

532.5.

X-19

И.Г. Ханович

# ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

~~1361~~

ОИТИ 1986

X.192

Доцент И. Г. ХАНОВИЧ

# ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И СОПРОТИВЛЕНИЕ

Под научной редакцией  
проф. Л. Г. Лойцянского

ИНВ. Р. 5263

Цена 4 р., пер. 1 р.

1962 г.

010177

РЕПУБЛИКАНСКИЙ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
№ 361  
БИБЛИОТЕКА

ПЕРЕУЧЕТ 1980-82



РЕСПУБЛИКАНСКАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
БИБЛИОТЕКА

ОИТИ НКТП СССР

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ЛЕНИНГРАД

1936

МОСКВА

ПЕРЕУЧЕТ 1980 г.

## АННОТАЦИЯ

Книга доцента И. Г. Хановича представляет собой единственную научную монографию, с большой полнотой и ясностью излагающую современное состояние учения о вихревом сопротивлении и поверхностном трении.

Здесь впервые на русском языке можно прочесть подробное и критическое изложение замечательных работ Кармана, Прандтля, Никурадзе, Миллера, Милликена и др., проведенное автором в свете новейших теоретических и экспериментальных исследований.

Оригинальная работа И. Г. Хановича, относящаяся к изучению влияния относительного удлинения профиля на лобовое сопротивление, выработке приближенных методов отыскания мест отрыва струй и мн. др., является отличной иллюстрацией тех больших возможностей, которые современное состояние науки о трении предоставляет практику гидроаэродинамику.

Книга доцента И. Г. Хановича заинтересует широкие слои работников различных областей техники (кораблестроения, авио-дирижаблестроения, теплотехников и гидротехников), но в первую очередь она предназначена для работников советского судостроения, на задачах которого на протяжении книги иллюстрируется современное состояние вопроса.

Книга написана автором на материале, полученном им в процессе работы в Научно-исследовательском институте военного кораблестроения — НИВК.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В области гидро-аэродинамики историческая пропасть между гидравликой и гидродинамикой, прикладной аэродинамикой и теоретической аэродинамикой за последнее время в значительной степени начинает исчезать: гидротехники начинают широко пользоваться учением о турбулентном перемешивании, аэродинамики рассчитывают сопротивление хорошо обтекаемых форм по теории пограничного слоя, от них не отстают и кораблестроители.

В этом крупном сдвиге, характерном для первого тридцатипятилетия нашего века, руководящую роль играют два мировых ученых, без преувеличений создавших всю современную гидро-аэро-динамику — Прандтль и Карман.

Теория пограничного слоя (ламинарного и турбулентного) и полумпирические теории турбулентности, целиком созданные Прандтлем и Карманом и подтвержденные экспериментально руководимыми ими лабораториями, служат двумя прочными основаниями расчета сил сопротивления хорошо обтекаемых дирижабельных, корабельных и самолетных форм и вместе с теорией поддерживающей силы Жуковского — Чаплыгина — Прандтля являются наиболее важными завоеваниями теоретической гидро-аэро-динамики, причем такими завоеваниями, которые дали прямые практические результаты.

К сожалению, у нас в Союзе последние теории еще недостаточно популярны не только среди конструкторов и расчетчиков воздушных и морских кораблей, но даже и научные работники соответствующих исследовательских институтов мало восприняли эти руководящие направления и мало применяют их в своей работе.

На долю доцента И. Г. Хановича выпала трудная и почетная обязанность одним из первых заняться популяризацией и пропагандой идей Прандтля — Кармана среди работников нашего кораблестроения.

Вместо обычных в таких случаях методов пропаганды „словом“, заключающихся в составлении подробных обзоров теорий, И. Г. Ханович встал на путь пропаганды „делом“; он дал прекрасный пример законченного исследования конкретного объекта — двугольного профиля, схематически отображающего корабельную форму. На этом примере И. Г. Ханович прекрасно иллюстрирует все возможности применения современных идей теоретической гидро-аэро-динамики, причем полученные им результаты не только дают полный расчет сопротивления данной формы, но позволяют и сделать ряд весьма общих выводов,

относящихся, главным образом, к выяснению влияния продольной кривизны на сопротивление хорошо обтекаемой формы.

Автор излагает в весьма сжатой, но вместе с тем достаточно популярной и наглядной форме новейшие работы по сопротивлению (этому посвящены первые главы книги), в заключение книги излагает новые работы последних лет, еще не ставшие предметом обычных приложений; но центральным местом монографии И. Г. Хановича все же остается его оригинальное исследование по двугольному профилю.

Можно с уверенностью сказать, что книга И. Г. Хановича получит широкое распространение как среди работников кораблестроения, так и среди работников авио- и дирижаблестроения, очень полезна она будет также и для гидротехников и теплотехников; — для последних теория поверхностного трения важна как основание для расчета теплоотдачи, а подробно разбираемая доцентом И. Г. Хановичем двугольная цилиндрическая форма заинтересует их как одна из конструктивно удобных форм удобообтекаемых теплоотдающих труб.

И. Г. Ханович, насколько нам известно, предполагает вслед за этой книгой, посвященной теории и расчету пограничного слоя и сопротивлению, выпустить следующую, содержащую экспериментальные работы в этой области, а также и изложение наиболее интересных современных методов физического эксперимента. Как настоящую, так и только что упомянутую следующую книгу нужно приветствовать как первые шаги на пути к освоению у нас в Союзе методов современной физической гидроаэродинамики.

Проф. Л. Г. Лойцянский

Ленинград  
25 Декабря 1935 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Развитие вопросов, связанных с изучением одного из основных мореходных качеств корабля — ходкости, идет по пути, предначертанному в 1871 году В. Фрудом и заключающемуся в разделении полного сопротивления на отдельные составляющие, определяемые одни — силами тяжести (волновое сопротивление), другие — силами вязкости (трение и вихревое сопротивление).

Принятие такого принципа независимости отдельных составляющих сопротивления обеспечило широкое развитие теории потенциального потока, приведшее в вопросах кораблестроения к блестящему решению Мичелля, многократно подтвержденному для быстроходных острых судов экспериментальными работами различных исследователей (за границей — Вейнблум, Виглей и др., в Союзе — НИВК, НИСС). Тот же принцип положен в основу метода пересчета результатов испытания моделей на натуральный корабль во всех опытных бассейнах мира.

Если в области волнового сопротивления теоретические и экспериментальные работы уже сейчас дают богатый по объему и содержанию материал для решения практических задач гидродинамики, то изучение вопросов трения и вихревого сопротивления в условиях, специфичных для кораблестроительных форм, находится в несомненно менее благополучном положении и представляет широкое поле деятельности для научно-исследовательской мысли.

Вряд ли будет ошибочным заявление о том, что современное состояние этого цикла знаний обязано в основном широкому развитию авиации и воздухоплавания, на решение задач которых и были направлены (в значительной мере, направлены и сейчас) усилия основоположников современной теории вязкой жидкости — Прандтля и Кармана и руководимых ими лабораторий.

Критическому изложению результатов этих исследований посвящен ряд глав настоящего труда.

Из оригинальных работ автора в книгу включены исследования по определению реакции вязкой жидкости на движение в ней схематической модели корабля (двуугольника), доведенные до результатов, позволивших оценить влияние кривизны профиля на трение и вихревое сопротивление.

Здесь же читатель найдет приближенный метод определения места отрыва пограничного слоя, разработанный совместно с автором доцентом Н. Н. Крыловым и позволяющий в весьма короткий срок получить необходимые результаты с практически достаточной степенью точности.

В связи со все большим интересом, проявляемым кораблестроителями к вопросам физической аэро- и гидродинамики, мы предполагаем вслед за этой книгой подготовить к печати вторую ее часть, посвященную экспериментальным работам и методике физического эксперимента в пограничном слое в воде и воздухе.

В нее же мы предполагаем включить результаты первых исследований, проводимых автором в Институте военного кораблестроения УМС по измерению поля скоростей в пограничном слое на корабле и модели.

Мы приносим исключительную благодарность и признательность проф. Льву Герасимовичу Лойцяискому, взявшему на себя труд направить нашу работу путем консультации и последующего его редактирования.

Доцент И. Г. Ханович

Ленинград  
I. XII—1965 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Различные проблемы гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости приводятся при дополнительном задании граничных условий, специфичных для каждой задачи, к совместному решению уравнений Навье-Стокса и уравнения непрерывности, которые в декартовой системе прямоугольных координат могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

где  $u, v, w$  — соответственно проекции скорости частицы жидкости на оси  $x, y, z$ ;

$t$  — время;

$X, Y, Z$  — проекции объемной силы, отнесенной к единице массы на одноименные оси координат;

$p$  — среднее давление в данной точке жидкости, равное среднему арифметическому из нормальных напряжений, приложенных к 3 взаимноперпендикулярным площадкам, проведенным через эту точку, не зависящее от ориентации площадок в пространстве;

$\rho$  — плотность жидкости;

$\nu$  — кинематический коэффициент вязкости  $= \frac{\mu}{\rho}$ ;

$\mu$  — динамический



В случае внешней задачи обтекания тела равномерным потоком обычно задается скорость набегающего потока на бесконечности, и требуется удовлетворение условий равенства нулю скоростей жидкости в точках на поверхности тела.

Задача считается решенной, если при заданном поле внешних сил

$$X = X(x, y, z, t) \quad (5)$$

$$Y = Y(x, y, z, t) \quad (6)$$

$$Z = Z(x, y, z, t) \quad (7)$$

и определенных значениях физических постоянных жидкости:  $\rho$  и  $\nu$  указанная выше система 4 уравнений приводит к искомому распределению скоростей и давлений:

$$u = u(x, y, z, t) \quad (8)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (9)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (10)$$

$$p = p(x, y, z, t), \quad (11)$$

удовлетворяющему граничным условиям.

В такой общей постановке точному решению поддаются только простейшие задачи, и сколько-нибудь сложные вопросы наталкиваются на чисто оперативные трудности, связанные с современным состоянием математического анализа и, в особенности, его основной ветви — теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В связи с этим, усилия гидродинамиков были направлены на отыскание приближенных методов решения, из которых идея Прандтля о пограничном слое, предложенная в 1904 году (L. Prandtl „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung“, Verhandl. d. III. Intern. Math. Kongress, Heidelberg 1904 г.—вторично отпечатано в Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927 г.), оказалась наиболее удачной по плодотворности основанных на ней дальнейших исследований.

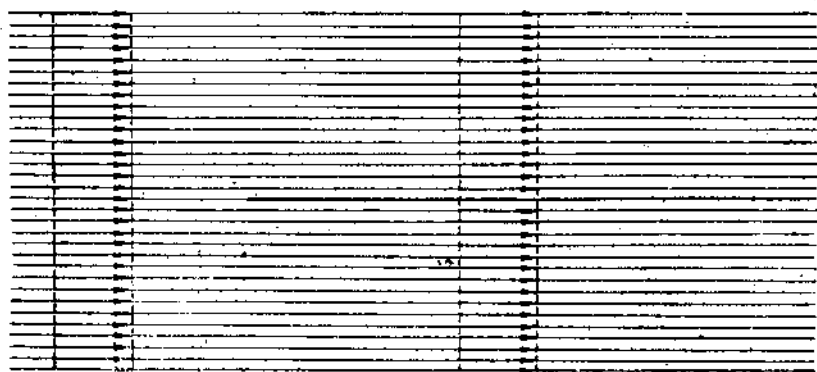
Прандтль делит весь объем жидкости, обтекающей твердое тело на 3 основных области.

1. В непосредственной близости к телу вязкость жидкости проявляется наиболее интенсивно, и скорости жидкости в этом прилегающем к телу слое весьма быстро нарастают от нулевого значения на стенке, физически соответствующего прилипанию частиц жидкости к поверхности тела, до скорости окружающего потока на внешней границе слоя.

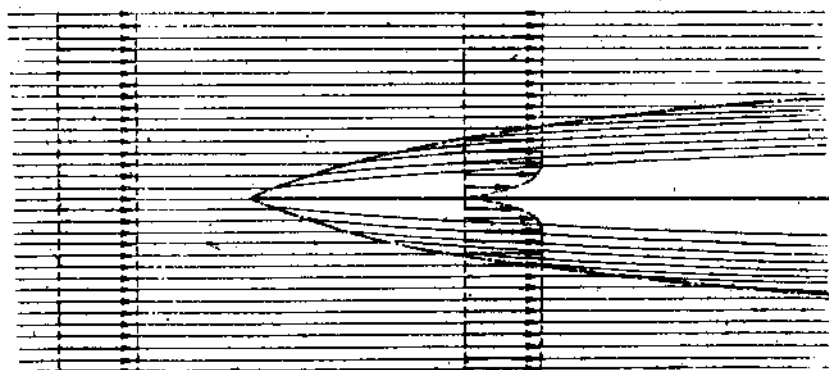
Строго говоря, влияние вязкости асимптотически распространяется по всему объему жидкости, обтекающему тело, и как следствие этого неперемного условия мы имеем непрерывное распределение скоростей во всем объеме. Все же с достаточным приближением, можно, пренебрегая малыми отклонениями скоростей во внешнем потоке, ограничить интенсивное проявление сил вязкости, связанное с резким изменением скорости и соответствующими значительными скоростями деформаций жидкости, небольшой частью потока в непосредственной близости к стенке, именуемой пограничным слоем.

2. За пределами граничного слоя, силы вязкости утрачивают свою роль, и на первое место выдвигаются инерционные силы. Это позволяет с некоторым приближением считать, что внешняя часть потока весьма мало подвержена действию сил вязкости, и применять к ней уравнения „идеальной“ жидкости, получающиеся из уравнений Навье-Стокса после отбрасывания членов:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \text{ и } \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$



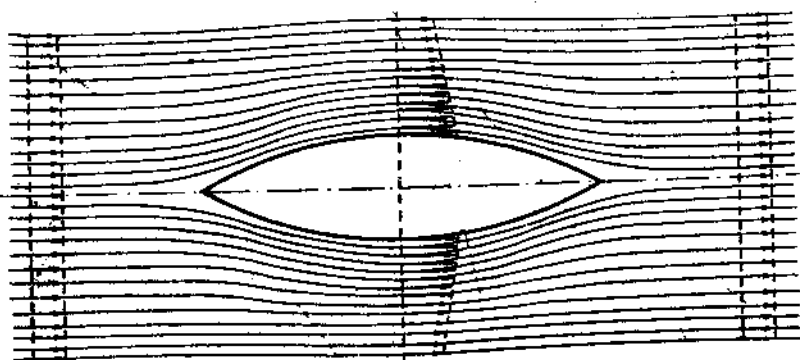
Фиг. 1а. Линии тока и эпюры скоростей при обтекании пластины идеальной жидкостью.



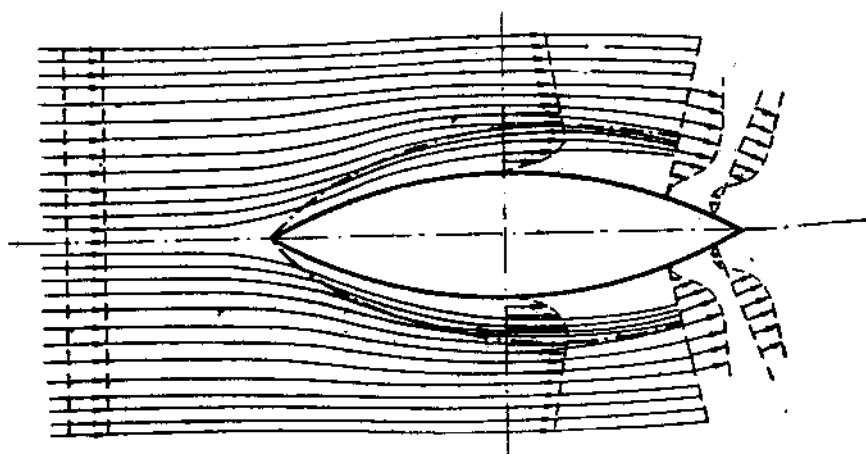
Фиг. 1б. Линии тока и эпюры скоростей при обтекании пластины вязкой жидкостью. Условным пунктиром показана внешняя граница пограничного слоя.

Последнее совпадает с результатом, получаемым при условии наличия потенциала скоростей, и потому внешнюю часть потока называют часто потенциальным потоком. В этой области, наиболее детально изученной так называемой классической гидро- и аэродинамикой, справедливо известное соотношение Бернулли, уравнения Эйлера и др.

3. Наконец, третья область — вихревая — составляет пространство за кормой тела и начинается в местах, где частицы жидкости срываются с поверхности тела и, получив вращательное движение, в виде отдельных вихрей заполняют ее. Эта последняя область имеет особенно важное значение у плохо обтекаемых тел (шар, эллиптический цилиндр, тело вращения с относительно малым отношением длины к ширине и т. п.).



Фиг. 2а. Линии тока и эпюры скоростей при обтекании цилиндрического тела идеальной жидкостью.



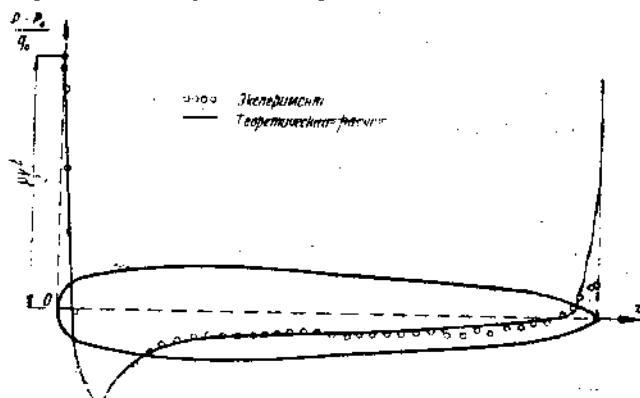
Фиг. 2б. Линии тока и эпюры скоростей при обтекании цилиндрического тела вязкой жидкостью. Условным пунктиром показана внешняя граница пограничного слоя.

Для иллюстрации изложенного на фиг. 1 и 2 представлены картины обтекания пластины и цилиндрического тела плоско-параллельным равномерным потоком, причем фигуры а отвечают случаю обтекания «идеальной» жидкостью, фигуры б представляют действительное обтекание тел несжимаемой вязкой жидкостью.

Сравнение фиг. 1а, 2а и 1б и 2б показывает, что в обоих случаях (в последнем — вплоть до места отрыва, характеризующегося появлением

обратных скоростей) внешний потенциальный поток не искажается наличием вязкости, и линии тока претерпевают изменение практически только в области граничного слоя, отклоняясь в соответствии с распределением скоростей от стенки тела к внешней границе слоя, показанной на чертежах условным пунктиром.

Теория идеальной жидкости в обоих рассмотренных случаях, равно как и при обтекании любого другого вполне погруженного тела дает для реакции жидкости—сопротивления тела—значение, равное нулю. Происхождение этого парадокса, известного в классической гидродинамике под именем парадокса д'Аламбера, с физической стороны может быть уяснено следующим образом.



Фиг. 3. Распределение давлений на поверхности тела вращения.

Сплошная кривая получена расчетом согласно теории идеальной жидкости. Точки отвечают экспериментальным замерам.

$p$  — давление в произвольной точке поверхности тела.

$p_0$  — давление на бесконечности.

$q_0 = p \frac{V^2}{2}$  — скоростной напор набегающего потока.

В идеальной жидкости вследствие отсутствия вязкости воздействие жидкости на тело приводится только к силам, нормальным к его поверхности.

Присутствие тонкой пластины, расположенной вдоль потока, не возмущает его, и поэтому по обеим ее сторонам давление постоянно и равно давлению в потоке.

Естественно, что сопротивление жидкости может проявиться здесь только при наличии касательных сил трения, появление которых связано с перераспределением скоростей внутри пограничного слоя.

При обтекании идеальной жидкостью тела произвольной формы вследствие общего поджатия струй в результате возмущения потока присутствием тела, внутри объема жидкости и на поверхности тела происходит перераспределение давлений, интенсивность которых определяется согласно закону Бернулли полем скоростей в потенциальном потоке.

Теоретическое распределение давлений на поверхности тела вращения дано на фиг. 3.

При этом давления в носовой части соответственно компенсируются давлениями в кормовой оконечности, и равнодействующая всех нормальных сил, приложенных к поверхности тела, оказывается попрежнему равной нулю.

В реальной жидкости последнее условие нарушается отрывом струй, в результате которого давление в кормовой части падает по сравнению с теоретическим распределением (фиг. 3), обуславливая тем самым наличие реакции жидкости на движение тела, называемой сопротивлением формы или вихревым сопротивлением.

Таким образом, в обоих случаях источником сопротивления тела является наличие вязкости, непосредственно (трение) или косвенно (отрыв струй) определяющее реакцию жидкости при движении тела.

Для дальнейшего нам понадобится изучение механизма ламинарного и турбулентного трения, в свою очередь определяющих интенсивность процессов, происходящих внутри граничного слоя.

## ГЛАВА I

### ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Определение ламинарного и турбулентного трения. Осредненная скорость и пульсации. Кажущееся касательное напряжение для осредненного потока. Вывод уравнений Рейнольдса. Корреляция между пульсационными составляющими скорости. Условия перехода ламинарного режима в турбулентный. Путь перемешивания. Коэффициент турбулентного обмена.

Ламинарным называется такое непотенциальное (вихревое) движение жидкости, при котором соседние слои жидкости сдвигаются один относительно другого, вызывая при этом напряжение касательных сил, подчиняющееся закону Ньютона

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} \quad (12)$$

где  $\tau$  — напряжение трения, т. е. сила трения, приходящаяся на единицу поверхности двух перемещающихся друг по другу слоев жидкости;

$\frac{du}{dn}$  — градиент скорости по нормали к поверхности трения;

$\mu$  — динамический коэффициент вязкости, зависящий от температуры и рода жидкости.

Простейшей иллюстрацией такого вида движения может служить течение жидкости в прямой трубе постоянного сечения, осуществляемое при малых скоростях движения частиц, достаточно малых размерах поперечного сечения и достаточно большой вязкости жидкости \*\*.

В этом случае жидкость течет струями, параллельными прямой оси трубы, причем слои, лежащие ближе к стенке, в силу ее тормозящего эффекта, будут иметь меньшие скорости, чем центральные.

\* Здесь предполагается малость кривизны обтекаемой стенки. В более общем случае

$$\tau = \mu \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \quad (12a)$$

\*\* Смысл указанных ограничений будет уяснен из дальнейшего.

Как это следует из известного решения Пуазейля, закон распределения скоростей в этом случае, показанный на фиг. 4, параболический

$$u = U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2, \quad (13)$$

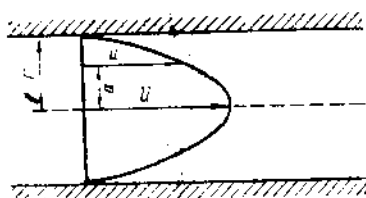
где  $U$  — максимальная скорость на оси трубы;

$r$  — радиус трубы;

$u$  — скорость в точке, удаленной от оси на расстоянии  $a$ .

Другой тип движения — турбулентный — возникающий вследствие того, что в жидкости образуется большое количество отдельных мелких вихрей различной интенсивности, непрерывно меняющих свое положение, — сопровождается переносом масс жидкости между соседними ее слоями (перемешивание).

Беспорядочность и сложность этого движения привела Озеена к следующему определению турбулентного движения, высказанному им в докладе „Проблемы турбулентного движения“ (Труды III Стокгольмского конгресса механиков\*, том I, 1930 г.): „Течение жидкости турбулентно, если оно обладает настолько сложным характером, что нет возможности иметь о нем точное познание, и приходится довольствоваться только лишь знанием среднего движения“.



Фиг. 4. Скоростной профиль при ламинарном движении в трубе (решение Пуазейля).

$U$  — максимальная скорость на оси трубы.

$r$  — радиус трубы.

$u$  — скорость в точке, удаленной от оси трубы на расстояние  $a$ .

В этом по существу схоластическом определении Озеена в неправильном освещении представлен современный подход к изучению турбулентного движения, заключающийся в следующем: компоненты  $u, v$  актуальной (действительной) скорости произвольной частицы жидкости

в направлении осей  $x$  и  $y$  (для простоты рассматриваем плоское движение) удобно представить в виде:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v', \quad (14)$$

где  $\bar{u}, \bar{v}$  — средние значения величин  $u$  и  $v$  за достаточно большой промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} u \cdot dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} v \cdot dt \quad (15)$$

а  $u', v'$  — мгновенные отклонения скоростей от их средних значений.

В таком представлении действительный поток жидкости разбивается на:

1) осредненное по времени движение, характеризующееся полем скоростей  $\bar{u}, \bar{v}$  и определяемое руслом, в котором происходит движение

жидкости (при движении между параллельными стенками поток — прямой, при движении в кольцевой трубе осредненный поток — круговой и т. д.);

2) поле пульсационных скоростей  $u'$ ,  $v'$ , интенсивность которого зависит от степени турбулизации потока, определяемой условиями входа, наличием источников дополнительных возмущений и т. п.

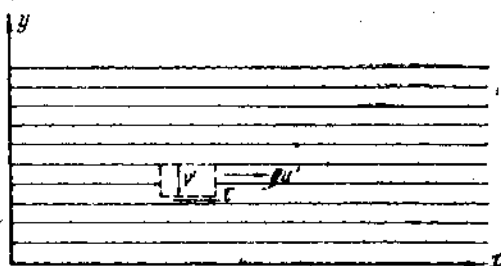
О. Рейнольдс показал, что переносимое в единицу времени через единицу поверхности в результате пульсации количество движения представляет кажущееся касательное напряжение для осредненного потока, определяемое в случае плоскопараллельного движения равенством

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} \quad (16)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости, а черта сверху снова обозначает осредненное по времени значение.

Для доказательства последнего рассмотрим движение жидкости (фиг. 5), осредненный поток которой плоскопараллельный, и направим ось  $x$  в направлении осредненного потока.

В таком случае при принятых выше обозначениях через единичную площадку, перпендикулярную оси  $y$ , в единицу времени проходит жидкий объем равный  $v'$ , причем излишек количества движения в направлении оси  $x$ , уносимый каждой единичной частичкой этого объема, равен  $u'$ .



Фиг. 5. Перенос количества движения в турбулентном потоке.

$\tau$  — касательное напряжение;  $u'$ ,  $v'$  — пульсационные скорости в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Так как обычно касательное напряжение считается положительным, если находящийся в расстоянии  $y$  от стенки слой жидкости ускоряется внешними слоями, то перенос количества движения должен определять положительное трение ( $\tau > 0$ ) в том случае, если частицы жидкости, движущиеся к стенке ( $v' < 0$ ), приносят положительное приращение количества движения ( $u' > 0$ ).

Отсюда и находим соотношение (16).

В общем случае движения жидкости последний результат получается из уравнений Навье-Стокса, если по Рейнольдсу положить

$$\left. \begin{aligned} u &= \overline{u} + u' \\ v &= \overline{v} + v' \\ w &= \overline{w} + w' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и при этом принять следующие основные положения, характеризующие механизм осреднения:

1. Среднее значение пульсационных составляющих равно нулю:

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0 \quad (18)$$



или, что то же, результаты двукратного и однократного осреднения совпадают:

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\overline{\varphi'}} = \overline{\overline{\varphi}} - \overline{\overline{\varphi'}} = \overline{\overline{\varphi}}. \quad (19)$$

2. Среднее значение можно вынести из-под знака осреднения:

$$\overline{\overline{\varphi} \cdot \psi} = \overline{\overline{\varphi}} \cdot \overline{\overline{\psi}}. \quad (20)$$

3. Среднее значение производной (или интеграла) равно производной (интегралу) от среднего значения:

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s} \quad \text{и} \quad \overline{\int \varphi \cdot ds} = \int \overline{\varphi} \cdot ds. \quad (21)$$

Напишем для сокращения записи одно из уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Применив операцию осреднения к последнему уравнению, получим

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \quad (22)$$

или, иначе говоря, осредненный поток удовлетворяет уравнению непрерывности.

Далее, преобразуем трехчлен, стоящий в левой части уравнения (1)

$$\begin{aligned} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (u \cdot w) - \\ - u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

откуда на основании (4)

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (u \cdot w) \quad (23)$$

и уравнение Навье-Стокса перепишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (u \cdot w) = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$



нием  $y$  (фиг. 6). В таком случае, жидкие массы, движущиеся в направлении отрицательных значений  $y$  ( $v' < 0$ ), и следовательно, приходящие из областей с большими скоростями, приносят в слои, движущиеся с меньшей скоростью, положительную составляющую пульсации в направлении движения потока ( $u' > 0$ ). Точно также можно показать, что при  $v' > 0$  имеет место  $u' < 0$ . Вследствие этого следует ожидать

$$u'v' < 0.$$

В теории корреляции соотношение между пульсационными составляющими оценивается множителем корреляции, равным

$$k = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{(\overline{u'^2})} \cdot \sqrt{(\overline{v'^2})}} \quad (29)$$

Фиг. 6. Турбулентный обмен количества движения при наличии градиента скоростей.

Если распределение пульсационных составляющих бессистемно и любые их значения равновозможны, то

$$\overline{u'v'} = 0 \quad (30)$$

в то время, как

$$(\overline{u'^2}) > 0 \quad \text{и} \quad (\overline{v'^2}) > 0 \quad (31)$$

и, следовательно,

$$k = 0. \quad (32)$$

Если обе составляющие пульсационного движения пропорциональны друг другу:

$$u' = Cv', \quad (33)$$

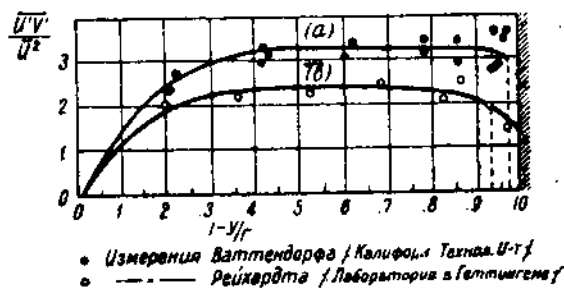
то

$$k = 1. \quad (34)$$

На фиг. 7 представлено изменение коэффициента корреляции \* по сечению прямоугольного канала с отношением сторон 1:18 на основании измерений Ваттендорфа, проведенных с помощью теплового анемометра в Калифорнийском технологическом институте. Там же приведены результаты опытов Рейхардта (лаборатория в Геттингене).

Изложенное выше позволяет, как это было предложено проф. Л. Г. Лойцянским, определить ламинарное и турбулентное движение следующим образом:

Фиг. 7. Изменение коэффициента корреляции  $\frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{(\overline{u'^2})} \sqrt{(\overline{v'^2})}}$  по сечению прямоугольного канала.



\* Составленного по несколько иному типу  $\frac{\overline{u'v'}}{(\overline{u'^2})^2}$ .

Если истинное (актуальное) движение жидкости имеет все линии тока, определяемые руслом (т. е. параллельные стенкам или сходные с руслом, в котором происходит движение), то течение жидкости носит название ламинарного. В противном случае, движение именуется турбулентным.

В соответствии с последним определением здесь удобно изложить опыты Рейнольдса, явившегося в свете исторического развития основоположником теории ламинарного и турбулентного трения.

Если движение жидкости в трубе сделать хорошо видимым с помощью окраски отдельных струек, то при малом диаметре трубы, достаточно большой вязкости жидкости и относительно малой средней скорости потока в установившейся части потока можно наблюдать движение частиц жидкости, при котором окрашенные струйки не размываются и тянутся параллельно друг другу. Такое движение жидкости соответствует нашим представлениям о ламинарном режиме.

При более высоком значении скорости упорядоченное движение потока нарушается, струйки, искривляясь, переплетаются друг с другом и окрашивают равномерно весь поток.

Это свидетельствует о том, что в потоке возникает добавочное перемешивание частиц жидкости, характерное для турбулентного движения, вследствие которого происходит выравнивание отдельных скоростей потока по сечению трубы. На фиг. 8 представлено распределение скоростей



Фиг. 8. Распределение скоростей

- а) при ламинарном режиме,  
б) при турбулентном режиме при одинаковом секундном расходе жидкости.

при ламинарном и турбулентном режиме при одинаковом секундном расходе жидкости, подтверждающее справедливость изложенного выше.

Наблюдения Рейнольдса за поведением окрашенных струй и позднейшие исследования свидетельствуют о том, что критическая скорость, при которой почти внезапно происходит переход от ламинарного (струйчатого) движения к турбулентному (равномерная окраска всей жидкости) зависит от:

- степени вязкости жидкости;
- линейного размера поперечного сечения трубы (диаметра ее);
- величины местного конечного возмущения в жидкости (характер выпускной части — раструба, состояние поверхности трубы и т. п.).

При этом было установлено, что при сохранении условий, определяемых пунктом „в“, переход от ламинарного к турбулентному режиму достаточно точно характеризуется критическим значением числа Рейнольдса

$$Re_{кр} = \frac{v_{кр} d}{\nu}$$

в свою очередь зависящим от условий впуска, наличия возмущений в потоке и т. п.

Именно, последние условия заставляют различать два критических значения  $Re$ : верхнее значение  $Re_{кр}$  и нижнюю границу  $Re_{кр}$ . Пока

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} < Re_{кр}, \quad (35)$$

в жидкости возможно только ламинарное движение, являющееся в этих пределах вполне устойчивым.

Для значений

$$Re > Re_{кр} \quad (36)$$

в трубе возможно только турбулентное движение.

Если же  $Re_{кр} < Re < Re_{кр}$ , то возможны оба режима.

Такая же картина наблюдается в равной степени при изучении движения вблизи иных жестких стенок (пластин, моделей кораблей, дирижаблей и др.).

При этом области чисто ламинарного, смешанного и чисто турбулентного граничного слоя могут занимать различное положение и охватывать различные по величине части длины обтекаемого тела.

Опыты Геберса, Кемпфа, Беккера и др. показывают, что наблюдаемые ими различные значения коэффициентов трения при одних и тех же значениях числа Рейнольдса, представленные на фиг. 9 в виде заштрихованной зоны, являются следствием неустойчивости режима трения, проявляющейся в столь резкой форме в силу различного характера случайных или искусственных возмущений притекающей к телу жидкости.

Фиг. 9. Область коэффициентов относительного сопротивления трения, наблюдаемых Геберсом, Кемпфом, Беккером и другими.

$w$  — наблюдаемые сопротивления  
 $\rho$  — плотность жидкости  
 $S$  — смоченная поверхность  
 $v$  — скорость набегающего потока  
 $l$  — длина тела в направлении потока

Из факторов, успокаивающих турбулентное течение жидкости, можно указать на общезвестное стабилизирующее действие всякой жесткой стенки, проявляющееся во внешней задаче так резко, что независимо от степени турбулентности набегающего потока часть тела, непосредственно следующая за входящей кромкой, всегда омывается ламинарным граничным слоем, протяженность которого по длине тела зависит от числа Рейнольдса и степеней турбулизации внешнего потока.

Для еще более резкого подчеркивания отличительных особенностей турбулентного режима приведем здесь основные идеи Прандтля, позволившие ему количественно оценить интенсивность турбулентного трения.

Как было отмечено выше, основное отличие турбулентного движения от ламинарного заключается в том, что в то время как при ламинарном движении, представляющем собой непрерывное деформационное

движение всей жидкости, интенсивность трения определяется скоростями относительных сдвигов каждой пары соседних взаимодействующих слоев жидкости, турбулентное движение характеризуется резко выраженными индивидуальными движениями отдельных объемов „молей“ конечных размеров, проталкиваемых между остальной жидкостью до тех пор, пока их энергия не ослабеет, и они вновь не смешаются со всей остальной жидкостью.

Не останавливаясь на вопросе о природе этих „молей“, Прандтль предполагает, что на протяжении самостоятельного движения между отдельными слоями жидкости моли сохраняют ту скорость, которую они имели при выходе из некоторого слоя жидкости.

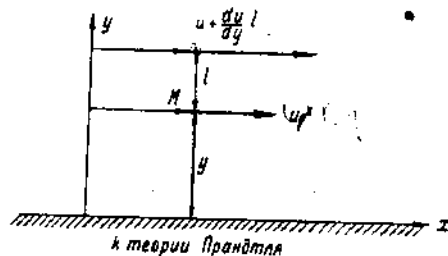
При этом величину пути, описанного молекул в направлении поперек основного осредненного потока вплоть до потери его индивидуальных особенностей, Прандтль называет путем перемешивания и обозначает буквой  $l$ .

Рассмотрим простейший случай плоского движения вдоль бесконечной плоской стенки, при котором скорости осредненного потока параллельны оси  $x$  и являются функцией только ординаты  $y$  (фиг. 10).

$$u = u(y). \quad (37)$$

Скорость моля, перешедшего из слоя с ординатой  $y+l$  в слой, удаленный от стенки на расстояние  $y$ , равна

$$u + \frac{du}{dy} \cdot l.$$



Фиг. 10.

Вызванные молекул пульсационные скорости естественно принять пропорциональными приведенному им в слой возмущению скорости  $\frac{du}{dy} \cdot l$ .

$u$  — скорость частицы жидкости, удаленной от стенки на расстояние  $y$ ,  
 $l$  — путь перемешивания,  
 $u + \frac{du}{dy} \cdot l$  — скорость частицы жидкости, удаленной от стенки на расстояние  $y+l$ .

$$u' \sim l \frac{du}{dy}, \quad v' \sim l \frac{du}{dy}. \quad (38)$$

Отсюда величина касательного напряжения

$$\tau = -\overline{\rho u' v'} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \cdot \frac{du}{dy}. \quad (39)$$

Здесь коэффициент пропорциональности отнесен к величине  $l$ , потерявшей вследствие этого свое первоначальное физическое представление и попрежнему характеризующей путь молярного перемещения с точностью до постоянного множителя; знак — отнесен к величине производной  $\frac{du}{dy}$ , имеющей тот же знак, что и касательное напряжение  $\tau$ .

Если, следуя Бусинеску по аналогии с законом Ньютона для ламинарного трения, положить и при турбулентном течении жидкости

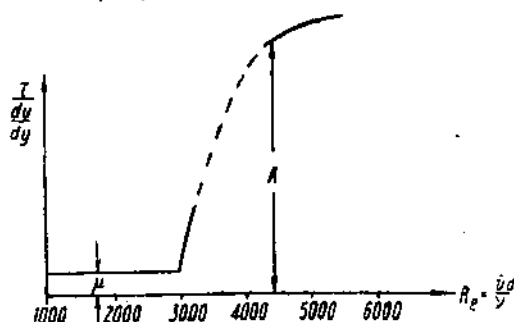
$$\tau = A \cdot \frac{du}{dy}, \quad (40)$$

то величина  $A$  — аналог динамического коэффициента вязкости — в отличие от  $\mu$  будет иметь в различных местах потока различные значения, определяемые равенством:

$$A = \rho \cdot l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|. \quad (41)$$

$A$  носит название коэффициента турбулентного обмена и (в среднем) в несколько сот раз превышает значение  $\mu$ .

На фиг. 11 по оси ординат отложены величины



Фиг. 11. Изменение величины  $\frac{\tau}{du/dy}$  в зависи-

мости от числа Рейнольдса  $\frac{ud}{\nu}$ .

- $\tau$  — напряжение трения на стенке
- $\frac{du}{dy}$  — градиент скорости по нормали (у стенки)
- $u$  — скорость на оси трубы
- $d$  — диаметр трубы
- $\mu$  — динамический коэффициент вязкости
- $\nu$  — кинематический
- $A$  — коэффициент турбулентного обмена

в функции от числа Рейнольдса.

|| При ламинарном движении жидкости

$$\frac{\tau}{du/dy} = \mu \quad (42)$$

сохраняет постоянное значение. При критическом значении  $Re$  следует резкое возрастание ординат кривой и уже при  $Re = 4000$ ,

$$\frac{\tau}{du/dy} = A \approx 10 \mu. \quad (43)$$

Последнее свидетельствует о том, что в чисто турбулентной области потока значение ламинарной вязкости пренебрежимо мало по сравнению с интенсивностью турбулентного трения.

## ГЛАВА II

### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛАМИНАРНОГО И ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнения Прандтля для ламинарного пограничного слоя. Основные свойства ламинарного и турбулентного граничного слоя. Физическая картина отрыва струй при ламинарном и турбулентном граничном слое.

Напишем уравнения Навье-Стокса для случая плоско-параллельного установившегося движения:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (1a)$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2a)$$

наряду с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4a)$$

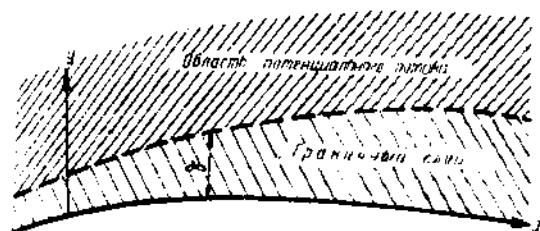
Направим ось  $x$  вдоль поверхности тела, а ось  $y$  перпендикулярно к ней (фиг. 12).

Предполагая толщину пограничного слоя малой и оценив порядок ее величиной  $\delta$ , приступим к систематической относительной оценке порядка всех членов, входящих в уравнения (1a, 2a и 4a).

Величину скорости набегающего потока, давление, продольные размеры тела и другие величины, которые имеют конечные размеры, вообще говоря не зависящие от  $\delta$ , будем условно относить к величинам порядка 1 и писать:

$$x \sim 1 \text{ и т. д.} \quad (44)$$

Величины ординат в пределах граничного слоя меняются от нулевого значения на стенке до размеров  $\delta$  на внешней границе слоя.



Фиг. 12. К выводу уравнений Прандтля.



Таким образом,

$$y \propto \delta. \quad (45)$$

Величина продольной составляющей скорости  $u$  того же порядка, что и скорость набегающего потока, т. е.

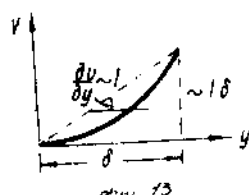
$$u \sim 1. \quad (46)$$

Сопоставление соотношений (44) и (46) приводит к выводу:

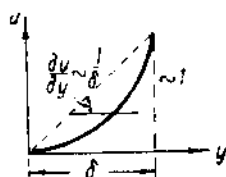
$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1. \quad (47)$$

В таком случае, согласно (4а)

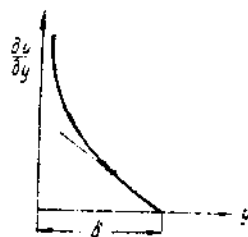
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1. \quad (48)$$



Фиг. 13. К оценке порядка величины скорости  $v$ .



Фиг. 14. К оценке порядка величины  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .



Фиг. 15. К оценке порядка величины  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

Последний результат влечет за собой заключение:

$$v \sim \delta, \quad (49)$$

ибо на границе слоя (фиг. 13)

$$v \propto \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \delta \sim 1 \cdot \delta. \quad (50)$$

Вследствие того, что при  $y = \delta$ ,  $u = U \sim 1$  (фиг. 14), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}. \quad (51)$$

Точно так же найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta. \quad (52)$$

Так как при  $y = \delta$  по определению внешней границы слоя трения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (53)$$

и согласно (51) при  $y = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \quad (51)$$

то (фиг. 15)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}. \quad (54)$$

Точно так же докажем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim 1 \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}. \quad (57)$$

Кроме того, согласно условию о конечных величинах, не зависящих от  $\delta$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim 1. \quad (58)$$

В соответствии с изложенным выше, в уравнении (1a) можно пренебречь членом  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim 1$  по сравнению с весьма большой величиной

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}.$$

Для того чтобы оставшееся выражение имело смысл, необходимо, чтобы порядок  $\gamma \sim \delta^2$ , ибо только в этом случае последний член становится сравнимым со всеми остальными.

Следовательно, толщина слоя трения должна быть порядка

$$\delta \sim \sqrt{\gamma} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (59)$$

где  $Re = \frac{u \cdot l}{\nu}$  — число Рейнольдса, имеющее порядок  $\frac{1}{\gamma}$ .

В свою очередь во втором уравнении можно опустить член  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta$  по сравнению с членом  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}$ , после чего найдем, что все члены второго уравнения, а именно:

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

имеют порядок  $\delta$ .

В таком случае

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \delta \quad (60)$$

или еще более высокой степени малости.

Последний результат означает, что в пределах принятого нами приближения можно считать давление внутри граничного слоя неизменным по направлению нормали к поверхности обтекаемого тела, иначе говоря

давление внутри граничного слоя полностью определяется внешним потоком и равняется давлению на стенке.

Окончательно уравнения движения ламинарного граничного слоя представятся в виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (61)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (63)$$

Изложенный здесь приближенный вывод уравнений принадлежит Прандтлю, причем степень приближения определяется порядком толщины слоя, суждение о котором можно иметь на основе соотношения (59).

Проф. Л. Г. Лойцянскому принадлежит оригинальный вывод уравнений Прандтля, лишенный некоторых недостатков предшествующего изложения\*.

Пусть попрежнему:  $x$  — (криволинейная) координата, направленная вдоль поверхности профиля, а  $y$  — по нормали к ней,  $u$  и  $v$  — проекции скорости на оси  $x$  и  $y$  — соответственно.

Тогда при малой кривизне профиля будем иметь:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (1a)$$

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4a)$$

Введем различные масштабы для измерения длин и проекций скоростей в направлении вдоль и поперек потока:

- $X$  — масштаб длин вдоль профиля;
- $Y$  — " " поперек профиля;
- $U$  — " скоростей  $u$ ;
- $V$  — " скоростей  $v$ ;
- $P$  — " давлений.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cdot X, \\ y &= y_0 \cdot Y \\ u &= u_0 \cdot U \\ v &= v_0 \cdot V \\ p &= p_0 \cdot P, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где  $x_0, y_0, u_0, v_0, p_0$  — безразмерные величины.

\* См. Л. Г. Лойцянский „К теории кризиса сопротивления плохо обтекаемых тел“ Труды ЦАГИ, 1935 год (вып. 237).

Подставив (64) в уравнения (1а, 2а, 4а) перепишем их в следующем виде:

$$\frac{U^2}{X} u_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{UV}{Y} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = - \frac{P}{\rho \cdot X} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \nu \left( \frac{U}{X^2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{U}{Y^2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2} \right); \quad (16)$$

$$\frac{UV}{X} u_0 \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \frac{V^2}{Y} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = - \frac{P}{\rho \cdot Y} \frac{\partial p_0}{\partial y_0} + \nu \left( \frac{V}{X^2} \cdot \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} + \frac{V}{Y^2} \cdot \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} \right); \quad (26)$$

$$\frac{U}{X} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{V}{Y} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0. \quad (46)$$

или после деления обеих частей уравнений на  $\frac{U^2}{X}$ ,  $\frac{UV}{X}$  и  $\frac{U}{X}$  соответственно:

$$u_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{X \cdot V}{U \cdot Y} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = - \frac{P}{\rho U^2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\nu X}{Y^2 U} \left( \frac{Y^2}{X^2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2} \right); \quad (1в)$$

$$u_0 \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \frac{X \cdot V}{U \cdot Y} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = - \frac{P}{\rho U^2} \cdot \frac{UX}{VY} \frac{\partial p_0}{\partial y_0} + \frac{\nu X}{Y^2 U} \left( \frac{Y^2}{X^2} \cdot \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} \right); \quad (2в)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{Y \cdot U} \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0. \quad (4в)$$

Воспользуемся произвольностью введенных нами масштабов и наложим на них такие условия, которые обеспечат одинаковость порядка безразмерных функций и их производных.

Тогда, из (4в)

$$\frac{XV}{YU} = 1,$$

и из (1в)

$$\frac{\nu X}{Y^2 U} = 1; \quad \frac{P}{\rho U^2} = 1. \quad (65)$$

При этом, имея в виду дальнейшие приложения, масштабы  $X$  и  $U$  сохраним попрежнему произвольными, полагая, к примеру,  $X$  равным длине профиля в направлении потока, а  $U$  — скоростью на бесконечности.

В таком случае, введя число Рейнольдса

$$R = \frac{U \cdot X}{\nu}, \quad (66)$$

из (65) находим зависимости:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot X; \quad (67)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot U, \quad (68)$$

определяющие анизотропность длин и скоростей в направлениях  $x$  и  $y$ .

Подставив полученные результаты в уравнения (1в, 2в, 4в), получаем:

$$u_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + v_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}; \quad (1г)$$

$$\frac{1}{R} \left( u_0 \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + v_0 \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y_0} \right) = -\frac{\partial p_0}{\partial y_0} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2}; \quad (2г)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0. \quad (4г)$$

Принятый метод доказательства устраняет необходимость специальной оценки порядка отдельных членов уравнения, так как по самому выбору масштабов  $Y$ ,  $V$  и  $P$  все безразмерные величины, входящие в уравнения, имеют одинаковый порядок.

При этом уравнения Прандтля получаются из (г), как уравнения движения ламинарного пограничного слоя при достаточно больших числах Рейнольдса (строго говоря при  $R = \infty$ ), а именно:

$$u_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + v_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}; \quad (1д)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y_0} = 0; \quad (2д)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 0. \quad (4д)$$

Для получения окончательного результата осталось совершить обратный переход на основе (64) к размерным величинам:

$$\frac{X}{U^2} \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Y}{V \cdot U} v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{X}{P} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Y^2}{U} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (1е)$$

$$\frac{Y}{P} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (2е)$$

$$\frac{X}{U} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Y}{V} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4е)$$

откуда, поделив обе части уравнений соответственно на  $\frac{X}{U^2}$ ,  $\frac{Y}{P}$  и  $\frac{X}{U}$  на основании (65) окончательно находим:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (61)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (63)$$

$$\frac{Y^2 \cdot U^2}{U \cdot X} = \frac{XY \cdot U}{X \cdot Y \cdot K} \cdot K = 1 \cdot \frac{XU}{R} = \nu. \quad (69)$$

$$\frac{Y^2}{X^2} = \frac{1}{R}.$$

Изложенное выше приводит к следующим основным физическим свойствам ламинарного граничного слоя, установление которых настолько просто, что не требует предварительного интегрирования уравнений Прандтля.

1) В очень тонком пограничном слое, в котором скорость изменяется от нулевого значения на поверхности до значений, равного скорости потенциального потока, давление практически не зависит от координаты, перпендикулярной к поверхности, и полностью определяется внешним (потенциальным) потоком.

2) Вязкий отрыв струй может произойти только за точкой минимума давлений.

Под вязким отрывом понимают безинерционный срыв струй, определяемый только силами вязкости.

Механизм такого отрыва заключается в следующем: пусть скорость потенциального потока, начиная с некоторой точки  $M$  на поверхности тела уменьшается в силу каких-либо причин (например, уменьшения поперечных размеров тела). В таком случае давление, связанное (для потенциального потока) со скоростью уравнением Бернулли, начнет возрастать и, следовательно, точка  $M$  будет местом минимума давления.

Наличие градиента давления в направлении противоположном движению жидкости будет затормаживать частицы жидкости в граничном слое и, в первую очередь, коснется частиц вблизи стенки, имеющих сравнительно малую кинетическую энергию.

Вследствие усиливающегося действия давления, возможно возникновение обратного движения частиц жидкости, которое наряду с поперечными составляющими скорости способствует образованию вихрей, срывающихся с поверхности тела.

Место отрыва определяется как граница двух, противоположно направленных течений жидкости:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (70)$$

Сформулированное выше свойство вязкого отрыва вытекает из самого механизма явления, определяемого наличием градиента давления в направлении, противоположном основному потоку.

Для иллюстрации приведем пример конфузора (фиг. 16), в котором, как и следует из доказанного свойства, не наблюдается отрыва струй на всем протяжении его поверхности вследствие того, что место наименьшего давления благодаря форме конфузора отнесено к его концевому сечению.

3) Место отрыва в ламинарном граничном слое не зависит от числа Рейнольдса.

Действительно, условие отрыва в безразмерных величинах может быть записано в виде:

$$\left( \frac{\partial u_0}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} = u'_0(x_0, 0) = 0, \quad (71)$$

что дает для координаты место отрыва

$$x_{0*} = x_*, \quad (72)$$

значение, не зависящее от  $R$ , так как сами уравнения (д), а следовательно, и решение их  $u_0(x_0, y_0)$  не зависят от числа Рейнольдса.

4) Угол отрыва убывает с ростом числа Рейнольдса. Под углом отрыва понимают обычно угол, образованный линией тока  $\psi = \text{const}$ , проходящей через место отрыва, с поверхностью профиля.

Замечая, что

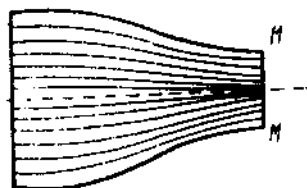
$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0 \quad (73)$$

(в безразмерных величинах) находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0} = - \left(\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}\right)_{y=0} = \left(\frac{v}{u}\right)_{y=0} \quad (74)$$

Для раскрытия последней неопределенности применим многократно правило Лопиталя:

$$\left(\frac{v}{u}\right)_{y=0} = \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{y=0} = - \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{y=0} = - \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right)_{y=0} = \beta_* \quad (75)$$



Фиг. 16. Линии тока при течении жидкости в конфузоре.

Минимум давления (М) — на правом торцевом сечении конфузора.

Заметив, что  $\beta_*$  не зависит от числа Рейнольдса, определим значение  $\text{tg}$  угла наклона линии тока в месте отрыва, возвратившись к размерным величинам  $x$  и  $y$ :

$$\text{tg } \theta_* = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0} = \frac{Y}{X} \beta_* = \frac{\beta_*}{\sqrt{R}} \quad (76)$$

Последнее соотношение наряду с доказательством 4 свойства, свидетельствует о малости угла наклона  $\theta_*$ .

В дальнейшем мы вернемся к непосредственному использованию уравнений Прандтля для ламинарного слоя в целях решения ряда задач практической гидродинамики. Здесь же воспользуемся возможностью сообщить ряд основных сведений о механизме явления отрыва в случае турбулентного граничного слоя.

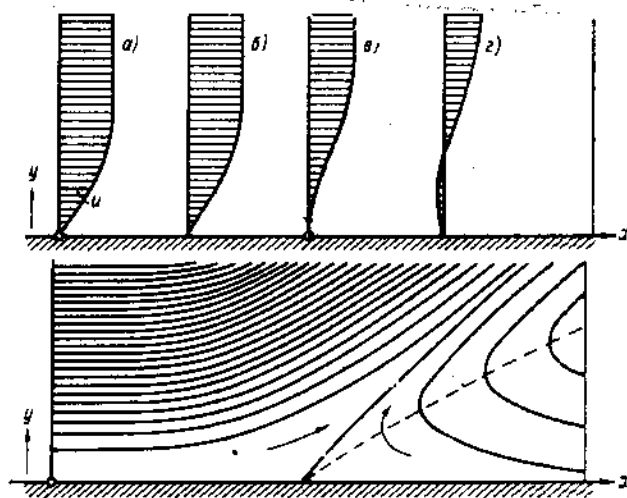
В первую очередь отметим, что согласно существующим воззрениям изложенные выше 1, 2 и 4 свойства присущи в одинаковой мере и турбулентному граничному слою.

5) Специфической особенностью турбулентного потока является более поздний отрыв турбулентного пограничного слоя по сравнению с ламинарным, легко объясняемый на основании соображений Прандтля о причинах отрыва.

Скорости в граничном слое уменьшаются в направлении к поверхности до нулевого значения (фиг. 17а). Кривизна тела в корне создает расхождение струй наружного потока, а следовательно, повышение

давления, которое, равномерно передаваясь по толще граничного слоя, создает противопоток постоянной интенсивности. В том месте, где этот поток погашает скорости граничного слоя вблизи стенки до нуля, распределение скоростей имеет характер, показанный на фиг. 17в. Дальше в корму возникают обратные скорости (фиг. 17г).

Так как распределение скоростей в ламинарном и турбулентном слое различно, а именно, турбулентный профиль значительно полнее ламинарного и отличается в особенности значительной быстротой нарастания скорости у стенки (фиг. 8), то при одном и том же „противопотоке“, вызванном, к примеру, кривизной формы, у ламинарного слоя нулевые и отрицательные скорости появятся раньше, чем у турбулентного.



Фиг. 17. Распределение скоростей в месте отрыва (в), за (г) и перед ним (а и б).

6.) Для уяснения дальнейшего заметим, что у так называемых плохо обтекаемых тел (например, шар, цилиндр и т. п.) сопротивление формы составляет столь значительную долю полного, что практически в значительном диапазоне чисел Рейнольдса можно пренебречь сопротивлением трения.

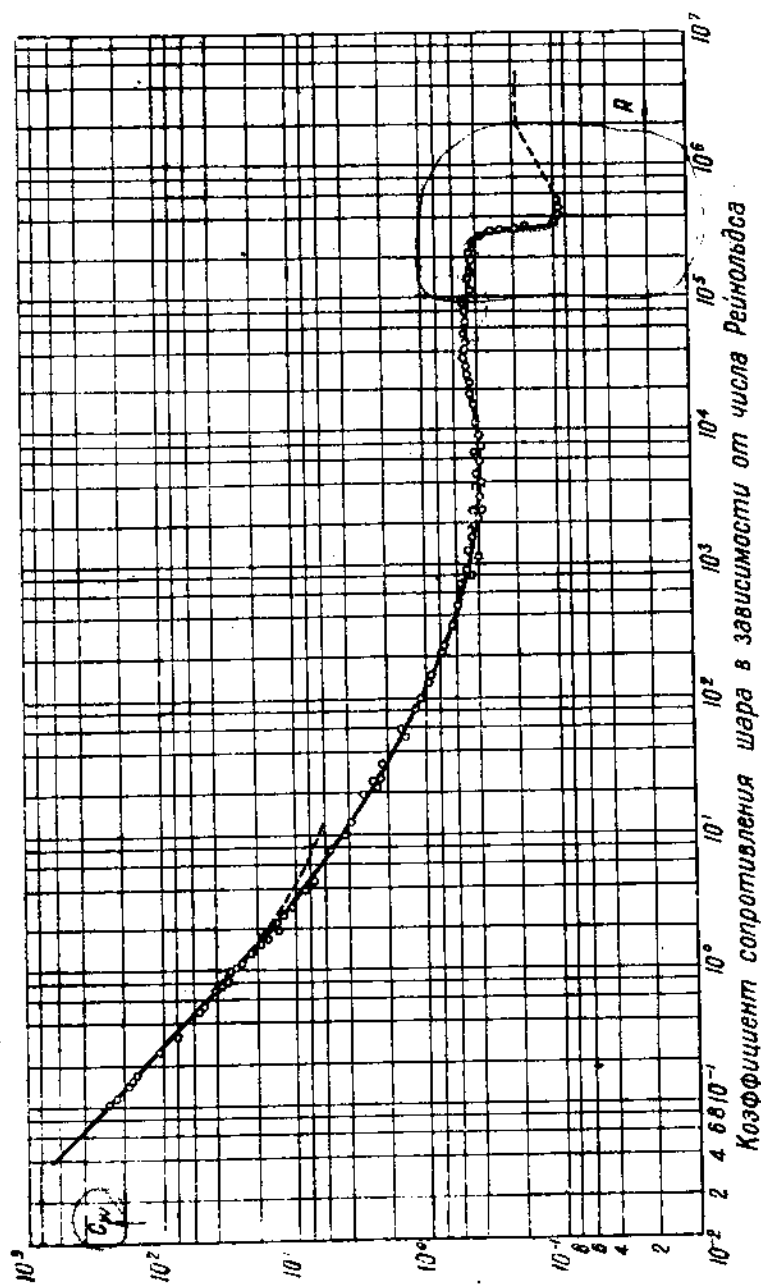
В связи с этим изучение вихревого сопротивления удобно проводить на такого рода телах, у которых все явления, связанные с отрывом, проявляются особенно резко.

На фиг. 18 представлена кривая коэффициентов сопротивления шара на большом диапазоне чисел Рейнольдса от  $10^{-2}$  до  $4 \cdot 10^6$  на основе опытов многих исследовательских лабораторий. Там же приведено теоретическое решение задачи, принадлежащее Оззену.

Кривая относительного сопротивления шара может быть разбита на 4 участка: в области весьма малых чисел Рейнольдса коэффициент сопротивления вначале уменьшается\* с увеличением числа Рейнольдса (I область), затем при относительно больших числах  $Re$  — сохраняет

\* Вследствие уменьшения коэффициента сопротивления трения.





Фиг. 18. Изменение коэффициента сопротивления шара в функции числа Рейнольдса по данным ряда исследователей.

примерно постоянное значение (II область) вплоть до критического числа Рейнольдса, при котором наблюдается резкое падение коэффициента сопротивления (у тел более плавных обводов III область кризиса охватывает достаточно большой диапазон чисел Рейнольдса) и, наконец, за критической областью опять наступает постоянство коэффициента вихревого сопротивления.

Указанные явления прекрасно иллюстрируются photographиями (фиг. 19) обтекания цилиндра, приведенными в „Handbuch der Experimentalphysik“, Band 4, Teil 1 (1931 г.) и уясняются на следующих основаниях.

Сопротивление формы тем больше, чем больше ширина вихревой дорожки. В начале при достаточно малых  $Re$  место отрыва ламинарного пограничного слоя (точка  $S$ ) перемещается в направлении потока и по мере возрастания числа Рейнольдса режим отрыва приближается в авто-модельному (область квадратичного закона сопротивления), при котором в соответствии с 3 свойством ламинарного слоя, строго установленном только при достаточно больших  $Re$ , место отрыва фиксируется вне зависимости от числа Рейнольдса, — устанавливается постоянная вихревая область и, следовательно, постоянный коэффициент сопротивления. При всем этом мы предполагали, что точка  $T$ , определяющая переход ламинарного слоя в турбулентный, находится за точкой  $S$  и, следовательно, граничный слой, отрываясь от поверхности, остается ламинарным.

С ростом числа Рейнольдса точка  $T$  приближается к точке  $S$  и в тот момент, когда  $T$  опередит  $S$ , все законы ламинарного слоя нарушаются.

Место отрыва опять начнет перемещаться по направлению к миделю и за него (свойство 5), причем перемещение точки отрыва за мидель вызовет, очевидно, улучшение охвата тела потоком, а следовательно, и резкое уменьшение коэффициента сопротивления.

В послекритической области (IV) положение точки отрыва устанавливается почти неизменным, и вихревое сопротивление снова подчиняется квадратичному закону\*.

Изложенная схема явления свидетельствует о взаимной связи режимов вихревого и трущегося сопротивления.

Началом кризиса можно считать

$$R_{be} = R_{dT}, \quad (77)$$

где

$$R_{be} = \frac{u_s \cdot \delta_s}{\nu}; \quad R_{dT} = \frac{u_T \cdot \delta_T}{\nu}; \quad (78)$$

$u_s$  — скорость потенциального потока в точке отрыва ламинарного граничного слоя;

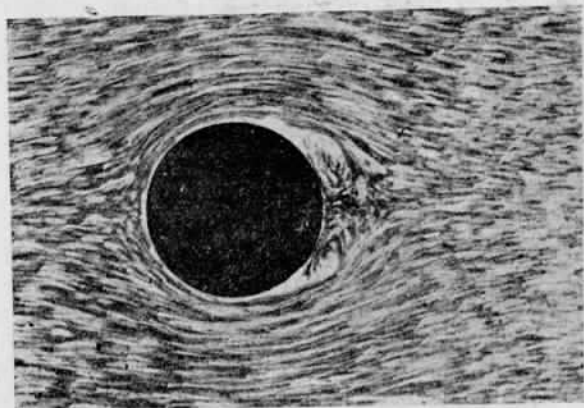
$\delta_s$  — соответствующая толщина слоя;

$u_T$  — скорость потенциального потока в месте перехода от ламинарного слоя к турбулентному;

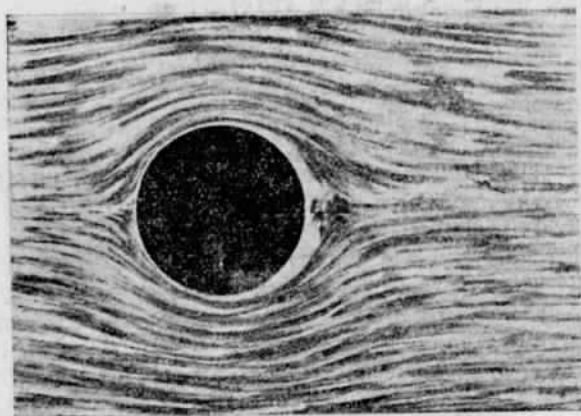
$\delta_T$  — толщина граничного слоя в этой точке;

$\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

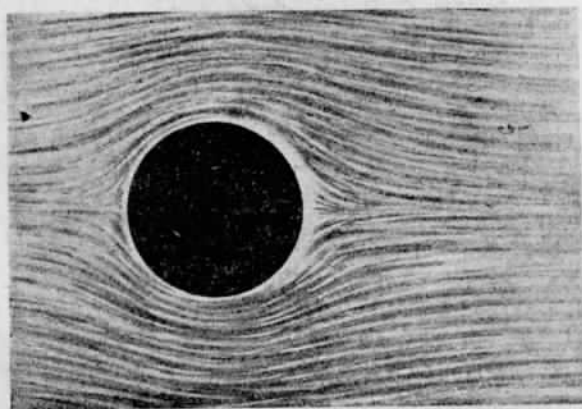
\* Дальнейшее повышение коэффициента полного сопротивления вызывается увеличивающимся охватом поверхности цилиндра турбулентными граничными слоями (переход точки  $T$  в направлении, противоположном потоку).



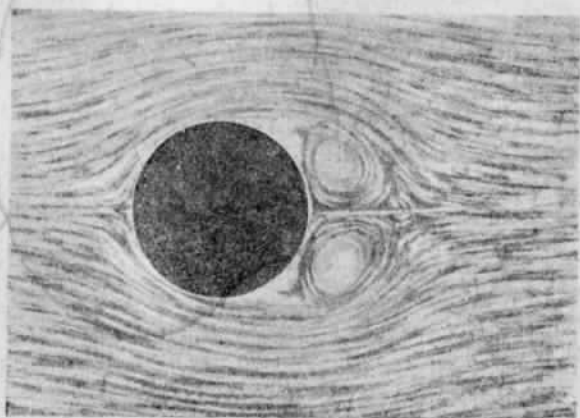
Фиг. 19в. Образование пары вихрей и отрыв струй с поверхности цилиндра.



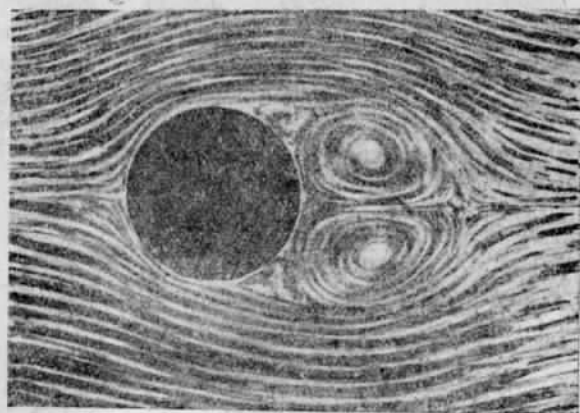
Фиг. 19б. То же при несколько увеличенной скорости.



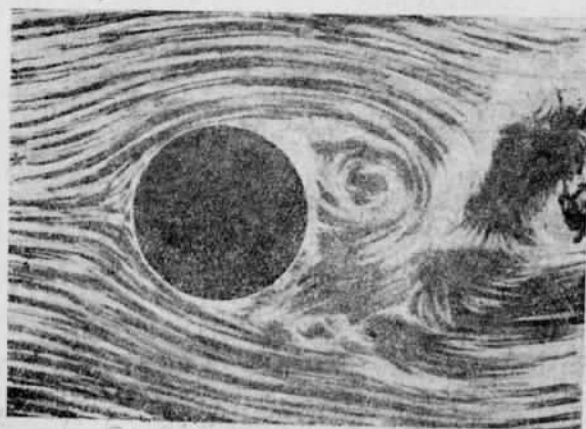
Фиг. 19а. Течение вокруг цилиндра непосредственно после возникновения движения.



Фиг. 19г. Нарастание пары вихрей.



Фиг. 19д. Дальнейшее нарастание пары вихрей непосредственно перед распадом их.



Фиг. 19е. Течение при больших скоростях.

Фиг. 19. Фото-иллюстрации обтекания цилиндра.

## ГЛАВА III

### ЛАМИНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКОГО ПРОФИЛЯ

Решение Блазиуса для случая ламинарного обтекания пластины. Интегральное условие Кармана. Метод Польгаузена. Условие отрыва ламинарного граничного слоя. Приближенное решение уравнения Польгаузена.

Путем интегрирования уравнений Прандтля, Блазиус получил в 1908 году (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*) точное решение задачи о сопротивлении пластины, обтекаемой вдоль ламинарным потоком.

Введем в рассмотрение функцию тока  $\psi$ , определяемую соотношениями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (79)$$

и представляющую собой решение уравнения неразрывности (63).

После замены переменных

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} \cdot y, \quad (80)$$

$$\zeta = \psi \sqrt{\frac{\rho}{\mu U x}} \quad (81)$$

( $U$  — скорость набегающего потока) последовательно находим:

$$\left. \begin{aligned} y &= \xi \cdot 2 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}, & \psi &= \zeta \sqrt{\frac{\mu U x}{\rho}} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\zeta' \sqrt{\frac{\mu U x}{\rho}}}{2 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}} = \frac{1}{2} U \zeta', \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left( \sqrt{\frac{\mu U x}{\rho}} \cdot \zeta' \cdot \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{\rho U}{\mu}} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \right. \\ &\quad \left. + \zeta \sqrt{\frac{\mu U}{\rho}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu U}{\rho x}} (\zeta \zeta' - \zeta''). \end{aligned} \right\} \quad (82)$$



где значок ' означает дифференцирование по  $\xi$ :

$$\zeta' = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$

Подставим (82) в уравнение (61), подготовив предварительно значения производных скорости  $u$ ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} U \zeta'' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2} U \zeta'' \cdot \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{\rho U}{\mu}} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{U}{x} \cdot \zeta'' \cdot \xi; \end{aligned} \quad (83)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} U \zeta' \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2} U \zeta' \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U}{y} \zeta' \xi.$$

Кроме того, для пластины

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (84)$$

После подстановки полученных результатов и ряда простых преобразований, уравнение (61) примет вид:

$$\zeta \cdot \zeta'' = -\zeta'''. \quad (85)$$

Интегрируя последнее уравнение способом разложения в ряды при заданных граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } y=0; \quad u=0; \quad v=0; \\ \text{при } y=\infty; \quad u=U \end{aligned}$$

Блазиус находит следующее выражение для напряжения трения  $\tau_0$  в расстоянии  $x$  от входящей кромки:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}. \quad (86)$$

Отсюда коэффициент местного сопротивления трения

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0,664}{\left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2}} = \frac{0,664}{Re^{1/2}}, \quad (87)$$

где

$$Re = \frac{Ux}{\nu} \quad (88)$$

число Рейнольдса, отнесенное к абсциссе  $x$ .

Полное (одностороннее) трение пластины длиной  $x$  при ширине ее, равной 1, составляет

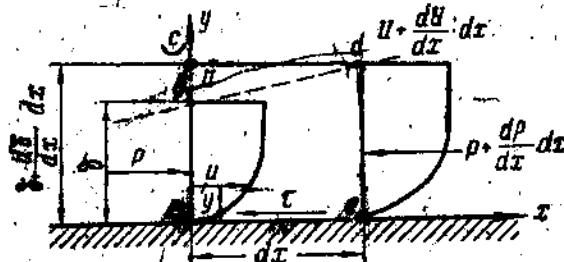
$$W = \int_0^x \tau_0 dx = 0,332 \int_0^x \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} \cdot dx = 0,664 \sqrt{\mu \rho U^3 x}. \quad (89)$$

а коэффициент полного сопротивления\*

$$C_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 x} = \frac{1,328}{\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/2}} = \frac{1,328}{Re^{1/2}} \quad (90)$$

Чисто оперативная сложность решения Блазиуса не позволила нам привести его полностью, и заполнение этого пробела мы предполагаем достигнуть сообщением приближенного метода Польгаузена, приводящего к аналогичным результатам при сравнительной простоте математических операций.

Решение Польгаузена основывается на интегральном условии, выведенном впервые Карманом в 1921 году: v. Kármán, „Ober laminare und turbulente Reibung“, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 1, Heft 4, 1921 г., стр. 235) — доказательство которого мы приводим ниже.



Фиг. 20. К выводу интегрального условия Кармана для плоской стенки.

Рассмотрим сначала случай продольного обтекания плоской стенки и отнесем поток к системе координат, представленной на фиг. 20.

Пусть при этом пунктирная кривая представляет распределение толщины граничного слоя вдоль пластины.

Выделим объем жидкости, ограниченный стенкой  $ae$ , двумя поперечными сечениями  $ac$  и  $de$ , удаленными друг от друга на расстоянии  $dx$ , и линией тока  $cd$  (размер выделенного объема в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, предполагается равным единице) и применим к нему закон количества движения.

Обозначим через  $Q$  и  $I$  соответственно объемный расход и количество движения жидкости, протекающей в единицу времени через 1-е сечение граничного слоя  $ab$ :

$$Q = \int_0^{\delta} u \cdot dy, \quad I = \int_0^{\delta} u \cdot \rho y \cdot dy = \rho \int_0^{\delta} u^2 dy. \quad (91)$$

В таком случае, расход жидкости и количество движения за единицу времени во II-м сечении  $de$  составят:

$$Q + \frac{dQ}{dx} \cdot dx \text{ и } I + \frac{dI}{dx} \cdot dx.$$

\* Односторонняя смоченная поверхность

Зависимость  $Re$  от  $x$  и  $20$  — минимума??

Отсюда заключаем, что вследствие неизменности объема  $ad\delta$  через сечение  $bd$ , а следовательно, и  $bc$  протекает количество жидкости

$$\rho \frac{dQ}{dx} \cdot dx$$

принося собой в объем  $ad\delta$  количество движения, равное

$$\rho \cdot \frac{dQ}{dx} \cdot dx \cdot U$$

(жидкость, протекающая через пограничную поверхность, входит со скоростью внешнего потока, равной  $U$ ).

Таким образом, количество движения жидкости, протекающей за единицу времени через сечение  $ac$  в направлении оси  $x$ , составляет

$$I + \rho U \frac{dQ}{dx} \cdot dx,$$

через сечение  $ed$

$$I + \frac{dI}{dx} \cdot dx.$$

Следовательно, приращение количества движения за единицу времени:

$$I + \frac{dI}{dx} \cdot dx - \left( I + \rho U \frac{dQ}{dx} \cdot dx \right) = \frac{dI}{dx} \cdot dx - \rho U \frac{dQ}{dx} \cdot dx. \quad (92)$$

Единичный импульс сил, действующих на рассматриваемый объем (объемными силами пренебрегаем) равен:  
силы давления на поперечные сечения:

$$p(\delta + d\delta) - \left( p + \frac{dp}{dx} \cdot dx \right) (\delta + d\delta) = - \frac{dp}{dx} \cdot dx (\delta + d\delta);$$

сила трения на стенке:

$$-\tau \cdot dx.$$

Согласно закону количеств движения

$$\frac{dI}{dx} \cdot dx - \rho U \frac{dQ}{dx} \cdot dx = -(\delta + d\delta) \frac{dp}{dx} \cdot dx - \tau \cdot dx, \quad (93)$$

откуда после подстановки формул (91) и перехода к пределу, окончательно находим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - \rho U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = -\delta \cdot \frac{dp}{dx} - \tau. \quad (94)$$

В случае обтекания пластины равномерным потоком

$$U = \text{const} \text{ и } p = \text{const},$$



вследствие чего последнее уравнение переписывается в виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - \rho U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = -\tau. \quad (95)$$

Совершенно аналогично сделанному выше можно вывести условие Кармана для случая двухразмерного обтекания криволинейного профиля

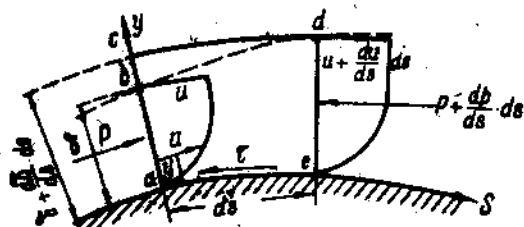
$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - \rho U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} u dy = -\delta \cdot \frac{dp}{ds} - \tau, \quad (96)$$

кривизна которого столь незначительна, что поперечному в каждом поперечном сечении граничного слоя давление внутри его постоянно и равно давлению на стенке.

При этом (фиг. 21):

$s$  — длина дуги профиля, считая от точки раздела потока;

$y$  — расстояние от поверхности профиля, измеренное по нормали к ней;



Фиг. 21. К выводу интегрального условия Кармана для произвольного плоского контура.

$u$  — скорость в соответствующей точке внутри граничного слоя, являющаяся функцией 2 переменных

$$u = u(s, y);$$

$U$  — скорость на границе слоя, определяемая длиной дуги  $s$

$$U = U(s);$$

$\tau$  и  $p$  — соответственно напряжение трения и статическое давление на поверхности профиля

$$\tau = \tau(s), \quad p = p(s),$$

$\rho$  — плотность жидкости;

$\delta$  — толщина пограничного слоя

$$\delta = \delta(s),$$

определяемая условием

$$u = U \text{ при } y = \delta.$$

Для решения задачи о сопротивлении пластины по Польгаузену, представим функцию  $u$  в виде ряда по степеням ординаты  $y$ :

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots \quad (97)$$

и заменим в уравнении (95) согласно закону Ньютона

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Тогда, по существу интегральное условие Кармана

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = - \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (95a)$$

можно будет рассматривать, как дифференциальное уравнение относительно толщины граничного слоя  $\delta$ .

Ниже мы ограничимся приведением первого и последнего (IV) приближения из рассмотренных Польгаузеном и отличающихся друг от друга числом сохраненных членов разложения (97).

### 1 приближение:

Положим

$$u = a_0 + a_1 y. \quad (97a)$$

Располагая при этом только двумя коэффициентами  $a_0$  и  $a_1$ , удовлетворим основным граничным условиям:

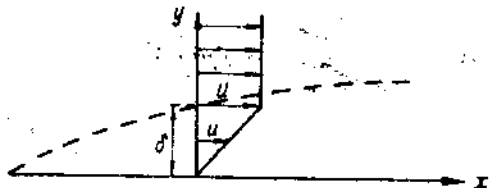
$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u=0; \\ \text{при } y=\delta \quad u=U; \end{array} \right\} \quad (98)$$

откуда

$$a_0 = 0 \text{ и } a_1 = \frac{U}{\delta}.$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении (фиг. 22)

$$u = \frac{U}{\delta} \cdot y. \quad (99)$$



Фиг. 22. Профиль скоростей в пограничном слое, отвечающий первому приближению Польгаузена.

Выполнив предписанные уравнением (95a) операции

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} u^2 dy &= \frac{U^2 \delta}{3}; \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = \frac{U^2}{3} \cdot \frac{d\delta}{dx}; \\ \int_0^{\delta} u dy &= \frac{U\delta}{2}; \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = \frac{U}{2} \cdot \frac{d\delta}{dx}; \\ \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0} &= \frac{U}{\delta} \end{aligned} \quad (100)$$

и подставив полученные результаты в (95a), найдем:

$$\frac{U^2}{6} \cdot \frac{d\delta}{dx} = \nu \cdot \frac{U}{\delta}$$

или после отделения переменных

$$\delta \cdot d\delta = \frac{6\nu}{U} dx,$$

откуда вследствие  $x=0$   $\delta=0$  (101)

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\nu x}{U}$$

Окончательно

$$\delta = \sqrt{\frac{12\nu x}{U}} \quad (102)$$

В таком случае, согласно (100)

$$\tau_0 = \mu \frac{U}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{12x}} = 0,289 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} \quad (103)$$

IV приближение :

Положив

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4, \quad (976)$$

мы будем располагать возможностью удовлетворить еще трем граничным условиям:

$$\text{при } y=0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0^*; \quad (98г)$$

$$\text{при } y=\delta \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (98д)$$

$$\text{при } y=\delta \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (98е)$$

В результате мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; & a_0 + a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + a_4 \delta^4 &= U; \\ a_1 + 2a_2 \delta + 3a_3 \delta^2 + 4a_4 \delta^3 &= 0; & a_2 &= 0; \\ 2a_2 + 6a_3 \delta + 12a_4 \delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

решение которой:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{2U}{\delta}; \quad a_2 = 0;$$

$$a_3 = -\frac{2U}{\delta^3}; \quad a_4 = \frac{U}{\delta^4}.$$

Выполнив предписанные условием (95а) операции, после ряда простейших преобразований, находим:

$$\delta \cdot d\delta = \frac{630}{37} \frac{\nu}{U} dx,$$

\* Это условие непосредственно вытекает из уравнения Прандтля (61). Действительно, вследствие

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ ибо для пластины } p = \text{const.}$$

откуда вследствие (101)

$$\delta = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (104)$$

Аналогично предыдущему, найдем

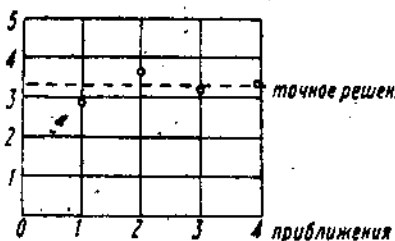
$$\tau_0 = 0,343 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} = \int \frac{U}{\delta} \quad (105)$$

2 и 3 приближения, отличающиеся от приведенных выше сохранением трех и четырех членов разложения (97), соответственно дают:

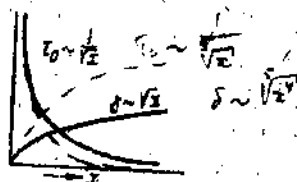
$$\tau_0 = 0,365 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} \quad (106)$$

и

$$\tau_0 = 0,323 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} \quad (107)$$



Фиг. 23. Сравнение результатов 4-х приближений Польгаузена с точным решением Блазиуса.



Фиг. 24. Изменение толщины ламинарного граничного слоя и напряжения трения вдоль пластины.

Суждение о сходимости результатов отдельных приближений можно получить из фиг. 23, на которой в порядке последовательности приближений отложены величины коэффициентов, стоящих в выражениях (103), (105), (106) и (107). Пунктирная прямая отвечает точному решению Блазиуса (86).

Проведенное исследование свидетельствует о нижеследующем.

1) Толщина ламинарного граничного слоя изменяется вдоль пластины по закону параболы (фиг. 24), т. е.  $\sim \sqrt{x}$  и уменьшается с увеличением скорости набегающего потока  $U$  пропорционально квадратному корню на  $U$ .

2) Интенсивность касательных сил распределяется по длине пластины по закону  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  (фиг. 24), причем с увеличением скорости  $U$  касательное напряжение, а следовательно, и полная сила трения увеличиваются пропорционально полуторной степени скорости.

3) Коэффициенты местного и полного ламинарного трения пластины обратно пропорциональны половинной степени числа Рейнольдса.

\* \* \*

Вспользуемся методом Польгаузена для решения задачи о ламинарном обтекании произвольного контура плоско-параллельным потоком.

Для этого, направив ось  $x$  вдоль линии профиля, а  $y$  — перпендикулярно к ней, остановимся на таком количестве членов разложения (97), которое, имея в виду дальнейшие приложения к изучению отрыва граничного слоя, обеспечит возможность перегиба  $y$  профиля скоростей.

Последнему условию (наличие точки перегиба), удовлетворяют параболы степени, не ниже третьей. Для лучшего приближения остановимся на разложении.

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4. \quad (97б)$$

Граничные условия:

$$\text{при } y = 0 \quad u = 0; \quad (98a)$$

$$\text{при } y = \delta \quad u = U; \quad u = u(x) \quad (98б)$$

$$\text{при } y = \delta \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (98в)$$

сохраняют свою силу и в этом случае с той только особенностью, что скорость  $U$  на внешней границе слоя трения является теперь функцией  $x$ .

Это же обстоятельство приводит к замене условия (98г) другим:

$$\text{при } y = 0; \quad v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -U \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (98г')$$

вытекающим из уравнений Прандтля (62), (61) и закона Бернулли из которых следует:

$$v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y=\delta};$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -U \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = c$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

Кроме того, Польгаузен принимает условие:

$$\text{при } y = \delta \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (98д)$$

справедливость которого устанавливается из уравнения 61\*\* и соответствует представлению о наличии прямолинейного участка в профиле скоростей вблизи внешней границы слоя.

В дальнейшем предполагается, что функция  $U(x)$  определена либо на основании теории потенциального потока, либо путем обработки экспериментальных данных о распределении давления по поверхности рассматриваемого профиля.

\* Последнее получается в результате дифференцирования обеих частей уравнения Бернулли по  $x$ .

\* Вследствие  $u = U$  и  $v = 0$  при  $y = \delta$ .

Из (98) непосредственно вытекает:

$$a_0 = 0; a_2 = -\frac{UU'}{2\nu} = -\frac{U\lambda}{2\delta^2}; a_3 = -\frac{U}{2\delta^3} (4 - \lambda);$$

$$a_1 = \frac{U}{6\delta} (12 + \lambda); a_4 = \frac{U}{6\delta^4} \cdot (6 - \lambda),$$

где через  $\lambda$  обозначено безразмерное число

$$\lambda = \frac{U'\delta^2}{\nu}, \quad (108)$$

а значок ' обозначает дифференцирование по переменной  $x$ .

Выполнение предписанных уравнением (96) операций, после ряда простейших преобразований, приводит к окончательному результату:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\delta^2}{\nu} \right) =$$

$$0,8 \left[ -9072 + 1670,4\lambda - \left( 47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U'^2} \right) \lambda^2 - \left( 1 + \frac{UU''}{U'^2} \right) \lambda^3 \right] \quad (109)$$

$$U(-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2)$$

известному под именем уравнения Польгаузена и представляющему собой нелинейное уравнение первого порядка относительно толщины граничного слоя  $\delta$ .

Мы не останавливаемся здесь на всевозможных применениях уравнения (109), нашедших свои приложения в ряде вопросов практической гидромеханики, а отметим только существенное:

1) При заданном распределении скоростей потенциального потока на внешней границе слоя трения

$$U = U(x)$$

уравнение Польгаузена позволяет разыскать распределение толщины ламинарного граничного слоя

$$\delta = \delta(x),$$

а вслед за ним касательное напряжение

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu a_1 = \frac{\mu U}{6\delta} \left( 12 + \frac{U'\delta^2}{\nu} \right)$$

и силу трения

$$W = \int_0^x \tau dx.$$

2) Место отрыва ламинарного граничного слоя определяется условием:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = a_1 = \left( 12 + \lambda \right) \cdot \frac{U}{6\delta} = 0,$$

или, что то же,

$$\lambda = -12$$

и, следовательно,

$$U'\delta^2 + 12v = 0.$$

Абсцисса точки отрыва является корнем последнего уравнения.

Не останавливаясь здесь на известном из учебной литературы изоклинаическом методе решения уравнения Польгаузена, сложность которого привела к весьма ограниченному числу практических расчетов, в которых этот метод был применен, мы, имея в виду цели дальнейшего приложения (гл. VI), приводим ниже приближенное решение уравнения (109), предложенное в статье „Определение мест отрыва в ламинарном граничном слое“\*, написанной нами в соавторстве с Н. Н. Крыловым.

Преобразуем уравнение (109), исключив из него переменную  $z = \frac{\delta^2}{v}$ . Для этого заметим, что

$$\lambda = \frac{U'\delta^2}{v} = U'z \quad (110)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\lambda}{dx} = U''z + U' \frac{dz}{dx} = \frac{U''}{U'} \lambda + U' \frac{dz}{dx}. \quad (111)$$

Подставляя в последнее соотношение выражение  $\frac{dz}{dx}$  согласно (109), последовательно находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} &= \frac{U''}{U'} \lambda + \frac{U'}{U} \times \\ &\times \frac{0,8[-9072 + 1670,4\lambda - (47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U'^2})\lambda^2 - (1 + \frac{UU''}{U'^2})\lambda^3] =}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2} = \\ &= \frac{U'}{U} \left\{ \frac{UU''}{U'^2} \lambda + \right. \\ &+ \frac{-7257,6 + 1336,32\lambda - (37,92 + 3,84 \cdot \frac{UU''}{U'^2})\lambda^2 - (1 + \frac{UU''}{U'^2}) \cdot 0,8\lambda^3}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2} \Big\} = \\ &= \frac{U'}{U} \times \\ &\times \frac{(0,2\lambda^3 + 1,92\lambda^2 - 213,12\lambda) \frac{UU''}{U'^2} + (-0,8\lambda^3 - 37,92\lambda^2 + 1336,3\lambda - 7257,6)}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}. \quad (112) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\psi(\lambda) = \frac{0,2\lambda^3 + 1,92\lambda^2 - 213,12\lambda}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}; \quad (113)$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{-0,8\lambda^3 - 37,92\lambda^2 + 1336,3\lambda - 7257,6}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}. \quad (114)$$

\* Труды ВНИТОСС за 1935 год

Тогда уравнение Польгаузена (109) примет вид:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \left[ \psi(\lambda) \cdot \frac{UU''}{U'^2} + \varphi(\lambda) \right] \cdot \frac{U'}{U} \quad (115)$$

Исследуем поведение функций  $\psi(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$  в пределах  $\lambda = 0 \rightarrow -12$ . Для этого представим значение указанных функций в табличной форме (табл. 1), а затем изобразим их на графиках (фиг. 25, 26 и 27).

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ  $\psi(\lambda)$  И  $\varphi(\lambda)$

| $\lambda$ | $\psi(\lambda)$ | $\varphi(\lambda)$ | $\lambda$ | $\psi(\lambda)$ | $\varphi(\lambda)$ |
|-----------|-----------------|--------------------|-----------|-----------------|--------------------|
| 0         | 0               | 34,1               | -8        | -8,84           | 102,5              |
| -1        | -0,985          | 39,5               | -9        | -10,49          | 118,5              |
| -2        | -1,96           | 45,5               | -10       | -12,46          | 138,5              |
| -3        | -2,94           | 52,5               | -11       | -14,85          | 164,5              |
| -4        | -3,95           | 60,0               | -12       | -18,00          | 199,0              |
| -5        | -5,02           | 68,0               |           |                 |                    |
| -6        | -6,17           | 77,5               |           |                 |                    |
| -7        | -7,41           | 89,0               |           |                 |                    |

Как это следует из фиг. 25 и 27, в пределах изменения  $\lambda$  (0, —6) функции  $\psi(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$  могут быть с достаточной точностью воспроизведены следующими приближенными аналитическими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 0 \geq \lambda \geq -6; \\ \psi(\lambda) &= \lambda; \\ \varphi(\lambda) &= 34,1 - 6,82\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

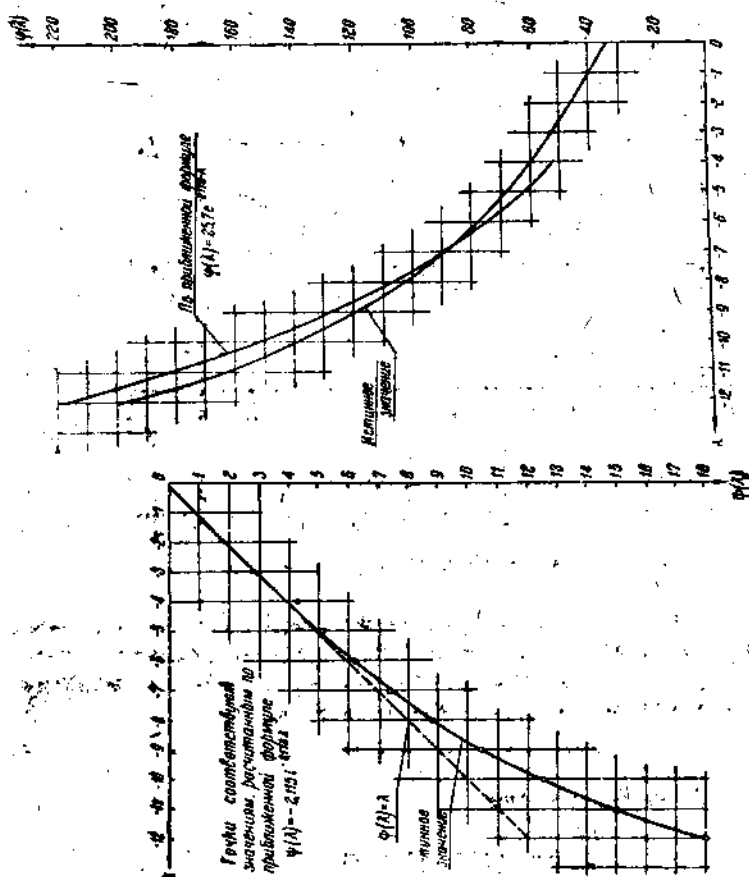
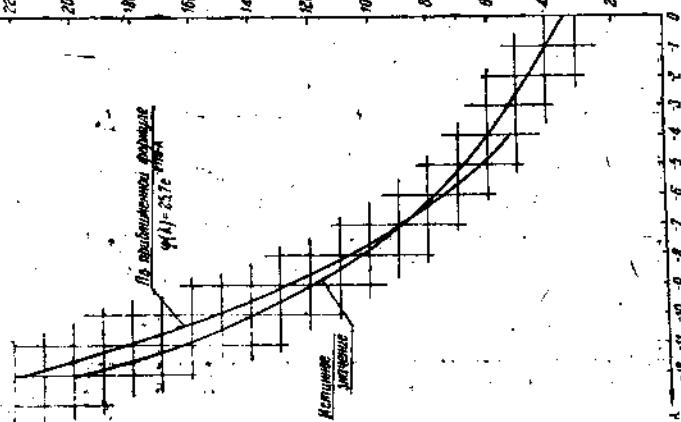
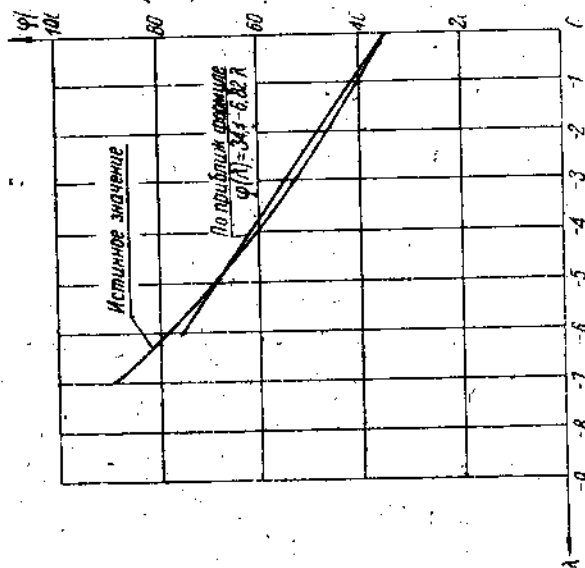
Для нахождения приближенных выражений  $\psi(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$  во всей остальной части интересующего нас интервала изменения переменной  $\lambda$ , составим график зависимости  $\ln(-\psi)$  и  $\ln \varphi$  от  $\lambda$  (табл. 2 и фиг. 28).

Таблица 2

| $\lambda$ | $\ln(-\psi)$ | $\ln \varphi$ | $\lambda$ | $\ln(-\psi)$ | $\ln \varphi$ |
|-----------|--------------|---------------|-----------|--------------|---------------|
| -4        | 1,374        | 4,094         | -9        | 2,351        | 4,775         |
| -5        | 1,614        | 4,220         | -10       | 2,523        | 4,930         |
| -6        | 1,820        | 4,350         | -11       | 2,698        | 5,102         |
| -7        | 2,003        | 4,489         | -12       | 2,890        | 5,293         |
| -8        | 2,179        | 4,630         |           |              |               |

В предвидении дальнейших упрощений при интегрировании уравнения Польгаузена назначим одинаковый наклон к оси  $\lambda$  — прямым, заменяющих точные зависимости  $\ln(-\psi)$  и  $\ln \varphi$  от  $\lambda$



Фиг. 25. График функции  $\phi(\lambda)$ .Фиг. 26. График функции  $\phi(\lambda)$ .Фиг. 27. График функции  $\phi(\lambda)$  для малых и средних значений  $\lambda$ .

В таком случае с достаточным приближением при

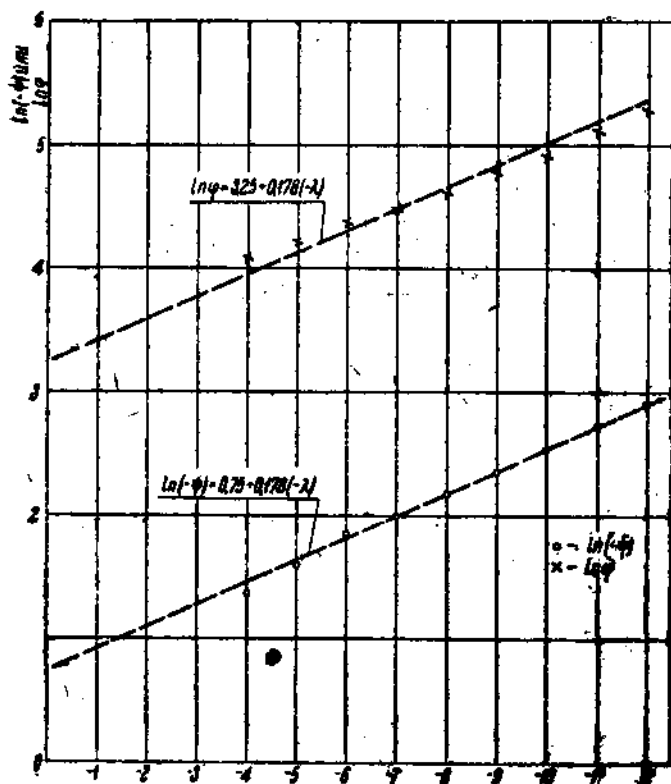
$$-4 \geq \lambda \geq -12$$

$$\ln \varphi = 3,25 + 0,178 \cdot (-\lambda);$$

$$\ln(-\psi) = 0,75 + 0,178 \cdot (-\lambda)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \psi(\lambda) &= -2,115 e^{-0,178\lambda} \\ \varphi(\lambda) &= 25,7 e^{-0,178\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (117)$$



Фиг. 28. График функций  $\ln(-\psi)$  и  $\ln \varphi$ .

Приступим к интегрированию уравнения Полягуэса на отдельных участках изменения независимой переменной  $\lambda$ , предварительно заменив функции  $\psi(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$  их приближенными аналитическими выражениями.

Для весьма малых значений  $\lambda$  ( $\lambda$  близко к нулю)

$$\psi(\lambda) = \lambda \quad \varphi(\lambda) = 34,1, \quad (118)$$

и уравнение (115) принимает вид:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda \frac{U''}{U'} + 34,1 \frac{U'}{U}. \quad (119)$$

Положим

$$\lambda = t \cdot r.$$

Тогда

$$\lambda' = t'r + r't$$

и, следовательно,

$$t'r + r't - tr \frac{U''}{U'} - 34,1 \frac{U'}{U} = 0$$

или

$$t'r - 34,1 \frac{U'}{U} + t \left( r' - r \frac{U''}{U'} \right) = 0. \quad (120)$$

Определим переменную  $r$  из условия

$$r' - r \frac{U''}{U'} = 0$$

или что то же

$$\frac{r'}{r} = \frac{U''}{U'}.$$

Частным решением последнего уравнения служит

$$\ln r = \ln (-U')^*$$

или

$$r = -U'.$$

При этом уравнение (120) примет вид:

$$-t'U' - 34,1 \frac{U'}{U} = 0,$$

откуда

$$dt = -34,1 \frac{dx}{U}$$

и

$$t = -34,1 \int \frac{dx}{U} + C_1.$$

Окончательно,

$$\lambda = t \cdot r = U' \left\{ 34,1 \int \frac{dx}{U} + C_1 \right\}. \quad (121)$$

При определении неопределенной постоянной мы сталкиваемся с затруднением, заключающимся в том, что единственное граничное условие

$$\begin{aligned} \text{при } \lambda &= 0 \\ U' &= 0 \end{aligned}$$

(точка минимума давления) удовлетворяется при всяком значении постоянной  $C_1$ .

Указанное затруднение может быть обойдено, если воспользоваться результатами частного решения, полученного проф. Л. Г. Лойциским\*\*

\* За точкой минимума давления  $U' < 0$ .

\*\* Л. Г. Лойциский. Приклады механики и математика, т. I, вып. I.

для случая изменения скорости (за точкой минимума давлений) по закону

$$U = U_m (1 - cx^2). \quad (122)$$

После введения новой переменной  $\varepsilon = cx^2$  вследствие соотношений

$$\begin{aligned} U &= U_m (1 - \varepsilon) & \frac{d\lambda}{dx} &= \frac{d\lambda}{d\varepsilon} \cdot 2cx \\ U' &= -2cU_m x & \frac{dU}{d\varepsilon} &= -\frac{2cx}{1 - \varepsilon} \\ U'' &= -2cU_m & \\ \frac{UU''}{U'^2} &= \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

уравнение Польгаузена переписывается в виде:

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \psi(\lambda) \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \varphi(\lambda) \cdot \frac{1}{\varepsilon - 1}.$$

Решение этого дифференциального уравнения ищется в виде степенного ряда

$$\varepsilon = a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^4.$$

Ограничившись первыми четырьмя членами этого ряда, проф. Л. Г. Лойцанский получил приближенное решение в виде:

$$\varepsilon = -0,01465 \lambda (1 + 0,0513 \lambda + 0,00157 \lambda^2 + 0,00008 \lambda^3) \quad (122a)$$

Для достаточно малых значений  $\lambda$  можно положить

$$\varepsilon = -0,01465 \lambda$$

или

$$\lambda = -68,2 cx^2. \quad (123)$$

Кроме того в соответствии с (121) и (122)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{U_m (1 - cx^2)} &= \frac{1}{2U_m \sqrt{c}} \ln \frac{1 + \sqrt{c} \cdot x}{1 - \sqrt{c} \cdot x} = \\ &= \frac{1}{2U_m \sqrt{c}} \cdot 2 \left[ \sqrt{c} \cdot x + \frac{(\sqrt{c} \cdot x)^3}{3} + \frac{(\sqrt{c} \cdot x)^5}{5} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Для достаточно малых значений  $x$ , соответствующих весьма малым значениям  $\lambda$ , имеем:

$$\int \frac{dx}{U_m (1 - cx^2)} = \frac{x}{U_m},$$

и, следовательно,

$$\lambda = -2cx U_m \left( 34,1 \frac{x}{U_m} + C_1 \right).$$

Сопоставляя последний результат с (123), окончательно находим

$$C_1 = 0.$$

Таким образом, для весьма малых значений  $\lambda$  интеграл уравнения Польгаузена представляется в следующем виде:

$$\lambda = 34,1 U' \int \frac{dx}{U}. \quad (124)$$

Для малых и средних значений  $\lambda$ , заключенных примерно в интервале  $(0, -6)$

$$\psi(\lambda) = \lambda \quad \varphi(\lambda) = 34,1 - 6,82 \lambda, \quad (116)$$

и уравнение (115) принимает вид

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{U'}{U} \left\{ \lambda \frac{UU''}{U'^2} + 34,1 - 6,82 \lambda \right\}$$

или

$$\frac{d\lambda}{dx} - \left[ \frac{U''}{U'} - 6,82 \frac{U'}{U} \right] \lambda - 34,1 \frac{U'}{U} = 0. \quad (125)$$

Интегрируя его, подобно предшествующему, полагаем:

$$\lambda = t \cdot r, \quad \lambda' = t'r + r't.$$

Тогда

$$t'r + t \left[ r' - \left( \frac{U''}{U'} - 6,82 \frac{U'}{U} \right) r \right] - 34,1 \frac{U'}{U} = 0.$$

Определяя переменную  $r$  из условия:

$$r' - \left( \frac{U''}{U'} - 6,82 \frac{U'}{U} \right) \cdot r = 0,$$

находим

$$r = - \frac{U'}{U^{6,82}}$$

и, следовательно,

$$- \frac{U'}{U^{6,82}} t' - 34,1 \frac{U'}{U} = 0.$$

Общий интеграл последнего уравнения

$$t = - 34,1 \int U^{5,82} dx - C_2.$$

Таким образом,

$$\lambda = \frac{U'}{U^{6,82}} \left\{ 34,1 \int U^{5,82} dx + C_2 \right\}.$$

При достаточно малых значениях  $x$  скорость  $U$  меняется весьма незначительно:

$$\lambda = U' \left\{ 34,1 \int \frac{dx}{U} + \frac{C_2}{U^{6,82}} \right\}.$$

Сопоставляя последнее с (124), находим

$$C = 0.$$

Окончательно, для малых и средних значений  $\lambda$

$$\lambda = 34,1 \frac{U'}{U^{6,82}} \int U^{5,82} dx. \quad (126)$$

При средних и больших значениях  $\lambda$

$$\left. \begin{aligned} \psi(\lambda) &= -2,115 e^{-0,178 \lambda} \\ \varphi(\lambda) &= 25,7 e^{-0,178 \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

и уравнение Польгаузена принимает вид:

$$\frac{d\lambda}{dx} = e^{-0,178 \lambda} \frac{U'}{U} \left\{ -2,115 \frac{U \cdot U''}{U'^2} + 25,7 \right\}.$$

Разделив переменные

$$e^{0,178 \lambda} d\lambda = \left\{ -2,115 \frac{U''}{U'} + 25,7 \frac{U'}{U} \right\} \cdot dx$$

и взяв соответствующие квадратуры, получим:

$$5,62 e^{0,178 \lambda} = -2,115 \ln(-U') + 25,7 \ln U + c_3$$

или

$$e^{0,178 \lambda} = -0,376 \ln(-U') + 4,58 \ln U + c_3 \quad (127)$$

Для отыскания неопределенной постоянной  $c_3$  воспользуемся знанием некоторого  $\lambda_1 \geq -6$ , соответствующего значению  $x = x_1$ , при котором

$$U = U_1$$

и

$$U' = U_1'$$

После подстановки в уравнение (127), найдем

$$c_3 = e^{0,178 \lambda_1} + 0,376 \ln(-U_1') - 4,58 \ln U_1$$

и, следовательно,

$$e^{0,178 \lambda} = -0,376 \ln(-U') + 4,58 \ln U + e^{0,178 \lambda_1} + 0,376 \ln(-U_1') - 4,58 \ln U_1$$

или, так как

$$\begin{aligned} -U' &> -U_1'; \\ U_1 &> U, \end{aligned}$$

то

$$e^{0,178 \lambda} = e^{0,178 \lambda_1} - 0,376 \ln \frac{U'}{U_1'} - 4,58 \ln \frac{U}{U_1},$$

откуда

$$\lambda = 5,62 \ln \left\{ e^{0,178 \lambda_1} - 0,376 \ln \frac{U'}{U_1'} - 4,58 \ln \frac{U}{U_1} \right\}, \quad (128)$$

где, напомним,

$$\lambda_1 = 34,1 \frac{U_1'}{U_1^{6,82}} \int_0^{x_1} U^{5,82} dx. \quad (129)$$

Выражение (128) и представляет собой приближенное решение уравнения Польгаузена для области средних и больших  $\lambda$ .

Однако, применение этого решения ограничено областью изменения переменной  $\lambda$ , в которой принятые при выводе аналитические выражения достаточно точно воспроизводят действительный ход функций  $\varphi(\lambda)$  и  $\psi(\lambda)$ .

Последнее очень скоро нарушается вслед за интересующей нас областью изменения переменной  $\lambda$  ( $0, -12$ ), так как уже при  $\lambda = -17,78$  знаменатель функций  $\varphi(\lambda)$  и  $\psi(\lambda)$  обращается в нуль.

Следствием этого является, в первую очередь, получение отрицательных значений выражения

$$e^{0,178 \lambda_1} - 0,376 \ln \frac{U'}{U_1} - 4,58 \ln \frac{U_1}{U}, \quad (130)$$

стоящего под знаком натурального логарифма и потеря смысла самого решения.

Так как за точкой  $\lambda \cong -5$  значения функций  $\lambda$  нарастают весьма быстро, трудно наперед установить ту область значений  $x$ , следующих за  $x_1$ , к которой может быть применено полученное решение.

В связи с этим для уточнения места отрыва мы предлагаем следующий прием расчета.

1. Определяются значения выражения (130) для ряда значений  $x$ , следующих за  $x_1$ , в числе, достаточном для построения графика функции (130).

2. Определяется положение места отрыва как абсцисса точки пересечения кривой (130) с прямой

$$y = e^{-\frac{12}{5,62}} = 0,124,$$

отвечающей значению  $\lambda = -12$ .

3. Уточняются значения переменной  $\lambda$ , соответствующие области ( $e^{0,178 \lambda_1}; 0,124$ ) изменения функций (130).

Значительно более удобное для аналитических исследований приближенное решение уравнения Польгаузена можно получить, если распространить линейный закон изменения функций  $\psi(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$  на весь интересующий нас диапазон величины  $\lambda$ , т. е. от  $\lambda = 0$  до  $\lambda = -12$  а именно, положить

$$\psi(\lambda) = \lambda; \quad \varphi(\lambda) = 34,1 - 7\lambda. \quad (131)$$

Такое, весьма грубое на первый взгляд, приближение естественно может вызвать опасение в слишком большом отклонении приближенного решения от истинного. Дальнейшее изложение посвящено изучению этого вопроса на ряде случаев, для которых известно точное решение.

Аналогично изложенному выше (см. стр. 52—53), получаем

$$\lambda = 34,1 \frac{U'}{U^n} \int U^6 dx. \quad (132)$$

В качестве первого примера рассмотрим обтекание кругового цилиндра, разрешенное проф. Л. Г. Лойцянским.

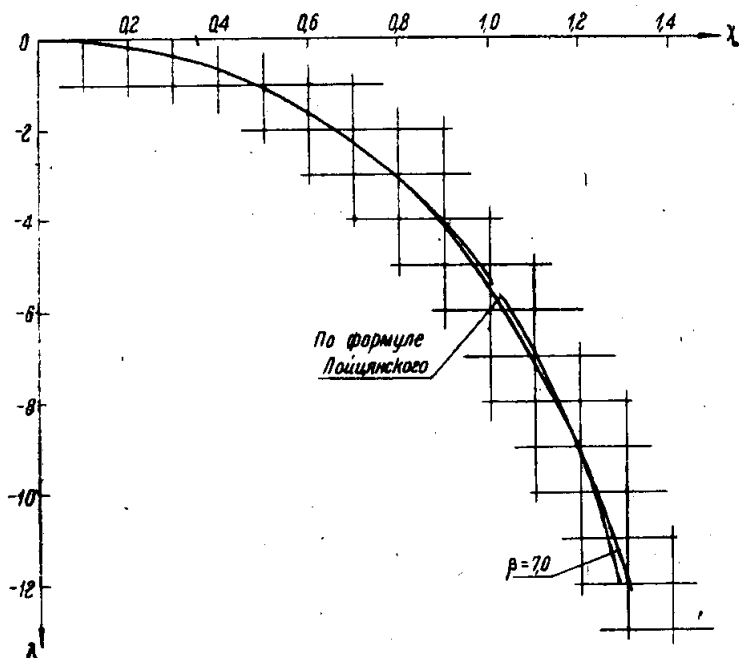
Полагая в (122) величину  $c$  равной, к примеру,  $c = 0,06$ , имеем:  
 $\epsilon = 0,06 \quad x^2 = -0,01465 \lambda (1 + 0,0513 \lambda + 0,00157 \lambda^2 + 0,00003 \lambda^3)$ .

Соответствующая последнему кривая,  $\lambda = \lambda(x)$  представлена на фиг. 29.

Для отыскания приближенного решения находим величину интеграла:

$$J = \int_0^x (1 - 0,06 x^2)^6 dx$$

для ряда значений переменной  $x$  (табл. 3).



Фиг. 29. Сравнение решения проф. Лойцянского с предлагаемым приближенным решением ур-ия Польгаузена.

Таблица 3

| $x$       | 0 | 0,5   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,3   |
|-----------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| $J$       | 0 | 0,478 | 0,878 | 0,944 | 1,005 | 1,061 |
| $\lambda$ | 0 | 1,086 | 5,55  | 7,17  | 9,26  | 11,9  |

Кривая, построенная на основании данных последней таблицы, приведена на фиг. 29, устанавливающей практически полное совпадение точного и приближенного решений.



В качестве второго примера приведем случай обтекания крыла, рассмотренный проф. В. В. Голубевым, принявшим на основе экспериментальных данных линейное распределение давления за точкой минимума давления:

$$\frac{dp}{dx} = A.$$

Согласно закона Бернулли

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U U'.$$

В таком случае

$$U' = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{1}{U}$$

и

$$dx = -\frac{\rho}{A} U dU.$$

Используя приближенное решение в общей форме \*, [имеем:

$$\lambda = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{1}{U^8} \left\{ 34,1 \int -\frac{\rho}{A} U^7 dU + C_1 \right\}$$

или

$$\lambda = 4,26 - \frac{A}{\rho} \cdot \frac{1}{U^8} \cdot C_1.$$

Определим постоянную интегрирования из условия

$$\lambda = 0 \text{ при } U = U_m$$

Тогда

$$C_1 = 4,26 \frac{\rho}{A} U_m^8$$

и

$$\lambda = 4,26 \left\{ 1 - \left( \frac{U_m}{U} \right)^8 \right\}.$$

Полагая  $\lambda = -12$  и, обозначая скорость  $U$  в месте отрыва струй через  $U_0$ , находим:

$$\frac{U_m}{U_0} = 1,18$$

вместо точного решения, полученного В. В. Голубевым,

$$\frac{U_m}{U_0} = 1,174.$$

\* Использование общего решения, при котором  $C_1 = 0$ , не представляется возможным, так как в случае, рассмотренном проф. В. В. Голубевым, при  $x = 0$

$U' \neq 0$ .

В качестве последнего примера рассмотрим решение Польгаузена, относящееся к случаю обтекания кругового цилиндра, исследованного экспериментальным путем Химентцом.

В опытах Химентца диаметр цилиндра составлял  $d = 97,5$  мм, скорость набегающего потока  $U_0 = 19$  см/сек, плотность воды  $\rho = 1$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 0,01$  см/сек<sup>2</sup>. При этом найденное Химентцом распределение скоростей на внешней границе слоя трения хорошо воспроизводится следующим аналитическим выражением:

$$U = (7,151 x - 0,04497 x^3 - 0,000330 x^5) \text{ см/сек.}$$

Соответствующие последнему выражению значения скорости  $U$  и ее производных  $U'$ ,  $U''$  представлены на фиг. 30.

Перед отысканием приближенного решения преобразуем выражение интеграла уравнения Польгаузена, отнеся начало координат к точке разветвления потока  $A$ :

$$\lambda = \frac{U'}{U^2} \left\{ 34,1 \int U^6 dx + C_2 \right\},$$

где  $C_2$  — новая постоянная, подлежащая определению из граничного условия в точке  $A$ .

При малых значениях  $x$  (вблизи точки  $A$ ) с достаточной степенью точности можно положить

$$U = kx.$$

Тогда

$$\frac{1}{U^2} \int U^6 dx = \frac{1}{k^7 x^2} \int k^6 x^6 dx = \frac{1}{7k}$$

$$\lambda = 4,87 + \frac{C_2}{k^6 x^2}.$$

В точке разветвления потока ( $x = 0$ ) величина  $\lambda = \frac{U' \delta^2}{\nu}$  не может принимать бесконечно больших значений и, следовательно,

$$C_2 = 0.$$

Таким образом,

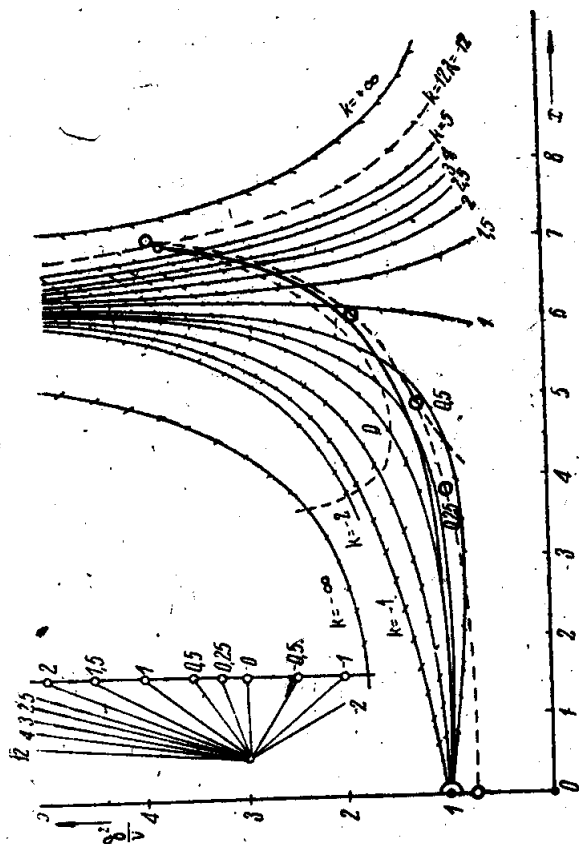
$$\lambda = 34,1 \frac{U'}{U^2} \int U^6 dx. \quad (133)$$

После деления обеих частей последнего соотношения на  $U'$  найдем:

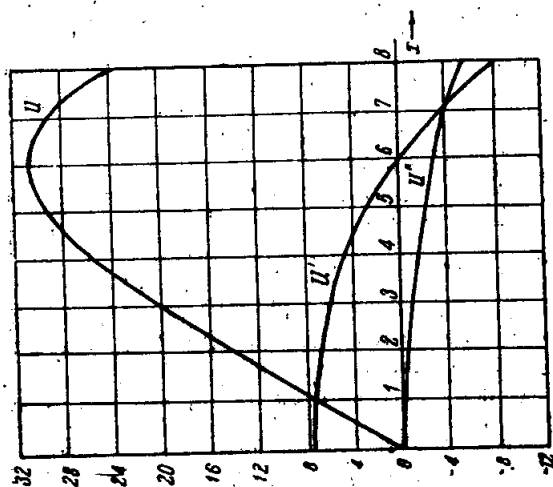
$$z = \frac{\delta^2}{\nu} = 34,1 \cdot \frac{1}{U^2} \int U^6 dx.$$

Соответствующая расчетная таблица 4 приведена ниже.

Сравнение последнего решения с результатами, полученными Польгаузенем изоклиническим методом интегрирования уравнения (109), представлено на фиг. 31 и свидетельствует о том, что приближенный метод достаточно точно воспроизводит ход кривой  $Z = \frac{\delta^2}{\nu}$  особенно в области, лежащей вблизи точки отрыва, давая сравнительно незначительные рас-



Фиг. 31. Сравнение решения Польгаузена, полученного изоклиническим методом с предлагаемым приближенным решением. Точки, отмеченные кружками, отвечают приближенному решению.



Фиг. 30. Изменение скорости  $U$  и ее производных  $U'$  и  $U''$  на поверхности цилиндра по опытам Химента.

Таблица 4

| $x$ | $U$  | $U^2$            | $\int U^2 dx$     | $U^3$              | Приблиз.<br>решение.<br>$Z$ приб | Точное<br>решение<br>$Z$ точн. |
|-----|------|------------------|-------------------|--------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| 0   | —    | —                | —                 | —                  | 0,7                              | 1,0                            |
| 4   | 25,5 | $275 \cdot 10^6$ | $210 \cdot 10^8$  | $7000 \cdot 10^6$  | 1,02                             | 1,21                           |
| 5   | 29,0 | $595 \cdot 10^6$ | $645 \cdot 10^8$  | $17300 \cdot 10^6$ | 1,27                             | 1,42                           |
| 6   | 30,5 | $805 \cdot 10^6$ | $1345 \cdot 10^8$ | $24800 \cdot 10^6$ | 1,87                             | 1,90                           |
| 7   | 29,0 | $595 \cdot 10^6$ | $2045 \cdot 10^8$ | $17300 \cdot 10^6$ | 4,03                             | 3,94                           |

хождения при определении толщины пограничного слоя вблизи точки разветвления потока.

#### ГЛАВА IV

### ЗАКОН БЛАЗИУСА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТУРБУЛЕНТНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ

Закон Блазиуса для турбулентного течения жидкости в гладких трубах. Постулат Кармана. Степенной закон распределения скоростей. Решение Прандтля-Кармана для случая обтекания пластины турбулентным потоком (1921 г.).

На основе общих принципов теории подобия, Блазиусу (H. Blasius, „Das Ähnlichkeitgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten“, Forsch. Arb. Ing. Wes. № 131, 1913) удалось систематизировать большой опытный материал о потоках в гладких трубах и получить в результате его обработки эмпирическую формулу для сопротивления.

$$\lambda = 0,316 \sqrt[4]{\frac{\nu}{u d}}, \quad (134)$$

которая в области чисел Рейнольдса до  $Re = \frac{u \cdot d}{\nu} = 100 \cdot 10^3$  весьма точно воспроизводит экспериментальные зависимости. Здесь

$\lambda$  — коэффициент сопротивления, равный

$$\lambda = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho u^2}{2}} \cdot \frac{d}{l}; \quad (135)$$

$p_2 - p_1$  — перепад давления на длине  $l$ ,

$d$  — диаметр трубы,

$u$  — средняя скорость;

$\rho$  — плотность жидкости.

Для установления своей формулы, Блазиус использовал в первую очередь опыты Saph'a и Schoder'a, измеривших падение давления воды в 15 центиметровых латунных трубках диаметром  $d = 2,77 - 53,1$  мм в области чисел Рейнольдса

$$1,4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 104 \cdot 10^3.$$

Опыты Saph'a и Schoder'a показали, что переход ламинарного потока в турбулентный происходит вблизи  $Re = 2000$ , а переходная область заканчивается при  $Re = 3000$ . Таким образом, нижний предел применимости формулы Блазиуса с достаточным приближением фиксируется значением числа Рейнольдса  $Re = 3 \cdot 10^3$ .

Для установления подобия потоков в различных средах, Блазиус обработал опыты Nusselt'a, исследовавшего падение давления для воздушного потока в трубе диаметром  $d = 2,2$  см. Кроме того в целях сравнения результатов, полученных при больших скоростях и малом диаметре трубы — с одной стороны, и малыми скоростями при большом диаметре — с другой, Блазиус обработал опыты Lang'a, которые были проведены в медной трубке  $d = 0,6$  см до значительных чисел Рейнольдса. Оба анализа отлично подтвердили закон Блазиуса при

$$4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 100 \cdot 10^3.$$

В целях дальнейшего приложения нам понадобится переписать формулу Блазиуса в виде зависимости трения на стенке  $\tau_0$  от максимальной скорости в трубе  $U$ .

Для этого воспользуемся зависимостями:

$$u = U \left( \frac{y}{r} \right)^{1/2} = U \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^{1/2} \quad (136)$$

( $r$  — радиус трубы,  $u$  — скорость потока в точке, удаленной от оси трубы на расстоянии  $a$  и от стенки расстоянием  $y = r - a$ )

$$\tau_0 = \frac{p_2 - p_1}{l} \cdot \frac{r}{2}, \quad (137)$$

иллюстрированными на фиг. 32 и 33.

По определению средней скорости

$$\bar{u} \cdot \pi r^2 = \int_0^r u \cdot 2\pi a \cdot da$$

и согласно (136)

$$\bar{u} = 2U \int_0^1 \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^{1/2} : \frac{a}{r} d\left( \frac{a}{r} \right).$$

Полагая

$$\left( 1 - \frac{a}{r} \right)^{1/2} = z,$$

находим

$$\frac{a}{r} = 1 - z^2;$$

$$d\left( \frac{a}{r} \right) = -2z dz,$$

откуда

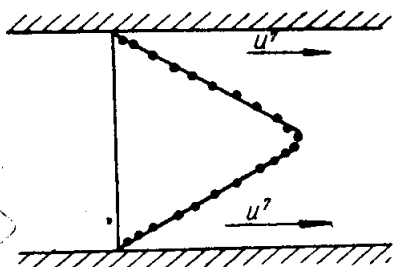
$$\bar{u} = 2U \int_0^1 7z^2 (1 - z^2) \cdot dz = 0,816 U. \quad (138)$$

Подставив (137) и (138) в формулу (134), окончательно находим

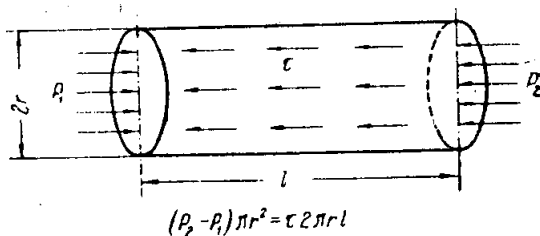
$$\tau_0 = 0,045 \rho \frac{U^2}{2} \cdot \left( \frac{\nu}{rU} \right)^{1/4}. \quad (139)$$

Первое решение задачи о сопротивлении пластины в турбулентном потоке было дано одновременно Прандтлем и Карманом в 1921 г. и основывается на следующем предположении: профиль скоростей, замеренный в круглой трубе при некотором числе Рейнольдса

$$Re = \frac{Ur}{\nu},$$



Фиг. 32. Седьмые степени скоростей, наблюдаемых при турбулентном течении жидкости в трубах, отложенные в функции расстояния от стенки.



Фиг. 33. Силы, действующие на круговой цилиндр, выделенный внутри жидкости. Формула (137) вытекает из рассмотрения условия равновесия сил трения на боковой поверхности и разности давлений на торцевых сечениях.

совпадает с распределением скоростей поперек граничного слоя в точке, определяемой соотношением

$$Re = \frac{U\delta}{\nu},$$

где  $\delta$  — толщина слоя трения.

Иначе говоря: во внешней задаче — обтекания произвольного тела набегающим потоком — толщина граничного слоя  $\delta$  играет ту же роль, что и радиус трубы, определяющий через число Рейнольдса поле скоростей и сопротивление во внутренней задаче (фиг. 34).

Ниже мы приводим исследования Прандтля и Кармана, построенные на основе использования экспериментального закона Блазиуса, придерживаясь при этом изложения, данного Прандтлем в работе „Über den Reibungswiderstand strömender Luft“, опубликованной в „Ergebnisse Aerodynam. Versuchsanstalt zu Göttingen“, III Lieferung 1927 г.

В форме, получающейся из основного выражения:

$$\lambda = 0,316 \left( \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (134)$$

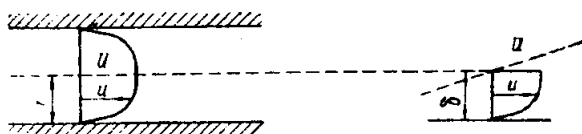
путем перехода от перепада давления к напряжению трения и заменой

средней скорости  $\bar{u}$  максимальной  $U$  закон Блазиуса может быть записан следующим образом:

$$\tau_0 = \zeta \cdot \rho \frac{U^2}{2} \cdot \left( \frac{\nu}{rU} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (139)$$

Из (139) следует, что сопротивление трения зависит от радиуса трубы и скорости на оси ее.

По этому поводу Прандтль пишет следующее: „Легко понять, что как радиус трубы, так и скорость посредине не имеют непосредственного отношения к трению стенки и входят здесь только формально, в то время как в действительности трение на стенке определяется соотношениями в потоке вблизи нее. Следует ожидать, что и наоборот,



Фиг. 34. Сравнение полупрофиля скоростей в трубе с профилем скоростей в пограничном слое.

распределение скоростей вблизи стенки определяется одним только законом трения“.

В соответствии с этим из соображения размерностей, Прандтль полагает скорость  $u$  в расстоянии  $y$  от стенки равной

$$u = C \cdot \varphi(Re), \quad (140)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}} \quad (141)$$

скорость, соответствующая напряжению трения  $\tau_0$ ;

$$Re = \frac{u \cdot y}{\nu}$$

число Рейнольдса, причем вид функции  $\varphi$  должен определяться характером закона трения.

Если в общем случае положить

$$\tau_0 = \frac{\rho U^2}{2} \cdot f\left(\frac{rU}{\nu}\right)$$

и принять согласно (140), (141)

$$U^2 = C^2 \left[ \varphi\left(\frac{Ur}{\nu}\right) \right]^2$$

$$\tau_0 = \frac{\rho C^2}{2},$$



то

$$\frac{\rho C^2}{2} = \frac{\rho C^2}{2} \cdot \varphi^2(Re) \cdot f(Re) \left[ Re = \frac{Ur}{\nu} \right]$$

и, следовательно,

$$\varphi(Re) = \frac{1}{\sqrt{f(Re)}}.$$

Последнее равенство имеет место при всяком значении числа Рейнольдса и поэтому может быть обобщено в виде:

$$\varphi(Re) = \frac{1}{\sqrt{f(Re)}}.$$

В частном случае, при существовании закона Блазиуса

$$f(Re) = \zeta \cdot Re^{-\frac{1}{4}}$$

и следовательно,

$$\varphi(Re) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \cdot Re^{\frac{1}{8}}$$

или после подстановки в (140)

$$u = \sqrt{\frac{2\tau}{\rho\zeta}} \cdot \left(\frac{uy}{\nu}\right)^{\frac{1}{8}},$$

откуда

$$u = \left(\frac{2\tau}{\rho\zeta}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(\frac{y}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

Для оси трубы

$$U = \left(\frac{2\tau}{\rho\zeta}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(\frac{r}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}$$

и следовательно,

$$u = U \left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{1}{7}}. \quad (142)$$

Таким образом, закону Блазиуса отвечает такое распределение скоростей, при котором скорость пропорциональна корню седьмой степени из расстояния от стенки.

Последний результат с достаточным приближением может быть распространен на случай обтекания пластины, если только в формулы (139) и (142) вместо радиуса трубы ввести толщину пограничного слоя:

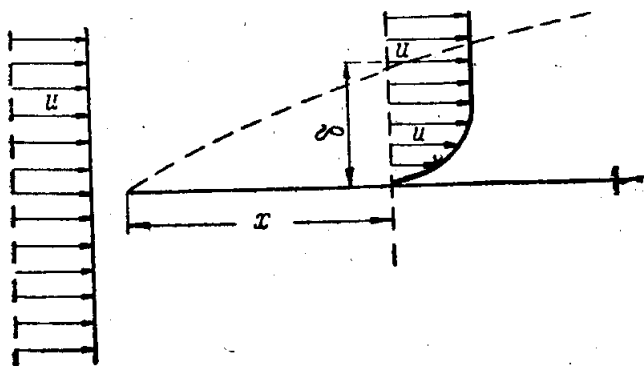
$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}; \quad (143)$$

$$\tau = \zeta \cdot \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{\nu}{\delta U}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (144)$$

Для определения сопротивления пластины сравним количества движения жидкости в двух поперечных сечениях потока, движущегося вдоль пластины: впереди входящей кромки пластины и в сечении, отстоящем от передней кромки на расстоянии  $x$  (фиг. 35).

Предполагая ширину пластины равной 1, последовательно находим: скорость произвольной частицы жидкости в любом сечении перед входящей кромкой пластины равна скорости набегающего потока  $U$ ; скорость частицы жидкости, проходящей через элемент  $1 \cdot dy$  с координатами  $x, y$  равна  $u$ .

Масса жидкости, протекающей в единицу времени через тот же элемент поверхности, составляет  $\rho u dy$ .



Фиг. 35. Сравнение количества движения в двух поперечных сечениях потока: перед пластиной и в сечении, отстоящем от передней кромки пластины на расстоянии  $x$ .

Так как при этом потеря скорости вследствие влияния трения происходит только в пограничном слое, то уменьшение количества движения в единицу времени по всему II сечению составит

$$I = \int_0^{\delta} (U - u) \rho u dy$$

или после подстановки (143)

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^{\delta} \left[ U - U \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right] U \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy = \\ &= \rho U^2 \delta \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{2}{7}} \right] d \left( \frac{y}{\delta} \right) = \frac{7}{72} \rho U^2 \delta. \end{aligned} \quad (146)$$

По теореме количества движения  $I$  должно равняться импульсу силы трения  $W$  в единицу времени:

$$I = W \cdot 1$$

и, следовательно,

$$dW = dI = \frac{dI}{dx} \cdot dx = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot dx. \quad (147)$$

С другой стороны

$$dW = \tau \cdot dx = \zeta \cdot \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{\nu}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot dx. \quad (148)$$

Сравнивая (147) с (148), находим:

$$\frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot dx = \zeta \cdot \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{\nu}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot dx,$$

или

$$\delta^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{d\delta}{dx} = \frac{36}{7} \cdot \zeta \cdot \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}},$$

откуда после интегрирования

$$\frac{4}{5} \delta^{\frac{5}{4}} = \frac{36}{7} \cdot \zeta \cdot \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot x$$

и

$$\delta = \left( \frac{45}{7} \zeta \right)^{\frac{4}{5}} \cdot \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{5}}.$$

Подставив полученный результат в формулу (146) и положив согласно (139)  $\zeta = 0,045$ , находим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{7}{72} \rho U^2 \left( \frac{45}{7} \cdot 0,045 \right)^{\frac{4}{5}} \cdot \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{5}} = \\ &= 0,072 \frac{\rho U^2}{2} \cdot x \left( \frac{\nu}{Ux} \right)^{\frac{1}{5}}. \end{aligned} \quad (149)$$

При длине пластины  $l$  и общепринятых обозначениях числа Рейнольдса

$$Re = \frac{Ul}{\nu}$$

и коэффициента полного сопротивления

$$C_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 \cdot l}$$

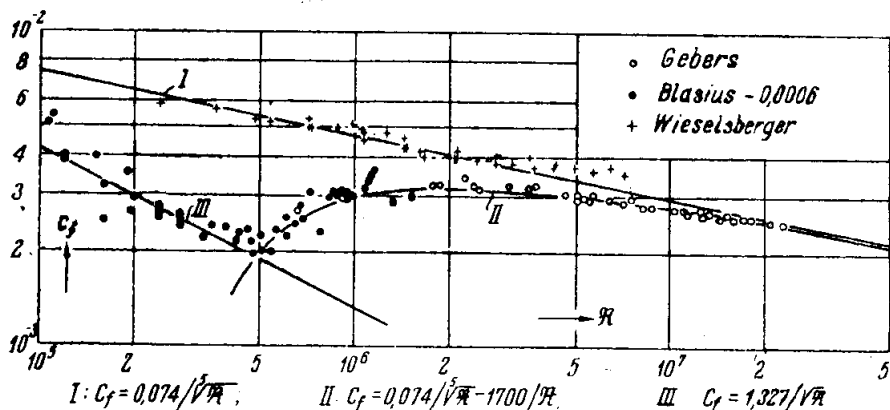
из (149) окончательно находим:

$$C_f = 0,072 Re^{-\frac{1}{5}}. \quad (150)$$

Последняя формула хорошо согласуется с опытами Визельсбергера над матерчатыми пластинками (см. табл. 151 до 154 I Lieferung), результаты которых представлены на фиг. 36, и наблюдаемые относительно незначительные отклонения в области больших чисел Рейнольдса являются обычными для закона Блазиуса и основанных на нем выводов.

Для лучшего согласования с опытами Визельсберга можно воспользоваться неточностью в определении коэффициента Блазиуса  $\zeta = 0,045$  и положить

$$C_f = 0,074 \cdot Re^{-\frac{1}{5}}. \quad (151)$$



Фиг. 36. Изменение коэффициента сопротивления трения в зависимости от числа Рейнольдса.

I — по формуле Прандтля для турбулентного режима

$$C_f = 0,074 / \sqrt[5]{Re}.$$

II — по опытам Геберса для переходного режима

$$C_f = 0,074 / \sqrt[5]{Re} - 1700/Re.$$

III — по формуле Блазиуса для ламинарного режима

$$C_f = 1,327 \sqrt{Re}.$$

В двойной логарифмической сетке на фиг. 36 зависимость (151) интерпретируется прямой I.

Изложенное выше позволяет определить величину касательного напряжения на поверхности пластины

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{dW}{dx} = 0,074 \frac{\rho U^2}{2} \cdot \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{d}{dx} \left( x^{\frac{4}{5}} \right) = \\ &= \frac{4}{5} \cdot 0,074 \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{\nu}{Ux} \right)^{\frac{1}{5}} = 0,0592 \frac{\rho U^2}{2} Re^{-\frac{1}{5}}. \end{aligned} \quad (152)$$

откуда коэффициент местного трения

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U^2} = 0,0592 Re^{-\frac{1}{5}}. \quad (153)$$

Применение изложенных результатов, естественно, предполагает, что уже вблизи передней кромки пластины имеет место полная турбулизация пограничного слоя. В действительности же, как это подтверждается опытами Геберса и др., часть поверхности, непосредственно следующая за передней кромкой, обтекается ламинарным граничным слоем и, следовательно, подвержена действию сил трения меньшей интенсивности.

В опытах Геберса длина ламинарного участка  $l'$  достаточно точно характеризуется значением числа Рейнольдса

$$Re' = \frac{U l'}{\nu} \approx 500\,000, \text{ (точнее } 487\,000),$$

соответствующего внезапному переходу от ламинарного профиля скоростей к турбулентному.

В таком случае уменьшение коэффициента сопротивления вследствие наличия ламинарного участка будет определяться разностью значений коэффициентов турбулентного и ламинарного трения при  $Re = Re'$  и отношением  $\frac{Re'}{Re} = \frac{l'}{l}$ , характеризующим участие ламинарного участка в общей длине пластины.

Согласно решению Блазиуса (см. стр. 38) при ламинарном обтекании

$$C_{f,l} = 1,328 Re^{-\frac{1}{2}}. \quad (90)$$

При

$$Re = Re' = 470\,000$$

последняя формула дает

$$C_{f,l} = 0,00190,$$

в то время, как согласно (151)

$$C_{f,m} = 0,00539.$$

Таким образом,

$$\Delta C_f = (C_{f,m} - C_{f,l}) \frac{Re'}{Re} = (0,00539 - 0,00190) \frac{487\,000}{Re} = \frac{1700}{Re}.$$

Окончательно для коэффициента сопротивления пластины при наличии ламинарного набегающего потока получаем

$$C_f = 0,074 Re^{-\frac{1}{5}} - 1700 \cdot Re^{-1}. \quad (154)$$

Как это следует из изложенного, последняя формула должна быть справедлива при

$$Re > 487\,000$$

в предположении, что переход от ламинарного обтекания к турбулентному происходит на достаточно малой длине пластины вблизи критического значения числа Рейнольдса

$$Re' = 487000.$$

На фиг. 36 зависимости (90) и (154) представлены кривыми II и III наряду с результатами испытаний Геберса (стеклянных пластин в воде) и Блазиуса (латунные полосы), причем в последних исключено влияние вихревого сопротивления, оцененного ориентировочно величиной коэффициента сопротивления 0,0006, улучшившее совпадение с теоретической прямой III.

Решение Прандтля-Кармана (1921 г.), основанное на степенном законе распределения скоростей в турбулентном граничном слое, может быть резюмировано следующим образом.

1. Толщина ламинарного граничного слоя изменяется вдоль пластины по закону  $\sqrt{x}$  и уменьшается с увеличением скорости набегающего потока  $U$  пропорционально корню пятой степени из  $U$ .

2. Интенсивность касательных сил распределяется по длине пластины по закону  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , причем с увеличением скорости  $U$  касательное напряжение, а следовательно, и полная сила трения увеличиваются пропорционально  $U^{3/5}$ .

3. Коэффициенты местного и полного турбулентного трения пластин обратно пропорциональны корню пятой степени из числа Рейнольдса.

Изложенное выше может быть легко распространено на случай произвольного показателя степени  $n$  в законе распределения скоростей.

Исходя из допущения, что распределение скоростей вблизи стенки должно зависеть только от физических постоянных жидкости  $\mu$  и  $\rho$ , силы трения на стенке  $\tau_0$  и расстояния между рассматриваемой точкой и поверхностью тела, можно положить

$$u = f(\mu, \rho, \tau_0, y). \quad (155)$$

Предполагая далее существование степенного закона распределения скоростей в общей форме

$$u = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^n \quad (156)$$

Карман представляет зависимость (155) в виде:

$$u = f_1(\mu, \rho, \tau_0) \cdot y^n = \text{const} \cdot \mu^a \cdot \rho^b \cdot \tau_0^c \cdot y^n. \quad (155a)$$

Сравнение размерностей обеих частей равенства

$$\frac{M}{СК} = \left( \frac{КГ \cdot СК}{M^2} \right)^a \cdot \left( \frac{КГ \cdot СК^2}{M^4} \right)^b \cdot \left( \frac{КГ}{M^2} \right)^c \cdot M^n$$

приводит к следующей системе уравнений:

$$1 - n = -2a - 4b - 2c;$$

$$-1 = a + 2b;$$

$$0 = a + b + c,$$

решение которой:

$$a = -n; \quad b = -\frac{1-n}{2}; \quad c = \frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, равенство (155a) можно переписать в виде:

$$u = \text{const} \cdot \mu^{-n} \cdot \rho^{-\frac{1-n}{2}} \tau_0^{\frac{n+1}{2}} \cdot y^*,$$

откуда

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \text{const} \cdot \frac{\mu^{\frac{2}{n+1}} \cdot \rho^{\frac{2n}{n+1}} \cdot \rho^{\frac{1-n}{2}}}{y^{\frac{2n}{n+1}}} = \\ &= \text{const} \cdot \rho u^2 \cdot \frac{\mu^{-\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{2n}{n+1}}}{y^{\frac{2n}{n+1}}} \end{aligned}$$

или

$$\tau = \zeta \cdot \frac{\rho u^2}{2} \cdot \left(\frac{v}{y \cdot u}\right)^{\frac{2n}{n+1}}.$$

Полагая

$$\left(m = -\frac{2n}{n+1}\right) y = \delta \quad \text{и} \quad u = U,$$

находим окончательно:

$$\tau_0 = \zeta \cdot \frac{\rho U^2}{2} \cdot \left(\frac{U \delta}{v}\right)^m. \quad (157)$$

Предполагая попрежнему ширину пластин, равной 1, для определения ее сопротивления сравним количество движения жидкости в двух поперечных сечениях потока, движущегося вдоль пластины: впереди входящей кромки пластины и в сечении, отстоящем от передней кромки на расстоянии  $x$ .

Разность количеств движения в обоих сечениях составляет:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\delta} (U - u) \rho u dy = \rho U^2 \delta \int_0^1 \left[ \left(\frac{y}{\delta}\right)^n - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2n} \right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \\ &= \rho U^2 \delta \cdot \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned} \quad (158)$$

С другой стороны

$$I = W \cdot 1, \quad (159)$$

где  $W$  — искомое сопротивление трения пластины.

Отсюда

$$dW = dI = \frac{dI}{dx} \cdot dx = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot dx. \quad (160)$$

Кроме того

$$dW = \tau dx = \zeta \cdot \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{U\delta}{\nu} \right)^m \cdot dx. \quad (161)$$

Сравнивая (160) и (161), находим:

$$\frac{n}{(n+1)(2n+1)} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \cdot dx = \zeta \cdot \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{U\delta}{\nu} \right)^m \cdot dx$$

или

$$\delta^{-m} \cdot d\delta = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n} \cdot \zeta \cdot \left( \frac{U}{\nu} \right)^m \cdot dx,$$

откуда после интегрирования

$$\frac{\delta^{-m+1}}{1-m} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n} \cdot \zeta \left( \frac{U}{\nu} \right)^m \cdot x$$

и

$$\delta = \left[ \frac{(1-m)(n+1)(2n+1)}{2n} \cdot \zeta \right]^{\frac{1}{1-m}} \cdot \left( \frac{U}{\nu} \right)^{\frac{m}{1-m}} \cdot x^{\frac{1}{1-m}}.$$

Подставив полученный результат в формулу (158), на основании (159) окончательно находим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \rho U^2 \left[ \frac{(1-m)(n+1)(2n+1)}{2n} \zeta \right]^{\frac{1}{1-m}} \times \\ &\times \left( \frac{U}{\nu} \right)^{\frac{m}{1-m}} \cdot x^{\frac{1}{1-m}} = \frac{2n}{(n+1)(2n+1)} \times \\ &\times \left[ \frac{(1-m)(n+1)(2n+1)}{2n} \zeta \right]^{\frac{1}{1-m}} \cdot \frac{\rho U^2}{2} \cdot \left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{\frac{m}{1-m}} \cdot x, \end{aligned}$$

откуда коэффициент полного сопротивления

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{2n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \left[ \frac{(1-m)(n+1)(2n+1)}{2n} \zeta \right]^{\frac{1}{1-m}} \times \\ &\times \left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{\frac{m}{1-m}} \quad (162) \end{aligned}$$

При

$$n = \frac{1}{7}, \quad m = -\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \zeta = 0,045,$$

последний результат (162) совпадает с (150).



## ГЛАВА V

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И СИЛЫ ТРЕНИЯ ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Решение Х. Мюллера. Обобщенное интегральное условие Кармана (уравнение Милликена). Распространение решения Мюллера на тело вращения.

Основным уравнением, служащим для изучения переменности толщины граничного слоя, является интегральное условие Кармана, которое в случае двухразмерного обтекания криволинейного профиля, может быть записано в виде:

$$-\tau - \frac{dp}{ds} \cdot \delta = \frac{d}{ds} \int_0^\delta \rho u^2 dy - \rho U \frac{d}{ds} \int_0^\delta u dy. \quad (96)$$

Здесь:

- $s$  — длина дуги профиля, считая от точки раздела потока;
- $y$  — расстояние от поверхности профиля, измеренное по нормали к ней;
- $u$  — скорость в соответствующей точке внутри пограничного слоя, являющаяся функций 2 переменных  $s$  и  $y$ :

$$u = u(s, y);$$

$U$  — скорость на границе слоя, определяемая длиной дуги  $s$ :

$$U = U(s);$$

$\tau$  и  $p$  — соответственно напряжение трения и статическое давление на поверхности профиля:

$$\tau = \tau(s); \quad p = p(s);$$

$\rho$  — плотность жидкости (предполагается  $\rho = \text{const}$ );

$\delta$  — толщина пограничного слоя

$$\delta = \delta(s),$$

определяемая условием

$$u = U$$

при

$$y = \delta.$$

Предполагая степенной закон распределения скорости в турбулентном граничном слое

$$u = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (156)$$

после интегрирования находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy &= \rho \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} U^2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{2n} dy = \rho \cdot \frac{d}{ds} \left\{ U^2 \delta \cdot \frac{1}{2n+1} \right\} = \\ &= \frac{2}{2n+1} \cdot \rho \cdot \delta U \frac{dU}{ds} + \frac{1}{2n+1} \rho U^2 \frac{d\delta}{ds}; \\ \rho U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} u dy &= \rho U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} U \left( \frac{y}{\delta} \right)^n dy = \rho U \frac{d}{ds} \left\{ U \delta \cdot \frac{1}{n+1} \right\} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \rho \delta U \frac{dU}{ds} + \frac{1}{n+1} \rho U^2 \frac{d\delta}{ds} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$-\tau - \frac{dp}{ds} \cdot \delta = \left[ \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right] \rho \delta U \frac{dU}{ds} + \left[ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right] \rho U^2 \frac{d\delta}{ds}.$$

Введем следующие обозначения:

$U_0$  — скорость равномерного набегающего потока;

$p_0, q_0 = \frac{\rho U_0^2}{2}$  — соответственно статическое давление и скоростной напор невозмущенного потока (на достаточном удалении от профиля);

$q = \frac{\rho U^2}{2}$  — скоростной напор на границе слоя трения и потенциального потока;

$$F(s) = \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 = \frac{q}{q_0}. \quad (164)$$

Согласно уравнению Бернулли

$$p_0 + q_0 = p + q,$$

откуда

$$F(s) = \frac{q_0 - (p - p_0)}{q_0} = 1 - \frac{p - p_0}{q_0} \quad (165)$$

и

$$\frac{dF}{ds} = - \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{q_0} \right). \quad (166)$$

Поделив обе части уравнения (163) на  $q_0$ , найдем:

$$\begin{aligned} - \frac{\tau}{q_0} - \delta \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{q_0} \right) &= \left( \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot 2\delta \cdot \frac{U}{U_0} \frac{d}{ds} \left( \frac{U}{U_0} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot 2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 \cdot \frac{d\delta}{ds}. \end{aligned} \quad (167)$$

В соответствии с формулой (156) положим:

$$\tau = \xi \cdot q \cdot R_\delta^m = \xi \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \left( \frac{U\delta}{v} \right)^m, \quad (157)$$

где  $\xi$  и  $m$  — постоянные числа, а  $R_\delta = \frac{U\delta}{v}$  — число Рейнольдса, отнесенное к толщине пограничного слоя.

В таком случае, согласно (164), (166) и (157), уравнение (167) примет вид:

$$\begin{aligned} -\xi \left( \frac{U\delta}{v} \right)^m \cdot F + \delta F' &= \left( \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \delta \cdot F' + \\ &+ 2 \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot F \cdot \delta', \end{aligned} \quad (168)$$

причем знак ' означает производную по переменной  $s$ .

Далее, введя в уравнение (168) скорость набегающего потока  $U_0$ :

$$\frac{U\delta}{v} = \delta \cdot \frac{U_0}{v} \cdot F^{1/2},$$

при помощи ряда простых преобразований найдем:

$$\begin{aligned} -\xi \cdot F^{1/2} \left( \frac{U_0}{v} \right)^m &= - \left( 1 - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \cdot \frac{F'}{F} \cdot \delta^{1-m} + \\ &+ 2 \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \delta^{-m} \cdot \delta'. \end{aligned} \quad (169)$$

Обозначим:

$$z = \delta^{1-m}$$

Тогда

$$\frac{z'}{1-m} = \delta' \cdot \delta^{-m}.$$

После подстановки в уравнение (169) получим:

$$z' - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \cdot z + \frac{G}{B} \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \cdot F^{1/2} = 0, \quad (170)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \left( 1 - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \cdot \frac{1-m}{2} \\ B &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ G &= \xi \cdot \frac{1-m}{2} \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Для интегрирования уравнения (170) введем замену переменных:

$$z = t \cdot r.$$

В таком случае уравнение (170) переписывается в виде:

$$t' \cdot r + tr' - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \cdot tr + \frac{G}{B} \cdot \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \cdot F^{1/2} = 0$$

или

$$\left(t' - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \cdot t\right)r + tr' + \frac{G}{B} \cdot \left(\frac{U_0}{v}\right)^m \cdot F^{\frac{m}{2}} = 0. \quad (173)$$

Определим переменную  $t$  из условия:

$$t' - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \cdot t = 0,$$

или, что то же,

$$\frac{t'}{t} = \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F}.$$

Решением последнего уравнения служит

$$\ln t = \frac{A}{B} \ln F$$

или

$$t = F^{\frac{A}{B}}.$$

При этом уравнение (173) примет вид:

$$F^{\frac{A}{B}} \cdot r' + \frac{G}{B} \cdot \left(\frac{U_0}{v}\right)^m \cdot F^{\frac{m}{2}} = 0.$$

Интеграл его

$$r = -\frac{G}{B} \left(\frac{U_0}{v}\right)^m \int F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} ds.$$

Окончательно,

$$z = t \cdot r = \delta^{1-m} = -\frac{G}{B} \cdot \left(\frac{U_0}{v}\right)^m \cdot F^{\frac{A}{B}} \int F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} ds \quad (174)$$

или в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{l}\right)^{1-m} &= -\frac{G}{B} \left(\frac{U_0 l}{v}\right)^m \cdot F^{\frac{A}{B}} \int F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} d\left(\frac{s}{l}\right) = \\ &= -\frac{G}{B} R_e^m \cdot F^{\frac{A}{B}} \int_0^{\frac{s}{l}} F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} d\left(\frac{s}{l}\right), \end{aligned} \quad (175)$$

где  $l$  — длина профиля в направлении потока; $R_e = \frac{U_0 l}{v}$  — число Рейнольдса, отнесенное к скорости набегающего потока и длине профиля.Для количественного решения задачи о распределении толщины граничного слоя вдоль профиля по формуле (175) наряду с функцией  $F$ , определяемой на основе теории потенциального потока, либо специальными измерениями на опыте, необходимо знание величин $n, m$  и  $\xi$ .

В пределах

$$3 \cdot 10^3 \leq R_e \leq 10^6$$

можно (см. главу IV) положить

$$n = \frac{1}{7}; \quad m = -\frac{1}{4}$$

и

$$\bar{\alpha} = 0,045.$$

Тогда согласно, (171).

$$A = 0,1996; \quad B = -0,0972; \quad G = 0,0281 \quad (171a)$$

и формула (175) примет вид:

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^{\frac{5}{4}} = 0,289 R_e^{-\frac{1}{4}} \cdot F^{-2,055} \int_0^{s/l} F^{1,930} d\left(\frac{s}{l}\right). \quad (175a)$$

В целях экспериментальной проверки полученной формулы Otto Сипо\* было произведено измерение скорости в различных точках граничного слоя и распределение статического давления по поверхности профиля крыла самолета в полете.

Характеристические величины при опытах Сипо:

$$l = 1,85 \text{ м}; \quad U_0 = 32 \text{ м/сек}; \quad \nu = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек};$$

$$R_e = \frac{U_0 l}{\nu} = 4,4 \cdot 10^6; \quad \text{угол атаки } \alpha = 1^\circ.$$

Форма профиля наряду с распределением давления по его верхней поверхности представлена на фиг. 37.

Результаты манометрических измерений скоростей даны на фиг. 38 в виде кривых скоростного напора для каждого из 10 мест замера. Толщина слоя трения определялась по ним как наименьшая ордината  $u$ , отвечающая условию:

$$\frac{du}{dy} = 0.$$

Таким образом было определено действительное распределение толщины пограничного слоя, представленное на фиг. 39 пунктирной кривой.

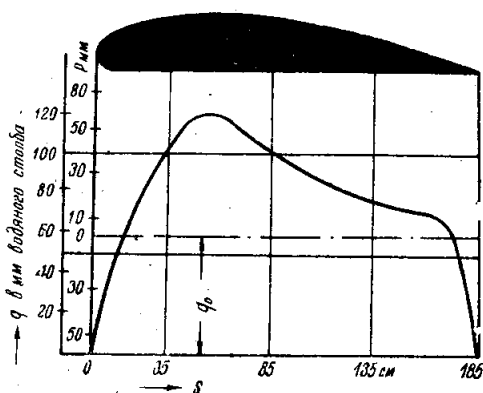
Для отыскания теоретического решения задачи по измеренному распределению давления были определены значения функции

$$F(s) = 1 - \frac{p - p_0}{q_0}$$

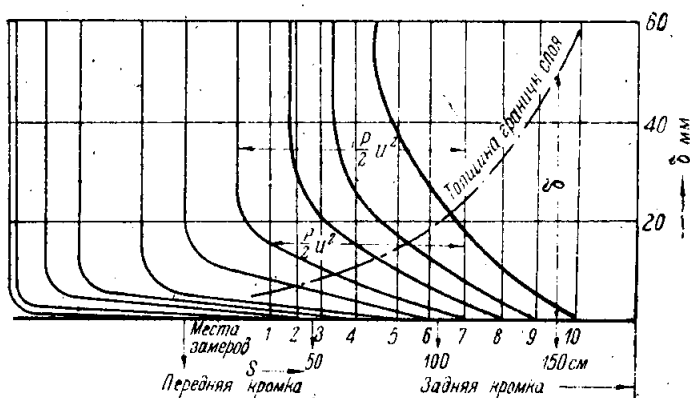
и выполнено графическое интегрирование:

$$\int_0^{s/l} F^{1,930} d\left(\frac{s}{l}\right).$$

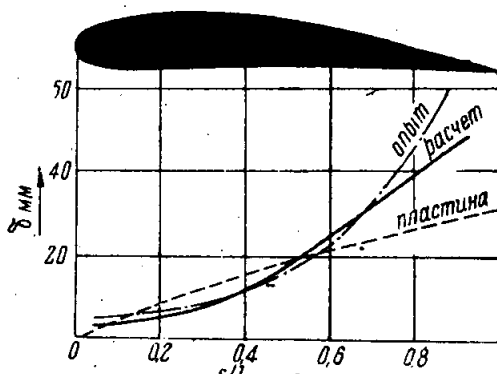
\* Z. F. M. 1932 г., № 7.



Фиг. 37. Профиль крыла самолета и распределение давлений по верхней поверхности его при опытах Otto Cuno.



Фиг. 38. Результаты манометрических измерений Сипо поля скоростей на крыле в полете. Пунктиром показано изменение толщины пограничного слоя.



Фиг. 39. Сравнение теоретического и экспериментального распределения толщины пограничного слоя на крыле в опытах Сипо.

Сопоставление обоих результатов представлено на фиг. 39. Некоторое расхождение кривых вблизи задней кромки может быть объяснено влиянием последующего отрыва граничного слоя.

В качестве второго примера приведем расчет распределения слоя трения вдоль профиля Жуковского, с относительной толщиной

$$\frac{d}{l} = 13\%.$$

Распределение давления по профилю при угле атаки  $\alpha = 0^\circ$  представлено на фиг. 40. Там же справа дана шкала для функции

$$F(s) = 1 - \frac{p - p_0}{q_0}.$$

Графическое интегрирование позволило и в этом случае построить кривые изменения толщины граничного слоя (фиг. 41) для различных скоростей обдувки:

$$U_0 = 20, 40 \text{ и } 60 \text{ м/сек.}$$

При расчете было принято (для воздуха)

$$\nu = 0,15 \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Примерно на 10% развертки профиля, соответствующим зоне падения давления, граничный слой нарастает весьма медленно, но уже на расстоянии  $\sim 2 \text{ см}$  (фиг. 42) критическое число Рейнольдса  $R_{\text{кр}} = \frac{U_0 s}{\nu}$ , отвечающее полной турбулизации слоя, оказывается превзойденным.

Как это следует из формулы (175a) с увеличением скорости обдувки  $U_0$ , толщина граничного слоя уменьшается пропорционально  $\sqrt[5]{U_0}$  (фиг. 41).

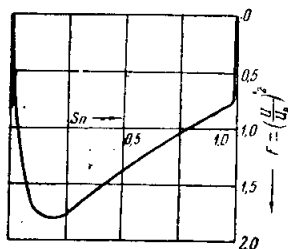
В целях получения аналитического выражения для толщины граничного слоя, образованного вдоль профиля, можно с достаточной степенью точности положить:

1) для зоны падения давления

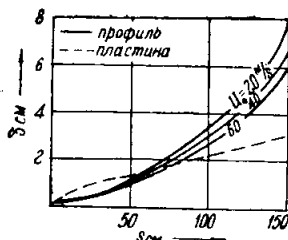
$$\frac{p - p_0}{q_0} = 1 - b_1 \left( \frac{s_1}{l} \right),$$

тогда

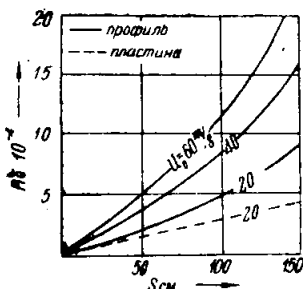
$$F_1 = b_1 \left( \frac{s_1}{l} \right)$$



Фиг. 40. Распределение давления по профилю Жуковского с относительной толщиной 13%.



Фиг. 41. Распределение толщины пограничного слоя вдоль профиля Жуковского при различных скоростях  $U_0$  набегающего потока. Пунктиром показано распределение толщины слоя трения вдоль пластины.



Фиг. 42. Изменение числа Рейнольдса  $Re_0 = \frac{U_0 s}{\nu}$  по длине профиля Жуковского.

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta_1}{l}\right)^{1-m} &= -\frac{G}{B} R_e^m b_1^{\frac{A}{B}} \left(\frac{s_1}{l}\right)^{\frac{A}{B}} \int_0^{\frac{s_1}{l}} \left[b_1 \cdot \frac{s_1}{l}\right]^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} d\left(\frac{s_1}{l}\right) = \\ &= -\frac{G}{B} \cdot R_e^m \cdot b_1^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{m}{2} - \frac{A}{B} + 1} \left(\frac{s_1}{l}\right)^{\frac{m}{2} + 1}. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая значение постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $G$  и  $m$ , согласно (171), окончательно находим:

$$\frac{\delta_1}{l} = 0,161 R_e^{-\frac{1}{5}} \cdot b_1^{-\frac{1}{10}} \left(\frac{s_1}{l}\right)^{0,7} \quad (176)$$

Аналогично:

2) для зоны возрастания давления

$$\frac{p-p_0}{q_0} = -a + b_2 \left(\frac{s_2}{l}\right)$$

и, следовательно,

$$F_2 = 1 + a - b_2 \left(\frac{s_2}{l}\right) = c - b_2 \left(\frac{s_2}{l}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{\delta_2}{l}\right)^{1-m} = -\frac{G}{B} \cdot R_e^m \left(c - b_2 \frac{s_2}{l}\right)^{\frac{A}{B}} \int^{\frac{s_2}{l}} \left[c - b_2 \frac{s_2}{l}\right]^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} d\left(\frac{s_2}{l}\right)$$

и

$$\frac{\delta_2}{l} = 0,37 c^{-0,1} \left(\frac{s_2}{l}\right)^{\frac{4}{5}} R_e^{-\frac{1}{5}} \left(1 + 1,644 \frac{b_2 s_2}{cl}\right). \quad (177)$$

Сравнивая полученные результаты (176), (177) с распределением толщины пограничного слоя вдоль пластины\*

$$\frac{\delta_{пл}}{l} = 0,37 R_e^{-\frac{1}{5}} \left(\frac{s}{l}\right)^{0,8} \quad (178)$$

приходим к следующему заключению:  
для зоны падения давления

$$\frac{\delta_1}{\delta_{пл}} = 0,434 b_1^{-\frac{1}{10}} \left(\frac{s_1}{l}\right)^{-\frac{1}{10}},$$

\* У пластины

$$p = p_0 \quad F = 1$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\delta_{пл}}{l}\right)^{1-m} = -\frac{G}{B} R_e^m \left(\frac{s}{l}\right).$$

откуда, подставляя значения постоянных согласно (171а), получаем формулу (178).



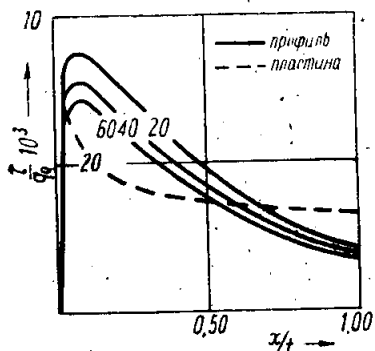
и так как  $b_1$  значительно больше 1, толщина слоя трения у профиля в этой области меньше, чем у пластины.

При этом расхождение является тем более значительным, чем больше перепад давления, характеризуемый величиной  $b_1$ .

В зоне возрастания давления

$$\frac{\delta_2}{\delta_{пл}} = c^{-0,1} \left( 1 + 1,644 \cdot \frac{b_2 s_2}{cl} \right)$$

толщина слоя на профиле по мере приближения к задней кромке становится значительно больше толщины пограничного слоя у пластины. При этом с увеличением коэффициента  $c$  расхождение кривых несколько сглаживается.



Фиг. 43. Изменение интенсивности касательных сил по длине профиля для различных значений скорости набегающего потока  $U_0 = 20, 40, 60$  м/с. Пунктиром показана кривая

$\frac{\tau}{q_0}$  для пластины.

Приведенное выше сравнение профиля с пластиной можно дополнить сравнительным изучением распределения напряжений трения вдоль их поверхности (фиг. 43).

В точке раздела потока

$$\frac{\tau}{q_0} = 0.$$

Далее в непосредственной близости к точке раздела напряжение  $\tau$ , отвечающее еще сравнительно небольшим числам Рейнольдса, приобретает сразу значительную величину и притом превышающую соответствующее значение на пластине ( $\delta_{пл} > \delta_{проф}$ ). Дальнейшее быстрое падение

$$\frac{\tau}{q_0} = \frac{\tau}{q} \cdot \frac{q}{q_0} = \frac{\tau}{q} \cdot F$$

объясняется уменьшением относительного трения  $\frac{\tau}{q}$  в связи с ростом  $R_\delta$ , сопровождаемое одновременным уменьшением значений функции  $F$ .

Аналогично приведенному выше изучим распределение толщины пограничного слоя вдоль тела вращения.

Для этого предварительно обобщим интегральное соотношение Кармана, выведенное для двухразмерного потока на случай обтекания аксиально симметричного тела (фиг. 44): двумя коническими поверхностями, образующие которых нормальны к поверхности профиля, выделим элементарный объем, ограниченный поверхностью корпуса и линиями тока, проходящими через граничные точки второго сечения.

Обозначим через  $r_1$  расстояние произвольного элемента поверхности сечения от оси вращения.

Количество движения  $I$  и расход жидкости  $Q$ , протекающей в единицу времени через первое сечение граничного слоя, составят:

$$I = \int_0^{\delta} \rho u \cdot u \cdot 2\pi r_1 \cdot dy = 2\pi \int_0^{\delta} \rho u^2 \cdot r_1 dy; \quad (179)$$

$$Q = \int_0^{\delta} u \cdot 2\pi r_1 \cdot dy = 2\pi \int_0^{\delta} u \cdot r_1 \cdot dy. \quad (180)$$

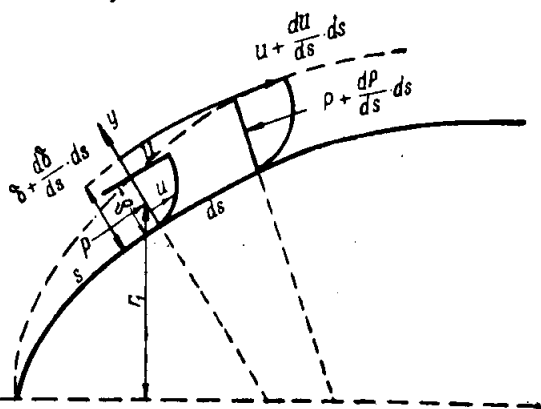
В соответствии с этим, количество движения и расход жидкости во втором сечении

$$I + \frac{dI}{ds} \cdot ds; \quad Q + \frac{dQ}{ds} \cdot ds.$$

Втекающее через пограничную поверхность количество жидкости  $\frac{dQ}{ds} \cdot ds$  вносит в рассматриваемый объем количество движения, равное

$$\rho U \frac{dQ}{ds} \cdot ds.$$

Таким образом, общее приращение количества движения за единицу времени (в направлении, касательном к поверхности профиля в рассматриваемом месте) составляет



Фиг. 44. К выводу интегрального условия Кармана для тела вращения.

$$I + \frac{dI}{ds} \cdot ds - I - \rho U \frac{dQ}{ds} \cdot ds = \frac{dI}{ds} \cdot ds - \rho U \frac{dQ}{ds} \cdot ds$$

Импульс сил, действующих на рассматриваемый объем за единицу времени, равен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{силы давления на} \\ \text{поверхностях сечения} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} p \int_0^{\delta+ds} 2\pi r_1 dy - \left( p + \frac{dp}{ds} \cdot ds \right) \int_0^{\delta} 2\pi r_1 dy = \\ = - \frac{dp}{ds} \cdot ds \cdot 2\pi \int_0^{\delta+ds} r_1 dy = \\ = - \frac{dp}{ds} \cdot ds \left[ \int_0^{\delta} r_1 dy + \int_{\delta}^{\delta+ds} r_1 dy \right]; \end{array} \right.$$

силы трения на поверхности профиля  $-\tau \cdot 2\pi r \cdot ds$  ( $r$  — радиус вращения элемента профиля).

Согласно закону импульса

$$\frac{dI}{ds} \cdot ds - \rho U \frac{dQ}{ds} \cdot ds = - \frac{dp}{ds} \cdot ds \cdot 2\pi \left[ \int_0^{\delta} r_1 dy + \int_{\delta}^{\delta+d\delta} r_1 dy \right] - \tau \cdot 2\pi r \cdot ds,$$

откуда после подстановки выражений (179) и (180) и перехода к пределу, окончательно находим:

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho u^2 r_1 dy - \rho U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} u r_1 dy = - \frac{dp}{ds} \int_0^{\delta} r_1 dy - \tau \cdot r. \quad (181)$$

Согласно фиг. 45

$$r_1 = r + y \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол, образованный касательной к образующей с осью тела.

Вследствие того, что обычно на значительной части длины тела вращения даже максимальное значение  $y$ , равное  $\delta$ , мало по сравнению с  $r$  (последнее условие нарушается в кормовой оконечности) в целях упрощения будем предполагать в дальнейшем

$$r_1 \cong r.$$

Тогда уравнение (181) перепишется в форме:

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho r u^2 dy - U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho r u dy = - \frac{dp}{ds} \int_0^{\delta} r dy - r \tau_0. \quad (181a)$$

При няв распределение скоростей в турбулентном граничном слое по степенному закону:

$$u = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (156)$$

последовательно находим:

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = U^2 \delta \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad \int_0^{\delta} u \cdot dy = U \delta \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho r u^2 dy = \frac{1}{2n+1} \rho \cdot \frac{d}{ds} (r U^2 \delta) =$$

$$= \frac{\rho}{2n+1} \left\{ U^2 \delta \cdot \frac{dr}{ds} + 2r U \delta \cdot \frac{dU}{ds} + r U^2 \frac{d\delta}{ds} \right\}$$

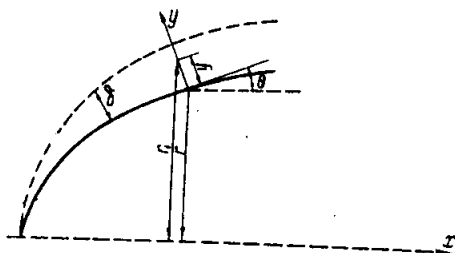
$$U \frac{d}{ds} \int_0^{\delta} \rho r u dy = \frac{\rho}{n+1} U \frac{d}{ds} (r U \delta) =$$

$$= \frac{\rho}{n+1} \left\{ U^2 \delta \cdot \frac{dr}{ds} + r U \delta \cdot \frac{dU}{ds} + r U^2 \frac{d\delta}{ds} \right\}$$

$$\frac{dp}{ds} \int_0^{\delta} r dy = r \cdot \delta \frac{dp}{ds}.$$

Подставив полученные результаты в уравнение (181a), после деления обеих частей равенства на  $r$  и приведения подобных членов, получим:

$$\rho U^2 \delta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \rho U \delta \cdot \frac{dU}{ds} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \rho U^2 \frac{d\delta}{ds} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = -\delta \cdot \frac{dp}{ds} - \tau_0. \quad (182)$$



Фиг. 45. Связь между радиусом вращения  $r$  элемента граничного слоя и радиусом вращения  $R$  элемента поверхности тела.

Введем попрежнему следующие обозначения:

$U_0$  — скорость равномерного набегающего потока;  
 $p_0, q_0 = \frac{\rho U_0^2}{2}$  — соответственно статическое давление и скоростной напор невозмущенного потока (на достаточном удалении от тела);  
 $q = \frac{\rho U^2}{2}$  — скоростной напор на границе слоя трения и потенциального потока,

$$F(s) = \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 = \frac{q}{q_0} = 1 - \frac{p - p_0}{q_0} \quad (183)$$

и

$$\frac{dF}{ds} = - \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{q_0} \right) \quad (184)$$

Поделив обе части уравнения (182) на  $q_0$ , найдем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 \cdot \frac{2}{r} \cdot \delta \cdot \frac{dr}{ds} + \left( \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot 2 \cdot \delta \times \\ & \times \frac{U}{U_0} \cdot \frac{d}{ds} \left( \frac{U}{U_0} \right) + \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot 2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 \frac{d\delta}{ds} = - \frac{\tau}{q_0} - \delta \times \\ & \times \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{q_0} \right). \end{aligned} \quad (185)$$

В соответствии с формулой (156), положим:

$$\tau = \xi \cdot q \cdot R_\delta^m = \xi \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \left( \frac{U \delta}{\nu} \right)^m \quad (157)$$

где  $\xi$  и  $m$  — постоянные числа, а  $R_\delta = \frac{U\delta}{\nu}$  — число Рейнольдса, отнесенное к толщине пограничного слоя.

В таком случае, согласно (183), (184) и (157) уравнение (185) примет вид:

$$\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \cdot F \cdot \frac{2}{r} \cdot \delta \cdot \frac{dr}{ds} + \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \delta \cdot \frac{dF}{ds} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \cdot 2 \cdot F \frac{d\delta}{ds} = -\xi \cdot \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)^m \cdot F + \delta \cdot \frac{dF}{ds}. \quad (186)$$

Далее, введя в уравнение (186) скорость набегающего потока

$$\frac{U\delta}{\nu} = \delta \cdot \frac{U_0}{\nu} \cdot F^{1/2}$$

и, разделив обе части уравнения на  $\delta^m \cdot F$ , найдем:

$$\begin{aligned} -\xi \cdot F^{\frac{m}{2}} \left(\frac{U_0}{\nu}\right)^m &= \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{2}{r} \cdot \delta^{1-m} r' + \\ &+ \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \delta^{1-m} \cdot \frac{F'}{F} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \times \\ &\times 2 \cdot \delta' \cdot \delta^{-m} - \delta^{1-m} \cdot \frac{F'}{F} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\xi \cdot F^{\frac{m}{2}} \left(\frac{U_0}{\nu}\right)^m &= \left[ 2 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{r'}{r} - \left(1 - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \right] \times \\ &\times \frac{F'}{F} \cdot \delta^{1-m} + 2 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \delta^{-m} \cdot \delta'. \end{aligned} \quad (187)$$

Введем замену переменных, положив:

$$z = \delta^{1-m}.$$

Тогда

$$\frac{z'}{1-m} = \delta^{-m} \cdot \delta'.$$

Обозначив по прежнему

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1-m}{2} \\ B &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ G &= \xi \cdot \frac{1-m}{2} \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

после подстановки в уравнение (187) получим:

$$z' + \left[ \left(1-m\right) \frac{r'}{r} - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \right] z + \frac{G}{B} \left(\frac{U_0}{\nu}\right)^m \cdot F^{\frac{m}{2}} = 0. \quad (188)$$

Для интегрирования последнего уравнения, введем вторично замену переменных:

$$z = t \cdot f.$$

В таком случае, уравнение (188) переписывается в виде:

$$t'f + tf' + \left[ \left( 1 - m \right) \frac{r'}{r} - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \right] tf + \frac{G}{B} \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \cdot F^{\frac{m}{2}} = 0$$

или

$$\left\{ t' + \left[ \left( 1 - m \right) \frac{r'}{r} - \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} \right] t \right\} f + tf' + \frac{G}{B} \cdot \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \cdot F^{\frac{m}{2}} = 0. \quad (189)$$

Определим переменную  $t$  из условия:

$$\frac{t'}{t} = \frac{A}{B} \cdot \frac{F'}{F} - (1 - m) \frac{r'}{r}.$$

Тогда

$$\ln t = \frac{A}{B} \ln F - (1 - m) \ln r$$

и, следовательно,

$$t = \frac{F^{\frac{A}{B}}}{r^{1-m}}.$$

При выбранном таким образом аналитическом выражении переменной  $t$  уравнение (189) упрощается:

$$\frac{F^{\frac{A}{B}}}{r^{1-m}} \cdot f' + \frac{G}{B} \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \cdot F^{\frac{m}{2}} = 0,$$

и интеграл его представляется в виде:

$$f = - \frac{G}{B} \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \int r^{1-m} \cdot F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} \cdot ds.$$

Окончательно:

$$\delta^{1-m} = z = f \cdot t = - \frac{G}{B} \left( \frac{U_0}{v} \right)^m \cdot \frac{F^{\frac{A}{B}}}{r^{1-m}} \int r^{1-m} \cdot F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} \cdot ds \quad (190)$$

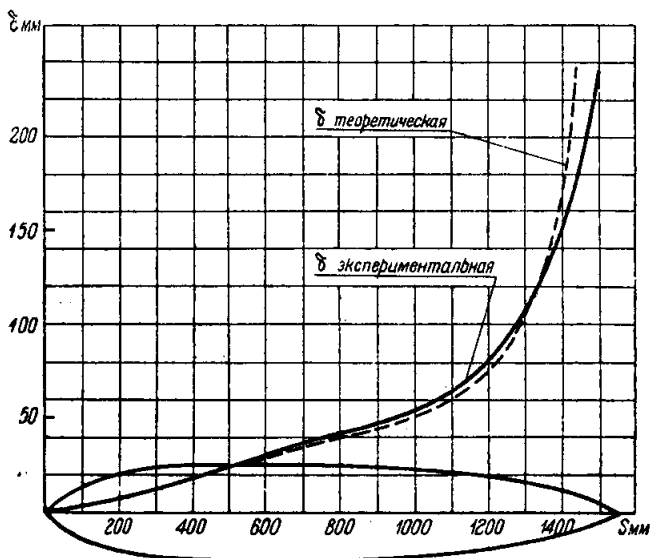
или в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta}{l} \right)^{1-m} &= - \frac{G}{B} \left( \frac{U_0 l}{v} \right)^m \cdot \frac{F^{\frac{A}{B}}}{r^{1-m}} \cdot \int_0^{s/l} r^{1-m} \cdot F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} \cdot d \left( \frac{s}{l} \right) = \\ &= - \frac{G}{B} R_c^m \cdot \frac{F^{\frac{A}{B}}}{r^{1-m}} \cdot \int_0^{s/l} r^{1-m} \cdot F^{\frac{m}{2} - \frac{A}{B}} \cdot d \left( \frac{s}{l} \right), \quad (191), \end{aligned}$$

де  $l$  — длина тела вращения в направлении потока;

$R_r = \frac{Ul}{\nu}$  — число Рейнольдса, отнесенное к скорости набегающего потока и длине профиля\*.

В целях экспериментальной проверки полученной формулы было проведено сравнение расчетного распределения толщины граничного слоя с результатами весьма тщательно поставленных американских опытов, проведенных над моделью дирижабля „Акрон“.



Фиг. 46. Сравнение теоретического и экспериментального распределения толщины пограничного слоя вдоль поверхности модели дирижабля „Акрон“.

При этом в соответствии с опытами при расчете было принято:

$$n = \frac{1}{7}$$

и, следовательно,

$$m = -\frac{1}{4};$$

$$\zeta = 0,045.$$

Результаты сравнения, приведенные на фиг. 46, свидетельствуют о достаточности первого приближения для значительной части длины модели, а наибольшие расхождения теоретической кривой с опытной, наблюдаемые в кормовой оконечности, объясняются принятыми в изложенной теории допущениями:

а) об отсутствии отрыва струй;

\* В таком виде решение (191) было получено одновременно за границей Милликоном, а у нас в Союзе К. К. Федяевским.

б) о малости толщины слоя по сравнению с радиусом тела вращения, дающими в кормовой оконечности наибольшую ошибку.

Знание толщины пограничного слоя  $\delta$  и скоростной функции  $F$  позволяет подсчитать интенсивность силы трения, определяемую равенством:

$$\frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \zeta \cdot \left( \frac{U\delta}{\nu} \right)^m = \zeta \left( \frac{U}{U_0} \right)^m \cdot \left( \frac{U_0}{\nu} \right)^m \delta^m = \zeta \cdot F^{\frac{m}{2}} \times \\ \times \left( \frac{U_0}{\nu} \right)^m \cdot \delta^m. \quad (192)$$

На фиг. 47 приведено сравнение расчета по формуле (192) с величиной касательного напряжения, определенной на основании замеренных потерь количества движения в граничном слое:

$$\int_0^\delta \rho u (U - u) dy, \quad (193)$$

результаты которого можно оценить, как весьма обнадеживающие.

Отбрасывание допущения (б), позволившего исключить из приведенного анализа величину угла  $\theta$ , и сохранение зависимости:

$$r_1 = r + y \cos \theta$$

в полном виде, приводит к значительным усложнениям окончательного результата.

Не останавливая внимание читателя на ходе выкладок, характер которых остается таким же, как и в приведенных выше 2 расчетах, сообщим только окончательный вид уравнения, служащего для отыскания толщины граничного слоя:

$$\left( \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) U r \delta \cdot \frac{dU}{ds} + \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) U^2 \delta \frac{dr}{ds} + \\ + \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) U^2 r \frac{d\delta}{ds} + \left( \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+2} \right) U \cos \theta \delta^2 \frac{dU}{ds} - \\ - \left( \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+2} \right) U^2 \sin \theta \cdot \delta^2 \frac{d\theta}{ds} + 2 \left( \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+2} \right) U^2 \delta \cos \theta \frac{d\delta}{ds} = \\ = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{ds} \left( r \cdot \delta + \cos \theta \cdot \frac{\delta^2}{2} \right) - \frac{\tau_0}{\rho} \cdot \tau. \quad (194)$$

и принадлежащего к типу нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$A(s) \cdot \delta + B(s) \frac{d\delta}{ds} + C(s) \delta^2 + D(s) \cdot \delta \cdot \frac{d\delta}{ds} + E(s) \cdot \delta^m + F(s) = 0,$$

решаемых приближенными методами математического анализа.

Изложенное выше позволяет сделать следующие общие заключения.

1. Относительная толщина граничного слоя меняется пропорционально  $Re^{\frac{m}{1-m}}$  (в случае  $n=7$  — обратно пропорционально корню пя-



той степени из числа Рейнольдса) и, следовательно, при переходе от модели к натуре часть оперения (выступающие части, винт), работающая в граничном слое, уменьшается (фиг. 48).

В воздухоплавании предложен (К. К. Федяевским) следующий прием учета этого обстоятельства.

Если принять скорость вне пограничного слоя в области оперения постоянной и равной скорости на внешней границе слоя трения, то относительная эффективность работы частей оперения вне ( $s_1$ ) и внутри пограничного слоя ( $s_2$ ) может быть приближенно оценена величиной:

$$h = \frac{\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u^2 dy}{U^2} = \frac{1}{2n+1}.$$

Эффективная площадь оперения, представляющая собой площадь равноэффективного оперения, работающего в потоке с постоянной скоростью, равна:

$$\bar{S} = S_1 + hS_2.$$

Зная распределения толщины пограничного слоя в области оперения отдельно для натуре и модели, можно подсчитать величину поправочного множителя при коэффициенте лобового сопротивления выступающих частей, полученного из модельных испытаний:

$$e = \frac{\bar{S}_{\text{нат}}}{k^2 \bar{S}_{\text{мод}}},$$

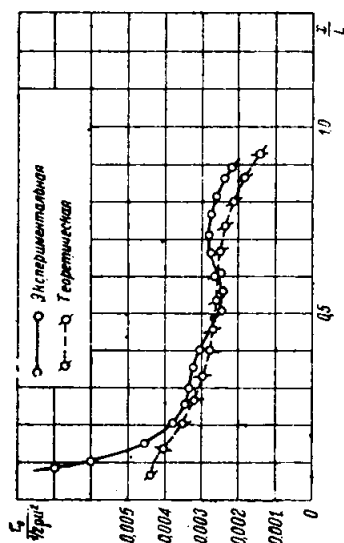
где  $k$  — масштаб модели;

$\bar{S}_{\text{нат}}$  и  $\bar{S}_{\text{мод}}$  — эффективная поверхность оперения в натуре и на модели соответственно. Таким образом,

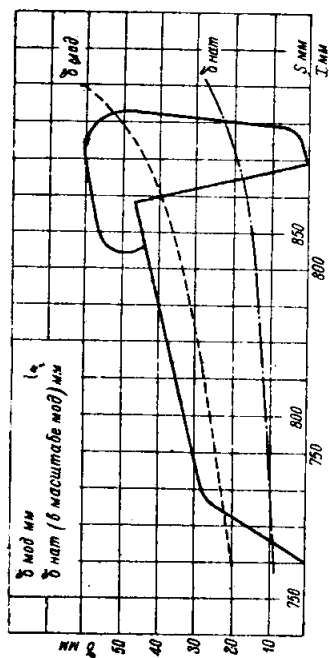
$$(C_{y \text{ опер}})_{\text{нат}} = (C_{y \text{ опер}})_{\text{мод}} \cdot e.$$

2. В обоих приведенных выше исследованиях предполагалось, что распределение скоростей в граничном слое подчиняется степенному закону, причем показатель степени  $\frac{1}{n}$  сохраняет свое значение по всей длине профиля или тела вращения.

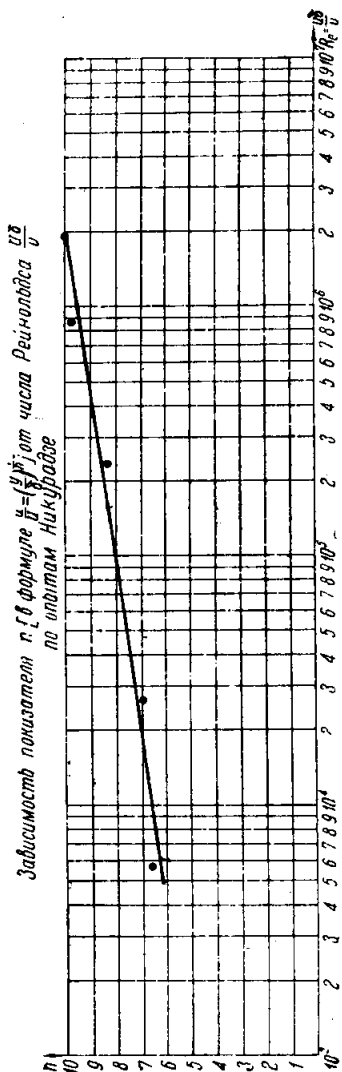
Вместе с тем, в английских опытах над моделью дирижабля „R-101“ в малом масштабе величина показателя степени изменялась в пределах  $\frac{1}{3,6}$  до  $\frac{1}{4,7}$ , на модели, исполненной в большем масштабе, значение ее варьировалось в диапазоне  $5,5 \div 6,3$  и только при больших числах Рейнольдса на модели дирижабля „Акрон“ наблюдаемая на значительной части длины модели величина  $n$  составила  $n=7$ , отклоняясь от этого значения в носовой и кормовой оконечностях модели.



Фиг. 47. Сравнение теоретического и экспериментального распределения интенсивности сил трения вдоль поверхности модели дирижабля "Акрон".



Фиг. 48. Сравнение толщины граничного слоя на модели и в натуре ( $\delta$  натуральная нанесена в масштабе модели) в целях определения эффективной части оперения.



Фиг. 49. Зависимость показателя степеней  $n$  в формуле

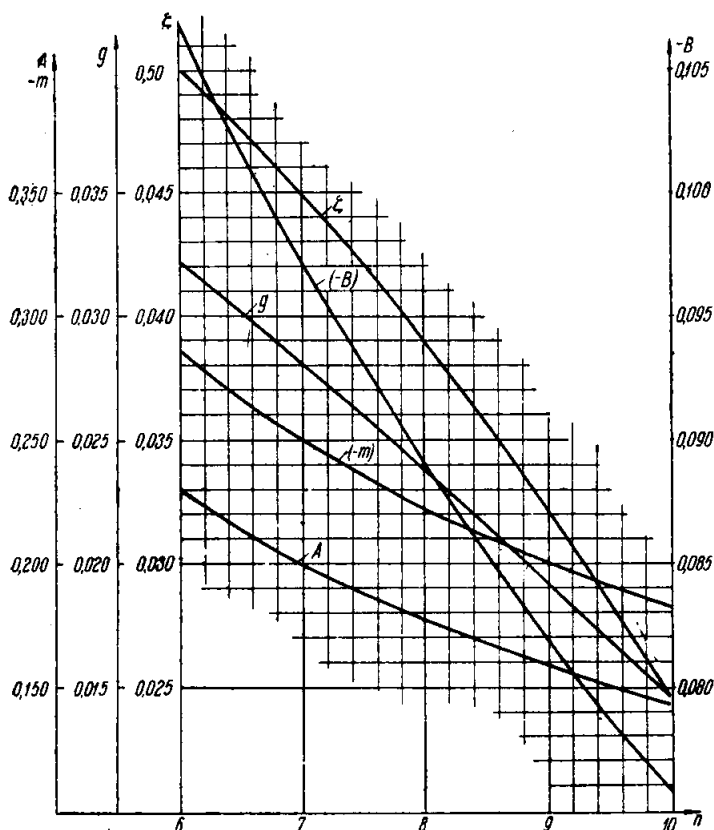
$$\frac{n}{U} = \left( \frac{y}{y_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

от числа Рейнольдса по опытам Никурадзе.

Измерения, проведенные Беккером в натуре, также подтверждают переменность коэффициента  $n$  по длине корабля, давая следующие значения для двух мест замера:

$$\text{при } R_{e\delta} = 3,42 \cdot 10^6, \quad n = \frac{1}{7,4};$$

$$\text{при } R_{e\delta} = 5,78 \cdot 10^6, \quad n = \frac{1}{9,08}.$$



Фиг. 50. Зависимость коэффициентов  $m$ ,  $A$ ,  $B$  и  $G$ , определяющих величины  $\tau$  и  $\delta$  в функции от показателя степени  $n$ .

Ниже (фиг. 49) приведена зависимость коэффициента  $n$  от числа Рейнольдса  $Re$  по данным опытов Никурадзе над гладкими трубами.

На следующей фиг. 50 представлено изменение коэффициентов  $m$ ,  $A$ ,  $B$  и  $G$ , определяемых равенствами (157) и (171), в функции от показателя степени  $n$ .

Для этого предварительно по формуле (157) нами были определены значения  $m$ , соответствующие найденным Никурадзе значениям

показателя степени, а затем величины  $\zeta$  была подсчитаны по формуле

$$\zeta = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U^2 \left( \frac{Ur}{\nu} \right)^m}.$$

Соответствующие расчеты приведены в следующей таблице.

Таблица 5

| $Re = \frac{u \cdot d}{\nu}$ | $\frac{1}{n}$ | $-m$  | $\frac{1}{V\psi}$ | $\frac{\tau_0}{\rho \frac{U^2}{2}}$ | $Re = \frac{Ur}{\nu}$ | $\zeta$ |
|------------------------------|---------------|-------|-------------------|-------------------------------------|-----------------------|---------|
| $9 \cdot 10^3$               | 6,5           | 0,263 | 13,95             | $5,14 \cdot 10^{-3}$                | $5,65 \cdot 10^3$     | 0,0499  |
| $4,3 \cdot 10^4$             | 7             | 0,250 | 16,69             | $3,60 \cdot 10^{-3}$                | $2,66 \cdot 10^4$     | 0,0456  |
| $3,96 \cdot 10^5$            | 8,5           | 0,211 | 19,84             | $2,54 \cdot 10^{-3}$                | $2,32 \cdot 10^5$     | 0,0353  |
| $1,54 \cdot 10^6$            | 9,8           | 0,185 | 22,0              | $2,06 \cdot 10^{-3}$                | $8,85 \cdot 10^5$     | 0,0259  |
| $3,24 \cdot 10^6$            | 10            | 0,182 | 23,2              | $1,77 \cdot 10^{-3}$                | $1,93 \cdot 10^6$     | 0,0247  |

## ГЛАВА VI

### О ВЛИЯНИИ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ НА ТРЕНИЕ И ВИХРЕВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Распределение скоростей, давлений, толщины граничного слоя, сил трения на двугольном цилиндрическом профиле. Отыскание мест отрыва при ламинарном обтекании

В настоящей главе автор поставил своей целью исследовать влияние (продольной) кривизны симметричного профиля, вполне погруженного в вязкую жидкость, на основные характеристические величины потока:

1. Скорости на внешней границе слоя трения.
2. Давления на поверхности профиля.
3. Распределение толщины пограничного слоя вдоль контура.
4. Интенсивность касательных сил на поверхности профиля.
5. Суммарное сопротивление трения.
6. Положение места отрыва при ламинарном режиме.

Решение перечисленных задач ведется методами современной гидродинамики вязкой жидкости, основанными на следующих положениях;

а) в относительно тонком пограничном слое, в котором скорость изменяется от нулевого значения на поверхности до значения, равного скорости потенциального потока, давление практически не зависит от координаты, перпендикулярной к поверхности тела, и полностью определяется внешним (потенциальным) потоком (Прандтль, 1904 г.);

б) распределение скоростей в турбулентном граничном слое с достаточной степенью приближения подчиняется степенному закону:

$$u = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (156)$$

где  $u$  — скорость внутри слоя трения в точке, удаленной от поверхности (по нормали к ней) на расстояние  $y$ ;

$\delta$  — толщина пограничного слоя в рассматриваемом сечении;

$U$  — скорость на внешней границе слоя трения (при  $y = \delta$ ).

в) в соответствии с последним напряжением сил трения

$$\tau = \zeta \cdot \rho \frac{U^2}{2} \cdot \left( \frac{U\delta}{\nu} \right)^r, \quad (157)$$

где  $\zeta$  — некоторая безразмерная постоянная,

$\rho$  — плотность жидкости;

$\nu$  — кинематический коэффициент вязкости;

$r$  — показатель степени, равный

$$r = -\frac{2n}{n+1}.$$

Согласно опытам Saph'a, Schoder'a Nusselt'a, Lang'a и др., обработанных Блазиусом (1913 г.), а затем Прандтлем и Карманом (1921 г.)

$$n = \frac{1}{7}, \quad r = -\frac{1}{4}; \quad \zeta = 0,045. \quad (195)$$

В свете новейших воззрений (см. главу VII) распределение скоростей в граничном слое подчиняется зависимости

$$\frac{u}{v_x} = A \log \frac{v_* \cdot y}{\nu} + B^* \quad (196)$$

и степенные формулы (156) с различными показателями степени представляют в определенных областях чисел Рейнольдса только известное приближение к более общему „универсальному логарифмическому закону“ (196).

Вместе с тем Müller и Cuno (для цилиндрических тел), Millikan и ряд экспериментаторов в Америке (для тел вращения) до сего времени наблюдали столь хорошую сходимость с экспериментом расчетов, проведенных на основе закона  $\frac{1}{7}$ , что в предлагаемой работе мы будем также принимать значения коэффициентов  $r$ ,  $n$  и  $\zeta$  постоянными и равными (195).

Кроме того, имея в виду цели практического приложения результатов к объектам кораблестроения, мы будем при расчетах предполагать, что уже непосредственно за точкой разветвления потока (форштевнем) пограничный слой вполне турбулентен, а место отрыва струй близко к кормовой оконечности (ахтерштевню). Справедливость обоих допущений, обычно в негласной форме принимаемых при аналогичных расчетах, будет оценена в дальнейшем специальном исследовании.

\* \* \*

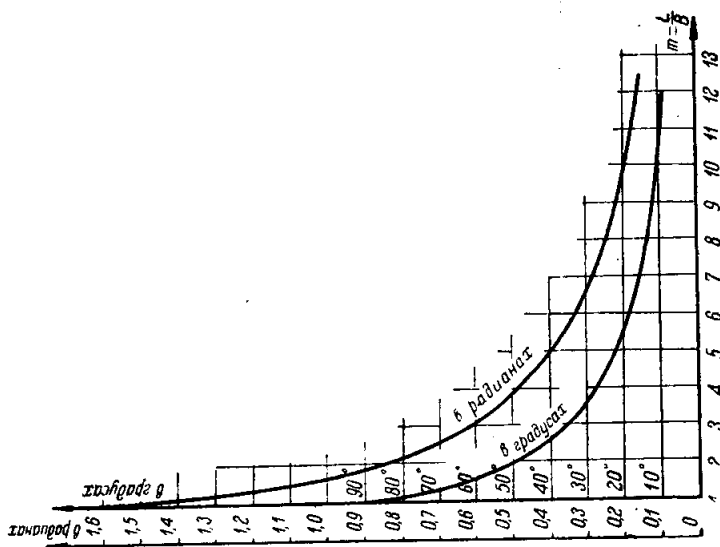
В качестве объекта исследования мы выбрали контур, образованный двумя дугами кругов (двуугольник), с переменным отношением длины хорды  $L = 2l$  к толщине профиля  $B = 2b$  (фиг. 51).

Для последующего нам понадобится установить связь между углом  $\beta$  и отношением:

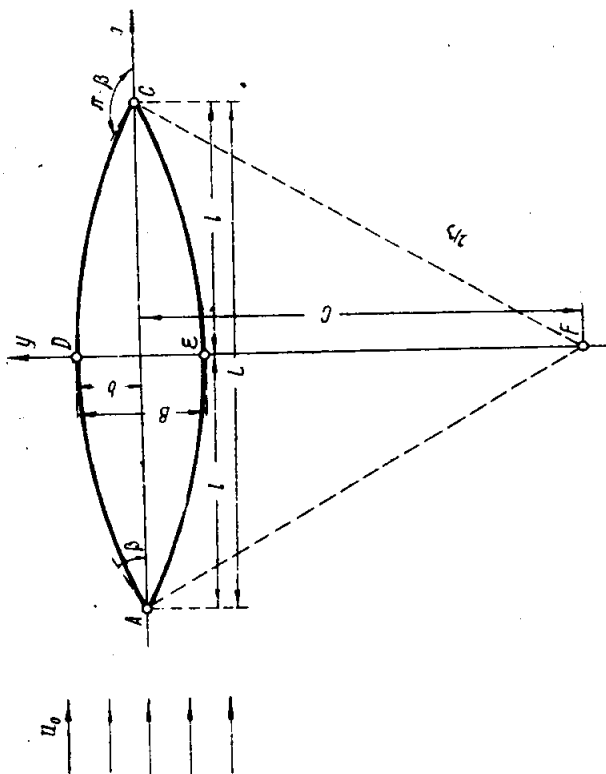
$$m = \frac{L}{B} = \frac{l}{b},$$

характеризующим кривизну профиля.

\* Здесь  $v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные, определенные из опытов в трубах.



Фиг. 52. Кривая углов входа круговых водерлиний в функции от отношения  $m = \frac{L}{B}$  (в радианах и градусах).



Фиг. 51. Двухугольник (основные обозначения).

В связи с этим, напомним уравнение дуги  $ADC$  круга с центром в точке  $F$ :

$$x^2 + (y + c)^2 = (c + b)^2. \quad (197)$$

Из условия при  $y = 0$ ,  $x = l$  находим:

$$c = \frac{l^2 - b^2}{2b}. \quad (198)$$

В таком случае уравнение (197) перепишется в виде:

$$f(x, y) = x^2 + \left(y + \frac{l^2 - b^2}{2b}\right)^2 - \left(\frac{l^2 + b^2}{2b}\right)^2 = 0. \quad (199)$$

Угол наклона касательной в произвольной точке контура к оси абсцисс определяется равенством:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{x}{y + \frac{l^2 - b^2}{2b}}, \quad (200)$$

откуда после подстановки  $x = -l$ ,  $y = 0$  получаем:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{-l}{\frac{l^2 - b^2}{2b}} = \frac{2bl}{l^2 - b^2} = \frac{2m}{m^2 - 1}. \quad (201)$$

Соответствующая (201) кривая углов входа ватерлиний представлена на фиг. 52.

Для отыскания скоростей и давлений в потоке преобразуем заданный контур в единичный круг. При этом для упрощения переделок положим

$$l = \frac{L}{2} = 1.$$

Дробно-линейное преобразование:

$$z_1 = \frac{z + 1}{z - 1} \quad (202)$$

переводит точки

$$z = -1; \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = +1$$

$$z_1 = 0; \quad z_1 = -1 \quad \text{и} \quad z_1 = \infty$$

соответственно так, что дуги, образующие двуугольник, переходят в полупрямые (фиг. 53), идущие из начала координат в бесконечность, а сам двуугольник в результате преобразования будет представлять собой угол с вершиной в начале координат, равный  $2\beta$  (конформность преобразования нарушается только в так называемой „особой“ точке  $z = +1$ ).



В самом деле

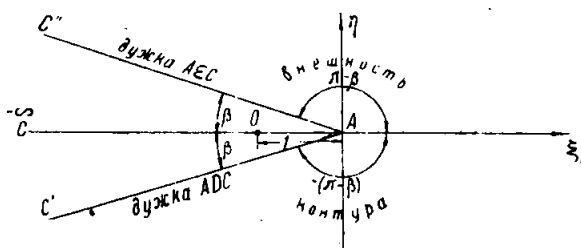
$$z_1 = \xi_1 + i\eta_1 = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + \\ + i \cdot \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2},$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}; \quad \eta_1 = -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{-2y}{x^2+y^2-1}. \quad (203)$$



Фиг. 53. Результат дробно-линейного преобразования.

$$z_1 = \frac{z+1}{z-1}$$

Для произвольной точки  $(x, y)$  на дуге  $ADC$  согласно (199):

$$x^2 + y^2 - 1 = -\frac{1-b^2}{b} \cdot y. \quad (204)$$

Аналогично этому для дуги  $AEC$ :

$$x^2 + y^2 - 1 = \frac{1-b^2}{b} \cdot y. \quad (204a)$$

Таким образом, дуга  $ADC$  преобразуется в полупрямую  $AC'$ :

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{-2y}{-\frac{1-b^2}{b} \cdot y} = \frac{2m}{m^2-1} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} -(\pi - \beta),$$

а дуга  $AEC$  в полупрямую  $AC''$ , уравнение которой

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = -\frac{2y}{\frac{1-b^2}{b} \cdot y} = -\frac{2m}{m^2-1} = \operatorname{tg} (\pi - \beta).$$

Дальнейшее преобразование

$$z_2 = z_1^k, \quad (205)$$

где

$$k = \frac{\pi}{2(\pi - \beta)} \quad (206)$$

переводит внешность угла  $AC'C''$  в правую полуплоскость, ограниченную мнимой осью (фиг. 54).

Действительно, представив  $z_1$  в виде

$$z_1 = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta),$$

находим

$$z_2 = \rho^k (\cos k\theta + i \sin k\theta).$$

Для произвольной точки на полупрямой  $AC''$

$$\theta = \pi - \beta = \frac{\pi}{2k},$$

откуда

$$z_2 = \rho^k \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$$

и следовательно, полупрямая  $AC''$  преобразуется в верхнюю часть мнимой оси. Точно также докажем, что полупрямая  $AC'$  преобразуется в нижнюю ветвь мнимой оси.

Так как при этом положительная ветвь вещественной оси  $\xi_1$ , ( $\theta = 0$ ) преобразуется в положительную вещественную полуось  $\xi_2$ , то внешность угла  $AC'C''$  отображается в правую полуплоскость комплексной переменной  $z_2$ .

Дальнейшее преобразование:

$$z_3 = z_2 e^{i\frac{\pi}{2}} = z_2 \cdot i \quad (207)$$

поворачивает радиусы-вектора точек области  $z_2$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки (точнее, в направлении положительного отсчета углов) и, следовательно, переводит внешность основного контура — двуугольника — в верхнюю полуплоскость, ограниченную вещественной осью, в которую отображаются все точки контура (фиг. 55).

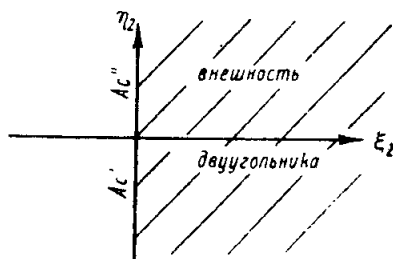
Последнее преобразование:

$$z_4 = \frac{z_3 + i}{z_3 - i} \quad (208)$$

отображает вещественную ось в контур единичного круга, а верхнюю полуплоскость  $z_3$  в его внешность.

В самом деле, ось  $\xi_3$  служит перпендикуляром, восстановленным к отрезку  $+i, -i$  из его середины, и, следовательно, для любого вещественного  $z_3$

$$|z_3 + i| = |z_3 - i|$$



Фиг. 54. Результат преобразования  $z_2 = z_1^k$

и

$$|z_4| = \left| \frac{z_3 + i}{z_3 - i} \right| = 1.$$

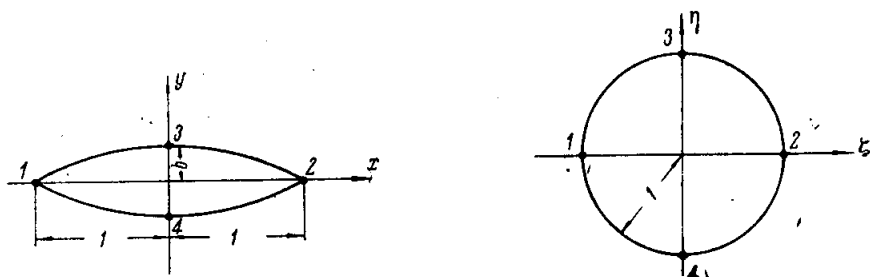
Точки, лежащие в верхней полуплоскости  $z_3$ , удалены от точки  $-i$  более, чем от точки  $i$ ,

$$\left| \frac{z_3 + i}{z_3 - i} \right| > 1$$

и, следовательно, отображаются во внешность единичного круга.



Фиг. 55. Результат преобразования  $z_3 = z_2 \cdot i$



Фиг. 56. Окончательный результат преобразования.

$$w(z) = \frac{z_1^k + 1}{z_1^k - 1}$$

Окончательно, функция, преобразующая двуугольник в единичный круг

$$w(z) = \frac{iz_1^k + i}{iz_1^k - i} = \frac{z_1^k + 1}{z_1^k - 1} \quad (209)$$

где

$$z_1 = \frac{z + 1}{z - 1} \quad (202)$$

и

$$k = \frac{\pi}{2(\pi - \beta)} \quad (206)$$

при этом (фиг. 56):

- а) точка  $z = -1$  или  $z_1 = 0$  отображается в  $\zeta = -1$ ;  
 б) "  $z = +1$  "  $z_1 = \infty$  " в  $\zeta = \frac{1 + \frac{1}{z_1^k}}{1 - \frac{1}{z_1^k}} = 1$ ;  
 в) "  $z = +bi^*$  "  $z_1 = e^{-i(\pi - \beta)}$  " в  $\zeta = \frac{e^{-ik(\pi - \beta)} + 1}{e^{-ik(\pi - \beta)} - 1} = \frac{-i + 1}{-i - 1} = i$ ;  
 г) "  $z = -bi^*$  "  $z_1 = e^{i(\pi - \beta)}$  отображается в  $\zeta = \frac{i + 1}{i - 1} = -i$ ;  
 д) "  $z = \infty$  "  $z_1 = 1$  " в  $\zeta = \infty$ .

Производная от преобразующей функции

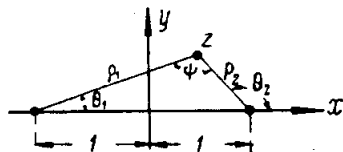
$$w'(z) = \frac{4kz_1^{k-1}}{(z_1^k - 1)^2(z - 1)^2} \quad (210)$$

\* Нахождение модуля и аргумента переменной  $z_1$  в обоих отмеченных звездочкой случаях уясняется из следующих общих положений. Согласно фиг. 57

$$\begin{aligned} z + 1 &= \rho_1 e^{i\theta_1}, \\ z - 1 &= \rho_2 e^{i\theta_2}. \end{aligned}$$

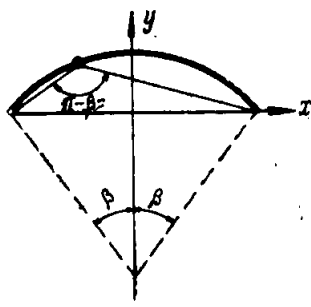
откуда

$$\frac{z + 1}{z - 1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$



Фиг. 57. Определение аргумента переменной.

$$z_1 = \frac{z + 1}{z - 1}.$$



Фиг. 58. Угол, под которым видны концы хорды двугульника, из произвольной точки его контура.

Для точек верхней полуплоскости  $\theta_2 = \theta_1 + |\psi|$  или  $\theta_1 - \theta_2 = -|\psi|$ ;  
 " " нижней "  $\theta_2 = \theta_1 - |\psi|$  или  $\theta_1 - \theta_2 = +|\psi|$ .

Таким образом, модуль переменной  $z_1$ , равен отношению расстояний рассматриваемой точки  $z$  до точек  $-1$  и  $+1$ , а аргумент равен углу  $\psi$ , под которым виден отрезок  $-1, +1$ , взятому со знаком  $+$  для точек верхней полуплоскости и знаком  $-$  для точек нижней полуплоскости.

Для точек на контуре двугульника, как это видно из фиг. 58.

$$|\psi| = \pi - \beta$$

и, следовательно,

$$\arg z_1 = \mp(\pi - \beta),$$

откуда

$$z_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\mp i(\pi - \beta)}.$$

имеет на бесконечности конечное вещественное значение

$$w'(\infty) = \frac{1}{k}. \quad (210a)$$

Для отыскания комплексного потенциала рассматриваемого потока достаточно в выражение для комплексного потенциала при обтекании единичного круга

$$f_1(\tau) = \frac{p}{2} \left( \tau + \frac{1}{\tau} \right) \quad (211)$$

подставить

$$\tau = w(z)$$

и определить постоянную  $p$  из того условия, чтобы скорость на бесконечности была равна заданной скорости набегающего потока  $U_0$ .

Таким образом, комплексный потенциал в общем случае двухразмерного потенциального обтекания

$$f(z) = f_1[w(z)] = \frac{p}{2} \left[ w(z) + \frac{1}{w(z)} \right]. \quad (212)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{1}{w^2(z)} \right] \cdot w'(z); \\ |f'(\infty)| &= U_0; \\ w(\infty) &= \infty \end{aligned}$$

и в рассматриваемом случае

$$w'(\infty) = \frac{1}{k}.$$

Отсюда

$$p = 2kU_0.$$

Окончательно, комплексный потенциал потока, обтекающего двугрульник

$$f(z) = U_0 k \left[ \frac{z_1^k + 1}{z_1^k - 1} + \frac{z_1^k - 1}{z_1^k + 1} \right] = 2U_0 k \cdot \frac{z_1^{2k} + 1}{z_1^{2k} - 1}. \quad (213)$$

Производная от него

$$f'(z) = 16k^2 U_0 z_1^{2k-1} \cdot \frac{1}{(z_1^{2k} - 1)^2} \cdot \frac{1}{(z - 1)^2}. \quad (214)$$

Согласно общей теории функций комплексного переменного модуль значения производной  $f'(z)$  равен величине скорости в соответствующей точке потока.

В частности, для точек на контуре двугрульника

$$U = |f'(z)| = \frac{16k^2 U_0 |z_1|^{2k-1}}{|z_1^{2k} - 1|^2 |z - 1|^2}, \quad (215)$$

причем

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{-i(\pi - \beta)}$$

и, следовательно,

$$z_1^{2k} = |z_1|^{2k} e^{-i(\pi - \beta) \cdot 2k} = |z_1|^{2k} \cdot e^{-i\pi} = -|z_1|^{2k}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{U}{U_0} = \frac{16 k^2 |z_1|^{2k-1}}{(|z_1|^{2k} + 1)^2 |z - 1|^2}. \quad (216)$$

Здесь  $U_0$  — скорость набегающего потока;

$U$  — „ в произвольной точке контура двугульника в случае идеальной жидкости или, что то же, скорость на внешней границе слоя трения — в случае вязкой жидкости;  $|z + 1|$  и  $|z - 1|$  — расстояния от рассматриваемой точки контура до точки  $z = -1$  и  $z = +1$  соответственно;  $|z_1| = \frac{|z + 1|}{|z - 1|}$  — их отношение;

$$k = \frac{\pi}{2(\pi - \beta)}$$

$\beta$  (угол входа ватерлиний) — угол, образованный касательной к профилю в точке разветвления потока с осью  $x$ .

Ниже в порядке анализа полученной зависимости (216) мы приводим ряд основанных на ней частных результатов.

Как это следует непосредственно из формулы (216), скорость потока в точке разветвления  $z = -1$  ( $z_1 = 0$ ):

$$U = 0.$$

Точно так же, в точке  $z = +1$  ( $z_1 = \infty$ ), вследствие

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z_1| \rightarrow \infty}} \frac{|z_1|^{2k-1}}{(|z_1|^{2k} + 1)^2 |z - 1|^2} = 0$$

находим что

$$U = 0.$$

Далее легко показать, что распределение скоростей симметрично относительно оси  $y$ .

Действительно, для 2 точек  $z$  и  $Z$ , симметрично расположенных относительно оси  $y$ ,

$$|z + 1| = |Z - 1|; |z - 1| = |Z + 1| \text{ и } |z_1| = \frac{1}{|Z_1|},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{|z_1|^{2k-1}}{(|z_1|^{2k} + 1)^2 |z - 1|^2} &= \frac{\frac{1}{|Z_1|^{2k-1}} \cdot |z_1|^{4k-2}}{\left(\frac{1}{|Z_1|^{2k}} + 1\right)^2 |z_1|^{4k} |z - 1|^2} = \\ &= \frac{|Z_1|^{2k-1}}{(|Z_1|^{2k} + 1)^2 |Z_1|^2 |Z - 1|^2} = \frac{|Z_1|^{2k-1}}{(|Z_1|^{2k} + 1)^2 |Z - 1|^2}. \end{aligned}$$

Из последнего следует, что максимальная скорость имеет место в точке  $z = \pm bi$ .

При этом

$$|z_1| = 1 \quad \text{и} \quad |z - 1| = \sqrt{1 + b^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$$

и, следовательно,

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = \frac{16k^2}{4 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \right)^2} = \frac{4k^2}{1 + \frac{1}{m^2}}. \quad (217)$$

В частном случае обтекания круга

$$m = 1; \quad \beta = \frac{\pi}{2}; \quad k = 1.$$

При этом

$$\begin{aligned} f'(z) &= 16U_0 \cdot z_1 \cdot \frac{1}{(z_1^2 - 1)^2(z - 1)^2} = \\ &= 16U_0 \frac{z + 1}{z - 1} \cdot \frac{(z - 1)^2}{[(z + 1)^2 - (z - 1)^2]^2} = \\ &= U_0 \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2} = U_0 \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right); \quad \frac{U}{U_0} = 2 \sin \theta \end{aligned}$$

а

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = 2.$$

В случае

$$m = \infty; \quad \beta = 0; \quad k = 0,5$$

и двуугольник вырождается в пластину.

При этом

$$f'(z) = 4U_0 \frac{1}{(z_1 - 1)^2(z - 1)^2} = U_0$$

для любого значения  $z$ , а

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = 1.$$

Для отыскания распределения скоростей в промежуточных случаях:

$$m = 2; \quad m = 4; \quad m = 8 \quad \text{и} \quad m = 12,$$

в масштабе (на фиг. 59) были вычерчены соответствующие этим значениям дуги кругов, а значения  $|z + 1|$  и  $|z - 1|$  были сняты непосредственно с чертежа для точек, дуговые расстояния  $s$  которых от точки разветвления потока составляли от всей длины дуги  $S$  следующие доли:

$$s/S = 0,05; \quad 0,1; \quad 0,2; \quad 0,3; \quad 0,4; \quad 0,5.$$

и (симметрично относительно оси  $y$ ):

$$s/S = 0,95; \quad 0,9; \quad 0,8; \quad 0,7; \quad 0,6; \quad 0,5.$$

Соответствующие расчеты приведены в следующих таблицах.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ  $m = 2$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{m^2 - 1} = \frac{4}{3} \quad ; \quad \beta = 0,295\pi \quad ; \quad k = 0,708 \quad ; \quad k^2 = 0,501$$

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = 1,602 \quad ; \quad \frac{U}{U_0} = \frac{16k^2 |z_1|^{2k-1}}{(|z_1|^{2k} + 1)^2 |z - 1|^2}$$

[illegible]







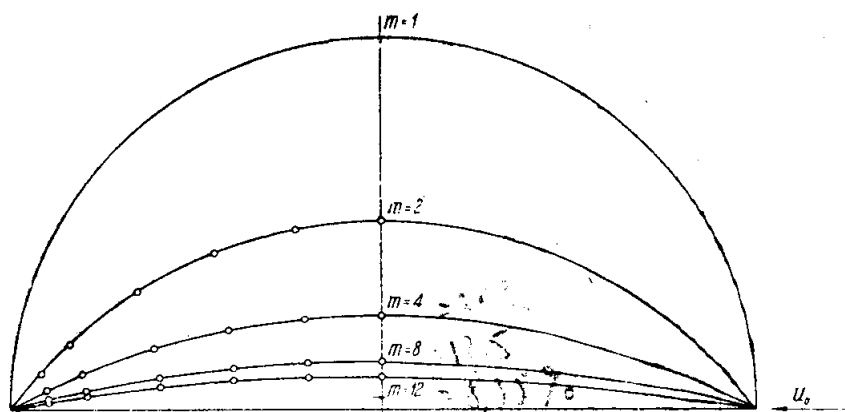


Таблица 10

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ  $m = 1$ 

$$\frac{U}{U_0} = 2 \sin \theta$$

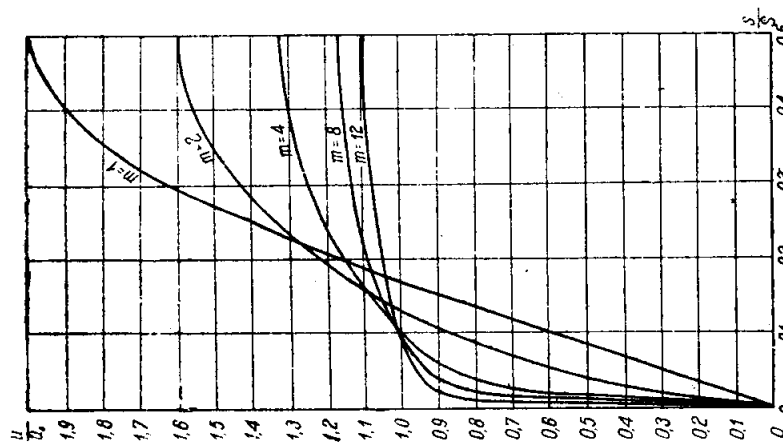
| $s/S$ |      | $\theta^\circ$ | $\sin \theta^\circ$ | $\frac{U}{U_0}$ |
|-------|------|----------------|---------------------|-----------------|
| 0     | 1    | 0              | 0                   | 0               |
| 0,05  | 0,95 | 9              | 0,156               | 0,312           |
| 0,1   | 0,9  | 18             | 0,309               | 0,618           |
| 0,2   | 0,8  | 36             | 0,588               | 1,176           |
| 0,3   | 0,7  | 54             | 0,809               | 1,618           |
| 0,4   | 0,6  | 72             | 0,951               | 1,902           |
| 0,5   | 0,5  | 90             | 1,0                 | 2,0             |



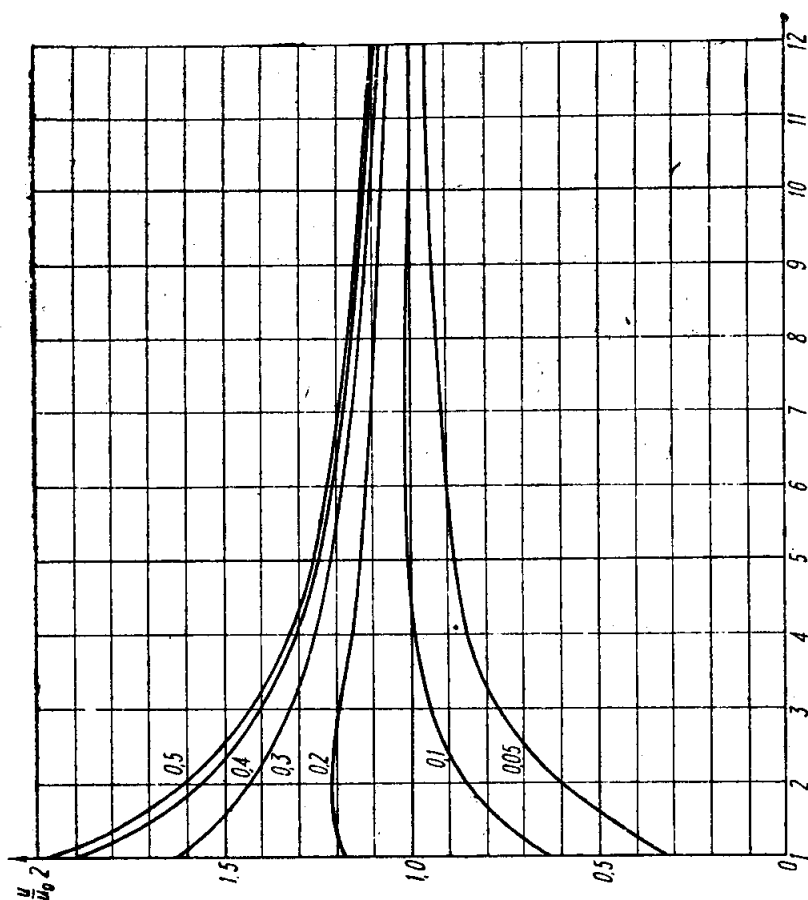
Фиг. 59. Двуугольники с различным отношением  $m = \frac{L}{B}$ . На фигуре вследствие симметрии представлены только верхние части профилей.

Найденные таким образом распределения скоростей для различных значений отношения  $m$  изображены на фиг. 60 в осях координат  $\frac{U}{U_0}$ ,  $s/S$ .

Сечения этого семейства кривых при  $s/S = \text{const}$  представлены на фиг. 61. Здесь по оси ординат отложены отношения  $\frac{U}{U_0}$ , а по оси абсцисс  $m = \frac{L}{B}$ .



Фиг. 60. Распределение скоростей в длине контура двуугольника для ряда значений  $m = \frac{L}{B}$ .



Фиг. 61. Изменение скорости в точках с постоянным отношением  $\frac{s}{S} = 0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$  в функции относительного удлинения профиля двуугольника.

Параметры отдельных кривых имеют значения

$$s/S = 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.$$

Для отыскания величин давлений на поверхности профиля воспользуемся уравнением Бернулли:

$$p_0 + q_0 = p + q, \quad (218)$$

где  $p_0$ ,  $q_0 = \frac{\rho U_0^2}{2}$  — соответственно статическое давление и скоростной напор невозмущенного потока (на достаточном удалении от профиля);

$p$  — статическое давление на поверхности профиля;  
 $q = \frac{\rho U^2}{2}$  — скоростной напор на границе слоя трения и потенциального потока.

Из (218), после деления на  $q_0$ , находим:

$$\frac{p - p_0}{q_0} = 1 - \frac{q}{q_0} = 1 - \left( \frac{U}{U_0} \right)^2. \quad (219)$$

Соответствующие расчеты для  $m = 1, 2, 4, 8, 12$ , приведены в таблице 11, а результаты их представлены на фиг. 62 в виде кривых сверхдавлений  $p - p_0$  в долях скоростного напора  $q_0$  в зависимости от  $m$  и в функции от  $s/S$ .

Полученные выше результаты, строго говоря, представляют собой распределение скоростей и давлений на поверхности профиля в „идеальной“ — не сжимаемой и не вязкой — жидкости. Они же, согласно схеме Прандтля, могут быть отнесены к границе слоя трения и внешнего потенциального потока вплоть до места отрыва струй, начиная с которого теоретические кривые расходятся с данными опытов.

Перейдем к разысканию распределения толщины пограничного слоя вдоль профиля двугольника.

Для этого воспользуемся решением Мюллера

$$\left( \frac{\delta}{L} \right)^{\frac{5}{4}} = 0,289 Re^{-\frac{1}{4}} \cdot F^{-2,055} \int_0^{s/L} F^{1,930} d\left( \frac{s}{L} \right), \quad (175a)$$

приведенным на стр. 76.

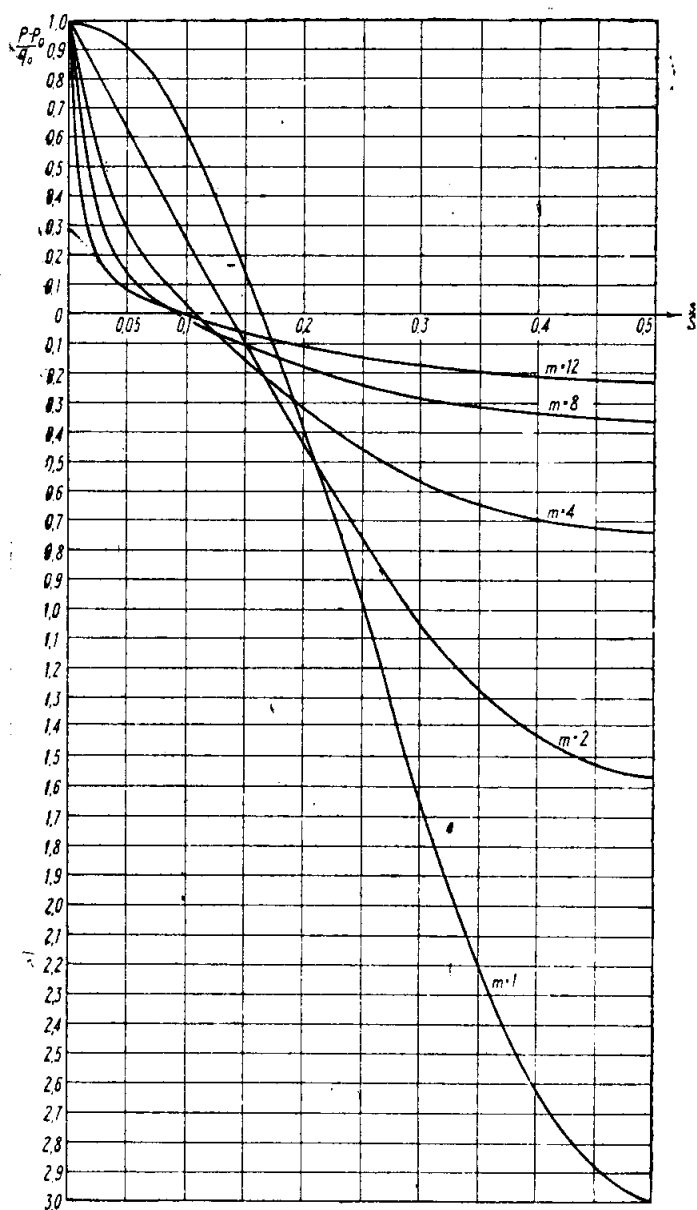
В дальнейшем нам будет попрежнему удобно измерять длину дуги  $s$  в долях от полной длины контура  $S$ .

В связи с этим приведем выражение (175a) к виду:

$$\frac{\delta}{L} = \left[ 0,289 \frac{S}{L} \cdot F^{-2,055} \int_0^{s/S} F^{1,930} d(s/S) \right]^{\frac{4}{5}} \cdot Re^{-\frac{1}{5}}$$

или

$$\frac{\delta}{L} = \left[ 0,289 \cdot \frac{S}{L} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{-1,11} \int_0^{s/S} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3,86} d(s/S) \right]^{\frac{4}{5}} \cdot Re^{-\frac{1}{5}}. \quad (220)$$



Фиг. 62. Распределение давлений по длине контура двугольника для ряда значений  $m$ .

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЙ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПРОФИЛЯ

$$\frac{p-p_0}{q_0} = P(s, S, m) = 1 - \frac{U^2}{U_0^2}$$

| s    | S    | m = 1               |                         | m = 2               |                         | m = 4               |                         | m = 8               |                         | m = 12              |                         |
|------|------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|
|      |      | $\frac{U}{U_0}$     | $\frac{(U)^2}{(U_0)^2}$ | $\frac{U}{U_0}$     | $\frac{(U)^2}{(U_0)^2}$ | $\frac{U}{U_0}$     | $\frac{(U)^2}{(U_0)^2}$ | $\frac{U}{U_0}$     | $\frac{(U)^2}{(U_0)^2}$ | $\frac{U}{U_0}$     | $\frac{(U)^2}{(U_0)^2}$ |
|      |      | $\frac{p-p_0}{q_0}$ |                         | $\frac{p-p_0}{q_0}$ |                         | $\frac{p-p_0}{q_0}$ |                         | $\frac{p-p_0}{q_0}$ |                         | $\frac{p-p_0}{q_0}$ |                         |
| 0    | 1    | 0                   | 0                       | 1                   | 0                       | 0                   | 0                       | 1                   | 0                       | 0                   | 0                       |
| 0,05 | 0,95 | 0,312               | 0,097                   | 0,903               | 0,816                   | 0,846               | 0,715                   | 0,875               | 0,765                   | 0,959               | 0,918                   |
| 0,1  | 0,9  | 0,618               | 0,382                   | 0,618               | 0,380                   | 0,988               | 0,973                   | 1,01                | 1,02                    | 0,999               | 1,00                    |
| 0,2  | 0,8  | 1,176               | 1,38                    | 0,38                | 1,217                   | 1,152               | 1,325                   | 1,093               | 1,195                   | 1,055               | 1,11                    |
| 0,3  | 0,7  | 1,618               | 2,62                    | 1,62                | 1,431                   | 1,251               | 1,565                   | 1,133               | 1,285                   | 1,081               | 1,17                    |
| 0,4  | 0,6  | 1,902               | 3,62                    | 2,62                | 1,560                   | 1,30                | 1,686                   | 1,158               | 1,34                    | 1,038               | 1,21                    |
| 0,5  | 0,5  | 2,00                | 4,00                    | 3,00                | 1,602                   | 1,318               | 1,736                   | 1,165               | 1,357                   | 1,108               | 1,23                    |



где

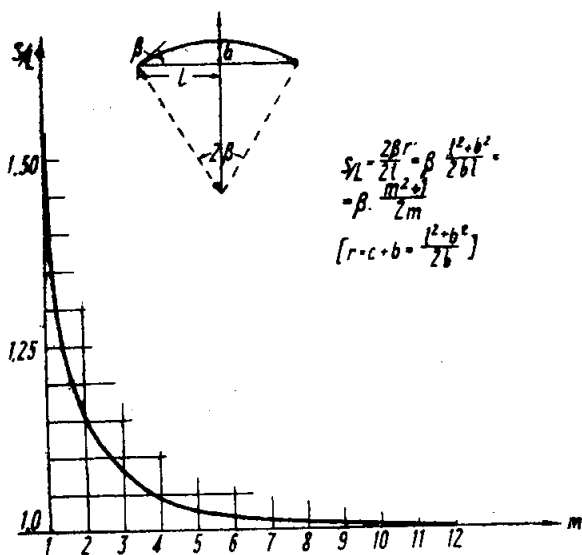
$$Re = \frac{U_0 \cdot L}{\nu}$$

Для пластины

$$\frac{S}{L} = 1 \quad \frac{U}{U_0} = 1$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta_{пл.}}{L} = [0,289 s/S]^{\frac{4}{5}} \cdot Re^{-\frac{1}{5}} \quad (220a)$$



Фиг. 63. Изменение отношения длины  $S$  дуги двугольника к длине его хорды  $L$ , в зависимости от  $m = \frac{L}{B}$ .

Соответствующие формуле (220) расчеты для значений

$$m = 4, 8, 12 \text{ и } \infty$$

приведены в табл. 12, 13 и 14, а вспомогательные графики представлены на фиг. 63—66.

Результаты расчетов представлены на фиг. 67 в виде семейства кривых, построенных в системе координат  $\frac{\delta}{L} \cdot Re^{\frac{1}{5}}$  и  $s/S$  для значений  $m = 4, 8$  и  $12$ . Там же для сравнения проведена кривая относительной толщины пограничного слоя у пластины ( $m = \infty$ ).

Для разыскания интенсивности касательных сил, преобразуем выражение для напряжения сил трения следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{q_0} &= \frac{\tau}{q} \cdot \frac{q}{q_0} = z \left( \frac{U_0}{v} \right)^r \cdot \frac{q}{q_0} = z \left( \frac{U \cdot L}{v} \right)^r \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \cdot \frac{\delta}{L} \right)^r = \\ &= z \cdot Re^r \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^{2+r} \cdot \left( \frac{\delta}{L} \right)^r.\end{aligned}\quad (221)$$

При принятых ранее значениях постоянных  $r$  и  $z$ , формула (221) перепишется в виде:

$$\frac{\tau}{q_0} = 0,045 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^{1,75} \left( \frac{\delta}{L} \right)^{-0,25} \cdot Re^{-\frac{1}{4}}. \quad (222)$$

При этом  $\frac{U}{U_0}$  и  $\frac{\delta}{L}$  представляются уже известными функциями  $m$  и  $s/S$ :

$$\begin{aligned}\frac{U}{U_0} &= \varphi(s/S, m); \\ \frac{\delta}{L} &= \psi(s/S, m) \cdot Re^{-\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

(значения функций  $\varphi$  и  $\psi$  табулированы соответственно во втором и последнем столбцах предшествующих табл. 12, 13 и 14).

В таком случае

$$\frac{\tau}{q_0} = 0,045 \cdot \varphi^{1,75} \cdot \psi^{\frac{1}{4}} \cdot Re^{\frac{1}{20}} \cdot Re^{-\frac{1}{4}} = 0,045 \cdot \varphi^{1,75} \cdot \psi^{\frac{1}{4}} \cdot Re^{-\frac{1}{5}}. \quad (223)$$

Соответствующие (223) расчеты приведены в табл. 15, 16 и 17, причем в целях уточнения кривой  $\frac{\tau}{q_0}$  вблизи места разветвления потока ( $s=0$ ) введены промежуточные точки  $s/S = 0,00625$ ;  $0,0125$  и  $0,025$ , для которых значения функции  $\varphi$  и  $\psi$  получены графической интерполяцией.

На фиг. 68 даны кривые  $\frac{\tau}{q} \cdot Re^{\frac{1}{5}}$  в функции  $\frac{x}{L}$ , полученные в результате приведенных выше расчетов. Там же для сравнения представлено распределение интенсивности сил трения по длине пластины, согласно формуле:

$$\frac{\tau_{пл}}{q_0} Re^{\frac{1}{5}} = 0,0592 \left( \frac{x}{L} \right)^{-\frac{1}{5}}. \quad (152a)$$

Полное одностороннее сопротивление трения, рассчитанное на единицу ширины в случае, если известно распределение касательных сил по длине профиля, определяется равенством

$$W = \int_0^S \tau \cdot \cos \alpha \cdot 1 \cdot ds, \quad (224)$$

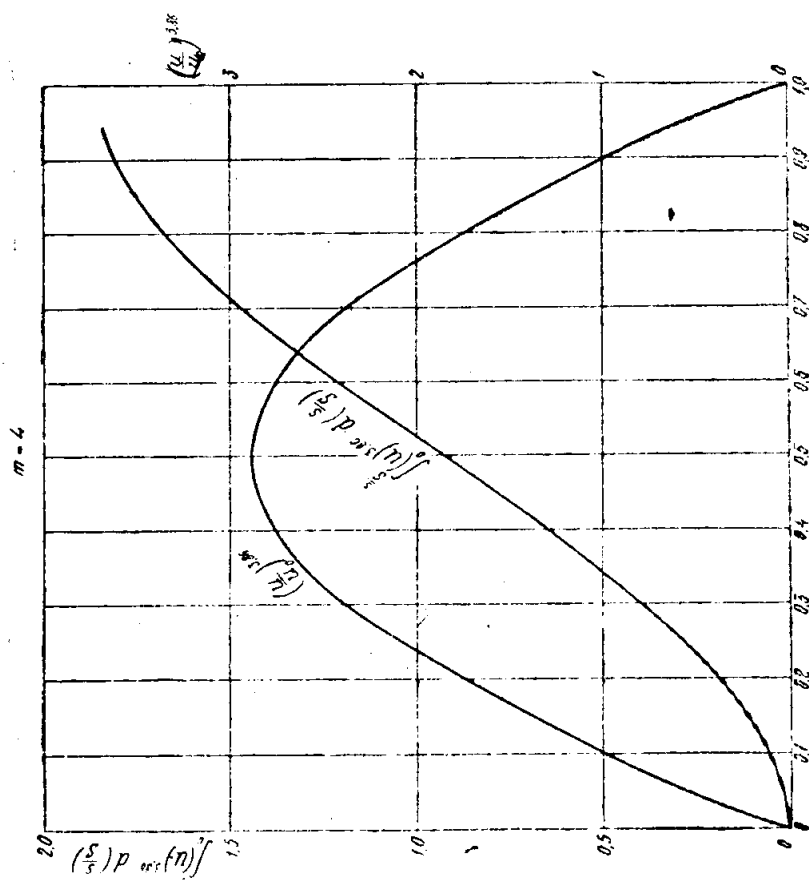
где  $\alpha$  — угол наклона касательной к контуру (в произвольной его точке к направлению движения (оси  $x$ )).

Таблица 12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАНСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ  $m = 4$ 

$$\frac{S}{L} = 1,041$$

| $s/S$ | $\frac{U}{U_0}$ | $\log \frac{U}{U_0}$ | $\frac{U}{U_0} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{4,11}$ | $3,86 \log \frac{U}{U_0}$ | $\frac{U}{U_0} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3,86}$ | $\int_0^{s/S} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3,86} d\left( \frac{s}{S} \right) = 1$ | $\frac{0,289 I \cdot \frac{s}{L}}{\left( \frac{U}{U_0} \right)^{4,11}} = P$ | $\log P$ | $\frac{4}{5} \log P$ | $\frac{1}{L} R I \frac{1}{5}$ |
|-------|-----------------|----------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------|----------------------|-------------------------------|
| 0,05  | 0,871           | 1,9400               | 1,7534                                              | 1,7684                    | 0,587                                               | 0,015                                                                              | 0,00797                                                                     | 3,9015   | 2,3212               | 0,0210                        |
| 0,1   | 0,938           | 1,9948               | 1,9786                                              | 1,9799                    | 0,955                                               | 0,054                                                                              | 0,01707                                                                     | 2,2321   | 2,5857               | 0,0385                        |
| 0,2   | 1,152           | 0,064                | 0,2520                                              | 0,237                     | 1,726                                               | 0,188                                                                              | 0,0333                                                                      | 2,5224   | 2,8179               | 0,0658                        |
| 0,3   | 1,251           | 0,0973               | 0,400                                               | 0,3755                    | 2,374                                               | 0,393                                                                              | 0,0471                                                                      | 2,0730   | 2,9184               | 0,0829                        |
| 0,4   | 1,300           | 0,1139               | 0,468                                               | 0,4390                    | 2,748                                               | 0,649                                                                              | 7,0666                                                                      | 2,8235   | 1,0588               | 0,1145                        |
| 0,5   | 1,318           | 0,1199               | 0,493                                               | 0,4610                    | 2,891                                               | 0,931                                                                              | 0,0902                                                                      | 2,9552   | 1,1642               | 0,1460                        |
| 0,6   | —               | —                    | —                                                   | —                         | 2,938                                               | 1,213                                                                              | 0,1243                                                                      | 1,0944   | 1,2755               | 0,1886                        |
| 0,7   | —               | —                    | —                                                   | —                         | 2,512                                               | 1,469                                                                              | 0,1758                                                                      | 1,2450   | 1,3960               | 0,2489                        |
| 0,8   | —               | —                    | —                                                   | —                         | 1,786                                               | 1,674                                                                              | 0,282                                                                       | 1,4502   | 1,5605               | 0,3636                        |
| 0,9   | —               | —                    | —                                                   | —                         | 0,952                                               | 1,808                                                                              | 0,571                                                                       | 1,7566   | 1,8053               | 0,639                         |
| 0,95  | —               | —                    | —                                                   | —                         | 0,567                                               | 1,846                                                                              | 0,980                                                                       | 1,9912   | 1,9930               | 0,984                         |



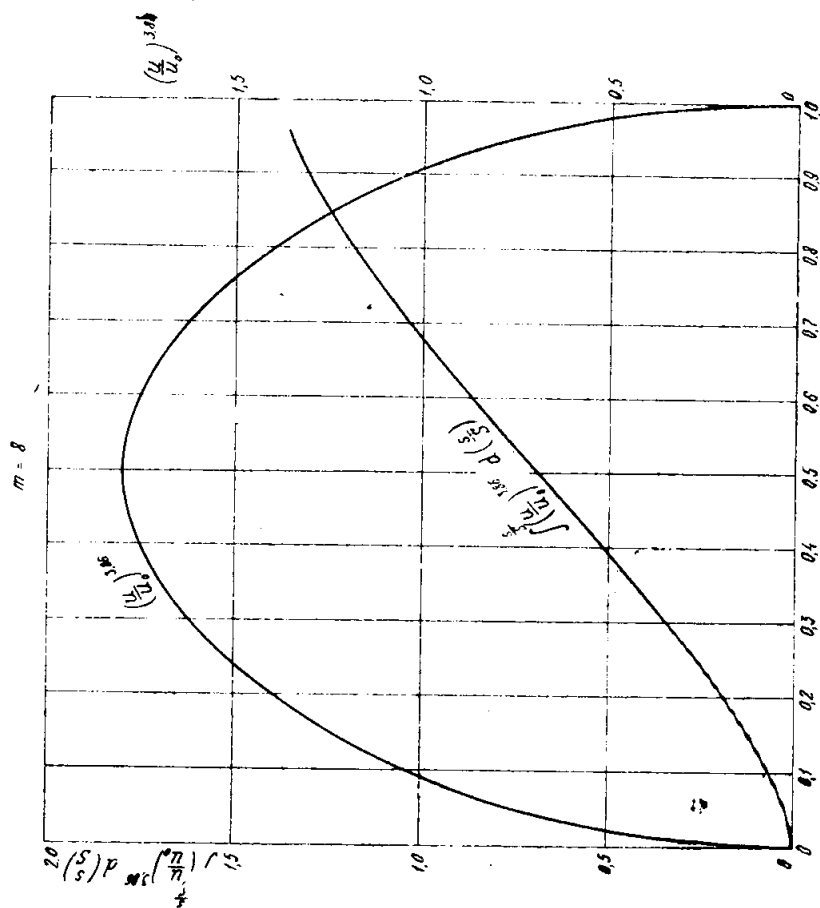
Фиг. 64. Вспомогательные кривые для расчета пограничного слоя  $m = 4$ .

Таблица 13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ  $m = 8$ 

$$\frac{S}{L} = 1.01$$

| $s$  | $\frac{U}{U_0}$ | $\log \frac{U}{U_0}$ | $4,11 \log \frac{U}{U_0}$ | $\frac{U}{U_0} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{4,11}$ | $3,86 \log \frac{U}{U_0}$ | $\frac{U}{U_0} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3,86}$ | $I$   | $P$    | $\log P$ | $\frac{4}{5} \log P$ | $\frac{5}{L} Re^{1/5}$ |
|------|-----------------|----------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------|-------|--------|----------|----------------------|------------------------|
| 0,05 | 0,935           | 1,9708               | 1,8801                    | 0,759                                               | 1,8873                    | 0,771                                               | 0,026 | 0,010  | 2,0000   | 2,4000               | 0,0252                 |
| 0,1  | 1,01            | 0,0043               | 0,0177                    | 1,041                                               | 0,0166                    | 1,039                                               | 0,071 | 0,0199 | 2,2989   | 2,6391               | 0,0436                 |
| 0,2  | 1,093           | 0,0386               | 0,1586                    | 1,441                                               | 0,1490                    | 1,409                                               | 0,191 | 0,0393 | 2,5944   | 2,8755               | 0,0751                 |
| 0,3  | 1,133           | 0,0542               | 0,2225                    | 1,671                                               | 0,2090                    | 1,618                                               | 0,345 | 0,0603 | 2,7803   | 1,0242               | 0,1052                 |
| 0,4  | 1,158           | 0,0637               | 0,2615                    | 1,825                                               | 0,2460                    | 1,762                                               | 0,514 | 0,0822 | 2,9149   | 1,1319               | 0,1355                 |
| 0,5  | 1,165           | 0,0664               | 0,2725                    | 1,874                                               | 0,2500                    | 1,803                                               | 0,692 | 0,1078 | 1,0326   | 1,2261               | 0,1683                 |
| 0,6  | —               | —                    | —                         | 1,826                                               | —                         | 1,762                                               | 0,870 | 0,1393 | 1,1439   | 1,3151               | 0,2066                 |
| 0,7  | —               | —                    | —                         | 1,671                                               | —                         | 1,618                                               | 1,039 | 0,1813 | 1,2584   | 1,4067               | 0,2551                 |
| 0,8  | —               | —                    | —                         | 1,441                                               | —                         | 1,409                                               | 1,191 | 0,2415 | 1,3829   | 1,5063               | 0,3211                 |
| 0,9  | —               | —                    | —                         | 1,041                                               | —                         | 1,039                                               | 1,313 | 0,369  | 1,5670   | 1,6536               | 0,4504                 |
| 0,95 | —               | —                    | —                         | 0,759                                               | —                         | 0,771                                               | 1,358 | 0,522  | 1,7177   | 1,7742               | 0,5946                 |



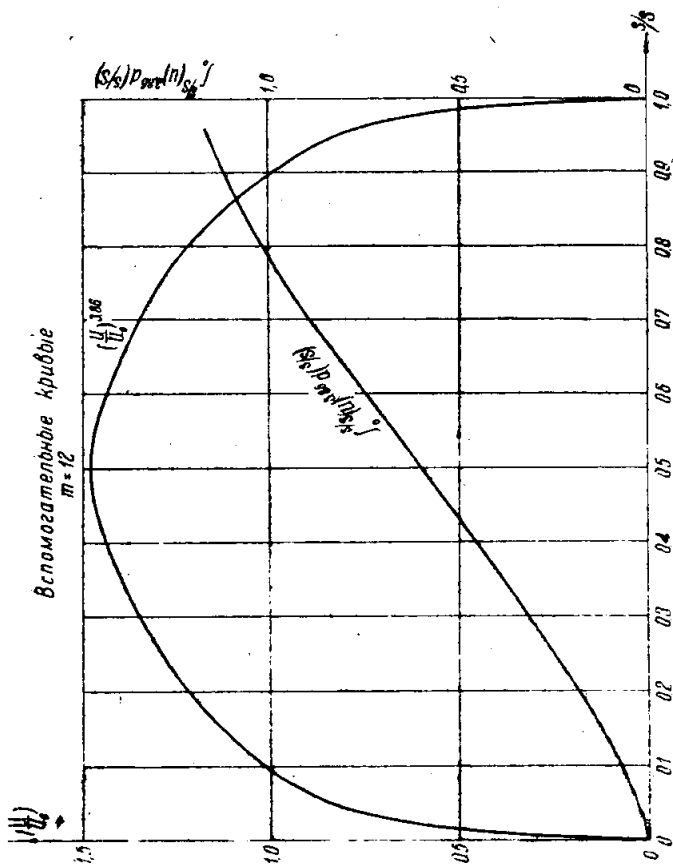
Фиг. 65. Вспомогательные кривые для расчета пограничного слоя при  $m=8$ .

Таблица 14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ  $m = 12$ 

$$\frac{S}{L} = 1,003$$

| $s/S$ | $\frac{U}{U_0}$ | $\log \frac{U}{U_0}$ | $4,11 \log \frac{U}{U_0}$ | $\left(\frac{U}{U_0}\right)^{4,11}$ | $3,86 \log \frac{U}{U_0}$ | $\left(\frac{U}{U_0}\right)^{3,86}$ | $I$   | $P$     | $\log P$ | $\frac{4}{5} \log P$ | $\frac{\delta}{L} Re^{1/5}$ |
|-------|-----------------|----------------------|---------------------------|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|-------|---------|----------|----------------------|-----------------------------|
| 0,05  | 0,959           | 1,9818               | 1,9252                    | 0,842                               | 1,9298                    | 0,851                               | 0,028 | 0,00963 | 3,9836   | 2,3869               | 0,0244                      |
| 0,1   | 0,999           | 1,9996               | 1,9984                    | 0,996                               | 1,9985                    | 0,996                               | 0,074 | 0,02155 | 2,3334   | 2,6667               | 0,0464                      |
| 0,2   | 1,055           | 0,0233               | 0,0958                    | 1,247                               | 0,0900                    | 1,230                               | 0,186 | 0,0433  | 2,6365   | 2,9092               | 0,0811                      |
| 0,3   | 1,081           | 0,0336               | 0,1388                    | 1,373                               | 0,1306                    | 1,351                               | 0,315 | 0,0665  | 2,8228   | 1,0582               | 0,1143                      |
| 0,4   | 1,098           | 0,0406               | 0,1667                    | 1,468                               | 0,1566                    | 1,434                               | 0,454 | 0,0898  | 2,9518   | 1,1614               | 0,1450                      |
| 0,5   | 1,108           | 0,0445               | 0,1828                    | 1,523                               | 0,1718                    | 1,435                               | 0,600 | 0,1143  | 1,0580   | 1,2464               | 0,1764                      |
| 0,6   | —               | —                    | —                         | 1,468                               | —                         | 1,434                               | 0,751 | 0,1484  | 1,1715   | 1,3372               | 0,2174                      |
| 0,7   | —               | —                    | —                         | 1,373                               | —                         | 1,351                               | 0,885 | 0,1860  | 1,2716   | 1,4173               | 0,2614                      |
| 0,8   | —               | —                    | —                         | 1,247                               | —                         | 1,230                               | 1,014 | 0,2463  | 1,3914   | 1,5131               | 0,326                       |
| 0,9   | —               | —                    | —                         | 0,996                               | —                         | 0,996                               | 1,131 | 0,3295  | 1,5178   | 1,6142               | 0,4114                      |
| 0,95  | —               | —                    | —                         | 0,842                               | —                         | 0,851                               | 1,172 | 0,4037  | 1,6060   | 1,6848               | 0,484                       |



Фиг. 65. Вспомогательные кривые для расчета пограничного слоя при  $m=12$ .



Таблица 15

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СИЛ ТРЕНИЯ ПРИ  $m = 4$ 

| $s/S$  | $\varphi$ | $\log \varphi$ | $1,75 \log \varphi$ | $\psi$ | $\log \psi$ | $0,25 \log \psi$ | $\psi_{0,25}$ | $\frac{\tau}{q_0} Re^{1/5}$ |
|--------|-----------|----------------|---------------------|--------|-------------|------------------|---------------|-----------------------------|
| 0,0125 | 0,37      | 1,5682         | 1,2450              | 0,0052 | 3,7100      | 1,4290           | 0,269         | 0,0274                      |
| 0,025  | 0,69      | 1,8388         | 1,7180              | 0,0105 | 2,0212      | 1,5053           | 0,320         | 0,0734                      |
| 0,050  | 0,871     | 1,9400         | 1,8950              | 0,0210 | 2,3212      | 1,5803           | 0,3805        | 0,0928                      |
| 0,1    | 0,988     | 1,9948         | 1,9909              | 0,0385 | 2,5837      | 1,6464           | 0,443         | 0,0995                      |
| 0,2    | 1,152     | 0,0614         | 0,1075              | 0,0658 | 2,8179      | 1,7045           | 0,506         | 0,1140                      |
| 0,3    | 1,251     | 0,0973         | 0,1703              | 0,0829 | 2,9184      | 1,7346           | 0,543         | 0,1225                      |
| 0,4    | 1,300     | 0,1139         | 0,1993              | 0,1145 | 1,0588      | 1,7647           | 0,582         | 0,1223                      |
| 0,5    | 1,318     | 0,1199         | 0,2098              | 0,1460 | 1,1642      | 1,7910           | 0,618         | 0,1180                      |
| 0,6    | —         | —              | —                   | 0,1885 | 1,2755      | 1,8189           | 0,659         | 0,1080                      |
| 0,7    | —         | —              | —                   | 0,2489 | 1,3960      | 1,8490           | 0,706         | 0,0943                      |
| 0,8    | —         | —              | —                   | 0,3636 | 1,5006      | 1,8902           | 0,777         | 0,0742                      |
| 0,9    | —         | —              | —                   | 0,639  | 1,8053      | 1,9513           | 0,894         | 0,0493                      |
| 0,95   | —         | —              | —                   | 0,994  | 1,9930      | 1,9982           | 0,996         | 0,0355                      |

Таблица 16

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СИЛ ТРЕНИЯ ПРИ  $m = 8$ .

| $s, S$  | $\varphi$ | $\log \varphi$ | $1,75 \log \varphi$ | $\psi$ | $\log \psi$ | $0,25 \log \psi$ | $\psi_{0,25}$ | $\frac{\tau}{q_0} \frac{1,6}{Re}$ |
|---------|-----------|----------------|---------------------|--------|-------------|------------------|---------------|-----------------------------------|
| 0,00625 | 0,3       | 1,4771         | 1,0840              | 0,0036 | 3,5563      | 1,3891           | 0,245         | 0,0222                            |
| 0,0125  | 0,6       | 1,7782         | 1,6115              | 0,0072 | 3,8573      | 1,4643           | 0,291         | 0,0633                            |
| 0,025   | 0,84      | 1,9243         | 1,8677              | 0,0145 | 2,1614      | 1,5403           | 0,347         | 0,0956                            |
| 0,050   | 0,935     | 1,9708         | 1,9589              | 0,0252 | 2,4000      | 1,6000           | 0,398         | 0,100                             |
| 0,1     | 1,01      | 0,0043         | 0,0075              | 0,0436 | 2,6391      | 1,6598           | 0,458         | 0,100                             |
| 0,2     | 1,093     | 0,0386         | 0,0676              | 0,0751 | 2,8755      | 1,7199           | 0,525         | 0,101                             |
| 0,3     | 1,133     | 0,0542         | 0,0949              | 0,1052 | 1,0242      | 1,7561           | 0,570         | 0,0983                            |
| 0,4     | 1,158     | 0,0637         | 0,1115              | 0,1355 | 1,1319      | 1,7930           | 0,621         | 0,0937                            |
| 0,5     | 1,165     | 0,0664         | 0,1162              | 0,1683 | 1,2261      | 1,8065           | 0,640         | 0,0917                            |
| 0,6     | —         | —              | —                   | 0,2066 | 1,3161      | 1,8288           | 0,674         | 0,0863                            |
| 0,7     | —         | —              | —                   | 0,2551 | 1,4067      | 1,8517           | 0,711         | 0,0788                            |
| 0,8     | —         | —              | —                   | 0,3211 | 1,5063      | 1,8766           | 0,754         | 0,0697                            |
| 0,9     | —         | —              | —                   | 0,4504 | 1,6536      | 1,9134           | 0,819         | 0,0559                            |
| 0,95    | —         | —              | —                   | 0,5946 | 1,7742      | 1,9435           | 0,878         | 0,0456                            |

Таблица 17

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СИЛ ТРЕНИЯ ПРИ  $m = 12$ 

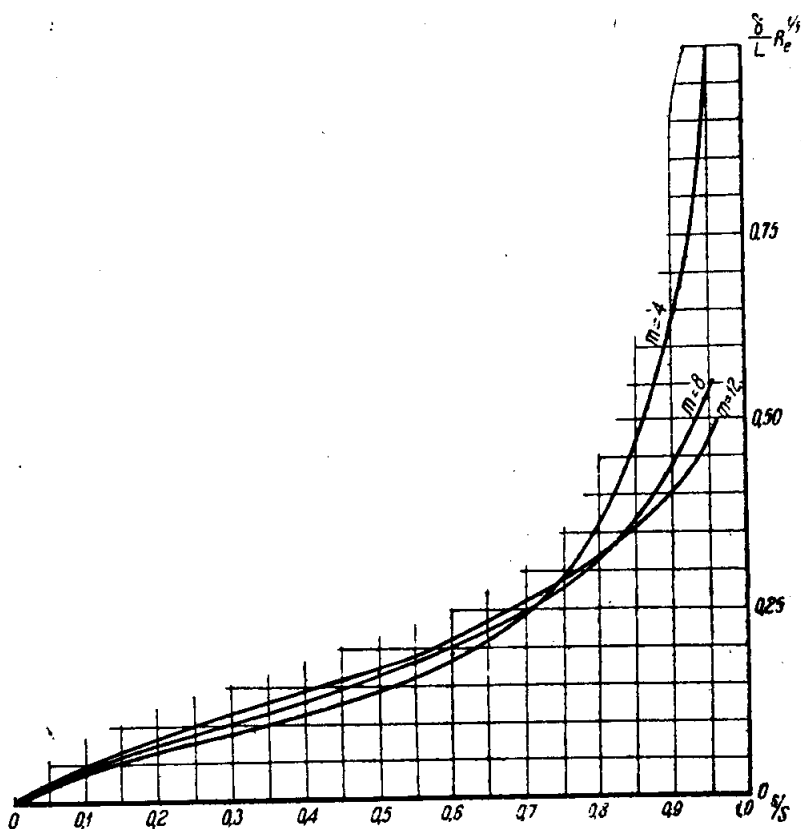
| $s/s$   | $\varphi$ | $\log \varphi$ | $1,75 \log \varphi$ | $\varphi^{1,75}$ | $\psi$ | $\log \psi$ | $0,25 \log \psi$ | $\psi^{0,25}$ | $\frac{1}{q_0} Re^{1/6}$ |
|---------|-----------|----------------|---------------------|------------------|--------|-------------|------------------|---------------|--------------------------|
| 0,00625 | 0,4       | 1,6021         | 1,4040              | 0,254            | 0,0030 | 3,4771      | 1,3633           | 0,234         | 0,0488                   |
| 0,0125  | 0,8       | 1,9031         | 1,8303              | 0,677            | 0,0051 | 3,7853      | 1,4463           | 0,279         | 0,1090                   |
| 0,025   | 0,91      | 1,9590         | 1,9283              | 0,848            | 0,0123 | 2,0899      | 1,5225           | 0,333         | 0,1147                   |
| 0,050   | 0,959     | 1,9818         | 1,9682              | 0,929            | 0,0244 | 2,3959      | 1,5967           | 0,395         | 0,1059                   |
| 0,1     | 0,999     | 1,9995         | 1,9993              | 0,998            | 0,0464 | 2,6667      | 1,6667           | 0,454         | 0,0957                   |
| 0,2     | 1,055     | 0,0233         | 0,0407              | 1,038            | 0,0811 | 2,9092      | 1,7273           | 0,534         | 0,0925                   |
| 0,3     | 1,081     | 0,0338         | 0,0592              | 1,146            | 0,1143 | 1,0582      | 1,7646           | 0,582         | 0,0886                   |
| 0,4     | 1,098     | 0,0405         | 0,0710              | 1,178            | 0,1450 | 1,1614      | 1,7904           | 0,617         | 0,0858                   |
| 0,5     | 1,108     | 0,0445         | 0,0778              | 1,195            | 0,1764 | 1,2464      | 1,8116           | 0,648         | 0,0830                   |
| 0,6     | —         | —              | —                   | 1,146            | 0,2514 | 1,4173      | 1,8343           | 0,683         | 0,0776                   |
| 0,7     | —         | —              | —                   | 1,146            | 0,2614 | 1,4173      | 1,8543           | 0,715         | 0,0721                   |
| 0,8     | —         | —              | —                   | 1,098            | 0,326  | 1,5131      | 1,8783           | 0,756         | 0,0653                   |
| 0,9     | —         | —              | —                   | 0,998            | 0,4114 | 1,6142      | 1,9036           | 0,801         | 0,0561                   |
| 0,95    | —         | —              | —                   | 0,929            | 0,484  | 1,6848      | 1,9212           | 0,834         | 0,0502                   |

Вследствие

$$dx = ds \cdot \cos \alpha,$$

последнее равенство (224) можно переписать в форме:

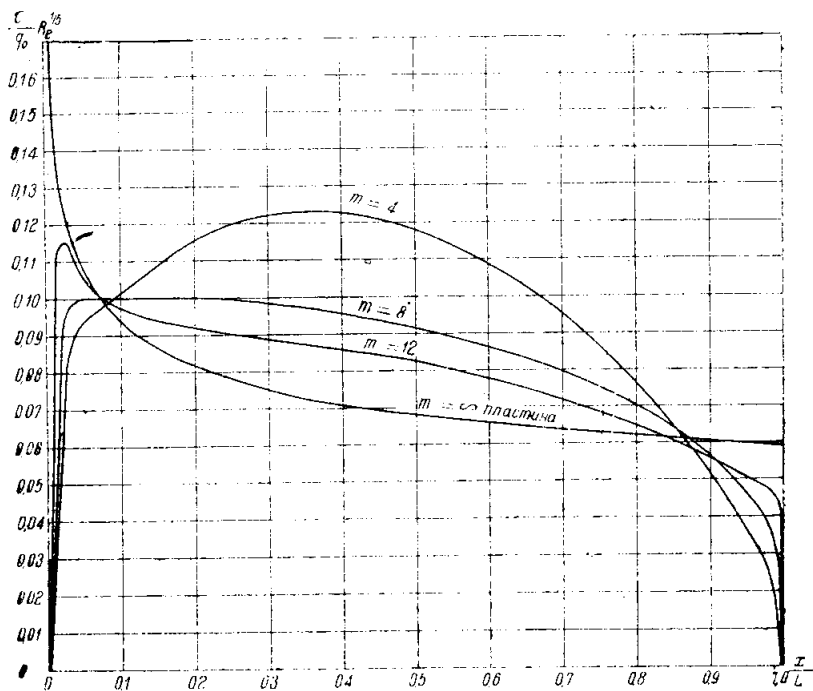
$$\begin{aligned} W &= \int_0^S \tau dx = 1 \cdot L \cdot q_0 \int_0^1 \frac{\tau}{q_0} \cdot d\left(\frac{x}{L}\right) = \\ &= L \cdot q_0 \cdot Re^{-\frac{1}{5}} \int_0^1 \frac{\tau}{q_0} Re^{\frac{1}{5}} d\left(\frac{x}{L}\right). \end{aligned} \quad (225)$$



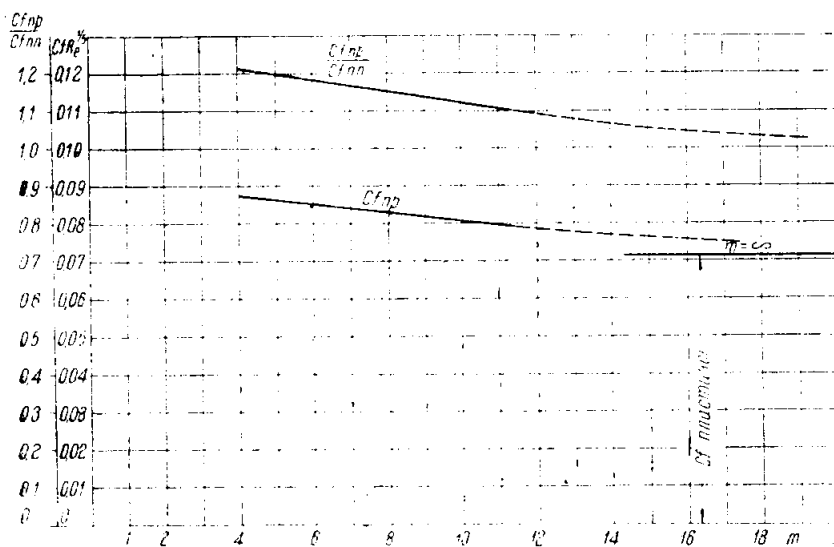
Фиг. 67. Диаграмма распределения толщины граничного слоя вдоль поверхности двугрульника для различных отношений  $m = \frac{L}{B}$ .

Отсюда коэффициент полного сопротивления

$$C_f = \frac{W}{S \cdot q_0} = \frac{L}{S} \cdot Re^{-\frac{1}{5}} \int_0^1 \frac{\tau}{q_0} Re^{\frac{1}{5}} d\left(\frac{x}{L}\right). \quad (226)$$



Фиг. 68. Распределение интенсивности силы трения для двугольников с различным отношением  $m = \frac{L}{B}$ .



Фиг. 69. Зависимость коэффициента сопротивления двугольника и его отношения к коэффициенту сопротивления пластины от относительного удлинения профиля.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (226) для частного значения  $m$  представляет собой площадь соответствующей диаграммы, вычерченной на фиг. 68.

Так, для

$$m = 4: \quad I = \int_0^1 \frac{\pi}{q_0} Re^{\frac{1}{5}} d\left(\frac{x}{L}\right) = 0,0905; \quad \frac{S}{L} = 1,041;$$

$$m = 8: \quad I = 0,0835; \quad \frac{S}{L} = 1,01;$$

$$m = 12: \quad I = 0,0785; \quad \frac{S}{L} = 1,003.$$

Окончательно, общий коэффициент сопротивления трения (фиг. 69)

$$\text{для } m = 4: \quad C_f = 0,0870 Re^{-\frac{1}{5}};$$

$$\text{„ } m = 8: \quad C_f = 0,0827 \cdot Re^{-\frac{1}{5}};$$

$$\text{„ } m = 12: \quad C_f = 0,0782 Re^{-\frac{1}{5}},$$

в то время, как для пластины ( $m = \infty$ )

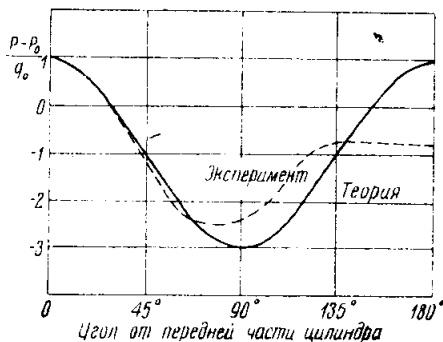
$$C_f = 0,072 \cdot Re^{-\frac{1}{5}}.$$

Как видно из полученных результатов, отношение коэффициентов трения профиля и пластинки для заданного значения  $m$  не зависит от числа Рейнольдса (фиг. 69), а именно:

$$\text{для } m = 4: \quad \frac{C_{f \text{ проф}}}{C_{f \text{ пл}}} = 1,21;$$

$$\text{„ } m = 8: \quad \frac{C_{f \text{ проф}}}{C_{f \text{ пл}}} = 1,15;$$

$$\text{„ } m = 12: \quad \frac{C_{f \text{ проф}}}{C_{f \text{ пл}}} = 1,085.$$



Фиг. 70. Сравнение теоретического и экспериментального распределения давлений на поверхности кругового цилиндра.

Перейдем теперь к отысканию мест отрыва в ламинарном пограничном слое.

Для этого прежде всего установим область изменения  $m$ , для которой с достаточным приближением можно считать действительное (экспериментальное) распределение давлений до места отрыва струй совпадающим с потенциальным (теоретическим).

На фиг. 70 представлено сравнение теоретической и экспериментальной кривой распределения давлений на поверхности кругового цилиндра, свидетельствующее о том, что при  $m = 1$  наличие срыва струй не только



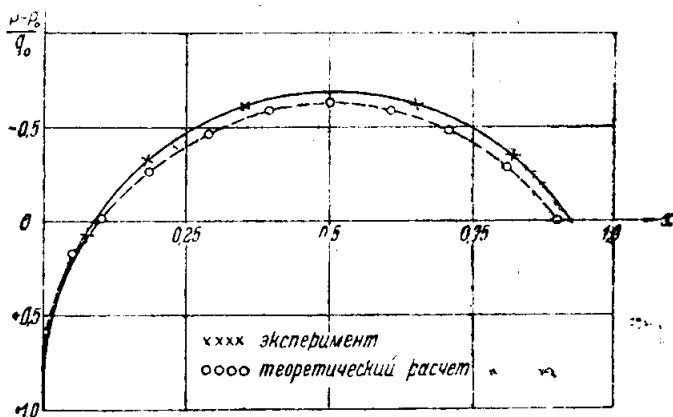
изменяет давление за местом отрыва, но, кроме того, перераспределяет давления далеко перед ним, смещая положение минимума с  $90^\circ$  до  $75-80^\circ$ .

На фиг. 71 приведены результаты замеров давлений на контуре двугольника с отношением длины профиля к толщине его, равном  $m = 5$ , проведенных в трубе ЦАГИ по заказу НИВКа.

Давления замерялись при углах атаки

$$\alpha = -6^\circ; -2^\circ; +2^\circ; +6^\circ; +10^\circ; +14^\circ; +18^\circ.$$

Путем интерполирования было найдено распределение давлений на контуре двугольника при угле атаки, равном 0, представленное на фиг. 72 сплошной кривой. Там же нанесена пунктирная кривая, соответствующая приведенным выше теоретическим расчетам.



Фиг. 72. Сравнение теоретического и экспериментального распределения давлений на профиле двугольника с относительным удлинением, равным  $m = 5$ .

Сличение обоих результатов позволяет заключить, что уже при  $m = 5$  отрыв струй практически мало изменяет распределение давлений перед местом отрыва, существенно влияя на кривую давления за ним.

Последнее дало нам известные основания принять в дальнейшем исследовании, проведенном для  $m = 4,8$  и  $12$ , распределение скоростей на внешней границе слоя трения (вплоть до места отрыва) таким, каким оно получается из потенциального потока.

Согласно (126) (см. главу III) приближенное решение уравнения Польгаузена при малых и средних  $\lambda$  ( $0, -6$ )

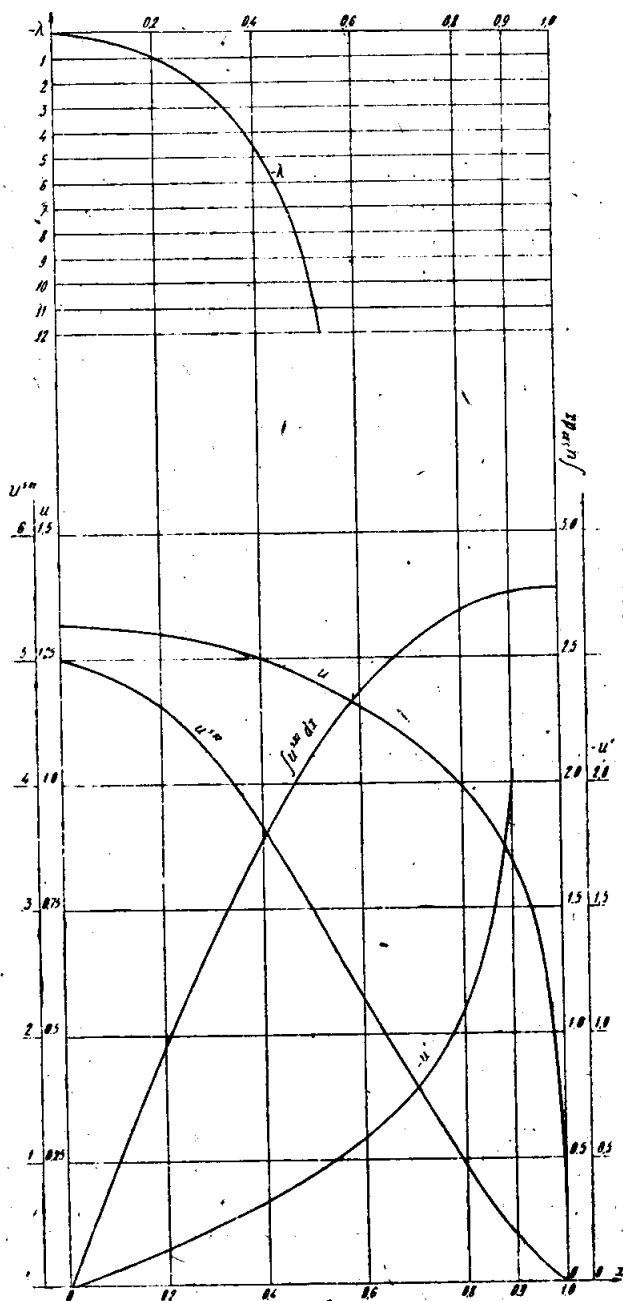
$$\lambda = 34,1 \frac{U'}{U^{5,82}} \int U^{5,82} dx. \quad (126)$$

В соответствии с этим на фиг. 73, 74 и 75 представлены вспомогательные кривые  $U$ ,  $U'$ ,  $U^{5,82}$  и  $\int U^{5,82} dx$ \*, построенные для двугольников с относительным удлинением профиля  $m = 4,8$  и  $12$ .

Соответствующие расчеты приведены в табл. 18, 19 и 20

\* Для упрощения записи в дальнейшем принято  $U_0 = 1$ .





Фиг. 73. Вспомогательные кривые для отыскания места отрыва на контуре двугольника с относительным удлинением  $m=4$ .

Таблица 18

 $m = 4$ 

| $x$ | $U$  | $\log U$ | $5,82 \log U$ | $U^{5,82}$ | $\int U^{5,82} dx$ | $U^{6,82}$ | $-U'$ | $-\lambda$ |
|-----|------|----------|---------------|------------|--------------------|------------|-------|------------|
| 0   | 1,32 | 0,1206   | 0,7019        | 5,03       | 0                  | 6,64       | 0     | 0          |
| 0,2 | 1,30 | 0,1139   | 0,6629        | 4,60       | 0,963              | 5,98       | 0,16  | 0,88       |
| 0,4 | 1,25 | 0,0969   | 0,5640        | 3,66       | 1,79               | 4,58       | 0,34  | 4,53       |
| 0,6 | 1,15 | 0,0607   | 0,3533        | 2,26       | 2,38               | 2,74       | 0,60  | 17,8       |
| 0,8 | 0,99 | 1,9956   | 1,9744        | 0,94       | 2,70               | 0,93       | 1,10  | —          |
| 0,9 | 0,84 | 1,9243   | 1,5594        | 0,36       | 2,77               | 0,30       | 2,05  | —          |
| 1,0 | 0    | —        | —             | —          | 2,78               | 0          | —     | —          |

Таблица 19

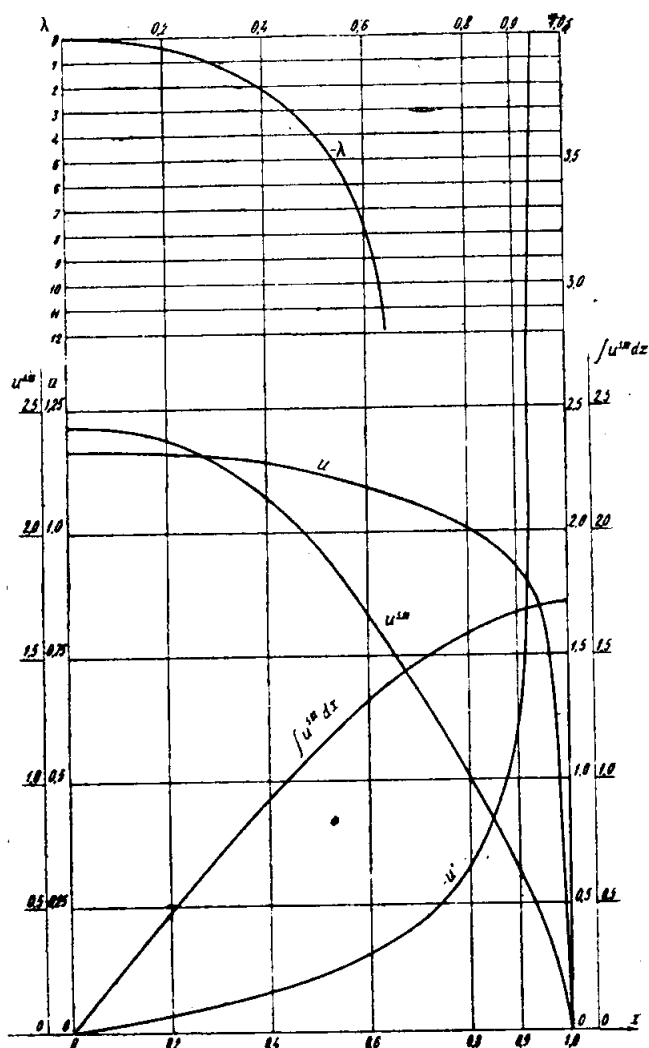
 $m = 8$ 

| $x$ | $U$   | $\log U$ | $5,82 \log U$ | $U^{5,82}$ | $\int U^{5,82} dx$ | $U^{6,82}$ | $-U'$ | $-\lambda$ |
|-----|-------|----------|---------------|------------|--------------------|------------|-------|------------|
| 0   | 1,165 | 0,0564   | 0,3864        | 2,434      | 0                  | 2,84       | 0     | 0          |
| 0,2 | 1,16  | 0,0545   | 0,3754        | 2,373      | 0,481              | 2,75       | 0,09  | 0,54       |
| 0,4 | 1,14  | 0,0569   | 0,3312        | 2,144      | 0,933              | 2,45       | 0,165 | 2,14       |
| 0,6 | 1,033 | 0,0386   | 0,2247        | 1,678      | 1,32               | 1,83       | 0,30  | 7,33       |
| 0,8 | 1,005 | 0,00217  | 0,0126        | 1,03       | 1,59               | 1,04       | 0,66  | —          |
| 0,9 | 0,93  | 1,9685   | 1,8167        | 0,656      | 1,67               | 0,61       | 1,20  | —          |
| 1,0 | 0     | —        | —             | 0          | 1,71               | 0          | —     | —          |

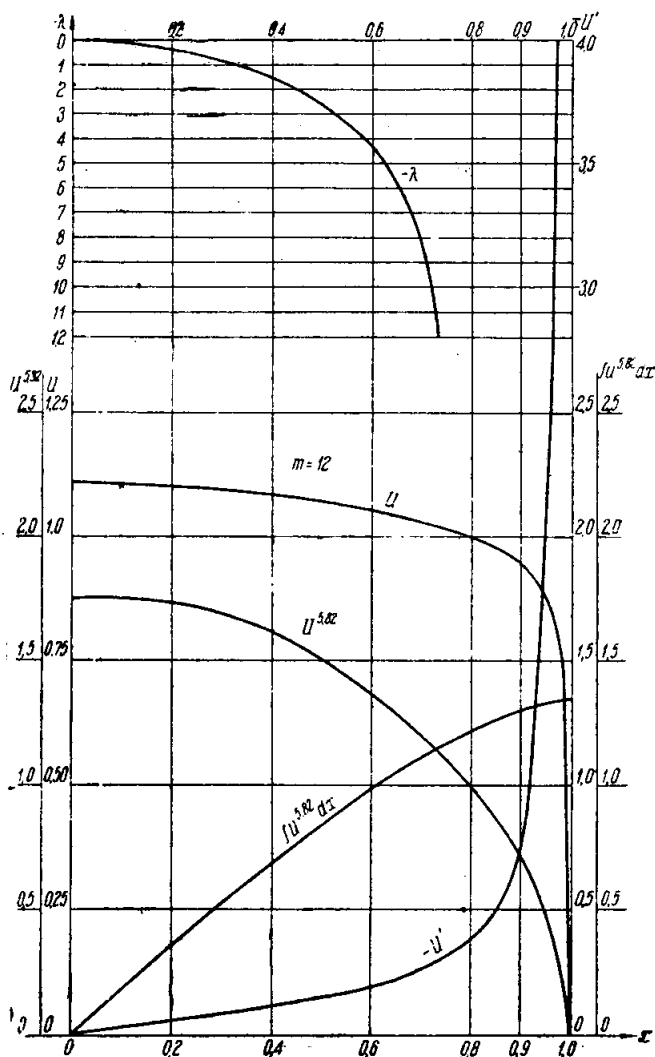
Таблица 20

 $m = 12$ 

| $x$ | $U$   | $\log U$ | $5,82 \log U$ | $U^{5,82}$ | $\int U^{5,82} dx$ | $U^{6,82}$ | $-U'$ | $-\lambda$ |
|-----|-------|----------|---------------|------------|--------------------|------------|-------|------------|
| 0   | 1,11  | 0,0418   | 0,2433        | 1,75       | 0                  | 0          | 0     | 0          |
| 0,2 | 1,10  | 0,0414   | 0,2410        | 1,74       | 0,349              | 1,91       | 0,06  | 0,38       |
| 0,4 | 1,085 | 0,0354   | 0,2060        | 1,61       | 0,684              | 1,75       | 0,12  | 1,61       |
| 0,6 | 1,055 | 0,0233   | 0,1356        | 1,37       | 0,982              | 1,44       | 0,185 | 4,27       |
| 0,8 | 1,00  | 0        | 0             | 1,00       | 1,22               | 1,00       | 0,39  | 16,2       |
| 0,9 | 0,95  | 1,9777   | 1,8702        | 0,74       | 1,31               | 0,71       | 0,76  | —          |
| 1,0 | 0     | —        | —             | 0          | 1,35               | 0          | —     | —          |



Фиг. 74. Вспомогательные кривые для отыскания места отрыва на контуре двуугольника с относительным удлинением  $m = 8$ .



Фиг. 75. Вспомогательные кривые для отыскания места отрыва на контуре двуугольника с относительным удлинением  $m = 12$ .

Таблица 21

| $x_1 = 0,4; U_1 = 1,25; U_1' = -0,34; \lambda_1 = -4,53; e^{0,178 \lambda_1} = 0,446;$ |      |       |                 |                     |                   |                       |                             |                          |           |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|-----------------|---------------------|-------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------|------------|
| $x$                                                                                    | $U$  | $-U'$ | $\frac{U_1}{U}$ | $\ln \frac{U_1}{U}$ | $\frac{U'}{U_1'}$ | $\ln \frac{U'}{U_1'}$ | $0,376 \ln \frac{U'}{U_1'}$ | $4,58 \ln \frac{U_1}{U}$ | $\{ \}^*$ | $-\lambda$ |
| 0,45                                                                                   | 1,23 | 0,40  | 1,015           | 0,015               | 1,176             | 0,162                 | 0,061                       | 0,069                    | 0,336     | 6,13       |
| 0,50                                                                                   | 1,21 | 0,46  | 1,032           | 0,031               | 1,353             | 0,302                 | 0,113                       | 0,142                    | 0,191     | 9,30       |
| 0,55                                                                                   | 1,18 | 0,52  | 1,059           | 0,057               | 1,530             | 0,425                 | 0,157                       | 0,262                    | 0,027     | —          |
| 0,60                                                                                   | 1,15 | 0,60  | 1,088           | 0,084               | 1,765             | 0,568                 | 0,214                       | 0,386                    | -0,154    | —          |

Таблица 22

 $m = 8$ 

| $x_1 = 0,56; U_1 = 1,105; U_1' = -0,265; \lambda_1 = -5,62; e^{0,178 \lambda_1} = 0,368$ |       |       |                 |                     |                   |                       |                             |                          |           |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-----------------|---------------------|-------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------|------------|
| $x$                                                                                      | $U$   | $-U'$ | $\frac{U_1}{U}$ | $\ln \frac{U_1}{U}$ | $\frac{U'}{U_1'}$ | $\ln \frac{U'}{U_1'}$ | $0,376 \ln \frac{U'}{U_1'}$ | $4,58 \ln \frac{U_1}{U}$ | $\{ \}^*$ | $-\lambda$ |
| 0,56                                                                                     | 1,105 | 0,265 | 1,000           | 0,000               | 1,000             | 0,000                 | 0,000                       | 0,000                    | 0,368     | 5,62       |
| 0,60                                                                                     | 1,095 | 0,30  | 1,01            | 0,010               | 1,13              | 0,122                 | 0,046                       | 0,146                    | 0,276     | 7,22       |
| 0,65                                                                                     | 1,075 | 0,35  | 1,03            | 0,029               | 1,32              | 0,278                 | 0,104                       | 0,133                    | 0,131     | 11,4       |
| 0,70                                                                                     | 1,060 | 0,43  | 1,04            | 0,041               | 1,62              | 0,483                 | 0,182                       | 0,188                    | 0,002     | —          |
| 0,75                                                                                     | 1,030 | 0,52  | 1,07            | 0,069               | 1,96              | 0,673                 | 0,253                       | 0,316                    | -0,201    | —          |

Таблица 23

 $m = 12$ 

| $x_1 = 0,6; U_1 = 1,055; U_1' = -0,185; \lambda_1 = -4,27; e^{0,178 \lambda_1} = 0,467$ |       |       |                 |                     |                   |                       |                             |                          |           |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-----------------|---------------------|-------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------|------------|
| $x$                                                                                     | $U$   | $-U'$ | $\frac{U_1}{U}$ | $\ln \frac{U_1}{U}$ | $\frac{U'}{U_1'}$ | $\ln \frac{U'}{U_1'}$ | $0,376 \ln \frac{U'}{U_1'}$ | $4,58 \ln \frac{U_1}{U}$ | $\{ \}^*$ | $-\lambda$ |
| 0,60                                                                                    | 1,055 | 0,185 | 1,000           | 0,000               | 1,000             | 0,000                 | 0,000                       | 0,000                    | 0,467     | 4,27       |
| 0,65                                                                                    | 1,045 | 0,22  | 1,01            | 0,010               | 1,19              | 0,174                 | 0,065                       | 0,046                    | 0,336     | 6,12       |
| 0,70                                                                                    | 1,03  | 0,26  | 1,025           | 0,025               | 1,405             | 0,340                 | 0,128                       | 0,115                    | 0,224     | 8,43       |
| 0,75                                                                                    | 1,015 | 0,31  | 1,04            | 0,040               | 1,68              | 0,519                 | 0,195                       | 0,183                    | 0,089     | —          |
| 0,80                                                                                    | 1,00  | 0,39  | 1,055           | 0,054               | 2,11              | 0,747                 | 0,281                       | 0,248                    | -0,062    | —          |
| 0,85                                                                                    | 0,98  | 0,50  | 1,075           | 0,072               | 2,70              | 0,993                 | 0,373                       | 0,330                    | -0,236    | —          |

\*  $\{ \}$  — многочлен, заключенный в фигурные скобки в равенстве (128).

Как это видно из таблиц, дальнейшее определение величины  $\lambda$  прекращалось в том случае, если получавшиеся при этом значения превышали верхний предел применимости решения (126).

Для уточнения положения места отрыва мы воспользовались интегралом

$$\lambda = 5,62 \ln \left\{ e^{0,178 \lambda_1} - 0,376 \ln \frac{U'}{U_1} - 4,58 \ln \frac{U_1}{U} \right\} \quad (128)$$

по схеме, предложенной нами на стр. 53 главы III.

Вычисление значений выражения, стоящего под знаком натурального логарифма для ряда значений  $x$ , следующих за  $x_1$ , приведено в табл. 21, 22 и 23.

На фиг. 76 изображено изменение значений многочлена

$$\left\{ e^{0,178 \lambda_1} - 0,376 \ln \frac{U'}{U_1} - 4,58 \ln \frac{U_1}{U} \right\}$$

в функции от  $s/S$ .

Места отрыва граничного слоя определяются как абсциссы точек пересечения представленных на фиг. 76 кривых с прямой, параллельной оси абсцисс и удаленной от нее на расстоянии, равном

$$e^{-\frac{12}{5,62}} = 0,124.$$

Полученные таким образом места отрыва нанесены на соответствующих профилях двугольников на фиг. 77 и соединены общей кривой, пунктирная часть которой относится к необследованному участку изменения относительной толщины профиля  $\frac{1}{m} = 1 \div 0,25$ .

Если предположить, что ширина вихревой дорожки  $b$ , образуемой за телом в результате отрыва граничного слоя пропорциональна ординате места отрыва, а для кругового цилиндра приблизительно равна его диаметру, то изменение величины  $b$  в функции от относительного удлинения профиля представится кривой на фиг. 78.

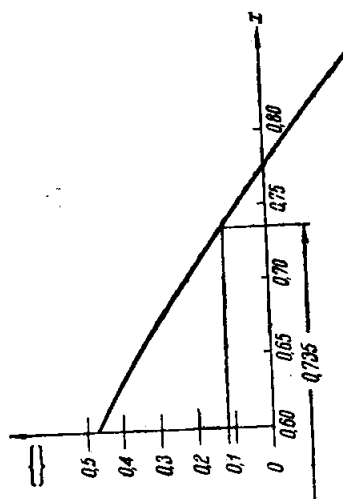
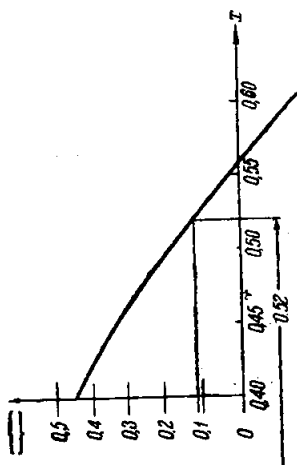
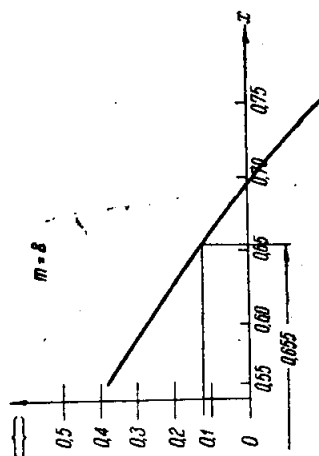
Для отыскания ее аналитического выражения составим таблицу значений  $\log b$  и  $\log m$ .

Таблица 24

| $m$ | $\log m$ | $b$   | $\log b$ |
|-----|----------|-------|----------|
| 1   | 0,000    | 1     | 0,000    |
| 4   | 0,602    | 0,185 | -0,733   |
| 8   | 0,903    | 0,07  | -1,155   |
| 12  | 1,079    | 0,04  | -1,398   |

Полученные таким образом точки хорошо укладываются на прямой (фиг. 79), уравнение которой:

$$\log b = -\frac{5}{4} \log m,$$



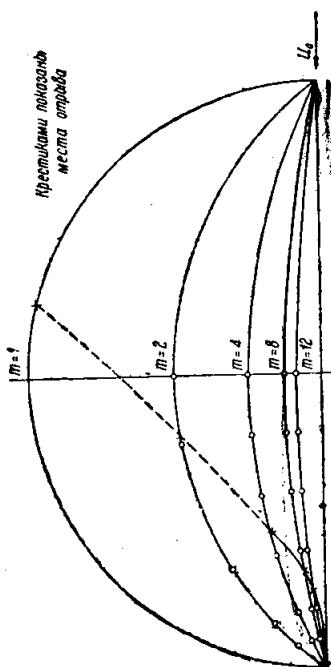
Фиг. 76. Отыскание мест отрыва, как абсцисс точек пересечения кривых

$$\left\{ e^{0.178x_1} - 0.376 \ln \frac{U'}{U_1} - 4.58 \ln \frac{U_1}{U} \right\}$$

с прямой

$$y = 0.124$$

для различных значений  $m$ .



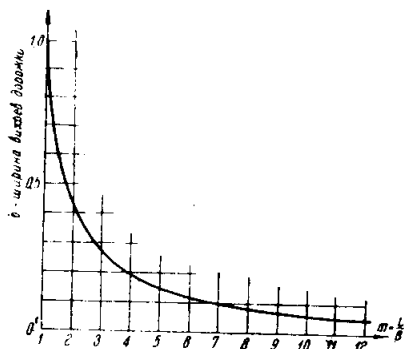
Фиг. 77. Положение мест отрыва ламинарного пограничного слоя на двугрульниках с различным относительным удлинением  $m$ .

откуда

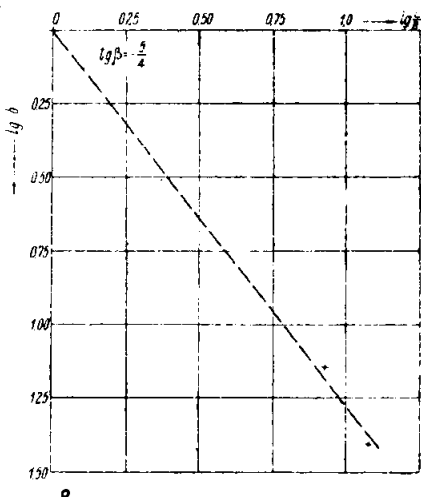
$$b = \frac{1}{m^{1,25}}. \quad (227)$$

Изменение абсциссы мест отрыва в ламинарном слое в функции от  $m$  представлено на фиг. 80.

Вследствие того, что в турбулентном граничном слое отрыв струй происходит позднее, чем в ламинарном (в значительно большем удалении от точки разветвления потока), последняя кривая позволяет во всяком случае определить минимальные границы применимости предшествовавших исследований, относящихся к распределению толщины турбулентного слоя, интенсивности сил трения и т. д.



Фиг. 78. Изменение ширины вихревой дорожки в зависимости от относительного удлинения профиля.



Фиг. 79. График функции  $\log b$  по  $\log m$ .

В заключение можно сделать следующие выводы:

1. С увеличением отношения главных размеров двуугольника  $m = \frac{L}{b}$  максимальная скорость на  $\infty$  вначале резко уменьшается, а затем для интересующих нас значений  $m = 8 \div 12$  колеблется в пределах  $1,16 \div 1,10 U_0$ .

2. Скорости на контуре при  $m = 4 \div 12$  возрастают так быстро, что уже на расстоянии 0,1 длины дуги профиля (считая от точки разветвления потока) достигают значения, равного скорости набегающего потока  $U_0$ .

Аналогично этому:

3. С увеличением отношения главных размеров двуугольника максимальное разрежение на  $\infty$  вначале резко падает, а затем для значений  $m = 8 \div 12$  колеблется в относительно небольших пределах:

$$\frac{p - p_0}{q_0} = 0,36 \div 0,23.$$



4. Давления на контуре при  $m = 4 \div 12$  падают так быстро, что уже на расстоянии 0,1 длины дуги профиля (считая от точки разветвления потока) достигают значения, равного давлению на бесконечности  $p_0$ .

5. Относительная толщина граничного слоя на профиле вначале (до  $s/S \cong 0,75$ ) меньше, чем у пластины, а затем резко возрастает и с увеличением  $s/S$  до 1 стремится к  $\infty$ .

6. В интересующих нас пределах отношений главных размеров  $m = 8 \div 12$  толщина граничного слоя практически не зависит от  $m$  и при этом  $\frac{\delta}{L}$  до  $s/S = 0,7$  меньше толщины слоя у пластины на  $\sim 20\%$ ,

а при  $s/S = 0,95$  превышает ее  $\infty$  в 1,5 раза.

7. По мере увеличения  $m$  максимальная интенсивность касательных сил перемещается к точке разветвления потока, а эпюра интенсивности приближается к такой же у пластины. Однако при сколь угодно большом, но конечном значении  $m$ ,

$$\tau = 0 \text{ при } s = 0 \text{ и } s = S.$$

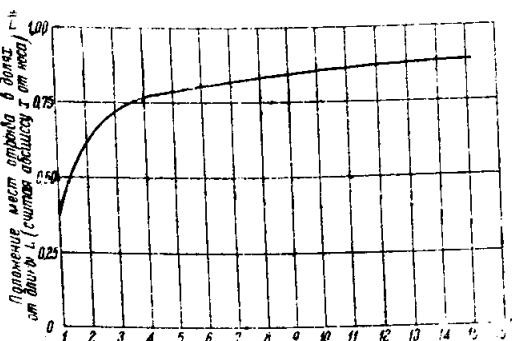
8. В пределах

$$\frac{x}{L} \cong 0,1 \div 0,85$$

касательные напряжения на профиле больше, чем у пластины (для  $m = 8 \div 12$  в среднем в 1,25 раза).

9. Вследствие кривизны профиля в интересующих нас пределах отношений

Фиг. 80. Изменение абсциссы мест отрыва в ламинарном слое в функции от относительного удлинения  $m$ .



главных размеров коэффициент сопротивления увеличивается в среднем на 12%.

10. Так называемая „надбавка“, учитывающая влияние кривизны на трение  $c_{fr} = c_{f \text{ проф}} - c_{f \text{ пл}}$  с увеличением числа Рейнольдса уменьшается пропорционально  $Re^{-1/5}$  и, следовательно, при пересчете от модели к натуре не может быть включена в Фрудовское „остаточное“ сопротивление.

11. Для фиксированного значения  $m = \frac{L}{B}$  „надбавка на кривизну“ составляет постоянную долю от коэффициента сопротивления пластины.

12. С увеличением относительного удлинения профиля  $m$  ширина вихревой дорожки убывает обратно пропорционально  $m^{5/4}$ .

13. В интересующей нас области изменений  $m = 8 \div 12$  места отрыва турбулентного граничного слоя удалены от кормовой оконечности во всяком случае не больше, чем на 10—15% длины профиля.

Приведенное в настоящей главе исследование продолжается нами в следующем направлении:

а) изучение влияния дополнительных геометрических характеристик профиля (в первую очередь положения  $\chi$  и формы носика) на распределение толщины граничного слоя и интенсивность сил трения;

б) проведение исследования, аналогичного изложенному при  $n = \frac{1}{8}$  и  $\frac{1}{9}$ ;

в) расчет распределения толщины граничного слоя и сил трения при переменном по длине контура значении показателя  $n$ ;

г) изучение зависимости вихревого сопротивления от относительного удлинения профиля.

## ГЛАВА VII

### ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Опыты Никурадзе. Решение Прандтля (1930 г.).  
Предположение Кармана о подобии поля пульсационных скоростей. Решение Кармана (1930 г.).

В своей последующей работе „Zur turbulenten Strömung in Röhren und längs Platten“, опубликованной в „Ergebnisse der Aerodynamischen Anstalt zu Göttingen“ (IV Lieferung, 1932 г) Прандтль использует для решения задачи о сопротивлении пластины универсальный логарифмический закон распределения скоростей, подтвержденный блестящими опытами Никурадзе для турбулентного течения жидкости в трубах.

Как и в изложенной выше теории, (глава IV), Прандтль снова постулирует что „процессы, происходящие вблизи гладкой стенки трубы, зависят только от трения на стенке, расстояния от нее рассматриваемой частицы и вязкости и плотности жидкости“.

Дальнейшее изложение будет вестись в обозначениях, являющихся сейчас общеупотребительными и отличающихся несколько от принятых выше.

Обозначим

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (228)$$

и будем измерять скорость  $u$  потока в масштабе новой величины „динамической скорости“ \*

$$\frac{u}{v_*} = \frac{u}{v_*} \quad (229)$$

Расстояние рассматриваемой точки потока от стенки будем измерять в долях „динамической длины“  $\frac{y}{l_*} = \frac{y}{\frac{\nu}{v_*}}$  и характеризовать безразмерным числом

$$\eta = \frac{v_* \cdot y}{\nu} = \frac{y}{l_*} \quad (230)$$

\* Терминология заимствуется из статьи Л. Г. Лойцянского, где даются и обоснования выбора этих „универсальных“ масштабов.

построенным по типу числа Рейнольдса \*.

В таком случае следует ожидать, что между новыми безразмерными характеристиками потока имеет место „универсальная“ зависимость:

$$\varphi = \varphi(\eta), \quad (231)$$

характер и область применения которой должны быть оправданы специальными экспериментальными исследованиями.

Результаты проведенных в этих целях опытов Никурадзе над турбулентным течением воды в гладких трубах и обнимающих значительный район чисел Рейнольдса  $4 \cdot 10^3 \leq \frac{u \cdot d}{\nu} \leq 3,24 \cdot 10^6$  представлены на фиг. 81.

Вследствие большого диапазона изменения  $\eta$ , для оси абсцисс здесь применены 3 различных масштаба, отличающихся различными степенями 10.

Более удобное представление результатов можно получить, если вдоль оси абсцисс вместо  $\eta$  откладывать  $\log \eta$  (фиг. 82).

Опытные точки, среди которых значительная часть распространяется вплоть до оси трубы, не вполне точно укладываются на одной кривой (прямой в изображении фиг. 82), но все размещаются в достаточно узкой полосе.

При этом проявление зависимости (231) тем точнее, чем ближе расположены точки замеров к стенке трубы.

Внутри указанной выше полосы можно, наблюдая за точками замеров, проведенных при одном и том же числе Рейнольдса, заметить систематический наклон кривых снизу вверх, эффект которого усиливается по мере приближения к оси трубы. Однако, для практических расчетов можно этими незначительно проявляющимися обстоятельствами пренебрегать.

Аналитическое выражение полученных результатов следующее:

$$\varphi = A + B \log \eta, \quad (232)$$

причем для замеров, проведенных вблизи стенки (прямая 2)

$$B = 5,52, \quad A = 5,84$$

для точек, лежащих вблизи оси трубы (прямая 3)

$$B = 5,52; \quad A = 6,68$$

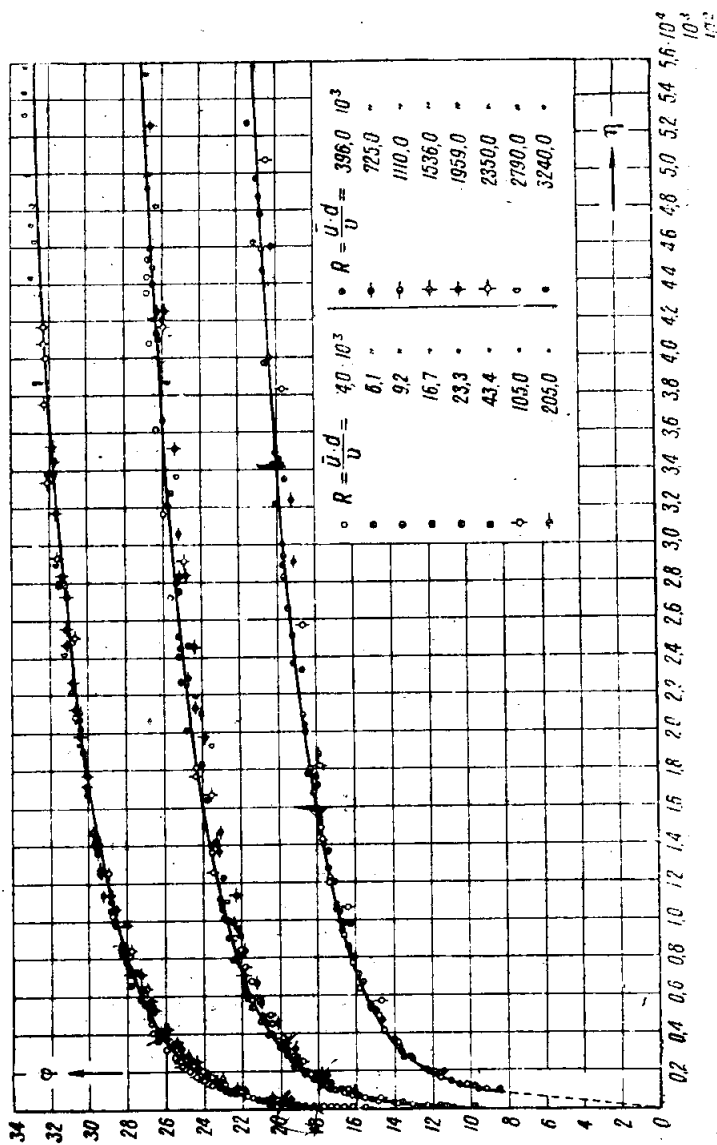
и, наконец, для средней интерполяционной кривой (см. фиг. 81, на фиг. 82 — прямая 4)

$$B = 5,75; \quad A = 5,50.$$

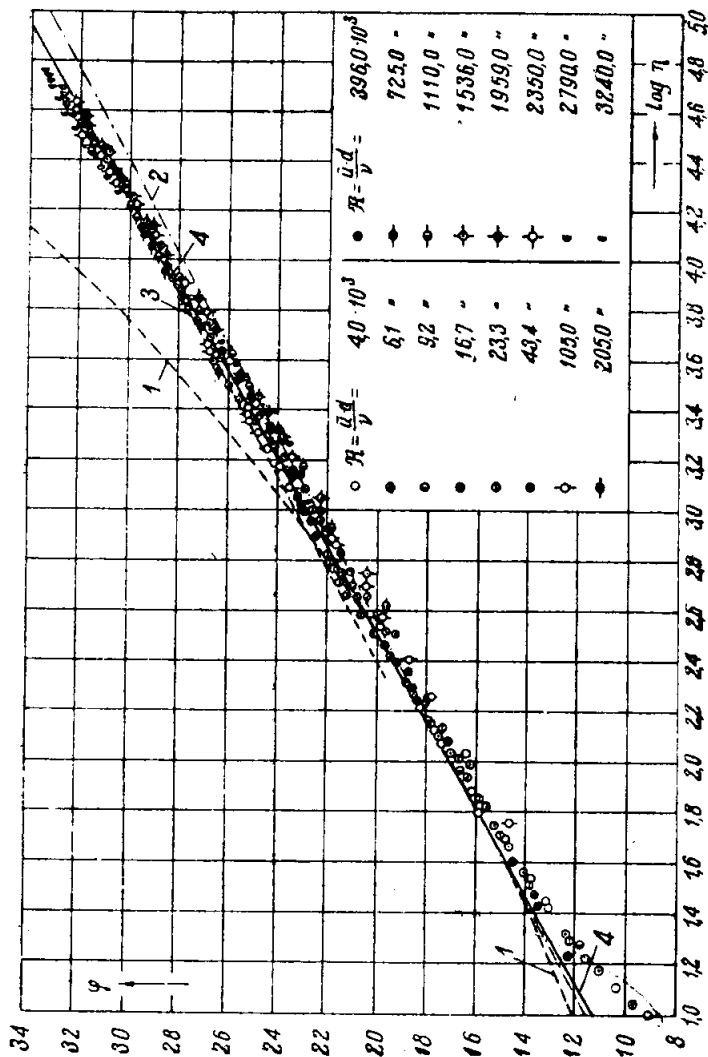
\* Легко заметить, что новые обозначения связаны с прежними следующими зависимостями

$$v_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot C;$$

$$R = \frac{u \cdot y}{\nu} = \frac{u}{v_*} \cdot \frac{v_* \cdot y}{\nu} = \varphi \cdot \eta.$$



Фиг. 81. Зависимость безразмерной скорости  $\varphi = \frac{u}{v_*}$  от  $\eta = \frac{v_* \cdot v}{v}$  согласно опытам Никурадзе.



Фиг. 82. Зависимость  $\varphi$  от  $\log \eta$ .

На том же чертеже кривая  $I$  представляет зависимость:

$$\varphi = 8,73 \cdot \eta^{1/2}, \quad (233)$$

получающуюся из закона Блазиуса при помощи следующих простых преобразований:

разделив обе части равенства (139) на  $\tau_0$ , находим:

$$\begin{aligned} 1 &= 0,0225 \frac{\rho}{\tau_0} u^{7/4} \left( \frac{v}{y} \right)^{1/4} = 0,0225 \cdot \frac{1}{v_*^2} \cdot u^{7/4} \cdot \left( \frac{v}{y} \right)^{1/4} = \\ &= 0,0225 \left( \frac{u}{v_*} \right)^{7/4} \cdot \left( \frac{v}{v_* \cdot y} \right)^{1/4} = 0,0225 \varphi^{1/2} \cdot \frac{1}{\eta^{1/4}} \end{aligned}$$

или

$$\varphi^{7/4} = \frac{1}{0,0225} \eta^{1/4},$$

откуда и получаем искомое выражение (233).

Сравнение кривой  $I$  с непосредственными результатами опытов Никурадзе позволяет регламентировать область применимости закона Блазиуса соотношениями:

$$40 \leq \eta \leq 500$$

или

$$3 \cdot 10^8 \leq R = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} \leq 10^6.$$

\* \* \*

Применим универсальный закон распределения скоростей к определению сопротивления пластины.

Пусть попрежнему  $\delta$  — толщина граничного слоя. Положим

$$u = u_1; \quad \eta = \eta_1 \text{ и } \varphi = \varphi_1$$

при

$$y = \delta.$$

Тогда

$$v_* = \frac{u_1}{\varphi_1} \quad (229a)$$

и, следовательно,

$$u = v_* \cdot \varphi = u_1 \cdot \frac{\varphi}{\varphi_1}. \quad (234)$$

Далее в соответствии с (230)

$$y = \frac{v}{v_*} \cdot \eta = \frac{v \cdot \varphi_1}{u_1} \cdot \eta. \quad (235)$$

Согласно закону количеств движения импульс силы трения за единицу времени составляет:  $I = \rho \int_0^\delta u(u_1 - u) dy = W. \quad (236)$

Кроме того, по определению силы трения

$$W = \int_0^x \tau dx = \rho \int_0^x v_*^2 \cdot dx. \quad (237)$$

Сопоставляя (236) и (237), после дифференцирования по  $x$  находим:

$$v_*^2 = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(u_1 - u) dy.$$

Подставим в последнее равенство значения  $u$  и  $y$ , согласно (234), (235). Тогда

$$\frac{u_1^2}{\varphi_1^2} = \frac{d}{dx} \int_0^{\eta_1} u_1 \frac{\varphi}{\varphi_1} \left( u_1 - u_1 \frac{\varphi}{\varphi_1} \right) \cdot \frac{v \varphi_1}{u_1} d\eta \quad (238)$$

или

$$\frac{u_1}{\varphi_1} = v \cdot \frac{d\eta_1}{dx} \cdot \frac{d}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta. \quad (239)$$

Согласно общим правилам дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{a(a)}^{b(a)} f(x, a) dx = \int_{a(a)}^{b(a)} \frac{\partial f}{\partial a} \cdot dx + f(b, a) \frac{db}{da} - f(a, a) \frac{da}{da}.$$

В соответствии с этим в нашем случае:

$$\frac{d}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \left( \varphi - \frac{\varphi^2}{\varphi_1} \right) d\eta = \int_0^{\eta_1} \frac{\varphi^2}{\varphi_1^2} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\eta_1} \cdot d\eta = \frac{1}{\varphi_1^2} \cdot F(\eta_1),$$

где

$$F(\eta_1) = \frac{d\varphi_1}{d\eta_1} \int_0^{\eta_1} \varphi^2 \cdot d\eta. \quad (240)$$

Подставив полученный результат в формулу (239), найдем:

$$dx = \frac{v}{u_1} \cdot F(\eta_1) \cdot d\eta_1, \quad (239a)$$

откуда

$$x = \frac{v}{u_1} \int_0^{\eta_1} F(\eta_1) \cdot d\eta_1 = \frac{v}{u_1} \Phi(\eta_2), \quad (241)$$

где

$$\Phi(\eta_2) = \int_0^{\eta_2} F(\eta_1) \cdot d\eta_1, \quad (242)$$



а  $\eta_2$  — значение  $\eta_1$ , соответствующее толщине граничного слоя у задней кромки пластины.

Уравнение (241) можно переписать в виде:

$$Re_x = \frac{x \cdot u_1}{\nu} = \Phi(\eta_2). \quad (241a)$$

Кроме того, согласно (229a) и (239a)

$$W = \int_0^x \tau dx = \int_0^x \rho v_*^2 \cdot dx = \int_0^{\eta_2} \frac{\rho u_1}{\varphi_1^3} \cdot \frac{\nu}{u_1} F(\eta_1) \cdot d\eta_1$$

или

$$W = \rho \nu \cdot u_1 \Psi(\eta_2), \quad (243)$$

где

$$\Psi(\eta_2) = \int_0^{\eta_2} \frac{F(\eta_1)}{\varphi_1^2} \cdot d\eta_1. \quad (244)$$

Отсюда коэффициент сопротивления

$$\left. \begin{aligned} C_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} u_1^2 \cdot x} = \frac{2\nu}{u_1 \cdot x} \Psi(\eta_2) = \frac{2\Psi(\eta_2)}{\Phi(\eta_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (245)$$

Таким образом, найденная система уравнений (241a) и (245), представляющая связь между коэффициентом сопротивления и числом Рейнольдса, решает задачу о сопротивлении пластины при одном непрерывном условии наличия турбулентного профиля скоростей по всей длине ее.

Если же на известной части  $x_0$  длины пластины имеет место ламинарный поток, то уравнение (241) заменится соотношением:

$$x = x_0 + \frac{\nu}{u_1} \int_{\eta_0}^{\eta_2} F(\eta_1) \cdot d\eta_1 = \frac{\nu}{u_1} [R_0 + \Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_0)], \quad (246)$$

причем

$$R_0 = \frac{u_1 \cdot x_0}{\nu},$$

а  $\eta_0$  — толщина пограничного слоя в месте перехода от ламинарного обтекания к турбулентному.

Точно так же, полное сопротивление пластины

$$W = W_0 + \rho \nu u_1 \int_{\eta_0}^{\eta_2} \frac{F(\eta_1)}{\varphi_1^2} d\eta_1 = W_0 + \rho \nu u_1 [\Psi(\eta_2) - \Psi(\eta_0)], \quad (247)$$

где  $W_0$  — сопротивление части пластины, обтекаемой ламинарным потоком, которое в соответствии с законом Блазиуса может быть записано в виде:

$$W_0 = C_{f_0} \frac{\rho}{2} u_1^2 \cdot x_0 = C_{f_0} \frac{\rho}{2} \nu u_1 \cdot R_0$$

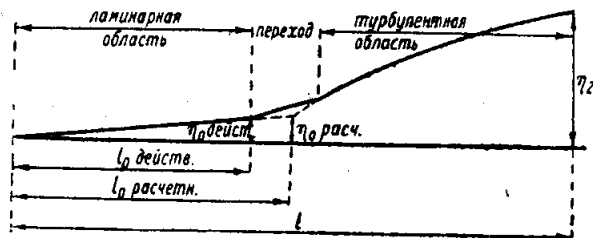
и

$$C_{f_0} = \frac{1,328}{R_0^{1/2}}.$$

В предшествующем изложении предполагалось, что переход от ламинарного профиля скоростей к турбулентному происходит внезапно (в точке, отстоящей от передней кромки пластины на расстоянии  $x_0$ ).

В действительности же этот переход занимает некоторую (обычно незначительную) часть длины пластины и, вследствие этого, для правильности расчетов необходимо брать длину  $x_0$  чисто ламинарной части потока несколько большей, чем это имеет место в действительности (см. фиг. 83).

Недостающее в уравнениях (246) и (247) начальное значение  $\tau_0$  толщины турбулентного граничного слоя может быть определено в зависимости от критического значения числа Рейнольдса на следующих основаниях.



Фиг. 83. Определение расчетной длины  $l_0$  ламинарного участка.

По закону импульса величина силы трения однозначно определяется профилем скоростей и толщиной граничного слоя в начальном и конечном сечениях и совершенно не зависит от поля скоростей между этими сечениями, оказывающего свое влияние только на толщину граничного слоя в месте зарождения турбулентного профиля.

Таким образом, определение сопротивления трения для ламинарного участка можно вести, пользуясь любым законом распределения скоростей по его длине, обеспечивающим удовлетворение граничных условий (в рассматриваемых сечениях) и, в частности, принятым в предшествующем изложении. В соответствии с этим, согласно (243)

$$W_0 = \rho \nu u_1 \Psi(\tau_0).$$

Кроме того

$$W_0 = C_{f_0} \frac{\rho}{2} \nu \cdot u_1 R_0$$

Отсюда

$$\Psi(\tau_0) = \frac{C_{f_0}}{2} \cdot R_0. \quad (248)$$

На аналогичных основаниях полное сопротивление пластины и при наличии ламинарного набегаания составит

$$W = \rho \nu u_1 \Psi(\eta_2)$$

(влияние ламинарного набегаания учитывается при выборе величины  $\eta_2$ ).

В таком случае, коэффициент полного сопротивления

$$C_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} u_1^2 \cdot x} = \frac{\rho \nu u_1 \Psi(\eta_2)}{\frac{\rho}{2} u_1^2 \frac{\nu}{u_1} \left[ \Phi(\eta_2) + R_0 - \Phi(\eta_0) \right]} = \frac{2 \Psi(\eta_2)}{\Phi(\eta_2) + K} \quad (249)$$

где  $K = R_0 - \Phi(\eta_0)$  — постоянная, однозначно определяемая величиной критического числа Рейнольдса.

\* \* \*

Для получения численных результатов на основе изложенной теории достаточно принять универсальный закон распределения скоростей:

$$\varphi = B \log \eta + A = \frac{B}{2,3025} \ln \eta + A \quad (232)$$

и выполнить интегрирование в соответствии с зависимостями (240), (242) и (244), определяющими функции  $F(\eta)$ ,  $\Phi(\eta)$  и  $\Psi(\eta)$ .

При этом в целях удовлетворения граничного условия на стенке

$$\text{при } \eta = 0 \quad \varphi = 0 \quad (250)$$

Прандтль вводит под знак логарифма 1 и представляет универсальный закон распределения скоростей в виде:

$$\varphi = a \ln(1 + b \eta). \quad (232a)$$

Значения постоянных  $a$  и  $b$  определяются из условия совпадения обоих выражений (232) и (232a) при достаточно больших  $\eta$ .

Так, при

$$b \eta \gg 1,$$

имеем:

$$\varphi \cong a \ln b + a \ln \eta = \frac{B}{2,3025} \ln \eta + A,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{B}{2,3025} \\ b &= e^{\frac{2,3025A}{B}} \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

При интегрировании введем замену переменных:

$$\begin{aligned} 1 + b \eta &= z; \\ d\eta &= \frac{dz}{b}. \end{aligned}$$

Тогда

$$F(\eta) = \frac{d\varphi}{d\eta} \cdot \int_0^{\eta} \varphi^2 d\eta = \frac{ab}{1+b\eta} \cdot \int_0^{\eta} a^2 \ln^2(1+b\eta) \cdot d\eta = \frac{a^3}{z} \int_1^z \ln^2 z \cdot dz.$$

Так как

$$\int \ln z dz = z \ln z - z + C,$$

$$\int \ln^2 z dz = z \ln^2 z - 2 \int \ln z dz = z \ln^2 z - 2z \ln z + 2z + C,$$

то

$$F(\eta) = \frac{a^3}{z} \left[ z \ln^2 z - 2z \ln z + 2z \right]_1^z = a^3 \left( \ln^2 z - 2 \ln z + 2 - \frac{2}{z} \right). \quad (252)$$

Далее

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= \int_0^{\eta} F(\eta) d\eta = \frac{a^3}{b} \int_1^z \left( \ln^2 z - 2 \ln z + 2 - \frac{2}{z} \right) \cdot dz = \\ &= \frac{a^3}{b} \left[ \left( z \ln^2 z - 2z \ln z + 2z \right) - 2 \left( z \ln z - z \right) + 2z - 2 \ln z \right]_1^z = \\ &= \frac{a^3}{b} \left( z \ln^2 z - 4z \ln z + 6z - 2 \ln z - 6 \right). \end{aligned} \quad (253)$$

Кроме того

$$\begin{aligned} \int \frac{F(\eta)}{\varphi^2} d\eta &= \int \frac{\frac{d\varphi}{d\eta} \int_0^{\eta} \varphi^2 d\eta}{\varphi^2} d\eta = \int \left\{ \frac{1}{\varphi^2} \int_0^{\eta} \varphi^2 d\eta \right\} d\varphi = \\ &= -\frac{1}{\varphi} \int_0^{\eta} \varphi^2 d\eta + \int \frac{1}{\varphi} \cdot \varphi^2 \frac{d\eta}{d\varphi} \cdot d\varphi = -\frac{1}{\varphi} \int_0^{\eta} \varphi^3 d\eta + \int \varphi \cdot d\eta \end{aligned}$$

или, после замены переменных,  $1+b\eta = z$

$$\begin{aligned} \int \frac{F(\eta)}{\varphi^2} \cdot d\eta &= -\frac{a}{b \ln z} \int_0^z \ln^2 z dz + \frac{a}{b} \int \ln z dz = \\ &= \frac{a}{b} \left[ z \ln z - z - \left( z \ln z - 2z + \frac{2z}{\ln z} - \frac{2}{\ln z} \right) \right] = \frac{a}{b} \left[ z - \frac{2(z-1)}{\ln z} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \Psi(\eta) &= \int_0^{\eta} \frac{F(\eta)}{\varphi^2} d\eta = \frac{a}{b} \left[ z - \frac{2(z-1)}{\ln z} \right]_1^z = \frac{a}{b} \left[ z - \frac{2(z-1)}{\ln z} - 1 + 2 \right]^* = \\ &= \frac{a}{b} \left[ z + 1 - \frac{2(z-1)}{\ln z} \right]. \end{aligned} \quad (254)$$

\*  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{\ln z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{z}} = 1.$

Перепишем основные формулы, служащие для установления зависимости между коэффициентом трения  $C_f$  и числом Рейнольдса при условии полной турбулизации всего граничного слоя:

$$C_f = \frac{2\Psi(\eta)}{\Phi(\eta)}; \quad R_x = \Phi(\eta);$$

$$\Psi(\eta) = \frac{a}{b} \left[ z + 1 - \frac{2(z-1)}{\ln z} \right]; \quad \Phi(\eta) = \frac{a^3}{b} \left( z \ln^2 z - 4z \ln z - 2 \ln z + 6z - 6 \right),$$

где

$$z = 1 + b\eta.$$

При вычислениях, результаты которых приведены в табл. 25, в соответствии с кривой 4 принято:

$$B = 5,75; \quad A = 5,50$$

и, следовательно

$$a = \frac{B}{2,3025} = 2,495;$$

$$b = e^{\frac{A}{2,3025B}} = 8,93.$$

Таблица 25

| $\eta/10^3$ | $R_x/10^6$ | $2\Psi/10^3$ | $C_f \cdot 10^3$ |
|-------------|------------|--------------|------------------|
| 0,200       | 0,101      | 0,735        | 7,29             |
| 0,353       | 0,213      | 1,33         | 6,22             |
| 0,707       | 0,520      | 2,72         | 5,23             |
| 1,000       | 0,820      | 3,90         | 4,75             |
| 1,30        | 1,14       | 5,11         | 4,47             |
| 2,00        | 1,96       | 7,96         | 4,05             |
| 3,00        | 3,25       | 12,00        | 3,71             |
| 5,00        | 6,10       | 20,4         | 3,34             |
| 7,00        | 9,20       | 28,8         | 3,13             |
| 12,0        | 17,70      | 49,6         | 2,81             |
| 20,0        | 32,5       | 83,5         | 2,57             |
| 28,3        | 49,1       | 119          | 2,41             |
| 50,0        | 96,5       | 212          | 2,20             |
| 100         | 217,5      | 427          | 1,96             |
| 170         | 403,5      | 732          | 1,81             |
| 283         | 728,0      | 1230         | 1,69             |
| 500         | 1401       | 2170         | 1,55             |

Табличные значения коэффициента сопротивления нанесены в функции от логарифма числа Рейнольдса на фиг. 84 (верхняя кривая, отмеченная цифрой 1).

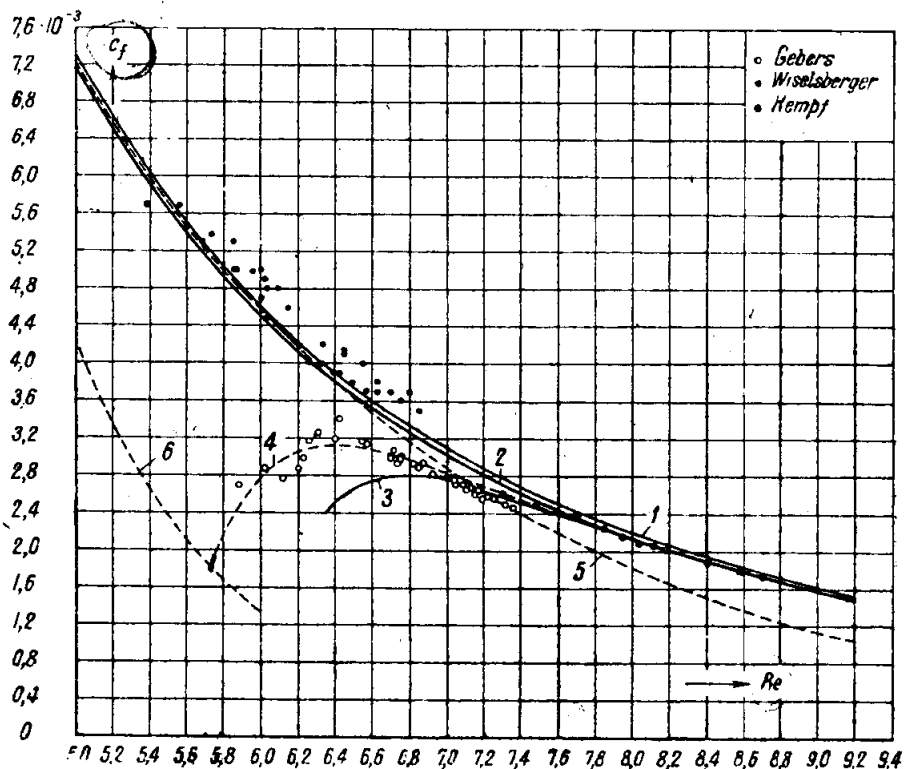
На том же чертеже представлены результаты опытов Геберса, Визельсбергера и Кемпфа\*. Сравнение их с кривой 1 приводит к следующим выводам:

\* В опытах Кемпфа непосредственно замерялись величины местного трения подвижных пластин, размещенных по длине повтонов. Точки, нанесенные на фиг. 84, отвечают результатам интегрирования.

1. Опытные точки Визельсбергера лежат несколько выше кривой 1 вследствие некоторой шероховатости и волнистости матерчатых пластин, испытанных Визельсбергером.

2. Опыты Геберса дают пониженные значения коэффициентов сопротивления в результате значительной длины ламинарного участка.

3. В опытах Кемпфа, проведенных при значительных числах Рейнольдса, влияние ламинарного набега должно быть практически



Фиг. 84. Изменение коэффициента сопротивления тонкой пластины в функции числа Рейнольдса.

ничтожным. Несмотря на это, а также наличие хотя бы и незначительной шероховатости днищевых пластин, результаты опытов ложатся ниже кривой 1. Это свидетельствует о том, что для технически гладких пластин приведенные выше расчеты дают преувеличенные значения коэффициентов трения.

Последнее становится понятным, если иметь в виду, что значения постоянных  $a$  и  $b$  заимствованы нами из испытаний с трубами постоянного сечения при наличии перепада давления, отсутствующего при обтекании пластины.

Как показывают опыты Никурадзе в канале с углом расхождения, обеспечивающим постоянство давления по длине канала, наклон профиля скоростей, а, следовательно, и трение у стенки оказывается не-

сколько меньше, чем в трубе постоянного сечения при одном и том же значении максимальной скорости.

В соответствии с этим, с некоторым произволом можно положить  $a = 2,545$ ;  $b = 8,93$ .

Данные вторичных пересчетов сведены в табл. 26 и отвечают кривой 2 на фиг. 84.

Таблица 26

| $\eta/10^3$ | $R/10^6$ | $2 \Psi/10^3$ | $C_f \cdot 10^3$ | $R_{x1}/10^6$ | $C_{f1}/10^3$ |
|-------------|----------|---------------|------------------|---------------|---------------|
| 0,200       | 0,107    | 0,748         | 7,03             | —             | —             |
| 0,353       | 0,225    | 1,35          | 6,04             | —             | —             |
| 0,500       | 0,355    | 1,95          | 5,48             | —             | —             |
| 0,707       | 0,548    | 2,77          | 5,05             | —             | —             |
| 1,00        | 0,864    | 3,97          | 4,59             | —             | —             |
| 1,30        | 1,20     | 5,20          | 4,33             | 2,20          | 2,36          |
| 3,00        | 2,07     | 8,10          | 3,92             | 3,07          | 2,64          |
| 2,00        | 3,43     | 12,2          | 2,57             | 4,43          | 2,76          |
| 5,00        | 6,43     | 20,8          | 3,20             | 7,43          | 2,80          |
| 7,07        | 9,70     | 29,3          | 3,02             | 10,7          | 2,74          |
| 12,0        | 18,7     | 50,5          | 2,71             | 19,7          | 2,57          |
| 20,0        | 34,3     | 85,0          | 2,48             | 35,3          | 2,41          |
| 28,3        | 51,8     | 121           | 2,34             | 52,8          | 2,30          |
| 50,0        | 102      | 216           | 2,12             | 103           | 2,10          |
| 100         | 229      | 435           | 1,90             | 230           | 1,89          |
| 170         | 425      | 745           | 1,75             | 426           | 1,75          |
| 283         | 768      | 1253          | 1,63             | 769           | 1,63          |
| 500         | 1476     | 2210          | 1,50             | 1477          | 1,50          |

При наличии достаточно большого ламинарного участка последние результаты, естественно, оказываются неверными и должны быть заменены расчетом по формуле (249). Если, к примеру, положить в ней  $K = 10^6$ , то можно получить одну из возможных переходных кривых (3), координаты точек которой даны в последних двух столбцах табл. 26.

Табличное задание коэффициентов трения может привести к известным осложнениям при решении ряда специальных задач. Вследствие этого, является целесообразным подобрать аналитическое выражение для кривой (2), удобный вид которого:

$$C_f = \frac{m}{(\log Re + p)^n} \quad (255)$$

Постоянные  $m$ ,  $n$  и  $p$  определяются из условия прохождения кривой (255) через 3 заданные точки:

$$m = 0,455; \quad n = 2,58; \quad p = 0.$$

В таком виде

$$C_f = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \quad (255a)$$

последняя формула дает хорошие результаты в значительной области чисел Рейнольдса:

$$10^6 \leq Re \leq 10^9$$

\* \* \*

Теория Кармана. Рассмотрим случай плоского движения между 2 параллельными стенками и отнесем некоторый слой потока к подвижной системе координат, имеющей начало в произвольной точке этого слоя и движущейся вместе с ним поступательно со скоростью  $U_0$  ( $U_0$  — скорость осредненного потока в данной точке слоя).

Направим ось  $x$  вдоль  $U_0$ , а ось  $y$  — перпендикулярно к стенкам (фиг. 85).

Тогда в осредненном движении относительная скорость частицы, отстоящей от оси  $x$  на достаточно малом расстоянии  $y$  может быть представлена (при помощи разложения в ряд Маклорена) в виде:

$$U = U_0' y + \frac{U_0''}{2} y^2 + \dots \quad (256)$$

где  $U_0'$ ,  $U_0''$  — значения производных скоростей осредненного потока в точках, лежащих на оси  $x$  (при  $y = 0$ ).

Предполагая, что пульсационное движение имеет в рассматриваемом случае функцию тока  $\psi(x, y)^*$ , определяемую из условий:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u' \quad ; \quad - \frac{\partial \psi}{\partial x} = v' \quad (257)$$

( $u'$ ,  $v'$  — составляющие пульсационной скорости по направлениям  $x$ ,  $y$ ), Карман делает основное предположение о подобии пульсационных движений в различных слоях потока, которое можно сформулировать следующим образом:

Каждому слою потока можно сопоставить некоторую характерную длину  $l$  и характерную величину  $A$  таким образом, что при

$$\xi = \frac{x}{l} = \text{idem} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{l} = \text{idem} \quad (258)$$

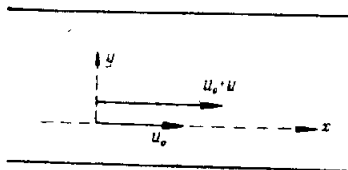
имеет место

$$f(\xi, \eta) = \frac{\psi(x, y)}{A} = \text{idem} \quad (259)$$

Иначе говоря:

Поля пульсационных скоростей в различных местах потока различаются только масштабом длин и скоростей.

\* Это предположение равносильно допущению плоского (двухразмерного) характера пульсационного движения при условии несжимаемости жидкости. Кроме того, пульсационное движение рассматривается здесь как квази-стационарное.



Фиг. 85. К теории Кармана (основные обозначения).



Согласно (256) функция тока для осредненного течения жидкости (в предположении установившегося процесса в направлении оси  $x$ ) равна:

$$\bar{\Psi}(x, y) = \frac{U_0' y^2}{2} + \frac{U_0'' y^3}{6} + \dots \quad (260)$$

В таком случае функция тока  $\Psi(x, y)$  для поля актуальных скоростей:

$$u = U + u' ; \quad v = v' \quad (261)$$

представится формулой:

$$\Psi(x, y) = \bar{\Psi}(x, y) + \psi(x, y) = \frac{U_0' y^2}{2} + \frac{U_0'' y^3}{6} + \dots + \psi(x, y). \quad (262)$$

Пользуясь существованием функции тока, можно написать основное условие динамической возможности движения (уравнение Гельмгольца)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \Psi, \quad (263)$$

где  $\Delta$  — символический оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Отбрасывая в уравнении (263) член  $\nu \Delta \Delta \Psi$ , зависящий от молекулярной вязкости, и подставляя в (263)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_0' y + \frac{U_0'' y^2}{2} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U_0' + U_0'' y + \dots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} =$$

$$= U_0' + U_0'' y + \dots + \Delta \psi;$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = U_0'' + \dots + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}$$

найдем:

$$\left( U_0' y + \frac{U_0'' y^2}{2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( U_0'' + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = 0$$

или, пренебрегая членом, содержащим  $y^2$ ,

$$\left( U_0' y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( U_0'' + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (264)$$

После подстановки в последнее уравнение выражений:

$$x = l\xi ; \quad y = l\eta \quad \text{и} \quad \psi = Af(\xi, \eta)$$

находим:

$$U_0' \eta \cdot \frac{A}{l^2} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - U_0'' \cdot \frac{A}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{A^2}{l^4} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (265)$$

где

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}.$$

Зависимость (265) можно рассматривать, как дифференциальное уравнение относительно функции  $f(\xi, \eta)$  и так как по смыслу подобия вид функции и входящие в ее выражение постоянные величины не зависят от рассматриваемого слоя, то коэффициенты

$$U_0' \frac{A}{l^2}; U_0'' \cdot \frac{A}{l} \text{ и } \frac{A^2}{l^4}$$

должны быть пропорциональны друг другу:

$$U_0' \frac{A}{l^2} : \frac{A^2}{l^4} = U_0' \cdot \frac{l^2}{A} = \text{idem}; \quad (266)$$

$$U_0'' \cdot \frac{A}{l} : \frac{A^2}{l^4} = U_0'' \frac{l^3}{A} = \text{idem} \quad (267)$$

или после почленного деления (267) на (266)

$$l \frac{U_0''}{U_0'} = \text{const}$$

и, следовательно,

$$l \propto \frac{U_0'}{U_0''}.$$

Кроме того по (266)

$$A \sim l^2 U_0' \quad (268)$$

Отсюда, касательное напряжение

$$\begin{aligned} \tau &= -\overline{\rho u' v'} = \rho \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}} = \rho \frac{A^2}{l^2} \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}}; \\ \tau &\sim \rho l^2 U_0'^2 \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}} \sim \rho \cdot \frac{(U_0')^4}{(U_0'')^2} \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}}. \end{aligned} \quad (269)$$

Так как вследствие подобия пульсационного движения во всех слоях

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}} = \text{idem},$$

то согласно (269) можно положить

$$\tau = \rho x^2 \cdot \frac{(U_0')^4}{(U_0'')^2}, \quad (270)$$

где  $x$  — универсальная постоянная (равная приблизительно 0,40), не зависящая от рода жидкости и характеризующая механизм турбулентного движения.

Сравнение последней формулы (270) с формулой Прандтля:

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial U_0}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

приводит к результату, позволяющему по полю скоростей оценить величину пути перемешивания:

$$l = x \left| \frac{U'_0}{U''_0} \right|. \quad (271)$$

Применим полученный результат для решения задачи о распределении скоростей в трубе или в канале, образованном двумя параллельными стенками.

Если

$2r$  — расстояние между стенками канала (диаметр трубы);

$\tau_0$  — напряжение трения на стенке;

$\tau$  — " " " в точке, отстоящей от оси канала (или трубы) на расстоянии  $y$ ,  
то в обоих случаях

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{y}{r}. \quad (272)$$

Действительно, обозначив перепад давления в двух сечениях, отстоящих друг от друга на расстоянии  $L$  через  $p_2 - p_1$ , напишем уравнения равновесия:

для круглого цилиндра радиуса  $y$ :

$$2\pi y \cdot L \cdot \tau = \pi y^2 (p_2 - p_1),$$

откуда

$$2L\tau = y(p_2 - p_1) \quad (273)$$

Кроме того, при  $y = r$

$$2L\tau_0 = r(p_2 - p_1). \quad (274)$$

Поделив почленно (273) на (274), находим:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{y}{r}.$$

для прямоугольного параллелепипеда с поперечным сечением  $2y \cdot 1$ :

$$2\tau \cdot L \cdot 1 = 2y \cdot 1 (p_2 - p_1),$$

откуда

$$\tau \cdot L = y(p_2 - p_1). \quad (273)$$

Кроме того, при  $y = r$

$$\tau_0 L = r(p_2 - p_1). \quad (274)$$

Поделив почленно (273) на (274), находим:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{y}{r}.$$

Сравнивая формулы (270) и (272) получим: \*

$$\tau_0 \cdot \frac{y}{r} = x^2 \rho \frac{(U')^4}{(U'')^2},$$

откуда

$$\frac{U''}{(U')^2} = x \cdot \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\tau_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = x \cdot \frac{\sqrt{r}}{v_*} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$\rho$

\* Индекс  $_0$  при производных скорости опускаем.

После интегрирования находим:

$$-\frac{1}{U'} = \kappa \cdot \frac{\sqrt{r}}{v_*} \cdot 2 \sqrt{y} + C = 2\kappa \frac{\sqrt{r}}{v_*} (\sqrt{y} - a),$$

где  $C = -2\kappa \frac{\sqrt{r}}{v_*} \cdot a$  — неопределенная постоянная.

Далее,

$$U' = \frac{1}{2\kappa} \cdot \frac{v_*}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{a - \sqrt{y}} \quad (275)$$

или

$$\frac{U'r}{v_*} = \frac{1}{2\kappa} \cdot \frac{\sqrt{r}}{a - \sqrt{r}}. \quad (276)$$

У стенки (при  $y=r$ )

$$U' = \frac{\tau_0}{\mu}.$$

Кроме того,

$$\tau_0 = c_f \frac{\rho}{2} U_{\max}^2$$

( $c_f$  — коэффициент местного трения)  
и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{c_f} \cdot U_{\max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при  $y=r$ ,

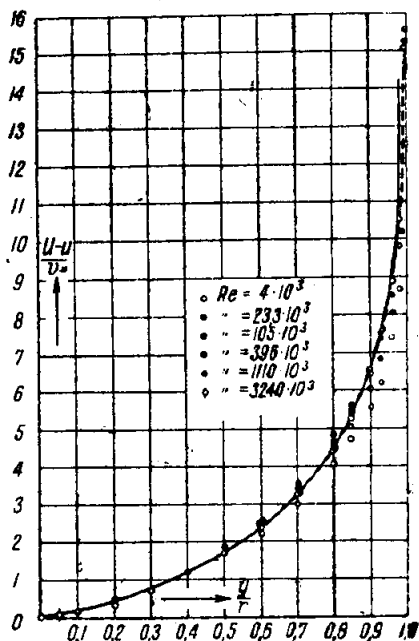
$$\frac{U'r}{v_*} = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot \frac{r}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot r = \sqrt{c_f} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{U_{\max} \cdot d}{\nu}.$$

Так как согласно опытным данным  $\frac{\sqrt{c_f}}{2\sqrt{2}}$  относительно мало меняется по сравнению с ростом числа Рейнольдса, сохраняя порядок  $10^{-3}$ , то с достаточным приближением при значительных числах Рейнольдса можно положить

$$\frac{U'r}{v_*} = \infty \text{ при } y=r.$$

Из последнего условия следует, что согласно (276)

$$a - \sqrt{r} = 0 \quad \text{или} \quad a = \sqrt{r}$$



Фиг. 86. Сравнение распределения скоростей по формуле Кармана с результатами опытов Никурадзе.

Таким образом,

$$U' = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{v_*}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r} - \sqrt{y}} \quad (276a)$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от 0 до  $y$  и обозначив через  $U_{\max}$  — максимальную скорость (на оси:  $y=0$ ), последовательно находим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{r} - \sqrt{y}} &= \left\{ \int \frac{2z dz}{\sqrt{r} - z} \right\}_{z=\sqrt{y}} = -2 \left\{ \int \left( 1 - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r} - z} \right) dz \right\}_{z=\sqrt{y}} = \\ &= -2 \{ \sqrt{y} + \sqrt{r} \ln(\sqrt{r} - \sqrt{y}) \} + \text{const}; \\ \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{r} - \sqrt{y}} &= -\frac{2}{\sqrt{r}} \left\{ \sqrt{y} + \sqrt{r} \ln(\sqrt{r} - \sqrt{y}) - \sqrt{r} \ln \sqrt{r} \right\} = \\ &= -2 \left\{ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{y}{r}} \right) + \sqrt{\frac{y}{r}} \right\}; \\ U_{\max} - U &= -\frac{v_*}{\alpha} \left\{ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{y}{r}} \right) + \sqrt{\frac{y}{r}} \right\}. \end{aligned}$$

Окончательно, профиль скоростей в турбулентной части потока определится зависимостью

$$\frac{U_{\max} - U}{v_*} = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{y}{r}} \right) + \sqrt{\frac{y}{r}} \right\}. \quad (277)$$

Сравнение полученного результата с данными опытов Никурадзе приведено на фиг. 86 и дает блестящее подтверждение теории Кармана за исключением области относительно тонкого ламинарного слоя, непосредственно прилегающего к стенке, для которой последняя формула оказывается несправедливой, давая на стенке согласно (276a) бесконечно большое значение производной  $U'$ .

Для устранения этого недостатка, можно поступить следующим образом:

Согласно предположения Кармана (1921 г.) толщина ламинарного подслоя  $\delta_i$  определяется только трением у стенки  $\tau_0$  и величинами физических постоянных жидкостей  $\mu$  и  $\rho$ :

$$\delta_i = \text{const} \cdot \tau_0^m \cdot \mu^n \cdot \rho^k.$$

Исследуя размерности обеих частей последнего равенства, последовательно находим:

$$\mu = \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \right)^m \cdot \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \right)^n \cdot \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4} \right)^k;$$

$$m + n + k = 0, \quad n + 2k = 0; \quad -2m - 2n - 4k = 1;$$

$$m = k = -\frac{1}{2}; \quad n = 1,$$

откуда

$$\delta_l = \text{const} \cdot \tau_0^{-1/2} \mu \cdot \rho^{-1/2} = \alpha \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \alpha \frac{\nu}{v_*} \quad (278)$$

Предположив с достаточным приближением линейный закон распределения скоростей внутри ламинарного подслоя легко определить скорость  $U_1$  на его границе.

Действительно по закону Ньютона

$$\tau_0 = \mu \cdot \left( \frac{dU}{dy} \right)_0$$

откуда

$$\left( \frac{dU}{dy} \right)_0 = \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\rho}{\nu} = \frac{v_*^2}{\nu}$$

и, следовательно,

$$U_1 = \left( \frac{dU}{dy} \right)_0 \delta_l = \frac{v_*^2}{\nu} \cdot \alpha \cdot \frac{\nu}{v_*} = \alpha v_* \quad (279)$$

Подставив полученный результат в формулу (277)

$$[\text{при } y = r - \delta_l, \quad U = U_1],$$

находим

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \alpha v_* - \frac{1}{\alpha v_*} \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{r - \delta_l}{r}} \right) + \sqrt{\frac{r - \delta_l}{r}} \right] = \\ &= \frac{v_*}{\alpha} \left[ \ln \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{\delta_l}{r}}} - \sqrt{1 - \frac{\delta_l}{r}} + \alpha \right]. \end{aligned}$$

Разлагая  $\sqrt{1 - \frac{\delta_l}{r}}$  в ряд и пренебрегая высшими степенями отношения  $\frac{\delta_l}{r}$ , получаем

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{\delta_l}{r} \right)^{1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_l}{r} + \dots \\ \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{\delta_l}{r}}} &= \frac{2r}{\delta_l}, \end{aligned}$$

откуда

$$U_{\max} = \frac{v_*}{\alpha} \left[ \ln \frac{2r}{\delta_l} - 1 + \alpha \right]$$

и на основании (278)

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \frac{v_*}{\alpha} \left[ \ln 2 + \ln r - \ln \alpha - \ln \frac{\nu}{v_*} - 1 + \alpha \right] = \\ &= \frac{v_*}{\alpha} \left[ \ln \frac{v_* \cdot r}{\nu} + C \right], \end{aligned} \quad (280)$$

где

$$C = \ln r - \ln \alpha - 1 + \chi \alpha.$$

Формула (280)

$$U_{\max} = \frac{v_*}{\chi} \left( \ln \frac{v_* \cdot r}{\nu} + C \right)$$

может быть использована для установления закона сопротивления в трубах, связывающего коэффициент сопротивления

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U_{\max}^2} \quad (281)$$

с числом Рейнольдса

$$R = \frac{U_{\max} \cdot r}{\nu}.$$

Действительно, согласно (281)

$$U_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c_f}} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c_f}} \cdot v_*;$$

$$\frac{v_* \cdot r}{\nu} = \frac{U_{\max} \cdot r}{\nu} \cdot \sqrt{c_f} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c_f}} \cdot v_* = \frac{v_*}{\chi} \left[ \ln (R \sqrt{c_f}) + C - \frac{1}{2} \ln 2 \right]$$

Окончательно,

$$\frac{\chi \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{c_f}} = \ln (R \cdot \sqrt{c_f}) + C' \quad (282)$$

где  $C' = C - \frac{1}{2} \ln 2$  — новая экспериментальная постоянная.

Сравнение полученной зависимости с опытами Никурадзе, представленное на фиг. 87, свидетельствует о практически полном совпадении формулы Кармана с результатами эксперимента и регламентирует значение постоянных

$$\chi = 0,39 \quad c' = 1,98$$

Таким образом, формула (282) переписывается в виде:

$$\frac{1}{c_f^{1/4}} = 3,6 + 4,15 \log_{10} (R \cdot c_f^{1/4}) \quad (282a)$$

Полученные результаты могут быть легко обобщены на случай потока, обтекающего плоскую пластину со скоростью  $U$ .

В самом деле: сопротивление трения пластины шириной  $l$  и длиной  $x$  равняется:

$$w = \rho \int_0^x u (U - u) dy$$

откуда, вследствие

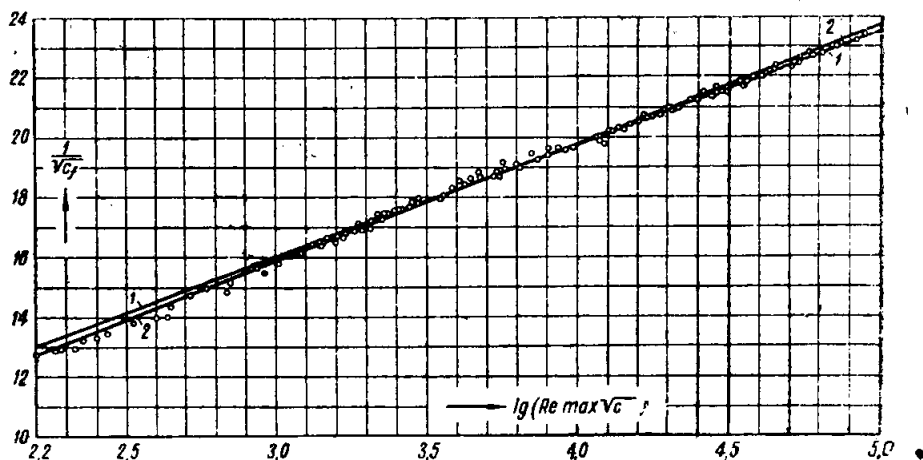
$$u = -(U - u) + U,$$

находим:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{\delta} [-(U-u) + U](U-u) dy = \\ &= U \int_0^{\delta} (U-u) du - \int_0^{\delta} (U-u)^2 dy. \end{aligned}$$

Согласно (277) в новых обозначениях

$$\begin{aligned} U-u &= -\frac{v_*}{\kappa} \left\{ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{\delta-y}{\delta}} \right) + \sqrt{\frac{\delta-y}{\delta}} \right\} = \\ &= -\frac{v_*}{\kappa} \left\{ \ln \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} \right\} \end{aligned}$$



Фиг. 87. Сравнение зависимости коэффициента местного трения

$$\left( \frac{1}{\sqrt{c_f}} \text{ от } \lg Re_{\max} \cdot \sqrt{c_f} \right)$$

по Карману с опытами Никурадзе.

и, следовательно,

$$\begin{aligned} w &= -\delta U \frac{v_*}{\kappa} \int_0^1 \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right) + \sqrt{1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right] d \left( \frac{y}{\delta} \right) - \\ &\quad - \frac{\delta v_*^2}{\kappa^2} \int_0^1 \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right) + \sqrt{1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right]^2 d \left( \frac{y}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Введем замену переменных:

$$\sqrt{1 - \frac{y}{\delta}} = z,$$



тогда

$$1 - \frac{y}{\delta} = z^2$$

и

$$d\left(\frac{y}{\delta}\right) = -2zdz.$$

Таким образом,

$$w = -\delta U \frac{v_*}{x} \int_0^1 [\ln(1-z) + z] 2zdz - \frac{\delta v_*^2}{x^2} \int_0^1 [\ln(1-z) + z]^2 \cdot 2zdz.$$

Последовательное взятие квадратур приведено ниже:

$$\int_0^1 2z \ln(1-z) dz = [z^2 \ln(1-z)]_0^1 + \int_0^1 \frac{z^2}{1-z} dz = [z^2 \ln(1-z)]_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \frac{(1-z^2) - 1}{1-z} dz = [(z^2-1) \ln(1-z) - z - \frac{z^2}{2}]_0^1 = -\frac{3}{2};$$

$$\int_0^1 2z^2 dz = \frac{2}{3}.$$

Окончательно,

$$\int_0^1 [\ln(1-z) + z] \cdot 2zdz = -\frac{5}{6}.$$

Аналогично найдем:

$$\int_0^1 [\ln(1-z) + z]^2 \cdot 2zdz = \frac{14}{9}.$$

Таким образом,

$$w = \rho \left( \frac{5}{6x} \cdot v_* \cdot U - \frac{14}{9x^2} \cdot v_*^2 \right) \cdot \delta. \quad (283)$$

Полагая согласно (281)

$$\frac{\tau_0}{\rho} = c_f \cdot \frac{U^2}{2},$$

$$\begin{aligned} * \lim_{z \rightarrow 1} \{ (z^2-1) \ln(1-z) \} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\ln(1-z)}{\frac{1}{z^2-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-z}}{\frac{2z}{(z^2-1)^2}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{(z^2-1)(z-1)}{2z} = 0 \end{aligned}$$

перепишем выражение для силы трения в виде:

$$w = \rho U^2 \delta \cdot \left( \frac{5}{6x^2} \cdot \sqrt{\frac{c_f}{2}} - \frac{7}{9x^2} \cdot c_f \right).$$

С другой стороны, в соответствии с зависимостями, установленными выше для течения в трубах,

$$x \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \ln \left( \frac{U \delta}{v} \cdot \sqrt{c_f} \right) + C', \quad (282)$$

откуда

$$\delta = \frac{v}{U} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_f}} \cdot e^{x \sqrt{\frac{2}{c_f}} - C'}.$$

После подстановки последнего результата в формулу (283) находим:

$$w = \mu U \left( \frac{5}{6x \sqrt{2}} - \frac{7 \sqrt{c_f}}{9x^2} \right) e^{x \sqrt{\frac{2}{c_f}} - C'} \quad (283a)$$

Введем замену переменных, положив

$$z = x \sqrt{\frac{2}{c_f}} \quad (284)$$

Тогда

$$\sqrt{c_f} = \frac{x \sqrt{2}}{z}$$

и

$$\begin{aligned} w &= \mu U \left( \frac{5}{6x \sqrt{2}} - \frac{7x \sqrt{2}}{9x^2} \cdot \frac{1}{z} \right) e^{z - C''} = \\ &= \frac{5}{6x \sqrt{2}} \mu U \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} \right) e^{z - C''} \end{aligned} \quad (283b)$$

По определению силы трения

$$w = \int_0^x \tau_0 dx$$

и, следовательно,

$$\frac{dw}{dx} = \tau_0.$$

Но, согласно (283b)

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{5}{6x \sqrt{2}} \mu U e^{-C''} \frac{d}{dx} \left\{ \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} \right) e^z \right\} = \\ &= \frac{5}{6x \sqrt{2}} \rho U^2 e^{-C''} \frac{d}{d\left(\frac{Ux}{v}\right)} \left\{ \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} \right) e^z \right\} \end{aligned}$$

и по (281)

$$\tau_0 = \frac{\rho}{2} U^2 c_f = \rho \frac{U^2 x^2}{z^2},$$

откуда

$$\frac{5}{6x^3\sqrt{2}} \rho U^2 e^{-C'} \frac{d}{dR_x} \left\{ \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} \right) e^z \right\} = \frac{\mu U^2 x^2}{z^2}.$$

или

$$\frac{5 e^{-C'}}{6x^3\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dR_x} \left\{ \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} \right) e^z \right\} = \frac{1}{z^2}.$$

Далее, так как

$$\frac{d}{dz} \left\{ \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} \right) e^z \right\} = e^z \left( 1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z} + \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z^2} \right),$$

то

$$\frac{5 e^{-C'}}{6x^3\sqrt{2}} \cdot e^z \left( z^2 - \frac{28}{15} z + \frac{28}{15} \right) dz = dR_x$$

откуда, интегрируя в пределах от 0 до  $z$ , находим:

$$\frac{5 e^{-C'}}{6x^3\sqrt{2}} \int_0^z e^z \left( z^2 - \frac{28}{15} z + \frac{28}{15} \right) \cdot dz = R_x$$

Последовательное взятие квадратур

$$\begin{aligned} \int_0^z e^z \left( z^2 - \frac{28}{15} z + \frac{28}{15} \right) dz &= \left[ e^z \left( z^2 - \frac{28}{15} z + \frac{28}{15} \right) \right]_0^z - \int_0^z e^z \left( 2z - \frac{28}{15} \right) dz = \\ &= \left[ e^z \left( z^2 - \frac{28}{15} z + \frac{28}{15} \right) \right]_0^z - \left[ e^z \left( 2z - \frac{28}{15} \right) \right]_0^z + 2 \int_0^z e^z dz = \\ &= e^z \left( z^2 - \frac{58}{15} z + \frac{86}{15} \right) - \frac{86}{15} \end{aligned}$$

приводит к следующему результату, представляющему связь между коэффициентом местного трения и числом Рейнольдса  $R_x = \frac{U \cdot x}{\nu}$ :

$$R_x = \frac{5 e^{-C'}}{6x^3\sqrt{2}} z^2 \left[ e^z \left( 1 - \frac{58}{15} \cdot \frac{1}{z} + \frac{86}{15} \cdot \frac{1}{z^2} \right) - \frac{86}{15} \cdot \frac{1}{z^3} \right] \quad (285)$$

Для достаточно больших  $R$  можно в первом приближении положить

$$R_x = \frac{5 e^{-C'}}{6x^3\sqrt{2}} z^2 \cdot e^z$$

или

$$R_x = \frac{5 \cdot e^{-C'}}{6x^3 \sqrt{2}} x^2 \cdot \frac{2}{c_f} e^x \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \text{const} \cdot e^x \sqrt{\frac{2}{c_f}},$$

откуда

$$\ln(R_x \cdot c_f) = \text{const} + x \sqrt{\frac{2}{c_f}}. \quad (286)$$

Сравнение найденных результатов с опытами Кемпфа, при которых измерялись величины местного трения, дано на фиг. 88. Как это непосредственно усматривается из чертежа, использование найденного ранее логарифмического закона распределения скоростей полностью устранило расхождение между опытом и теорией (1921 г.), наличие которого объясняется ограниченностью закона Блазиуса, на котором основывались прежние теоретические работы.

Для дальнейшего весьма важно установить зависимость между местным и полным коэффициентом трения  $c_f$  и  $C_f$ . По определению

$$C_f = \frac{w}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot x \cdot 1} = \frac{5e^{-c'} \mu U}{6\alpha \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 x} \left(1 - \frac{28}{15} z\right) e^z =$$

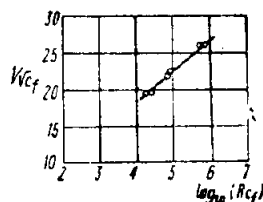
$$= \frac{5e^{-c'} \sqrt{2}}{6\alpha R_x} \left(1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z}\right) e^z.$$

Подставив вместо  $R_x$  его значение согласно (285), находим:

$$C_f = \frac{2x^2}{z^2} \cdot \frac{1 - \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{z}}{1 - \frac{58}{15} \cdot \frac{1}{z} + \frac{86}{15} \cdot \frac{1}{z^2}}, \quad (287)$$

где попрежнему

$$z = x \sqrt{\frac{2}{c_f}}. \quad (284)$$



Фиг. 88. Сравнение зависимости коэффициента местного трения пластины от числа Рейнольдса (по Карману) с опытами Кемпфа.

Полученный согласно (286) результат не является прямым повторением зависимости (282), на которой он основан, и отличается от нее не только иной структурой числа Рейнольдса  $\left(\frac{Ux}{\nu}$  вместо  $\frac{U\delta}{\nu}\right)$ , но и показателем степени при коэффициенте сопротивления под знаком логарифма. Уравнение прямой, представляющей на фиг. 88 результат измерений Кемпфа:

$$\frac{1}{c_f^{1/2}} = 1,7 + 4,15 \log_{10} (R_x \cdot c_f), \quad (286a)$$

причем множитель 4,15 попрежнему соответствует значению  $\alpha = 0,39$ .

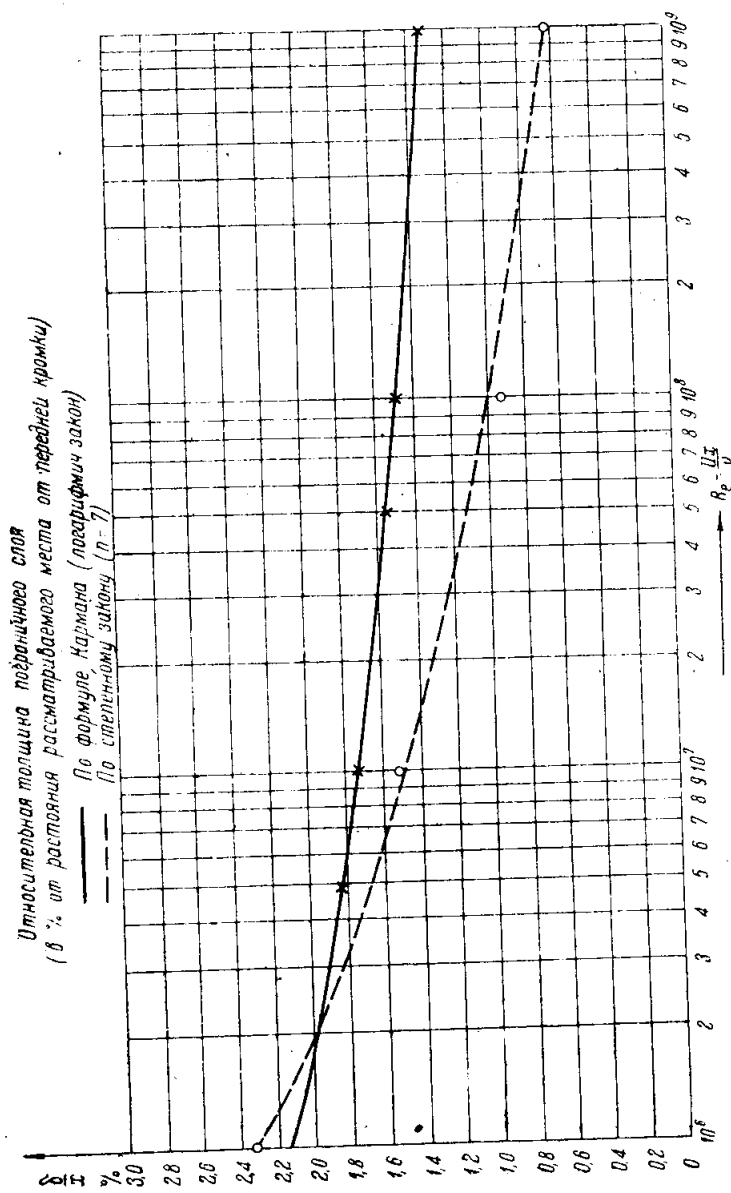
Для целей практического приложения величины коэффициентов сопротивления  $c_f$  и  $C_f$  подсчитанные по формулам (286) и (287) представлены ниже в табл. 27.

Для целей аналитического исследования, кроме формулы (255-а) приведенной на стр. 150, могут служить зависимости

$$\frac{0,242}{C_f^{1/2}} = \log_{10} (R_x \cdot C_f) \quad (288)$$

и

$$c_f = \frac{0,588 C_f}{0,588 + 2(C_f)^{1/2}}, \quad (289)$$



Фиг. 89. Сравнение относительной толщины пограничного слоя, вычисленной по логарифмическому и степенному законам.

$\frac{\delta}{x}$  — относительная толщина пограничного слоя, измеренная в процентах от расстояния рассматриваемого места от передней кромки. Сплошная кривая отвечает логарифмическому распределению скоростей' пунктирная — степенному закону ( $n = \frac{1}{7}$ ).

полученные Шенхерром на основе обработки большого экспериментального материала.

Таблица 27

| $R_x$            | $C_f$   | $c_f$   | $R_x$           | $C_f$   | $c_f$   |
|------------------|---------|---------|-----------------|---------|---------|
| $2 \cdot 10^5$   | 0,00614 | 0,00480 | $2 \cdot 10^7$  | 0,00263 | 0,00222 |
| 3                | 562     | 444     | 3               | 247     | 216     |
| 4                | 529     | 419     | 4               | 237     | 210     |
| 5                | 506     | 402     | 5               | 229     | 196     |
| $7 \cdot 10^5$   | 473     | 379     | $7 \cdot 10^7$  | 218     | 187     |
| $10 \cdot 10^5$  | 441     | 357     | $10 \cdot 10^7$ | 207     | 179     |
| $1,5 \cdot 10^6$ | 408     | 332     | $2 \cdot 10^8$  | 189     | 163     |
| 2                | 387     | 317     | 3               | 179     | 156     |
| 3                | 360     | 296     | $5 \cdot 10^8$  | 167     | 145     |
| 4                | 342     | 283     | $10^9$          | 155     | 135     |
| 5                | 330     | 274     | $2 \cdot 10^9$  | 141     | 125     |
| $7 \cdot 10^8$   | 311     | 260     | $5 \cdot 10^9$  | 127     | 113     |
| 10               | 293     | 245     | $10^{10}$       | 118     | 105     |

Для определения толщины пограничного слоя сравним полученные выше зависимости:

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 1,7 + 4,15 \log_{10} \left( \frac{Ux}{\nu} \cdot c_f \right); \quad (286a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = 3,6 + 4,15 \log_{10} \left( \frac{U\delta}{\nu} \cdot \sqrt{c_f} \right) \quad (282a)$$

После почленного вычитания, найдем:

$$0 = 1,9 + 4,15 \log_{10} \frac{\delta}{x c_f^{1/2}},$$

откуда

$$\delta = 0,348 x \sqrt{c_f}. \quad (290)$$

Последнее выражение свидетельствует о том, что относительная толщина  $\frac{\delta}{x}$  пограничного слоя на пластине, обтекаемой турбулентным потоком, прямо пропорциональна корню квадратному из величины коэффициента местного трения и, следовательно, с ростом числа Рейнольдса,  $\frac{\delta}{x}$  уменьшается.

На фиг. 89 представлено сравнение толщин пограничного слоя на пластине, рассчитанных по формуле (290) и степенному закону.

## ГЛАВА VIII

### СОПРОТИВЛЕНИЕ ШЕРОХОВАТЫХ ПЛАСТИН

Опыты Никурадзе с шероховатыми трубами.  
Применение результатов этих опытов для решения задачи о сопротивлении пластин с различной относительной шероховатостью

Подобно тому, как это было сделано в главе VI, Прандтль использовал опыты Никурадзе над течением жидкости в трубах, сплошь покрытых зернами песка для установления законов сопротивления пластин с различной степенью шероховатости.

На фиг. 90 нанесены основные результаты опытов Геттингенской лаборатории в виде кривых коэффициентов сопротивления  $\lambda$  в функции от числа Рейнольдса  $\frac{U \cdot d}{\nu}$  для различных величин относительной шероховатости, мерилom которой, по Мизесу, принято отношение среднего диаметра зерен  $k$  к радиусу трубы  $r$ . В целях сравнения на этом же чертеже нанесены кривые ламинарного и турбулентного трения гладких труб.

Как это следует из фиг. 90, пока поток в трубе ламинарный, влияние шероховатости практически вовсе отсутствует. Начиная с  $Re \approx 2000$ , кривые коэффициенты сопротивления вначале согласно (независимо от величины относительной шероховатости) переходят от значений, отвечающих ламинарному трению к кривой турбулентного трения гладких труб для того, чтобы затем одна за другой отделяться от последней и при том тем раньше, чем больше величина относительной шероховатости. Таким образом, при относительно малой шероховатости и в турбулентной области влияние шероховатости отсутствует на тем большем диапазоне чисел Рейнольдса, чем меньше величина  $\frac{k}{r}$ .

Наконец, с некоторого значения числа Рейнольдса, зависящего от величины  $\frac{k}{r}$ , коэффициент сопротивления становится постоянным и, следовательно, сопротивление трения подчиняется квадратичному закону скорости. Последнюю область в дальнейшем для краткости мы будем называть областью „установившейся шероховатости“.

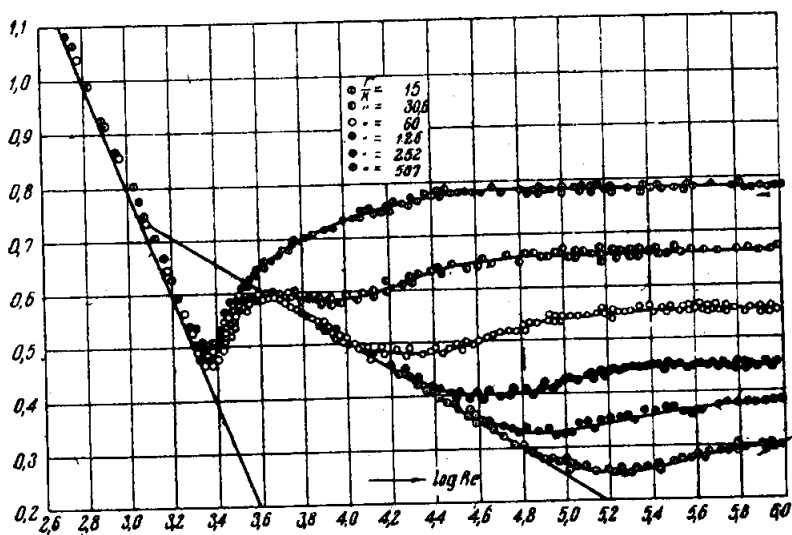
Изложенное выше может быть уяснено при помощи следующих физических представлений.

В непосредственной близости к стенке жидкость подчиняется законам ламинарного трения и образует так называемый ламинарный подслой, толщина которого  $\delta_e$  уменьшается с увеличением числа Рейнольдса.

Если зерна шероховатости лежат на дне ламинарного слоя:

$$k \ll \delta_e,$$

то вследствие весьма малого значения скоростей, с которыми жидкость обтекает бугорки шероховатости, их влияние незаметно, и сопротивление практически не отличается от сопротивления гладкой трубы.



Фиг. 90. Изменение коэффициента сопротивления трубы  $\lambda$  в зависимости от числа Рейнольдса  $\frac{U \cdot d}{\nu}$  и относительной шероховатости  $\frac{k}{r}$ .

С увеличением скорости средний диаметр зерен становится равным толщине слоя:

$$k = \delta_e$$

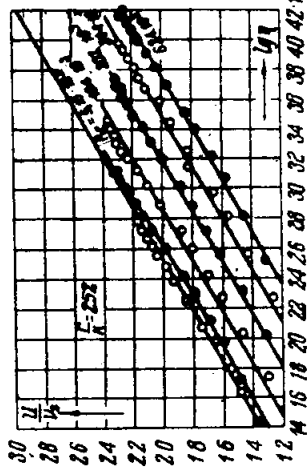
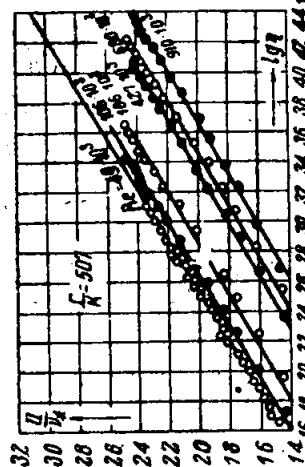
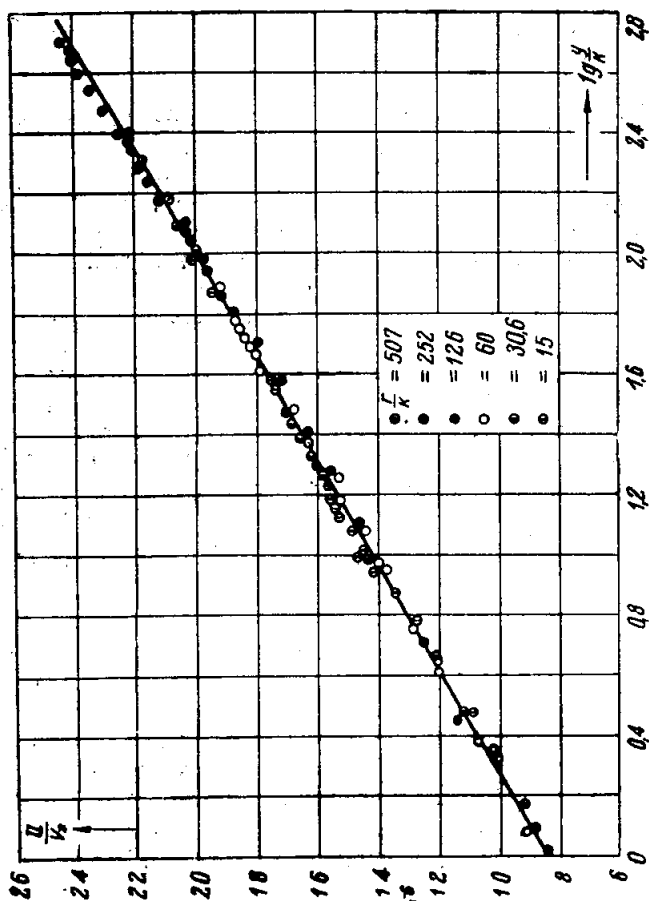
а одиночные выступы выходят за его пределы.

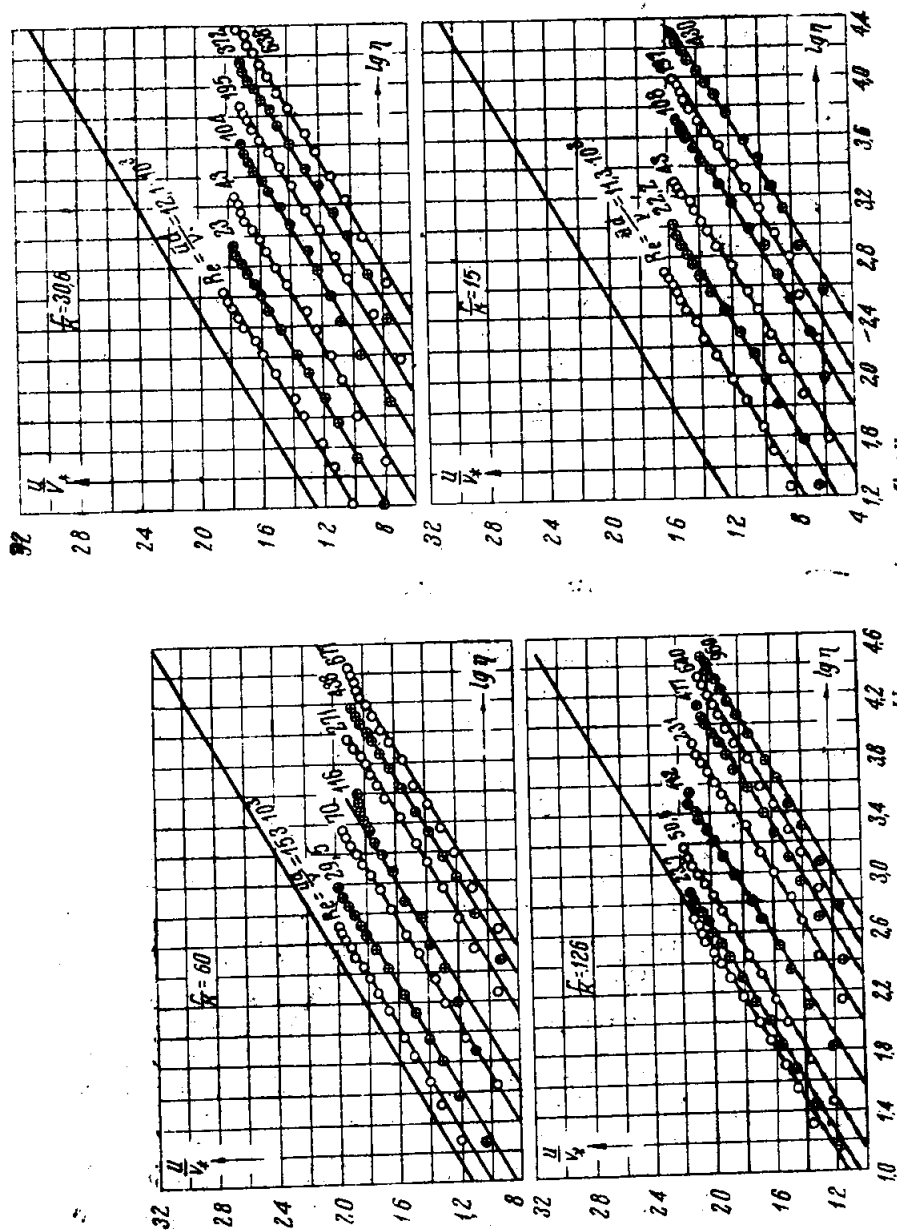
В связи с этим скорость обтекания бугорков значительно возрастает, вызывая вихреобразование, в свою очередь требующее дополнительных затрат энергии. Последнее разъясняет причины начала подъема коэффициентов сопротивления по сравнению с кривой турбулентного трения гладких труб.

Наконец, при дальнейшем увеличении скорости толщина ламинарного подслоя становится настолько малой, что все бугорки шероховатости выходят за его пределы, и интенсивное вихреобразование предопределяет квадратичный закон сопротивления:

$$\lambda = \text{const.}$$







Фиг. 91. Зависимость относительной скорости  $\frac{U}{V_*}$  от  $\log \frac{U}{V_*}$  и  $\log \eta$  при различной относительной шероховатости (по опытам Никурадзе)

Изложенное выше в значительной степени усложняется при переходе от внутренней задачи к внешней вследствие того, что в последнем случае при одном и том же абсолютном значении шероховатости ее относительная величина меняется по длине пластины обратно пропорционально толщине пограничного слоя.

В связи с этим носовая часть пластины всегда будет находиться в области установившейся шероховатости в то время, как кормовая ее часть в зависимости от длины пластин и размеров зерен шероховатости может находиться в различных условиях обтекания.

Для последующих расчетов сопротивления шероховатых пластин, основанных на применении закона количеств движения, нам понадобится знание профиля скоростей при различных режимах шероховатости.

В связи с этим ниже мы приводим основные результаты опытов Никурадзе, подробно изложенных в его работе „Strömungsgesetze in rauhen Röhren“ (Forschungsheft V. D. J. № 361 за 1933 год).

В случае гладких труб турбулентный профиль скорости подчиняется универсальному закону

$$\varphi = A + B \log \eta, \quad (232)$$

где

$$\varphi = \frac{U}{v_*}; \quad \eta = \frac{v_* \cdot y}{\nu},$$

а  $A$  и  $B$  — постоянные, независимые от числа Рейнольдса:

$$A \cong 5,5; \quad B \cong 5,75.$$

Если и для шероховатых труб нанести относительную скорость  $\varphi$  в функции от  $\log \eta$ , то для каждого значения относительной шероховатости можно получить семейство прямых, параллельных (232) и отличающихся друг от друга значением числа Рейнольдса (фиг. 91).

Таким образом, и в случае шероховатых труб коэффициент  $B$  сохраняет постоянное значение, независимое от числа Рейнольдса и величины относительной шероховатости.

Имея в виду, что

$$\eta = \frac{v_* \cdot y}{\nu} = \frac{v_* \cdot k}{\nu} \cdot \frac{y}{k},$$

можно универсальный закон распределения скорости в случае шероховатых труб написать в форме:

$$\varphi = \bar{A} + 5,75 \log \frac{y}{k}, \quad (291)$$

где  $\bar{A}$  — переменная, величина которой может быть определена либо на основе замеренных профилей скорости, либо по значениям коэффициента сопротивления.

Как показывают опыты Никурадзе, величина  $A$  однозначно определяется числом  $\frac{v_* \cdot k}{\nu}$ , с точностью до постоянного множителя, характеризующим отношение среднего диаметра бугорка  $k$  к толщине ламинарного подслоя  $\delta_c = \text{const} \cdot \frac{\nu}{v_*}$ .

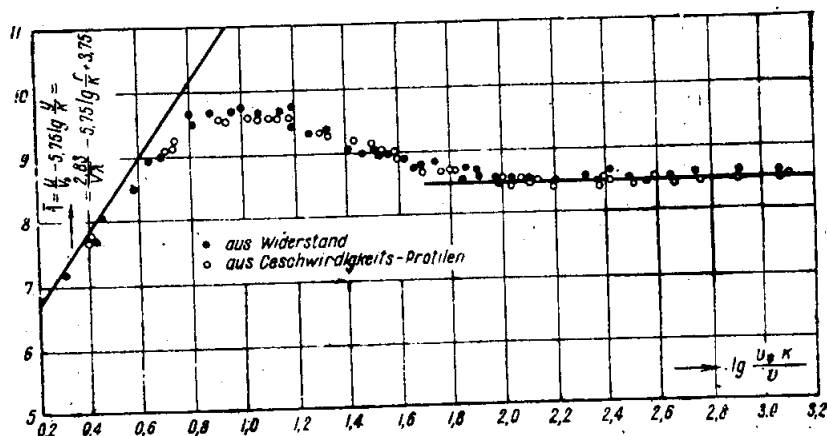
Указанная зависимость представлена графически на фиг. 92 и для удобства дальнейших расчетов может быть с достаточным приближением заменена следующими аналитическими выражениями:

В области установившейся шероховатости при

$$\log \frac{v_* \cdot k}{\nu} \geq 1,85$$

$\bar{A}$  практически не зависит от величины относительной шероховатости и равняется

$$\bar{A} = 8,48 \quad (292a)$$



Фиг. 92. Зависимость коэффициента  $\bar{A} = \varphi - 5,75 \log \frac{y}{k} \frac{v_* \cdot k}{\nu}$  от  $\lg \frac{v_* \cdot k}{\nu}$  (согласно опытам Никурадзе).

Из наблюдаемых коэффициентов сопротивления и из наблюдаемых эпюр скоростей.

Для гладких труб

$$\bar{A} = 5,5 + 5,75 \log \frac{v_* \cdot k}{\nu} \quad (292б)$$

и, наконец, в переходной области с достаточным приближением I  $\bar{A} = 9,58$  при

$$0,85 \leq \log \frac{v_* \cdot k}{\nu} \leq 1,15; \quad (292в)$$

II  $\bar{A} = 11,5 - 1,62 \log \frac{v_* \cdot k}{\nu}$

при

$$1,15 \leq \log \frac{v_* \cdot k}{\nu} \leq 1,85. \quad (292г)$$

\* \* \*

Для установления основной зависимости сопротивления  $w$  от длины пластины  $x$  применим закон количеств движения

$$w = \int_0^x \tau dx = \rho \int_0^{\delta} u (U - u) dy = \rho U^2 \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy, \quad (293)$$

где попрежнему

$U$  — скорость невозмущенного потока;

$u$  — скорость в рассматриваемом сечении граничного слоя на расстоянии  $y$  от стенки;

$\delta$  — толщина слоя в конце пластины (на расстоянии  $x$  от передней кромки).

Пусть  $\vartheta = \frac{y}{k}$  и  $\varphi = \frac{u}{v_*}$ .

Условимся в дальнейшем обозначать индексом 1 значения соответствующих величин на внешней границе слоя трения:

$$\vartheta_1 = \frac{\delta}{k}; \quad \varphi_1 = \frac{U}{v_*}$$

Тогда согласно (293)

$$w = \rho U^2 k \int_0^{\vartheta_1} \left[ \frac{\varphi}{\varphi_1} - \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)^2 \right] d\vartheta = \rho k U^2 \cdot F(\vartheta_1), \quad (294)$$

где для сокращения записи положено

$$F(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} \left[ \frac{\varphi}{\varphi_1} - \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)^2 \right] d\vartheta. \quad (295)$$

Отсюда

$$\frac{dw}{dx} = \rho k U^2 \frac{dF}{d\vartheta_1} \cdot \frac{d\vartheta_1}{dx}. \quad (296)$$

С другой стороны

$$\frac{dw}{dx} = \tau_0 = \rho v_*^2 = \rho \cdot \frac{U^2}{\varphi_1^2}. \quad (297)$$

Приравнявая выражения (296) и (297) и поделив обе части полученного равенства на  $\rho U^2$ , находим:

$$\frac{1}{\varphi_1^2} = k \cdot \frac{dF}{d\vartheta_1} \cdot \frac{d\vartheta_1}{dx},$$

откуда

$$x = k G(\vartheta_1), \quad (298)$$

где

$$G(\vartheta_1) = \int_0^{\vartheta_1} \varphi_1^2 \frac{dF}{d\vartheta_1} \cdot d\vartheta_1. \quad (299)$$

Уравнения (294) и (298) дают искомую зависимость сопротивления пластины  $w$  от длины в параметрической форме, определяя значения  $w$  и  $x$  в функции от  $\vartheta, \frac{\delta}{k}$ .

Для получения численных результатов достаточно заимствовать из изложенного выше аналитическое выражение для профиля скоростей (291) и выполнить интегрирование согласно (295) и (299).

Так как аналитические зависимости, представляющие величину  $\bar{A}$  в разных промежутках изменения  $\frac{v_* \cdot k}{\nu}$  различны, то дальнейшие расчеты уместно вести раздельно для каждой из отмеченных выше областей.

### 1. Область установившейся шероховатости

$$\log \frac{v_* \cdot k}{\nu} \geq 1,85.$$

Согласно (292a) в рассматриваемой области универсальный профиль скоростей определяется формулой

$$\varphi = 8,48 + 5,75 \log \frac{y}{k}. \quad (300)$$

Для удобства дальнейшего интегрирования перейдем от десятичного логарифма к натуральному и введем под знак  $\ln$  единицу.

В таком случае последняя формула переписывается в виде:

$$\varphi = a \ln(1 + b\vartheta), \quad (300a)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, определяемые из условия совпадения обоих выражений (300) и (300a) при больших значениях  $b\vartheta$ :

$$a = 2,50; \quad b = 29,9.$$

Полагая

$$1 + b\vartheta = z$$

и выполнив интегрирование согласно (295) и (299), находим:

$$F(\vartheta) = \frac{1}{b} \left[ z + 1 - 2 \cdot \frac{z-1}{(\ln z)^2} \right] = \bar{F}(z), \quad (301)$$

$$G(\vartheta) = \frac{a^2}{b} [z \ln z - 4z + 4 - \ln z + 4Ei(\ln z) - 4 \ln \ln z] = \bar{G}(z), \quad (302)$$

где через  $Ei(x)$  обозначен интегральный логарифм, определяемый равенством

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u} \cdot du,$$

### 2. Переходная область I

$$0,85 \leq \log \frac{v_* \cdot k}{\nu} \leq 1,15.$$

В этой области профиль скоростей может быть представлен зависимостью  $\varphi = 9,58 + 5,75 \log \frac{y}{k} = a \ln(1 + b_1 \vartheta)$ ,

причем:

$$a = 2,50; b_1 = 46,3.$$

Вследствие того, что в обоих рассмотренных случаях выражения для универсального профиля скоростей  $\varphi$  отличаются только значениями постоянных  $b$  и  $b_1$ , можно заключить:

$$F_1(\vartheta) = \frac{b}{b_1} F(\vartheta) = 0,646 F; \quad (303)$$

и

$$G_1(\vartheta) = \frac{b}{b_1} G(\vartheta) = 0,646 F. \quad (304)$$

### 3. Переходная область II

$$1,15 \leq \log \frac{v_* \cdot k}{v} \leq 1,85.$$

Здесь

$$\varphi = 11,5 - 1,62 \log \frac{v_* \cdot k}{v} + 5,75 \log \frac{y}{k} = a \ln(1 + b_2 \chi), \quad (305)$$

где

$$a = 2,50; b_2 = 98,8$$

$$\chi = \frac{y}{k} \left( \frac{v_* \cdot k}{v} \right)^{-0,282}. \quad (306)$$

Для исключения величины  $v_*$  воспользуемся зависимостью:

$$v_* = \frac{U}{\varphi_1}.$$

Тогда

$$\chi = \frac{y}{k} \varphi_1^{0,282} \left( \frac{Uk}{v} \right)^{-0,282};$$

$$dy = k \varphi_1^{-0,282} \left( \frac{Uk}{v} \right)^{0,282} d\chi.$$

и согласно (294)

$$W = \rho U^2 \int_0^{\chi_1} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy = \rho k U^2 \left( \frac{Uk}{v} \right)^{0,282} F_2(\chi_1), \quad (307)$$

$$\text{где } F_2(\chi_1) = \varphi_1^{-0,282} \int_0^{\chi_1} \left[ \frac{\varphi}{\varphi_1} - \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)^2 \right] d\chi, \quad (308)$$

а  $\chi_1$  — значение переменной  $\chi$  на конце пластины.

Далее,

$$\frac{dW}{dx} = \rho \cdot \frac{U^2}{\varphi_1^2} = \rho k U^2 \cdot \left( \frac{Uk}{\nu} \right)^{0,282} \cdot \frac{dF_2(\chi_1)}{d\chi_1} \cdot \frac{d\chi_1}{d\chi},$$

откуда

$$dx = k \cdot \left( \frac{Uk}{\nu} \right)^{0,282} \cdot \varphi_1^2 \cdot \frac{dF_2}{d\chi_1} \cdot d\chi_1$$

или после интегрирования

$$x = k \left( \frac{Uk}{\nu} \right)^{0,282} \int_0^{\chi_1} \varphi_1^2 \cdot \frac{dF_2}{d\chi_1} \cdot d\chi_1 = k \left( \frac{Uk}{\nu} \right)^{0,282} \cdot G_2(\chi_1), \quad (309)$$

$$\text{где } G_2(\chi_1) = \int_0^{\chi_1} \varphi_1^2 \cdot \frac{dF_2}{d\chi_1} \cdot d\chi_1. \quad (310)$$

Для получения численных результатов, выполним интегрирование согласно (308) и (310), предварительно введя замену переменных

$$1 + b_2 \chi_1 = u.$$

Окончательно получим:

$$F_2(\chi_1) = \frac{a^{-0,282}}{b_2} - (\ln u)^{-0,282} \left[ \frac{u+1}{\ln u} - 2 \frac{u-1}{(\ln u)^2} \right] = \bar{F}_2(u); \quad (311)$$

$$G_2(\chi_1) = \frac{a^{1,718}}{b_2} \int_1^u \left( \ln u - 3,282 - \frac{1,282}{u} + \frac{4,564}{\ln u} - \frac{4,564}{u \ln u} \right) \times \\ \times (\ln u)^{-0,282} du = \bar{G}_2(u) \quad (312)$$

Результаты вычислений по формулам (301), (302), (311) и (312) сведены в табл. 28, причем в качестве аргумента выбраны значения переменных  $z$  и  $u$ .

Приведенные выше расчеты позволяют вплотную подойти к отысканию зависимости коэффициентов местного  $c_f$  и полного  $C_f$  трения в функции от числа Рейнольдса  $\frac{Ux}{\nu}$  и относительной шероховатости  $\frac{x}{k}$ .

Вследствие того, что у передней кромки пластины толщина ламинарного подслоя равна нулю и затем растет вместе с увеличением переменной  $x$ , передняя часть пластины с постоянной абсолютной шероховатостью  $k$  всегда находится в области установившейся шероховатости, за которой могут следовать в зависимости от длины пластины II и I переходная область и, наконец, область, в которой шероховатость не оказывает практически никакого влияния на сопротивление.



Границы этих областей согласно приведенным выше результатам опытов Никурадзе с достаточным приближением могут быть регламентированы следующими соотношениями:

|                                                |                                         |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Область установившейся шероховатости . . . . . | $\sim > \frac{v_* k}{\nu} > 70,8$       |
| II переходная область . . . . .                | $70,8 \geq \frac{v_* k}{\nu} \geq 14,1$ |
| I переходная область . . . . .                 | $14,1 \geq \frac{v_* k}{\nu} \geq 7,08$ |
| Отсутствие влияния шероховатости . . . . .     | $7,08 \geq \frac{v_* k}{\nu} \geq 0$    |

В качестве объекта исследования выберем пластину такой длины, что ее концевая часть находится в I переходной области. При этом будем вначале предполагать неизменными величину скорости набегающего потока  $U$  и абсолютную шероховатость  $k$ .

В таком случае отыскание зависимости сопротивления от длины пластины сведется к суммированию результатов полученных выше при различных режимах обтекания в предположении постоянства безразмерного числа

$$\frac{Uk}{\nu} = C,$$

Вначале определим значение  $z_1$  параметра  $z$ , соответствующее концу области установившейся шероховатости.

Из

$$\frac{v_* \cdot k}{\nu} = 70,8$$

следует

$$C = \frac{Uk}{\nu} = \frac{v_* \cdot k}{\nu} \cdot \frac{U}{v_*} = 70,8 \varphi_1,$$

откуда

$$\varphi_1 = 2,5 \ln z_1 = \frac{C}{70,8}$$

или

$$z_1 = e^{\frac{C}{177}} \quad (313)$$

Согласно (298) и (302) участок длины пластины, находящийся в области установившейся шероховатости, равен

$$x_{\text{уст. шер.}} = k \bar{G}(z_1) = k \bar{G}(e^{\frac{C}{177}}), \quad (314)$$

а соответствующая часть полного сопротивления, приходящаяся на эту область, составляет

$$W_{\text{уст. шер.}} = \rho U^2 k \cdot \bar{F}(z_1) = \rho U^2 k \cdot \bar{F}(e^{\frac{C}{177}}). \quad (315)$$

Таблица 28

| $\frac{z}{u}$  | $\bar{F}(z)$       | $\bar{G}(z)$       | $\bar{F}_2(u)$     | $\bar{G}_2(u)$     |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $1 \cdot 10^2$ | 0,4213             | $3,643 \cdot 10^1$ | 0,0631             | 5,195              |
| $2 \cdot 10^2$ | 0,7946             | $0,445 \cdot 10^1$ | 0,1144             | $1,318 \cdot 10^1$ |
| $3 \cdot 10^2$ | 1,150              | $1,615 \cdot 10^2$ | 0,1621             | $2,227 \cdot 10^1$ |
| $5 \cdot 10^2$ | 1,832              | $3,140 \cdot 10^2$ | 0,2520             | $4,228 \cdot 10^1$ |
| $7 \cdot 10^2$ | 2,490              | $4,832 \cdot 10^2$ | 0,3379             | $6,417 \cdot 10^1$ |
| $10^3$         | 3,453              | $7,519 \cdot 10^2$ | 0,4609             | $9,909 \cdot 10^1$ |
| $2 \cdot 10^3$ | 6,490              | $1,766 \cdot 10^3$ | 0,8432             | $2,261 \cdot 10^2$ |
| $3 \cdot 10^3$ | 9,407              | $2,878 \cdot 10^3$ | 1,205              | $3,637 \cdot 10^2$ |
| $5 \cdot 10^3$ | $1,503 \cdot 10^1$ | $5,270 \cdot 10^3$ | 1,891              | $6,571 \cdot 10^2$ |
| $7 \cdot 10^3$ | $2,048 \cdot 10^1$ | $7,841 \cdot 10^3$ | 2,548              | $9,678 \cdot 10^2$ |
| $10^4$         | $2,843 \cdot 10^1$ | $1,195 \cdot 10^4$ | 3,500              | $1,454 \cdot 10^3$ |
| $2 \cdot 10^4$ | $5,390 \cdot 10^1$ | $2,660 \cdot 10^4$ | 6,501              | $3,177 \cdot 10^3$ |
| $3 \cdot 10^4$ | $7,845 \cdot 10^1$ | $4,232 \cdot 10^4$ | 9,354              | $5,002 \cdot 10^3$ |
| $5 \cdot 10^4$ | $1,260 \cdot 10^2$ | $7,554 \cdot 10^4$ | $1,482 \cdot 10^1$ | $8,826 \cdot 10^3$ |
| $7 \cdot 10^4$ | $1,722 \cdot 10^2$ | $1,106 \cdot 10^5$ | $2,008 \cdot 10^1$ | $1,281 \cdot 10^4$ |
| $10^5$         | $2,400 \cdot 10^2$ | $1,654 \cdot 10^5$ | $2,774 \cdot 10^1$ | $1,896 \cdot 10^4$ |
| $2 \cdot 10^5$ | $4,581 \cdot 10^2$ | $3,581 \cdot 10^5$ | $5,208 \cdot 10^1$ | $4,048 \cdot 10^4$ |
| $3 \cdot 10^5$ | $6,693 \cdot 10^2$ | $5,611 \cdot 10^5$ | $7,538 \cdot 10^1$ | $6,295 \cdot 10^4$ |
| $5 \cdot 10^5$ | $1,080 \cdot 10^3$ | $9,888 \cdot 10^5$ | $1,202 \cdot 10^2$ | $1,095 \cdot 10^5$ |
| $7 \cdot 10^5$ | $1,481 \cdot 10^3$ | $1,433 \cdot 10^6$ | $1,637 \cdot 10^2$ | $1,575 \cdot 10^5$ |
| $10^6$         | $2,070 \cdot 10^3$ | $2,124 \cdot 10^6$ | $2,273 \cdot 10^2$ | $2,313 \cdot 10^5$ |
| $2 \cdot 10^6$ | $3,975 \cdot 10^3$ | $4,514 \cdot 10^6$ | $4,304 \cdot 10^2$ | $4,870 \cdot 10^5$ |
| $3 \cdot 10^6$ | $5,824 \cdot 10^3$ | $7,022 \cdot 10^6$ | $6,257 \cdot 10^2$ | $7,518 \cdot 10^5$ |
| $5 \cdot 10^6$ | $9,434 \cdot 10^3$ | $1,224 \cdot 10^6$ | $1,004 \cdot 10^3$ | $1,297 \cdot 10^6$ |
| $7 \cdot 10^6$ | $1,297 \cdot 10^4$ | $1,760 \cdot 10^7$ | $1,372 \cdot 10^3$ | $1,856 \cdot 10^6$ |
| $10^7$         | $1,817 \cdot 10^4$ | $2,588 \cdot 10^7$ | $1,909 \cdot 10^3$ | $2,713 \cdot 10^6$ |
| $2 \cdot 10^7$ | $3,505 \cdot 10^4$ | $5,463 \cdot 10^7$ | $3,642 \cdot 10^3$ | $5,654 \cdot 10^6$ |
| $3 \cdot 10^7$ | $3,150 \cdot 10^4$ | $8,444 \cdot 10^7$ | $5,312 \cdot 10^3$ | $8,685 \cdot 10^6$ |
| $5 \cdot 10^7$ | $8,367 \cdot 10^4$ | $1,460 \cdot 10^8$ | $8,561 \cdot 10^3$ | $1,489 \cdot 10^7$ |
| $7 \cdot 10^7$ | $1,152 \cdot 10^5$ | $2,093 \cdot 10^8$ | $1,173 \cdot 10^4$ | $2,124 \cdot 10^7$ |
| $10^8$         | $1,618 \cdot 10^5$ | $3,062 \cdot 10^8$ | $1,638 \cdot 10^4$ | $3,093 \cdot 10^7$ |

Найдем теперь значение переменной

$$u_1 = 1 + b_2 \chi_1,$$

отвечающее началу II переходной области.

Из (306) следует, что

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\vartheta_1}{k} \cdot \left( \frac{v_* \cdot k}{v} \right)^{-0,282} = \vartheta_1 \left( \frac{v_* \cdot k}{v} \right)^{-0,282} = \\ &= \vartheta_1 (70,8)^{-0,282} = 0,302 \vartheta_1. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\vartheta_1 = \frac{1}{b}(z_1 - 1) = \frac{1}{b} \left( e^{\frac{C}{177}} - 1 \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + b_2 \chi_1 = 1 + 0,302 \frac{b_2}{b} \left( e^{\frac{C}{177}} - 1 \right) = 1 + 0,302 \cdot \frac{98,8}{29,9} \left( e^{\frac{C}{177}} - 1 \right) = \\ &= e^{\frac{C}{177}} = z_1. \end{aligned}$$

Точно так же найдем, что концу II переходной области отвечает значение

$$u_{II} = e^{\frac{C}{35,3}}.$$

Таким образом, длина части пластины, находящейся во II переходной области, определится согласно (309) равенством:

$$x_{\text{кон. II пер. обл.}} - x_{\text{уст. шир.}} = k C^{0,282} [\bar{G}_2(u_{II}) - \bar{G}_2(u_I)], \quad (316)$$

а соответствующая часть сопротивления трения:

$$W_{\text{II пер. обл.}} = \rho U^2 k \cdot C^{0,282} [\bar{F}_2(u_{II}) - \bar{F}_2(u_I)]. \quad (317)$$

Аналогично изложенному выше определяются границы интегрирования для первой переходной области:

Значение  $z_{II}$ , отвечающее началу I переходной области

$$z_{II} = u_{II} = e^{\frac{C}{35,3}},$$

значение  $z_{III}$ , отвечающее концу I переходной области,

$$z_{III} = e^{\frac{C}{17,7}}.$$

Соответствующая длина пластины:

$$x_{\text{кон. пер. обл. I}} - x_{\text{кон. пер. обл. II}} = k [\bar{G}_1(z_{III}) - \bar{G}_1(z_{II})] \quad (318)$$

и сопротивление

$$W_{\text{пер. обл. I}} = \rho U^2 k [\bar{F}_1(z_{III}) - \bar{F}_1(z_{II})]. \quad (319)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned}\bar{F}(z_1) &= C^{0,282} \bar{F}_2(u_1); \\ C^{0,282} \bar{F}_2(u_{II}) &= \bar{F}_1(z_{II}); \\ \bar{G}(z_1) &= C^{0,282} \bar{G}_2(u_1); \\ C^{0,282} \bar{G}_2(u_{II}) &= \bar{G}_1(z_{II}).\end{aligned}$$

В таком случае, полное сопротивление пластины, конец которой находится в I переходной области, составляет:

$$W = \rho k U^2 \bar{F}_1(z), \quad (320)$$

а соответствующее число Рейнольдса

$$\frac{Ux}{\nu} = \frac{Uk}{\nu} \bar{G}_1(z). \quad (321)$$

Аналогично этому в случае, когда конец пластины находится во II переходной области,

$$W = \rho k U^2 \bar{F}_2(u) \quad \text{и} \quad \frac{Ux}{\nu} = \frac{Uk}{\nu} \cdot \bar{G}_2(u) \quad (322)$$

и, наконец, в случае, если пластина полностью находится в области установившейся шероховатости

$$W = \rho k U^2 \bar{F}(z) \quad \text{и} \quad \frac{Ux}{\nu} = \frac{Uk}{\nu} \cdot \bar{G}(z). \quad (323)$$

В соответствии с изложенным при

$$e^{\frac{C}{35,3}} \leq z \leq e^{\frac{C}{17,7}}$$

коэффициент полного трения

$$C_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 x \cdot 1} = \frac{\rho k U^2 \cdot \bar{F}_1(z)}{\frac{\rho}{2} U^2 k \cdot \bar{G}_1(z)} = 2 \cdot \frac{\bar{F}_1(z)}{\bar{G}_1(z)} \quad (324)$$

при  $e^{\frac{C}{17,7}} \leq u \leq e^{\frac{C}{35,3}}$

$$C_f = 2 \cdot \frac{\bar{F}_2(u)}{\bar{G}_2(u)} \quad (325)$$

и при  $1 \leq z \leq e^{\frac{C}{17,7}}$

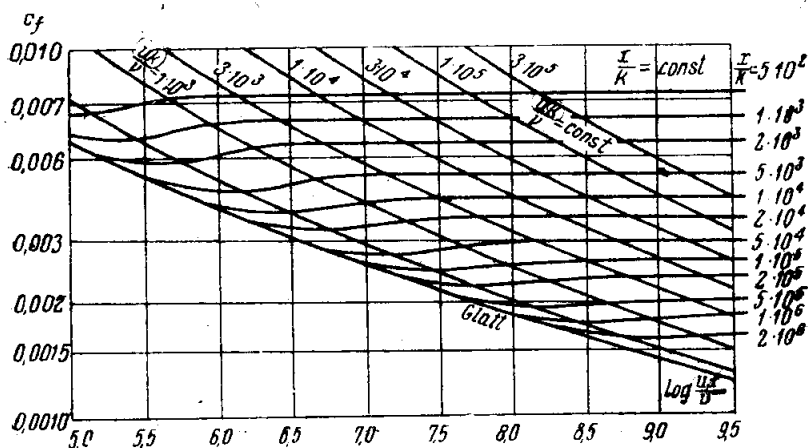
$$c_f = 2 \frac{\bar{F}(z)}{\bar{G}(z)} \quad (326)$$

Коэффициент местного сопротивления трения определяется общим для всех областей соотношением:

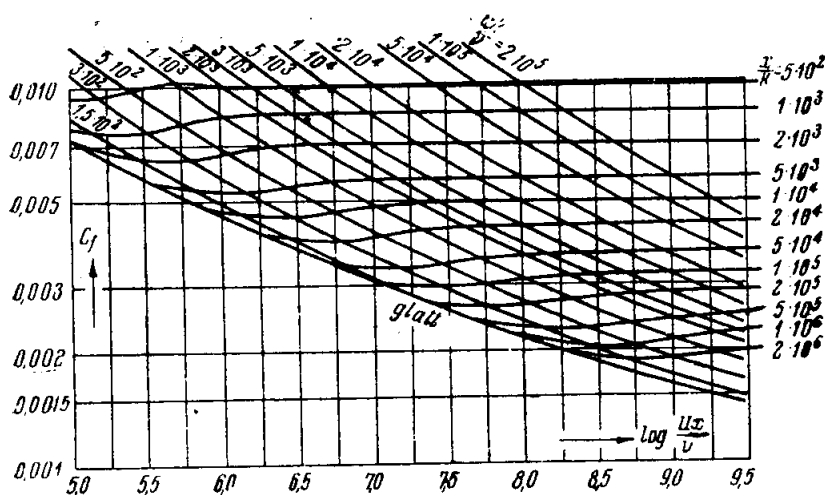
$$c_f = \frac{\tau}{\frac{\rho}{2} U^2} = 2 \cdot \frac{v_*^2}{U^2} = \frac{2}{\varphi_1^2}, \quad (327)$$

причем

$$\varphi_1 = \bar{A} + 5,75 \log \frac{\delta}{k}. \quad (327a)$$



Фиг. 93. Зависимость местного коэффициента трения шероховатой пластины от числа Рейнольдса.



Фиг. 94. Зависимость полного коэффициента трения шероховатой пластины от числа Рейнольдса.

На фиг. 93 и 94 даны зависимости местного и полного коэффициентов трения  $c_f$  и  $C_f$  в функции от числа Рейнольдса  $\frac{Ux}{v}$  при заданных значениях  $\frac{Uk}{v}$ , вычисленные на основе указанных выше соображений и представляющие собой изменение коэффициента трения по длине пла-

стины при постоянной скорости и фиксированном абсолютном значении шероховатости.

На тех же диаграммах точки, отвечающие одинаковым значениям  $\frac{x}{k}$ , соединены кривыми, изображающими изменение коэффициента трения в данном фиксированном месте при различных значениях скорости.

Все расчеты проведены в предположении, что уже вблизи передней кромки пластины пограничный слой — турбулентный, и относятся, естественно, к такому типу шероховатости, при котором пластина сплошь покрыта плотно прилегающими друг к другу зернами шероховатости в полном соответствии с условиями, в которых протекали опыты Никурадзе.

Для ориентировки интересно сообщить, что при диаметре песочных зерен, равном  $k = 0,01$  см, число их, приходившееся на  $1$  см<sup>2</sup>, равнялось  $n \cong 4600$ , при  $k = 0,02$  см  $n \cong 1150$ , при  $k = 0,04$  см  $n \cong 150$ .

Совершенно очевидно, что при другом типе шероховатости и, в первую очередь, при другой плотности распределения бугорков законы сопротивления несомненно изменятся, причем можно предполагать, что эти изменения вряд ли коснутся качественных сторон явления, вскрытых опытами Никурадзе и приведенным выше анализом.

Автором книги поставлены специальные исследования вопросов шероховатости по типу шероховатости обшивки корабля. Первые результаты этих теоретических исследований, вчерне закончены и продолжают в направлении исследования ряда специальных вопросов (влияние кривизны и т. п.).

## ГЛАВА IX

### КРИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ТЕОРИЙ ТРЕНИЯ

Критические замечания. Метод внутреннего подобия. Дальнейшие перспективы и ближайшие задачи

Основной особенностью изложенных в предыдущих главах полуэмпирических теорий Прандтля и Кармана и основанных на них исследований является глубокая связь рациональных методов теоретического анализа с результатами тщательно поставленных экспериментальных работ, позволяющая при выработке схемы явления всегда останавливаться на таком решении, которое служит практически достаточным приближением задачи.

Именно это качество построений Прандтля-Кармана позволяет нам уже сейчас подвергнуть критике ряд основных положений теорий.

#### 1. Основная формула Прандтля-Кармана

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \cdot \frac{dU}{dy} \quad (39)$$

выведена из рассмотрения плоского движения в то время, как результаты ее распространяются на случай течения жидкости в трубе и в других руслах.

Поэтому только в предположении, что закон распределения скоростей зависит главным образом от физических постоянных потока  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\tau_0$ , а не от формы русла, можно считать опыты Никурадзе сравнимыми с теорией Прандтля-Кармана.

2. Допущение Кармана о двухразмерности поля пульсационных скоростей, позволившее ввести в рассмотрение функцию тока и легко принимаемое для течения между плоскими параллельными стенками, не оправдывается в общем случае движения.

3. В теории Прандтля в скрытой форме постулируется подобие поля пульсационных скоростей во всем потоке.

Более полное и прямое использование этого предположения привело Кармана к получению наряду с зависимостью (39) известного выражения для пути турбулентного перемешивания

$$l = x \left| \frac{U'}{U''} \right|. \quad (271)$$

4. Использование законов, полученных при изучении движения жидкости в трубах для решения внешней задачи — обтекания пластины, цилиндра и др., основывается на допущении, что полупрофиль скоростей, наблюдаемый в трубе при числе Рейнольдса  $\frac{Ur}{\nu}$  идентичен с профилем скорости при обтекании тела в месте, определяемом соотношением:

$$\frac{U \cdot r}{\nu} = \frac{U \cdot \delta}{\nu}.$$

Справедливость этого предположения может оспариваться по следующим соображениям:

а) В случае движения в трубе мы имеем дело с течением жидкости при наличии постоянного напора в то время, как обтекание пластины служит примером безнапорного движения ( $p = \text{const}$ ).

Принятая Прандтлем на основании опытов Никурадзе соответствующая поправка (см. стр. 150) вообще говоря, по произволу назначенном коэффициенте  $a$ , естественно, не охватывает всей сложности явления и учет указанного различия должен быть построен на более глубоких физических началах.

б) Профиль скоростей в трубе имеет на оси излом, и прямой перенос результатов на случай внешней задачи противоречит одному из основных начальных условий

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \delta,$$

определяющему внешнюю границу слоя трения.

То, что последнее обстоятельство вместе с тем не оказывает на результат заметного влияния, объясняется незначительностью удельного веса части профиля скоростей вблизи внешней границы слоя трения при подсчете интеграла импульса:

$$I = \rho \int_0^{\delta} u(U - u) \cdot dy.$$

5. При использовании опытов Никурадзе Прандтль вводит в выражение для универсального профиля скоростей:

$$\varphi = A + B \log \eta$$

единицу под знак логарифма, заменяя его нижеследующим:

$$\varphi = a \ln(1 + b\eta).$$

При этом удается удовлетворить граничному условию:

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$

оставляя значительную ошибку в величине тангенса угла наклона кривой.

В самом деле, по Прандтлю

$$\frac{d\varphi}{d\eta} \cong 20,$$



в то время, как для ламинарного подслоя, непосредственно прилегающего к стенке, из закона Ньютона следует:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = 1.$$

6. Основанные на использовании степенного закона скоростей приложении теории Прандтля-Кармана к решению задач о распределении граничного слоя и интенсивности трения вдоль жесткой стенки негласным образом предполагают постоянство показателя степени  $\frac{1}{n}$  по всей длине обтекаемого тела.

В свете изложенного (см. стр. 88) указанное предположение, неполностью оправдываемое новейшими экспериментальными работами, грешит и против основного принципа, на котором основано применение экспонентной формулы — для воспроизведения более точного логарифмического профиля скорости необходимо увеличивать величину  $n$  по мере возрастания числа Рейнольдса.

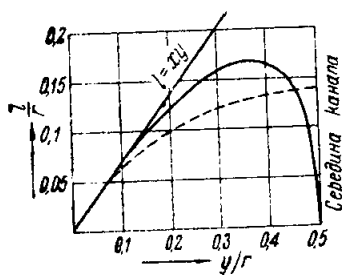
7. Современное состояние знания не позволяет рациональным путем предвычислить поле скоростей за местом отрыва граничного слоя.

8. Во всех рассмотренных выше случаях кривизна стенки учитывается только через распределение давлений, определяемое внешним потоком; собственно влиянием кривизны (в частности, переменностью  $p$  по толще слоя) обычно пренебрегают.

9. Теория Кармана, находясь в отличном согласии с опытами Никурадзе при сличении характера профиля скоростей и зависимости сопротивления от числа Рейнольдса, вместе с тем дает резкие расхождения с экспериментом в оценке изменения пути турбулентного перемешивания по сечению трубы.

На фиг. 95 представлено такое сравнение, в котором обращает на себя внимание в первую очередь различие значений  $\frac{l}{r}$  на оси трубы (по Карману  $\frac{l}{r} = 0$ , по Никурадзе  $\frac{l}{r}$  имеет на оси конечное значение). В равной мере не согласуются места максимума (по Никурадзе при  $\frac{z}{r} = 0,5$ ; по Карману — 0,39).

Разъяснение этих расхождений можно найти в работе профессора Л. Г. Лойцянского \*, показавшего наряду с этим, что формула Кармана имеет весьма универсальное значение во всех вопросах математической



Фиг. 95. Сравнение кривой изменения пути турбулентного перемешивания  $\frac{l}{r}$  по сечению трубы, полученной Никурадзе, с теоретической зависимостью Кармана.

\* Проф. Лойцянский. „О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности“. Прикладн. Механика и Математика, № 2.

физики и является на самом деле не следствием допущения о подобии пульсационных скоростей, а результатом применения так называемого метода внутреннего подобия для одномерного явления к профилю скоростей в осредненном движении.

Предположим, что мы изучаем явление, определяемое некоторой характеристической функцией  $\Phi(x)$  от одной независимой переменной  $x$ , заданной в интервале  $(a, b)$ .

Разобьем область изменения переменной на такие части, чтобы кривые приращения функции в этих участках были подобны между собой, т. е.

$$\frac{\Phi - \Phi_k}{\Phi_{k+1} - \Phi_k} = \frac{\Phi - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i} = \text{idem} \quad (328)$$

при

$$\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \text{idem}, \quad (329)$$

где  $l_k = x_{k+1} - x_k$ ;  $l_i = x_{i+1} - x_i$  — длины двух произвольных под-интервалов,

$\Phi_{k+1}$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Phi_i$ ,  $\Phi_{i+1}$  — значения функции  $\Phi(x)$  на соответствующих их границах,

а  $\Phi$  — значение функции при произвольном  $x$ , взятом из соответствующего участка.

Исследуя вопрос о критерии такого подобия, будем предполагать, что функция  $\Phi(x)$  допускает во всем интервале, в котором она определена, разложение в сходящийся ряд:

$$\Phi - \Phi_k = (x - x_k)\Phi'_k + \frac{1}{2}(x - x_k)^2\Phi''_k + \frac{1}{6}(x - x_k)^3\Phi'''_k + \dots \quad (330)$$

$$\Phi_{k+1} - \Phi_k = l_k \cdot \Phi'_k + \frac{1}{2}l_k^2\Phi''_k + \frac{1}{6}l_k^3\Phi'''_k + \dots \quad (331)$$

Тогда

$$\frac{\Phi - \Phi_k}{\Phi_{k+1} - \Phi_k} = \frac{(x - x_k)\Phi'_k + \frac{1}{2}(x - x_k)^2\Phi''_k + \frac{1}{6}(x - x_k)^3\Phi'''_k + \dots}{l_k \cdot \Phi'_k + \frac{1}{2}l_k^2\Phi''_k + \frac{1}{6}l_k^3\Phi'''_k + \dots} \quad (332)$$

Введем обозначения:

$$\frac{1}{n!} l_k^n \Phi_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}. \quad (333)$$

В таком случае уравнение (332) примет вид:

$$\frac{\Phi - \Phi_k}{\Phi_{k+1} - \Phi_k} = \frac{\lambda_k^{(1)} \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right) + \lambda_k^{(2)} \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right)^2 + \lambda_k^{(3)} \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right)^3 + \dots}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(3)} + \dots} \quad (334)$$

си после деления на  $\lambda_k^{(1)}$  (предполагаем, что  $\lambda_k^{(1)} \neq 0$ ):

$$\frac{\Phi - \Phi_k}{\Phi_{k+1} - \Phi_k} = \frac{\frac{x - x_k}{l_k} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(1)}} \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right)^2 + \frac{\lambda_k^{(3)}}{\lambda_k^{(1)}} \cdot \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right)^3 + \dots}{1 + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(1)}} + \frac{\lambda_k^{(3)}}{\lambda_k^{(1)}} + \dots}. \quad (334a)$$

Если в двух произвольных интервалах  $k$  и  $i$ :

$$\frac{x - x_k}{l_k} = \frac{x - x_i}{l_i} = \text{idem},$$

то для соблюдения условий подобия должны иметь место следующие соотношения:

$$\frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(1)}} = \frac{\lambda_i^{(2)}}{\lambda_i^{(1)}}; \quad \frac{\lambda_k^{(3)}}{\lambda_k^{(1)}} = \frac{\lambda_i^{(3)}}{\lambda_i^{(1)}}. \quad (335)$$

Если функция  $\Phi$  задана, а это только имеет интерес для целей дальнейшего приложения, то для удовлетворения одного из условий можно воспользоваться произвольностью выбора интервалов и назначить закон их разбивки таким, чтобы выполнялось первое из условий (335)

$$\frac{\lambda_k^{(2)}}{\lambda_k^{(1)}} = \frac{\lambda_i^{(2)}}{\lambda_i^{(1)}} = \text{idem}, \quad (335a)$$

откуда согласно (333)

$$\frac{l_k \Phi_k''}{\Phi_k'} = \frac{l_i \Phi_i''}{\Phi_i'} = \text{idem}. \quad (336)$$

Так как при этом второе и последующие уравнения системы (335) могут, естественно, и не выполняться, полученное условие (336) служит критерием только приближенного подобия описываемого функцией  $\Phi(x)$  явления.

Если же в частном случае

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(4)} = \dots = 0,$$

то

$$\Phi - \Phi_k = \lambda_k^{(1)} \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right) + \lambda_k^{(2)} \left( \frac{x - x_k}{l_k} \right)^2$$

и формула (336) дает точное условие подобия.

При этом

$$l_k \cdot \Phi_k'' = \Phi_{k+1}' - \Phi_k',$$

и, следовательно, согласно (336)

$$\frac{\Phi_{k+1}' - \Phi_k'}{\Phi_k'} = \frac{\Phi_{i+1}' - \Phi_i'}{\Phi_i'},$$

откуда

$$\frac{\Phi'_{k+1}}{\Phi'_k} = \frac{\Phi'_{i+1}}{\Phi'_i}.$$

Последняя формула дает простую интерпретацию закону разделения основного интервала, который должен быть разбит на такой ряд малых промежутков, чтобы значения производной функции  $\Phi'(x)$  на их границах составляли геометрическую прогрессию.

Изложенное выше относится к случаю

$$\lambda_k^{(1)} \neq 0.$$

Если же все производные функции  $\Phi(x)$  до порядка  $S$  равны нулю, а  $\Phi^{(S+1)} \neq 0$  и  $\Phi^{(S+2)} \neq 0$ , то условие приближенного подобия (336) заменится другим

$$\frac{l_k \cdot \Phi_k^{(S+2)}}{\Phi_k^{(S+1)}} = \frac{l_i \Phi_i^{(S+2)}}{\Phi_i^{(S+1)}} = \text{idem.} \quad (336a)$$

Для устранения неправильных представлений о возможности использования постоянной idem для уточнения условия подобия напомним, что

$$\sum_{k=1}^n l_k = b - a$$

и, следовательно, постоянная  $x$

$$x = \frac{b - a}{\sum_{k=1}^n \frac{\Phi'_k}{\Phi_k''}}$$

при заданном числе интервалов однозначно определяется длиной промежутка  $b - a$  и заданием функции  $\Phi(x)$ .

Единственная остающаяся возможность заключается в выборе числа интервалов  $n$ , от которого должен зависеть порядок ошибки.

Применим изложенный выше метод внутреннего подобия к функции  $U$ , представляющей профиль скоростей осредненного установившегося потока

$$U = U(y).$$

Согласно (336)

$$\frac{l \cdot U''}{U'} = x$$

и, следовательно,

$$l = x \frac{U'}{U''}. \quad (337)$$

Последний результат совпадает с формулой Кармана, которая в таком изложении представляется вовсе не специфичной для теории турбулентности, а является общим критерием выбора системы интервалов, в которых одномерные явления приближенно подобны друг другу.

Получение формулы Прандтля связано с сохранением постоянства критериев, установленных в общей теории подобия в цитированной выше статье профессора Лойцянского и полученных им на основе анализа уравнений Рейнольдса в безразмерных величинах

$$\left. \begin{aligned} K = \frac{V'}{V} = \text{idem}; \quad H = \frac{L}{VT} = \text{idem}; \quad E = \frac{P}{\rho V^2} = \text{idem}; \\ Re = \frac{VL}{\nu} = \text{idem}, \end{aligned} \right\} (338)$$

где  $V'$  — масштаб пульсационных скоростей;

$V$  — „ осредненных „

$L$  — „ длин;

$T$  — „ времени;

$P$  — „ давления;

$H$  — критерий гомохронности (число Струхалия);

$E$  — „ Эйлера;

$Re$  — „ Рейнольдса;

$K$  — „ , названный в честь Кармана.

Принимая за масштаб длин — ширину полосы  $l$ , за масштаб средних скоростей — разность скоростей на границах слоя, находим:

$$V = l \frac{dU}{dy}.$$

Кроме того, из (338) получаем условие:

$$V' \sim V \sim l \frac{dU}{dy},$$

совпадающее с известным предположением Прандтля.

Так как давление в трубе пропорционально касательному напряжению трения, то можно согласно (338) получить:

$$\tau \sim \rho V^2 \sim \rho l^2 \left( \frac{dU}{dy} \right)^2. \quad (337a)$$

Дискуссия по вопросу о значении  $\frac{l}{r}$  на оси трубы может быть разрешена, если заметить, что, судя по характеру замеренных Никурадзе профилей скорости на оси трубы, мы, возможно, имеем особенную точку, в которой ряд производных функции  $\Phi$  обращается в нуль.

При этом выражения (337) должны быть заменены более общими:

$$\begin{aligned} \tau &\sim \rho l^{2k} \left( \frac{d^k U}{dz^k} \right)^2; \\ l &\sim \frac{\frac{d^k U}{dz^k}}{\frac{d^{k+1} U}{dz^{k+1}}}, \end{aligned}$$

где  $z$  — расстояние от рассматриваемого места в потоке до оси трубы.

Согласно (272)

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{z}{r}$$

и, следовательно,

$$\tau \propto \rho \cdot \frac{\left(\frac{d^k U}{dz^k}\right)^{2k+2}}{\left(\frac{d^{k+1} U}{dz^{k+1}}\right)^{2k}} \sim \tau_0 \cdot \frac{z}{r}.$$

Введем в рассмотрение динамическую скорость  $v_*$ . Тогда

$$\left(\frac{\frac{d^{k+1} U}{dz^{k+1}}}{\frac{d^k U}{dz^k}}\right)^k \cdot \frac{1}{\frac{d^k U}{dz^k}} \sim \frac{1}{v_*} \cdot \sqrt{\frac{r}{z}}.$$

После последовательного интегрирования находим:

$$l \propto z + c \sqrt{\frac{z}{r}}. \quad (339)$$

При возрастании  $k$  кривая все больше приближается к зависимости установленной опытами Никурадзе и, если предположить, что на оси трубы мы имеем существенно-особенную точку, в которой все производные высших порядков (вплоть до бесконечного) обращаются в нуль, то кривая (339) в точности совпадает с кривой Никурадзе.

Перечисленным выше далеко не ограничиваются критические соображения, которые могут быть высказаны по вопросу современного состояния теории вязкой жидкости. Сами же критические замечания преследовали исключительно цели правильного намечения ближайших задач в свете практических вопросов кораблестроения.

Основными из них мы считаем следующие.

1. Исследование величины надбавки на шероховатость обшивки корабля путем замера профиля скоростей по меньшей мере в двух местах судовой поверхности.

2. Выяснение режима обтекания моделей и анализ работы возбудителей (отыскание мер искусственной турбулизации потока, полностью гарантирующих получение турбулентного профиля скоростей).

3. Изучение режима вихревого сопротивления путем исследования факторов, влияющих на положение места отрыва струй.

4. Изучение поля скоростей в диске винта, за и перед винтом. Исследование интерференции системы винт-корпус-выступающие части.

5. Изучение влияния свободной поверхности на профиль скоростей в пограничном слое (на плавающих и глиссирующих телах).

6. Исследование влияния продольной и поперечной кривизны на интенсивность трения, профиль скоростей и распределение граничного слоя.

### 7. Изучение влияния мелководья на интенсивность трения.

Как это следует из самого содержания поставленных задач, первые три из них призваны оценить правильность метода пересчета от модели к натуре, принятого в большинстве гидродинамических лабораторий, и направить дальнейшие усилия по пути более глубокого изучения существа проблемы масштабного эффекта.

Четвертая задача связана с исследованием более общего вопроса интерференции винта, корпуса и выступающих частей и ставится в целях непосредственного измерения попутного потока, отыскания наивыгоднейшего положения винта, рулей, кронштейнов и т. п., изучения влияния работы винта на положение мест отрыва струй и т. д.

Задачи пятая, шестая и седьмая включаются нами в целях экспериментального изучения специфики кораблестроительных форм и представляют собой этап более детального изучения общей проблемы трения.

---

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. Александров В. А. „Техническая Гидродинамика“ 1932 г.
2. Глауэрт. „Основы теории крыльев и винта“. 1931 г.
3. Голубев В. В. „Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке“. 1927 г. труды ЦАГИ вып. № 29.
4. Желудев и Вилюм. „Исследование пограничного слоя на несимметричном профиле Жуковского“ Л. И. И. 1935 г.
5. Желудев Н. А. „Об одном методе определения интенсивности силы трения“ Л. И. И. 1935 г.
6. Космодемьянский. „К теории лобового сопротивления“ 1935 г. Труды ЦАГИ, вып. 215 и 216.
7. Кружилин. „Влияние цилиндрических предкрылков и закрылков на обтекание круглого цилиндра поперечным потоком воздуха“. Журн. Технич. Физики. 1934 г.
8. Лойцянский Л. Г. „Основы механики вязкой жидкости“ Вып. I и II. Изд. Кубуча. 1933 г.
9. Лойцянский Л. Г. „Взаимодействие пограничных слоев“ Труды ЦАГИ, вып. 249. 1936 г.
10. Лойцянский Л. Г. „Применение универсальных масштабов к движению жидкости в шероховатых трубах“. Труды ЦАГИ, в. 250. 1936 г.
11. Лойцянский Л. Г. „К теории кризиса сопротивления плохо обтекаемых тел“, Труды ЦАГИ, вып. 237. 1935 г.
12. Лойцянский Л. Г. „Отрыв струи с поверхности цилиндра, обтекаемого вязкой жидкостью“ Прикл. мех. и матем., том I, № 3. 1933 г.
13. Лойцянский Л. Г. „О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности“. Прикл. мех. и матем., том II, №1. 1934 г.
14. Лойцянский и Шваб. „Тепловая шкала турбулентности“. Труды ЦАГИ, вып. № 239, 1935 г.
15. Лойцянский и Шваб. „Экспериментальное исследование методов искусственного уменьшения сопротивления тел“. Прикл. мех. и матем. т. I № 2, 1933 г.
16. Лойцянский Л. Г. „Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача“. Известия НИИГ № 9 за 1933 г.
17. Лойцянский Л. Г. „Проблема сопротивления в свете идей современной физической аэродинамики“. Труды III всесоюзной Аэродинамич. Конфер. в ЦАГИ.
18. Лойцянский, Жуковский и Гухман. „О некоторых методах уменьшения гидравлического сопротивления и увеличения теплоотдачи“. На французском языке, 1934 г.
19. Прандтль и Титъенс, „Гидро и аэромеханика“ Том I и II. 1935 г.
20. Проскура. „Экспериментальная гидроаэродинамика“ 1933 г.
21. Саткевич А. А. „Аэродинамика, как теоретическая основа авиации“, 1923 г.
22. Саткевич А. А. „Теоретические основы гидро-аэродинамики“. 1935 г.
23. Федяевский К. К. „Пограничный слой и лобовое сопротивление тел вращения при больших  $Re$ “. Труды ЦАГИ, вып. 179. 1934 г.
24. Федяевский К. К. „Материалы по аэродинамическому расчету воздушных кораблей“. Отд. выпуски трудов ЦАГИ.



25. Ханович И. Г. „О влиянии кривизны на трение“. Труды ВНИТОСС 1936 г.
26. Ханович И. Г. и Крылов Н. Н. „Приближенное решение уравнения Польгаузена“. Труды ВНИТОСС. 1936 г.
27. Ханович И. Г. „О методе пересчета сопротивления от модели на натуру“. Труды ВНИТОСС. Том I, вып. 3. 1935 г.
28. Федяевский К. К. Расчет трения поверхностей с местной и общей шероховатостью. Труды ЦАГИ вып. № 250 1936 г.
29. Гуржиевко Г. А. Применение универсального логарифмического закона распределения скоростей к изучению пограничного слоя и лобового сопротивления хорошо обтекаемых тел при больших числах Рейнольдса. Труды ЦАГИ вып. № 257 1936 г.

#### Иностранные источники

1. Th. v. Kármán. „Über laminare und turbulente Reibung“ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. I, Heft 4, 1921.
2. K. Pohlhausen. „Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht“. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. I Heft 4, 1921.
3. H. Blasius. „Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten“. Forschungs-Arb. Ing. Wes., Heft 131, Berlin, 1913.
4. V. Saph and E. H. Schoder. „An experimental study of the resistance to the flow of water in pipes“. Trans. Amer. Soc. civ. Eng. Bd. 51, 1903.
5. H. Ombeck. „Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen“. Forsh. Arb. Ing. Wes. Heft 158 u. 159, 1914, Berlin.
6. T. E. Stanton and I. R. Pannell. „Similarity of motion in Relation to the surface Friction of Fluids“ Proc. Roy. Soc., London, Bd. 214, 1914.
7. Ch. H. Lees. „On the flow of viscous fluids through smooth circular Pipes“. Proc. Roy. Soc., London, Bd. 91, 1915.
8. M. Jakob and S. Erk. „Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflussziffer von Normaldüsen“. Forsch. Arb. Ing. Wes. Heft. 267, Berlin 1924.
9. R. Hermann. „Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz der Kreisrohre bei hohen Reynoldsschen Zahlen und grossen Anlaufängen“. Leipziger Dissertation, Akadem.-Verlagsges. m. b. H. Leipzig, 1930.
10. L. Schiller. „Rohr widerstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen“ Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen. 1929.
11. L. Prandtl. „Diskussionsbemerkung zum obigen Vortrag von L. Schiller“. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen 1929.
12. T. E. Stanton. „The mechanical viscosity of fluids“. Proc. Roy. Soc. London, Bd. 85 (1911).
13. I. Nikuradse. „Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen“. Forsch. Arb. Ing. Wes. Heft 281, Berlin 1926.
14. Th. v. Kármán. „Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz“. Göttinger Nachrichten Math. Phys. Klasse. 1930.
15. I. Nikuradse. „Über turbulente Wasserströmungen in geraden Rohren bei sehr grossen Reynoldsschen Zahlen“. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, Aachen 1929.
16. M. Bazin. „Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux“. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Bd. 32, № 6, 1902.
17. L. Prandtl. „Über den Reibungswiderstand strömender Luft“. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. 3. Lieferung. 1927.
18. I. Boussinesq. „Essai sur la théorie des eaux courantes“. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. 1877.
19. L. Prandtl. „Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten“. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchstalt zu Göttingen. 4. Lieferung. 1932.
20. L. Prandtl. „Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz“. Z. Angew. Math. Mech. Bd. 5, 1925.
21. L. Prandtl. „Bericht über neuere Turbulenzforschungen“. Hydraulische Probleme (Berlin, V. D. I. — Verlag.). 1926.

22. W. Tollmien. „Berechnung turbullenter Ausbreitungsvorgänge“. Z. Angew. Math. Mech. Bd. 6—1926.
23. L. Prandtl. „Über ausgebildete Turbulenz“. Verh. d. 2. Intern. Kongr. f. techn. Mech. Zürich (1927).
24. I. Nikuradse. „Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in Konvergenten und divergenten Kanälen“. Forsch. Arb. Ing. Wes. Heft 289, Berlin 1929.
25. W. Fritsch. „Der Einfluss der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen“. Z. Angew. Math. Mech. Bd. 8. (1928).
26. L. M. Swain. „On the turbulent wake behind a body of revolution“ Proc. Soc. Roy., London, Bd. 125 (1929).
27. A. Betz. „Über turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden“, Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, 1929.
28. I. Nikuradse. „Widerstandsgesetz und Geschwindigkeitsverteilung von turbulenten Wasserströmungen in glatten und rauhen-Röhren“. Verh. d. 3. intern. Kongr. f. techn. Mech. Stockholm. (1930).
29. H. Schlichting. „Über das ebene Windschattenproblem“. Ing. Arch. Bd. I, 1930.
30. L. Prandtl. „Turbulenz und ihre Entstehung“ Tokio-Vertrag 1929, Journal of the Aeronautical research Institut, Tokio Imperial University Nr 65 (1930).
31. A. Betz. „Die v. Kármánsche Ähnlichkeitsüberlegung für turbulente Vorgänge in physikalischen Auffassung“. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 11 (1931).
32. L. Schiller und R. Hermann. „Widerstand von Platte und Rohr bei hohen Reynoldsschen Zahlen“. Ing. Arch. Bd. I (1930).
33. G. S. Baker. „Ship Design, Resistance and Screw Propulsion“. Liverpool 1933, Volume 1.
34. E. Grouschwitz. „Die turbulente Reibungsschicht bei Druckabfall und Druckanstieg“. Ing.-Archiv. Band. 2 (1931).
35. F. Dunch. „Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen-Öffnungswinkeln“. V. D. I. Forschungsheft 282 (1926).
36. H. Müller. „Der Reibungswiderstand umströmter Körper“. W. R. H. 1932.
37. O. Cuno. „Experimentelle Untersuchungen der Grenzschichtdicke und Verlauf längs eines Flügelschnittes“. Z. F. M. 1932.
38. B. M. Jones. „Skin Friction and the Drag of stream line Bodies“ R. & M. N 1199 (1928).
39. C. Millikan. „The boundary Layer and Skin Friction for a Figure of Revolution“ Trans. Amer. Soc. Mech. Engin. Ap. Mec. 54—3 (1932).
40. A. Fage and H. Töwänd. „An Examination of Turbulent Flow with an Ultramicroscope“. Proc. of the Royal Soc. of London. Vol. C. XXXV, 1932.
41. I. Nikuradse. „Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren“. Forschungsheft, 356, V. D. I., Berlin, 1932.
42. Telfer. „Ship resistance similarity“. T. I. N. A. 1927.
43. Kempf. „Neuere Ergebnisse der Widerstandsforschung“ W. R. H., Heft 11—12 (1929).
44. Kempf. „Flächenwiderstand“. W. R. H. Heft 20 (1924).
45. Kempf. „Neuere Erfahrungen etc.“ I. S. T. G. (1927).
46. Hoppe. „Neue Messungen der Wasserreibung“. W. R. H. Heft 5 (1929).
47. Kempf. „Widerstand kurzer Flächen“. W. R. H. Heft 15 (1925).
48. Koop. „Frictional resistance of ship models“ Tr. Am. Soc. (1930).
49. Telfer. „Frictional resistance etc.“ Tr. N. E. Coast Inst. 1—11 (1929).
50. W. Froude. „Report of British Association, 1872.“
51. R. Trendelenburg. T. I. N. A. 1883.
52. Perring. „Some Experiments upon the Skin Friction“ T. I. N. A. (1926).
53. Stanton. „Collected Researches“. National Physical Laboratory. Vol 11.
54. Wieselberger. „Ergebnisse d. Aerod. Versuchsinst“. Göttingen, I. Lieferung (1921).
55. Foettinger. „Fortschritte der Strömungslehre etc.“ I. S. T. G. (1924).
56. \* W. Müller. „Z. f. A. M. M. (1933). Vol. 13, S. 395—408.

\* Статьи, приведенные под номерами 56—83 подробно аннотированы в статье Kármán, Bolyay and Ippen (Journal of the Applied Mechanics, 1935, vol. 2, № 1). переведенной и отпечатанной в сборе № 4 Информ. Библиот. Сектора НИВК'а (1935 г.).

57. H. Schlichting. „Z. f. A. M. M. (1933). Vol. 13, S. 260—263.
58. S. Goldstein and A. Fage. „Proceedings Royal Society of London“. 1933. Vol. 42, S. 545—573.
59. N. A. Plercy and H. E. Winny. Proc. Royal Soc. of London, 1933, vol. 140. S. 543—561.
60. C. W. Oseen. „Arkiv for Mathematik Astronomi and Physik 1934, vol. 241 № 20, S. 1—23.
61. H. B. Squire. „Philosophical Magazine, 1934, vol. 17, S. 1150—1160.
62. H. B. Squire. „Proceedings Royal Society of London, 1933, vol. 142. S. 621—628.
63. Th. v. Karman. „Journal of Aeronautical Sciences, 1934, vol. 1, no. 1, S. 1—20, также Paper presented at Cambridge Congress for Applied Mechanics. 1934.
64. Dryden. „National Advisory Committee for Aeronautics Report 497, 1934.
65. A. Fage. „Journal Royal Aeronautical Society 1933, Vol. 37, S. 573—600.
66. J. M. Burgers. „Proceedings, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1933, Vol. 36, no 3, S. 276—284, vol. 4, S. 390—399. vol. 5, S. 487—496, vol. 6, S. 620—628.
67. W. Tollmien. „Physics 1933, vol. 4, S. 289—290, ZAMM, 1933, vol. 13, S. 331—347.
68. G. D. Mattioli. „Comptes Rendus, Institute de France, Academie des Sciences, 1933, vol. 196, S. 1866—1868. Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova 1933, vol. 4, S. 67—91.
69. H. Schlichting. „Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1933, vol. 11, no 38, S. 181—208.
70. F. L. Wattendorf and A. M. Kuethe. Physics, 1934, vol. 5, S. 153—164.
71. H. Reichardt, ZAMM 1933, vol. 13, S. 177—180.
72. A. Fage. Journal Royal Aeronautical Society 1933, vol. 37, S. 573—600.
73. F. L. Simmons and C. Salter, Proceedings Royal Society of London, 1934, vol. 145, S. 212—234.
74. H. C. H. Towend. Proceedings, Royal Society of London 1934, vol. 145. S. 180—211.
75. R. Gregorig. Zürich, Dissertation, 1933.
76. K. E. Schoenherr. Society Naval Architects and Marine Engineers, Transaction, 1933, vol. 40, S. 279—313.
77. A. Fage. Great Britain Air Ministry, Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda 1580, 1934, S. 1—7.
78. F. Gebers. Schiffbau, Schifffahrt und Hafenbau, 1933, vol. 34, S. 252—256.
79. H. F. Nordstrom, Teknisk, Tidskrift 1933, A. 63, Heft 42, Skeppsbyggnads Konst, № 33, no 10, S. 71—86.
80. L. Prandtl, O. Titiens „Hydro-und Aeromechanik“. Erster und Zweiter Band, Berlin, 1929.
81. C. W. Oseen. „Das Turbulenzproblem“ Verhandl. des 3 Internat. Kongresses für Technische Mechanik, Stockholm, 1930.
82. O. Reynolds. „On the Dynamical Theorie of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Phil. Trans. 123 (1894).
83. H. Lamb. „Hydrodynamics“. 1924.
84. W. Tollmien. „Turbulente Strömungen“. Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, I, Teil.
85. Kármán. „Über die Stabilität der Laminärströmung und die Theorie der Turbulenz“. Proceed. of the first Inter. Congress for Applied Mechanic, Delft. 1924.
86. I. M. Burgers. „On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent motion“. 1—111 Proc. Keng. Ak. v. Wet. te Amsterdam, Vol. XXXII. 1929.
87. A. A. Фридман и Л. В. Келлер. „Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer Kompressibelen Flüssigkeit“. Proc. of the First Internat. Congress for Applied Mechanics, Delft, 1924.
88. L. Prandtl. „Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz“, ZAMM, Bd. 5 (1925).
89. L. Prandtl. „Neuere Turbulenzforschung“, Hydraul. Probleme, 1926.
90. L. Prandtl. „Ausgebildete Turbulenz“ Verhandlungen Z. Intern. Kongr. Techn. Mech., Zurich. 1926.

91. F. Noether. „Zur statistischen Deutung der Kármánschen Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie“. ZAMM Bd. 11, Heft 3, 1931.
92. F. Ahlborn. „Turbulenz und Mechanismus des Widerstandes an Kugeln und Zylindern“. Zeitschrift für techn. Physik. № 10, 1931.
93. I. Nikuradse. „Kinematographische Analyse einer turbulenten Strömung“. ZAMM, 9, 495, 1929.
94. L. F. Richardson. „Weather Prediction by Numerical Process“. Cambridge. 1922.
95. W. Tollmien. „Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge“ ZAMM, 6, 1926.
96. J. Nikuradse. „Strömungswiderstand in rauhen Rohren“. ZAMM Bd. 11, Heft 6, Dez. 1931.
97. L. Prandtl. „Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung“. Z. V. D. I. Bd. 77, Nr. 5, 1933.
98. J. Nikuradse. „Strömungsgesetze in rauhen Rohren“. Forschungsheft 361. 1933.
99. L. F. Richardson. „Computation on the two-dimensional flow in a laminar boundary layer“. NACA Rep. № 497, 1934.
100. R. Mises. „Elemente der technischen Hydrodynamik“. Leipzig. B. G. Teubner. 1914.
101. L. Schiller. „Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauigkeitsgrades“. ZAMM Bd. 3, (1923).
102. L. Hopf. „Die Messung der hydraulischen Rauigkeit“ ZAMM, Bd. 3 (1923).
103. K. Fromen. „Strömungswiderstand in rauhen Rohren“. ZAMM, Bd. 3 (1923).
104. W. Fritsch. „Der Einfluss der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen“. ZAMM. Bd. 8, (1928).
105. M. F. Freer. „Der Widerstandsbeiwert bei turbulenten Strömungen durch rauhe Kanäle“. Phys. Z. Bd. 9 (1929).
106. M. F. Freer. „Die Geschwindigkeitsverteilungen bei gradlinigen turbulenten Strömungen“, Phys. Z. Bd. 9 (1929).
107. H. Kumbruch. „Messung strömender Luft mittels Staegeräten“. Forsch.-Arb. Ing. Wes. Heft. 240, 1921.
108. H. Schlichting. „Experimentelle untersuchungen zum Rauigkeitsproblem“ Ingenieur—Archiv VII Band, 1 Heft 1936.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| Предисловие редактора . . . . . | 3 |
| Предисловие автора . . . . .    | 5 |
| Введение . . . . .              | 7 |

### Глава I

#### Ламинарное и турбулентное течение жидкости

Определение ламинарного и турбулентного трения. Осредненная скорость и пульсации. Кажущееся касательное напряжение для осредненного потока. Вывод уравнений Рейнольдса. Корреляция между пульсационными составляющими скорости. Условия перехода ламинарного режима в турбулентный. Путь перемешивания. Коэффициент турбулентного обмена. 13

### Глава II

#### Основные свойства ламинарного и турбулентного пограничного слоя

Уравнения Прандтля для ламинарного пограничного слоя. Основные свойства ламинарного и турбулентного слоя трения. Физическая картина отрыва струй при ламинарном и турбулентном граничном слое. 21

### Глава III

#### Ламинарное обтекание плоского профиля

Решение Блазиуса для случая ламинарного обтекания пластин. Интегральное условие Кармана. Метод Польгаузена. Условие отрыва ламинарного граничного слоя. Приближенное решение уравнения Польгаузена. 38

### Глава IV

#### Закон Блазиуса и решение задачи о турбулентном обтекании пластины

Закон Блазиуса для турбулентного течения жидкости в гладких трубах. Постулат Кармана. Степенной закон распределения скоростей. Решение Прандтля-Кармана для случая обтекания пластины турбулентным потоком (1921). 61

### Глава V

#### Распределение толщины пограничного слоя и силы трения вдоль цилиндрического тела и тела вращения

Решение Мюллера. Обобщенное интегральное условие Кармана (уравнение Миллихена). Распространение решения Мюллера на тело вращения. 72

## Глава VI

О влиянии кривизны поверхности на трение и вихре-  
вое сопротивление

Распределение скоростей, давлений, толщины граничного  
слоя и сил трения на двугольном цилиндрическом про-  
филе. Отрывание мест отрыва при ламинарном обте-  
кании . . . . .

92

## Глава VII

## Логарифмический закон распределения скоростей

Опыты Никурадзе. Решение Прандтля (1930 г.). Предпо-  
ложение Кармана о подобии поля пульсационных скоростей.  
Решение Кармана (1930 г.) . . . . .

138

## Глава VIII

## Сопротивление шероховатых пластин

Опыты Никурадзе с шероховатыми трубами. Приме-  
нение результатов этих опытов для решения задачи о сопро-  
тивлении пластин с различной относительной шероховато-  
стью . . . . .

166

## Глава IX

## Критический обзор существующих теорий трения

Критические замечания. Метод внутреннего подобия.  
Дальнейшие перспективы и ближайшие задачи . . . . .

182

## Библиография . . . . .

191

Ответствен. редактор *Алякринский*.  
Технич. редактор *А. И. Канторович*.  
Сдано в производство 20 II 1936 г.  
Подписано к печати 13 VI 1936 г.  
Выход в свет Июнь 1936 г.  
Учетно-авторских листов 13. Печ.  
листов  $12\frac{1}{2}$ . Формат бум. 62  $\times$  94/16.  
Бум. листов  $6\frac{1}{4}$ . Колич. знаков в бум.  
листе 105600. Тираж 2000. Инд. С-С-5-4.  
Ленгорлит № 11102. ОНТИ № С-40.  
Зак. № 3225.

# ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

| Стр.                    | Строка   | Напечатано                                                                        | Следует читать                                                                    |
|-------------------------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 24                      | 2 сверху | $y \propto \delta$                                                                | $y \sim \delta$                                                                   |
| 73                      | 5 сверху | $= \rho \frac{d}{ds} \int_0^\delta U^2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{2n} dy =$ | $= \rho \frac{d}{ds} \int_0^\delta U^2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{2n} dy =$ |
| 79                      | 4 сверху | (171)                                                                             | (171a)                                                                            |
| 90                      | 2 снизу  | (157)                                                                             | $m = -\frac{2n}{n+1}$                                                             |
| 152<br>(напечатано 162) | 10-снизу | $= U_0' + U_0''y + \dots + \Delta\Psi;$                                           | $= U_0' + U_0''y + \dots + \Delta\Psi;$                                           |
| 156                     | 8 сверху | $-\ln \sqrt{r} \} =$                                                              | $-\sqrt{r} \ln \sqrt{r} \} =$                                                     |
| 185                     | 3 снизу  | $\frac{1}{n'} l_k^n \Phi_k^{(n)}$                                                 | $\frac{1}{n!} l_k^n \Phi_k^{(n)}$                                                 |
| 189                     | 9 сверху | $l \propto z + c \sqrt{\frac{z}{r}}$                                              | $l \sim z + c \sqrt{\frac{z}{r}}$                                                 |

Заказ 3225. Ханович „Пограничный слой и сопротивление“.



-326764-

RLST



0000000210785

1936