Э. ГУРСА,
профессор Faculté des Sciences в Париже

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ II

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
А. И. НЕКРАСОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Б. К. МЛОДЗЕЕВСКОГО,
ПРОФЕССОРА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1923 ПЕТРОГРАД

Гиз. № 2641. Главлит. № 2491. Москва. Напеч. 3.000 экз.

„Мосполиграф". 1-я Образцовая тип. Пятницкая, 71.

ГЛАВА XIII.

Простейшие функции комплексного переменного.

I.—Общие замечания.—Моногенные функции.

259. Определения.—Мнимым количеством, или комплексным количеством называется всякое выражение вида $a+bi$, где a и b—какие-нибудь действительные числа, и i—особый символ, ввести который оказалось нужным, чтобы придать алгебре больше общности. В сущности, на комплексное количество можно смотреть, как на систему двух действительных количеств, взятых в определенном порядке. Хотя выражения вида $a+bi$ и не имеют сами по себе никакого конкретного значения, тем не менее, условились применять к ним обыкновенные правила алгебраического вычисления при условии заменять повсюду выражение i^2 через -1.

Два мнимых количества $a+bi$ и $a'+b'i$ называются равными, если $a'=a$, $b'=b$. Сумма двух мнимых количеств $a+bi$ и $c+di$ есть символ того же вида $(a+c)+i(b+d)$; точно так же, разность $(a+bi)-(c+di)$ равна мнимому количеству $(a-c)+i(b-d)$. Чтобы получить произведение $a+bi$ на $c+di$, его составляют по обыкновенному правилу алгебраического умножения, заменяя i^2 через -1; это дает

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(iad+bc).$$

Частное от деления $a+bi$ на $c+di$ есть также мнимый символ $x+yi$, произведение которого на $c+di$ равно $a+bi$. На основании правила умножения, равенство

$$a+bi=(c+di)(x+yi)$$

равносильно соотношениям

$$cx-dy=a,\quad dx+cy=b;$$

отсюда имеем

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Для изображения частного от деления $a+bi$ на $c+di$ пользуются обычным изображением алгебраических дробей

$$x+yi=\frac{a+bi}{c+di};$$

чтобы найти x и y, всего проще умножить числитель и знаменатель этой дроби на $c-di$ и раскрыть полученные произведения.

Все свойства основных алгебраических действий распространяются и на действия над мнимыми символами; так, если A, B, C... обозначают мнимые символы, то $A.B=B.A$, $(A.B).C=A.(B.C)$, $A.(B+C)=AB+AC$,..., и т. д. Мнимые количества $a+bi$ и $a-bi$ называются **сопряженными мнимыми количествами**. Два мнимых количества $a+bi$ и $-a-bi$, сумма которых равна нулю, называются **противоположными**, или **симметричными**.

Пусть мы имеем на плоскости систему прямоугольных осей координат xOy, расположенных обычным образом. Тогда мнимое количество $a+bi$ изобразится на этой плоскости точкою M с координатами $x=a$, $y=b$. Таким образом, чисто символические выражения получают конкретное истолкование, и каждому предложению, доказанному для мнимых количеств, будет соответствовать теорема планиметрии. В последующем мы всего лучше убедимся в огромных преимуществах этого способа изображать мнимые количества. Действительные количества соответствуют точкам оси Ox, которая поэтому называется также **действительною осью**. Мнимые сопряженные количества $a+bi$ и $a-bi$ соответствуют двум точкам, симметричным относительно оси Ox; противоположные количества $a+bi$ и $-a-bi$ представятся точками, симметричными относительно точки O.

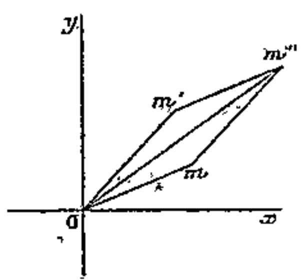
Количество $a+bi$, соответствующее точке M с координатами (a, b), иногда называется также **аффиксом** этой точки. В тех случаях, когда можно не опасаться неопределенности, мы будем обозначать одною и тою же буквою как мнимое количество, так и ту точку, которая его представляет.

Соединим начало координат с точкою m с координатами (a, b). Расстояние Om называется **модулем** количества $a+bi$, а угол, на который нужно повернуть полупрямую, совпадающую с Ox, чтобы привести ее в совпадение с Om (этот угол отсчитывается, как в тригонометрии, от Ox к Oy), называется **аргументом** количества $a+bi$. Пусть будут ρ и ω модуль и аргумент количества $a+bi$; действительные количества a, b, ρ, ω связаны двумя соотношениями $a=\rho\cos\omega$, $b=\rho\sin\omega$; отсюда имеем

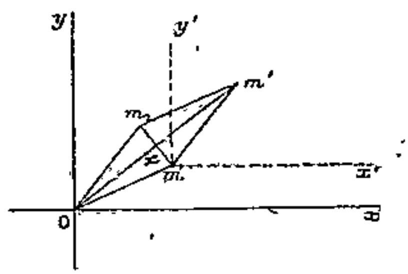
$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\omega=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Модуль есть вполне определенное существенно положительное число; напротив, аргумент определяется только его тригонометрическими функциями и потому известен только с точностью до 2π, что очевидно из самого его определения. Поэтому всякое мнимое количество имеет бесконечное множество аргументов, образующих арифметическую прогрессию с разностью 2π. Чтобы два мнимых количества были между собою равны, их модули должны быть равны, и, кроме этого, необходимо, чтобы аргументы разнились между собою на кратное 2π; эти два условия также и достаточны. Модуль мнимого количества z изображается тем же символом $|z|$, как и абсолютное значение действительного количества.

Черт. 53.



Черт. 54.



Пусть будут $z=a+bi$, $z'=a'+b'i$ мнимые количества, m, m' — соответствующие им точки; сумма $z+z'$ изобразится точкою m'', лежащею в вершине параллелограмма, построенного на Om и Om'. Но стороны треугольника Omm'' (черт. 53) соответственно равны модулям количеств z, z', $z+z'$. Отсюда следует, что *модуль суммы двух количеств не больше суммы и не меньше разности модулей этих количеств*. Так как противоположные количества имеют общий модуль, то эта теорема верна также и для модуля разности. Наконец, тем же способом можно убедиться, что модуль суммы любого числа мнимых количеств не превосходит суммы их модулей, причем равенство имеет место только в том случае, если все точки, представляющие эти различные количества, лежат на одной полупрямой, выходящей из начала координат.

Если через точку m мы проведем прямые mx', my' параллельно осям Ox и Oy, то координаты точки m' в этой новой системе осей будут $a'-a$ и $b'-b$ (черт. 54). Следовательно, точка m' представляет в новой системе осей разность $z'-z$; модуль разности $z'-z$ равен длине mm', а аргумент равен углу θ, образуемому направлением mm' с направлением mx'. Проведем через точку O отрезок Om_1, равный и параллельный отрезку mm'; конец m_1 этого отрезка представляет разность $z'-z$ в системе осей Ox, Oy. Но фигура $Omm'm_1$ есть параллелограмм; следовательно, точка m_1 симметрична с точкою m относительно средины c отрезка Om'.

Приведем еще формулы для модуля и аргумента любого числа множителей. Пусть будут

$$z_k = \rho_k(\cos\omega_k + i\sin\omega_k) \quad (k=1, 2,\ldots, n)$$

эти множители; применяя правило умножения вместе с формулами сложения тригонометрических функций, получим для произведения

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\,[\cos(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n)+i\sin(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n)];$$

отсюда следует, что модуль произведения равен произведению модулей, и аргумент произведения равен сумме аргументов. Отсюда легко получается известная формула Муавра (Moivre)

$$\cos m\omega + i\sin m\omega = (\cos\omega + i\sin\omega)^m,$$

заключающая в сжатом виде все формулы умножения тригонометрических функций.

Введение мнимых символов позволило дать теории алгебраических уравнений совершенные общность и симметрию, и самые эти символы появились впервые в связи с уравнениями второй степени. Эти символы имеют не меньшую важность и в Анализе, и мы прежде всего выясним с точностью, что следует понимать под словами: функция мнимого переменного.

260. Непрерывные функции комплексного переменного.—Комплексное количество $z = x + yi$, где x и y—действительные независимые переменные, называется комплексным переменным. Если мы сохраним за словом функция его наиболее общее понятие, то естественно называть всякое другое мнимое количество u, значение которого зависит от значения z, функциею переменного z. Ряд данных в предыдущем определений непосредственно распространяется и на функции мнимого переменного. Так, функция $u = f(z)$ называется непрерывною, если модуль разности $f(z+h) - f(z)$ стремится к нулю при приближении модуля h к нулю, т.-е. если можно найти для всякого положительного числа ε такое другое положительное число η, чтобы было

$$|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$$

всякий раз, когда $|h|$ меньше числа η.

Ряд

$$u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots,$$

все члены которого суть функции комплексного переменного z, называется равномерно сходящимся в области A плоскости, если для всякого положительного числа ε можно найти такое целое число N, чтобы при всех значениях z, взятых в области A, было

$$|R_n| = |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots| < \varepsilon,$$

если $n > N$. Как и выше (т. I, § 173), можно доказать, что сумма ряда, равномерно сходящегося в области A, все члены которого суть в этой области непрерывные функции от z, сама есть функция переменного z, непрерывная в той же области; ряд будет равномерно сходящимся, если при всех рассматриваемых значениях переменного z, модуль любого члена ряда $|u_n|$ меньше соответствующего члена v_n сходящегося ряда, все члены которого суть постоянные положительные числа. В этом случае ряд $u_0 + u_1 + \ldots$ будет одновременно равномерно и абсолютно сходящимся.

Всякая непрерывная функция комплексного переменного z имеет вид $u = P(x, y) + iQ(x, y)$, где P и Q—действительные непрерывные функции действительных переменных x, y. Поэтому, если бы мы не прибавили к предыдущему определению никаких других условий, то изучение функций комплексного переменного z привелось бы, в сущности, к изучению системы двух функций двух действительных переменных, и введение символа i не дало бы никаких существенных упрощений. Чтобы теория функций комплексного переменного представляла некоторую аналогию с теорией функций действительного переменного, найдем, следуя Коши, каким условиям должны удовлетворять функции P и Q, чтобы выражение $P + iQ$ обладало основным свойством функций действительного переменного, к которым применимо исчисление бесконечно-малых.

261. Моногенные функции. — Если $f(x)$ есть функция действительного переменного x, имеющая производную, то отношение $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при приближении h к нулю стремится к пределу $f'(x)$. Найдем также, в каких случаях частное

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x + i\Delta y}$$

стремится к определенному пределу всякий раз, как модуль $|\Delta z|$ стремится к нулю, т.-е. всякий раз, как Δx и Δy отдельно стремятся к нулю. Легко предвидеть, что этого не будет, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ будут вполне произвольными, так как предел предыдущего отношения зависит, вообще, от предела $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.-е. от того пути, по которому точка, представляющая значение количества $z + \Delta z$, стремится к точке, представляющей значение количества z.

Оставим сначала y постоянным и дадим x близкое значение $x+\Delta x$; мы получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{P(x+\Delta x, y)-P(x,y)}{\Delta x}+i\,\frac{Q(x+\Delta x, y)-Q(x,y)}{\Delta x}.$$

Чтобы это отношение имело предел, функции P и Q должны иметь частные производные по x; тогда этот предел будет иметь выражение

$$lim\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\,\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Предположим затем, что x постоянно, и дадим y значение $y+\Delta y$; мы получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{P(x, y+\Delta y)-P(x,y)}{i\,\Delta y}+\frac{Q(x, y+\Delta y)-Q(x,y)}{\Delta y}.$$

Если функции P и Q имеют частные производные по y, то предел этого отношения равен

$$\frac{\partial Q}{\partial y}-i\,\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Чтобы пределы отношения $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ в обоих случаях были между собою равны, должно быть

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Предположим, что функции P и Q удовлетворяют этим условиям, и что частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны. Дадим теперь x и y какие-нибудь приращения Δx и Δy; обозначая через θ и θ' положительные числа, меньшие единицы, получим

$$\begin{aligned}\Delta P&=P(x+\Delta x, y+\Delta y)-P(x+\Delta x, y)+P(x+\Delta x, y)-P(x,y)\\&=\Delta y\,P'_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y)+\Delta x\,P'_x(x+\theta'\Delta x, y)\\&=\Delta x\,[P'_x(x,y)+\varepsilon]+\Delta y\,[P'_y(x,y)+\varepsilon_1],\end{aligned}$$

и точно так же,

$$\Delta Q=\Delta x\,[Q'_x(x,y)+\varepsilon']+\Delta y\,[Q'_y(x,y)+\varepsilon_1'],$$

где ε, ε, ε_1, ε_1' бесконечно малы вместе с Δx и Δy. Принимая во внимание условия (1), мы можем представить приращение $\Delta u=\Delta P+i\,\Delta Q$ в виде

$$\begin{aligned}\Delta u&=\Delta x\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\Delta y\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}+i\,\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\eta\Delta x+\eta'\Delta y\\&=(\Delta x+i\,\Delta y)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\eta\Delta x+\eta'\Delta y,\end{aligned}$$

где η, η'—бесконечно малы. Отсюда имеем

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\eta\Delta x+\eta'\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

причем, если $|\eta|$ и $|\eta'|$ меньше некоторого числа α, то модуль дополнительного члена меньше 2α. Следовательно, при приближении Δx и Δy к нулю, этот член стремится к нулю, и мы имеем

$$lim\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Таким образом, соотношения (1) представляют необходимые и достаточные условия того, чтобы отношение $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ имело единственный предел для каждого значения переменного z при условии непрерывности частных производных от функций P и Q. Такая функция u называется **моногенною**, или **аналитическою**[1]) функциею переменного z; если мы обозначим ее через $f(z)$, то производная $f'(z)$ будет равна любому из следующих выражений, которые для моногенных функций все между собою равнозначущи,

$$f'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}-i\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (2)$$

Необходимо обратить внимание на то, что ни одна из функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ не может быть взята произвольно. В самом деле, предположим, что функции P и Q имеют производные второго порядка; дифференцируя первое из равенств (1) по x, второе по y, и складывая полученные соотношения, будем иметь

$$\Delta_2 P=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0;$$

точно так же мы можем доказать, что $\Delta_2 Q=0$. Следовательно, обе функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ суть решения уравнения Лапласа.

Обратно, всякое решение уравнения Лапласа может быть принято за одну из функций P или Q. Пусть будет, например, $P(x, y)$ одно из решений этого уравнения; тогда уравнения (1), где Q рассматривается, как неизвестная функция, совместимы, и выражение

$$u=P(x, y)+i\left[\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dy-\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)+C\right],$$

[1]) Словом **моногенная** функция часто пользовался Коши. Иногда употребляют также термин **синектическая** функция. Мы будем чаще пользоваться термином **аналитическая** функция; ниже мы увидим, что последнее определение вполне согласно с определением аналитических функций, которое было дано ранее (т. I, § 191).

где C—произвольное постоянное, есть моногенная функция, действительная часть которой равна $P(x, y)$.

Таким образом, изучение аналитических функций комплексного переменного z приводится, в сущности, к изучению системы двух действительных функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ от двух действительных переменных x, y, удовлетворяющих соотношениям (1), и можно было бы развить всю теорию таких функций, не пользуясь символом i[1]). Мы, однако, будем пользоваться символами Коши, заметив при этом, что разница между обоими методами, в сущности, скорее кажущаяся, чем действительная. Всякая теорема, доказанная для аналитической функции $f(z)$, непосредственно переводится в равносильную теорему для функций P и Q, и обратно.

Примеры.—Функция $u=x^2-y^2+2ixy$—аналитическая, так как для нее соотношения (1) удовлетворяются; ее производная равна $2x+2iy=2z$; эта функция есть не что иное, как $(x+iy)^2=z^2$. Напротив, выражение $v=x-iy$ не есть аналитическая функция; в самом деле, мы имеем

$$\frac{\Delta v}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

и ясно, что предел отношения $\dfrac{\Delta v}{\Delta z}$ зависит от предела отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Полагая $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ и применяя формулы замены переменных (т. I, § 38), мы можем представить соотношения (1) в виде

$$\frac{\partial P}{\partial\omega}=-\rho\frac{\partial Q}{\partial\rho},\quad \frac{\partial Q}{\partial\omega}=\rho\frac{\partial P}{\partial\rho};\qquad(3)$$

производная $f'(z)$ будет иметь выражение

$$f'(z)=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}+i\frac{\partial Q}{\partial\rho}\right)(\cos\omega-i\sin\omega).$$

С помощью этих формул нетрудно показать, что функция

$$z^m=\rho^m(\cos m\omega+i\sin m\omega)$$

есть аналитическая функция переменного z, производная которой равна

$$m\rho^{m-1}(\cos m\omega+i\sin m\omega)(\cos\omega-i\sin\omega)=mz^{m-1}.$$

262. Голоморфные функции.—Предыдущие общие положения имеют несколько неопределенный характер, так как до сих пор мы не касались вопроса о тех границах, между какими мы будем изменять переменное z.

Часть A плоскости называется с в я з н о ю, если две любые точки, взятые в этой части, можно соединить непрерывным путем, который весь лежит в этой части плоскости. Связная часть плоскости, рас-

[1]) С этой точки зрения обыкновенно смотрят на теорию аналитических функций немецкие геометры школы Римана.

положенная вся на конечном расстоянии, может быть ограничена одною или несколькими замкнутыми линиями, среди которых всегда есть замкнутая линия, ограничивающая ее извне. Связная часть плоскости, простирающаяся в бесконечность, может состоять из совокупности точек, лежащих вне одной или нескольких замкнутых линий; она может также быть ограничена линиями, имеющими бесконечные ветви.

В тех случаях, когда можно не опасаться неопределенности, мы будем называть связную часть плоскости безразлично площадью или областью.

Функция $f(z)$ комплексного переменного Z называется голоморфною в связной части A плоскости, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Каждой точке z области A соответствует определенное значение функции $f(z)$.

2. Функция $f(z)$ остается непрерывною, когда точка z перемещается в области A, т.-е. модуль $f(z+h)-f(z)$ стремится к нулю вместе с модулем h.

3. В каждой точке z области A функция $f(z)$ имеет единственную производную $f'(z)$, т.-е. каждой точке z соответствует такое комплексное число $f'(z)$, что модуль разности

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)$$

стремится к нулю, когда $|h|$ стремится к нулю. Тогда для всякого положительного числа ε можно найти такое другое положительное число η, чтобы было

$$|f(z+h)-f(z)-hf'(z)|<\varepsilon|h|, \tag{4}$$

если $|h|$ меньше числа η.

Мы не сделаем пока никакого предположения относительно значений функции $f(z)$ вдоль контура, ограничивающего область A. Когда мы будем говорить, что функция $f(z)$ голоморфна внутри площади A, ограниченной замкнутым контуром Γ и на самом этом контуре, то под этим следует подразумевать, что функция $f(z)$ голоморфна в области $\mathfrak{A}$, содержащей контур Γ и область A.

Аналитическая функция $f(z)$ не должна быть непременно голоморфною во всей области существования; она имеет вообще особые точки, которые могут быть очень различного рода. Здесь было бы преждевременно давать классификацию этих особых точек, характер которых вполне выяснится из дальнейшего.

263. Рациональные функции.—Так как правила дифференцирования суммы, произведения, частного являются логическими следствиями определения производной, то эти правила распространяются и на функции комплексного переменного. То же имеет место и для правила дифференцирования функции от функции. Пусть будет $u = f(Z)$ аналитическая функция комплексного переменного Z; если мы заменим Z другою аналитическою функцией $\varphi(z)$ нового комплексного переменного z, то u будет также аналитическою функциею и переменного z. В самом деле, мы имеем

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{\Delta Z} \times \frac{\Delta Z}{\Delta z};$$

при приближении $|\Delta z|$ к нулю, $|\Delta Z|$ также стремится к нулю, и каждое из отношений $\frac{\Delta u}{\Delta Z}$, $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ стремится к определенному пределу. Следовательно, отношение $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ само стремится к пределу

$$lim\,\frac{\Delta u}{\Delta z} = f'(Z)\,\varphi'(z).$$

Выше мы доказали (§ 261), что функция

$$z^m = (x + iy)^m$$

есть аналитическая функция переменного z, имеющая производную mz^{m-1}. В этом можно убедиться непосредственно так же, как в случае действительного переменного. В самом деле, формула бинома, основывающаяся единственно на свойствах умножения, очевидно, распространяется на комплексные количества. Следовательно, мы имеем при m целом положительном

$$(z+h)^m = z^m + \frac{m}{1} z^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} z^{m-2} h^2 + \ldots,$$

и, отсюда,

$$\frac{(z+h)^m - z^m}{h} = mz^{m-1} + h\left[\frac{m(m-1)}{1.2} z^{m-2} + \ldots + h^{m-1}\right];$$

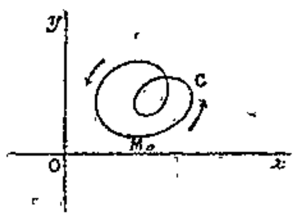
очевидно, что при приближении модуля h к нулю правая часть имеет пределом mz^{m-1}.

Отсюда следует, что всякий целый многочлен с произвольными коэффицентами есть также аналитическая функция, голоморфная во всей плоскости. Рациональная функция, т.-е. частное двух целых многочленов $P(z)$, $Q(z)$, которые можно предположить первыми между собою, есть также аналитическая функция, но она имеет некоторое число особых точек,—именно, все корни уравнения $Q(z)=0$. Эта функция голоморфна во всякой области плоскости, не содержащей ни одного из этих корней.

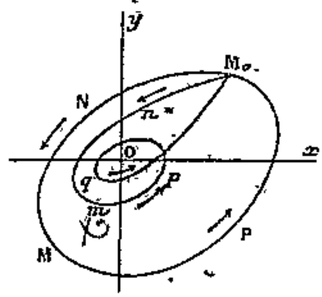
264. Исследование некоторых иррациональных функций. — Если точка z описывает замкнутый путь, то координаты x, y и модуль ρ изменяются непрерывно; аргумент также изменяется непрерывно, если только описываемый путь не проходит через начало координат.

Если точка z, описав замкнутый путь, возвращается к своему начальному положению, то x, y и ρ принимают свои начальные значения, но это не всегда бывает с аргументом. Действительно, если начало координат находится вне площади, ограничиваемой замкнутым путем (черт. 55ª), то очевидно, что аргумент возвращается к своему начальному значению; но этого не будет, если точка описывает путь вида M_0NPM_0 или M_0npqM_0 (черт. 55ᵇ). После обхода в

Черт. 55ª.



Черт. 55ᵇ.



первом случае аргумент возвращается к своему начальному значению, увеличенному на 2π, а во втором случае аргумент принимает свое начальное значение с приращением 4π. Очевидно, что можно перемещать переменное z по таким замкнутым путям, что аргумент, непрерывно изменяясь вдоль любого из них, придет к конечному значению, отличающемуся от начального значения на $2n\pi$, где n—произвольное целое число, положительное или отрицательное. Вообще, если z описывает замкнутый путь, то аргумент количества $z-a$ возвращается к своему начальному значению, если точка a находится вне площади, ограничиваемой этим замкнутым путем, но всегда можно выбрать такой путь для переменного z, чтобы конечное значение аргумента количества $z-a$ было равно начальному значению, сложенному с $2n\pi$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$u^m = z, \tag{5}$$

где m—целое положительное число. Для всякого значения z, кроме $z=0$, это уравнение дает m различных значений для u. В самом деле, полагая

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \quad u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

мы получим два следующих уравнения, равносильных уравнению (5),

$$r^m = \rho, \quad m\varphi = \omega + 2k\pi;$$

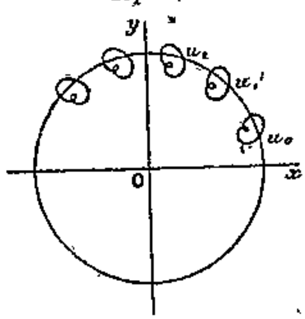
из первого имеем $r=\rho^{\frac{1}{m}}$, т.-е. r равно арифметическому корню m-ой степени из положительного числа ρ. Далее находим $\varphi=\dfrac{\omega+2k\pi}{m}$, и, чтобы получить все различные значения количества u, достаточно давать произвольному целому числу k последовательно m целых значений $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Таким образом, мы получим выражения для m корней уравнения (5)

$$u_k=\rho^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\omega+2\pi k}{m}+i\sin\frac{\omega+2\pi k}{m}\right]\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m-1).$$

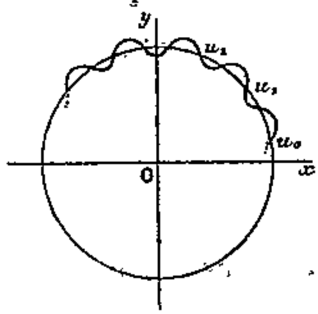
Один какой-нибудь из этих корней изображают также через $z^{\frac{1}{m}}$.

Если переменное z описывает непрерывный путь, то каждый из этих корней изменяется также непрерывно. Если z описывает замкнутый путь, оставляя начало координат снаружи, то, после обхода,

Черт. 56^а.



Черт. 56^в.



аргумент ω возвращается к своему начальному значению, и каждый из корней $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ описывает также замкнутый путь (черт. 56^а). Но если точка z описывает путь M_0NPM_0 (черт. 55^в), то ω переходит в $\omega+2\pi$, конечное значение корня u_i будет равно начальному значению корня u_{i+1}, и пути, описываемые различными корнями, образуют одну замкнутую линию (черт. 56^в).

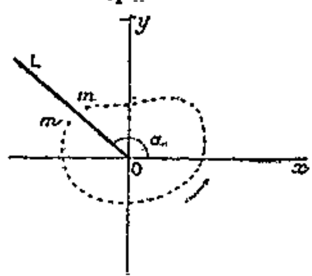
Следовательно, когда переменное z описывает вокруг начала координат в прямом направлении замкнутый путь без двойных точек, то эти m корней замещают друг друга в круговом порядке. Очевидно, что можно перемещать z по такому замкнутому пути, что если начальное значение какого-нибудь корня равно, например, u_0, то его конечное значение будет равно любому из других корней. Следовательно, нельзя, не отказываясь от непрерывности, рассматривать m корней уравнения (5), как m различных функций от z, но на них нужно смотреть, как на m различных в е т в е й одной и той же функции.

Точка z_0, при обходе вокруг которой эти m значений переменного u замещают друг друга, называется к р и т и ч е с к о ю т о ч к о ю или т о ч к о ю р а з в е т в л е н и я многозначной функции.

Чтобы m значений переменного u можно было рассматривать как различные функции от z, нужно нарушить непрерывность этих корней вдоль какой-нибудь бесконечной линии, выходящей из начала координат. Конкретно это нарушение непрерывности можно представить себе следующим образом: проведем на плоскости, на которой изображается z, бесконечный разрез вдоль какой-нибудь полупрямой, выходящей из начала координат, например, вдоль полупрямой OL (черт. 57), и раздвинем немного оба края этого разреза, так чтобы путь, по которому перемещается переменное, не мог перейти с одного края на другой.

При этих условиях никакой замкнутый путь не может окружать начала координат; поэтому каждому значению z будет соответствовать вполне определенное значение каждого из m корней u_i, которое получим, взяв для аргумента ω значение, заключающееся между α и $\alpha-2\pi$. Но должно заметить, что значения корня u_i в двух бесконечно-близких точках m, m', лежащих по обе стороны разреза, не будут между собою равны. Значение корня u_i в точке m' равно значению корня u_i в точке m, умноженному на

Черт. 57.



$$\left(\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}\right).$$

Каждый из корней уравнения (5) есть моногенная функция. Пусть будет u_0 значение одного из этих корней при данном значении z_0; значению z, близкому к z_0, соответствует значение u, близкое к u_0. Вместо того, чтобы искать предел отношения $\frac{u-u_0}{z-z_0}$, можно искать предел обратного отношения

$$\frac{z-z_0}{u-u_0}=\frac{u^m-u_0^m}{u-u_0}.$$

Этот предел равен mu_0^{m-1}; следовательно, для производной от u мы имеем выражение

$$u'=\frac{1}{m}\frac{1}{u^{m-1}}=\frac{1}{m}\frac{u}{z};$$

вводя отрицательные показатели, мы можем представить иначе последнее равенство в виде

$$u=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1};$$

но чтобы иметь вполне определенное значение производной, соответствующее какому-либо из корней, лучше взять выражение $\frac{1}{m}\frac{u}{z}$. Внутри замкнутой линии, не окружающей начала координат, каждое из значений $\sqrt[m]{z}$ есть голоморфная функция от z. Уравнение $w^m = A(z-a)$ имеет также m корней, которые замещают друг друга в круговом порядке вокруг критической точки $z=a$.

Рассмотрим еще уравнение

$$u^2 = A(z-e_1)(z-e_2)\dots(z-e_n), \tag{7}$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ — n различных количеств. Обозначим теми же буквами точки, которые представляют эти n количеств. Положим

$$A = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$z - e_k = \rho_k(\cos\omega_k + i\sin\omega_k)\quad (k=1, 2, \dots, n),$$
$$u = r(\cos\theta + i\sin\theta);$$

ω_k представляет угол, образуемый направлением $e_k z$ от точки e_k до точки z с направлением Ox. Из уравнения (7) получаем

$$r^2 = R\rho_1\rho_2\dots\rho_n,\quad 2\theta = \alpha + \omega_1 + \dots + \omega_n + 2m\pi;$$

следовательно, это уравнение имеет два различных корня

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= (R\rho_1\rho_2\dots\rho_n)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\omega_1+\dots+\omega_n}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + i\sin\left(\frac{\alpha+\omega_1+\dots+\omega_n}{2}\right)\right],\\
u_2 &= (R\rho_1\rho_2\dots\rho_n)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\omega_1+\dots+\omega_n+2\pi}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + i\sin\left(\frac{\alpha+\omega_1+\dots+\omega_n+2\pi}{2}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

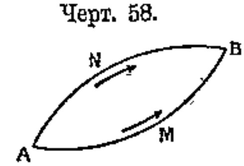
Когда переменное z описывает замкнутый путь C, содержащий внутри себя p из числа точек $e_1, e_2, \dots, e_n$, то p из аргументов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ возрастают на 2π; следовательно, аргументы корней u_1 и u_2 возрастают на $p\pi$. Если p — число четное, то оба корня принимают после обхода свои начальные значения; если же p — нечетное, то они взаимно перемещаются. В частности, если контур содержит внутри одну точку e_i, то оба корня перемещаются. Таким образом, n точек e_i суть точки разветвления. Чтобы оба корня u_1 и u_2 оставались вполне определенными функциями от z, достаточно провести систему разрезов таким образом, чтобы любая замкнутая линия содержала внутри себя всегда только четное число критических точек. Например, можно провести бесконечные разрезы вдоль полупрямых, выходящих из каждой точки e_i, так, чтобы эти разрезы не пересекались между собою. Но можно поступать и различными другими способами. Например, если есть только четыре критических точки e_1, e_2, e_3, e_4, то можно провести один разрез вдоль прямолинейного отрезка e_1e_2, а второй разрез — вдоль отрезка e_3e_4.

265. Функции однозначные и многозначные. — Рассмотренные нами элементарные примеры выясняют один важный факт. Значение функции $f(z)$ переменного z не всегда зависит единственно от значения переменного z, но оно может также в некоторой степени зависеть от закона следования значений, принимаемых переменным при переходе от начального значения к конечному значению, или, другими словами, от пути, описываемого переменным.

Возвратимся, например, к функции $\sqrt[m]{z}$. Если мы пойдем из точки M_0 к точке M по путям M_0NM и M_0PM (черт. 55[а]), взяв в обоих случаях для u одно и то же начальное значение, то в M мы не получим в обоих случаях для u одного и того же значения, так как получающиеся значения для аргумента переменного z будут разниться между собою на 2π. Таким образом, мы приходим к введению нового подразделения функций.

Аналитическая функция $f(z)$ называется однозначною, или монодромною в области A, если все пути, лежащие в A и соединяющие точку z_0 с какою-нибудь точкою z, приводят к одному и тому же конечному значению для $f(z)$. Если же конечное значение функции $f(z)$ не будет одинаково для всех возможных путей, то функция называется многозначною. Функция, голоморфная в области A, необходимо однозначна в этой области. Вообще, чтобы функция $f(z)$ была однозначною в данной области, необходимо и достаточно, чтобы любой замкнутый путь, описываемый переменным, возвращал функцию к ее начальному значению. В самом деле, если, переходя из точки A в точку B по путям AMB и ANB (черт. 58), мы в обоих случаях приходим в точку B с одним и тем же значением для $f(z)$, то очевидно, что, перемещая переменное по замкнутому контуру $AMBNA$, мы вернемся в точку A с начальным значением для $f(z)$.

Черт. 58.



Обратно, предположим, что, перемещая переменное z по контуру $AMBNA$, мы возвращаемся в исходную точку с начальным значением u_0; пусть будет u_1 значение функции в точке B, после того как z описало путь AMB. Когда z описывает путь BNA, то функция, выходя от значения u_1, приходит к значению u_0; следовательно, обратный путь ANB приведет функцию от значения u_0, к значению u_1, т. е. к тому же значению, как и путь AMB.

Следует заметить, что функция может быть многозначною в области, и не имея в этой области критических точек. В самом деле, рассмотрим часть плоскости между двумя концентрическими окружностями C и C' с центром в начале координат. Функция $u = z^{\frac{1}{m}}$ не имеет ни одной критической точки в этой области; однако, она не однозначна, так как, после обхода переменного z по концентрической окружности, заключающейся между C и C', функция $z^{\frac{1}{m}}$ получает множитель

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

II.—Целые ряды с мнимыми членами. Простейшие трансцендентные функции.

266. Круг сходимости.—Рассуждения, которыми мы пользовались при изучении целых рядов (т. I, гл. IX), непосредственно распространяются и на целые ряды с мнимыми членами; для этого достаточно только заменить слова абсолютное значение словом модуль. Напомним вкратце относящиеся сюда теоремы и результаты. Пусть будет

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{9}$$

целый ряд, в котором коэффициенты и переменное могут иметь любые мнимые значения. Рассмотрим вместе с тем ряд, составленный из модулей,

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_n r^n + \ldots, \tag{10}$$

где $A_i = |a_i|$, $r = |z|$; выше было доказано (т. I, § 177), что есть такое положительное число R, что ряд (10) будет сходящимся при всяком значении $r < R$ и расходящимся при всяком значении $r > R$. Это число R равно обратному значению наибольшего из пределов членов последовательности

$$A_1,\ \sqrt{A_2},\ \sqrt[3]{A_3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{A_n},\ \ldots,$$

и, в частности, может быть нулем или бесконечностью.

Из этих свойств числа R непосредственно следует, что ряд (9) будет абсолютно сходящимся, если $|z| < R$. Ряд (9) не может быть сходящимся при значении z_0 количества z, если $|z_0| > R$, так как в этом случае ряд модулей (10) был бы сходящимся при значениях $r > R$ (т. I, § 177). Если в плоскости переменного z мы опишем круг C радиусом R и с центром в начале координат (черт. 59), то целый ряд (9) будет абсолютно сходящимся для всякой точки внутри круга C и расходящимся для всякой внешней точки; отсюда круг C получил название круга сходимости. В точках на самой окружности

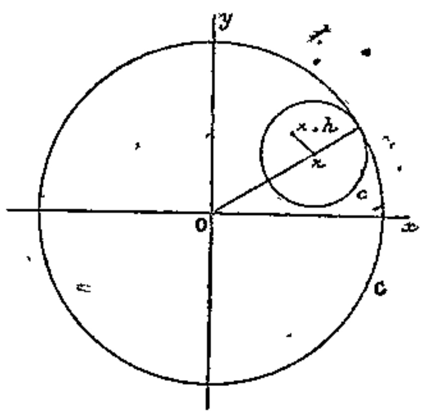
C ряд может быть сходящимся или расходящимся в зависимости от свойств данного ряда [1]).

Внутри круга C', концентрического с первым и с радиусом $R' < R$, ряд (9) — равномерно сходящийся. В самом деле, очевидно, что для всякой точки внутри круга C мы имеем

$$|a_{n+1}z^{n+1} + \ldots + a_{n+p}z^{n+p}| < A_{n+1}R'^{n+1} + \ldots + A_{n+p}R'^{n+p},$$

и мы можем выбрать число n настолько большим, чтобы при всяком значении числа p правая часть была меньше любого данного положительного числа ε. Отсюда следует, что сумма ряда (9) есть функция $f(z)$ переменного z, непрерывная во всех точках внутри круга сходимости (§ 260).

Черт. 59.



Дифференцируя ряд (9) почленно любое число раз, мы получим неограниченное число целых рядов $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$, имеющих круг сходимости общий с первым рядом (т. I, § 179). Как и выше (т. I, § 179), можно доказать, что $f_1(z)$ есть производная от $f(z)$, и вообще, $f_n(z)$ есть производная от $f_{n-1}(z)$. Следовательно, **всякий целый ряд есть голоморфная функция внутри круга сходимости**. Последовательность производных этих функций неограничена, и все эти производные суть также голоморфные функции в том же самом круге.

Рассмотрим точку z внутри круга C; опишем из этой точки, как из центра, круг c, касающийся изнутри круга C, и возьмем внутри c точку $z+h$; если r и ρ будут модули количеств z и h, то $r + \rho < R$

---

1) Пусть будет $f(z) = \Sigma a_n z^n$ целый ряд, радиус сходимости которого R равен 1. Если коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — положительные убывающие числа, причем, при неограниченном возрастании n, a_n стремится к нулю, то ряд — сходящийся во всех точках на круге сходимости, кроме, может быть, точки $z = 1$. В самом деле, ряд Σz^n, где $|z| = 1$, — неопределенный, кроме случая $z = 1$, так как модуль суммы его n первых членов меньше $\dfrac{2}{|1-z|}$; следовательно, для доказательства предыдущего предложения достаточно применить рассуждение § 166, основываясь на обобщенной лемме Абеля. Точно так же ряд $a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - \ldots$, получающийся из предыдущего через замену z на $-z$, — сходящийся во всех точках круга $|z| = 1$, кроме, может быть, при $z = -1$ (см. § 166).

(черт. 59). Сумма ряда $f(z+h)$ равна сумме следующего ряда с двойным входом, составленной по столбцам,

$$\left.\begin{array}{r} a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \\ +a_1h+2a_2zh+\ldots+na_nz^{n-1}h+\ldots \\ +a_2h^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}a_nz^{n-2}h^2+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (11)$$

Но этот ряд—абсолютно сходящийся, так как если мы заменим каждый член его модулем, то получим двойной ряд с положительными членами, сумма которого равна

$$A_0+A_1(r+\rho)+\ldots+A_n(r+\rho)^n+\ldots$$

Следовательно, можно составлять сумму двойного ряда (11) по строкам. Таким образом, для всякой точки $z+h$ внутри круга c мы имеем соотношение

$$f(z+h)=f(z)+hf_1(z)+\frac{h^2}{1.2}f_2(z)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f_n(z)+\ldots \quad (12)$$

Ряд в правой части—наверное сходящийся, если модуль $|h|<R-r$, но он может быть сходящимся и в более широком промежутке. Так как функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ равны последовательным производным от $f(z)$, то формула (12) тождественна с формулою Тэйлора.

Если ряд (9) — сходящийся в точке Z на круге сходимости, то сумма $f(Z)$ ряда есть предел, к которому стремится сумма $f(z)$, когда точка z стремится к точке Z, оставаясь на радиусе, проходящем через точку Z. Это предложение можно доказать, как в § 178 (т. I), полагая $z=\theta Z$ и увеличивая θ от 0 до 1. Теорема будет верна и в том случае, когда z, оставаясь все время внутри круга, стремится к точке Z *вдоль кривой, не касающейся в точке Z круга сходимости*[1]).

Если радиус R равен бесконечности, то круг сходимости охватывает всю плоскость, и функция $f(z)$ будет голоморфною при всяком значении z. Такая функция называется *целою функциею*; изучение этих трансцендентных составляет одну из наиболее важных задач Анализа. В следующих параграфах мы изучим простейшие основные трансцендентные функции.

267. Ряды рядов. — Рассмотрим целый ряд (9) с произвольными коэффициентами; целый ряд $\Sigma\alpha_nz^n$, все коэффициенты которого действительны и положительны, называется *усиливающим* для первого, если при всяком значении n мы имеем $|a_n|\leq\alpha_n$. Все следствия, выведенные из употребления усиливающих функций (т. I, §§ 181—186), применимы без изменения к случаю мнимых переменных. Мы укажем здесь другое применение усиливающих рядов.

---

[1]) См. Пикар, *Traité d'Analyse*, 1905, т. II, стр. 77.

Пусть будет

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots, \tag{13}$$

ряд, каждый член которого в свою очередь есть сумма целого ряда, сходящегося в круге, радиус которого равен или больше числа $R>0$,

$$f_i(z)=a_{i0}+a_{i1}z+\ldots+a_{in}z^n+\ldots.$$

Предположим, что каждый член ряда (13) заменен своим разложением по степеням z; мы получим двойной ряд, каждый столбец которого образован разложением функции $f_i(z)$. Если этот ряд — абсолютно сходящийся при значении z с модулем ρ, т.-е. если двойной ряд $\sum\limits_i\sum\limits_n|a_{in}|\rho^n$ — сходящийся, то при всяком значении z, модуль которого не превосходит ρ, можно составить сумму первого двойного ряда по строкам, и мы получим разложение суммы $F(z)$ ряда (13) по степеням z

$$F(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n+\ldots,$$
$$b_n=a_{0n}+a_{1n}+\ldots+a_{in}+\ldots\ (n=0,1,2,\ldots).$$

В сущности, это — тот же способ рассуждения, с помощью которого получается разложение $f(z+h)$ по степеням h.

Предположим, например, что ряд $f_i(z)$ имеет усиливающую функцию вида $\frac{M_i r}{r-z}$, и ряд ΣM_i — сходящийся. В ряде с двойным входом модуль общего члена меньше $M_i\frac{|z|^n}{r^n}$. Всякий раз, когда $|z|<r$, этот ряд — абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из его модулей, — сходящийся, и имеет сумму, меньшую $\frac{r\Sigma M_i}{r-|z|}$.

268. Показательная функция. — Очевидно, что арифметическое определение показательной функции не имеет никакого смысла, если показатель — мнимый. Следовательно, чтобы обобщить определение показательной функции, необходимо исходить из такого ее свойства, которое можно распространить на случай комплексного переменного. Мы примем за основание свойство, выражаемое функциональным соотношением $a^x\times a^{x'}=a^{x+x'}$. Определим целый ряд $f(z)$, сходящийся в круге с радиусом R и удовлетворяющий условию

$$f(z+z')=f(z)\,f(z'), \tag{14}$$

когда модули количеств z, z', $z+z'$ меньше R; последнее наверное будет иметь место, если $|z|$ и $|z'|$ меньше $\frac{R}{2}$. Если мы положим в предыдущем соотношении $z'=0$, то будем иметь

$$f(z)=f(z)\,f(0);$$

следовательно, должно быть $f(0)=1$. Представим искомый ряд в виде

$$f(z)=1+\frac{a_1}{1}z+\frac{a_2}{1.2}z^2+\ldots+\frac{a_n}{1.2\ldots n}z^n+\ldots$$

Заменим последовательно в этом ряде z через λt, затем через $\lambda' t$, где λ и λ'—постоянные и t—произвольное переменное, и составим произведение обоих рядов; мы получим

$$f(\lambda t)f(\lambda' t)=1+\frac{a_1}{1}(\lambda+\lambda')t+\ldots$$
$$+\frac{t^n}{1.2\ldots n}(a_n\lambda^n+\frac{n}{1}a_{n-1}a_1\lambda^{n-1}\lambda'+\ldots+a_n\lambda'^n)+\ldots$$

С другой стороны мы имеем

$$f(\lambda t+\lambda' t)=1+\frac{a_1}{1}(\lambda+\lambda')t+\ldots+\frac{a_n}{1.2\ldots n}(\lambda+\lambda')^n t^n+\ldots$$

Равенство $f(\lambda t+\lambda' t)=f(\lambda t)f(\lambda' t)$ должно иметь место при всех значениях λ, λ', t, удовлетворяющих неравенствам $|\lambda|<1$, $|\lambda'|<1$, $|t|<\frac{R}{2}$; следовательно, оба ряда должны быть тождественны между собою, т. е. должно быть

$$a_n(\lambda+\lambda')^n=a_n\lambda^n+\frac{n}{1}a_{n-1}a_1\lambda^{n-1}\lambda'+\frac{n(n-1)}{1.2}a_{n-2}a_2\lambda^{n-2}\lambda'^2+\ldots+a_n\lambda'^n.$$

Отсюда вытекают соотношения $a_n=a_{n-1}a_1$, $a_n=a_{n-2}a_2$, . . . ; их можно соединить в единственное условие

$$a_{p+q}=a_p a_q, \tag{15}$$

где p и q—любые целые положительные числа.

Чтобы найти отсюда общее решение, предположим, что $q=1$, и положим последовательно $p=1$, $p=2$, $p=3,\ldots$; мы получим $a_2=a_1{}^2$, далее, $a_3=a_2a_1=a_1{}^3\ldots$, и, наконец, $a_n=a_1{}^n$.

Легко видеть, что полученные таким образом выражения вполне удовлетворяют условиям (15), и, следовательно, искомый ряд имеет вид

$$f(z)=1+\frac{a_1z}{1}+\frac{(a_1z)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(a_1z)^n}{1.2\ldots n}+\ldots;$$

этот ряд — сходящийся во всей плоскости, и соотношение

$$f(z+z')=f(z)\,f(z')$$

удовлетворяется при всех значениях z и z'.

Предыдущий ряд зависит от произвольного постоянного a_1; обозначим функцию, соответствующую $a_1=1$, через e^z:

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots+\frac{z^n}{1.2\ldots n}+\ldots;$$

гда общее решение предложенной задачи будет $e^{a}.Z$

Если z имеет действительное значение x, то целая функция e^z совпадает с известною из Алгебры показательной функцией e^x, и мы имеем, при всяких z и z', $e^{z+z'}=e^z\times e^{z'}$.

Производная от функции e^z равна этой же функции. На основании формулы сложения (14) имеем

$$e^{x+yi}=e^xe^{yi};$$

отсюда, чтобы вычислить e^z, когда z имеет мнимое значение $x+yi$, достаточно уметь вычислять e^{yi}. Собирая вместе члены одинаковой четности, мы можем представить разложение e^{yi} в виде

$$e^{yi}=1-\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}-\ldots+i\left(\frac{y}{1}-\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right);$$

мы видим, что в правой части находится разложение $\cos y$ и $\sin y$, и мы имеем, *при действительном* y,

$$e^{yi}=\cos y+i\sin y.$$

Заменяя в предыдущей формуле e^{yi} найденным выражением, получим

$$e^{x+yi}=e^x(\cos y+i\sin y); \tag{16}$$

функция e^{x+yi} *имеет модуль* e^x *и аргумент* y.

Из этой формулы видно важное свойство функции e^z; если мы заменим z через $z+2\pi i$, то x не изменится, а y получит приращение 2π, что не изменяет значения правой части формулы (16). Следовательно, $e^{z+2\pi i}=e^z$; *показательная функция* e^z *имеет период* $2\pi i$.

Решим уравнение $e^z=A$, где A—какое-нибудь мнимое количество, отличное от нуля. Пусть будут ρ и ω модуль и аргумент количества A; мы имеем

$$e^{x+yi}=e^x(\cos y+i\sin y)=\rho(\cos\omega+i\sin\omega);$$

отсюда:

$$e^x=\rho,\ y=\omega+2k\pi.$$

Из первого соотношения получим $x=\log\rho$, причем знак log обозначает всегда неперов логарифм от положительного числа; что касается y, то оно имеет бесконечное множество значений, разнящихся между собою на кратное 2π. Если $A=0$, то уравнение $e^z=0$ невозможно. Следовательно, *уравнение* $e^z=A$, *где* A *отлично от нуля, имеет бесконечное множество корней, заключающихся в формуле* $\log\rho+i(\omega+2k\pi)$; *уравнение* $e^z=0$ *не имеет ни одного корня, действительного, или мнимого.*

Примечание. — Можно было бы также определить e^z, как предел многочлена $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ при неограниченном возрастании m. Метод, которым пользуются в алгебре для доказательства, что этот многочлен имеет пределом ряд e^z, применим также и для мнимых значений z.

269. Круговые (тригонометрические) функции. — Чтобы определить $\sin z$ и $\cos z$ для мнимых значений z, мы распространим непосредственно на мнимые значения целые ряды, выведенные для действительного переменного; положим при z мнимом

$$\left.\begin{aligned}\sin z &= \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,\\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots,\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Функции (17) суть целые трансцендентные функции, к которым приложимы все свойства круговых (тригонометрических) функций. Так, из формул (17) видно, что производная от $\sin z$ есть $\cos z$, производная от $\cos z$ есть $-\sin z$; при замене z через $-z$ функция $\sin z$ изменяется в $-\sin z$, тогда как $\cos z$ не меняется.

Эти новые трансцендентные функции приводятся к показательной функции. В самом деле, рассмотрим разложение e^{zi} и соберем вместе члены одинаковой четности

$$e^{zi} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots + i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\right);$$

на основании формул (17), последнее равенство можно представить в виде

$$e^{zi} = \cos z + i\sin z.$$

Изменяя z в $-z$, получим также

$$e^{-zi} = \cos z - i\sin z;$$

из этих двух соотношений найдем обратно

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \qquad (18)$$

Это—известные формулы Эйлера, приводящие круговые функции к показательной. Из них видна периодичность этих функций, так как правые части соотношений (18) не изменяются при изменении z в $z + 2\pi$. Возводя формулы (18) в квадрат и складывая, получим

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Возьмем еще формулу сложения $e^{(z+z')i} = e^{zi}e^{z'i}$, или

$$\begin{aligned}&\cos(z + z') + i\sin(z + z')\\ &= (\cos z + i\sin z)(\cos z' + i\sin z')\\ &= (\cos z\cos z' - \sin z\sin z') + i(\sin z\cos z' + \cos z\sin z');\end{aligned}$$

изменяя в этой формуле z в $-z$ и z' в $-z'$, получим

$$\cos(z+z')-i\sin(z+z')$$
$$=(\cos z\cos z'-\sin z\sin z')-i(\sin z\cos z'+\cos z\sin z');$$

из этих обеих формул имеем

$$\cos(z+z')=\cos z\cos z'-\sin z\sin z',$$
$$\sin(z+z')=\sin z\cos z'+\cos z\sin z'.$$

Следовательно, формулы сложения тригонометрических функций, а также все следствия этих формул, распространяются и на случай мнимых аргументов. Вычислим, например, действительную часть и коэффициент при i в $\cos(x+yi)$ и $\sin(x+yi)$. Мы прежде всего имеем, по формулам Эйлера,

$$\cos yi=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\cosh yp\, y,$$
$$\sin yi=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\sinh yp\, y;$$

затем из формул сложения получаем

$$\cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi=\cos x\cosh yp\, y-i\sin x\sinh yp\, y,$$
$$\sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi=\sin x\cosh yp\, y+i\cos y\sinh yp\, y.$$

Остальные круговые функции приводятся к предыдущим. Например, мы имеем

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}};$$

это можно представить иначе в виде

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1}.$$

Правая часть есть рациональная функция от e^{2zi}; следовательно, $\operatorname{tg} z$ имеет период π.

270. Логарифмы.—Если дано мнимое количество z, отличное от нуля, то, как мы видели выше (§ 268), уравнение $e^u=z$ имеет бесконечное множество корней. Пусть будет $u=x+iy$; если ρ и ω обозначают модуль и аргумент количества z, то должно быть

$$e^x=\rho,\quad y=\omega+2k\pi.$$

Каждый из этих корней называется л о г а р и ф м о м от z; его обозначают через $\operatorname{Log}(z)$. Следовательно, мы имеем

$$\operatorname{Log}(z)=\log\rho+i(\omega+2k\pi),$$

причем знак log обозначает обыкновенный неперов логарифм от положительного числа. Таким образом, всякое действительное или мнимое количество, отличное от нуля, имеет бесконечное множество логарифмов, образующих арифметическую прогрессию с разностью $2\pi i$. В частности, если z есть действительное положительное число x, то $\omega=0$, и, взяв $k=0$, мы получим обыкновенный логарифм; но, кроме него, логарифм имеет еще бесконечное множество мнимых значений вида $\log x+2k\pi i$. Если z — число действительное и отрицательное, то можно взять $\omega=\pi$; в этом случае все значения логарифма—мнимые.

Пусть будет z' другое мнимое количество с модулем ρ' и аргументом ω'. Мы имеем

$$\mathrm{Log}(z')=\log\rho'+i(\omega'+2k'\pi);$$

складывая оба логарифма, получим

$$\mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(z')=\log\rho\rho'+i[\omega+\omega'+2(k+k')\pi].$$

Так как $\rho\rho'$ равно модулю количества zz', а $\omega+\omega'$ — его аргументу, то эту формулу можно представить также в виде

$$\mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(z')=\mathrm{Log}(zz');$$

отсюда видно, что, складывая какое-нибудь из значений $\mathrm{Log}(z)$, с каким-нибудь из значений $\mathrm{Log}(z')$ мы получим в сумме одно из значений $\mathrm{Log}(zz')$.

Предположим теперь, что переменное z описывает в своей плоскости какой-нибудь непрерывный путь, не проходящий через начало координат; вдоль этого пути ρ и ω изменяются непрерывно, то же имеет место и для различных значений логарифма. Но если z описывает замкнутый путь, то могут представиться два существенно различных случая. Если z, выйдя из точки z_0, возвращается в эту точку, описав замкнутый путь, не содержащий внутри себя начала координат, то аргумент ω количества z принимает свое начальное значение, и различные значения логарифма возвращаются соответственно к своим начальным значениям. Если бы мы представили каждое значение логарифма точкою, то каждая из этих точек описала бы замкнутую линию. Напротив, если переменное z описывает замкнутый путь вида M_0NMP (черт. 55[в]), то аргумент количества z возрастает на 2π, и каждое значение логарифма приходит к своему начальному значению, увеличенному на $2\pi i$.

Вообще, если z описывает какой-нибудь замкнутый путь, то конечное значение логарифма равно его начальному значению, сложенному с $2k\pi i$, где k есть целое положительное или отрицательное число; это число равно алгебраической сумме полных оборотов, сделанных радиусом-вектором, соединяющим начало координат с точкою z, в то время, когда z описывает свой замкнутый путь. Таким образом, если не наложено никаких ограничений на изменение переменного z, то нельзя рассматривать различные значения $\mathrm{Log}(z)$, как несколько различных функций от z, так как можно перейти непрерывно от одного из этих значений к другому. Это—различные ветви одной и той же функции, переходящие одна в другую при обходе около критической точки $z=0$.

Внутри площади, ограниченной одною замкнутою линиею и не содержащей начала координат, каждое из значений $\mathrm{Log}(z)$ есть непрерывная и однозначная функция от z. Чтобы доказать, что эта функция голоморфна, достаточно показать, что она имеет в каждой точке единственную производную. Пусть будут z и z_1 близкие между собою значения переменного, и $\mathrm{Log}(z)$ и $\mathrm{Log}(z_1)$ — близкие значения выбранного значения логарифма; когда z_1 стремится к z, то модуль разности $\mathrm{Log}(z_1)-\mathrm{Log}(z)$ стремится к нулю. Положим $\mathrm{Log}(z)=u$, $\mathrm{Log}(z_1)=u_1$; мы имеем

$$\frac{\mathrm{Log}(z_1)-\mathrm{Log}(z)}{z_1-z}=\frac{u_1-u}{e^{u_1}-e^{u}};$$

но при приближении u_1 к u частное $\frac{e^{u_1}-e^{u}}{u_1-u}$ имеет пределом производную от e^u, т.-е. e^u, или z. Следовательно, логарифм имеет в каждой точке единственную производную, равную $\frac{1}{z}$.

Вообще, $\mathrm{Log}(z-a)$ имеет бесконечное множество значений, замещающих друг друга при обходе вокруг критической точки $z=a$; производная этой функции равна $\frac{1}{z-a}$.

Функция z^m, где m—любое число, действительное или комплексное, определяется при помощи равенства

$$z^m=e^{m\mathrm{Log}(z)}.$$

Если m не есть действительное рациональное число, то эта функция, подобно логарифму, имеет бесконечное множество значений, замещающих друг друга при обходе переменного z вокруг точки $z=0$. Достаточно провести бесконечный разрез вдоль полупрямой, выходящей из начала координат, чтобы каждая ветвь этой функции была голоморфною функциею во всей плоскости. Производная этой функции имеет выражение

$$\frac{m}{z}e^{m\mathrm{Log}(z)}=mz^{m-1};$$

очевидно, что следует брать одинаковые значения для аргумента количества z как в функции, так и в ее производной.

271. Обратные функции: arcsin$z$, arctg$z$. — Функции, обратные функциям sin$z$, cos$z$, tg$z$, определяются аналогичным приемом. Так, функция $u=\arcsin z$ определяется соотношением

$$z=\sin u;$$

чтобы решить это уравнение относительно u, представим его в виде

$$z=\frac{e^{ui}-e^{-ui}}{2i}=\frac{e^{2ui}-1}{2ie^{ui}}.$$

Вводя вспомогательное неизвестное $U=e^{ui}$, получим отсюда для U уравнение второй степени

$$U^2-2izU-1=0. \tag{19}$$

Из этого уравнения находим

$$U=iz\pm\sqrt{1-z^2}, \tag{20}$$

и, следовательно,

$$u=\arcsin z=\frac{1}{i}\operatorname{Log}(iz\pm\sqrt{1-z^2}). \tag{21}$$

Таким образом, уравнение $z=\sin u$ имеет два ряда корней, происходящих с одной стороны от двух значений корня $\sqrt{1-z^2}$, с другой стороны — от бесконечного числа значений логарифма. Но если известно одно из этих значений, то из него легко вывести все остальные. Пусть будут $U'=\rho' e^{i\omega'}$ и $U''=\rho'' e^{i\omega''}$ корни уравнения (19); эти два корня связаны соотношением $U'U''=-1$; следовательно, $\rho'\rho''=1$, $\omega'+\omega''=(2n+1)\pi$. Очевидно, что мы можем предположить $\omega''=\pi-\omega'$, и тогда будем иметь

$$\operatorname{Log}(U')=\log\rho'+i(\omega'+2k'\pi),$$
$$\operatorname{Log}(U'')=-\log\rho'+i(\pi-\omega'+2k''\pi).$$

Следовательно, все значения arcsin$z$ содержатся в одной из двух формул

$$\arcsin z=\omega'+2k'\pi-i\log\rho',\quad \arcsin z=\pi+2k''\pi-\omega'+i\log\rho';$$

полагая $u'=\omega'-i\log\rho'$, мы можем представить предыдущие равенства в виде

$$\arcsin z=u'+2k'\pi, \tag{A}$$
$$\arcsin z=(2k''+1)\pi-u'. \tag{B}$$

Если переменное z описывает непрерывный путь, то различные значения логарифма в формуле (21) изменяются, вообще, непрерывно. Действительно, единственными возможными критическими точками являются точки $z=\pm1$, вокруг которых оба значения корня $\sqrt{1-z^2}$

взаимно перемещаются, так как количество $iz \pm \sqrt{1-z^2}$ не обращается в нуль ни при каких значениях z, так как, возводя в квадрат обе части уравнения $iz = \pm\sqrt{1-z^2}$, получим $1=0$.

Проведем два разреза вдоль действительной оси, один—от точки $-\infty$ до точки -1, и другой—от точки $+1$ до $+\infty$. Если путь, описываемый переменным, не может переходить через эти разрезы, то различные значения $\arcsin z$ суть однозначные функции переменного z. В самом деле, если переменное z описывает замкнутый путь, не переходящий ни через один из этих разрезов, то оба корня U', U'' уравнения (19) описывают также замкнутые пути. Ни один из этих путей не окружает начала координат; если бы путь, описываемый, например, корнем U', окружал начало координат, то этот путь пересекал бы ось Oy по крайней мере один раз в точке, лежащей над осью Ox. Но в силу соотношения (19), значению корня U вида $ia\,(a>0)$ соответствует для переменного z значение $\frac{1+a^2}{2a}$, действительное и бо́льшее единицы. Следовательно, путь, проходимый точкою z, должен был бы переходить через разрез между точками $+1$ и $+\infty$.

Далее, различные значения $\arcsin z$ суть голоморфные функции переменного z [1]). В самом деле, пусть будут u и u_1 близкие между собою значения $\arcsin z$, соответствующие близким значениям z и z_1 переменного. Мы имеем

$$\frac{u_1-u}{z_1-z}=\frac{u_1-u}{\sin u_1-\sin u};$$

при приближении модуля разности u_1-u к нулю, правая часть предыдущего равенства имеет пределом $\frac{1}{\cos u}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1-z^2}}$. Два значения производной соответствуют двум рядам значений (A) и (B) функции $\arcsin z$.

Если на изменение переменного z не наложено никаких ограничений, то можно перейти от данного начального значения $\arcsin z$

---

[1]) Если мы возьмем в $U=iz+\sqrt{1-z^2}$ то значение корня, которое при $z=0$ обращается в $+1$, то действительная часть U остается положительною, если переменное z не переходит через разрезы, и можно положить $U=Re^{i\Phi}$, где Φ заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Соответствующее значение количества $\frac{1}{i}\operatorname{Log}(U)$

$$\arcsin z=\frac{1}{i}\operatorname{Log}(U)=\Phi-i\log R$$

называется иногда **главным** значением $\arcsin z$; оно приводится к обыкновенному значению arc sinus'a если z — действительное и заключается между -1 и $+1$.

к любому из значений, заставляя переменное z перемещаться по соответственно выбранному замкнутому пути. В самом деле, прежде всего очевидно, что если z описывает вокруг точки $z=1$ замкнутый путь, не заключающий внутри себя точки $z=-1$, то оба значения корня $\sqrt{1-z^2}$ взаимно переставляются, и мы переходим от значения ряда (A) к значению ряда (B). Предположим затем, что мы перемещаем z по окружности с радиусом R, бо́льшим единицы, и с центром в начале координат; тогда обе точки U', U'' описывают замкнутые пути. В силу уравнения (19) точке $z=+R$ соответствуют два значения U, именно $U'=i\alpha$, $U''=i\beta$, где α и β — положительны; в силу того же уравнения точке $z=-R$ соответствуют значения $U'=-i\alpha'$, $U''=-i\beta'$, где α' и β'—также положительны. Следовательно, замкнутые пути, описываемые каждою из точек U', U'', пересекают ось Oy в двух точках, расположенных по обе стороны точки O; каждое из значений $\operatorname{Log}(U')$, $\operatorname{Log}(U'')$ возрастает или уменьшается на $2\pi i$.

Таким же образом, функция $\operatorname{arc\,tg} z$ определяется при помощи соотношения $\operatorname{tg} u = z$, или

$$z=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2ui}-1}{e^{2ui}+1};$$

отсюда имеем

$$e^{2ui}=\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{i-z}{i+z},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{arc\,tg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right).$$

Из этого выражения видно, что $\operatorname{arc\,tg} z$ имеет две критических логарифмических точки $\pm i$. Если переменное z перемещается вокруг одной из этих точек, то $\operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ возрастает или убывает на $2\pi i$, а $\operatorname{arc\,tg} z$ возрастает или убывает на π.

272. Приложение к интегральному исчислению.—Производные от определенных выше функций комплексного переменного имеют те же выражения, как и в случае действительного переменного. Обратно, правила нахождения начальных функций распространяются также и на простейшие функции комплексных переменных. Так, обозначая через $\int f(z)\,dz$ всякую функцию комплексного переменного z, производная которой равна $f(z)$, будем иметь

$$\int\frac{A\,dz}{(z-a)^m}=-\frac{A}{m-1}\,\frac{1}{(z-a)^{m-1}}\quad(m>1),$$

$$\int\frac{A\,dz}{z-a}=A\operatorname{Log}(z-a).$$

При помощи этих двух формул можно найти начальную функцию от любой рациональной функции с действительными или мнимыми коэффициентами; нужно только знать корни знаменателя.

В частности, рассмотрим рациональную функцию действительного переменного x с действительными коэффициентами. Если знаменатель имеет мнимые корни, то они будут попарно сопряженными и одинаковой кратности. Пусть будут $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ сопряженные корни кратности p. Если, при разложении на простые дроби, мы будем поступать с мнимыми корнями так же, как с действительными, то корень $\alpha+\beta i$ даст ряд простых дробей

$$\frac{M_1+N_1 i}{x-\alpha-\beta i}+\frac{M_2+N_2 i}{(x-\alpha-\beta i)^2}+\ldots+\frac{M_p+N_p i}{(x-\alpha-\beta i)^p};$$

корень $\alpha-\beta i$ даст такой же ряд, в котором числители будут сопряженными с числителями предыдущего ряда. Соберем в начальной функции члены, происходящие от сопряженных дробей; мы имеем при $p>1$

$$\int\frac{M_p+N_p i}{(x-\alpha-\beta i)^p}\,dx+\int\frac{M_p-N_p i}{(x-\alpha+\beta i)^p}\,dx$$

$$=-\frac{1}{p-1}\left[\frac{M_p+N_p i}{(x-\alpha-\beta i)^{p-1}}+\frac{M_p-N_p i}{(x-\alpha+\beta i)^{p-1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{p-1}\,\frac{(M_p+N_p i)(x-\alpha+\beta i)^{p-1}+\ldots}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}},$$

причем, очевидно, числитель представляет сумму двух сопряженных мнимых многочленов.

Если $p=1$, то

$$\int\frac{M_1+N_1 i}{x-\alpha-\beta i}\,dx+\int\frac{M_1-N_1 i}{x-\alpha+\beta i}\,dx=$$

$$=(M_1+N_1 i)\mathrm{Log}[(x-\alpha)-\beta i]+(M_1-N_1 i)\mathrm{Log}[(x-\alpha)+\beta i].$$

Заменяя логарифмы их выражениями (§§ 270, 271), получим в правой части

$$M_1\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]+2N_1\operatorname{arctg}\frac{\beta}{x-\alpha};$$

достаточно заменить $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{x-\alpha}$ через $\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)$, чтобы притти к результату, который был нами получен ранее, до введения мнимых символов (т. I, § 103).

Рассмотрим еще неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},$$

имеющий два существенно различных вида в зависимости от знака коэффициента A.

Вводя комплексное переменное, можно обе формулы привести к одной; в самом деле, если в формуле

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})$$

мы заменим x через ix, то получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(ix+\sqrt{1-x^2});$$

здесь правая часть представляет как раз $\arcsin x$.

Таким образом, введение в интегральное исчисление мнимых символов позволяет приводить одну к другой такие формулы, связи между которыми мы не могли бы заметить, оставаясь в области действительных количеств. Вот еще пример упрощения от введения мнимых количеств. Мы имеем при a и b действительных

$$\int e^{(a+bi)x}dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos bx + i\sin bx);$$

приравнивая между собою действительные части и коэффициенты при i, мы сразу получаем два уже известных интеграла (т. I, § 119)

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

Интегралы

$$\int x^m e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad \int x^m e^{ax}\sin bx\,dx$$

таким же путем приводятся к интегралу $\int x^m e^{(a+bi)x}\,dx$, который при m целом и положительном нетрудно вычислить последовательным применением интегрирования по частям.

273. Разложение на простые элементы рациональной функции от $\sin z$ **и** $\cos z$. — Пусть будет дана рациональная функция $F(\sin z, \cos z)$ от $\sin z$ и $\cos z$. Заменим в ней $\sin z$ и $\cos z$ их выражениями по формулам Эйлера; тогда функция $F(\sin z, \cos z)$ обратится в рациональную функцию $R(t)$ от $t=e^{zi}$. Разлагая функцию $R(t)$ на простые элементы, мы получим сначала целую часть и затем ряд дробей, происходящих от корней знаменателя функции $R(t)$. Если этот знаменатель имеет корень $t=0$, то мы присоединим к целой части также и дроби, происходящие от этого корня, вследствие чего мы получим или многочлен, или рациональную функцию

$$R_1(t)=\Sigma K_m t^m,$$

где показатель m может иметь и отрицательные значения.

Пусть будет $t=a$ корень знаменателя, отличный от нуля. Этот корень даст сумму простых дробей

$$f(t)=\frac{A_1}{t-a}+\frac{A_2}{(t-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(t-a)^n}.$$

Так как корень a не равен нулю, то уравнение $e^{zi}=a$ имеет корень α; $\frac{1}{t-a}$ выражается весьма просто через $\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\alpha}{2}\right)$. В самом деле, мы имеем

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\alpha}{2}\right)=i\,\frac{e^{zi}+e^{\alpha i}}{e^{zi}-e^{\alpha i}}=i\left(1+\frac{2\,e^{\alpha i}}{e^{zi}-e^{\alpha i}}\right);$$

отсюда, обратно, получаем

$$\frac{1}{t-a}=\frac{1}{e^{zi}-e^{\alpha i}}=-\frac{1}{2e^{\alpha i}}\left[1+i\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\alpha}{2}\right)\right].$$

Таким образом, рациональная функция $f(t)$ обращается в многочлен n-ой степени относительно $\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\alpha}{2}\right)$

$$A_0'+A_1'\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\alpha}{2}\right)+A_2'\operatorname{ctg}^2\left(\frac{z-\alpha}{2}\right)+\ldots$$
$$+A_n'\operatorname{ctg}^n\left(\frac{z-\alpha}{2}\right).$$

В свою очередь, последовательные степени котангенса до n-ой можно выразить через его последовательные производные до $(n-1)$-ой; в самом деле, мы имеем

$$\frac{d\operatorname{ctg}z}{dz}=-\frac{1}{\sin^2 z}=-1-\operatorname{ctg}^2 z;$$

с помощью этой формулы можно выразить $\operatorname{ctg}^2 z$ через $\frac{d\operatorname{ctg}z}{dz}$, и нетрудно доказать, что если этот закон верен для $\operatorname{ctg}^n z$, то он будет также верен и для $\operatorname{ctg}^{n+1}z$. Таким образом, предыдущий многочлен n-ой степени относительно $\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)$ обратится в линейное выражение относительно $\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)$ и его производных

$$M_0+M_1\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)+M_2\frac{d}{dz}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)+\ldots$$
$$+M_n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right).$$

Поступим так же со всеми остальными корнями $b, c, \ldots, l$ знаменателя функции $R(t)$, отличными от нуля, и сложим полученные результаты, заменив предварительно в $R_1(t)$ переменное t через e^{zi}. Рассматриваемая рациональная функция $F(\sin z, \cos z)$ будет состоять из двух частей

$$F(\sin z,\ \cos z)=\Phi(z)+\Psi(z); \tag{22}$$

функция $\Phi(z)$, аналогичная целой части рациональной функции переменного имеет вид

$$\Phi(z)=C+\Sigma\left(\alpha_m\cos mz+\beta_m\sin mz\right), \tag{23}$$

где m — целое число, не равное нулю. Что касается $\Psi(z)$, то она аналогична дробной части рациональной функции и представляется выражением вида

$$\left.\begin{aligned}\Psi(z)=M_1\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)+M_2\frac{d}{dz}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)+\ldots&\\ +M_n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)&\\ +N_1\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\beta}{2}\right)+N_2\frac{d}{dz}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\beta}{2}\right)+\ldots&\\ +N_p\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-\beta}{2}\right)&\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Здесь простым элементом служит функция $\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)$, как для рациональной функции простым элементом служит дробь $\frac{1}{z-a}$.

С помощью такого разложения легко проинтегрировать функцию $F(\sin z,\ \cos z)$; в самом деле, мы имеем

$$\int\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)dz=2\operatorname{Log}\left[\sin\left(\frac{z-a}{2}\right)\right].$$

Остальные члены интегрируются непосредственно. Чтобы начальная функция была периодическою, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты C, M_1, N_1,... были равны нулю.

На практике, чтобы представить функцию $F(\sin z, \cos z)$ в окончательном виде (22) не всегда бывает необходимо проходить через все эти последовательные преобразования. Пусть будет a значение переменного z, обращающее функцию F в бесконечность; простым делением всегда можно вычислить коэффициенты при $\frac{1}{z-a}$, $\frac{1}{(z-a)^2}, \dots$ в части, обращающейся в бесконечность при $z=a$ (т. I, § 183). С другой стороны мы имеем

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)=\frac{2}{z-a}+P(z-a),$$

где $P(z-a)$ — целый ряд; таким образом, приравнивая между собою коэффициенты при последовательных степенях $\frac{1}{z-a}$ в обеих частях формулы (22) мы легко найдем M_1, M_2,..., M_m.

Рассмотрим, например, функцию $\frac{1}{\cos z-\cos a}$; полагая $e^{zi}=t$, $e^{ai}=\alpha$, мы представим ее в виде

$$\frac{2\alpha t}{\alpha(t^2+1)-t(\alpha^2+1)};$$

знаменатель имеет два простых корня $t=\alpha$ и $t=\frac{1}{\alpha}$, и степень числителя меньше степени знаменателя. Следовательно, мы будем иметь разложение вида

$$\frac{1}{\cos z-\cos a}=C+M\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)+N\operatorname{ctg}\left(\frac{z+a}{2}\right).$$

Чтобы определить M, умножим обе части равенства на $z-a$ и затем положим $z=a$; мы получим $M=-\frac{1}{2\sin a}$. Точно так же найдем $N=\frac{1}{2\sin a}$. Заменяя M и N этими значениями и полагая $z=0$, будем иметь $C=0$; таким образом, окончательная формула будет

$$\frac{1}{\cos z-\cos a}=\frac{1}{2\sin a}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{z+a}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{z-a}{2}\right)\right].$$

Применим еще общий метод к целым степеням от $\sin z$ и $\cos z$. Например, мы имеем $(\cos z)^m=\left(\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}\right)^m$; собирая вместе члены, равно отстоящие от крайних членов разложения числителя, и применяя формулы Эйлера, получим непосредственно $(2\cos z)^m=2\cos mz+2m\cos[(m-2)z]+2\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos[(m-4)z]+\dots$

Если m — нечетное, то последний член содержит $\cos z$; если m — четное, то последний член разложения не зависит от z и равен $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}$.

Точно также имеем при m нечетном

$$(2i\sin z)^m = 2i\sin mz - 2im\sin[(m-2)z] + 2i\frac{m(m-1)}{1.2}\sin[(m-4)z] - \ldots,$$

при m четном

$$(2i\sin z)^m = 2\cos mz - 2m\cos[(m-2)z] + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}.$$

Из этих формул непосредственно следует, что начальные функции от $(\sin z)^m$ и $(\cos z)^m$ будут периодическими функциями от z, если m **нечетное**, и притом только в этом случае.

Примечание. — Если функция $F(\sin z, \cos z)$ имеет период π, то ее можно выразить рационально через e^{2zi} и взять за простые элементы $\operatorname{ctg}(z-\alpha)$, $\operatorname{ctg}(z-\beta)\ldots$

274. Разложение $\operatorname{Log}(1+z)$. — Трансцендентные функции, которые мы только что определили, распадаются на два рода: одни, как e^z, $\sin z$, $\cos z$ голоморфны во всей плоскости, другие, как $\operatorname{Log} z$, $\operatorname{arc\,tg} z, \ldots$ имеют особые точки и не могут быть представлены разложениями в целые ряды, сходящимися во всей плоскости. Тем не менее для этих последних функций существуют разложения, пригодные для некоторых частей плоскости; мы покажем это для логарифмической функции.

Простым делением мы приходим к элементарной формуле

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n \pm \frac{z^{n+1}}{1+z};$$

если $|z| < 1$, то, при неограниченном возрастании числа n, остаточный член $\frac{z^{n+1}}{1+z}$ стремится к нулю, и мы имеем внутри круга C с радиусом, равным единице,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$$

Пусть будет $F(z)$ ряд, получающийся от интегрирования почленно предыдущего ряда,

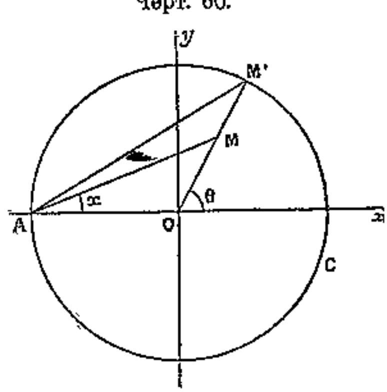
$$F(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots;$$

этот ряд — сходящийся в круге C, и представляет в нем голоморфную функцию, производная которой есть $F'(z) = \frac{1}{1+z}$. Но мы уже знаем функцию, производная которой имеет то же выражение; это $\operatorname{Log}(1+z)$. Следовательно, разность $\operatorname{Log}(1+z) - F(z)$ равна постоянному[1]); чтобы найти это постоянное, необходимо точно определить выбранное значение логарифма. Если мы возьмем то значение, которое при $z=0$ обращается в нуль, то во всех точках внутри круга C будем иметь

$$\text{Log}(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots \tag{25}$$

Соединим точку A с точкою M, представляющею переменное z (черт. 60); модуль количества $1+z$ представится длиною $r=AM$, и за аргумент можно взять угол α, образуемый прямою AM с AO; если точка M остается внутри круга C, то этот угол заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Значение логарифма, обращающееся в нуль при $z=0$, равно $\log r+i\alpha$, и формула (25) не представляет никакой неопределенности.

Черт. 60.



Изменяя в этой формуле z в $-z$ и взяв разность обеих формул, получим

$$\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=2\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right);$$

если в этой формуле мы заметим z через iz, то будем иметь разложение $\text{arc tg} z$.

$$\text{arc tg} z=\frac{1}{2i}\text{Log}\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots$$

Ряд (25) остается сходящимся во всякой точке на самом круге сходимости, кроме точки A (§ 266, выноска); следовательно, ряды

$$\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 3\theta}{3}-\frac{\cos 4\theta}{4}+\cdots,$$

$$\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\sin 3\theta}{3}-\frac{\sin 4\theta}{4}+\cdots$$

— оба сходящиеся для всех действительных значений θ, исключая $\theta=(2k+1)\pi$ (см. т. I, § 166). По теореме Абеля, сумма ряда в точке M' равна пределу, к которому стремится сумма ряда в точке M, лежащей на радиусе OM', при приближении M

---

[1]) Чтобы производная аналитической функции $X+Yi$ была равна нулю, должно быть (§ 261) $\frac{\partial X}{\partial x}=0$, $\frac{\partial Y}{\partial x}=0$, и, следовательно, $\frac{\partial Y}{\partial y}=0$, $\frac{\partial X}{\partial y}=0$; отсюда следует, что X и Y — постоянные.

к M'. Предположим, что θ заключается между $-\pi$ и $+\pi$; тогда угол α будет иметь пределом $\frac{\theta}{2}$, и предел модуля AM будет равен $2\cos\frac{\theta}{2}$. Следовательно, мы получим

$$\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)=\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 3\theta}{3}-\frac{\cos 4\theta}{4}+\ldots,$$
$$\frac{\theta}{2}=\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{\sin 3\theta}{3}-\ldots\quad(-\pi<\theta<\pi).$$

Если в последней формуле мы заменим θ через $\pi-\theta$, то найдем формулу, уже выведенную раньше непосредственно (т. I, § 198).

275. Распространение формулы бинома. — Абель, в своей работе, основной в теории целых рядов, определил сумму сходящегося ряда

$$\left.\begin{aligned}\varphi(m,z)=1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\ldots\\+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}z^p+\ldots\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

при всех действительных или мнимых значениях m и z, при условии $|z|<1$. Эту задачу можно было бы решить при помощи дифференциального уравнения, как это было указано для случая действительных переменных (т. I, § 179). Мы укажем здесь другой метод, представляющий применение рассуждений § 268 и ближе примыкающий к методу Абеля. Предположим, что z дано, и $|z|<1$; изучим свойства количества $\varphi(m,z)$, рассматривая его, как функцию от m. Если m—целое положительное число, то очевидно, что эта функция обращается в многочлен $(1+z)^m$. Если m и m' — произвольные значения параметра m, то всегда

$$\varphi(m,z)\,\varphi(m',z)=\varphi(m+m',z).\tag{27}$$

В самом деле, составим по обыкновенному правилу произведение обоих рядов $\varphi(m,z)$ и $\varphi(m',z)$; коэффициент при z^p в этом произведении равен

$$m_p+m_{p-1}m'_1+m_{p-2}m'_2+\ldots+m_1m'_{p-1}+m'_p,\tag{28}$$

где для краткости мы положили

$$m_k=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}.$$

Функциональное соотношение (27) будет доказано, если мы покажем, что выражение (28) тождественно с коэффициентом при z^p в $\varphi(m+m',z)$, т.-е. с $(m+m')_p$. Можно было бы непосредственно убедиться в верности тождества

$$(m+m')_p=m_p+m_{p-1}m'_1+\ldots m_1m'_{p-1}+m'_p\tag{29}$$

но можно и не производить вычисления, если мы заметим, что соотношение (29) наверное удовлетворяется всякий раз, когда m и m' — целые положительные числа. Таким образом, обе части формулы (29) суть целые многочлены относительно m и m', равные между собою всякий раз, когда m и m' — целые положительные числа; следовательно, эти многочлены между собою тождественны.

С другой стороны, функцию $\varphi(m, z)$ можно разложить в целый ряд по возрастающим степеням количества m. В самом деле, если мы выполним в $\varphi(m, z)$ все указанные произведения, то мы можем рассматривать $\varphi(m, z)$, как сумму двойного ряда, вычисляемую по столбцам,

$$\left.\begin{aligned}\varphi(m, z) = 1 + \frac{m}{1}z - \frac{m}{2}z^2 + \frac{m}{3}z^3 - \ldots \pm \frac{m}{p}z^p \mp \ldots\\ + \frac{m^2}{2}z^2 - \frac{m^2}{2}z^3 + \ldots\\ + \frac{m^3}{6}z^3 - \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ + \frac{m^p}{1.2\ldots p}z^p - \ldots\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Этот двойной ряд—абсолютно сходящийся. В самом деле, пусть будут $|z| = \rho$ и $|m| = \sigma$; если мы заменим каждый член в (30) его модулем, то сумма членов нового ряда, стоящих в $(p+1)$-ом столбце, будет равна

$$\frac{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+p-1)}{1.2\ldots p}\rho^p,$$

а это—общий член сходящегося ряда. Следовательно, можно составлять сумму двойного ряда (30) по строкам, и мы получим для $\varphi(m, z)$ разложение в целый ряд

$$\varphi(m, z) = 1 + \frac{a_1}{1}m + \frac{a_2}{1.2}m + \ldots$$

В силу соотношения (27) и полученных выше результатов (§ 268), этот ряд должен быть тождественен с $e^{a_1 m}$. Но коэффициентом при m служит

$$a_1 = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots = \operatorname{Log}(1+z);$$

следовательно, мы имеем

$$\varphi(m, z) = e^{m\operatorname{Log}(1+z)}, \tag{31}$$

причём для логарифма должно взять то значение, которое обращается в нуль при $z=0$. Выражение (31) обозначают также через $(1+z)^m$, но, чтобы избежать неопределенности, удобнее пользоваться выражением $e^{m\operatorname{Log}(1+z)}$.

Пусть будет $m=\mu+\nu i$; если r и α имеют те же значения, как и в предыдущем параграфе, то

$$e^{m\operatorname{Log}(1+z)}=e^{(\mu+\nu i)(\log r+i\alpha)}=$$
$$=e^{\mu\log r-\nu\alpha}\left[\cos(\mu\alpha+\nu\log r)+i\sin(\mu\alpha+\nu\log r)\right].$$

В заключение исследуем свойства ряда $\varphi(m, z)$ на самом круге сходимости. Пусть будет U_n модуль общего члена ряда в какой-нибудь точке z на этом круге; отношение двух последовательных членов ряда модулей равно $\left|\frac{m-n+1}{n}\right|$, т. е., если $m=\mu+\nu i$,

$$\frac{\sqrt{(\mu+1-n)^2+\nu^2}}{n}=1-\frac{\mu+1}{n}+\frac{\theta(n)}{n^2},$$

где, при неограниченном возрастании n, функция $\theta(n)$ остается конечною. На основании известного признака сходимости (т. I, § 163), этот ряд — сходящийся, если $\mu+1>1$, и расходящийся во всех остальных случаях. Следовательно, ряд (26) — абсолютно сходящийся во всех точках на круге сходимости, если μ — положительно.

Если $\mu+1$ — отрицательно или равно нулю, то модуль общего члена никогда не убывает, так как в этом случае отношение $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ никогда не может быть меньше единицы. Следовательно, ряд — расходящийся во всех точках на круге сходимости, если $\mu\leq-1$.

Остается исследовать случай, когда $-1<\mu\leq 0$. Рассмотрим ряд, общий член которого равен U_n^p; отношение двух последовательных членов этого ряда равно

$$\left[1-\frac{\mu+1}{n}+\frac{\theta(n)}{n^2}\right]^p=1-\frac{p(\mu+1)}{n}+\frac{\theta_1(n)}{n^2};$$

если мы возьмем $p(\mu+1)>1$, то этот ряд — сходящийся. Отсюда следует, что U_n^p, а следовательно, и модуль U_n общего члена стремятся к нулю. Сохраним в обеих частях тождества

$$\varphi(m, z)(1+z)=\varphi(m+1, z)$$

только те члены, степень которых меньше или равна n; мы получим соотношение

$$S_n(1+z)=S'_n+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^{n+1},$$

где S_n и S'_n обозначают соответственно суммы $(n+1)$ первых членов в $\varphi(m, z)$ и в $\varphi(m+1, z)$. Если действительная часть количества m заключается между -1 и 0, то действительная часть количества $m+1$ положительна. Предположим, что $|z|=1$; тогда, при неограниченном возрастании числа n, сумма S'_n стремится к пределу $e^{(m+1)\log(1+z)}$, а дополнительный член

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^{n+1},$$

как мы только что заметили, стремится к нулю; отсюда следует, что S_n стремится также к пределу, если только не будет $1+z=0$. Таким образом, если $-1<\mu\leq 0$, то ряд — сходящийся во всех точках на круге сходимости, кроме точки $z=-1$.

III.—Понятие о конформном преобразовании.

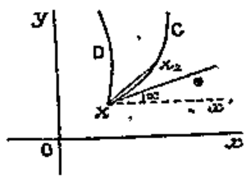
276. Геометрическое истолкование производной.—Пусть будет $u=X+Yi$ аналитическая функция комплексного переменного z, голоморфная внутри некоторого замкнутого контура C. Мы будем изображать значение функции u точкою с прямоугольными координатами X, Y; для удобства дальнейшего изложения предположим, что оси OX, OY лежат в плоскости xOy или в плоскости ей параллельной, соответственно параллельны осям Ox, Oy и имеют то же расположение, как и оси Ox, Oy. Если точка z описывает площадь A, ограниченную контуром C, то точка u с координатами (X, Y) опишет в своей плоскости некоторую площадь A'; следовательно, соотношение $u=f(z)$ определяет некоторое соответствие между точками обеих плоскостей, или обеих частей плоскости. Но очевидно, что вследствие соотношений (1), связывающих производные от функций X, Y, это соответствие должно обладать некоторыми особыми свойствами; мы покажем, что при этом соответствии с о х р а н я ю т с я у г л ы м е ж д у с о о т в е т с т в у ю щ и м и л и н и я м и о б е и х п л о с к о с т е й.

Пусть будут z и z_1 близкие между собою точки площади A, u и u_1—соответствующие им точки площади A'; из самого определения производной следует, что при приближении модуля разности z_1-z к нулю, частное $\frac{u_1-u}{z_1-z}$ имеет пределом производную $f'(z)$, каким бы путем разность z_1-z ни приближалась к нулю. Предположим, что точка z_1 приближается к точке z, описывая кривую C, касательная к которой в точке z образует с прямою, параллельною направлению OX, угол α; при этом точка u_1 также опишет некоторую кривую C', проходящую через точку u. Исключим тот случай, когда $f'(z)$ равно нулю; пусть будут ρ и ω модуль и аргумент количества $f'(z)$, r и r_1—расстояния zz_1 и uu_1, α'—угол между направлением zz_1 и прямою zx', параллельною оси OX, и β'—угол между направлением uu_1 и прямою uX', параллельною оси OX. Модуль разности $\frac{u_1-u}{z_1-z}$ равен $\frac{r_1}{r}$, и аргумент равен $\beta'-\alpha'$. Следовательно, мы имеем соотношения

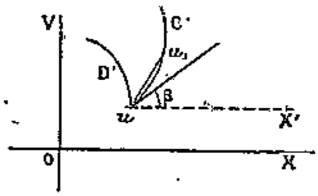
$$lim\frac{r_1}{r}=\rho, \qquad lim(\beta'-\alpha')=\omega+2k\pi. \tag{32}$$

Остановимся на втором из этих соотношений; в нем можно положить $k=0$, так как это равносильно увеличению аргумента ω на кратное 2π. Если точка z_1 приближается к точке z, описывая кривую C, то α' стремится к пределу α, следовательно, и β' стремится к некоторому пределу β, и мы имеем $\beta=\alpha+\omega$. Из этого равенства вытекает следующее предложение: ч т о б ы и м е т ь н а п р а в л е н и е к а с ательной к кривой, описываемой точкою u, достаточно повернуть на постоянный угол ω направление касательной к кривой, описываемой точкою z. Понятно, что мы здесь считаем соответствующими друг другу те направления касательных, которые соответствуют направлениям совместного движения точек z и u.

Черт. 61а.



Черт. 61б.



Пусть будет D какая-нибудь другая кривая на плоскости xoy, проходящая через точку z, и D'—соответствующая ей кривая на плоскости XOY. Обозначим через γ и δ углы между соответствующими направлениями касательных к этим обеим кривым и прямыми zx' и uX' (черт. 61а и 61б); мы имеем одновременно

$$\beta = \alpha + \omega, \qquad \delta = \gamma + \omega,$$

и следовательно, $\delta - \beta = \gamma - \alpha$. Кривые C' и D' пересекаются между собою под тем же углом, как и кривые C и D. Кроме того мы видим, что сохранилось также и направление вращения углов. Заметим, что наше доказательство неприменимо, если $f'(z)=0$, так как в этом случае угол $\beta-\alpha$ не имеет определенного значения.

В частности, если мы рассмотрим в какой-нибудь из плоскостей xoy или XOY два семейства кривых ортогональных между собою, то соответствующие им кривые в другой плоскости образуют также два семейства ортогональных кривых. Например, семейства линий $X=C$, $Y=C'$ и семейства линий

$$\operatorname{mod} f(z) = C, \qquad \arg f(z) = C' \tag{33}$$

образуют на плоскости xoy ортогональные сети, так как соответствующие им линии на плоскости XOY будут в первом случае системы прямых, параллельных осям координат, а во втором—круги, с центром в начале координат, и прямые, выходящие из начала координат.

Примеры. — 1. Пусть будет $z'=z^{\alpha}$, где число α — действительное и положительное. Обозначим через r и θ полярные координаты точки z, и через r' и θ' — полярные координаты точки z'; предыдущее соотношение равносильно двум соотношениям $r'=r^{\alpha}$, $\theta'=\alpha\theta$. Таким образом, мы переходим от точки z к точке z', возводя радиус вектор в степень α и умножая полярный угол на α. При этом значения всех углов на плоскости z не изменяются, кроме значений тех углов, вершины которых лежат в начале координат; все такие углы умножаются на постоянный множитель α.

2. Рассмотрим билинейное преобразование

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{34}$$

где a, b, c, d — произвольны. В некоторых частных случаях закон перехода от точки z к точке z' виден непосредственно. Рассмотрим, например, преобразование $z'=z+b$; пусть будут $z=x+yi$, $z'=x'+y'i$, $b=\alpha+\beta i$; из предыдущего соотношения имеем $x'=x+\alpha$, $y'=y+\beta$; отсюда видно, что в этом случае переход от точки z к точке z' совершается посредством простого переноса. Точно также, пусть будет $z'=az$; обозначая через ρ и ω модуль и аргумент количества a, имеем $r'=\rho r$, $\theta'=\omega+\theta$. Следовательно, мы переходим от точки z к точке z', увеличивая радиус-вектор в постоянном отношении ρ и поворачивая новый радиус-вектор на постоянный угол ω. Следовательно, мы получим преобразование, определяемое формулою $z'=az$, соединяя преобразование подобия с вращением. Рассмотрим, наконец, соотношение

$$z' = \frac{1}{z};$$

сохраняя за r, θ, r', θ' их прежние значения, получим $rr'=1$, $\theta+\theta'=0$. Следовательно, произведение радиусов векторов равно единице, тогда как полярные углы равны, но противоположны по знаку. Пусть нам дан круг C с центром A и радиусом R; мы будем называть **инверсией** относительно круга C преобразование обратными радиусами векторами с полюсом A и модулем R^2. Из предыдущего видно, что мы получим преобразование, определяемое формулою $zz'=1$, выполнив сначала инверсию относительно круга с радиусом равным единице и с центром в начале координат и взяв затем точку, симметричную с полученною точкою относительно оси Ox.

Самое общее преобразование вида (34) может быть представлено, как соединение рассмотренных выше частных преобразований. Если $c=0$, то преобразование (34) можно заменить последовательными преобразованиями

$$z_1 = \frac{a}{d}z, \quad z' = z_1 + \frac{b}{d};$$

если же c отлично от нуля, то, выполняя деление, получим

$$z' = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd},$$

и рассматриваемое преобразование может быть заменено последовательностью преобразований

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = c^2 z_1, \quad z_3 = \frac{1}{z_2},$$
$$z_4 = (bc-ad)z_3, \quad z' = z_4 + \frac{a}{c}.$$

Все эти частные преобразования сохраняют углы и направление вращения и изменяют круги в круги; следовательно, тем же свойством обладает и общее преобразование (34); поэтому оно называется **круговым преобразованием**[1]). Заме-

---

[1]) Это можно доказать и непосредственно. В самом деле, обозначим через z_0 мнимое переменное, сопряженное с z, и через α и α_0 — два мнимых сопряженных постоянных количества; тогда уравнение окружности будет

$$zz_0 + \alpha_0 z + \alpha z_0 + \beta = 0,$$

где β — действительно. Прилагая к этому уравнению преобразование (34), нетрудно убедиться, что преобразованные линии будут также окружностями.

тим, что здесь должно рассматривать прямые линии, как окружности с бесконечно-большим радиусом.

3. Пусть будет

$$z' = (z - e_1)^{m_1}(z - e_2)^{m_2} \dots (z - e_p)^{m_p},$$

где $e_1, e_2, \dots, e_p$ — произвольные количества, и показатели $m_1, m_2, \dots, m_p$ — действительные положительные или отрицательные числа. Пусть будут $M, E_1, E_2, \dots, E_p$ точки, представляющие соответственно количества $z, e_1, e_2, \dots, e_p$; $r_1, r_2, \dots, r_p$ — расстояния $ME_1, ME_2, \dots, ME_p$ и $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ — углы, образуемые направлениями $E_1M, E_2M, \dots, E_pM$ с прямыми, параллельными оси Ox. Модуль и аргумент количества z' соответственно равны $r_1^{m_1}r_2^{m_2} \dots r_p^{m_p}$ и $m_1\theta_1 + m_2\theta_2 \dots + m_p\theta_p$; следовательно, семейства линий

$$r_1^{m_1}r_2^{m_2} \dots r_p^{m_p} = C, \quad m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + \dots + m_p\theta_p = C'$$

образуют ортогональную сеть. Если показатели $m_1, m_2, \dots, m_p$ — числа рациональные, то эти кривые — алгебраические. Например, если $p = 2$, $m_1 = m_2 = 1$, то одно семейство состоит из двухфокусных кассиноид, а другое — из равносторонних гипербол.

277. Общая задача о конформных преобразованиях. — Исследуя предложение обратное тому, которое было доказано в предыдущем параграфе, мы придем к более общей задаче. Пусть будут даны две поверхности Σ и Σ'; установим между их точками какое-нибудь соответствие (соблюдая, однако, при этом некоторые условия, которые будут точнее выяснены ниже) и найдем, в каких случаях в этом преобразовании сохраняются углы. Пусть будут x, y, z прямоугольные координаты точек поверхности Σ, и x', y', z' — прямоугольные координаты точек поверхности Σ'. Предположим, что шесть координат x, y, z, x', y', z' выражены в функции двух переменных параметров u и v таким образом, что соответствующие друг другу точки обеих поверхностей соответствуют одной и той же системе значений параметров u, v

$$\Sigma \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v). \end{cases} \qquad \Sigma' \begin{cases} x' = f'(u, v), \\ y' = \varphi'(u, v), \\ z' = \psi'(u, v). \end{cases} \tag{35}$$

Кроме того, предположим, что функции $f, \varphi, \dots$ вместе со своими частными производными первого порядка непрерывны, когда точки (x, y, z) и (x', y', z') остаются в некоторых определенных областях на поверхностях Σ и Σ'. Напомним обозначения (т. I, § 131)

$$\left.\begin{aligned} E &= S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, & F &= S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, & G &= S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \\ E' &= S\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2, & F' &= S\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}, & G' &= S\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2, \\ ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, & ds'^2 &= E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2. & & \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

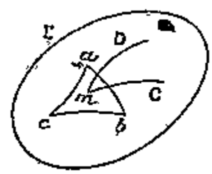
Пусть будут (черт. 62a и 62б) C и D кривые, лежащие на поверхности Σ и проходящие через точку m этой поверхности; C' и D' — соответствующие им кривые на поверхности Σ', проходящие через точку m'. Вдоль кривой C параметры u и v суть функции одного вспомогательного переменного t; обозначим соответствующие дифференциалы через du и dv. Точно также, вдоль кривой D параметры u и v суть функции одного переменного t'; обозначим соответствующие ему дифференциалы через δu и δv. Вообще, мы будем обозначать буквами d и δ дифференциалы, относящиеся соответственно к перемещениям по линии C и по линии D. Направляющие параметры касательной к линии C соответственно равны

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,\quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv;$$

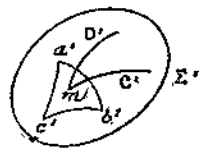
точно также, направляющие параметры касательной к линии D будут

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial u}\delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\delta v,\quad \delta y=\frac{\partial y}{\partial u}\delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\delta v,\quad \delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\delta u+\frac{dz}{dv}\delta v.$$

Черт. 62а.



Черт. 62б.



Пусть будет ω угол между касательными к линиям C и D; $\cos\omega$ определяется формулою

$$\cos\omega=\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}};$$

принимая во внимание соотношения (36), эту формулу можно представить в виде

$$\cos\omega=\frac{E du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G dv\,\delta v}{\sqrt{E du^2+2F du\,dv+G dv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\,\delta v+G\delta v^2}}. \tag{37}$$

Точно также, обозначая через ω' угол между касательными к линиям C' и D', получим

$$\cos\omega=\frac{E' du\,\delta u+2F'(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G' dv\,\delta v}{\sqrt{E' du^2+2F' du\,dv+G' dv^2}\sqrt{E'\delta u^2+2F'\delta u\,\delta v+G'\delta v^2}}. \tag{38}$$

Чтобы рассматриваемое преобразование не изменяло углов, должно быть $\cos\omega=\cos\omega'$ при всяких du, dv, δu, δv. Поэтому, обе части равенства

$$\cos^2\omega'=\cos^2\omega,$$

представляющие рациональные функции отношений $\frac{\delta v}{\delta u}$, $\frac{dv}{du}$, также должны быть между собою равны, каковы бы ни были значения этих отношений. Для этого в обеих дробях соответствующие коэффициенты должны быть пропорциональны, т.-е.

$$\frac{E'}{E}=\frac{F'}{F}=\frac{G'}{G}=\lambda^2,$$

где λ — произвольная функция параметров u, v [1]). Очевидно, что эти условия—достаточны, так как, например, $\cos\omega$ есть однородная функция нулевой степени относительно E, F, G.

Условия (39) можно заменить одним соотношением $ds'^2=\lambda^2 ds^2$, или

$$ds'=\lambda ds. \tag{40}$$

Из равенства (40) следует, что отношение всяких двух соответствующих друг другу бесконечно-малых дуг, при их неограниченном уменьшении, должно стремиться к некоторому пределу, не зависящему от du и dv. Это условие делает дальнейший вывод почти наглядным. В самом деле, возьмем на первой поверхности бесконечно-малый треугольник abc; пусть будет $a'b'c'$ соответствующий ему треугольник на второй поверхности. Если мы заменим дуги криволинейного треугольника их хордами, то их длины изменятся на бесконечно-малые третьего порядка (т. I, § 230); поэтому отношения сторон криволинейного треугольника и соответствующего прямолинейного будут иметь те же пределы. С другой стороны, стороны прямолинейного треугольника обратятся в пределе в касательные к сторонам криволинейного, и потому оба треугольника будут иметь в пределе соответственно

[1]) Это видно, например, из того, что при $\cos\omega=0$ должно быть $\cos\omega'=0$. Поэтому дифференциальные соотношения

$$E du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G dv\,\delta v=0$$

и

$$E' du\,\delta u+F'(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G' dv\,\delta v=0$$

должны иметь место одновременно и притом при произвольном значении отношения $\frac{\delta u}{\delta v}$. Отсюда имеем

$$\frac{E du+F dv}{E' du+F' dv}=\frac{F du+G dv}{F' du+G' dv}.$$

Это соотношение также должно иметь место при произвольном отношении $\frac{du}{dv}$. Полагая последовательно $dv=0$, $du=0$, будем иметь отсюда

$$\frac{E}{E'}=\frac{F}{F'}=\frac{G}{G'}.$$

(Ред.)

равные углы. Таким образом, при переходе к пределу треугольники abc, $a'b'c'$ можно рассматривать, как прямолинейные; так как отношения $\frac{a'b'}{ab}$, $\frac{a'c'}{ac}$, $\frac{b'c'}{bc}$ стремятся к общему пределу $\lambda(u,v)$, то, в пределе, эти треугольники — подобны, и соответствующие углы равны.

Мы видим, что две бесконечно-малые фигуры на обеих поверхностях можно рассматривать, как подобные, так как длины их дуг пропорциональны и углы равны; поэтому, всякое преобразование, сохраняющее значение углов, часто называют **конформным преобразованием**.

Пусть нам даны поверхности Σ и Σ' и установлено определенное соответствие между точками этих поверхностей; мы всегда можем узнать, удовлетворяются ли условия (39), и, следовательно, имеем ли мы в данном случае конформное изображение одной поверхности на другой. Но могут представиться и другие задачи; например, если поверхности Σ и Σ' даны, то можно искать все такие соответствия между точками обеих поверхностей, при которых сохранялись бы значения углов. Предположим, что координаты (x, y, z) точек поверхности Σ выражены в функции параметров (u, v), и координаты точек поверхности Σ' выражены в функции двух других параметров (u', v'); пусть будут ds^2 и ds'^2 выражения квадратов линейных элементов

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,\quad ds'^2=E'du'^2+2F'du'dv'+G'dv'^2.$$

Рассматриваемая задача приводится к следующей: **найти две такие функции** $u'=\pi_1(u, v)$, $v'=\pi_2(u, v)$, **чтобы было тождественно**

$$E'd\pi_1^2+2F'd\pi_1 d\pi_2+G'd\pi_2^2=\lambda^2(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2),$$

где λ—некоторая функция переменных u, v. Из общей теории дифференциальных уравнений следует, что эта задача всегда имеет бесконечное множество решений; мы рассмотрим только некоторые ее частные случаи.

278. Конформное изображение плоскости на плоскости.—Всякое соответствие между точками двух плоскостей определяется формулами вида

$$X=P(x,y),\qquad Y=Q(x,y),\tag{41}$$

причем плоскости отнесены соответственно к прямоугольным координатам (x, y) и (X, Y). На основании предыдущего, необходимым и достаточным условием того, чтобы преобразование (41) сохраняло значения углов, будет

$$dX^2+dY^2=\lambda^2(dx^2+dy^2),$$

где λ — произвольная функция от x и y, не зависящая от дифференциалов. Вставляя в эту формулу выражения дифференциалов dX и dY

и приравнивая между собою члены с одинаковыми степенями dx и dy, получим два соотношения, которым должны удовлетворять функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}=0. \tag{42}$$

Частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ не могут быть одновременно равны нулю, так как первое соотношение (42) дало бы также $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}=0$, и функции P и Q были бы постоянными количествами. Следовательно, последнее соотношение равносильно двум следующим

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mu\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\mu\frac{\partial P}{\partial y},$$

где μ — вспомогательное неизвестное. Подставляя эти значения в первое условие (42), получим

$$(\mu^2-1)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right]=0;$$

отсюда имеем $\mu=\pm 1$. Следовательно, должно быть или

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{43}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{44}$$

Первая система условий выражает, что $P+iQ$ есть аналитическая функция переменного $x+iy$; что касается второй системы, то мы приведем ее к первой, изменяя Q в $-Q$, т. е. взяв фигуру, симметричную с преобразованною фигурою относительно OX. Таким образом, всякому конформному преобразованию плоскости в плоскость соответствует некоторое решение системы (43), и, следовательно, некоторая аналитическая функция. Если мы предположим, что оси OX и OY соответственно параллельны осям ox и oy, то направление вращения углов останется прежним или изменится в обратное в зависимости от того, удовлетворяют ли функции P и Q уравнениям (43) или (44).

279. Теорема Римана. — Рассмотрим в плоскости переменного z площадь A, ограниченную одним контуром (или, что то же, простым контуром), и в плоскости переменного u круг C. Риман доказал, что существует аналитическая функция $u=f(z)$, голоморфная в области A, и такая, что каждой точке площади A соответствует точка круга, и, обратно, каждой точке круга соответствует одна и только одна точка площади A. При этом, функция $f(z)$ зависит от трех действительных произвольных постоянных, которыми можно располагать таким образом, чтобы центр круга соответствовал определенной точке площади A, и произвольно выбранная точка на окружности соответствовала определенной точке контура площади A. Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы, а рассмотрим лишь несколько примеров.

Заметим, что круг C можно заменить полуплоскостью. В самом деле, предположим, что в плоскости u окружность C проходит через начало координат; выполнив преобразование $u'=\frac{1}{u}$, мы заменим эту окружность прямою, а самый круг — частью плоскости u', расположенною по одну сторону этой прямой, неограниченно продолженной в обоих направлениях.

Примеры: — 1. Пусть будет $u=z^{\frac{1}{\alpha}}$, где α действительно и положительно; рассмотрим часть A плоскости, заключающуюся между направлением ox и бесконечною полупрямою, выходящею из начала координат и образующею с ox угол $\alpha\pi$ $(\alpha \leq 2)$ Пусть будут $z=re^{i\theta}$, $u=Re^{i\omega}$; мы имеем

$$R=r^{\frac{1}{\alpha}},\quad \omega=\frac{\theta}{\alpha}$$

Если точка z описывает часть A плоскости, то r изменяется в границах от 0 до ∞, и θ — от 0 до $\alpha\pi$; следсвательно, R изменяется от 0 до ∞, и ω — от 0 до π. Таким образом, точка u описывает полуплоскость над осью OX, и каждой точке этой полуплоскости соответствует только одна точка области A, так как обратно имеем $r=R^{\alpha}$, $\theta=\alpha\omega$.

Рассмотрим еще часть B плоскости z, ограниченную двумя пересекающимися дугами кругов. Пусть будут z_0, z_1 точки пересечения; если мы выполним сначала преобразование

$$z'=\frac{z-z_0}{z-z_1},$$

то площадь B преобразуется в область A плоскости z', заключающуюся между двумя бесконечными радиусами, выходящими из начала координат; в этом можно убедиться, заметив, что вдоль дуги круга, проходящей через точки z_0, z_1, аргумент количества $\frac{z-z_0}{z-z_1}$ сохраняет постоянное значение. Применяя затем предыдущее преобразование $u=(z')^{\frac{1}{\alpha}}$, мы видим, что при помощи функции

$$u=\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

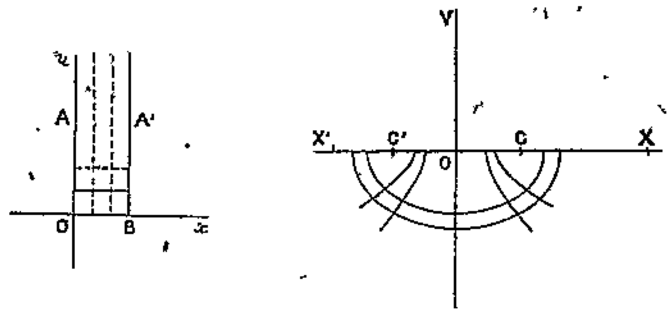
при соответствующем выборе числа α можно выполнить конформное преобразование площади B на полуплоскости.

2. — Пусть будет $u=\cos z$. Предположим, что z описывает бесконечную полосу R, или $AOBA'$ (черт. 63), определяемую неравенствами $0\leq x\leq\pi$, $y\geq 0$; найдем область, описываемую точкою $u=X+Yi$. Мы имеем здесь (§ 269)

$$\left.\begin{aligned} X&=\cos x\,\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\cos x\cosh y,\\ Y&=-\sin x\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}=-\sin x\sinh y. \end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

При изменении x от 0 до π, количество Y постоянно отрицательно, и потому точка u остается в полуплоскости, расположенной под осью $X'OX$. Следовательно, каждой точке области R соответствует точка полуплоскости u; если точка z лежит на контуре области R, то $Y=0$, так как один из двух множителей $\sin x$ или $\sin\text{hyp}\,y$ равен нулю. Обратно, каждой точке полуплоскости u, расположенной под осью OX, соответствует одна и только одна точка полосы R в плоскости z. В самом деле если z' есть корень уравнения $u=\cos z$, то все остальные корни содержатся в формуле $2k\pi\pm z'$. Предположим, что у количества z' коэффициент при i положителен; тогда точкам полосы R могут соответствовать только корни $2k\pi+z'$, так как все точки $2k\pi-z'$ лежат под осью Ox. Из точек $2k\pi+z'$ всегда есть одна, которая лежит в полосе R

Черт. 63.



В самом деле, среди точек $2k\pi+z'$ всегда есть одна, абсцисса которой заключается между 0 и 2π; но эта абсцисса не может заключаться между π и 2π, так как в этом случае было бы $\sin x<0$, и соответствующее значение количества Y было бы положительным. Следовательно, эта точка лежит в полосе R.

Из формул (45) легко видеть, что если точка z описывает внутри полосы R прямолинейный отрезок, параллельный оси Ox, то точка u описывает половину эллипса. Если же точка z описывает прямую, параллельную Oy, то точка u описывает половину ветви гиперболы. Все эти конические сечения имеют общие фокусы в точках C и C' на оси OX с абсциссами -1 и $+1$.

3. — Пусть будет

$$u=\frac{e^{\frac{\pi z}{2a}}-1}{e^{\frac{\pi z}{2a}}+1}, \tag{46}$$

где a — действительно и положительно. Нетрудно доказать, что для того, чтобы $|u|$ было меньше единицы, необходимо и достаточно, чтобы было $\cos\frac{\pi y}{2a}>0$. Поэтому, если y изменяется от $-a$ до $+a$, то неограниченной полосе, заключающейся между прямыми $y=-a$, $y=+a$, соответствует в плоскости u круг C с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат. Обратно, каждой точке этого круга соответствует только одна точка этой неограниченной полосы. В самом деле, значения количества z, соответствующие данному значению u, образуют арифметическую прогрессию с разностью $4ai$; следовательно, в рассматриваемой полосе не может содержаться более одного значения z. Кроме того, всегда есть один корень, у которого коэффициент при i заключается между $-a$ и $+3a$; но этот коэффициент не может заключаться между a и $3a$, так как, в этом случае, соответствующее значение $|u|$ было бы больше единицы.

Шварц [1]) и Кристоффель (Christoffel)[2]) дали формулы, с помощью которых можно выполнить конформное преобразование многоугольника на полуплоскости z, причем контуру многоугольника соответствует действительная ось плоскости z.

Из теоремы Римана следует, что если даны две площади A и A', ограниченные каждая одним контуром, то они могут быть конформно изображены одна на другой; это можно сделать, изображая конформно каждую из областей A и A' на круге C и устанавливая при помощи этих конформных изображений связь между точками областей A и A'.

280. Географические карты. — Сделать карту поверхности значит установить такое соответствие между точками этой поверхности и точками плоскости, чтобы все углы остались количественно без изменения. Предположим, что координаты точек рассматриваемой поверхности Σ выражены в функции переменных параметров u, v; пусть будет ds^2 квадрат линейного элемента

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Обозначим в плоскости P через (α, β) прямоугольные координаты той точки, которая соответствует точке (u, v) поверхности. Задача заключается в разыскании функций

$$u = \pi_1(\alpha, \beta), \quad v = \pi_2(\alpha, \beta)$$

таким образом, чтобы было тождественно

$$Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

где λ — некоторая функция α и β, не содержащая дифференциалов. Эта задача имеет бесконечное множество решений, которые все могут быть выведены из одного из них при помощи уже известного конформного преобразования плоскости в плоскость. В самом деле, предположим, что мы имеем одновременно

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad ds^2 = \lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2);$$

отсюда получаем

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{\lambda'}{\lambda}(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

т. е. $\alpha + \beta i$ или $\alpha - \beta i$ есть аналитическая функция переменного $\alpha' + \beta' i$. Обратное предложение очевидно.

Примеры: 1. Меркаторская проекция. — Всегда можно сделать карту поверхности вращения таким образом, чтобы меридианы

[1]) Шварц: Über einige Abbildungsaufgaben (Crelle's Journal, т. 70).

[2]) Кристоффель: Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie (Annali di Matematica, серия II, т. I, стр. 89).

и параллели соответствовали прямым, параллельным осям координат. В самом деле пусть будут

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad z=f(\rho)$$

координаты точек поверхности вращения около оси Oz; мы имеем

$$ds^2=d\rho^2[1+f'^2(\rho)]+\rho^2d\omega^2=\rho^2\left[d\omega^2+\frac{1+f'^2(\rho)}{\rho^2}d\rho^2\right];$$

полагая

$$X=\omega,\quad Y=\int\frac{\sqrt{1+f'^2(\rho)}}{\rho}\,d\rho,$$

мы можем представить предыдущее выражение в виде

$$ds^2=\rho^2(dX^2+dY^2).$$

В случае шара с радиусом, равным R, имеем

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\qquad y=R\sin\theta\sin\varphi,\qquad z=R\cos\theta,$$

$$ds^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)=R^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta}+d\varphi^2\right),$$

и мы можем положить

$$X=\varphi,\quad Y=\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

Это — Меркаторская проекция; в ней меридианы представятся в плоскости XOY прямыми, параллельными оси OY, и параллели—прямолинейными отрезками, параллельными оси OX. Чтобы получить всю поверхность шара, достаточно изменять φ от 0 до 2π, и θ — от 0 до π; при этом X изменяется от 0 до 2π, и Y от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, карта имеет вид бесконечной полосы с шириною, равною 2π. Кривые, лежащие на поверхности шара и пересекающие все меридианы под постоянным углом, или локсодромы, представятся на карте прямыми линиями.

2. Стереографическая проекция. — Квадрат линейного элемента шара можно представить также в виде

$$ds^2=4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{R^2d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}+R^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\,d\varphi^2\right);$$

полагая

$$\rho=R\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\qquad \omega=\varphi,$$

получим

$$ds^2=4\cos^4\frac{\theta}{2}(d\rho^2+\rho^2d\omega^2).$$

Но $d\rho^2+\rho^2 d\omega^2$ представляет квадрат линейного элемента плоскости в полярных координатах; следовательно, чтобы иметь конформное изображение шара, достаточно связать точку (θ, φ) поверхности шара с точкою плоскости с полярными координатами (ρ, ω). Сделав чертеж, нетрудно убедиться, что ρ и ω суть полярные координаты стереографической проекции на плоскость экватора точки (θ, φ) шара, причем центр проекции находится в одном из полюсов.

3. Карта тора. — Рассмотрим тор, образуемый вращением окружности с радиусом, равным R, вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и отстоящей от ее центра на расстояние a (мы предположим, что $a>R$). Примем ось вращения за ось oz, и плоскость экватора тора — за плоскость xoy; мы имеем для координат точек поверхности

$$x=(a+R\cos\theta)\cos\varphi, \quad y=(a+R\cos\theta)\sin\varphi, \quad z=R\sin\theta;$$

чтобы получить всю поверхность тора, достаточно изменять θ и φ от $-\pi$ до $+\pi$. Из этих формул находим

$$ds^2=(a+R\cos\theta)^2\left[d\varphi^2+\frac{R^2 d\theta^2}{(a+R\cos\theta)^2}\right];$$

чтобы сделать карту поверхности, положим

$$X=\varphi,$$

$$Y=e\int_0^\theta \frac{d\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

где

$$e=\frac{R}{a}<1.$$

Таким образом, поверхность тора конформно изобразится на прямоугольнике, стороны которого равны 2π и $\frac{2\pi e}{\sqrt{1-e^2}}$.

281. Изотермические линии.—Пусть будет $U(x,y)$ решение уравнения Лапласа

$$\Delta_2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0;$$

линии, представляемые в плоскости xoy уравнением

$$U(x,y)=C, \tag{50}$$

где C — произвольное постоянное, образуют семейство изотермических линий. Ко всякому решению $U(x,y)$ уравнения Лапласа можно присоединить другое $V(x,y)$ такое, чтобы $U+Vi$ было аналитическою функцией переменного $x+yi$. Из соотношений

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

следует, что семейства изотермических линий

$$U(x,y)=C, \quad V(x,y)=C'$$

ортогональны, так как угловые коэффициенты касательных к кривым C и C' соответственно равны

$$-\frac{\partial U}{\partial x}:\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial x}:\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Следовательно, ортогональные траектории семейства изотермических линий образуют другое семейство изотермических линий. Мы получим все сопряженные системы изотермических линий, рассматривая произвольную аналитическую функцию $f(z)$ и беря линии, для которых действительная часть функции $f(z)$ или коэффициент при i сохраняют постоянное значение. Линии, для которых модуль R или аргумент Ω функции $f(z)$ остаются постоянными, образуют также две сопряженные системы изотермических линий, так как действительная часть аналитической функции $\log[f(z)]$ равна $\log R$, а коэффициент при i равен Ω.

Точно также мы получим системы изотермических линий, рассматривая линии, описываемые точкою (X, Y), где $f(z) = X + iY$, и x или y имеют постоянное значение. В самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть обратно $x + iy$, как функцию от $X + iY$. Вообще, всякое преобразование между точками двух плоскостей сохраняющее значение углов, изменяет семейство изотермических линий в новое семейство изотермических линий. Пусть будут

$$x = p(x', y'), \qquad y = q(x', y')$$

формулы преобразования, сохраняющего значение углов, и $F(x', y')$ — результат замены переменных x и y в $U(x, y)$ через $p(x', y')$ и $q(x', y')$. Задача приводится к доказательству того, что $F(x', y')$ есть решение уравнения Лапласа, если $U(x, y)$ есть решение уравнения Лапласа. Доказательство не представляет никакого затруднения (см. т. I, гл. II, стр. 90, упражнение 9), но теорему можно доказать и без всяких вычислений. В самом деле, мы можем предположить, что функции $p(x', y')$ и $q(x', y')$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial q}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y'} = -\frac{\partial q}{\partial x'},$$

так как очевидно, что преобразование по симметрии изменяет семейство изотермических линий в новое семейство изотермических линий. При таком предположении, функция $x + iy = p + iq$ есть аналитическая функция переменного $z' = x' + iy'$, и $U + iV$, после подстановки, обращается также в аналитическую функцию $F(x', y') + i\Phi(x', y')$ того же переменного z' (§ 263). Следовательно, семейства линий

$$F(x', y') = C, \qquad \Phi(x', y') = C'$$

образуют новую ортогональную сеть, состоящую из двух сопряженных семейств изотермических линий.

Например, концентрические окружности и радиусы этих окружностей образуют два семейства сопряженных изотермических линий; в этом можно убедиться непосредственно, рассматривая аналитическую функцию $\operatorname{Log} z$. Выполнив преобразование обратными радиусами векторами, мы получим систему изотермических линий, состоящую из окружностей, проходящих через две данные точки. Сопряженная система также состоит из окружностей.

Точно также, софокусные эллипсы образуют изотермическую систему. В самом деле, выше мы видели, что точка $u = \cos z$ описывает софокусные эллипсы, если точка z описывает прямые, параллельные оси Ox (§ 279). Сопряженная система состоит из софокусных и ортогональных гипербол.

Примечание.—Для того, чтобы семейство линий, представляемых уравнением $P(x, y) = C$, было изотермическим, нет необходимости, чтобы $P(x, y)$ было решением уравнения Лапласа. В самом деле, очевидно, что эти линии можно представить также уравнением $\varphi[P(x, y)] = C$, где φ — произвольная функция, и функция $\varphi[P(x, y)]$ не будет, вообще, решением уравнения Лапласа. Если даже P не удовлетворяет уравнению Лапласа, то уравнение $P = const$ все же будет представлять семейство изотермических линий, если можно выбрать функцию φ таким образом, чтобы $U(x, y) = \varphi(P)$ удовлетворяло уравнению Лапласа. Выполнив вычисление, получим, что для этого должно быть

$$\frac{d^2\varphi}{dP^2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{d\varphi}{dP}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)=0;$$

следовательно, отношение

$$\frac{\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)^2}$$

должно зависеть только от P [1]); если это условие удовлетворяется, то функция φ получается двумя квадратурами.

IV. — Бесконечные произведения.

282. Определения и общие свойства. — Пусть будет дана бесконечная последовательность действительных или мнимых членов

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots;$$

рассмотрим последовательность произведений

$$P_0 = 1 + u_0,\ P_1 = (1+u_0)(1+u_1),$$
$$P_2 = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2), \ldots,\ P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n).$$

Если произведение P_n стремится к некоторому пределу P, то бесконечное произведение

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) = (1+u_0)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots \tag{51}$$

называется с х о д я щ и м с я; число P называется значением этого произведения.

Очевидно, что если один из множителей $1+u_m$ равен нулю, то все произведения P_n, где $n \geqq m$, равны нулю; следовательно, $P=0$. Но может случиться, что произведение стремится к нулю, хотя ни один из множителей $1+u_m$ нулю не равен. Таково, например, произведение

$$P_n = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n};$$

---

[1]) Выражение $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2$ называется первым дифференциальным параметром функции P и обозначается через $\Delta_1 P$; таким образом, чтобы семейство $P = Const$ было изотермическим, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{\Delta_2 P}{\Delta_1 P}$ было функциею только от P.

(Ред.)

очевидно, что, при неограниченном возрастании n, это произведение стремится к нулю. Так как признаки сходимости бесконечного произведения не всегда применимы к этому особому случаю, то мы сохраним название **сходящегося произведения** только за теми произведениями, у которых P_n стремится к некоторому пределу P, **отличному от нуля**. Если P_n имеет пределом нуль, то мы будем говорить, что произведение **равно нулю**; если же P_n не стремится ни к какому пределу, то произведение называется **расходящимся**.

Чтобы бесконечное произведение было сходящимся и не равным нулю, необходимо, чтобы u_n стремилось к нулю. В самом деле, если P_n стремится к пределу P, то разность $P_n - P_{n-1} = P_{n-1}u_n$ должна стремиться к нулю; так как множитель P_{n-1} имеет предел P, отличный от нуля, то, следовательно, множитель u_n стремится к нулю. Это рассуждение не применимо, если произведение равно нулю; на приведенном выше примере нетрудно проверить, что в этом случае u_n может и не стремиться к нулю.

На основании сделанного ранее замечания (т. I, § 157), исследование сходимости или расходимости бесконечного произведения приводится к изучению того же вопроса для ряда. Положим

$$v_0 = P_0 = (1 + u_0), \qquad v_1 = P_1 - P_0 = (1 + u_0)u_1, \ldots$$

и, вообще,

$$v_n = P_n - P_{n-1} = (1 + u_0)\ldots(1 + u_{n-1})(1 + u_{n-1})u_n; \tag{52}$$

рассмотрим вспомогательный ряд

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{53}$$

Сумма $\Sigma_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, очевидно, равна P_n; таким образом, этот ряд — сходящийся или расходящийся вместе с бесконечным произведением $\Pi(1 + u_n)$; если ряд — сходящийся, то его сумма Σ равна значению P бесконечного произведения.

283. Абсолютно сходящиеся произведения. — Предположим сначала, что все числа u_n — действительны и положительны. В этом случае произведение P_n возрастает вместе с n, и, чтобы доказать его сходимость, достаточно показать, что при всяком значении числа n произведение P_n остается меньшим некоторого определенного числа. Мы имеем, с одной стороны,

$$P_n > 1 + u_0 + u_1 + \ldots + u_n;$$

с другой стороны, при x положительном, имеем $1 + x < e^x$, и, следовательно,

$$P_n < e^{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}.$$

Из первого неравенства видно, что если произведение P_n стремится к некоторому пределу P, то постоянно $u_0+u_1+\ldots+u_n<P$. Следовательно, знакоположительный ряд

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots \tag{54}$$

— сходящийся. Обратно, предположим, что этот ряд — сходящийся, и пусть будет S его сумма; тогда из второго неравенства имеем $P_n<e^S$; следовательно, произведение P_n стремится к пределу. Таким образом, бесконечное произведение $\prod\limits_0^{+\infty}(1+u_n)$, в котором все числа u_n — действительны и положительны, — сходящиеся или расходящиеся вместе с рядом (54).

Рассмотрим теперь бесконечное произведение с произвольными членами, действительными или мнимыми,

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots; \tag{55}$$

пусть будет $U_i=|u_i|$. Если ряд

$$U_0+U_1+\ldots+U_n+\ldots \tag{56}$$

— сходящийся, то и бесконечное произведение (55) будет сходящимся. В самом деле, положим, как выше,

$$v_n=(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})u_n,$$
$$V_n=(1+U_0)(1+U_1)\ldots(1+U_{n-1})U_n.$$

На основании предыдущего, если знакоположительный ряд ΣU_i — сходящийся, то будет сходящимся и бесконечное произведение $\Pi(1+U_i)$, а, следовательно, и ряд

$$V_0+V_1+\ldots+V_n+\ldots \tag{57}$$

Но, очевидно, что $|v_n|<V_n$; следовательно, ряд

$$v_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots \tag{58}$$

— абсолютно сходящийся, и, как было замечено, сумма этого ряда есть предел произведения

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)$$

при неограниченном возрастании числа n. При этих условиях, произведение $\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ называется абсолютно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся бесконечные произведения представляют особый интерес, как и абсолютно сходящиеся ряды, с которыми они имеют много общего. Так, в абсолютно сходящемся бесконечном произведении можно произвольно изменять порядок множителей, не изменяя произведения. Докажем сначала, что если дано абсолютно сходящееся бесконечное произведение, то для всякого положительного числа ε можно найти такое целое число n, чтобы модуль разности между единицею и произведением любого числа множителей

$$(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)$$

был меньше ε, если все указатели $\alpha, \beta \ldots, \lambda$ больше n. В самом деле выполняя в обеих частях умножение, можно непосредственно убедиться, что

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)-1|<(1+U_\alpha)(1+U_\beta)\ldots(1+U_\lambda)-1,$$

и, следовательно.

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)-1|<e^{U_\alpha+U_\beta+U_\lambda}-1.$$

Так как ряд ΣU_i — сходящийся, то можно взять число n настолько большим, чтобы сумма $U_\alpha+U_\beta+\ldots+U_\lambda$ была меньше $\log\,(1+\varepsilon)$, если все указатели $\alpha, \beta_1 \ldots, \lambda$ больше n. Следовательно, взяв целое число n достаточно большим, можно сделать правую часть предыдущего неравенства меньшею всякого положительного числа ε.

Заметим при этом, что отсюда вытекает следующее предложение: абсолютно сходящееся произведение не может быть равно нулю, если ни один из множителей не равен нулю. В самом деле, предположим, что ни один из множителей произведения не равен нулю; выберем число n настолько большим, чтобы при всяком положительном числе p было

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p})-1|<\alpha,$$

где α — положительное число, меньшее единицы. Очевидно, что модуль бесконечного произведения $\prod\limits_{\nu=1}^{+\infty}(1+u_{n+\nu})$ больше $1-\alpha$, и, следовательно, произведение P, равное предыдущему, умноженному на P_n, не может быть равно нулю.

После этих предварительных рассуждений рассмотрим абсолютно сходящееся бесконечное произведение

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots, \tag{59}$$

и пусть будет

$$(1+u_0')(1+u_1')\ldots(1+u_n')\ldots \tag{60}$$

другое бесконечное произведение, состоящее из тех же множителей, но взятых в другом порядке. Это второе произведение — также абсолютно сходящееся, так как ряд $\Sigma U_i'$ состоит из тех же членов, как и ряд ΣU_i. Обозначим через P и P' значения этих обоих произведений (59) и (60). Пусть будет P_n произведение n первых множителей произведения (59); все эти множители находятся и в произведении (60), и мы можем взять такое число $m > n$, чтобы произведение P'_m содержало все множители произведения P_n. В этом случае, мы имеем,

$$\frac{P'_m}{P_n} = (1 + u_\alpha)(1 + u_\beta)\ldots(1 + u_\lambda),$$

где все указатели $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ больше n; на основании предыдущего можно взять число n настолько большим, чтобы было

$$\left|\frac{P'_m}{P_n} - 1\right| < \varepsilon,$$

как бы положительное число ε ни было мало. Но, при неограниченном возрастании числа n, число m также неограниченно возрастает, и отношение $\frac{P'_m}{P_n}$ имеет предел $\frac{P'}{P}$. Следовательно, должно быть $P' = P$.

284. Равномерно сходящиеся произведения.— Рассмотрим бесконечное произведение (51), где $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ суть непрерывные функции, действительные или мнимые, одного или нескольких переменных $x, y, t, \ldots$; очевидно, что в этом предположении содержится случай, когда $u_0, u_1, u_2, \ldots$ суть функции одного комплексного переменного z. Это произведение называется **равномерно сходящимся** в некоторой области D, если определенный выше ряд Σv_n, сумма которого равна значению бесконечного произведения, сам—равномерно сходящийся в той же области. В этом случае, произведение P есть непрерывная функция независимых переменных.

Бесконечное произведение будет равномерно сходящимся, если будет равномерно сходящимся ряд

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots \tag{61}$$

В самом деле, вернемся к ряду (53); мы имеем

$$v_{n+1} + \ldots + v_{n+p} = P_{n+p} - P_n = P_n\,[(1 + u_{n+1})\ldots(1 + u_{n+p}) - 1]$$

кроме того, очевидно, что

$$|P_n| < (1 + U_0)(1 + U_1)\ldots(1 + U_n) \leqslant e^{U_0 + U_1 + \ldots + U_n},$$

$$|(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2})\ldots(1 + u_{n+p}) - 1| < e^{U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}} - 1.$$

Но так как ряд (61)—равномерно сходящийся в области D, то он представляет в ней непрерывную функцию, которая остается меньшею некоторой границы M; вследствие равномерной сходимости ряда (61) можно выбрать число N настолько большим, чтобы сумма

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots U_{n+p},$$

где $n \geqq N$, при всяком значении числа p оставалась в области D меньшею некоторого положительного числа α. Следовательно, при таком выборе числа n, мы имеем

$$|v_{n+1}+\ldots+v_{n+p}|<e^M(e^\alpha-1).$$

Так как число α всегда можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворялось неравенство $e^M(e^\alpha-1)<\varepsilon$, как бы число ε ни было мало, то отсюда следует, что ряд Σv_n—равномерно сходящийся.

Например, бесконечное произведение

$$F(z)=z\,1(-z^2)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\ldots$$

представляет непрерывную функцию комплексного переменного z, так как ряд $\sum\limits_{1}^{+\infty}\frac{|z|^2}{n^2}$—равномерно сходящийся внутри любой замкнутой линии. Это произведение равно нулю при всех значениях $z=0$, ±1, ±2, ..., и притом только при них.

Примечание.—Все предыдущие свойства легко распространяются и на бесконечные произведения вида $\Pi(1+u_{mn})$, где каждый множитель имеет два различных указателя m, n, которые могут отдельно изменяться от 0 до $+\infty$. Если двойной ряд ΣU_{mn}—сходящийся, то предыдущее произведение имеет вполне определенное значение, не зависящее от того, каким способом возрастает число множителей. Абсолютно сходящийся двойной ряд можно бесконечным множеством способов преобразовать в простой ряд; точно также и абсолютно сходящееся двойное бесконечное произведение можно бесконечным множеством способов преобразовать в простое абсолютно сходящееся бесконечное произведение. Если все члены u_{mn} суть непрерывные функции некоторых переменных x, y, ..., и если ряд ΣU_{mn}—равномерно сходящийся в некоторой области D, то бесконечное произведение $\Pi(1+u_{mn})$—само равномерно сходящееся и представляет в области D непрерывную функцию от x, y, ...

285. Действительные бесконечные произведения.—Возвратимся к бесконечному произведению с действительными множителями

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots,$$

и рассмотрим тот случай, когда в последовательности u_0, u_1, u_2, ... есть бесконечное множество отрицательных членов. Если все эти члены, начиная с некоторого указателя, заключаются между -1 и 0, то задача приводится к изучению бесконечного произведения вида

$$(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)\ldots, \tag{62}$$

где v_0, v_1, ..., v_n, ...—положительны и меньше единицы. Очевидно, что с возрастанием числа n произведение $(1-v_0)\ldots(1-v_n)$ убывает, оставаясь положительным; следовательно, при неограниченном возрастании числа n, это произведение стремится к некоторому пределу, но этот предел может быть равен или нулю, или какому-нибудь положительному числу. Если ряд Σv_i — сходящийся, то бесконечное произведение (62) — абсолютно сходящееся; следовательно, произведение $(1-v_0)\ldots(1-v_n)$ имеет предел, отличный от нуля (§ 283).

Чтобы исследовать случай, когда ряд Σv_i — расходящийся, заметим, что при всяком действительном значении x мы имеем

$$1+x<e^x,$$

так как функция e^x-x-1 имеет minimum при $x=0$. Поэтому

$$1-v_0<e^{-v_0},\ 1-v_1<e^{-v_1},\ldots\ 1-v_n<e^{-v_n},$$

и, следовательно,

$$(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)<e^{-(v_0+v_1+\ldots+v_n)}.$$

Так как сумма $v_0+v_1+\ldots+v_n$ неограниченно возрастает вместе с n, то бесконечное произведение равно нулю. Таким образом, если ряд Σv_i — расходящийся, то бесконечное произведение $\Pi\,(1-v_i)$ равно нулю.

Если последовательность $u_0, u_1,\ldots, u_n,\ldots$ содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов, то бесконечное произведение может быть сходящимся и отличным от нуля только в том случае, если общий член u_n стремится к нулю (§ 282). Предположим, что это имеет место; так как всегда можно пренебречь конечным числом первых множителей, то мы допустим, что все множители $1+u_n$ положительны. Тогда произведение P_n будет содержать некоторое число множителей, больших единицы и некоторое число множителей, меньших единицы; очевидно, что единственно сомнительный случай тот, когда при неограниченном возрастании числа n произведение множителей, больших единицы, неограниченно возрастает, а произведение множителей, меньших единицы, стремится к нулю. В этом случае, в зависимости от характера произведения, оно может быть сходящимся или расходящимся; но нетрудно доказать, рассуждая, как в случае полусходящихся рядов (т. I, § 165), что в подобном произведении всегда можно расположить множители в таком порядке, чтобы произведение P_n имело пределом любое заданное положительное число.

Если ряд Σu_n — сходящийся, то мы имеем точный признак. Произведение P_n стремится к положительному пределу, или стремится к нулю в зависимости от того, будет ли ряд Σu_n^2 сходящимся или расходящимся.

Для доказательства этого предложения заметим, что отношение

$$\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$

при x, стремящемся к нулю, имеет предел $-\frac{1}{2}$; следовательно, должно быть

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}(1+\alpha),$$

причем абсолютное значение количества α остается меньшим $\frac{1}{2}$, если абсолютное значение количества x меньше некоторой границы. Так как при неограниченном возрастании числа n количество u_n стремится к нулю, и так как бесконечное произведение можно начинать с любого множителя, то можно предположить, что

$$\log(1+u_0)=u_0-\frac{u_0^2}{2}(1+\theta_0),$$

$$\log(1+u_1)=u_1-\frac{u_1^2}{2}(1+\theta_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}(1+\theta_n),$$

где все числа $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ заключаются между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что

$$\log P_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n - \frac{1}{2}u_0^2(1+\theta_0) - \ldots - \frac{1}{2}u_n^2(1+\theta_n); \tag{63}$$

если оба ряда Σu_n и Σu_n^2 — сходящиеся, то, при неограниченном возрастании числа n правая часть стремится к конечному пределу, так как $u_n^2(1+\theta_n)$ заключается между $\frac{u_n^2}{2}$ и $\frac{3}{2}u_n^2$. Следовательно, произведение P_n стремится к пределу, отличному от нуля. Напротив, если ряд Σu_n^2 — расходящийся, то правая часть формулы (63) неограниченно возрастает по абсолютному значению, оставаясь отрицательною, и, следовательно P_n стремится к нулю.

Из того же равенства (63) следует, что бесконечное произведение — расходящееся или равно нулю, если ряд Σu_n — расходящийся и ряд Σu_n^2 — сходящийся. Но должно заметить, что безконечное произведение может быть сходящимся и в том случае, когда оба ряда Σu_n и Σu_n^2 — расходящиеся. Например, возьмем $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, и

$$u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (n > 1);$$

ряд Σu_n — расходящийся, так как сумма S_{2n} больше $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; по той же причине будет расходящимся и ряд Σu_n^2. Тем не менее бесконечное произведение

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\cdots$$

— сходящееся, так как произведение его $2n$ множителей равно

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

тогда как произведение его $2n+1$ множителей равно предыдущему произведению, умноженному на множитель $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, предел которого равен единице [1].

Примеры: — 1. Ряд

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\ldots$$

— сходящийся; ряд, состоящий из квадратов его членов, — также сходящийся. Следовательно, соответствующее бесконечное произведение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

— сходящееся; мы уже видели, что оно равно $\frac{2}{\pi}$ (т. I, § 116). Чтобы преобразовать его в абсолютно сходящееся произведение, достаточно перемножить попарно последовательные множители; таким образом, получим

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

[1] См. Коши: Cours d'Analyse или Oeuvres complètes, т. III, 2-я серия, примечание IX; Прингсгейм: Mathematische Annalen, т. 22, 33, 42.

2. Пусть будет $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ ряд с действительными членами, в котором отношение двух последовательных членов есть рациональная функция количества n стремящаяся к единице при неограниченном возрастании числа n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots}{n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots}.$$

Исключая из рассмотрения случай, когда какой-нибудь из членов этого ряда равен нулю или бесконечности, мы можем положить

$$u_{n+1} = u_1 \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{\nu} + \frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right)$$

где $\varphi(\nu)$ есть рациональная функция от ν, абсолютное значение которой остается меньшим некоторого постоянного числа. Если $a_1 - b_1 > 0$, то все члены ряда

$$\Sigma\left(\frac{a_1 - b_1}{\nu} + \frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right), \tag{64}$$

начиная с некоторого, — положительны, и этот ряд — расходящийся; следовательно, общий член u_{n+1} первого ряда неограниченно возрастает по абсолютному значению. Если $a_1 - b_1 = 0$, то ряд (64) — абсолютно сходящийся, и u_{n+1} стремится к конечному пределу, отличному от нуля. Наконец, если $a_1 - b_1 < 0$, то все члены ряда (64), начиная с некоторого, — отрицательны, и этот ряд — расходящийся; следовательно, при неограниченном возрастании числа n, u_{n+1} стремится к нулю. Эти результаты принадлежат Гауссу (см. т. I, § 163).

286. Разложение бесконечного произведения в целый ряд. — Пусть будет

$$F(z) = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n) \ldots$$

бесконечное произведение, в котором каждый член u_i есть функция комплексного переменного z, непрерывная в некоторой области D.

Выше мы видели (§ 284), что если ряд модулей ΣU_i равномерно сходящийся в этой области, то произведение $F(z)$ равно сумме ряда, равномерно сходящегося в области D и, следовательно, представляет в ней непрерывную функцию. Если функции $u_i(z)$ — аналитические, то из общей теоремы, которая будет доказана ниже (§ 301), следует, что произведение $F(z)$ есть также аналитическая функция, т. е. разлагается в целый ряд по степеням переменного z.

Предположим, что каждая из функций u_i разлагается в целый ряд

$$u_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + a_{i2}z^2 + \ldots + a_{in}z^n + \ldots,$$

и что двойной ряд $\Sigma|a_{in}|r^n$ — сходящийся при соответственно выбранном положительном значении числа r; в этом случае можно непосредственно показать, что произведение $F(z)$ разлагается в целый ряд по степеням переменного z.

Рассмотрим, как выше, последовательность

$$v_0 = 1 + u_0, \ldots, \quad v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_{n-1})u_n;$$

очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что сумма ряда

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots \tag{65}$$

разлагается в целый ряд по степеням z. Положим

$$u'_i = |a_{i0}| + |a_{i1}|z + \ldots + |a_{in}|z^n + \ldots;$$

произведение

$$v'_n = (1 + u'_0)(1 + u'_1) \ldots (1 + u'_{n-1})u'_n,$$

есть усиливающая функция для v_n. Поэтому ряд (65) может быть разложен по степеням количества z, если это возможно для вспомогательного ряда

$$v'_0 + v'_1 + \ldots + v'_n + \ldots \tag{66}$$

Но, разлагая в целый ряд каждый член ряда (66), мы получим двойной ряд с положительными коэффициентами, и, для доказательства теоремы, достаточно показать, что этот двойной ряд—сходящийся при $z = r$. Обозначим через U'_n и V'_n значение функций u'_n и v'_n при $z = r$; мы имеем

$$V'_n = (1 + U'_0)(1 + U'_1) \ldots (1 + U'_{n-1}) U'_n,$$

и, следовательно,

$$V'_0 + V'_1 + \ldots + V'_n = (1 + U'_0) \ldots (1 + U'_n),$$

или, иначе

$$V'_0 + V'_1 + \ldots + V'_n < e^{U'_0 + U'_1 + \ldots + U'_n}.$$

Так как, по предположению, ряд $\Sigma u'_n$ — сходящийся, то, при неограниченном возрастании числа n, сумма $U'_0 + \ldots + U'_n$ стремится к некоторому пределу. Следовательно, при $|z| \leqq r$ двойной ряд (66) — абсолютно сходящийся; поэтому, разлагая в ряд каждый член v_n ряда (65), мы получим двойной ряд, который a fortiori будет абсолютно сходящимся внутри круга C с радиусом r и центром в начале координат, и этот двойной ряд можно будет расположить по возрастающим степеням переменного z.

Отсюда следует, что коэффициент b_p при z^p в разложении произведения $F(z)$ равен пределу коэффициента b_{pn} при z^p в сумме $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ при $n = \infty$, или, что то же, в разложении произведения

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n);$$

таким образом, мы получим этот коэффициент, распространяя на бесконечные произведения обыкновенное правило вычисления коэффициентов при степенях переменного z в произведении конечного числа многочленов.

Например, бесконечное произведение

$$F(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4) \ldots (1 + z^{2^n}) \ldots$$

разлагается по степеням z, если $|z| < 1$. В этом разложении коэффициент при любой степени z, например, при z^N, равен единице, так как всякое целое число N можно представить одним и только одним способом, как сумму различных степеней числа 2.

Следовательно, мы имеем при $|z| < 1$,

$$F(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1 - z}, \tag{67}$$

эту формулу можно весьма просто вывести иначе из тождества

$$\frac{1 - z^{2^n}}{1 - z} = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4) \ldots (1 + z^{2^{n-1}}).$$

Упражнения.

1.—Найти аналитическую функцию $f(z) = X + iY$, действительная часть X которой равна

$$\frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x};$$

решить ту же задачу при условии, что предыдущая функция равна сумме $X + Y$.

2. Пусть будет $\varphi(m, p) = 0$ тангенциальное уравнение действительной алгебраической кривой, т.-е. условие, чтобы прямая $y = mx + p$ была касательною к этой кривой. Доказать, что корни уравнения $\varphi(i, -iz) = 0$ суть аффиксы действительных фокусов этой кривой.

3. Показать, что если p и q — взаимно простые целые числа, то выражения $\left(\sqrt[q]{z}\right)^p$ и $\sqrt[q]{z^p}$ — равносильны. Что будет, если p и q имеют общего наибольшего делителя $d > 1$?

4. Найти модуль и аргумент количества e^{x+yi}, рассматривая его, как предел многочлена $\left(1 + \frac{x+yi}{m}\right)^m$ при неограниченном возрастании целого числа m.

5. Вывести формулы

$$\cos a + \cos(a+b) + \ldots + \cos(a+nb) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin(a+b) + \ldots + \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right).$$

6. Определить конечное значение функции $\arcsin z$, когда переменное z описывает прямолинейный отрезок между точками 0 и $1+i$, причем за начальное значение $\arcsin z$ принят 0.

7. Пользуясь формулою (12) (§ 266)

$$f(z+h) - f(z) = hf_1(z) + \frac{h^2}{1.2} f_2(z) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f_n(z) + \ldots,$$

доказать, что целый ряд есть непрерывная функция переменного.

[Для доказательства следует взять соответственную усиливающую функцию для ряда в правой части.]

8. Вычислить интегралы

$$\int x^m e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int x^m e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int \operatorname{ctg}(x-a) \operatorname{ctg}(x-b) \ldots \operatorname{ctg}(x-l) dx.$$

9. Рассмотрим в плоскости xOy замкнутую кривую C, имеющую любое число двойных точек; установим на ней некоторое определенное направление обхода и припишем каждой области плоскости, определяемой этою кривою, числовой коэффициент по правилу § 96 (т. I). Пусть будут R и R' две пограничные области, разделяемые дугою ab контура, описываемою в направлении от a до b; тогда коэффициент площади, расположенной влево от ab, будет на единицу больше коэффициента площади, лежащей вправо от ab, причем область вне контура C имеет коэффициент нуль.

Пусть будет z_0 точка в одной из этих областей, а N—коэффициент, соответствующий этой области. Доказать, что $2N\pi$ представляет изменение аргумента количества $z - z_0$, когда точка z описывает кривую C в установленном направлении обхода.

10. Доказать из рассмотрения разложения $\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ на круге сходимости, что сумма ряда

$$\frac{\sin\theta}{1}+\frac{\sin 3\theta}{3}+\frac{\sin 5\theta}{5}+\ldots+\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}+\ldots$$

равна $+\frac{\pi}{4}$, если $\sin\theta>0$, и $-\frac{\pi}{4}$, если $\sin\theta<0$ (см. т. I, § 198).

11. Исследовать линии, описываемые точкою $Z=z^2$, когда точка z описывает прямую линию или окружность.

12. Доказать, что при помощи соотношения $2Z=z+\frac{c^2}{z}$ можно изобразить конформно площадь, заключающуюся между двумя софокусными эллипсами, на круговом кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями.

[Для доказательства возьмем, например, решение $z=Z+\sqrt{Z^2-c^2}$ и, проведя в плоскости Z прямолинейный разрез $(-c,+c)$, условимся брать для корня положительное значение, если Z действительно и больше, чем c.]

13. Показать, что всякое круговое преобразование $z'=\frac{az+b}{cz+d}$ равносильно четному числу инверсий. Обратная теорема.

14. Показать, что всякое преобразование, определяемое соотношением $z'=\frac{az_0+b}{cz_0+d}$, где z_0 есть мнимое количество, сопряженное с z, равносильно нечетному числу инверсий. Обратная теорема.

15. Преобразования Фукса. — Всякое круговое преобразование $z'=\frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — действительные числа, удовлетворяющие условию $ad-bc=1$, переводит всякую точку z, лежащую над осью Ox, в некоторую точку z' той же полуплоскости.

Относительно всех этих преобразований, определенные интегралы

$$\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y},\ \iint\frac{dx\,dy}{y^2}$$

являются инвариантами.

Рассматриваемое преобразование имеет две двойных точки, соответствующих корням α и β уравнения $cz^2+(d-a)z-b=0$. Если α и β — действительны и различны, то уравнение $z'=\frac{az+b}{cz+d}$ можно представить в равносильной форме

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta}=k\,\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

где k — действительно; в этом случае преобразование называется гиперболическим. Если α и β — сопряженные мнимые количества, то уравнение можно представить в виде

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta}=e^{i\omega}\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

где ω — действительно; это — эллиптическое преобразование. Наконец, если $\beta=\alpha$, то мы получим

$$\frac{1}{z'-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+k,$$

где α и k — действительны; в этом случае преобразование называется **параболическим**.

16. Пусть будет $z' = f(z)$ преобразование Фукса. Положим

$$z_1 = f(z),\ z_2 = f(z_1),\ \ldots,\ z_n = f(z_{n-1}).$$

Показать, что все точки $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат на окружности. Исследовать, стремится ли точка z_n к предельному положению при неограниченном возрастании числа n.

17. Рассмотрим круг C с центром O и с радиусом, равным R; пусть будут M и M' точки, лежащие на полупрямой, выходящей из точки O. Если $OM \times OM' = R^2$, то точки M, M' называются **симметричными** относительно круга C.

Пусть будут C и C' два круга в одной и той же плоскости, и M — какая-нибудь точка этой плоскости. Возьмем точку M_1, симметричную с точкою M относительно круга C, потом точку M'_1, симметричную с M_1 относительно C', затем точку M_2, симметричную с M'_1 относительно C, и т. д. до бесконечности. Исследовать распределение в плоскости точек M_1, M'_1, M_2, M'_2, ...

18. Найти аналитическую функцию $Z = f(z)$, с помощью которой можно перейти от меркаторской проекции к стереографической.

19*. Доказать, что все семейства изотермических линий, состоящие из одних кругов, образованы кругами, проходящими через две постоянные точки, различные или слившиеся, действительные или мнимые.

[Уравнение семейства кругов, зависящих от одного переменного параметра λ, можно представить в виде

$$zz_0 + az + bz_0 + c = 0,$$

где $z = x + iy$, $z_0 = x - iy_0$, и a, b, c — функции параметра λ. Чтобы это семейство было изотермическим, должно быть $\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\,\partial z_0} = 0$. Выполнив вычисление, мы докажем рассматриваемую теорему.]

20. Для того, чтобы бесконечное произведение было сходящимся и отличным от нуля необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа ε можно было найти такое целое число n, чтобы было

$$|(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+p}) - 1| < \varepsilon,$$

при всяком значении целого числа p.

21*. Если $|q| < 1$, то мы имеем тождество

$$(1 + q)(1 + q^2) \ldots (1 + q^n) \ldots = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3) \ldots (1 - q^{2n+1}) \ldots},$$

. . . .

[Эйлер.]

[Чтобы доказать это тождество, преобразуем бесконечное произведение в левой части в двойное бесконечное произведение, расположив в первой строке множители $1 + q$, $1 + q^2$, $1 + q^4, \ldots, 1 + q^{2^n}, \ldots$, во второй строке—множители $1 + q^3$, $1 + q^6, \ldots$, $1 + (q^3)^{2^n}, \ldots$, и затем применим формулу (67) (§ 286).]

22. Разложить по степеням количества z бесконечные произведения

$$F(z) = (1 + xz)(1 + x^2z) \ldots (1 + x^nz) \ldots,$$
$$\Phi(z) = (1 + xz)(1 + x^3z) \ldots (1 + x^{2n+1}z) \ldots.$$

[Для решения этой задачи можно, например, воспользоваться соотношениями $F(xz)(1+xz)=F(z)$, $\Phi(x^2z)(1+xz)=\Phi(z)$.]

23*. Предполагая, что $|x|<1$, вывести формулу Эйлера

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots$$
$$=1-x-x^2+x^5-x^7+x^{12}-\ldots+x^{\frac{3n^2-n}{2}}-x^{\frac{3n^2+n}{2}}$$

[См. Ж. Бертран, Calcul différentiel, стр. 328.]

24*. Знакоположительный ряд $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ будет сходящимся или расходящимся вместе с рядом

$$\frac{u_0}{s_0}+\frac{u_0}{s_1}+\ldots+\frac{u_n}{s_n}+\ldots,\text{ где } s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n.$$

[Абель.]

[Для доказательства следует воспользоваться равенством

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{s_i}\right)=\frac{s_0}{s_n}$$

и применить теорему § 285.]

25*. Сделаем стереографическую проекцию шара с радиусом, равным единице, на плоскость его экватора, причем возьмем центр проекции в одном из полюсов. Каждой точке M шара соответствует комплексное число $s=x+iy$, где x и y суть прямоугольные координаты проекции m точки M относительно прямоугольных осей, лежащих в плоскости экватора и имеющих начало в центре шара. Диаметрально противоположным точкам шара соответствуют комплексные числа s и $-\frac{1}{s_0}$, где s_0 — число сопряженное с s.

Всякое линейное преобразование вида

$$\frac{s'-\alpha}{s'-\beta}=e^{i\omega}\frac{s-\alpha}{s-\beta}, \qquad (A$$

где $\beta\alpha_0+1=0$, определяет вращение шара вокруг диаметра. Группам вращений, приводящим правильный многогранник к совпадению с самим собою, соответствуют группы конечного числа линейных подстановок вида (A).

[См. Клейн (Klein), Das Ikosaeder.]

ГЛАВА XIV.

Общая теория аналитических функций по Коши.

I. — Определенные интегралы между мнимыми пределами

287. Определения и общие положения.—Результаты, изложенные в предыдущей главе, независимы от работ Коши, и, по большей части, были известны ранее появления этих работ. Теперь мы обратимся к систематическому изучению аналитических функций и проследим, какие следствия вытекают из самого их определения. Напомним, что функция $f(z)$ называется голоморфною в области A, если: 1) каждой точке z области A соответствует определенное значение функции $f(z)$; 2) непрерывному изменению переменного z соответствует непрерывное изменение значения $f(z)$; 3) для всякой точки z области A отношение

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

стремится к некоторому пределу $f'(z)$, когда модуль количества h стремится к нулю.

Рассмотрение определенных интегралов, когда переменное проходит через ряд мнимых значений, было введено в анализ Коши [1]); оно служит источником новых плодотворных методов.

Пусть будет $f(z)$ функция переменного z, непрерывная вдоль дуги кривой AMB (черт. 64); отметим на этой дуге некоторое число точек деления $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z'$, следующих одна за другою в порядке возрастания указателей, когда точка z описывает дугу AMB в направлении от A до B; пусть точки z_0 и z' совпадают с концами дуги A и B.

Возьмем затем на дуге AB второй ряд точек $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, причем точка ζ_k лежит на дуге $z_{k-1}z_k$, и рассмотрим сумму

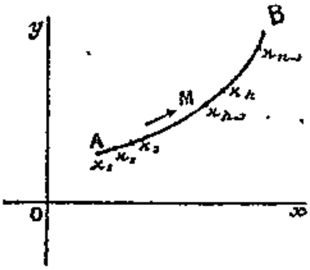
$$S=f(\zeta_1)(z_1-z_0)+f(\zeta_2)(z_2-z_1)+\ldots+f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})+\ldots+f(\zeta_n)(z'-z_{n-1}).$$

---

[1]) Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, 1825. Этот Мемуар переиздан в VII и VIII томах Bulletin des Sciences mathématiques (1-я серия).

Если число точек деления $z_1, \ldots, z_{n-1}$ неограниченно возрастает и притом так, что модули всех разностей $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, ... делаются меньшими всякого произвольно выбранного положительного числа, то сумма S стремится к некоторому пределу; этот предел называется определенным интегралом от функции $f(z)$ вдоль дуги AMB и изображается символом

Черт. 64.



$$\int_{(AMB)} f(z)dz.$$

В самом деле, отделим в сумме S действительную часть от коэффициента при i; пусть будут

$$f(z) = X + Yi,\quad z_k = x_k + y_k i,\quad \zeta_k = \xi_k + \eta_k i,$$

причем функции X и Y непрерывны вдоль AMB. Собирая вместе соответственные члены, мы можем представить сумму S в виде

$$\begin{aligned}S = {} & [X(\xi_1,\eta_1)(x_1 - x_0) + \ldots + X(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + X(\xi_n,\eta_n)(x' - x_{n-1})] \\ & - [Y(\xi_1,\eta_1)(y_1 - y_0) + Y(\xi_k,\eta_k)(y_k - y_{k-1}) + \ldots] \\ & + i[X(\xi_1,\eta_1)(y_1 - y_0) + \ldots] + i[Y(\xi_1,\eta_1)(x_1 - x_0) + \ldots].\end{aligned}$$

При неограниченном возрастании числа подразделений, сумма членов в каждой квадратной скобке имеет пределом криволинейный интеграл, взятый вдоль дуги AMB, и предел суммы S равен сумме четырех криволинейных интегралов [1])

$$\int_{(AMB)} f(z)dz = \int_{(AMB)} (Xdx - Ydy) + i\int_{(AMB)} (Ydx + Xdy).$$

Из этого определения интеграла по мнимому переменному непосредственно следует, что

$$\int_{(AMB)} f(z)dz + \int_{(BMA)} f(z)dz = 0.$$

---

[1]) Чтобы избежать ненужной сложности в доказательствах, мы предположим, что координаты (x, y) точек дуги AMB суть непрерывные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ параметра t, имеющие между A и B только конечное число maxima и minima. В этом случае можно разбить путь интегрирования на конечное число дуг, каждая из которых представится или уравнением вида $y = F(x)$, где функция F — непрерывна между соответствующими пределами, или уравнением вида $x = G(y)$. В этом предположении нет никакого неудобства, так как во всех приложениях выбор пути интегрирования всегда допускает известную степень произвола. Впрочем, было бы достаточно предположить, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — с ограниченным изменением, тогда кривая AMB будет спрямляемою (т. I, Допол., § 11).

Часто бывает нужно знать верхнюю границу модуля интеграла. Пусть будет s длина дуги AM, L—длина дуги AB, s_{k-1}, s_k, σ_k—длины дуг Az_{k-1}, Az_k, $A\zeta_k$—пути интегрирования. Полагая $F(s)=|f(z)|$, имеем

$$|f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})|=F(\sigma_k)|z_k-z_{k-1}|\leqq F(\sigma_k)(s_k-s_{k-1}),$$

так как $|z_k-z_{k-1}|$ представляет длину хорды, а (s_k-s_{k-1}) — длину дуги. Следовательно, модуль суммы S не больше суммы $\Sigma F(\sigma_k)(s_k-s_{k-1})$, и, переходя к пределу, получим

$$\left|\int_{(AMB)} f(z)dz\right|\leqq\int_0^L F(s)ds.$$

Пусть будет M верхняя граница модуля функции $f(z)$ вдоль дуги AB. Очевидно, что модуль интеграла в правой части меньше ML и мы имеем, *a fortiori*,

$$\left|\int_{(AMB)} f(z)dz\right|<ML.$$

288. Замены переменных.—Рассмотрим тот случай, часто встречающийся в приложениях, когда координаты x, y точек дуги AB суть непрерывные функции переменного параметра t, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, имеющие непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$; предположим, что при изменении t от α до β, точка (x, y) описывает путь интегрирования в направлении от A до B. Пусть будут $P(t)$ и $Q(t)$ функции параметра t, в которые обращаются функции X и Y, если мы заменим в них x и y соответственно через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. По формуле замены переменных в криволинейных интегралах (т. I, § 93) имеем

$$\int_{(AB)} Xdx-Ydy=\int_\alpha^\beta [P(t)\varphi'(t)-Q(t)\psi'(t)]dt,$$

$$\int_{(AB)} Xdy+Ydx=\int_\alpha^\beta [P(t)\psi'(t)+Q(t)\varphi'(t)]dt.$$

Сложим оба равенства, умножив предварительно обе части последнего на i; мы будем иметь

$$\int_{(AB)} f(z)dz=\int_\alpha^\beta [P(t)+iQ(t)][\varphi'(t)+i\psi'(t)]dt. \qquad (1$$

Это тот же самый результат, который мы получили бы, если бы применили к интегралу $\int f(z)dz$ формулу замены переменных, выведенную для случая действительных функций и переменных: чтобы иметь новый интеграл, достаточно заменить в $f(z)dz$ переменное z через $\varphi(t)+i\psi(t)$ и dz через $[\varphi'(t)+i\psi'(t)]dt$. Таким образом, вычисление интеграла $\int f(z)dz$ приводится к вычислению двух обыкновенных интегралов. Если путь AMB состоит из нескольких дуг различных кривых, то предыдущую формулу следует применить к каждой из этих дуг отдельно.

Рассмотрим, например, определенный интеграл $\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{z^2}$. Этот интеграл нельзя вычислять вдоль действительной оси, так как подъинтегральная функция обращается в бесконечность при $z=0$, но можно итти любым путем, не проходящим через начало координат. Будем перемещать точку z по полуокружности с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат; для этого всего проще положить $z=e^{ti}$ и изменять t от π до 0. Мы будем иметь

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{z^2}=\int_{\pi}^{0} ie^{-ti}dt=i\int_{\pi}^{0}\cos t\,dt+\int_{\pi}^{0}\sin t\,dt=-2;$$

это тот же результат, какой мы получили бы, применяя основную формулу интегрального исчисления к начальной функции $-\frac{1}{z}$ (т. I, § 76).

Вообще, пусть будет $z=\varphi(u)$ непрерывная функция другого комплексного переменного $u=\xi+\eta i$, такая, что когда u описывает в своей плоскости путь CND, то переменное z описывает дугу AMB. Точкам разбиения дуги AMB соответствуют на дуге CND точки разбиения $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k, \ldots, u'$. Если функция $\varphi(u)$ имеет вдоль дуги CND производную $\varphi'(u)$, то

$$\frac{z_k-z_{k-1}}{u_k-u_{k-1}}=\varphi'(u_{k-1})+\varepsilon_k,$$

причем ε_k стремится к нулю, когда u_k стремится к u_{k-1}, оставаясь на кривой CND. Вернемся к рассмотренной выше сумме S; взяв $\zeta_{k-1}=z_{k-1}$ и заменяя разность z_k-z_{k-1} ее значением, выведенным из предыдущего равенства, мы можем представить S в виде

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(z_{k-1})\,\varphi'(u_{k-1})\,(u_k-u_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k f(z_{k-1})\,(u_k-u_{k-1}).$$

Первая сумма в правой части имеет пределом определенный интеграл

$$\int_{(CND)} f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)du.$$

Что касается второй суммы, то ее модуль меньше, чем $\eta ML'$, где η — положительное число, большее всех модулей $|\varepsilon_k|$, и L' — длина дуги CND. Если можно взять точки разбиения настолько близкими одна к другой, чтобы все модули $|\varepsilon_k|$ были меньшими произвольного положительного числа, то этот дополнительный член стремится к нулю, и мы имеем общую формулу замены переменных

$$\int_{(AMB)} f(z)dz=\int_{(CND)} f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)du. \qquad (2)$$

Эта формула применима всякий раз, когда функция $\varphi(u)$ — голоморфна; в самом деле, ниже будет доказано, что производная голомофорной функции есть также голоморфная функция (см. § 296) [1].

289. Формулы Вейерштрасса и Дарбу.—Доказательство формулы среднего значения (т. I, § 74) опирается на некоторые неравенства, которые не имеют места в случае мнимых количеств. Однако Вейерштрасс и Дарбу пришли в этом направлении к интересным результатам, рассматривая интегралы, взятые вдоль отрезка действительной оси. Выше мы видели, что и случай произвольного пути можно привести к этому частному случаю при некоторых весьма общих предположениях относительно пути интегрирования.

Пусть будет I определенный интеграл следующего вида

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)[\varphi(t)+i\psi(t)]dt,$$

---

[1] Действительно, пользуясь этим последним свойством голоморфных функций, нетрудно доказать следующее предложение:

Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная в конечной части A плоскости. Тогда для всякого положительного числа ε можно найти такое положительное число η, чтобы было

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon, \tag{A}$$

если расстояние $|h|$ между точками z и $z+h$ области A меньше числа η.

В самом деле, пусть будет $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$, $h=\Delta x+i\Delta y$. На основании выводов, полученных при определении условий существования единственной производной (§ 261), имеем

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)=\frac{P(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-P(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}+$$
$$+i\,\frac{Q(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-Q(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}-\frac{(P'_x+iQ'_x)\,\Delta x+i\,(P'_y+iQ'_y)\,\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

или

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)=\frac{[P'_x(x+\theta'\Delta x,\, y)-P'_x(x,y)]\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$+\frac{[P'_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y)-P'_y(x,y)]\,\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Так как производные P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y — непрерывны в области A, то можно найти такое число η, чтобы в предыдущем равенстве модули коэффициентов при Δx и Δy были меньшими $\frac{\varepsilon}{4}$, если $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\eta$. Следовательно, неравенство (A) будет иметь место, если $|h|<\eta$. Таким образом, если функция $\varphi(u)$ — голоморфна, то все модули $|\varepsilon_k|$ будут меньше данного положительного числа ε, если только расстояние между двумя соседними точками разбиения дуги CND будет меньше соответствующего числа η, и формула (2) доказана.

где $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — действительные функции действительного переменного t, непрерывные в промежутке (α, β); очевидно, что из самого определения интеграла следует, что

$$I = \int_\alpha^\beta f(t)\varphi(t)dt + i\int_\alpha^\beta f(t)\psi(t)dt.$$

Для определенности предположим, что $\alpha < \beta$; тогда разность $t - \alpha$ представит длину пути интегрирования, измеряемую от начала этого пути, и общая формула для верхней границы модуля определенного интеграла будет иметь вид

$$|I| \leqq \int_\alpha^\beta |f(t)[\varphi(t) + i\psi(t)]|\, dt.$$

Если, кроме того, между α и β функция $f(t)$ положительна, то

$$|I| \leqq \int_\alpha^\beta f(t)\varphi|(t) + i\psi(t)|\, dt,$$

или, применяя к этому новому интегралу формулу среднего значения и обозначая через ξ некоторое значение переменного t, заключающееся между α и β,

$$|I| \leqq |\varphi(\xi) + i\psi(\xi)| \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Полагая $F(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, мы можем представить иначе этот результат в виде

$$I = \lambda F(\xi)\int_\alpha^\beta f(t)dt, \tag{3}$$

где λ — комплексное число, модуль которого меньше или равен единице, это — формула Дарбу.

Вейерштрасс дал более точное выражение, которое можно связать с одною из основных задач статики. Предположим, что при возрастании t от α до β, точка с координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ описывает некоторую дугу кривой L. Пусть будут (x_0, y_0), (x_1, y_1), .. (x_{k-1}, y_{k-1}), ... точки дуги L, соответствующие значениям $\alpha, t_1, \ldots, t_{k-1}, \ldots$ параметра t. Положим

$$X = \frac{\Sigma\varphi(t_{k-1})f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})}{\Sigma f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})},$$
$$Y = \frac{\Sigma\psi(t_{k-1})f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})}{\Sigma f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})}.$$

На основании известной теоремы статики, X и Y суть координаты центра тяжести системы масс, находящихся в точках (x_0, y_0), (x_1, y_1), ... (X_{k-1}, Y_{k-1}), линии L, причем в точке (x_{k-1}, y_{k-1}) помещена масса

$f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$. Очевидно, что этот центр тяжести должен лежать внутри всякого замкнутого выпуклого контура C, окружающего линию L. При неограниченном возрастании числа промежутков, точка (X, Y) имеет пределом точку (u, v) с координатами.

$$u = \frac{\int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi(t)\,dt}{\int_\alpha^\beta f(t)\,dt}, \qquad v = \frac{\int_\alpha^\beta f(t)\,\psi(t)\,dt}{\int_\alpha^\beta f(t)\,dt},$$

которая также находится внутри контура C. Обе эти формулы можно соединить в одну:

$$I = (u + iv)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = Z\int_\alpha^\beta f(t)\,dt, \tag{4}$$

где Z — аффикс некоторой точки, лежащей внутри всякого замкнутого выпуклого контура, окружающего линию L.

Очевидно, что в общем случае множитель Z Вейерштрасса может изменяться в более тесной области, чем множитель $\lambda F(\xi)$ Дарбу.

290. Интегралы по замкнутому контуру. — В выводах предыдущих параграфов было достаточно предполагать, что функция $f(z)$ комплексного переменного z непрерывна на всем пути интегрирования. Мы теперь предположим сверх того, что функция $f(z)$ — аналитическая, и прежде всего посмотрим, как влияет на значение определенного интеграла путь, описываемый переменным при переходе от A до B.

Если функция $f(z)$ голоморфна внутри замкнутой линии и на самой этой линии, то интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль этой линии, равен нулю.

Для доказательства этой основной теоремы, принадлежащей Коши, мы докажем сначала несколько лемм.

1. Интегралы $\int dz$, $\int z\,dz$, взятые вдоль любой замкнутой линии, равны нулю. В самом деле, по самому определению интеграла, интеграл $\int dz$, взятый вдоль любого пути между точками a и b, равен $b - a$; если путь — замкнутый, то этот интеграл равен нулю, так как в этом случае $b = a$. Найдем теперь значение интеграла $\int z\,dz$, взятого вдоль любого пути, соединяющего точки a и b; взяв в выражении для S в § 287 один раз $\zeta_k = z_{k-1}$, а другой $\zeta_k = z_k$, мы можем представить этот интеграл, как предел суммы

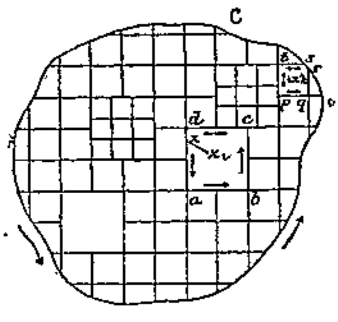
$$\sum_i \frac{z_i(z_{i+1} - z_i) + z_{i+1}(z_{i+1} - z_i)}{2} = \sum \frac{z_{i+1}^2 - z_i^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2};$$

если путь — замкнутый, то этот интеграл также равен нулю.

2. Если мы разобьем площадь, ограниченную каким-нибудь контуром C, произвольными секущими линиями, то сумма интегралов $\int f(z)dz$, взятых в одном и том же направлении вдоль контуров всех этих частей, равна интегралу $\int f(z)dz$, взятому вдоль всего контура C. В самом деле, очевидно, что каждая часть проведенных вспомогательных линий разделяет две пограничные области и потому должна быть проходима дважды в противоположных направлениях. Следовательно, по сложении всех этих интегралов, останутся только интегралы, взятые вдоль частей контура C, и их сумма равна интегралу $\int_{(C)} f(z)dz$.

Разобъем теперь площадь A с одной стороны на правильные части, состоящие из квадратов со сторонами, параллельными осям Ox, Oy, с другой стороны — на неправильные части, получающиеся из тех квадратов, которые отчасти выступают за контур C. Стороны этих квадратов могут и не иметь одинаковой длины. Например, можно сначала провести все сети прямых, параллельных осям Ox и Oy и отстоящих друг от друга на постоянное расстояние l, и затем разбить получившиеся квадраты на более мелкие квадраты новыми прямыми, параллельными осям координат. При каждом способе разбиения, предположим, что мы имеем N правильных частей и N' неправильных частей; перенумеруем правильные части в произвольном порядке от 1 до N и неправильные от 1 до N'. Пусть будут l_i сторона i-го квадрата, l'_k—сторона квадрата, принадлежащего k-ой неправильной части, L — длина контура C и A—площадь некоторого многоугольника, содержащего контур C внутри себя.

Черт. 65.



Пусть будет $abcd$ квадрат с нумером i (черт. 65); если z_i есть точка, взятая внутри или на одной из сторон этого квадрата, и z — какая-нибудь точка его контура (черт. 65), то мы имеем

$$\frac{f(z)-f(z_i)}{z-z_i}=f'(z_i)+\varepsilon_i, \tag{5}$$

где ε_i очень мало, если только сторона квадрата сама очень мала. Отсюда получим

$$f(z)=zf'(z_i)+f(z_i)-z_i f'(z_i)+\varepsilon_i(z-z_i),$$

$$\int_{(c_i)} f(z)dz=f'(z_i)\int_{(c_i)} z\,dz+[f(z_i)-z_i f'(z_i)]\int_{(c_i)} dz+\int_{(c_i)}\varepsilon_i(z-z_i)dz,$$

где интегралы взяты вдоль контура c_i квадрата $abcd$. Применяя доказанную выше первую лемму, будем иметь

$$\int_{(c_i)} f(z)dz = \int_{(c_i)} \varepsilon_i (z - z_i) dz. \tag{6}$$

Пусть будет $pqrst$ неправильная часть с нумером k; если z'_k есть точка, взятая внутри или на контуре этой части, и z — какая-нибудь точка ее контура, то мы можем положить и здесь

$$\frac{f(z) - f(z'_k)}{z - z'_k} = f'(z'_k) + \varepsilon'_k, \tag{7}$$

где ε'_k бесконечно-мало вместе с l'_k; отсюда получаем

$$\int_{(c'_k)} f(z)dz = \int_{(c'_k)} \varepsilon'_k (z - z'_k) dz. \tag{8}$$

Пусть будет η положительное число, бо́льшее модулей всех множителей ε_i и ε'_k. Модуль разности $z - z_i$ меньше $l_i\sqrt{2}$, и из формулы (6) имеем

$$\left|\int_{(c_i)} f(z)dz\right| < 4\, l_i^2 \eta \sqrt{2} = 4\eta\sqrt{2}\, \omega_i,$$

где ω_i — площадь i-ой правильной части. Точно также из соотношения (8) получим

$$\left|\int_{(c'_k)} f(z)dz\right| < \eta\, l'_k \sqrt{2}\,(4\, l'_k + rs) = 4\eta\sqrt{2}\, \omega'_k + \eta\, l'_k \sqrt{2}\, rs,$$

где ω'_k — площадь квадрата, содержащего k-ую неправильную часть. Складывая все эти неравенства, будем иметь *a fortiori*,

$$\left|\int_{(C)} f(z)dz\right| < \eta\, [\, 4\sqrt{2}\,(\Sigma\omega_i + \Sigma\omega'_k) + \lambda\sqrt{2}\, L], \tag{9}$$

где λ есть верхняя граница сторон l'_k. Если число квадратов неограниченно возрастает так, что все стороны l_i и l'_k стремятся к нулю, то сумма $\Sigma\omega_i + \Sigma\omega'_k$ наконец сделается меньшею площади A. Следовательно, в правой части неравенства (9) мы имеем произведение множителя, остающегося конечным, на множитель η, который можно сделать меньшим всякого заданного положительного числа. Это может иметь место только в том случае, если левая часть неравенства равна нулю; следовательно, мы имеем

$$\int_{(C)} f(z)dz = 0.$$

291. Чтобы предыдущее заключение было верно, следует доказать, что можно взять размеры квадратов настолько малыми, чтобы, при надлежащем выборе точек z_i и z'_k, модули всех количеств ε_i, ε'_k были меньше всякого заданного положительного числа η [1]). Мы будем говорить, для краткости, что область, ограниченная линией γ, лежащею в части плоскости, ограниченной контуром C, удовлетворяет условию (α) относительно числа η, если можно найти внутри линии γ или на самой этой линии такую точку z', чтобы было постоянно

$$|f(z)-f(z')-(z-z')f'(z')|\leq|z-z'|\eta, \tag{α}$$

когда точка z описывает линию γ. Наша задача будет решена, если мы докажем, что **можно взять размеры квадратов настолько малыми, чтобы все рассматриваемые части, правильные и неправильные, удовлетворяли условию (α) относительно числа η.**

Мы докажем эту новую лемму известным методом последовательных разбиений. Проведем сначала две сети прямых, параллельных осям Ox и Oy на постоянном расстоянии l друг от друга. Среди получившихся частей одни могут удовлетворять условию α, тогда как другие ему удовлетворять не будут. Не изменяя ничего в частях, удовлетворяющих условию (α), разобьем остальные на более мелкие части, соединяя средины противоположных сторон квадратов, образующих эти части или квадратов, их содержащих. Если, после этой новой операции, останутся части, не удовлетворяющие условию (α), то мы повторим ту же операцию над этими частями и т. д. Продолжая поступать таким образом, мы можем иметь только два случая: или мы не получим ни одной области, не удовлетворяющей условию (α), и тогда лемма доказана; или, как бы далеко мы ни шли в ряде операций, всегда будут части, не удовлетворяющие этому условию.

Если имеет место последнее, то необходимо, чтобы, неограниченно разбивая указанным приемом одну из правильных или неправильных частей, получившихся после первого разбиения, мы никогда не пришли к областям, которые все удовлетворяют условию (α). Пусть будет A_1 эта часть; после второго разбиения эта часть будет содержать в себе другую часть A_2, которая не может быть разбита на части, удовлетворяющие все условия (α). Так как рассуждение можно продолжать неограниченно, то мы получим последовательность областей

$$A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n, \ldots,$$

состоящих из квадратов или частей квадратов, каждая из которых заключается в предъидущей и размеры которых стремятся к нулю при неограниченном возрастании числа n. Следовательно, у частей A_i есть предельная точка z_0, лежащая внутри контура C или на самом этом контуре. Так как, по предположению, функция $f(z)$ при $z=z_0$ имеет производную $f'(z)$, то можно найти такое число ρ, чтобы было

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|\leq\eta|z-z_0|$$

если будет $|z-z|<\rho$. Пусть будет c круг с радиусом, равным ρ, и с центром в точке z_0. Начиная с достаточно большого значения n площадь A_n будет лежать внутри круга c, и мы будем иметь во всех точках контура площади A_n

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|\leq|z-z_0|\eta.$$

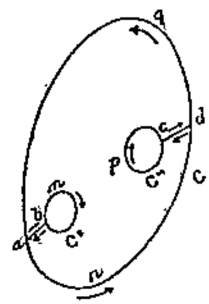
Очевидно, что точка z_0 лежит внутри площади A_n или на ее контуре; следовательно, эта площадь должна удовлетворять условию (α) относительно числа η. Таким образом, предположив, что лемма неверна, мы пришли к противоречию.

---

[1]) Гурса, Transactions of the American Mathematical Society; т. 1, стр. 14,—1900.

292. Случай сложных контуров.—Предыдущая теорема распространяется также и на контуры, состоящие из нескольких отдельных замкнутых линий; нужно только надлежащим образом условиться относительно направления обхода этих контуров. Например, рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную внутри площади A, ограниченной замкнутою линиею C и двумя внутренними линиями C', C'' (черт. 66); предположим, что функция $f(z)$ голоморфна также и на самых этих контурах C, C', C''. Полный контур Γ площади A состоит из этих трех различных линий; мы будем говорить, что контур Γ описывается в прямом направлении, если при обходе вдоль этого контура площадь A остается слева; стрелки на чертеже 66 указывают прямое направление обхода для каждого из этих контуров. При этом условии мы имеем всегда

Черт. 66.



$$\int_{(\Gamma)} f(z)dz = 0,$$

если интеграл взят в прямом направлении вдоль полного контура Γ. Доказательство этого предложения, данное для случая площади, ограниченной одним контуром, применимо также и здесь; можно также привести этот случай к предыдущему, проведя поперечные линии ab, cd и применяя теорему к замкнутой линии $abmbandcpcdqa$ (т. I, § 153).

В приложениях иногда бывает удобно представлять предыдущую формулу в виде

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(C')} f(z)dz + \int_{(C'')} f(z)dz,$$

причем все интегралы берутся в одинаковом направлении, т.-е. два последних интеграла должны быть взяты в направлении, обратном указанному стрелками.

Возвратимся к вопросу, предложенному в начале § 290; теперь очень легко дать на него ответ. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная в области A плоскости. Рассмотрим пути AMB и ANB, соединяющие две точки A и B и расположенные на всем своем протяжении внутри этой области. Так как замкнутая линия, составленная от соединения путей AMB и BNA, лежит внутри области A, то функция голоморфна внутри этой замкнутой линии (для определенности, мы предположим, что эта замкнутая линия не имеет двойной точки), а потому сумма интегралов $\int f(z)dz$, взятых вдоль путей AMB, BNA, равна нулю; отсюда следует, что интегралы вдоль AMB и ANB равны между собою. Этот результат можно выразить еще следующим образом: два пути AMB и ANB, имеющие общими начальную

и конечную точки, дают одно и то же значение $\int f(z)dz$ для интеграла, если можно перейти от одного из этих путей к другому непрерывною деформациею, не встречая при этом ни одной из точек, в которых функция перестает быть голоморфною.

Это предложение верно и в том случае, если оба пути имеют кроме конечных точек A и B любое число общих точек (т. I, § 152). Отсюда следует, что если функция $f(z)$ голоморфна внутри площади, ограниченной только одним замкнутым контуром, то интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль **любого** замкнутого контура, расположенного в этой площади, равен нулю. Но нельзя распространять это заключение на случай площади, ограниченной несколькими отдельными замкнутыми линиями. Например, рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в кольце, заключающемся между двумя концентрическими окружностями C и C'. Пусть будет C'' окружность, концентрическая с C и C' и заключающаяся между ними; интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль C'', вообще, не равен нулю. Из теоремы Коши следует только, что значение этого интеграла не изменяется при изменении радиуса окружности C'' [1]).

[1]) Для доказательства теоремы Коши нет необходимости предполагать ни существования функции $f(z)$ вне площади A, ограниченной контуром C, ни существования производной в каждой точке этого контура. Достаточно, чтобы функция $f(z)$ была голоморфною в каждой точке площади A, и **непрерывною на контуре** C, т. е., чтобы значение $f(Z)$ функции в точке Z контура C изменялось непрерывно вместе с положением Z на этом контуре, и чтобы разность $f(Z)-f(z)$, где z есть точка внутри C, равномерно стремилась к нулю вместе с $(Z-z)$. В самом деле, предположим сначала, что все полупрямые, выходящие из определенной точки a площади A встречают контур C только в одной точке. Если точка z описывает контур C, то точка $a+\theta(z-a)$ (где θ есть действительное число, содержащееся между 0 и 1) описывает контур C', расположенный на A. Разность двух интегралов, взятых вдоль контуров C и C', равна

$$\delta=\int_{(C)}\left\{f(z)-\theta f[z-(z-a)(1-\theta)]\right\}dz;$$

так как надъинтегральная функция может быть представлена в виде

$$f(z)-f[z-(z-a)(1-\theta)]+(1-\theta)f[z-(z-a)(1-\theta)],$$

то отсюда следует, что можно взять разность $1-\theta$ настолько малою, чтобы $|\delta|$ было меньшим всякого заданного положительного числа. Но интеграл вдоль C' равен нулю; следовательно, должны быть

$$\int_{(C)}f(z)dz=0.$$

В случае контура C произвольного вида, следует заменить этот контур совокупностью замкнутых контуров, удовлетворяющих предыдущему условию; этого можно достигнуть, проведя соответственным образом поперечные линии.

293. Распространение формул интегрального исчисления. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная в площади A, ограниченной простым контуром C. На основании предыдущего, определенный интеграл,

$$\Phi(Z)=\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz,$$

взятый от постоянной точки z_0 до переменной точки Z вдоль какого-нибудь пути, лежащего в площади A, есть вполне определенная функция верхнего предела Z. Мы покажем, что эта функция $\Phi(Z)$ есть также голоморфная функция переменного Z, производная которой равна $f(Z)$. Пусть будет $Z+h$ точка близкая к точке Z; мы имеем

$$\Phi(Z+h)-\Phi(Z)=\int_{Z}^{Z+h} f(z)dz,$$

и мы можем предположить, что последний интеграл взят вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки Z и $Z+h$. Если обе точки очень близки между собою, то вдоль этого пути $f(z)$ очень мало отличается от $f(Z)$, и мы имеем

$$f(z)=f(Z)+\delta,$$

где, при достаточно малом значении $|h|$, модуль $|\delta|$ меньше всякого заданного положительного числа η. Разделив на h, получим

$$\frac{\Phi(Z+h)-\Phi(Z)}{h}=f(Z)+\frac{1}{h}\int_{Z}^{Z+h}\delta\,dz;$$

так как модуль последнего интеграла меньше числа $\eta|h|$, то, при приближении h к нулю, левая часть имеет пределом $f(Z)$.

Если уже известна одна функция $F(Z)$, имеющая своею производною функцию $f(Z)$, то функции $\Phi(Z)$ и $F(Z)$ различаются между собою только на постоянное (§ 274, выноска); отсюда следует, что основная формула интегрального исчисления применима и к случаю мнимых переменных:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz=F(z_1)-F(z_0). \tag{10}$$

Формула (10) доказана нами в предположении, что обе функции $f(z)$, $F(z)$ голоморфны внутри площади A; но она применима и в более общих случаях. Функция $F(z)$ или обе функции $f(z)$ и $F(z)$ могут быть многозначными; в этом случае интеграл $\int f(z)dz$ также имеет вполне определенное значение, если только путь интегрирования не проходит ни через одну из критических точек этих функций. В этом случае нужно только при применении формулы (10) выбрать одно из начальных значений $F(z_0)$ многозначной функции $F(z)$ и рассматривать непрерывное изменение этой функции, когда переменное z описывает путь интегрирования; если функция $f(z)$ также многозначная, то из значений функции $F(z)$ нужно выбрать то, производная которого равна выбранному значению для $f(z)$.

Во всех тех случаях, когда путь интегрирования можно заключить внутри площади с простым контуром, в которой рассматриваемые ветви функций $f(z)$, $F(z)$ голоморфны, мы можем считать формулу (10) доказанною. С другой стороны, каков бы ни был путь интегрирования, его всегда можно разбить на несколько дуг, для которых последнее условие удовлетворяется; применяя формулу (10) к каждой из этих дуг отдельно и, складывая полученные результаты, мы видим, что формула (10) имеет вполне общий характер, если только, применяя ее, мы будем соблюдать необходимые предосторожности.

Например, вычислим определенный интеграл $\int_{z_0}^{z_1} z^m dz$, взятый вдоль любого пути, не проходящего через начало координат; предположим, что m есть действительное или мнимое число, отличное от -1. Здесь начальная функция равна $\frac{z^{m+1}}{m+1}$, и из общей формулы (10) следует

$$\int_{z_0}^{z_1} z^m dz = \frac{z_1^{m+1} - z_0^{m+1}}{m+1};$$

чтобы избежать неопределенности, которую представляет эта формула, если m не есть целое число, представим ее в виде

$$\int_{z_0}^{z_1} z^m dz = \frac{e^{(m+1)\operatorname{Log}(z_1)} - e^{(m+1)\operatorname{Log}(z_0)}}{m+1}.$$

Если начальное значение $\operatorname{Log}(z_0)$ выбрано, то тем самым определено значение функции $z^m = e^{m \operatorname{Log}(z)}$ вдоль пути интегрирования, а также и конечное значение $\operatorname{Log}(z_1)$. Таким образом, значение предъидущего интеграла зависит как от выбранного начального значения для $\operatorname{Log}(z)$, так и от пути интегрирования. Точно так же, формула

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Log}[f(z_1)] - \operatorname{Log}[f(z_0)]$$

не представляет никакой неопределенности, если функция $f(z)$ вдоль пути интегрирования непрерывна и не обращается в нуль; тогда точка $u = f(z)$ описывает в своей плоскости путь, не проходящий через начало координат, и правая часть равна изменению $\operatorname{Log}(u)$ вдоль этого пути.

Заметим, сверх того, что так как формула интегрирования по частям есть следствие формулы (10), то она тем самым распространяется и на интегралы от функций комплексного переменного.

294. Другой вывод предыдущих результатов.—Свойства интегралов $\int f(z)dz$ представляют большую аналогию со свойствами криволинейных интегралов, для которых удовлетворяется условие интегрируемости (т. I, § 152), и в самом деле, Риман показал, что теорема Коши непосредственно вытекает из аналогичной теоремы для криволинейных интегралов. Пусть будет $f(z)=X+iY$ функция комплексного переменного z, голоморфная внутри площади A с простым контуром. Интеграл, взятый вдоль какого-нибудь замкнутого пути C, лежащего в этой площади, равен сумме двух криволинейных интегралов

$$\int_{(C)} f(z)dz=\int_{(C)} Xdx-Ydy+i\int_{(C)} Ydx+Xdy;$$

вследствие соотношений, связывающих производные от функций X и Y,

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

оба эти криволинейных интеграла равны нулю [1]) (т. I, § 152). Отсюда следует, что интеграл $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$, взятый от постоянной точки z_0 до переменной точки z, есть функция $\Phi(z)$ переменного z, однозначная в области A. Отделим в этой функции действительную часть от коэффициента при i

$$\Phi(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

$$P(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X\,dx-Y\,dy, \qquad Q(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Y\,dx+X\,dy;$$

функции P и Q имеют частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x}=X, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-Y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=Y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=X,$$

удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

---

[1]) Следует заметить, что доказательство Римана предполагает непрерывность производных $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \ldots$, т. е. непрерывность функции $f'(z)$.

следовательно, $P+iQ$ есть голоморфная функция переменного z, производная которой равна $X+iY$, т.-е. равна $f(z)$.

Если функция $f(z)$ прерывна в каких-нибудь точках площади A, то, по крайней мере, одна из функций X, Y также прерывна, и криволинейные интегралы $P(x,y)$, $Q(x,y)$, вообще, имеют периоды, происходящие от петель, описываемых вокруг точек прерывности (т. I, § 153). Следовательно, имеет периоды и интеграл $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Мы вернемся к этим периодам впоследствии, когда подробнее ознакомимся с характером особых точек функции $f(z)$.

Ограничиваясь пока одним примером, рассмотрим интеграл $\int_1^z \frac{dz}{z}$; отделяя действительную часть от коэффициента при i, имеем

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{dx+i\,dy}{x+iy} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} + i\int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Каков бы ни был путь интегрирования, действительная часть равна $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(x^2+y^2)$. Что касается коэффициента при i, то мы видели (т. I, § 153), что он имеет период 2π; этот коэффициент равен углу, на который поворачивается радиус вектор, соединяющий начало координат с точкою (x,y). Таким образом, мы опять получаем все различные значения функции $\mathrm{Log}(z)$.

II.—Интеграл Коши.—Ряды Тэлора и Лорана.—Особые точки.—Вычеты.

Мы теперь изложим новые и важные результаты, которые Коши вывел из рассмотрения определенных интегралов, взятых между мнимыми пределами.

295. Основная формула.—Пусть будет $f(z)$ функция от z, голоморфная в конечной площади A, ограниченной контуром Γ, состоящим из одной или нескольких замкнутых линий, и непрерывная на самом этом контуре. Если x есть одна из точек площади A [1]), то функция

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

голоморфна во всех точках площади A, кроме точки $z=x$.

[1]) В последующем мы часто будем рассматривать одновременно несколько комплексных количеств. Мы будем обозначать их безразлично буквами x, z, u,... Таким образом буква x, вообще, уже не будет более служить для обозначения только действительного переменного.

Опишем около точки x в площади A круг γ радиусом, равным ρ; так как предыдущая функция голоморфна в части плоскости, ограниченной контуром Γ и кругом γ, то к ней можно применить общую теорему § 290. Предположим для определенности, что контур Γ состоит из двух замкнутых линий C и C' (черт. 67); мы имеем

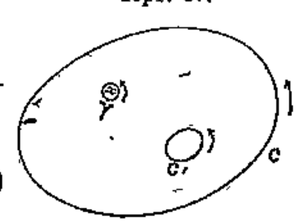
$$\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\int_{(C')}\frac{f(z)\,dz}{z-x}+\int_{(\gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

при чем эти интегралы взяты в направлении, указанном стрелками; это равенство можно представить в виде

$$\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\int_{(\gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

при чем интеграл $\int_{(\Gamma)}$ берется вдоль всего контура Γ в прямом направлении. Если радиус ρ кружка γ очень мал, то значение функции $f(z)$ в точках на этом круге очень мало отличается от значения $f(x)$,

Черт. 67.



$$f(z)=f(x)+\delta,$$

где $|\delta|$ очень мало. Заменяя $f(z)$ этим значением, получим

$$\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=f(x)\int_{(\gamma)}\frac{dz}{z-x}+\int_{(\gamma)}\frac{\delta\,dz}{z-x}. \qquad (11)$$

Первый интеграл в правой части легко найти; полагая $z=x+\rho e^{\theta i}$, будем иметь

$$\int_{(\gamma)}\frac{dz}{z-x}=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{\theta i}\,d\theta}{\rho e^{\theta i}}=2\pi i.$$

Следовательно, второй интеграл $\int_{(\gamma)}\frac{\delta\,dz}{z-x}$ не зависит от радиуса ρ окружности γ; с другой стороны, если $|\delta|$ остается меньшим положительного числа η, то модуль этого интеграла меньше чем $\frac{\eta}{\rho}2\pi\rho=2\pi\eta$. Так как функция $f(z)$ при $z=x$ непрерывна, то можно взять радиус ρ настолько малым, чтобы число η было как угодно мало. Следовательно, этот интеграл равен нулю, и, разделив обе части формулы (11) на $2\pi i$, мы получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)dz}{z-x}. \qquad (12)$$

Это—основная формула Коши. Она дает значение функции $f(z)$ в любой точке x, лежащей внутри контура, если известны значения функции вдоль этого контура.

Пусть будет $x+\Delta x$ точка, близкая к точке x; предположим, например, что она лежит внутри круга γ с центром в x и с радиусом ρ. Мы имеем по предыдущему

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-x-\Delta x};$$

вычитая отсюда почленно формулу (12) и разделив результат на Δx, получим

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x-\Delta x)}.$$

Если Δx стремится к нулю, то подъинтегральная функция имеет пределом $\frac{f(z)}{(z-x)^2}$. Чтобы строго доказать, что мы имеем право применять здесь формулу обыкновенного дифференцирования, представим этот интеграл в виде

$$\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x-\Delta x)}=\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2}+\int_{(\Gamma)}\frac{\Delta x f(z)\,dz}{(z-x)^2(z-x-\Delta x)}.$$

Пусть будет M верхняя граница модуля $|f(z)|$ вдоль контура Γ, L—длина этого контура и δ—нижняя граница расстояний между точками круга γ и точками контура Γ. Модуль последнего интеграла правой части меньше количества $\frac{ML}{\delta^3}|\Delta x|$ и, следовательно, стремится к нулю при приближении $|\Delta x|$ к нулю. Таким образом, переходя к пределу, имеем

$$f'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^2}. \tag{13}$$

Точно так же можно доказать, что обычная формула дифференцирования под знаком интеграла применима и к этому новому интегралу, а также и ко всем его производным, и мы получим последовательно

$$f''(x)=\frac{1.2}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)dz}{(z-x)^3},\quad f'''(x)=\frac{1.2.3}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^4},$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(x)=\frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}. \tag{14}$$

Таким образом, мы видим, что если функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области плоскости, то последовательность высших производных этой функции не ограничена, и все эти производные суть функции голоморфные в той же области. Следует заметить, что мы пришли к этому результату, исходя только из предположения, что $f(x)$ имеет первую производную.

Примечание.—Из рассуждений этого параграфа можно вывести более общие заключения. Пусть будет $\varphi(z)$ функция комплексного переменного z непрерывная (но не непременно аналитическая) вдоль дуги кривой Г, замкнутой или разомкнутой. Определенный интеграл

$$F(x)=\int_{(\Gamma)}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}$$

имеет определенное значение для всех значений x, не лежащих на пути интегрирования. Из предыдущих вычислений следует, что отношение $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ при приближении $|\Delta x|$ к нулю имеет пределом определенный интеграл

$$F'(x)=\int_{(\Gamma)}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^2}.$$

Следовательно, функция $F(x)$—аналитическая и голоморфная для всех значений x, кроме значений в точках контура Г, которые будут, вообще, особыми точками этой функции (см. дальше § 352). Точно так же мы найдем, что производная n-го порядка $F^{(n)}(x)$ имеет выражение

$$F^{(n)}(x)=n!\int_{(\Gamma)}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

296. Теорема Морера. — Морера (Morera) принадлежит следующее предложение, представляющее обратную теорему по отношению к основной теореме Коши: Если функция $f(z)$ комплексного переменного z непрерывна в области A, и если определенный интеграл $\int_{(C)} f(z)\,dz$, взятый вдоль любого пути, расположенного в области A, равен нулю, то функция $f(z)$ голоморфна в области A.

В самом деле, определенный интеграл $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(t)\,dt$, взятый между двумя точками z_0, z области A вдоль любого пути, расположенного в этой области, имеет определенное значение, независимое от этого пути; если точка z_0 постоянна, то этот интеграл есть функция от z. Из рассуждений § 293 следует, что отношение $\frac{\Delta F}{\Delta z}$ при приближении $|\Delta z|$ к нулю имеет пределом функцию $f(z)$. Таким образом, функция $F(z)$ есть голоморфная функция от z, имеющая производную $f(z)$, и, следовательно, эта производная есть также голоморфная функция.

297. Ряд Тэлора. — Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри круга C с центром в точке a; значение этой функции в любой точке x, взятой внутри этого круга, равно сумме сходящегося ряда

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots \quad (15)$$

При доказательстве этой теоремы мы предположим, что функция $f(z)$ голоморфна и на самой окружности C; в самом деле, если x есть какая-нибудь точка, лежащая внутри круга C, то всегда можно найти окружность C' с центром в точке a и с радиусом меньшим радиуса круга C, которая содержала бы внутри себя точку x, и воспользоваться при рассуждениях этою окружностью так же, как мы это будем делать с C. Пусть x будет точка, лежащая внутри круга C; по основной формуле мы имеем

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-x}dz. \qquad (12\text{ bis})$$

Представим $\frac{1}{z-x}$ в следующем виде

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a-(x-a)}=\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}},$$

или, выполняя деление до остатка $(n+1)$-ой степени относительно $x-a$,

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a}+\frac{x-a}{(z-a)^2}+\frac{(x-a)^2}{(z-a)^3}+\ldots+$$
$$+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{(x-a)^{n+1}}{(z-x)(z-a)^{n+1}}.$$

Заменим в формуле (12 bis) $\frac{1}{z-x}$ этим выражением и выведем из-под знака интеграла множители $x-a$, $(x-a)^2, \ldots$, не зависящие от z; мы получим

$$f(x)=I_0+I_1(x-a)+\ldots+I_n(x-a)^n+R_n,$$

при чем коэффициенты $I_0, I_1, \ldots, I_n$ и остаточный член R_n имеют следующие значения

$$\left.\begin{aligned}&I_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z-a},\quad I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2},\ \ldots,\\&I_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n},\quad R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1}\cdot\frac{f(z)\,dz}{z-x}.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

При неограниченном возрастании числа n остаточный член R_n стремится к нулю. В самом деле пусть будут M верхняя граница модуля функции $f(z)$ вдоль окружности C, R — радиус этой окружности и r — модуль разности $x-a$. Когда точка z описывает окружность C, мы имеем $|z-x|>R-r$, и, следовательно, $\left|\frac{1}{z-x}\right|<\frac{1}{R-r}$; поэтому модуль количества R_n меньше, чем $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}\frac{M}{R-r}\cdot 2R\pi=\frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$, где при неограниченном возрастании n множитель $\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$ стремится к нулю. Таким образом, $f(x)$ равно сумме сходящегося ряда

$$f(x)=I_0+I_1(x-a)+\cdots+I_n(x-a)^n+\cdots.$$

Но полагая в формулах (12), (13), (14) $x=a$ и принимая за контур Γ окружность C, мы будем иметь

$$I_0=f(a), I_1=f'(a), \cdots, I_n=\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n};$$

следовательно, полученный ряд тождествен с рядом (15), т.-е. с рядом Тэлора.

Круг C есть круг с центром в точке a, внутри которого функция голоморфна; очевидно, что мы получим наибольший круг, удовлетворяющий этому условию, взяв за его радиус расстояние от точки a до особой точки функции $f(z)$, ближайшей к точке a. Круг C есть вместе с тем круг сходимости ряда, стоящего в правой части предыдущей формулы [1]).

Из этой важной теоремы ясно видна тождественность обоих определений, данных нами для аналитических функций (§§ 191 и 261). В самом деле, всякий целый ряд представляет внутри своего круга сходимости голоморфную функцию (§ 266) и обратно, мы только что видели, что всякая функция, голоморфная внутри круга с центром в точке a, может быть разложена в целый ряд, расположенный по степеням разности $x-a$ и сходящийся внутри этого круга. Заметим вместе с тем, что некоторые полученные выше результаты делаются теперь почти очевидными; например, применяя теорему Тэлора к функциям $\operatorname{Log}(1+z)$ и $(1+z)^m$, голоморфным внутри круга с центром в начале координат и с радиусом, равным единице, мы получим формулы §§ 274 и 275. Рассмотрим еще частное двух целых рядов $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, каждый из которых—сходящийся в круге с радиусом, равным R; если ряд $\varphi(x)$ не равен нулю при $x=0$, то, так как он представляет непрерывную функцию, всегда можно найти такой круг с радиусом, равным $r \leqq R$, внутри которого $\varphi(x)$ не обращается в нуль. В этом случае функция $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ будет голоморфною внутри круга с радиусом, равным r, и, следовательно, вблизи точки $x=0$ она может быть разложена в целый ряд (т. I, § 183). Точно так же можно еще раз доказать теорему о подстановке ряда в другой ряд и т. д.

---

[1]) Для этого последнего заключения требуется несколько пояснений относительно различных видов особых точек; они будут даны в главе, посвященной аналитическому продолжению.

Примечание.—Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри круга C с центром в точке a и с радиусом, равным r, и непрерывная на самой окружности C. Модуль $|f(z)|$ функции на окружности C есть непрерывная функция, значение maximum которого мы обозначим через $\mathfrak{M}(r)$. С другой стороны, коэффициент a_n при $(x-a)^n$ в разложении функции $f(z)$ равен $\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$, т.-е. равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}};$$

следовательно, мы имеем

$$A_n=|a_n|<\frac{1}{2\pi}\frac{\mathfrak{M}(r)}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{\mathfrak{M}(r)}{r^n}; \tag{17}$$

таким образом, $\mathfrak{M}(r)$ больше всех произведений $A_n r^n$ [1]). Поэтому в выражении для усиливающей функции (т. I, § 181) можно взять $\mathfrak{M}(r)$ вместо M.

298. Теорема Лиувилля.—Если функция $f(x)$ голоморфна при всяком конечном значении переменного x, то, каково бы ни было a, ее разложение по формуле Тэйлора имеет место для всей плоскости, и рассматриваемая функция называется целою функциею. Из выражений, полученных для коэффициентов разложения, нетрудно вывести следующее предложение, принадлежащее Лиувиллю:

Всякая целая функция, модуль которой остается меньшим некоторого постоянного числа M, есть постоянное.

В самом деле, предположим, что $f(x)$ разложено по степеням $x-a$; пусть будет a_n коэффициент при $(x-a)^n$. Очевидно, что каков бы ни был радиус r круга C, количество $\mathfrak{M}(r)$ меньше числа M, и, следовательно, $|a_n|<\frac{M}{r^n}$. Так как радиус r может быть взят сколь угодно большим, то при $n\geqslant 1$ мы имеем $a_n=0$ и $f(x)$ приводится к постоянному $f(a)$.

Вообще, пусть будет $f(x)$ такая целая функция, что при всех значениях переменного x, модуль которых больше положительного числа R, модуль частного $\frac{f(x)}{x^m}$ остается меньшим некоторого опре-

---

[1]) Неравенства (17) особенно интересны тем, что они устанавливают связь между порядком величины коэффициентов целого ряда и порядком величины функции; однако $\mathfrak{M}(r)$ не есть, вообще, наименьшее из чисел, удовлетворяющих этим неравенствам, как в этом можно непосредственно убедиться, когда все коэффициенты действительны и положительны. Неравенства (17) можно также вывести и не пользуясь интегралом Коши (Méray, Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale, т. I, стр. 99).

деленного числа M; такая функция $f(x)$ приводится к многочлену, степень которого не выше m. В самом деле, предположим, что функция $f(x)$ разложена по степеням переменного x; пусть будет a_n коэффициент при x^n. Если радиус r круга C больше числа R, то мы имеем $\mathfrak{M}(r) < Mr^m$, и, следовательно, $|a_n| < Mr^{m-n}$. Если $n > m$, то должно быть $a_n = 0$, так как, выбирая r достаточно большим, можно сделать Mr^{m-n} меньшим всякого данного числа.

299. Ряд Лорана.— Рассуждения, помощью которых Коши доказал формулу Тэлора, можно значительно обобщить. Так, пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри кругового кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями C и C' с центром в точке a. Докажем, что значение $f(x)$ функции в какой-нибудь точке x, взятой в этой области, равно сумме двух сходящихся рядов, из которых один расположен по положительным степеням $x-a$, а другой — по положительным степеням $\frac{1}{x-a}$ [1].

Как и выше, мы можем предположить, что функция $f(z)$ голоморфна и на самых окружностях C, C'. Пусть будут R, R' радиусы этих кругов, и r — модуль разности $x-a$; если C' заключена внутри C, то $R' < r < R$. Из точки x, как из центра, опишем небольшой круг γ, расположенный всеми своими точками между C и C'. Мы имеем

$$\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_{(C')} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

где интегралы взяты в надлежащих направлениях. Последний интеграл, взятый вдоль γ, равен $2\pi i f(x)$, и мы можем представить предыдущее равенство иначе, в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C')} \frac{f(z)\,dz}{x-z}, \tag{18}$$

где интегралы взяты в прежних направлениях.

Повторяя рассуждения § 297, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = I_0 + I_1(x-a) + \ldots + I_n(x-a)^n + \ldots, \tag{19}$$

при чем коэффициенты $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ определяются формулами (16). Чтобы разложить в ряд второй интеграл, заметим, что мы имеем

---

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences, т. XVII.— См. Oeuvres de Cauchy, 1-я серия, т. VIII, стр. 115.

$$\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}}\right)=\frac{1}{x-a}+\frac{z-a}{(x-a)^2}+\ldots$$

$$+\frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{(x-z)(x-a)^n},$$

и что интеграл дополнительного члена

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C')}\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n\frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

при неограниченном возрастании n стремится к нулю. В самом деле, если M' есть наибольшее значение модуля $|f(z)|$ вдоль окружности C', то модуль этого интеграла меньше, чем

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{R'}{r}\right)^n\frac{M'}{r-R'}\,2\pi R'=\frac{M'R'}{r-R'}\left(\frac{R'}{r}\right)^n,$$

где множитель $\frac{R'}{r}$ меньше единицы. Следовательно, мы имеем также

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C')}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\frac{K_1}{x-a}+\frac{K_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{K_n}{(x-a)^n}+\ldots,\tag{20}$$

при чем коэффициент K_n равен определенному интегралу

$$K_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}(z-a)^{n-1}f(z)\,dz.\tag{21}$$

Теперь достаточно сложить два разложения (19) и (20), чтобы иметь разложение функции $f(x)$.

В формулах (16) и (21), определяющих коэффициенты I_n и K_n, можно брать интеграл вдоль любого круга Γ с центром в точке a, содержащегося между C и C', так как подъинтегральные функции голоморфны в круговом кольце. Условившись изменять указатель n от $-\infty$ до $+\infty$, мы можем представить разложение функции $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}I_n(x-a)^n,\tag{22}$$

где, каков бы ни был знак указателя n, коэффициент I_n выражается формулою

$$I_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.\tag{23}$$

Пример. — Одна и та же функция $f(x)$ может иметь совершенно различные разложения в зависимости от того, в какой области мы ее рассматриваем. Рассмотрим, например, рациональную функцию $f(x)$, знаменатель которой имеет только простые корни с различными модулями; пусть будут $a, b, c, \ldots, l$ эти корни, расположенные в порядке возрастания их модулей. Отбрасывая целую часть, которая в дальнейшем не имеет значения, мы имеем

$$f(x)=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots+\frac{L}{x-l}.$$

Внутри круга с радиусом, равным $|a|$, и с центром в начале координат каждую из простых дробей можно разложить по положительным степеням переменного x, и разложение функции $f(x)$ тождественно с разложением по формуле Маклорена

$$f(x)=-\left(\frac{A}{a}+\cdots+\frac{L}{l}\right)-\left(\frac{A}{a^2}+\cdots+\frac{L}{l^2}\right)x-\cdots-$$
$$-\left(\frac{A}{a^{n+1}}+\cdots+\frac{L}{l^{n+1}}\right)x^n-\cdots$$

В круговом кольце, заключающемся между кругами с радиусами $|a|$ и $|b|$, дроби $\frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}, \ldots, \frac{1}{x-l}$ могут быть разложены по положительным степеням переменного x, но дробь $\frac{1}{x-a}$ должна быть разложена по положительным степеням $\frac{1}{x}$, и мы имеем

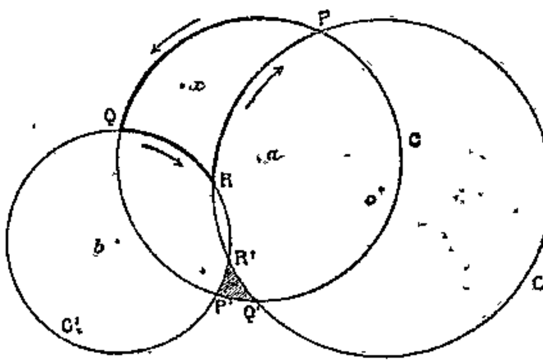
$$f(x)=-\left(\frac{B}{b}+\cdots+\frac{L}{l}\right)-\left(\frac{B}{b^2}+\cdots+\frac{L}{l^2}\right)x-\cdots-$$
$$-\left(\frac{B}{b^{n+1}}+\cdots+\frac{L}{l^{n+1}}\right)x^n-\cdots+\frac{A}{x}+\frac{Aa}{x^2}+\cdots+\frac{Aa^{n-1}}{x^n}+\cdots$$

В следующем круговом кольце мы будем иметь другое аналогичное разложение, и т. д. Наконец, вне круга с радиусом $|l|$ мы будем иметь разложение только по степеням $\frac{1}{x}$

$$f(x)=\frac{A+\cdots+L}{x}+\frac{Aa+\cdots+Ll}{x^2}+\cdots+\frac{Aa^{n-1}+\cdots+Ll^{n-1}}{x^n}+\cdots$$

300. Разные ряды. — Доказательства формулы Тэлора и формулы Маклорена основываются в сущности на особых разложениях простой дроби $\frac{1}{z-x}$, когда точка x остается внутри или вне некоторого данного круга. Аппель показал, что можно еще обобщить эти формулы, рассматривая функцию $f(x)$, голоморфную внутри некоторой площади A, ограничиваемой несколькими дугами кругов или несколькими целыми окружностями [1]).

Черт. 68.



Рассмотрим, например, функцию $f(x)$, голоморфную в криволинейном треугольнике PQR (черт. 68), образуемом тремя дугами PQ, QR, RP, принадлежащими соответственно трем окружностям C, C', C''. Обозначая через x какую-нибудь точку, лежащую внутри этого криволинейного треугольника, мы получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(PQ)}\frac{f(z)dz}{z-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(QR)}\frac{f(z)dz}{z-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(RP)}\frac{f(z)dz}{z-x}. \qquad (24)$$

[1]) Acta mathematica, т. I, стр. 145.

Если центр круга C лежит в точке a, то вдоль дуги PQ мы имеем

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a}+\frac{x-a}{(z-a)^2}+\dots+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{1}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1}.$$

Когда z описывает дугу PQ, то модуль частного $\frac{x-a}{z-a}$ остается меньшим единицы, и, следовательно, модуль интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(PQ)}\frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1}dz$$

при неограниченном возрастании числа n стремится к нулю. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(PQ)}\frac{f(z)dz}{z-x}=I_0+I_1(x-a)+\dots+I_n(x-a)^n+\dots, \tag{α}$$

где коэффициенты $I_0, I_1, \dots$, суть постоянные, выражения которых нетрудно найти. Точно так же, предполагая, что центр круга C' лежит в точке b, будем иметь вдоль дуги QR

$$\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x-b}+\frac{z-b}{(x-b)^2}+\dots+\frac{(z-b)^{n-1}}{(x-b)^n}+\frac{1}{x-z}\left(\frac{z-b}{x-b}\right)^n.$$

Так как при неограниченном возрастании числа n модуль $\left(\frac{z-b}{x-b}\right)^n$ стремится к нулю, то мы выведем отсюда для второго интеграла разложение вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(QR)}\frac{f(z)dz}{z-x}=\frac{K_1}{x-b}+\frac{K_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{K_n}{(x-b)^n}+\dots \tag{β}$$

Наконец, если центр круга C'' лежит в точке c, то мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(RP)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\frac{L_1}{x-c}+\frac{L_2}{(x-c)^2}+\dots+\frac{L_n}{(x-c)^n}+\dots \tag{γ}$$

Складывая формулы (α), (β), (γ), мы представим разложение функции $f(x)$ в виде суммы трех рядов, расположенных соответственно по положительным степеням количеств $x-a$, $\frac{1}{x-b}$ и $\frac{1}{x-c}$. Ясно, что можно преобразовать эту сумму в ряд, все члены которого суть рациональные функции от x; например, для этого можно соединить члены одинаковой степени относительно $x-a$, $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}$. Предыдущее рассуждение имеет место при любом числе дуг.

Относительно предыдущего примера можно заметить, что ряды (α), (β), (γ) будут сходящимися и в том случае, если точка x находится внутри треугольника $P'Q'R'$, и сумма этих трех рядов тоже равна интегралу $\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$, взятому в прямом направлении вдоль контура треугольника PQR. Но если точка x лежит в треугольнике $P'Q'R'$, то функция $\frac{f(z)}{z-x}$ голоморфна внутри треугольника PQR, и, следовательно, предъидущий интеграл равен нулю. Таким образом, мы получаем ряд рациональных функций, сходящийся, если точка x лежит в одном из двух треугольников PQR и $P'Q'R'$, сумма которого равна $f(x)$ или нулю, смотря по тому, лежит ли точка x в треугольнике PQR или в треугольнике $P'Q'R'$.

Идя по тому же направлению, Пенлеве получил еще более общие результаты[1]). Ограничиваясь очень простым случаем, рассмотрим замкнутую выпуклую кривую Γ, имеющую касательную, непрерывно перемещающуюся вдоль кривой, и предположим, что радиус кривизны кривой остается меньшим некоторой границы. Как нетрудно убедиться, в этом случае можно найти для каждой точки M кривой Γ соответствующий круг C, касающийся в этой точке кривой Γ, содержащий эту кривую всю внутри себя, и притом такой, что его центр перемещается непрерывно вместе с точкою M. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри контура Γ и непрерывная на самом этом контуре. Рассмотрим основную формулу

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

при чем точка x лежит внутри контура Γ мы имеем

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a}+\frac{x-a}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{1}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1},$$

где a обозначает центр круга C, соответствующего точке z контура; a уже не есть, более постоянное, как в предыдущих случаях, но когда точка M описывает кривую Γ a есть непрерывная функция от z. Однако модуль отношения $\frac{x-a}{z-a}$, которое есть непрерывная функция от z, остается меньшим некоторого определенного числа ρ, меньшего единицы; следовательно, при неограниченном возрастании n интеграл дополнительного члена стремится к нулю. Поэтому мы имеем

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(\Gamma)}\frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}f(z)\,dz \tag{25}$$

Ясно, что общий член этого ряда есть целый многочлен $P_n(x)$ не выше n-ой степени. Следовательно, внутри контура Γ функция $f(x)$ разлагается в ряд многочленов.

Пользуясь теорией конформных преобразований, можно получить для разложения голоморфных функций ряды другого вида. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри некоторой площади A, которая может простираться и в бесконечность. Предположим, что известно такое конформное изображение площади A на площади круга C, что каждой точке площади A соответствует одна и притом только одна точка круга, и обратно; пусть будет $u=\varphi(z)$ аналитическая функция, при помощи которой выполняется изображение площади A на круге C плоскости u с центром в точке $u=0$. Когда точка u описывает этот круг, соответствующее значение переменного z есть голоморфная функция от u. То же имеет место и для функции $f(z)$; следовательно, когда z остается внутри A, то функцию $f(z)$ можно разложить в сходящийся ряд, расположенный по степеням переменного u, или по степеням $\varphi(z)$.

Предположим, например, что площадь A есть неограниченная полоса, заключающаяся между прямыми $y=\pm a$, параллельными действительной оси. Мы видели (§ 279), что полагая $u=\dfrac{e^{\frac{\pi z}{2a}}-1}{e^{\frac{\pi z}{2a}}+1}$, мы изобразим эту полосу на круге с

[1]) Sur les lignes singulières des fonctions analytiques (Annales de la Faculté de Toulouse, 1888).

радиусом, равным единице, и с центром в точке $u=0$. Следовательно, всякую функцию $f(z)$, голоморфную в рассматриваемой неограниченной полосе, можно разложить в этой полосе в сходящийся ряд вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\left(\frac{e^{\frac{\pi z}{2a}}-1}{e^{\frac{\pi z}{2a}}+1}\right)^n.$$

301. Ряды голоморфных функций. — Сумма равномерно сходящегося ряда, члены которого суть голоморфные функции от z, есть непрерывная функция от z; но без особого доказательства нельзя было бы еще утверждать, что эта сумма есть также и голоморфная функция. Необходимо еще доказать, что она имеет в каждой точке единственную производную; это нетрудно сделать, воспользовавшись интегралом Коши.

Заметим сначала, что равномерно сходящийся ряд, члены которого суть непрерывные функции комплексного переменного z, можно интегрировать почленно, как в случае действительного переменного. Доказательство, данное для действительных переменных (т. I, § 174), применимо без изменения и к мнимым переменным, если только путь интегрирования имеет конечную длину.

Теорема, которую мы хотим доказать, очевидно заключается в следующем более общем предложении:

Пусть будет

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \tag{26}$$

ряд, все члены которого суть аналитические функции, голоморфные в некоторой области A, ограниченной замкнутым контуром Γ, и непрерывные на этом контуре. Если ряд (26) — равномерно сходящийся на контуре Γ, то этот ряд — сходящийся во всякой точке области A, и его сумма есть голоморфная функция $F(z)$, производная порядка p которой представляется рядом, образованным производными порядка p от членов ряда (26).

Пусть будет $\varphi(z)$ сумма ряда (26) в какой-нибудь точке контура Γ; $\varphi(z)$ есть функция от z, непрерывная вдоль этого контура, и мы видели (§ 295, примечание), что определенный интеграл

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{\varphi(z)dz}{z-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(z)}{z-x}dz \tag{27}$$

где x есть какая-нибудь точка области A, представляет функцию, голоморфную в области A, производная порядка p которой имеет выражение

$$F^{(p)}(x)=\frac{1.2\ldots p}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{\varphi(z)dz}{(z-x)^{p+1}}=\frac{1.2\ldots p}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty}f_\nu(z)}{(z-x)^{p+1}}dz. \tag{28}$$

Но ряд (26) — равномерно сходящийся на контуре Г; точно так же мы получим равномерно сходящийся ряд, разделив все члены ряда (26) на $z-x$; поэтому мы имеем

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}\frac{f_\nu(z)dz}{z-x},$$

или иначе, так как $f_\nu(z)$ есть функция, голоморфная внутри контура Г [формула (12) § 295],

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)+\ldots.$$

Точно так же формулу (28) можно представить в виде

$$F^{(p)}(x)=f_1^{(p)}(x)+\ldots+f_\nu^{(p)}(x)+\ldots.$$

Отсюда мы видим, что если ряд (26)—равномерно сходящийся во всей области A плоскости, и x какая-нибудь точка этой области, то достаточно применить предыдущую теорему к замкнутому контуру Г, расположенному в A и окружающему точку x, чтобы доказать, что этот ряд представляет голоморфную функцию. Таким образом, мы приходим к следующему предложению:

Всякий ряд, равномерно сходящийся в области A плоскости, все члены которого суть функции, голоморфные в A, представляет функцию $F(z)$, голоморфную в той же области. Производная порядка p от $F(z)$ равна сумме ряда, который получим, дифференцируя p раз каждый член ряда, представляющего функцию $F(z)$ [1].

302. Полюсы. — Всякая функция, голоморфная в круге с центром в точке a, равна внутри этого круга сумме целого ряда

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+\ldots+A_m(z-a)^m+\ldots \tag{29}$$

Для краткости мы будем говорить, что функция $f(z)$—*правильная* в точке a, и точка a есть *обыкновенная точка этой функции*. Мы будем называть *областью* точки a область, заключающуюся внутри круга C с радиусом ρ, описанного из точки a, как

[1] Это предложение обыкновенно приписывается Вейерштрассу.

из центра, внутри которой имеет место формула (29). При этом нет необходимости, чтобы круг C был наибольшим кругом, внутри которого имеет место формула (29); радиус ρ области часто будет определяться каким-нибудь другим частным свойством.

Если первый коэффициент A_0 равен нулю, то $f(a)=0$, и точка a называется **нулем** функции $f(z)$. Порядок нуля определяется так же, как для многочленов; если разложение функции $f(z)$ начинается с члена m-ой степени относительно $z-a$

$$f(z)=A_m(z-a)^m+A_{m+1}(z-a)^{m+1}+\dots\ (m>0),$$

где A_m не равно нулю, то мы имеем

$$f(a)=0,\ f'(a)=0,\dots f^{(m-1)}(a)=0,\ f^{(m)}(a)\neq 0,$$

и точка a называется **нулем** m-го **порядка**. Предыдущую формулу можно также представить в виде

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ целый ряд, не обращающийся в нуль при $z=a$. Так как этот ряд есть непрерывная функция от z, то можно выбрать радиус области настолько малым, чтобы $\varphi(z)$ не обращалось в нуль в этой области, и мы видим, что внутри этой области функция $f(z)$ не будет иметь другого нуля, кроме точки a. **Следовательно, нули голоморфной функции суть уединенные точки.**

Всякая не обыкновенная точка однозначной функции $f(z)$ называется **особою** точкою. Особая точка a функции $f(z)$ называется **полюсом**, если эта точка есть обыкновенная точка для обратного выражения $\frac{1}{f(z)}$. Разложение $\frac{1}{f(z)}$ по степеням $z-a$ не может содержать постоянного члена, так как точка a была бы тогда обыкновенною точкою для функции $f(z)$. Предположим, что разложение начинается с члена m-ой степени относительно $z-a$,

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\varphi(z), \tag{30}$$

где $\varphi(z)$ обозначает функцию, правильную в области точки a и не равную нулю при $z=a$. Отсюда получаем

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \tag{31}$$

где $\psi(z)$ также обозначает функцию, правильную в области точки a и не равную нулю при $z=a$. Эту формулу можно представить в равносильном виде

$$f(z)=\frac{B_m}{(z-a)^m}+\frac{B_{m-1}}{(z-a)^{m-1}}+\dots+\frac{B_1}{z-a}+P(z-a), \tag{31 bis}$$

где мы обозначили через $P(z-a)$, как мы это будем часто делать в дальнейшем, функцию, правильную при $z=a$, а $B_m, B_{m-1}, \ldots, B_1$ суть постоянные. Некоторые из коэффициентов $B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ могут быть равны нулю, но коэффициент B_m непременно отличен от нуля; целое число m называется порядком полюса. Мы видим, что полюс m-го порядка функции $f(z)$ есть нуль m-го порядка функции $\frac{1}{f(z)}$, и обратно.

В области полюса a разложение функции $f(z)$ состоит из правильной части $P(z-a)$ и из целого многочлена относительно $\frac{1}{z-a}$; этот многочлен называется главною частью функции $f(z)$ в области полюса. Если модуль количества $z-a$ стремится к нулю, то модуль функции $f(z)$ возрастает неограниченно, по какому бы пути точка z ни приближалась к полюсу. В самом деле, так как функция $\varphi(z)$ не равна нулю при $z=a$, то мы можем предположить радиус области настолько малым, чтобы в этой области модуль $|\varphi(z)|$ оставался бо́льшим некоторого положительного числа M. Обозначая через r модуль разности $z-a$, мы имеем $|f(z)|>\frac{M}{r^m}$; следовательно, при приближении r к нулю $|f(z)|$ неограниченно возрастает. Так как функция $\varphi(z)$ — правильная при $z=a$, то существует такой круг C с центром в точке a, внутри которого $\varphi(z)$ голоморфна. Частное $\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ голоморфно во всех точках этого круга, кроме самой точки a. Следовательно, в области полюса a функция $f(z)$ не имеет другой особой точки, кроме самого полюса; другими словами, полюсы суть уединенные особые точки.

303. Мероморфные функции. — Всякая однозначная функция, которая не имеет в области A других особых точек, кроме полюсов, называется мероморфною функциею в этой области. Мероморфная функция может во всей плоскости иметь бесконечное множество полюсов, но в области, лежащей всеми своими точками на конечном расстоянии, она может иметь их только конечное число. Доказательство основывается на следующей общей теореме. Если в области A, расположенной всеми своими точками на конечном расстоянии, существует бесконечное множество точек, обладающих некоторым общим свойством, то существует, по крайней мере, одна предельная точка, лежащая в области A или на ее контуре. Предельною точкою называется всякая точка, вблизи которой существует бесконечное множество точек, обладающих рассматриваемым свойством.

Мы докажем это предложение методом последовательных подразделений, которым мы уже неоднократно пользовались. Обозначим для краткости через (E) множество рассматриваемых точек и разобьем область на A на квадраты или части квадратов прямыми, параллельными осям Ox, Oy; мы получим, по крайней мере, одну область A_1, содержащую бесконечное множество точек множества (E). Подразделяя, точно так же A_1, и т. д., мы получим неограниченное множество областей $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ все более и более мелких, каждая из которых заключается в предыдущей и содержит неограниченное множество точек множества. Все точки области A_n стремятся к некоторой предельной точке Z, расположенной внутри или на контуре области A. Эта точка Z должна быть предельною точкою множества (E), так как внутри круга с центром в точке (Z) всегда находится неограниченное множество точек множества (E), как бы ни был мал радиус этого круга.

Предположим теперь, что функция $f(z)$ мероморфна внутри площади A, лежащей всеми своими точками на конечном расстоянии, а также и на контуре Γ этой площади. Если бы она имела бесконечное множество полюсов в этой области, то, по предыдущей теореме, существовала бы, по крайней мере, одна точка Z, расположенная в A или на Γ, вблизи которой было бы бесконечное множество полюсов. Эта точка Z не могла бы быть ни полюсом, ни обыкновенною точкою. Точно так же мы убедимся, что функция $f(z)$ может иметь только конечное число нулей в той же области. Следовательно, мы можем высказать следующее предложение:

Всякая функция, мероморфная в области A, лежащей всеми своими точками на конечном расстоянии и на контуре этой области, имеет в этой области только конечное число нулей и конечное число полюсов.

В области любой точки a мероморфная функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = (z - a)^{\mu} \varphi(z), \tag{32}$$

где $\varphi(z)$ — правильная функция, не равная нулю при $z = a$. Показатель μ называется **порядком** функции $f(z)$ в точке a. Этот порядок равен нулю, если точка a не есть ни полюс, ни нуль для $f(z)$; он равен m, если точка a есть нуль m-го порядка функции $f(z)$, и равен $-n$, если a есть полюс n-го порядка функции $f(z)$.

304. Существенно-особые точки. Всякая особая точка однозначной функции, которая не есть полюс, называется **существенно-особою точкою**. Существенно-особая точка a есть уединенная, если можно описать круг C с центром в a, внутри которого функция

$f(z)$ не имела бы никакой другой особой точки, кроме самой точки a; мы ограничимся пока рассмотрением только таких точек.

Теорема Лорана дает непосредственно разложение функции $f(z)$ в области уединенной существенно особой точки. Пусть будет C круг с центром в точке a, внутри которого функция $f(z)$ не имеет другой особой точки, кроме точки a; с другой стороны, пусть будет c круг концентрический и лежащий внутри C. В круговом кольце между кругами C и c функция $f(z)$ голоморфна и, следовательно, равна сумме ряда, расположенного по положительным и отрицательным степеням разности $z-a$,

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m (z-a)^m. \tag{33}$$

Это разложение имеет силу для всех внутренних точек круга C, кроме точки a, так как где бы в круге C ни лежала точка z, отличная от a, всегда можно взять радиус круга c меньшим, чем $|z-a|$, и коэффициенты A_m не зависят от этого радиуса (§ 299). Разложение (33) содержит, во-первых, часть, правильную в точке a, $P(z-a)$, образуемую членами с положительными показателями, и, во-вторых, ряд, расположенный по степеням $\frac{1}{z-a}$,

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots; \tag{34}$$

этот ряд называется *главною частью* функции $f(z)$ в области особой точки. Эта главная часть не приводится к многочлену, так как точка $z=a$ была бы тогда полюсом в противность предположению[1]). Это — *целая функция* от $\frac{1}{z-a}$. В самом деле, пусть будет r какое-нибудь положительное число, меньшее радиуса круга C; коэффициент A_{-m} ряда (34) имеет выражение (§ 299)

$$A_{-m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}(z-a)^{m-1}f(z)dz,$$

где интеграл взят вдоль круга C с центром в точке a и с радиусом r. Следовательно, мы имеем

$$|A_{-m}|<\mathfrak{M}(r)r^m, \tag{35}$$

[1]) Чтобы не опустить никакого предположения, надо было бы также исследовать случай, когда разложение функции $f(z)$ внутри круга C содержит только положительные степени разности $z-a$, но значение $f(a)$ функции в точке a отлично от члена ряда, не зависящего от $z-a$. Такая точка $z=a$ называется *точкою прерывности*. Мы не будем рассматривать здесь этой особенности, носящей совершенно искусственный характер (см. дальше, глава XVI).

где $\mathfrak{M}(r)$ обозначает maximum модуля функции $f(z)$ вдоль окружности C'. Следовательно, ряд (34) — сходящийся, если только $|z-a|$ больше r; а так как r есть положительное число, которое можно взять сколь угодно малым, то ряд (34) — сходящийся при всяком значении z, отличном от a, и мы имеем

$$f(z)=P(z-a)+G\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

где $P(z-a)$ обозначает функцию, правильную в точке a, и $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ целую функцию[1]) от $\frac{1}{z-a}$.

Если модуль разности $z-a$ неограниченно убывает, то значение функции $f(z)$ не стремится ни к какому определенному пределу. Точнее, если из точки a, как из центра, мы опишем круг C произвольно малого радиуса ρ, то внутри этого круга всегда существуют точки z, в которых значение функции $f(z)$ сколь угодно мало отличается от всякого заданного числа (Вейерштрасс).

Докажем сначала, что, каковы бы ни были положительные числа ρ и M, существуют значения переменного z, для которых одновременно $|z-a|<\rho$ и $|f(z)|>M$. В самом деле, если бы модуль функции $f(z)$ был не больше числа M при $|z-a|<\rho$, то $\mathfrak{M}(r)$ было бы меньше или равно M при $r<\rho$, и на основании неравенства (35), все коэффициенты A_{-m} были бы равны нулю, так как произведение $\mathfrak{M}(r)r^m<Mr^m$ стремилось бы к нулю вместе с r.

Рассмотрим теперь какое-нибудь число A. Если уравнение $f(z)=A$ имеет корни внутри круга C, как бы мал ни был его радиус ρ, то теорема доказана. Если уравнение $f(z)=A$ не имеет бесконечного множества корней вблизи точки a, то можно взять радиус ρ настолько малым, чтобы внутри круга C с радиусом ρ и с центром в точке a это уравнение не имело ни одного корня. Тогда функция $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$ будет голоморфною во всякой точке z круга C, кроме точки a; эта точка a может быть только существенно-особою точкою функции $\varphi(z)$, так как в противном случае эта точка a была бы полюсом или обыкновенною точкою функции $f(z)$. Следовательно, на основании только что доказанного, внутри круга C существуют такие значения переменного z, при которых

$$|\varphi(z)|>\frac{1}{\varepsilon}, \text{ или } |f(z)-A|<\varepsilon,$$

как бы ни было мало положительное число ε.

---

[1]) Мы часто будем обозначать через $G(x)$ целую функцию от x.

Это свойство устанавливает резкое различие между полюсами и существенно-особыми точками. Тогда как в области полюса модуль функции $f(z)$ неограниченно возрастает, в существенно особой точке значение функции остается совершенно неопределенным. Пикар[1]) получил более определенное предложение, показав, что всякое уравнение $f(z)=A$ имеет бесконечное множество корней в области существенно-особой точки, при чем исключение может иметь место только для одного частного значения числа A.

Пример.—Точка $z=0$ есть существенно особая точка для функции

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{1}{z^n}+\ldots$$

Нетрудно убедиться, что уравнение $e^{\frac{1}{z}}=A$ имеет бесконечное множество корней с модулем, меньшим ρ, как бы ρ ни было мало, если только A не равно нулю. Пусть будет $A=r(\cos\theta+i\sin\theta)$; из предыдущего уравнения получаем

$$\frac{1}{z}=\log\rho+i(\theta+2k\pi);$$

чтобы было $|z|<\rho$, достаточно, чтобы

$$(\log r)^2+(\theta+2k\pi)^2\geqq\frac{1}{\rho^2}.$$

Очевидно, что есть бесконечное множество значений целого числа k, удовлетворяющих этому условию. В этом примере есть значение числа A, составляющее исключение, именно $A=0$. Но может случиться, что нет ни одного значения, составляющего исключение; таков, например, случай функции $\sin\frac{1}{z}$.

305. Вычеты.—Пусть будет a полюс или уединенная существенно-особая точка функции $f(z)$. Вычислим интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль круга C с центром в точке a, проведенного в области точки a. Мы имеем правильную часть $P(z-a)$, интеграл которой равен нулю. Что касается главной части $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$, то ее можно интегрировать почленно; в самом деле, если a есть существенно особая точка, то $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ представляет целый, равномерно сходящийся ряд по $\frac{1}{z-a}$. Интеграл общего члена

$$\int_{(C)}\frac{A_{-m}\,dz}{(z-a)^m}$$

равен нулю, если показатель m больше единицы, так как начальная функция $-\frac{A_{-m}}{(m-1)(z-a)^{m-1}}$ возвращается к начальному значению,

[1]) Annales de l'École Normale supérieure, 1880.

когда переменное z описывает замкнутый путь. Но если $m=1$, то определенный интеграл $A_{-1}\int\frac{dz}{z-a}$ имеет значение $2\pi i A_{-1}$, как это видно из вычислений § 297. Следовательно, мы имеем формулу

$$2\pi i A_{-1}=\int_{(C)} f(z)\,dz,$$

которая в сущности есть не что иное, как частный случай формулы (23), определяющей коэффициенты рода Лорана. Коэффициент A_{-1} называется **вычетом** функции $f(z)$ относительно особой точки a.

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$, непрерывную на замкнутом контуре Γ, и имеющую внутри этого контура Γ только конечное число особых точек $a, b, c, \ldots, l$. Пусть будут $A, B, C, \ldots, L$ вычеты, соответствующие этим особым точкам. Окружим каждую из этих особых точек кругом весьма малого радиуса; интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль Γ в прямом направлении, равен сумме интегралов, взятых вдоль этих малых кругов в том же самом направлении, и мы получаем весьма важную формулу

$$\int_{(\Gamma)} f(z)\,dz=2\pi i(A+B+C+\ldots+L), \tag{36}$$

выражающую, что **интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль контура Γ в прямом направлении, равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно особых точек функции $f(z)$, находящихся внутри этого контура.**

Ясно, что эта теорема применима также к контурам Γ, образованным несколькими различными замкнутыми кривыми.

Отсюда видно важное значение вычетов; полезно уметь их быстро вычислять. Если точка a есть полюс m-го порядка функции $f(z)$, то произведение $(z-a)^m f(z)$ — правильное в точке a, и очевидно, что вычет функции $f(z)$ равен коэффициенту при $(z-a)^{m-1}$ в разложении этого произведения. В случае простого полюса правило упрощается; тогда вычет равен пределу произведения $(z-a)f(z)$ при $z=a$. Всего чаще функция $f(z)$ является в виде

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ — правильные при $z=a$, и $P(a)$ не равно нулю, тогда как a есть простой нуль для $Q(z)$. Пусть будет $Q(z)=(z-a)\,R(z)$; тогда вычет равен частному $\frac{P(a)}{R(a)}$, или иначе, как это нетрудно видеть, $\frac{P(a)}{Q'(a)}$.

III.—Приложения общих теорем.

Приложения последней теоремы бесчисленны. Мы дадим некоторые из них, относящиеся, главным образом, к вычислению определенных интегралов и к теории уравнений.

306. Различные замечания.—Пусть будет $f(z)$ такая функция, что произведение $(z-a)f(z)$ стремится к нулю вместе с $|z-a|$. Интеграл от этой функции, взятый вдоль круга γ с центром в точке a и с радиусом ρ, стремится к нулю вместе с радиусом этого круга. В самом деле, мы имеем

$$\int_{(\gamma)} f(z)dz = \int_{(\gamma)} (z-a)f(z)\frac{dz}{z-a};$$

если η есть наибольшее значение модуля количества $(z-a)f(z)$ вдоль круга γ, то модуль интеграла будет меньше, чем $2\pi\eta$, и следовательно, стремится к нулю, так как η само бесконечно-мало вместе с ρ. Точно так же можно было бы убедиться, что если произведение $(z-a)f(z)$ стремится к нулю, когда модуль разности $z-a$ неограниченно возрастает, то интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль круга C с центром в точке a, при неограниченном возрастании радиуса этого круга стремится к нулю. Эти замечания сохраняют свою силу и в том случае, когда интеграл берется не вдоль всей окружности, а только вдоль ее части, если только рассматриваемое произведение стремится к нулю вдоль этой части.

Часто приходится искать верхнюю границу модуля определенного интеграла вида $\int_a^b f(x)dx$, взятого вдоль действительной оси. Предположим для определенности, что $a<b$. Выше мы видели (§ 287), что модуль этого интеграла не более интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ и, следовательно, меньше, чем $M(b-a)$, если M есть верхняя граница модуля функции $f(x)$.

307. Вычисление простейших определенных интегралов. — Определенный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$, где $F(x)$ есть рациональная функция, взятый вдоль действительной оси, имеет конечное значение, если только знаменатель не обращается в нуль ни при каком действительном значении x, и если степень числителя по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя. Опишем из начала координат, как из центра, круг C настолько большим радиусом R, чтобы все корни знаменателя функции $F(x)$ содержались внутри этого круга, и рассмотрим путь интегрирования, образуемый диаметром BA, проведенным вдоль действительной оси, и полуокружностью C', расположенною над действительною осью. Единственные особые точки функции $F(z)$, лежащие внутри этого контура, суть полюсы, происходящие от тех корней знаменателя функции $F(z)$, у которых коэффициент при i положителен. Следовательно, обозначая через ΣR_k сумму вычетов относительно этих полюсов, мы имеем

$$\int_{-R}^{+R} F(z)\,dz + \int_{(C')} F(z)\,dz = 2\pi i \Sigma R_k.$$

При неограниченном возрастании радиуса R интеграл, взятый вдоль C', стремится к нулю, так как при бесконечном z произведение $zF(z)$ равно нулю, и мы в пределе получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 2\pi i \,\Sigma R_k.$$

Нетрудно привести к предыдущим интегралам определенные интегралы

$$\int_0^{2\pi} F(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где F есть рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, не обращающаяся в бесконечность ни при каком действительном значении переменного x, и интеграл взят вдоль действительной оси. Заметим прежде всего, что мы не изменим значения этого интеграла, взяв его пределами x_0 и $x_0 + 2\pi$, где x_0 — любое действительное число; следовательно, можно взять пределами, например, $-\pi$ и $+\pi$. Выполнив обычную замену переменного $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, мы приведем рассматриваемый интеграл к интегралу от рациональной функции от t, взятому между пределами $-\infty$ и $+\infty$, так как, при возрастании x от $-\pi$ до π, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Но можно поступать еще иначе. Полагая $e^{xi} = z$, мы будем иметь $dx = \frac{dz}{iz}$, и по формулам Эйлера получим

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz};$$

при этом рассматриваемый интеграл обращается в интеграл

$$\int F\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Что касается нового пути интегрирования, то когда x возрастает от 0 до 2π, переменное z описывает в прямом направлении круг с радиусом, равным единице, и с центром в начале координат. Следовательно, достаточно вычислить вычеты стоящей под знаком интеграла рациональной функции от z относительно полюсов, модуль которых меньше единицы.

Возьмем, например, интеграл $\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)dx$, имеющий конечное значение, если b не равно нулю. Мы имеем

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)=i\,\frac{e^{i\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)}},$$

или иначе

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x-a-bi}{2}\right)=i\,\frac{e^{ix}+e^{-b+ai}}{e^{ix}-e^{-b+ai}}.$$

Следовательно, после замены переменного $e^{xi}=z$ мы придем к интегралу

$$\int_{(C)}\frac{z+e^{-b+ai}}{z-e^{-b+ai}}\,\frac{dz}{z}.$$

Подъинтегральная функция имеет два простых полюса $z=0$, $z=e^{-b+ai}$, и соответствующие вычеты суть -1 и $+2$. Если b положительно, то эти оба полюса лежат внутри контура интегрирования, и интеграл равен $2\pi i$; если b отрицательно, то только один полюс $z=0$ лежит внутри контура, и интеграл равен $-2\pi i$. Следовательно, рассматриваемый интеграл равен $\pm 2\pi i$ в зависимости от того, будет ли b положительно или отрицательно. Теперь мы дадим несколько менее простых примеров.

308. Различные определенные интегралы. — 1°. Функция $\frac{e^{mz}}{1+z^2}$ имеет два полюса $+i$ и $-i$ с вычетами $\frac{e^{-m}}{2i}$ и $-\frac{e^{m}}{2i}$. Предположим для определенности, что m положительно, и рассмотрим контур, образуемый полуокружностью очень большого радиуса R с центром в начале координат, лежащею над действительною осью, и диаметром, совпадающим с действительною осью. Внутри этого контура функция $\frac{e^{miz}}{1+z^2}$ имеет только один полюс $z=i$, и интеграл, взятый вдоль всего контура, равен πe^{-m}. Но интеграл, взятый вдоль полуокружности, при неограниченном возрастании радиуса R стремится к нулю, так как модуль произведения $\frac{z}{1+z^2}\,e^{imz}$ вдоль этой полуокружности стремится к нулю. В самом деле, заменяя z через $R(\cos\theta+i\sin\theta)$, мы имеем

$$e^{miz}=e^{-mR\sin\theta+imR\cos\theta}$$

и модуль $e^{-mR\sin\theta}$ остается меньшим единицы, когда θ изменяется от 0 до π. Что касается модуля множителя $\frac{z}{1+z^2}$, то при бесконечном z он равен нулю. Следовательно, в пределе мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mix}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-m}.$$

Если мы заменим e^{mix} через $\cos mx + i\sin mx$, то коэффициент при i в левой части предыдущего равенства, очевидно, равен нулю, так как элементы интеграла попарно уничтожаются; так как, сверх того, $\cos(-mx) = \cos mx$, то мы можем представить предыдущую формулу в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}. \qquad (37)$$

2°. Функция $\frac{e^{iz}}{z}$ голоморфна внутри контура $ABMB'A'NA$ (черт. 69), образуемого двумя полуокружностями BMB', $A'NA$, описанными из начала координат, как из центра, радиусами R и r, и прямыми AB, $B'A'$. Следовательно, мы имеем соотношение

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{(BMB')} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{(A'NA)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0;$$

его можно представить иначе в виде

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx + \int_{(BMB')} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{(A'NA)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

При приближении r к нулю последний интеграл стремится к $-\pi i$; в самом деле, мы имеем

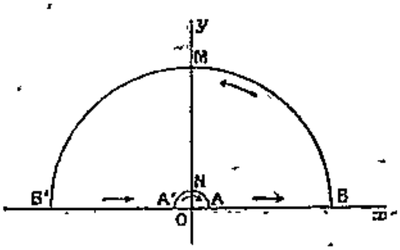
$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + P(z),$$

где $P(z)$ есть функция, правильная в начале координат, и потому

$$\int_{(A'NA)} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{(A'NA)} P(z)dz + \int_{(A'NA)} \frac{dz}{z}.$$

Интеграл от правильной части $P(z)$ бесконечно-мал вместе с длиною пути интегрирования; что касается последнего интеграла, то он равен изменению $\mathrm{Log}(z)$ вдоль $A'NA$, т.-е. равен $-\pi i$.

Черт. 69.



Интеграл вдоль пути BMB' стремится к нулю при неограниченном возрастании числа R. В самом деле, полагая $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ получим

$$\int_{(BMB')} \frac{e^{iz}}{z}dz = i\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta + iR\cos\theta}d\theta;$$

модуль этого интеграла меньше, чем

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta.$$

При возрастании θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ отношение $\frac{\sin\theta}{\theta}$ убывает от 1 до $\frac{2}{\pi}$, и мы имеем

$$R\sin\theta > \frac{2}{\pi}R\theta,$$

и, следовательно,

$$e^{-R\sin\theta} < e^{-\frac{2R\theta}{\pi}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}d\theta = -\frac{\pi}{2R}\left(e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right);$$

таким образом, высказанное предложение доказано.

Следовательно, переходя к пределу, имеем (т. I, § 176)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = \pi i,$$

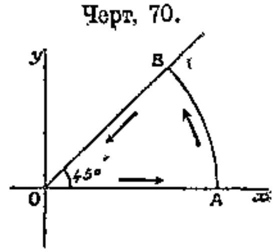
или

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3°. Интеграл от целой функции e^{-z^2}, взятый вдоль контура $OABO$, составляемого двумя радиусами OA и OB, образующими угол в 45°, и дугою круга AB (черт. 70), равен нулю; отсюда получаем

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_{(AB)} e^{-z^2}dz = \int_{(OB)} e^{-z^2}dz.$$

Черт. 70.



При неограниченном возрастании радиуса R окружности, которой принадлежит дуга AB, интеграл вдоль дуги AB стремится к нулю. В самом деле, полагая $z = R\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$, мы представим этот интеграл в виде интеграла

$$\frac{iR}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}d\varphi,$$

модуль которого меньше интеграла $\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\varphi}d\varphi$. Как и в предыдущем примере, мы получим

$$\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\varphi}d\varphi = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi < \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2R^2\varphi}{\pi}}d\varphi.$$

Последний интеграл равен

$$-\frac{\pi}{4R}\left(e^{\frac{-2R^2\varphi}{\pi}}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right),$$

и при неограниченном возрастании R стремится к нулю.

Вдоль радиуса OB мы можем положить $z = \rho\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, откуда $e^{-z^2} = e^{-i\rho^2}$. Увеличивая неограниченно R, мы получим в пределе (см. т. I, § 134)

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\rho^2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)d\rho = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

или иначе

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\rho^2}d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

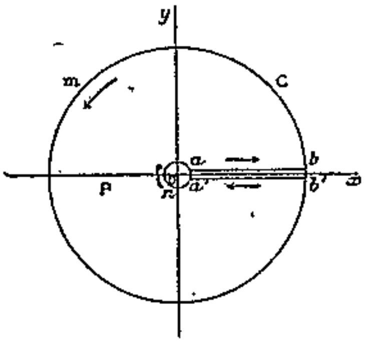
Приравнивая в обеих частях этого равенства действительные части и коэффициенты при i, мы получим значения интегралов Френеля

$$\int_0^{+\infty}\cos\rho^2\,d\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \int_0^{+\infty}\sin\rho^2\,d\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{38}$$

309. Вычисление произведения $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$. — Определенный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$, где переменное x и показатель p действительны, имеет конечное значение, если p положительно и меньше единицы; он равен произведению $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$ [1].

Чтобы вычислить этот интеграл, рассмотрим функцию $\frac{z^{p-1}}{1+z}$, имеющую один полюс в точке $z=-1$, и одну точку разветвления $z=0$. Рассмотрим контур $abmb'a'na$ (черт. 71), образованный двумя окружностями C и C', описанными из начала координат соответственно радиусами r и ρ, и двумя бесконечно-близкими прямыми ab и $a'b'$, расположенными по обе стороны разреза, проведенного вдоль ox. Функция $\frac{z^{p-1}}{1+z}$ однозначна внутри этого контура, который содержит только одну особую точку, полюс $z=-1$; для окончательного ее определения условимся брать за аргумент переменного z тот, который заключается между 0 и 2π. Следовательно, обозначая через R вычет относительно полюса $z=-1$, мы имеем

Черт. 71.



$$\int_{ab}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz+\int_{(C)}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz+\int_{b'a'}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz+\int_{(C')}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz=2i\pi R.$$

Интегралы, взятые вдоль окружностей C и C', стремятся к нулю, когда r неограниченно возрастает или ρ неограниченно убывает, так как вследствие неравенств $0<p<1$, произведение $\frac{z^p}{1+z}$ стремится при этом к нулю.

Вдоль ab переменное z действительно; для большей ясности обозначим его через x. Так как аргумент переменного z равен нулю,

[1] Заменим t через $\frac{1}{1+x}$ в последней формуле § 134 (т. I). Формула (34), доказанная при p действительном, верна и при p мнимом, если действительная часть p заключается между 0 и 1.

то z^{p-1} равно арифметическому значению x^{p-1}. Вдоль $a'b'$ переменное z также действительно, но так как его аргумент равен 2π, то мы имеем

$$z^{p-1}=e^{(p-1)(\log x+2\pi i)}=e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}.$$

Следовательно, сумма обоих интегралов, взятых вдоль ab и вдоль $a'b'$, имеет пределом

$$\left[1-e^{2\pi i(p-1)}\right]\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx.$$

Вычет R равен $(-1)^{p-1}$, предполагая аргумент -1 равным π, т.-е. он равен $e^{(p-1)\pi i}$. Следовательно, мы имеем

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}}=\frac{2\pi i}{e^{-(p-1)\pi i}-e^{(p-1)\pi i}}=\frac{-\pi}{\sin(p-1)\pi},$$

или окончательно

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{39}$$

310. Приложение к мероморфным функциям. — Рассмотрим функции $f(z)$, $\varphi(z)$, из которых одна $f(z)$ — мероморфная внутри некоторого замкнутого контура C, а другая $\varphi(z)$ — голоморфная внутри того же контура, при чем функции $f(z)$, $f'(z)$, $\varphi(z)$ непрерывны на контуре C. Найдем особые точки функции $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, лежащие внутри контура C. Очевидно, что точка a, которая не есть ни полюс, ни нуль функции $f(z)$, есть обыкновенная точка функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, а следовательно, и функции $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Если точка a есть полюс или нуль функции $f(z)$, то в области этой точки мы имеем

$$f(z)=(z-a)^{\mu}\psi(z),$$

где μ есть положительное или отрицательное целое число, равное порядку функции в этой точке (§ 303), а $\psi(z)$ — правильная функция, не равная нулю при $z=a$. Взяв логарифмические производные от предыдущего соотношения, получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\mu}{z-a}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Так как, с другой стороны, в области точки a мы имеем

$$\varphi(z)=\varphi(a)+(z-a)\varphi'(a)+\ldots,$$

то точка a есть полюс первого порядка произведения $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, и вычет равен $\mu\varphi(a)$, т.-е. равен $m\varphi(a)$, если точка a есть нуль m-го порядка функции $f(z)$, и равен $-n\varphi(a)$, если точка a есть полюс n-го порядка функции $f(z)$. Следовательно, предполагая, что функция $f(z)$ не имеет корней, расположенных на контуре C, мы имеем по общей теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Sigma\varphi(a)-\Sigma\varphi(b), \tag{40}$$

где a есть один из нулей функции $f(z)$, лежащих внутри контура C, а b один из полюсов, лежащих внутри того же контура, при чем каждый полюс и нуль считается столько раз, каков его порядок кратности. В формуле (40) заключается бесконечное множество соотношений, так как за $\varphi(z)$ можно взять любую голоморфную функцию.

Положим в частности $\varphi(z)=1$; тогда предыдущая формула обращается в

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz, \tag{41}$$

где N и P обозначают соответственно число нулей и число полюсов функции $f(z)$, заключающихся внутри контура C. Из этой формулы можно вывести важную теорему. В самом деле, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ есть производная от $\operatorname{Log}[f(z)]$; следовательно, чтобы вычислить определенный интеграл, стоящий в правой части формулы (41), достаточно знать изменение функции

$$\log|f(z)|+i\arg f(z),$$

когда переменное z описывает в прямом направлении контур C. Но $|f(z)|$ возвращается при этом к своему начальному значению, тогда как аргумент функции $f(z)$ возрастает на $2K\pi$, где K есть положительное или отрицательное целое число. Следовательно, мы имеем

$$N-P=\frac{2K\pi i}{2\pi i}=K, \tag{42}$$

т. е. **разность $N-P$ равна частному от деления на 2π изменения аргумента функции $f(z)$, когда переменное z описывает в прямом направлении контур C.**

Отделим в $f(z)$ действительную часть и коэффициент при i:

$$f(z)=X+iY;$$

когда точка $z=x+iy$ описывает в прямом направлении контур C, точка, координаты которой относительно прямоугольных осей того же направления, как и первые, суть X и Y, описывает также некоторый замкнутый контур C_1, и достаточно построить приближенно этот контур C_1, чтобы получить число K. В самом деле, для этого нужно только сосчитать число оборотов, на которые повернулся в прямом или в обратном направлении радиус-вектор, соединяющий точку (XY), с началом координат. Формулу (42) можно представить иначе в виде

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} d\,\mathrm{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}; \tag{43}$$

так как функция $\frac{Y}{X}$ возвращается к прежнему значению, когда z описывает замкнутый контур C, то определенный интеграл

$$\int_{(C)}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$

равен $I\left(\frac{Y}{X}\right)$, где число I равно указателю частного $\frac{Y}{X}$ вдоль контура C, т.-е. равно разности между числом раз, когда это частное обращается в бесконечность, проходя от $+\infty$ к $-\infty$, и числом раз, когда оно обращается в бесконечность, проходя от $-\infty$ к $+\infty$ (т. I, §§ 77 и 154). Следовательно, мы можем представить формулу (43) в равносильном виде

$$N-P=\frac{1}{2}I\left(\frac{Y}{X}\right). \tag{44}$$

311. Приложение к теории уравнений.—Если функция $f(z)$ также голоморфна внутри контура C и не имеет на этом контуре ни полюсов, ни нулей, то предыдущие формулы содержат только корни уравнения $f(z)=0$, заключающиеся внутри C. Формулы (42), (43), (44) определяют число N этих корней через изменение аргумента функции $f(z)$ вдоль контура C, или через указатель $I\left(\frac{Y}{X}\right)$. Если функция $f(z)$ есть целый многочлен относительно z с произвольными коэффициентами, и контур C состоит из конечного числа дуг уникурсальных кривых, то этот указатель можно вычислить посредством элементарных действий, именно, умножениями и делениями многочленов. В самом деле, пусть будет AB дуга контура, которую можно представить формулами

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$—рациональные функции параметра t, который надо изменять от α до β, чтобы точка (x, y) описала дугу AB в прямом направлении. Заменяя в многочлене $f(z)$ переменное z через $\varphi(t)+i\psi(t)$, мы получим

$$f(z)=R(t)+iR_1(t),$$

где $R(t), R_1(t)$ — рациональные функции от t с действительными коэффициентами. Следовательно, указатель $I\left(\frac{Y}{X}\right)$ вдоль дуги AB равен указателю рациональной функции $\frac{R_1}{R}$, когда t изменяется от α до β; этот указатель мы уже умеем вычислять (т. I, § 77). Следовательно, если контур C состоит из дуг уникурсальных кривых, то чтобы иметь число корней уравнения $f(z)=0$, заключающихся внутри этого контура, достаточно вычислить указатель для каждой дуги и взять их полусумму.

Примечание.—Из предыдущих результатов нетрудно вывести теорему Даламбера. Докажем сначала лемму, которой мы будем неоднократно пользоваться. Пусть будут $F(z)$, $\Phi(z)$ функции, голоморфные внутри некоторого замкнутого контура C, непрерывные на этом контуре, и такие, что вдоль C мы имеем $|\Phi(z)|<|F(z)|$; при этих условиях уравнения

$$F(z)=0, \qquad F(z)+\Phi(z)=0$$

имеют внутри контура C одинаковое число корней. В самом деле, мы имеем

$$F(z)+\Phi(z)=F(z)\left[1+\frac{\Phi(z)}{F(z)}\right];$$

когда точка z описывает контур C, точка $Z=1+\frac{\Phi(z)}{F(z)}$ описывает замкнутую кривую, лежащую всеми своими точками внутри круга с радиусом, равным единице, и с центром в точке $Z=1$, так как вдоль C будет $|Z-1|<1$. Следовательно, когда переменное z описывает контур C, аргумент множителя $1+\frac{\Phi(z)}{F(z)}$ возвращается к своему начальному значению, и изменение аргумента суммы $F(z)+\Phi(z)$ равно изменению аргумента функции $F(z)$; таким образом, оба уравнения имеют внутри C одно и то же число корней.

Пусть будет $f(z)$ многочлен m-ой степени с произвольными коэффициентами; положим

$$F(z)=A_0 z^m, \quad \Phi(z)=A_1 z^{m-1}+\ldots+A_m, \quad f(z)=F(z)+\Phi(z).$$

Возьмем положительное число R настолько большое, чтобы было

$$\left|\frac{A_1}{A_0}\right|\frac{1}{R}+\left|\frac{A_2}{A_0}\right|\frac{1}{R^2}+\ldots+\left|\frac{A_m}{A_0}\right|\frac{1}{R^m}<1;$$

очевидно, что вдоль окружности C с радиусом, большим, чем R, и с центром в начале координат мы будем иметь $\left|\frac{\Phi}{F}\right|<1$. Следовательно, уравнение $f(z)$ имеет внутри круга C то же число корней, как и уравнение $F(z)=0$, т.-е. m.

312. Формула Иенсена. — Пусть будет $f(z)$ функция, мероморфная внутри круга C с радиусом r и с центром в начале координат, и голоморфная и не имеющая нулей на окружности C. Пусть будет $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нули и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ полюсы функции $f(z)$, находящиеся внутри этого круга, причем каждый из них считается столько раз, каков его порядок кратности; мы предположим сверх того, что начало координат не есть ни полюс, ни нуль функции $f(z)$. Вычислим определенный интеграл

$$I = \int_{(C)} \operatorname{Log}[f(z)] \frac{dz}{z}, \tag{45}$$

взятый в прямом направлении вдоль C; для этого будем перемещать переменное z, например, от точки $z = r$, лежащей на действительной оси, взяв для аргумента функции $f(z)$ некоторое начальное значение. Интегрируя по частям, будем иметь

$$I = \Big\{\operatorname{Log}(z) \operatorname{Log}[f(z)]\Big\}_{(C)} - \int_{(C)} \operatorname{Log}(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \tag{46}$$

где первый член правой части обозначает приращение произведения $\operatorname{Log}(z)\operatorname{Log}[f(z)]$ когда переменное z описывает окружность C. Если начальное значение аргумента переменного z равно нулю, то это приращение равно

$$(\log r + 2\pi i)\Big\{\operatorname{Log}[f(r)] + 2\pi i(n-m)\Big\} - \log r \operatorname{Log}[f(r)] =$$
$$= 2\pi i \operatorname{Log} f(r)] + 2\pi i(n-m)\log r - 4(n-m)\pi^2.$$

Чтобы вычислить определенный интеграл формулы (46), рассмотрим замкнутый контур Γ, образуемый окружностью C, окружностью c, описанною из начала координат бесконечно-малым радиусом ρ, и двумя бесконечно-близкими краями ab, $a'b'$ разреза, проведенного вдоль действительной оси от точки $z=\rho$ до точки $z=r$ (черт. 64, стр. 110). Мы предположим, для определенности, что функция $f(z)$ не имеет на этой части действительной оси ни полюса, ни нуля; в противном случае и мы проведем разрез, образующий бесконечно-малый угол с действительною осью. Функция $\operatorname{Log}(z)$ голоморфна внутри контура Γ, и, по общей формуле (40) мы имеем соотношение

$$\int_{(ab)} \operatorname{Log}(z)\frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{(C)} \operatorname{Log}(z)\frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{(b'a')} \operatorname{Log}(z)\frac{f'(z)}{f(z)} dz +$$
$$+ \int_{(c)} \operatorname{Log}(z)\frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Log}\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right)$$

Интеграл, взятый вдоль круга c, стремится к нулю вместе с ρ, так как произведение $z \operatorname{Log}(z)$ бесконечно-мало вместе с ρ. С другой стороны, если аргумент переменного z равен нулю вдоль ab, то он равен $2\pi i$ вдоль $a'b'$, и сумма двух соответствующих интегралов имеет пределом

$$-\int_0^r 2\pi i \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i \operatorname{Log}[f(r)] + 2\pi i \operatorname{Log}[f(0)].$$

Следовательно остается

$$\int_{(C)} \operatorname{Log}(z)\frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Log}\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right) + 2\pi i \operatorname{Log}\left[\frac{f(r)}{f(0)}\right],$$

и формула (46) принимает вид

$$I = 2\pi i(n-m)\log r + 2\pi i \operatorname{Log}[f(0)] - 2\pi i \operatorname{Log}\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right) - 4(n-m)\pi^2.$$

Чтобы вычислить интеграл вдоль круга C, можно положить $z = re^{i\varphi}$ и изменять φ от 0 до 2π. Отсюда имеем $\frac{dz}{z} = i d\varphi$; пусть будет $f(z) = Re^{i\Phi}$, где R и Φ — непрерывные функции от φ вдоль C. Приравнивая между собою коэффициенты при i в предыдущей формуле, мы получим формулу Иенсена (Jensen)[1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} R\, d\varphi = \operatorname{Log}|f(0)| + \operatorname{Log}\left| r^{n-m}\frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right|, \tag{47}$$

в которую входят только обыкновенные неперовы логарифмы.

Если функция $f(z)$ голоморфна внутри C, то произведение $b_1 b_2 \ldots b_m$ очевидно должно заменить единицею, и формула (47) обращается в

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} R\, d\varphi = \operatorname{Log}|f(0)| + \operatorname{Log}\left|\frac{r^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right|. \tag{48}$$

Это соотношение интересно тем, что в него входят только модули корней функции $f(z)$, заключающихся внутри круга C, и модуль функции $f(z)$ вдоль этого круга и в центре этого круга.

313. Формула Лагранжа.—Формулу Лагранжа, которую мы вывели методом Лапласа (т. I, § 189), можно также весьма легко вывести из общих теорем Коши. Способ, который мы здесь изложим, принадлежит Эрмиту.

Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри некоторой области D, содержащей точку a. Уравнение

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0, \tag{49}$$

где α—переменный параметр, имеет при $\alpha = 0$ корень $z = a$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Пусть будет C круг с центром в точке a и с радиусом r, расположенный в области D, и такой, что вдоль этого круга $|\alpha f(z)| < |z - a|$; по доказанной выше (§ 311) лемме уравнение $F(z) = 0$ будет иметь внутри контура C то же число корней, как и уравнение $z - a = 0$, т.-е. один корень; обозначим этот корень через ζ.

Пусть будет $\Pi(z)$ функция, голоморфная в круге C. Функция $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ имеет внутри круга C только один полюс, точку $z = \zeta$, и соответствующий вычет есть $\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$; следовательно, по общей теореме мы имеем

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{\Pi(z)}{F(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{\Pi(z)\,dz}{z - a - \alpha f(z)}.$$

[1]) Acta Mathematica, т. XXII.

Чтобы получить разложение по степеням α интеграла, стоящего в правой части, мы поступим так же, как при выводе формулы Тэлора; мы будем иметь

$$\frac{1}{z-a-\alpha f(z)}=\frac{1}{z-a}+\frac{\alpha f(z)}{(z-a)^2}+\ldots+$$
$$+\frac{[\alpha f(z)]^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{1}{z-a-\alpha f(z)}\left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right]^{n+1}$$

Внося это значение в интеграл, получим

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=I_0+\alpha I_1+\ldots+\alpha^n I_n+R_{n+1},$$

где

$$I_0=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Pi(z)\,dz}{z-a},\ldots,\ I_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{[f(z)]^n\Pi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$
$$R_{n+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{\Pi(z)}{z-a-\alpha f(z)}\left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right]^{n+1}dz$$

Пусть будет m наибольшее значение модуля произведения $\alpha f(z)$ вдоль окружности C; по предположению, m меньше, чем r. Если M есть наибольшее значение модуля функции $\Pi(z)$ вдоль C, то мы имеем

$$|R_{n+1}|<\frac{1}{2\pi}\left(\frac{m}{r}\right)^{n+1}\frac{2\pi rM}{r-m};$$

отсюда видно, что при неограниченном возрастании n остаточный член R_{n+1} стремится к нулю. Далее, из выражений коэффициентов $I_0, I_1,\ldots, I_n,\ldots$ из формул (14, § 295) получаем

$$I_0=\Pi(a),\ldots,\ I_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{da^n}\left\{[f(a)]^n\Pi(a)\right\},$$

и мы приходим к следующему разложению в ряд:

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=\Pi(a)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\left\{\Pi(a)[f(a)]^n\right\}. \tag{50}$$

Эту формулу можно также представить в несколько ином виде. Положим $\Pi(z)=\Phi(z)[1-\alpha f'(z)]$, где $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в той же области. Тогда левая часть формулы (50) не будет содержать α и обратится в $\Phi(\zeta)$. Что касается правой части, то заметим, что она содержит два члена степени n относительно α, сумма которых равна

$$\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\left\{\Phi(a)[f(a)]^n\right\}-\frac{\alpha^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{\Phi(a)[f(a)]^{n-1}f'(a)\right\}$$
$$=\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{\Phi'(a)[f(a)]^n+n\Phi(a)[f(a)]^{n-1}f'(a)-n\Phi(a)[f(a)]^{n-1}f'(a)\right\}$$
$$=\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{\Phi'(a)[f(a)]^n\right\};$$

и мы получаем формулу Лагранжа в ее обычном виде [т. I, § 189, формула (52)]:

$$\Phi(\zeta)=\Phi(a)+\frac{\alpha}{1}\Phi'(a)f(a)+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{\Phi'(a)[f(a)]^n\right\}+\ldots \quad (51')$$

Мы предположили, что вдоль окружности C мы имеем $|\alpha f(z)|<r$, что будет иметь место, если $|\alpha|$ достаточно мало. Чтобы найти наибольшее значение $|\alpha|$, ограничимся случаем, когда $f(z)$ есть многочлен или целая функция. Пусть будет $\mathfrak{M}(r)$ наибольшее значение модуля $|f(z)|$ вдоль окружности C описанной из точки a, как из центра, радиусом, равным r; предыдущее доказательство применимо к этому кругу, если только $|\alpha|\mathfrak{M}(r)<r$. Таким образом, мы пришли к разысканию наибольшего значения отношения $\frac{r}{\mathfrak{M}(r)}$, когда r изменяется от 0 до $+\infty$. Это отношение равно нулю при $r=0$, так как если бы $\mathfrak{M}(r)$ стремилось к нулю вместе с r, то точка $z=a$ была бы нулем функции $f(z)$ и $F(z)$ делилось бы на $z-a$. То же отношение равно нулю и при $r=\infty$, так как в противном случае $f(z)$ было бы многочленом первой степени (§ 298). Отсюда следует, что $\frac{r}{\mathfrak{M}(r)}$ проходит через наибольшее значение μ при некотором значении r_1 радиуса r. Из предыдущего рассуждения следует, что уравнение (49) имеет один и только один корень с модулем, меньшим r_1, если $|\alpha|<\mu$; следовательно, разложения (50) и (51) имеют место, если $|\alpha|$ не превосходит μ и функции $\Pi(z)$ и $\Phi(z)$ голоморфны в круге C_1 с радиусом r_1.

Пример.—Пусть будет $f(z)=\frac{z^2-1}{2}$; уравнение (49) имеет корень

$$\zeta=\frac{1-\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}}{\alpha};$$

стремящийся к a, когда α стремится к нулю. Возьмем $\Pi(z)=1$. Формула (50) обращается в

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{(a^2-1)^n}{2^n}\right]=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^n X_n(a), \quad (52)$$

где X_n — полином Лежандра n-то порядка (т. I, §§ 88 и 184). Чтобы найти границы, в которых применима формула (52), предположим, что a действительно и больше единицы. Очевидно, что на окружности с радиусом r мы имеем $\mathfrak{M}(r)=\frac{(a+r)^2-1}{2}$ и мы приходим к разысканию наибольшего значения отношения $\frac{2r}{(a+r)^2-1}$, когда r возрастает от 0 до $+\infty$. Этот maximum имеет место при $r=\sqrt{a^2-1}$ и равен $a-\sqrt{a^2-1}$. Точно так же, если a содержится между -1 и $+1$, то при помощи простых вычислений мы найдем, что $\mathfrak{M}(r)=\frac{r^2+1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}$. Maximum отношения $\frac{2r\sqrt{1-a^2}}{r^2+1-a^2}$ имеет место при $r=\sqrt{1-a^2}$ и равен единице.

Нетрудно проверить эти результаты. В самом деле, корень $\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}$, рассматриваемый, как функция от α, имеет две критических точки $a\pm\sqrt{a^2-1}$. Если $\alpha>1$, то ближайшая к началу координат критическая точка есть $a-\sqrt{a^2-1}$. Если a содержится между -1 и $+1$, то обе критические точки $a\pm i\sqrt{1-a^2}$ имеют модуль, равный единице.

В литографированном курсе Эрмита (4-ое издание, стр. 185) дано подробное исследование этим методом уравнения Кеплера $z-a=\alpha\sin z$. Задача приводится к вычислению того корня трансцендентного уравнения $e^r(r-1)=e^{-r}(r+1)$, который содержится между 1 и 2. Стильтьес получил следующие значения

$$r_1=1,19967\,86402\,57734,\quad \mu=0,66274\,34193\,492.$$

314. Исследование функции при бесконечно-больших значениях переменного.—Чтобы исследовать функцию $f(z)$ при значениях переменного, модуль которых неограниченно возрастает, можно положить $z=\frac{1}{z'}$ и исследовать функцию $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ вблизи начала координат. Но нетрудно устранить это промежуточное преобразование. Предположим сначала, что можно найти такое положительное число R, чтобы всякое конечное значение переменного z с модулем, бо́льшим R, было обыкновенною точкою функции $f(z)$. Если из начала координат мы опишем круг C радиусом, равным R, то функция $f(z)$ будет правильною во всякой точке z, лежащей на конечном расстоянии вне круга C. Мы будем называть областью бесконечно-удаленной точки область плоскости, расположенную вне круга C.

Рассмотрим вместе с кругом C концентрический круг C' с радиусом $R'>R$. Так как функция $f(z)$ голоморфна в круговом кольце, заключающемся между C и C', то, по теореме Лорана, она равна сумме ряда, расположенного по положительным и отрицательным целым степеням переменного z,

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}A_{-m}z^m. \tag{53}$$

Коэффициенты A_{-m} этого ряда не зависят от радиуса R', и, так как этот радиус можно взять сколь угодно большим, то отсюда следует, что формула (53) применима во всей области бесконечно удаленной точки, т.-е. во всей области, расположенной вне C. Здесь надо различать несколько случаев:

1. Если разложение функции $f(z)$ содержит только отрицательные степени,

$$f(z)=A_0+A_1\frac{1}{z}+A_2\frac{1}{z^2}+\ldots+A_m\frac{1}{z^m}+\ldots, \tag{54}$$

то при неограниченном возрастании модуля $|z|$ функция $f(z)$ стремится к A_0; в этом случае функция $f(z)$ называется правильною в бесконечно удаленной точке, или, иначе, бесконечно удаленная точка есть обыкновенная точка функции $f(z)$. Если коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ равны нулю, но A_m нулю не равно, то бесконечно удаленная точка называется нулем m-го порядка функции $f(z)$.

2. Если разложение функции $f(z)$ содержит конечное число положительных степеней переменного z

$$f(z)=B_m z^m+B_{m-1} z^{m-1}+\ldots+B_1 z+A_0+A_1\frac{1}{z}+A_2\frac{1}{z^2}+\ldots, \quad (55)$$

где B_m не равно нулю, то бесконечно удаленная точка называется полюсом m-го порядка функции $f(z)$, а многочлен $B_m z^m+\ldots+B_1 z$ — главною частью для этого полюса; модуль $|f(z)|$ неограниченно возрастает вместе с $|z|$, как бы переменное z ни перемещалось.

3. Наконец, если разложение функции $f(z)$ содержит бесконечное множество положительных степеней переменного z, то бесконечно удаленная точка называется существенно особою точкою функции $f(z)$. Ряд, образованный положительными степенями переменного z, представляет целую функцию $G(z)$, которая называется главною частью в области бесконечно удаленной точки. В частности, мы видим, что целая функция имеет бесконечно удаленную точку существенно особою точкою.

Предыдущие определения были как бы предуказаны теми определениями, которые были приняты для точки, находящейся на конечном расстоянии. В самом деле, полагая $z=\frac{1}{z'}$ мы превратим функцию $f(z)$ в функцию $\varphi(z')=f\left(\frac{1}{z'}\right)$ от z', и нетрудно видеть, что мы лишь перенесли на бесконечно удаленную точку определения, принятые для точки $z'=0$ относительно функции $\varphi(z')$. Рассуждая по аналогии, казалось бы естественным назвать вычетом коэффициент A_{-1} при z в разложении (53), но это было бы не верно. Чтобы сохранить характеристическое свойство вычета, мы будем называть вычетом относительно бесконечно удаленной точки коэффициент при $\frac{1}{z}$ с обратным знаком, т. е. $-A_1$. Это число попрежнему равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

причем интеграл взят в прямом направлении вдоль контура области бесконечно удаленной точки. Но так как областью бесконечно удаленной точки является часть плоскости вне C, то здесь соответствующее прямое направление противоположно обычному направлению. В самом деле, этот интеграл приводится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{A_1 dz}{z}=\frac{A_1}{2\pi i}\left(\mathrm{Log}\, z\right)_{(C)},$$

и, когда z описывает окружность C в надлежащем направлении, аргумент переменного z уменьшается на 2π, и интеграл равен $-A_1$.

Важно заметить, что функция может быть правильною в бесконечно удаленной точке, хотя вычет ее не равен нулю; например, функция $1+\frac{1}{z}$.

Если бесконечно удаленная точка есть полюс или нуль функции (fz), то в области этой точки функцию можно представить в виде

$$f(z)=z^{\mu}\varphi(z),$$

где μ есть положительное или отрицательное целое число, равное порядку функции, взятому с обратным знаком, и функция $\varphi(z)$ - правильная в бесконечно удаленной точке и не равная нулю при $z=\infty$. Отсюда получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\mu}{z}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

функция $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ также правильная в бесконечно удаленной точке, но ее разложение начинается с члена с $\frac{1}{z^2}$ или с высшею степенью $\frac{1}{z}$. Следовательно, вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ равен $-\mu$, т.-е. порядку функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке. Мы имеем здесь такое же предложение как для полюса или нуля, лежащих на конечном расстоянии.

Пусть будет $f(z)$ однозначная функция, имеющая конечное число особых точек. Пользуясь только что принятыми определениями для бесконечно удаленной точки, можно выразить весьма просто следующую теорему:

Сумма вычетов функции $f(z)$ во всей плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю.

Доказательство этой теоремы очень просто. Опишем из начала координат круг C, содержащий все особые точки функции $f(z)$, кроме бесконечно удаленной точки. Интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль этого круга в обычном направлении, равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно всех особых точек функции $f(z)$, лежащих на конечном расстоянии. С другой стороны, тот же интеграл, взятый вдоль того же круга в обратном направлении, равен произведению $2\pi i$ на вычет относительно бесконечно удаленной точки. Так как сумма обоих интегралов равна нулю, то равна нулю и сумма вычетов.

Коши назвал **полным вычетом** функции $f(z)$ сумму вычетов этой функции для всех особых точек, лежащих на конечном расстоянии. Если особых точек конечное число, то мы видим, что полный вычет равен вычету относительно бесконечно удаленной точки, взятому с обратным знаком.

Пример.—Пусть будет

$$f(z)=\frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$—многочлены, из которых степень первого равна p, а степень второго—четному числу $2q$. Вне круга C с радиусом R, бо́льшим модулей корней многочлена $Q(z)$, функция $f(z)$ однозначна, и мы имеем

$$f(z)=z^{p-q}\varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$—правильная в бесконечно удаленной точке и не равная нулю при $z=\infty$. Бесконечно удаленная точка есть полюс функции $f(z)$, если $p>q$, и обыкновенная точка, если $p\leqq q$. Вычет наверное равен нулю, если $p<q-1$.

IV.—Периоды определенных интегралов.

315. Полярные периоды.—Изучение криволинейных интегралов показало нам существование при некоторых условиях периодов у этих интегралов. Так как всякий интеграл от функции $f(z)$ комплексного переменного z есть сумма криволинейных интегралов, то ясно, что этот интеграл также может иметь некоторые периоды. Рассмотрим сначала аналитическую функцию $f(z)$, имеющую внутри замкнутой кривой C только конечное число уединенных особых точек,—полюсов или существенно особых точек. Этот случай вполне аналогичен тому, который мы изучали относительно криволинейных интегралов (т. I, § 153), и прежние рассуждения применимы здесь без изменений. Все пути, расположенные внутри контура C, которые можно провести между точками z_0, Z этой области, и не проходящие ни через одну из особых точек функции $f(z)$, приводятся к некоторому определенному пути, соединяющему эти обе точки, и к нескольким петлям, описанным из точки z_0, вокруг особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функции $f(z)$. Пусть будут $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответствующие вычеты функции $f(z)$; интеграл $\int f(z)dz$, взятый вдоль петли, окружающей точку a_1, равен $\pm 2\pi i A_1$; то же будет и для других петель. Следовательно, различные значения интеграла $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ содержатся в формуле

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = F(Z) + 2\pi i\ (m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_nA_n), \tag{56}$$

где $F(Z)$ — одно из значений этого интеграла, соответствующее некоторому определенному пути, а m_1, $m_2, \ldots$ — произвольные положительные или отрицательные целые числа; периоды интеграла равны

$$2\pi i A_1,\ 2\pi i A_2, \ldots,\ 2\pi i A_n.$$

В большинстве случаев точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть полюсы, и периоды происходят от бесконечно-малых обходов вокруг этих полюсов; поэтому эти периоды называются обыкновенно **полярными периодами**, чтобы отличить их от периодов другого рода, о которых мы будем говорить дальше.

Вместо области плоскости, лежащей внутри замкнутой кривой, можно рассматривать часть плоскости, простирающуюся в бесконечность; тогда функция $f(z)$ может иметь бесконечное множество полюсов, и интеграл — бесконечное множество периодов.

Если вычет относительно особой точки a функции $f(z)$ равен нулю, то соответствующий период равен нулю, и для интеграла точка a есть также полюс или существенно особая точка. Но если этот вычет не равен нулю, то точка a есть критическая логарифмическая точка интеграла. Например, если точка a есть полюс m-го порядка функции $f(z)$, то в области этой точки мы имеем

$$f(z) = \frac{B_m}{(z-a)^m} + \frac{B_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_1}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \ldots,$$

и, следовательно,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = C - \frac{B_m}{(m-1)(z-a)^{m-1}} - \ldots + B_1 \log(z-a)$$
$$+ A_0(z-a) + A_1\frac{(z-a)^2}{2} + \ldots,$$

где C — постоянное, зависящее от начального значения z_0 и от пути, проходимого переменным.

Применяя эти общие рассуждения к рациональным функциям, мы сделаем очевидными некоторые уже известные результаты. Так, чтобы интеграл от рациональной функции также был функциею рациональною, необходимо, чтобы этот интеграл не имел периодов, т.-е.

чтобы все вычеты были равны нулю. Это условие вместе с тем и достаточно. Определенный интеграл

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z-a}$$

имеет единственную критическую точку $z=a$, и соответствующий период равен $2\pi i$. Следовательно, именно в интегральном исчислении мы найдем истинное происхождение множественности значений логарифма $\operatorname{Log}(z-a)$, как мы это уже подробно выяснили для $\int_1^z\frac{dz}{z}$ (§ 293). Рассмотрим еще определенный интеграл

$$F(z)=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2};$$

он имеет две логарифмические критические точки $+i$ и $-i$, но только один период, равный π. Если ограничиться действительными значениями переменного, то различные значения $\operatorname{arctg} x$ представляются, как различные функции переменного x. Напротив, мы видим, как, исходя из идей Коши, мы приходим к взгляду на эти значения, как на различные ветви одной и той же аналитической функции.

Примечание.—Если определенный интеграл имеет более трех периодов, то его значение в любой точке z может быть вполне неопределенным. Напомним сначала следующий результат из теории непрерывных дробей [1]. Если дано иррациональное действительное число α, то всегда можно найти два таких положительных или отрицательных целых числа p и q, чтобы было $|p+q\alpha|<\varepsilon$, где ε — любое положительное число.

Выбрав числа p и q таким образом, составим последовательность кратных числа $p+q\alpha$. Всякое действительное число A равно одному из этих кратных или заключается между двумя последовательными кратными. Следовательно, всегда можно найти два таких целых числа m и n, чтобы было $|m+\alpha n-A|<\varepsilon$. Рассмотрим теперь функцию

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{\alpha}{z-b}+\frac{i}{z-c}+\frac{i\beta}{z-d}\right),$$

где a, b, c, d—различные полюсы, а α, β—иррациональные действительные числа. Интеграл $\int_{z_0}^{z}f(z)dz$ имеет четыре периода $1, \alpha, i, i\beta$. Пусть будут $I(z)$ значение интеграла, взятого вдоль некоторого частного пути, идущего от z_0 к Z, и $M+Ni$—произвольное комплексное число. Всегда можно найти четыре таких целых числа m, n, m', n', чтобы модуль разности

$$I(z)+m+n\alpha+i(m'+n\beta)-(M+Ni)$$

был меньше любого положительного числа ε. Для этого достаточно, чтобы было

$$|m+n\alpha-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |m'+n'\beta-B|<\frac{\varepsilon}{2},$$

где $M+Ni-I(z)=A+iB$. Следовательно, всегда можно переместить переменное по такому пути, соединяющему две заданные точки z_0 и z, чтобы значение интеграла

[1] Несколько ниже дано прямое доказательство этого предложения (§ 323).

$\int f(z)dz$, взятого вдоль этого пути, сколь угодно мало отличалось от всякого заданного числа. Мы видим еще раз, насколько важное значение для конечного значения аналитической функции имеет путь, проходимый переменным.

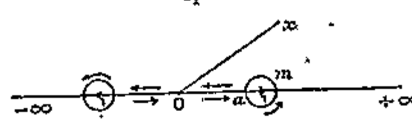
316. Изучение интеграла $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. — Интегральное исчисление дает точно так же самое простое объяснение множественности значений функции $\arcsin z$; в самом деле, эти значения происходят от различных значений определенного интеграла

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \tag{57}$$

в зависимости от пути, описываемого переменным. Предположим для определенности, что мы выходим из начала координат с начальным значением $+1$ для корня. Обозначим через I значение этого интеграла, взятого вдоль определенного (или прямого) пути, например, вдоль прямой, если точка z не лежит на действительной оси вне отрезка, заключающегося между -1 и $+1$; если же z действительно, и $|z|>1$, то за прямой путь мы возьмем путь, расположенный под действительною осью.

Так как точки $z=+1$ и $z=-1$ суть единственные критические точки корня $\sqrt{1-z^2}$, то всякий путь, идущий от начала координат в точку z, можно заменить последовательностью петель, описанных вокруг обеих критических точек $+1$ и -1, и прямого пути. Следовательно, мы приходим к изучению значения интеграла вдоль петли. Рассмотрим,

Черт. 72.



например, петлю $OamaO$, описанную вокруг точки $z=+1$; эта петля состоит из отрезка Oa, идущего из начала координат в точку $1-\varepsilon$, окружности ama с радиусом, равным ε, и с центром в точке $z=+1$, и отрезка aO (черт. 72). Следовательно, интеграл, взятый вдоль петли, равен сумме интегралов

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{(ama)} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{1-\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интеграл, взятый вдоль малой окружности, стремится к нулю вместе с ε, так как произведение $\frac{z-1}{\sqrt{1-z^2}}$ также стремится к нулю. С другой стороны, когда z описывает эту малую окружность, корень меняет знак, и в интеграле вдоль отрезка aO должно взять для корня $\sqrt{1-x^2}$ отрицательное значение. Следовательно, интеграл вдоль петли равен пределу интеграла $2\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, когда ε стремится к нулю, т.-е. равен π. Заметим, что значение этого интеграла не зависит от направления, в котором описывается петля, но мы возвращаемся в исходную точку с значением -1 для корня.

Если бы мы описали ту же петлю вокруг точки $z=+1$ при начальном значении для корня, равном -1, то значение интеграла вдоль петли было бы равно $-\pi$, и мы вернулись бы в исходную точку с значением $+1$ для корня. Точно так же мы увидим, что, описав петлю вокруг критической точки $z=-1$, мы получим для интеграла значения $-\pi$ или $+\pi$ в зависимости от того, выйдем ли мы из точки $z=0$ с начальным значением $+1$ или -1 для корня.

Если переменое z описывает последовательно две петли, то мы вернемся в начало координат с начальным значением $+1$ для корня, и значение интеграла вдоль обеих этих петель будет равно $+2\pi$, 0 или -2π в зависимости от порядка, в котором описаны обе эти петли. Следовательно, четное число петель дает для интеграла значение $2m\pi$ и приводит корень к его начальному значению $+1$. Напротив, нечетное число петель дает для интеграла значение $(2m+1)\pi$ и конечное значение корня в начале координат будет равно -1. Отсюда следует, что значение интеграла $F(z)$ содержится в одном из двух видов

$$2m\pi+I, \qquad (2m+1)\pi-I$$

в зависимости от того, можно ли заменить путь, описываемый переменным, прямым путем с четным или нечетным числом петель.

317. Периоды ультраэллиптических интегралов.—Точно так же можно изучить различные значения определенного интеграла

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{P(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}} \tag{58}$$

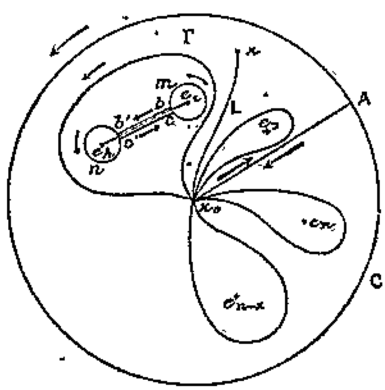
где $P(z)$ и $R(z)$ — целые многочлены, из которых второй, $R(z)$, степени n, обращается в нуль при n различных значениях переменного z

$$R(z)=A(z-e_1)(z-e_2)\ldots(z-e_n).$$

Предположим, что точка z_0 отлична от точек $e_1, e_2, \ldots, e_n$; тогда уравнение $u^2=R(z_0)$ имеет два различных корня $+u_0$ и $-u_0$. Пусть будет u_0 начальное значение корня $\sqrt{R(z)}$. Если переменное z описывает какой-нибудь путь, но проходящий ни через одну из критических точек $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то значение корня $\sqrt{R(z)}$ в каждой точке этого пути определяется его непрерывным изменением. Проведем в плоскости из каждой точки $e_1, e_2, \ldots, e_n$ бесконечные разрезы так, чтобы эти разрезы не пересекались между собою. Интеграл, взятый от z_0 до какой-нибудь точки z вдоль пути, не пересекающего ни одного из разрезов (или прямого) пути, имеет вполне определенное значение

$I(z)$ в каждой точке z плоскости. Остается рассмотреть как влияет на значение интеграла петля, описываемая, исходя из точки z_0, вокруг какой-нибудь критической точки e_i. Пусть будет $2E_i$ значение интеграла, взятого вдоль замкнутого контура, выходящего из точки z_0 и окружающего только одну критическую точку e_i, причем начальное значение корня равно u_0. Это значение $2E_i$ интеграла не зависит от направления, в котором описывается этот контур, а зависит только от начального значения корня в точке z_0. В самом деле, обозначим через $2E_i'$ значение интеграла, взятого вдоль того же контура в обратном направлении, причем начальное значение корня попрежнему равно u_0. Если переменное z опишет рассматриваемый контур дважды в противоположных направлениях, то очевидно, что сумма получающихся интегралов будет равна нулю. Но интеграл вдоль первого контура равен $2E_i$, и мы возвращаемся в точку z_0 с значением $-u_0$ для корня. Следовательно, интеграл, взятый вдоль этого контура в обратном направлении, равен $-2E_i'$, и потому $E_i'=E_i$. Рассматриваемый замкнутый контур можно привести к петле, образуемой прямою $z_0 a$, окружностью c_i с бесконечно-малым радиусом и с центром в точке e_i и прямою az_0 (черт. 73). Интеграл, взятый вдоль c_i, бесконечно-мал, так как произведение $(z-e_i)\dfrac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}$ стремится к нулю вместе с модулем $|z-e_i|$. Что касается интегралов вдоль $z_0\,a$ и вдоль az_0, то их элементы складываются и мы получим

Черт. 73.



$$E_i=\int_{z_0}^{e_i}\frac{P(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где интеграл взят вдоль прямой линии, и начальное значение корня равно u_0.

Интеграл, взятый вдоль любого пути, приводящегося к двум петлям, описываемым вокруг точек e_α, e_β, равен $2E_\alpha-2E_\beta$, так как после первой петли мы приходим в точку z_0 с значением $-u_0$ для корня, и интеграл вдоль второй петли равен $-2E_\beta$. После второй петли мы возвращаемся в точку z_0 с прежним начальным значением u_0. Если путь, совершаемый переменным, приводится к четному числу петель, описываемых последовательно вокруг точек e_α, e_β, e_γ, e_δ, ..., $e_\varkappa$, e_λ, (указатели $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa, \gamma$ взяты из чисел $1, 2, \ldots, n$), и к прямому пути, идущему от точки z_0 в точку z, то, на основании предыдущего, значение интеграла, взятого вдоль этого всего пути, равно

$$F(z) = I + 2(E_\alpha - E_\beta) + 2(E_\gamma - E_\delta) + \ldots + 2(E_\varkappa - E_\lambda).$$

Напротив, если путь, проходимый переменным, можно привести к нечетному числу петель, описываемых последовательно вокруг критических точек e_α, e_β, $\ldots$, $e_\varkappa$, e_λ, e_μ, то значение интеграла равно

$$F(z) = 2(E_\alpha - E_\beta) + \ldots + 2(E_\varkappa - E_\lambda) + 2E_\mu - I.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл имеет периодами все выражения $2(E_i - E_h)$; но все эти периоды выражаются через $(n-1)$, из них $\omega_1 = 2(E_1 - E_n)$, $\omega_2 = 2(E_2 - E_n)$, $\ldots$, $\omega_{n-1} = 2(E_{n-1} - E_n)$; в самом деле, мы имеем

$$2(E_i - E_h) = 2(E_i - E_n) - 2(E_h - E_n) = \omega_i - \omega_h.$$

Так как, с другой стороны, $2E_\mu = \omega_\mu + 2E_n$, то мы видим, что все значения определенного интеграла $F(z)$ в точке z содержатся в двух формулах

$$F(z) = I + m_1\omega_1 + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-1},$$
$$F(z) = 2E_n - I + m_1\omega_1 + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-1},$$

где m_1, m_2, $\ldots$, m_{n-1} — произвольные целые числа.

По поводу этого результата можно сделать несколько важных замечаний. Почти очевидно, что периоды не должны зависеть от начальной точки z_0; в этом нетрудно убедиться. Рассмотрим, например, период $2E_i - 2E_h$; этот период равен значению интеграла, взятого вдоль замкнутого контура Γ, проходящего через точку z_0 и содержащего только две критических точки e_i, e_h. Если, например, мы предположим, что внутри треугольника с вершинами в точках z_0, e_i, e_h нет никакой другой критической точки, то этот замкнутый контур можно привести к контуру $bb'nc'cmb$ (черт. 73); уменьшая неограниченно радиусы обеих малых окружностей, мы видим, что период равен удвоенному интегралу

$$\int_{e_i}^{e_h} \frac{P(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

взятому вдоль прямой, соединяющей две критических точки e_i, e_h.

Может случиться, что $(n-1)$ периодов ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_{n-1} не будут независимыми. Это имеет место всякий раз, когда **степень многочлена $R(z)$ четная, если только степень многочлена $P(z)$ меньше, чем $\frac{n}{2}-1$.** Опишем из точки z_0 окружность C настолько большим радиусом, чтобы эта окружность содержала все критические точки, и предположим для простоты, что мы перенумеровали эти критические точки от 1 до n в том порядке, в каком их встречает бесконечная полупрямая, вращающаяся вокруг точки z_0 в прямом направлении. Интеграл

$$\int \frac{P(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

взятый вдоль замкнутого контура $z_0 AMA z_0$, образуемого радиусом $z_0 A$, окружностью C и радиусом $A z_0$, проходимым в обратном направлении, равен нулю. В самом деле, интегралы, взятые вдоль $z_0 A$ и $A z_0$, взаимно уничтожаются, так как окружность C содержит четное число критических точек, и, описав эту окружность, мы вернемся в точку A с тем же значением для корня. С другой стороны, интеграл, взятый вдоль C, при неограниченном возрастании радиуса стремится к нулю, так как, на основании предположений, сделанных относительно степени многочлена $P(z)$, произведение $\frac{z P(z)}{\sqrt{R(z)}}$ стремится к нулю; так как этот интеграл не зависит от радиуса, то отсюда следует, что он равен нулю.

Но рассматриваемый контур $z_0 AMA z_0$ можно привести к последовательности петель, описываемых вокруг критических точек $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в порядке их указателей. Следовательно, мы имеем соотношение

$$2E_1 - 2E_2 + 2E_3 - 2E_4 + \ldots + 2E_{n-1} - 2E_n = 0,$$

или иначе

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 + \ldots + \omega_{n-1} = 0.$$

Мы видим, что $n-1$ периодов интеграла приводятся к $n-2$ периодам $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-2}$.

Рассмотрим еще интеграл более общего вида

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{P(z)dz}{Q(z)\sqrt{R(z)}},$$

где P, Q, R — многочлены, из которых последний — $R(z)$ — имеет только простые корни. Из корней многочлена $Q(z)$ некоторые могут входить в число корней многочлена $R(z)$; пусть будут $a_1, a_2, \ldots, a_s$ корни, не принадлежащие к корням многочлена $R(z)$. Как и выше, интеграл $F(z)$ имеет периоды $2(E_i - E_h)$, где $2E_i$ попрежнему обозначает интеграл, взятый вдоль замкнутого контура, выходящего из точки z_0, и оставляющего снаружи все корни обоих многочленов $Q(z)$ и $R(z)$, кроме корня e_i. Но этот интеграл имеет, кроме того, несколько полярных периодов, происходящих от петель, описываемых вокруг полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Полное число периодов и в этом случае уменьшается на единицу, если степень n многочлена $R(z)$ четная, и если

$$p < q + \frac{n}{2} - 1,$$

где p и q — степени многочленов P и Q.

Пример. — Пусть будет $R(z)$ многочлен четвёртой степени, имеющий кратный корень. Найдём число периодов интеграла

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Если $R(z)$ имеет двойной корень e_1 и два простых корня e_2, e_3, то интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-e_1)\sqrt{A(z-e_2)(z-e_3)}}$$

имеет период $2E_2 - 2E_3$ и, сверх того, полярный период, происходящий от петли вокруг полюса e_1; на основании только что сделанного замечания оба эти периода между собою равны. Если $R(z)$ имеет два двойных корня, то легко видеть, что интеграл имеет только один полярный период.

Если $R(z)$ имеет тройной корень, то интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-e_1)\sqrt{A(z-e_1)(z-e_2)}}$$

имеет период $2E_1 - 2E_2$, но, на основании общего замечания, этот период равен нулю. То же самое будет, если $R(z)$ имеет четверной корень. В общем выводе, если $R(z)$ имеет один или два двойных корня, то интеграл имеет один период; если $R(z)$ имеет тройной или четверной корень, то интеграл не имеет периодов.

Все эти результаты легко проверить непосредственным интегрированием.

318. Периоды эллиптического интеграла первого рода. — Эллиптический интеграл первого рода

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где $R(z)$ есть многочлен третьей или четвертой степени, первый с своею производною, имеет согласно предыдущей общей теории два периода. Мы докажем, что отношение этих двух периодов мнимое.

Не нарушая общности, можно предположить, что многочлен $R(z)$ — третьей степени. В самом деле, пусть будет $R_1(z)$ многочлен четвертой степени; если a есть корень этого многочлена, то, полагая $z = a + \frac{1}{y}$, получим (т. I, § 110)

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

где $R(y)$ — многочлен третьей степени, и очевидно, что оба интеграла имеют одинаковые периоды. Если $R(z)$ есть многочлен третьей степени, то всегда можно предположить, что он имеет корни 0 и 1, так как достаточно сделать линейную подстановку $z = \alpha + \beta y$, чтобы пройти к этому случаю. Итак, все сводится к доказательству, что интеграл

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}},\tag{59}$$

где a отлично от нуля и единицы, имеет два периода, отношение которых мнимое.

Если a число действительное, то предложение очевидно; например, если $a>1$, то интеграл имеет два периода

$$2\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}},\qquad 2\int_1^a\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}},$$

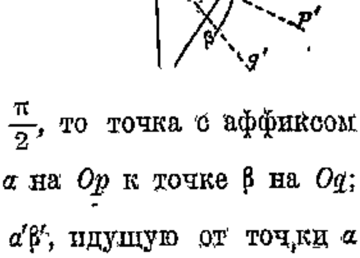
из которых первый—действительный, тогда как второй равен произведению i на действительное число. Ни один из этих периодов не может быть равен нулю.

Предположим теперь, что a мнимое число, положим, например, что коэффициент при i в a положителен. Можно попрежнему взять за один из периодов

$$\Omega_1=2\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}}.$$

Применим к этому интегралу формулу Вейерштрасса (§ 289). Если z изменяется от 0 до 1, то множитель $\dfrac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$ остается положительным, и точка с аффиксом $\dfrac{1}{\sqrt{a-z}}$ описывает некоторую кривую L, о виде которой нетрудно составить себе представление. Пусть будет A точка с аффиксом a; если z изменяется от 0 до 1, то точка $a-z$ описывает отрезок AB, параллельный оси Ox, длина которого равна единице (черт. 74). Пусть будут Op и Oq биссектрисы углов, образуемых прямыми OA и OB с осью Ox; Op' и Oq'—прямые симметричные прямым Op и Oq относительно оси Ox. Если мы возьмем то значение корня $\sqrt{a-z}$, аргумент которого заключается между 0 и $\dfrac{\pi}{2}$, то точка с аффиксом $\sqrt{a-z}$ опишет дугу $\alpha\beta$, идущую от точки α на Op к точке β на Oq; следовательно, точка $\dfrac{1}{\sqrt{a-z}}$ опишет дугу $\alpha'\beta'$, идущую от точки α

Черт. 74.



на Op' к точке β' на Oq'. Применяя формулу Вейерштрасса, в этом случае имеем

$$\Omega_1 = 2\,Z_1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z\,(1-z)}} = 2\pi\, Z_1,$$

где Z_1 — аффикс некоторой точки, лежащей внутри всякого выпуклого контура, окружающего дугу $\alpha'\beta'$. Ясно, что точка Z_1 расположена в углу $p'Oq'$ и не может находиться в начале координат; следовательно, ее аргумент заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и 0.

За второй период можно взять

$$\Omega_2 = 2\int_{OA} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}} = 2\int_0^a \frac{dz}{\sqrt{z\,(1-z)\,(a-z)}}$$

или, полагая $z = at$,

$$\Omega_2 = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\,(1-t)\,(1-at)}}.$$

Чтобы применить к этому интегралу формулу Вейерштрасса, заметим, что когда t возрастает от 0 до 1, точка at описывает отрезок OA, а точка с аффиксом $1-at$ описывает равный и параллельный отрезок, идущий от точки $z=1$ к точке C (черт. 74). Выбирая надлежащим образом значение корня, мы, подобно предыдущему, получим

$$\Omega_2 = 2Z_2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t\,(1-t)}} = 2\pi Z_2,$$

где Z_2 есть мнимое количество, отличное от нуля, аргумент которого заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, отношение периодов $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ или $\frac{Z_2}{Z_1}$ — мнимое.

Упражнения.

1. Разложить по степеням x функции

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^m + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^m,$$

где m — произвольное число.

Найти радиус круга сходимости.

2. Найти различные разложения функции $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ по положительным или отрицательным степеням переменного z в зависимости от положения точки z на плоскости.

3. Вычислить определенный интеграл $\int z^2 \operatorname{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) dz$, взятый вдоль окружности с радиусом, равным 2, и с центром в начале координат, причем начальное значение логарифма в точке $z=2$ действительно. Вычислить определенный интеграл

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}},$$

взятый вдоль того же контура.

4. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри некоторого замкнутого контура C, окружающего начало координат. Вычислить определенный интеграл $\int_{(C)} f'(z) \operatorname{Log} z\, dz$, взятый вдоль кривой C, начиная от точки z_0.

5. Вывести формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\pi;$$

вывести из нее определенные интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(At^2+2Bt+C)^{n+1}}.$$

6. Вычислить, пользуясь теориею вычетов, следующие определенные интегралы:

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x(x^2+a^2)^2}$, m и a—действительны,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx$, a—действительно,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2\beta ix-\beta^2-\alpha^2)^{n+1}}$, α и β—действительны,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$,

$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{4x^2(1-x)}}{(1+x)^3} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x \log x\, dx}{(1+x^2)^3}$,

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, a и b—действительны и положительны.

(Чтобы вычислить последний интеграл, можно проинтегрировать функцию $\frac{e^{aiz}-e^{biz}}{z^2}$ вдоль контура, представленного на чертеже 69, стр. 108.)

7. Если определенный интеграл $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{A+C-(A-C)\cos\varphi}$ имеет конечное значение, то он равен $\varepsilon\frac{\pi}{\sqrt{AC}}$, где $\varepsilon=\pm 1$ и выбрано таким образом, чтобы коэффициент при i в $\frac{\varepsilon i\sqrt{AC}}{A}$ был положителен.

8. Пусть будут $F(z)$ и $G(z)$ голоморфные функции, и $z=a$ двойной корень уравнения $G(z)=0$, не обращающий в нуль функции $F(z)$; соответствующий вычет функции $\frac{F(z)}{G(z)}$ равен $\frac{6F'(a)G''(a)-2F(a)G'''(a)}{3[G''(a)]^2}$;

Если a есть простой корень уравнения $G(z)=0$, то вычет функции $\frac{F(z)}{[G(z)]^2}$ равен $\frac{F'(a)G'(a)-F(a)G''(a)}{[G'(a)]^3}$.

9. Вывести формулу

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi i}{\sqrt{1-a^2}},$$

если интеграл взят вдоль действительной оси с положительным значением корня; a есть комплексное или действительное число, модуль которого больше единицы. Указать точно значение, которое должно взять для $\sqrt{1-a^2}$.

10. Рассмотрим интеграл $\int_{(S)}\frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}$, $\int_{(S_1)}\frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}$, где S и S_1 обозначают контуры, образованные следующим образом. Контур S состоит из прямой OA, расположенной вдоль OX, длина которой неограниченно возрастает, из окружности с центром в точке O и с радиусом OA, и, наконец, из прямой AO. Контур S_1 состоит из трех петель, окружающих точки a, b, c, аффиксы которых суть корни уравнения $z^3+1=0$. Вывести соотношение между интегралами

$$\int_0^{+\infty}\frac{dz}{\sqrt{1+z^3}},\ \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}},$$

исходя из сравнения предыдущих интегралов.

11. Вывести соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2},$$

интегрируя функцию e^{-z^2} вдоль контура прямоугольника, образуемого прямыми $y=0$, $y=b$, $x=+R$, $x=-R$, и неограниченно увеличивая число R.

12. Вычислить интеграл от функции $e^{-z}z^{n-1}$, где n действительно и положительно, взятый вдоль замкнутого контура, образуемого радиусом OA, расположенным вдоль OX, дугою окружности AB с центром в точке O и таким радиусом BO, чтобы угол $\alpha=\widehat{AOB}$ заключался между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Неограниченно увеличивая OA, вывести из полученного результата определенные интегралы

$$\int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-au}\cos bu\,du,\ \int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-au}\sin bu\,du,$$

где a и b действительные положительные числа. Доказать, что полученные формулы имеют место и при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, если $n<1$.

13. Пусть будут m, m', n — целые положительные числа ($m<n$, $m'<n$). Вывести формулу

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}-t^{2m'}}{1-t^{2n}}dt=\frac{\pi}{2n}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{2m'+1}{2n}\pi\right)\right].$$

14. Вывести из предыдущей формулы формулу Эйлера

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}dt}{1+t^{2n}}=\frac{\pi}{2n\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

15. Если действительная часть числа a положительна и меньше единицы, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

[Эту формулу можно вывести из формулы (39) (§ 309), или можно интегрировать функцию $\frac{e^{ax}}{1+e^x}$ вдоль контура прямоугольника, образуемого прямыми $y=0$, $y=2\pi$, $x=+R$, $x=-R$, и неограниченно увеличивать число R.]

16. Вывести формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx = \pi(\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi),$$

где действительные части чисел a и b положительны и меньше единицы.

[Взять интеграл вдоль контура прямоугольника $y=0$, $y=\pi$, $x=+R$, $x=-R$ и воспользоваться предыдущим упражнением.]

17. Из формулы

$$\int_{(C)} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz = 2\pi i\,\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k},$$

где n и k — целые положительные числа, и C — окружность с центром в начале координат, вывести формулы

$$\int_0^\pi (2\cos u)^{n+k}\cos(n-k)u\,du = \pi\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{1.2\ldots k},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

[Следует положить $z=e^{2iu}$, потом $\cos u = x$ и заменить n через $n+k$ и k через n.]

18*. Определенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)},$$

когда он имеет конечное значение, равен $\pm\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, в зависимости от относительного положения точек α и x. Вывести отсюда выражение полинома Лежандра n-го порядка, данное Якоби,

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi.$$

19. Исследовать таким же образом определенный интеграл $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{x-\alpha+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}$ и вывести из результата формулу Лапласа

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

где $\varepsilon=\pm1$, в зависимости от того, будет ли действительная часть переменного x положительна или отрицательна.

20*. Вывести последнюю формулу, интегрируя функцию

$$\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

вдоль окружности с центром в начале координат, и неограниченно увеличивая радиус этой окружности.

21*. Суммы Гаусса. — Пусть будет $T_s = e^{\frac{2\pi i s^2}{n}}$ (n и s — целые числа); обозначим через S_n сумму $T_0 + T_1 + \ldots + T_{n-1}$. Вывести формулу

$$S_n = \frac{(1+i)(1+i^{3n})}{2}\sqrt{n}.$$

[Применить теорему о вычетах к функции $\varphi(z) = \dfrac{e^{\frac{2\pi i z^2}{n}}}{e^{2\pi i z} - 1}$, взяв интеграл вдоль контура прямоугольника, образуемого прямыми $x = 0$, $x = n$, $y = +R$, $y = -R$, присоединив к нему две полуокружности, описанные из точек $x = 0$, $x = n$ радиусами, равными ε, чтобы избежать полюсов $z = 0$, $z = n$ функции $\varphi(z)$; затем неограниченно увеличивать число R.]

22. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри замкнутого контура Γ, содержащего точки $a, b, c, \ldots, l$; если $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ — целые положительные числа, то сумма вычетов функции

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{x-z}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-b}{z-b}\right)^{\beta}\cdots\left(\frac{x-l}{z-l}\right)^{\lambda}$$

относительно полюсов $a, b, c, \ldots, l$ есть многочлен $F(x)$ степени $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1$, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{array}{lll} F(a) = f(a), & F'(a) = f'(a), \ldots, & F^{(\alpha-1)}(a) = f^{(\alpha-1)}(a), \\ F(b) = f(b), & F'(b) = f'(b), \ldots, & F^{(\beta-1)}(a) = f^{(\beta-1)}(a), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

[При решении этой задачи можно исходить из соотношения

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)} \varphi(z)\,dz.]$$

23*. Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная внутри круга C с центром в точке a. С другой стороны, пусть будет $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ неограниченная последовательность точек, лежащих внутри этого круга, причем при неограниченном возрастании числа n точка a_n имеет пределом точку a. Для всякой точки z, лежащей внутри круга C справедливо разложение

$$f(z) = f(a_1) + \ldots + (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})\sum_{h=1}^{n}\frac{f(a_h)}{F_n'(a_h)} + \ldots, \text{ где}$$

$$F_n(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n).$$

[Лоран, „Journal de Mathématiques", 5-я серия, т. VIII, стр. 325.] [При доказательстве можно исходить из следующей формулы, которую легко проверить,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \ldots +$$
$$+ \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})(z-a_n)} + \frac{1}{z-x}\,\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)},$$

и поступать так же, как при выводе формулы Тэйлора.]

24. Пусть будет $z_0 = a + bi$ корень n-го порядка уравнения $f(z) = X + iY = 0$, причем функция $f(z)$ вблизи этого корня голоморфна. Доказать, что точка $x = a$, $y = b$ есть кратная точка порядка n кривых $X = 0$, $Y = 0$; касательные в этой точке к каждой из этих кривых образуют равноугольный пучек, и лучи одного пучка суть биссектрисы углов, образуемых лучами другого.

25. Пусть будет $f(z) = X + iY = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$ многочлен m-ой степени с произвольными коэффициентами. Доказать, что все асимптоты кривых $X = 0$, $Y = 0$ проходят через точку с аффиксом $-\frac{A_1}{mA_0}$ и расположены так, как прямые в предыдущем упражнении.

26*. Ряд Бёрманна (Burmann).—Даны две функции $f(x)$, $F(x)$ переменного x; ряд Бёрманна дает разложение одной из них по степеням другой. Чтобы точнее формулировать задачу, рассмотрим простой корень a уравнения $F(x) = 0$ и предположим, что обе функции $f(x)$ и $F(x)$ голоморфны в области точки a. В этой области мы имеем

$$F(x) = \frac{x - a}{\varphi(x)},$$

причем функция $\varphi(x)$—правильная при $x = a$, если a есть простой корень уравнения $F(x) = 0$. Если мы заменим $F(x)$ через y, то предыдущее соотношение можно представить в виде

$$x - a - y\varphi(x) = 0,$$

и мы приходим к вычислению разложения функции $f(x)$ по степеням переменного y (формула Лагранжа).

27*. Уравнение Кеплера.—Уравнение $z - a - e \sin z = 0$, где a и e—положительные числа, $a < \pi$, $e < 1$, имеет один действительный корень, заключающийся между 0 и π, и два комплексных корня, действительная часть которых заключается между $m\pi$ и $(m+1)\pi$, где m положительное четное или отрицательное нечетное число; но нет ни одного корня, действительная часть которого заключалась бы между $m\pi$ и $(m+1)\pi$, если m есть положительное нечетное или отрицательное четное число. [Брио (Briot) и Буке, Théorie des fonctions elliptiques, 2-е издание, стр. 199.]

[Рассмотреть кривую, описываемую точкою $u = z - a - e \sin z$, когда переменное z описывает четыре стороны прямоугольника, образуемого прямыми $x = m\pi$, $x = (m+1)\pi$, $y = +R$, $y = -R$, где R—весьма велико.]

28*. При очень больших значениях числа m, оба корня уравнения предыдущего упражнения, действительная часть которых заключается между $2m\pi$ и $(2m+1)\pi$, приблизительно равны $2m\pi + \frac{\pi}{2} \pm i\left[\log\left(\frac{2}{e}\right) + \log\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$.

[Гурье (Gourier), Annales de l'École Normale, 2-я серия, т. VII, стр. 73.]

ГЛАВА XV.

Однозначные функции.

Первая часть этой главы посвящена доказательству общих теорем Вейерштрасса [1]) и Миттаг-Леффлера (Mittag-Leffler) о целых функциях и об однозначных функциях, имеющих бесконечное множество особых точек. В последующем эти теоремы применены к эллиптическим функциям. Невозможно изложить эту теорию сколько-нибудь полно на небольшом числе страниц; поэтому мы ограничились лишь указанием в общих чертах самого существенного так, чтобы читатель мог составить представление о важном значении этих функций. Для тех, которые пожелали бы глубже изучить эллиптические функции или научиться их применять, общий Курс Анализа недостаточен; они необходимо должны будут обратиться к специальным курсам.

I.—Первичные множители Вейерштрасса.—Теорема Миттаг-Леффлера.

319. Выражение целой функции через произведение первичных множителей.—Всякий многочлен m-ой степени равен произведению постоянного и m множителей вида $x-a$, равных или неравных между собою; из этого разложения видны корни этого многочлена. Эйлер первый получил для $\sin z$ аналогичное разложение в бесконечное произведение, но множители этого произведения, как мы ниже увидим,—второй степени относительно z. Коши нашел, что в некоторых случаях приходится присоединить к каждому из биномиальных множителей вида $x-a$ соответственный показательный множитель. Но Вейерштрасс первый изучил вопрос во всей общности,

[1]) Теоремы Вейерштрасса, изложенные ниже, были опубликованы в его Мемуаре Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen (Abhandlungen der Akademie zu Berlin, 1876). Пикар дал перевод этого мемуара в Annales de l'École Normale Supérieure (1879). Исследования Миттаг-Леффлера собраны в Мемуаре в Acta Mathematica, т. II.

показав, что всякую целую функцию, имеющую бесконечное множество корней, можно выразить через произведение бесконечного множества множителей, каждый из которых обращается в нуль только при одном значении переменного.

Нам уже известна целая функция, не обращающаяся в нуль ни при каком значении переменного z, именно: e^z; тем же свойством обладает функция $e^{g(z)}$, где $g(z)$ — многочлен или целая функция. Обратно, всякая целая функция, не обращающаяся в нуль ни при каком значении переменного z, имеет предыдущий вид. В самом деле, если целая функция $G(z)$ не обращается в нуль ни при каком значении переменного z, то всякая точка $z=a$ есть обыкновенная точка частного $\frac{G'(z)}{G(z)}$, которое, следовательно, есть также некоторая целая функция $g_1(z)$:

$$\frac{G'(z)}{G(z)}=g_1(z);$$

интегрируя обе части между пределами z_0 и z, получим

$$\operatorname{Log}\left[\frac{G(z)}{G(z_0)}\right]=\int_{z_0}^{z} g_1(z)dz=g(z)-g(z_0),$$

где $g(z)$ — также целая функция от z, и мы имеем

$$G(z)=G(z_0)e^{g(z)-g(z_0)}=e^{g(z)-g(z_0)+\operatorname{Log}[G(z_0)]}.$$

Полученный результат — искомого вида.

Если целая функция $G(z)$ имеет только n корней $a_1, a_2, \ldots a_n$, различных или сливающихся, то очевидно, что функция $G(z)$ имеет вид

$$G(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)e^{g(z)}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение $G(z)=0$ имеет бесконечное множество корней. Так как корней с модулем, меньшим или равным любому числу R, может быть только конечное число (§ 303), то если мы расположим эти корни в таком порядке, чтобы их модули никогда не убывали, то каждый из корней займет определенное место в получившейся последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, \tag{1}$$

где $|a_n|\leqq|a_{n+1}|$, и где $|a_n|$ неограниченно возрастает вместе с указателем n. Мы предположим, что каждый из этих корней входит в последовательность (1) столько раз, каков его порядок кратности, и что в нее не входит корень $z=0$, если $G(0)=0$. Покажем сначала, как можно составить целую функцию $G_1(z)$, имеющую корнями все члены последовательности (1) и не имеющую других корней.

Произведение $\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_\nu(z)}$, где $Q_\nu(z)$ обозначает многочлен, есть целая функция, обращающаяся в нуль только при $z=a_n$. Мы возьмем за $Q_\nu(z)$ многочлен ν-ой степени, которую определим следующим образом. Мы можем представить предыдущее произведение в виде

$$e^{Q_\nu(z)+\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)};$$

если мы заменим $\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ его разложением в целый ряд, то разложение показателя начнется с члена $(\nu+1)$-ой степени, если мы примем

$$Q_\nu(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^\nu}{\nu a_n^\nu}.$$

Число ν еще не определено. Покажем, что всегда можно выбрать это число ν в функции от n таким образом, чтобы бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_\nu(z)} \tag{2}$$

было абсолютно и равномерно сходящимся во всяком круге C с радиусом R и с центром в начале координат, как бы R ни было велико. Зададим число R; пусть будет α положительное число, меньшее единицы. Выделим в произведении (2) множители, соответствующие тем корням a_n, модуль которых не превосходит числа $\frac{R}{\alpha}$. Если есть q корней, удовлетворяющих этому условию, то очевидно, что произведение q множителей

$$F_1(z)=\prod_{n=1}^{q}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_\nu(z)}$$

представляет целую функцию от z. Рассмотрим произведение множителей, начиная с $(q+1)$-го,

$$F_2(z)=\prod_{n=q+1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_\nu(z)}.$$

Если z остается внутри круга с радиусом, равным R, то $|z|\leqq R$, и так как при $n>q$ мы имеем $|a_n|>\frac{R}{\alpha}$, то отсюда следует, что $|z|<\alpha|a_n|$. Из того, как выбран многочлен $Q_\nu(z)$, следует, что каждый множитель этого произведения можно представить в виде

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_\nu(z)}=e^{-\frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\left(\frac{z}{a}\right)^{\nu+2}-\ldots};$$

обозначая этот множитель через $1+u_n$, имеем

$$u_n = e^{-\frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\left(\frac{z}{a}\right)^{\nu+2}-\cdots}-1.$$

Задача приводится к доказательству того, что при соответственном выборе числа ν ряд с общим членом $U_n=|u_n|$ — равномерно сходящийся в круге с радиусом R (§ 284). Вообще, если m есть какое-нибудь действительное или мнимое число, то

$$|e^m-1|<e^{|m|}-1;$$

следовательно, *a fortiori*,

$$U_n<e^{\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a}\right|^{\nu+1}\left(1+\frac{\nu+1}{\nu+2}\left|\frac{z}{a_n}\right|+\frac{\nu+1}{\nu+3}\left|\frac{z}{a_n}\right|^2+\cdots\right)}-1,$$

или, замечая, что при $|z|<R$, мы имеем $|z|<a|a_n|$,

$$U_n<e^{\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\frac{1}{1-a}}-1.$$

Но если x есть действительное положительное число, то e^x-1 меньше, чем xe^x; поэтому тем более

$$U_n<\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\frac{1}{1-a}e^{\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\frac{1}{1-a}}<\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}\frac{e^{\frac{1}{1-a}}}{1-a}.$$

Чтобы ряд с общим членом U_n был равномерно сходящимся в круге с радиусом, равным R, достаточно, чтобы был равномерно сходящимся ряд, общий член которого есть $\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}$. Если есть такое целое число p, чтобы ряд $\Sigma\left|\frac{1}{a_n}\right|^p$ был сходящимся, то достаточно взять $\nu=p-1$. Если нет целого числа p, обладающего этим свойством [1]), то достаточно взять $\nu=n-1$. В самом деле, ряд с общим членом $\left|\frac{z}{a_n}\right|^p$ — равномерно сходящийся в круге с радиусом, равным R, так как его члены меньше, чем члены ряда $\sum\left|\frac{R}{a_n}\right|^n$ и корень n-ой

[1]) Пусть будет, например, $a_n=\log n$ $(n\geq 2)$. Ряд с общим членом $(\log n)^{-p}$ — расходящийся, каково бы ни было положительное число p, так как сумма его $(n-1)$ первых членов больше, чем $\frac{n-1}{(\log n)^p}$, а это выражение неограниченно возрастает вместе с n.

степени из общего члена этого ряда, равный $\frac{R}{a_n}$, при неограниченном возрастании n, стремится к нулю [1]).

Следовательно, всегда можно выбрать такое целое число ν, чтобы бесконечное произведение было абсолютно и равномерно сходящимся в круге с радиусом, равным R; это произведение можно заменить суммою равномерно сходящегося ряда (§ 284), все члены которого суть голоморфные функции. Следовательно, это произведение $F_2(z)$ само есть функция, голоморфная в том же круге (§ 301). Умножая $F_2(z)$ на произведение $F_1(z)$, содержащее только конечное число голоморфных множителей, мы получим бесконечное произведение

$$G_1(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z)}, \tag{3}$$

которое, очевидно, само абсолютно и равномерно сходящееся в круге C с радиусом, равным R, и представляет в этом круге голоморфную функцию. Так как радиус R может быть взят произвольно, и число ν не зависит от этого радиуса, то это произведение есть целая функция $G_1(z)$, имеющая корнями различные члены последовательности (1), и притом только их.

Если сверх того целая функция $G(z)$ имеет нулем порядка p точку $z=0$,—частное $\frac{G(z)}{z^p G_1(z)}$ есть аналитическая функция, не имеющая во всей плоскости ни полюса, ни нуля. Следовательно, это есть целая функция вида $e^{g(z)}$, где $g(z)$ — многочлен или целая функция, и мы имеем для функции $G(z)$ выражение вида

$$G(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z)}. \tag{4}$$

Целую функцию $g(z)$ в свою очередь можно заменить бесконечным множеством способов суммою равномерно сходящегося ряда многочленов

$$g(z) = g_1(z) + g_2(z) + \ldots + g_n(z) + \ldots,$$

и предыдущую формулу можно еще представить в виде

$$G(z) = z^p \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z) + g_n(z)}.$$

---

[1]) Борель заметил, что достаточно взять за ν такое число, чтобы $\nu+1$ было больше, чем $\log n$. В самом деле, ряд $\Sigma \left|\frac{R}{a_n}\right|^{\log n}$ — сходящийся, так как общий член можно представить в виде $e^{\log n \log\left|\frac{R}{a_n}\right|}$. Начиная с достаточно большего значения числа n, количество $\frac{|a_n|}{R}$ будет больше, чем e^2, и общий член меньше, чем $\frac{1}{n^2}$.

множители этого произведения, каждый из которых обращается в нуль только при одном значении переменного z, называются **первичными множителями**.

Так как произведение (4) — абсолютно сходящееся, то первичные множители можно располагать в любом порядке или по произволу соединять их между собою. В этом произведении, когда установлен закон выражения числа ν в функции от n, многочлены $Q_\nu(z)$ зависят только от соответствующих корней; но показательные множители $e^{g(z)}$ не могут быть определены, если известны только корни функции $G(z)$. Рассмотрим, например, функцию $\sin \pi z$, имеющую простыми корнями все целые положительные или отрицательные числа. В этом случае ряд $\sum'\left|\frac{1}{a_n}\right|^2$ — сходящийся; следовательно, можно взять $\nu = 1$, и функция

$$G(z) = z\prod{}'\left(1 - \frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}},$$

где знак (′) справа от $\prod$ показывает, что указатель n не может иметь значения нуль; имеет те же корни, как и $\sin \pi z$. Следовательно, $\sin \pi z = e^{g(z)}G(z)$, но из предыдущего рассуждения мы не можем определить множителя $e^{g(z)}$. Ниже мы докажем, что этот множитель равен π.

320. Род целой функции. Пусть будет дана какая-нибудь бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $|a_n|$ неограниченно возрастает вместе с n. Мы только что видели, как можно составить бесконечное множество целых функций, имеющих нулями все члены этой последовательности, и не имеющих других нулей. Если существует такое целое число p, что ряд $\Sigma|a_n|^{-p}$ — сходящийся, то все многочлены $Q_\nu(z)$ можно взять $(p-1)$-ой степени. Пусть будет дана целая функция вида

$$G(z) = z^q e^{P(z)} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p-1}},$$

где $P(z)$ есть многочлен не выше $(p-1)$-ой степени; число $p-1$ называется **родом** этой функции. Так, функция $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ — нулевого рода; приведенная выше функция $\frac{\sin \pi z}{\pi}$ — первого рода. Изучению рода целых функций за последнее время посвящено большое число работ [1]

321. Однозначные функции с конечным числом особых точек. — Если однозначная функция $F(z)$ имеет на всей плоскости толь-

---

[1] См. работу Бореля: Leçons sur les fonctions entières (1900) и работу Блюменталя (Blumenthal): Sur les fonctions entières de genre infini (1910).

ко конечное число особых точек, то эти особые точки суть необходимо уединенные особые точки; это—полюсы или уединенные существенно особые точки. Точка $z=\infty$ также есть обыкновенная точка или уединенная особая точка (§ 314). Обратно, **если однозначная функция имеет во всей плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, только уединенные особые точки, то этих особых точек будет конечное число.** В самом деле, бесконечно удаленная точка есть обыкновенная точка функции или уединенная особая точка; в обоих случаях можно описать круг C настолько большим радиусом, чтобы вне этого круга функция не имела другой особой точки, кроме самой бесконечно удаленной точки. Внутри круга C функция может иметь только конечное число особых точек; в самом деле, если бы она имела их бесконечное множество, то была бы, по крайней мере, одна предельная точка (§ 303), и эта предельная точка не была бы уединенною особою точкою. Таким образом **однозначная функция, имеющая только полюсы, имеет их конечное число,** так как полюс есть уединенная особая точка.

Всякая однозначная функция, правильная при всяком конечном значении переменного z и при $z=\infty$, приводится к постоянному. В самом деле, если бы эта функция не приводилась к постоянному, то, так как она правильная при всяком конечном значении переменного z, она была бы многочленом или целою функцией, и бесконечно удаленная точка была бы для этой функции полюсом или существенно особою точкою.

Пусть будет $F(z)$ однозначная функция, имеющая n различных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, лежащих на конечном расстоянии; пусть будет $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ главная часть разложения функции $F(z)$ в области точки a_i, где G_i есть многочлен или целая функция. В обоих случаях эта главная часть—правильная при всяком значении переменного z, включая $z=\infty$, кроме $z=a_i$. Далее, пусть будет $P(z)$ главная часть разложения функции $F(z)$ в области бесконечно удаленной точки; $P(z)$ есть нуль, если бесконечно удаленная точка есть обыкновенная точка функции $F(z)$. Разность

$$D=F(z)-P(z)-\sum_{i=1}^{n} G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right),$$

очевидно,—правильная при всяком значении переменного z, включая и $z=\infty$; следовательно, она равна постоянному C, и мы имеем равенство [1])

[1]) К формуле (5), на следующей странице, можно еще прийти, приравнивая нулю сумму вычетов функции $F(x)\left(\frac{1}{x-z}-\frac{1}{x-z_0}\right)$, где z и z_0 рассматриваются, как постоянные, а x, как переменное (см. § 314).

$$F(z) = P(z) + \sum_{i=1}^{n} G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right) + C. \tag{5}$$

Отсюда следует, что функция $F(z)$ вполне определена до прибавочного постоянного, если известны главные части в области каждой особой точки. При этом эти главные части, равно как и особые точки, могут быть выбраны произвольно.

Если все особые точки суть полюсы, то главные части G_i суть многочлены; $P(z)$, если оно отлично от нуля, есть также многочлен, и правая часть формулы (5) приводится к рациональной функции. Так как, с другой стороны, однозначная функция, у которой особые точки суть только полюсы, имеет их конечное число, то отсюда следует, что *однозначная функция, все особые точки которой суть полюсы, есть рациональная дробь.*

322. Однозначные функции с бесконечным множеством особых точек.—Если однозначная фунция имеет бесконечное множество особых точек в конечной области, то существует по крайней мере одна предельная точка, лежащая внутри или на границе этой области. Например, функция $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$ имеет полюсами все корни уравнения $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)=0$, т.-е. все точки $z=\dfrac{1}{k\pi}$, где k — любое целое число; точка $z=0$ есть предельная точка. Функция $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}\right)}$ также имеет особыми точками все корни уравнения $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{k\pi}$, среди которых находятся все точки $z=\dfrac{1}{2k'\pi+\arcsin\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)}$, где k и k' — произвольные целые числа. Все точки $\dfrac{1}{2k'\pi}$ суть предельные точки, так как при k' постоянном и при неограниченном возрастании числа k, предыдущее выражение имеет пределом $\dfrac{1}{2k'\pi}$. Нетрудно было бы составлять все более и более сложные примеры того же рода, увеличивая число знаков синуса. Существуют также, как мы увидим несколько ниже, функции, имеющие особыми точками все точки некоторой линии.

Может случиться, что однозначная функция имеет только конечное число особых точек во всякой конечной части плоскости, хотя во всей плоскости она их имеет бесконечное множество. В этом случае вне круга C, как бы ни был велик его радиус, всегда существует бесконечное множество особых точек, и мы будем говорить, что бесконечно удаленная точка есть предельная точка. В следующих параграфах мы займемся рассмотрением однозначных функций с бесконечным множеством уединенных особых точек, имеющих единственной предельною точкою бесконечно удаленную точку.

323. Теорема Миттаг-Леффлера. — Если во всякой части плоскости, лежащей на конечном расстоянии, есть только конечное число особых точек, то, как это было уже указано для нулей целой функции, можно расположить эти точки в последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{6}$$

таким образом, чтобы было $|a_n| \leqq |a_{n+1}|$; очевидно, что $|a_n|$ неограниченно возрастает вместе с n. Мы можем предположить, сверх того, что все члены этой последовательности различны. Для каждого члена a последовательности (6) возьмем соответствующий многочлен или целую функцию $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ от $\frac{1}{z-a_i}$, причем мы можем выбрать эти функции совершенно произвольно. Теорему Миттаг-Леффлера можно выразить следующим образом:

Существует однозначная аналитическая функция, правильная при всяком конечном значении переменного z, не входящем в состав последовательности (6), главная часть которой в области точки $z=a_i$ есть $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$.

Для доказательства этого предложения мы покажем, что к каждой функции $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ можно присоединить такой многочлен $P_i(z)$, чтобы ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left[G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)+P_i(z)\right]$$

определял аналитическую функцию, обладающую этими свойствами.

Если точка $z=0$ входит в состав последовательности (6), то мы примем соответствующий многочлен равным нулю. Для каждой из остальных точек a_i выберем такое соответствующее положительное число ε_i, чтобы ряд $\sum \varepsilon_i$ был сходящимся; обозначим через α положительное число, меньшее единицы. Пусть будет C_i круг с центром в начале координат, проходящий через точку a_i, и C'_i — круг концентрический с предыдущим, радиус которого равен $\alpha|a_i|$. Так как функция $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ голоморфна в круге C_i, то во всякой точке, лежащей внутри этого круга, мы имеем

$$G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)=a_{i0}+a_{i1}z+\ldots+a_{in}z^n+\ldots$$

Целый ряд, стоящий в правой части,—равномерно сходящийся в круге C'_i; следовательно, можно найти настолько большое целое число ν, чтобы внутри C'_i было

$$\left|G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)-a_{i0}-a_{i1}z-\ldots-a_{i\nu}z^\nu\right|<\varepsilon_i. \tag{7}$$

Определив число ν таким образом, возьмем за $P_i(z)$ многочлен $-a_{i0}-a_{i1}z-\ldots-a_{i\nu}z^\nu$.

Пусть будет теперь C круг с радиусом, равным R, и с центром в точке $z=0$. Выделим из последовательности (6) те особые точки a_i, модуль которых не превосходит числа $\frac{R}{\alpha}$. Если число этих точек равно q, то мы положим

$$F_1(z)=\sum_{i=1}^{q}\left[G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)+P_i(z)\right].$$

Оставшийся ряд

$$F_2(z)=\sum_{i=q+1}^{+\infty}\left[G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)+P_i(z)\right],$$

—абсолютно и равномерно сходящийся в круге C, так как во всякой точке, взятой внутри этого круга, мы имеем $|z|<R<\alpha|a_i|$, если указатель i больше q, и на основании неравенства (7) и того, как выбран многочлен $P_i(z)$, модуль общего члена второго ряда меньше, чем ε_i, если z лежит внутри C. Следовательно, функция $F_2(z)$— голоморфная в этом круге, и очевидно, что присоединяя к ней $F_1(z)$, мы получим сумму

$$F(z)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)+P_i(z)\right], \tag{8}$$

имеющую в круге C те же особые точки, как и $F_1(z)$, с теми же главными частями. Но эти особые точки суть именно члены последовательности (6), модуль которых меньше R, и главная часть в области точки a_i есть $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$. Так как радиус R произволен, то отсюда следует, что функция $F(z)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

Очевидно, что если мы прибавим к $F(z)$ многочлен или какую-нибудь целую функцию $G(z)$, то сумма $F(z)+G(z)$ будет иметь те же особые точки, как и $F(z)$, с теми же главными частями. Обратно, мы имеем, таким образом, общее выражение однозначных функций, имеющих данные особые точки с соответствующими главными частями, так как разность двух подобных функций, будучи правильною при всяком конечном значении переменного z, есть многочлен или целая функция. Так как функцию $G(z)$ можно в свою очередь представить суммою многочленов, то, следовательно, функция $F(z)+G(z)$ сама может быть представлена суммою ряда, каждый член которого мы получим, прибавляя к главной части $G_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ соответствующий многочлен.

Если все главные части G_i суть многочлены, то функция мероморфна во всякой области плоскости, лежащей на конечном расстоянии, и обратно. Таким образом мы видим, что всякую мероморфную функцию можно представить суммою ряда, каждый член которого есть рациональная дробь, обращающаяся в бесконечность только при конечном значении переменного. Это представление аналогично разложению рациональной дроби на простые элементы. Точно также всякую мероморфную функцию $\Phi(z)$ можно представить, как частное двух целых функций. В самом деле, предположим, что полюсы функции $\Phi(z)$ суть члены последовательности (6), каждый из которых считается столько раз, какова его степень кратности. Пусть будет $G(z)$ целая функция, имеющая эти точки нулями. Произведение $\Phi(z)G(z)$ не имеет более полюсов; следовательно, это—целая функция $G_1(z)$, и мы имеем равенство

$$\Phi(z)=\frac{G_1(z)}{G(z)}.$$

324. Исследование некоторых частных случаев.—Предыдущее доказательство общей теоремы не всегда дает самый простой способ составления однозначной функции, удовлетворяющей требуемым условиям. Предположим, например, что требуется составить функцию $\Phi(z)$, имеющую полюсами первого порядка все точки последовательности (6), причем вычет равен единице; мы предположим, что $z=0$ не есть полюс. Главная часть, соответствующая полюсу a_i, есть $\frac{1}{z-a_i}$, и мы имеем

$$\frac{1}{z-a_i}=-\frac{1}{a_i}-\frac{z}{a_i^2}-\ldots-\frac{z^{\nu-1}}{a_i^\nu}+\frac{1}{z-a_i}\left(\frac{z}{a_i}\right)^\nu;$$

если мы возьмем

$$P_i(z)=\frac{1}{a_i}+\frac{z}{a_i^2}+\ldots+\frac{z^{\nu-1}}{a_i^\nu},$$

то задача приводится к определению целого числа ν в функции указателя i таким образом, чтобы ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{z-a_i}\left(\frac{z}{a_i}\right)^\nu=-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{z^\nu}{\left(1-\frac{z}{a_i}\right)}\frac{1}{a_i^{\nu+1}}$$

был абсолютно и равномерно сходящимся во всяком круге с центром в начале координат, если откинуть достаточное число начальных членов. По-прежнему достаточно, чтобы ряд $\sum\left(\frac{z}{a_i}\right)^{\nu+1}$ сам был абсолютно и равномерно сходящимся в той же области. Если существует такое число p, что ряд $\sum\left|\frac{1}{a_i}\right|^p$ сходящийся, то достаточно взять $\nu=p-1$. Если нет целого числа, обладающего этим свойством, то, как выше (§ 319), можно взять $\nu=i-1$, или $\nu+1>\log i$. Выбрав надлежащим образом число ν, мы получим мероморфную функцию

$$\Phi(z)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{z-a_i}+\frac{1}{a_i}+\frac{z}{a_i^2}+\ldots+\frac{z^{\nu-1}}{a_i^\nu}\right], \tag{9}$$

имеющую полюсами первого порядка все точки последовательности (6) с вычетами, равными единице.

Отсюда нетрудно вывести другое доказательство теоремы Вейерштрасса о разложении целой функции на первичные множители. В самом деле, ряд (9) можно интегрировать почленно вдоль любого пути, не проходящего ни через один из полюсов, так как, если этот путь заключен в круге C с центром в начале координат, то ряд (9) можно заменить рядом, равномерно сходящимся в этом круге, к которому прибавлена сумма конечного числа мероморфных функций [это вытекает из самого доказательства формулы (9)]. Интегрируя и приняв точку $z=0$ за нижний предел, получим

$$\int_0^z\Phi(z)\,dz=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)+\frac{z}{a_i}+\frac{z^2}{2a_i^2}+\ldots+\frac{z^\nu}{\nu a_i^\nu}\right],$$

и, следовательно,

$$e^{\int_0^z\Phi(z)dz}=\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\frac{z^2}{2a_i^2}+\ldots+\frac{z^\nu}{\nu a_i^\nu}}. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что левая часть формулы (10) есть целая функция от z. В области значения $z=a$, не входящего в последовательность (6), интеграл $\int_0^z\Phi(z)dz$ — голоморфный; функция $e^{\int_0^z\Phi(z)dz}$ — также голоморфная и отлична от нуля при $z=a$. В области точки a_i мы имеем

$$\Phi(z)=\frac{1}{z-a_i}+P(z-a_i),$$

$$\int_0^z\Phi(z)\,dz=\operatorname{Log}(z-a_i)+Q(z-a_i),$$

$$e^{\int_0^z\Phi(z)dz}=(z-a_i)e^{Q(z-a_i)},$$

где функции P и Q—голоморфны. Мы видим, что эта целая функция имеет корнями члены последовательности (6), и формула (10) тождественна с формулою (3), выведенною выше.

То же доказательство можно применить и к целым функциям, имеющим кратные корни. Если a_i есть кратный корень порядка r, то достаточно предположить, что $\Phi(z)$ имеет полюс $z=a_i$ с вычетом, равным r.

Составим еще мероморфную функцию, имеющую полюсами второго порядка все точки последовательности (6), причем главная часть в области точки a_i есть $\left(\frac{1}{z-a_i}\right)^2$. Предположим, что $z=0$ есть обыкновенная точка, и что ряд $\sum\left|\frac{1}{a_i}\right|^3$—сходящийся; очевидно, что будет сходящимся и ряд $\sum\left|\frac{1}{a_i}\right|^4$. Ограничивая разложение дроби $\frac{1}{(z-a_i)^2}$ по степеням переменного z его первым членом, получим

$$\frac{1}{(z-a_i)^2}-\frac{1}{a_i^2}=\frac{2a_i z-z^2}{a_i^2(z-a_i)^2}=\frac{2a_i z-z^2}{a_i^4\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^2}.$$

Ряд

$$\Phi(z)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(z-a_i)^2}-\frac{1}{a_i^2}\right]=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2a_i z-z^2}{a_i^4\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^2} \tag{11}$$

представит решение задачи, если только он будет равномерно сходящимся во всяком круге C с центром в начале координат, не считая достаточного числа начальных членов. Но если мы возьмем члены ряда, происходящие от тех полюсов a_i, для которых $|a_i|>\frac{R}{\alpha}$, где R—радиус круга C, и α—положительное число, меньшее единицы, то модуль количества $\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{-2}$ будет меньше некоторой границы, и на основании предположений, сделанных относительно полюсов a_i, ряд с общим членом $\frac{2z}{a_i^3}-\frac{z^2}{a_i^4}$ будет абсолютно и равномерно сходящимся в круге C.

325. Способ Коши.—Когда дана мероморфная функция $F(z)$, то, пользуясь теоремою Миттаг-Леффера, можно составить ряд с рациональными членами, сумма которого $F_1(z)$ имеет те же полюсы, как и $F(z)$, с теми же главными частями. Но остается еще найти целую функцию, равную разности $F(z)-F_1(z)$. Задолго до работ Вейерштрасса, Коши вывел из теории вычетов способ разложения мероморфной функции на бесконечное множество рациональных членов, при некоторых весьма общих предположениях относительно этой функции. Впрочем нетрудно представить его метод в еще более общем виде.

Пусть будет $F(z)$ мероморфная функция, правильная в области начала координат; пусть будет, далее, $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$ бесконечная последовательность замкнутых контуров, окружающих точку $z=0$, не проходящих ни через один из полюсов, и таких, что, начиная с достаточно большего значения числа n, расстояние от начала координат до любой точки контура C_n остается больше всякого данного числа. Очевидно, что любой полюс функции $F(z)$ будет, наконец, заключен внутри всех последовательных контуров $C_n, C_{n+1}, \ldots$, если только n достаточно велико. Определенный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)} \frac{F(z)}{z-x}\,dz,$$

где x есть любая точка, лежащая внутри контура C_n и отличная от полюса, равен $F(x)$, сложенному с суммою вычетов относительно различных полюсов функции $F(z)$, лежащих внутри C_n. Пусть будет a_k один из этих полюсов; соответствующая главная часть $G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ есть рациональная функция, и в области точки a_k мы имеем:

$$F(z) = \frac{A_m}{(z-a_k)^m} + \frac{A_{m-1}}{(z-a_k)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-a_k} + B_0 + B_1(z-a_k) + \ldots$$

В области этой точки мы имеем также

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{(x-a_k)-(z-a_k)} = -\frac{1}{x-a_k} - \frac{z-a_k}{(x-a_k)^2} - \frac{(z-a_k)^2}{(x-a_k)^3} - \ldots;$$

составив произведение, мы видим, что вычет функции $\frac{F(z)}{z-x}$ относительно полюса a_k равен

$$-\frac{A_1}{x-a_k} - \ldots - \frac{A_{m-1}}{(x-a_k)^{m-1}} - \frac{A_m}{(x-a_k)^m} = -G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right).$$

Следовательно, мы имеем соотношение

$$F(x) = \sum_{C_n} G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)} \frac{F(z)\,dz}{z-x}, \tag{12}$$

где знак $\sum\limits_{C_n}$ обозначает, что сумма распространена на все полюсы a_k, лежащие внутри контура C_n. С другой стороны, мы можем заменить $\frac{1}{z-x}$ через

$$\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^p}{z^{p+1}} + \frac{1}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1},$$

и представить предыдущую формулу в виде

$$F(x)=\sum_{C_n} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{F(z)dz}{z}+\ldots$$
$$+\frac{x^p}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{F(z)}{z^{p+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}dz. \tag{13}$$

Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{F(z)dz}{z}$ равен $F(0)$, сложенному с суммою вычетов функции $\frac{1}{z}F(z)$ относительно полюсов функции $F(z)$, лежащих внутри C_n. Вообще, определенный интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{F(z)dz}{z^r}$ равен $\frac{F^{(r-1)}(0)}{1.2\ldots(r-1)}$, сложенному с суммою вычетов функции $z^{-r}F(z)$ относительно полюсов функции $F(z)$, лежащих внутри C_n. Если мы обозначим через $s_k^{(r-1)}$ вычет функции $F(z)z^{-2}$ относительно полюса a_k, то мы можем представить формулу (13) в виде

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}F^{(p)}(0)$$
$$+\sum_{C_n}\left[G_k\left(\frac{1}{x-a_k}\right)+s_k^{(0)}+s_k^{(1)}x+\ldots+s_k^{(p)}x^p\right]$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)}\frac{F(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}dz. \tag{14}$$

Чтобы иметь верхнюю границу дополнительного члена, представим его в виде

$$R_n=\frac{x^{p+1}}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z^p}\frac{dz}{z(z-x)}.$$

Предположим, что вдоль C_n модуль отношения $\frac{F(z)}{z^p}$ остается меньшим некоторого числа M, и модуль $|z|$ большим, чем δ. Так как число n должно неограниченно возрастать, то мы можем предположить, что мы взяли его настолько большим, чтобы было $\delta>|x|$; тогда вдоль C_n мы будем иметь

$$\left|\frac{1}{z-x}\right|<\frac{1}{\delta-|x|}.$$

Следовательно, если S_n есть длина контура C_n, то

$$|R_n|<\frac{|x|^{p+1}}{2\pi}M\frac{s_n}{\delta(\delta-|x|)}.$$

Мы можем утверждать, что при неограниченном возрастании числа n этот дополнительный член стремится к нулю, если можно найти неограниченную последовательность замкнутых контуров C_1, $C_2, \ldots$, $C_n, \ldots$ и целое положительное число p, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Вдоль всех этих контуров модуль частного $F(z)z^{-p}$ остается меньшим некоторого постоянного числа M.

2. Когда n неограниченно возрастает, отношение $\frac{S_n}{\delta}$ длины контура C_n к наименьшему расстоянию δ от начала координат до точек этого контура остается меньшим некоторой границы L.

Если эти условия удовлетворяются, то $|R_n|$ остается меньшим частного от деления некоторого постоянного числа на число $\delta - |x|$, неограниченно возрастающее вместе с n. Следовательно, этот остаточный член R_n стремится к нулю, и мы имеем в пределе

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \ldots + \frac{x^p}{1 \cdot 2 \ldots p} F^{(p)}(0) +$$

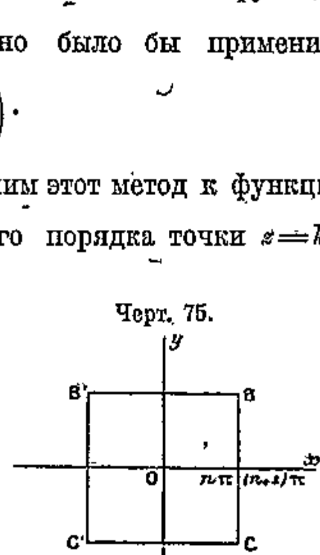
$$+ \lim_{n=\infty} \sum_{C_n} \left[G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) + s_k^{(0)} + s_k^{(1)} x + \ldots + s_k^{(p)} x^p \right]. \qquad (15)$$

Таким образом функция $F(x)$ разложена в сумму бесконечного множества рациональных членов. Порядок, в котором они следуют друг за другом, определяется законом следования контуров $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Если полученный ряд—абсолютно сходящийся, то мы можем брать их в любом порядке.

Примечание. Если бы точка $z = 0$ была полюсом функции $F(z)$ с главною частью $G\left(\frac{1}{z}\right)$, то достаточно было бы применить предыдущий метод к функции $F(z) - G\left(\frac{1}{z}\right)$.

326. Разложение $\operatorname{ctg} x$ **и** $\sin x$.—Применим этот метод к функции $F(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, имеющей полюсами первого порядка точки $z = k\pi$, где k есть любое целое число, отличное от нуля, с вычетом, равным единице. Возьмем за контур C_n квадрат, например, $BCB'C'$ (черт. 75) с центром в начале координат, стороны которого параллельны осям координат и имеют длину $2n\pi + \pi$. На этом контуре не лежит ни одного полюса, и отношение длины S_n к наименьшему расстоянию δ от начала координат

Черт. 75.



до точек контура постоянно и равно 8. Квадрат модуля функции $\operatorname{ctg}(x+iy)$ равен

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

На сторонах BC и $B'C'$ мы имеем $\cos 2x=-1$ и модуль меньше единицы. На сторонах BB' и CC' квадрат этого модуля меньше, чем

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{e^{2y}+e^{-2y}-2}=\left(\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}\right)^2;$$

в этой формуле надо заменить $2y$ через $\pm(2n+1)\pi$, и мы видим, что при неограниченном возрастании числа n полученное выражение стремится к единице. Так как, при неограниченном возрастании числа n, модуль функции $\frac{1}{z}$ вдоль C_n стремится к нулю, то отсюда следует, что модуль функции $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$ на контуре C_n остается меньшим некоторого постоянного числа M, каково бы ни было число n. Следовательно, к этой функции можно применить формулу (15), положив $p=0$. Мы имеем здесь

$$F(0)=\lim_{x=0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\right)=0,$$

и $s_k^{(0)}$, представляющее вычет функции $\frac{1}{z}\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z^2}$ для полюса $k\pi$, равно $\frac{1}{k\pi}$. Таким образом

$$\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}=\lim_{n=\infty}\sum_{-n}^{n}{}'\left(\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right), \tag{16}$$

причем значение $k=0$ должно быть исключено при суммировании. Неограниченно увеличивая число n, мы получим ряд, который будет абсолютно сходящимся, так как его общий член можно представить в виде

$$\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}=\frac{x}{k\pi(k\pi-x)}=\frac{1}{k^2\pi^2}\,\frac{x}{\left(1-\frac{x}{k\pi}\right)},$$

и модуль множителя $\dfrac{x}{1-\frac{x}{k\pi}}$ остается меньшим некоторой границы, если только x не есть кратное числа π. Следовательно, окончательно мы имеем

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right). \tag{17}$$

Интегрируя обе части этого соотношения вдоль пути, выходящего из начала координат и не проходящего ни через один из полюсов, получим

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) dx = \operatorname{Log}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left[\operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) + \frac{x}{k\pi}\right];$$

отсюда находим

$$\sin x = x \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) e^{\frac{x}{k\pi}}. \tag{18}$$

Множитель $e^{g(x)}$ равен здесь единице. Если в ряде (17) мы соединим попарно члены, содержащие противоположные значения числа k, то получим формулу

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}. \tag{17'}$$

Точно так же, соединяя попарно множители произведения (18), соответствующие противоположным значениям числа k, мы получим другую формулу [1])

$$\sin x = x \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right); \tag{18'}$$

заменяя в ней x через πx, мы можем представить ее еще иначе

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Различные замечания. — 1. Из последних формул ясно видна периодичность функции $\sin x$, тогда как ее нельзя непосредственно усмотреть из разложения этой функции в целый ряд. В самом деле, мы видим, что $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ есть предел при n стремящемся к бесконечности многочлена

$\varphi_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n-1}\right) \cdots (1-x)x(1+x) \cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)$; изменяя x в $x+1$, получим

$$\varphi_n(x+1) = -\varphi_n(x)\frac{n+1+x}{n-x};$$

отсюда при неограниченном возрастании числа n находим $\sin(\pi x + \pi) = -\sin \pi x$, или $\sin(z+\pi) = -\sin z$.

2. На этом частном примере нетрудно видеть необходимость присоединения к каждому биномиальному множителю вида $1 - \frac{x}{a_k}$ соответственного показательного множителя, чтобы произведение было абсолютно сходящимся. Предположим, для определенности, что x действительно и положительно.

---

[1]) Это разложение $\sin x$ в бесконечное произведение принадлежит Эйлеру, получившему его элементарным путем (Introductio in Analysin infinitorum).

Так как ряд $\sum \frac{x}{n}$ — расходящийся, то произведение

$$P_m = x\left(1+\frac{x}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right)$$

неограниченно возрастает вместе с m, тогда как произведение

$$Q_n = (1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)$$

при неограниченном возрастании числа n стремится к нулю (§ 285). Если мы возьмем $m=n$, то произведение $P_m Q_m$ имеет пределом $\frac{\sin \pi x}{\pi}$; но если m и n возрастают независимо одно от другого, то предел этого произведения совершенно неопределенный. В этом нетрудно убедиться, каково бы ни было значение переменного x, воспользовавшись первичными множителями Вейерштрасса. Заметим предварительно, что бесконечные произведения

$$F_1(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}, \quad F_2(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

оба — абсолютно сходящиеся, и их произведение равно $\frac{\sin \pi x}{\pi}$.

Мы можем представить произведение $P_m Q_n$ в следующем виде

$$P_m Q_n = x\prod_{\nu=1}^{m}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)e^{\frac{x}{\nu}}e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)}.$$

Если числа m и n неограниченно возрастают, то произведение всех множителей правой части без последнего множителя имеет пределом $F_1(x)\,F_2(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$. Что касается последнего множителя, то мы видели, что выражение

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}$$

имеет пределом $\log \omega$, где ω есть предел отношения $\frac{m}{n}$ (т. I, § 161). Следовательно, произведение $P_m Q_n$ имеет пределом $\frac{\sin \pi x}{\pi} e^{x\log\omega}$; мы видим, что этот предел зависит от того закона, по которому неограниченно возрастают оба числа m и n.

3. Такие же замечания можно сделать относительно разложения $\operatorname{ctg} x$. Мы покажем только, как можно вывести периодичность этой функции из ряда (17). Заметим сначала, что ряд с общим членом $\frac{1}{k\pi}-\frac{1}{(k-1)\pi} = -\frac{1}{k(k-1)\pi}$, где указатель k принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, кроме значений $k=0$, $k=1$, — абсолютно сходящийся, и его сумма равна $-\frac{2}{\pi}$, как в этом можно убедиться, изменяя k сначала от 2 до $+\infty$, а потом от -1 до $-\infty$. Следовательно, мы можем представить разложение $\operatorname{ctg} x$ в виде

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x}+\frac{1}{x-\pi}-\frac{1}{\pi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'' \left[\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{(k-1)\pi}\right],$$

где значения $k=0$, $k=1$ должны быть исключены при суммировании. Мы получим это разложение, вычитая из каждого члена ряда (17) соответствующий член сходящегося ряда, составленного из только что приведенного ряда, сложенного с $\frac{2}{\pi}$.

Изменяя x в $x+\pi$, получим

$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\pi}-\frac{1}{\pi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'' \left[\frac{1}{x-(k-1)\pi}+\frac{1}{(k-1)\pi}\right],$$

или иначе

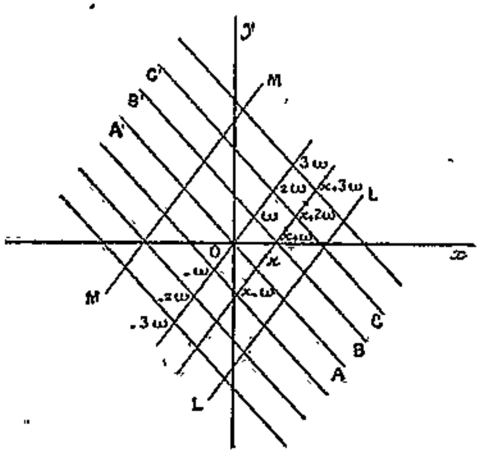
$$\operatorname{ctg}(x+\pi)=\frac{1}{x}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{x-(k-1)\pi}+\frac{1}{(k-1)\pi}\right],$$

где $k-1$ принимает все целые значения, кроме значения нуль. Мы видим, что правая часть последней формулы тождественна с разложением $\operatorname{ctg} x$.

II.—Двоякопериодические функции. Эллиптические функции.

327. Периодические функции. Разложения в ряды. — Аналитическая однозначная функция $f(z)$ называется периодическою, если есть такое число ω, действительное или комплексное, что при всяком z, имеет место соотношение $f(z+\omega)=f(z)$; число ω называется периодом. Отметим на плоскости точку с аффиксом ω; начиная от начала координат, отложим на бесконечной прямой, проходящей через начало координат и через точку ω, в обоих направлениях отрезки, равные $|\omega|$. Таким образом мы получим точки ω, 2ω, $3\omega, \ldots$, $n\omega, \ldots$ и точки $-\omega$, -2ω, $-3\omega, \ldots$, $-n\omega, \ldots$ Через эти точки и через начало координат проведем прямые, параллельные какому-нибудь направлению, отличному от $O\omega$; таким образом, мы разобьем площадь на бесконечное множество полос равной ширины (черт. 76).

Черт. 76.



Если через какую-нибудь точку z мы проведем прямую, параллельную направлению $O\omega$, то мы получим все точки этой прямой, изменяя в выражении $z+\lambda\omega$ действительный параметр λ от $-\infty$ до $+\infty$. В частности, если точка z описывает первую полосу $AA'BB'$, то точка $z+\omega$ опишет смежную полосу $BB'CC'$, точка $z+2\omega$ опишет третью полосу и т. д. Все значения функции $f(z)$ в первой полосе будут периодически повторяться в следующих.

Пусть будут LL' и MM' бесконечные прямые параллельные направлению $O\omega$. Положим $u=e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$ и найдем область плоскости, описываемую переменным u, когда точка z остается в бесконечной полосе, заключающейся между параллельными прямыми LL' и MM'. Если $\alpha+\beta i$ есть аффикс какой-нибудь точки прямой LL', то мы получим все остальные точки этой прямой, полагая $z=\alpha+\beta i+\lambda\omega$ и изменяя λ от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда мы будем иметь:

$$u=e^{\frac{2i\pi}{\omega}(\alpha+\beta i+\lambda\omega)}=e^{2\pi i\lambda}\,e^{2\pi i\frac{\alpha+\beta i}{\omega}};$$

но если λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то переменное u описывает окружность C_1 с центром в начале координат. Точно так же можно убедиться, что если z описывает прямую MM', то переменное u описывает окружность C_2, концентрическую с первою. Если точка z описывает бесконечную полосу, заключающуюся между прямыми LL' и MM', точка u описывает круговое кольцо, ограниченное окружностями C_1 и C_2. Но тогда как каждому значению переменного z соответствует только одно значение переменного u, наоборот, каждому значению переменного u соответствует бесконечное множество значений переменного z, образующих арифметическую прогрессию с разностью ω, неограниченную в обоих направлениях.

Периодическая функция $f(z)$, имеющая период ω и голоморфная в бесконечной полосе, заключающейся между прямыми LL', MM', равна некоторой функции $\varphi(u)$ нового переменного u, голоморфной в круговом кольце, ограниченном окружностями C_1 и C_2. В самом деле, хотя каждому значению переменного u и соответствует бесконечное множество значений переменного z, но, вследствие периодичности функции $f(z)$, все эти значения переменного z дают одно и то же значение для функции. С другой стороны, если u_0 есть частное значение переменного u и z_0—одно из соответствующих значений переменного z, то значение z, стремящееся к z_0, есть функция от u, голоморфная в области точки u_0; следовательно, то же имеет место и для функции $\varphi(u)$. Поэтому мы можем применить к функции $\varphi(u)$ теорему Лорана: в круговом кольце, заключающемся между окружностями C_1 и C_2, эта функция равна сумме ряда следующего вида

$$\varphi(u)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_m u^m.$$

Возвращаясь к переменному z, мы заключаем, что внутри рассматриваемой полосы периодическая функция $f(z)$ равна сумме ряда

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_m e^{\frac{2mi\pi z}{\omega}}. \tag{19}$$

Если периодическая функция $f(z)$ голоморфна во всей плоскости, то можно предположить, что прямые LL' и MM', ограничивающие полосу, неограниченно удаляются, одна—вверх, а другая—вниз. Следовательно, всякая целая периодическая функция разлагается в ряд, расположенный по положительным и отрицательным степеням выражения $e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}$, — сходящийся при всяком конечном значении переменного z.

328. Невозможность существования однозначной функции с тремя периодами.—Якоби принадлежит замечательная теорема, что однозначная функция не может иметь более двух различных периодов. Чтобы доказать эту теорему, очевидно, достаточно показать, что однозначная функция не может иметь трех различных периодов. Докажем предварительно следующую лемму:

Пусть будут a, b, c три произвольных количества, действительных или мнимых, и m, n, p — три произвольных целых числа, положительных или отрицательных, из которых по крайней мере одно отлично от нуля. Если мы будем давать целым числам m, n, p всевозможные системы значений, кроме $m=n=p=0$, то нижняя граница модуля $|ma+nb+pc|$ равна нулю.

Рассмотрим на плоскости множество (E) точек, аффиксы которых равны $ma+nb+pc$. Если две точки, соответствующие двум различным системам целых чисел, совпадают между собою, то например, мы будем иметь

$$ma+nb+pc=m_1a+n_1b+p_1c,$$

и, следовательно,

$$(m-m_1)\,a+(n-n_1)\,b+(p-p_1)\,c=0,$$

причем по крайней мере одно из чисел $m-m_1, n-n_1, p-p_1$ не равно нулю. В этом случае, предложение очевидно. Предположим теперь, что все точки множества (E) различны; пусть будет 2δ нижняя граница модуля $|ma+nb+pc|$. Это число 2δ есть также нижняя граница расстояния между какими-нибудь двумя точками множества (E); в самом деле, расстояние между двумя точками с аффиксами $ma+nb+pc$ и $m_1a+n_1b+p_1c$ равно $|(m-m_1)a+(n-n_1)\,b+(p-p_1)c|$. Покажем, что, предполагая $\delta>0$, мы придем к противоречию.

Пусть будет N положительное целое число; дадим каждому из целых чисел m, n, p одно из значений последовательности $-N, -(N-1), \ldots, 0, \ldots, N-1, N$ и будем соединять между собою всеми возможными способами эти значения чисел m, n, p. Таким образом мы получим $(2N+1)^3$ точек последовательности (E); по предположению, все эти точки будут различны. Предположим, что $|a|\geqq|b|\geqq|c|$; тогда расстояние любой из этих точек от начала координат будет не больше, чем $3N|a|$. Следовательно, эти точки расположены внутри окружности C с радиусом, равным $3N|a|$, и с центром в начале координат и на самой этой окружности. Если из каждой из этих точек, как из центра, мы опишем окружности с радиусом, равным δ, то все эти круги будут лежать в круге C_1, описанном из начала координат радиусом, равным $3N|a|+\delta$, и не будут иметь общих частей, так как расстояние между их центрами не может быть меньше, чем 2δ. Следовательно, сумма площадей всех этих кругов меньше площади круга C_1 и мы имеем

$$(3N|a|+\delta)^2>(2N+1)^3\delta^2,$$

или

$$\delta<\frac{3N|a|}{(2N+1)^{\frac{3}{2}}-1}$$

При неограниченном возрастании числа N правая часть стремится к нулю; следовательно, при всяком N этому неравенству нельзя удовлетворить никаким положительным числом δ. Отсюда следует, что нижняя граница модуля $|ma+nb+pc|$ не может быть положительным числом; она есть нуль, и лемма доказана.

Таким образом, мы видим, что если ни при какой системе целых чисел m, n, p (кроме $m=n=p=0$) не будет $ma+nb+pc=0$, то всегда можно найти для этих целых чисел такие значения, чтобы было $|ma+nb+pc|<\varepsilon$, как бы ни было мало положительное число ε. В этом случае однозначная функция $f(z)$ не может иметь трех различных периодов a, b, c. В самом деле, пусть будет z_0 обыкновенная точка функции $f(z)$; опишем из точки z_0 круг настолько малого радиуса ε, чтобы внутри этого круга уравнение $f(z)=f(z_0)$ не имело других корней, кроме $z=z_0$ (§ 302). Если a, b, c суть периоды функции $f(z)$, то ясно, что $ma+nb+pc$ есть также период, каковы бы ни были целые числа m, n, p, и мы имеем

$$f(z_0+ma+nb+pc)=f(z_0).$$

Следовательно, если мы выберем m, n, p таким образом, чтобы было $|ma+nb+pc|<\varepsilon$, то уравнение $f(z)=f(z_0)$ имело бы корень z_1, отличный от z_0, и такой, что $|z_1-z_0|<\varepsilon$, что невозможно.

Если между числами a, b, c существует соотношение вида

$$ma+nb+pc=0, \tag{20}$$

где m, n, p не равны нулю, то однозначная функция $f(z)$ может иметь периоды a, b, c, но эти периоды приводятся к двум или к одному. Мы можем предположить, что три числа m, n, p, взятые вместе, — взаимно простые. Пусть будет D общий наибольший делитель чисел m и n; мы имеем $m=Dm'$, $n=Dn'$. Так как числа m' и n'—взаимно-простые, то можно найти два таких других целых числа m'', n'', чтобы было $m'n''-m''n'=1$. Положим

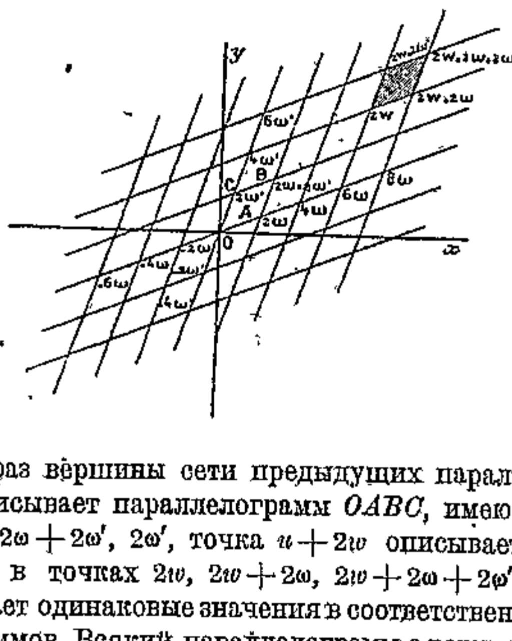
$$m'a+n'b=a', \quad m''a+n''b=b';$$

мы будем иметь обратно, $a=n''a'-n'b'$, $b=m'b'-m''a'$. Если a и b — периоды функции $f(z)$, то будут периодами и a' и b' и обратно. Следовательно, мы можем заменить систему двух периодов a и b системою двух периодов a' и b'. Соотношение (20) обращается в $Da'+pc=0$; так как числа D и p—взаимно-простые, то можно найти такие целые числа D' и p', чтобы было $Dp'-D'p=1$; положим $D'a'+p'c=c'$. Из предыдущих соотношений мы получаем $a'=-pc'$, $c=Dc'$, и мы видим, что три периода a, b, c суть комбинации двух периодов b' и c'.

Примечание.—Из предыдущей леммы вытекает как следствие, что если α и β суть действительныя количества, а m и n — произвольные целые числа (из которых, по крайней мере, одно не равно нулю), то нижняя граница модуля $|m\alpha+n\beta|$ равна нулю; в самом деле, если мы положим $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=i$, то модуль $|m\alpha+n\beta+pi|$ может быть меньше числа $\varepsilon<1$ только в том случае, если $p=0$ и $|m\alpha+n\beta|<\varepsilon$. Отсюда следует, что однозначная функция $f(z)$ не может иметь двух различных действительных периодов α и β. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ иррационально, то можно найти такие числа m и n, чтобы было $|m\alpha+n\beta|<\varepsilon$, и рассуждение заканчивается, как выше. Если же отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ рационально и равно несократимой дроби $\frac{m}{n}$, то мы возьмем два таких числа m' и n', чтобы было $mn'-m'n=1$, и положим $m'\alpha-n'\beta=\gamma$. Число γ есть также период, и из соотношений $m\alpha-n\beta=0$, $m'\alpha-n'\beta=\gamma$ мы получаем $\alpha = -n\gamma$, $\beta = m\gamma$, так что α и β суть кратные единственного периода γ. Вообще, однозначная функция $f(z)$ не может иметь двух различных периодов a и b, **отношение которых действительно** так как тогда функция $f(az)$ имела бы действительные периоды 1 и $\frac{b}{a}$.

329. Двоякопериодические функции. — Двоякопериодическая функция есть однозначная функция, имеющая два периода, отношение которых мнимое. Пользуясь обозначениями Вейерштрасса, обозначим независимое переменное через u, периоды через 2ω и $2\omega'$, и предположим, что коэффициент при i в $\frac{\omega'}{\omega}$ положителен. Отметим в плоскости точки 2ω, 4ω, $6\omega, \ldots$ и точки $2\omega'$, $4\omega'$, $6\omega', \ldots$; проведем через точки $2m\omega$ прямые, параллельные направлению $O\omega'$, и через точки $2m'\omega'$ прямые, параллельные направлению $O\omega$. Таким образом мы разобьем плоскость на сеть равных параллелограммов (черт. 77). Пусть будет $f(u)$ однозначная функция, имеющая периоды 2ω, $2\omega'$; из соотношений $f(u+2\omega)=f(u)$, $f(u+2\omega')=f(u)$, получаем $f(u+2m\omega+2m'\omega')= f(u)$, так что $2m\omega+2m'\omega'$ есть также период; мы обозначим его через $2w$.

Черт. 77.



Точки-периоды суть как раз вершины сети предыдущих параллелограммов. Когда точка u описывает параллелограмм $OABC$, имеющий вершины в точках 0, 2ω, $2\omega+2\omega'$, $2\omega'$, точка $u+2w$ описывает параллелограмм с вершинами в точках $2w$, $2w+2\omega$, $2w+2\omega+2\omega'$, $2w+2\omega'$, и функция $f(u)$ принимает одинаковые значения в соответственных точках обоих параллелограммов. Всякий параллелограмм с вершинами в точках u_0, $u_0+2\omega$, $u_0+2\omega+2\omega'$, $u_0+2\omega'$ называется **параллелограммом периодов**. Обыкновенно рассматривают параллелограмм $OABC$, но можно было бы заменить начало координат любою точкою плоскости. Для краткости мы будем обозначать период $2\omega+2\omega'$ через $2\omega''$; центр параллелограмма $OABC$ лежит в точке ω'', так как точки ω и ω' суть средины сторон OA и OC.

Всякая целая двоякопериодическая функция есть постоянное. В самом деле, пусть будет $f(u)$ двоякопериодическая функция; если она целая, то она голоморфна в параллелограмме $OABC$, и модуль функции $f(u)$ остается всюду в этом параллелограмме меньше некоторого постоянного числа M. Но вследствие двоякой периодичности функции $f(u)$, ее значение в любой точке плоскости равно ее значению в некоторой точке параллелограмма $OABC$. Следовательно, модуль этой функции остается во всей плоскости меньшим некоторого постоянного числа M, и, по теореме Лиувилля, функция приводится к постоянному.

330. Эллиптические функции. Общие свойства. — Из предыдущей теоремы следует, что двоякопериодическая функция имеет особые точки, лежащие на конечном расстоянии, если только она не приводится к постоянному. Двоякопериодические мероморфные функции называются *эллиптическими функциями*. В параллелограмме периодов эллиптическая функция имеет несколько полюсов; число этих полюсов, при чем каждый из них считается столько раз, каков его порядок кратности, называется *порядком* функции. Заметим, что если эллиптическая функция $f(u)$ имеет полюс u_0, лежащий на стороне OC, то точка $u_0+2\omega$, лежащая на противоположной стороне AB, есть также полюс; но при счете числа полюсов, лежащих в параллелограмме $OABC$, мы должны считать только один из этих полюсов. Точно так же, если начало координат есть полюс, то все вершины сети суть также полюсы функции $f(u)$, но надо брать только один полюс в каждом параллелограмме. Действительно достаточно было бы например, переместить бесконечно-мало вершину сети, лежащую в начале координат, чтобы ни один полюс рассматриваемой функции $f(u)$ не лежал более на контуре параллелограмма. Когда мы будем интегрировать эллиптическую функцию $f(u)$ вдоль контура параллелограмма периодов, мы всегда будем предполагать, что этот параллелограмм, если это нужно, смещен так, что функция $f(u)$ не имеет полюсов на этом контуре. Применяя общие теоремы теории аналитических функций, мы легко приходим к следующим основным предложениям:

1. *Сумма вычетов эллиптической функции, соответствующих полюсам, лежащим в одном параллелограмме периодов, равна нулю.*

Предположим для определенности, что функция $f(u)$ не имеет ни одного полюса, лежащего на контуре $OABCO$. Сумма вычетов соответствующих полюсам, лежащим внутри контура $OABCO$, равна $\frac{1}{2\pi i}\int f(u)du$, причем интеграл взят вдоль контура. Этот интеграл равен нулю, так как сумма интегралов, взятых вдоль противоположных сторон, равна нулю. Например, мы имеем

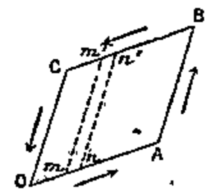
$$\int_{(OA)} f(u)du = \int_0^{2\omega} f(u)du, \qquad \int_{(BC)} f(u)du = \int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} f(u)du;$$

заменяя в этом последнем интеграле u через $u+2\omega'$, получим

$$\int_{(BC)} f(u)du = \int_{2\omega}^{0} f(u+2\omega')du = \int_{2\omega}^{0} f(u)du = -\int_{(OA)} f(u)du.$$

Точно также мы убедились бы, что сумма интегралов, взятых вдоль AB и CO, равна нулю. Впрочем, это свойство можно непосредственно видеть из чертежа (черт. 78). В самом деле, рассмотрим два соответствующих элемента интегралов, взятых вдоль OA и вдоль BC; в точках m и m' значения функции $f(u)$ одинаковы, тогда как значения du противоположны. Из этой теоремы следует, что эллиптическая функция $f(u)$ не может иметь в параллелограмме периодов только один полюс первого порядка. Эллиптическая функция не может быть ниже второго порядка.

Черт. 78.



2. Число нулей эллиптической функции, лежащих в параллелограмме периодов, равно порядку этой функции (каждый из нулей считается столько раз, каков его порядок кратности).

Пусть будет $f(u)$ эллиптическая функция; частное $\frac{f'(u)}{f(u)} = \varphi(u)$ есть также эллиптическая функция, и сумма вычетов функции $\varphi(u)$ в параллелограмме периодов равна числу нулей функции $f(u)$ без числа полюсов (§ 310). Отсюда, применяя предыдущую теорему к функции $\varphi(u)$, мы приходим к высказанному предложению. Вообще, число корней уравнения $f(u)=C$, лежащих в параллелограмме периодов, равно порядку функции $f(u)$, так как при всяком постоянном C функция $f(u)-C$ имеет те же полюсы, как и функция $f(u)$.

3. Разность между суммою нулей и суммою полюсов эллиптической функции, лежащих в параллелограмме периодов, равна периоду.

Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int u\frac{f'(u)}{f(u)}du$, взятый вдоль контура параллелограмма $OABC$. Мы видели (§ 310), что этот интеграл равен сумме нулей функции $f(u)$, лежащих внутри этого контура, уменьшенной на сумму полюсов функции $f(u)$, лежащих в том же контуре. Вычислим сумму интегралов, взятых вдоль противоположных сторон OA и BC

$$\int_0^{2\omega} u\frac{f'(u)}{f(u)}du + \int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} u\frac{f'(u)}{f(u)}du;$$

изменяя в последнем интеграле u в $u+2\omega'$, мы представим эту сумму в виде

$$\int_0^{2\omega} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}du+\int_{2\omega}^{0}(u+2\omega')\,\frac{f'(u+2\omega')}{f(u+2\omega')}\,du,$$

или, принимая во внимание периодичность функции $f(u)$, в виде

$$-\int_0^{2\omega} 2\omega'\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Интеграл $\int_0^{2\omega}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du$ равен изменению $\operatorname{Log}[f(u)]$, когда u описывает сторону OA; при этом функция $f(u)$ возвращается к своему начальному значению, и, следовательно, изменение логарифма $\operatorname{Log}[f(u)]$ равно $-2m_2\pi i$, где m_2—целое число. Следовательно, сумма интегралов, взятых вдоль противоположных сторон OA и BC, равна $\frac{1}{2\pi i}(4m_2\pi i\omega')=2m_2\omega'$. Точно так же мы могли бы убедиться, что сумма интегралов, взятых вдоль AB и CO, равна $2m_1\omega$. Следовательно, рассматриваемая разность равна $2m_1\omega+2m_1\omega'$, т. е. периоду.

Это предложение относится также к корням уравнения $f(u)=C$, где C—произвольное постоянное, заключающимся в параллелограмме периодов; доказательство такое же, как и выше.

4. М е ж д у к а ж д ы м и д в у м я э л л и п т и ч е с к и м и ф у н к ц и я м и с о д и н а к о в ы м и п е р и о д а м и с у щ е с т в у е т а л г е б р а и ч е с к о е с о о т н о ш е н и е.

Пусть будут $f(u)$ и $f_1(u)$ эллиптические функции, имеющие одинаковые периоды 2ω и $2\omega'$. Рассмотрим в параллелограмме периодов точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$, являющиеся полюсами для одной или для другой из функций $f(u)$, $f_1(u)$, или для обеих сразу; пусть будет μ_i наивысший порядок кратности полюса a_i этих функций; положим $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m=N$. С другой стороны, пусть будет $F(x,y)$ целый многочлен n-ой степени с постоянными коэффициентами. Если мы заменим в этом многочлене x и y соответственно через $f(u)$ и $f_1(u)$, то результат будет новою эллиптическою функциею $\Phi(u)$, полюсы которой суть только точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ или те точки, которые мы получим, прибавляя один из периодов. Чтобы эта функция $\Phi(u)$ приводилась к постоянному, необходимо и достаточно, чтобы главные части в области каждой из точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ были равны нулю. Но для функции $\Phi(u)$ точка a_i есть полюс не выше $n\mu_i$-го порядка. Следовательно, выражая, что все коэффициенты главных частей равны нулю, мы получим всего не более

$$n(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m)=Nn$$

однородных и линейных соотношений между коэффициентами многочлена $F(x, y)$, причем член, независящий от x и y, в них не войдет. Число этих коэффициентов равно $\frac{n(n+3)}{2}$; если мы возьмем n настолько бо́льшим, чтобы было $n(n+3) > 2Nn$, или $n+3 > 2N$, то мы получим систему однородных линейных уравнений с числом неизвестных, бо́льшим числа уравнений. Эти уравнения всегда имеют систему решений, отличную от нуля. Если $F(x, y)$ есть полученный таким образом многочлен, то эллиптические функции $f(u)$, $f_1(u)$ удовлетворяют алгебраическому соотношению

$$F[f(u),\ f_1(u)] = C,$$

где C — постоянное.

Примечания. — Прежде чем оставить эти общие предложения, сделаем еще несколько замечаний, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Однозначная функция называется четною, если $f(-u) = f(u)$; функция называется нечетною, если $f(-u) = -f(u)$. Производная от четной функции есть нечетная функция, и производная от нечетной функции есть функция четная. Вообще, производные четного порядка от четной функции суть сами функции четные, а производные нечетного порядка — нечетные функции. Обратно, производные четного порядка от нечетной функции суть нечетные функции, а производные нечетного порядка — четные функции.

Пусть будет $f(u)$ нечетная эллиптическая функция. Если w есть полупериод, то одновременно должно быть $f(w) = -f(-w)$ и $f(w) = f(-w)$, так как $w = -w + 2w$; следовательно, $f(w)$ равно нулю или бесконечности, т.-е. w есть нуль или полюс функции $f(u)$. Порядок кратности этого нуля или этого полюса необходимо нечетный; если бы w было нулем четного порядка $2n$ функции $f(u)$, то производная $f^{(2n)}(u)$, которая есть нечетная функция, была бы голоморфна и отлична от нуля при $u = w$; если бы w было полюсом четного порядка функции $f(u)$, то оно было бы нулем четного порядка функции $\frac{1}{f(u)}$. Таким образом, всякий полупериод есть нуль или полюс нечетной эллиптической функции.

Если четная эллиптическая функция $f(u)$ имеет полупериод w полюсом или нулем, то порядок кратности этого полюса или этого нуля есть четное число. В самом деле, если бы w было, например, нулем нечетного порядка $2n+1$, то оно было бы нулем четного порядка производной $f'(u)$, которая есть нечетная функция; то же имеет место и для полюсов. Так как удвоенный период есть также период, то все вышеизложенное относительно полупериодов применимо также и к самим периодам.

331. Функция $\wp(u)$.—Мы уже указали, что всякая эллиптическая функция имеет в параллелограмме периодов, по крайней мере, два простых полюса или двойной полюс. В обозначении Якоби, за простые элементы берут функции, имеющие в параллелограмме периодов два простых полюса. В обозначении Вейерштрасса за простой элемент берут эллиптическую функцию, имеющую в параллелограмме периодов только один двойной полюс; так как вычет должен быть равен нулю, то главная часть в области полюса a должна иметь вид $\frac{A}{(u-a)^2}$. Чтобы окончательно определить условие задачи, достаточно принять $A=1$ и предположить, что полюсы функции суть точка $u=0$ и все точки-периоды $2w=2m\omega+2m'\omega'$. Таким образом, мы приходим прежде всего к решению следующей задачи:

Найти эллиптическую функцию, имеющую полюсами второго порядка все точки $2w=2m\omega+2m'\omega'$, где m и m'—произвольные целые числа, не имеющую других полюсов, и притом такую, чтобы главная часть в области точки $2w$ была $\frac{1}{(u-2w)^2}$.

Прежде чем мы приложим к этой задаче общий метод параграфа 324, докажем сначала, что двойной ряд

$$\sum{}' \frac{1}{|m\omega+m'\omega'|^{\mu}}, \tag{21}$$

где m и m' принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, кроме $m=m'=0$,—сходящийся, если показатель μ есть положительное число, большее, чем 2. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках $u=0$, $u=m\omega$, $u=m\omega+m'\omega'$; стороны этого треугольника соответственно равны $|m\omega|$, $|m'\omega'|$, $|m\omega+m'\omega'|$. Следовательно, мы имеем соотношение

$$|m\omega+m'\omega'|^2=m^2|\omega|^2+m'^2|\omega'|^2-2mm'|\omega\omega'|\cos\theta,$$

где θ есть угол между направлениями 0ω, $0\omega'$ $(0<\theta<\pi)$. Обозначим, для краткости, $|\omega|=a$, $|\omega'|=b$, и предположим, что $a\leqq b$. Предыдущее соотношение можно представить иначе в виде

$$|m\omega+m'\omega'|^2=m^2a^2+m'^2b^2\pm 2mm'ab\cos\Theta,$$

где $\Theta=\theta$, если $\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, и $\Theta=\pi-\theta$, если $\theta>\frac{\pi}{2}$; этот угол Θ не может быть равен нулю, так как три точки 0, ω, ω' не лежат на одной прямой, и потому мы имеем, $0\leqq\cos\Theta<1$. Далее

$$|m\omega+m'\omega'|^2=(1-\cos\Theta)(m^2a^2+m'^2b^2)+\cos\Theta\,(ma\pm m'b)^2,$$

следовательно,

$$|m\omega+m'\omega'|^2 \geqq (1-\cos\theta)(m^2a^2+m'^2b^2) \geqq (1-\cos\theta)a^2(m^2+m'^2).$$

Отсюда следует, что члены ряда (21) соответственно меньше или равны членам ряда $\sum'\left(\frac{1}{m^2+m'^2}\right)^{\frac{\mu}{2}}$, умноженным на постоянный множитель, а мы знаем, что этот последний ряд — сходящийся, если показатель $\frac{\mu}{2}>1$ (т. I, § 172). Следовательно, ряд (21) — сходящийся, если $\mu=3$ или $\mu=4$. На основании доказанного выше результата (§ 324), ряд

$$\varphi(u)=\frac{1}{u^2}+\sum'\left[\frac{1}{(u-2w)^2}-\frac{1}{4w^2}\right] \quad (w=m\omega+m'\omega')$$

представляет мероморфную функцию, имеющую те же полюсы и те же главные части, как и искомая эллиптическая функция. Докажем, что эта функция $\varphi(u)$ действительно имеет периоды 2ω и $2\omega'$. Рассмотрим сначала ряд

$$\sum''\left[\frac{1}{(2w+2\omega)^2}-\frac{1}{(2w)^2}\right],$$

где $2w=2m\omega+2m'\omega'$, и суммирование распространяется на все целые значения m и m', кроме $m=m'=0$ и $m=-1$, $m'=0$. Этот ряд — абсолютно сходящийся, так как это тот же ряд $\varphi(u)$, в котором мы заменили u через -2ω, отбросив вместе с тем два члена. Рассматривая его, как двойной ряд, и вычисляя отдельно каждую из строк таблицы, легко показать, что его сумма равна нулю. Следовательно, вычитая этот ряд из $\varphi(u)$, мы можем представить $\varphi(u)$ еще так

$$\varphi(u)=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+2\omega)^2}-\frac{1}{4\omega^2}+\sum''\left[\frac{1}{(u-2w)^2}-\frac{1}{(2w+2\omega)^2}\right],$$

где комбинации $(m=m'=0)$, $(m=-1,\ m'=0)$ попрежнему исключаются при суммировании. Изменим теперь u в $u-2\omega$; мы получим

$$\varphi(u-2\omega)=\frac{1}{u^2}+\sum'\left[\frac{1}{(u-2\omega-2w)^2}-\frac{1}{(2w+2\omega)^2}\right],$$

где при суммировании исключена только одна комбинация $m=-1$, $m'=0$. Но правая часть этого равенства тождественна с $\varphi(u)$. Следовательно, эта функция имеет период 2ω; точно так же мы могли бы показать, что она имеет период $2\omega'$. Это — та функция, которую Вейерштрасс обозначает знаком $\wp u$, и которая таким образом определяется равенством

$$\wp u=\frac{1}{u^2}+\sum'\left[\frac{1}{(u-2w)^2}-\frac{1}{4w^2}\right] \quad (w=m\omega+m'\omega'). \tag{22}$$

Если в разности $\wp u - \frac{1}{u^2}$ мы положим $u=0$, то все члены двойной суммы будут равны нулю, и эта разность также равна нулю. Следовательно, функция $\wp u$ обладает следующими свойствами:

1. Она—двоякопериодическая и имеет полюсами все точки $2w$, и притом только их.

2. Главная часть в области начала координат равна $\frac{1}{u^2}$.

3. Разность $\wp u - \frac{1}{u^2}$ равна нулю при $u=0$.

Эти свойства вполне характеризуют функцию $\wp u$. В самом деле, всякая функция $f(u)$, обладающая двумя первыми свойствами, отличается от $\wp u$ только на постоянное, так как их разность есть двоякопериодическая функция, не имеющая ни одного полюса. Если функция сверх того такова, что $f(u) - \frac{1}{u^2} = 0$ при $u=0$, то $f(u) - \wp u = 0$ при $u=0$; следовательно, $f(u) = \wp u$.

Очевидно, что функция $\wp(-u)$ обладает теми же тремя свойствами; следовательно, $\wp(-u) = \wp u$, и функция $\wp u$—четная, что нетрудно усмотреть также из формулы (22).

Рассмотрим тот период, модуль которого наименьший; пусть будет δ этот модуль. В круге C_δ с радиусом, равным δ, с центром в начале координат разность $\wp u - \frac{1}{u^2}$ голоморфна, и ее можно разложить по положительным степеням переменного u. Разложение общего члена ряда (22) по степеням переменного u дает

$$\frac{1}{(u-2w)^2} - \frac{1}{4w^2} = \frac{2u}{(2w)^3} + \frac{3u^2}{(2w)^4} + \ldots + \frac{(n+1)u^n}{(2w)^{n+2}} + \ldots;$$

заменяя все множители $\frac{n+1}{2^{n+2}}$ бо́льшим числом $\frac{5}{16}$, нетрудно убедиться, что этот ряд имеет усиливающею функциею выражение

$$\frac{5}{16\,|w|^3}\,\frac{u}{1-\frac{u}{|w|}},$$

и, тем более, выражение, которое получим, изменяя $1-\frac{u}{|w|}$ в $1-\frac{2u}{\delta}$. Так как ряд $\Sigma' \frac{1}{|w|^3}$ — сходящийся, то отсюда следует, что мы имеем право складывать почленно получающиеся целые ряды (§ 267). Коэффициенты при нечетных степенях переменного u равны нулю, так как члены, происходящие от противоположных по знаку периодов взаимно уничтожаются, и мы можем представить разложение функции $\wp u$ в виде

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \ldots, \tag{23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} c_2 = 3\sum{}'\frac{1}{(2w)^4},\ c_3 = 5\sum{}'\frac{1}{(2w)^6},\ldots,\\ c_\lambda = (2\lambda - 1)\sum{}'\frac{1}{(2w)^{2\lambda}},\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Тогда как формула (22) применима во всей плоскости, разложение (23) имеет место только внутри круга C_3 с центром в начале координат, проходящего через наиболее близкую точку-период.

Производная $\wp' u$ есть также эллиптическая функция, имеющая полюсами третьего порядка все точки $2w$; она представляется во всей плоскости разложением в ряд

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} - 2\sum{}'\frac{1}{(u-2w)^3}. \tag{25}$$

Вообще, производная n-го порядка $\wp^{(n)} u$ есть эллиптическая функция, имеющая все точки $u=2w$ полюсами $(n+2)$-го порядка:

$$\wp^{(n)} u = (-1)^n\frac{1.2\ldots(n+1)}{u^{n+2}} + (-1)^n 1.2\ldots(n+1)\sum{}'\frac{1}{(u-2w)^{n+2}}. \tag{26}$$

Предоставляем читателю доказать сходимость этих разложений, что нетрудно сделать, основываясь на доказанных выше свойствах (§§ 301 и 323).

332. Алгебраическое соотношение между $\wp u$ и $\wp' u$. — На основании общей теоремы (§ 330) между функциями $\wp u$ и $\wp' u$ существует алгебраическое соотношение. Его нетрудно получить следующим образом. В области начала координат по формуле (23) имеем

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + 2c_2 u + 4c_3 u^3 + \ldots,$$

$$(\wp' u)^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{8c_2}{u^2} - 16c_3 + \ldots,$$

$$(\wp u)^3 = \frac{1}{u^6} + \frac{3c_2}{u^2} + 3c_3 + \ldots,$$

причем все остальные члены равны нулю при $u=0$. Следовательно, разность $\wp'^2 u - 4\wp^3 u$ имеет точку $u=0$ полюсом второго порядка и в области этой точки мы имеем

$$\wp'^2 u - 4\wp^3 u = -\frac{20c_2}{u^2} - 28c_3 + \ldots,$$

причем остальные члены равны нулю при $u=0$. Таким образом эллиптическая функция $-20c_2\wp u - 28c_3$ имеет те же полюсы с теми же главными частями, как и эллиптическая функция $\wp'^2-4\wp^3$, и их разность равна нулю при $u=0$. Следовательно, эти две эллиптические функции тождественны между собою, и мы приходим к искомому соотношению, которое можно представить в виде

$$(\wp' u)^2=4^3\wp u-g_2\wp u-g_3, \tag{27}$$

где

$$g_2=20c_2=60\sum{}'\left(\frac{1}{2w}\right)^4, \quad g_3=28c_3=140\sum{}'\left(\frac{1}{2w}\right)^6.$$

Соотношение (27) — основное в теории эллиптических функций; количества g_2, g_3 называются **инвариантами**.

Все коэффициенты c_λ разложения (23) суть целые функции инвариантов g_2, g_3; в самом деле, из соотношения (27) получаем, взяв производные и деля на $2\wp' u$,

$$\wp'' u=6\wp^2 u-\frac{g_2}{2}. \tag{28}$$

С другой стороны, в области начала координат мы имеем

$$\wp'' u=\frac{6}{u_4}+2c_2+12c_3u^2+\ldots+(2\lambda-2)(2\lambda-3)c_\lambda u^{2\lambda-4}+\ldots,$$

заменяя в соотношении (28) функции $\wp u$ и $\wp'' u$ их разложениями и приравнивая между собою коэффициенты при одинаковых степенях u, мы получим рекуррентное соотношение

$$c_\lambda=\frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)}\sum_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu} \qquad [\nu=2,\ 3,\ldots,(\lambda-2)].$$

Пользуясь этим соотношением, мы можем последовательно выразить все коэффициенты c_λ через c_2 и c_3, и, следовательно, через g_2 и g_3; таким образом мы находим

$$c_4=\frac{g_2{}^2}{2^4.3.5^2},\ c_5=\frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11},\ldots$$

Отсюда вытекает то замечательное алгебраическое предложение, что все суммы $\sum{}'\frac{1}{(2w)^{2n}}$ выражаются целыми функциями двух первых.

Мы знаем корни выражения $\wp' u$ без всякого вычисления. Эта функция, будучи третьего порядка, имеет в параллелограмме периодов три корня. Так как она нечетная, то она имеет корни $u=\omega$, $u=\omega'$, $u=\omega''=\omega+\omega'$ (§ 330, Примечание). Из соотношения (27) заключаем, что корни уравнения $4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$ суть не что иное как значения функции $\wp u$ при $u = \omega, \omega', \omega''$. Эти корни обозначают через e_1, e_2, e_3:

$$e_1 = \wp\omega, \ e_2 = \wp\omega', \ e_3 = \wp\omega''.$$

Эти корни различны. В самом деле, если бы, например, было $e_1 = e_2$, то уравнение $\wp u = e_1$ имело бы внутри параллелограмма периодов два двойных корня ω и ω', что невозможно, так как $\wp u$ — второго порядка. Мы имеем также

$$4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3),$$

и между инвариантами g_2, g_3 и корнями e_1, e_2, e_3 мы имеем соотношение

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \ e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

Дискриминант $\frac{1}{16}(g_2{}^3 - 27g_3{}^2)$ необходимо отличен от нуля.

333. Функция ζu. — Интегрируя функцию $\wp u - \frac{1}{u^2}$ вдоль какого-нибудь пути, выходящего из начала координат и не проходящего ни через один из полюсов, мы получим соотношение

$$\int_0^u \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) du = -\sum{}' \left[\frac{1}{u - 2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{(2w)^2}\right].$$

Ряд, стоящий в правой части, представляет мероморфную функцию, имеющую полюсами первого порядка все точки $u = 2w$, кроме $u = 0$. Изменяя знак и прибавляя дробь $\frac{1}{u}$, положим

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left[\frac{1}{u - 2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{(2w)^2}\right]; \tag{29}$$

тогда предыдущее соотношение можно представить в виде

$$\int_0^u \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) du = -\zeta u + \frac{1}{u}, \tag{30}$$

и, взяв производные от обеих частей, получим

$$\zeta' u = -\wp u. \tag{31}$$

Из той или другой из этих формул легко видеть, что функция ζu — нечетная. На основании разложения (23) и формулы (30) в области начала координат имеем

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3}u^3 - \frac{c_3}{5}u^5 + \dots;$$

Функция ζu не может иметь периодов 2ω и $2\omega'$, так как она имела бы в параллелограмме периодов только один полюс первого порядка. Но так как функции $\zeta(u+2w)$ и ζu имеют одну и ту же производную $-\wp u$, то эти две функции могут различаться только на постоянное; следовательно, когда аргумент u возрастает на период, функция ζu возрастает на постоянное количество. Нетрудно получить выражение этого постоянного. Для большей ясности представим формулу (30) в виде

$$\int_0^u \left(\wp v - \frac{1}{v^2}\right) dv = \frac{1}{u} - \zeta u;$$

изменяя u в $u+2\omega$ и вычитая обе формулы, получим

$$\zeta(u+2\omega) - \zeta u = -\int_u^{u+2\omega} \wp v\, dv.$$

Положим

$$2\eta = -\int_u^{u+2\omega} \wp v\, dv, \qquad 2\eta' = -\int_u^{u+2\omega'} \wp v\, dv;$$

η и η'—постоянные, независящие от нижнего предела u пути интегрирования. Это последнее положение очевидно *a priori*, так как все вычеты функции $\wp v$ равны нулю. Следовательно, функция ζu удовлетворяет двум соотношениям

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta, \quad \zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\eta'.$$

Полагая в этих формулах $u = -\omega$ или $u = -\omega'$, получим $\eta = \zeta\omega$, $\eta' = \zeta\omega'$.

Между четырьмя количествами ω, ω', η, η' существует весьма простое соотношение. Чтобы его получить, нужно только вычислить двумя способами интеграл $\int \zeta u\, du$, взятый вдоль параллелограмма с вершинами u_0, $u_0+2\omega$, $u_0+2\omega+2\omega'$, $u_0+2\omega'$. Предположим, что ζu не имеет ни одного полюса на контуре параллелограмма, и коэффициент при i в $\frac{\omega'}{\omega}$ положителен, так что, описывая контур этого параллелограмма в прямом направлении, мы встретим эти вершины в том порядке, как они приведены выше. Внутри этого контура есть только один полюс функции ζu с вычетом, равным $+1$; следовательно, рассматриваемый интеграл равен $2\pi i$. С другой стороны, сумма интегралов, взятых вдоль стороны, соединяющей вершины u_0, $u_0+2\omega$, и вдоль противоположной стороны, равна (см. § 330)

$$\int_{u_0}^{u_0+2\omega} [\zeta u - \zeta(u+2\omega')]\, du = -4\omega\eta';$$

точно так же можно убедиться, что сумма интегралов, взятых вдоль двух других сторон, равна $4\omega'\eta$. Таким образом мы приходим к искомому соотношению

$$\omega'\eta - \omega\eta' = \frac{\pi}{2}i. \tag{32}$$

Вычислим еще определенный интеграл $F(u) = \int_u^{u+2\omega} \zeta v\, dv$, взятый вдоль какого-нибудь пути, не проходящего ни через один из полюсов. Мы имеем

$$F'(u) = \zeta(u+2\omega) - \zeta u = 2\eta,$$

так что $F(u)$ имеет вид $F(u) = 2\eta u + K$, где постоянное K определено лишь до кратного $2\pi i$, так как всегда можно так изменить путь интегрирования, не изменяя его концов, чтобы интеграл увеличился на любое кратное $2\pi i$. Чтобы найти это постоянное K, вычислим определенный интеграл $\int_{-\omega}^{+\omega}\left(\zeta v - \frac{1}{v}\right)dv$, взятый вдоль пути, весьма близкого к прямолинейному отрезку, соединяющему точки ω и $-\omega$. Этот интеграл равен нулю, так как можно заменить путь интегрирования прямолинейным путем, и элементы нового интеграла попарно взаимно уничтожаются. Но, заменяя u через $-\omega$ в формуле для $F(u)$, имеем

$$\int_{-\omega}^{+\omega} \zeta v\, dv = -2\eta\omega + K,$$

а интеграл $\int_{-\omega}^{+\omega}\frac{1}{v}dv = \pm\pi i$, так что можно положить $K = 2\eta\omega \pm \pi i$. Следовательно, если не делать никакого предположения относительно пути интегрирования, то мы, вообще, имеем

$$\int_u^{u+2\omega} \zeta v dv = 2\eta(u+\omega) + (2m+1)\pi i, \tag{33}$$

где m — целое число; аналогичную формулу мы получим для интеграла $\int_u^{u+2\omega'} \zeta v\, dv$.

334. Функция σu. — Интегрируя функцию $\zeta u - \frac{1}{u}$ вдоль какого-нибудь пути, выходящего из начала координат и не проходящего ни через один из полюсов, имеем

$$\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du = \sum{}' \left[\operatorname{Log}\left(1 - \frac{u}{2w}\right) + \frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2}\right],$$

и, следовательно,

$$ue^{\int_0^u\left(\zeta u-\frac{1}{u}\right)du}=u\,\Pi'\left(1-\frac{u}{2w}\right)e^{\frac{u}{2w}+\frac{u^2}{8w^2}}. \tag{34}$$

Целая функция, стоящая в правой части, есть простейшая из целых функций, имеющих простыми корнями все периоды $2w$. Эта функция обозначается через σu:

$$\sigma u=u\,\Pi'\left(1-\frac{u}{2w}\right)e^{\frac{u}{2w}+\frac{u^2}{8w^2}}. \tag{35}$$

Равенство (34) можно представить в виде

$$\sigma u=ue^{\int_0^u\left(\zeta u-\frac{1}{u}\right)du} \tag{34 bis}$$

и, взяв логарифмические производные от обеих частей, получим

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u}=\frac{1}{u}+\zeta u-\frac{1}{u}=\zeta u. \tag{36}$$

Функция σu, будучи целою функциею, не может быть двоякопериодическою; когда аргумент возрастает на период, она получает показательный множитель, который можно определить следующим образом. Например, из формулы (34 *bis*) получаем

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u}=\frac{u+2\omega}{u}\,e^{\int_u^{u+2\omega}\left(\zeta u-\frac{1}{u}\right)du};=e^{\int_u^{u+2\omega}\zeta u\,du}$$

этот интеграл был вычислен выше, и мы имеем

$$\sigma(u+2\omega)=e^{2\eta(u+\omega)+(2\mu+1)\pi i}\sigma u=-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u. \tag{37}$$

Точно так же получим формулу

$$\sigma(u+2\omega')=-e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u. \tag{38}$$

Из формул (35) или (34 *bis*) видно, что функция σu — н е ч е т н а я.

Если мы разложим функцию σu по степеням переменного u, то полученное разложение будет применимо во всей плоскости. Нетрудно показать, что все коэффициенты разложения суть целые функции от g_2 и g_3. В самом деле, мы имеем

$$\int_0^u\left(\zeta u-\frac{1}{u}\right)du=-\frac{c_2}{3.4}u^4-\frac{c_3}{5.6}u^5-\ldots-\frac{c\lambda}{2\lambda(2\lambda-1)}u^{2\lambda}-\ldots,$$

$$\sigma u=ue^{-\frac{c_2}{3.4}u^4-\frac{c_3}{5.6}u^6-\ldots}.$$

Мы видим, что разложение не содержит члена с u^3, и каждый коэффициент есть целая функция от коэффициентов c_λ, а, следовательно, и от инвариантов g_2 и g_3; первые пять членов разложения — следующие:

$$\sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 3.5} + \frac{g_3 u^7}{2^2.3.5.7} - \frac{g_2{}^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7.3^2.5^2.7.11} \dots \tag{39}$$

Три функции $\wp u$, ζu, σu суть основные элементы теории эллиптических функций. Две первых получаются из σu при помощи соотношений $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$, $\wp u = -\zeta' u$.

335. Общее выражение эллиптических функций. — Всякую эллиптическую функцию $f(u)$ можно выразить или только через функцию σu, или через функцию ζu и ее производные, или через функции $\wp u$ и $\wp' u$. Мы изложим кратко эти три способа.

1. Выражение функции $f(u)$ через функцию σu.—Пусть будут $a_1, a_2, \dots, a_n$ нули функции $f(u)$, лежащие в параллелограмме периодов, и $b_1, b_2, \dots, b_n$ полюсы функции $f(u)$, лежащие в том же параллелограмме, причем каждый из нулей и полюсов считается столько раз, каков его порядок кратности. Между этими нулями и полюсами существует соотношение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + 2\Omega, \tag{40}$$

где 2Ω — период. Рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2)\dots\sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1)\,\sigma(u - b_2)\dots\sigma(u - b_n - 2\Omega)}.$$

Эта функция имеет те же полюсы и нули, как и функция $f(u)$, так как единственными нулями множителя $\sigma(u - a_i)$ будут $u = a_i$ и значения u, отличающиеся от a_i на период. С другой стороны, функция $\varphi(u)$ — двоякопериодическая, так как, изменяя, например, u в $u + 2\omega$, мы на основании соотношения (37) найдем, что числитель и знаменатель функции $\varphi(u)$ получат соответственно множители

$$(-1)^n e^{2\eta(nu + n\omega - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}, \quad (-1)^n e^{2\eta(nu + n\omega - b_1 - b_2 - \dots - b_n - 2\Omega)},$$

а, на основании соотношения (40), эти множители между собою равны. Точно так же мы убедились бы, что $\varphi(u + 2\omega') = \varphi(u)$. Следовательно, частное $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ есть двоякопериодическая функция от u, не имеющая ни одного полюса, т. е. оно есть постоянное, и мы имеем

$$f(u) = C\frac{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2)\dots\sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1)\,\sigma(u - b_2)\dots\sigma(u - b_n - 2\Omega)}. \tag{41}$$

Чтобы определить постоянное C, достаточно дать переменному u значение, отличное от полюса и от нуля.

Вообще, чтобы выразить эллиптическую функцию $f(u)$ через функцию σu, когда известны ее полюсы и нули, достаточно выбрать n нулей $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ и n полюсов $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ таким образом, чтобы всякий корень функции $f(u)$ равнялся одному из количеств a_i', сложенному с периодом, и всякий полюс $f(u)$ равнялся одному из количеств b'_λ, сложенному с периодом, и чтобы сверх того было $\Sigma a'_i = \Sigma b'_i$. Эти полюсы и нули могут быть расположены в плоскости произвольно, лишь бы только они удовлетворяли предыдущим условиям.

2. **Выражение функции $f(u)$ через функцию ζu и ее производные.**—Рассмотрим k таких полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ функции $f(u)$, что всякий другой полюс получается от прибавления периода к одному из предыдущих; например, можно взять полюсы, расположенные в одном и том же параллелограмме, но это не необходимо. Пусть будет

$$\frac{A_1^{(i)}}{u-a_i}+\frac{A_2^{(i)}}{(u-a_i)^2}+\ldots+\frac{A_n^{(i)}}{(u-a_i)^n}$$

главная часть функции $f(u)$ в области точки a_i.

Разность

$$f(u) - \sum_{i=1}^{k}\left[A_1^{(i)}\zeta(u-a_i) - A_2^{(i)}\zeta'(u-a_i)\ldots + \frac{(-1)^{(n_i-1)}A_{n_i}^{(i)}}{1.2\ldots(n_i-1)}\zeta^{(n_i-1)}(u-a_i)\right]$$

есть функция, голоморфная во всей плоскости. Сверх того, это—двоякопериодическая функция, так как при изменении u в $u+2\omega$ эта функция возрастает на $-2\eta\Sigma A_1^{(i)}$, а это количество равно нулю, так как $\Sigma A_1^{(i)}$ представляет сумму вычетов в параллелограмме периодов. Следовательно, рассматриваемая разность равна постоянному, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} f(u) = C + \sum_{i=1}^{k}\Big[A_1^{(i)}\zeta(u-a_i) - A_2^{(i)}\zeta'(u-a_i)\ldots \\ +(-1)^{n_i-1}\frac{A_{n_i}^{(i)}}{1.2\ldots(n_i-1)}\zeta^{(n_i-1)}(u-a_i)\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Эта формула принадлежит Эрмиту. Чтобы было можно ее применять, необходимо знать полюсы эллиптической функции $f(u)$ и соответствующие главные части. Подобно тому как формула (41) аналогична формуле, дающей выражение рациональной функции через частное двух многочленов, разложенных на их линейные множители формула (42) аналогична формуле, дающей разложение рациональной дроби на простые элементы. Роль простого элемента играет здесь функция $\zeta(u-a)$.

3. Выражение функции $f(u)$ через функции $\wp u$ и $\wp' u$.— Рассмотрим сначала четную эллиптическую функцию $f(u)$. Нули этой функции, отличные от периодов, попарно противоположны. Следовательно, мы можем найти n таких нулей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, чтобы все остальные нули, отличные от периодов, заключались в формулах

$$\pm a_1 + 2w, \ \pm a_2 + 2w, \ldots, \ \pm a_n + 2w.$$

Например, можно взять параллелограмм с вершинами в точках $\omega + \omega'$, $\omega' - \omega$, $-\omega - \omega'$, $\omega - \omega$ и рассмотреть нули, лежащие в этом параллелограмме по одну сторону какой-нибудь прямой, проходящей через начало координат. Если нуль a_i не равен полупериоду, то мы повторим его в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ столько раз, сколько единиц в его порядке кратности. Если же, например, нуль a_1 равен полупериоду, то это есть нуль четного порядка $2r$ (§ 330, Примечание); мы повторим этот нуль в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ только r раз. Произведение

$$(\wp u - \wp a_1)(\wp u - \wp a_2) \ldots (\wp u - \wp a_n)$$

имеет те же нули, как и функция $f(u)$, и с теми же степенями кратности, если только не будет $f(0) = 0$. Точно так же составим другое произведение

$$(\wp u - \wp b_1)\ (\wp u - \wp b_2) \ldots (\wp u - \wp b_m),$$

имеющее нулями полюсы функции $f(u)$ и с тою же степенью кратности, не считая точек-периодов. Положим

$$\varphi(u) = \frac{(\wp u - \wp a_1)(\wp u - \wp a_2) \ldots (\wp u - \wp a_n)}{(\wp u - \wp b_1)(\wp u - \wp b_2) \ldots (\wp u - \wp b_m)};$$

частное $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$ есть эллиптическая функция, имеющая конечное значение, отличное от нуля, при всяком значении переменного u, не равном периоду. Эта эллиптическая функция приводится к постоянному, так как она могла бы иметь полюсами только периоды, а если бы это было так, то обратное выражение не имело бы полюсов. Следовательно, мы имеем

$$f(u) = C\frac{(\wp u - \wp a_1)\ (\wp u - \wp a_2) \ldots (\wp u - \wp a_n)}{(\wp u - \wp b_1)\ (\wp u - \wp b_2) \ldots (\wp u - \wp b_m)}.$$

Если $f_1(u)$ есть нечетная эллиптическая функция, то $\frac{f_1(u)}{\wp' u}$ есть четная функция, и, следовательно, это частное есть рациональная функция от $\wp u$. Наконец, произвольная эллиптическая функция $F(u)$ есть сумма четной и нечетной функций

$$F(u)=\frac{F(u)+F(-u)}{2}+\frac{F(u)-F(-u)}{2};$$

применяя предыдущие результаты, мы видим, что всякую эллиптическую функцию можно представить в виде

$$F(u)=K(\wp u)+\wp' u K_1(\wp u), \tag{43}$$

где K и K_1 — рациональные функции.

336. Формулы сложения.—Формула сложения для функции $\sin x$ дает выражение функции $\sin(a+b)$ через значения этой функции и ее производной при $x=a$ и $x=b$. Такая же формула существует и для функции $\wp u$; только выражение $\wp(u+v)$ через $\wp u, \wp v, \wp' u, \wp' v$ несколько более сложно, так как в него входит делитель.

Применим сначала общую формулу (41), в которую входит функция σu, к эллиптической функции $\wp u - \wp v$. Непосредственно видно, что $\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}$ есть эллиптическая функция, имеющая те же нули и полюсы как и функция $\wp u - \wp v$. Следовательно, мы имеем

$$\wp u-\wp v=C\,\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}.$$

Чтобы определить постоянное C, достаточно умножить обе части этого равенства на $\sigma^2 u$ и приближать u к нулю. Таким образом получим соотношение $1=-C\sigma^2 v$, откуда находим

$$\wp u-\wp v=-\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}. \tag{44}$$

Возьмем от обеих частей логарифмические производные, рассматривая v как постоянное, а u — как независимое переменное. Мы получим

$$\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta u;$$

переставляя в этой формуле u и v, будем иметь

$$\frac{-\wp' v}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta v.$$

Наконец, складывая обе формулы, придем к соотношению

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v=\frac{1}{2}\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}, \tag{45}$$

представляющему формулу сложения для функции ζu.

Дифференцируя обе части по u, мы получили бы выражение для $\wp(u+v)$; правая часть будет содержать вторую производную $\wp'' u$, которую надо заменить через $6\wp^2 u-\frac{g_2}{2}$. Вычисление несколько длинно и мы придем к результату более изящным путем, доказав предварительно формулу

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=[\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v]^2. \tag{46}$$

Будем рассматривать попрежнему u, как независимое переменное. Обе части суть эллиптические функции, имеющие полюсами второго порядка $u=0$, $u=-v$ и все значения, которые получим, прибавляя к предыдущим периоды. В области начала координат имеем

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v=\zeta v+u\zeta' v+\ldots-\zeta u-\zeta v=-\frac{1}{u}+u\zeta' v+au^2+\ldots,$$

и, следовательно,

$$[\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v]^2=\frac{1}{u^2}-2\zeta' v-2au+\ldots.$$

Главная часть есть $\frac{1}{u^2}$, как и у левой части (46). Сравним также между собою главные части в области полюса $u=-v$. Полагая $u=-v+h$, будем иметь

$$\zeta h-\zeta(-v+h)-\zeta v=\frac{1}{h}-h\zeta' v+\beta h^2+\ldots,$$

$$[\zeta h-\zeta(h-v)-\zeta v]^2=\frac{1}{h^2}-2\zeta' v+\ldots.$$

Следовательно, главная часть правой части формулы (46) в области точки $u=-v$ есть $\frac{1}{(u+v)^2}$, как и у левой части. Из этого следует, что разность между обеими частями может быть только постоянным. Чтобы вычислить это постоянное, сравним между собою разложение, например, в области начала координат. В этой области мы имеем

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{u^2}+2\wp v+u\wp' v+\ldots.$$

Сравнивая это разложение с разложением функции $[\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v]^2$, мы видим, что при $u=0$ разность равна нулю. Следовательно, формула (46) доказана. Из сравнения формул (45) и (46) получаем формулу сложения для функции $\wp u$

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp' v}\right)^2. \qquad (47)$$

337. Интегрирование эллиптических функций. — Формула разложения, данная Эрмитом, применима непосредственно к интегрированию эллиптической функции. В самом деле, из формулы (42) получаем

$$\int f(u)du=Cu+\sum_{i=1}^{k}\left\{A_1^{(i)}\mathrm{Log}[\sigma(u-a_i)]-A_2^{(i)}\zeta(u-a_i)+\ldots\right. \\ \left.+(-1)^{n_i-1}\frac{An_i^{(i)}}{(n_i-1)!}\zeta^{n_i-2}(u-a_i).\right\} \qquad (48)$$

Мы видим, что интеграл от эллиптической функции выражается через те же трансцендентные функции σ, ζ, $\wp$, как и сама эллиптическая функция, но функция σu может входить в это выражение под знаком логарифма. Чтобы интеграл от эллиптической функции был также эллиптической функцией, необходимо прежде всего, чтобы интеграл не имел логарифмических критических точек, т.-е. чтобы все вычеты $A_1^{(i)}$ были равны нулю. Если это будет так, то интеграл есть мероморфная функция; чтобы она была эллиптической, достаточно, чтобы она не менялась при прибавлении периода, т.-е. чтобы было

$$2C\omega-2\eta\sum_i A_2^{(i)}=0,\quad 2C\omega'-2\eta'\Sigma A_2^{(i)}=0,$$

откуда $C=0$, $\sum\limits_i A_2^{(i)}=0$. Если эти условия удовлетворяются, то интеграл представится в виде, соответствующем теореме Эрмита.

Если эллиптическая функция, которую надо интегрировать, выражена через $\wp u$ $\wp' u$, то часто выгодно исходить из этой формы, вместо того, чтобы пользоваться общим методом. Пусть требуется проинтегрировать эллиптическую функцию $R(\wp u)+\wp' u R_1(\wp u)$, где R и R_1 — рациональные функции. Интеграл $\int R(\wp u)\wp' u\, du$ нас не затруднит, так как заменою переменного $\wp u=t$ мы приведем его к интегралу от рациональной функции. Что касается интеграла $\int R(\wp u)\,du$, то можно было бы привести его операциями рационального вида вместе с надлежащими интегрированиями по частям к некоторому числу типических интегралов; но это было бы равносильно повторению в другом виде вычислений, уже сделанных ранее (т. I, § 112). В самом деле, сделав замену переменного $\wp u=t$, получим $\wp' u\,du=dt$, или

$$du=\frac{dt}{\wp' u}=\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}},$$

и интеграл $\int R(\wp u)du$ принимает вид

$$\int \frac{R(t)}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\,dt.$$

Мы видели, как можно разбить этот интеграл на рациональную функцию от t и от корня $\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}$, на сумму нескольких интегралов вида $\int\frac{t^n dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$, и наконец на несколько интегралов вида

$$\int\frac{Q(t)}{P(t)}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t+g_3}},$$

где $P(t)$—многочлен, первый со своею производною и с $4t^3-g_2t-g_3$, а $Q(t)$— первый с $P(t)$ и низшей степени.

Следовательно, возвращаясь к переменному u, мы видим, что интеграл $\int R(\wp u)du$ равен рациональной функции от $\wp u$ и $\wp' u$, сложенной с интегралами вида $\int(\wp u)^n du$ и с другими интегралами вида

$$\int\frac{Q(\wp u)\,du}{P(\wp u)}, \tag{49}$$

при чем это приведение можно выполнить рациональными операциями (умножениями и делениями многочленов) вместе с некоторыми интегрированиями по частям.

Нетрудно получить рекуррентную формулу для вычисления интегралов $I_n=\int(\wp u)^n du$. Заменим в соотношении

$$\frac{d}{du}\left[(\wp u)^{n-1}\wp' u\right]=(n-1)(\wp u)^{n-2}\wp'^2 u+(\wp u)^{n-1}\wp'' u$$

производные $\wp'^2 u$ и $\wp'' u$ соответственно через $4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3$ и $6\wp^2 u-\frac{1}{2}g_2$; располагая результатом по степеням $\wp u$, получим

$$\frac{d}{du}\left[(\wp u)^{n-1}\wp' u\right]=$$

$$=(4n+2)(\wp u)^{n+1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)g_2(\wp u)^{n-1}-(n-1)g_3(\wp u)^{n-2};$$

отсюда, интегрируя обе части, будем иметь

$$(\wp u)^{n-1}\wp' u=(4n+2)I_{n+1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)g_2 I_{n-1}-(n-1)g_3 I_{n-2}. \tag{50}$$

Полагая в этой формуле последовательно $n=1, 2, 3,\ldots$, мы выразим один за другим все интегралы через два первых $I_0=u$, $I_1=-\zeta u$.

Чтобы провести дальше приведение интегралов вида (49), надо знать корни многочлена $P(t)$. Если эти корни известны, то мы приведем задачу к вычислению нескольких интегралов вида

$$\int\frac{du}{\wp u-\wp v},$$

где $\wp v$ отлично от e_1, e_2, e_3, так как многочлен $P(t)$ — первый с $4t^3 - g_2 t - g_3$. Следовательно, значение v не равно полупериоду, и $\wp' v$ отлично от нуля. Тогда из выведенной выше (§ 336) формулы

$$\frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v$$

будем иметь

$$\int \frac{du}{\wp u - \wp v} = \frac{-1}{\wp' v}\Big[\operatorname{Log} \sigma(u+v) - \operatorname{Log} \sigma(u-v) - 2u\,\zeta v\Big] + C. \tag{51}$$

338. Функция θ. — Ряды, которыми мы определили функции $\wp u$, ζu, σu, в том числе и разложение в целый ряд функции σu, пригодное во всей плоскости мало удобны для нахождения численных значений. Основатели теории эллиптических функций, Абель и Якоби, ввели другую замечательную трансцендентную функцию, которую уже встретил Фурье в своих работах по теории тепла, и которую можно разложить в ряд, весьма быстро сходящийся; это — функция θ. Мы выведем кратко основные свойства этой функции, и покажем, каким образом можно из нее легко получить функцию σu Вейерштрасса.

Пусть будет τ мнимое количество: $\tau = r + si$, где коэффициент s при i положителен. Обозначим через v комплексное количество; функция $\theta(v)$ определяется разложением в ряд

$$\theta(v) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\, e^{(2n+1)\pi i v}, \quad q = e^{\pi i \tau}, \tag{52}$$

который можно рассматривать, как ряд Лорана, где z заменено через $e^{\pi i v}$. Этот ряд — абсолютно сходящийся, так как модуль U_n его общего члена равен

$$U_n = e^{-\pi s(n+\frac{1}{2})^2 - (2n+1)\pi\beta}$$

если $v = \alpha + \beta i$; мы видим, что $\sqrt[n]{U_n}$ при неограниченном возрастании числа n по положительным значениям стремится к нулю; то же имеет место и для $\sqrt[n]{U_{-n}}$. Следовательно, $\theta(v)$ есть целая трансцендентная функция переменного v. Это — нечетная функция; в самом деле, если мы соединим члены ряда, соответствующие значениям указателя n и $n-1$, при чем будем изменять n от 0 до $+\infty$, то мы заменим разложение (52) следующим

$$\theta(v) = 2\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi v; \tag{53}$$

отсюда видно, что

$$\theta(-v) = -\theta(v), \quad \theta(0) = 0.$$

Когда v возрастает на единицу, общий член ряда (52) получает множитель $e^{(2n+1)\pi i} = -1$. Следовательно, $\theta(v+1) = -\theta(v)$. Изменим v в $v+\tau$; мы получим новый ряд, при чем простого соотношения между рядами здесь непосредственно не видно. Но мы имеем

$$\theta(v+\tau) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 + 2n+1}\, e^{(2n+1)\pi i v};$$

если мы изменим в этом ряде n в $n-1$, то общий член нового ряда

$$(-1)^{n-1} q^{(n-\frac{1}{2})^2+2n-1} e^{(2n+1)\pi iv} e^{-2\pi iv}$$

будет равен общему члену первого ряда (52), умноженному на $-q^{-1}e^{-2\pi iv}$. Следовательно, функция $\theta(v)$ удовлетворяет двум соотношениям

$$\theta(v+1)=-\theta(v),\ \theta(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi iv}\theta(v); \tag{54}$$

из этих соотношений видно, что функция $\theta(v)$ имеет нулями все точки $m_1+m_2\tau$, где m_1 и m_2 — произвольные целые числа, положительные или отрицательные, так как $\theta(0)=0$.

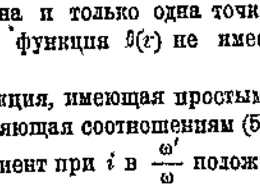
Это—единственные корни уравнения $\theta(v)=0$. В самом деле, рассмотрим параллелограмм с вершинами в точках v_0, v_0+1, $v_0+1+\tau$, $v_0+\tau$, причем первая вершина v_0 взята таким образом, чтобы ни один из корней функции $\theta(v)$ не лежал на контуре параллелограмма. Покажем, что внутри этого параллелограмма уравнение $\theta(v)=0$ имеет только один корень. Для этого достаточно вычислить интеграл $\int\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}dv$, взятый в прямом направлении вдоль контура параллелограмма; на основании предположения, сделанного относительно количества τ, мы встретим вершины в том порядке, в каком они приведены выше.

Из соотношений (54) получаем

$$\frac{\theta'(v+1)}{\theta(v+1)}=\frac{\theta'(v)}{\theta(v)},\quad \frac{\theta'(v+\tau)}{\theta(v+\tau)}=\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}-2\pi i.$$

Из первого из этих соотношений следует, что в соответствующих точках n и n' стороне AD и BC (черт. 79) функция $\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}$ имеет одинаковые значения. Так как эти стороны описываются в противоположных направлениях, то сумма соответствующих интегралов равна нулю. Напротив, если мы возьмем две соответствующие точки m, m', лежащие на сторонах AB, DC, то значение функции $\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}$ в точке m' равно значению той же функции в точке m уменьшенному на $2\pi i$. Следовательно, сумма интегралов, взятых вдоль этих обеих сторон, равна $\int_{CD}-2\pi i\ 2\pi i\,dv=2\pi i$

Черт. 79.



Так как очевидно, что в параллелограмме $ABCD$ есть одна и только одна точка, аффикс которой имеет вид $m_1+m_2\tau$, то отсюда следует, что функция $\theta(v)$ не имеет других нулей, кроме указанных выше.

Таким образом, функция $\theta(v)$ есть нечетная целая функция, имеющая простыми нулями все точки $m_1+m_2\tau$, и притом только их, и удовлетворяющая соотношениям (54). Пусть будут теперь 2ω и $2\omega'$ такие периоды, что коэффициент при i в $\frac{\omega'}{\omega}$ положителен. Заменим в $\theta(v)$ переменное v через $\frac{u}{2\omega}$ и τ через $\frac{\omega'}{\omega}$. Обозначим через $\varphi(u)$ функцию

$$\varphi(u)=\theta\left(\frac{u}{2\omega}\right); \tag{55}$$

$\varphi(u)$ — нечётная целая функция, имеющая нулями первого порядка все периоды $2w=2m\omega+2m'\omega'$; соотношения (54) принимают вид

$$\varphi(u+2\omega)=-\varphi(u);\ \varphi(u+2\omega')=-e^{-\pi i\left(\frac{u+\omega'}{\omega}\right)}\varphi(u). \tag{56}$$

Эти свойства весьма близки к свойствам функции σu. Чтобы получить σu, достаточно умножить $\varphi(u)$ на показательный множитель. В самом деле, положим

$$\psi(u)=\frac{2\omega}{\theta'(0)}\,e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\varphi(u),\tag{57}$$

где η есть функция от ω и ω', определенная выше (§ 333). Функция (ψu) есть также нечетная целая функция, имеющая те же нули, как и $\varphi(u)$. Первое из соотношений (56) обращается в

$$\psi(u+2\omega)=-\frac{2\omega}{\theta'(0)}e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2}\varphi(u)=-e^{2\eta(u+\omega)}\psi(u).\tag{58}$$

Далее, мы имеем

$$\varphi(u+2\omega')=-\frac{2\omega}{\theta'(0)}e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega')^2}e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')}\varphi(u),$$

или, принимая во внимание соотношение $\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi i}{2}$,

$$\psi(u+2\omega')=-e^{2\eta'(u+\omega')}\psi(u).\tag{59}$$

Соотношения (58) и (59) тождественны с соотношениями, выведенными выше для функции σu. Следовательно, частное $\frac{\psi(u)}{\sigma u}$ имеет два периода 2ω и $2\omega'$, так как при возрастании u на период оба члена этого отношения получают по одинаковому множителю. Так как обе функции имеют одинаковые нули, то это отношение равно постоянному; кроме того, коэффициент при u в обоих разложениях равен единице. Следовательно, мы имеем $\sigma u=\psi(u)$, или

$$\sigma u=\frac{2\omega}{\theta'(0)}\,e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\,\theta\left(\frac{u}{2\omega}\right),\tag{60}$$

и функция σu выражена через функцию θ. Так как $|q|<1$, то если аргумент v получает действительные значения, ряд (53) сходится весьма быстро. Мы не будем развивать дальше этих указаний; их достаточно, чтобы видеть основное значение функции θ в приложениях эллиптических функций.

III.—Обращение.—Кривые первого рода.

339. Соотношения между периодами и инвариантами.—Всякой системе двух комплексных чисел ω, ω', отношение которых $\frac{\omega'}{\omega}$ не есть действительное число, соответствует вполне определенная эллиптическая функция $\wp u$ имеющая периоды 2ω, $2\omega'$, и правильная при всяком значении переменного u, отличном от значений вида $2m\omega+2m'\omega'$, причем все периоды суть ее полюсы второго порядка. Функции ζu и σu, которые получаются из $\wp u$ одним или двумя интегрированиями, также определены системою периодов $(2\omega, 2\omega')$. Когда необходимо указать эти периоды, можно пользоваться для трех основных функций обозначениями $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$, $\zeta(u\,|\,\omega, \omega')$, $\sigma(u\,|\,\omega, \omega')$.

Однако должно заметить, что систему (ω, ω') можно заменить бесконечным множеством других систем (Ω, Ω'), не изменяя функции $\wp u$. В самом деле, пусть будут m, m', n, n' такие целые положительные или отрицательные числа, чтобы было бы $mn'-m'n=\pm 1$. Полагая $\Omega=m\omega+n\omega'$, $\Omega'=m'\omega+n'\omega'$, будем иметь обратно $\omega=\pm(n'\Omega-n\Omega')$, $\omega'=\pm(m\Omega'-m'\Omega)$; ясно, что все периоды эллиптической функции $\wp u$ суть комбинации двух периодов 2Ω, $2\Omega'$ совершенно так же, как и двух периодов 2ω, $2\omega'$. Две системы периодов $(2\omega, 2\omega')$ и $(2\Omega, 2\Omega')$ равносильны. Функция $\wp(u\,|\,\Omega, \Omega')$ имеет те же периоды, те же полюсы с теми же главными частями, как и функция $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$, и их разность равна нулю при $u=0$. Следовательно, они тождественны; это следует также из разложения (22), так как множество количеств $2m\Omega+2m'\Omega'$ тождественно с множеством количеств $2m\Omega+2m'\Omega'$. На том же основании будет $\zeta(u\,|\,\Omega, \Omega')=\zeta(u\,|\,\omega, \omega')$, $\sigma(u\,|\,\Omega, \Omega')=\sigma(u\,|\,\omega, \omega')$.

Точно также функции $\wp u$, ζu, σu вполне определены и инвариантами g_2, g_3. В самом деле, мы видели, что функция σu определена разложением в целый ряд, все коэффициенты которого суть целые многочлены по g_2 и g_3; затем мы имеем $\zeta u=\dfrac{\sigma' u}{\sigma u}$, и наконец $\wp u=-\zeta' u$. Чтобы обозначить функции, соответствующие инвариантам g_2 и g_3, пользуются обозначениями $\wp(u; g_2, g_3)$; $\zeta(u; g_2, g_3)$; $\sigma(u; g_2, g_3)$.

Здесь возникает следующий существенный вопрос. Из самого способа образования функции $\wp u$ очевидно, что всякой системе (ω, ω') соответствует эллиптическая функция $\wp u$, если только отношение $\dfrac{\omega'}{\omega}$ не есть действительное число; но ни откуда непосредственно не видно, чтобы всякой системе значений инвариантов g_2, g_3 соответствовала эллиптическая функция. Мы знаем, что выражение $g_2^3-27g_3^2$ должно быть отлично от нуля, но наверное нельзя еще утверждать, что это условие достаточно. Рассматриваемая задача приводится в сущности к решению выведенных выше трансцендентных уравнений (§ 332)

$$g_2=60\sum{}'\frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^4}, \quad g_3=140\sum{}'\frac{1}{(2m\omega+2m'\omega')^6} \tag{61}$$

относительно неизвестных ω, ω', или, по крайней мере, к разысканию, имеют ли эти уравнения при $g_2^3-27g_3^2$ отличном от нуля такую систему решений, чтобы $\dfrac{\omega'}{\omega}$ не было действительным числом. Если существует одна система решений, то существует бесчисленное множество других, но прямое решение предыдущих уравнений, повидимому недоступно. К решению вопроса можно придти окружным путем, изучая сначала задачу обращения эллиптического интеграла первого вида.

Примечание.—Пусть будут ω, ω' такие комплексные числа, что $\frac{\omega'}{\omega}$ не есть действительное число. Соответствующая функция $\wp(u|\omega,\omega')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

где g_2, g_3 определяются уравнениями (61). При $u=\omega$ количество $\wp\omega$ равно корню e_1 уравнения $4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = o$. Когда u изменяется от 0 до ω, $\wp u$ описывает линию L, идущую из бесконечности в точку e_1; так как мы имеем соотношение $du = \frac{d\rho}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}$, то отсюда заключаем, что полупериод равен определенному интегралу

$$\omega = \int_{\infty}^{e_1} \frac{d\rho}{\sqrt{4\wp^3 - g_2 g - g_3}},$$

взятому вдоль линии L. Аналогичное выражение для ω' мы получим заменяя в предыдущем интеграле e_1 через e_2.

Таким образом мы имеем выражение полупериодов ω, ω' через инварианты. Чтобы иметь возможность вывести отсюда решение рассматриваемой задачи, необходимо было бы доказать, что эта новая система уравнений равносильна системе (61), т.-е. что она определяет g_2 и g_3, как однозначные функции от ω и ω'.

340. Функция обратная эллиптическому интегралу первого вида.—Пусть будет $R(z)$ многочлен третьей или четвертой степени, первый со своею производною. Мы представим этот многочлен в виде

$$R(z) = A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4),$$

где a_1, a_2, a_3, a_4—его различные корни, если $R(z)$—четвертой степени; если же $R(z)$—третьей степени, то мы обозначим его корни через $a_1, a_2\ a_3$ и положим кроме того $a_4 = \infty$, условившись заменять в выражении $R(z)$ $z-\infty$ единицею. Эллиптический интеграл первого вида есть

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \tag{62}$$

где для определенности предположим, что начало z_0 отлично от корней многочлена $R(z)$ и находится на конечном расстоянии, и корень имеет определенное начальное значение. Если $R(z)$—четвертой степени, то корень $\sqrt{R(z)}$ имеет четыре критических точки a_1, a_2, a_3, a_4 и каждое из значений корня $\sqrt{R(z)}$ имеет точку $z=\infty$ полюсом второго порядка. Если $R(z)$—третьей степени, то корень $\sqrt{R(z)}$ имеет только три критических точки a_1, a_2, a_3 на конечном расстоянии. Но если переменное z описывает окружность, содержащую внутри себя точки a_1, a_2, a_3, то оба значения корня переходят одно в другое; следовательно, точка $z=\infty$ есть точка разветвления функции $\sqrt{R(z)}$.

Напомним свойства эллиптического интеграла u, выведенные выше (§ 317). Если $\overline{u(z)}$ обозначает значение этого интеграла, соответствующее переходу от точки z_0 до точки z по определенному пути, то этот интеграл может иметь в той же точке z бесконечное множество значений, которые все содержатся в формулах

$$u=\overline{u(z)}+2m\omega+2m'\omega',\quad u=I-\overline{u(z)}+2m\omega+2m'\omega'. \tag{63}$$

В этих формулах m и m' суть совершенно произвольные целые числа, 2ω и $2\omega'$—периоды, отношение которых не есть действительное число, и I—постоянное, которое можно принять, например, равным интегралу, взятому вдоль петли, описанной вокруг точки a_1.

Пусть будет $\wp(u\,|\,\omega,\omega')$ эллиптическая функция, за периоды которой взяты периоды 2ω, $2\omega'$ эллиптического интеграла (62). Заменим в этой функции переменное u интегралом (62), уменьшенным на $\frac{I}{2}$; пусть будет $\Phi(z)$ полученная таким образом функция от z

$$\Phi(z)=\wp\left[\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}-\frac{I}{2}\middle|\,\omega,\,\omega'\right]=\wp\left(u-\frac{I}{2}\middle|\,\omega,\,\omega'\right). \tag{64}$$

Эта функция $\Phi(z)$ есть однозначная функция переменного z. В самом деле, если мы заменим u каким-нибудь из его значений (63), то каковы бы ни были m и m', мы получим

$$\text{или}\ \Phi(z)=\wp\left[\overline{u(z)}-\frac{I}{2}\middle|\,\omega,\,\omega'\right],\quad \text{или}\ \Phi(z)=\wp\left[\frac{I}{2}-\overline{u(z)}\,\middle|\,\omega,\,\omega'\right],$$

т.-е. единственное значение для $\Phi(z)$.

Найдем, каковы могут быть особые точки этой функции $\Phi(z)$. Пусть будет сначала z_1 какое-нибудь значение переменного z, отличное от точки разветвления. Предположим, что мы перемещаем переменное z из точки z_0 в точку z_1 по некоторому определенному пути. Мы придем в эту точку с некоторым значением для корня и с значением u_1 для интеграла. В области точки z_1 функция $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ есть голоморфная функция от z, и мы имеем разложение вида

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=a_0+a_1(z-z_1)+a_2(z-z_1)^2+\dots,\quad a_0\neq 0;$$

отсюда получаем

$$u=u_1+a_0(z-z_1)+\frac{a_1}{1.2}(z-z_1)^2+\dots \tag{65}$$

Если $u_1 - \frac{I}{2}$ не равно периоду, то функция $\wp\left(u - \frac{I}{2}\right)$ голоморфна в области точки u_1, и, следовательно, $\Phi(z)$ голоморфна в области точки z_1. Если $u_1 - \frac{I}{2}$ равно периоду, то точка u_1 есть полюс второго порядка для $\wp\left(u - \frac{I}{2}\right)$, и, следовательно, z_1 есть полюс второго порядка для $\Phi(z)$, так как в области точки u_1 мы имеем

$$\wp\left(u - \frac{I}{2}\right) = \frac{P(u-u_1)}{(u-u_1)^2},$$

где P—голоморфная функция.

Предположим затем, что z стремится к критической точке a_i. В области точки a_i мы имеем

$$\left[R(z)\right]^{-\frac{1}{2}} = (z-a_i)^{-\frac{1}{2}} P_i(z-a_i),$$

где P—голоморфно при $z=a_i$, или

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{\sqrt{z-a_i}}\left[a_0 + a_1(z-a_i) + a_2(z-a_i)^2 + \ldots\right], \quad a_0 \neq 0;$$

отсюда, интегрируя почленно, получаем

$$u = u_i + \sqrt{z-a_i}\left[2a_0 + \frac{2}{3}a_1(z-a_i) + \ldots\right]. \tag{66}$$

Если $u_i - \frac{I}{2}$ не равно периоду, то $\wp\left(u - \frac{I}{2}\right)$ есть голоморфная функция от u в области точки u_i. Заменим в разложении этой функции по степеням $u - u_i$ разность $u - u_i$ ее значением, выведенным из формулы (66); дробные степени разности $z - a_i$ должны исчезнуть, так как мы знаем, что левая часть есть однозначная функция от z, и мы видим, что $\Phi(z)$ голоморфно в области точки a_i. Заметим, между прочим, что отсюда следует, что $u_i - \frac{I}{2}$ должно быть равно полупериоду, [так как $\wp\left(u - \frac{I}{2}\right)$ должно быть четною функциею от $u - u_i$] Точно так же мы увидим, что если $u_i - \frac{I}{2}$ равно периоду, то точка a_i есть полюс первого порядка функции $\Phi(z)$.

Изучим, наконец, свойства функции $\Phi(z)$ при бесконечно больших значениях переменного z. Здесь надо различить два случая в зависимости от того, будет ли $R(z)$ третьей или четвертой степени. Если многочлен $R(z)$—четвертой степени, то вне круга C с центром в начале координат, содержащего четыре корня, каждое из двух значений функции $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ есть голоморфная функция от $\frac{1}{z}$. Например, для одного из них мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\frac{a_0}{z^2}+\frac{a_1}{z^3}+\frac{a_2}{z^4}+\ldots,\quad a_0\neq 0,$$

и достаточно изменить все знаки на обратные, чтобы иметь разложение второго значения. При неограниченном возрастании модуля переменного z, при чем корень $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ имеет приведенное выше значение, интеграл u стремится к некоторому конечному значению u_∞, и мы имеем в области бесконечно удаленной точки

$$u=u_\infty-\frac{a_0}{z}-\frac{a_1}{2z^2}-\frac{a_2}{3z^3}-\ldots\tag{67}$$

Если $u_\infty-\frac{I}{2}$ не равно периоду, то функция $\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)$ — правильная в точке u_∞, и, следовательно, точка $z=\infty$ есть обыкновенная точка функции $\Phi(z)$. Если $u_\infty-\frac{I}{2}$ равно периоду, то точка u_∞ есть полюс второго порядка функции $\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)$, и, так как в области точки z_∞ имеем

$$\frac{1}{u-u_\infty}=z\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{z}+\frac{\beta_2}{z^2}+\ldots\right),$$

то точка $z=\infty$ есть полюс второго порядка также и для функции $\Phi(z)$.

Если $R(z)$—третьей степени, то вне круга с центром в начале координат, содержащего три критических точки a_1, a_2, a_3, мы имеем разложение вида

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\frac{1}{z^{3/2}}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right),\quad a_0\neq 0,$$

и, следовательно,

$$u=u_\infty-\frac{1}{\sqrt{z}}\left(2a_0+\frac{2a_1}{3}\frac{1}{z}+\ldots\right).\tag{68}$$

Рассуждая, как и выше, мы увидим, что бесконечно удаленная точка есть обыкновенная точка или полюс первого порядка функции $\Phi(z)$. Таким образом, функция $\Phi(z)$ имеет особыми точками только полюсы; следовательно, она есть рациональная функция от z, и эллиптический интеграл первого вида (62) удовлетворяет соотношению вида

$$\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)=\Phi(z), \tag{69}$$

где $\Phi(z)$—рациональная функция. Нам еще не известна степень этой функции; покажем, что она—первой степени, и для этого изучим обратную функцию. Другими словами, мы рассмотрим теперь u как независимое переменное и найдем свойства верхнего предела z интеграла (62), рассматривая z, как функцию этого интеграла u. Мы разобьем это довольно тонкое исследование на несколько частей.

1. Каждому конечному значению интеграла u соответствует m значений переменного z, если m есть степень рациональной функции $\Phi(z)$.

В самом деле, пусть будет u_1 какое-нибудь конечное значение переменного u; уравнение $\Phi(z)=\wp\left(u_1-\frac{I}{2}\right)$ относительно z имеет m решений, вообще, различных и конечных, но при частных значениях u_1 некоторые из этих корней могут сливаться или обращаться в бесконечность. Пусть будет z_1 одно из этих решений; значения эллиптического интеграла u, соответствующие этому значению переменного z, удовлетворяют уравнению

$$\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)=\Phi(z_1)=\wp\left(u_1-\frac{I}{2}\right).$$

Следовательно, мы имеем одно из двух соотношений

$$u=u_1+2m_1\omega+2m_2\omega', \quad u=I-u_1+2m_1\omega+2m_2\omega';$$

в том и в другом случае мы можем перемещать переменное z от z_0 к z_1 по такому пути, чтобы значение интеграла, взятого вдоль этого пути, было именно равно u_1. Следовательно, если степень функции $\Phi(z)$ равна m, то есть m значений переменного z, при которых интеграл (62) принимает данное значение u.

2. Пусть будет u_1 конечное значение интеграла u, которому соответствует конечное значение z_1 переменного z; значение переменного z, стремящееся к z_1, когда u стремится к u_1, есть функция от u, голоморфная в области точки u_1.

В самом деле, если z_1 отлично от критической точки, то значения переменных u и z, стремящихся соответственно к u_1 и z_1, связаны выведенным выше соотношением (65), где коэффициент a_0 не равен нулю. По общей теореме о неявных функциях (т. I, § 187), отсюда обратно получим для $z-z_1$ разложение по целым и положительным степеням разности $u-u_1$. Если, при частном значении u_i, переменное z равно критическому значению a_i, то можно было бы рассматривать правую часть формулы (66), как разложение по степеням корня $\sqrt{z-a_i}$; так как a_0 не равно нулю, то отсюда обратно выведем для $\sqrt{z-a_i}$, а, следовательно, и для $z-a_i$ разложение по целым степеням разности $u-u_i$.

3. Пусть будет u_∞ значение, которое принимает интеграл u, когда $|z|$ неограниченно возрастает; точка u_∞ есть полюс для значения z, модуль которого неограниченно возрастает.

В самом деле, значение интеграла u, стремящееся к u_∞, представляется в области бесконечно удаленной точки одним из разложений (67) или (68). В первом случае мы получим для $\frac{1}{z}$ разложение в целый ряд, расположенный по степеням разности $u-u_\infty$,

$$\frac{1}{z}=\beta_1(u-u_\infty)+\beta_2(u-u_\infty)^2+\ldots,\quad \beta_1\neq 0;$$

во втором случае мы будем иметь аналогичное разложение для $\frac{1}{\sqrt{z}}$, и, следовательно,

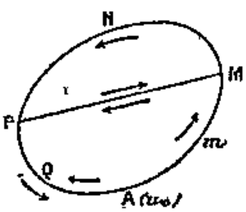
$$\frac{1}{z}=(u-u_\infty)^2[\beta_1+\beta_2(u-u_\infty)+\ldots]^2.$$

Следовательно, точка u_∞ есть полюс первого или второго порядка функции z в зависимости от того, будет ли многочлен $R(z)$ четвертой или третьей степени.

4. Докажем, наконец, что каждому значению переменного u не может соответствовать более одного значения переменного z. В самом деле, предположим, что перемещая переменное z из точки z_0 по двум путям в две различные точки z_1 z_2, мы в обоих случаях получим для интеграла u одинаковые значения. Тогда можно было бы найти такой путь L, соединяющий эти обе точки z_1, z_2, чтобы интеграл $\int_L \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, взятый вдоль этого пути, был равен нулю. Если мы изобразим интеграл $u=X+iY$ точкою с координатами (X, Y) относительно системы прямоугольных осей OX, OY, то мы видим, что, при перемещении точки z по незамкнутой линии L, точка u описывала бы некоторую замкнутую линию Γ. Мы сейчас докажем, что последнее несовместимо с выведенными выше свойствами.

На основании соотношения $\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)=\Phi(z)$ каждому значению переменного u соответствует конечное число значений переменного z, каждое из которых непрерывно изменяется вместе с u, если только путь, описываемый переменным u, не проходит ни через одну из точек соответствующих значению $z=\infty$ [1]). Мы допустили, что когда переменное u описывает в своей плоскости замкнутую линию Γ, выходя из точки $A(u_0)$ и возвращаясь в эту точку, переменное z описывает непрерывную незамкнутую линию, идущую из точки z_1 в точку z_2. Возьмем на линии Γ две точки M и P (черт. 80); пусть будут z', z'' значения, с которыми мы приходим в эти точки M и P, когда, взяв за начальное значение для z значение z_1, мы перемещаем u по путям AM и $AMNP$. Далее, пусть будет z_1'' значение, с которым мы приходим в точку P, когда перемещаем u по дуге AQP; по предположению, z'' и z_1'' различны. Соединим точки M и P линиею MP, лежащую внутри контура Γ, и предположим, что переменное u описывает дугу AmM, а потом линию MP; пусть будет z_2' значение, с которым мы приходим в точку P. Это значение z_2'' будет отлично или от z'' или от z_1''. Если оно отлично от z_1'', то пути $AmMP$ и AQP не приводят к одному и тому же значению z в точке P. Если z'' и z_2'' различны, то пути $AmMP$ и $AmMQP$ не приводят к одному и тому же значению в точке P; следовательно, выходя из точки M с значением z' для z и перемещаясь из M в P по пути MP или по пути MNP, мы получим для z различные значения. Мы видим, что в обоих случаях можно заменить замкнутый контур Γ меньшим замкнутым контуром Γ_1, лежащим некоторыми своими частями внутри Γ, и таким, что когда u описывает этот замкнутый контур, z описывает некоторую незамкнутую линию. Повторяя ту же операцию с контуром Γ_1, и т. д. неограниченно, мы получили бы неограниченную последовательность замкнутых контуров Γ, Γ_1, $\Gamma_2,\ldots$, обладающих тем же свойством, как и первый контур Γ. Так как очевидно, что можно выбирать эти последовательные контуры таким образом, чтобы их размеры неограниченно убывали, то отсюда мы заключаем, что контур Γ_n стремится к некоторой предельной точке λ. Из самого определения этой точки λ следует, что внутри круга, описанного из точки λ радиусом ε, всегда существует замкнутый путь, не приводящий переменное z к его начальному значению, как бы ε ни было

Черт. 80.



---

[1]) Эти свойства неявных функций, которые мы здесь принимаем, будут доказаны ниже (глава XVII).

мало. Но это невозможно, так как точка λ есть обыкновенная точка или полюс для различных значений z; в обоих случаях z есть однозначная функция от u в области точки λ. Следовательно, допуская, что интеграл $\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, взятый вдоль некоторой незамкнутой линии L, может быть равен нулю, или, что то же, допуская, что значению u соответствуют два различных значения переменного z, мы пришли к противоречию. Выше мы заметили, что если при двух различных значениях z_1 и z_2 переменного z будет $\Phi(z_1)=\Phi(z_2)$, то можно найти такой путь L, соединяющий точки z_1 и z_2, чтобы интеграл $\int_L\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ был равен нулю. Следовательно, рациональная функция $\Phi(z)$ не может принимать одного и того же значения при двух различных значениях переменного z, т.-е. $\Phi(z)$—первой степени: $\Phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. Тогда из соотношения (69) получаем

$$z=\frac{b-d\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)}{c\wp\left(u-\frac{I}{2}\right)-a}, \tag{70}$$

и мы приходим к следующему важному предложению: **Верхний предел z эллиптического интеграла первого вида, рассматриваемый, как функция этого интеграла, есть эллиптическая функция второго порядка.**

Эллиптические интегралы были весьма глубоко изучены Лежандром; но к открытию эллиптических функций Абель и Якоби пришли, решая задачу об обращении этих интегралов.

Действительное определение эллиптической функции $z=f(u)$ составляет **задачу обращения**. Из соотношения (62) получаем

$$\frac{dz}{du}=\sqrt{R(z)},$$

и, следовательно, $\sqrt{R(z)}=f'(u)$. Мы видим, что $\sqrt{R(z)}$ есть также эллиптическая функция от u. Геометрически мы можем все предыдущие результаты выразить следующим образом:

Пусть будет $R(x)$ многочлен третьей или четвертой степени, первый со своею производною; координаты точек кривой C, представляемой уравнением

$$y^2=R(x), \tag{71}$$

выражаются через эллиптические функции от интеграла первого вида

$$u=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{y}=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

таким образом, что каждой точке (x,y) этой кривой соответствует только одно значение переменного u, если не обращать внимания на периоды.

Чтобы доказать последнюю часть предложения, достаточно заметить, что все значения переменного u, соответствующие данному значению переменного x, заключаются в двух формулах

$$u_0+2m_1\omega+2m_2\omega', \quad I-u_0+2m_1\omega+2m_2\omega'.$$

Все значения u, содержащиеся в первой формуле, происходят от четного числа петель, описанных вокруг критических точек, и прямого пути, соединяющего x_0 с x; они соответствуют одному и тому же значению корня $\sqrt{R(x)}$. Значения u, содержащиеся во второй формуле, происходят от нечетного числа петель, описанных вокруг критических точек, и прямого пути, соединяющего x_0 с x; соответствующее значение $\sqrt{R(x)}$ противоположно первому по знаку. Следовательно, если одновременно заданы x и y, то соответствующие значения u содержатся только в одной из этих формул.

Из предыдущих вычислений следует, что эллиптическая функция $x=f(u)$ имеет двойной полюс в параллелограмме периодов, если $R(x)$—третьей степени, и два простых полюса если $R(x)$—четвертой степени; следовательно, $y=f'(u)$—третьего или четвертого порядка в зависимости от степени многочлена $R(x)$.

Примечание.—Предположим, что каким-нибудь образом мы выразим координаты (x, y) точек кривой $y^2=R(x)$ через эллиптические функции параметра v, например, $x=\varphi(v)$, $y=\varphi_1(v)$. Тогда интеграл первого рода обращается в

$$u=\int\frac{dx}{y}=\int\frac{\varphi'(v)dv}{\varphi_1(v)};$$

эллиптическая функция $\dfrac{\varphi'(v)}{\varphi_1(v)}$ не может иметь полюса, так как u должно сохранять конечное значение при всяком конечном значении параметра v; следовательно, она приводится к постоянному k, и мы имеем $u=kv+l$. Очевидно, что постоянное l зависит от значения, выбранного для нижнего предела интеграла u; что касается коэффициента k, то для его определения достаточно дать параметру v какое-нибудь частное значение.

341. Определение функции $\wp u$ через инварианты.— Теперь нетрудно ответить на поставленный выше вопрос (§ 339). Если даны два таких числа g_2, g_3, что $g_2^3-27g_3^2$ не равно нулю, то всегда существует эллиптическая функция $\wp u$, у которой g_2 и g_3 суть инварианты. В самом деле, многочлен

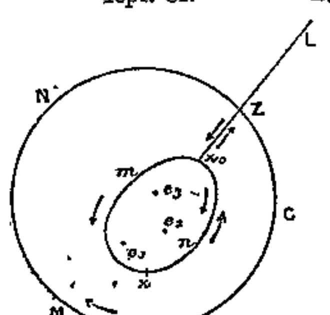
$$R(z)=4z^3-g_2z-g_3$$

первый со своею производною, и эллиптический интеграл $\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ имеет два периода 2ω, $2\omega'$, отношение которых мнимое. Пусть будет $\wp(u|\omega,\omega')$ соответствующая эллиптическая функция. Заменим в этой функции аргумент u интегралом

$$u=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}-H, \tag{72}$$

где H — постоянное, выбранное таким образом, чтобы одно из значений параметра u при $z=\infty$ было равно нулю. Например, можно провести из точки z_0 бесконечную полупрямую L и взять для H значение интеграла $\int_{z_0}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, взятого вдоль этой полупрямой L. Покажем сначала, что полученная таким образом функция есть однозначная функция переменного z. Пусть будет z какая-нибудь точка плоскости; обозначим через v и v' значения интеграла

Черт. 81.



$$v=\int_{(z_0mz)}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\quad v'=\int_{(z_0nz)}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

взятые при одном и том же начальном значении корня $\sqrt{R(z)}$, вдоль двух путей z_0mz и z_0nz, которые вместе образуют замкнутый контур, содержащий внутри себя три критических точки e_1, e_2, e_3 корня (черт. 81). Рассмотрим замкнутый контур $z_0mznz_0ZMNZz_0$, образуемый контуром z_0mznz_0, отрезком z_0Z, кругом C с весьма большим радиусом и отрезком Zz_0. Функция $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ голоморфна внутри этого контура, и мы имеем соотношение

$$v+v'-\int_{z_0}^{Z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}+\int_{(C)}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}-\int_{z_0}^{Z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=0;$$

при неограниченном возрастании радиуса круга C это соотношение обращается в

$$v+v'-2H=0.$$

Следовательно, значения u, соответствующие двум путям z_0mz и z_0nz, удовлетворяют соотношению $u+u'=0$. Так как $\wp u$—функция четная, то отсюда следует, что функция

$$\wp(u|\omega,\omega')=\wp\left(\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}-H|\omega,\omega'\right)$$

есть однозначная функция переменного z. Мы видели, что это—линейная функция вида $\frac{az+b}{cz+d}$. Чтобы определить a, b, c, d, достаточно рассмотреть разложение этой функции в области бесконечно удаленной точки. Мы имеем в этой области

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{g_2}{4z^2}-\frac{g_3}{4z^3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}+\frac{g_2}{16z^{\frac{7}{2}}}+\ldots;$$

следовательно, значение u, равное нулю при $z=\infty$, представляется разложением

$$u=-\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{g_2}{40z^2}+\ldots\right).$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{u^2}=z\left(1+\frac{g_2}{40z^2}+\ldots\right)^{-2}=z-\frac{g_2}{20z}+\ldots,$$

так что разность $\wp u-z$ при $z=\infty$ равна нулю. Но разность $\frac{az+b}{cz+d}-z$ может обращаться в нуль при $z=\infty$ только в том случае, если $c=0$, $b=0$, $a=d$; таким образом, $\wp(u|\omega,\omega')$, после замены в ней u через интеграл (72), обращается в z. Взяв за нижний предел бесконечно удаленную точку, мы можем представить этот интеграл в виде

$$u=\int_{\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}};\tag{72'}$$

из этого соотношения вытекает $\wp u=z$, где за периоды функции $\wp u$ взяты периоды 2ω, $2\omega'$ интеграла $\int\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$. Сравнивая между собою значения производной $\frac{du}{dz}$, выведенные из этих соотношений, мы получим $\wp' u=\sqrt{R(z)}$, или, возводя в квадрат,

$$\wp'^2u=R(z)=4\wp^3u-g_2\wp u-g_3.\tag{73}$$

Следовательно, числа g_2, g_3—инварианты эллиптической функции $\wp u$, за периоды которой взяты 2ω, $2\omega'$. Этим решена предложенная выше задача (§ 339). Если $g_2^3-27g_3^2$ не равно нулю, то уравнения (61) удовлетворяются бесконечным множеством систем значений количеств ω, ω'. Если e_1, e_2, e_3 суть корни уравнения $R(z)=4z^3-g_2z-g_3=0$, то мы получим систему решений, полагая, например

$$\omega=\int_{e_1}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\qquad \omega'=\int_{e_2}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\tag{74}$$

и отсюда найдем все остальные системы решений, как это было указано выше.

В приложениях анализа, где приходится иметь дело с эллиптическими функциями, функция $\wp u$ всего чаще определяется ее инвариантами. При выполнении вычислений, бывает нужно, зная g_2 и g_3, уметь вычислять систему периодов и, сверх того, находить корень уравнения $\wp u=A$, где A—данное постоянное. За всеми подробностями метода, а также за всем, касающимся пользования таблицами, мы можем только отослать к специальным сочинениям [1]).

342. Приложение к плоским кривым третьего порядка.—Если $g_2^3-27g_3^2$ не равно нулю, то уравнение

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3\tag{75}$$

представляет кривую третьего порядка без двойной точки. Мы удовлетворим этому уравнению, полагая $x=\wp u$, $y=\wp' u$, причем инварианты функции $\wp u$ суть именно g_2 g_3. Всякой точке кривой соответствует в параллелограмме периодов одно значение параметра u. В самом деле, уравнение $\wp u=x$ имеет в параллелограмме периодов два корня u_1 и u_2; сумма u_1+u_2 есть период, и значения $\wp' u_1$ и $\wp' u_2$ противоположны по знаку. Следовательно, они равны двум значениям переменного y, соответствующим одному и тому же значению переменного x.

Вообще, координаты точек каждой плоской кривой третьего порядка без двойной точки можно выразить через эллиптические функции параметра. В самом деле, известно, что выполняя гомографическое преобразование, можно привести уравнение кривой третьего порядка к виду (75); но это преобразование можно выполнить только тогда, когда известна точка перегиба кривой, а определение точек перегиба зависит от решения уравнения девятой степени особого вида. Покажем, как можно получить параметрическое представление кривой

---

[1]) Исходя из формулы (39) разложения в целый ряд функции σu и из тех формул, которые получаются из нее дифференцированием, мы, по крайней мере теоретически, можем вычислить σu, $\sigma' u$, $\sigma'' u$, и, следовательно, ζu и $\wp u$ для всякой системы значений u, g_2, g_3.

третьего порядка через эллиптические функции параметра, не решая никакого уравнения, если только известны координаты какой-нибудь точки этой кривой.

Предположим сначала, что уравнение плоской кривой третьего порядка имеет вид

$$y^2 = b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3, \tag{76}$$

что равносильно тому, что бесконечно удаленная точка есть точка перегиба. Мы приведем это уравнение к предыдущему виду, полагая

$$y = \frac{4}{b_0}y', \quad x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0}x',$$

откуда

$$y'^2 = 4x'^3 - g_2x' - g_3,$$

где инварианты g_2 и g_3 равны

$$g_2 = \frac{12(b_1^2 - b_0b_2)}{16}, \qquad g_3 = \frac{3b_0b_1b_2 - 2b_1^3 - b_0^2b_3}{16}.$$

Следовательно, мы получаем для координат точек кривой (76) выражения

$$x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0}\wp u, \qquad y = \frac{4}{b_0}\wp' u.$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь плоскую кривую третьего порядка C_3; пусть будет (α, β) координаты одной из ее точек. Касательная к кривой в точке (α, β) встречает кривую в другой точке (α', β'), координаты которой выражаются рационально через α, β. Если эта точка (α', β'), взята за начало координат, то уравнение кривой принимает вид

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0,$$

где φ_i—однородный многочлен степени i ($i = 1, 2, 3$). Проведем секущую $y = tx$; x определяется уравнением второй степени

$$x^2\varphi_3(1, t) + x\varphi_2(1, t) + \varphi_1(1, t) = 0;$$

откуда

$$x = \frac{-\varphi_2(1, t) + \sqrt{R(t)}}{2\varphi_3(1, t)}, \qquad y = tx,$$

где $R(t)$ обозначает многочлен $\varphi_2^2(1, t) - 4\varphi_3(1, t)\varphi_1(1, t)$, который, вообще, — четвертой степени. Корни этого многочлена суть угловые коэффициенты касательных к кривой, проходящих через начало координат. Нам заранее известен один корень этого многочлена, именно, угловой коэффициент t_0 прямой, соединяющей начало координат с точкою (α, β). Полагая $t=t_0+\frac{1}{t'}$, получим

$$\sqrt{R(t)}=\frac{\sqrt{R_1(t')}}{t'^2},$$

где многочлен $R_1(t')$—уже не выше третьей степени. Следовательно, координаты (x, y) точек кривой C_3 выражаются рационально через параметр t' и квадратный корень из многочлена $R_1(t')$ третьей степени. Мы только что видели, как можно выразить t' и $\sqrt{R_1(t')}$ через эллиптические функции параметра u; таким образом, мы выразим x и y через эллиптические функции от u.

Из предыдущих рассуждений следует, что каждой точке (x, y) кривой третьего порядка соответствует единственное значение параметра t и вполне определенное значение корня $\sqrt{R(t)}$, и, следовательно, вполне определенные значения количеств t' и $\sqrt{R_1(t')}$. Но, как уже было указано, каждой системе значений количеств t' и $\sqrt{R_1(t')}$ соответствует в параллелограмме периодов только одно значение параметра u. Следовательно, полученные для координат точек кривой C_3 значения $x=f(u)$, $y=f_1(u)$ таковы, что все значения параметра u, соответствующие одной и той же точке кривой, разнятся между собою на период.

Это параметрическое представление плоских кривых третьего порядка через эллиптические функции имеет весьма важное значение [1]). Например, покажем, как, пользуясь им, можно определить точки перегиба кривой. Пусть будут $x=f(u)$, $y=f_1(u)$ выражения ее координат; аргументы точек пересечения кривой с прямою $Ax+By+C=0$ суть корни уравнения $Af(u)+Bf_1(u)+C=0$. Так как каждой точке (x, y) соответствует в параллелограмме периодов только одно значение параметра u, то отсюда следует, что эллиптическая функция $Af(u)+Bf_1(u)+C$ должна быть третьего порядка. Очевидно, что полюсы этой функции не зависят от A, B, C; следовательно, если u_1, u_2, u_3 суть аргументы, соответствующие трем точкам пересечения кривой с прямою, то должно быть (§ 330)

$$u_1+u_2+u_3=K+2m_1\omega+2m_2\omega',$$

где K есть сумма полюсов, лежащих в одном параллелограмме. Заменяя в f и f_1 параметр u через $\frac{K}{3}+u$, мы можем представить предыдущее соотношение проще:

$$u_1+u_2+u_3=\text{периоду}.$$

Обратно, этого условия достаточно, чтобы три точки $M_1(u_1)$, $M_2(u_2)$, $M_3(u_3)$ лежали на одной прямой. В самом деле, пусть будет M_3' третья точка пересечения прямой M_1M_2

---

[1]) Клебш (Clebsch), Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Crelle's Journal, т. LXIV).

с кривою, и u'_3 — соответствующее значение аргумента. Так как сумма $u_1+u_2+u_3'$ равна периоду, то u_3 и u_3' разнятся между собою только на период, и, следовательно, M_3' совпадает с M_3.

Если u есть аргумент точки перегиба, то касательная в этой точке встречает кривую в трех слившихся точках, и $3u$ должно быть равно периоду. Следовательно, должно быть $u=\frac{2m_1\omega+2m_2\omega'}{3}$, и очевидно, что достаточно давать целым числам m_1 и m_2 значения 0, 1, 2, чтобы получить все точки перегиба; таким образом у кривой есть девять точек перегиба. Прямая, проходящая через две точки перегиба $\frac{2m_1\omega+2m_2\omega'}{3}$ и $\frac{2m'_1\omega+2m'_2\omega'}{3}$, пересекает кривую в третьей точке, аргумент которой равен

$$-\frac{2(m_1+m'_1)\omega+2(m_2+m'_2)\omega'}{3}$$

или также трети периода, т.-е. в новой точке перегиба. Число прямых, пересекающих таким образом кривую третьего порядка в трех точках перегиба равно $\frac{8.9}{2.3}$, т.-е. равно двенадцати.

Примечание.—Точки пересечения нормальной кривой третьего порядка (75) с прямою $y=mx+n$ определяются уравнением $\wp'u-m\wp u-n=0$, левая часть которого имеет вместе с $\wp'u$ тройной полюс $u=0$. Следовательно, сумма аргументов точек пересечения равна периоду. Если u_1 и u_2 суть аргументы двух из этих точек, то можно принять $-u_1-u_2$ за аргумент последней точки пересечения, и абсциссы этих трех точек соответственно равны $\wp u_1$, $\wp u_2$, $\wp(u_1+u_2)$.

Отсюда можно вывести другое доказательство формулы сложения для функции $\wp u$ В самом деле, абсциссы точек пересечения суть корни уравнения:

$$4x^3-g_2x-g_3=(mx+n)^2;$$

следовательно, мы имеем

$$x_1+x_2+x_3=\wp u_1+\wp u_2+\wp(u_1+u_2)=\frac{m^2}{4}.$$

С другой стороны, так как прямая $y=mx+n$ проходит через две точки $M_1(u_1)$, $M_2(u_2)$, то мы имеем два соотношения $\wp'u_1=m\wp u_1+n$, $\wp'u_2=m\wp u_2+n$, откуда получаем $m=\frac{\wp'u_2-\wp'u_1}{\wp u_2-\wp u_1}$; таким образом мы приходим к уже выведенному (§ 336) соотношению

$$\wp u_1+\wp u_2+\wp(u_1+u_2)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'u_2-\wp'u_1}{\wp u_2-\wp u_1}\right)^2.$$

343. Общие формулы обращения.—Пусть будет $R(x)$ многочлен четвертой степени, первый со своею производною. Рассмотрим кривую C_4, представляемую уравнением

$$y^2=R(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4. \tag{77}$$

Покажем, как можно выразить координаты x и y точек этой кривой через эллиптические функции параметра. Если известен корень a уравнения $R(x)=0$, то можно воспользоваться тем способом, который был дан для кривых третьего порядка. Полагая $x=a+\frac{1}{x'}$, представим соотношение (77) в виде

$$y^2=R\left(a+\frac{1}{x'}\right)=\frac{R_1(x')}{x'^4},$$

где $R_1(x')$—многочлен третьей степени. Следовательно, точки рассматриваемой кривой C_4 однозначно соответствуют точкам кривой C'_3 третьего порядка, представляемой уравнением $y'^2=R_1(x')$, и формулы устанавливающие это соответствие, суть $x=a+\frac{1}{x'}$, $y=\frac{y'}{x'^2}$. Но переменные x' и y' можно представить через параметр u формулами вида $x'=\alpha\wp u+\beta$, $y'=\alpha\wp' u$, выбирая надлежащим образом α, β и инварианты функции $\wp u$. Отсюда получаем для x и y следующие формулы

$$x=a+\frac{1}{\alpha\wp u+\beta},\quad y=\frac{\alpha\wp' u}{(\alpha\wp u+\beta)^2}. \tag{78}$$

Из формул (78) имеем $du=-\frac{dx}{y}$, так что параметр u тождественен, до знака, с интегралом первого вида $\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, и формулы (78) вполне решают задачу обращения.

Рассмотрим теперь общий случай, когда мы не знаем ни одного корня уравнения $R(x)=0$. Покажем, что *можно, не вводя других иррациональных выражений, кроме квадратного корня, выразить рационально x и y через эллиптическую функцию $\wp u$, инварианты которой известны, и ее производную $\wp' u$.* Заменим x и y соответственно через t и v, так что соотношение (77) примет вид

$$v^2=R(t)=a_0t^4+4a_1t^3+6a_2t^2+4a_3t+a_4. \tag{77 bis}$$

Многочлен $R(t)$ можно бесчисленным множеством способов представить в виде $R(t)=[\varphi_2(t)]^2-\varphi_1(t)\,\varphi_3(t)$, где φ_1, φ_2, φ_3—многочлены, степень которых отмечена их указателями. В самом деле, пусть будут (α,β) координаты какой-нибудь точки кривой C_4. Возьмем многочлен $\varphi_2(t)$ так, чтобы было $\varphi_2(\alpha)=\beta$; очевидно, что это можно сделать бесконечным множеством способов. Уравнение

$$R(t)-[\varphi_2(t)]^2=0$$

будет иметь корень $t=\alpha$, и можно положить $\varphi_1(t)=t-\alpha$. Представив многочлен $R(t)$ в указанном виде, рассмотрим вспомогательную кривую третьего порядка C_3, изображаемую уравнением

$$x^3\varphi_3\left(\frac{y}{x}\right)+2x^2\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)=0. \tag{79}$$

Пересечем эту кривую секущею $y=tx$; абсциссы двух переменных точек пересечения суть корни уравнения

$$x^2\varphi_3(t)+2x\varphi_2(t)+\varphi_1(t)=0,$$

и имеют выражения

$$x=\frac{-\varphi_2(t)\pm\sqrt{[\varphi_2(t)]^2-\varphi_1(t)\varphi_3(t)}}{\varphi_3(t)}=\frac{-\varphi_2(t)+v}{\varphi_3(t)},$$

где v определяется уравнением (77 *bis*). Мы видим, что, обратно, можно выразить рационально t и v через координаты x и y точек кривой C_3 по формулам

$$t=\frac{y}{x},\quad v=x\varphi_3\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right). \tag{80}$$

Но координаты x и y можно выразить через эллиптические функции параметра u, так как известна одна точка кривой C_3, именно, начало координат. Следовательно, то же имеет место и для переменных t и v. Очевидно, что изложенный выше прием можно видоизменять различным образом, не вводя другой иррациональности, кроме $\beta=\sqrt{R(\alpha)}$, при чем α — произвольно.

Выполним вычисление, предполагая, что всегда можно сделать, что коэффициент a_1 при t^3 в $R(t)$ равен нулю. В этом случае мы имеем

$$a_0R(t)=(a_0t^2)^2+6a_0a_2t^2+4a_0a_3t+a_0a_4;$$

положим

$$\varphi_1(t)=-1,\ \varphi_2(t)=a_0t^2,\ \varphi_3(t)=6a_0a_2t^2+4a_0a_3t+a_0a_4.$$

Уравнение вспомогательной кривой третьего порядка C_3 будет

$$6a_0a_2xy^2+4a_0a_3x^2y+a_0a_4x^3+2a_0y^2-x=0. \tag{81}$$

Согласно с общим методом, пересечем эту кривую секущею $y=tx$; полученное уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2-2a_0t^2\frac{1}{x}-(6a_0a_2t^2+4a_0a_3t+a_0a_4)=0;$$

отсюда имеем

$$\frac{1}{x}=a_0t^2+\sqrt{a_0R(t)}.$$

Обратно, мы можем выразить t и $\sqrt{a_0R(t)}$ через x и y:

$$t=\frac{y}{x},\ \sqrt{a_0R(t)}=\frac{1}{x}-a_0\left(\frac{y}{x}\right)^2. \tag{82}$$

С другой стороны, решая уравнение (81) относительно y, мы имеем

$$y = \frac{-2a_0a_3x^2 + \sqrt{4a_0^2a_3^2x^4 - x(a_0a_4x^2 - 1)(6a_0a_2x + 2a_0)}}{6a_0a_2x + 2a_0}.$$

Многочлен, стоящий под знаком корня, обращается в нуль при $x=0$; следовательно, применяя изложенный выше метод, мы можем выразить x и y через эллиптические функции параметра. Выполняя вычисления, мы приходим к формулам

$$x = \frac{1}{2a_0\wp u - a_2}, \quad y = \frac{a_0\wp' u - a_3}{2(a_0\wp u + a_2)(2a_0\wp u - a_2)}, \tag{83}$$

при чем инварианты g_2, g_3 эллиптической функции $\wp u$ равны

$$g_2 = \frac{a_0a_4 + 3a_2^2}{a_0^2}, \quad g_3 = \frac{a_0a_2a_4 - a_2^3 - a_0a_3^2}{a_0^3}. \tag{84}$$

Заменяя в формулах (82) x и y их предыдущими значениями, получим

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \frac{a_3}{a_0}}{\wp u + \frac{a_2}{a_0}}\right), \quad \sqrt{R(t)} = \sqrt{a_0}\left[2\wp u - \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \frac{a_3}{a_0}}{\wp u + \frac{a_2}{a_0}}\right)^2\right]. \tag{85}$$

Эти формулы можно представить в более простом виде, заметив, что вследствие значений (84) инвариантов g_2, g_3 соотношения

$$\wp v = -\frac{a_2}{a_0}, \quad \wp' v = \frac{a_3}{a_0} \tag{86}$$

совместимы. С другой стороны, можно заменить $\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2$ через $\wp(u+v) + \wp u + \wp v$. Таким образом, соединяя эти результаты и заменяя t и $\sqrt{R(t)}$ соответственно через x и y, мы можем высказать следующее предложение:

Координаты (x, y) точек кривой C_4, представленной уравнением (77), где $a_1 = 0$, можно выразить через переменный параметр u формулами

$$x = \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}, \quad y = \sqrt{a_0}\,[\wp u - \wp(u+v)], \tag{87}$$

где инварианты g_2 и g_3 определяются соотношениями (84), а $\wp v$ и $\wp' v$ — совместимыми уравнениями (86).

Дифференцируя по u выведенную выше (§ 336) формулу (45), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)=\wp u-\wp(u+v),$$

т.-е. $\frac{dx}{du}=\frac{y}{\sqrt{a_0}}$, или $du=\sqrt{a_0}\frac{dx}{y}$. Следовательно, параметр u представляет эллиптический интеграл первого вида $\sqrt{a_0}\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, и формулы (87) решают задачу обращения.

344. Кривые первого рода.—Плоская алгебраическая кривая C_n порядка n не может иметь более $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек, не распадаясь на несколько различных кривых. Если кривая C_n не распадается и имеет d двойных точек, то разность $p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d$ называется *родом* этой кривой. Кривые нулевого рода суть уникурсальные кривые; координаты их точек можно выразить через рациональные функции параметра. Следующими наиболее простыми кривыми являются кривые первого рода; кривая C_n первого рода имеет $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1=\frac{n(n-3)}{2}$ двойных точек.

Координаты точек кривой первого рода можно выразить через эллиптические функции параметра.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим *присоединенные* кривые $(n-2)$-го порядка, т.-е. кривые C_{n-2}, проходящие через $\frac{n(n-3)}{2}$ двойных точки кривой C_n. Так как для определения кривой $(n-2)$-го порядка нужно $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ точек, то присоединенные кривые C_{n-2} зависят еще от $\frac{(n-2)(n+1)-n(n-3)}{2}=n-1$ произвольных параметров. Если мы наложим на эти кривые условия, чтобы они проходили еще через $n-3$ простых точек, произвольно взятых на кривой C_n, то мы получим сеть присоединенных кривых, проходящих через все $\frac{n(n-3)}{2}$ двойных точек кривой C_n и через $n-3$ ее простых точек. Пусть будет $F(x,y)=0$ уравнение кривой C_n и

$$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)+\mu f_3(x,y)=0$$

уравнение этой сети кривых C_{n-2}, где λ и μ—произвольные параметры. Всякая кривая этой сети пересекает C_n только в трех переменных точках, так как каждая двойная точка должна считаться за две общих точки, и мы имеем

$$n(n-3)+n-3=n(n-2)-3.$$

Положим теперь

$$x'=\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)},\quad y'=\frac{f_3(x,y)}{f_1(x,y)}. \tag{88}$$

Когда точка (x, y) описывает кривую C_n, точка (x', y') описывает алгебраическую кривую C', уравнение которой мы получим, исключая x и y из уравнений (88) и $F(x,y)=0$. Точки кривых C' и C_n связаны между собою бирациональным преобразованием, т.-е. обратно, координаты (x, y) каждой точки кривой C_n выражаются рационально через координаты (x', y') соответствующей точки кривой C'. Чтобы это доказать, достаточно показать, что каждой точке (x', y') кривой C' может соответствовать только одна точка кривой C_n, т.-е. что уравнения (88) вместе с $F(x,y)=0$ могут иметь относительно x и y только одну систему решений, изменяющуюся вместе с x' и y'.

В самом деле, предположим, что какой-нибудь точке кривой C' соответствуют две точки (a,b), (a',b') кривой C_n, не входящие в состав основных точек сети кривых C_{n-2}. Мы имели бы в этом случае

$$\frac{f_1(a',b')}{f_1(a,b)}=\frac{f_2(a',b')}{f_2(a,b)}=\frac{f_3(a',b')}{f_3(a,b)},$$

и все кривые сети, проходящие через точку (a, b), проходили бы также и через точку (a', b'). Кривые сети, проходящие через эти две точки, все-таки зависели бы еще линейно от переменного параметра, и пересекали бы кривую C_n только в одной переменной точке; координаты этой последней точки пересечения с кривою C_n были бы рациональными функциями переменного параметра, и кривая C_n была бы уникурсальною, но это невозможно, так как она имеет только $\frac{n(n-3)}{2}$ двойных точек. Следовательно, каждой точке (x', y') кривой C' соответствует только одна точка (x, y) кривой C_n, и потому, согласно теории исключения, координаты этой точки

$$x=\varphi_1(x',y'),\quad y=\varphi_2(x',y') \tag{89}$$

суть рациональные функции от x' и y'.

Чтобы определить порядок кривой C', найдем число точек пересечения этой кривой с какою-нибудь прямою $ax'+by'+c=0$. Задача приводится к определению числа общих точек кривой C_n и кривой

$$af_2(x,y)+bf_3(x,y)+cf_1(x,y)=0,$$

так как каждой точке кривой C' соответствует только одна точка кривой C_n, и обратно. Но таких общих точек, изменяющихся вместе с a, b, c, — только три; следовательно, кривая C' — третьего порядка. Итак, координаты точек кривой C_n можно рационально выразить через координаты точек плоской кривой третьего порядка, а так как координаты точек кривой третьего порядка суть эллиптические функции параметра, то то же имеет место и для координат точек кривой C_n.

Из этого доказательства и из того, что было указано выше относительно кривых третьего порядка, следует также, что это представление через эллиптические функции можно сделать таким образом, чтобы каждой точке (x, y) кривой C_n соответствовало только одно значение u в каждом параллелограмме периодов.

Пусть будут $x = \phi(u)$, $y = \phi_1(u)$ формулы, определяющие x и y. Всякий абелев интеграл $w = \int R(x, y)\,dx$, связанный с кривою C_n (т. I, § 108), приводится этою заменою переменных к интегралу от эллиптической функции; следовательно, этот интеграл сам выражается через трансцендентные функции $\wp$, ζ, σ теории эллиптических функций. Введение этих трансцендентных функций в анализ значительно увеличило мощность интегрального исчисления.

Пример. — Бициркулярная кривая четвертого порядка. — Кривая четвертого порядка, имеющая две двойных точки,—первого рода. Если двойные точки суть бесконечно удаленные круговые точки, то кривая C_4 называется бициркулярною кривою четвертого порядка. Если мы примем за начало координат какую-нибудь точку этой кривой, то за присоединенные кривые C_{n-2} можно взять окружности, проходящие через начало координат,

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y = 0.$$

Чтобы получить кривую третьего порядка, однозначно соответствующую кривой C_4, достаточно, согласно общему методу, положить $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$. Отсюда, обратно, имеем $x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$, $y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$, а эти формулы определяют инверсию относительно круга, описанного из начала координат радиусом равным единице. Чтобы получить уравнение кривой третьего порядка C'_3, достаточно заменить в уравнении кривой C_4 переменные x и y их предыдущими значениями. Предположим, например, что уравнение кривой C_4 есть $(x^2 + y^2)^2 - ay = 0$; тогда кривая C'_3 представляется уравнением $ay'(y'^2 + x'^2) - 1 = 0$.

Примечание.—Если плоская кривая C_n имеет особые точки высшего порядка, то она есть кривая первого рода, если все эти особые точки равносильны $\frac{n(n-3)}{2}$ обыкновенным двойным точкам. Например, кривая четвертого порядка, имеющая только одну двойную точку, в которой две ветви кривой касаются друг друга, не представляя никакой особенности,—первого рода; чтобы в этом убедиться, достаточно пересечь эту кривую четвертого порядка сетью кривых второго порядка, касающихся ее обеих ветвей в двойной точке и проходящих через какую-нибудь другую точку кривой. Кривая $y^2=R(x)$, где многочлен $R(x)$ — четвертой степени, первый со своею производною, представляет такую особенность в бесконечно удаленной точке. Мы приведем ее бирациональным преобразованием к кривой третьего порядка, полагая

$$x=\frac{1}{x'},\ y=y'+\sqrt{a_0x'^2};$$

отсюда нетрудно вновь получить формулы обращения (87).

Упражнения.

1. Пользуясь разложением

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_n e^{\frac{2n i\pi z}{\omega}},$$

доказать, что двоякопериодическая целая функция есть постоянное.

[Из условия $f(z+\omega')=f(z)$ следует, что $A_n=0$, если $n\neq 0$.]

2. Если a не есть кратное числа π, то

$$\frac{\sin(z+a)}{\sin a}=\left(1+\frac{z}{a}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{a-n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}.$$

[Изменить z в $z+a$ в формуле разложение $\operatorname{ctg} z$ и затем интегрировать между пределами 0 и z.]

3. Вывести из предыдущей формулы следующие бесконечные произведения:

$$\frac{\cos(z+a)}{\cos a}=\left(1+\frac{2z}{2a+\pi}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left[1+\frac{2z}{2a-(2n-1)\pi}\right]e^{\frac{z}{n\pi}},$$

$$\frac{\sin\alpha-\sin z}{\sin\alpha}=\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\left(1+\frac{z}{\alpha+\pi}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{\alpha+2n\pi}\right)\left(1-\frac{z}{(2n-1)\pi-\alpha}\right)e^{\frac{z}{n\pi}},$$

$$\frac{\cos z-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{2n\pi+\alpha}\right)\left(1-\frac{z}{2n\pi-\alpha}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}.$$

Преобразовать эти произведения в произведение первичных множителей или в произведения, не содержащие более показательных множителей, как, например,

$$\cos z=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cdots$$

4. Вывести формулы

$$\operatorname{tg} z=2z\left[\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}-z^2}+\frac{1}{\frac{9\pi^2}{4}-z^2}+\cdots+\frac{1}{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}-z^2}+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}-2z\left[\frac{1}{z^2-\pi^2}-\frac{1}{z^2-4\pi^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}+\cdots\right].$$

Вывести аналогичные формулы для $\frac{1}{\sin z-\sin a}$, $\frac{1}{\cos z-\cos a}$.

5. Вывести формулу

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=1-\frac{z^2}{1}+\frac{z^2(z^2-1)}{(1.2)^2}-\frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)}{(1.2.3)^2}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{z^2(z^2-1)\ldots(z^2-n^2)}{[1.2\ldots(n+1)]^2}+\ldots$$

6. Разложить на простые элементы функций $\frac{1}{\wp' u}$, $\frac{1}{\wp'^2 u}$.

7. Если $g_2=0$, то

$$\wp(\alpha u;\,0,\,g_3)=\alpha\wp(u;\,0,\,g_3),\quad \wp'(\alpha u;\,0,\,g_3)=\wp'(u;\,0,\,g_3),$$

где α — корень кубичный из единицы. Вывести отсюда разложение на простые элементы функции $\frac{1}{\wp' u-\wp' v}$, когда $g_2=0$.

8. Даны интегралы

$$\int\frac{ax+b}{(x-1)\sqrt{x^3-1}}\,dx,\quad \int\frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}}\,dx,$$
$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-x}},\quad \int\frac{ax^2+b}{\sqrt{(1-x^2)(1-ax^2)}}\,dx;$$

выразить переменное x и один из этих интегралов через трансцендентные функции $\wp$, ζ, σ.

9. Вывести формулу разложения, данную Эрмитом (§ 335), приравнивая нулю сумму вычетов функции $F(z)[\zeta(x-z)-\zeta(x_0-z)]$, заключающихся в параллелограмме периодов, где $F(x)$—эллиптическая функция, и x, x_0 рассматриваются, как постоянные.

10. Вывести из формулы (60) соотношение $\eta=-\frac{\theta'''(0)}{12\omega\theta'(0)}$. [Заметить, что ряд для σu не содержит члена с u^3.]

11*. Выразить через эллиптические функции параметра координаты x и y точек кривых:

$$y^3=A[(x-a)(x-b)(x-c)]^2,\quad y^3=A[(x-a)(x-b)]^2,$$
$$y^4=A(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3,\quad y^4=A(x-a)^2(x-b)^3,$$
$$y^4=A(x-a)^3(x-b)^3,$$
$$y^6=A(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5,\quad y^6=A(x-a)^3(x-b)^4,$$
$$y^6=A(x-a)^3(x-b)^5,\quad y^6=A(x-a)^4(x-b)^5,$$
$$y^3+(lx^2+mx+n)y^2+A[(x-a)(x-b)(x-c)]^2=0,$$
$$y^4+Axy^3+x^3\left(Bx+\frac{3^3}{4^4}\,\frac{A^4}{4B}\right)^2=0,\quad y^4+Axy^3+x^2\left(Bx^2+\frac{3^3}{4^4}\,\frac{A^4}{4B}\right)^2=0,$$
$$y^4+Axy^3+\left(Bx^4+\frac{3^3}{4^4}\,\frac{A^4}{4B}\right)^2=0,\quad y^5+Axy^4+x^4\left(Bx-\frac{4^4}{5^5}\,\frac{A^5}{4B}\right)^2=0,$$
$$y^5+Axy^4+\left(Bx^5-\frac{4^4}{5^5}\,\frac{A^4}{4B}\right)^2=0.$$

Переменный параметр равен до постоянного интегралу $\int\frac{dx}{y}$.

[Брио и Буке (Briot et Bouquet), Théorie des fonctions doublement périodiques, 2-е издание, стр. 388—412.]

ГЛАВА XVI.

Аналитическое продолжение.

I.—Определение аналитической функции одним из ее элементов.

345.—Первое понятие об аналитическом продолжении.—Пусть будет $f(z)$ функция, голоморфная в связной части A плоскости, ограниченной одной или несколькими линиями, замкнутыми или разомкнутыми; мы попрежнему употребляем слово линия в обычном элементарном смысле, как мы это делали до сих пор.

Если значение функции $f(z)$ и всех ее последовательных производных в какой-нибудь определенной точке a области A известны, то отсюда можно получить значение этой функции в какой-нибудь другой точке b той же области. Чтобы доказать это, соединим точки a и b каким-нибудь путем L, лежащим на всем своем протяжении в области A, например, многоугольною линиею или кривою произвольного вида. Пусть будет δ низшая граница расстояния точек пути L от точек контура области A, так что круг, описанный из любой точки линии L радиусом, равным δ, лежит всеми своими точками в области A. По предположению, нам известны значения функции $f(a)$ и ее последовательных производных $f'(a)$, $f''(a), \ldots$ в точке $z=a$. Следовательно, мы можем составить цельй ряд, представляющий функцию $f(z)$ в области точки a,

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots \quad (1)$$

Радиус сходимости этого ряда равен по крайней мере δ, но он может быть и больше. Если точка b лежит в круге сходимости C_0 предыдущего ряда, то достаточно заменить в этом ряде z через b, чтобы получить $f(b)$. Предположим, что точка b лежит вне круга C_0; пусть будет a_1 точка, в которой путь L пересекает круг C_0 [1]) (черт. 82).

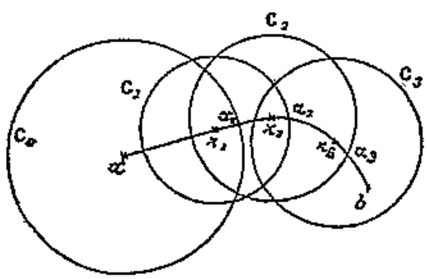
[1]) Так как значение функции $f(z)$ в точке b не зависит от пути L, пока этот путь не выходит из области A, то можно предположить, как это представлено на чертеже, что этот путь пересекает круг C_0 только в одной точке, а круги C_1, $C_2, \ldots$ не более, чем в двух точках. Это сводится, в сущности, к тому, что мы берем за точку a последнюю точку пересечения пути L и круга C_0, и то же самое для остальных точек.

Возьмем на этом пути внутри C_0 точку z_1, близкую к точке a_1, и такую, чтобы расстояние между точками z_1 и a_1 было меньше чем $\frac{\delta}{2}$. Пользуясь рядом (1) и теми, которые мы получим, дифференцируя ряд (1) любое число раз, мы можем вычислить значения функции $f(z)$ и всех ее производных $f(z_1), f'(z_1), \ldots, f^{(n)}(z_1), \ldots$ при $z = z_1$. Следовательно, коэффициенты ряда, представляющего функцию $f(z)$ в области точки z_1, известны, если известны коэффициенты первого ряда (1), и мы имеем в области точки z_1,

$$f(z) = f(z_1) + \frac{z - z_1}{1} f'(z_1) + \ldots + \frac{(z - z_1)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(z_1) + \ldots \qquad (2)$$

Радиус круга сходимости C_1 этого ряда не меньше, чем δ; следовательно, точка a_1 находится внутри этого круга; поэтому часть круга C_1 лежит вне круга C_0. Если точка b окажется внутри этого нового круга C_1, то достаточно положить $z = b$ в ряде (2), чтобы иметь значение $f(b)$. Предположим, что точка b находится и вне круга C_1; пусть будет a_2 точка, в которой путь $z_1 b$ пересекает этот круг. Возьмем на пути L внутри круга C_1 точку z_2, такую, чтобы расстояние между точками z_2 и a_2 было меньше, чем $\frac{\delta}{2}$. Пользуясь рядом (2) и теми рядами, которые получим, дифференцируя ряд (2) любое число раз, мы можем вычислить значение функции $f(z)$ и ее производных $f(z_2), f'(z_2), f''(z_2), \ldots$ в точке z_2. Следовательно, мы можем составить новый ряд

Черт. 82.



$$f(z) = f(z_2) + \frac{z - z_2}{1} f'(z_2) + \ldots + \frac{(z - z_2)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(z_2) + \ldots, \qquad (3)$$

представляющий функцию $f(z)$ в новом круге C_2, радиус которого равен или больше, чем δ. Если точка b окажется в этом круге C_2, то мы заменим в предыдущем равенстве (3) переменное z через b; если же нет, то мы будем применять тот же прием далее. После конечного числа действий мы непременно получим круг, содержащий внутри себя точку b; на чертеже b лежит внутри круга C_3. В самом деле, всегда можно выбрать точки $z_1, z_2, z_3, \ldots$ таким образом, чтобы расстояние между двумя последовательными точками было больше, чем $\frac{\delta}{2}$; с другой стороны, пусть будет S длина пути L. Длина многоугольной линии $az_1z_2\ldots z_{p-1}z_p$, b всегда меньше, чём длина кривой S; следовательно, мы имеем $p\frac{\delta}{2}+|z_p-b|<S$. Пусть будет p такое целое число, чтобы было $\left(\frac{p}{2}+1\right)\delta>S$. Из этого неравенства следует, что после не более, чем p операций, мы придем в точку z_p пути L, расстояние которой от точки b меньше, чем δ; точка b окажется внутри круга сходимости C_p целого ряда, представляющего функцию $f(z)$ в области точки z_p, и достаточно заменить в этом ряде z через b, чтобы иметь $f(b)$. Таким же образом мы можем вычислить и все производные $f'(b), f''(b),\ldots$

Из этого рассуждения следует, что возможно, по крайней мере теоретически, вычислить значения функции, голоморфной в области A, и всех ее производных в любой точке этой области, если известна последовательность значений

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ldots,\ f^{(n)}(a),\ldots \tag{4}$$

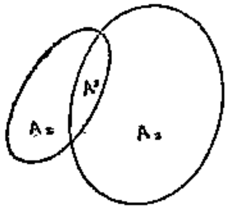
функции и ее производных в определенной точке a той же области. Отсюда следует, что всякая функция, голоморфная в области A, вполне определена во всей этой области, если она известна в сколь угодно малой области, окружающей любую точку a области A, и даже если она известна вдоль сколь угодно малой дуги кривой, ведущей в точку a. В самом деле, если функция $f(z)$ определена вдоль дуги кривой, то определена также и ее производная $f'(z)$, так как значение $f'(z_1)$ в какой-нибудь точке этой дуги равно пределу отношения $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$, когда точка z_2 приближается к точке z_1, оставаясь на рассматриваемой дуге; если производная $f'(z)$ известна, то отсюда получим $f''(z)$, потом $f'''(z)$ и т. д. Следовательно, все последовательные производные функции $f(z)$ определены при $z=a$. Для краткости мы будем говорить, что, зная числовые значения всех членов последовательности (4), мы знаем элемент функции $f(z)$. Тогда полученный результат можно выразить следующим образом: Функция, голоморфная в области A, вполне определена, если известен какой-нибудь ее элемент. Можно также сказать, что если две функции, голоморфные в одной и той же области, имеют общий элемент, то они тождественны.

Для определенности мы предположили, что функция $f(z)$ голоморфна; но рассуждение можно распространить и на любую аналитическую функцию, если только путь L, по которому мы перемещаем переменное при переходе из точки a в точку b, не проходит ни через одну из особых точек функции. Для этого достаточно, как мы уже видели (§ 293) разбить этот путь на несколько частей таким образом, чтобы каждая часть пути заключалась в замкнутом контуре, внутри которого рассматриваемая ветвь функции $f(z)$ голоморфна. Достаточно, по крайней мере теоретически, знать начальный элемент и путь, описываемый переменным, чтобы найти конечный элемент, т. е. числовые значения всех членов последовательности такого же вида.

$$f(b),\ f'(b), \ldots,\ f^{(n)}(b), \ldots \tag{5}$$

346. Другое определение аналитических функций.—Аналитические функции, которыми мы занимались до сих пор, определялись выражениями, пользуясь которыми можно было вычислять эти функции при всяком значении переменного, заключающемся в области, в которой функция изучалась. На основании предыдущего теперь мы знаем, что можно определить значение аналитической функции для любого значения переменного, если известен только один элемент функции. Но чтобы с должною полнотою изложить теорию аналитических функций с этой новой точки зрения, надо прибавить к определению аналитических функций, данному Коши, новое условие, которое я считаю полезным здесь отчетливо выставить.

Черт. 83.



Пусть будут $f_1(z)$, $f_2(z)$ функции, голоморфные соответственно в двух областях A_1, A_2, имеющих одну общую часть A' (черт. 83). Если в общей части A' мы имеем $f_2(z)=f_1(z)$, что будет иметь место, если эти две функции имеют в части A' хотя бы только один общий элемент, то мы будем принимать, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ образуют одну голоморфную функцию $F(z)$, определяемую в области A_1+A_2 равенствами $F(z)=f_1(z)$ в A_1, и $F(z)=f_2(z)$ в A_2. Мы будем говорить также, что $f_2(z)$ есть аналитическое продолжение в область A_2-A' голоморфной функции $f_1(z)$, которая, по предположению, определена только в области A_1. Очевидно, что аналитическое продолжение функции $f_1(z)$ в область A_2, лежащую вне области A_1, возможно только одним способом [1]).

[1]) Чтобы доказать, что предыдущее условие отлично от определения аналитических функций, достаточно заметить, что из него непосредственно вытекает такое следствие: если функция $f(z)$ голоморфна в области A, то всякая другая функция $f_1(z)$, совпадающая с $f(z)$ в части области A, тождественна с $f(z)$ во всей области A. Между тем, рассмотрим функцию $F(z)$, определяемую следующим образом при всех значениях комплексного переменного z.

$$F(z)=\sin z, \text{ если } z \neq \frac{\pi}{2};\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность действительных или мнимых чисел

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{6}$$

удовлетворяющих только одному условию, чтобы ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{7}$$

был сходящимся при каком-нибудь значении переменного z, отличном от нуля. (Мы принимаем $z=0$ за начальное значение переменного, что не стесняет общности.) Следовательно, по предположению ряд (7) имеет круг сходимости C_0, радиус которого R не равен нулю. Если R бесконечно велик, то этот ряд — сходящийся при всяком значении переменного z и представляет целую функцию переменного. Если радиус R имеет конечное значение, отличное от нуля, то сумма ряда (7) есть функция $f(z)$, голоморфная внутри круга C_0. Но так как нам известна только последовательность коэффициентов (6), то мы ничего не знаем заранее о характере этой функции вне круга C_0. Мы не знаем, можно ли присоединить к кругу C_0 соседнюю область, образующую с кругом связную площадь A, такую, чтобы в A существовала голоморфная функция, совпадающая с $f(z)$ внутри C_0. Пользуясь методом предыдущего параграфа, мы можем узнать, имеет ли это место. Возьмем в круге C_0 точку a, отличную от начала координат; пользуясь рядом (7) и рядами, которые получим, дифференцируя почленно ряд (7), мы можем вычислить элемент функции $f(z)$, соответствующий точке a, и, следовательно, составить целый ряд

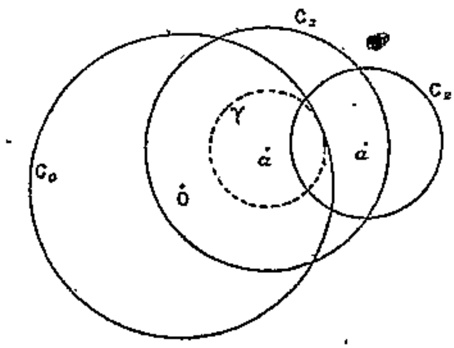
$$f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots, \tag{8}$$

Как ни странным кажется это условие, оно нисколько не противоречит прежнему определению аналитических функций. Функция $F(z)$ определенная таким образом голоморфна при всяком значении переменного z, кроме $z=\frac{\pi}{2}$ которое есть особая точка особого рода; но свойства этой функции были бы в противоречии с только что принятым условием, так как функции $F(z)$ и $\sin z$ были бы тождественны при всех значениях z, кроме $z=\frac{\pi}{2}$, которое было бы особою точкою только для одной из них.

Вейерштрасс в Германии и Мерей (Méray) во Франции развили теорию аналитических функций, основываясь исключительно на свойствах целых рядов; должно отметить, что их изыскания вполне независимы между собою. Теория Мерей изложена в его большой работе: Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale. Ниже мы покажем, как можно постепенно определить аналитическую функцию, если известен один ее элемент, но предполагая по прежнему известными теоремы Коши о голоморфных функциях.

представляющий функцию $f(z)$ в области точки a. Этот ряд—наверное сходящийся в круге с центром в точке a и с радиусом, равным $R-|a|$ (§ 270), но он может быть сходящимся в бо̀льшем круге, радиус которого не может однако превзойти $R+|a|$, так как, если бы он был сходящимся в круге с радиусом, равным $R+|a|+\delta$, то отсюда следовало бы, что ряд (7) — сходящийся в круге, описанном из начала координат радиусом, равным $R+\delta$, что̀ противно предположению. Предположим сначала, что радиус круга сходимости ряда (z) всегда равен $R-|a|$, где бы в круге C_0 ни была взята точка a. В этом случае совсем нельзя аналитически продолжить функцию $f(z)$ вне круга, по крайней мере, если пользоваться только целыми рядами.

Черт. 84.



Мы можем утверждать, что не существует голоморфной функции $F(z)$, определенной в области A плоскости, бо̀льшей чем круг C_0, и совпадающей с $f(z)$ в круге C_0, так как в противном случае, мы могли бы, как видели, пользуясь методом аналитического продолжения определить значение этой функции в точке, лежащей вне круга C_0. В этом случае часть плоскости, лежащая вне круга C_0, называется **пустым** (**лакунарным**) **пространством** для функции $f(z)$. Несколько ниже мы увидим этому примеры.

Предположим теперь, что при соответственном выборе точки a в круге C_0, мы найдем, что круг сходимости C_1 ряда (8) имеет радиус бо̀льший, чем $R-|a|$. Этот круг C_1 имеет часть, расположенную вне C_0 (черт. 84), и сумма ряда (8) есть функция $f_1(z)$, голоморфная в круге C_1. В круге γ с центром в точке a, касающемся изнутри круга C_0, мы имеем $f_1(z)=f(z)$ (§ 270); следовательно, это равенство имеет место во всей области, общей обоим кругам C_0, C_1. Пользуясь рядом (8), мы можем аналитически продолжить функцию $f(z)$ в часть круга C_1, лежащую вне круга C_0. Пусть будет a' точка, взятая в этой области; поступая, как выше, мы составим новый целый ряд, расположенный по степеням $z-a'$, сходящийся в некотором круге C_2. Если этот круг C_2 не лежит всеми своими точками в круге C_1, то новый ряд даст возможность аналитически продолжить функцию $f(z)$ в более широкую область и т. д. Понятно, что таким образом можно постепенно расширить область существования функции $f(z)$, которая была определена сначала только внутри круга C_0.

Ясно, что предыдущие операции можно выполнять безконечно различными способами. Чтобы в них разобраться, надо точно определить путь, проходимый переменным. Предположим, что можно получить, как это изложено выше, аналитическое продолжение функции, определяемой рядом (7), вдоль некоторого пути L. Каждая точка x пути L есть центр круга с радиусом r, внутри которого функция представляется сходящимся целым рядом, расположенным по степеням разности $z-x$. Радиус r этого круга меняется непрерывно вместе с x. В самом деле, пусть будут x и x' две близкие между собою точки пути L, а r и r'—соответствующие радиусы. Если x' настолько близко к x, что $|x'-x|<r$, то, как было только что указано, радиус r' заключается между $r-|x'-x|$ и $r+|x'-x|$. Следовательно, разность $r'-r$ стремится к нулю вместе с $|x'-x|$. Пусть будет теперь C'_0 круг, описанный из начала координат радиусом, равным $\frac{R}{2}$, и a какая-нибудь точка окружности C'_0; радиус сходимости ряда (8) не меньше $\frac{R}{2}$, но он может быть и больше. Так как этот радиус непрерывно изменяется вместе с положением точки a, то, следовательно, для какой-нибудь точки окружности C'_0 он проходит через наименьшее значение $\frac{R}{2}+r$. Не может быть $r>0$. В самом деле, если бы r было положительным, то существовала бы функция $F(z)$, голоморфная в круге, описанном из начала координат радиусом, равным $R+r$, и совпадающая с $f(z)$ внутри круга C_0. При значении переменного z, модуль которого заключается между R и $R+r$, функция $F(z)$ была бы равна сумме ряда вида (8), где a есть такая точка круга C'_0, что $|z-a|<\frac{R}{2}+r$. Но тогда, по теореме Коши, функция $F(z)$ была бы равна сумме целого ряда, сходящегося в круге с радиусом, равным $R+\frac{r}{2}$, и этот ряд должен был бы быть тождественным с рядом (7), что невозможно.

Следовательно, на окружности C'_0 есть, по крайней мере, одна точка a, для которой радиус круга сходимости ряда (8) равен $\frac{R}{2}$, и этот круг касается изнутри круга C_0 в точке a, в которой радиус Oa пересекает этот круг. Точка a есть **особая** точка функции $f(z)$, лежащая на окружности C_0. Как бы ни был мал радиус круга c, описанного из точки a, не может существовать голоморфной функции, которая была тождественна с функцией $f(z)$ в части общей обоим кругам C_0 и c. Ясно также, что круг сходимости ряда (8) с центром в любой точке радиуса Oa, касается круга C_0 изнутри в точке a [1]).

Рассмотрим теперь какой-нибудь путь L, выходящий из начала координат и приводящий в какую-нибудь точку Z, лежащую вне круга C_0; предположим, что переменное описывает этот путь, перемещаясь постоянно в направлении от O к Z. Пусть будет a_1 точка, в которой переменное выходит из круга; если эта точка a_1 есть особая точка, то итти по пути L за эту точку невозможно. Предположим, что a_1 не есть особая точка; тогда можно составить целый ряд, расположенный по степеням разности $z-a_1$ и сходящийся в некотором круге C_1 с центром в точке a_1, сумма которого совпадает с $f(z)$ в части, общей обоим кругам C_0 и C_1. Чтобы вычислить $f(a_1)$, $f'(a_1), \ldots$, можно взять, например, промежуточную точку, лежащую на радиусе Oa_1. Пользуясь суммою второго ряда, мы можем аналитически продолжить функцию $f(z)$ вдоль пути L, начиная от точки a_1, пока переменное z не выйдет из круга C_1. В частности, если весь путь, начиная от точки a_1, лежит внутри круга C_1, то этот ряд даст нам значение функции в точке Z. Если путь выходит из круга C_1 в точке a_2, то мы составим другой целый ряд, сходящийся в круге C_2' с центром в точке a_2 и т. д. Предположим сначала, что после конечного числа операций мы придем к кругу C_p с центром в точке a_p, содержащему всю оставшуюся часть пути после точки a_p, и, в частности, точку Z. Достаточно будет заменить z через Z в последнем составленном ряде и в тех рядах, которые получим, дифференцируя

---

[1]) Если все коэффициенты a_n ряда (7) действительны и положительны, то точка $z=R$ есть непременно особая точка на окружности C_0. В самом деле, если бы это было не так, то целый ряд

$$f\left(\frac{R}{2}\right)+\left(z-\frac{R}{2}\right)f'\left(\frac{R}{2}\right)+\ldots+\frac{\left(z-\frac{R}{2}\right)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)+\ldots,$$

представляющий функции $f(z)$ в области точки $z=\frac{R}{2}$, имел бы радиус сходимости больший, чем $\frac{R}{2}$. Тем более это имело бы место и для ряда

$$f\left(\frac{Re^{i\omega}}{2}\right)+\left(z-\frac{Re^{i\omega}}{2}\right)f'\left(\frac{Re^{i\omega}}{2}\right)+\ldots,$$

каково бы ни было значение аргумента ω, так как очевидно, что если все коэффициенты a_n положительны, то

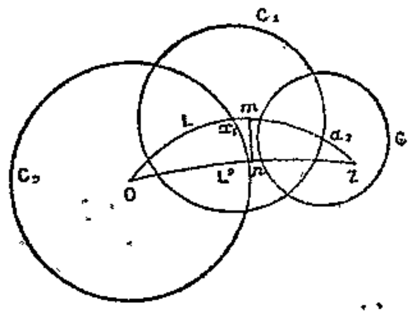
$$\left|f^{(n)}\left(\frac{Re^{i\omega}}{2}\right)\right|\leq f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right).$$

Следовательно, minimum радиуса сходимости ряда (8), когда a описывает окружность C_0, было бы больше, чем $\frac{R}{2}$.

первый ряд почленно, чтобы иметь значения $f(Z)$, $f'(Z)$, $f''(Z), \ldots$, с которыми мы приходим в точку Z, т.-е. иметь конечный элемент функции.

Ясно, что мы придем в любую точку пути L с вполне определенными значениями для функции и всех ее производных. Заметим также, что можно было бы заменить круги $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_p$ последовательностью кругов, определенных таким же образом, с центрами в любых точках $z_1, z_2, \ldots, z_p$ пути L; надо только, чтобы круг с центром в точке z_i содержал часть пути L, заключающуюся между точками z_i и z_{i+1}. Можно также несколько изменять путь L, сохраняя те же концы; при этом конечные значения функций $f(z), f'(z), f''(z), \ldots$ не изменятся. В самом деле, круги $C_0, C_1, \ldots, C_p$ покрывают некоторую часть плоскости, образующую род полосы, в которой лежит путь L; можно заменить путь L всяким другим путем L', идущим из точки z_0 в точку Z и расположенным в той же полосе. Предположим, для определенности, что мы должны были воспользоваться тремя последовательными кругами C_0, C_1, C_2 (черт. 85). Пусть будет L' другой путь, лежащий в полосе, образуемой этими тремя кругами; соединим между собою точки m и n. Если мы идем из O в m сначала по пути Oa_1m, а потом по пути Onm, то ясно, что мы придем в m с одним и тем же элементом, так как в области, образуемой кругами C_0 и C_1, функция голоморфна. Точно так же, если мы идем из m в Z по пути ma_2Z или по пути mnZ, то в обоих случаях мы придем в точку Z с одним и тем же элементом. Следовательно, путь L равносилен пути $OnmnZ$, т.-е. пути L'. Способ доказательства останется тот же самый, каково бы ни было число последовательных кругов. В частности, всегда можно заменить любой путь ломаною линиею [1]).

Черт. 85.

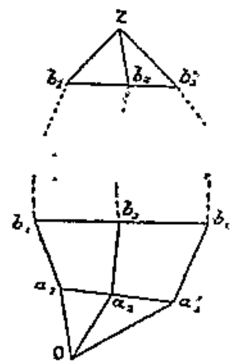


347. Особые точки. — Применяя предыдущий прием, мы можем встретиться с таким случаем, когда нельзя найти круга, содержащего всю оставшуюся часть пути L, как бы далеко мы ни продолжали операций; так будет, если a_p есть особая точка, лежащая на окружности C_{p-1}, так как здесь мы должны будем остановиться. Если операцию можно продолжать неограниченно, и мы никогда не придем к кругу,

[1]) Рассуждение должно быть проведено несколько подробнее, если путь L имеет двойные точки, так как в этом случае полоса, образуемая последовательными кругами, может отчасти покрывать сама себя. Впрочем, здесь по существу нет никаких действительных затруднений.

содержащему всю оставшуюся часть пути L, то точки $a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \ldots$ стремятся к некоторой предельной точке λ пути L, которою может быть или сама точка Z, или точка, лежащая между O и Z. Точка λ есть также особая точка, и нельзя вести аналитического продолжения функции $f(z)$ вдоль пути L за точку λ. Но если λ отлично от Z, то отсюда не следует, что сама точка Z есть особая точка, и что нельзя притти из O в Z другим путем. Рассмотрим, например, функции $\sqrt{1+z}$ или $\mathrm{Log}(1+z)$; здесь нельзя идти из начала координат в точку $z=-2$ вдоль действительной оси, так как мы не могли бы перейти особой точки $z=-1$. Но если мы будем перемещать переменное z по пути, не проходящему через эту точку, то ясно, что мы придем в точку $z=-2$ после конечного числа операций, так как все последовательные круги пройдут через точку $z=-1$. Заметим, что предыдущее определение особых точек зависит от пути, проходимого переменным; точка λ может быть особою точкою для определенного пути, и не быть таковою для другого пути, если функция имеет несколько различных ветвей.

Черт. 86.



Если два пути L_1, L'_1, соединяющие начало координат с точкою Z, приводят к различным элементам в точке Z, то существует по крайней мере одна особая точка внутри площади, которая была бы покрыта одним из путей, например, L_1, если бы мы непрерывно деформировали его, сохраняя неподвижными его конечные точки, так, чтобы он пришел в совпадение с L'_1. Предположим, что всегда можно сделать, что оба пути L_1, L'_1 суть ломаные линии с одинаковым числом сторон $Oa_1b_1c_1\ldots l_1Z$ и $Oa'_1b'_1\ldots l'_1Z$ (черт. 86). Пусть будут a_2, b_2, $c_2, \ldots, l_2$ средины отрезков $a_1a'_1$, $b_1b'_1, \ldots, l_1l'_1$. Путь L_2, представляющий ломаную линию $Oa_2b_2\ldots l_2Z$ не может быть равносилен одновременно обоим путям L_1, L'_1, если он не содержит особой точки. Если этот путь L_2 содержит особую точку, то теорема доказана. Если же пути L_1 и L_2 не равносильны друг другу, то тем же приемом мы найдем отсюда новый путь L_3, содержащийся между L_1 и L_2. Продолжая эти операции, мы или придем к пути L_p, содержащему особую точку, или же получим неограниченную последовательность путей $L_1, L_2, \ldots$. Эти пути стремятся к некоторому предельному пути Λ, так как точки $a_1, a_2, a_3, \ldots$ стремятся к некоторой предельной точке, лежащей между a_1 и a'_1, и т. д. для других точек. Этот предельный путь Λ необходимо должен содержать особую точку, так как можно провести по обе стороны Λ два пути, бесконечно близких к Λ и приводящих к различным элементам для функции в точке Z; этого не могло бы быть, если бы Λ не содержало тогда особой точки, так как пути, бесконечно близкие к Λ, должны были бы быть равносильны этому пути Λ.

Предыдущее определение особых точек чисто отрицательное и не дает никаких указаний на характер функции вблизи особой точки. Ни одно предположение относительно этих особых точек или их распределения в плоскости не может быть заранее отброшено, если только оно не содержит противоречия. Только изучая аналитическое продолжение, мы можем выяснить различные возможные здесь обстоятельства [1]).

348. Общая задача.—Из предыдущего следует, что аналитическая функция по существу определена, если известен один ее элемент, т. е. если известна такая последовательность коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, что ряд

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

имеет радиус сходимости, отличный от нуля. Если эти коэффициенты известны, то возникает следующая общая задача: найти значение функции в какой-нибудь точке β плоскости, когда переменное описывает определенный путь, идущий из точки a в точку β. Можно также искать особые точки аналитической функции; ясно впрочем, что обе задачи тесно связаны друг с другом. Самый метод аналитического продолжения дает решение, по крайней мере теоретическое, этих обеих задач, но он применим только в весьма частных случаях. Например, так как нам неизвестно заранее число промежуточных рядов, которые надо ввести, чтобы перейти от точки a в точку β, и так как суммы этих рядов можно вычислить лишь с некоторым приближением, то невозможно оценить степень точности полученного конечного приближения. Поэтому необходимо искать более простые решения, по крайней мере в частных случаях. Однако только за последнее время эта задача явилась предметом ряда работ, которые привели к важ-

---

[1]) Пусть будет $f(x)$ аналитическая функция, голоморфная вдоль отрезка ab действительной оси. В области каждой точки α этого отрезка функция может быть представлена целым рядом, радиус сходимости которого $R(\alpha)$ не равен нулю. Этот радиус R, будучи непрерывною функциею от α имеет положительный minimum r. Пусть будут ρ положительное число, меньшее числа r, и E—область плоскости, описываемая кругом с радиусом, равным ρ, когда центр этого круга перемещается по отрезку ab. Функция $f(x)$ голоморфна в области E и на ее контуре. Пусть будет M верхняя граница ее модуля; из общих формул (14) (§ 295) следует, что во всякой точке x отрезка ab мы имеем неравенство (см. т. I, § 181).

$$\left|f^n(x)\right| < \frac{Mn!}{\rho^n}$$

ным результатам [1]). Если эти исследования так недавни, то это математиками, не только трудностью задачи, как она ни велика. В самом деле, функции, которые последовательно изучались математиками, не выбирались ими произвольно; изучение этих функций вызывалось характером самих задач, которые им представлялись. Между тем, за исключением небольшого числа трансцендентных функций, все эти функции, после элементарных явных функций, определялись или как корни уравнений, не допускающих формального решения, или как интегралы алгебраических дифференциальных уравнений. Таким образом понятно, что изучение неявных функций и функций, определяемых дифференциальными уравнениями, должно было логически предшествовать изучению общей задачи, по отношению к которой эти две задачи являются в сущности лишь весьма частными случаями.

Нетрудно показать, как изучение алгебраических дифференциальных уравнений связано с теорией аналитического продолжения. Рассмотрим, для определенности, два целых ряда $y(x)$, $z(x)$, расположенных по положительным степеням переменного x и сходящихся в круге C, описанном из точки $x=0$ радиусом, равным R. С другой стороны, пусть будет $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}, z, z', z'', \ldots, z^{(q)})$ целый многочлен относительно $x, y, y', \ldots, y^{(p)}, z, z', \ldots, z^{(q)}$. Заменим в этом многочлене y и z предыдущими рядами, $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ — производными от ряда $y(x)$, и $z', z'', \ldots, z^{(q)}$ — производными от ряда $z(x)$; в результате мы получим тоже целый ряд, сходящийся в круге C. Если все коэффициенты этого ряда равны нулю, то голоморфные функции $y(x)$, $z(x)$ удовлетворяют в круге C соотношению

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}, z, z', \ldots, z^{(q)}) = 0. \tag{9}$$

Докажем теперь, что функции, которые мы получим, продолжая аналитически ряды $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяют тому же соотношению во всей области их существования. Точнее, если мы будем перемещать переменное x по пути L, выходящему из начала координат, пересекающему окружность C и приходящему в некоторую точку a плоскости, лежащую вне круга C, и если можно аналитически продолжить оба ряда $y(x)$, $z(x)$ вдоль этого пути, не встретив ни одной особой точки, то целые ряды $Y(x-a)$, $Z(x-a)$, с которыми мы придем в точку a, представляют в области этой точки две голоморфных функции, удовлетворяющие соотношению (9). В самом деле, пусть будет x_1 какая-нибудь точка пути L, лежащая внутри круга C и близкая к точке, в кото-

[1]) За всем, что касается этого вопроса, я отсылаю читателя к превосходной работе Адамара (Hadamard): La série de Taylor et son prolongement analytique, 1901. Там приведены весьма подробные библиографические указания.

рой путь L пересекает окружность C. Из точки x_1, как из центра, можно описать круг C_1, часть которого лежит вне круга C; существуют два целых ряда $y(x-x_1)$, $z(x-x_1)$ — сходящихся в круг C_1, суммы которых тождественны с суммами рядов $y(x)$, $z(x)$ в части, общей обоим кругам C и C_1. Заменяя в F функции y и z этими двумя рядами, мы получим целый ряд $P(x-x_1)$, сходящийся в круге C_1. Но в части общей обоим кругам C и C_1 мы имеем $P(x-x_1)=0$; следовательно, все коэффициенты ряда $P(x-x_1)$ равны нулю, и оба новых ряда $y(x-x_1)$ и $z(x-x_1)$ удовлетворяют в круге C_1 соотношению (9). Продолжая то же рассуждение, мы видим, что соотношение $F=0$ будет всегда удовлетворяться аналитическими продолжениями обоих рядов $y(x)$ и $z(x)$, по какому бы пути мы ни перемещали переменное; таким образом, теорема доказана.

Таким образом, изучение функции, определяемой дифференциальным уравнением, есть, в сущности, лишь частный случай общей задачи об аналитическом продолжении. Но с другой стороны нетрудно понять, что знание частного соотношения между аналитическою функциею и некоторыми из ее производных, может в некоторых случаях облегчить решение задачи. Мы вернемся к этому вопросу при изучении теории дифференциальных уравнений.

II. — Пустые пространства. — Разрезы.

Изучение эллиптических модулярных функций дало Эрмиту первый пример аналитической функции, определенной только в части плоскости. Мы укажем весьма простой способ составления аналитических функций, имеющих пустым пространством любую область плоскости, при некоторых предположениях весьма общего характера относительно кривой, ограничивающей эту область.

349. Особые линии. Пустые пространства. — Докажем сначала предварительную теорему [1]).

Пусть будут $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ два ряда с произвольными членами, из которых второй абсолютно сходящийся и имеет все члены отличными от нуля. Пусть будет C окружность с центром в точке z_0, не содержащая внутри себя ни одной из точек a, и проходящая только через одну из этих точек: ряд

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{c_\nu}{a_\nu-z} \tag{10}$$

[1]) Пуанкаре (Poincaré), Acta Societatis Fennicae, т. XIII, 1881. — Гурса, Bulletin des Sciences mathématiques, 2-я серия, т. XI, стр. 109 и т. XVII, стр. 247.

представляет в круге C голоморфную функцию, которую можно разложить в целый ряд, расположенный по степеням $z-z_0$. Круг сходимости этого ряда есть как раз круг C.

Очевидно, что можно предположить, что $z_0=0$, так как, изменяя z в z_0+z', мы изменим a_ν в $a_\nu-z_0$, а c_ν не изменится. Предположим также, что $|a_1|=R$, где R обозначает радиус круга C, и $|a_i|>R$ при $i>1$. В круге C общий член $\frac{c_\nu}{a_\nu-z}$ можно разложить в целый ряд, и этот ряд имеет, как нетрудно видеть, усиливающую функцию $\frac{|c_\nu|}{R}\frac{1}{1-\frac{z}{R}}$. Так как ряд $\Sigma|c_\nu|$ — сходящийся, то, на основании доказанного выше общего предложения (§ 271), функцию $F(z)$ можно разложить в круге C в целый ряд, и этот ряд можно получить, складывая почленно целые ряды, представляющие его различные члены. Следовательно, в круге C мы имеем

$$F(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_nz^n+\ldots,\qquad A_n=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{C_\nu}{a_\nu^{\,n+1}}\cdot \tag{10}$$

Возьмем такое цёлое число p, чтобы $\sum\limits_{\nu=p+1}^{+\infty}|c_\nu|$ было меньше, чем $\frac{1}{2}|c_1|$; это возможно, так как c_1 не равно нулю, и ряд $\Sigma|c_\nu|$ — сходящийся. Выбрав число p таким образом, мы можем положить $F(z)=F_1(z)+F_2(z)$, где

$$F_1(z)=\sum_{\nu=2}^{p}\frac{c_\nu}{a_\nu-z},\quad F_2(z)=\frac{c_1}{a_1-z}+\sum_{\nu=p+1}^{+\infty}\frac{c_\nu}{a_\nu-z}\cdot$$

$F_1(z)$ есть рациональная функция, все полюсы которой лежат вне круга C; следовательно, в круге C' с радиусом $R'>R$ ее можно разложить в целый ряд. Что касается $F_2(z)$, то мы имеем

$$F_2(z)=B_0+B_1z+\ldots+B_nz^n+\ldots, \tag{11}$$

где

$$B_n=\frac{c_1}{a_1^{\,n+1}}+\frac{c_{p+1}}{(a_{p+1})^{n+1}}+\frac{c_{p+2}}{(a_{p+2})^{n+1}}+\ldots$$

Этот коэффициент можно представить иначе в виде

$$B_n=\frac{1}{a_1^{\,n+1}}\left[c_1+\sum_{\nu=p+1}^{+\infty}c_\nu\left(\frac{a_1}{a_\nu}\right)^{n+1}\right]\cdot$$

Но, по предположению, $\left|\frac{a_1}{a_\nu}\right|<1$, и модуль суммы

$$\sum_{\nu=p+1}^{+\infty}c_\nu\left(\frac{a_1}{a_\nu}\right)^{n+1}$$

вследствие указанного выше выбора числа p меньше, чем $\frac{1}{2}|c_1|$. Следовательно, модуль коэффициента B_n заключается между $\frac{1}{2R^{n+1}}|c_1|$ и $\frac{3}{2R^{n+1}}|c_1|$, и модуль общего члена ряда (11) заключается между $\frac{|c_1|}{2R}\left|\frac{z}{R}\right|^n$ и $\frac{3|c_1|}{2R}\left|\frac{z}{R}\right|^n$; следовательно, этот ряд сходящийся, если $|z|<R$. Очевидно, что складывая ряд $F_2(z)$, сходящийся в круге с радиусом, равным R, с рядом $F_1(z)$, сходящимся в круге с радиусом, равным $R'>R$, мы получим ряд $F(z)$, у которого круг C с радиусом, равным R, будет кругом сходимости; таким образом, теорема доказана.

Пусть будет теперь L кривая, замкнутая или разомкнутая, имеющая в каждой точке определенный радиус кривизны. Предположим, что ряд $\Sigma|c_\nu|$ — абсолютно сходящийся, и точки последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ все лежат на кривой L и распределены на ней таким образом, что на каждой конечной дуге кривой L всегда есть бесконечное множество точек этой последовательности. Легко видеть, что ряд

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{c_\nu}{a_\nu-z} \tag{12}$$

— сходящийся во всякой точке z_0, не лежащей на кривой L, и представляет функцию, голоморфную в области этой точки; чтобы в этом убедиться, достаточно было бы повторить первую часть предыдущего доказательства, взяв за круг C любой круг с центром в точке z_0, не содержащий ни одной из точек a_i. Если кривая L незамкнутая и не имеет двойных точек, то ряд (12) представляет функцию, голоморфную во всей плоскости, кроме точек кривой L. Мы еще не можем заключить отсюда, что кривая L есть особая линия; для этого необходимо, кроме того, убедиться, что аналитическое продолжение функции $F(z)$ невозможно ни через какую часть линии L, как бы мала эта часть ни была. Для этого достаточно показать, что круг сходимости целого ряда, представляющего функцию $F(z)$ в области какой-нибудь точки z_0, не лежащей на L, никогда не может содержать дуги этой линии, как бы мала она ни была. В самом деле, предположим, что круг C с центром в точке z_0 содержит дугу $\alpha\beta$ линии L. Возьмем на этой дуге $\alpha\beta$ точку a_i и на нормали в a_i к этой дуге рассмотрим точку z' настолько близкую к точке a_i, чтобы круг C_i, описанный из точки z' радиусом, равным $|z'-a_i|$, весь лежал внутри круга C и не имел другой общей точки с дугою $\alpha\beta$, кроме самой точки a_i. На основании только что доказанной теоремы, круг C_i есть круг сходимости целого ряда, представляющего $F(z)$ в области точки z'; но это находится в противоречин с общими свойствами целых рядов, так как этот круг сходимости не может быть меньше круга с центром в точке z', касающегося изнутри круга C.

Если линия L — замкнутая, то ряд (12) представляет две функции, аналитически различные, из которых одна существует только в области A, лежащей внутри линии L, и для которой часть плоскости лежащая вне этой линии, есть пустое пространство; напротив, другая функция существует только вне линии L и имеет пустым пространством внутреннюю область. В этом случае линия L называется **существенным разрезом** для каждой из этих функций.

Если даны несколько линий, замкнутых или разомкнутых, $L_1, L_2, \ldots, L_p$, то указанным приемом можно составить ряды вида (12), каждый из которых имеет одну из этих линий существенным разрезом; сумма этих рядов имеет существенными разрезами все эти линии.

350. **Примеры.** Пусть будут AB прямолинейный отрезок, и α, β—аффиксы его концов A, B. Все точки $\gamma = \frac{m\alpha + n\beta}{m+n}$, где m и n целые положительные числа, изменяющиеся от 1 до $+\infty$, лежат на отрезке AB; на каждой конечной части этого отрезка всегда есть бесконечное множество точек γ, так как точка γ делит отрезок AB в отношении $\frac{m}{n}$. С другой стороны, пусть будет $C_{m,n}$ общий член абсолютно сходящегося двойного ряда. Двойной ряд

$$F(z) = \sum \frac{C_{m,n}}{\frac{m\alpha + n\beta}{m+n} - z}$$

представляет аналитическую функцию, имеющую отрезок AB существенным разрезом. В самом деле, этот двойной ряд можно преобразовать бесконечным множеством способов в простой ряд. Очевидно, что складывая несколько рядов этого вида можно составить аналитическую функцию, имеющую пустым пространством любой многоугольник.

Вот другой пример, где линия L есть окружность. Пусть будет α иррациональное положительное число, ν—положительное целое число. Положим

$$a = e^{2i\pi\alpha}, \quad a_\nu = a^\nu = e^{2i\pi\nu\alpha}.$$

Все точки a_ν различны и лежат на окружности C, описанной из начала координат радиусом, равным единице. Сверх того известно, что можно найти два таких целых числа m и n, чтобы разность $2\pi(n\alpha - m)$ по абсолютному значению была меньше любого заданного положительного числа ε. Следовательно, есть такие степени числа a, аргумент которых сколь угодно близок к нулю, и, следовательно, на всякой конечной дуге окружности всегда находится бесконечное множество точек a^ν. Положим далее $c_\nu = \frac{a^\nu}{2^\nu}$; по общей теореме, ряд

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{1 - \frac{z}{a^\nu}}$$

представляет функцию, голоморфную в круге C, имеющую пустым пространством всю часть плоскости, лежащую вне этого круга. Разлагая каждый член по степеням переменного z, мы получим для $F(z)$ разложение в целый ряд

$$F(z)=1+\frac{z}{2a-1}+\frac{z^2}{2a^2-1}+\ldots+\frac{z^n}{2a^n-1}+\ldots \tag{13}$$

Нетрудно убедиться непосредственно, что функция, представляемая этим целым рядом, не может быть аналитически продолжена за круг C. В самом деле, прибавляя ряд $\frac{1}{1-z}$, получим

$$F(z)+\frac{1}{1-z}=2+z\left(\frac{1}{2a-1}+1\right)+\ldots+z^n\left(\frac{1}{2a^n-1}+1\right)+\ldots=2F(az),$$

или

$$F(az)=\frac{1}{2}F(z)+\frac{1}{2}\frac{1}{1-z}.$$

Изменяя в этом соотношении z в az, потом в $a^2z,\ldots$, мы будем иметь общее соотношение

$$F(a^nz)=\frac{1}{2^n}F(z)+\frac{1}{2^n(1-z)}+\frac{1}{2^{n-1}(1-az)}+\ldots+\frac{1}{2(1-a^{n-1}z)};\tag{14}$$

отсюда видно, что разность $2^nF(a^nz)-F(z)$ есть рациональная функция $\varphi(z)$, имеющая n полюсов первого порядка $1, \frac{1}{a}, \ldots, \frac{1}{a^{n-1}}$.

Формула (14) доказана при условиях $|z|<1$, $|a|=1$. Если аргумент количества a соизмерим с π, то из формулы (14) следует, что $F(z)$ есть рациональная функция; чтобы в этом убедиться, достаточно взять для n такое целое число, чтобы было $a^n=1$. Если же аргумент количества a несоизмерим с π, то функция $F(z)$ не может быть голоморфною ни на какой конечной дуге AB окружности, как бы эта дуга ни была мала. В самом деле, пусть будут a^{-p} и a^{n-p} точки, лежащие на дуге AB $(n>p)$. Выбрав числа n и p таким образом, будем приближать z к a^{-p}; тогда a^nz будет стремиться к a^{n-p}, и обе функции $F(z)$ и $F(a^nz)$ должны были бы стремиться к конечным пределам. Но из соотношения (14) видно, что это невозможно, так как функция $\varphi(z)$ имеет полюс a^{-p}.

Как показал Адамар, аналогичный прием применим к ряду, рассмотренному Вейерштрассом,

$$F(z)=\sum b^n z^{a^n},\tag{15}$$

где a — положительное целое число, и b — постоянное, модуль которого меньше единицы. Этот ряд — сходящийся, если $|z|$ не превосходит единицы, и расходящийся, если $|z|>1$. Следовательно, круг C с радиусом, равным единице, есть круг сходимости. Окружность C есть существенный разрез функции $F(z)$. В самом деле, предположим, что на какой-нибудь [конечной дуге $\alpha\beta$ окружности нет ни одной особой точки этой функции. Заменим в $F(z)$ переменное z через $ze^{\frac{2ki\pi}{c^h}}$ где k и h — положительные целые числа, а c — делитель числа a; начиная с члена с указателем h, все члены ряда (15) останутся без изменения; значит разность $F(z)-F\left(ze^{\frac{2ki\pi}{c^h}}\right)$ есть многочлен. Следовательно, функция $F(z)$ не имела бы также особой точки на дуге $\alpha_k\beta_k$, которую получим, повернув дугу $\alpha\,\beta$ вокруг начала координат на угол $\frac{2k\pi}{c^h}$. Возьмем h настолько большим, чтобы $\frac{2\pi}{c^h}$ было меньше дуги $\alpha\beta$. Положим последовательно $k=1, 2, \ldots, c^h$; ясно, что дуги $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, ... вполне покроют окружность. Следовательно, функция $F(z)$ не имела бы ни одной особой точки на всей окружности, что невозможно (§ 346).

Этот пример представляет интересную особенность; ряд (15) абсолютно и равномерно сходящийся вдоль окружности C. Следовательно, он представляет на этой окружности непрерывную функцию аргумента θ [1]).

351. Особенности аналитических выражений. — Всякое аналитическое выражение, например, ряд, члены которого суть функции переменного z, или определенный интеграл, в который это переменное входит, как параметр, представляет, при некоторых условиях, функцию, голоморфную вблизи каждого значения переменного z, при котором она имеет смысл. Если множество этих значений переменного z вполне покрывает связную часть плоскости A, то рассматриваемое выражение представляет функцию, голоморфную в этой области A. Но если совокупность этих значений переменного z образует две или несколько различных о т д е л ь н ы х областей, то может случиться, что рассматриваемое аналитическое выражение представляет в этих различных областях совершенно различные функции. Мы уже встретили пример этого в § 300. В самом деле, мы видели, как можно составить ряд с рациональными членами, — сходящийся в двух криволинейных треугольниках PQR, $P'Q'R'$ (черт. 61), сумма которого равна голоморфной функции $f(z)$ в треугольнике PQR и ну-

---

[1]) Фредхольм (Fredholm) доказал также, что сумма ряда $\sum_{0}^{\infty} a^n z^{n^2}$, где a положительное количество меньшее единицы, не может быть продолжена за круг сходимости (Comptes rendus, 24 марта 1890). Этот пример приводит к следствию, которое стоит отметить. На окружности с радиусом, равным единице, ряд—сходящийся, и его сумма

$$F(\theta)=\Sigma\, a^n\,[\cos(n^2\theta)+i\,\sin(n^2\theta)]$$

есть непрерывная функция аргумента θ, имеющая бесконечное множество производных. Однако, эту функцию нельзя разложить в ряд Тэлора ни в одном промежутке как бы мал он ни был. В самом деле, предположим, что в промежутке $(\theta_0-\alpha,\ \theta_0+\alpha)$ мы имеем

$$F(\theta)=A_0+A_1(\theta-\theta_0)+\ldots+A_n(\theta-\theta_0)^n+\ldots$$

Ряд, стоящий в правой части, представляет функцию комплексного переменного θ, голоморфную в круге c, описанном радиусом, равным α, из точки θ_0. Соотношение $z=e^{\theta i}$ преобразует круг c в некоторую замкнутую область A плоскости переменного z, содержащую дугу γ окружности с радиусом, равным единице, заключающуюся между точками с аргументами $\theta_0-\alpha$ и $\theta_0+\alpha$. Следовательно, в этой площади A существовала бы голоморфная функция от z, совпадающая вдоль дуги γ с суммою ряда $\Sigma a^n z^{n^2}$, что невозможно, так как нельзя продолжить сумму этого ряда за круг.

лю в треугольнике $P'Q'R'$. Складывая два таких ряда, мы получим ряд с рациональными членами, сумма которого равна функции $f(z)$ в треугольнике PQR и другой совершенно произвольной голоморфной функции $\varphi(z)$ в треугольнике $P'Q'R'$. Так как эти две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ произвольны, то ясно, что сумма ряда в треугольнике $P'Q'R'$ не имеет, вообще, никакого отношения к аналитическому продолжению суммы этого ряда в треугольнике PQR.

Вот еще весьма простой пример, аналогичный примеру, указанному Шрёдером (Schröder) и Таннри (Tannery). Выражение $\frac{1-z^n}{1+z^n}$, где n неограниченно возрастающее положительное целое число, имеет пределом $+1$, если $|z|<1$, и -1, если $|z|>1$. Если $|z|=1$, то это выражение не имеет предела, кроме как при $z=1$. Но сумма n первых членов ряда

$$S(z)=\frac{1-z}{1+z}+\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}-\frac{1-z}{1+z}\right)+\ldots+\left(\frac{1-z^n}{1+z^n}-\frac{1-z^{n-1}}{1+z^{n-1}}\right)+\ldots$$

равна предыдущему выражению. Следовательно, этот ряд сходящийся если $|z|$ отлично от единицы; он представляет $+1$ внутри круга C, описанного из начала координат радиусом, равным единице, и -1 вне этого круга. Пусть будут теперь $f(z)$ и $\varphi(z)$ произвольные аналитические функции, например, целые функции; выражение

$$\psi(z)=\frac{1}{2}[f(z)+\varphi(z)]+\frac{1}{2}S(z)[f(z)-\varphi(z)]$$

равно $f(z)$ внутри C и $\varphi(z)$ вне C. Окружность C есть для этого выражения разрез, но он совершенно отличен от существенных разрезов, о которых говорилось выше. Функция, равная $\psi(z)$ внутри C, может быть аналитически продолжена вне этого круга, и точно также функция, равная $\psi(z)$ вне C, может быть аналитически продолжена внутрь C.

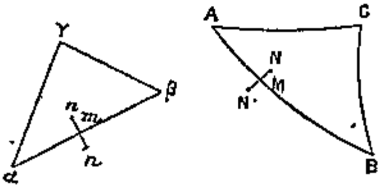
Аналогичные особенности имеют место для функций, представляемых определенными интегралами. Самый простой пример представляет интеграл Коши. Если $f(z)$ есть функция, голоморфная внутри некоторого замкнутого контура и на самом этом контуре, то интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{z-x}$ представляет $f(x)$, если точка x лежит внутри Γ, тот же интеграл равен нулю, если точка x лежит вне контура Γ, так как в этом случае функция $\frac{f(z)}{z-x}$ голоморфна внутри контура Γ; здесь также линия Γ есть несущественный разрез для определенного интеграла. Определенный интеграл $\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{z-x}{z}\right)dx$ имеет разрезом действительную ось; он равен $+2\pi i$ или $-2\pi i$ в зависимости от того, лежит ли точка x над этим разрезом или под ним (§ 307).

352. Формула Эрмита.—К тому же кругу идей примыкает интересный результат, принадлежащий Эрмиту [1]). Пусть будут $F(t, z)$, $G(t, z)$ голоморфные функции двух переменных t и z, например, многочлены или целые ряды, сходящиеся при всех значениях этих двух переменных. Определенный интеграл

$$\Phi(z)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{F(t,z)}{G(t,z)}\,dt, \tag{16}$$

взятый вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки α и β, представляет, как мы это докажем ниже (§ 357), функцию от z, голоморфную при всех значениях z, кроме тех значений, которые суть корни уравнения $G(t, z)=0$, где t есть аффикс какой-нибудь точки, взятой на отрезке $\alpha\beta$. Таким образом, это уравнение определяет конечное или бесконечное число линий, для которых интеграл $\Phi(z)$ перестает существовать. Пусть будет AB одна из этих линий, не имеющая двойных точек. Чтобы иметь дело с вполне определенным случаем, предположим, что когда t описывает отрезок $\alpha\beta$, один из корней уравнения $G(t, z)$ описывает дугу AB, а все остальные корни того же уравнения, если они существуют, остаются вне надлежащим образом выбранного замкнутого контура, окружающего дугу AB, так что между точками отрезка $\alpha\beta$ и точками дуги AB существует взаимно однозначное соответствие. Интеграл (16) не имеет смысла, если z приходит на дугу AB; вычислим разность значений функции $\Phi(z)$ в двух точках N, N', бесконечно-близких к точке M линии AB и лежащих по обе стороны этой линии. Пусть будут ζ, $\zeta+\varepsilon$, $\zeta+\varepsilon'$ соответственно аффиксы трех точек M, N, N'. В силу соотношения $G(t, z)=0$ этим трем точкам соответствуют на плоскости переменного t точка m, лежащая на дуге $\alpha\beta$, и две бесконечно-близких точки n, n', лежащих по обе стороны дуги $\alpha\beta$; пусть будут θ, $\theta+\eta$, $\theta+\eta'$ соответствующие этим точкам значения переменного t. Возьмем в области отрезка $\alpha\beta$ точку γ, настолько близкую к $\alpha\beta$, чтобы внутри треугольника $\alpha\beta\gamma$ (черт. 87) уравнение $G(t, \zeta+\varepsilon)$ не имело другого корня, кроме $t=\theta+\eta$. Следовательно, внутри треугольника $\alpha\beta\gamma$ функция $\dfrac{F(t,\zeta+\varepsilon)}{G(t,\zeta+\varepsilon)}$ имеет только один полюс $\theta+\eta$, и, на основании сделанных предположений, этот полюс—простой. Следовательно, применяя теорему Коши, мы имеем соотношение

Черт. 87.



$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{F(t,\zeta+\varepsilon)}{G(t,\zeta+\varepsilon)}\,dt+\int_{\beta}^{\gamma}\frac{F(t,\zeta+\varepsilon)}{G(t,\zeta+\varepsilon)}\,dt+\int_{\gamma}^{\alpha}\frac{F(t,\zeta+\varepsilon)}{G(t,\zeta+\varepsilon)}\,dt=2i\pi\,\frac{F(\theta+\eta,\zeta+\varepsilon)}{G'_t(\theta+\eta,\zeta+\varepsilon)}. \tag{17}$$

Оба интеграла $\int_{\beta}^{\gamma}$, $\int_{\gamma}^{\alpha}$ того же вида, как $\Phi(z)$; они представляют соответственно две функции $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, которые голоморфны, пока переменное не лежит на некоторых разрезах. Пусть будут AC и BC разрезы, соответствующие отрезкам $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ плоскости переменного t и бесконечно-близкие к разрезу AB интеграла $\Phi(z)$. Дадим теперь пере-

---

[1]) Эрмит (Hermite), Sur quelques points de la théorie des fonctions (Crelle's Journal, т. 91).

менному z значение $\zeta+\varepsilon'$; соответствующее значение переменного t есть $\theta+\eta'$, представляемое точкою n', и функция $\dfrac{F(t,\zeta+\varepsilon')}{G(t,\zeta+\varepsilon')}$ переменного t голоморфна внутри треугольника $\alpha\beta\gamma$. Следовательно, мы имеем соотношение

$$\int_\alpha^\beta \frac{F(t,\zeta+\varepsilon')}{G(t,\zeta+\varepsilon')}dt+\int_\beta^\gamma \frac{F(t,\zeta+\varepsilon')}{G(t,\zeta+\varepsilon')}dt+\int_\gamma^\alpha \frac{F(t,\zeta+\varepsilon')}{G(t,\zeta+\varepsilon')}dt=0; \tag{18}$$

вычитая почленно формулы (17) и (18), мы можем представить полученное соотношение в виде

$$\Phi(\zeta+\varepsilon)-\Phi(\zeta+\varepsilon')+[\Phi_1(\zeta+\varepsilon)-\Phi_1(\zeta+\varepsilon')]+[\Phi_2(\zeta+\varepsilon)-\Phi_2(\zeta+\varepsilon')]=$$
$$=2i\pi\frac{F(\theta+\eta,\zeta+\varepsilon)}{G'_t(\theta+\eta,\zeta+\varepsilon)}.$$

Но функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, не имея линию AB разрезом, голоморфны в области точки $z=\zeta$, и, приближая ε и ε' к нулю, мы получим в пределе разность значений $\Phi(z)$ в двух бесконечно-близких точках, лежащих по обе стороны линии AB. Этот результат можно представить сокращенно в виде

$$\Phi(N)-\Phi(N')=2i\pi\frac{F(\theta,\zeta)}{\dfrac{\partial G(\theta,\zeta)}{\partial\theta}}; \tag{19}$$

это—формула Эрмита. Мы видим, что она имеет весьма простую связь с теоремою Коши [1]). Из доказательства вполне ясно, как надо брать точки N и N'; точка $N(\zeta+\varepsilon)$ должна быть взята так, чтобы для наблюдателя, описывающего отрезок $\alpha\beta$, соответствующая точка $\theta+\eta$ оставалась слева.

Следует заметить, что линия AB не есть существенный разрез для функции $\Phi(z)$. На основании формулы (18) в области точки N' можно заменить $\Phi(z)$ через $-[\Phi_1(z)+\Phi_2(z)]$; но сумма $\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$ голоморфна в криволинейном треугольнике ACB и на самой линии AB, а также в области точки N'. Следовательно, можно перемещать переменное z так, чтобы оно пересекло линию AB в любой точке M этого пути, отличной от конечных точек A и B, и не встретить никакого препятствия для аналитического продолжения. Очевидно, что то же самое имело бы место, если бы переменное z пересекало линию AB, перемещаясь в противоположном направлении.

Пример.—Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z)=\int_\alpha^\beta\frac{f(t)dt}{t-z}, \tag{20}$$

взятый вдоль отрезка AB действительной оси, где $f(t)$ есть функция, голоморфная вдоль отрезка AB. Изобразим z на той же плоскости, как и t. Функция $\Phi(z)$ переменного z голоморфна вблизи всякой точки, не лежащей на самом отрезке AB, который служит разрезом для интеграла. Разность $\Phi(N)-\Phi(N')$ здесь равна $\pm 2\pi i f(\zeta)$, где ζ есть точка отрезка AB. Когда переменное z пересекает линию AB, аналитическое продолжение функции $\Phi(z)$ есть $\Phi(z)\pm 2\pi i f(z)$.

Этот пример дает повод к следующему важному замечанию. Функция $\Phi(z)$ переменного z будет также голоморфною, если $f(t)$ и не есть аналитическая функция не-

[1]) Гурса (Goursat), Sur un théorème de M. Hermite (Acta mathematica, т. I).

ременного t; надо только, чтобы $f(t)$ было непрерывно между α и β (§ 295). Но в этом случае предыдущие рассуждения более не применимы, и отрезок AB есть, вообще, существенный разрез для функции $\Phi(z)$.

Упражнения.

1. Найти линии прерывности определенных интегралов

$$F(z)=\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2}, \quad \Phi(z)=\int_a^b \frac{dt}{t+iz},$$

взятых вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки (0,1) или (a, b); установить точно значение этих интегралов во всякой точке z, не лежащей на разрезах.

2. Даны четыре круга, описанных соответственно из точек $+1, +i, -1, -i$ радиусом, равным $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Пространство, лежащее вне этих четырех кругов, состоит из конечной области A_1, содержащей начало координат, и из бесконечной области A_2. Пользуясь методом § 300, составить ряд рациональных функций, сходящийся в этих областях, сумма которого равна $+1$ в A_1 и равна нулю в A_2. Проверить результат, вычислив сумму полученного ряда.

3. Решить те же вопросы, рассматривая две области, лежащие внутри круга, описанного из начала координат радиусом, равным 2, и вне кругов, описанных соответственно из точек $+1$ и -1 радиусом, равным 1.

[Аппель, Acta mathematica, т. I.]

4. Определенный интеграл

$$\Phi(z)=\int_0^{+\infty} \frac{t^a \sin z}{1+2t\cos z+t^2}\,dt,$$

взятый вдоль действительной оси, имеет разрезами прямые $x=(2k+1)\pi$, где k—целое число. Пусть будет $\zeta=(2k+1)\pi+i\xi$ точка, лежащая на одном из этих разрезов. Разность значений интеграла в двух точках, бесконечно близких к точке ζ, и лежащих по обе стороны разреза, равна $\pi(e^{a\xi}-e^{-a\xi})$.

[Эрмит, Crelle's Journal, т. 91.]

5. Определенные интегралы

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(t-z)}}{t-z}\,dt, \quad J_0=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(t-z)}}{t-z}\,dt$$

имеют в плоскости переменного z разрез вдоль действительной оси. Над этою осью мы имеем $J=2i\pi$, $J_0=0$, а под осью $J=0$, $J_0=-2i\pi$. Вывести из этих формул значение определенных интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t-z}\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t-z)}{t-z}\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{t-z}\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t-z)}{t-z}\,dt.$$

[Эрмит, Crelle's Journal, т. 91].

6. Пользуясь разрезами, вывести формулу (глава XIV, упражнение 15)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

[Эрмит, Crelle's Journal, т. 91.]

[Рассмотреть интеграл $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(t+z)}}{1+e^{(t+z)}}\,dt$, имеющий разрезами все прямые $y=(2k+1)\pi$ и остающийся постоянным в полосе, заключающейся между двумя последовательными разрезами, и затем вывести соотношение

$$\Phi(z+2i\pi)=\Phi(z)+2i\pi e^{i\pi a},\ \Phi(z+2i\pi)=e^{2i\pi a}\ \Phi(z),$$

где z и $z+2i\pi$ — точки, разделенные разрезом $y=\pi$.]

7*. Пусть будет $f(z)$ аналитическая функция, голоморфная в области начала координат, $f(z)=\sum a_n z^n$; обозначим через $F(z)=\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ присоединенную целую функцию. Нетрудно убедиться, что

$$F(az)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(u)}{u}\, e^{\frac{az}{u}}\,du, \tag{1}$$

где интеграл взят вдоль контура C, содержащего начало координат, внутри которого функция $f(z)$ голоморфна; отсюда, обозначая через l положительное действительное число, получаем

$$\int_0^l e^{-a}F(az)da=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(u)}{u}\,du\int_0^l e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)}\,da. \tag{2}$$

Если действительная часть дроби $\frac{z}{u}$ остается меньшею, чем $1-\varepsilon$ (где $\varepsilon>0$), когда u описывает контур C, то при неограниченном возрастании числа l интеграл $\int_0^l e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)}da$ стремится равномерно к $\frac{u}{u-z}$, и в пределе формула (2) обращается в

$$\int_0^{+\infty} e^{-a}F(az)da = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(u)du}{u-z}=f(z). \tag{3}$$

Эта формула применима ко всем точкам, лежащим внутри отрицательной подарной кривой для кривой C.

[См. Борель, Leçons sur les séries divergentes.]

8*. Пусть будут $f(z)=\sum a_n z^n$, $\varphi(z)=\sum b_n z^n$ целые ряды, радиусы сходимости которых равны соответственно r и ρ. Радиус сходимости ряда

$$\psi(z)=\sum a_n b_n z^n$$

не меньше, чем $r\rho$, и функция $\psi(z)$ не имеет других особых точек, кроме тех, которые получим, умножая аффиксы различных особых точек функции $f(z)$ на аффиксы различных особых точек функции $\varphi(z)$. [См. Адамар (Hadamard), Acta mathematica, т. XXIII, стр. 55.]

ГЛАВА XVII.

Аналитические функции многих переменных.

I.—Общие свойства.

В этой главе мы будем изучать аналитические функции нескольких независимых комплексных переменных. Чтобы упростить изложение и формулы, мы ограничимся случаем только двух переменных; но нет никакой трудности распространить найденные общие свойства и на функции любого числа переменных.

353. Определения.—Пусть будут $z=u+iv$, $z'=w+it$ два независимых комплексных переменных; всякое другое комплексное количество Z, значение которого зависит от значений количеств z и z', может быть названо функциею двух переменных z и z'. Представим значения обоих переменных z и z' двумя точками с координатами (u, v) (w, t) относительно двух систем прямоугольных осей, лежащих в плоскостях P, P'; пусть будут A и A' какие-нибудь части этих двух плоскостей. Функция $Z=f(z, z')$ называется голоморфною в областях A и A', если всякой системе двух точек, взятых соответственно в областях A и A', соответствует вполне определенное значение функции $f(z, z')$, изменяющееся непрерывно вместе с z и z', и если каждое из отношений

$$\frac{f(z+h, z')-f(z, z')}{h}, \quad \frac{f(z, z'+k)-f(z, z')}{k}$$

стремится к определенному пределу, когда при постоянных z и z' модули количеств h и k стремятся к нулю. Эти пределы суть частные производные от функции $f(z, z')$; их обозначают так же, как и в случае действительных переменных.

Отделим в $f(z, z')$ действительную часть и коэффициент при i, $f(z, z')=X+iY$; X и Y суть действительные функции четырех действительных независимых переменных u, v, w, t, удовлетворяющие четырем соотношениям

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v}=-\frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \frac{\partial X}{\partial w}=\frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \frac{\partial X}{\partial t}=-\frac{\partial Y}{\partial w},$$

смысл которых очевиден [1]). Переходя к производным второго порядка, можно исключить Y шестью различными способами, но шесть получающихся соотношений сводятся только к четырем

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial t}-\frac{\partial^2 X}{\partial v\,\partial w}=0,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial^2 X}{\partial v\,\partial t}=0,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}=0,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial w^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=0. \quad (1)$$

Большое число этих соотношений служит простым объяснением того, почему до сих пор ими мало пользовались при изучении аналитических функций двух переменных.

354. Совместные круги сходимости.—Свойства целых рядов с двумя действительными переменными (т. I, §§ 185, 186) легко распространить на тот случай, когда коэффициенты и переменные имеют комплексные значения. Пусть будет

$$F(z, z') = \Sigma a_{mn} z^m z'^n \quad (2)$$

двойной ряд с произвольными коэффициентами. Пусть будет

$$A_{mn} = |a_{mn}|;$$

мы видели (т. I, § 185), что существует, вообще, бесконечное множество систем двух таких положительных чисел R, R', что ряд модулей

$$\Sigma A_{mn} Z^m Z'^n \quad (3)$$

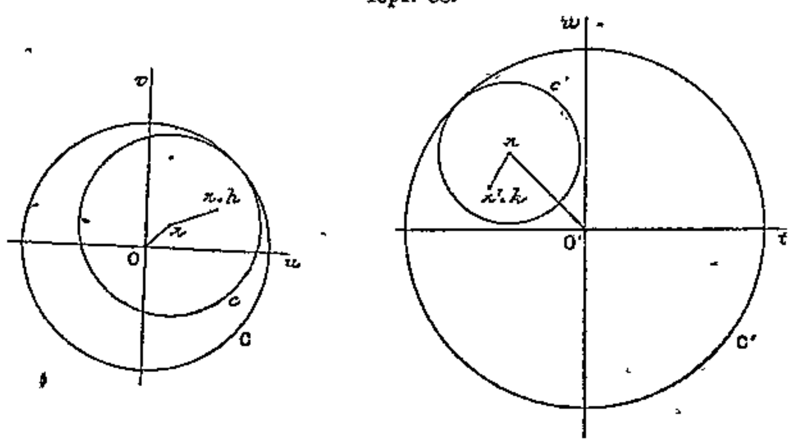
сходящийся, если одновременно $Z<R$ и $Z'<R'$, и расходящийся, если $Z>R$ и $Z'>R'$. Пусть будет C круг, описанный в плоскости переменного z из начала координат радиусом, равным R; точно также, пусть будет C' круг, описанный в плоскости переменного z' из точки $z'=0$ радиусом, равным R' (черт. 88). Двойной ряд (2)—абсолютно сходящийся, если переменные z, z' остаются соответственно внутри кругов C, C', и расходящийся, если эти переменные находятся соответственно вне этих двух кругов (т. I, § 185). Круги C и C' называются совместными кругами сходимости. Эта пара кругов играет здесь ту же роль, как круг сходимости для целого ряда с одним переменным; но вместо одного круга для целого ряда с двумя переменными существует бесконечное множество пар совместных кругов. Например, ряд $\sum \frac{(m+n)}{m!\,n!} z^m z'^n$ — абсолютно сходящийся, если

[1]) Если z и z' суть аналитические функции некоторого другого переменного x, то пользуясь этими соотношениями нетрудно доказать, что производная от $f(z, z')$ по x получается по обычному правилу дифференцирования сложной функции. Следовательно, формулы дифференциального исчисления и, в частности, формулы замены переменных распространяются и на аналитические функции комплексных переменных.

$|z|+|z'|<1$, и притом только в этом случае. Всякая пара кругов C, C', радиусы R, R' которых удовлетворяют соотношению $R+R'=1$, есть пара совместных кругов сходимости. В некоторых случаях можно ограничиться рассмотрением только одной пары совместных кругов; например, это имеет место для ряда $\Sigma z^m z'^n$,—сходящегося только при том условии, если одновременно $|z|<1$, $|z'|<1$.

Пусть будет C_1 круг, концентрический с C, радиус которого $R_1<R$; точно так же, пусть будет C'_1 круг концентрический с C', радиус которого $R'_1<R'$. Если переменные z и z' остаются соответ-

Черт. 88.



ственно внутри кругов C_1 и C'_1, то ряд (2)—равномерно сходящийся (см. т. I, § 185); следовательно, внутри обоих кругов C и C' его сумма есть непрерывная функция $F(z, z')$ двух переменных z и z'.

Дифференцируя почленно ряд (2), например, относительно переменного z мы получим новый ряд $\Sigma m a_{mn} z^{m-1} z'^n$,—также абсолютно сходящийся, если z и z' остаются соответственно в кругах C и C', и его сумма равна производной $\frac{\partial F}{\partial z}$ от $F(z, z')$ по z. Доказательство совершенно такое же, какое было дано для действительных переменных (т. I, § 185). Точно так же, $F(z, z')$ имеет частную производную $\frac{\partial F}{\partial z'}$ по z', представляемую двойным рядом, который получим, дифференцируя почленно ряд (2) относительно z'. Это показывает, что в рассматриваемой области функция $F(z, z')$ есть аналитическая функция двух переменных z и z'. Очевидно, что то же самое имеет место и для производных $\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z'}$; следовательно, функцию $F(z, z')$ можно дифференцировать почленно любое число раз; все ее частные производные суть также аналитические функции.

Возьмем внутри круга C какую-нибудь точку z с модулем r и опишем из этой точки круг с радиусом, равным $R-r$, касающийся изнутри круга C. Точно так же, пусть будут z' какая-нибудь точка с модулем $r'<R'$ и c' — круг, описанный из точки z' радиусом, равным $R'-r'$. Наконец, пусть будут $z+h$ и $z'+k$ две какие-нибудь точки, взятые соответственно в кругах c и c', так, что

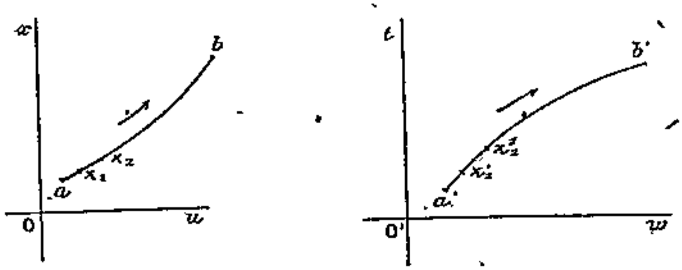
$$|z|+|h|<R, \ |z'|+|k|<R'.$$

Заменив в ряде (2) переменные z и z' через $z+h$ и $z'+k$, мы можем разложить каждый его член в ряд, расположенный по степеням h и k; полученный таким образом кратный ряд — абсолютно сходящийся. Располагая этот ряд по степеням h и k, мы получим формулу Тэлора

$$F(z+h, \ z'+k)=\sum\frac{\dfrac{\partial^{m+n}F}{\partial z^m\partial z'^n}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}h^m k^n. \tag{4}$$

355. Двойные интегралы.—Распространяя на функции многих комплексных переменных общие теоремы Коши, выведенные им из рас-

Черт. 89.



смотрения интегралов, взятых между мнимыми пределами, мы встречаемся с трудностями, которые были вполне выяснены Пуанкаре[1]). Мы рассмотрим здесь только один весьма простой частный случай, который нам будет достаточен для последующего. Пусть будет $f(z, z')$ функция голоморфная, когда переменные z, z' остаются соответственно в некоторых областях A, A' (черт. 89). Рассмотрим линию ab, лежащую в области A, и линию $a'b'$, лежащую в области A'. Разобьем произвольным числом точек деления каждую из этих линий на меньшие дуги; обозначим через $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, z_k, \ldots, Z$ точки деления дуги ab, где z_0 и Z совпадают с a и b, и через $z'_0, z'_1, z'_2, \ldots, z'_{h-1}, z'_h, \ldots, z_{m-1}, Z'$,

[1]) Пуанкаре (Poincaré), Sur les résidus des intégrales doubles (Acta mathematica, т. IX).

точки деления дуги $a'b'$, причём z'_0 и Z' совпадают с a' и b'. Двойная сумма

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} f(z_{k-1}, z'_{h-1})(z_k - z_{k-1})(z'_h - z'_{h-1}) \tag{5}$$

стремится к некоторому пределу, если оба числа m и n неограниченно возрастают так, что все модули $|z_k - z_{k-1}|$ и $|z'_h - z'_{h-1}|$ стремятся к нулю. Пусть будет $f(z, z') = X + iY$, где X и Y—действительные функции четырех переменных u, v, w, t; положим еще $z_k = u_k + iv_k$, $z'_h = w_h + it_h$. Мы можем представить общий член суммы S в виде

$$[X(u_{k-1}, v_{k-1}; w_{h-1}, t_{h-1}) + iY(u_{k-1}, v_{k-1}; w_{h-1}, t_{h-1})] \times$$
$$\times [u_k - u_{k-1} + i(v_k - v_{k-1})][w_h - w_{h-1} + i(t_h - t_{h-1})];$$

выполнив указанные умножения, мы получим восемь отдельных произведений. Докажем, например, что сумма частных произведений

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} X(u_{k-1}, v_{k-1}; w_{h-1}, t_{h-1})(u_k - u_{k-1})(v_k - v_{k-1}) \tag{6}$$

стремится к некоторому пределу. Предположим, как это имеет место на чертеже, что прямая, параллельная оси Ov, пересекает кривую ab только в одной точке, и точно так же, прямая, параллельная оси Ot, пересекает кривую $a'b'$ не более, чем в одной точке. Пусть будут $v = \varphi(u)$, $t = \psi(w)$ уравнения этих кривых, u_0 и U—границы, между которыми изменяется переменное u, а w_0 и W—границы, между которыми изменяется переменное w. Заменяя в X переменные v и t соответственно через $\varphi(u)$ и $\psi(w)$, мы получим непрерывную функцию $P(u, v)$ переменных u и w, и сумма (6) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} P(u_{k-1}, w_{h-1})(u_k - u_{k-1})(w_h - w_{h-1}) \tag{6'}$$

При неограниченном возрастании m и n эта сумма имеет пределом двойной интеграл $\iint P(u, w)\, du\, dw$, распространенный на прямоугольник, ограниченный прямыми $u = u_0$, $u = U$, $w = w_0$, $w = W$. Этот двойной интеграл можно представить иначе в виде

$$\int_{u_0}^{U} du \int_{w_0}^{W} P(u, w)\, dw,$$

или, вводя криволинейные интегралы,

$$\int_{(ab)} du \int_{(a'b')} X(u, v; w, t)\, dw. \tag{7}$$

В последнем выражении u и v обозначают координаты точек дуги ab, и w и t—координаты точек дуги $a'b'$. Предполагая, что точка (u, v) постоянна, будем перемещать точку (w, t) по дуге $a'b'$ и вычислим криволинейный интеграл $\int X\,dw$, взятый вдоль этой дуги $a'b'$; в результате получится некоторая функция $R(u,v)$ от u, v. Затем мы вычисляем криволинейный интеграл $\int R(u, v)du$, взятый вдоль дуги ab.

Последнее выражение (7), которое мы получили для предела суммы (6), применимо при всяких путях ab и $a'b'$. Для этого достаточно, как мы это уже неоднократно делали, разбить каждую из кривых ab и $a'b'$ на дуги настолько малые, чтобы они удовлетворяли надлежащим условиям, сочетать совместно всеми возможными способами части дуги ab с частями дуги $a'b'$, и сложить результаты. Поступая так со всеми суммами частных произведений, аналогичными сумме (6), мы найдем, что S равно в пределе сумме восьми двойных интегралов, аналогичных интегралу (7). Представив эту сумму через $\iint F(z,z')dzdz'$, мы имеем равенство

$$\left.\begin{aligned}\iint F(z,z')dz\,dz' = \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} X dw - \int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} X dt - \\ - \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} Y dt - \int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} Y dw + \\ + i\int_{(ab)} du \int_{(a'b')} Y dw - i\int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} Y dt + \\ + i\int_{(ab)} du \int_{(a'b')} X dt + i\int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} X dw;\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

его можно представить сокращенно в виде

$$\iint F(z,z')dz\,dz' = \int_{(ab)} (du + i\,dv) \int_{(a'b')} (X + iY)(dw + i\,dt)$$

или, иначе,

$$\iint F(z, z')dz\,dz' = \int_{(ab)} dz \int_{(a'b')} F(z, z')\, dz'. \tag{9}$$

Формула (9) вполне сходна с формулою, которою пользуются при вычислении обыкновенного двойного интеграла, распространенного на площадь прямоугольника, при помощи двух последовательных квадратур (т. I, § 123). Сначала вычисляют интеграл $\int F(z, z')\,dz'$, взятый вдоль дуги $a'b'$, предполагая z постоянным; в результате получается некоторая функция $\Phi(z)$ от z, которую затем интегрируют вдоль дуги ab. Так как оба пути ab и $a'b'$ играют аналогичную роль, то ясно, что порядок интегрирований можно изменить в обратный.

Пусть будет M положительное число, большее модуля функции $F(z, z')$, когда z и z' описывают дуги ab и $a'b'$; если L и L' обозначают соответственно длины этих дуг, то модуль двойного интеграла меньше, чем MLL' (§ 287).

Если один из путей, например, $a'b'$ образует замкнутую линию, то интеграл $\int_{(a'b')} F(z, z')\,dz'$ равен нулю, если функция $F(z, z')$ голоморфна при значениях переменной z', лежащих внутри этой линии, и при значениях переменного z, лежащих на линии ab; следовательно, и двойной интеграл равен так же нулю.

356. Распространение теорем Коши.—Пусть будут C и C' две замкнутые линии без двойных точек, лежащие соответственно в плоскостях переменных z и z', $F(z, z')$—функция голоморфная, когда z и z' остаются внутри площадей, ограничиваемых этими линиями, и на самих этих линиях. Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z')\,dz'}{(z-x)(z'-x')},$$

где x—точка, лежащая внутри контура C, и x'—точка, лежащая внутри контура C'; предположим, что эти оба контура описываются переменными в прямом направлении. Интеграл

$$\int_{(C')} \frac{F(z, z')\,dz'}{(z-x)(z'-x')},$$

где z обозначает постоянную точку, лежащую на контуре C, равен $2\pi i\,\dfrac{F(z, x')}{z-x}$. Следовательно, мы имеем

$$I = 2\pi i \int_{(C)} \frac{F(z, x')}{z-x}\,dz;$$

применяя еще раз теорему Коши, получим

$$I = -4\pi^2 F(x, x').$$

Таким образом, мы приходим к формуле

$$F(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z')\,dz'}{(z-x)(z'-x')}, \tag{10}$$

вполне аналогичной основной формуле Коши, и из которой можно вывести аналогичные следствия. Из нее можно вывести существование частных производных всех порядков от функции $F(z,z')$ в рассматриваемых областях; так, производная $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial x'^n}$ равна

$$\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m \partial x'^n} = -\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{4\pi^2}\int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z,z')\,dz'}{(z-x)^{m+1}(z'-x')^{n+1}}. \qquad (11)$$

Чтобы получить формулу Тэлора, предположим, что контуры C и C' суть окружности; пусть будут a центр окружности C и R ее радиус, b—центр окружности C' и R' ее радиус. Если точки x и x' взяты соответственно внутри этих окружностей, то $|x-a|=r<R$, $|x'-b|=r'<R'$, и мы можем разложить рациональную дробь

$$\frac{1}{(z-x)(z'-x')} = \frac{1}{[z-a-(x-a)][z'-b-(x'-b)]}$$

по степеням разностей $x-a$ и $x'-b$

$$\frac{1}{(z-x)(z'-x')} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^m(x'-b)^n}{(z-a)^{m+1}(z'-b)^{n+1}};$$

ряд, стоящий в правой части, равномерно сходящийся, если z и z описывают соответственно окружности C и C', так как модуль общего члена равен $\frac{1}{RR'}\left(\frac{r}{R}\right)^m\left(\frac{r'}{R'}\right)^n$. Следовательно, можно заменить в формуле (10) дробь $\frac{1}{(z-x)(z'-x')}$ предыдущим рядом и интегрировать полученное выражение почленно. Мы будем иметь

$$F(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(x-a)^m(x'-b)^n \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z,z')\,dz'}{(z-a)^{m+1}(z'-b)^{n+1}};$$

принимая во внимание формулы, получающиеся из (10) и (11) после замены x и x' через a и b, мы придем к формуле Тэлора

$$F(x,x') = F(a,b) + \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^{m+n}F}{\partial a^m \partial b^n}\frac{(x-a)^m(x'-b)^n}{m!\,n!}, \qquad (12)$$

при чем сочетание $m=n=0$ при суммировании исключается.

П р и м е ч а н и е.—Коэффициент a_{mn} при $(x-a)^m(x'-b)^n$ в предыдущем ряде равен двойному интегралу

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z,z')dz'}{(z-a)^{m+1}(z'-b)^{n+1}};$$

если M есть верхняя граница модуля $|F(z,z')|$ вдоль окружностей C и C', то, на основании общего замечания, мы имеем

$$|a_{mn}| < \frac{1}{4\pi^2} \frac{M}{R^{m+1}R'^{n+1}} 2\pi R . 2\pi R' = \frac{M}{R^m R'^n}.$$

Следовательно, функция

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x-a}{R}\right)\left(1-\frac{x'-b}{R'}\right)}$$

есть усиливающая для $F(x, x')$ (т. I, § 186).

357. Функции, изображаемые в виде определенных интегралов.—При изучении некоторых функций, их часто выражают через определенные интегралы, где независимое переменное входит под знаком интеграла, как параметр. Мы уже дали для случая действительных переменных достаточные условия, при которых к этим выражениям можно применить обычную формулу дифференцирования (т. I, §§ 97, 175).

Возвратимся к этому вопросу для случая комплексных переменных. Пусть будет $F(z,z')$ функция переменных z и z', голоморфная, когда эти переменные остаются соответственно в областях A и A'. Возьмем в области A определенный путь L конечной длины и рассмотрим определенный интеграл

$$\Phi(x) = \int_{(L)} F(z, x)\, dz, \tag{13}$$

где x есть какая-нибудь точка области A'. Чтобы доказать, что функция $\Phi(x)$ есть голоморфная функция от x, опишем из точки x окружность C радиусом, равным R, лежащую всеми своими точками в области A'. Так как функция $F(z, t')$ голоморфна, то, по основной формуле Коши, мы имеем

$$F(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{F(z,z')dz'}{z'-x},$$

и интеграл (13) можно представить иначе в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z,z')\,dz'}{z'-x}.$$

Пусть будет $x+\Delta x$ точка близкая к точке x, лежащая в круге C; мы имеем также

$$\Phi(x+\Delta x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z,z')\,dz'}{z'-x-\Delta x},$$

и, следовательно, повторяя прежние вычисления (§ 295),

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}dz\int_{(C)}\frac{F(z,z')\,dz'}{(z'-x)^2}$$
$$+\frac{\Delta x}{2\pi i}\int_{(L)}dz\int_{(C)}\frac{F(z,z')\,dz'}{(z'-x)^2(z'-x-\Delta x)}.$$

Пусть будет M положительное число, большее модуля функции $F(z,z')$, когда переменные z и z' описывают соответственно линии L и C, S—длина линии L, ρ—модуль количества Δx. Модуль второго интеграла меньше чем

$$\frac{\rho}{2\pi}\,\frac{M}{R^2(R-\rho)}\,2\pi R.S=\frac{\rho MS}{R(R-\rho)},$$

и, следовательно, при неограниченном приближении точки $x+\Delta x$ к точке x стремится к нулю. Следовательно, функция $\Phi(x)$ имеет единственную первую производную, представляемую выражением

$$\Phi'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}dz\int_{(C)}\frac{F(z,z')\,dz'}{(z'-x)^2}.$$

Но мы имеем также (§ 295)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{F(z,z')\,dz'}{(z'-x)^2},$$

и предыдущую формулу можно представить иначе в виде

$$\Phi'(x)=\int_{(L)}\frac{\partial F}{\partial x}\,dz. \tag{14}$$

Мы пришли к обычной формуле дифференцирования под знаком интеграла.

Предыдущее рассуждение не применимо, если путь интегрирования L простирается в бесконечность. Предположим, для определенности, что L есть бесконечная полупрямая, выходящая из точки a_0 и образующая угол θ с действительною осью. Мы будем называть интегра

$$\Phi(x)=\int_{a_0}^{\infty}F(z,x)\,dz$$

равномерно сходящимся, если для всякого положительного числа ε существует такое положительное число N, чтобы при $\rho>N$, было

$$\left|\int_{a_0+\rho e^{i\theta}}^{\infty}F(z,x)\,dz\right|<\varepsilon,$$

где бы точка x ни лежала в области A'. Разбивая путь интегрирования на бесконечное множество прямолинейных отрезков, мы докажем, что всякий равномерно сходящийся интеграл равен сумме равномерно сходящегося ряда, члены которого суть интегралы, взятые вдоль соответствующих отрезков бесконечной полупрямой L. Все эти интегралы суть голоморфные функции от x; следовательно, и $\int_{a_0}^{\infty} F(z,x)dz$ также голоморфно (§ 301).

Точно так же можно убедиться, что здесь можно применить обычную формулу дифференцирования под знаком интеграла, если только получающийся интеграл $\int_{a_0}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial x}dz$ сам равномерно сходящийся.

Если функция $F(z, z')$ обращается в бесконечность при пределе a_0 пути интегрирования, то интеграл называется равномерно сходящимся в некоторой области, если для всякого положительного числа ε можно найти на линии L такую точку $a_0+\eta$, чтобы было

$$\left|\int_{a_0+\eta}^{b} F(z,x)\,dz\right| < \varepsilon,$$

где b есть какая-нибудь точка, лежащая на линии L между точками a_0 и $a_0+\eta$, причем это неравенство должно иметь место при всех значениях переменного x, заключающихся в рассматриваемой области. Точно также прежние заключения сохраняются в том случае, когда один из пределов интеграла обращается в бесконечность, и доказываются таким же способом.

358. Приложение к функции Γ. — Определенный интеграл, взятый вдоль действительной оси,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \tag{15}$$

который мы рассматривали только при действительных и положительных значениях переменного z (т. I, § 92), имеет конечное значение, если действительная часть переменного z, которую мы обозначим через $\Re(z)$,—положительна. В самом деле, пусть будет $z=x+iy$; отсюда имеем $|t^{z-1}e^{-t}|=t^{x-1}e^{-t}$. Так как при x положительном интеграл $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ имеет конечное значение, то очевидно, что имеет конечное значение и интеграл (15) (т. I, §§ 89, 90). Этот интеграл,—равномерно сходящийся во всей области, определяемой условиями $N > \Re(z) > \eta$, где N и η—произвольные положительные числа. В самом деле, мы имеем

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt,$$

и достаточно показать, что каждый из интегралов, стоящих в правой части,—равномерно сходящийся. Докажем это, например, для второго интеграла. Пусть будет l положительное число, большее единицы; если $\Re(z) < N$, то

$$\left|\int_l^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\right| < \int_l^{+\infty} t^{N-1}e^{-t}dt,$$

и можно найти настолько большое положительное число Λ, чтобы последний интеграл был меньше всякого положительного числа ε, если $l \geq \Lambda$. Следовательно, функция $\Gamma(z)$, определяемая интегралом (15), голоморфна во всей области плоскости, лежащей вправо от оси Oy. Это функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет по прежнему соотношению

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{16}$$

которое получим, интегрируя по частям, а следовательно, и более общему соотношению

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z), \tag{17}$$

представляющему непосредственное следствие предыдущего.

Пользуясь этим свойством, можно распространить определение функции $\Gamma(z)$ на значения z, действительная часть которых отрицательна. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}, \tag{18}$$

где n—целое положительное число. Числитель $\Gamma(z+n)$ есть голоморфная функция от z, вполне определенная, если $\Re(z) > -n$; следовательно, $\psi(z)$ есть мероморфная функция, определенная при всех значениях переменного, действительная часть которых больше, чем $-n$. Но на основании формулы (17) это функция $\psi(z)$ совпадает справа от оси Oy с голоморфною функциею $\Gamma(z)$; следовательно, она тождественна с аналитическим продолжением голоморфной функции $\Gamma(z)$ в полосу, заключающуюся между прямыми $\Re(z) = 0$, $\Re(z) = -n$. Так как число n произвольно, то отсюда следует, что существует мероморфная функция, имеющая полюсами первого порядка все точки $z = 0, z = -1, z = -2, \ldots, z = -n, \ldots$, которая справа от оси Oy равна интегралу (15). Эту функцию также изображают через $\Gamma(z)$, но ее числовое значение можно вычислять по формуле (15) только в том случае, если $\Re(z) > 0$. Если $\Re(z) < 0$, то, чтобы иметь числовое значение этой функции, надо воспользоваться сверх того соотношением (17).

Следующее выражение функции $\Gamma(z)$ пригодно при всяком значении переменного z. Пусть будет $S(z)$ целая функция

$$S(z) = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Она имеет нулями полюсы функции $\Gamma(z)$, следовательно, произведение $S(z)\Gamma(z)$ должно быть целою функциею; можно доказать, что эта целая функция равна e^{-Cz}, где C—Эйлерово постоянное [1] (т. I, § 49). Отсюда получаем формулу

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}; \tag{19}$$

мы видим, что $\dfrac{1}{\Gamma(z+1)}$ есть целая трансцендентная функция.

359. Аналитическое продолжение функции двух переменных. — Пусть будет $F(z, z')$ функция двух переменных z и z', голоморфная, когда эти оба переменные остаются соответственно в связных частях A и A' двух плоскостей, в которых их представляют. Как и в случае одного переменного (§ 345), можно доказать, что значение этой функции при какой-нибудь системе значений z и z', взятых в областях A и A', определено, если известны значения функции F и всех ее частных производных при значениях $z = a$, $z' = b$, взятых в тех же областях. Вследствие этого

[1] Эрмит (Hermite), Cours d'Analyse, 4-е издание, стр. 142.

повидимому, нетрудно распространить на функции двух комплексных переменных понятие аналитического продолжения. Рассмотрим двойной ряд Σa_{mn} такой, что есть два положительных числа r, r', обладающих следующим свойством: ряд

$$F(z,z') = \Sigma a_{mn} z^m z'^n \tag{20}$$

—сходящийся, если одновременно $|z| < r$, $|z'| < r'$, и расходящийся, если одновременно $|z| > r$, $|z'| > r'$. В этом случае предыдущий ряд определяет функцию $F(z, z')$, голоморфную, если переменные z и z' остаются соответственно в кругах C и C' с радиусами, равными r и r'; но отсюда мы еще ничего не знаем о том, какова эта функция, если $|z| > r$ или $|z'| > r'$. Предположим, для определенности, что переменное z перемещается по некоторому пути L, идущему из начала координат в точку Z, лежащую вне круга C, а переменное z' перемещается по некоторому другому пути L', идущему из точки $z' = 0$ в точку Z', лежащую вне круга C'. Пусть будут α и β две точки, взятые соответственно на путях L и L', при чем α лежит внутри C, а β лежит внутри C'. Пользуясь рядом (20), и теми рядами, которые получим, дифференцируя его любое число раз, мы можем составить новый целый ряд

$$\Sigma b_{mn}(z - \alpha)^m (z' - \beta)^n, \tag{21}$$

абсолютно сходящийся, если $|z - \alpha| < r_1$ и $|z' - \beta| < r'_1$, где r_1 и r'_1 — положительные числа, надлежащим образом выбранные. Обозначим через C_1 окружность, описанную в плоскости переменного z из точки α радиусом, равным r_1 и через C_1' — окружность, описанную в плоскости переменного z' из точки β радиусом, равным r_1'. Если точка z находится в части плоскости, общей обоим кругам C и C_1, и точка z' находится в части плоскости, общей обоим кругам C' и C'_1, то сумма ряда (21) тождественна с суммою ряда (20). Если можно выбрать числа r_1 и r'_1 так, чтобы круг C_1 имел часть, лежащую вне круга C, или круг C'_1 имел часть, лежащую вне круга C', то мы распространим определение функции $F(z, z')$ на область, отчасти лежащую вне первоначальной области. Продолжая те же действия, мы видим, что мы можем постепенно расширять область существования функции $F(z, z')$. Но здесь входит новый существенный элемент. В самом деле, необходимо принимать во внимание, как переменные перемещаются одно относительно другого по их соответствующим путям. Соваж (Sauvage) дал следующий весьма простой пример [1]). Пусть будет $u = \sqrt{z - z' + 1}$; возьмем за начальные значения $z = z' = 0$, $u = +1$, и определим пути, описываемые переменными z и z', следующим образом: 1) путь, описываемый переменным z', состоит из прямолинейного отрезка, идущего из начала координат в точку $z' = 1$; 2) путь, описываемый переменным z, состоит из трех полуокружностей; первой OMA (черт. 90), центр которой лежит на действительной оси слева от начала координат и радиус которой меньше $\frac{1}{2}$; второй ANB, центр которой также лежит на действительной оси, при чем точка -1 лежит на диаметре AB; наконец—третьей BPC, центр которой лежит в средине отрезка, соединяющего точку B с точкою C ($z = 1$). Первая и третья из этих полуокружностей лежат над действительною осью, а вторая под действительною осью, так что контур $OMANBPCO$ окружает точку $z = -1$. Выберем следующую последовательность путей:

1) z' равно нулю, а z описывает весь путь $OABC$;

2) z остается равный единице, а z' описывает весь свой путь.

---

[1]) Sauvage, Premiers principes de la Théorie générale des fonctions de plusieurs variables (Annales de la Faculté des Sciences de Marseille, т. XIV). Этот мемуар представляет превосходное введение в изучение аналитических функций многих переменных.

Если мы введем вспомогательное переменное $t=z-z'$, то нетрудно видеть, что путь, описываемый переменным t, если мы изобразим это переменное t точкою на плоскости z, есть как раз замкнутый контур $OABCO$, окружающий критическую точку $t=-1$ корня $\sqrt{t+1}$. Следовательно, конечное значение переменного u есть $u=-1$.

С другой стороны, возьмем следующие пути:

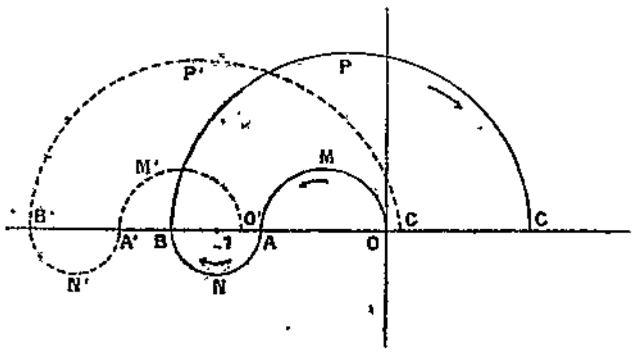
1) z равно нулю, а z' изменяется от 0 до $1-\varepsilon$ (ε весьма малое положительное число);

2) z' остается равным $1-\varepsilon$, а z описывает весь путь $OABC$;

3) z остается равным 1, а z' изменяется от $1-\varepsilon$ до 1.

Если z' изменяется от 0 до $1-\varepsilon$, то вспомогательное переменное t описывает путь OO', оканчивающийся в точке O', весьма близкой к точке -1, лежащей на дей-

Черт. 90.



ствительной оси. Если затем переменное z описывает путь $OABC$, то t описывает путь $O'A'B'C'$, совместимый с предыдущим и оканчивающийся в точке C' ($OC'=\varepsilon$) лежащей на действительной оси. Наконец, если z' изменяется от $1-\varepsilon$ до 1, то t перемещается от точки C' в начало координат. Следовательно, вспомогательное переменное t описывает замкнутый контур $OO'A'B'C'O$, при чем точка -1 остается вне этого контура, если ε достаточно мало. Следовательно, конечное значение функции u равно $+1$.

Природа особенностей аналитических функций многих переменных известен гораздо менее, чем функций только одного переменного. Одна из наиболее значительных трудностей задачи состоит в том, что пары особых точек не являются уединенными [1]).

II.—Неявные функции.—Алгебраические функции.

360. Теорема Вейерштрасса.—Мы уже установили (т. I, § 187) существование неявных функций, определяемых уравнениями, левая часть которых разлагается в ряд, расположенный по возрастающим положительным степеням двух переменных. Рассуждения, при которых мы предполагали, что переменные и коэффициенты действительны, применимы без изменения в том случае, когда переменные и коэффи-

[1]) Все, касающееся этого вопроса, можно найти в мемуаре Пуанкаре (Poincaré) (Acta mathematica, т. XXVI) и в диссертации Кузена (Cousin) (там же, т. XIX).

циенты имеют любые действительные или мнимые значения, если только остаются в силе остальные предположения. Теперь мы докажем более общую теорему, причем сохраним прежние обозначения (т. I, § 187); комплексные переменные мы обозначим через x и y.

Пусть будет $F(x, y)$ функция, голоморфная в области системы значений $x=\alpha$, $y=\beta$ и такая, что $F(\alpha, \beta)=0$; предположим, что всегда возможно, что $\alpha=\beta=0$. Уравнение $F(0, y)=0$ имеет корень $y=0$ некоторой кратности. В том случае, который мы рассматривали до сих пор, $y=0$ было однократным корнем; теперь мы рассмотрим тот случай, когда $y=0$ есть корень кратности n уравнения $F(0, y)=0$. Располагая по степеням переменного y разложение функции $F(x, y)$ в области точки $x=y=0$, мы получим

$$F(x, y)=A_0+A_1 y+\ldots+A_n y^n+A_{n+1} y^{n+1}+\ldots, \tag{22}$$

где коэффициенты A_i суть целые ряды относительно переменного x, из которых n первых равны нулю при $x=0$, тогда как A_n не обращается в нуль при $x=0$. Пусть будут C и C' круги, описанные соответственно в плоскостях переменных x и y из начала координат радиусами, равными R и R'. Мы предположим, что функция голоморфна в области, определяемой этими кругами, а также на самих окружностях C и C'. Так как A_n не равно нулю при $x=0$, то мы можем взять радиус круга C настолько малым, чтобы ни внутри этого круга, ни на самой окружности C функция A_n не обращалась в нуль. Пусть будет M верхняя граница модуля $|F(x, y)|$ в вышеуказанной области, и B—нижняя граница модуля $|A_n|$. По общей теореме Коши мы имеем

$$F(x, y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C')}\frac{F(x, y')\,dy'}{y'-y},$$

где x и y—какие-нибудь точки, взятые в кругах C и C'. Отсюда заключаем, что каково бы ни было значение переменного x в круге C, модуль коэффициента A_m при y^m в формуле (22) меньше, чем $\frac{M}{R'^m}$.

Мы можем представить $F(x, y)$ в виде

$$F(x, y)=A_n y^n(1+P+Q), \tag{23}$$

где

$$P=\frac{A_{n+1}}{A_n}y+\frac{A_{n+2}}{A_n}y^2+\ldots,$$

$$Q=\frac{A_0}{A_n}\frac{1}{y^n}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{A_n}\frac{1}{y}.$$

Пусть будет ρ модуль переменного y; мы имеем

$$|P| < \frac{M}{BR'^n}\left(\frac{\rho}{R'} + \frac{\rho^2}{R'^2} + \ldots\right) = \frac{M}{BR'^n} \frac{\frac{\rho}{R'}}{1 - \frac{\rho}{R'}}.$$

Этот модуль $|P|$ будет меньше, чем $\frac{1}{2}$ если

$$\rho < R' \frac{BR'^n}{BR'^n + 2M}. \tag{24}$$

С другой стороны, пусть будет $\mu(r)$ значение maximum модуля функций $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ при всех значениях переменного x, модуль которых не превосходит числа $r < R$. Так как эти n функций равны нулю при $x = 0$, то $\mu(r)$ стремится к нулю вместе с r, и можно взять r настолько малым, чтобы было

$$\frac{\mu(r)}{B}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \ldots + \frac{1}{\rho^n}\right) < \frac{1}{2} \quad (r < R), \tag{25}$$

где ρ — определенное положительное число. Выбрав числа ρ и r так, чтобы они удовлетворяли предыдущим условиям, заменим круг C кругом C_r, описанным в плоскости переменного x из точки $x = 0$ радиусом, равным r, и круг C' кругом C'_ρ, описанным в плоскости переменного y из точки $y = 0$ радиусом, равным ρ. Дадим переменному x такое значение, чтобы было $|x| \leqq r$, и будем перемещать переменное y по окружности C'_ρ; из самого выбора чисел r и ρ следует, что при этом будет $|P| < \frac{1}{2}$, $|Q| < \frac{1}{2}$, и, следовательно, $|P + Q| < 1$. Когда переменное y описывает в прямом направлении окружность C'_ρ, аргумент количества $1 + P + Q$ возвращается к своему начальному значению, тогда как аргумент множителя $A_n y^n$ возрастает на $2n\pi$. Следовательно (§ 311), у р а в н е н и е $F(x, y) = 0$, г д е $|x| \leqq r$, и м е е т n и т о л ь к о n к о р н е й, м о д у л ь к о т о р ы х м е н ь ш е, ч е м ρ.

Все остальные корни уравнения $F(x, y) = 0$, если они существуют, имеют модули, большие, чем ρ. Так как число ρ можно заменить сколь угодно малым числом, меньшим числа ρ, заменяя в то же время число r меньшим числом, попрежнему удовлетворяющим условию (25), то мы видим, что уравнение $F(x, y) = 0$ имеет ровно n корней, стремящихся к нулю вместе с x.

Если переменное x остается внутри или на самой окружности C_r, то n корней $y_1, y_2, \ldots, y_n$, модули которых меньше, чем ρ, остаются в круге C'_ρ. Эти корни не будут, вообще, голоморфны в круге C_r, но всякая симметрическая целая функция этих n корней есть голоморфная функция от x в этом круге. Очевидно, что достаточно доказать это для суммы $y_1^k+y_2^k+\ldots+y_n^k$, где k—целое положительное число. Для этого рассмотрим двойной интеграл

$$I=\int_{(C'_\rho)} dy' \int_{(C_r)} y'^k \frac{\frac{\partial F(x',y')}{\partial y'}}{F(x',y')} \frac{dx'}{x'-x},$$

где $|x|<r$. Если $|y'|=\rho$, то по предыдущему, функция $F(x',y')$ не может обращаться в нуль ни при каком значении переменного x', лежащем внутри или на окружности C_r, и единственным полюсом подынтегральной функции, лежащим внутри круга C_r, будет точка $x'=x$. Следовательно, мы имеем

$$\int_{(C_r)} y'^k \frac{\frac{\partial F(x',y')}{\partial y'}}{F(x',y')} \frac{dx'}{x'-x} = 2\pi i y'^k \frac{\frac{\partial F(x,y')}{\partial y'}}{F(x,y')},$$

и следовательно,

$$I=2\pi i\int_{(C'_\rho)} y'^k \frac{\frac{\partial F(x,y')}{\partial y'}}{F(x,y')} dy'.$$

По доказанной выше теореме (§ 310), этот интеграл равен $-4\pi^2(y_1^k+y_2^k+\ldots+y_n^k)$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть корни уравнения $F(x, y)=0$, модуль которых меньше, чем ρ. С другой стороны, интеграл I в круге C_r есть голоморфная функция от x, так как дробь $\frac{1}{x'-x}$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд, расположенный по степеням переменного x, и вычислить затем интеграл почленно. Так как различные суммы Σy_i^k суть функции, голоморфные в круге C_r, то то же имеет место для суммы этих корней, для суммы их парных произведений и т. п.; следовательно, корни $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть вместе с тем корни уравнения n-ой степени

$$f(x, y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots+a_{n-1}y+a_n=0, \qquad (26)$$

коэффициенты которого $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть функции от x, голоморфные в круге C_r и обращающиеся в нуль при $x=0$.

Обе функции $F(x, y)$ и $f(x, y)$ обращаются в нуль при одних и тех же системах значений переменных x и y, лежащих внутри кругов C_r и C'_ρ. Покажем, что отношение $\frac{F(x,y)}{f(x,y)}$ есть функция голоморфная в этой же области. Возьмем для этих переменных x и y определеленные значения под условием $|x|<r$, $|y|<\rho$, и рассмотрим двойной интеграл

$$J=\int_{(C'_\rho)} dy' \int_{(C_r)} \frac{F(x',y')}{f(x',y')}\frac{dx'}{(x'-x)(y'-y)}.$$

При значении y', модуль которого равен ρ, функция $f(x',y')$ переменного x' не может обращаться в нуль ни при каком значении x', лежащем внутри или на окружности C_r. Следовательно, подъинтегральная функция имеет внутри окружности C_r единственный полюс $x'=x$; соответствующий ему вычет равен $\frac{F(x,y')}{f(x,y')}\frac{1}{y'-y}$. Таким образом, мы имеем также

$$J=2\pi i\int_{(C'_\rho)} \frac{F(x,y')}{f(x,y')}\frac{dy'}{y'-y}.$$

Обе голоморфные функции $F(x,y')$, $f(x,y')$ переменного y' имеют внутри круга C'_ρ одни и те же нули с одинаковыми степенями кратности. Следовательно, их частное есть функция от y', голоморфная в круге C'_ρ, и единственный полюс подъинтегральной функции, лежащий внутри этого круга, есть $y'=y$; таким образом, мы имеем

$$J=-4\pi^2\frac{F(x,y)}{f(x,y)}.$$

С другой стороны, в интеграле J можно заменить дробь $\frac{1}{(x'-x)(y'-y)}$ ее разложением в равномерно сходящийся целый ряд, расположенный по положительным степеням переменных x и y. Интегрируя почленно, мы видим, что этот интеграл равен сумме целого ряда, расположенного по степеням переменных x и y, и сходящегося в кругах C_r и C'_ρ. Следовательно, мы имеем

$$F(x,y)=f(x,y)\,H(x,y),$$

или

$$F(x,y)=(y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n)\,H(x,y), \tag{27}$$

где $H(x,y)$—голоморфно в кругах C_r, C'_ρ.

Коэффициент A_n при y^n в $F(x,y)$ содержит постоянный член, отличный от нуля; так как $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю при $x=0$, то разложение функции $H(x,y)$ необходимо содержит постоянный член, отличный от нуля, и из разложения по формуле (27) видно, что мы получим все корни уравнения $F(x,y)=0$, стремящиеся к нулю вместе с x, приравнивая нулю первый множитель. Эта важная теорема принадлежит Вейерштрассу [1]). Она представляет обобщение на функцию многих переменных, насколько это возможно, разложения на множителей функций одного переменного.

361. Критические точки.—Мы таким образом привели изучение тех n корней уравнения $F(x, y)=0$, которые бесконечно малы вместе с x, к изучению при значениях x, близких к нулю, корней уравнения вида

$$f(x, y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots+a_{n-1}y+a_n=0, \tag{28}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$—голоморфные функции, обращающиеся в нуль при $x=0$. Если $n>1$ (единственный случай, который нас здесь занимает, то точка $x=0$ называется, вообще, критическою точкою. Исключим y из уравнений $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; результант $\Delta(x)$ есть целый многочлен относительно коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и, следовательно, функция голоморфная в области начала координат. При $x=0$ результант $\Delta(x)$ равен нулю [2]), а так как нули голоморфной функции образуют систему уединенных точек, то мы можем взять радиус r круга C_r настолько малым, чтобы внутри C_r уравнение $\Delta(x)$ не имело другого корня, кроме $x=0$. Во всякой точке x_0, взятой в этом круге и отличной от начала координат, уравнение $f(x_0, y)=0$ имеет n различных корней; в этом случае, как мы уже знаем (т. I, § 187), эти n корней уравнения (28) суть функции от x, голоморфные в области точки x_0. Следовательно, внутри круга C_r не может существовать другой критической точки, кроме начала координат.

Пусть будут $y_1, y_2, \ldots, y_n$ корни уравнения $f(x_0, y)=0$. Предположим, что переменное x описывает петлю вокруг точки $x=0$, выходя из точки x_0; вдоль этой петли n корней уравнения $f(x, y)=0$ различны и изменяются непрерывно. Выходя из точки x_0, например, с корнем y_1 и следуя за непрерывным изменением этого корня вдоль петли, мы придем в точку с конечным значением, равным одному из корней уравнения $f(x_0, y)=0$. Если это конечное значение есть y_1, то рассматриваемый корень есть однозначная функция в области начала координат. Если же это конечное значение отлично от y_1, то предположим, что оно равно, например, y_2. Описывая новую петлю в том же направлении, мы придем от корня y_2 к другому из корней

[1]) Abhandlungen aus der Functionenlehre von K. Weierstrass (Берлин, 1860). Это предложение можно также доказать, основываясь исключительно на свойствах целых рядов и на теореме о существовании неявных функций (Bulletin de la Société mathématique, т. XXXVI, 1908, стр. 209—215).

[2]) Мы устраняем из рассмотрения случай, когда $\Delta(x)$ тождественно равно нулю. В этом случае $f(x, y)$ делилось бы на множитель $[f_1(x, y)]^k$, где $k>1$, а $f_1(x, y)$ имеет тот же вид, как и $f(x, y)$.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$. Конечное значение не может быть равно y_2, так как обратный путь должен привести от y_2 к y_1. Следовательно, это конечное значение должно быть одним из корней $y_1, y_3, \ldots, y_n$; если оно есть y_1, то мы видим, что оба корня переходят один в другой, когда переменное описывает петлю вокруг начала координат. Если это конечное значение не есть y_1, то оно есть один из $(n-2)$ остающихся корней; пусть это будет корень y_3. Новая петля, описываемая в том же направлении, приведет от корня y_3 к одному из корней $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n$. По тем же основаниям, как выше, это не может быть y_3; это не может быть также и y_2, так как обратный путь приводит от y_2 к y_1. Следовательно, это конечное значение есть y_1 или один из $(n-3)$ остающихся корней $y_4, y_5, \ldots, y_n$. Если оно есть y_1, то три корня y_1, y_2, y_3 перемещаются в круговом порядке, когда переменное x описывает петлю вокруг начала координат. Если же конечное значение отлично от y_1, то мы будем продолжать перемещать переменное вокруг начала координат, и, после конечного числа операций, мы необходимо придем к одному из полученных уже корней, именно к корню y_1. Предположим, например, что это случится после p операций. Мы видим, что p получающихся корней $y_1, y_2, \ldots, y_p$ переставляются в круговом порядке, когда переменное x описывает петлю вокруг начала координат; в этом случае говорят, что корни образуют *круговую систему p корней*. Если $p=n$, то n корней образуют единственную круговую систему. Если $p<n$, то мы снова начнем предыдущие рассуждения, исходя от одного из $n-p$ остающихся корней и т. д.; ясно, что продолжая те же операции, мы, наконец, исчерпаем все корни. Таким образом, мы можем высказать следующее предложение: *n корней уравнения $F(x, y)=0$, равных нулю при $x=0$, образуют в области начала координат одну или несколько круговых систем.*

Чтобы это предложение было вполне общим, достаточно условиться, что круговая система может также состоять только из одного корня; тогда этот корень есть однозначная функция в области начала координат.

Корни одной и той же круговой системы можно представить одним общим разложением. Пусть будут $y_1, y_2, \ldots, y_p$ корни круговой системы; положим $x=x'^p$. Каждый из этих корней есть голоморфная функция от x' при всех значениях переменного x', кроме $x'=0$; с другой стороны, когда x' описывает петлю вокруг точки $x'=0$, точка x описывает p последовательных петель в том же направлении вокруг начала координат; следовательно, каждый из корней $y_1, y_2, \ldots, y_p$ возвращается к своему начальному значению: они суть однозначные функции от x' в области начала координат. Так как эти корни стремятся к нулю вместе с x', то точка $x'=0$ может быть только обыкновенною точкою, и один из этих корней представляется разложением вида

$$y = a_1 x' + a_2 x'^2 + \ldots + a_m x'^m + \ldots, \tag{29}$$

или, заменяя x' через $x^{\frac{1}{p}}$,

$$y = a_1 x^{\frac{1}{p}} + a_2 \left(x^{\frac{1}{p}}\right)^2 + \ldots + a_m \left(x^{\frac{1}{p}}\right)^m + \ldots \tag{30}$$

Мы докажем теперь, что **разложение** (30) **представляет все корни одной и той же круговой системы, если только давать количеству** $x^{\frac{1}{p}}$ **его** p **значений**. В самом деле, предположим, что взяв для корня $\sqrt[p]{x}$ одно из его значений, мы получили разложение корня y_1; если переменное x описывает в прямом направлении петлю вокруг начала координат, то y_1 изменяется в y_2, а $x^{\frac{1}{p}}$ получает множитель $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Точно так же мы увидим, что мы получим y_q, заменяя в формуле (30) $x^{\frac{1}{p}}$ через $x^{\frac{1}{p}} e^{\frac{2q\pi i}{p}}$. Из единства этого разложения ясно видно, что p корней переставляются в круговом порядке.

Остается показать, как можно выделить n корней уравнения $F(x, y) = 0$ в круговые системы и вычислить коэффициенты a_i разложений (30). Рассмотрим один частный случай.

Если при $x = y = 0$ производная $\frac{\partial F}{\partial x}$ не равна нулю, то разложение функции $F(x, y)$ содержит член первой степени относительно x, и мы имеем

$$F(x, y) = Ax + By^n + \ldots \quad (AB \neq 0), \tag{31}$$

при чем опущенные члены делятся на один из множителей x^2, xy, y^{n+1}. Примем на время y за независимое переменное; уравнение $F(x, y) = 0$ имеет единственный корень, стремящийся к нулю вместе с y, и этот корень голоморфен в области начала координат. Его разложение, которое мы уже умеем вычислять (т. I, §§ 20 и 187), имеет вид

$$x = y^n (a_0 + a_1 y + \ldots) \quad (a_0 \neq 0). \tag{32}$$

Извлекая корень n-ой степени из обеих частей, получим

$$x^{\frac{1}{n}} = y \sqrt[n]{a_0 + a_1 y + \ldots} \tag{33}$$

При $y = 0$ вспомогательное уравнение $u^n = a_0 + a_1 y + \ldots$ имеет n различных корней, каждый из которых разлагается в целый ряд, расположенный по степеням переменного y. Так как эти корни получаются один из другого умножением их на различные степени от $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, то можно взять для $\sqrt[n]{a_0+a_1y+\ldots}$ в формуле (33) какое-нибудь одно из его значений, условившись давать для $x^{\frac{1}{n}}$ последовательно его n значений.

Следовательно, уравнение (33) можно представить в виде

$$x^{\frac{1}{n}}=b_1y+b_2y^2+\ldots \qquad (b_1\neq 0);$$

отсюда обратно получаем разложение y по степеням $x^{\frac{1}{n}}$

$$y=c_1x^{\frac{1}{n}}+c_2\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^2+\ldots \tag{34}$$

Это разложение, где для $x^{\frac{1}{n}}$ надо брать его n значений, представляет n корней, стремящихся к нулю вместе с x. Следовательно, эти n корней образуют единственную круговую систему.

Для изучения общего случая следует обратиться к сочинениям, посвященным теории алгебраических функций [1]).

362. Алгебраические функции.—Неявные функции, всего лучше изученные до сих пор, суть алгебраические функции, определяемые уравнением $F(x, y)=0$, левая часть которого есть целый неразложимый многочлен относительно x и y. Целый многочлен называется неразложимым, если нельзя найти два других таких целых многочлена меньших степеней $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$, чтобы было тождественно

$$F(x, y)=F_1(x, y).\ F_2(x, y).$$

Если многочлен $F(x, y)$ равен произведению такого вида, то ясно, что уравнение $F(x, y)=0$ можно заменить двумя отдельными уравнениями $F_1(x, y)=0$, $F_2(x, y)=0$.

Пусть будет

$$F(x, y)=\varphi_0(x)y^n+\varphi_1(x)y^{n-1}+\ldots+\varphi_{n-1}(x)y+\varphi_n(x)=0 \tag{35}$$

уравнение n-ой степени относительно y, где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ суть целые многочлены относительно x. Исключая y из соотношений $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, мы получим целый многочлен $\Delta(x)$, который не может быть тождественно равен нулю, так как $F(x, y)$, по предположению, неразложимо и потому не может иметь с $F'(x,y)$ общих множителей. Отметим в плоскости точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$, представляющие корни

[1]) См. также известный мемуар Пюизэ (Puiseux) об алгебраических функциях (Journal de Mathématiques, т. XV, 1850).

уравнения $\Delta(x)=0$, и точки $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, представляющие корни уравнения $\varphi_0(x)=0$, при чем некоторые из корней α_i могут входить также в число корней уравнения $\varphi_0(x)=0$. В точке a, отличной от точек α_i, β_j, уравнение $F(a, y)=0$ имеет n различных и конечных корней $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Следовательно, в области точки a уравнение (35) имеет n голоморфных корней, стремящихся соответственно к $b_1, b_2, \ldots b_n$, когда x стремится к a. Рассмотрим корень α_i результанта $\Delta(x)$; уравнение $F(\alpha_i, y)=0$ имеет несколько равных корней. Предположим, например, что оно имеет p корней, равных b. Эти p корней, стремящихся к b, когда x стремится к α_i, распадаются на некоторое число круговых систем, и корни одной и той же круговой системы представляются разложением в ряд, расположенный по дробным степеням разности $x-\alpha_i$. Если значение α_i не обращает в нуль многочлена $\varphi_0(x)$, то все корни уравнения (35) в области точки α_i распадаются таким образом на несколько круговых систем, при чем некоторые из этих систем могут содержать только один корень. Для точки β_j, обращающей в нуль многочлен $\varphi_0(x)$, некоторые из корней уравнения (35) обращаются в бесконечность. Чтобы изучить эти корни, положим $y=\frac{1}{y'}$; мы приходим к изучению корней уравнения $F_1(x, y')=$ $=y'^n F\left(x, \frac{1}{y'}\right)=0$, обращающихся в нуль при $x=\beta_j$. Эти корни также распадаются на несколько круговых систем, при чем корни одной и той же системы представляются разложением в ряд вида

$$y'=a_m(x-\beta_j)^{\frac{m}{p}}+a_{m+1}(x-\beta_j)^{\frac{m+1}{p}}+\ldots; \quad (a_m \neq 0); \tag{36}$$

соответствующие корни уравнения относительно y определятся разложением

$$y=(x-\beta_j)^{-\frac{m}{p}}\left[a_m+a_{m+1}(x-\beta_j)^{\frac{1}{p}}+\ldots\right]^{-1}, \tag{37}$$

которое можно расположить по возрастающим степеням количества $(x-\beta_j)^{\frac{1}{p}}$, но некоторое конечное число первых членов разложения будет иметь отрицательные показатели.

Чтобы исследовать значения y при бесконечно больших значениях x, положим $x=\frac{1}{x'}$; мы придем к изучению корней уравнения того же вида в области начала координат. В конечном выводе, в области любой точки $x=a$ все n корней уравнения (35) представляются некоторым числом рядов, расположенных по возрастающим степеням $x-a$ или $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, которые могут содержать конечное число членов с отрицательными показателями; это предложение применимо также к бесконечно большим значениям переменного x, при условии замены $x-\infty$ через $\frac{1}{x}$.

Важно заметить, что дробные степени и отрицательные показатели появляются только для исключительных точек. Следовательно, единственные особые точки корней уравнения суть критические точки, вокруг которых некоторые из этих корней переставляются в круговом порядке, и полюсы, в которых некоторые из этих корней обращаются в бесконечность; при этом одна и та же точка может быть одновременно и полюсом и критическою точкою. Эти два вида особых точек часто называются **алгебраическими особыми точками**.

До сих пор мы изучали корни данного уравнения только в области определенной точки. Предположим теперь, что мы соединили две точки $x=a$, $x=b$, для которых уравнение (35) имеет n различных и конечных корней, путем AB, не проходящим ни через одну из особых точек уравнения. Пусть будет y_1 корень уравнения $F(a,y)=0$; корень $y=f(x)$, который обращается в y_1 при $x=a$, представляется в области точки a разложением в целый ряд $P(x-a)$, и можно искать его аналитическое продолжение, когда переменное описывает дугу AB. Это — частный случай общей задачи, и мы заранее знаем, что мы придем в точку B с конечным значением, которое есть корень уравнения $F(b,y)=0$ (§ 348). Мы наверное придем в точку b после **конечного** числа действий; в самом деле, радиусы кругов сходимости рядов, представляющих различные корни уравнения $F(b,y)=0$, и имеющих центры в различных точках пути AB, имеют нижнюю границу $\delta>0$ [1]), так как этот путь не содержит ни одной критической точки, и ясно, что всегда можно взять радиусы различных кругов, которыми мы будем пользоваться в аналитическом продолжении, не меньшими, чем δ.

Из всех путей, соединяющих точки A и B, всегда можно найти один, приводящий от корня y_1 к любому из корней уравнения $F(b,y)=0$, как к конечному значению. Чтобы доказать это, мы будем основываться на следующем предложении. **Если аналитическая функция z переменного x имеет только p различных значений при каждом значении x, и если она имеет во всей плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, только алгебраические особые точки, то p значений функции z суть корни уравнения степени p, коэффициенты которого суть рациональные функции**

[1]) Чтобы доказать это с полною строгостью, достаточно повторить рассуждение, аналогичное рассуждению § 346.

от x. Пусть будут $z_1, z_2, \ldots, z_p$ эти p значений функции z; если переменное x описывает замкнутую линию, то эти p значений $z_1, z_2, \ldots, z_p$ могут только обмениваться между собою. Следовательно, симметрическая функция $u_k = z_1^k + z_2^k + \ldots + z_p^k$, где k — целое положительное число, есть однозначная функция. Сверх того, эта функция может иметь только полярные особенности. В самом деле, в области любой точки $x = a$, лежащей на конечном расстоянии, разложения значений $z_1, z_2, \ldots, z_p$ могут иметь только конечное число членов с отрицательными показателями; следовательно, то же имеет место и для разложения u_k. Кроме того, так как функция u_k однозначна, то ее разложение не может содержать дробных степеней. Следовательно, точка a есть полюс или обыкновенная точка функции u_k; то же имеет место и для бесконечно удаленной точки. Таким образом, каково бы ни было целое число k, функция u_k есть рациональная функция от x; следовательно, то же имеет место и для простых симметрических функций, как Σz_i, $\Sigma z_i z_k, \ldots$, и теорема доказана.

Предположим теперь, что переходя из точки a в какую-нибудь другую точку x плоскости всеми возможными путями, мы можем получить, как конечные значения, только p из корней уравнения

$$F(x, y) = 0 \qquad (p < n).$$

Очевидно, что эти p корней $y_1, y_2, \ldots, y_p$ могут только обмениваться местами, если переменное x описывает замкнутый контур, и они обладают всеми свойствами p ветвей $z_1, z_2, \ldots, z_p$ аналитической функции z, которые мы только что изучали. Отсюда мы заключаем, что $y_1, y_2, \ldots, y_p$ суть корни уравнения p-ой степени $F_1(x, y) = 0$ с рациональными коэффициентами. Следовательно, уравнение $F(x, y) = 0$ имеет корнями все корни уравнения $F_1(x, y) = 0$, каково бы ни было x, и многочлен $F(x, y)$ должен быть разложимым, что противно предположению. Таким образом, если не наложено никакого ограничения на путь, описываемый переменным x, то n корней уравнения (35) должны рассматриваться, как различные ветви одной и той же аналитической функции, как мы это уже заметили на некоторых простых примерах (§ 268).

Проведем из каждой критической точки бесконечный разрез таким образом, чтобы эти разрезы не пересекались между собою. Если путь, проходимый переменным, не может пересекать ни одного разреза, то n корней суть однозначные функции во всей плоскости, так как всякие два пути, имеющие общие конечные точки, будет можно привести один к другому непрерывным изменением, не пересекая ни одной из критических точек (§ 347). Чтобы можно было следить за непрерывным изменением корня вдоль какого-нибудь пути, достаточно знать закон обмена этих корней, когда переменное описывает петлю вокруг каждой из критических точек.

Примечание.—Изучение алгебраических функций относительно легко потому, что можно заранее определить алгебраическими вычислениями особые точки этих функций. Это, вообще, не имеет место для неалгебраических неявных функций, которые могут иметь трансцендентные особые точки. Например, неявная функция $y(x)$, определяемая уравнением $e^y - x - 1 = 0$, не имеет ни одной алгебраической критической точки, но она имеет трансцендентную особую точку $x = -1$.

363. Абелевы интегралы.—Всякий интеграл $I = \int R(x, y)\, dx$, где $R(x, y)$ есть рациональная функция от x и y, а y есть алгебраическая функция, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, есть абелев интеграл, принадлежащий к этой кривой $F(x, y) = 0$. Чтобы окончательно определить этот интеграл, надо указать нижний предел x_0 и соответствующее значение y_0, взятое среди корней уравнения $F(x_0, y) = 0$. Вот некоторые наиболее важные общие свойства этих интегралов. Если мы переходим из точки x_0 в какую-нибудь точку x всеми возможными путями, то все значения интеграла I содержатся в одной из формул

$$I = I_k + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_r\omega_r \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

где $I_1, I_2, \ldots, I_n$—значения интеграла, соответствующие некоторым определенным путям $m_1, m_2, \ldots, m_r$—произвольные целые числа, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$—периоды. Эти периоды—двух родов. Одни происходят от петель, описываемых вокруг полюсов функции $R(x, y)$; они называются *полярными периодами*. Другие происходят от замкнутых контуров, называемых *циклами*, окружающих несколько критических точек; они называются *циклическими периодами*. Число различных циклических периодов зависит только от рассматриваемого алгебраического соотношения $F(x, y) = 0$; оно равно $2p$, где p—род соответствующей кривой (§ 344). Напротив, число полярных периодов может быть произвольным. С точки зрения особенностей, различают три класса абелевых интегралов. Интегралами *первого вида* называются те абелевы интегралы, которые остаются конечными в области всякого значения переменного x; если их модуль неограниченно возрастает, то это может быть только от прибавления бесконечного множества периодов. Интегралами *второго вида* называются интегралы, имеющие единственный полюс, а интегралами *третьего вида*—интегралы, имеющие две логарифмических особых точки. Всякий абелев интеграл есть сумма интегралов трех видов, и число различных интегралов первого вида равно роду алгебраического соотношения $F(x, y) = 0$.

Изучение этих интегралов выполняется весьма просто при помощи плоских поверхностей со многими листами, называемых *римановыми поверхностями*. Мы не будем здесь им заниматься. Мы дадим только, вследствие его большой простоты, доказательство основного предложения, открытого Абелем.

364. Теорема Абеля. — Чтобы выразить проще эту теорему, рассмотрим плоскую кривую C, представляемую уравнением $F(x, y) = 0$; пусть будет $\Phi(x, y)$ уравнение другой алгебраической плоской кривой C'. Эти две кривые имеют N общих точек

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N);$$

число N равно произведению степеней этих двух кривых. Пусть будет $R(x, y)$ рациональная функция; рассмотрим следующую сумму

$$I = \sum_{i=1}^{N} \int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} R(x, y)\,dx, \tag{39}$$

где $\int_{(x_0,y_0)}^{(x_i, y_i)} R(x, y)dx$ обозначает абелев интеграл, взятый от постоянной точки x_0 до точки x_i вдоль некоторого пути, который приводит для y от начального значения y_0 к конечному значению y_i, при чем для всех интегралов начальное значение y_0 переменного y одно и то же. Очевидно, что сумма I определена только до периода, как и каждый интеграл, в нее входящий. Предположим теперь, что некоторые из коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_k$ многочлена $\Phi(x, y)$ изменяются. Если эти коэффициенты изменяются непрерывно, то точки x_i также изменяются непрерывно; если ни одна из точек не проходит через точки прерывности интеграла $\int R(x, y)dx$, то сумма I изменяется также непрерывно, если только брать непрерывное изменение каждого из входящих в нее интегралов вдоль пути, описываемого соответствующим верхним пределом. Следовательно, сумма I есть функция параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$, аналитический вид которых мы сейчас найдем.

Обозначим, вообще, через δV полный дифференциал от какой-нибудь функции V относительно переменных $a_1, a_2, \ldots, a_k$,

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a_1}\delta a_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_k}\delta a_k.$$

По формуле (39) мы имеем

$$\delta I = \sum_{i=1}^{N} R(x_i, y_i)\delta x_i.$$

Из соотношений $F(x_i, y_i) = 0$, $\Phi(x_i, y_i) = 0$ получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\delta y_i + \delta \Phi_i = 0,$$

и, следовательно, $\delta x_i = \Psi(x_i, y_i)\delta \Phi_i$, где $\Psi(x_i, y_i)$ есть рациональная функция от $x_i, y_i, a_1, a_2, \ldots, a_k$ и Φ_i обозначает $\Phi(x_i, y_i)$. Следовательно, мы имеем

$$\delta I = \sum_{i=1}^{i=N} R(x_i, y_i)\Psi(x_i, y_i)\delta \Phi_i.$$

Коэффициент при δa_1 в правой части есть симметрическая рациональная функция координат N точек (x_i, y_i) пересечения кривых C, C'; из теории исключения известно, что это есть рациональная функция коэффициентов многочленов $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$, и, следовательно, рациональная функция от $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Очевидно, что то же имеет место и по отношению к коэффициентам при $\delta a_2, \ldots, \delta a_k$, и мы получим I, интегрируя полный дифференциал

$$I = \int \pi_1 \delta a_1 + \pi_2 \delta a_2 + \pi_k \delta a_k,$$

где $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ — рациональные функции переменных $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Но интегрирование не может ввести других трансцендентных функций, кроме логарифмов. Следовательно, сумма I равна рациональной функции коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, сложенной с суммою логарифмов от рациональных функций тех же коэффициентов, при чем каждый из этих логарифмов умножен на постоянный множитель. Таково, в его самом общем виде, содержание теоремы Абеля. Геометрически ее можно выразить следующим образом: сумма значений любого абелева интеграла, взятых от общей начальной точки до N точек пересечения данной кривой с переменною кривою $\Phi(x, y)$ степени m, равна рациональной функции коэффициентов многочлена $\Phi(x,y)$, сложенной с конечным числом логарифмов от рациональных функций тех же коэффициентов, при чем каждый из логарифмов умножен на постоянный множитель.

В этой второй форме теорема кажется на первый взгляд более поразительною, но в приложениях всегда приходится обращаться мыслью к ее аналитической форме, чтобы вычислить непрерывное изменение суммы I, соответствующее непрерывному изменению параметров $a_1, a_2, \ldots a_k$. Теорема имеет вполне точный смысл только в том случае, если приняты во внимание пути, описываемые N точками $x_1, x_2, \ldots, x_N$ на плоскости переменного x.

Предложение Абеля делается замечательно простым, если интеграл I — первого вида. В самом деле, если бы $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ не были тождественно равны нулю, то можно было бы найти систему значений $a_1 = a'_1, \ldots, a_k = a'_k$, при которых I обращалось бы в бесконечность. Пусть будут $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_N, y_N')$ точки пересечения кривой C с кривою C', соответствующею значениям $a'_1, \ldots, a'_k$ параметров. Интеграл $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} R(x, y) dx$ возрастал бы неограниченно, если бы верхний предел стремился к одной из точек (x'_i, y'_i), что невозможно, так как интеграл—первого вида. Следовательно, $\delta I=0$, и, если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ изменяются непрерывно, I остается постоянным; в этом случае теорема Абеля может быть выражена следующим образом:

Пусть будут даны постоянная кривая C и переменная кривая C' степени m; сумма приращений абелева интеграла первого вида, отнесенного к кривой C, вдоль непрерывных линий, описываемых точками пересечений C с C', равна нулю.

Примечания. — Мы предполагаем, что степень кривой C' остается постоянною и равною m. Если при некоторых частных значениях коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ эта степень понижается, то некоторые из точек пересечения кривых C и C' должны рассматриваться, как бесконечно удаленные, и их надо принимать во внимание в приложении теоремы. Приведем еще следующее, почти очевидное замечание, что если некоторые из точек пересечения кривых C и C' постоянны, то нет надобности вводить в сумму I соответствующие интегралы.

365. Приложение к ультра-эллиптическим интегралам.—Приложения теоремы Абеля в Анализе и Геометрии многочисленны и важны. Мы вычислим δI в раскрытом виде в случае ультра-эллиптических интегралов. Рассмотрим алгебраическое соотношение

$$y^2=R(x)=A_0x^{2p+2}+A_1x^{2p+1}+\ldots+A_{2p+2}, \tag{40}$$

где многочлен $R(x)$—первый со своею производною; мы предположим, что A_0 может быть равно нулю, что A_0 и A_1 не равны нулю одновременно, так что степень многочлена $R(x)$ равна $2p+1$ или $2p+2$. Пусть будет $Q(x)$ какой-нибудь многочлен степени q; возьмем за начальную точку значение x_0 переменного x, не обращающее в нуль многочлена $R(x)$; пусть будет y_0 корень уравнения $y^2=R(x_0)$. Положим

$$v(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где интеграл взят вдоль пути, соединяющего точку x_0 с точкою x, а y обозначает конечное значение корня $\sqrt{R(x)}$, когда мы выходим из точки x_0 с значением y_0. Чтобы исследовать систему точек пересечения кривой C, представляемой уравнением (40), с другою алгебраическою кривою C', очевидно, можно заменить в уравнении этой последней кривой, четные степени от y, например, y^{2r} через $[R(x)]^r$, а нечетные степени y^{2r+1} через $y[R(x)]^r$. Сделав эти подстановки, мы получим уравнение, содержащее y только в первой степени, и можно предположить, что уравнение кривой C' имеет вид

$$y\varphi(x)-f(x)=0, \tag{41}$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — взаимно простые многочлены степеней λ и μ; предположим, что некоторые из их коэффициентов переменны. Абсциссы точек пересечения кривых C и C' суть корни уравнения степени N

$$\psi(x) = R(x)\varphi^2(x) - f^2(x) = 0. \tag{42}$$

При некоторых частных системах значений переменных коэффициентов многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ степень уравнения $\psi(x) = 0$ может быть ниже, чем N; в этом случае некоторые из точек пересечения суть бесконечно удаленные точки, но соответствующие им интегралы должны быть введены в изучаемую нами сумму. Всякому корню x_i уравнения (42) соответствует значение y, именно, $y_i = \dfrac{f(x_i)}{\varphi(x_i)}$. Рассмотрим сумму

$$I = \sum_{i=1}^{N} v(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{N} \int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} \frac{Q(x)dx}{\sqrt{R(x)}};$$

мы имеем

$$\delta I = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q(x_i)\delta x_i}{\sqrt{R(x_i)}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q(x_i)\varphi(x_i)}{f(x_i)}\,\delta x_i,$$

так как конечное значение корня в точке x_i должно быть равно y_i, т.-е. $\dfrac{f(x_i)}{\varphi(x_i)}$. С другой стороны, из уравнения $\psi(x_i) = 0$ получаем

$$\psi'(x_i)\delta x_i + 2R(x_i)\varphi(x_i)\delta\varphi_i - 2f(x_i)\,\delta f_i = 0,$$

и, следовательно,

$$\delta I = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q(x_i)\varphi(x_i)}{f(x_i)} \times \frac{2f(x_i)\delta f_i - 2R(x_i)\varphi(x_i)\delta\varphi_i}{\psi'(x_i)},$$

или, принимая во внимание самое уравнение (42),

$$\delta I = \sum_{i=1}^{N} \frac{2Q(x_i)(\varphi_i\delta f_i - f_i\delta\varphi_i)}{\psi'(x_i)}. \tag{43}$$

Вычислим, например, коэффициент при δa_k в δI, где a_k обозначает переменный коэффициент при x^k в многочлене $f(x)$. Так как δa_k не входит в $\delta\varphi_i$ и имеет множитель x_i^k в δf_i, то искомый коэффициент при δa_k равен

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{2Q(x_i)\varphi(x_i)x_i^k}{\psi'(x_i)} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\pi(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

где $\pi(x) = Q(x)\varphi(x)x^k$. Предыдущую сумму нужно распространить на все корни уравнения $\psi(x) = 0$; это — симметрическая и рациональная функция этих корней, и, следовательно, рациональная функция коэффициентов многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. Вычисление можно упростить, заметив, что $\sum\frac{\pi(x_i)}{\psi'(x_i)}$ равно сумме вычетов рациональной функции $\frac{\pi(x)}{\psi(x)}$ относительно N полюсов $x_1, x_2, \ldots, x_N$, лежащих на конечном расстоянии. На основании общего предложения (§ 314), эта сумма равна также вычету относительно бесконечно удаленной точки, взятому с обратным знаком. Следовательно, мы получим коэффициент при δa_k простым делением.

Нетрудно проверить, что если интеграл $v(x, y)$—первого вида, то этот коэффициент равен нулю. По предположению мы имеем $q \leqq p-1$; степень многочлена $\pi(x)$ равна $q+\mu+k$, следовательно,

$$q+\mu+k \leqq \mu+k+p-1.$$

Степень многочлена $\psi(x)$ есть N. Если нельзя сделать приведение высших членов многочленов $R(x)\varphi^2(x)$ и $f^2(x)$, то

$$2\lambda \leqq N,\ 2p+1+2\mu \leqq N,$$

откуда

$$\lambda+\mu+p+1 \leqq N,$$

и, тем более, так как $k \leqq \lambda$,

$$k+\mu+p+1 \leqq N.$$

Если бы в результате приведения два высших члена сокращались, то было бы

$$\lambda=\mu+p+1;$$

но, так как член $a_k x^{\lambda+k}$, вообще, в $\psi(x)$ не исчезает, то было бы $\lambda+k \leqq N$, и мы получили бы прежнее неравенство. Отсюда следует, что всегда

$$q+\mu+k \leqq N-2.$$

Следовательно, вычет рациональной функции $\frac{\pi(x)}{\psi(x)}$ относительно бесконечно удаленной точки равен нулю, так как разложение этой функции начинается с члена с $\frac{1}{x^2}$, или с члена более высокой степени. Точно так же мы найдем, что если степень многочлена $Q(x)$ равна $p-1$ или ниже, то коэффициент при δb_h в δI равен нулю, где b_h есть один из переменных коэффициентов многочлена $\varphi(x)$. Эти результаты вполне согласуются с общею теорией. Возьмем, например, $\varphi(x)=1$ и положим

$$f(x)=\sqrt{A_0}\,x^{p+1}+a_p x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1 x+a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_p$ суть $p+1$ переменных коэффициентов. Кривые

$$y^2=R(x),\quad y=f(x)$$

пересекаются в $2p+1$ переменных точках, и сумма значений интеграла $v(x,y)$, взятых от общей начальной точки до этих $2p+1$ точек пересечения, есть алгебраическо-логарифмическая функция коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Но можно взять эти $p+1$ коэффициентов таким образом, чтобы $p+1$ точек пересечения были любыми заданными точками кривой $y^2=R(x)$; тогда координаты остальных p точек будут алгебраическими функциями координат $p+1$ данных точек. Следовательно, сумма $p+1$ интегралов

$$v(x_1,y_1)+v(x_2,y_2)+\ldots+v(x_{p+1},y_{p+1}),$$

взятых от общей начальной точки до $p+1$ произвольных точек, равна сумме p интегралов, пределы которых суть алгебраические функции координат

$$(x_1,y_1),\ldots,(x_{p+1},y_{p+1}),$$

сложенной с алгебраическо-логарифмическими выраженями. Ясно, что последовательными приведениями можно распространить это предложение на сумму m интегралов, где m — любое целое число, большее, чем p. В частности, сумму любого числа интегралов первого вида можно привести к сумме только p интегралов. Это свойство, распространяющееся на самые общие абелевы интегралы первого вида, составляет теорему сложения этих интегралов.

В случае эллиптических интегралов первого вида из теоремы Абеля можно непосредственно получить теорему сложения для функции $\wp u$. Рассмотрим нормальную кривую третьего порядка

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3;$$

пусть будут $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ точки пересечения этой кривой с некоторою прямою D. По общей теореме сумма

$$\int_\infty^{(x_1,y_1)}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}+\int_\infty^{(x_2,y_2)}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}+\int_\infty^{(x_3,y_3)}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

равно периоду, так как точки M_1, M_2, M_3 обращаются в бесконечно удаленные точки, если прямая D сама делается бесконечно удаленною прямою. Но если мы воспользуемся параметрическим представлением $x=\wp u$, $y=\wp' u$ для кривой третьего порядка, то параметр u как раз равен интегралу $\int_\infty^{(x,y)}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$, и предыдущая формула выражает, что сумма аргументов u_1, u_2, u_3, соответствующих точкам M_1, M_2, M_3, равна периоду. Выше мы видели, что это соотношение равносильно формуле сложения для функции $\wp u$ (§ 342).

366. Распространение формулы Лагранжа.— Общая теорема о неявных функциях, определяемых системою совместных уравнений (т. I, § 188), распространяется также на комплексные переменные, если при этом сохраняются остальные условия теоремы. Рассмотрим, например, два совместных уравнения

$$P(x,y)=x-a-\alpha f(x,y)=0,\quad Q(x,y)=y-b-\beta\varphi(x,y)=0, \tag{44}$$

где x и y — комплексные переменные, а $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — функции этих переменных, голоморфные вблизи системы значений $x = a$, $y = b$. При $\alpha = 0$, $\beta = 0$ уравнения (44) имеют систему решений $x = a$, $y = b$, и определитель $\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}$ равен единице. Следовательно, по общей теореме, уравнения (44) имеют систему решений, и притом только одну, стремящихся соответственно к a и b, когда α и β стремятся к нулю, и эти решения суть голоморфные функции от α и β. Лаплас первый распространил на эту систему уравнений формулу Лагранжа (§ 313).

Предположим для определенности, что из точек a и b соответственно в плоскостях переменных x и y описаны две окружности C и C' настолько малыми радиусами r и r', чтобы функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ были голоморфны, когда x и y остаются внутри или на самих этих окружностях. Пусть будут M и M' наибольшие значения модулей $|f(x, y)|$ и $|\varphi(x, y)|$ в этой области. Предположим сверх того, что постоянные α и β удовлетворяют условиям $M|\alpha| < r$, $M'|\beta| < r'$.

Дадим переменному x какое-нибудь значение, лежащее внутри или на самой окружности C; уравнение $Q(x, y) = 0$ имеет внутри C' только одно решение для y, так как аргумент количества $y - b - \beta\varphi(x, y)$ возрастает на 2π, когда y описывает C' в прямом направлении (§ 311). Этот корень $y_1 = \psi(x)$ есть функция от x, голоморфная в круге C. Если мы заменим в $P(x, y)$ переменное y этим корнем y_1, то получим уравнение $x - a - \alpha f(x_1, y_1) = 0$, которое, по тем же основаниям, как выше, имеет один и только один корень внутри C.

Пусть будет $x = \xi$ этот корень, и η — соответствующее значение переменного y, $\eta = \psi(\xi)$. Обобщенная формула Лагранжа дает разложение по степеням количеств α и β всякой функции $F(\xi, \eta)$, голоморфной в определенной выше области.

Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \int_{(C)} dx \int_{(C')} \frac{F(x, y)dy}{P(x, y)Q(x, y)}. \tag{45}$$

Если x есть какая-нибудь точка окружности C, то $P(x, y)$ не может обращаться в нуль ни при каком значении переменного y, лежащем внутри C', так как аргумент количества $x - a - \alpha f(x, y)$ непременно возвращается к своему начальному значению, когда y описывает C'. Следовательно, единственный полюс подъинтегральной функции, рассматриваемой, как функция только одного переменного y, есть полюс $y = y_1$, определяемый корнем уравнения $Q(x, y) = 0$, соответствующим значению переменного x, лежащему на окружности C; поэтому после первого интегрирования мы имеем

$$\int_{(C')} \frac{F(x, y)dy}{P(x, y)Q(x, y)} = 2i\pi \frac{F(x_1, y_1)}{P(x_1, y_1)\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_1}.$$

Правая часть, где y_1 заменено определенною выше голоморфною функцией $\psi(x)$, имеет в свою очередь единственный полюс первого порядка, лежащий внутри C, именно, точку $x = \xi$, которому соответствует значение $y_1 = \eta$; нетрудно найти, что соответствующий вычет равен

$$\frac{2i\pi F(\xi, \eta)}{\left[\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}\right]_{\substack{x=\xi \\ y=\eta}}}.$$

Следовательно, двойной интеграл I равен

$$I = -4\pi^2 \frac{F(\xi,\eta)}{\left[\dfrac{D(P,Q)}{D(x,y)}\right]_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

С другой стороны, выражение $\dfrac{1}{PQ}$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$\frac{1}{(x-a-\alpha f)(y-b-\beta\varphi)} = \sum \frac{\alpha^m\beta^n f^m\varphi^n}{(x-a)^{m+1}(y-b)^{n+1}};$$

отсюда имеем $I = \Sigma J_{mn}\alpha^m\beta^n$, где

$$J_{mn} = \int_{(C)} dx \int_{(C_1)} \frac{F(x,y)[f(x,y)]^m[\varphi(x,y)]^n dy}{(x-a)^{m+1}(y-b)^{n+1}}.$$

Этот интеграл уже был вычислен (§ 356), и мы нашли, что он равен

$$-\frac{4\pi^2}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}[F(a,b)\,f^m(a,b)\,\varphi^n(a,b)]}{\partial a^m \partial b^n}.$$

Сравнивая между собою оба выражения интеграла I, мы получим искомую формулу, представляющую очевидную аналогию с формулою (50) (§ 313),

$$\frac{F(\xi,\eta)}{\left[\dfrac{D(P,Q)}{D(x,y)}\right]_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}} = \sum_m\sum_n \frac{\alpha^m\beta^n}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}[F(a,b)f^m(a,b)\varphi^n(a,b)]}{\partial a^m\partial b^n}. \qquad (46)$$

Можно было бы получить также вторую формулу, аналогичную формуле (51) (§ 313), полагая

$$F(x,y) = \Phi(x,y)\frac{D(P,Q)}{D(x,y)},$$

но коэффициенты этой второй формулы не так просты, как в случае одного переменного.

Упражнения.

1. Доказать, что всякую алгебраическую кривую C_n порядка n и рода p можно привести бирациональным преобразованием к кривой порядка $p+2$.

[Можно поступать, как в § 344, пересекая данную кривую пучком кривых C_{n-2}, проходящих через $\dfrac{n(n-1)}{2}-3$ точек кривой C_n, среди которых есть $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}-p$ ее двойных точек, и полагая

$$X = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad Y = \frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

если уравнение пучка имеет вид $\varphi_1(x,y)+\lambda\varphi_2(x,y)+\mu\varphi_3(x,y)=0$.]

2. Вывести из предыдущего упражнения, что координаты точек кривой второго рода можно выразить через рациональные функции параметра t и корня квадратного из многочлена $R(t)$ пятой или шестой степени, первого со своею производною.

[Можно спачала показать, что точки кривой взаимно однозначно соответствуют точкам кривой четвертого порядка, имеющей двойную точку.]

3*. Пусть будет $y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ разложение в целый ряд алгебраической функции, корня уравнения $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ есть многочлен с целыми коэффициентами, при чем точка с координатами $x = 0$, $y = 0$ есть простая точка кривой, представляемой уравнением $F(x, y) = 0$ с касательною не параллельною оси Oy. Все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$ суть дроби, и достаточно изменить x в Kx, где K — надлежащее целое число, чтобы все эти коэффициенты сделались целыми числами.

[Эйзенштейн (Eisenstein).]

[Заметим, что достаточно сделать преобразование вида $x = k^2 x'$, $y = ky'$, чтобы коэффициент при y' в левой части нового уравнения был равен единице, а все остальные коэффициенты были целыми числами.]

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА XIII.

Простейшие функции комплексного переменного.

ГЛАВА XIV.

Общая теория аналитических функций по Коши.

ГЛАВА XV.

Однозначные функции.

ГЛАВА XVI.

Аналитическое продолжение.

ГЛАВА XVII.

Аналитические функции многих переменных.

Георгиевич, Г. и Гранмужен, Е. Химия красящих веществ. Под ред. и с дополнени. В. В. Шарвина. Изд. 3-е 1922 г. Стр. 611.

Каблуков. Основные начала физической химии. Вып. II. Электрохимия. С 44 рис. Изд. 2-е исправленн. и дополненн. 1922 г. Стр. 307.

Лебедев, П. Н. Давление света. Под ред. П. Лазарева и П. Кравца. С 25 фигур. Изд. 1922 г. Стр. 91. (Серия—„Классики естествознания, № 4".)

Рейхе, Ф. и Эпштейн, П. Теория квантов. Изд. 1922 г. Стр. 89.

Реформатский, А. Неорганическая химия. С 7 портрет. и 103 рис. Изд. 11-е. Стр. 570.

Смит, А. Введение в химию. Руководство к практическим занятиям. Изд. 1922 г. Берлин, Стр. 185.

Фаянс, К. Радиоактивность и современное учение о химических элементах. Перевод. и дополн. Э. В. Шпольского. С 12 рис. и 10 табл. Изд. 1922 г. Стр. 121. (Серия—„Современные проблемы естествознания, № 1".)

Шарвин, В. В. Введение в химию. Краткий курс неорганической химии. С 73 рис. Изд. 3-е 1922 г. Стр. 416.
