.$$

Таким образом мы получаем решение в виде:

$$\varphi = \frac{a}{r} \varphi_1.$$

Линии сил и смещения расположены радиально и

$$\varepsilon E = D = \varepsilon \frac{a}{r^2} \varphi_1.$$

Заряд шара равняется

$$e = \int \varepsilon \frac{a}{r^2} \varphi_1 d\Omega = 4\pi \varepsilon r \varphi_1.$$

Отсюда емкость шара получается равной $C = 4\pi \varepsilon a$. Если диэлектриком является эфир (или воздух), то $C = 4\pi a$ (в электростатической системе $C = a$, в электромагнитной $C = \frac{a}{c^2}$).

Значение диэлектрического коэффициента среды зависит от выбора единиц измерения, отношение же диэлектрических коэффициентов двух сред, очевидно, не зависит от выбора единиц. Отношение диэлектрического коэффициента данного вещества к диэлектрическому коэффициенту эфира называют удельной индукцией этого вещества. Так как при нашем выборе единиц для эфира $\varepsilon = 1$, то удельная индукция всех веществ численно равна диэлектрическому коэффициенту. Из вышеизложенного следует, что емкость шарообразного проводника, находящегося в однородной и изотропной среде, пропорциональна удельной индукции среды. Это имеет место и для проводников любой другой формы.

Аналогичным образом можно определить поле между двумя concentрическими шаровыми поверхностями радиусов a_1 и a_2 ($a_1 > a_2$, сферический конденсатор), и в этом случае потенциал φ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0,$$

откуда

$$\varphi = -\frac{C}{r} + C_1.$$

Значения констант интегрирования должны быть в этом случае определены из условий, согласно которым на заданных шаровых поверхностях потенциал имеет заданные значения: $\varphi = \varphi_1$ для $r = a_1$ и $\varphi = \varphi_2$ для $r = a_2$.

$$\varphi_1 = -\frac{C}{a_1} + C_1,$$

$$\varphi_2 = -\frac{C}{a_2} + C_1.$$

Определив отсюда значения C и C_1 и подставив в выражение потенциала, получаем:

$$\varphi = -\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{a_1 \varphi_1 - a_2 \varphi_2}{a_1 - a_2}.$$

Напряженность электрического поля и диэлектрическое смещение направлены по радиусам и их значение (положительное направление совпадает с направлением радиуса) равно:

$$E = -\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r^2},$$

$$D = -\varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r^2}.$$

Заряд внутренней шаровой обкладки равен

$$e = -\int \varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{a_2^2} d\sigma = -4\pi\varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Заряд наружной обкладки имеет такую же абсолютную величину, но противоположный знак.

При $\varphi_1 - \varphi_2 = 1$ заряд численно равен емкости. Обозначая ее буквой C , мы получим:

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}.$$

Значение C тем больше, чем меньше $a_1 - a_2$. Если пространство между обкладками заполнено воздухом, то (полагая для воздуха $\varepsilon = 1$)

$$C = 4\pi \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2},$$

(в электростатических единицах: $C = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$, в электромагнитных: $C = \frac{1}{c^2} \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$).

Еще проще решение для случая двух параллельных проводящих плоскостей. Взяв ось X перпендикулярно к этим пластинам, мы получим:

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

так как вследствие симметрии потенциал φ будет функцией только одной координаты x . Интегрируя это уравнение, находим:

$$\varphi = Cx + C_1.$$

Пусть для одной пластины $x = 0$ и значение потенциала φ_1 , а для другой $x = d$ и значение потенциала φ_2 . Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= Cd + C_1, \\ \varphi_2 &= C_1.\end{aligned}$$

откуда

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} x + \varphi_2.$$

Строго, это равенство приложимо только в случае бесконечно больших поверхностей. В случае же пластин конечных размеров, расположенных параллельно друг другу на расстоянии, малом по сравнению с их размерами (плоский конденсатор), полученное уравнение остается приложимым во всех точках, расстояние которых от краев велико по сравнению с расстоянием между пластинами. Вблизи же краев векторные линии поля изогнуты наружу. Кроме того, некоторая часть линий поля исходит и из задних поверхностей пластин. При помощи искусственного приема (примененного, например, в абсолютном электрометре Томсона) можно достигнуть того, что полученная нами формула будет приложима ко всей интересующей нас поверхности. Прием этот состоит в том, что нужную нам поверхность мы вырезаем из большей поверхности и оставляем остальную часть этой поверхности в виде охранного кольца, окружающего вырезанную поверхность. Если такие охранные кольца мы будем заряжать до той же разности потенциалов, что и внутренние пластины, то выгибания линий поля на краях произойти не сможет, и наша формула будет приложима ко всей внутренней поверхности. Если поверхность пластины рассматриваемого конденсатора S , то аналогично предыдущему, мы легко можем вычислить заряд и емкость такого конденсатора.

Мы получаем:

$$E = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}, \quad D = -\varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Заряд пластины, имеющей потенциал φ_2 ,

$$e = S\varepsilon \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d},$$

и емкость конденсатора

$$C = \frac{S\varepsilon}{d}$$

(в электростатической системе $C = \frac{S\varepsilon}{4\pi d}$, в электромагнитной $C = \frac{S\varepsilon}{4\pi c^2 d}$).

Если между пластинами находится воздух, то опять мы можем положить $\varepsilon = 1$. Совершенно аналогично выполняется подсчет для двух коаксиальных цилиндров (цилиндрический конденсатор).

Из приведенных примеров мы видим, что при решении подобных проблем первостепенное значение имеет теорема однозначности, согласно которой электростатическое поле однозначно определяется следующими условиями. Значения потенциала φ и его первых производных по координатам должны быть непрерывны во всем поле. На поверхности проводников и в бесконечности потенциал, оставаясь непрерывным, должен принимать определенные значения и удовлетворять во всех точках вне проводников уравнению Лапласа. Если мы найдем решение, удовлетворяющее всем этим условиям, то согласно этой теореме это и есть единственно возможное решение проблемы. Довольно часто такое решение удается найти при помощи проб. Чтобы показать пример этого, мы рассчитаем поле эллипсоидального конденсатора.

наружная обкладка которого задана следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ где } a > b > c, \dots, \quad (3)$$

и имеет потенциал φ_1 . Рассмотрим систему конфокальных поверхностей, заданных уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

При $\lambda > -c^2$ это уравнение представляет эллипсоиды, при

$$-c^2 > \lambda > -b^2$$

— однополостные гиперболоиды и при

$$-b^2 > \lambda > -a^2$$

— двуполостные гиперболоиды. Через каждую точку x_1, y_1, z_1 пространства проходят три таких поверхности, по одной из каждого из трех вышеупомянутых видов. Соответствующие им значения λ могут быть получены из уравнения третьей степени:

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_1^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z_1^2}{c^2 + \lambda} = 1. \quad (4)$$

Это уравнение имеет один корень λ_1 между $-a^2$ и $-b^2$, второй λ_2 между $-b^2$ и $-c^2$ и третий λ_3 , больший, чем $-c^2$. Обратно, три эти величины однозначно определяют точку x_1, y_1, z_1 , и мы можем принять их за координаты этой точки (криволинейные эллиптические координаты).

Декартовы координаты мы при этом можем вычислить из системы уравнений, которая получается из (4), последовательной подстановкой значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на место λ . Решая эту систему, мы получим:

$$x_1^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2 + \lambda_1} & \frac{1}{b^2 + \lambda_1} & \frac{1}{c^2 + \lambda_1} \\ \frac{1}{a^2 + \lambda_2} & \frac{1}{b^2 + \lambda_2} & \frac{1}{c^2 + \lambda_2} \\ \frac{1}{a^2 + \lambda_3} & \frac{1}{b^2 + \lambda_3} & \frac{1}{c^2 + \lambda_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b^2 + \lambda_1} & \frac{1}{c^2 + \lambda_1} \\ 1 & \frac{1}{b^2 + \lambda_2} & \frac{1}{c^2 + \lambda_2} \\ 1 & \frac{1}{b^2 + \lambda_3} & \frac{1}{c^2 + \lambda_3} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Если в левом determinante вынуть первый столбец из второго и третьего, то можно вынести множители $(a^2 - b^2)$, $(a^2 - c^2)$, $\frac{1}{a^2 + \lambda_1}$, $\frac{1}{a^2 + \lambda_2}$, $\frac{1}{a^2 + \lambda_3}$, и в остатке получится determinant, тождественный с правой частью. Таким образом мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 (a^2 - b^2) (a^2 - c^2) &= (a^2 + \lambda_1) (a^2 + \lambda_2) (a^2 + \lambda_3), \\ y_1^2 (b^2 - c^2) (b^2 - a^2) &= (b^2 + \lambda_1) (b^2 + \lambda_2) (b^2 + \lambda_3), \\ z_1^2 (c^2 - a^2) (c^2 - b^2) &= (c^2 + \lambda_1) (c^2 + \lambda_2) (c^2 + \lambda_3), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из сказанного ясно, что два эллипсоида, а также два однополостных или двуполостных гиперболоида системы не могут пересекаться. Напротив, две поверхности различного наименования всегда пересекаются и притом ортогонально. Последнее утверждение может быть доказано следующим образом: вычтя одно из другого уравнения этих поверхностей

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y_1^2}{b^2 + \lambda_1} + \frac{z_1^2}{c^2 + \lambda_1} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{y_1^2}{b^2 + \lambda_2} + \frac{z_1^2}{c^2 + \lambda_2} = 1$$

и разделив на $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, мы получим:

$$\frac{x_1^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \frac{y_1^2}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} + \frac{z_1^2}{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)} = 0.$$

Так как косинусы, образуемые нормалью к определяемой λ поверхности с осями координат, пропорциональны соответственно $\frac{x_1}{(a^2 + \lambda)}$,

$\frac{y_1}{(b^2 + \lambda)}$ и $\frac{z_1}{(c^2 + \lambda)}$, то полученное нами соотношение показывает, что касательные плоскости, проведенные в точке x_1, y_1, z_1 к обоим определенным значениям λ_1 и λ_2 поверхностям, перпендикулярны друг к другу.

Будем искать выражение потенциала φ в виде функции, имеющей постоянное значение на каждом конфокальном эллипсоиде, $\varphi = f(\lambda_3)$, определяемом только значением λ_3 . Для этого, предполагая, что φ зависит только от λ_3 , преобразуем уравнение Лапласа к вышеуказанным эллиптическим координатам. Нам легко будет сообразить каков будет новый вид уравнения, если мы примем во внимание, что уравнение Лапласа выражает соленоидальный характер диэлектрического смещения. Рассматриваемые системы гиперболоидов повсюду перпендикулярны к нашим эквипотенциальным поверхностям. Поэтому линии пересечения этих гиперболоидов совпадают с линиями напряженности электрического поля, по которым направлено и смещение. Рассмотрим ближе трубку смещения, образованную двумя гиперболоидами λ_1 и $\lambda_1 + d\lambda_1$ и двумя другими с параметрами λ_2 и $\lambda_2 + d\lambda_2$. Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является условие, чтобы в любой точке поля смещение было обратно пропорционально нормальному поперечному сечению трубки. Эти сечения являются прямоугольниками, лежащими на эквипотенциальных поверхностях. Рассмотрим отрезок трубки, заключенный между эллипсоидами λ_3 и $\lambda_3 + d\lambda_3$ и обозначим стороны вышеупомянутого прямоугольника, лежащего на первом эллипсоиде через ds_1 и ds_2 , а расстояние между обоими сечениями трубки через ds_3 , тогда:

$$ds_1^2 = \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} \right)^2 \right\} d\lambda_1^2$$

далее, согласно (5):

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{x}{2(a^2 + \lambda_1)}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = \frac{y}{2(b^2 + \lambda_1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = \frac{z}{2(c^2 + \lambda_1)}.$$

Таким образом

$$ds_1^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda_1)^2} \right] d\lambda_1^2.$$

Чтобы вычислить выражение, стоящее в фигурных скобках, мы воспользуемся тем, что

$$(a^2 + \lambda) (b^2 + \lambda) (c^2 + \lambda) \left\{ \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 \right\}$$

обращается в нуль при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Так как коэффициент при λ^3 равняется -1 , то имеет место тождество:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}.$$

Взяв от этого выражения логарифмическую производную по λ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} &= \frac{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} + \frac{1}{\lambda_3 - \lambda} + \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right). \end{aligned}$$

Подставив сюда $\lambda = \lambda_1$, получим:

$$\frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda_1)^2} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)}.$$

Таким образом

$$ds_1^2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{4(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)} d\lambda_1^2.$$

Аналогично получим:

$$ds_2^2 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{4(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)} d\lambda_2^2$$

и

$$ds_3^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{4(a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3)} d\lambda_3^2.$$

Полное изменение потенциала φ при переходе от одного сечения к другому равняется $\frac{d\varphi}{d\lambda_3} \cdot d\lambda_3$. Отсюда изменение при перемещении на единицу длины будет $\frac{d\varphi}{d\lambda_3} \cdot \frac{d\lambda_3}{ds_3}$. Взятое с обратным знаком это выражение равняется напряженности электрического поля и смещению (в эфире). Ввиду этого условие соленоидальности принимает вид:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda_3} \cdot \frac{d\lambda_3}{ds_3} ds_1 ds_2 = \text{const.}$$

Введя в это равенство вышеполученные выражения для ds_1, ds_2 и ds_3 , мы получим выражение, ряд множителей которого останутся сами собой

постоянными вдоль всей трубки. Поэтому для постоянства всего произведения необходимо только, чтобы оставалось постоянным выражение, содержащее λ_3 :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda_3}\right)^2 (a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3) = C. \quad (6)$$

Это и есть форма, принимаемая в нашем случае уравнением Лапласа. Величина C постоянна не только вдоль данной трубки смещения, но и во всем поле, так как левая часть уравнения (6) не зависит от λ_1 и λ_2 .

Из уравнения (6) мы получаем выражение потенциала в виде эллиптического интеграла.

Определив постоянную интегрирования из условия, что в бесконечности $\varphi = 0$, мы получим:

$$\varphi = C \int_{\infty}^{\lambda_3} \frac{d\lambda}{V(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}. \quad (7)$$

Постоянная C должна быть выбрана так, чтобы при $\lambda_3 = 0$ потенциал принимал заданное значение $\varphi = \varphi_1$.

Этим выражением вид поля вполне определяется. Мы рассмотрим еще распределение плотности зарядов на поверхности проводника. Эта плотность, как мы видели, определяется значением D , т. е. значением $-\frac{d\varphi}{dn}$.

Проведя на незначительном расстоянии от нашего эллипсоидального проводника второй конфокальный эллипсоид, мы получим:

$$-\frac{d\varphi}{dn} = \lim_{\delta} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\delta}.$$

Здесь φ_2 обозначает значение потенциала на проведенном эллипсоиде, а δ — расстояние его от поверхности проводника. Отсюда следует, что поверхностная плотность зарядов обратно пропорциональна расстоянию δ между эллипсоидами.

Таким образом задача о распределении заряда по поверхности сведена к чисто геометрической проблеме. Задача решается очень легко для концов главных осей. Обозначив плотности на концах осей a и b соответственно через σ_a и σ_b , мы получим:

$$\sigma_a : \sigma_b = \delta b : \delta a.$$

Так как при конфокальных эллипсоидах $b^2 - a^2 = \text{const}$, то $b\delta b = a\delta a$, и, следовательно,

$$\sigma_a : \sigma_b = a : b.$$

Следовательно, наибольшая плотность получается на концах большой оси.

Если мы представим себе, что одна из эквипотенциальных поверхностей сделалась проводящей и заряжена до того же потенциала, который она имела ранее, то внешнее поле от этого не изменится. Это следует из того, что при этом остаются выполненными все условия, которые, как мы видели, однозначно определяют поле. Ряд конфокальных

эллипсоидов может быть продолжен и внутрь от поверхности проводника¹, таким образом мы приходим в конце концов к эллиптическому диску. Если мы будем исходить из эллипсоида вращения, ось вращения которого совпадает с большей осью, то в пределе мы получим прямую, если же осью вращения служит наименьшая ось, то мы получим круглый диск. Этого рода переход к пределу позволяет вычислить поле, создаваемое в диэлектрике заряженным эллиптическим или круговым диском и заряженным цилиндром конечной длины (при этом эти поверхности рассматриваются как предельные случаи соответствующих эллипсоидов). Из этого примера мы видим, что можно вычислить эквипотенциальные поверхности для определенной формы заряженных проводников, если они нам известны для проводников другой формы.

§ 3. Теория электрических изображений. Упомянутый в конце предыдущего параграфа метод вычисления электрического поля имеет общее значение, а мы применим его теперь систематически в теории электрических изображений. При этом мы часто будем пользоваться понятием о точечном заряде. К этому понятию мы приходим при помощи перехода к пределу, рассматривая заряженный шар с постоянной величины зарядом, радиус которого бесконечно уменьшается. Потенциал, создаваемый таким точечным зарядом e на расстоянии r , равен

$$\varphi = \frac{e}{4\pi r}.$$

Два точечных заряда создают поле, которое может быть вычислено при помощи суперпозиции полей отдельных точек. Для потенциала в произвольной точке мы получим:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e}{r} + \frac{e'}{r'} \right).$$

Значение букв в этом выражении ясно без пояснений. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям в бесконечности. Далее, мы видим, что

$$-\int \frac{d\varphi}{dr} d\tau = e,$$

если этот интеграл распространен по поверхности, окружающей первую заряженную точку, и

$$-\int \frac{d\varphi}{dr'} d\tau' = e',$$

если поверхность окружает вторую точку. (Заметим, что этот простой вид потенциальной функции не дает решения для случая двух проводников конечных размеров, так как φ не будет иметь постоянного

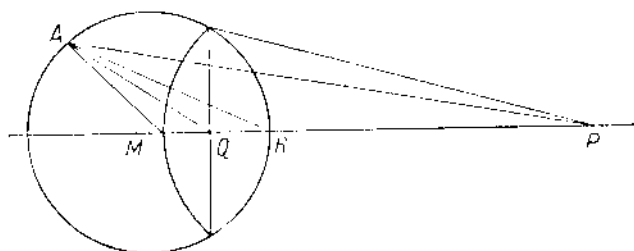
¹ Это значит, что мы можем заменить поверхность проводника эквипотенциальной поверхностью, а заряды перенести на более глубоко расположенные поверхности. *Прим. перев.*

значения на поверхности каждого из проводников). Уравнение эквипотенциальных поверхностей имеет вид:

$$\frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} = C, \quad (8)$$

В общем случае это уравнение поверхности восьмого порядка. Только в случае $C=0$ и разноименных зарядов мы получим уравнение сферической поверхности. Представим себе, что эта поверхность сделана проводящей и соединена проводником с землей. Так как при этом ее потенциал останется равным нулю, то поле вне этой сферы не изменится, потому что все граничные условия остаются выполненными.

Рассмотрим теперь поле, созданное заряженной зарядом e точкой P и шарообразным проводником M , соединенным с землей. По вышеизложенному поле в диэлектрике вне шара M должно совпадать с полем,



Фиг. 9.

которое получится, если, удалив проводник M , мы поместим заряд e' в точку Q . При этом точка Q должна быть выбрана таким образом, чтобы отношение расстояний точек P и Q от любой точки сферы M было постоянным. Для этого точка Q должна лежать на пересечении линии PI , соединяющей точку P и центр сферы M с плоскостью, проведенной через линию пересечения сферы M и шаровой поверхности, описанной из P радиусом, равным PM (фиг. 9). Обозначив радиус сферы M буквой a и расстояния $MP = l$ и $MQ = l'$, мы получим $a^2 = l'l$ или $\frac{a}{l} = \frac{l'}{a}$. Для заряда точки Q мы получим:

$$\frac{e'}{QR} + \frac{e}{PR} = 0,$$

OTKRYZHA

$$\frac{-e'}{e} = \frac{a - l'}{l - a} = \frac{a}{l} - \frac{l'}{a} \quad (9)$$

Точку Q с зарядом $e' = -\frac{ea}{l}$ называют электрическим изображением точки P по отношению к сфере M . Это название введено по аналогии с оптическими явлениями. Если светящаяся точка помещена вблизи сферического или плоского зеркала, то явления протекают так, как будто бы кроме точки P существовала еще другая светящаяся точка Q — изображение точки P . Подобно этому и в рассматриваемом элек-

трическом случае поле таково, как будто кроме заряженной точки P существует еще вторая заряженная точка Q , являющаяся электрическим изображением точки P .

Диэлектрическое смещение через поверхность шара M должно быть таким же, как и в случае существования электрического изображения. Индуцированный на поверхности шара заряд поэтому равен $e' = -\frac{ea}{l}$. Это следует непосредственно из соленоидального характера смещения.

Исследуем еще распределение этого заряда по поверхности шара, т. е. вид функции, дающей поверхностную плотность заряда. Смещение в любой точке A равно $D = D_1 + D_2$, где

$$4\pi D_1 = \frac{e}{(AP)^2} \quad \text{и} \quad 4\pi D_2 = -\frac{a}{l} \cdot \frac{e}{(AQ)^2} = -\frac{l}{a} \cdot \frac{e}{(AP)^2}.$$

Мы знаем, что направление результирующего смещения должно быть нормально к поверхности проводника. Поэтому

$$D_n = D_1 \cos MAP + D_2 \cos MAQ.$$

$$\cos MAP = \frac{(AP)^2 + a^2 - l^2}{2a \cdot AP}$$

и

$$\cos MAQ = \frac{(AQ)^2 + a^2 - l^2}{2a \cdot AQ} = \frac{(AP)^2 + l^2 - a^2}{2l \cdot AP}.$$

Поэтому

$$4\pi D_n = \frac{e}{(AP)^2} \left[\frac{(AP)^2 + a^2 - l^2}{2a \cdot AP} - \frac{l}{a} \cdot \frac{(AP)^2 + l^2 - a^2}{2l \cdot AP} \right] = -\frac{e(a^2 - l^2)}{a} \cdot \frac{1}{(AP)^3}. \quad (10)$$

Таким образом плотность индуцированного на шаре заряда обратно пропорциональна третьей степени расстояния от P .

Рассмотрим теперь случай, когда шар M не отведен к земле, а изолирован, причем первоначальный его заряд равен нулю. В этом случае очевидно, что и после помещения в точку P заряда e общий заряд шара M останется равным нулю. Мы получим решение, удовлетворяющее всем указанным условиям, если положим, что на только что подсчитанное поле накладывается еще второе поле, созданное зарядом $+\frac{ea}{l}$, помещенным в центре шара M .

Легко сообразить, что при этом часть поверхности шара, обращенная к точке P , будет заряжена отрицательно, а остальная часть — положительно (заряд e точки P мы считаем положительным).

Теперь можем подсчитать деформацию поля, производимую внесением в однородное электрическое поле изолированного незаряженного шара. В однородном поле напряженность поля повсюду постоянна по величине и направлению. Взяв это направление в качестве отрицательного направления оси X , видим, что данная проблема является предельным случаем выше рассмотренной, если заряженная точка P удаляется от M по положительному направлению оси X ,

причем заряд ее соответственным образом увеличивается. При этом, очевидно, направление недеформированного поля приближается в части пространства, где находится шар M по направлению к оси X , а величина заряда точки P в пределе определяется равенством:

$$\lim_{\frac{1}{4\pi}} \frac{e}{l^2} = E_0.$$

Деформированное поле, которое возникает при этом вокруг шара M , мы получим согласно предыдущему, если наложим на однородное поле еще два поля: первое создается зарядом $\frac{ea}{l}$, расположенным в центре шара M , второе зарядом $-\frac{ea}{l}$, находящимся в точке Q , лежащей от точки M в направлении положительной оси X на расстоянии $\delta = \frac{a^2}{l}$, которое в пределе становится бесконечно малым. Оба эти заряда образуют электрический диполь.

Потенциал, вызываемый этим диполем в точке A , равен:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi l} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AQ} \right) = -\frac{ae}{4\pi l} \frac{\delta \cos \theta}{r^2},$$

где r обозначает расстояние от A до M (или Q), а θ означает угол AMQ . В пределе $\lim_{\frac{e\delta}{l}} = a^2 \lim_{\frac{e}{l^2}} = 4\pi a^2 E_0$ и $\cos \theta = \frac{x}{r}$, поэтому:

$$\varphi_1 = E_0 \frac{a^3 \cos \theta}{r^2} = E_0 \frac{a^3 x}{r^3},$$

а все значения потенциала:

$$\varphi = C - E_0 x + E_0 \frac{a^3 x}{r^3}. \quad (11)$$

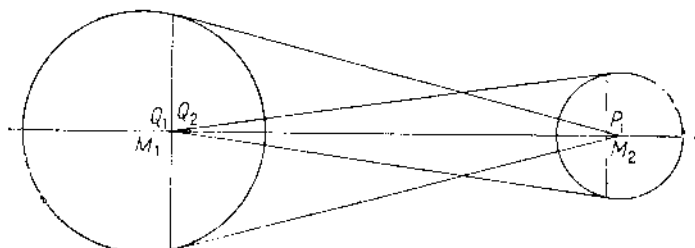
Отсюда мы получаем непосредственно плотность распределения индуцированных зарядов на поверхности шара (попрежнему предполагаем, что окружающий диэлектрик есть воздух):

$$P_n = E_n = - \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{z}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{r=a} = 3E_0 \cos \theta. \quad (12)$$

Конечно, эта задача может быть разрешена и непосредственно, независимо от предыдущей.

Укажем еще путь подсчета распределения зарядов на двух шаровых проводниках, не окружающих друг друга. Эта проблема рассматривалась многократно (Пуассоном, Максвеллом, Кирхгофом и др.). Мы изложим метод лорда Кельвина, применившего для ее решения бесконечный ряд электрических изображений. Пусть M_1 обозначает центр первого шара (см. фиг. 10), а M_2 — центр второго. Пусть, далее, a_1 и a_2 обозначают радиусы этих сфер, а $b = M_1 M_2$ — взаимное расстояние центров сфер. Допустим, наконец, что первая сфера соединена с землей, а вторая несет на себе заданный заряд. Если каким-либо способом мы найдем решение, удовлетворяющее всем заданным условиям во всем

пространстве вне шаров, то мы сможем определить соответствующее этому решению распределение зарядов по поверхности второй сферы.



Фиг. 10.

Предположим сначала, что заряд e сосредоточен в точке M_2 . Благодаря этому возникает поле, удовлетворяющее во всем пространстве вне шара M_2 всем условиям проблемы, за исключением того, что на поверхности шара M_1 потенциал φ не повсюду равен нулю. Этот недостаток может быть устранен согласно предыдущему, если мы суперпонируем еще поле, создаваемое электрическим изображением заряда, помещенного в M_2 в сфере M_1 , т. е. поле, вызываемое зарядом $\frac{ea_1}{b}$, помещенным в точке Q_1 , причем $M_1Q_1 = \frac{a_1^2}{b}$. Полученное этим способом поле не будет, однако, удовлетворять требованию постоянства потенциала на поверхности шара M_2 . Эту ошибку мы исправляем при помощи поля, создаваемого изображением заряда, находящегося в Q_1 в сфере M_2 , т. е. при помощи заряда, равного

$$e \cdot \frac{a_1}{b} \frac{a_2}{b - \frac{a_1^2}{b}},$$

помещенного на расстоянии

$$M_2P_1 = \frac{a_2^2}{b - \frac{a_1^2}{b}}.$$

от центра M_2 . Благодаря этому опять нарушится условие на поверхности M_1 , что мы исправим при помощи изображения P_1 в сфере M_1 и т. д. При помощи этого метода потенциал в любой точке поля может быть выражен при помощи бесконечного ряда. Из этого выражения потенциала вышесказанным образом мы получаем напряженность электрического поля, смещение и плотность распределения заряда по поверхности шаров. Аналогичным способом определяется поле в пространстве между двумя шарами, меньший из которых находится внутри большего.

§ 4. Метод инверсии. Рассмотрим теперь метод, позволяющий вычислить в некоторых случаях поле вне заданного проводника, если нам известно решение аналогичной проблемы для некоторого другого случая. Этот метод носит название метода инверсии. Чтобы ознакомиться с ним, нам необходимо предпослать несколько общих замечаний.

Обозначим буквой φ потенциал в поле заряженного проводника. Возьмем в этом поле произвольную точку P и обозначим через r ее расстояние от любой другой точки поля. Чтобы подсчитать значение потенциала в точке P , применим теорему Грина [равенство (32) Введения], в которой под функцией U мы будем понимать потенциал φ , а под V функцию $\frac{1}{r}$. Интегрирование мы распространим на весь объем

вне проводника, за исключением маленького шара, описанного около точки P , как центра, радиус которого мы в конечном итоге будем считать убывающим до нуля. Внешнее пространство мы будем считать ограниченным извне сферой бесконечно большого радиуса B . Так как в рассматриваемом случае $\Delta U = 0$ и $\Delta V = 0$, то мы можем применить равенство (32), в котором n обозначает направление внешних нормалей по отношению к объему интегрирования.

При рассмотрении поверхностных интегралов мы должны принять во внимание следующее: 1) интеграл по поверхности бесконечно удаленной сферы исчезает; 2) первая часть интеграла по поверхности проводника (на котором φ имеет постоянное значение) равна нулю:

$$\int \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = \varphi \int \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = 0,$$

вторая же часть, если обозначить поверхностную плотность зарядов буквой $\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, принимает вид:

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int \frac{\omega}{r} d\sigma;$$

3) из интегралов

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \quad \text{и} \quad \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

распространенных по поверхности сферы, окружающей точку P , первый в пределе ($r \rightarrow 0$) исчезает, так как значение $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ остается повсюду конечным, а второй, который мы можем написать в виде:

$$\int \frac{\varphi}{r^2} d\sigma = \varphi_{cp} \int \frac{d\sigma}{r^2} = 4\pi \varphi_{cp},$$

равняется умноженному на 4π среднему значению потенциала на поверхности сферы. При безграничном убывании r его значение, очевидно, стремится к $4\pi \varphi_P$. Таким образом получаем для значения потенциала в (любой) точке поля выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega}{r} d\sigma. \quad (13)$$

Тот же результат мы получим и в случае, когда точка P лежит внутри проводника. В этом случае, очевидно, значение потенциала φ_P должно равняться значению его на поверхности проводника. Чтобы

доказать это, достаточно повторить для рассматриваемого случая вышеизложенные рассуждения. В качестве объема интегрирования надо взять весь объем между поверхностью заряженного проводника и бесконечно удаленной поверхностью. Так как точка P лежит теперь вне объема интегрирования, то ее нет необходимости выделять особой сферой. Интеграл по поверхности бесконечно удаленной сферы опять исчезает, а первый из интегралов по поверхности заряженного проводника дает:

$$\Psi \int \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = 4\pi\varphi - 4\pi\varphi_P.$$

Этот метод исчисления потенциала может быть распространен на любое число заряженных проводников, находящихся в эфире. Во всех этих случаях как для точек во внешнем поле, так и внутри проводников имеет место равенство (13), в котором интегрирование должно быть распространено по поверхностям всех проводников. Равенство

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e_k}{r_k}, \quad (13')$$

которое, как мы видели, определяет потенциал системы точек, заряженных количествами электричества e_k , остается в силе и в рассматриваемом случае, если на место зарядов e_k мы подставим заряды $\omega \Delta \sigma$ элементов поверхности заряженных проводников. — Конечно, распределение зарядов не может быть произвольным, а должно удовлетворять условию постоянства потенциала на поверхности каждого проводника.

Рассмотрим некоторую систему зарядов и инверсируем ее, пользуясь известными из геометрии методами по отношению к заданной точке O (центр инверсии), вокруг которой описана сфера радиуса a . Эту сферу дальше мы называем сферой O . Каждая точка P отобразится при этом инверсированной точкой P' , лежащей на прямой OP , для которой

$$OP \cdot OP' = a^2.$$

Как известно, все лежащее вне сферы O пространство отображается точками, лежащими внутри сферы. При этом отображении величины углов остаются неизменными, а сферические поверхности отображаются вообще также сферами, сферы же, проходящие через точку O , отображаются плоскостями. Обратно, плоскость отображается вообще сферой, проходящей через точку O , плоскость же, проходящая через точку O , отображается сама на себе. Так как при такой инверсии сферические поверхности являются единственными поверхностями, отображающимися также в виде простых сферических поверхностей, то применения метода инверсии ограничиваются случаями сферических поверхностей.

Если в точке A_k исходной системы находится заряд e_k , то в инверсированной точке A'_k мы будем иметь заряд:

$$e'_k = e_k \frac{a}{OA_k} = e_k \frac{OA'_k}{a}. \quad (14)$$

За исключением знака это выражение совпадает с величиной электрического изображения A_k в сфере O .

Если мы рассмотрим произвольную точку P , то значение потенциала, вызванного в ней исходной системой зарядов, будет:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e_k}{PA_k}.$$

Значение же потенциала инверсированной системы в точке P' будет:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e'_k}{P'A'_k},$$

но

$$P'A'_k = PA_k \frac{OA'_k}{OP},$$

следовательно,

$$\frac{e'_k}{P'A'_k} = \frac{e_k}{PA_k} \cdot \frac{OA'_k}{a} \cdot \frac{OP}{OA'_k} = \frac{e_k}{PA_k} \cdot \frac{OP}{a}$$

и

$$\varphi' = \varphi \frac{OP}{a} = \varphi \frac{a}{OP}. \quad (15)$$

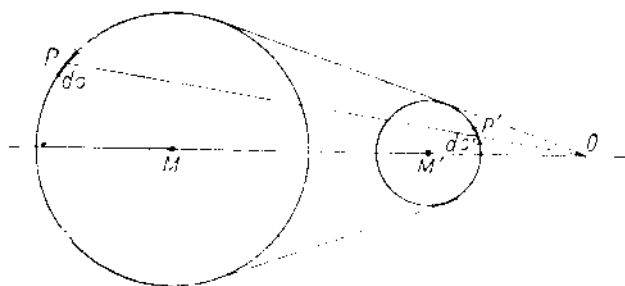
Следовательно, по потенциалу заданной точки исходной системы может быть очень просто определен потенциал в соответствующей точке инверсированной системы.

Если заряженными точками A_k исходной системы являются элементы поверхности некоторого проводника, то при инверсии этот проводник отобразится некоторой другой поверхностью. На этой инверсированной поверхности значения потенциала не будут, однако, постоянными. Это видно непосредственно из последнего равенства, в котором a постоянно, φ как значение потенциала на поверхности проводника также постоянно, но OP' переменнo. Однако в частном случае, когда $\varphi = 0$, мы получаем и для φ' постоянное значение $\varphi' = 0$, и в этом случае условие постоянства потенциала выполняется в обеих системах. Отсюда мы заключаем, что если исходная система состоит из одного или нескольких проводников, отведенных к земле, и из ряда заряженных точек и если в инверсированной системе все проводники также отведены к земле, то при помощи инверсии мы получаем действительное расположение зарядов в инверсированной системе. Этим методом, например, проблема поля, созданного заряженной точкой, расположенной против отведенного к земле проводящего шара, может быть сведена к очень простой задаче о заряженной точке, помещенной против отведенной к земле плоскости. Последняя же задача очень легко решается при помощи теории электрических изображений, так как электрическое изображение совпадает в этом случае с оптическим изображением точки в плоском зеркале и содержит заряд, равный по величине, но противоположный по знаку.

Теория инверсии может быть применена еще другим образом. Если исходная система состоит из одного проводника или из нескольких, но имеющих одинаковый потенциал φ , то из (15) видно, что потенциал проводника в инверсированной системе будет повсюду равен

нулю, если мы на полученное три инверсии поле наложим еще второе, вызванное зарядом $-4\pi a\varphi$, помещенным в точке O . Воспользовавшись этим, мы можем свести проблему об индукции заряженной точки, помещенной против отведенного к земле проводника, к исследованию поля в окрестности изолированного проводника. В качестве примера мы рассмотрим исследованный уже ранее случай точечного заряда e , расположенного около отведенной к земле проводящей сферы M .

Для этого мы инверсируем (фиг. 11) сферу радиуса R по отношению к точке O , в результате чего получаем сферу M' радиуса R' . Согласно вышедшему из доказательства, поле, которое мы получим, если зарядим эту сферу до потенциала $\varphi' = -\frac{e}{4\pi a}$, даст нам при инверсии искомое



Фиг. 11.

поле. Вычислим заряд, расположенный на элементе $d\sigma$ поверхности сферы M (около точки P). На соответствующем элементе $d\sigma'$ сферы M' (около точки P') находится заряд $\frac{\varphi'}{R'} d\sigma'$. Заряд этот при инверсии даст на элементе $d\sigma$ заряд $\frac{\varphi'}{R'} d\sigma' \frac{OP}{a}$, но

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{(OP')^2}{(OP)^2} = \frac{a^2}{(OP)^2}.$$

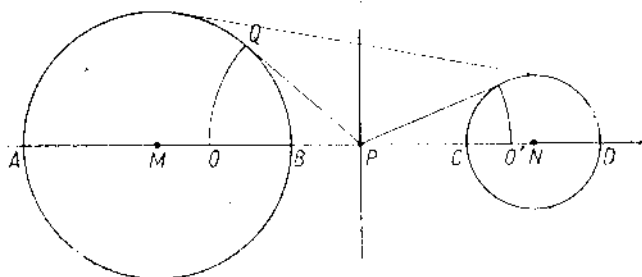
Отсюда мы получаем для заряда элемента $d\sigma$ значение $\frac{\varphi'}{R'} \frac{a^3}{(OP)^3} d\sigma$.

Плотность заряда, как и ранее, получается обратно пропорциональной кубу расстояния рассматриваемой точки от центра инверсии O . Очень легко показать, что полученный этим методом результат полностью совпадает с ранее полученным. В самом деле, поле вне сферы M' совпадает с полем точечного заряда $4\pi R' \varphi' = -e \frac{R'}{a}$, находящегося в точке M' . Полученное при помощи инверсии поле будет, следовательно, вне сферы M идентично с полем заряда

$$-e \frac{R'}{a} \cdot \frac{a}{OM'} = -e \frac{R}{OM},$$

находящегося внутри сферы M в точке Q , являющейся электрическим изображением точки O по отношению к сфере M .

Рассмотрим теперь два шара, заряженные до одинакового потенциала. Если нам удалось вычислить окружающее их поле, то при помощи инверсии мы можем разрешить вопрос о поле, окружающем две заземленные сферы, около которых находится заряженная точка. Какая из этих проблем легче, зависит, конечно, от вкуса решающего, но при помощи инверсии мы всегда можем сделать наши две сферы концентрическими, а в этом последнем случае вторая проблема, очевидно, проще. Легко показать, что если сфера инвертируется по отношению к центру O и если O' есть точка, переходящая при инверсии в центр новой сферы, то O и O' находятся в гармоническом отношении к точкам, в которых прямая OO' пересекает данную сферу. Эта теорема верна независимо



Фиг. 12.

от того, находится ли центр инверсии O внутри или вне поверхности сферы. Если две сферы M и N (фиг. 12) даны и мы хотим найти положение центра инверсии, переводящего эти две сферы в концентрические, то мы должны провести линию центров, пересекающую сферы M и N в точках A, B и C, D . Искомый центр инверсии O и вышеупомянутая точка O' должны тогда лежать на этой линии центров и должны находиться в гармоническом отношении как к точкам A, B , так и к точкам C, D . Пусть P есть точка, в которой потенциальная поверхность обоих шаров пересекает их линию центров, и пусть PQ будет касательной к одной из сфер. Тогда сфера, описанная из точки P радиусом, равным PQ , пересечет прямую MN в искомым точках O и O' , так как $(PO)^2 = (PQ)^2 = PA \cdot PB$ и $(PO')^2 = PC \cdot PD$. После этого мы можем вычислить поле, создаваемое между двумя концентрическими, отведенными к земле, шарами O' зарядом e , помещенным в точку O . Это можно выполнить при помощи метода электрических изображений, который в этом случае приводит к очень простому ряду. Из полученного этим способом распределения зарядов на концентрических сферах мы при помощи (14) вычисляем соответствующее распределение зарядов на первоначально данных сферах.

Распределение зарядов на соприкасающихся сферических проводниках может быть вычислено, если инверсировать эту систему по отношению к точке касания. Таким образом мы приходим к задаче о вычислении поля между двумя отведенными к земле плоскостями, между которыми находится заряженная точка. Это вычисление тоже может быть выполнено при помощи метода электрических изображений.

Решение исходной задачи мы получим, если опять инверсируем полученное решение.

§ 5. Энергия электрического поля. Рассмотрим теперь энергию в электростатическом поле. Вычислим энергию, запасенную в поле проводника, окруженного безгранично протяженным однородным диэлектриком и заряженного до потенциала φ_1 . Если емкость этого проводника C , то заряд его равен $e_1 = C\varphi_1$. Вычисление этой энергии сводится к вычислению работы, необходимой для перенесения заряда e_1 из бесконечности на поверхность проводника.

Представим себе, что заряд мы переносим малыми количествами de . Пусть в некоторый момент потенциал проводника равен φ' и, следовательно, заряд его равен $e = C\varphi'$. Перенесем по произвольному пути s заряд de из бесконечности на поверхность проводника. На протяжении всего пути на наш заряд будет действовать сила, составляющая которой по направлению перемещения равна $-de \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}$. Работа, необходимая для преодоления этой силы на всем пути, будет равна:

$$de \int_{\infty}^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi' de.$$

Этот подсчет показывает, что эта работа не зависит от пути, по которому заряд de переносится на поверхность проводника. При этом заряд проводника увеличивается до $e + de$, а потенциал до

$$\varphi' + d\varphi' = \frac{e + de}{C}.$$

Вся работа, необходимая для заряжения проводника от заряда, равного нулю, до e_1 , очевидно, равна:

$$\int_0^{e_1} \varphi' de = \frac{1}{C} \int_0^{e_1} e de = \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{C} = \frac{1}{2} C \varphi_1^2 = \frac{1}{2} e_1 \varphi_1.$$

Аналогичным образом может быть вычислена энергия системы заряженных проводников. Если в конце процесса заряжения на проводниках скопляются заряды $e_1, e_2, \dots$ и проводника принимают потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, то энергия системы равна $\frac{1}{2} \sum e_i \varphi_i$.

Так как по современным воззрениям эта энергия обусловлена состоянием диэлектрической среды, то важно преобразовать это выражение энергии в объемный интеграл, распространенный по всему объему поля. Для этого мы воспользуемся тем, что для каждого проводника общий его заряд $e_i = \int D_n d\sigma$. Отсюда для энергии мы получаем выражение:

$$\frac{1}{2} \int \varphi D_n d\sigma,$$

в котором интегрирование должно быть распространено по поверхности всех проводников.

Этот интеграл может быть преобразован при помощи теоремы Гаусса в объемный интеграл. Для этого мы к поверхностям проводников прибавляем еще весьма удаленную поверхность, ограничивающую снаружи рассматриваемый объем. При преобразовании интегралов мы получаем в этом случае кроме вынесенных еще интеграл по этой поверхности.

Но, как мы уже неоднократно видели, интеграл этот обращается в нуль при безграничном расширении этой внешней поверхности, и мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \varphi D_n d\tau &= -\frac{1}{2} \int \varphi \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dS - \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS. \end{aligned}$$

Так как $\text{div } D = 0$, а $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon} E_x$ и т. д., то

$$\frac{1}{2} \int \varphi D_n d\tau = \frac{1}{2} \int (D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z) dS.$$

Проще всего принять, что в каждом элементе объема dS находится запас энергии, равный $\frac{1}{2} (D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z) dS$. Нельзя, однако, забывать, что вышесказанный вывод дает нам только выражение энергии, заключающейся во всем объеме, занятом полем, и не позволяет сделать никакого заключения о количестве энергии, заключенной в какой-либо части этого объема. Однако предположение это является самым рациональным, если считать электростатическую энергию распределенной по всему объему диэлектриков, окружающих проводники. При этом мы находим, что плотность энергии в данной точке поля выражается скалярным произведением $\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})$.

Если диэлектрик изотропен, то мы можем также написать для плотности энергии в диэлектрике выражения: $\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2$ или $\frac{1}{2\epsilon} \mathbf{D}^2$, а для свободного эфира: $\frac{1}{2} \mathbf{E}^2$ или $\frac{1}{2} \mathbf{D}^2$ (в электромагнитных единицах $\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi c^2}$ или $2\pi c^2 \mathbf{D}^2$, в электростатических $\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}$ или $2\pi \mathbf{D}^2$).

§ 6. Теоремы о минимуме энергии. Докажем теперь две относящиеся к энергии системы теоремы, играющие в электростатике важную роль. Электростатическое поле, как мы знаем, удовлетворяет двум условиям: диэлектрическое смещение соленоидально, и напряженность поля является потенциальным вектором, причем значение потенциала на поверхности каждого проводника постоянно. Кроме того, диэлектрическое смещение и напряженность поля связаны соотношением $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Вышесказанные две теоремы утверждают, что при действительно устанавливающемся в случае электростатического равновесия состоянии энергия достигает минимума, т. е. меньше, чем в случае, если бы

поле удовлетворяло, например, только одному из вышеуказанных условий.

Первая теорема формулируется следующим образом. Если в однородном изотропном диэлектрике находится система проводников, каждый из которых несет на себе заданный заряд (равный интегралу от смещения по поверхности проводника), то из всех решений, совместимых с заданной величиной зарядов и удовлетворяющих условию соленоиальности смещения, истинным решением электростатической проблемы является то решение, при котором выраженная через D общая энергия получает минимальное значение.

Если для случая электростатического равновесия D обозначает диэлектрическое смещение, а $E = -\frac{1}{\varepsilon} D$ — напряженность поля, то $\operatorname{div} D = 0$, а E является потенциальным вектором. Для каждого из k проводников, образующих рассматриваемую систему, мы имеем: $\int D_n d\sigma = e_k$ и общая энергия $A = \frac{1}{2\varepsilon} \int D^2 dS$, причем интегрирование необходимо распространить по всему пространству вне проводников.

Сравним это состояние с любым другим, при котором диэлектрическое смещение, которое мы обозначим через $D + D'$, также соленоидально, а общий заряд каждого проводника имеет прежнее значение.

Из первого условия следует, что $\operatorname{div}(D + D') = 0$, а следовательно, $\operatorname{div} D' = 0$; а из второго $\int (D + D')_n d\sigma = e_k$, откуда $\int D'_n d\sigma = 0$. Энергия системы в новом состоянии будет:

$$A' = \frac{1}{2\varepsilon} \int (D + D')^2 dS = \frac{1}{2\varepsilon} \int \left\{ (D_x + D'_x)^2 + (D_y + D'_y)^2 + (D_z + D'_z)^2 \right\} dS,$$

или

$$A' = A + \frac{1}{2\varepsilon} \int (D_x'^2 + D_y'^2 + D_z'^2) dS + \frac{1}{\varepsilon} \int (D_x D'_x + D_y D'_y + D_z D'_z) dS.$$

Второй член первой части этого равенства положителен, а третий, как мы сейчас докажем, равен нулю. В самом деле:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int (D_x D'_x + D_y D'_y + D_z D'_z) dS = - \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} D'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} D'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} D'_z \right) dS.$$

Здесь φ обозначает потенциал. Последний интеграл может быть представлен в виде¹

$$\int \varphi D'_n d\sigma + \int \varphi \operatorname{div} D' dS.$$

¹ При этом преобразовании мы пользуемся тождеством:

$$\operatorname{div}(\varphi D') = \varphi \operatorname{div} D' + (\operatorname{grad} \varphi \cdot D') = \varphi \operatorname{div} D' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} D'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} D'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} D'_z \right)$$

и теоремой Гаусса о преобразовании объемного интеграла в поверхностный.
Прим. перев.

Первый из этих интегралов должен быть распространен по поверхностям всех проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Последний из этих интегралов, как мы уже неоднократно видели, исчезает. Для каждого же из образующих систему проводников, значение φ постоянно и соответствующий интеграл равен $\varphi_k \int D_n' d\tau = 0$.

Таким образом все поверхностные интегралы обращаются в нуль. Второй из вышениписанных интегралов должен быть распространен по всему объему поля и также обращается в нуль, так как во всем этом объеме $\text{div } \mathbf{D}' = 0$. Таким образом мы убеждаемся, что $A' > A$.

Вторая теорема относится к случаю, когда для каждого из проводников задано значение потенциала. Сравним опять состояние, соответствующее электростатическому равновесию, при котором потенциал есть φ , а напряженность поля $\mathbf{E}$ с любым другим состоянием, при котором напряженность поля остается потенциальным вектором и значения потенциалов на поверхностях проводников сохраняют заданные значения. Обозначим в этом новом состоянии напряженность поля через $\mathbf{E} + \mathbf{E}'$, а потенциал $\varphi + \varphi'$, тогда на поверхности каждого проводника должно быть $\varphi' = 0$.

Энергия измененной системы, которую мы на этот раз выразим через A' , будет:

$$A' = \frac{1}{2} \varepsilon \int \left\{ (E_x + E'_x)^2 + (E_y + E'_y)^2 + (E_z + E'_z)^2 \right\} dS,$$

а в случае электростатического равновесия:

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon \int E^2 dS,$$

поэтому

$$A' = A + \frac{1}{2} \varepsilon \int \{ E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 \} dS + \varepsilon \int (E_x E'_x + E_y E'_y + E_z E'_z) dS.$$

В этом выражении опять второе слагаемое положительно, а третье равно нулю. Доказательство этого вполне аналогично вышеприведенному; мы имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int (E_x E'_x + E_y E'_y + E_z E'_z) dS &= -\varepsilon \int \left(E_x \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + E_y \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + E_z \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dS = \\ &= -\varepsilon \int \varphi' E_n d\tau = -\varepsilon \int \varphi' \Delta \varphi dS = 0. \end{aligned}$$

Таким образом опять $A' > A$.

Эти теоремы дают основание рассматривать энергию электростатического поля как потенциальную энергию, стремящуюся, как известно, к минимальному значению. Это представление совпадает с вышеизложенными представлениями об электростатическом

поле, согласно которым при зарядении проводника через его поверхность происходит как бы смещение несжимаемой электрической жидкости. Возникающее при этом электрическое напряжение стремится опять восстановить равновесие, и энергия поля есть потенциальная энергия смещенных зарядов.

Необходимо, однако, заметить, что эти представления не являются доказательством потенциальной природы электростатической энергии, и вполне возможны и другие воззрения. Так, Ганкель считал электростатические взаимодействия результатом вихревых движений, происходящих на поверхности заряженных тел, и энергию электростатического поля кинетической энергией таких вихревых движений. Мы не будем подробнее останавливаться на этих воззрениях и в дальнейшем будем рассматривать электростатическую энергию поля как потенциальную.

§ 7. Пондеромоторные силы. Вышеприведенные теоремы о минимуме энергии мы можем применять для вычисления пондеромоторных сил, т. е. сил, действующих в электростатическом поле на заряженные проводники. Наша теория дает мало для суждения о природе возникновения этих сил, но мы можем показать, что они должны существовать и можем подсчитать их величину. Для этого мы воспользуемся известным из механики принципом возможных перемещений. Представим себе, что рассматриваемая система находится в равновесии под действием внешних сил, и мы сообщаем ей произвольное, бесконечно малое изменение положения (состоящее в поступательном перемещении, вращении или деформации проводников). Если при этом величины зарядов не изменяются, то увеличение потенциальной энергии системы равняется работе, совершаемой при этом перемещении внешними силами. Изменение положения каждого элемента поверхности проводников может быть определено вектором δ , указывающим его перемещение.

Изменение энергии поля происходит по двум причинам: во-первых, некоторые элементы объема, которые до перемещения были вне проводников и содержали, следовательно, энергию, оказываются после перемещения внутри проводников и не содержат более энергии, некоторые же другие элементы, наоборот, приобретают энергию, выходя при перемещении из проводников в диэлектрик. Если мы обозначим плотность энергии буквой U , то общее изменение энергии будет равно:

$$- \int U \delta \cos(\delta n) d\tau,$$

где интеграл должен быть распространен по поверхностям всех проводников системы, а n обозначает направление внешних по отношению к проводникам нормалей. При выводе этого выражения необходимо иметь в виду, что для элементов поверхности, перемещающихся наружу и описывающих при этом элементы объема, заключающие до перемещения энергию значение $\cos(\delta n)$ положительно и, следовательно, величина элемента объема будет $+\delta \cos(\delta n) d\tau$. Такой элемент объема вызывает уменьшение энергии поля, и поэтому приносимая им при интегрировании величина должна быть взята со знаком минус. Элементы же поверх-

ности, смещающиеся внутрь проводника, обуславливают увеличение энергии поля. Для таких элементов $\cos(\delta n)$ отрицателен, и если мы обозначим плотность энергии после перемещения через U , то для увеличения энергии мы опять получим выражение со знаком минус. Так как величина объема теперь равна $-\delta \cos(\delta n) d\tau$, а значение плотности энергии после перемещения отличается от первоначального его значения на поверхности U лишь бесконечно мало, то, пренебрегая бесконечно-малыми порядка выше первого, мы можем приносимую при таком перемещении величину энергии положить равной $-U\delta \cos(\delta n) d\tau$.

В качестве второй причины изменения энергии мы должны принять во внимание, что после смещения во всем диэлектрике установится несколько видоизмененное поле. Действительно, до перемещения линии вектора смещения были нормальны к поверхностям проводников, и если бы поле не изменилось, то после перемещения эти линии не могли бы быть нормальны к переместившимся поверхностям проводников, и электростатическое равновесие было бы нарушено. Таким образом после перемещения должно установиться новое состояние равновесия, при котором диэлектрическое смещение в каждой точке поля будет отличаться от первоначального своего значения на бесконечно малую величину порядка δ . Обозначим это состояние через P и сравним его энергию с энергией состояния P' , которое существовало бы, если бы после перемещения проводников внешнее поле осталось неизменным. В состояниях P и P' поверхности проводников занимают одинаковые положения и заряды их одинаковы и в обоих состояниях вектор диэлектрического смещения соленоидален. Из первой теоремы о минимуме энергии следует, что энергия в состоянии P минимальна. Отсюда мы заключаем, что некая разность энергий в состояниях P и P' порядка δ^2 , и мы можем ею пренебречь по сравнению с изменением энергии, происходящим от первой причины.

Таким образом работа, совершаемая внешними силами, уравновешивающими пондеромоторные силы поля при произвольном бесконечно малом перемещении проводников, равна:

$$-\int U \delta \cos(\delta n) d\tau.$$

Следовательно, работа самих пондеромоторных сил есть

$$\int U \delta \cos(\delta n) d\sigma.$$

Для определения пондеромоторных сил нам достаточно найти такую систему сил, которая удовлетворяла бы этому требованию для произвольного бесконечно малого перемещения системы проводников. Представим себе, что на каждый элемент поверхности проводника $d\tau$ действует сила $K d\tau$. Работа, совершенная этой системой сил при произвольном перемещении, будет:

$$\int K \delta \cos(\delta k) d\tau.$$

Если эта система сил верно представляет поперомогорные силы поля, то для любого перемещения должно соблюдаться равенство:

$$\int U \delta \cos(\delta n) d\tau = \int K \delta \cos(\delta \mathbf{K}) d\delta.$$

Непосредственно очевидно, что для этого сила $\mathbf{K}$ должна быть повсюду направлена по нормали к поверхности проводника и равняется U :

$$\mathbf{K} = U.$$

§ 8. Случай нескольких диэлектриков. Возникает вопрос о том, насколько полученные нами выше результаты сохраняют силу для случая, когда объем поля заполнен не одним однородным диэлектриком, а несколькими.

Выражение $\sum \frac{1}{2} e_i \varphi_i$, которое мы получили выше для энергии поля, образованного в эфире системой проводников, несущих заряды e_i и имеющих потенциалы φ_i , остается в силе и в этом случае. Сомнение в этом может возникнуть лишь в случае, когда некоторые проводники окружены со всех сторон твердыми или жидкими диэлектриками. Действительно, представим себе, что мы при помощи, например, пробного шарика переносим малыми порциями заряд из бесконечности на поверхность такого проводника. Возникает вопрос: какова работа, необходимая для такого переноса внутри жидкого или твердого диэлектрика? Эту трудность можно обойти следующим образом. Представим себе, что от поверхности проводника до поверхности окружающего его жидкого или твердого диэлектрика проделана весьма тонкая полость в виде трубки. Присутствие этой трубки лишь ничтожно мало изменит электрическое состояние системы, а поэтому работа переноса пробного заряда вдоль этой трубки будет лишь ничтожно мало отличаться от работы переноса его через диэлектрик. Ввиду этого мы можем и в рассматриваемом случае вычислить энергию поля совершенно так же, как и в случае эфира или газообразного диэлектрика.

Рассмотрим теперь еще один частный случай поля в однородном диэлектрике, который может быть теперь и жидким и твердым. Рассмотрим конденсатор, образованный двумя произвольной формы проводящими поверхностями, расстояние между которыми, измеренное вдоль нормали, повсюду мало по сравнению с радиусами кривизны обкладок. Пространство между обкладками пусть будет заполнено однородным диэлектриком с диэлектрическим коэффициентом ϵ (при нашем выборе системы единиц то же значение будет иметь и удельная индукция ϵ). Напряженность поля между обкладками может быть подсчитана так же, как и в выше рассмотренном случае плоского воздушного конденсатора. Действительно, так как линии смещения перпендикулярны к обоим обкладкам, то мы можем и в рассматриваемом случае считать трубки индукции прямыми цилиндрами, вдоль которых диэлектрическое смещение постоянно. То же имеет место в отношении напряженности поля, и мы имеем:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \quad \text{и} \quad D = \epsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Если S обозначает величину поверхности каждой обкладки и если S настолько велико, что без ощутительной погрешности мы можем пренебречь искривлением трубок смещения на краях обкладок и влиянием трубок, соединяющих не обращенные друг к другу стороны обкладок, то для заряда первой обкладки мы найдем выражение:

$$e = S\varepsilon \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Следовательно, при заданной разности потенциалов заряд пропорционален диэлектрическому коэффициенту среды, заполняющей пространство между обкладками.

Для энергии системы мы получаем выражения:

$$\frac{1}{2} e (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} \frac{S\varepsilon}{d} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{S\varepsilon} e^2.$$

Эти выражения показывают, что при заданной разности потенциалов энергия пропорциональна диэлектрическому коэффициенту, а при заданном заряде энергия обратно пропорциональна ему.

Легко показать, что этот последний результат остается справедливым всегда. Для этого представим себе две геометрически конгруэнтные системы проводников: одну — в эфире, а другую — в однородном диэлектрике. Пусть в обеих системах соответствующие проводники имеют равные потенциалы. Предположим, далее, что для одной из систем мы знаем полное решение электростатической проблемы. В этом случае мы можем вычертить все эквипотенциальные поверхности и можем указать значение потенциала для каждой из них. Мы можем утверждать, что та же система эквипотенциальных поверхностей с теми же значениями потенциалов будет иметь место и во второй системе. Действительно, эти эквипотенциальные поверхности удовлетворяют граничным условиям на поверхностях проводников и в бесконечности, кроме того, вне проводников удовлетворяется повсюду уравнение Лапласа, а этими условиями, как мы знаем, значения потенциала определяются однозначно. Отсюда следует, что в обеих системах значения напряженности поля одинаковы, а диэлектрические смещения и заряды во второй системе в ε раз больше, чем в первой. Во столько же раз больше и общая энергия поля второй системы.

Если в обеих системах равны не потенциалы, а величина зарядов, то диэлектрическое смещение во второй системе должно быть равным смещению в первой. Напряженность поля и значение потенциала будет при этом во второй системе меньше в ε раз. Отсюда следует, что энергия второй системы также в ε раз меньше энергии первой системы.

Из полученного результата выше для пonderомоторных сил непосредственно следует, что в однородном диэлектрике силы эти при равных зарядах обратно пропорциональны, а при равных потенциалах прямо пропорциональны диэлектрическому коэффициенту среды. Последним обстоятельством пользуются для измерения ε в жидких диэлектриках. Для этого сравнивают отбросы, даваемые бесквитом квадратного электрометра

в воздухе и в измеряемой жидкости при условии, что в обоих случаях квадранты заряжены до одинаковой разности потенциалов, путем, например, присоединения к полюсам гальванического элемента.

Возвратимся теперь к случаю, когда в поле находятся различные диэлектрики, каждый из которых однороден и изотропен. На поверхностях соприкосновения этих диэлектриков ε изменяется скачком и мы уже знаем, что на таких поверхностях φ и $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ остаются непрерывными.

Докажем теперь, что и в этом случае общая энергия поля, равная

$$\frac{1}{2} \sum e_i \varphi_i,$$

может быть вычислена, если допустить, что в каждом элементе объема dS поля заключается энергия, равная

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dS.$$

Это легко доказать при помощи указанных в математическом введении теорем таким же образом, как и для однородного диэлектрика.

Мы воспользуемся, однако, для доказательства этого несколько другим математическим путем.

Трубки смещения проходят в поле либо от одного заряженного проводника к другому, либо уходят в бесконечность. На поверхностях соприкосновения незаряженных диэлектриков эти трубки испытывают преломление. Мы начнем с того, что разделим поверхность одного из проводников на весьма малые элементы. Трубка смещения, выходящая из такого заряженного элемента, либо уходит в бесконечность, либо оканчивается на поверхности другого проводника. Затем мы переходим ко второму проводнику и делим все части его поверхности, на которых не оканчиваются построенные ранее трубки смещения, на элементы, на которых мы аналогичным образом конструируем новые трубки смещения. Поступив так со всеми заряженными проводниками, мы разделим весь объем поля на трубки смещения и все заряженные поверхности на элементы. Обозначим заряды элементов поверхности проводника γ через $e_1, e_2, \dots$ и т. д.

Вышеприведенное выражение для энергии будет равно

$$\frac{1}{2} \sum (e_1 + e_2 + \dots) \varphi_i.$$

Объединим в этой сумме каждые два элемента, связанные трубкой смещения, и выделим отдельно те элементы, которые связаны трубками смещения, уходящими в бесконечность. Каждая пара элементов первой группы содержит равные по величине, но противоположные по знаку заряды и приносит к общей энергии величину, равную

$$\frac{1}{2} e_k (\varphi_k - \varphi_l).$$

Рациональнее всего считать эту энергию распределенной по всей трубке смещения, соединяющей рассматриваемые элементы. Аналогично уходящая в бесконечность трубка будет содержать энергию, равную

$$\frac{1}{2} \cdot e_m \varphi_m.$$

Легко показать, что ту же энергию в каждой из трубок мы получим, если примем, что в каждом элементе объема поля содержится энергия, равная

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dS.$$

В рассматриваемой трубке смещения мы получим при этом запас энергии, равный

$$\int_k^l \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dS.$$

Разделим трубку смещения перпендикулярными к ней сечениями ω на элементы длины ds . Полученные таким образом элементы объема $dS = \omega ds$. Кроме того, вдоль всей трубки $(\omega \mathbf{D}) = e_k$. При суммировании энергии, содержащейся в отдельных элементах объема, мы опускаем элемент объема, содержащий излом трубки (в случае, если трубка смещения проходит через несколько поверхностей соприкосновения различных диэлектриков, мы опустим все соответствующие элементы объема). Благодаря этому общая сумма изменится лишь бесконечно мало. Мы получаем:

$$\int_k^l \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dS = -\frac{1}{2} e_k \int_k^l \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = -\frac{1}{2} e_k \cdot (\varphi_I - \varphi_{II} + \varphi_I - \varphi_k),$$

где φ_I и φ_{II} обозначают значения потенциала по обе стороны от поверхности разрыва непрерывности ε . Вследствие непрерывности потенциала на таких поверхностях $\varphi_I = \varphi_{II}$, и полученное выражение принимает вид:

$$\frac{1}{2} e_k (\varphi_k - \varphi_l).$$

Аналогичным образом для энергии, заключающейся в трубке смещения, идущей от элемента поверхности k -го проводника в бесконечность, мы получим выражение

$$\frac{1}{2} e_k \varphi_k.$$

Этим доказывается, что, положив энергию единицы объема поля равной

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}),$$

мы получим верное значение для всей энергии поля.

§ 9. Пондеромоторные силы, действующие на диэлектрики. Исходя из вышесказанного, можно доказать, что на тело, состоящее из диэлектрика, диэлектрический коэффициент которого отличается от окружающей среды, действуют пондеромоторные силы. Эти силы были экспериментально исследованы Больцманом, который при их помощи определял диэлектрические коэффициенты. Представим себе, что в воздухе недалеко от заряженного металлического шара подвешен второй шар из серы. Легко убедиться, что между обоими шарами должны действовать притягательные силы. Для этого достаточно доказать, что общая электростатическая энергия этой системы уменьшится, если, например, серый шар будет передвинут на небольшое расстояние в сторону металлического шара. Присутствие шара из серы вызывает изменение потока трубок смещения и тем самым, что через серый шар проходит больше трубок смещения, чем их проходило бы в воздухе через занимаемый им объем.

Этот факт можно выразить иначе, сказав, что благодаря большему значению ϵ в диэлектрике смещение электричества встречает в нем меньшее противодействие, и поэтому через серый шар будет проходить большее число трубок смещения. Влияние серного шара будет тем больше, чем ближе он помещен к металлическому шару. Так как смещение электричества происходит в диэлектрике легче, чем в воздухе, то для заряжения металлического шара заданным зарядом понадобится в случае присутствия серного шара затратить меньше работы, чем в его отсутствии. Следовательно, серый шар вызывает уменьшение энергии поля и уменьшение это тем больше, чем ближе мы помещаем серый шар к металлическому. Отсюда следует, что между шарами должны действовать притягательные силы. Больцман сравнивал величину этих сил с силами, которые действовали бы на металлический изолированный шар, помещенный на месте серного. Оказывается, что отношение этих сил зависит от диэлектрического коэффициента серы. Общая энергия системы равна

$$\frac{1}{2} e\varphi.$$

и так как только первый шар заряжен, то нам достаточно определить, как изменится его потенциал φ , благодаря присутствию второго изолированного шара или шара из серы. Допустим, что расстояние b между шарами велико по сравнению с их радиусами. В этом случае мы можем считать поле первого шара в месте, где помещается второй шар, однородным, и нам необходимо исследовать, как изменится это поле благодаря внесению второго шара. Для случая металлического шара решение получается из соображений, приведенных в § 3 настоящей главы. Мы найдем там для потенциала в любой точке выражение:

$$\varphi = C - E_0 x + E_0 \frac{a^3 x}{r^3}.$$

Очевидно, что третий член этого выражения читывает влияние металлического шара.

Чтобы найти поле, получающееся благодаря внесению серного шара, мы попробуем взять аналогичное решение и допустим, что вне серного шара потенциал равен:

$$\varphi = C - E_0 x + \alpha \frac{x}{r^3}.$$

Потенциал внутри шара не может, очевидно, быть выражен этим выражением, так как в центре шара терм $\frac{x}{r^3}$ обращается в бесконечность. Поэтому мы предположим, что внутри серного шара

$$\varphi_1 = C_1 - A_1 x,$$

т. е. мы предполагаем, что поле внутри шара однородно. Значение потенциала на поверхности шара должно оставаться непрерывным. Это дает для любого x соотношение:

$$C - E_0 x + \alpha \frac{x}{a^3} = C_1 - A_1 x.$$

откуда следует, что

$$C_1 = C \quad \text{и} \quad A_1 = E_0 - \frac{\alpha}{a^3}.$$

Далее, нормальная составляющая смещения $\mathbf{D}$ также должна быть непрерывной на поверхности серного шара. Для внешней нормали к поверхности серного шара мы находим¹:

$$D_n = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{r=a} = E_0 \cos(\mathbf{r}, \mathbf{i}) + \frac{2\alpha \cos(\mathbf{r}, \mathbf{i})}{a^3}.$$

Для внутренней нормали, обозначив диэлектрический коэффициент ε , получаем:

$$D_n = - \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right)_{r=a} = \varepsilon A_1 \cos(\mathbf{r}, \mathbf{i}).$$

Из условия непрерывности нормальной составляющей D_n следует, что

$$E_0 + \frac{2\alpha}{a^3} = \varepsilon \left(E_0 - \frac{\alpha}{a^3} \right)$$

т. следовательно,

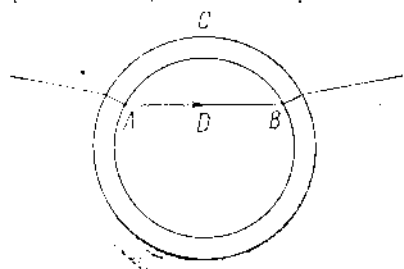
$$\alpha = E_0 a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}.$$

В связи с вышеизложенным мы заключаем отсюда, что сила, с которой притягивается серный шар, больше силы притяжения металлического шара в $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ раз.

Больцман измерял эту силу притяжения при помощи крутильных весов и вычислял отсюда значение диэлектрического коэффициента для серы и других диэлектриков. При выполнении измерений получаются

¹ Здесь $\mathbf{i}$ попрежнему обозначает единичный вектор, направленный вдоль оси X . *Прим. ред.*

следующие затруднения. Благодаря загрязненности и конденсации паров воды на поверхности диэлектрика легко образуется проводящий слой. В начале опыта при зарядении шара возникает поле, линии которого проходят через диэлектрический шар примерно так, как изображено



Фиг. 13.

на фиг. 13. При этом потенциал убывает вдоль силовой линии так, что потенциал в *B* больше, чем в *A*. Благодаря этой разности потенциалов вдоль плохо проводящей поверхностной пленки в направлении *ACB* возникает ток, выравнивающий постепенно разность потенциалов. Когда это выравнивание наступит, то поле получается такое же, как и в случае проводящей среды. Чтобы избежать этого затруднения, Больцман перио-

дически изменял знак заряда на металлическом шаре с такой частотой, что только что указанные поверхностные токи не успевают развиться и заметным образом изменить распределение потенциалов на диэлектрическом шаре.

§ 10. Произвольные системы проводников. Рассмотрим теперь еще раз систему, состоящую из *n* проводников, находящихся в совершенно произвольной диэлектрической среде. Нашей задачей будет определение находящихся на этих проводниках зарядов, если нам известны их потенциалы и, наоборот, определение потенциалов проводников по заданным значениям зарядов. Каждая из этих задач может быть сведена при помощи указанного в § 1 этой главы принципа суперпозиции к решению *n* более простых задач, которые мы и рассмотрим ниже.

Пусть одно из возможных электрических состояний системы определяется распределением потенциалов φ' , а другое φ'' . Составляющие напряженности поля в первом состоянии будут в любой точке поля

$$E'_x = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad E'_y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad E'_z = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z},$$

и диэлектрическое смещение $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$ [для анизотропного диэлектрика это последнее равенство заменяется равенством (18') гл. I, § 8]. Аналогично для второго состояния

$$E''_x = -\frac{\partial \varphi''}{\partial x}, \quad E''_y = -\frac{\partial \varphi''}{\partial y}, \quad E''_z = -\frac{\partial \varphi''}{\partial z} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}'' = \epsilon \mathbf{E}''.$$

Мы получим новое возможное состояние системы, если положим $\varphi = \varphi' + \varphi''$, причем напряженность поля в этом новом состоянии будет иметь составляющие

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}''$$

а диэлектрическое смещение $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{D} = \mathbf{D}' + \mathbf{D}''$.

Легко видеть, что это последнее соотношение остается в силе и при анизотропном диэлектрике. Это новое состояние системы возможно, так как 1) φ постоянно на поверхности каждого проводника (вследствие постоянства на них φ' и φ''), 2) $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ во всем поле (так как $\operatorname{div} \mathbf{D}' = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{D}'' = 0$) и 3) на всех поверхностях разрывов непрерывности тангенциальные составляющие $\mathbf{E}$ и нормальные составляющие $\mathbf{D}$ остаются непрерывными (так как те же условия выполняются для $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{D}''$).

Заряд k -го проводника, который мы обозначим индексом k , в этом новом состоянии будет:

$$e_k = \int \mathbf{D}_n d\mathbf{s}_k = \int (\mathbf{D}'_n + \mathbf{D}''_n) d\mathbf{s}_k = e'_k + e''_k.$$

Следовательно, заряд в новом состоянии равен просто сумме зарядов исходных состояний.

Доказав этот принцип суперпозиции для двух состояний, мы можем аналогично распространить его на любое большее число состояний. Частным случаем этого является суперпозиция одинаковых состояний, при которой, очевидно, значение потенциала φ в любой точке попросту умножается на число накладывающихся состояний.

После сказанного ясно, что мы можем найти заряды $e_1, e_2, \dots, e_n$ при заданных значениях потенциалов проводников $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, если мы решим n следующих более простых задач:

Найти заряды проводников, если заданные значения потенциалов равны:

$$\begin{array}{l} 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0, 0, 0, \dots, 1 \end{array}$$

Пусть получаемые значения зарядов соответственно равны:

$$\begin{array}{l} p_{11}, p_{21}, p_{31}, \dots, p_{n1} \\ p_{12}, p_{22}, p_{32}, \dots, p_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, \dots, p_{nn} \end{array}$$

тогда согласно предыдущему мы получаем:

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = p_{11}\varphi_1 + p_{12}\varphi_2 + \dots + p_{1n}\varphi_n \\ e_2 = p_{21}\varphi_1 + p_{22}\varphi_2 + \dots + p_{2n}\varphi_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e_n = p_{n1}\varphi_1 + p_{n2}\varphi_2 + \dots + p_{nn}\varphi_n \end{array} \right\} \quad (16)$$

При помощи этих линейных уравнений мы можем найти потенциалы, как функции зарядов:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = q_{11}e_1 + q_{12}e_2 + q_{13}e_3 + \dots + q_{1n}e_n \\ \varphi_2 = q_{21}e_1 + q_{22}e_2 + q_{23}e_3 + \dots + q_{2n}e_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n = q_{n1}e_1 + q_{n2}e_2 + q_{n3}e_3 + \dots + q_{nn}e_n \end{array} \right\} \quad (17)$$

Коэффициенты q имеют значение аналогичное p , так, например, q_{1k} обозначает потенциал первого проводника, если k -й проводник несет заряд 1, а все остальные имеют заряды, равные нулю.

Из рассмотрения энергии системы мы получим следующее важное соотношение между этими коэффициентами. Общая энергия поля равна

$$A = \sum \frac{1}{2} e\varphi = \frac{1}{2} \{ q_{11}e_1^2 + q_{22}e_2^2 + \dots + q_{nn}e_n^2 + (q_{12} + q_{21})e_1e_2 + \dots + (q_{1n} + q_{n1})e_1e_n + \dots \}$$

Как мы видели выше, работа, необходимая чтобы перенести заряд de_k из бесконечности на поверхность k -го проводника, должна, с одной стороны, равняться $\varphi_k de_k$, а с другой — равна изменению энергии поля, т. е. $\frac{\partial A}{\partial e_k} de_k$. Таким образом мы получаем, что

$$\frac{\partial A}{\partial e_k} = \varphi_k.$$

Вычислив $\frac{\partial A}{\partial e_k}$ из вышеприведенного уравнения энергии и приравняв его взятому из (17) значению φ_k , получаем:

$$\frac{1}{2} (q_{1k} + q_{k1}) e_1 + \frac{1}{2} (q_{2k} + q_{k2}) e_2 + \dots + q_{kk} e_k + \dots \\ \dots + \frac{1}{2} (q_{nk} + q_{kn}) e_n = q_k e_1 + q_{k2} e_2 + \dots + q_{kn} e_n.$$

Так как это соотношение должно иметь место, независимо от величины зарядов проводников $e_1, e_2, \dots, e_n$, то из него следует, что

$$q_{kh} = q_{hk}.$$

Это и есть искоемое соотношение между коэффициентами q , выражающее очень важное взаимоотношение, которое может быть следующим образом выражено словами (принцип взаимности):

Если в произвольной системе проводников, окруженных произвольными диэлектриками, мы рассмотрим два любых проводника A и B , то значение потенциала, который получит проводник B в случае, если только проводник A будет заряжен, равно тому значению потенциала, которое получит проводник A , если из всех проводников будет заряжен только проводник B и притом тем же зарядом, который в первом случае находился на проводнике A .

Если в равенствах (17) исключить при помощи (16) величины зарядов e , то мы получим соотношения между коэффициентами p и q . Исходя из этих соотношений, очень легко показать, что из вышеполученных соотношений следует, что:

$$p_{kh} = p_{hk}.$$

Это означает, что величина заряда, возникающего на проводнике B в случае, если все проводники кроме A отведены к земле, а проводник A заряжен до заданного потенциала, равняется величине заряда, который индуктируется на A в случае соединения с землей всех проводников кроме B и заряжения B до того же значения потенциала, которое имел раньше A .

§ 11. Заряды на изоляторах. Нам остается еще затронуть один вопрос, относящийся к основным электростатическим явлениям, а именно: вопрос о появлении электрических зарядов на диэлектриках. Мы не будем здесь излагать теории возникновения таких зарядов, а покажем только на одном примере, как должны быть изменены наши основные

уравнения при учете таких зарядов. Для этого опять весьма полезным является представление об электричестве как о несжимаемой жидкости. Представим себе, например, что на поверхности стеклянной пластинки находится положительный заряд с поверхностной плотностью σ . Если в поле нет никаких других зарядов, то эти заряды вызовут диэлектрическое смещение как в стекле, так и в воздухе. При этом в обоих случаях смещение будет направлено от заряженной поверхности наружу. На это смещение может налагаться еще смещение, вызванное другими находящимися в поле зарядами, которое остается непрерывным на рассматриваемой поверхности.

Чтобы найти закон изменения смещения при проходе через заряженную поверхность диэлектрика, мы применим те же рассуждения, которые приводят в случае отсутствия зарядов к заключению о непрерывности нормальной составляющей смещения. Для этого рассмотрим элемент объема, ограниченный поверхностью цилиндра, основания которого параллельны заряженной поверхности и лежат по обе ее стороны. Пусть высота этого цилиндра весьма мала по сравнению с размерами оснований. Обозначим вырезаемый этим цилиндром элемент заряженной поверхности через dS . Заряд, находящийся внутри поверхности, будет в этом случае равен σdS . Вследствие несжимаемости электрической жидкости поток смещения ее через рассматриваемую замкнутую поверхность должен иметь то же значение. Эти соображения приводят к равенству:

$$(\mathbf{D}_n)_I - (\mathbf{D}_n)_II = \sigma,$$

где положительное направление нормали считается направленным от стороны II к стороне I .

Глава III.

ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ.

§ 1. Введение Постоянные токи могут существовать только в проводниках, так как в диэлектрике такой ток вызвал бы нарастание смещения до бесконечности. Для поддержания в проводнике постоянного тока необходимо, чтобы на заряды действовала подталкивающая сила постоянной величины и направления. Отсюда следует, что постоянный ток не может возникнуть благодаря индукционному действию изменяющегося магнитного поля. Действительно, если бы это имело место, то интеграл —

$$-\frac{d}{dt} \int B_n d\sigma$$

распространенный по всей ограниченной контуром тока поверхности, должен был бы иметь постоянное значение. Это было бы возможно только при условии, если бы магнитный поток через контур тока $\int B_n d\sigma$ бесограниченно увеличивался бы со временем, что, очевидно, невозможно. Поэтому мы будем в дальнейшем считать, что в случае постоянного тока магнитная индукция (следовательно, и напряженность магнитного поля) не меняются со временем.

Кроме электростатических сил, о которых шла речь выше, мы находим в природе еще целый ряд других сил, могущих приводить электрические заряды в движение. Мы будем называть их электродвижущими силами и будем обозначать напряженность их поля буквой E_e , подразумевая под этим вектор, равный силе, действующей на единицу положительного заряда.

• В изотропном проводнике мы можем считать плотность тока равной:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_e),$$

где ρ обозначает удельное сопротивление, а $\frac{1}{\rho}$ — удельную проводимость проводника. Ток может отсутствовать и в случае наличия электродвижущих сил, если электростатические и электродвижущие силы взаимно уравновешиваются, т. е. если во всем пространстве $\mathbf{E} + \mathbf{E}_e = 0$. Так как для любой замкнутой линии $\int \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{s} = 0$, то в этом случае должно иметь место и равенство $\int \mathbf{E}_{es} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Если это условие выполнено для любого замкнутого пути, то электродвижущие силы не могут вызвать движения

электрических зарядов по замкнутым путям, т. е. постоянных токов. Однако и в этом случае электродвижущие силы будут вызывать временные движения электрических зарядов, которые поведут к накоплению электрических зарядов на отдельных частях проводника. Это накопление будет продолжаться до тех пор, пока возникшее вследствие этого электрическое поле не скомпенсирует поля электродвижущих сил $E_{\text{св}}$. Устанавливающиеся при этом значения разностей потенциалов должны, следовательно, удовлетворять условию, что для любого направления $\frac{d\varphi}{dh} = E_{\text{св}}$. Отсюда следует, что разность потенциалов между двумя любыми точками A и B в проводнике будет равна:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B E_{\text{св}} ds.$$

Такие разности потенциалов возникают, например, при соприкосновении двух металлов. При этом мы должны допустить, что на поверхности соприкосновения действуют электродвижущие силы такого рода, что для любой замкнутой кривой, проведенной целиком внутри проводника, интеграл $\int E_{\text{св}} ds$ исчезает. Значение же этого интеграла, взятого по кривой, соединяющей любую точку A проводника с любой точкой B второго проводника, имеет отличное от нуля значение, зависящее только от рода соприкасающихся металлов и равное разности потенциалов между ними.

Термодинамические соображения приводят к подтверждаемому на опыте заключению, что при постоянной температуре разность потенциалов между двумя металлами не зависит от того, соприкасаются ли они непосредственно или между ними находятся еще другие металлы. Отсюда непосредственно следует, что если на концах соприкасающихся металлов находятся два куска одного и того же металла, то разность потенциалов между ними будет равна нулю. Однако, если в таком ряду находится и электролит, то последнее утверждение не верно, мы получаем конечную разность потенциалов между концами (полюсами) цепи. На этом свойстве электролитов основано действие гальванических элементов.

Вышеуказанное состояние равновесия в отсутствие тока возможно только в том случае, если для любого замкнутого контура, целиком расположенного внутри проводников,

$$\int E_{\text{св}} ds = 0.$$

Если хоть для одного замкнутого контура этот интеграл отличен от нуля, то электричество будет двигаться и возникнет ток.

Если, например, металлическая пластинка соприкасается с электролитом, то мы не можем, конечно, избежать неоднородностей на этой поверхности. Благодаря этому всегда можно провести маленькие замкнутые

контуры таким образом, что они пересекут границу соприкосновения в двух точках P и Q , в которых действуют различные электродвижущие силы. Вдоль такого контура вышенаписанный интеграл отличен от нуля, и поэтому здесь возникают местные замкнутые токи. В гальванических элементах токи эти являются причиной неравномерного разъедания цинков.

§ 2. Закон Ома. Представим себе цепь проводников, в которой действуют электродвижущие силы. Пусть на обоих концах цепи находятся одинаковые металлы, не соединенные проводником, так что цепь тока не замкнута. Если в начальный момент потенциал вдоль всей цепи проводников имел постоянное значение, то E в этот момент повсюду равно нулю. Но в таком случае $E + E_e$ не может быть всюду нулем (так как $E_e \neq 0$), и вследствие этого возникает ток. Этот ток, возникший в незамкнутой цепи, вызывает накопление зарядов и нарастание разностей потенциалов, которое будет продолжаться до тех пор, пока напряженность возникшего электростатического поля не уравнивает электродвижущих сил и не прекратит тока. В однородных частях цепи значение потенциала будет после этого постоянным, но на поверхностях соприкосновения различных проводников, где действуют электродвижущие силы, мы будем иметь скачок потенциала. Величина его будет равна

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B E_{es} ds, \quad (1)$$

где A и B — две произвольные точки соприкасающихся проводников, лежащие по обе стороны от поверхности соприкосновения.

Так как точки A и B мы можем взять очень близкими, то мы можем говорить о скачке потенциала. Разность потенциалов на концах цепи будет равна сумме скачков потенциала на всех поверхностях соприкосновения. Эта сумма будет, очевидно, равна $\int E_{es} ds$, распространенному на всю длину цепи. Эту величину обычно называют общей электродвижущей силой цепи.

Представим себе теперь, что наша цепь линейна и мы замыкаем концы ее проводником. При этом в цепи возникает ток, плотность которого будет равна

$$C_s = \frac{1}{\rho} (E_s + E_{es}).$$

Индекс s обозначает здесь направление элемента длины цепи. Обозначим поперечное сечение и шей линейной цепи буквой ω , а силу протекающего по ней тока — буквой I . Тогда количество электричества, протекающего в единицу времени через это сечение, будет равно $C_s \omega$, и вследствие несжимаемости электричества (вследствие соленоидальности C) величина эта постоянна вдоль всей цепи. Вышенаписанное равенство в этих обозначениях напишется так:

$$I \rho = E_s + E_{es}. \quad (2)$$

Из равенства (2) E_s может быть исключено при помощи интегрирования по всей замкнутой цепи тока. Так как интеграл от напряженности электрического поля вдоль любой замкнутой кривой равен нулю, то мы получим:

$$i \int_{\omega} \rho \, ds = \int E_{es} \, ds. \quad (3)$$

Это равенство является выражением закона Ома.

В согласии с вышеизложенным значение интеграла, стоящего в правой части, мы называем общей электродвижущей силой цепи и обозначим ее буквой F . Интеграл, стоящий слева, есть омическое сопротивление цепи, зависящее только от свойств и размеров проводников, образующих цепь. Мы будем обозначать его буквой r . Наше равенство примет тогда вид:

$$F = ir. \quad (4)$$

Под электродвижущей силой, действующей в некоторой части цепи, например, между точками A и B , мы будем подразумевать значение интеграла $\int_A^B E_{es} \, ds$ и будем обозначать ее через F_{AB} . Аналогичным образом мы будем называть сопротивлением участка AB величину

$$r_{AB} = \int_A^B \frac{\rho}{\omega} \, ds.$$

Из равенства (2) путем его интегрирования между точками A и B мы получаем:

$$ir_{AB} = \int_A^B E_s \, ds + F_{AB}$$

или

$$F_{AB} - ir_{AB} = \varphi_B - \varphi_A. \quad (5)$$

В случае отсутствия тока из (5) мы опять получаем равенство (1). Далее, исходя из (5), легко объяснить давно известный факт уменьшения разности потенциалов между полюсами гальванического элемента при его замыкании.

Для участков цепи, в которых не действуют электродвижущие силы, вышеуказанное равенство переходит в

$$ir_{AB} = \varphi_A - \varphi_B. \quad (6)$$

Эти разности потенциалов имеют важное физическое значение. Благодаря им движение электричества происходит вдоль всей цепи тока, тогда как электродвижущие силы действуют только на отдельных участках (поверхностях соприкосновения) и только в этих местах гонят электрические заряды от одного проводника к другому. Из-за этого

возникают вышеуказанные скачки потенциала, выравнивающиеся благодаря падению потенциала в соединительных проводниках.

Мы можем создать себе картину, аналогичную электрическому току, если представим себе несжимаемую жидкость, заполняющую замкнутую трубку с упругими стенками, в одном из участков которой действует какая-либо причина (аналогичная электродвижущей силе), вызывающая движение жидкости вдоль трубки. Вблизи этого места в направлении движения жидкости будут выгибаться стенки трубки наружу, увеличивая ее сечение. В электрическом случае это соответствует зарядению проводника (положительным зарядом), о чем будет еще речь ниже. На другую сторону от места, где находится вызывающая движение жидкости причина, стенки будут, наоборот, выгибаться внутрь, и сечение трубки уменьшится (это аналогично отрицательным зарядам). Развивающиеся благодаря этим деформациям стенок упругие силы соответствуют диэлектрическим напряжениям среды. Силы эти вызывают падение давления вдоль трубки, которым и обуславливается движение жидкости вдоль всей трубки. В электрической цепи этому соответствует падение потенциала, т. е. электрическое поле, направленное вдоль течения тока.

§ 3. Электрическое поле, существующее вокруг цепи тока. Если нам известно распределение электродвижущих сил и сопротивлений в цепи, то при помощи вышеприведенных уравнений мы можем определить величину силы установившегося постоянного тока и разности потенциалов между любыми точками цепи. Но абсолютное значение потенциалов остается при этом неопределенным. Это совершенно понятно, ибо, ничего не изменяя в распределении электродвижущих сил, сопротивлений и токов, мы, очевидно, можем, изолировав нашу систему, сообщить ей любой заряд, который поднимает значение потенциала во всех точках цепи на любую величину. Если же мы примем, что общий заряд системы равен нулю, то значение потенциала в каждой точке может быть определено следующим образом: обозначим значение потенциала в произвольно выбранной точке Q цепи буквой φ_1 . При помощи вышеприведенных уравнений мы можем тогда найти значение потенциала в любой другой точке цепи как функцию φ_1 . Найдя, таким образом, распределение значений потенциала на поверхности проводников, мы можем при помощи общих уравнений электростатики найти распределение потенциалов и напряжений поля во всем пространстве, окружающем цепь тока. Написав, далее, выражение для электрического смещения и проинтегрировав его по поверхностям всех проводников, образующих цепь, мы найдем выражение общего заряда в функции φ_1 . Положив этот заряд равным нулю, мы получим уравнение, из которого сможем определить абсолютное значение φ_1 .

Чтобы вычислить значение φ_1 , мы выразим его через две вспомогательные величины, имеющие простое физическое значение. Представим себе сначала, что точка Q соединена с землей, следовательно, ее потенциал равен нулю. Устанавливающееся при этом электрическое состояние вполне определено этим условием и оставшимся неизменным распределением значений токов. Значение заряда цепи e_1 может быть при этом вычислено вышеуказанным образом. Далее, представим себе,

что вся система изолирована и мы заряжаем ее до тех пор, пока потенциал точки Q (имевший ранее нулевой потенциал) не получит значения φ_1 . Если емкость системы C , то необходимый для этого заряд будет равен $C\varphi_1$. Действительное электрическое состояние системы может быть теперь получено суперпозицией состояний, при которых в присутствии токов точка Q отведена к земле и при котором потенциал всей системы увеличен на φ_1 . Заряд, находящийся на проводниках системы в этом действительном состоянии, будет равен $c_1 + C\varphi_1$. Согласно условию должно быть:

$$c_1 + C\varphi_1 = 0,$$

откуда

$$\varphi_1 = -\frac{c_1}{C}.$$

Хотя общий заряд и равен нулю, но плотности зарядов на отдельных частях цепи могут достигать в отдельных случаях значительной величины. Это имеет, например, место в трансатлантических кабелях, где благодаря емкостным влияниям плотности зарядов повышены. (Металлический провод и окружающая изоляцию оболочка и морская вода образуют обкладки цилиндрического конденсатора. Сходство с электростатическим случаем увеличивается при этом еще тем, что потенциал лишь весьма медленно изменяется вдоль провода.)

Однако между полем, окружающим проволоку, по которой течет постоянный ток, и электростатическим полем заряженной проволоки, есть существенное отличие: в случае тока линии напряженности электрического поля не перпендикулярны к поверхности проводника, так как поверхность эта не эквипотенциальна. По той же причине линии поля могут в случае тока проходить между различными частями одного и того же проводника, что в электростатике невозможно. Можно даже указать случаи, когда все линии поля, выходящие из одной части проводника, оканчиваются на других частях того же проводника. Это имеет, например, место в многослойных катушках. В таких катушках, так же как в кабеле, могут скопиться большие заряды, так как последовательные слои обмотки являются как бы обкладками конденсатора.

§ 4. Законы Кирхгофа. Рассмотрим произвольную сеть линейных проводников, в некоторых из которых действуют электродвижущие силы. Рассмотрим вопрос о силах токов, текущих в отдельных проводниках. Этот вопрос разрешается законами Кирхгофа, которые могут быть легко получены из наших общих уравнений.

Первый закон Кирхгофа вытекает из несжимаемости электрической жидкости и может быть выражен так: в любой точке разветвления количества притекающего и утекающего электричества равны. Если условиться считать ток, притекающий к точке разветвления, положительным, а утекающий отрицательным и обозначить силу тока через i , то закон этот можно выразить следующей формулой:

$$\sum i = 0.$$

Второй закон Кирхгофа вытекает из того, что линейный интеграл от напряженности поля, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю.

В качестве замкнутого пути интегрирования мы выбираем любой замкнутый контур, образованный разветвленной сетью проводников, и фиксируем в нем некоторое направление обхода, направленный вдоль которого ток мы будем считать положительным.

Из полученного выше равенства

$$\oint_{\omega} i_{\varphi} ds = E_{cs} ds = E_{cs} ds$$

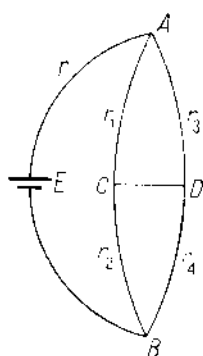
следует, что вдоль такого контура

$$\oint_{\omega} i_{\varphi} ds = \int E_{cs} ds.$$

В интеграле, стоящем слева, значение i не является теперь постоянным вдоль всего пути интегрирования, но, конечно, остается постоянным на каждом участке контура от одной точки разветвления до ближайшей.

Если мы обозначим для каждого такого участка цепи значение действующей в этом участке электродвижущей силы через $f = \int E_{cs} ds$, то второй закон Кирхгофа может быть выражен уравнением:

$$\sum i r = \sum f.$$



Фиг. 14.

В качестве примера найдем распределение токов в мосте Уитстона, изображенном схематически на фиг. 14. Две точки A и B соединены с полюсами источника тока. Между этими точками включены параллельно две цепи, две произвольные точки которых C и D соединены проводником. Необходимо найти силы токов, текущих по отдельным участкам цепи. Первый закон Кирхгофа дает для трех точек разветвления соотношения между некоторыми токами. Требуемое этим законом соотношение

для четвертой точки оказывается необходимым следствием первых трех. Обозначим значение силы тока в цепи BEA буквой i , тогда в разветвлениях AC и AD мы можем обозначить силы токов через i_1 и $i - i_1$, а в разветвлениях BC и BD через i_2 и $i - i_2$.

Вышеуказанные соотношения для точек разветвления C и D дают для тока в CD значение $i_1 + i_2$. Если сопротивления в цепях BEA , AC , BC , AD , BD и CD равны соответственно r , r_1 , r_2 , r_3 , r_4 и r_5 , а электродвижущая сила элемента равна f , то из второго закона Кирхгофа мы получаем:

$$\begin{aligned} \text{для контура } ACD: & i_1 r_1 + (i_1 - i_2) r_5 - (i - i_1) r_3 = 0, \\ \text{для контура } BCD: & i_2 r_2 + (i_1 - i_2) r_5 - (i - i_2) r_4 = 0, \\ \text{для контура } BEAC: & ir + i_1 r_1 - i_2 r_2 = f. \end{aligned}$$

Эти три уравнения позволяют определить три неизвестные значения токов.

Вместо второго закона Кирхгофа при рассмотрении подобных проблем можно всегда применить равенство (5) для каждого участка цепи, лежащего между двумя точками разветвления. Этот последний способ подсчета имеет даже то преимущество, что при нем непосредственно видно, что мы можем написать столько же уравнений, сколько мы имеем неизвестных. Действительно, если мы имеем n точек разветвления и из каждой выходит, например, три провода, то общее число проводов

равно $\frac{3n}{2}$. Следовательно, неизвестными являются $\frac{3n}{2}$ значений сил

токов и n значений потенциала в точках разветвления. Так как нам необходимо определить только значения разностей потенциалов, то мы можем одно из значений потенциалов выбрать произвольно. Таким

образом остается $\frac{3n}{2} + n - 1$ неизвестных. Равенство (5) дает для

каждого провода одно уравнение. Таким образом мы получаем $\frac{3n}{2}$ не-

зависимых уравнений. Первый закон Кирхгофа дает нам одно уравнение для каждой точки разветвления. Однако, если требуемые первым законом условия соблюдены для $n - 1$ точек разветвления, то они сами собою выполняются и для n -й точки. Таким образом первый закон дает нам только $n - 1$ независимых уравнений, что вместе с вышеуказан-

ными дает систему $\frac{3n}{2} + n - 1$ независимых уравнений, позволяющих определить $\frac{3n}{2} + n - 1$ неизвестных.

Для такой сети проводников имеет место теорема взаимности, напоминающая аналогичное соотношение, которое мы нашли в электростатике для произвольной системы проводников.

Если электродвижущая сила действует только в одном звене цепи и вызывает в некотором другом звене известную силу тока, то такая же сила тока возникает в первом звене, если электродвижущая сила будет перенесена во второе звено.

Чтобы доказать эту теорему, обозначим концы первого звена индексами 1, 2, а концы второго индексами 3, 4. Соответственно этому обозначим в первом случае (когда электродвижущая сила действует в первом звене) силу тока, возникающую в первом проводнике, через i_{12} , а его сопротивление буквой r_{12} , а силу тока во втором звене и его сопротивление через i_{34} и r_{34} .

Тогда мы получим:

для первого звена: $r_{12} i_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + f,$

для второго звена: $r_{34} i_{34} = \varphi_3 - \varphi_4,$

для каждого из остальных звеньев: $r_{kl} i_{kl} = \varphi_k - \varphi_l,$

для каждой точки разветвления: $\sum i_{kl} = 0.$

Во втором состоянии (когда электродвижущая сила переключена во второе звено) мы будем обозначать силы токов и значения потенциалов теми же буквами, но со знаками (').

Таким образом мы получим систему уравнений:

для первого звена:

$$r_{12} i'_{12} = \varphi'_1 - \varphi'_2,$$

для второго звена:

$$r_{34} i'_{34} = \varphi'_3 - \varphi'_4 - f,$$

для каждого из остальных звеньев:

$$r_{kl} i'_{kl} = \varphi'_k - \varphi'_l,$$

для каждой точки разветвления: $\sum i'_{hl} = 0$.

Чтобы сравнить значения i'_{34} , даваемые первой системой, со значением i'_{12} , даваемым второй, мы умножим уравнения первой группы соответственно на i'_{12} , i'_{34} , i'_{kl} и сложим полученные произведения, аналогично умножим уравнения второй группы соответственно на i'_{12} , i'_{34} , i'_{kl} и также сложим. В полученных таким образом двух равенствах левые части тождественны, следовательно, правые части равны, и мы получим:

$$f i'_{12} + \sum (\varphi_k - \varphi_l) i'_{kl} = f i'_{34} + \sum (\varphi_k - \varphi_l) i'_{kl}.$$

Если раскрыть скобки под знаками сумм и сгруппировать члены с одинаковыми значениями φ , то мы можем, очевидно, в каждой группе вынести значение φ , например φ_k , за скобки и получить $\varphi_k \sum i'_{kl}$. Здесь сумма будет распространяться на все токи, относящиеся к k -ой точке разветвления. Так как каждая такая сумма по первому закону Кирхгофа равняется нулю, то мы приходим к заключению, что в выписанном равенстве все выражения, стоящие под знаками суммы, исчезают. Сократив оставшиеся члены на f мы получаем искомый результат

$$i'_{12} = i'_{34}.$$

§ 5. Выделение тепла электрическим током. Рассмотрим опять участок цепи тока между точками A и B , между которыми вследствие какой-либо причины поддерживается постоянная разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$. Вследствие этого в этом участке течет постоянный ток

$$i = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{r_{AB}}.$$

При этом в любой промежуток времени τ от A к B протекает количество электричества, равное $i\tau$. Чтобы разность потенциалов между A и B осталась неизменной, необходимо, чтобы равное этому количество электричества было перенесено, например, по остальной части цепи от B опять к A . Для этого необходима затрата работы в количестве $i\tau(\varphi_A - \varphi_B)$. Эту энергию, очевидно, доставляют силы, поддерживающие постоянную разность потенциалов (в случае замкнутой цепи это электродвижущие силы). Эта энергия выделяется в участке AB цепи в форме тепла W . Таким образом в течение каждой единицы времени в рассматриваемом участке выделяется тепло

$$W_{AB} = i(\varphi_A - \varphi_B) = i^2 r_{AB}. \quad (7)$$

Равенство (7) выражает закон Джоуля. Для случая замкнутой неразветвленной цепи, в которой действует электродвижущая сила F , равенство (7) принимает вид:

$$W = Fi. \quad (8)$$

Следовательно, W выражает мощность, развиваемую в цепи электродвижущими силами.

Рассмотрим теперь выделение тепла в некоторых случаях, когда ток не остается постоянным. При этом мы не будем пока рассматривать явлений, имеющих место при установлении тока, при наличии самоиндукции, так как этот вопрос будет разобран в следующей главе. Точнее выражаясь, мы не будем здесь учитывать влияния изменений магнитного поля, окружающего проводник, и будем поэтому считать линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый по замкнутому контуру тока равным нулю.

Рассмотрим в первую очередь разряд конденсатора. Пусть потенциалы пластин конденсатора до соединения их проводником были φ_{01} и φ_{02} , а заряды их e_0 и $-e_0$ ¹. Общий запас энергии до разряда поэтому равен $\frac{1}{2}e_0(\varphi_{01} - \varphi_{02})$. При соединении пластин проводником

в нем возникнет ток, благодаря которому конденсатор разряжается, электрическая энергия поля исчезает, превращаясь в эквивалентное количество тепла.

Во время существования тока заряд пластин конденсатора и их разность потенциалов непрерывно уменьшаются. Обозначим для данного момента времени значения заряда через e , потенциалов через φ_1 и φ_2 и силы тока (считаемого положительным в направлении от первой пластинки ко второй) через i . Если сопротивление соединяющего пластинки проводника есть r , то

$$ir = \varphi_1 - \varphi_2$$

или, вводя емкость конденсатора C :

$$ir = \frac{e}{C}.$$

Отсюда следует, что и ток i непрерывно уменьшается при разряде. Величина уменьшения заряда за время dt равна $i dt$.

Следовательно,

$$i = -\frac{de}{dt}$$

и вышесказанное уравнение принимает вид:

$$-r \frac{de}{dt} = \frac{e}{C},$$

откуда после интегрирования

$$\ln e = -\frac{t}{rC} + \text{const.}$$

¹ В этом параграфе мы будем обозначать электрический заряд буквой e в отличие от основания натуральных логарифмов e . *Прим. ред.*

Значение постоянной интегриации мы можем определить из условия, что в начальный момент ($t=0$), с которого начинается разряд, значение заряда e равно e_0 . Окончательно мы получаем:

$$e = e_0 e^{-\frac{t}{rC}},$$

и

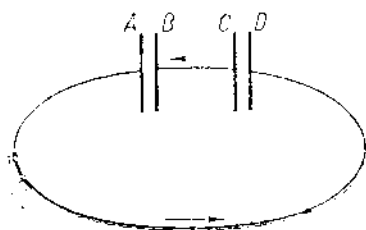
$$i = \frac{e_0}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Согласно этому уравнению время, в течение которого заряд e и сила тока i уменьшаются до нуля, равны бесконечности. Этот результат противоречит опыту, который показывает, что время, в течение которого заканчивается явление разряда, весьма мало. Объяснение этого противоречия состоит в том, что, как только время t становится сколь угодно значительным, по сравнению с rC , значения e и i , даваемые вышеполученной формулой, принимают столь малые значения, что практически мы их можем считать равными нулю. Такое асимптотическое сближение до нуля, при котором уже спустя малое время уменьшающаяся величина становится неощутимо малой, довольно часто встречается в физических проблемах.

Энергия конденсатора в любой момент разряда равна

$$\frac{1}{2} e (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{2C}.$$

Уменьшение этой энергии в элемент времени dt , равное выделяющемуся за это время количеству тепла, получается равным:



Фиг. 15.

$$W dt = - \frac{e}{C} \frac{de}{dt} dt = - \frac{e^2}{rC^2} dt - i^2 r dt.$$

Следовательно, и в этом случае имеет место закон Джоуля. Далее, нетрудно убедиться в том, что общее количество выделившегося в течение разряда тепла равно начальному запасу электростатической энергии конденсатора. Для этого доста-

точно проинтегрировать вышенаписанное равенство по времени в пределах от $t=0$ до $t=\infty$. Мы получаем:

$$\int_0^{\infty} W dt = \int_0^{\infty} i^2 r dt = \frac{e_0^2}{rC^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{rC}} dt = \frac{e_0^2}{2C}.$$

Рассмотрим, далее, разряд двух последовательно соединенных конденсаторов (фиг. 15), из которых в начале разряда первый заряжен, а второй нет. Пусть A и B обкладки заряженного конденсатора, начальные заряды которых $+\frac{1}{2}e_0$ и $-\frac{1}{2}e_0$ и емкость которого равна C_1 , а C и D обкладки незаряженного конденсатора, емкость которого

равна C_2 . При разряде в соединительных проводах возникают токи в направлении, указанном стрелками. Если мы пренебрежем смещениями электрических зарядов в диэлектриках вне конденсаторов, то сила тока i в любой момент времени будет одинакова вдоль всей цепи. Если r обозначает общее сопротивление соединительных проводов AD и CB и если мы обозначим заряды конденсаторов в данный момент времени через e_1 и e_2 , то уравнение (6) дает:

$$ir = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_C - \varphi_D = \frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2}.$$

$i dt$ есть заряд, протекающий за время dt через поперечное сечение провода, следовательно, на эту величину за время dt заряд e_1 уменьшается, а заряд e_2 увеличивается. Таким образом

$$i = -\frac{de_1}{dt} = \frac{de_2}{dt}.$$

Эти уравнения определяют весь процесс разряда. Исключая из этих уравнений e_1 и e_2 , мы получаем:

$$r \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = 0$$

и

$$-i = A e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t}.$$

Для определения постоянной интегрирования A мы опять пользуемся начальными условиями задачи, согласно которым в момент начала разряда $t=0$, $e_1=e_0$ и $e_2=0$ и, следовательно, $i = \frac{e_0}{rC_1}$.

Окончательно получаем:

$$i = \frac{e_0}{rC_1} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t}.$$

Как и в рассмотренном случае, сила тока асимптотически приближается к значению нуля. Далее, мы получаем:

$$e_1 = \frac{e_0 C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t} + B,$$

где B определяется из условия, что при $t=0$, $e_1=e_0$. Следовательно,

$$e_1 = e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t} + e_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Так как $e_1 + e_2 = e_0$, то мы далее, получаем:

$$e_2 = -e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} t} + e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Общая энергия обоих конденсаторов равна

$$\frac{e_1^2}{2C_1} + \frac{e_2^2}{2C_2}.$$

Следовательно, уменьшение энергии за время dt и выделившийся за это время тепло равно

$$W dt = \left(-\frac{e_1}{C_1} \frac{de_1}{dt} - \frac{e_2}{C_2} \frac{de_2}{dt} \right) dt = \left(\frac{e_1}{C_1} - \frac{e_2}{C_2} \right) i dt = F r dt,$$

что опять согласуется с законом Джоуля.

Подсчитаем еще величины зарядов конденсаторов, которые они получат по окончании разряда. Для этого подставим в полученные выше равенства $t = \infty$. Это дает:

$$e_{1\infty} = e_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad e_{2\infty} = e_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Как и следовало ожидать, эти равенства показывают, что общий заряд остался неизменным, распределившись между двумя конденсаторами пропорционально их емкости. Легко, далее, показать, что окончательное значение электростатической энергии равно начальному ее значению за вычетом выделившегося за время разряда тепла.

В заключение рассмотрим еще случай, при котором емкость C заряжается от источника, электродвижущая сила которого равна F . Сопротивление цепи обозначим при этом через r , а силу тока и заряд конденсатора в рассматриваемый момент времени через i и e . Равенство (5) дает при этих условиях:

$$ir = F + \frac{e}{C} = 0.$$

Как и раньше,

$$i = \frac{de}{dt}.$$

Исключая отсюда e , мы получаем:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{rC},$$

откуда

$$i = Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

Так как при $t=0$, имеем $e=0$ и $i = \frac{F}{r}$, то

$$i = \frac{F}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Отсюда

$$e = -FCe^{-\frac{t}{rC}} + FC.$$

Значение постоянной интегрирования при этом мы определили из условия $e=0$ при $t=0$.

Источник тока совершает в элемент времени dt работу, равную $Fid t$. Благодаря этому, энергия конденсатора увеличивается на

величину $\frac{e}{C} \frac{de}{dt} dt$, а остальная часть выделяется в цепи в виде тепла. Часть эта равна

$$W dt = \left(Fi - \frac{e}{C} \frac{de}{dt} \right) dt = i dt \left(F - \frac{e}{C} \right) = i dt F e^{-\frac{t}{\tau C}} = i^2 r dt,$$

что опять находится в полном согласии с законом Джоуля.

В конечном состоянии при $t \rightarrow \infty$ мы получаем заряд конденсатора, равным

$$e_{\infty} = FC.$$

Этого и следовало ожидать, так как в состоянии электростатического равновесия разность потенциалов между пластинками конденсатора $\frac{e_{\infty}}{C}$ должна равняться электродвижущей силе.

Общее количество энергии, выделенной источником тока, равно

$$\int_0^{\infty} Fi dt = \frac{F^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau C}} dt = F^2 C.$$

Из этого количества в тепло обращается часть, равная

$$\int_0^{\infty} W dt = r \int_0^{\infty} i^2 dt = \frac{F^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau C}} dt = \frac{1}{2} F^2 C.$$

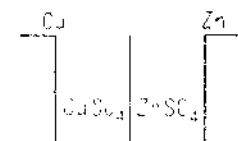
Следовательно, из затраченной источником энергии ровно половина тратится на тепло Джоуля, а другая половина запасается в конденсаторе в форме электростатической энергии, равной

$$\frac{1}{2} e_{\infty} F = \frac{1}{2} F^2 C.$$

§ 6. Энергетические процессы в электрической цепи. Выделяющееся в течение определенного времени в замкнутой цепи тепловыделение равно работе, совершаемой в это время электродвижущими силами. Природа этих сил может быть весьма различна, другими словами, выделяемая током энергия, поступающая в цепь из мест, где действуют электродвижущие силы, может быть весьма различного происхождения. Так, в гальваническом элементе во время прохождения по нему тока затрачивается химическая энергия. В термoelemente тепловая энергия поглощается в нагретом спая и выделяется в более холодном. Разность поглощенной и выделенной теплоты появляется в цепи тока в виде тепла Джоуля. Явление поглощения тепла в спая с более высокой температурой, сопровождающееся охлаждением этого спая, если теплота не подводится к нему извне, и явление выделения тепла в более холодном спая были открыты Пельтье. В таких спаях мы встречаемся поэтому не только с теплом Джоуля, но и с теплом Пельтье. Нечто подобное было обнаружено Томсоном и в проволоке,

состоящей из одного металла, одна часть которой имела более высокую температуру, чем другая. При разряде конденсатора электрическая энергия, запасенная в поле между его обкладками, превращается в тепло Джоуля, выделяющееся в соединительных проводах. Если в качестве источника тока мы применяем электростатическую машину, то выделяемое током тепло получается за счет механической работы, затраченной на вращение машины.

Во всех этих случаях, в которых мы имели дело с известными электродвижущими силами, совершаемая в единицу времени работа пропорциональна силе тока. Так, например, электродвижущая сила гальванического элемента не совершает никакой работы, пока через элемент не протекает никакого тока. В этом случае в элементе не совершаются никакие химические реакции, так что химическая энергия его не расходуется. Если через такой элемент будет протекать ток в направлении, обратном действию электродвижущей силы (что, конечно, возможно только в том случае, если в других частях цепи действуют большие электродвижущие силы противоположного направления), то электродвижущая сила элемента совершает отрицательную работу, т. е. химическая энергия элемента увеличивается. Проще всего это явление наблюдать на так называемом обратном



Фиг. 16.

элементе, который мы получим, например, заменив в элементе Даниеля разбавленную серную кислоту слабым раствором сернистого цинка. Фиг. 16 дает схематически такой элемент. Если по такому элементу проходит ток, совпадающий по направлению с его собственной электродвижущей силой, т. е. направленный от цинка к меди, то возникают известные реакции. Ионы цинка соединяются с ионами SO_4 и переходят в раствор, взамен выделяется свободная Cu , освобождающаяся на медной пластинке. Результатом этих химических процессов являются увеличение количества сернистого цинка за счет уменьшения количества металлического цинка и увеличение количества меди за счет уменьшения медного купороса. Химическая энергия системы при этом уменьшается. Если мы пропустим электрический ток через элемент в обратном направлении, то все химические реакции изменят направление, и химическая энергия системы будет увеличиваться.

Также и в термоэлементе, пока по нему не протекает ток, теплота нигде не поглощается и не выделяется. При изменении направления тока, протекающего по термоэлементу, эффект Пельтье изменит знак. В случае, если ток течет против электродвижущей силы термоэлемента, теплота выделяется в более горячем спая и поглощается (в меньшем количестве) в более холодном. Совершенно аналогичные свойства проявляет и эффект Томсона.

Представим себе неразветвленную цепь тока, в которой включен источник тока с электродвижущей силой F . Можно указать целый ряд случаев, в которых уравнение $F = ir$ не выполняется. Рассмотрим сначала один из них, при котором $F > ir$. Чтобы найти причину такого неравенства, проще всего исследовать место при данном процессе превращения энергии. Для этого умножим обе части неравенства

на $i dt$, тогда мы получим: $Fi dt > i^2 r dt$. Это неравенство показывает, что за элемент времени dt источник тока доставляет в цепь больше энергии, чем ее выделяется в форме тепла Джоуля. Этот случай будет иметь, например, место в случае, если в цепи находится вольтметр, в котором происходит разложение воды. Остаток энергии мы найдем в этом случае в форме химической энергии, разложенной на водород и кислород воды.

Аналогичные соотношения имеют место и в случае, когда в цепи находится конденсатор, заряжаемый источником тока. Из вышеприведенных уравнений непосредственно видно, что и в этом случае $F > i r$ и, следовательно, $Fi > i^2 r$. Та часть энергии, доставляемой электродвижущей силой, которая не превращается в тепло Джоуля в соединительных проводах, идет на увеличение электростатической энергии поля, возникающего между пластинами конденсатора.

В обычной цепи тока, в которой действует электродвижущая сила F , окончательная сила тока устанавливается вследствие самоиндукции не мгновенно, а нарастает после замыкания цепи тока в течение некоторого конечного времени. Поэтому непосредственно после замыкания цепи $i < \frac{F}{r}$, а следовательно, и $i^2 r < Fi$. При этом разность энергии, доставляемой электродвижущей силой и выделяющейся в форме джоулева тепла, сконцентрируется в виде магнитной энергии, о которой будет речь ниже. Далее, если ток течет по катушке, на продолжении оси которой находится магнит, то на этот магнит действует притягательная или отталкивательная сила. Если под действием этой силы магнит приходит в движение, то затрачиваемая на это движение энергия должна быть доставлена источником тока и не может поэтому выделяться в цепи в виде тепла. И в этом случае, следовательно, $i^2 r < Fi$ и $i < \frac{F}{r}$.

Можно, далее, указать примеры, при которых $i > \frac{F}{r}$ и, следовательно, $i^2 r > Fi$. В этих случаях энергия в цепь должна доставляться кроме источника электродвижущей силы еще другими причинами, и вся эта энергия выделяется в цепи в виде тепла.

Во всех выисказанных случаях, когда $i > \frac{F}{r}$ или $i < \frac{F}{r}$ кроме электродвижущей силы F в цепи действуют еще другие причины (поляризация электродов, индукция и т. д.), приводящие электрические заряды в движение в том же направлении, что и F или в обратном направлении.

§ 7. Токи в массивных проводниках. Рассмотрим теперь постоянный ток, текущий по массивному проводнику, окруженному диэлектриком. Строго говоря, в природе имеют место только такие токи, однако вопрос о распределении тока по сечению возникает обычно только тогда, если в цепи включен электролит или другой массивный проводник (например кусок металла). Представим себе, что на одном конце рассматриваемого проводника, на аноде, ток подводится к рассматриваемому проводнику, а на другом — катоде — выходит из него. Анод и

катод не должны обязательно занимать всю поверхность проводника, часть этой поверхности, которую мы обозначим через Σ , может граничить с диэлектриком. Через эту часть поверхности не протекает никакого тока, и на ней должно выполняться условие, что $C_n = 0$, где n обозначает направление нормали к поверхности. Для упрощения мы положим, что в объеме рассматриваемого проводника электродвижущие силы не действуют.

В стационарном состоянии в этом случае

$$\oint E_s ds = 0$$

для любого замкнутого контура, и следовательно, E является потенциальным вектором. Если проводник изотропен, то плотность тока

$$C = \frac{1}{\rho} E.$$

Если сверх того проводник однороден, т. е. ρ постоянно, то из равенства $\operatorname{div} C = 0$ опять получаем уравнение Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Следовательно, наша проблема имеет большое сходство с соответствующей задачей электростатики, только граничные условия теперь другие. В рассматриваемой проблеме граничные условия ничего не говорят о значении потенциала φ в бесконечности, взамен этого на поверхности σ мы имеем условие $\frac{d\varphi}{dn}$, получающееся непосредственно из $C_n = 0$.

Для упрощения положим, что потенциал на всем аноде имеет одно и то же значение φ_1 , а на всем катоде — φ_2 . Это допущение не всегда законно, ибо если электроды состоят, например, из двух вертикальных железных пластинок, соединенных верхними концами с гальваническим элементом, между которыми находится массивный кусок меди, то ток будет, главным образом, течь через верхнюю часть медного проводника. Разность потенциалов между двумя точками электродов будет больше, если эти точки находятся на верхних частях электродов, чем в случае, если они находятся на нижних их частях. Поэтому в этом случае наше допущение о том, что потенциал на электродах имеет постоянные значения, не соответствует действительности. Допущение это, как легко видеть, законно в случае, если проводимость электродов велика по сравнению с проводимостью находящегося между ними проводника. В этом случае сопротивлением электродов мы можем пренебречь по сравнению с сопротивлением проводящей среды, находящейся между электродами, и отсюда следует, что мы можем пренебречь падением потенциала в электродах.

Мы примем, что это условие выполнено и наши электроды являются эквипотенциальными поверхностями. Векторы E и C перпендикулярны к ним, на аноде $C = -C_n$, а на катоде $C = C_n$. Из несжимаемости электричества следует, что значения интеграла $\int C d\sigma$, распространенного по поверхности анода или катода, одинаковы, так как этот интеграл дает общую силу тока, притекающего к аноду или вытекающего через

катод. Мы обозначим эту силу тока поперечному буквой i . Из принципа суперпозиции теперь легко вывести, что i пропорционально разности потенциалов между электродами: $\varphi_1 - \varphi_2$. Для этого мы суперпонируем два состояния, при первом из которых значения потенциалов электродов равны $\varphi_1 - \varphi_2$ и 0, а при втором оба электрода имеют одинаковый потенциал, равный φ_2 . В этом втором состоянии по проводнику, очевидно, ток не протекает. В первом состоянии сила тока, следовательно, такая же, как и в действительно разбираемом случае. Если для значений потенциалов 1 и 0 сила тока равна $\frac{1}{R}$, то в случае потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и 0, а следовательно, и для значений φ_1 и φ_2 она будет равна

$$i = \frac{1}{R} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Величину R мы будем называть сопротивлением рассматриваемого проводника.

Методы математического решения рассматриваемой проблемы во многих отношениях подобны соответствующим методам электростатики. В качестве первого примера мы рассмотрим случай, когда электроды имеют форму двух концентрических сфер, радиусы которых равны a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$). В этом случае вся поверхность проводника покрыта электродами так, что не остается границ, для которых должно соблюдаться условие $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Благодаря этому мы имеем здесь полную аналогию с соответствующей задачей электростатики. Очевидно, что φ будет функцией только одного расстояния r от общего центра обеих сфер. Поэтому мы можем написать уравнение Лапласа в виде:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0,$$

откуда

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий, согласно которым $\varphi = \varphi_1$ для $r = a_1$ и $\varphi = \varphi_2$ для $r = a_2$. После подстановки значений констант мы получаем:

$$\varphi = -\frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{a_1 \varphi_1 - a_2 \varphi_2}{a_1 - a_2}.$$

Из этого значения потенциала мы получаем, далее (положительные значения E , C и i направлены наружу),

$$E = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r^2},$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r^2},$$

Интегрируя плотность тока C по поверхности одной из сфер, мы получим:

$$i = \frac{4\pi}{\rho} \cdot \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

и, следовательно,

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим электроды в форме длинных коаксиальных цилиндров с радиусами a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$). Если мы обозначим через r расстояние от общей оси любой точки проводящей среды, находящейся между электродами, то, очевидно, что значение потенциала в этом случае будет функцией только одного r . Поэтому уравнение Лапласа получает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

откуда

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2.$$

Так как при $r = a_1$ $\varphi = \varphi_1$ и при $r = a_2$ $\varphi = \varphi_2$, то мы получаем:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ln \frac{a_1}{a_2}} \ln r + \frac{\varphi_2 \ln a_1 - \varphi_1 \ln a_2}{\ln \frac{a_1}{a_2}}.$$

и, далее,

$$E = - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ln \frac{a_1}{a_2}} \cdot \frac{1}{r},$$

$$C = - \frac{1}{\rho} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ln \frac{a_1}{a_2}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Мы можем применить эти равенства к электролиту, находящемуся в стеклянном сосуде, на дне которого вертикально стоят два металлических коаксиальных цилиндра. И эта задача вполне соответствует аналогичной задаче электростатики. Если высота электролита между цилиндрами h меньше, чем длина цилиндров, то распределение тока такое же, как и при бесконечно длинных цилиндрах. Общая сила тока, протекающая через электролит, получается при этом равной:

$$i = - \frac{2\pi h}{\rho} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ln \frac{a_1}{a_2}}$$

и

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

В обоих рассмотренных случаях общее сопротивление пропорционально удельному сопротивлению проводящей среды. Легко показать, что этот последний результат имеет место всегда, независимо от формы электродов и размеров и формы проводящей среды, если только проводимость этой среды мала по сравнению с проводимостью электродов.

Пусть, например, мы хотим сравнить сопротивления двух электролитов, находящихся в одинаковых сосудах между конгруэнтными и одинаково расположенными электродами. Если мы найдем распределение потенциала φ в одном из этих электролитов, то, очевидно, и распределение потенциала во втором должно удовлетворять точно таким же условиям. Поэтому в обоих электролитах расположение эквипотенциальных поверхностей и линий напряженности электрического тока будет одинаковым. Следовательно, и расположение линий токов будет одинаково. Напряженность электрического поля может быть сделана в обоих случаях одинаковой, для этого достаточно сообщить электродам одинаковые разности потенциалов. Если проводимость одного электролита в n раз больше, чем другого, то сила протекающего по нему тока будет в этом случае тоже в n раз больше, а это означает, что сопротивление его в n раз меньше сопротивления второго электролита. Этот метод может быть применен для сравнения проводимостей различных жидкостей.

Рассмотрим еще случай, когда катодом служит плоская пластинка, а анодом — тонкая металлическая проволока, у которой только самый конец свободен от изоляции и расположен на небольшом расстоянии от катода.

Пусть между этими электродами опять находится электролит, например, раствор CuSO_4 . Только в малой части объема этого электролита линии тока будут иметь заметную плотность. Математически задача о распределении линий тока будет эквивалентна электростатической задаче о распределении поля между заряженной точкой, расположенной против плоской проводящей поверхности. Решение этой задачи мы можем найти при помощи теории электрических изображений. Электрическим изображением анода будет точка, расположенная позади катода на таком же расстоянии, на каком анод расположен впереди катода. Если мы обозначим через h расстояние от анода до катода, а через r и r' — расстояния произвольной точки от анода и его изображения, то потенциал этой точки, считая потенциал катода равным нулю, будет:

$$\varphi = A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

откуда для плотности тока в любой точке катода мы получим:

$$C = \frac{2Ah}{\rho} \frac{1}{r^3}.$$

Следовательно, наибольшая плотность тока получается в основании перпендикуляра, опущенного из анода на катод. На окружности круга,

описанного на плоскости катода из этой точки как центра, значение плотности тока постоянно, и при увеличении радиуса оно постепенно уменьшается. Поэтому при электролизе медного купороса на катоде будет осаждаться слой меди, толщина которого будет наибольшей в основании перпендикуляра и будет постепенно уменьшаться от этой точки во все стороны. Если на такого рода тонкий слой падает свет, то получается явление интерференции, известное под именем колец Ньютона.

ИНДУКЦИОННЫЕ ТОКИ.

§ 1. Самоиндукция. Уже в первой главе мы упоминали о возникновении в замкнутом проводнике электрического тока вследствие изменения магнитного поля, окружающего этот проводник. Теперь мы рассмотрим детальнее это явление. Если в данной точке проводника нет никакой электродвижущей силы, то плотность тока в этой точке равна

$$C_s = \frac{1}{\rho} E_s. \quad (1)$$

Поэтому, если ω обозначает поперечное сечение проводника, а i — силу протекающего по нему тока, то

$$i = \frac{1}{\rho} \omega E_s,$$

откуда следует, что

$$i \int \frac{\rho}{\omega} ds = \int E_s ds$$

или

$$ir = \int E_s ds.$$

Здесь интегриция должна быть распространена по всей замкнутой цепи тока. Этот интеграл мы можем преобразовать при помощи второго уравнения Максвелла [гл. I, формула (20)]. В электромагнитных единицах мы получим:

$$i = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} \int B_n d\sigma. \quad (2)$$

Стоящий в правой части этого равенства интеграл, который должен быть распространен по всей поверхности, ограниченной контуром проводника, является величиной, которую согласно Фарадею называют числом линий индукции, пронизывающих контур проводника.

Мы обозначим эту величину, называемую часто потоком индукции, буквой N . Тогда

$$i = -\frac{1}{r} \frac{dN}{dt}. \quad (3)$$

Умножая на dt и интегрируя между двумя моментами времени t_1 и t_2 , мы получим общую величину заряда, протекающего за этот промежуток времени через любое поперечное сечение цепи

$$\int_{t_1}^{t_2} i dt = \frac{N_1 - N_2}{r}.$$

Если в цепи действует еще какая-либо электродвижущая сила

$$F = \int E_{es} ds,$$

то в равенстве (1) на месте E_s надо написать $E_s + E_{es}$, и вместо равенства (3) мы получим:

$$i = -\frac{1}{r} \frac{dN}{dt} + \frac{F}{r}. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай отсутствия электродвижущих сил и примем, что ток вызывается только изменением магнитного поля. Имеется ли кроме переменной части магнитного поля еще постоянная его составляющая, например земное поле, является несущественным, так как в уравнение, определяющее силу тока, входит только скорость изменения со временем магнитного потока N . Магнитное поле самого тока является переменным до тех пор, пока ток после включения не достиг своей наибольшей величины и пока он исчезает после выключения электродвижущей силы.

Напряженность магнитного поля в любой точке поля и в любой момент времени пропорциональна протекающему в этот момент току i . Поэтому то же имеет место для индукции B и для потока N , и мы можем написать:

$$N = Li.$$

Величина L носит название коэффициента самоиндукции. Она всегда положительна, так как вызванные током линии индукции всегда пронизывают контур тока в направлении, соответствующем положительному значению потока. Если в магнитном поле нет намагничивающихся веществ, то значение L зависит только от формы проводника. Величина коэффициента самоиндукции равна числу линий индукции, пронизывающих контур, когда по нему протекает ток, сила которого равна единице. На этом основании легко видеть, когда коэффициент будет велик. Это будет иметь, например, место, когда проводник свернут в катушку с большим числом витков.

Заметим, что вышесказанное справедливо и в том случае, когда вблизи проводника находятся намагничивающиеся тела, в которых магнитная индукция пропорциональна напряженности магнитного поля. Действительно, при заданном распределении тока магнитное поле однозначно определяется из первого уравнения Максвелла [гл. I формула (8)] из соотношения $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ и соленоиальности поля $\mathbf{B}$ [гл. I формула (12)]. Легко далее показать, что значения $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в любой точке поля пропорциональны силе тока i , так что всегда мы можем положить $N = Li$.

Однако значение коэффициента самондукции зависит в этом случае и от расположения и формы намагничивающихся тел, находящихся в поле.

Чтобы найти закон нарастания тока после замыкания цепи мы напишем уравнение (4) в форме:

$$i = -\frac{1}{r} \frac{d(Li)}{dt} + \frac{F}{r}. \quad (5)$$

Сопротивление цепи r мы будем считать постоянным. Положим сначала, что L и F также постоянны. В этом случае уравнение (5) может быть легко проинтегрировано, и мы получаем:

$$i = C e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{F}{r}.$$

Константа интегрирования C определяется из условия, что для $t = 0$ $i = 0$. Следовательно, $C = -\frac{F}{r}$ и окончательно:

$$i = (1 - e^{-\frac{r}{L}t}) \frac{F}{r}.$$

$i = \frac{F}{r}$ есть сила тока, которая возникала бы с момента включения, если бы самондукция в цепи отсутствовала. Вследствие самондукции на этот ток i_0 накладывается второй ток i' меньшей силы и противоположного направления. Ток этот уменьшается с возрастанием t и весьма скоро становится неощутимо малым, хотя теоретически он достигает значения нуля только спустя бесконечное время. Таким образом теория объясняет наблюдаемое на опыте постепенное и непрерывное нарастание силы тока после включения. Общий заряд, протекающий вследствие экстратока через сечение проводника, равен:

$$\int_0^{\infty} i' dt = -i_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{L}t} dt = -i_0 \frac{L}{r}.$$

Аналогичным образом можно исследовать, как происходит исчезание тока i_0 после прекращения действия электродвижущей силы. Мы примем, что F исчезает мгновенно, тогда для i мы получаем уравнение:

$$i = -\frac{L}{r} \frac{di}{dt},$$

причем в момент $t = 0$ имеем $i = i_0$. Отсюда после интегрирования получаем:

$$i = i_0 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Это решение показывает, что экстраток в этом случае протекает в направлении главного тока, а в остальном изменяется аналогично экстратоку замыкания. Весь протекающий благодаря экстратоку заряд теперь равен $i_0 \cdot \frac{L}{r}$.

Об этих экстратоках мы уже говорили в прошлой главе. Благодаря экстратоку замыкания электродвижущая сила доставляет непосредственно после включения тока в цепь больше энергии, чем ее расходуется в цепи на образование дожоулева тепла. Разность этих энергий мы находим в окружающем проводник пространстве, в котором в течение этого времени возникает магнитное поле. Такое же количество энергии превращается при исчезновении тока i_0 в тепло благодаря экстратоку размыкания.

Это количество энергии легко вычислить. В течение времени dt непосредственно после включения тока работа, совершаемая электродвижущей силой, равна $Fi dt$, а выделенное количество тепла равно $i^2 r dt$. Поэтому запасенная за это время в магнитном поле энергия будет:

$$(Fi - i^2 r) dt.$$

Величина эта согласно уравнению (5), если коэффициент самоиндукции постоянен, равняется:

$$Li \frac{di}{dt} dt.$$

Принтегрировав это выражение, мы найдем общий запас магнитной энергии, скопленной в среде за время установления тока:

$$A = \frac{1}{2} Li^2. \quad (6)$$

§ 2. Случай, когда электродвижущие силы — произвольные функции времени. Наши уравнения дают решение задачи и в том случае, когда F является заданной функцией времени. Мы можем даже принять, что r и L тоже являются функциями времени. В этом случае задача сводится к решению линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Решение этой задачи всегда может быть приведено к квадратурам. Однако здесь мы ограничимся случаем, когда только F переменна. При этом как i , так и магнитное поле, окружающее проводник, переменны.

Наше уравнение имеет в этом случае вид:

$$i = -\frac{L}{r} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{F}{r},$$

где F — заданная функция времени. Решение этого уравнения следующее:

$$ie^{\int \frac{r}{L} dt} = C + \frac{1}{L} \int Fe^{\int \frac{r}{L} dt} dt,$$

где постоянная интегрирования C может быть определена по начальному значению i .

Наиболее важным является случай периодической электродвижущей силы, изменяющейся по закону

$$F = a \cos nt.$$

В этом случае решение имеет вид:

$$i = Ce^{-\frac{r}{L}t} + \frac{ar}{r^2 + n^2 L^2} \cos nt + \frac{anL}{r^2 + n^2 L^2} \sin nt.$$

Начальное значение тока определяет величину константы, входящей в первый член этого выражения. Ток этот быстро исчезает, и поэтому спустя короткое время в цепи устанавливается ток

$$i = \frac{ar}{r^2 + n^2 L^2} \cos nt + \frac{anL}{r^2 + n^2 L^2} \sin nt.$$

Положив здесь

$$\frac{r}{r^2 + n^2 L^2} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi \quad \text{и} \quad \frac{nL}{r^2 + n^2 L^2} = \frac{1}{\rho} \sin \varphi$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{nL}{r} \quad \text{и} \quad \rho^2 = r^2 + n^2 L^2,$$

мы получим:

$$i = \frac{a}{\rho} \cos (nt - \varphi).$$

Так как $\operatorname{tg} \varphi$ положителен, то мы видим, что переменный ток отстает в этом случае по фазе от напряжения. Этот сдвиг фаз невелик, если L мало, а r велико и если электродвижущая сила медленно изменяется, т. е. n мало. Если, наоборот, электродвижущая сила изменяется очень быстро, то сдвиг фаз приближается к 90° , т. е. к четверти периода. Величина ρ играет в рассматриваемом случае ту же роль, какую играет сопротивление в случае постоянного тока.

§ 3. Взаимоиндукция. Перейдем теперь к двум замкнутым цепям тока, около которых могут находиться намагничивающиеся тела. В каждом из контуров мы выбираем при помощи способа, о котором скажем ниже, положительное направление обхода. Все величины, относящиеся к первому контуру, мы будем отмечать индексом 1, а относящиеся ко второму — индексом 2. Если в каждом из контуров течет ток определенной силы, то магнитная индукция в любой точке будет складываться из двух векторов, из которых первый $\mathbf{B}_1$ есть значение магнитной индукции, вызываемой в этой точке первым током, величина ее пропорциональна i_1 , а второй $\mathbf{B}_2$ есть индукция, вызываемая в той же точке током i_2 .

Подсчитаем значения магнитных потоков, проходящих через поверхности, ограниченные рассматриваемыми контурами токов. Мы получаем:

$$\oint \mathbf{B}_n d\sigma_1 = \oint \mathbf{B}_{1n} d\sigma_1 + \oint \mathbf{B}_{2n} d\sigma_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

и

$$\oint \mathbf{B}_n d\sigma_2 = \oint \mathbf{B}_{1n} d\sigma_2 + \oint \mathbf{B}_{2n} d\sigma_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2.$$

Из четырех входящих в эти выражения коэффициентов L_1 и L_2 являются коэффициентами самоиндукции первой и второй цепей. Докажем,

далее, что $M_{12} = M_{21}$. Если в поле нет никаких намагничивающихся веществ, то магнитная индукция совпадает с вектором напряженности магнитного поля. $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ могут быть при этом вычислены (гл. I). Для этого заменяем токи двойными магнитными слоями, расположенными по поверхностям σ_1 и σ_2 , ограниченными контурами токов. Магнитный момент элемента $d\sigma_1$ такого слоя перпендикулярен к $d\sigma_1$ и равен в электромагнитных единицах (гл. I, § 3 и 11) $i_1 d\sigma_1$. Величину $\mathbf{B}_1$ мы можем в этом случае вычислить из значения магнитного потенциала:

$$\phi_1 = i_1 \int \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_1.$$

Получаем:

$$M_{21} = \frac{1}{i_1} \int B_{1n} d\sigma_2 = - \frac{1}{i_1} \int \frac{\partial \phi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 = - \iint \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Очевидно, для M_{12} мы получим то же выражение, чем и доказываем тем самым утверждение, что $M_{12} = M_{21}$. Равенство этих коэффициентов в случае наличия в поле намагничивающихся тел мы докажем ниже. Величина $M = M_{12} = M_{21}$ носит название коэффициента взаимной индукции. Знак этой величины зависит от направления токов в обоих контурах. При изменении направления одного из токов изменится и направление положительной нормали к опирающейся на контур этого тока поверхности, а вследствие этого, как видно из последней формулы, изменится и знак величины M . Выберем положительные направления токов так, чтобы M было положительным, и назовем эти направления тока соответствующими друг другу. Направление первого тока при этом, очевидно, может быть выбрано произвольно. Уравнения, определяющие силы токов, будут при этом иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} i_1 r_1 &= F_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ i_2 r_2 &= F_2 - M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Электродвижущие силы F_1 и F_2 мы будем считать произвольными, но заданными функциями времени.

Найдем при помощи этих уравнений выражение энергии магнитного поля, окружающего токи. За время dt энергия эта увеличивается на

$$F_1 i_1 dt - i_1^2 r_1 dt + F_2 i_2 dt - i_2^2 r_2 dt$$

или, приняв во внимание (7), на:

$$\left(i_1 L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 M \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 M \frac{di_1}{dt} \right) dt.$$

Интегрируя по времени и полагая, что энергия равна нулю, когда в цепях нет токов, получаем отсюда весь запас магнитной энергии:

$$A = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2. \quad (8)$$

Эта величина должна быть положительной независимо от величины и направления токов. Поэтому всегда должно иметь место неравенство:

$$M^2 < L_1 L_2.$$

Этим вычислением энергии мы можем воспользоваться для доказательства равенства коэффициентов M_{12} и M_{21} . Действительно, напомним и уравнениях (7) вместо M величины M_{12} и M_{21} . Для величины энергии, запасенной в среде за элемент времени dt , мы получим тогда выражение:

$$(i_1 L_1 + i_2 M_{21}) di_1 + (i_2 L_2 + i_1 M_{12}) di_2.$$

Так как состояние среды определяется в любой момент времени значениями i_1 и i_2 , то полученное выражение должно быть полным дифференциалом некоторой функции от i_1 и i_2 , что непосредственно дает $M_{12} = M_{21}$. Это доказательство остается приложимым и в случае присутствия в поле намагничивающихся сред.

Чтобы получить решение уравнений (7), умножим второе из них на неопределенный пока множитель λ и прибавим его к первому. Мы получаем:

$$i_1 r_1 + \lambda i_2 r_2 = F_1 + \lambda F_2 - \left\{ (L_1 + \lambda M) \frac{di_1}{dt} + (M + \lambda L_2) \frac{di_2}{dt} \right\}. \quad (9)$$

Это уравнение мы можем проинтегрировать, если выберем значение λ таким образом, чтобы:

$$\frac{r_1}{\lambda r_2} = \frac{L_1 + \lambda M}{M + \lambda L_2} \quad (10)$$

или

$$\lambda^2 + \lambda \frac{L_1 r_2 - L_2 r_1}{M r_2} - \frac{r_1}{r_2} = 0.$$

Так как r_1 и r_2 положительны, то это квадратное уравнение всегда имеет два действительных корня (один положительный, а другой отрицательный). Обозначим их через λ' и λ'' . Если мы вставим в (9) первое значение корня и положим

$$\frac{\lambda' r_2}{r_1} = p',$$

то мы получим:

$$r_1 (i_1 + p' i_2) = F_1 + p' F_2 - (L_1 + p' M) \frac{d}{dt} (i_1 + p' i_2). \quad (11)$$

Проинтегрировав это выражение, получим:

$$i_1 + p' i_2 = f(t_1, C'). \quad (12)$$

где f — известная функция, а C' постоянная интегрирования, значение которой надо еще определить. Аналогично, подставляя в (9) значение второго корня и полагая

$$\frac{\lambda'' r_2}{r_1} = p'',$$

получаем:

$$i_1 + p'' i_2 = g(t_1, C''). \quad (12'')$$

где опять g означает известную функцию, а C'' константу интегрирования. Значение обеих этих констант интегрирования может быть вычислено, если нам задать значения i_1 и i_2 в некоторый момент времени. Наконец, определив C' и C'' , мы можем из уравнений (12) и (12') найти значения токов i_1 и i_2 в функции времени.

Применим наши выводы к случаю, когда в момент времени $t = 0$ в обеих цепях мгновенно перестают действовать электродвижущие силы. Пусть в этот момент силы токов равны i_{10} и i_{20} . В этом случае мы должны в наших уравнениях положить F_1 и F_2 равными нулю. Уравнение (11) принимает тогда вид:

$$i_1 + p'i_2 = -\frac{L_2 + i'M}{r_1} \frac{d}{dt}(i_1 + p'i_2).$$

Для второго корня λ мы получим аналогичное уравнение, в котором только на месте i' будет стоять i'' , а вместо p' войдет p'' . Решения этих уравнений имеют вид:

$$i_1 + p'i_2 = C'e^{-q't}$$

и

$$i_1 + p''i_2 = C''e^{-q''t},$$

где

$$q' = \frac{r_1}{L_1 + i'M} \quad \text{и} \quad q'' = \frac{r_1}{L_1 + i''M}. \quad (13)$$

Начальные условия для $t=0$ дают возможность определить C' и C'' :

$$i_1 + p'i_2 = (i_{10} + p'i_{20})e^{-q't},$$

$$i_1 + p''i_2 = (i_{10} + p''i_{20})e^{-q''t}.$$

Из этих уравнений значения токов определяются в функции времени. Множители $e^{-q't}$ и $e^{-q''t}$ показывают, что и в этом случае силы токов уменьшаются с течением времени безгранично, если q' и q'' имеют положительные значения.

Докажем, что это имеет место.

Для этого получим из (10) квадратное уравнение, корнями которого являются величины q' и q'' . Так как эти величины связаны при помощи (13) с i' и i'' , то мы получим искомое уравнение, если исключим λ из (10) и из

$$\frac{r_1}{q} = L_1 + i'M.$$

Получаем:

$$q^2(L_1L_2 - M^2) - q(r_1L_2 - r_2L_1) + r_1r_2 = 0.$$

Так как $(L_1L_2 - M^2)$, r_1 , r_2 , L_1 и L_2 положительны, то мы заключаем, что как произведение корней $q'q''$, так и их сумма $q' + q''$ положительны. Следовательно, оба корня этого уравнения положительны. (Что оба корня действительны следует уже из того, что оба корня уравнения (10) действительны.)

Вычислим еще для обеих цепей общее значение заряда, протекающего при экстратоках. Для этого нам нет необходимости знать решения

Подберем значения λ так, чтобы имели место соотношения:

$$\frac{\sum M_k \lambda_k}{r_1 \lambda_1} = \frac{\sum M_{k2} \lambda_k}{r_2 \lambda_2} = \dots = \frac{\sum M_{kn} \lambda_k}{r_n \lambda_n}. \quad (16)$$

Если мы обозначим общее значение этих отношений через P , то для определения системы значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, мы получим следующую систему однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (M_{11} - r_1 P) \lambda_1 + M_{21} \lambda_2 + M_{31} \lambda_3 + \dots + M_{n1} \lambda_n &= 0, \\ M_{12} \lambda_1 + (M_{22} - r_2 P) \lambda_2 + M_{32} \lambda_3 + \dots + M_{n2} \lambda_n &= 0, \\ M_{1n} \lambda_1 + M_{2n} \lambda_2 + M_{3n} \lambda_3 + \dots + (M_{nn} - r_n P) \lambda_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

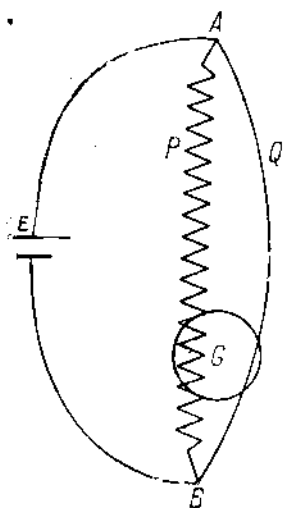
Отсюда мы видим, что если есть система решений, отличная от $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$, то величина P должна удовлетворять уравнению:

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_{11} - r_1 P & M_{21} & M_{31} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} - r_2 P & M_{32} & \dots & M_{n2} \\ M_{1n} & M_{2n} & M_{3n} & \dots & M_{nn} - r_n P \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение дает нам n значений для P , и каждое из этих значений дает систему значений для отношений $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \dots : \lambda_n$, удовлетворяющих уравнениям (16) и (16'). Каждая такая система значений при подстановке в (15) дает уравнение, которое может быть проинтегрировано. Из n полученных таким образом интегралов могут быть затем определены n неизвестных значений токов $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$.

§ 5. Явления, обуславливаемые экстратоками.

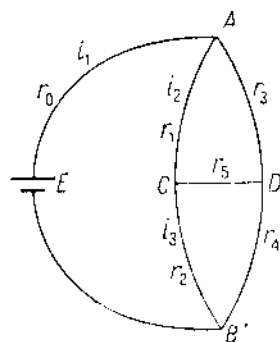
Известный опыт Эдлунда для экспериментального обнаружения экстратока изображен схематически на фиг. 17. В цепи тока в точке E находится элемент, посылающий ток от E к A . Точка A соединена с B двумя параллельными цепями, и протекающие по этим цепям токи могут быть сравнены при помощи дифференциального гальванометра G . Параллельные цепи APB и AQB подобраны так, что их омические сопротивления равны, но самоиндукции различны. Этого можно достигнуть, если взять, например, для цепи APB проволоку с меньшим сопротивлением на единицу длины, чем для



Фиг. 17.

цепи AQB . В этом случае длину проволоки в цепи APB придется взять большей, а цепь $EAPB$ будет иметь больший коэффициент самоиндукции, чем цепь $EABQ$. Это различие может быть еще усилено, если свернуть провод APB спирально. В установившемся состоянии силы токов в обеих цепях будут одинаковы, и дифференциальный гальванометр не будет давать никакого отклонения от нулевого положения.

Если теперь прервать цепь тока в E , то в обеих параллельных цепях возникнут экстратоки, но в цепи APB экстраток будет сильнее, чем в цепи AQB , поэтому гальванометр даст при этом отброс, направление которого будет таким, как будто сопротивление цепи APB меньше, чем AQB . При замыкании тока гальванометр даст отброс в противоположном направлении. Влияние самоиндукции может быть обнаружено и в упомянувшейся выше цепи моста Уитстона, изображенной схематически на фиг. 18. Поставленные на чертеже вдоль проводников буквы обозначают сопротивления отдельных частей моста и силы токов, протекающих по ним. Если выполнено соотношение $r_1:r_2=r_3:r_4$, то в стационарном состоянии в мосте CD ток не течет, и включенный здесь гальванометр остается на нуле. Но если самоиндукция плеча AD больше, чем AC , то при размыкании и замыкании тока гальванометр будет давать отбросы. Если A соединена с положительным полюсом элемента E , то при размыкании цепи элемента в мосте получится толчок тока в направлении DC . При замыкании получится отброс противоположного направления.



Фиг. 18.

Теорию этого опыта мы рассмотрим несколько подробнее. При элементарном разборе, который мы только что привели, мы говорили о самоиндукции известного участка цепи, но согласно определению мы можем говорить только о коэффициенте самоиндукции замкнутой цепи тока. Рассмотрим теперь совершенно произвольную сеть проводников, в различных точках которой действуют электродвижущие силы. Подобную сеть мы уже рассматривали при выводе законов Кирхгофа. Рассматриваемую нами теперь проблему мы можем считать обобщением рассмотренной тогда на случай присутствия в цепи самоиндукции. Разделим нашу сеть на столько независимых друг от друга контуров, сколько это необходимо, чтобы каждый участок цепи вошел, по крайней мере, в один контур. Выберем в каждом из этих контуров положительное направление обхода. Если какой-либо участок цепи входит в несколько контуров, то силу протекающего по нему тока мы можем рассматривать как алгебраическую сумму сил токов, протекающих по всем этим контурам (силу тока вдоль каждого контура при этом мы считаем постоянной). Условие, что в любой точке разветвления количества притекающих и утекающих зарядов равны, выполняется в этом случае само собою. Второй закон Кирхгофа должен быть несколько видоизменен благодаря индукции. Если мы возьмем линейный интеграл от уравнения (2) (гл. III, § 2) по любому из выделенных замкнутых контуров, то мы получим:

$$\oint E_s ds + \oint E_{cs} ds = \sum i v.$$

Сумма, стоящая справа, относится ко всем участкам сети, из которых состоит данный контур, и в каждом из этих участков мы должны

взять силу действительно протекающего по нему тока. Далее, на основании второго уравнения Максвелла, мы имеем:

$$\int E_s ds = - \frac{d}{dt} \int B_n d\tau.$$

Этот интеграл не равен нулю, и мы можем легко вычислить его значение при помощи коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции. Например, для цепи, помеченной нами индексом 1, мы получим:

$$\Sigma i r = \Sigma F - M_{11} \frac{di_1}{dt} - \dots - M_{1n} \frac{di_n}{dt}.$$

Аналогичные выражения мы получим и для других контуров. Коэффициент M_{kt} , например, обозначает число линий магнитной индукции, пронизывающих k -ый контур, когда в t -м контуре течет ток силой в единицу, а все остальные токи равны нулю.

В качестве примера мы рассмотрим опять схему моста Уитстона (фиг. 18). Выберем в качестве контуров цепи $BEAD$, ACD и CBD и условимся считать положительным направление обходов, указанное последовательностью букв.

Написав уравнения для этих контуров и обозначив электродвижущую силу буквой F , получим:

$$i_1 r_0 + (i_1 - i_2) r_3 + (i_1 - i_3) r_4 = F - M_{11} \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt},$$

$$(i_2 - i_1) r_3 + i_2 r_1 + (i_2 - i_3) r_5 = - M_{21} \frac{di_1}{dt} - M_{22} \frac{di_2}{dt} - M_{23} \frac{di_3}{dt},$$

$$(i_3 - i_1) r_4 + (i_3 - i_2) r_5 + i_3 r_2 = - M_{31} \frac{di_1}{dt} - M_{32} \frac{di_2}{dt} - M_{33} \frac{di_3}{dt}.$$

Эти уравнения мы можем разрешить указанным в прошлом параграфе методом. Мы ограничимся, однако, тем, что, не вычисляя значений токов i_1 , i_2 , i_3 как функций времени, найдем только для каждого из них интегральное значение заряда, протекающего после мгновенного выключения электродвижущей силы F . Обозначим эти интегральные значения зарядов буквами I_1 , I_2 , I_3 , а значения токов в момент прекращения действия электродвижущей силы через i_{10} , i_{20} , i_{30} . Умножая выше-написанные равенства на dt и интегрируя их от $t = 0$, т. е. от момента выключения электродвижущей силы, до момента, когда силы токов делаются неощутимо малыми, т. е., теоретически, до $t = \infty$, получим:

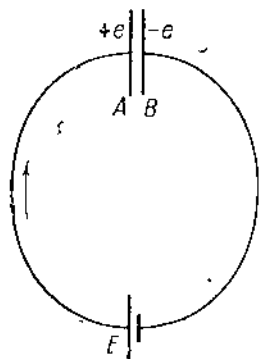
$$I_1 r_0 + (I_1 - I_2) r_3 + (I_1 - I_3) r_4 = M_{11} i_{10} + M_{12} i_{20} + M_{13} i_{30},$$

$$(I_2 - I_1) r_3 + I_2 r_1 + (I_2 - I_3) r_5 = M_{21} i_{10} + M_{22} i_{20} + M_{23} i_{30},$$

$$(I_3 - I_1) r_4 + (I_3 - I_2) r_5 + I_3 r_2 = M_{31} i_{10} + M_{32} i_{20} + M_{33} i_{30}.$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно I_1 , I_2 , I_3 . Через участок цепи CD , в котором включен гальванометр, протекает интегральный заряд, равный $I_2 - I_3$. Заряд этот измеряется баллистическим отбросом гальванометра. Этим способом мы можем сравнить теорию с опытом.

§ 6. Цепи, содержащие конденсатор. При анализе процессов зарядки и разрядки конденсатора мы также должны принимать во внимание влияние самоиндукции. Рассмотрим неразветвленную цепь тока AEB (фиг. 19), содержащую электродвижущую силу E и конденсатор. Чтобы найти уравнение, описывающее процессы в такой цепи, применим теорему о линейном интеграле напряженности электрического поля к контуру AEB . Для участка контура между пластинками конденсатора мы допустим, что напряженность электрического поля в нем определяется всегда только состоянием системы в рассматриваемый момент времени. Выше мы нашли для этого участка значение $\frac{e}{C}$, где e обозна-



Фиг. 19.

чает заряд, а C — емкость конденсатора (при этом мы предполагали, что пластины конденсатора параллельны и находятся на расстоянии, малом по сравнению с размерами пластин). При нашем упрощающем допущении мы можем считать, что вышеуказанное значение остается верным. Вместо уравнения (5) мы получаем тогда:

$$ir + \frac{e}{C} = F - L \frac{di}{dt}, \quad (17)$$

причем i и e связаны соотношением:

$$i = \frac{de}{dt}.$$

Рассмотрим теперь случай разряда конденсатора в отсутствие электродвижущих сил в следующих двух предельных случаях:

1. Величина самоиндукции настолько мала, что мы можем ею пренебречь. Тогда

$$r \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = 0.$$

Откуда

$$e = e_0 e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Это тот же результат, который мы получили в гл. III и который показывает, что, практически, спустя короткое время, сила тока становится исчезающе малой.

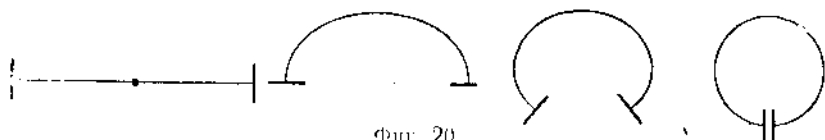
2. Сопротивление цепи настолько мало, что мы можем им пренебречь. В этом случае уравнение имеет вид:

$$\frac{e}{C} + L \frac{d^2 e}{dt^2} = 0$$

и, следовательно,

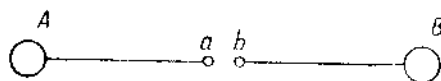
$$e = A \cos \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + a \right).$$

Мы получаем периодическое явление, круговая частота которого $n = \frac{1}{\sqrt{CL}}$, а следовательно, период $T = 2\pi\sqrt{CL}$. Величина периода T тем меньше, чем меньше C и L . Вышеприведенное уравнение служит основой теории колебательных разрядов, с которыми мы встречаемся во



Фиг. 20.

всей области переменных токов. Так, например, если мы будем деформировать рассмотренный нами контур указанным на фиг. 20 образом, то мы придем к вибратору Герца. Чтобы иметь возможность зарядить концы вибратора до некоторой разности потенциалов, мы будем считать, что соединительный провод прерван между a и b (фиг. 21). В историческом опыте Герца, когда точки



Фиг. 21.

a и b присоединены к полюсам индуктора между обеими половинами вибратора, возникает большая разность потенциалов, и между a и b проскакивает искра. Благодаря этому искровой промежуток становится проводящим, и мы опять получаем цельный проводник, в котором возникают электрические колебания.

Однако в этом случае вычисление периода затруднено. Герц применил для этого вышеприведенную формулу, полученную Кельвином, но с измененными значениями C и L . Это законно только в первом приближении.

Перейдем теперь к разряду конденсатора в случае, когда учитывается влияние и сопротивления и самоиндукции соединительных проводов. Равенство (17) дает:

$$ir + \frac{e}{C} = -L \frac{di}{dt}.$$

Подставив $i = \frac{de}{dt}$, получаем:

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{de}{dt} + \frac{1}{LC}e = 0. \quad (18)$$

Это однородное дифференциальное уравнение удовлетворяется, если мы положим $e = Ae^{-kt}$, где k является одним из корней квадратного уравнения:

$$k^2 + \frac{r}{L}k + \frac{1}{LC} = 0. \quad (19)$$

Очевидно, мы должны отличать здесь два случая:

$$r^2 > 4 \frac{L}{C} \quad \text{и} \quad r^2 < 4 \frac{L}{C}.$$

В первом случае оба корня действительны, а так как коэффициенты r , L и C положительны, то оба корня положительны. Во втором случае корни сопряженные комплексные. Обозначив значения корней в первом случае через k_1 и k_2 , мы получим общее решение в виде:

$$e = Ae^{-k_1 t} + Be^{-k_2 t}.$$

Константы интегрирования A и B определяются из значений e и i в начальный момент времени. Следовательно, и в этом случае мы получаем непрерывное уменьшение зарядов, быстро становящихся неизмеримо малыми.

Если $r^2 < 4 \frac{L}{C}$, то оба корня (19) комплексны и мы можем обозначить их через $q \pm in$, где $q = \frac{r}{2L}$, а $n = \frac{1}{2LC} \sqrt{C(4L - r^2C)}$.

Решение нашего уравнения в этом случае имеет вид:

$$e = A_1 e^{-(q \pm in)t} + A_2 e^{-(q \mp in)t} \quad (20)$$

или после приведения к действительному виду:

$$e = Ae^{-qt} \cos(nt - \alpha). \quad (21)$$

Новые константы интегрирования A и α , как и раньше, могут быть определены при помощи начальных значений e и $\frac{de}{dt}$.

Полученное решение представляет затухающие колебания, т. е. колебательный разряд с убывающими амплитудами.

Если $r^2 = 4 \frac{L}{C}$, то оба корня (19) равны и общее решение (18) получает вид:

$$e = (A + Bt)e^{-kt}.$$

Это решение опять дает непрерывное убывание зарядов до нуля.

§ 7. Цепь с емкостью и электродвижущей силой. В общем случае, к которому мы теперь переходим, в цепи имеется еще электродвижущая сила, заданная в функции времени. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения (17), т. е.

$$L \frac{d^2 e}{dt^2} + r \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = F, \quad (22)$$

где F является известной функцией времени. Это уравнение отличается от предыдущего только тем, что правая часть его отлична от нуля. Как известно, решение такого неоднородного уравнения может быть

¹ Здесь и далее вплоть до § 10 i обозначает не силу тока, а минимую единицу. *Прим. ред.*

получено из решения однородного методом вариации параметра. Это значит, что в решении (20) мы должны считать A_1 и A_2 функциями времени и подобрать их таким образом, чтобы уравнение (22) удовлетворялось. Заметим, что при подстановке в (22) выпадают все члены, не содержащие производных от A_1 и A_2 , так как это как раз те члены, которые мы получаем из (20) в случае постоянства A_1 и A_2 и которые удовлетворяют поэтому уравнению (18). Поэтому нам достаточно рассматривать члены, содержащие производные от A_1 и A_2 . Требование, чтобы наше решение удовлетворяло дифференциальному уравнению (22), дает нам одну зависимость между неизвестными функциями A_1 и A_2 . Чтобы вполне определить эти функции, мы должны иметь еще вторую зависимость, которую мы можем выбрать произвольно. Этот выбор мы делаем таким образом, чтобы вычисления были по возможности просты. После первого дифференцирования мы получаем из (20):

$$\frac{de}{dt} = (-q + in) A_1 e^{(-q + in)t} - (q + in) A_2 e^{-(q + in)t} + e^{(-q + in)t} \frac{dA_1}{dt} + e^{-(q + in)t} \frac{dA_2}{dt}.$$

Пользуясь вышеуказанной возможностью произвольного выбора одного соотношения между функциями A_1 и A_2 , полагаем:

$$e^{int} \frac{dA_1}{dt} + e^{-int} \frac{dA_2}{dt} = 0. \quad (23)$$

Второе дифференцирование дает:

$$\frac{a^2 e}{dt^2} = \dots + (-q + in) e^{(-q + in)t} \frac{dA_1}{dt} - (q + in) e^{-(q + in)t} \frac{dA_2}{dt}.$$

Точками здесь обозначены те члены, не содержащие производных от A_1 и A_2 , которые выпадают при подстановке. Подставляя эти выражения в (22), получаем:

$$(-q + in) e^{int} \frac{dA_1}{dt} - (q + in) e^{-int} \frac{dA_2}{dt} = \frac{F}{L} e^{qt}. \quad (24)$$

Решаем уравнения (23) и (24) относительно $\frac{dA_1}{dt}$ и $\frac{dA_2}{dt}$:

$$2in e^{int} \frac{dA_1}{dt} = \frac{F}{L} e^{qt},$$

$$2in e^{-int} \frac{dA_2}{dt} = -\frac{F}{L} e^{qt},$$

откуда

$$A_1 = -\frac{i}{2nL} \int e^{(q - in)t} F dt,$$

$$A_2 = +\frac{i}{2nL} \int e^{(q + in)t} F dt.$$

Подставляя найденные таким образом функции в (20), мы получаем выражение, удовлетворяющее уравнению (22). Это выражение будет общим решением (22), так как оно содержит две независимых константы интегрирования (эти две константы входят в решение в виде аддитивных постоянных при последнем интегрировании). Благодаря этим постоянным в общее решение входят члены того же вида, что и в (20) в его первоначальном значении. Члены эти могут быть представлены в виде (21). Далее оказывается, что в общее решение входит еще сумма двух сопряженных комплексных членов, которые также могут быть объединены в виде действительной величины, содержащей электродвижущую силу F . Наиболее важным является случай, когда F является периодической функцией времени. Эта задача вполне аналогична механическому случаю вынужденных колебаний.

Пусть, например,

$$F = a \cos mt.$$

Чтобы облегчить вычисления, мы напомним $F = ae^{imt}$ и в конечном результате возьмем только действительную часть. В этом случае получаем:

$$A_1 = -\frac{ai}{2\pi L} \frac{1}{q + i(m-n)} e^{[q + i(m-n)]t} + C_1,$$

$$A_2 = -\frac{ai}{2\pi L} \frac{1}{q + i(m+n)} e^{[q + i(m+n)]t} + C_2.$$

Нам нужно взять действительную часть от выражения

$$\frac{ai}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{q + i(m+n)} - \frac{1}{q + i(m-n)} \right\} e^{tmt};$$

она равна

$$\frac{a}{L} \frac{(q^2 + n^2 - m^2) \cos mt + 2qm \sin mt}{(q^2 + n^2 - m^2)^2 + 4q^2 m^2}.$$

Подставим вместо q и n их значения:

$$q = -\frac{r}{2L} \quad \text{и} \quad n = \frac{1}{2LC} \sqrt{C(4L - r^2 C)},$$

откуда следует, что $q^2 + n^2 = \frac{1}{CL}$ [это соотношение мы могли бы написать и сразу, так как $q^2 + n^2$ есть произведение корней уравнения (19)]. После подстановки этих величин получаем:

$$\frac{a \left(\frac{1}{LC} - m^2 \right) \cos mt}{L \left(\frac{1}{LC} - m^2 \right) + \frac{r^2 m^2}{L^2}} + \frac{a \frac{r m}{L} \sin mt}{L \left(\frac{1}{LC} - m^2 \right) + \frac{r^2 m^2}{L^2}}.$$

Если, затем, мы введем в члены, содержащие константы интегрирования, то мы можем написать общее решение (22) в виде:

$$e = Ae^{-qt} \cos(nt + \alpha) + \frac{a}{\rho} \cos(mt - p). \quad (25)$$

В этом выражении положено:

$$\frac{1}{\rho} \cos p = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{LC} - m^2 \right) + \frac{r^2 m^2}{L^2}; \quad \frac{1}{\rho} \sin p = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{LC} - m^2 \right) + \frac{r^2 m^2}{L^2}$$

или

$$\rho^2 = \left(\frac{1}{C} - Lm^2 \right)^2 + r^2 m^2, \quad \operatorname{tg} p = \frac{rm}{\frac{1}{C} - Lm^2}.$$

Первый член правой части (25) представляет колебательный разряд системы, который проявляется в отсутствии электродвижущей силы в виде так называемых свободных колебаний системы. Благодаря множителю e^{-qt} эти колебания весьма быстро затухают. Остаются периодические незатухающие вынужденные колебания, не зависящие от начальных условий системы. Период вынужденных колебаний равен периоду действующей электродвижущей силы. Амплитуда тока зависит от величины ρ , которая играет в этом случае роль сопротивления. Амплитуда эта велика, если ρ мало. Для этого необходимо, чтобы r было мало. При исчезающе малом r сдвиг фаз между электродвижущей силой и током вынужденных колебаний (обозначенный выше через p) приближается к значению нуля или π в зависимости от того, имеет ли m^2 значения меньше или больше, чем $\frac{1}{LC}$. Далее, ρ тем меньше, чем меньше разность между m и частотой собственных колебаний системы $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Следовательно, и здесь мы встречаемся с хорошо известным в вынужденных механических колебаниях фактом, что амплитуда таких колебаний тем больше, чем ближе приближаются периоды внешней силы и собственных колебаний системы.

Если r и L заданы, то мы можем сделать ρ малым, если выберем достаточно малой величину $\left(\frac{1}{C} - Lm^2 \right)^2$. Отсюда следует, что в случае

заданной переменной электродвижущей силы может оказаться выгодным для получения возможно больших токов включить в цепь конденсатор.

§ 8. Две связанные цепи. Рассмотрим еще случай двух цепей, каждая из которых содержит конденсатор и в одной из которых действует электродвижущая сила, являющаяся известной функцией времени.

Если мы выразим силы токов в этих цепях через заряды конденсаторов, то получим (как и ранее отдельные цепи обозначены индексами 1 и 2):

$$\left. \begin{aligned} r_1 \frac{dc_1}{dt} &= F - L_1 \frac{d^2 e_1}{dt^2} - M \frac{d^2 e_2}{dt^2} - \frac{e_1}{C_1}, \\ r_2 \frac{dc_2}{dt} &= -L_2 \frac{d^2 e_2}{dt^2} - M \frac{d^2 e_1}{dt^2} - \frac{e_2}{C_2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Решим эту систему для случая, когда F является гармонической функцией времени $F = a \cos mt$. При этом мы пойдем несколько другим путем, чем в предыдущем параграфе, но применим попрежнему

показательные функции. Поэтому мы заменим F через $F' = a e^{imt}$ и отметим получающиеся при этом величины штрихами. Величины e_1 и e_2 , которые мы ищем, будут в этом случае действительными частями величин e_1' и e_2' .

Подставим в исходные уравнения (26) выражения:

$$e_1' = q_1 e^{imt} \quad \text{и} \quad e_2' = q_2 e^{imt},$$

где q_1 и q_2 должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись уравнения (26). После подстановки и сокращения на e^{imt} , получаем:

$$mq_1 r_1 i = a + L_1 q_1 m^2 + M q_2 m^2 - \frac{q_1}{C_1},$$

$$mq_2 r_2 i = L_2 q_2 m^2 + M q_1 m^2 - \frac{q_2}{C_2}.$$

Эти уравнения легко разрешаются относительно q_1 и q_2 . Обе эти величины, вообще говоря, получаются комплексными. Положим

$$q_1 = \alpha_1 e^{i\beta_1} \quad \text{и} \quad q_2 = \alpha_2 e^{i\beta_2},$$

мы находим:

$$e_1' = \alpha_1 e^{i(mt + \beta_1)}, \quad e_2' = \alpha_2 e^{i(mt + \beta_2)}.$$

Следовательно,

$$e_1 = \alpha_1 \cos(mt + \beta_1) \quad \text{и} \quad e_2 = \alpha_2 \cos(mt + \beta_2). \quad (27)$$

Чтобы получить полное решение, нам необходимо еще добавить члены, удовлетворяющие нашей системе при $F=0$. Физически это значит, что полученные выше члены дают опять вынужденные колебания, вызванные в обеих цепях действующей электродвижущей силой. Члены, которые мы должны еще добавить, выражают свободные колебания, возникающие в цепях в начальный момент. Чтобы найти эти решения, мы полагаем $e_1'' = p_1 e^{kt}$ и $e_2'' = p_2 e^{kt}$, где p_1 , p_2 и k должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялась система (26) при $F=0$. После подстановки и деления на e^{kt} , получаем:

$$\left. \begin{aligned} r_1 p_1 k + L_1 p_1 k^2 + M p_2 k^2 + \frac{p_1}{C_1} &= 0, \\ r_2 p_2 k + L_2 p_2 k^2 + M p_1 k^2 + \frac{p_2}{C_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Этих двух уравнений недостаточно, конечно, для определения трех величин k , p_1 и p_2 , но мы можем найти из них k и отношение $\frac{p_1}{p_2}$. Этого и следовало ожидать, так как если мы найдем какую-либо систему решений e_1'' и e_2'' , то, очевидно, умножив ее на произвольную постоянную, мы опять получим решение исходной системы. Исключая отношение $\frac{p_1}{p_2}$, мы получим для определения k уравнение четвертой степени:

$$\left(L_1 k^2 + r_1 k + \frac{1}{C_1} \right) \left(L_2 k^2 + r_2 k + \frac{1}{C_2} \right) = M^2 k^4. \quad (29)$$

Для каждого значения корня k из (28) мы получим соответствующее значение отношения $\frac{p_2}{p_1}$. Выбрав произвольно, например, p_1 , мы однозначно найдем и p_2 . Следовательно, к каждому интегралу (27) надо добавить четыре члена. При этом в общее решение войдут четыре константы интегрирования, значения которых могут быть определены по заданным для начального момента четырем величинам:

$$e_1, \quad \frac{de_1}{dt}, \quad e_2 \quad \text{и} \quad \frac{de_2}{dt}.$$

Можно показать, что если среди корней уравнения (29) есть действительные, то они должны быть отрицательными, так как только в этом случае соответствующие им члены дают аperiodическое уменьшение зарядов. Если действительных корней нет, то мы имеем две пары сопряженных комплексных корней, действительные части которых опять отрицательны. Эти корни соответствуют затухающему колебательному разряду конденсаторов. Обозначим эти комплексные сопряженные корни через:

$$-s_1 \pm in_1 \quad \text{и} \quad -s_2 \pm in_2.$$

Если мы примем во внимание, что сопряженным комплексным значениям k соответствуют также сопряженные комплексные значения p_2/p_1 и обозначим эти значения через $\alpha_1 e^{\pm i\beta_1}$ и $\alpha_2 e^{\pm i\beta_2}$, то общее решение (26) мы можем привести к виду:

$$e_1 = \alpha_1 \cos(mt + \beta_1) + C_1 e^{-s_1 t} \cos(n_1 t + \gamma_1) + C_2 e^{-s_2 t} \cos(n_2 t + \gamma_2), \\ e_2 = \alpha_2 \cos(mt + \beta_2) + \alpha_1 C_1 e^{-s_1 t} \cos(n_1 t + \gamma_1 + \delta_1) + \alpha_2 C_2 e^{-s_2 t} \cos(n_2 t + \gamma_2 + \delta_2).$$

Аналогичным образом может быть рассмотрена задача с n цепями, в каждой из которых имеется конденсатор и содержится электродвижущая сила.

§ 9. Влияние толщины проводника на коэффициент самоиндукции. До сих пор мы считали провода, из которых состояли наши цепи, линейными. Но толщина проволоки оказывает влияние на коэффициент самоиндукции. Действительно, коэффициент самоиндукции, как мы видели, равен потоку магнитной индукции, пронизывающей охватывающуюся на контур тока поверхность в случае, когда по контуру протекает ток силой в единицу. При конечной толщине проводника величина опирающейся на него поверхности становится неопределенной. Правда, величина, к которой относится эта неопределенность при тонком проводнике, не велика, но так как как-раз вблизи проводника с током значение магнитной индукции велико, то величина самоиндукции будет существенно зависеть от распределения тока в проводнике.

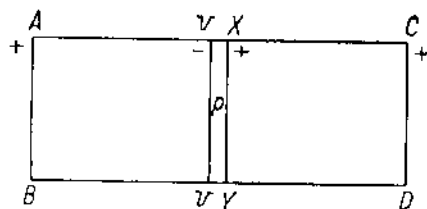
Для коэффициента взаимной индукции эта зависимость от размеров проводника не так велика, если только оба контура не чрезвычайно близки друг к другу. Это видно из того, что для вычисления коэффициента взаимной индукции нам нужно вычислить поток магнитной индукции через поверхность одного из контуров, когда в другом течет ток силой в единицу.

В области, неопределенной благодаря нелинейности проводника, значение магнитной индукции имеет значения, большие, чем в других местах поверхности.

§ 10. Вычисление магнитных полей в простых случаях. Для вычисления значений коэффициентов само- и взаимной индукции в конкретных случаях необходимо знать магнитное поле, создаваемое заданным током вокруг данного проводника. Это поле может быть всегда найдено при помощи законов, указанных в гл. I. Здесь мы рассмотрим некоторые частные случаи.

В качестве первого случая мы рассмотрим магнитное поле прямой катушки, находящейся в воздухе. Если витки катушки расположены плотно один около другого, то мы можем заменить катушку равным числом кольцеобразных проводников, по каждому из которых протекает ток той же силы i , что и в катушке. Для того чтобы подсчитать магнитное поле вне катушки, мы можем заменить каждый из этих контуров двойным магнитным слоем, выбрав в качестве толщины этого слоя расстояние δ между двумя последовательными витками катушки. Направление магнитного момента каждого двойного слоя определяется направлением тока, а плотность магнетизма в электромагнитных единицах равна $\frac{i}{\delta}$ ¹. Так как последовательные магнитные листки прилегают друг к другу, то противоположные их магнитные заряды взаимно нейтрализуются, и мы получим только два слоя с плотностями $\pm \frac{i}{\delta}$ на обоих концах катушки.

Для точек, лежащих внутри катушки, этот результат не может быть верным, так как в этом случае при прохождении через концевые поверхности катушки напряженность магнитного поля должна бы испытывать скачок. Легко видеть, что причина этого расхождения лежит в том, что эквивалентность поля тока и двойного слоя имеет место только в точках, лежащих вне слоя. Все остальные наши выводы остаются в силе. Поэтому, для того чтобы найти напряженность магнитного поля в точке P , лежащей внутри катушки, достаточно расположить двойные слои таким образом, чтобы точка P лежала вне всех этих слоев (фиг. 22). При этом два слоя противоположных знаков, расположенные по обе стороны от P , не уничтожают друг друга, и мы должны кроме магнитных зарядов, расположенных на концах катушки, принять во внимание и поле, созданное этими зарядами, расположенными на поверхностях UV и XU , которые мы будем считать бесконечно близкими к точке P . Направление поля, создаваемого этими слоями в точке P , приближается при этом по направлению к оси катушки. Величина поля, вызываемого в точке P слоем, расположенным на UV , будет, согласно гл. I, равна телесному углу (P, UV) , помноженному на $\frac{i}{\delta}$.



Фиг. 22.

¹ Здесь и далее i вновь обозначает силу тока, а не минимальную единицу.
Прим. ред.

В пределе телесный угол становится равным 2π . Поэтому для общей напряженности магнитного поля, вызываемого в точке P обоими слоями, расположенными на поверхностях UV и XY , мы получим $4\pi \frac{i}{\delta}$. Для рассмотрения δ между двумя смежными витками мы можем написать $\delta n = 1$, где n обозначает число витков катушки, приходящихся на сантиметр ее длины. Поэтому вышеполученное выражение для напряженности магнитного поля переходит в $4\pi in$.

Если катушка очень длинна по сравнению со своим сечением, то для точек, находящихся не слишком близко к концам катушки, мы можем считать магнитные массы, расположенные на концах катушки, сосредоточенными в двух точках, магнитных полюсах катушки. Другими словами, это означает, что мы можем считать расстояния от рассматриваемой точки до любой точки концевой поверхности катушки одинаковыми. Обозначим эти расстояния от обоих концов катушки буквами r_1 и r_2 , а поперечное сечение катушки буквой s . Тогда напряженность магнитного поля в точке, лежащей вне катушки, будет равнодействующей двух векторов $\frac{ins}{r_1^3} \mathbf{r}_1$ и $\frac{ins}{r_2^3} \mathbf{r}_2$, направленных по линиям, соединяющим рассматриваемую точку с полюсами.

Для точки, расположенной внутри катушки, к этому присоединяется еще поле $4\pi in$. Так как r_1^2 и r_2^2 велики по сравнению с s (если рассматриваемая точка не слишком близка к концу катушки), то составляющие векторов $\frac{ins}{r_1^3} \mathbf{r}_1$ и $\frac{ins}{r_2^3} \mathbf{r}_2$ будут малы, и мы можем считать поле внутри катушки однородным. Направление магнитного поля совпадает внутри такой катушки с ее осью, а величина напряжения поля равна $4\pi in$. Если мы примем, что поле внутри катушки однородно, а вне катушки настолько слабо, что мы им можем пренебречь (так как вне катушки поле определяется вышенаписанными величинами, которые для не слишком малых r весьма малы по сравнению с $4\pi in$), то вышеприведенный результат мы можем очень легко получить при помощи первого уравнения Максвелла в интегральной форме. В электромагнитных единицах это уравнение дает:

$$\oint H_s ds = 4\pi \int C_n ds.$$

Интеграл, стоящий в левой части, мы можем вычислить, если в качестве контура интеграции возьмем прямую, проходящую по оси катушки и замыкающуюся как-либо вне катушки. Если длина катушки l , а H обозначает искомую напряженность магнитного поля, то интеграция вдоль прямой параллельной оси дает Hl , а интеграция по замыкающей прямую внешней части контура дает нуль (вследствие того, что вне катушки поле исчезающе мало). Интеграл в правой части равенства дает общую силу тока, пронизывающего поверхность, опирающуюся на контур интегрирования. Каждый из nl витков катушки пронизывает эту поверхность один раз и несет ток i . Поэтому значение этого интеграла равно inl . Отсюда непосредственно получаем:

$$H = 4\pi in.$$

Этот вывод приложим одинаково и в случае, когда внутренность катушки завята воздухом, и в том случае, когда она заполнена железом. Но магнитная индукция во втором случае в μ раз больше, чем в первом.

Полученные результаты позволяют подсчитать коэффициент самоиндукции катушки. Если длина катушки l очень велика по сравнению с ее сечением, то поле в такой катушке мы можем считать по всей длине однородным, и напряженность его

$$H_1 = 4\pi n i.$$

Если внутренность катушки заполнена веществом, проницаемость которого равна μ , то магнитная индукция в катушке равна:

$$B = 4\pi \mu n i$$

и направлена также вдоль оси катушки. Если s обозначает площадь витка, то поток индукции, пронизывающий этот виток, равен $4\pi \mu n i s$, а поток, пронизывающий все nl витков, будет:

$$N = 4\pi \mu n^2 l s i.$$

Отсюда мы непосредственно получаем величину коэффициента самоиндукции

$$L = 4\pi \mu n^2 l s.$$

При силе тока i общий запас магнитной энергии катушки равен:

$$\frac{1}{2} Li^2 = 2\pi \mu n^2 l s i^2.$$

Так как полем вне катушки можно пренебречь, а поле внутри катушки однородно, то мы можем считать всю энергию распределенною равномерно по объему ls .

Таким образом в единице объема магнитного поля сосредоточена энергия в количестве $2\pi \mu n^2 i^2$. Эту плотность энергии можно представить еще в следующей формуле:

$$\frac{1}{8\pi} \mu H^2 = \frac{1}{8\pi} (BH). \quad (30)$$

Так как состояние поля в любой точке определяется значением H , то, очевидно, последнее выражение будет определять плотность магнитной энергии во всех случаях, даже когда поле не однородно.

В этих выражениях мы пользовались электромагнитными единицами, но, конечно, мы можем выразить полученные результаты и в других единицах. Так, например, в единицах, которые мы ввели в гл. I, § 11, п. Г, мы получим для плотности магнитной энергии выражения:

$$\frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} (BH) = \frac{1}{2\mu} B^2, \quad (31)$$

т. е. формулы, вполне аналогичные полученным ранее выражениям для плотности электрической энергии (гл. II, § 5).

§ 11. **Кольцеобразная катушка.** Таким же образом, как и в случае прямой катушки, мы можем определить магнитное поле, вызываемое током, протекающим по кольцеобразно согнутой катушке. Сначала мы рассмотрим случай, когда в поле нет намагничивающихся веществ. Положим, кроме того, что толщина кольца мала по сравнению с его размерами. По тем же основаниям, что и в предыдущем параграфе, мы заключаем, что вне кольцеобразной катушки магнитное поле отсутствует, а внутри катушки напряженность поля всюду постоянна, и магнитные силовые линии имеют форму колец, центры которых расположены на оси катушки. Подсчитав величину линейного интеграла от напряженности магнитного поля вдоль такой кольцевой силовой линии, мы получим для напряженности магнитного поля внутри катушки выражение:

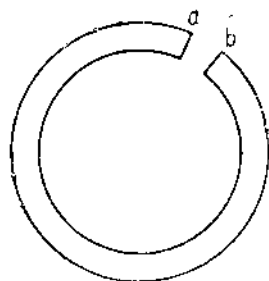
$$H = 4\pi i n,$$

где n означает число витков на единицу длины катушки. Условие непрерывности тангенциальной составляющей H кажущимся образом нарушается на поверхности кольцевой катушки, так как вне катушки $H = 0$. Однако нарушение это только кажущееся, так как на поверхности катушки мы имеем металлический слой, образованный обмоткой катушки, и поле в этом обтекаемом током слое непрерывно уменьшается от вышеуказанного значения до нуля.

Рассмотрим, далее, кольцо из мягкого железа, обмотанное катушкой. Очевидно, все полученные нами выводы применимы и в этом случае, и мы получаем для магнитной индукции внутри кольца выражение:

$$B = 4\pi \mu i n.$$

Вследствие большого значения μ коэффициент самоиндукции такой катушки очень велик.



Фиг. 23.

Положим теперь, что кольцо из мягкого железа обмотано проволокой только на части своей длины. Пусть общее число витков обмотки равно N . Благодаря большому значению μ только небольшая часть линий магнитной индукции, проходящих в железе, выходит наружу. Поэтому и в этом случае мы можем с большим приближением считать линии магнитной индукции кругами концентрическими с железным кольцом. Из соленоидального характера B мы, далее, заключаем, что вдоль всего кольца значения B и H постоянны. Если l означает

длину окружности оси нашего кольца, то теорема о линейном интеграле от H по замкнутому контуру l дает:

$$Hl = 4\pi i N,$$

откуда

$$B = \frac{4\pi \mu N i}{l}.$$

Рассмотрим теперь еще ту же задачу в случае, когда в железном кольце имеется небольшой вырез ab (фиг. 23). Пусть длина $ab = l'$,

а длина остальной части кольца l'' , так что общая длина $l = l' + l''$. Если вырез ab очень мал, то и в этом случае мы можем считать линии магнитной индукции приблизительно кольцеобразными, а величину B постоянной вдоль всего контура кольца. Так как поверхности a и b перпендикулярны к линиям магнитной индукции, то вследствие непрерывности нормальной составляющей индукции значение B в узком воздушном зазоре равно значению его в железе. Теорема о линейном интеграле от H даст:

$$\frac{B}{\mu} l' + Bl'' = 4\pi i N,$$

откуда

$$B = \frac{4\pi i N \mu}{l' + l''(\mu - 1)}.$$

Так как для железа μ может иметь очень большие значения (больше 300), то из этого уравнения видно, что величина магнитной индукции значительно уменьшается даже при очень маленьком воздушном промежутке. Это равенство делает понятным известный факт значительного усиления индукции, получающейся между полюсами обычного электромагнита при уменьшении воздушного зазора между этими полюсами.

§ 12. Взаимоиндукция между обмотками индуктория. В качестве последнего примера рассмотрим коэффициент взаимной индукции между обмотками индуктория. Пусть N будет число витков первичной обмотки, длина которой равна l . Как мы видели, напряженность магнитного поля такой катушки вне ее равна нулю, а внутри имеет значение:

$$H = \frac{4\pi i N}{l}.$$

Магнитная индукция в сердечнике из мягкого железа будет:

$$B = 4\pi \mu i \frac{N}{l}.$$

Искомый коэффициент взаимной индукции равен деленному на силу тока i значению поверхностного интеграла от магнитной индукции, распространенному по поверхности, огибающей на обмотку вторичной катушки. Если вторичная катушка состоит из N' витков, то эту поверхность мы можем разложить на N' дисков. Благодаря большому значению μ , мы можем при подсчете потока индукции через каждый из этих дисков ограничиться только частью поверхности, лежащей внутри железа. Если O означает поперечное сечение железного сердечника, то значение искомого интеграла будет:

$$4\pi \mu i \frac{N N'}{l} O.$$

Следовательно, искомый коэффициент взаимной индукции

$$M = 4\pi \mu \frac{N N'}{l} O.$$

§ 13. Индукция в движущихся проводниках. До сих пор мы рассматривали явления индукции, при которых изменения магнитного поля вызывались изменением силы токов, протекающих по неподвижным проводникам. Но магнитное поле изменяется и в случае перемещения или деформации проводника, по которому протекает ток. Эти изменения магнитного поля также вызывают индукционные действия.

Представим себе два контура, которые мы отметим индексами 1 и 2, второй из которых не содержит электродвижущей силы. Вычислим индукционное действие, получающееся во втором контуре, когда первый перемещается из положения A в положение B . Это перемещение может сопровождаться и деформацией, но сила тока i в первом контуре должна при этом оставаться постоянной. Экспериментально можно считать твердо установленным, что общий заряд, протекающий по второй цепи, равен нулю, если после произвольных перемещений и деформации первого контура и изменений протекающего по нему тока опять восстанавливается первоначальное состояние.

Поэтому мы представим себе следующий опыт. В первом контуре, находящемся в положении A , ток замыкается, далее, эта цепь переносится в положение B , здесь ток размыкается и контур возвращается в положение A . Согласно вышесказанному интеграл по времени от индуктированного при этом во втором контуре тока должен быть равен нулю. При последнем перемещении, во время которого ток в первом контуре не течет, во втором контуре не индуктируется никакого тока. Поэтому, если мы обозначим значение коэффициента взаимной индукции в положениях A и B соответственно через M_a и M_b , сопротивление второго контура через r_2 и индуктированный во время перемещения первого контура во второй заряд через q , то мы получим соотношение (гл. IV, § 3):

$$-M_a \frac{i_1}{r_2} + q + M_b \frac{i_1}{r_2} = 0.$$

Отсюда

$$q = \frac{(M_a - M_b) i_1}{r_2}.$$

При этом выводе нет необходимости учитывать самоиндукцию второго контура, так как до и после опыта силы токов в обоих контурах равны нулю и при нахождении $\int i_2 dt$ член, зависящий от самоиндукции второго контура, выпадает [уравнения (7) гл. IV, § 3].

Возможность вычисления индуктированного при перемещении первого контура во второй заряды вышеполученным образом следует непосредственно из второго уравнения Максвелла, согласно которому линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль второго контура, всегда определяется изменением числа пронизывающих его линий магнитной индукции, независимо от того, вызывается ли это изменение изменением тока, протекающего по первому контуру, или относительным перемещением обоих контуров.

Мы можем изменить уравнения (7) (гл. IV, § 3) таким образом, что они будут применимы в случае любого перемещения и деформации

контуров, сопровождающейся или не сопровождающейся изменением силы протекающих по ним токов. В первом из этих уравнений слагаемое $-M \frac{di_2}{dt}$ обозначает взятую с обратным знаком скорость изменения потока индукции, посылаемого вторым контуром через первый. Так как этот поток индукции во всех случаях равен Mi_2 , то нам достаточно вышеписанное слагаемое заменить через $-\frac{d}{dt}(Mi_2)$.

Аналогичным образом мы учтем влияние деформации первого контура, если заменим слагаемое $-L_1 \frac{di_1}{dt}$ через $-\frac{d}{dt}(L_1 i_1)$.

Выполнив повсюду эти замены, мы получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{r_1} \left[F_1 - \frac{d}{dt}(L_1 i_1) - \frac{d}{dt}(Mi_2) \right], \\ i_2 &= \frac{1}{r_2} \left[F_2 - \frac{d}{dt}(L_2 i_2) - \frac{d}{dt}(Mi_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Рассмотрим теперь происходящие при этом превращения энергии. При этом, для простоты, мы будем считать, что движения происходят так медленно, что в системе не накапливается заметное количество кинетической энергии.

Далее, мы будем считать, что силы тяжести исключены. Мы будем поэтому учитывать только работу движущих сил, работу электродвижущих сил, выделяющееся в цепи тепло и электромагнитную энергию поля. Последняя энергия в любой момент времени выражается формулой (8). Если работу действующих на систему сил за время dt мы обозначим через dW , то

$$dW + F_1 i_1 dt + F_2 i_2 dt = i_1^2 r_1 dt + i_2^2 r_2 dt + \frac{dA}{dt} dt.$$

Подставив в это равенство выражение последнего члена, полученное из (8), и исключив при помощи (32) электродвижущие силы, мы получим:

$$\begin{aligned} dW + i_1 \frac{d}{dt}(L_1 i_1) dt + i_2 \frac{d}{dt}(L_2 i_2) dt + i_1 \frac{d}{dt}(Mi_2) dt + i_2 \frac{d}{dt}(Mi_1) dt = \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) dt + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) dt + \frac{d}{dt}(Mi_1 i_2) dt \end{aligned}$$

или

$$dW = -\frac{1}{2} i_1^2 dL_1 - \frac{1}{2} i_2^2 dL_2 - i_1 i_2 dM.$$

Чтобы сделать этот результат наглядным, мы рассмотрим случай, когда коэффициенты самондукции L_1 и L_2 остаются постоянными.

В этом случае полученное равенство принимает вид:

$$dW = i_1 i_2 dM. \quad (33)$$

Если это равенство дает положительное значение для dW , то рассматриваемое перемещение требует затраты работы, т. е. рассматриваемые цепи действуют друг на друга силами, которые препятствуют перемещению. Если dW отрицательно, то силы взаимодействия сами вызывают рассматриваемое перемещение. Силы эти носят название электродинамических сил. Направление этих сил зависит от относительного направления протекающих по контурам токов. Если один из токов изменяет свое направление, то и силы изменяют знак.

Глава V.

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

§ 1. Общее уравнение энергии. Если мы имеем систему уравнений, описывающих некоторый физический процесс, то мы всегда можем получить из них уравнение, выражающее закон сохранения энергии. Это уравнение всегда состоит из ряда членов, сумма которых постоянна. Отсюда следует, что сумма изменений, которые испытывают эти слагаемые, равна нулю. Чтобы найти это уравнение, мы исходим из выражения, дающего изменения энергии или работу действующих сил. В рассматриваемой проблеме, руководствуясь аналогией с течением жидкости, мы приходим к мысли исследовать интеграл

$$\int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{C}) dS,$$

взятый по объему, ограниченному замкнутой поверхностью σ . При этом мы будем исходить из основных уравнений поля (гл. I, § 12) и будем пользоваться системой единиц, указанной в п. Г § 11 гл. I. При помощи поверхностей разрывов непрерывности рассматриваемых величин весь исследуемый объем мы можем разделить на части, в каждой из которых все встречающиеся величины непрерывны. При помощи первого уравнения Максвелла (1') мы преобразовываем рассматриваемый интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int (E_x C_x + E_y C_y + E_z C_z) dS = \\ & = c \int \left[E_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right] dS. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, мы приводим это выражение к виду:

$$\begin{aligned} & -c \int \left[H_x \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + H_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + H_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] dS + \\ & + c \int \left\{ E_x [H_z \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{j}) - H_y \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{k})] + E_y [H_x \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{k}) - H_z \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{i})] + \right. \\ & \quad \left. + E_z [H_y \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{i}) - H_x \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{j})] \right\} d\tau + \\ & + \sum c \int \left\{ E_{x1} [H_{z1} \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{j}) - H_{y1} \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{k})] - E_{x11} [H_{z11} \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{j}) - \right. \\ & \quad \left. - H_{y11} \cos(\mathbf{n}_1 \mathbf{k})] + \dots \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Первый из полученных поверхностных интегралов должен быть распространен по внешней поверхности σ , а последующие по поверхностям разрывов непрерывности векторов поля. Каждый из этих последних интегралов может быть (путем прибавления двух равных и противоположных по знаку слагаемых, получающихся из имеющихся членов путем циклической перестановки) представлен в виде:

$$\int \left\{ - \begin{vmatrix} E_{xI} & E_{yI} & E_{zI} \\ H_{xI} & H_{yI} & H_{zI} \\ \cos(ni) & \cos(nj) & \cos(nk) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{xII} & E_{yII} & E_{zII} \\ H_{xII} & H_{yII} & H_{zII} \\ \cos(ni) & \cos(nj) & \cos(nk) \end{vmatrix} \right\} d\sigma.$$

Если в первом из этих детерминантов мы вычтем из первой строки умноженную на E_{zI} третью, а из второй строки умноженную на H_{zI} третью, то в первой и второй строках мы получим соответственные тангенциальные составляющие по осям векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Выполнив такое же преобразование во втором детерминанте, мы убедимся на основании непрерывности тангенциальных составляющих, что оба детерминанта равны друг другу. Следовательно, рассматриваемый интеграл равен нулю. К этому заключению мы можем также прийти, заметив, что первый детерминант дает объем параллелепипеда, который образован векторами $\mathbf{E}_I$, $\mathbf{H}_I$ и единичным вектором $\mathbf{n}$, имеющим направление нормали. Объем этот не изменится, если мы заменим $\mathbf{E}_I$ и $\mathbf{H}_I$ их тангенциальными составляющими. Аналогичным образом мы можем интерпретировать второй детерминант. Отсюда опять следует их равенство.

Оставшиеся члены равенства мы преобразовываем, далее, при помощи второго уравнения Максвелла (II), причем интеграл по внешней поверхности мы опять представим в виде интеграла от детерминанта. Получаем:

$$\begin{aligned} \int (E_x C_x + E_y C_y + E_z C_z) dS + \int (H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z) dS = \\ = -c \int \begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \\ \cos(ni) & \cos(nj) & \cos(nk) \end{vmatrix} d\sigma. \end{aligned}$$

Примем теперь, что все наши среды изотропны. При дальнейшем преобразовании первого из полученных объемных интегралов мы будем различать части пространства, заполненные проводниками и диэлектриками. Соответственно с этим мы разобьем этот интеграл на две части, которые мы отметим индексами 1 и 2. В последнем, согласно основному уравнению (IV), $\mathbf{C} = \dot{\mathbf{D}}$, в первом, согласно (V):

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_e),$$

следовательно,

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{C} - \mathbf{E}_e.$$

Подставив эти значения и изменив знак на обратный, мы получаем:

$$\begin{aligned} & \int (E_{ex}C_x + E_{ey}C_y + E_{ez}C_z) dS_1 - \int \rho (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2) dS_1 - \\ & - \int (E_x\dot{D}_x + E_y\dot{D}_y + E_z\dot{D}_z) dS_2 - \int (H_x\dot{B}_x + H_y\dot{B}_y + H_z\dot{B}_z) dS = \\ & = c \int \begin{vmatrix} E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \\ \cos(ni) & \cos(nj) & \cos(nk) \end{vmatrix} d\sigma. \end{aligned}$$

Вычислим теперь последний детерминант:

$$(E_yH_z - E_zH_y) \cos(ni) + (E_zH_x - E_xH_z) \cos(nj) + \\ + (E_xH_y - E_yH_x) \cos(nk);$$

мы видим, что его можно рассматривать как вектор $\frac{1}{c} \mathbf{S}$, имеющий направление внешней нормали. Составляющие этого вектора по осям равны:

$$(E_yH_z - E_zH_y)$$

и т. д. Следовательно, он равен векторному произведению $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$.

Наконец, мы можем еще упростить полученное равенство, подставив на основании основных уравнений (V) и (III) в левые части $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Таким образом получаем окончательно:

$$\int (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C}) dS_1 - \int \rho C^2 dS_1 - \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \epsilon E^2 dS_2 - \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \mu H^2 dS = \int S_n d\sigma. \quad (1)$$

В этом равенстве первый член, очевидно, представляет работу, совершенную в единицу времени в проводниках электродвижущими силами.

§ 2. Примеры. Чтобы выяснить физический смысл остальных членов, проще всего рассмотреть ряд частных случаев.

Первым мы рассмотрим случай, когда поверхность σ удалена так далеко, что, в согласии с нашими прежними предположениями относительно векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, мы можем в (1) пренебречь последним интегралом. Если сверх того мы имеем дело со стационарным состоянием, т. е. с явлениями, рассмотренными нами в гл. III, то из (1) останется только равенство:

$$\int (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C}) dS_1 = \int \rho C^2 dS_1. \quad (2)$$

Правая часть этого уравнения, очевидно, представляет тепло, выделяемое в проводниках по закону Джоуля. Равенство это выражает эквивалентность этого тепла работе, совершаемой электродвижущими силами.

Как мы видели в прошлой главе, эта эквивалентность нарушается, если вследствие изменения силы токов в проводниках энергия поля

убывает или возрастает. Если мы примем, что при этом не возникает никаких зарядов, а имеющиеся заряды не изменяются, то в окружающем проводники диэлектрике ϵ постоянно, и наше уравнение энергии принимает вид:

$$\int (\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{C}) dS_1 - \int \rho C^2 dS_1 + \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 dS. \quad (3)$$

Третий член этого равенства, равный разности между работой электродвижущих сил и выделенным теплом, представляет изменение энергии, вызванное изменением магнитного поля токов. Эта энергия равна:

$$\int \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 dS.$$

Так же как в аналогичном равенстве § 5 гл. II, мы будем эту энергию считать распределенной известным образом в объеме, а именно в каждом элементе объема dS мы будем считать заключенным количество энергии, равное

$$\frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 dS.$$

В согласии с результатом § 10 гл. IV, мы получим при этом плотность магнитной энергии $\frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$ (в электромагнитных единицах $\frac{\mu}{8\pi} H^2$, в электростатических единицах $\frac{\mu}{8\pi c^2} \mathbf{H}^2$). Это выражение мы можем также написать в виде $\frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2$ (в электромагнитных единицах $\frac{1}{8\pi\mu} \mathbf{B}^2$, в электростатических единицах $\frac{1}{8\pi\mu c^2} \mathbf{B}^2$) или в виде $\frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ [в электромагнитных единицах $\frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$, в электростатических единицах $\frac{1}{8\pi c^2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$].

Если, наконец, мы допустим и переменное электрическое поле в диэлектриках, то (1) получит вид:

$$\int (\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{C}) dS_1 - \int \rho C^2 dS_1 + \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 dS_2 + \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 dS. \quad (4)$$

Уравнение (4) говорит, что работа электродвижущих сил равна выделенному теплу плюс увеличение энергии поля, которую можно считать состоящей из двух частей. Первая часть, равная

$$\int \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 dS_2,$$

зависит только от электрического поля и вполне соответствует той электростатической энергии, которую мы рассмотрели в гл. II. Вторая часть равна

$$\int \frac{1}{2} \mu H^2 dS$$

и зависит только от магнитного поля. Эта энергия, как мы видели в гл. IV, играет основную роль в явлениях индукции. Целесообразно назвать эти величины электрической и магнитной энергией поля.

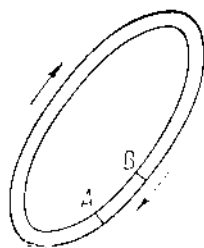
§ 3. Вектор Пойнтинга. Рассмотрим теперь уравнение (1) в самом общем случае. Предположим, что поверхность σ выбрана произвольно и мы рассматриваем систему, находящуюся внутри этой поверхности. Значение всех членов левой части уравнения (1) нам уже известно из предыдущего, и нам остается только интерпретировать значение поверхностного интеграла, стоящего в правой части. Этот интеграл должен представлять энергию, которую рассматриваемая система обменивается с окружающими телами. Такой обмен энергией вообще, конечно, будет происходить, так как произвольно проведенная поверхность σ не прерывает связи между телами, находящимися по обе стороны от этой поверхности. Так как эта отданная или полученная энергия представляется в виде интеграла, распределенного по всей поверхности σ , то целесообразно приписать каждому элементу поверхности соответственный элемент интеграла энергии.

Таким образом Пойнтинг пришел к мысли о потоке энергии, т. е. к идее, что в единицу времени через каждый элемент поверхности ds протекает энергия $S_n ds$. При этом вектор потока энергии равен:

$$\mathbf{S} = c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (5)$$

Этот вектор Пойнтинга может быть определен в каждой точке пространства, и при его помощи мы получаем простую возможность истолкования правой части уравнения (1).

§ 4. Простой пример. В качестве первого примера мы рассмотрим замкнутую цепь, содержащую электродвижущую силу, в которой течет постоянный ток. Пусть фиг. 24 изображает эту цепь, в которой между A и B действует электродвижущая сила. Пусть A является положительным полюсом, так что ток течет в направлении стрелки. Мы покажем, что согласно теореме Пойнтинга из элемента AB энергия непрерывно вытекает в окружающий проводник эфир, между тем как остальные части проводника непрерывно поглощают энергию из эфира.



Фиг. 24.

Как мы знаем, в проводнике в областях, где не действуют электродвижущие силы, повсюду существует падение напряжения, т. е. электрическое поле, направленное по току. Это поле существует внутри проводника, а так как на поверхности тангенциальная составляющая поля непрерывна, то и вне проводника вблизи его поверхности

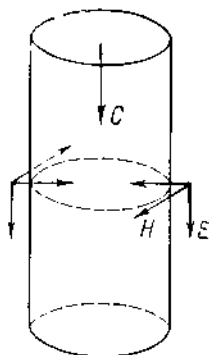
напряженность электрического поля E касательна к поверхности и направлена по току. В этом же месте благодаря току существует и магнитное поле H .

Возьмем элемент длины проводника, имеющий форму цилиндра, и рассмотрим среднее его сечение (фиг. 25). Вектор E имеет направление образующих этого цилиндра, а вектор H расположен по касательной к окружности поперечного сечения проводника. Направление вектора H определяется направлением тока. Вектор Пойнтинга S перпендикулярен к обоим этим векторам. Это направление соответствует повороту на прямой угол правого винта от E к H . Таким образом вектор энергии направлен внутрь проводника. Если радиус кривизны повсюду велик по сравнению с толщиной проводника, то вектор Пойнтинга будет приблизительно иметь то же относительное направление для всех участков проводника, в которых не действуют электродвижущие силы. Таким образом за исключением этих участков энергия течет повсюду из окружающего пространства внутрь проводника. В участке цепи между A и B ток имеет направление BA , следовательно, имеет то же направление, что и в соседних участках цепи, но падение

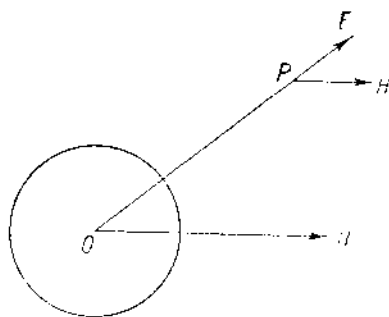
потенциала происходит в направлении AB , и, следовательно, напряженность электрического поля E имеет направление, прямо противоположное направлению E в соседних участках. Поэтому на этом участке и вектор S имеет обратное направление. Таким образом в участках цепи, в которых действуют электродвижущие силы, энергия непрерывно вытекает из проводника в окружающую среду.

Применим уравнение (1) к объему, ограниченному поверхностью σ цилиндрического элемента проводника, в котором не действуют электродвижущие силы. Тогда первое слагаемое левой части выпадает. Два последних слагаемых левой части также выпадают, так как мы имеем дело со стационарным явлением. Оставшиеся члены показывают, что количество выделяющегося в рассматриваемой части цепи тепла равняется притекающей из окружающей среды энергии.

Следующий пример выставлялся в качестве возражения против теории Пойнтинга. Представим себе статическую проблему: положительно заряженный шар, находящийся в магнитном поле земли. Пусть направление этого поля будет OH (фиг. 26). В произвольно взятой точке P вне шара векторы E и H имеют указанное на рисунке направление. Поэтому в этой точке мы можем указать величину вектора S . На прямой OH этот вектор равен нулю, а во всех других точках он отличен



Фиг. 25.



Фиг. 26.

от нуля. Таким образом в среде, с точки зрения Пойнтинга, существует поток энергии. Так как состояние всей системы не меняется, то это заключение кажется противоречивым. Однако если мы внимательнее рассмотрим вектор $\mathbf{S}$, то мы заметим, что возникновение потока энергии не содержит в себе никакого противоречия. Действительно, направление $\mathbf{S}$ повсюду совпадает с касательной к окружности, плоскость которой перпендикулярна к OH , а центр лежит на этой прямой. В каждой точке такой окружности значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ постоянны и образуют одинаковые углы. Поэтому и значение $\mathbf{S}$ на каждой такой окружности постоянно. Согласно теореме Пойнтинга энергия течет по этим кругам. Такое течение энергии по замкнутым кольцевым трубкам постоянного сечения нельзя заметить. Поэтому нельзя и утверждать, что теория Пойнтинга противоречит в этом случае опыту.

Глава VI.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА.

§ 1. Свободный эфир. Возвратимся опять к нашим основным уравнениям электромагнитного поля в свободном эфире:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{C}}, & \operatorname{div} \mathbf{C} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H}, \\ \mathbf{C} &= \dot{\mathbf{E}}.\end{aligned}$$

Из этих уравнений легко исключить все векторы, кроме $\mathbf{H}$ или $\mathbf{E}$. Выполняя это, получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{H}}.\end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования мы выполним над первым из этих уравнений, второе уравнение может быть преобразовано совершенно аналогично.

Напишем первое уравнение для составляющих по оси X :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

Это уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

Согласно одному из основных уравнений $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, поэтому последнее уравнение принимает вид:

$$\Delta E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Аналогичные уравнения мы получим для остальных составляющих. Из полученного дифференциального уравнения следует, что рассматриваемое состояние распространяется со скоростью c . Мы не будем

доказывать это для общего случая, а ограничимся самым простым, но вместе с тем самым важным случаем поля плоской волны. Это — поле, при котором в некоторый данный момент состояние всех точек любой плоскости, параллельной некоторой заданной плоскости, одинаково. Вследствие постоянства скорости распространения состояний, это свойство сохраняется и для любого другого момента времени. Такой процесс мы называем распространением плоской волны. Вышеуказанные параллельные плоскости являются при этом плоскостями фронта волны.

Если мы обозначим распространяющуюся величину буквой φ и расположим ось Z перпендикулярно к фронту волны, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ повсюду будут равны нулю и уравнение

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

упрощается и принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = f_1(z - ct) + f_2(z + ct), \quad (3)$$

где f_1 и f_2 совершенно произвольные функции.

Рассмотрим сначала первый член этого решения. Легко видеть, что это решение показывает, что в данный момент в каждой точке пространства имеет место состояние, которое на t секунд ранее было в другой точке, отстоящей от данной по прямой, параллельной оси Z , на отрезок ct . Таким образом представляемое этим решением состояние действительно распространяется со скоростью c вдоль положительного направления оси Z . Аналогично легко убедиться, что второй член решения (3) представляет состояние, распространяющееся со скоростью c в направлении отрицательной оси Z . В одном и том же пространстве может происходить одновременно и распространение состояний в обоих направлениях. Этот процесс и выражает общее решение (3). Для упрощения мы ограничимся в дальнейшем первой частью этого решения.

Таким образом полученный нами выше результат показывает, что из максвелловских уравнений вытекает возможность распространения в свободном эфире возмущения, передающегося в виде плоских волн со скоростью c . Такие электромагнитные волны были впервые обнаружены в знаменитых опытах Герца. Эти опыты доказали, что вызванное быстропеременным током в проводнике электромагнитное состояние распространяется в окружающем диэлектрике с конечной скоростью. Так как в опытах Герца это состояние было простым гармоническим колебанием, то в этом частном случае решение уравнения (2) имеет вид:

$$A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) + \alpha \right]. \quad (4)$$

Здесь λ обозначает длину электромагнитной волны. Скорость распространения c удалось в дальнейшем определить из измерения длины

волны и числа колебаний. При этом был получен результат, совпадающий с предсказанным максвелловской теорией. Как мы видели в гл. I, коэффициент c равняется отношению электромагнитной единицы заряда к электростатической и имеет размерность скорости. Числовое его значение равно $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек и совпадает со скоростью света в пустоте. Это обстоятельство позволило Максвеллу отождествить свет с распространяющимся электромагнитным возмущением. Согласно этой теории отличие световой волны от волны Герца только количественное и состоит в том, что длина световой волны значительно меньше, чем длина волны Герца.

В электромагнитной теории света световым вектором $\vec{\varphi}$, т. е. величиной, распространяющейся волнообразно, являются векторы электрического и магнитного полей. Ограничиваясь попрежнему плоской волной, рассмотрим подробнее этот процесс.

Так как при наших предположениях все производные по x и по y равны нулю, то из равенства:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \dot{E}_z$$

следует, что

$$\dot{E}_z = 0,$$

а из

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

вытекает, что

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Аналогично получаем:

$$\dot{H}_z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Величины E_z и H_z остаются, следовательно, постоянными во всех точках пространства и в любой момент времени. Если мы интересуемся только распространением нарушения равновесия (возмущения), то эти постоянные значения E_z и H_z мы можем положить равными нулю. Таким образом независимо от того, примем ли мы в качестве светового вектора электрический или магнитный вектор поля, мы в обоих случаях приходим к заключению, что этот вектор перпендикулярен к направлению распространения волны. Этот факт мы выражаем, говоря, что в свете мы имеем дело с поперечными волнами.

Положив $E_z = 0$ и $H_z = 0$, мы еще упростим наши уравнения и получим:

$$\left. \begin{aligned} c \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \dot{E}_y, & c \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \dot{H}_x, \\ -c \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \dot{E}_x, & -c \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \dot{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Так как два верхних и два нижних уравнения в этой системе совершенно независимы друг от друга, то мы можем рассматривать это состояние как суперпозицию следующих двух процессов.

Первый из этих процессов определяется равенствами $E_x = 0$ и $H_y = 0$, причем соотношения между E_y и H_x заданы верхней парой уравнений. Отсюда следует, что в этом процессе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Второй процесс определен тем, что $E_y = 0$ и $H_x = 0$, а соотношение между E_x и H_y задано нижними уравнениями системы (5). Отсюда получаются еще два уравнения, вполне аналогичные (6). Каждый из этих двух процессов, при которых световой вектор всегда и повсюду параллелен определенной плоскости, мы называем плоской и поляризованной волной. Полученный выше результат делает ясным, почему любой пучок естественного света мы всегда можем рассматривать как суперпозицию двух пучков, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Световые лучи совпадают с нормальными к фронту волны и имеют, согласно сказанному в прошлой главе, электромагнитное значение. Как мы видели, вектор Пойнтинга, представляющий вектор потока энергии, всегда перпендикулярен как к электрическому, так и к магнитному векторам поля.

Таким образом световой луч совпадает повсюду по направлению с этим вектором, и мы можем рассматривать световые лучи как направления, по которым течет электромагнитная энергия.

§ 2. Изотропные диэлектрики. Если мы хотим исследовать распространение электромагнитного возмущения, в частности света, в изотропном однородном диэлектрике, то нам достаточно изменить только последнее из наших основных уравнений. Вместо $\mathbf{C} = \mathbf{E}$ нужно будет в этом случае написать $\mathbf{C} = \epsilon \mathbf{E}$, где ϵ обозначает диэлектрический коэффициент рассматриваемой среды. Уравнение (1) переходит благодаря этому в

$$\Delta E_x = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Аналогично вместо (5) и (6) получаем:

$$\left. \begin{aligned} c \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \epsilon \dot{E}_y, & c \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \dot{H}_x, \\ -c \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon \dot{E}_x, & -c \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \dot{H}_y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (9)$$

и соответствующие уравнения для H_y и E_x .

Явление распространения вполне аналогично рассмотренному выше распространению в свободном эфире, но происходит теперь со ско-

ростью, равной $\frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$. Выполнив подсчет для магнитного вектора, мы получим тот же результат. Отношение скорости распространения в свободном эфире к скорости распространения в данной среде легко может быть определено оптически, так как это отношение равно показателю преломления данной среды.

Согласно излагаемой теории, этот показатель преломления должен для любого диэлектрика равняться квадратному корню из его диэлектрического коэффициента. Это предсказание теории вообще не оправдывается опытом, так как показатель преломления зависит от длины волны. Только для сред, в которых эта зависимость очень мала (в особенности это относится к газам), мы получаем удовлетворительное согласие между значениями диэлектрического коэффициента и квадрата показателя преломления.

§ 3. Отражение и преломление. Чтобы избежать только что упомянутой трудности, мы, далее, ограничимся рассмотрением монохроматического света. Рассмотрим явления, происходящие при переходе световой волны из одной среды в другую. При этом, конечно, должны выполняться граничные условия, указанные в гл. I, § 12.

Представим себе две среды, которые мы будем различать при помощи индексов 1 и 2. Пусть поверхность их соприкосновения есть плоскость и пусть свет падает в первой среде на эту поверхность раздела под углом φ по отношению к нормали.

Расположим ось Y в плоскости раздела перпендикулярно к плоскости проходящей через направление луча, и нормаль — к поверхности раздела (плоскость падения), и будем отсчитывать угол φ от OZ к OX , где O есть точка, в которой световой луч пересекает поверхность раздела. Чтобы найти уравнения, изображающие падающий свет, мы введем сначала новую ось Z' , расположенную вдоль падающего луча в направлении его распространения, и новую ось X' , расположенную перпендикулярно к плоскости YOZ' .

Как уже сказано, мы будем считать падающий свет монохроматическим и, кроме того, поляризованным. Плоскость поляризации может при этом быть произвольно ориентирована по отношению к плоскости падения. В этом случае уравнения падающей волны будут:

$$E_{ey} = A_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(z' - \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} t \right),$$

$$E_{ex} = B_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(z' - \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} t \right).$$

Индекс e обозначает величины, относящиеся к падающему свету.

При помощи уравнений (8) мы получаем отсюда:

$$H_{ex'} = -A_e \sqrt{\epsilon_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(z' - \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} t \right),$$

$$H_{ey'} = B_e \sqrt{\epsilon_1} \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(z' - \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} t \right).$$

Переходя к прежним осям X , Y , Z , мы получим из этих уравнений

$$E_{ex} = B_e \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi + z \cos \varphi - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$E_{ey} = A_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi + z \cos \varphi - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$E_{ez} = -B_e \sin \varphi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi + z \cos \varphi - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right)$$

$$H_{ex} = -A_e V \epsilon_1 \cos \varphi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi + z \cos \varphi - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$H_{ey} = B_e V \epsilon_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi + z \cos \varphi - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$H_{ez} = A_e V \epsilon_1 \sin \varphi \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi + z \cos \varphi - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right).$$

В первой среде мы имеем еще отраженный свет (относящиеся к нему величины мы обозначим индексом r). Обозначим угол, образованный отраженным лучом с нормалью к поверхности раздела, буквой φ_1 , тогда уравнения для отраженного света будут:

$$E_{rx} = B_r \cos \varphi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$E_{ry} = A_r \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$E_{rz} = -B_r \sin \varphi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right)$$

$$H_{rx} = -A_r V \epsilon_1 \cos \varphi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$H_{ry} = -B_r V \epsilon_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right),$$

$$H_{rz} = A_r V \epsilon_1 \sin \varphi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - \frac{c}{V \epsilon_1} t \right).$$

Во второй среде мы имеем только преломленный луч (индекс d). Обозначив угол, образованный им с нормалью к поверхности раздела, через ϑ , мы получим:

$$E_{dx} = B_d \cos \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{V \epsilon_2} t \right),$$

$$E_{dy} = A_d \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{V \epsilon_2} t \right),$$

$$E_{dz} = -B_d \sin \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{V \epsilon_2} t \right)$$

и

$$\begin{aligned}
 H_{dx} &= -A_d \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right), \\
 H_{dy} &= B_d \sqrt{\varepsilon_2} \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right), \\
 H_{dz} &= A_d \sqrt{\varepsilon_2} \sin \vartheta \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta + z \cos \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right).
 \end{aligned}$$

Согласно граничным условиям для $z=0$ и любого x и t должно быть:

$$\left. \begin{aligned}
 E_{ex} + E_{rx} &= E_{dx}, & E_{ey} + E_{ry} &= E_{dy}, \\
 H_{ex} + H_{rx} &= H_{dx}, & H_{ey} + H_{ry} &= H_{dy}.
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Рассмотрим сначала одно из этих уравнений, например второе. В развернутом виде оно имеет вид:

$$\begin{aligned}
 A_e \cos \frac{2\pi}{\lambda_e} \left(x \sin \varphi - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right) + A_r \cos \frac{2\pi}{\lambda_r} \left(x \sin \varphi_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} t \right) = \\
 = A_d \cos \frac{2\pi}{\lambda_d} \left(x \sin \vartheta - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right).
 \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы это уравнение выполнялось для любого t , должно быть:

$$\lambda_e \sqrt{\varepsilon_1} = \lambda_r \sqrt{\varepsilon_1} = \lambda_d \sqrt{\varepsilon_2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_e = \lambda_r \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (12)$$

Таким образом длины волн падающего и отраженного лучей одинаковы. Длины же волн падающего и преломленного лучей относятся как скорости распространения в рассматриваемых двух средах.

Так как равенства (11) должны выполняться и для любого x , то сверх того должно быть

$$\sin \varphi = \sin \varphi_1 = \frac{\lambda_e}{\lambda_d} \sin \vartheta. \quad (13)$$

Из первого условия следует, что (φ не может равняться φ_1), $\varphi_1 = \pi - \varphi$. Это известный закон отражения. Второе условие выражает закон преломления Снеллуса:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Те же результаты мы могли бы получить из любого из трех остальных равенств (10).

Из этих равенств, принимая во внимание, что $\cos \varphi_1 = -\cos \varphi$, следует

$$\begin{aligned}
 B_e \cos \varphi - B_r \cos \varphi &= B_d \cos \vartheta, \\
 -A_e \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi + A_r \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi &= -A_d \sqrt{\varepsilon_2} \cos \vartheta, \\
 A_e + A_r &= A_d, \\
 B_e \sqrt{\varepsilon_1} + B_r \sqrt{\varepsilon_1} &= B_d \sqrt{\varepsilon_2}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} A_r \left(\cos \varphi + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \vartheta \right) &= A_e \left(\cos \varphi - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \vartheta \right), \\ A_d \left(\cos \varphi + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \vartheta \right) &= 2A_e \cos \varphi, \\ B_r \left(\cos \vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \varphi \right) &= B_e \left(-\cos \vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \varphi \right), \\ B_d \left(\cos \vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \varphi \right) &= 2B_e \cos \varphi. \end{aligned}$$

Приним во внимание, что, согласно (12) и (13),

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta},$$

мы можем привести эти уравнения к виду:

$$\left. \begin{aligned} A_r \sin (\vartheta + \varphi) &= A_e \sin (\vartheta - \varphi), \\ A_d \sin (\vartheta + \varphi) &= 2A_e \sin \vartheta \cos \varphi, \\ B_r \operatorname{tg} (\vartheta + \varphi) &= -B_e \operatorname{tg} (\vartheta - \varphi), \\ B_d \sin (\vartheta + \varphi) \cos (\vartheta - \varphi) &= 2B_e \sin \vartheta \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Это — формулы Френеля, дающие отношения амплитуд отраженной и преломленной волн к амплитуде падающей волны.

В вышеприведенном выводе мы не пользовались условием непрерывности нормальных составляющих $\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}$, которые в этом случае означают непрерывность нормальных компонент $\dot{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{H}$. Легко убедиться, что полученные результаты удовлетворяют и этим условиям.

Действительно, при помощи основных уравнений легко убедиться, что эти условия не дают ничего нового.

Пусть s будет замкнутая кривая, лежащая на поверхности соприкосновения двух сред, и пусть s_1 и s_2 — две такие же кривые, только перемещенные на бесконечно малую величину в направлении положительной и отрицательной нормалей к поверхности раздела. Из непрерывности тангенциальной составляющей E следует, что интегралы $\int E_s ds$, взятые вдоль s_1 и вдоль s_2 , имеют одинаковые значения. На основании второго максвелловского уравнения отсюда следует, что значения $\int \dot{B}_n dz$, взятые по поверхностям, ограниченными контурами s_1 и s_2 , одинаковы, а это значит, что $\dot{B}_n$ и B_n непрерывны. Переход к B_n законен, так как мы приняли, что B_n является гармонической функцией времени без постоянной составляющей.

Аналогичным образом легко убедиться, что из непрерывности тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля следует непрерывность C_n .

В заключение укажем еще на то, что законы распространения света в кристаллах получаются, если вместо соотношения $C = \varepsilon E$ взять уравнения (18') § 8 гл. 1, причем попрежнему $\dot{C} = D$.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анизотропные среды 57, 59.
 Анод 121.
 Био и Савар (Biot, Savart) 44.
 Больцман (Boltzmann) 100.
 Взаимная индукция 131.
 Вектор 7.
 Векторные линии 19.
 Векторные произведения 8.
 Вектор-потенциал 47.
 Вибратор Герца 140.
 Вихрь вектора 25.
 " вектора-потенциала 47.
 " напряженности магнитного поля 48.
 " напряженности электрического поля 61.
 Влияние 82.
 Восприимчивость 56.
 Гаусс (Gauss) 14.
 Гейтель (von Geitel) 41.
 Герц (Hertz) 67, 140, 163.
 Градиент 24.
 Грин (Green) 30.
 Гетчинсон (Hutchinson) 41.
 Даниель (Daniell) 120.
 Джауль (Joule) 114.
 Диамагнитные свойства 61.
 Дивергенция 17.
 Диэлектрическое притяжение 100.
 Диэлектрическая постоянная 59.
 Емкость 71.
 Железный сердечник в соленоиде 150.
 Закон взаимности в электростатике 104.
 Закон взаимности в сети проводников тока 113.
 Закон преломления 168.
 Заряд конденсатора 139.
 Изотропные среды 56, 59, 165.
 Инверсия 84.
 Индукторий 151.
 Индукция при движении проводника 152.
 Интеграл линейный 12.
 " по поверхности 13.
 " объемный 14.
 Катод 121.
 Катушка кольцеобразная 150.
 " прямая 147.
 Кельвин (Kelvin) 84, 140.
 Кирхгоф (Kirchhoff) 84, 111, 137.
 Колебания 144, 145.
 Конденсатор плоский 74.
 " шаровой (сферический) 73.
 " эллипсоидальный 76.
 Коэффициент взаимной индукции 132.
 Коэффициент самоиндукции катушки 128, 147, 150.
 Кремье (Crémieux) 41.
 Кулон (Coulomb) 61.
 Лаплас (Laplace) 28.
 Магнитный двойной слой 43.
 " гистерезис 57.
 " потенциал 43.
 Магнитная индукция 35.
 " проницаемость 57.
 Максвелла первое уравнение 50, 67.
 " второе уравнение 61, 67.
 Монохроматический свет 166.
 Намагничивание 53.
 Напряженность магнитного поля 41, 42, 51.
 Напряженность электрического поля 57.
 Нобили (Nobili) 126.
 Ньютон (Newton) 29.
 Ом (Ohm) 108.
 Основные уравнения 67.
 Остаточный магнетизм 57.
 Открытая магнитная цепь 150.
 Отражение 166.
 Пара сил 9.
 Парамагнетизм 56.
 Пельтье (Peltier) 119.
 Переменный ток 130, 143.
 Плоскость падения 166.
 Пойнтинг (Poynting) 159.
 Поляризованный свет 165.
 Пондеромоторные силы 91.
 Поперечные волны 164.
 Постоянный магнит 57.
 Потенциальный вектор 24.
 Потенциал вектора 24.
 " магнитный 43.
 " ньютонский 29.
 " электрический 70.
 Поток энергии 159.
 Преломление света 166.
 Проводимость удельная 106, 125.
 Пуассон (Poisson) 36, 83.
 Ровланд (Rowland) 41.
 Савар (Savart) 44.

Самондукция 127.
 Световой вектор 164.
 Сердечник (соленоида) 150.
 Скалярная величина 7.
 Скалярное произведение 8.
 Скачок потенциала (на месте контакта) 108.
 Смещение 41.
 Соленоид кольцеобразный 150.
 " прямой 147.
 Соленоидальный вектор 20.
 Сопротивление 109.
 " удельное 58, 105.
 Стокс (Stokes) 27.
 Суперпозиция 72.
 Тепловое действие 114.
 Томсон (Thomson) 119.
 Ток смещения 41.
 Трансатлантический кабель 111.
 Уитстон (Wheatstone) 112, 137.
 Фарадей (Faraday) 21, 50, 127.
 Ферромагнетизм 56.
 Френель (Fresnel) 169.
 Фронт волны 163.
 Ханкель (Hankel) 94.
 Хевизайд (Heaviside) 67.

Частота собственных колебаний при
 разряде конденсатора 140.
 Шарообразный проводник 72.
 Эдлунд (Edlund) 136.
 Эквипотенциальные поверхности 25.
 Экстратоки 129.
 Электрические изображения 80.
 Электрические колебания 140.
 Электрический ток 40.
 " потенциал 70.
 Электрод 122.
 Электродинамические силы 154.
 Электромагнитные единицы 66.
 Электромагнитная теория света 162.
 Электродвижущая сила 61, 106, 109.
 Электростатические единицы 66.
 Эллипсоидальный конденсатор 76.
 Эллиптический диск 80.
 Энергия (общие уравнения) 155.
 Энергия магнитного поля 149, 159.
 " постоянного тока 119.
 " соленоида 149.
 " (теоремы о минимуме) 91.
 Энергия электрического поля 90, 158.
 Эрстед (Oersted) 41.



Редакционную работу по этой книге провел Ф. Ф. Волькенштейн. Издание оформила В. Ф. Зазульская. Корректуру держала Н. А. Демина. Наблюдала за выпуском М. Е. Богданов. Рукопись дана в производство 19/VI 1932 г. Листы подписаны к печати 17/II 1933 г., книга вышла в свет 3 июня 1933 г. в количестве 4000 экз., на бумаге формата 62 X 94/16, печатных знаков в листе 49 920, листов 109 1/4. Заказ № 2183. ГТТИ 475. Уполномоченный Главлита В-45023.

1-я „Образцовая“ типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига“, Москва, Валовая, 28.