

В.ГОРДОН и М.СЕМЕНЦОВ-ОГИЕВСКИЙ

515

Г-68

КУРС НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ОНТИ-1937

ОТ АВТОРОВ

Для данного (второго) издания книга нами просмотрена с точки зрения тех изменений в методике преподавания, которые вытекают из реализации постановления СНК Союза ССР и ЦК ВКП(б) от 26/VI 1936 г. о работе высших учебных заведений.

7.550475
Поэтому мы придали особенное значение выводам из личного опыта работы в 1936/37 учебном году и из тех сообщений, которые нами получены от руководителей кафедр ряда машиностроительных вузов г. Москвы. В соответствии с этим получили развитие некоторые главы курса, введены новые разделы и рассмотрен ряд дополнительных примеров решения задач.

Что же касается таких вопросов, как линейная перспектива, метод проекций с числовыми отметками, построение теней и аффинное соответствие, то в соответствии с действующей для машиностроительных вузов программой мы ограничились в одних случаях сообщением лишь основных понятий, а в других — кратким изложением. Желающих подробно ознакомиться с указанными вопросами отсылаем к специальным пособиям, например Н. А. Рынин «Перспектива», В. С. Соков «Проекция с числовыми отметками», Н. А. Глаголев «Начертательная геометрия» — учебник для университетов.

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

Предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование способов точного изображения пространственных форм в двух измерениях. Изображения, построенные по правилам, изучаемым в начертательной геометрии, позволяют мысленно представить форму предмета, определить точные размеры и расположение в пространстве, изучать свойства геометрического характера, связанные с видом и расположением изображаемых предметов.

Развивая способность к пространственному мышлению, начертательная геометрия помогает усвоению вопросов, связанных с пространственными соотношениями и рассматриваемых в различных дисциплинах. Наконец, начертательная геометрия передает ряд своих выводов в курс черчения, обеспечивая выразительность и точность чертежей, а следовательно, и возможность реального осуществления изображаемых предметов.

Правила построения изображений, излагаемые в курсе начертательной геометрии, основаны на методе проекций, впервые стройно преподавшем французским ученым, инженером Гаспаром Монжем (Gaspard Monge) в конце восемнадцатого века.

§ 1. Центральная проекция

Представим себе в пространстве плоскость P и точку S , не лежащую в плоскости P (черт. 1).

Возьмем теперь в пространстве произвольную точку A и проведем через точки A и S прямую линию до пересечения с плоскостью P в точке a .

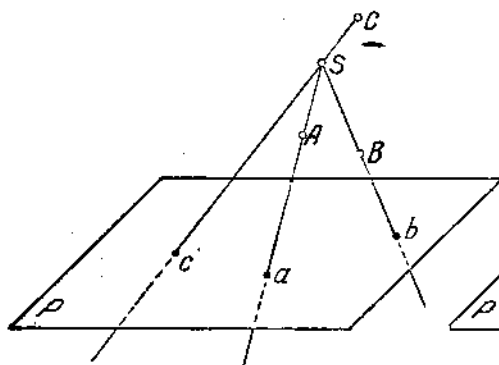
Точка a называется центральной проекцией точки A на плоскость P , точка S — центром проекций¹, линия SA — проектирующей прямой или проектирующим лучом и плоскость P — плоскостью проекций.

Можно строить проекции не только на плоскости, но и на иных поверхностях, например, на цилиндрической поверхности. В дальнейшем изложении будет рассматриваться построение проекций исключительно на плоскости как прием, имеющий наибольшее применение.

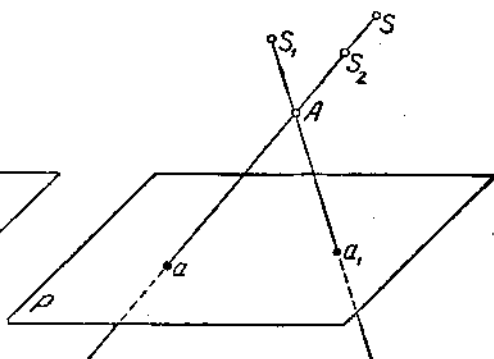
Следовательно, под «проекцией» точки будем понимать точку пересечения проектирующей ее прямой с плоскостью проекций.

¹ Центр проекций носит также название полюса проекций и отсюда центральная проекция называется также полярной.

Для нахождения проекций точек B и C (черт. 1). очевидно, необходимо через взятые точки и центр S провести проектирующие прямые до пересечения их с плоскостью P . Полученные точки пересечения b и c и будут соответственными проекциями точек B и C .



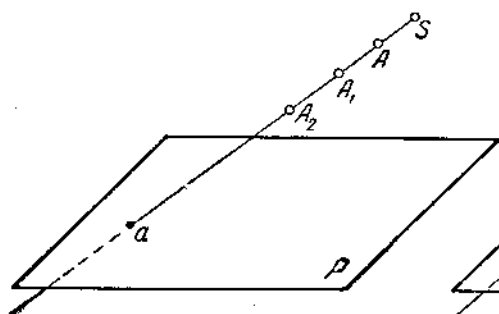
Черт. 1.



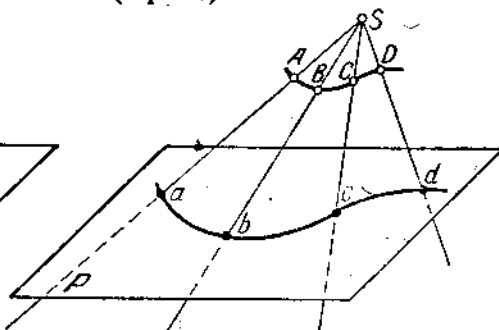
Черт. 2.

Так как через две точки пространства можно провести только одну прямую линию, то очевидно, что при неизменном положении центра S и плоскости P каждая точка пространства будет иметь на плоскости единственную свою проекцию.

При изменении положения центра S относительно выбранной плоскости P , или плоскости P относительно выбранного центра, проекция точки будет иная, но также единственная (черт. 2).



Черт. 3.



Черт. 4.

Исключением может быть случай, когда при неизменном положении плоскости P новый центр S будет лежать на проектирующей прямой SA .

Необходимо отметить, что проекциями точек A_1 и A_2 (черт. 3), взятых на прямой, проектирующей точку A , будет также точка a , так как проектирующие прямые, проведенные через A_1 и A_2 и центр S , сливаются с прямой SA .

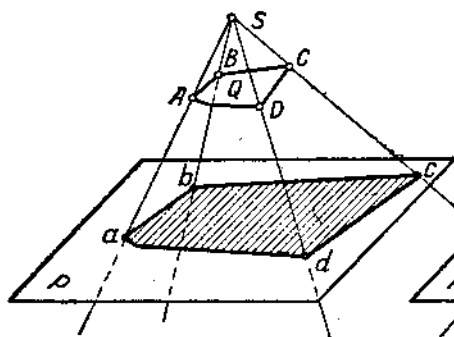
Отсюда можно сделать вывод, что если дана только одна проекция a (черт. 3) при выбранных центре S и плоскости P , то нельзя еще пред-

ставить себе точку пространства, так как на проектирующей прямой Aa лежит бесчисленное множество таких точек, проекцией которых может быть a .

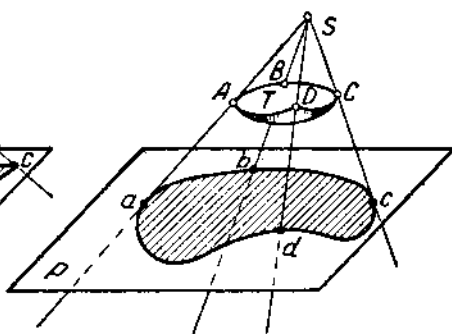
Рассматривая линию как совокупность точек, мы можем построить центральную проекцию линии, проектируя ряд точек, ей принадлежащих. На черт. 4 указано нахождение проекции линии пространства $ABCD$; проекция линии обозначена $abcd$.

Проекция $abcd$ будет единственной проекцией линии $ABCD$ при выбранном положении центра S и плоскости P . При изменении положения центра S или плоскости P положение и вид проекции будут вообще иные.

Совокупность всех проектирующих прямых, проведенных через точки линии $ABCD$ и центр S (черт. 4), образуют поверхность, которая носит название проектирующей поверхности.



Черт. 5.



Черт. 6.

В центральных проекциях проектирующая поверхность является поверхностью конической с вершиной в точке S . На основании этого центральные (полярные) проекции называют также проекциями коническими.

Проекцию линии $ABCD$ на плоскость P , т. е. линию $abcd$ (черт. 4), можно рассматривать как линию пересечения проектирующей поверхности с плоскостью P .

При рассмотрении заданной центральной проекции $abcd$ (черт. 4) на плоскости P при центре S мы не можем составить представление о самой линии, так как таких линий, для которых $abcd$ является проекцией, на проектирующей поверхности можно разместить бесконечное множество.

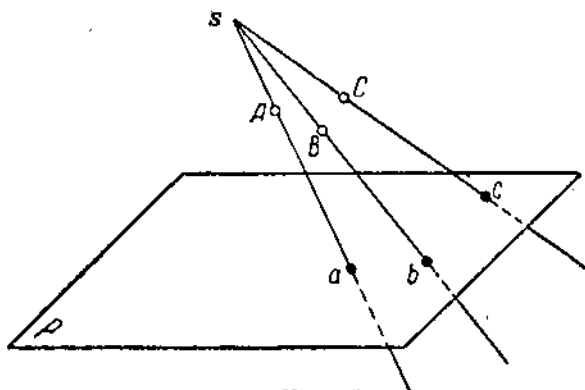
Все выводы, сделанные при рассмотрении проектирования точки и линии, останутся в силе также при проектировании части поверхности и тела, рассматривая их как совокупность точек.

На черт. 5 показано проектирование части поверхности Q , а на черт. 6 — тела T ; проекции Q и T заштрихованы.

Представим себе глаз наблюдателя помещенным в точке S (черт. 7) и смотрящим на точки A , B и C . Лучи зрения, проходящие через глаз и точки A , B и C , будут совпадать с проектирующими прямыми.

В зависимости от величин углов между прямыми SA , SB и SC у наблюдателя создается то или иное представление об относительном положении точек A , B и C в пространстве.

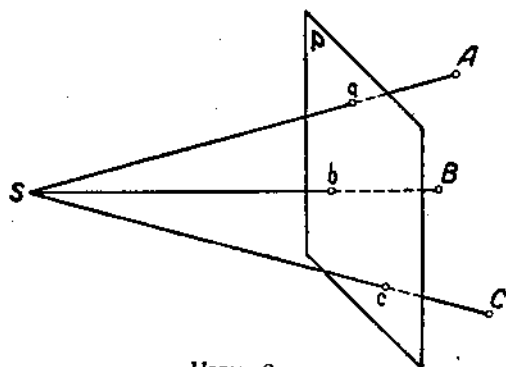
Удалим точки A , B и C из поля зрения наблюдателя, но оставим плоскость P и проекции точек A , B и C . Ввиду того, что лучи зрения остаются прежними, у наблюдателя должно создаться такое же представление об относительном положении в пространстве точек a , b и c , какое осталось от точек A , B и C .



Черт. 7.

Таким образом точки a , b и c , центральные проекции точек A , B и C , могут служить изображением на плоскости точек A , B и C , если глаз наблюдателя (точка зрения) помещается в центре S .

Если поместить центр проекций S в глаз наблюдателя, плоскость проекций P поместить вертикально (черт. 8) и придать центру проекций, предмету и плоскости проекций такое расположение, чтобы проектирующие прямые можно было рассматривать как пересекающиеся в центре лучи зрения, то на плоскости проекций получится изображение предмета (системы точек) таким, каким оно на самом деле представляется нашему



Черт. 8.

глазу, если смотреть из определенной точки зрения, т. е. изображением естественным.

Плоскость проекций в этом случае называется картинной плоскостью, а центральная (полярная) проекция на ней — перспективным изображением или перспективой предмета (системы точек).

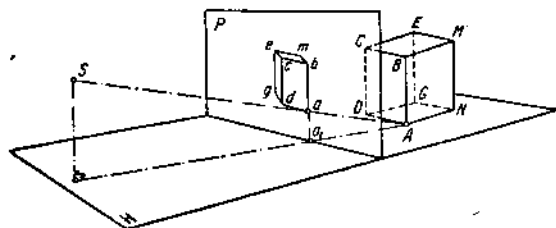
На черт. 9 приведена схема построения перспективного изображения параллелепипеда, расположенного на горизонтальной плоскости H ; картинную плоскость является плоскость P , расположенная перпендикулярно к плоскости H . Проводим лучи через точку зрения S и вершины параллелепипеда, отмечаем точки $(a, b, c, d, \dots)$ пересечения лучей с плоскостью P .

Соединив точки $a, b, \dots$ прямыми, получим перспективное изображение параллелепипеда.

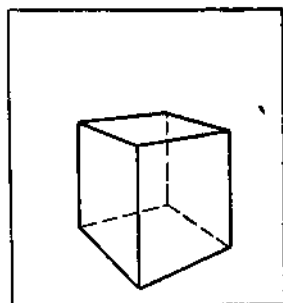
Необходимо дополнительно отметить, что не всякое изображение, полученное при помощи центральной проекции, является перспективой.

Для того чтобы изображение представлялось нашему глазу естественным и могло быть названо перспективой, необходимо, чтобы взаимное расположение точки зрения, картинной плоскости P и предмета удовлетворяло определенным условиям.

На черт. 10 дан пример перспективного изображения куба.



Черт. 9.



Черт. 10.

§ 2. Параллельные проекции

Возьмем в пространстве плоскость P , центр проекций S и систему точек A, B и C (черт. 11) и будем удалять от плоскости P точку S , перемещая ее по направлению SS_1 , параллельному выбранной прямой qr .

Каждому новому положению точки S будут соответствовать новые проекции взятых точек. Если предположить, что точка S удалена в бесконечность, то проектирующие прямые будут параллельны между собой, а также будут параллельны прямой qr ; точки a, b и c займут определенное положение на плоскости проекций (черт. 11) и будут носить название параллельных проекций точек A, B и C .

Направление прямой qr , или, что то же, направление проектирующих прямых называется направлением проектирования.

Итак, под «параллельной проекцией» точки будем понимать точку пересечения проектирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

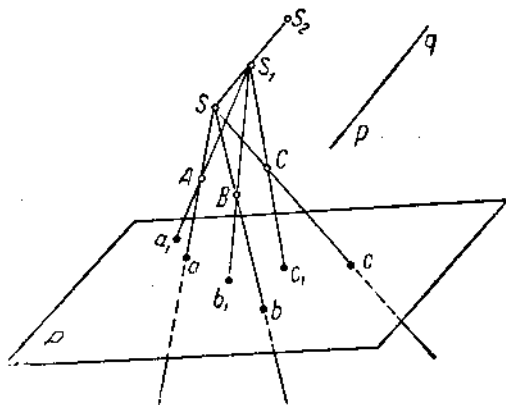
Для нахождения параллельных проекций точек A, B и C необходимо через данные точки провести проектирующие прямые параллельно заданному направлению проектирования qr до пересечения с плоскостью проекций P . Точки a, b и c пересечения проектирующих прямых с плоскостью проекций P и будут искомыми проекциями.

Очевидно, что параллельные проекции будут обладать теми же свойствами, которые мы отметили при рассмотрении центральных проекций, а именно:

1) каждая точка пространства будет иметь на плоскости проекций единственную свою проекцию и

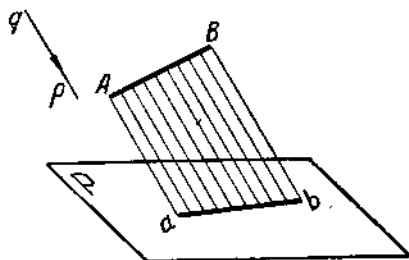
2) каждая точка плоскости проекций может быть проекцией бесчисленного количества точек, лежащих на проектирующей прямой, проходящей через эту точку плоскости.

Для построения параллельной проекции какой-либо линии надо было бы провести бесчисленное множество параллельных между собой проектирующих прямых, сливающихся в одну проектирующую поверхность — цилиндрическую. На основании этого параллельные проекции называют также проекциями цилиндрическими.

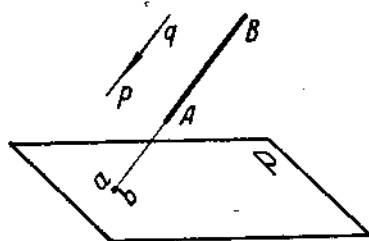


Черт. 11.

Если объектом проектирования является отрезок прямой AB , то проектирующей поверхностью служит плоскость (черт. 12). Пересечение этой плоскости с плоскостью проекций определяет прямую ab — проекцию отрезка AB . Так как прямая определяется любыми



Черт. 12.



Черт. 13.

двумя ее точками, то для построения проекции достаточно и необходимо спроектировать две точки прямой, а затем соединить полученные проекции (точки) между собой.

Когда проектируемый отрезок параллелен направлению проектирования (черт. 13), проекцией отрезка будет точка. Эта точка отмечается двумя буквами (см. на черт. 13 буквы a и b).

Если предположить, что глаз наблюдателя (точка зрения) удален на бесконечно большое расстояние от наблюдаемого предмета, так что лучи зрения совпадают с направлением проектирующих прямых, то параллельная проекция предмета (системы точек) так же, как и полярная проекция, может служить изображением этого предмета. В действительности мы всегда рассматриваем предмет с конечного расстояния и потому параллельная проекция должна быть понимаема как изображение условное.

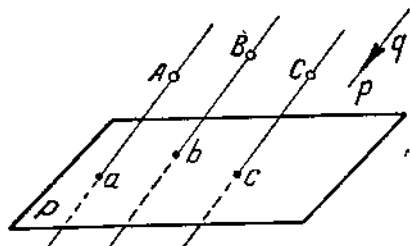
Условность заключается в том, что при рассмотрении параллельной проекции как изображения предмета необходимо мысленно представить себя удаленным на бесконечно далекое расстояние от изображения

и только при этом условии можно получить надлежащее представление об изображенном предмете.

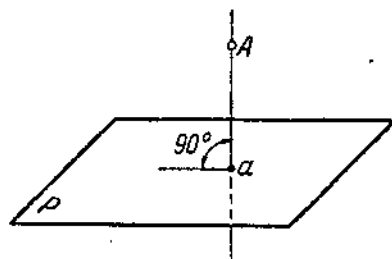
Несмотря на эту условность, в технике широко пользуются параллельными проекциями, так как построение их гораздо проще построения центральных проекций (перспективы). Проще и пользование параллельными проекциями при решении различных вопросов, связанных с изображением предметов.

Параллельные проекции делятся на: 1) проекции косоугольные, в которых проектирующие прямые составляют с плоскостью проекций любой угол, не равный 90° (черт. 14); 2) проекции прямоугольные, в которых проектирующие прямые перпендикулярны к плоскости проекций (черт. 15).

Слово «прямоугольный» в применении к проекции часто заменяют словом «ортогональный», образованным из слов древне-греческого языка, в переводе обозначающих — прямой угол.



Черт. 14.



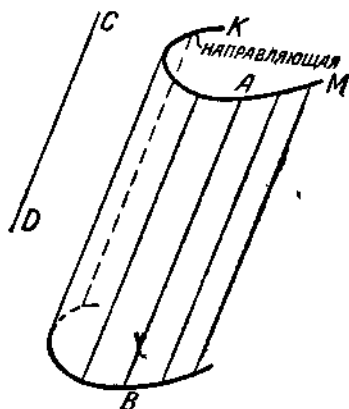
Черт. 15.

В дальнейшем изложении термин «прямоугольная проекция» будет применен только для обозначения проекции, получаемой на плоскости при помощи проектирующей прямой, перпендикулярной к этой плоскости; термин же «ортогональные проекции» будет обозначать систему прямоугольных проекций на взаимно-перпендикулярных плоскостях.

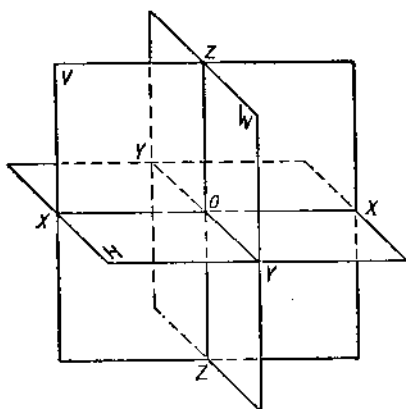
§ 3. Метод координат как прием определенного задания геометрических элементов

Изображение каждого предмета сводится к построению ряда проекций точек. Это вытекает из того, что путем некоторых отвлечений можно взамен технических форм рассматривать формы геометрические, что в свою очередь сводится к рассмотрению поверхностей того или иного вида. Примером может служить любой из окружающих нас предметов: форма его окажется определяемой поверхностями различной степени сложности и различным комбинированными. От поверхности же естественен переход к точкам, ее определяющим. Действительно, образование, например, цилиндрической поверхности можно рассматривать как результат перемещения прямолинейной образующей параллельно данному отрезку CD , причем образующая в каждом своем положении пересекает некоторую заданную линию, называемую *направляющей* (черт. 16). Но образующая AB и направляющая KM определяются принадлежащими им точками. Следовательно, задача сводится к изображению положения точек в пространстве.

Положение точки в пространстве может быть определено при помощи ее прямоугольных координат, т. е. расстояний этой точки от трех взаимно-перпендикулярных плоскостей, называемых координатными плоскостями (черт. 17). Положение этих плоскостей в пространстве вообще произвольно; можно принять одну из них (H) за горизонтальную плоскость, тогда V и W будут вертикальными. Прямые, по которым пересекаются между собой координатные плоскости, называются осями координат; точка пересечения всех трех осей называется началом координат. Ось, получаемая при пересечении плоскостей H и V , обозначают буквой X , при пересечении плоскостей H и W — буквой Y , и при пересечении плоскостей V и W — буквой Z . Начало координат обозначают буквой O .



Черт. 16.



Черт. 17.

Плоскости координат в своем пересечении образуют восемь трехгранных углов — восемь октантов¹. Точка может находиться в любом из этих углов. Следовательно, надо знать не только расстояние данной точки от той или иной плоскости координат, но и направление, по которому надо это расстояние отложить. Например, расстояния точек от плоскости H , если точки находятся над этой плоскостью (черт. 17), считаются положительными, а если точки расположены под H — отрицательными.

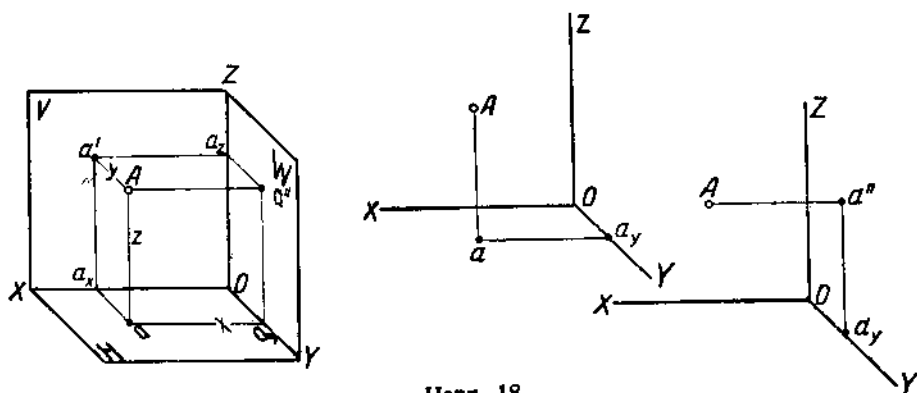
Координаты точек выражают относительными числами. Для обозначения координат применяют строчные буквы, одинаковые с буквами, которыми обозначены оси координат.

На черт. 18 взят один из восьми углов, образованных координатными плоскостями; внутри этого угла расположена точка A и построены ее координаты x , y , z . Так как каждый из отрезков x , y и z перпендикулярен к соответственной координатной плоскости, то, например, отрезки x и z определяют некоторую плоскость, перпендикулярную к координатным плоскостям H и W и параллельную, следовательно, плос-

¹ Octo (лат.) — восемь.

кости V . В результате, как это легко видеть из рассмотрения черт. 18, получается равенство отрезков:

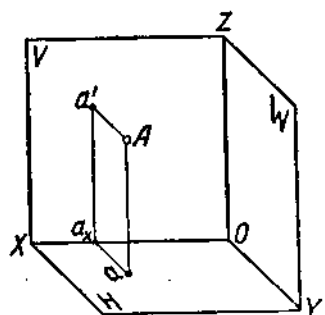
$$Aa = a'a_x = a''a_y = a_zO, Aa' = aa_x = a''a_z = a_yO, Aa'' = aa_y = a'a_z = a_xO,$$



Черт. 18.

и определяется так называемый параллелепипед координат точки A .

Параллелепипед координат позволяет достаточно просто строить точку по заданным ее координатам. Например, точка A (черт. 18) может быть определена в результате построения трех ребер параллелепипеда, составляющих трехзвенную ломаную линию: надо отложить последовательно Oa_y , a_ya и aA , или Oa_y , a_ya'' и $a''A$ и т. д., т. е. точку A можно получить шестью комбинациями, из которых в каждой обязательно должны быть отражены все три координаты.



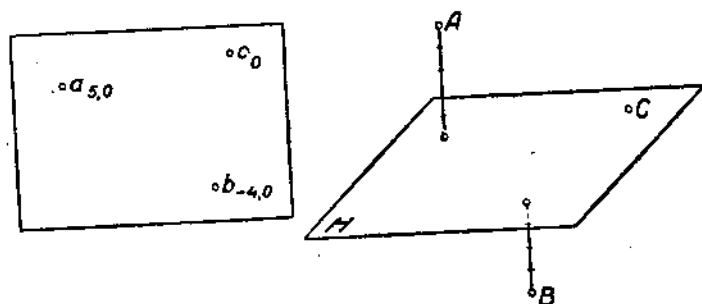
Черт. 19.

Построение, выполненное на черт. 18, аналогично получению прямоугольной проекции точки A на плоскостях H , V и W . Действительно, точка a получается при проведении перпендикуляра из точки A на плоскость H , т. е. точка a представляет собой прямоугольную проекцию точки A на плоскости H . То же можно отметить и относительно точек a' и a'' . Следовательно, перед нами система ортогональных проекций точки A . Каждая из проекций точки A определяется двумя координатами самой точки A ; например, положение точки a определяется координатами x и y . Следовательно, координаты точки A определяют положение ее трех проекций на координатных плоскостях H , V и W . Справедливо и обратное заключение: положение проекций точки A на координатных плоскостях определяет координаты самой точки, т. е. ее положение в пространстве.

Можно определить положение какой-либо точки, зная только две ее проекции на координатных плоскостях. На черт. 19 точка A найдена по

двум проекциям a и a' ; в точках a и a' проведены перпендикуляры (проектирующие прямые) к плоскостям H и V и в пересечении этих перпендикуляров определена точка A .

Итак, для определения положения точек некоторой системы (предмета) в пространстве необходимо и достаточно иметь две проекции каждой точки на координатных плоскостях. Но если проекции должны служить не только для определения положения этого предмета (системы точек), но и для его исчерпывающего изображения, то во многих случаях двух проекций недостаточно. В этих случаях построение третьей проекции необходимо, а в практике изображения машин и их частей приходится прибегать еще к дополнительным плоскостям для получения на них проекций сверх трех основных.



Черт. 20.

Необходимо также указать, что можно определить положение точки, зная только одну ее проекцию на какой-либо координатной плоскости и величину и направление (знак) координаты, перпендикулярной к этой плоскости, например, положение проекции a на плоскости H и величину координаты z .

На определении точки положением одной ее горизонтальной проекции a и величиной и знаком ее координаты z основан метод проекций с числовыми отметками.

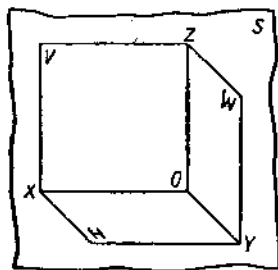
Значение координаты z выражается числом единиц той или иной линейной меры (см, м) и направлением, выражаемым знаком $+$ (плюс), если точка находится над H , и знаком $-$ (минус), если точка находится под H .

На черт. 20 приведен пример задания точек A , B , C , из коих A находится над H с превышением в 5 м, B — ниже H на 4 м и C лежит в плоскости H .

Методом проекций с числовыми отметками пользуются для решения тех или иных геометрических задач исключительно в случаях изображения поверхности земли. Это объясняется тем, что поверхность земли при значительных расстояниях в направлениях горизонтальных имеет абсолютную разность высот для различных ее точек сравнительно небольшую.

§ 4. Наглядные изображения

Рассмотрим, как были выполнены, например, чертежи 17, 18 и 19, иллюстрировавшие изложенные выше сведения. На этих чертежах пространственная система координат изображена на плоскости и притом так, что все оси (X , Y и Z) видны на чертеже. Легко заметить, что чертеж содержит некоторое искажение действительных соотношений: углы XOY и ZOY на самом деле прямые, а на рассматриваемых нами чертежах эти углы не равны 90° . Несомненно, что наличие искажения размеров является отрицательной стороной таких изображений; но это обстоятельство в известной степени искупается их достаточной наглядностью.



Черт. 21.

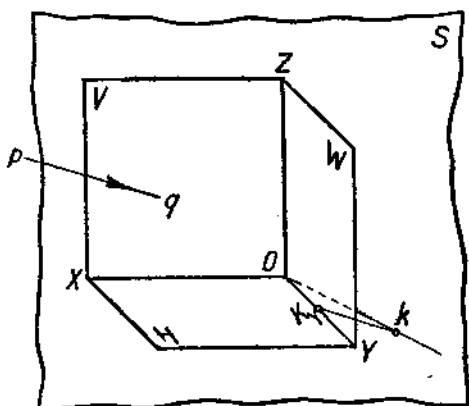
Представим себе, что трехгранный угол $OXYZ$ (черт. 21) совмещен гранью XOZ с некоторою плоскостью S . Грань XOZ с этой

плоскостью сливается и, следовательно, взаимное расположение осей OX и OZ при изображении их на плоскости S не изменяется. Чтобы изобразить на той же плоскости S ось OY , надо последнюю спроектировать на эту плоскость. Мы рассматривали построение параллельной проекции и отрезка прямой (черт. 12) и заметили, что достаточно спроектировать какие-либо две точки этого отрезка и их проекции соединить между собой, чтобы получилась искомая проекция отрезка.

В данном случае для оси OY одна точка уже спроектирована: это точка O . Остается найти проекцию еще только одной точки оси OY .

Если в этом случае воспользо-
ваться прямоугольной проекцией,
т. е. направления проектирующих
прямых взять перпендикулярны-
ми к плоскости проекций, то ось OY превратится в одну из проектирующих
прямых и, следовательно, изобразится точкой, совпадающей с началом
координат — точкой O . Но это невыгодно, так как одна из координат
превращается в нуль. Следовательно, при выбранном на черт. 21 поло-
жении плоскости проекций S не следует применять прямоугольного про-
ектирования.

Если в таком случае прибегнуть к косоугольному проектированию, т. е. направление проектирующих прямых взять не под прямым углом к плоскости проекций, то ось OY может быть изображена в виде отрезка прямой. На оси OY взята точка K_Y (черт. 22) и спроектирована по выбранному направлению pq на плоскость проекций; полученную точку k

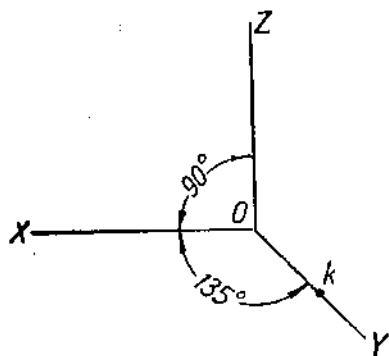


Черт. 22:

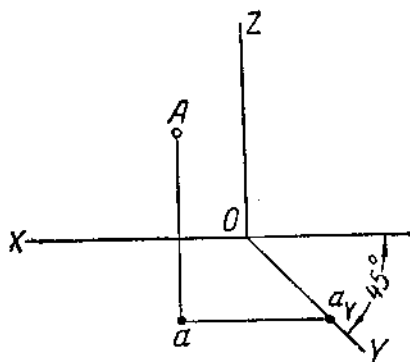
надо соединить с точкой O . Прямая, проходящая через точки O и k , представит собой проекцию оси OY .

Легко заметить, что в зависимости от выбора направления проектирования pq может меняться угол наклона отрезка Ok по отношению к проекциям осей X и Z . На черт. 23 указан один из возможных случаев: проекция оси Y направлена под углом 135° в каждой из проекций OX и OZ . В зависимости от выбора того или иного направления проектирования может также меняться и величина отношения $\frac{Ok}{OK_Y}$ (черт. 22).

Весьма часто применяют случай, когда это отношение равно $\frac{1}{2}$, т. е. каждый отрезок, откладываемый на проекции оси Y , составляет половину соответствующего отрезка на самой оси Y .



Черт. 23.



Черт. 24.

Черт. 17, 18 и 19 так и построены: при угле, указанном на черт. 23, величина отношения $\frac{Ok}{OK_Y}$ равна $\frac{1}{2}$. Наряду с подобными изображениями в дальнейшем изложении применены чертежи, построенные при условии, что $\frac{Ok}{OK_Y} = 1$.

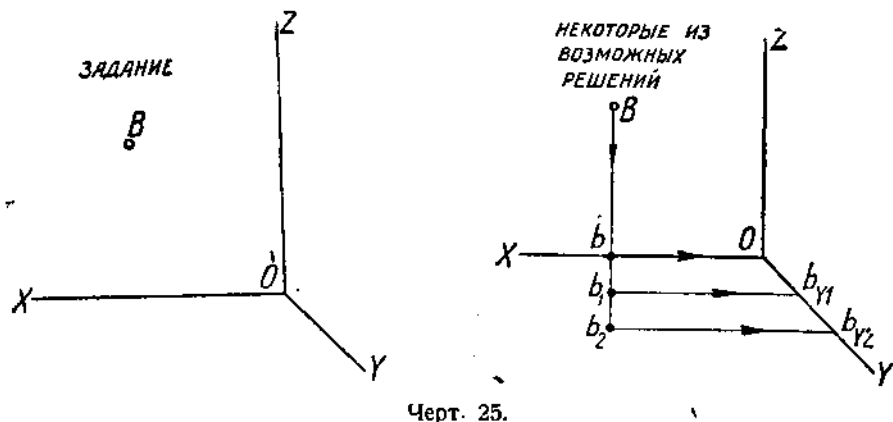
Следовательно, из ряда многочисленных комбинаций между: 1) углом отклонения проекции оси Y от направления проекций осей X и Z , составляющих между собою угол 90° , и 2) величиной отношения между проекцией отрезка, взятого на проектируемой оси Y , и действительной величиной этого отрезка может быть выбрана комбинация, позволяющая при помощи несложного построения получить достаточно наглядное изображение.

Изображения, построенные согласно указанным условиям, будем называть фронтальной проекцией.

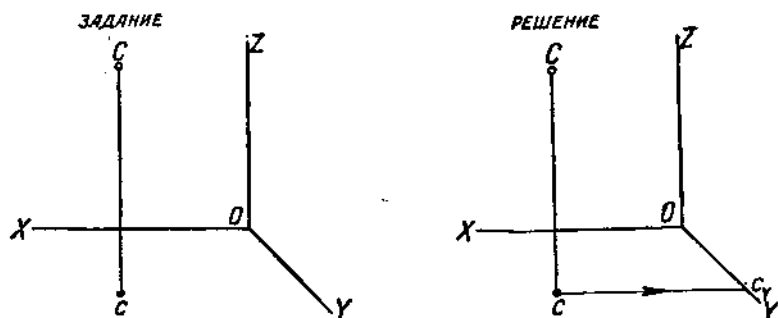
Если известны координаты некоторой точки A , то построение фронтальной проекции выполняется следующим образом. Положим $x = 20$ мм, $y = 30$ мм, $z = 25$ мм. Построив оси OX , OY и OZ (черт. 24), откладываем по OY отрезок $Oa_Y = 15$ мм (мы условились применять по оси OY

сокращение в два раза), из точки a_Y проводим $aa_Y = 20$ мм параллельно OX и из точки a проводим $aA = 25$ мм параллельно OZ .

Обратим внимание на то, что нельзя определить действительные координаты точки, имея лишь ее фронтальную проекцию. На черт. 25 показано, что при задании точки только фронтальной проекцией мы получим бесчисленное множество возможных решений. Чтобы задача стала определенной, необходимо помимо изображения самой точки



Черт. 25.



Черт. 26.

иметь изображение одной из ее проекций на координатные плоскости. Действительно, при задании по типу, указанному на черт. 26, можно выполнить построение, измерить отрезки Cc , cc_Y и Oc_Y и, зная масштаб чертежа, определить величину координат.

Фронтальная проекция относится к разряду проекций, называемых аксонометрическими; сведения об этих проекциях даны в гл. IX.

В заключение отметим, что фронтальная проекция, применяемая в качестве изображения какого-либо предмета, позволяет определить точные размеры и, следовательно, с этой стороны, не представляет каких-либо неудобств. Однако изображения, полученные по правилам фронтальной проекции, отличаясь наглядностью, все же искаженно передают

действительную форму. Это можно видеть хотя бы на черт. 18; параллелепипед координат получился в искаженном виде. Поэтому стремление к передаче без искажения не только размеров, но и формы заставляет применять в качестве основного метод ортогональных проекций, позволяющий избежать указанного выше недостатка.

Глава II

СИСТЕМА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

§ 5. Проекция точки

Рассмотрим построение проекций точки сперва на двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Такими плоскостями могут служить координатные плоскости H и V (черт. 19); в дальнейшем изложении эти плоскости мы будем называть плоскостями проекций. Одну из них — плоскость H расположим горизонтально; тогда плоскость V займет вертикальное положение. Плоскость H называется горизонтальной плоскостью проекций; плоскость V будем называть вертикальной плоскостью проекций¹.

Линия пересечения плоскостей H и V называется осью проекций и делит каждую плоскость на две части: горизонтальную плоскость на переднюю полу H и заднюю полу H_1 , а вертикальную плоскость на верхнюю полу V и нижнюю полу V_1 (черт. 27).

Плоскости H и V , пересекаясь между собой, делят все пространство на четыре угла или четверти. Часть пространства (черт. 27), которая заключается между передней полой H и верхней полкой V , называется первой четвертью; часть, лежащая между верхней полкой V и задней полкой H_1 — второй четвертью; между задней полкой H_1 и нижней полкой V_1 — третьей четвертью и, наконец, между нижней полкой V_1 и передней полкой H — четвертой четвертью.

Зритель должен помещаться так, чтобы параллельные проектирующие лучи всегда были перпендикулярны к соответственной плоскости проекций, а так как самые плоскости проекций взаимноперпендикулярны, то зритель должен менять свое положение в зависимости от того, какая из плоскостей проекций вводится в данный момент. Так как проекции точек и отрезков линий всегда рассматриваются как видимые независимо от того, в какой четверти эти точки или линии находятся, то достаточно отметить два необходимых положения зрителя по отношению к системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций: одно положение — над горизонтальной плоскостью, другое положение — перед вертикальной плоскостью проекций.

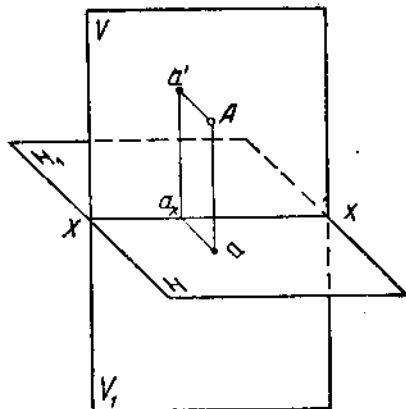
Возьмем точку A (черт. 27), находящуюся в первой четверти, построим ее ортогональные проекции и рассмотрим их свойства.

Для построения ортогональных проекций точки A на плоскости H и V необходимо провести через точку A две проектирующие прямые — одну перпендикулярно к H и вторую перпендикулярно к V (или, что то же, провести из точки A перпендикуляры на плоскость H и плоскость V).

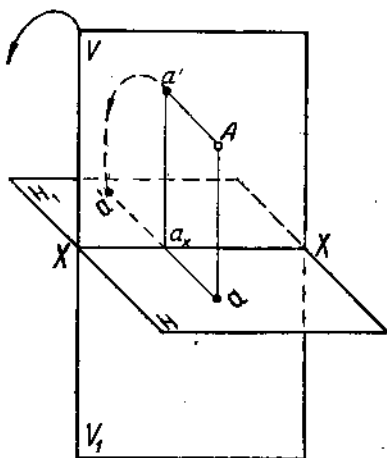
¹ Плоскость V часто называется фасадной.

Точка пересечения проектирующей прямой с плоскостью H называется горизонтальной проекцией точки A , линия Aa — горизонтально-проектирующей прямой. Точка пересечения проектирующей прямой с плоскостью V называется вертикальной проекцией точки A , прямая же Aa' — вертикально-проектирующей прямой.

Точки a и a' , прямоугольные проекции точки A на плоскостях H и V при совместном их рассмотрении не только служат изображениями точки A , но и определяют единственную точку пространства, как это было показано выше при рассмотрении системы координат (черт. 19).



Черт. 27.



Черт. 28.

В дальнейшем для сокращения мы будем под словами «заданная точка» понимать, что даны две ее проекции — горизонтальная и вертикальная.

Перпендикуляры Aa и Aa' , проведенные из точки A (черт. 27) на плоскости H и V , определяют собой плоскость Aa_x , которая будет перпендикулярна к плоскостям H и V , а следовательно, и к линии их пересечения XX .

Рассматривая отрезки aa_x и $a'a_x$ как лежащие в плоскости $Aa'a_xa$, перпендикулярной к XX , мы можем сделать заключение, что aa_x и $a'a_x$ будут перпендикулярны к линии XX ; aa_x будет равно Aa' (как противоположные стороны прямоугольника) и $a'a_x$ равно Aa .

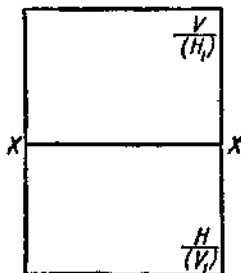
Следовательно, 1) aa_x — расстояние горизонтальной проекции точки от оси проекций XX равно Aa' , т. е. расстоянию самой точки от вертикальной плоскости проекций, 2) $a'a_x$ — расстояние вертикальной проекции точки от оси XX равно Aa , т. е. расстоянию точки A от горизонтальной плоскости проекций.

Проекции точки на плоскостях проекций заменяют нам самую точку, но для этого необходимо рассматривать одновременно две плоскости, расположенные друг к другу перпендикулярно, что создает большое неудобство.

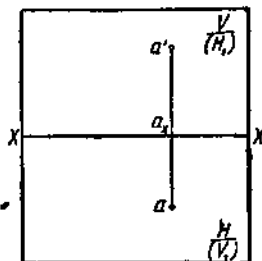
Чтобы освободиться от этого неудобства, поступают следующим образом: считая горизонтальную плоскость неподвижной, вертикальную плоскость (черт. 28) вращают около оси XX до полного ее совме-

щения с горизонтальной плоскостью так, чтобы верхняя полка вертикальной плоскости V совпала с задней полкой H_1 , а нижняя полка V_1 совпала с передней полкой H (черт. 29). Тот же результат может быть получен вращением плоскости H так, чтобы полка H совпала с полкой V_1 .

При этом вращении точка a_x (черт. 28), как находящаяся на оси вращения, не изменяет своего положения; точка a' опишет дугу радиуса $a'a_x$ в плоскости, перпендикулярной к оси XX , и займет при совмещении плоскостей положение a' на задней полке H_1 , причем прямая $a'a_x$ останется перпендикулярной к оси XX . После такого совмещения плоскостей проекций мы можем рассматривать проекции точек на плоскости чертежа.



Черт. 29.



Черт. 30.

Рассматривая после совмещения (черт. 30) прямые $a'a_x$ и a_xa как перпендикуляры к оси XX в точке a_x , мы заключаем, что $a'a_x$ и a_xa составляют одну прямую, перпендикулярную к оси XX , а следовательно, при совмещении плоскостей проекций обе проекции любой точки пространства, — горизонтальная и вертикальная, — лежат на общем перпендикуляре к оси проекций.

Ось проекций XX (черт. 30) будем располагать на чертеже горизонтально, переднюю полку H (видимую) ниже оси XX и заднюю H_1 (невидимую) выше оси; верхнюю полку V (видимую) выше оси XX и нижнюю V_1 (невидимую) ниже оси XX . На черт. 29 и 30 невидимые полки взяты в скобки: (H_1) и (V_1) . Проекции точек и линий будем считать видимыми, хотя бы они и помещались не в первой четверти.

Чертежи, на которых изображены проекции системы точек при совмещенном положении плоскостей проекций, называют э п ю р а м и ¹. При рассмотрении эюра зритель находится перед плоскостью чертежа в развернутой первой четверти.

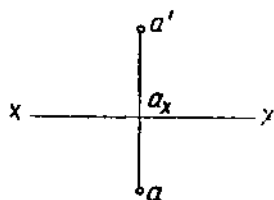
Для того чтобы, пользуясь эюром черт. 30, определить положение в пространстве точки A , необходимо мысленно плоскость V привести в положение, перпендикулярное к H (путем вращения около оси XX), и через точки a и a' провести проектирующие прямые, перпендикулярные к H и V . Точка пересечения проектирующих прямых и будет точкой A (черт. 28).

При этом необходимо обратить внимание на то, что проекции a и a' определяют точку пространства лишь в том случае, когда на эюре

¹ Французское слово *épure* (эпюр) — чертеж, проект.

они лежат на одном перпендикуляре к оси XX ; в противном случае они не определяют никакой точки пространства.

В дальнейшем в целях упрощения чертежа, считая плоскости проекций безграничными, не будем их ограничивать линиями, как это сделано на черт. 29 и 30, а будем изображать только ось XX , представляя мысленно, что выше этой оси располагаются полы V и H_1 , а ниже оси — полы H и V_1 (черт. 31).



Черт. 31.

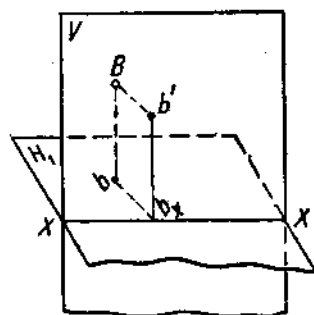
Кроме того, условимся точки пространства обозначать заглавными буквами A, B, C, D и т. д., их же проекции на горизонтальную плоскость проекций (независимо от полы H или H_1) соответственно a, b, c, d и т. д., а на вертикальную плоскость a', b', c', d' и т. д.

Точки пространства могут занимать различные положения относительно выбранных нами плоскостей проекций, причем каждому взятому положению точек пространства будет соответствовать особое расположение их проекций на эюре.

Рассмотрим возможные случаи положения точки относительно принятой нами системы плоскостей и расположение их проекций на эюре.

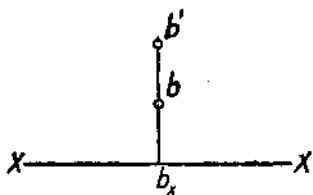
1. Точка A находится в первой четверти, т. е. над H и перед V (черт. 28). После совмещения на эюре (черт. 31) горизонтальная проекция a располагается ниже оси и вертикальная a' — выше оси (на одном перпендикуляре к оси XX).

2. Точка B лежит во второй четверти, т. е. над H_1 и сзади V (черт. 32).

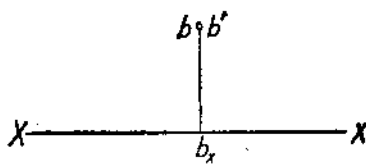


Черт. 32.

После совмещения пола H_1 наложится на полу V (расположенную выше оси), а на эюре горизонтальная проекция b и вертикальная b' расположатся выше оси XX (черт. 33).



Черт. 33.



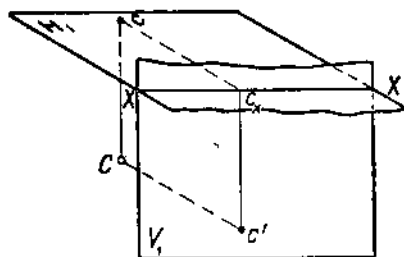
Черт. 34.

При $bb_x = b'b_x$ проекции b и b' будут лежать в одной точке (черт. 34). Точка B в этом случае находится на одинаковом расстоянии от плоскостей проекций.

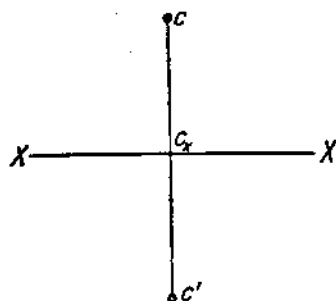
3. Точка C лежит в третьей четверти, т. е. под H и сзади V_1 (черт. 35).

После совмещения поля H_1 совпадает с V (расположится выше оси) и на эюре горизонтальная проекция c расположится выше оси проекций, а вертикальная c' — ниже оси (черт. 36).

4. Точка D лежит в четвертой четверти, т. е. под H и перед V_1 (черт. 37).



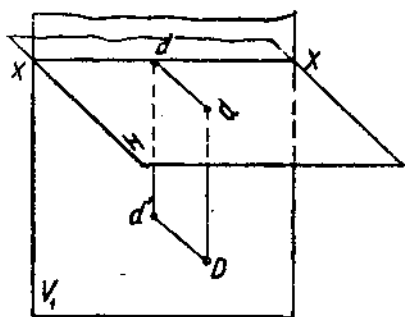
Черт. 35.



Черт. 36.

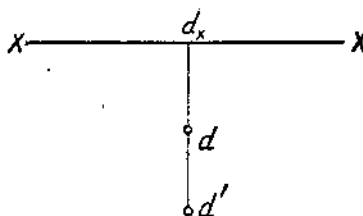
После совмещения поля H совпадает с V_1 (расположится ниже оси) и на эюре вертикальная проекция d' , как и горизонтальная d , расположится ниже оси (черт. 38). При $d_x d = d_x d'$ на эюре d и d' будут в одной точке (черт. 39). Точка D в этом случае находится на одинаковом расстоянии от плоскостей проекций.

5. Точка E лежит на границе первой и второй четверти, т. е. на верхней поле V (черт. 40). Очевидно, вертикальная проекция e совпадает с самой точкой E и горизонтальная проекция e будет лежать на оси, а потому после совмещения на эюре вертикальная проекция e' расположится выше оси, а горизонтальная проекция e — на оси (черт. 41).

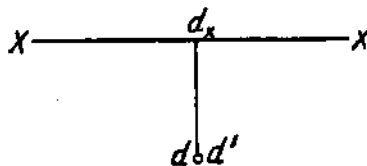


Черт. 37.

6. Точка F лежит на поле H_1 (черт. 40). На эюре вертикальная проекция f' изобразится на оси и горизонтальная f — выше оси (черт. 41).



Черт. 38.



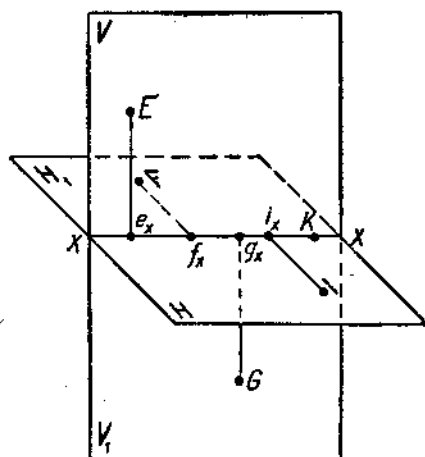
Черт. 39.

7. Точка G лежит на поле V_1 (черт. 40). На эюре вертикальная проекция g' изобразится ниже оси, а горизонтальная проекция g на оси (черт. 41).

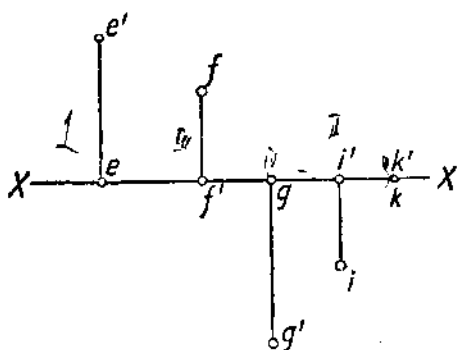
8. Точка I лежит на поле H (черт. 40). На эпюре вертикальная проекция i' изобразится на оси, а горизонтальная проекция i — ниже оси (черт. 41).

9. Точка K лежит на оси XX (черт. 40). Очевидно, на эпюре обе проекции, — вертикальная и горизонтальная, — будут лежать в одной точке на оси (черт. 41).

Выше (см. стр. 12) указано, что для определения положения точки



Черт. 40.



Черт. 41.

в пространстве достаточно двух ее проекций. Но там же отмечено, что в большинстве случаев для полной характеристики изображаемого в проекциях предмета (системы точек), кроме двух проекций, необходимы еще дополнительные изображения — проекции на плоскостях, помимо плоскостей H и V . Возьмем одну из возможных плоскостей — вторую вертикальную плоскость¹, перпендикулярную к плоскости V . Обозначим новую плоскость буквой W ; вспомним, что мы уже встречались с подобной плоскостью (см., например, черт. 18) как с третьей координатной плоскостью.

Правила построения проекции точки на плоскость W те же, что и для плоскостей H и V . Эпюр получается при совмещении в плоскости чертежа всех трех плоскостей проекций. Плоскость W отводят на угол 90° вращением вокруг оси OZ так, чтобы плоскости W и V являлись как бы единой плоскостью. Естественно производить именно такой поворот, а не поворот вокруг оси OY , так как на плоскостях V и W отмечаются расстояния от плоскости H .

Построенная на плоскости W проекция точки перемещается, описывая дугу радиусом, равным расстоянию самой точки от плоскости V (черт. 42 и 43).

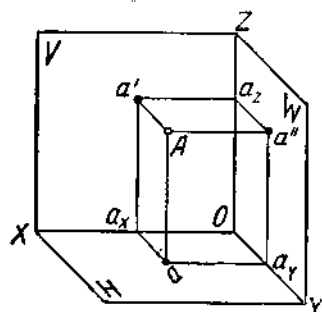
Из рассмотрения черт. 43 следует, что для построения третьей проекции какой-либо точки надо провести перпендикуляр из горизонтальной проекции точки на ось OY , затем из точки O описать дугу радиусом Oa_y до перевода точки a_y на продолжение оси OX . Далее, проводя из

¹ Вторая вертикальная плоскость носит также название боковой.

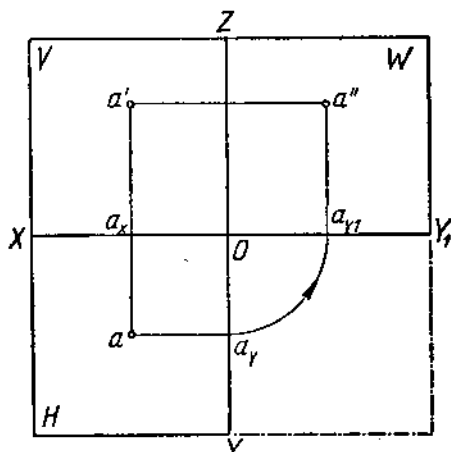
точки a_{y_1} перпендикуляр к продолжению оси OX , а из вертикальной проекции точки перпендикуляр на ось OZ , найдем в пересечении обоих указанных перпендикуляров искомую третью проекцию a'' .

На черт. 44 указаны еще два способа перевода точек при построении третьей проекции точки по двум данным.

Следует обратить внимание на то, что угол ZOY_1 (черт. 43 и 44) служит изображением действительного угла, образуемого плоскостями H и V . Также угол XOZ служит изображением угла, образуемого плоскостями H и W , а угол XOY — угла, образуемого плоскостями V и W .

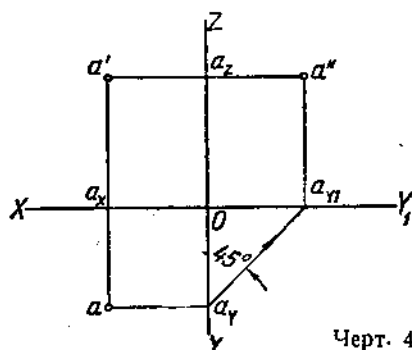


Черт. 42.

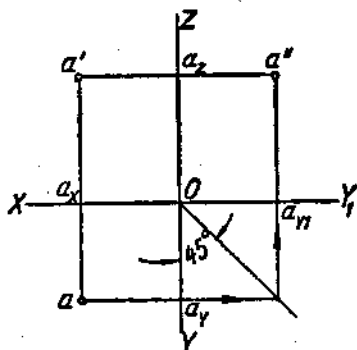


Черт. 43.

На стр. 11 было указано, что плоскости координат в своем пересечении образуют восемь трехгранных углов—восемь октантов. На черт. 42 взят один из восьми октантов, который будем считать первым. Следо-



Черт. 44.



вательно, первый октант находится над плоскостью H , перед плоскостью V и слева от плоскости W . Остальные октанты, расположенные слева от плоскости W , будем нумеровать в той же последовательности, как и четверти. Для нумерации октантов, расположенных справа от плоскости W , условимся считать октант, смежный с первым относительно плоскости W , пятым, а далее шестой, седьмой, восьмой октанты располагаются соответственно второму, третьему, четвертому.

Применяя для отсчета координат точки систему знаков, указанную на черт. 45, получим следующую таблицу¹.

Октант	Координаты, точки
1	$+x, +y, +z$
2	$+x, -y, +z$
3	$+x, -y, -z$
4	$+x, +y, -z$
5	$-x, +y, +z$
6	$-x, -y, +z$
7	$-x, -y, -z$
8	$-x, +y, -z$

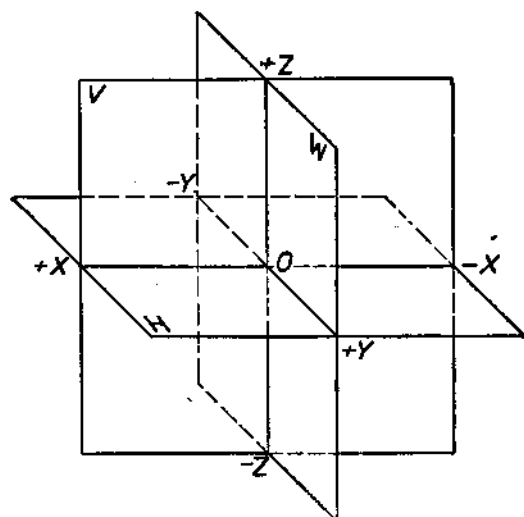
Следовательно точки с координатами $-20, +15, -18$ находятся в восьмом октанте.

Эпюр восьми октантов дан на черт. 46; совмещение плоскостей произведено согласно черт. 43, т.е. плоскость W отводится против часовой стрелки, если смотреть на плоскость H по направлению от $+Z$ к $-Z$ (черт. 45). На черт. 46 указаны номера октантов на тех участках плоскостей, на которых получают проекции точки, расположенной в данном октанте.

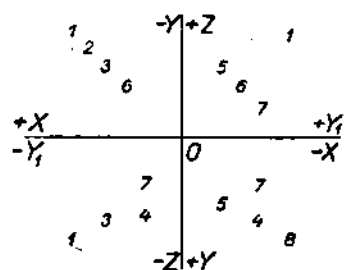
На черт. 47 даны эпюры для точек, расположенных:

Точка	A	B	C	D	E	F	G	H
Октант	1	2	3	4	5	6	7	8

При расположении изображаемого предмета (системы точек) в первом или седьмом октантах проекции не могут оказаться наложенными одна на другую; для всех остальных октантов проекции могут оказаться наложенными друг на друга.

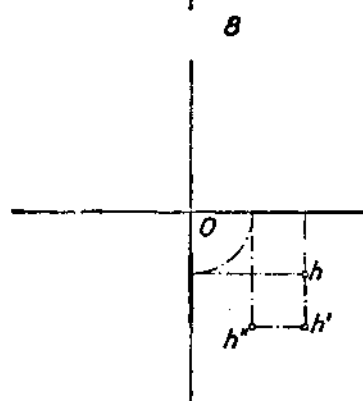
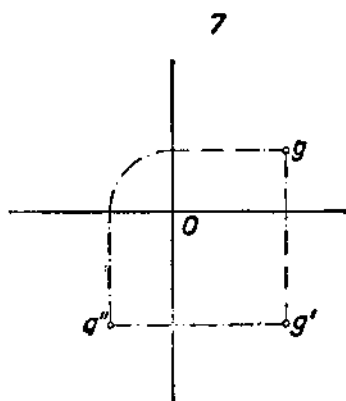
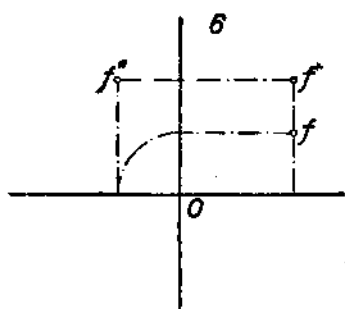
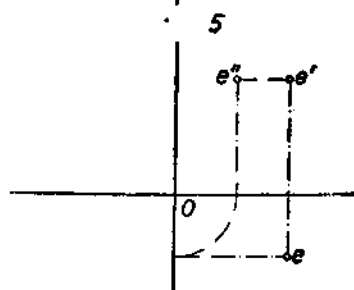
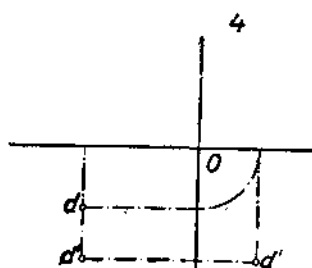
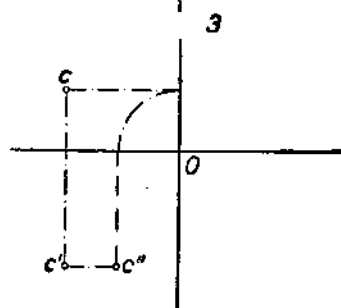
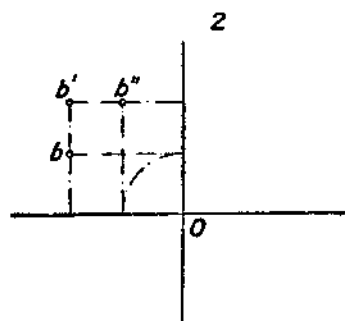
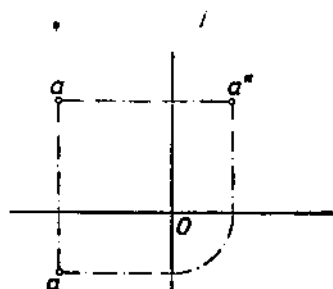


Черт. 45.



Черт. 46;

¹ В системе Декарта положительное направление по оси X считается вправо от точки O .

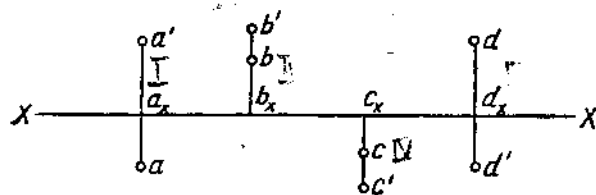


Задачи

1. Построить эпюры точек A, B, C и D (см. таблицу).

Точка	Расстояние точек от плоскостей проекций	
	пола плоскости	расстояние в мм
A	$\begin{cases} V \\ H \end{cases}$	$\begin{matrix} 20 \\ 30 \end{matrix}$
B	$\begin{cases} V \\ H_1 \end{cases}$	$\begin{matrix} 30 \\ 10 \end{matrix}$
C	$\begin{cases} V_1 \\ H \end{cases}$	$\begin{matrix} 25 \\ 15 \end{matrix}$
D	$\begin{cases} V_1 \\ H_1 \end{cases}$	$\begin{matrix} 20 \\ 25 \end{matrix}$

горизонтальной плоскости на расстоянии 20 мм и от вертикальной — на



Черт. 48.

2. Построить эпюр точки A , находящейся на расстоянии 30 мм от горизонтальной и вертикальной плоскостей и лежащей: а) в первой четверти, б) во второй четверти, в) в третьей четверти, г) в четвертой четверти.

3. Указать, в какой четверти находятся точки A, B, C, D , изображенные на эпюре (черт. 48) проекциями.

4. Дана точка A в первой четверти, отстоящая от горизонтальной — на расстоянии 30 мм. Построить эпюр для точки, расположенной симметрично данной относительно: а) горизонтальной плоскости, б) оси XX .

5. Построить эпюры точек по данным координатам:

Точка	Координаты		
	x	y	z
K	— 20	+ 15	— 18
M	+ 15	— 15	— 18
N	+ 20	+ 15	— 20
P	— 15	— 10	— 20
R	+ 15	— 20	+ 25
S	+ 20	+ 15	+ 10
T	— 15	0	+ 18
U	0	— 20	— 15

§ 6. Проекция прямой линии

Возьмем в пространстве прямую AB , определяемую точками A и B , и систему плоскостей H и V и построим проекции отрезка прямой AB на плоскостях H и V (черт. 49). Для построения горизонтальной проекции прямой AB проведем перпендикуляры из ряда точек прямой на плос-

кость H . Совокупность проекций точек и составит проекцию прямой, а совокупность перпендикуляров — горизонтально-проектирующую плоскость.

Проекция ab , очевидно, будет также прямой, так как ее можно рассматривать как линию пересечения горизонтально-проектирующей плоскости с плоскостью H .

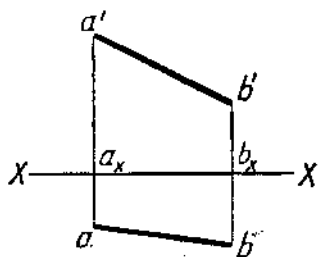
Для построения вертикальной проекции прямой AB мы построим проекции ряда ее точек; совокупность этих точек определит нам проекцию $a'b'$. Плоскость, образованная перпендикулярами, проектирующими точки на плоскость V , называют вертикально - проектирующей плоскостью.

Если мы, имея горизонтальную и вертикальную проекции прямой (ab и $a'b'$ черт. 50), проведем через них плоскости, соответственно перпендикулярные к плоскостям проекций H и V , то эти плоскости, пересекаясь, определяют нам единственную прямую AB .

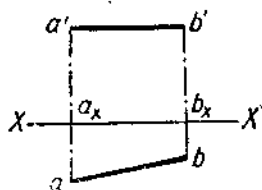
Так как ab и $a'b'$ линии прямые, то для их построения необходимы проекции только двух точек, принадлежащих прямой.

На эюре прямая AB (черт. 50) изображена двумя проекциями ab и $a'b'$.

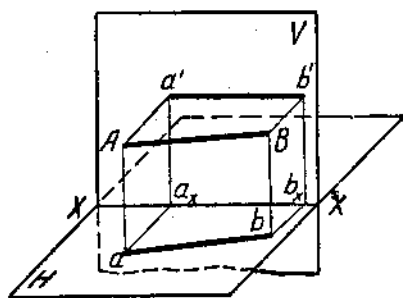
Частные случаи расположения прямой в зависимости от положения прямой в пространстве относительно плоскостей проекций. Рассмотрим проекции отрезка прямой AB , находящегося в первой четверти.



Черт. 50.



Черт. 51.

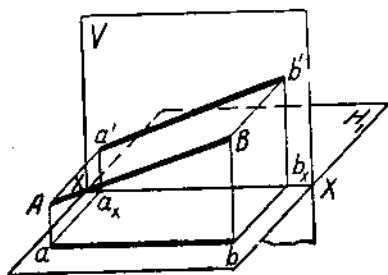


Черт. 52.

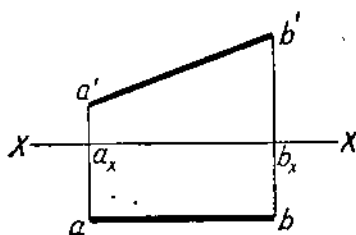
1. Прямая AB параллельна H (черт. 52); у такой прямой все точки будут находиться на одинаковом расстоянии от плоскости H , а следовательно, все точки вертикальной проекции прямой будут отстоять на равном расстоянии от оси проекций, т. е. вертикальная проекция такой прямой займет положение, параллельное оси проекций. Горизонтальная проекция может иметь различное положение (черт. 51).

Угол между проекцией ab и осью XX равен углу между AB и плоскостью V .

2. Прямая AB параллельна плоскости V (черт. 53). Производя рассуждения, подобные высказанным относительно прямой, параллельной H , мы можем сделать вывод: что горизонтальная проекция прямой, параллельной V , будет параллельна оси проекций; вертикальная проекция может занять любое положение (черт. 54).



Черт. 53.

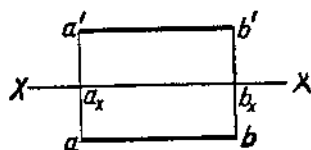


Черт. 54.

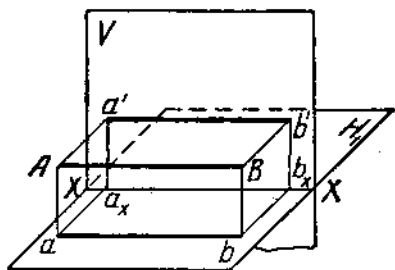
Угол между проекцией $a'b'$ и осью XX равен углу наклона прямой по отношению к плоскости H .

3. Прямая параллельна H и V (черт. 55). В этом случае горизонтальная и вертикальная проекции расположатся параллельно оси проекций (черт. 56).

Если прямая AB совпадает с осью XX , то обе проекции располагаются на оси (черт. 57).



Черт. 55.



Черт. 56.

4. Прямая перпендикулярна к H (черт. 58); горизонтальная проекция такой прямой изобразится точкой, а вертикальная — прямой, перпендикулярной к оси проекций и проходящей при своем продолжении через горизонтальную проекцию (черт. 59).

5. Прямая AB перпендикулярна к V (черт. 60). В этом случае вертикальная проекция изобразится точкой, а горизонтальная — прямой, перпендикулярной к оси (черт. 61).

6. Прямая AB параллельна боковой плоскости проекций (черт. 62). Вертикальная и горизонтальная проекции на эюре располагаются на одном и том же перпендикуляре к оси проекций XX (черт. 63).

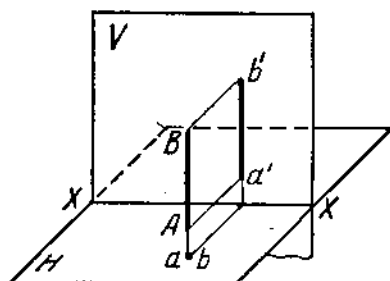
Угол между проекцией $a''b''$ и осью OY_1 равен углу наклона прямой по отношению к плоскости H , а дополнительный к нему угол (или угол между $a''b''$ и осью OZ) равен углу между прямой и плоскостью V .

Прямая, параллельная плоскости W , может быть представлена лежащей в некоторой плоскости R , одновременно перпендикулярной к плоскостям H и V (черт. 64).

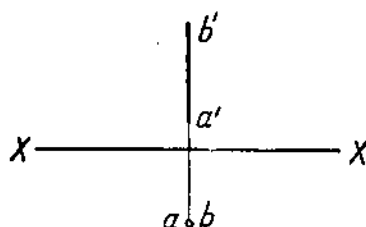


Черт. 57.

Такую плоскость, представляющую собой частный случай проектирующих

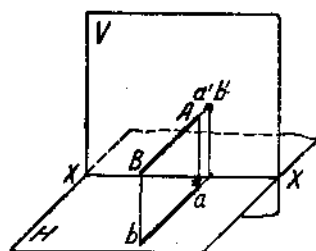


Черт. 58.

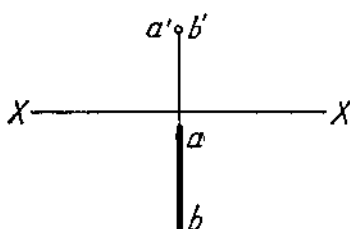


Черт. 59.

плоскостей, когда сливаются вместе горизонтально-проектирующая и вертикально-проектирующая плоскости, будем называть профильной плоскостью.

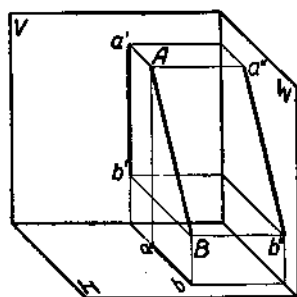


Черт. 60.



Черт. 61.

В профильной плоскости находится линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями проекций V и H .



Черт. 62.

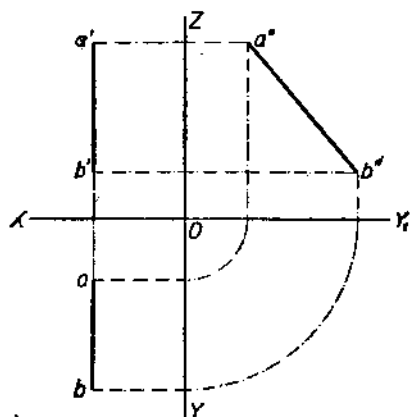
Отрезок AB , расположенный в профильной плоскости, представляет собою гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого являются проекции ab и $a'b'$.

Прямую, параллельную плоскости W , называют **профильной прямой**.

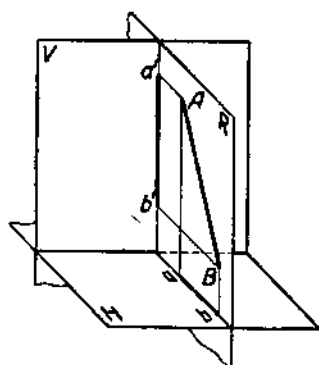
7. Прямая лежит в плоскости H . В этом случае горизонтальная проекция совпадает с самой прямой, а вертикальная проекция получится на оси проекций (черт. 65).

8. Прямая лежит в плоскости V .

Горизонтальная проекция ab такой прямой займет положение на оси проекций; вертикальная проекция $a'b'$ совпадает с самой прямой AB (черт. 66).

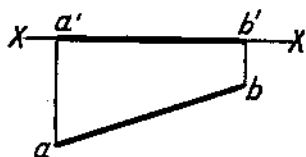


Черт. 63.

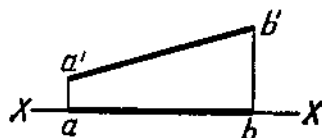


Черт. 64.

Сравнивая отрезок проектируемой прямой с полученными проекциями этого отрезка в различных положениях прямой относительно плоскостей проекций, заключаем, что в некоторых случаях отрезок прямой проектируется в неискаженном в отношении его длины виде. Таковы положения отрезка, указанные на черт. 51, 53, 56, 57, 58, 60, 62, 65 и 66, т. е. когда прямая параллельна одной из плоскостей



Черт. 65.



Черт. 66.

проекций или расположена в ней, параллельна одной из осей проекций или с ней совпадает. Однако прямая может быть и не параллельна ни одной из плоскостей проекций.

Этот случай является общим; при этом прямую называют **прямой общего положения**.

На черт. 67 показано построение третьей проекции отрезка прямой общего положения, заданного проекциями ab и $a'b'$. Отрезок расположен в первом октанте. Третья проекция (проекция на плоскости W) построена по проекциям двух точек A и B .

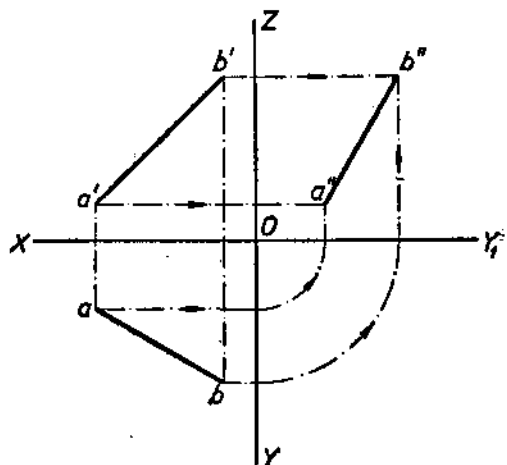
Легко заметить, что ни одна из проекций отрезка прямой общего положения не равна по длине проектируемому отрезку.

Из черт. 69 следует, что истинная величина отрезка прямой общего положения может быть определена как одна из сторон трапеции $aABb$, или трапеции $a'AB'b'$. Рассматривая трапецию $aABb$, мы видим, что

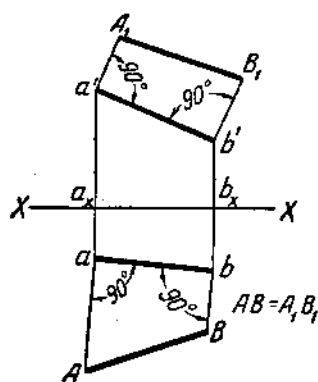
сторонами ее служат горизонтальная проекция ab и параллельные между собой расстояния концов отрезка от плоскости H ; на эюре эти стороны представляют собой отрезки ab , $a'a_x$ и $b'b_x$. Построение трапеции показано на эюре черт. 68, где $Aa = a'a_x$, $Bb = b'b_x$; там же показано построение другой трапеции на вертикальной проекции $a'b'$, причем $A_1a' = aa_x$ и $B_1b' = bb_x$.

Можно ограничиться построением прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является искомый отрезок, а катетами — одна из проекций отрезка и разность расстояний концов другой проекции от оси проекций, как это показано на черт. 69, где в треугольнике abB_1 катет ab представляет собою горизонтальную проекцию отрезка AB , а катет B_1b равен $b'b_x - a'a_x = Bb - Aa = BK$.

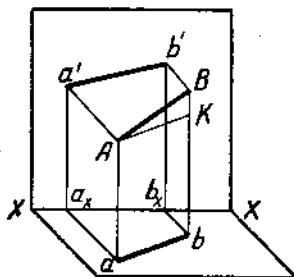
Если требуется определить углы наклона данной прямой к плоскостям проекций, т. е. угол, образуемый прямой с ее проекцией на



Черт. 67.



Черт. 68.



Черт. 69.

соответственной плоскости проекций, то следует выполнить построение, рассмотренное на черт. 68 или 69, так как угол между прямой и плоскостью H равен на черт. 68 углу между AB и ab , а на черт. 69 — углу между aB_1 и ab ; угол же между прямой и плоскостью V равен на черт. 68 углу между A_1B_1 и $a'b'$ (на черт. 69 этот угол не построен).

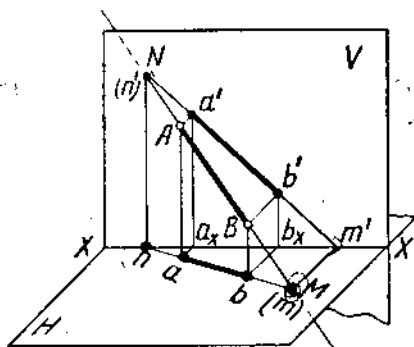
Необходимость в указанных построениях отпадает, как только от прямой общего положения мы переходим к прямой, параллельной одной

из плоскостей проекций: проекция отрезка прямой на эту плоскость равна длине проектируемого отрезка и позволяет непосредственно определить углы наклона прямой по отношению к остальным плоскостям.

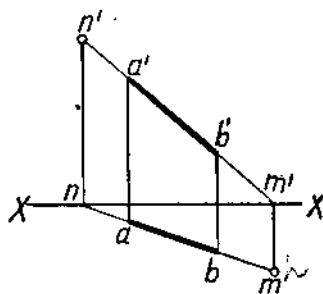
§ 7. Следы прямой

Считая прямую AB бесконечной (черт. 70), мы можем отметить точки N и M , в которых прямая пересекается с плоскостями проекций. Точка M называется горизонтальным следом прямой, а точка N — вертикальным следом.

На основании изложенного ранее о проекциях точек мы можем отметить, что горизонтальная проекция горизонтального следа (точка m) совпадает с самим следом (точкой M), а вертикальная проекция этого



Черт. 70.



Черт. 71.

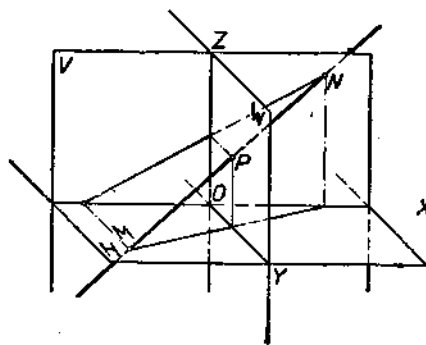
следа m' будет лежать на оси XX ; вертикальная проекция вертикального следа n' совпадает с точкой N , а горизонтальная проекция n лежит на оси XX .

Рассматривая черт. 70 и 71, мы замечаем, что горизонтальная проекция следа M — точка m — лежит на продолжении проекции ab , а вертикальная m' на оси XX в точке пересечения с ней продолжения вертикальной проекции $a'b'$; следовательно, чтобы на эюре найти горизонтальный след (проекцию следа), необходимо продолжить вертикальную проекцию $a'b'$ до пересечения с осью XX , через точку пересечения m' (вертикальную проекцию горизонтального следа) провести перпендикуляр к оси XX до пересечения с продолжением горизонтальной проекции ab . Точка пересечения m и будет горизонтальной проекцией горизонтального следа, а также совпадет с самим следом.

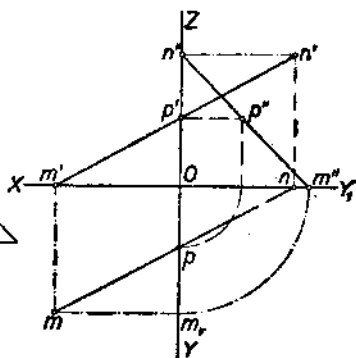
Для нахождения вертикального следа, очевидно, нам необходимо продолжить горизонтальную проекцию ab до пересечения с осью; через точку пересечения n (горизонтальную проекцию вертикального следа) провести перпендикуляр до пересечения с продолжением вертикальной проекции $a'b'$. Точка пересечения n' будет вертикальной проекцией вертикального следа, с которой и совпадает вертикальный след.

Проекции точек M и N на эюре вполне определяют положение прямой AB в пространстве; точки M и N служат точками раздела прямой

на отрезки, лежащие в той или иной четверти пространства. На черт. 70 прямая AB проходит через четвертую, первую и вторую четверти.



Черт. 72.

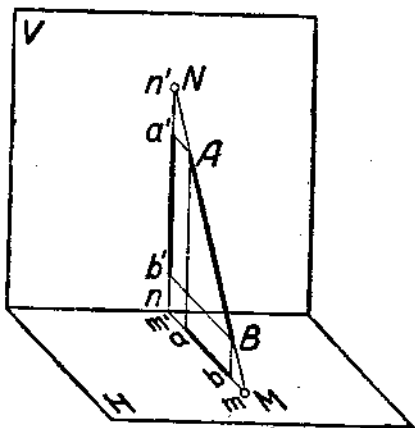


Черт. 73.

Прямая не имеет следа на плоскости проекций в том случае, когда она параллельна данной плоскости.

На черт. 72 прямая пересекает не только плоскости H и V , но и плоскость W . Точка P является следом прямой на боковой плоскости проекций, следом прямой на плоскости W ¹. Этот след совпадает с собственной проекцией на плоскости W , а вертикальная и горизонтальная проекции его лежат соответственно на осях OZ и OY .

Прямая через точку P выходит в пятый октант и, встречая далее плоскость V , дает вертикальный след N , через который уходит в шестой октант. Через горизонтальный след M прямая из первого октанта выходит в четвертый октант.



Черт. 74.

Соответствующий эпюр изображен на черт. 73. Прямая дана в первом октанте отрезком MP (проекции $m'p'$, $m''p''$) и в пятом октанте отрезком PN (проекции $p'n'$, $p''n''$).

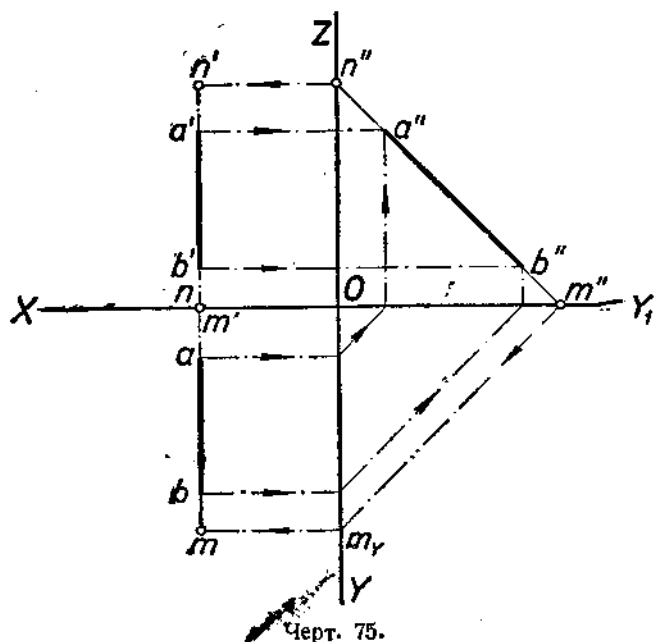
Если прямая расположена в профильной плоскости (черт. 74), то при построении эпюра следы M и N оказываются на общем перпендикуляре к оси проекций.

Из черт. 74 следует, что $\frac{n'b'}{a'b'} = \frac{bn}{ab}$ и $\frac{ma}{ab} = \frac{a'n}{a'b'}$; следовательно положение точек n' и m (т. е. положение следов N и M) может быть опре-

¹ След прямой на плоскости W называют также профильным следом прямой.

делено нахождением четвертого пропорционального отрезка по трем известным.

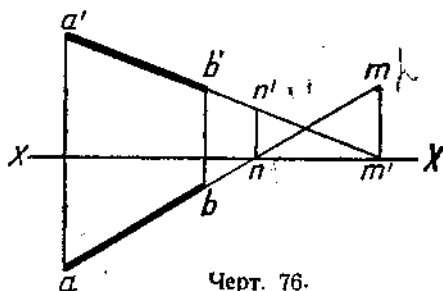
Построение следов прямой, расположенной в профильной плоскости, удобно производить при помощи проекции этой прямой, полученной на боковой плоскости проекций. На черт. 75 по данным проекции ab и $a'b'$ построена проекция $a''b''$, затем получены точки m'' и n'' (боковые проекции следов прямой) и далее точки m и n — искомые следы. Вертикальная проекция горизонтального следа и горизонтальная проекция вертикального следа совпадают на оси проекций (точки m' и n).



Черт. 75.

Пример 1. Прямая AB задана проекциями ab и $a'b'$; найти следы прямой и указать, через какие четверти проходит прямая (черт. 76).

Решение. Для нахождения горизонтального следа продолжаем вертикальную проекцию $a'b'$ до пересечения с осью XX ; точка m' будет вертикальной проекцией горизонтального следа. Горизонтальная проекция должна лежать на перпендикуляре к оси XX , проходящем через m' , и на продолжении горизонтальной проекции ab , а потому необходимо в точке m' провести перпендикуляр к оси и найти точку пересечения его с продолжением ab . Точка пересечения m и будет горизонтальной проекцией горизонтального следа, а также изображением самого горизонтального следа.

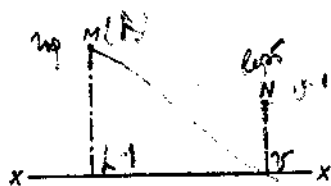


Черт. 76.

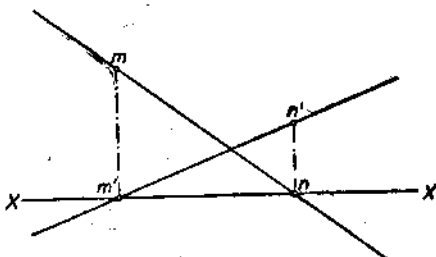
Для нахождения вертикального следа продолжаем горизонтальную проекцию ab до пересечения с осью XX ; точка n есть горизонтальная проекция вертикального следа. В точке n проведем перпендикуляр к оси XX ; точка n' — пересечение перпендикуляра с вертикальной проекцией $a'b'$ — и будет вертикальной проекцией вертикального следа, а также изображением самого вертикального следа.

Из рассмотрения положения проекций следов мы можем сделать заключение, что прямая AB пересекает полу H_1 (точка m лежит выше оси XX) и полу V (точка n' лежит выше оси), а следовательно, прямая проходит через первую, вторую и третью четверти.

Пример 2. Дано положение следов прямой: точка M — горизонтальный след, точка N — вертикальный след (черт. 77). Построить проекции прямой и указать, через какие четверти она проходит.



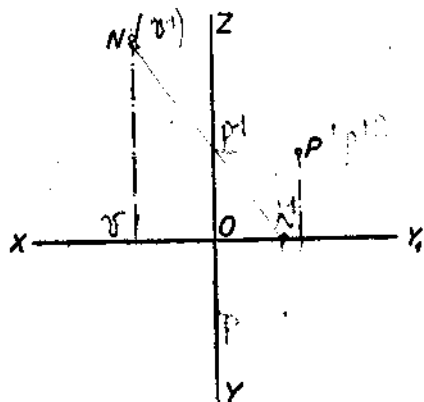
Черт. 77.



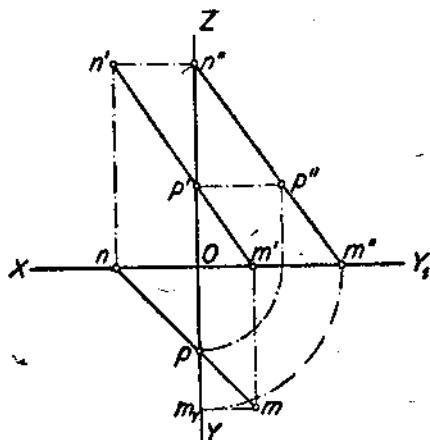
Черт. 78.

Решение (черт. 78). Заданные следы выражаем их проекциями и затем одноименные проекции соединяем прямыми линиями. Прямая между следами M и N находится во второй четверти, через точку N выходит в первую четверть и через точку M — в третью четверть.

Пример 3. Дано положение следов прямой: точка N — след на плоскости V , точка P — след на плоскости W (черт. 79). Построить проекции прямой, найти ее след на плоскости H и указать, через какие октанты эта прямая проходит.



Черт. 79.



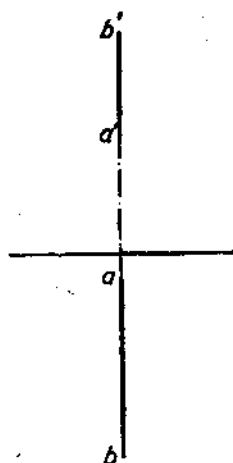
Черт. 80.

Решение (черт. 80). Заданные следы выражаем их проекциями и затем одноименные проекции соединяем прямыми линиями; получаем проекции np , $n'p'$ и $n''p''$. Продолжая прямую $n'p'$ до пересечения с осью Y_1 , находим точку m' — вертикальную проекцию горизонтального следа, а затем находим горизонтальную проекцию этого следа (точка m).

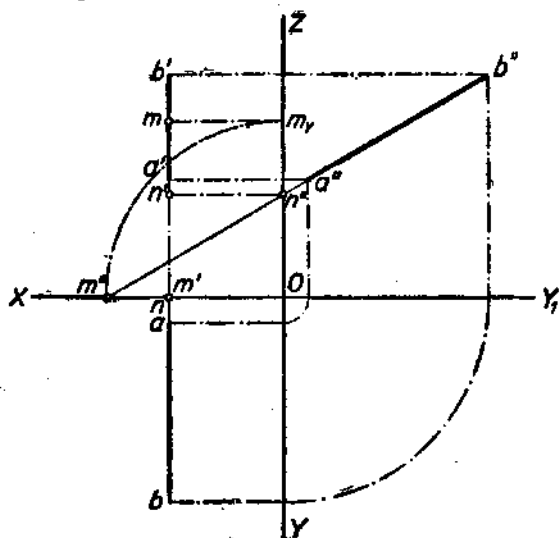
Прямая между следами N и P находится в первом октанте, через точку P выходит в пятый октант, через точку M может быть выведена в восьмой октант, а через точку N может быть выведена во второй октант.

Пример 4. Прямая AB задана проекциями ab и $a'b'$ (черт. 81); найти следы прямой.

Решение (черт. 82). Строим проекцию прямой AB на плоскости W . Продолжаем прямую $a''b''$ сперва до пересечения с осью Z — находим боковую проекцию вертикального следа, а затем до пересечения с осью X — находим боковую проекцию горизонтального следа. Исходя из найденного положения точки n'' , определяем вертикальную проекцию вер-



Черт. 81.



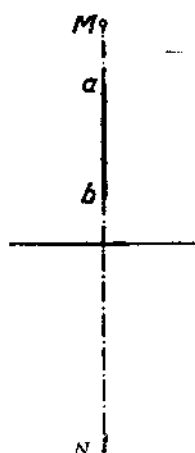
Черт. 82.

тикального следа — точку n' ; также, руководствуясь точкой m'' , находим горизонтальную проекцию горизонтального следа — точку m , для чего сперва определяем положение точки m_Y . Прямая AB через вертикальный след проникает из первого октанта во второй и через горизонтальный след выходит в третий октант.

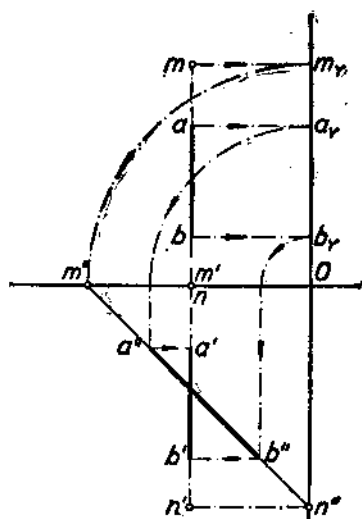
Пример 5. Отрезок, расположенный в профильной плоскости, задан горизонтальной проекцией. Кроме того, известно положение следов прямой, направление которой определяется данным отрезком; точка M — горизонтальный след, точка N — вертикальный след (черт. 83). Построить вертикальную проекцию отрезка.

Решение (черт. 84). Заданные следы выражаем их проекциями: горизонтальный след — проекции m, m', m'' , вертикальный след — проекции n, n', n'' . Соединяя точки m'' и n'' , находим боковую проекцию прямой, определяемой по условию искомым отрезком AB (все построение производится в третьем октанте). На боковой проекции прямой отмечаем положение точек a'' и b'' , исходя из данной проекции ab . Так как вертикальная проекция отрезка AB должна лежать на прямой $n'm'$, то, исходя из найденного положения точек a'' и b'' , находим точки a' и b' и, следовательно, искомую проекцию $a'b'$.

Прямая, направление которой определяется отрезком AB , выходит из третьего октанта через след M во второй октант, а через след N — в четвертый октант.



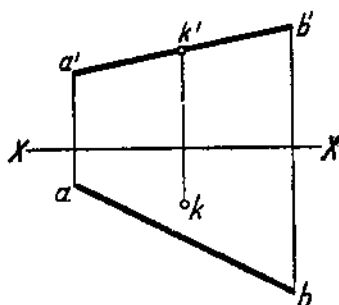
Черт. 83.



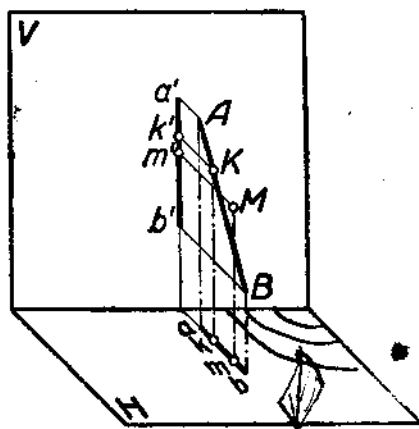
Черт. 84.

§ 8. Относительное положение точки и прямой

Рассмотренные выше построения проекций прямых и следов прямой позволяют сделать вывод, что если какая-либо точка лежит на прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях прямой. Напри-



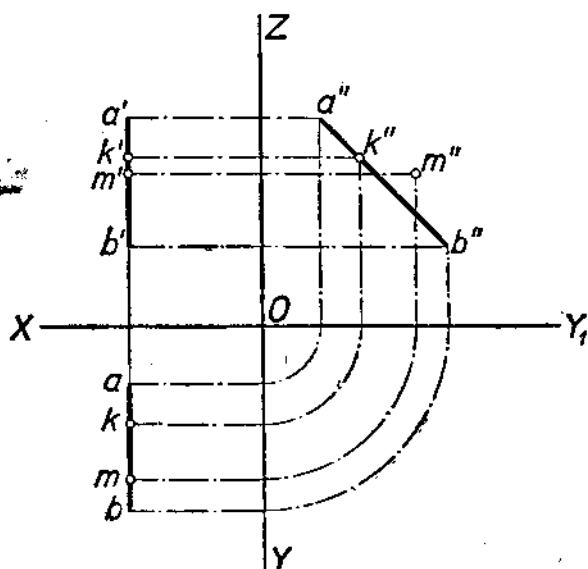
Черт. 85.



Черт. 86.

мер, горизонтальный след прямой (точка) лежит на горизонтальной проекции прямой. Если точка не принадлежит данной прямой, то в общем случае обе проекции точки не лежат на одноименных проекциях прямой. В частном случае одна из проекций точки может лежать на одноименной проекции прямой (черт. 85), но самая точка в пространстве на прямой AB не лежит.

В случае, если прямая находится в профильной плоскости, расположение вертикальной проекции точки на вертикальной проекции прямой и горизонтальной проекции точки на горизонтальной проекции прямой не является достаточным основанием для заключения, что точка лежит на данной прямой. Пример дан на черт. 86: проекции точек K и M



Черт. 87.

расположены на одноименных проекциях отрезка прямой AB , между тем как точка K лежит на прямой, а точка M не лежит.

В данном случае ответить на вопрос, лежит ли точка на прямой, можно, сличив отношения $\frac{a'k'}{a'b'}$ и $\frac{ak}{ab}$, $\frac{a'm'}{a'b'}$ и $\frac{am}{ab}$, если точка K принадлежит отрезку AB , то $\frac{a'k'}{a'b'} = \frac{ak}{ab}$, для точки же M , не лежащей на AB , $\frac{a'm'}{a'b'}$ не равно $\frac{am}{ab}$.

Еще проще вопрос решается при помощи третьей проекции (черт. 87):

для данного случая положение точек k'' и m'' относительно проекции $a''b''$ соответствует положению точек K и M относительно отрезка AB .

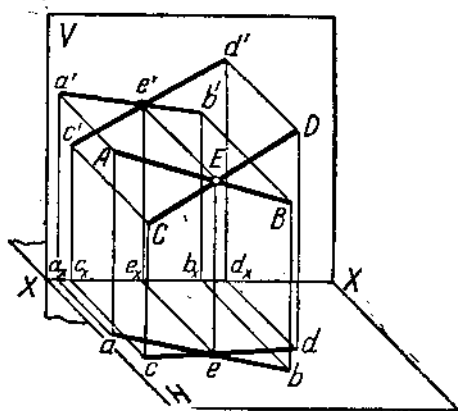
§ 9. Относительное положение двух прямых

Относительное расположение проекций двух прямых зависит от относительного положения самих прямых в пространстве; две прямые в пространстве могут: 1) пересекаться (иметь одну общую точку), 2) быть параллельными, 3) скрещиваться (не пересекаются и не параллельны).

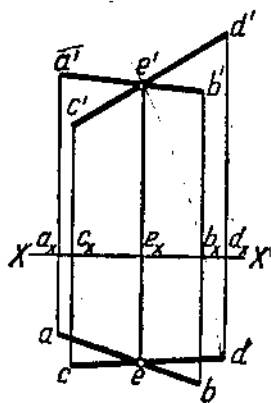
1. Прямые пересекаются. Представим себе в пространстве две прямые AB и CD , пересекающиеся в точке E (черт. 88), и построим их проекции на плоскостях H (ab и cd) и V ($a'b'$ и $c'd'$). Точка E , принадлежащая одновременно прямым AB и CD , очевидно, будет иметь свою горизонтальную проекцию e как на проекции ab , так и на cd , т. е. на их пересечении; вертикальная проекция e' также будет лежать на пересечении проекций $a'b'$ и $c'd'$. На эюре (черт. 89) e и e' как проекции одной и той же точки должны лежать на одном перпендикуляре к оси.

Следовательно, если две прямые в пространстве пересекаются, то и одноименные их проекции пересекаются, причем проекциями точки их пересечения являются точки пересечения их одноименных проекций. Обратно, если одноимен-

ные проекции прямых пересекаются и точки пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси, то прямые в пространстве пересекаются.

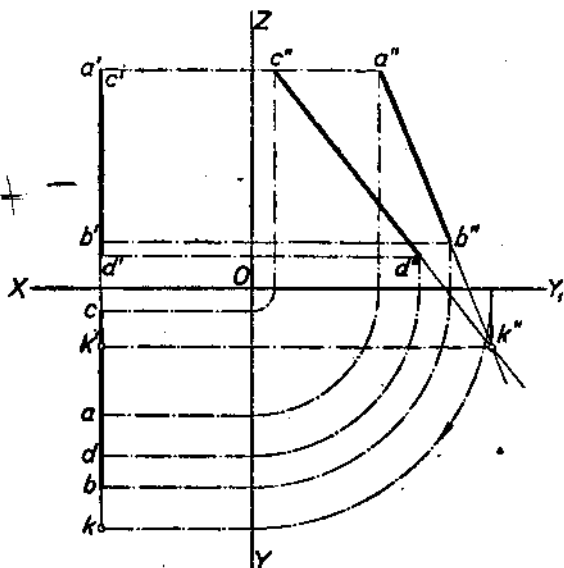


Черт. 88.



Черт. 89.

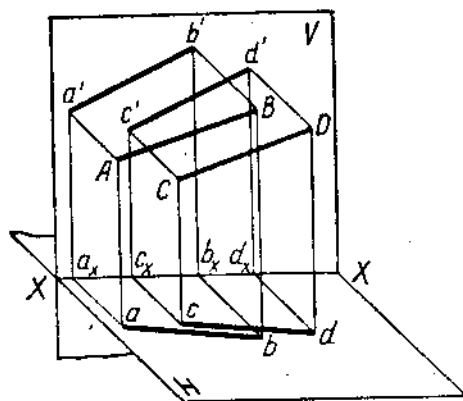
Если прямые расположены в одной и той же профильной плоскости, то для определения относительного положения этих прямых (пересекаются ли они или параллельны между собой) следует построить проекции на плоскости W . На черт. 90 боковая проекция дает возможность легко найти проекции точки пересечения прямых, направление которых задано проекциями ab , $a'b'$ и cd , $c'd'$. Прямые пересекаются в четвертом октанте.



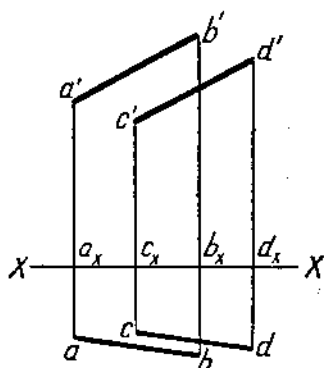
Черт. 90.

2. Прямые параллельны. Положим, что прямые AB и CD (черт. 91) параллельны в пространстве. Для построения проекций ab и cd проведем через AB и CD горизонтально-проектирующие плоскости. Эти плоскости, будучи перпендикулярными к плоскости H и параллельными (так как проходят через параллельные линии), пересекают плоскость H по линиям ab и cd , также параллельным между собой. Проводя через AB и CD плоскости вертикально-проектирующие, мы заключаем, что их линии пересечения с плоскостью V ($a'b'$ и $c'd'$) также параллельны.

Следовательно, если прямые в пространстве параллельны, то их одноименные проекции также параллельны (черт. 92). Обратно, если одноименные проекции параллельны, то прямые в пространстве параллельны.

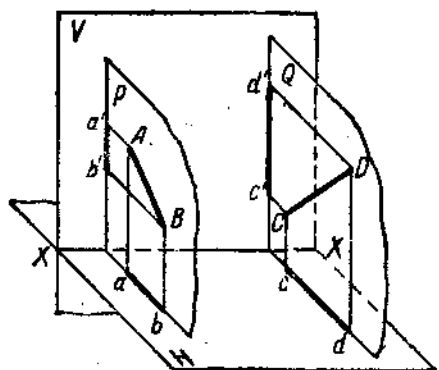


Черт. 91.

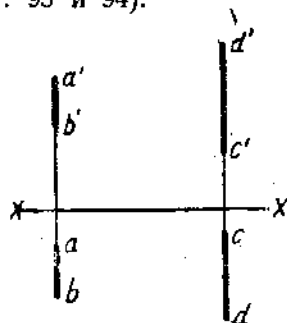


Черт. 92.

Исключением служат прямые, лежащие в профильных плоскостях; проекции таких прямых параллельны (располагаются перпендикулярно к оси проекций), хотя сами прямые могут быть непараллельны (черт. 93 и 94).



Черт. 93.



Черт. 94.

3. Прямые скрещиваются. Скрещивающимися прямыми называются такие, которые в пространстве не параллельны и не пересекаются¹.

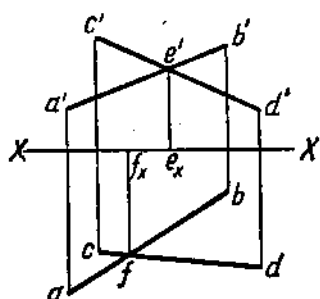
Одноименные проекции таких прямых могут пересекаться, но точка пересечения горизонтальных проекций не может лежать на одном перпендикуляре к оси с точкой пересечения вертикальных проекций.

¹ Как известно, две скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях; кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть в то же время и расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые. Углом между скрещивающимися прямыми называют острый угол, образованный двумя прямыми, проведенными через какую-нибудь точку пространства параллельно скрещивающимся прямым.

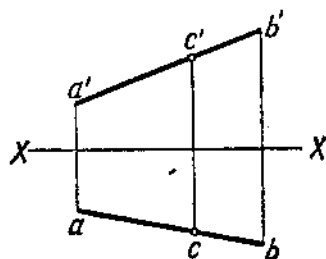
Замечание: в 2D это неверно! Надо сказать, можно ли сказать, что в 2D это неверно? Надо сказать, можно ли сказать, что в 2D это неверно? и т.д. 9.12.53 г. 3900.

В общем случае скрещивающиеся прямые изобразятся на эпюре так, как показано на черт. 95. Точки пересечения проекций f и e' лежат на разных перпендикулярах к оси.

В частном случае проекции скрещивающихся прямых могут быть параллельными, когда непараллельные прямые лежат в профильных



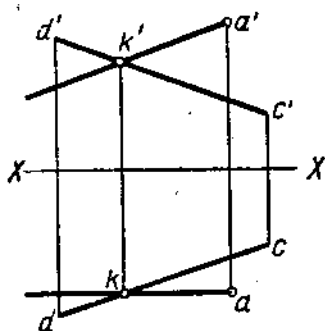
Черт. 95.



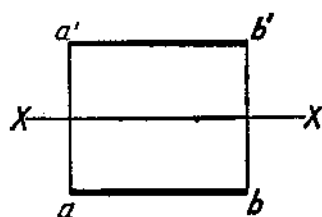
Черт. 96.

плоскостях (черт. 93 и 94). Прямые AB и CD , указанные на этих чертежах, скрещиваются, так как они не пересекаются и не параллельны.

Пример 1. Дана прямая AB , ее проекциями ab и $a'b'$ (черт. 96) и горизонтальная проекция c точки C , принадлежащей прямой AB ; требуется найти вертикальную проекцию c' .



Черт. 97.



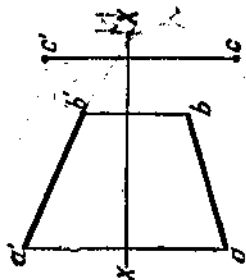
Черт. 98.

Решение. Так как точка C лежит на прямой AB , то, очевидно, проекции ее должны лежать на соответствующих проекциях прямой (c на ab и c' на $a'b'$). Нам задана горизонтальная проекция c ; следовательно, чтобы найти ее вертикальную проекцию, достаточно будет через c провести прямую, перпендикулярную к оси XX , до пересечения с $a'b'$; точка пересечения c' и будет искомой вертикальной проекцией.

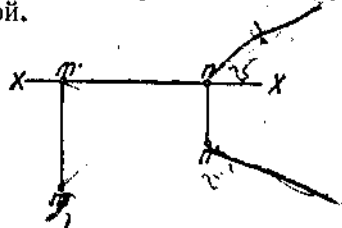
Пример 2. Провести прямую (построить проекции) через данную точку A так, чтобы она пересекала данную прямую CD и была параллельна вертикальной плоскости проекций.

Решение дано на черт. 97. Необходимо помнить, что если прямая параллельна вертикальной плоскости, то ее горизонтальная проекция на эпюре располагается параллельно оси XX ; кроме того, горизонтальная проекция искомой прямой должна проходить через a . Зная это, мы можем построить горизонтальную проекцию искомой прямой, проводя через a прямую, параллельную оси XX .

Построенная горизонтальная проекция пересекается с cd в точке k , а так как проекции точки пересечения прямых лежат на одном перпендикуляре к оси, следует провести через k прямую, перпендикулярную к оси до пересечения с $c'd'$; найдем вертикальную проекцию точки пересечения прямых — точку k' . Если теперь через точки a' и k' провести прямую, то она и будет вертикальной проекцией искомой прямой.

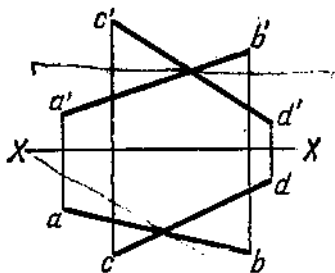


Черт. 99.

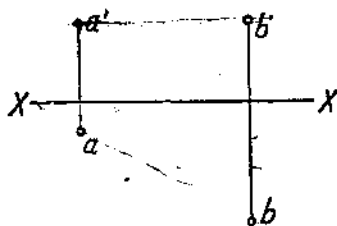


Черт. 100.

Пример 3. Построить прямую (ее проекции), все точки которой находятся на одинаковом расстоянии как от вертикальной, так и от горизонтальной плоскости проекций; прямая проходит в первой четверти.



Черт. 101.



Черт. 102.

Решение. Прямая, очевидно, будет параллельна H и V , а следовательно, ее проекции расположатся параллельно оси XX (черт. 98 — прямая $ab, a'b'$).

Задачи

1. Провести через точку C прямую, параллельную AB . Прямая AB и точка C заданы проекциями (черт. 99).
2. Провести прямую (построить проекции), все точки которой отстоят на расстоянии 20 мм от V и на 30 мм от H .
3. Построить прямую, перпендикулярную к H и отстоящую от V на расстоянии 20 мм.
4. Прямая задана следами, горизонтальным (m, m') и вертикальным (n, n'). Построить проекции прямой и указать, через какие четверти прямая проходит (черт. 100).
5. Провести прямую, которая пересекала бы две данные прямые AB и CD (черт. 101) и была бы параллельна горизонтальной плоскости проекций.
6. Через данные точки A и B провести прямую и указать, через какие четверти она проходит (черт. 102).

7. Следы прямой даны координатами:

для вертикального следа $x = -20$, $y = 0$, $z = +20$,

для горизонтального следа $x = +15$, $y = +18$, $z = 0$.

Построить эюр и определить, через какие октанты прямая проходит.

Глава III

ПЛОСКОСТИ, ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

§ 10. Различные способы задания плоскости

В системе ортогональных проекций проекцией плоскости в общем случае будет плоскость, а так как плоскость мыслится безграничной, то ее проекции также будут безграничны на плоскостях проекций.

Чтобы внести определенность в изображение проекции плоскости, следует вспомнить из элементарной геометрии условия, определяющие положение плоскости в пространстве, а именно: 1) две пересекающиеся прямые или две параллельные определяют положение плоскости в пространстве, 2) три точки, не лежащие на одной прямой, также определяют положение плоскости.

Так как проекцией плоскости является плоскость, то она вполне может быть определена проекциями точек или прямых. Представим в пространстве точки A , B и C (черт. 103), не лежащие на одной прямой и, следовательно, определяющие плоскость P . Убедимся в том, что, зная три точки, принадлежащие плоскости P , мы можем указать множество точек, принадлежащих данной плоскости, а также покажем, что на основании проекций данных точек, определяющих положение плоскости в пространстве, можно найти также проекции множества точек, принадлежащих заданной плоскости.

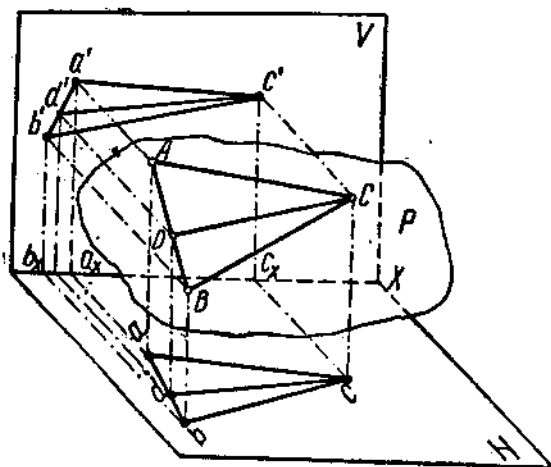
Действительно, рассматривая плоскость P (черт. 103), заданную точками A , B и C , и проведя через точки A и B прямую линию, можем сказать, что все точки прямой AB будут лежать в плоскости P . Проведем прямую через B и C , мы опять можем сказать, что все точки прямой BC также принадлежат плоскости. Очевидно, что на прямой AB можно взять точку D и, проведя через D и C прямую, повторить относительно точек этой прямой все, что мы сделали относительно точек прямых AB и BC .

Обращаясь к эюру (черт. 104), где плоскость P задана проекциями точек A , B и C , можно также указать проекции любого количества точек, принадлежащих плоскости P .

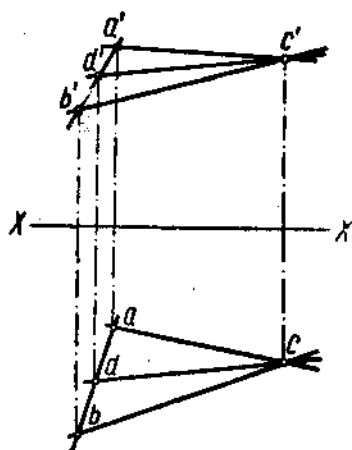
Действительно, соединяя точку a' с точкой b' и точку a с b , мы получим проекции прямой AB , принадлежащей плоскости P . Можем также построить проекции прямых BC ($b'c'$) и CD (cd , $c'd'$), выбрав точку D (d , d') на прямой AB ; все точки проекций прямых будут определять проекции точек плоскости. Все сказанное позволяет сделать заключение, что на эюре плоскость может быть изображена проекциями любых трех точек, принадлежащих плоскости (черт. 105), а также 1) проекциями двух пересекающихся прямых (черт. 106), 2) двух параллельных

прямых (черт. 107), 3) прямой и точки, взятой вне прямой (черт. 108), и, следовательно, проекциями любой плоской фигуры.

Более наглядно плоскость может быть определена на эюре при помощи прямых линий, по которым

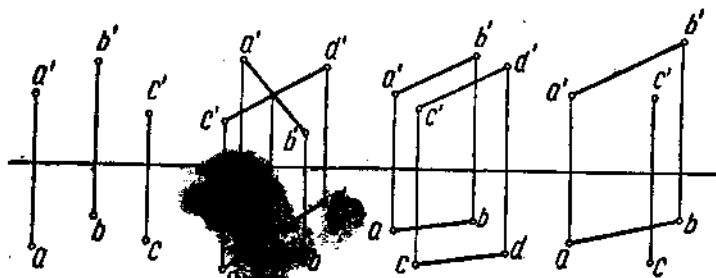


Черт. 103.



Черт. 104.

она пересекается с плоскостями проекций. На черт. 109 показана плоскость P , пересекающая вертикальную плоскость проекций по прямой P_V и горизонтальную плоскость по прямой P_H . Прямая P_V называется вертикальным следом плоскости,



Черт. 105.

Черт. 106.

Черт. 107.

Черт. 108.

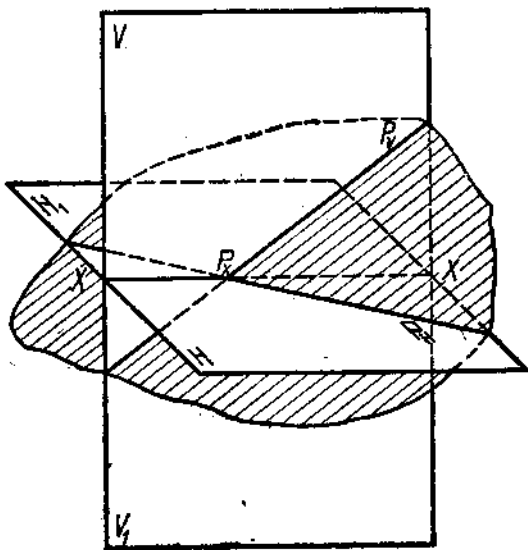
а прямая P_H — горизонтальным следом. Точка P_X , лежащая на оси проекций, называется точкой схода следов плоскости. Прямая P_V , лежащая в плоскости V , будет совпадать со своей проекцией на эту плоскость, а ее горизонтальная проекция будет на оси проекций; прямая P_H будет совпадать со своей горизонтальной проекцией и вертикальная ее проекция будет на оси XX .

Следы P_H и P_V как линии, лежащие в плоскости P , вполне определяют положение плоскости в пространстве относительно плоскостей проекций и, следовательно, проекции следов на эпюре должны также определять положение плоскости P .

При рассмотрении горизонтального следа для упрощения принято рассматривать только горизонтальную его проекцию, сливающуюся с самим следом P_H ; вертикальную же проекцию следа P_H в расчет не принимают, так как она сливается с осью проекций. Также не рассматривается горизонтальная проекция вертикального следа, а рассматривается только вертикальная, сливающаяся с самим следом P_V .

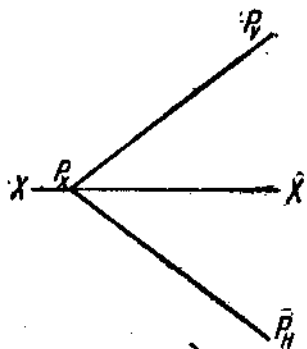
На эпюре черт. 110 плоскость P изображена при помощи следов P_V и P_H .

Если на эпюре продолжить следы плоскости так, как это указано на черт. 111, то плоскость окажется выведенной во вторую, третью и четвертую четверти. Во второй четверти плоскость P будет определяться следами P_V и P_{H1} , в третьей четверти — следами P_{V1} и P_{H1} , в четвертой четверти следами P_{V1} и P_H .

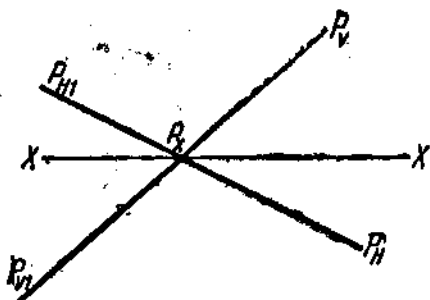


Черт. 109.

Черт. 112 показывает, что $\frac{n'n}{mn} = \frac{k'k}{pk}$ и $\frac{n'n}{mn} = \frac{n'a'}{mb}$. Поэтому, если точка схода следов плоскости выходит за пределы данного чертежа,

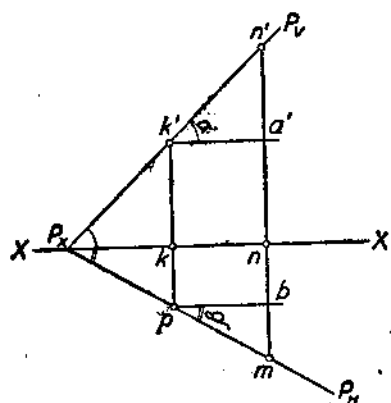


Черт. 110.

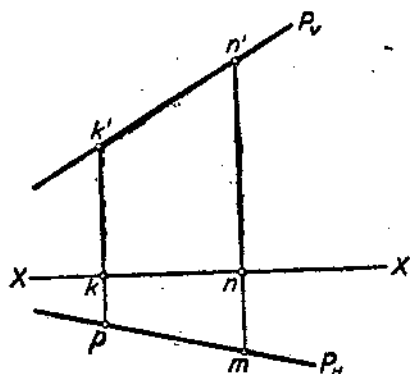


Черт. 111.

следует проверить заданное изображение плоскости (черт. 113): если $\frac{n'n}{mn} = \frac{k'k}{pk}$, то направление следов плоскости взято правильно.



Черт. 112.

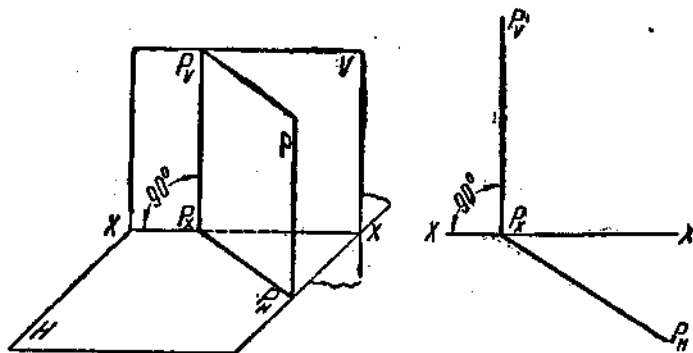


Черт. 113.

§ 11. Характерные положения плоскости относительно плоскостей проекций

1. Плоскость P перпендикулярна к плоскости H (черт. 114). След P_V , как линия пересечения плоскостей P и V , перпендикулярен к H и будет перпендикулярен к оси проекций; след P_H может занять любое положение.

Угол между следами P_V и P_H в пространстве равен 90° . Угол отклонения плоскости P от плоскости V равен углу между следом P_H и осью XX .



Черт. 114.

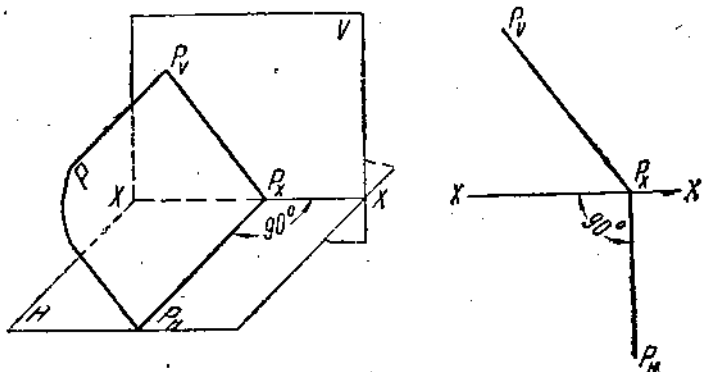
Плоскость P является горизонтально-проектирующей плоскостью.

2. Плоскость P перпендикулярна к плоскости V (черт. 115). След P_H будет перпендикулярен к оси XX , а P_V может занять любое положение. Угол между следами P_V и P_H в пространстве равен 90° .

Угол отклонения плоскости P от плоскости H равен углу между следом P_V и осью XX .

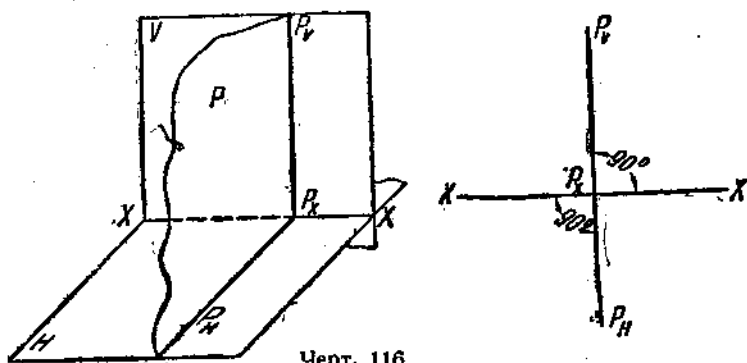
Плоскость P является вертикально-проектирующей плоскостью.

3. Плоскость P перпендикулярна к плоскостям V и H (профильная плоскость). Очевидно (черт. 115), P_V и P_H будут перпендикулярны к оси XX . На эюре, ввиду того что оба следа проходят через точку схода P_X , они сольются в одну прямую, перпендикулярную к оси XX .



Черт. 115.

4. Плоскость P параллельна горизонтальной плоскости проекций (черт. 117). В этом случае вертикальный след P_V будет параллелен оси проекций, горизонтального же следа не будет, так как плоскость P не пересекается с плоскостью H .

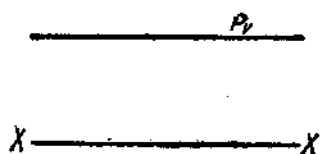
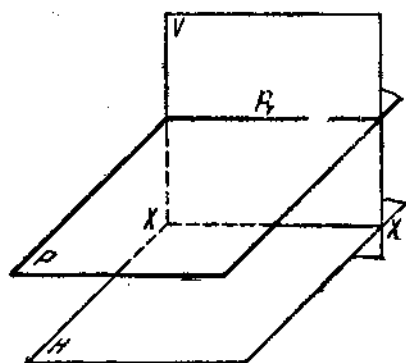


Черт. 116.

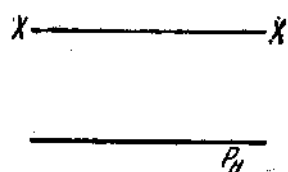
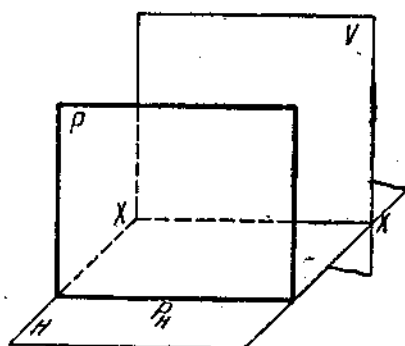
5. Плоскость P параллельна плоскости V (черт. 118). В этом случае горизонтальный след P_H расположится параллельно оси XX , а вертикальный след будет в бесконечности и на эюре не изобразится.

Для плоскости, параллельной плоскости V , встречается название фронтальная плоскость.

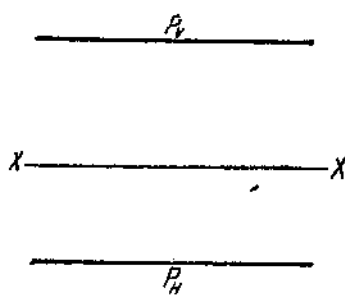
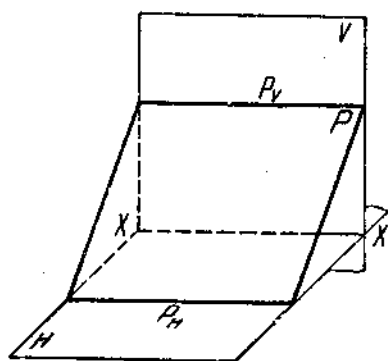
6. Плоскость P параллельна оси проекций XX (черт. 119). Плоскость P пересечет плоскости H и V по линиям, параллельным оси XX ; следовательно, P_H и P_V будут параллельны между собой.



Черт. 117.



Черт. 118.

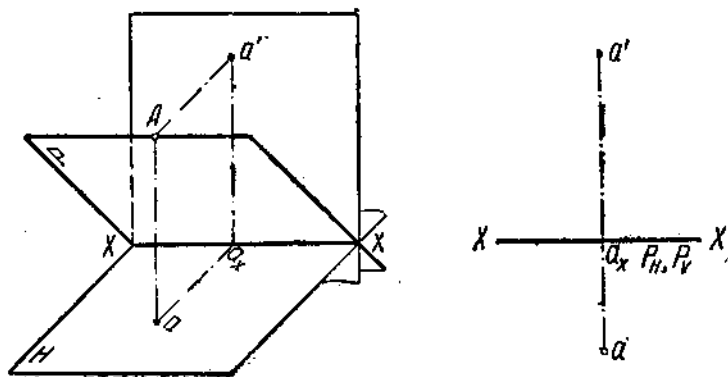


Черт. 119.

7. Плоскость P проходит через ось XX (черт. 120). Следы P_V и P_H сливаются с осью XX и не могут определить плоскость. В этом случае достаточно знать проекции одной какой-нибудь точки, принадлежащей плоскости и не лежащей на оси XX ; следы P_H и P_V (или ось XX) и выбранная точка определяют плоскость P . На черт. 120 в плоскости P взята точка $A(a, a')$.

Плоскость, у которой каждый след образует с осью проекций острый (или тупой) угол, называют плоскостью общего положения (например, плоскость, изображенная на черт. 110, есть плоскость общего положения).

Следует обратить внимание на то, что угол между следами на эюре не равен углу, составленному следами плоскости в пространстве. Это следует из того, что в точке схода следов можно представить себе вер-



Черт. 120.

шину трехгранного угла, две грани которого совпадают с плоскостями проекций. Как известно из геометрии, сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла. Так, угол между следами вертикально-проектирующей плоскости в действительности равен 90° , на эюре (черт. 115) угол между следами превышает 90° .

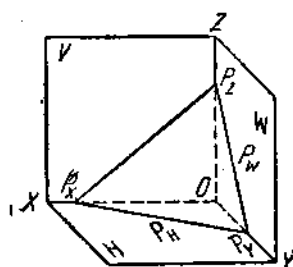
Если (черт. 110) следы плоскости общего положения P_V и P_H составляют одинаковые углы с осью XX , то это означает, что углы между плоскостью P и плоскостями H и V равны между собой. Действительно, если плоские углы трехгранного угла равны между собой, то равны и лежащие против них двугранные углы; черт. 121 позволяет сделать соответствующие выводы относительно плоскости общего положения.

Если взять вторую вертикальную плоскость W , то данная плоскость P , не параллельная плоскости W , дает на последней след P_W (черт. 121) с точками схода следов P_Z и P_Y . Эпюр дан на черт. 122.

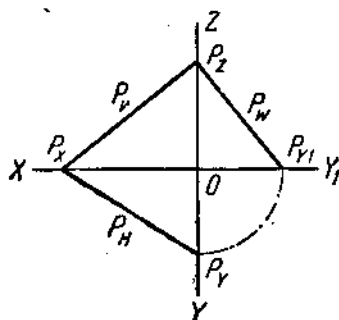
Если плоскость общего положения должна быть одинаково наклонена к плоскостям H , V и W , то очевидно на эюре следует отложить $OX=OY=OZ$, т. е. придать следам наклон 45° по отношению к осям проекций.

На черт. 123 даны эюры для некоторых плоскостей с указанием их следа на плоскости W :

- 1) горизонтально-проектирующая плоскость Q ,
- 2) плоскость R , параллельная плоскости H ,
- 3) плоскость T , параллельная оси OX ,
- 4) плоскость S , проходящая через ось OX и точку

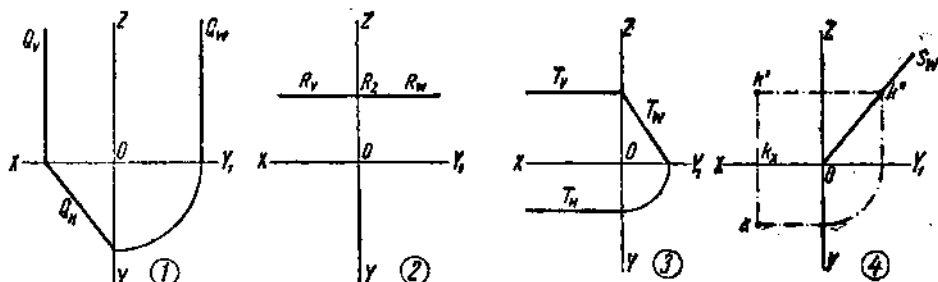


Черт. 121:



Черт. 122:

Если бы на черт. 123, 4 плоскость S проходила через точку, равноудаленную от плоскостей H и V , то след S_{WY} был бы биссектрисой угла ZOY_1 и плоскость S была бы биссекторной плоскостью между H и V . След биссекторной плоскости угла между H и W будет представлять собою биссектрису угла ZOX , а след биссекторной плоскости угла между V и W — биссектрису угла XOY .

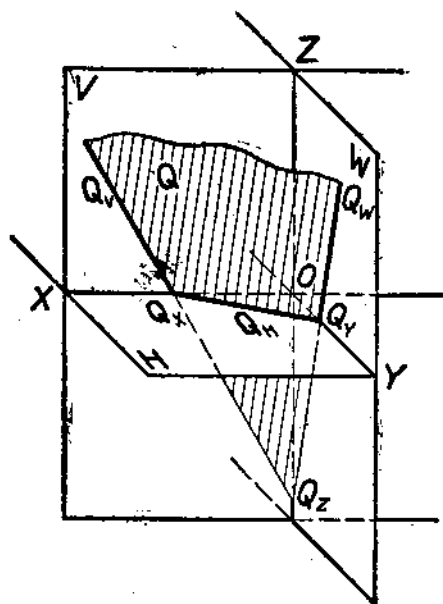


Черт. 123.

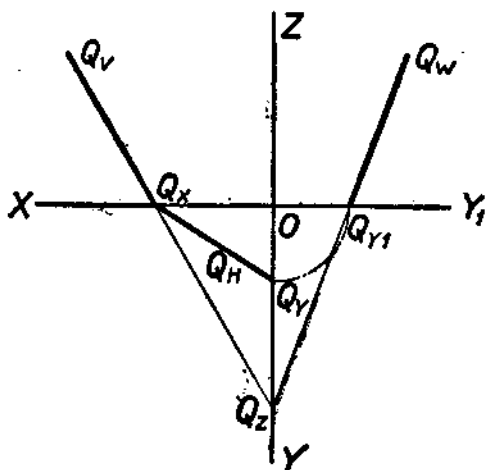
Следует также обратить внимание и на то, что угол, составленный вертикальным и горизонтальным следами плоскости общего положения в пространстве, может быть острым и тупым (поэтому иногда применяют названия остроугольная и тупоугольная плоскости общего положения, исходя из взаимного положения следов плоскости в первой четверти). На черт. 121 (эпюр дан на черт. 122) изображена некоторая плоскость общего положения с острым углом между следами P_V и P_H ; на черт. 124 изображена некоторая плоскость общего положения с тупым углом между следами Q_V и Q_H ; плоскость Q может проходить через все октанты, кроме шестого.

На эпюре (черт. 125) след Q_W построен при помощи точек Q_Z и Q_{Y_1} , из которых первая найдена при продолжении следа Q_V до пересечения с прямой ZOY .

На черт. 126 изображена плоскость общего положения, следы которой P_V и P_H на эпюре лежат на одной прямой. Вспомня схему совмещения плоскостей проекций (черт. 28), легко заметить, что следы P_V и P_H образуют равные углы с осью XX не только на эпюре, но и в пространстве. Для пояснения дан черт. 127: из равенства прямоугольных треугольников $k'_1 k' P_X$ и $k' k' P_X$ следует, что угол $k'_1 P_X k$ равен углу $k' P_X k$, т. е. след P_V образует с осью XX такой же угол, как и след P_H .



Черт. 124.



Черт. 125.

Последнее является признаком того, что плоскость P образует равные углы с плоскостями H и V .

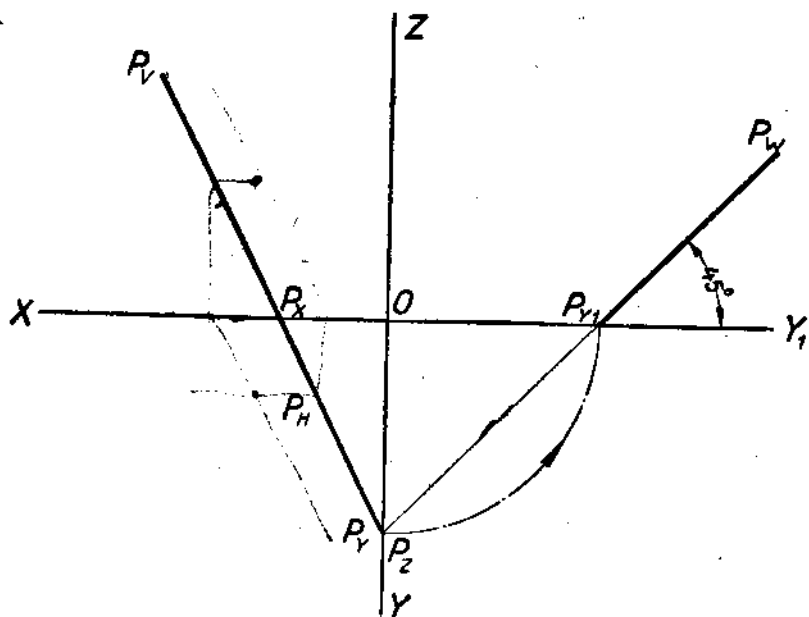
В плоскости P , считая по первой четверти, угол между P_V и P_H в пространстве тупой. Из черт. 126 ясно, что боковой след P_W составляет угол 45° с прямой XOY_1 .

Заметим также, что плоскость, изображенная на чертеже 126, проходит через биссектрису линейного угла, измеряющего двугранный угол между плоскостями проекций H и V , проведенную через точку схода следов P_X (см. также стр. 60).

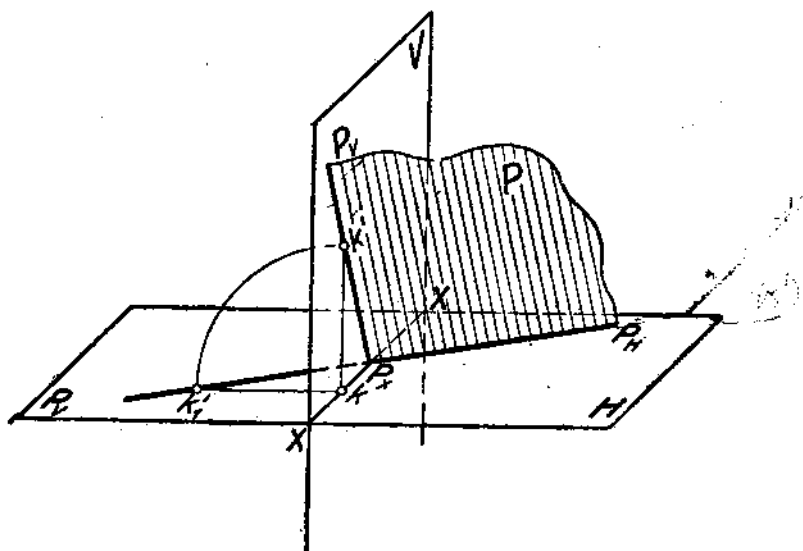
§ 12. Прямые, расположенные в плоскости. Горизонталь и фронталь

Рассмотрим свойства проекций прямых, лежащих в плоскости.

Пусть дана прямая AB , лежащая в плоскости P (черт. 128). Из чертежа видно, что прямая AB при своем продолжении пересекается с плоскостями проекций в точках M и N (следы прямой AB), лежащих на прямых P_H и P_V (следах плоскости P). Если же прямая имеет свой след



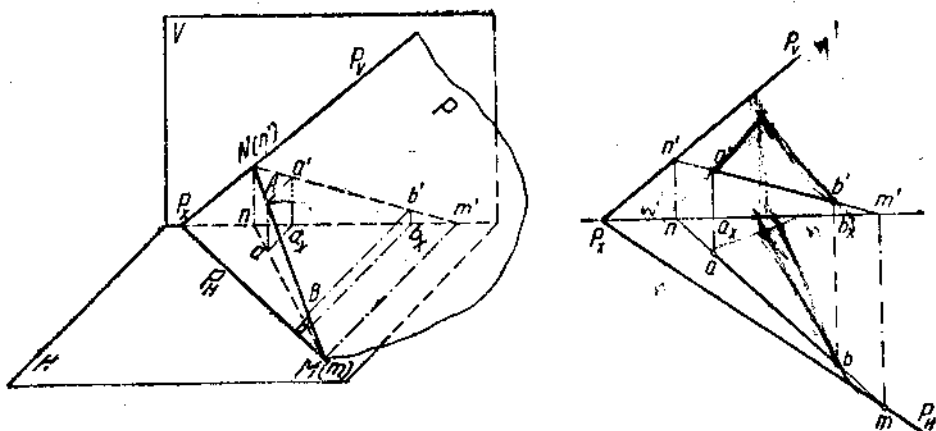
Черт. 126.



Черт. 127.

вне одноименного следа плоскости, то она не лежит в плоскости, так как проходит через точку, не принадлежащую данной плоскости.

Следовательно, следы прямой, лежащей в плоскости, лежат на одноименных следах этой плоскости. Это свойство позволяет нам находить

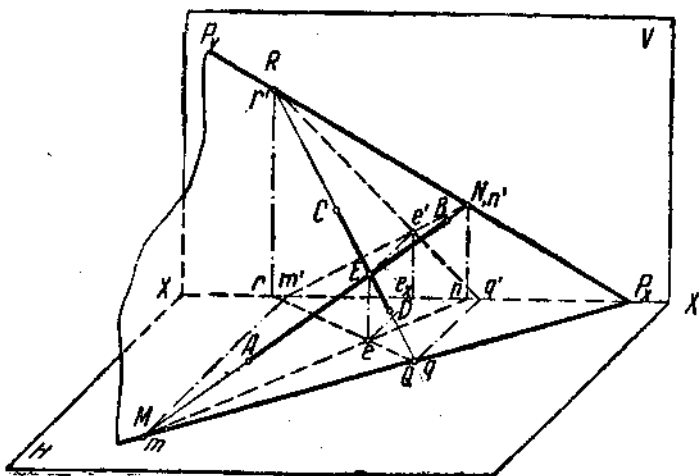


Черт. 128.

следы плоскости, когда она задана двумя пересекающимися или параллельными прямыми, прямой и точкой или тремя точками.

Пример. Пусть плоскость P задана прямыми AB и CD , пересекающимися в точке E ; требуется указать следы плоскости.

Для решения надо прежде всего найти следы прямых AB и CD . Следы прямой AB на черт. 129 обозначены: горизонтальный след — буквой M , вертикальный — буквой N . Следы прямой CD обозначены соответственно буквами Q и R .



Черт. 129.

На черт. 130 имеем соответственно: следы прямой AB — m , m' и n , n' , следы прямой CD — q , q' и r , r' .

Соединяя прямой горизонтальные следы M и Q , мы получим горизонтальный след P_H , соединяя же прямой вертикальные следы N и R , будем иметь вертикальный след P_V .

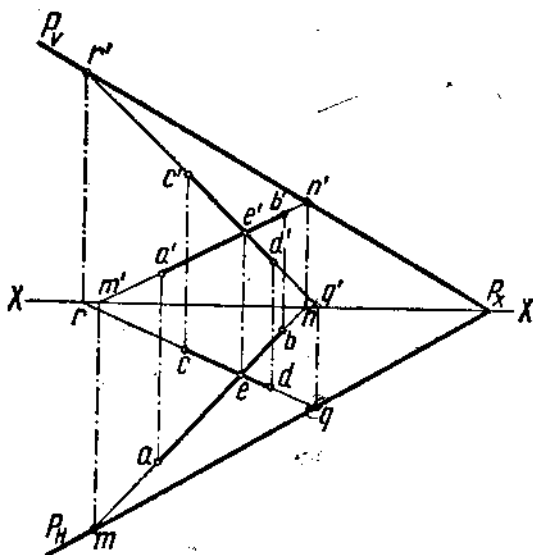
Следы P_H и P_V должны пересекаться в точке P_X , лежащей на оси проекций XX . Точка P_X , находясь на оси XX , может не лежать в пределах чертежа; также могут не лежать в пределах чертежа и следы плоскости.

Если плоскость задана параллельными прямыми, прямой и точкой или тремя точками, то легко перейти от этих заданий к заданиям двумя пересекающимися прямыми; действительно, в первом случае, соединяя любую точку одной из прямых с точкой на другой прямой, а во втором случае, соединяя любую точку прямой с заданной точкой, получаем две пересекающиеся прямые; в третьем случае, проводя прямые через заданные точки, также приходим к заданию плоскости двумя пересекающимися прямыми.

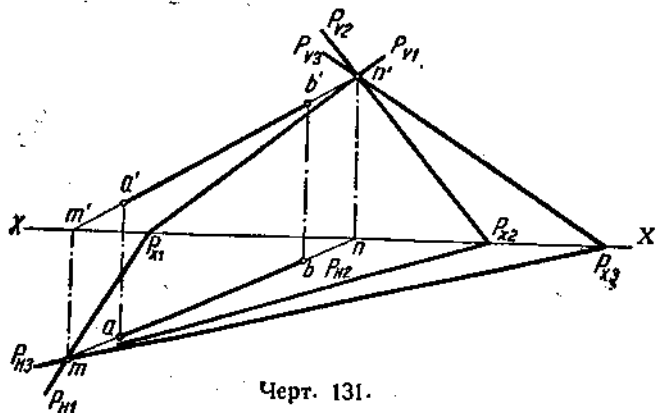
Следовательно, во всех этих случаях легко найти следы плоскостей, определив следы пересекающихся прямых.

Если бы стал вопрос об указании плоскости, проходящей через заданную одну прямую, то в общем случае задача является неопределенной, так как через одну прямую можно провести в пространстве бесчисленное количество плоскостей.

Действительно, пусть (черт. 131) дана прямая AB своими проекциями. Находим следы прямых m , m' и n , n' . Следы всякой плоскости, в которой будет лежать прямая AB , должны проходить через следы прямой, а точка схода будет располагаться на оси XX . Выбирая на оси XX любую точку (P_{X1} , P_{X2} , P_{X3} и т. д.) и соединяя ее с m и n' , мы получим ряд плоскостей, удовлетворяющих условию задачи.



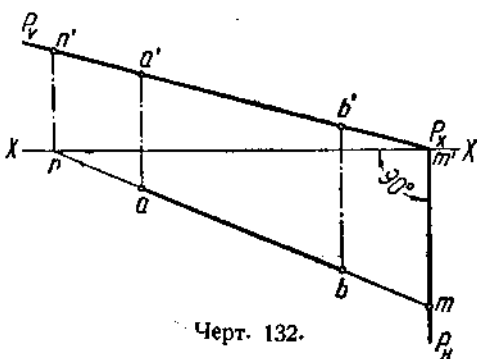
Черт. 130.



Черт. 131.

Но если будет дополнительное условие, характеризующее расположение искомой плоскости относительно плоскостей проекций, то решение задачи становится вполне определенным.

Пример. Дана прямая AB (черт. 132); требуется построить следы плоскости P , проходящей через данную прямую и расположенной перпендикулярно к плоскости V . Очевидно, что искомая плоскость P будет вертикально-проектирующей плоскостью для прямой AB . След P_V сольется с вертикальной проекцией прямой $a'b'$, горизонтальный же след P_H расположится перпендикулярно к оси XX .

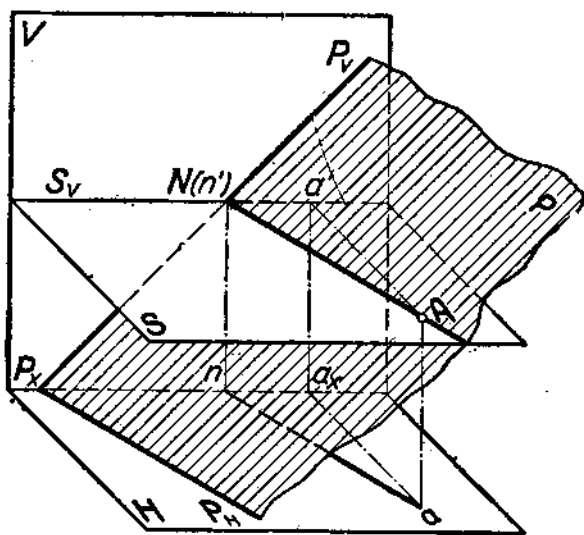


Черт. 132.

Из всех положений, которые может занимать прямая, находящаяся в плоскости, рассмотрим особо два положения: 1) прямая располагается параллельно горизонтальной плоскости проекций — **горизонталь** плоскости, и 2) прямая располагается параллельно вертикальной плоскости проекций — **фронталь** плоскости.

Для выявления свойств горизонтали плоскости и свойств ее проек-

ций рассмотрим пространственный черт. 133, на котором изображены плоскость P и прямая AN , лежащая в плоскости P и расположенная параллельно плоскости H . Эта прямая AN имеет только один след — вертикальный (на следе P_V), горизонтального же следа у прямой не будет, так как прямая по заданию не должна пересекаться с плоскостью H . Проведем через прямую AN плоскость S , параллельную плоскости H . Плоскость S пересечет: 1) плоскость V по линии, параллельной оси XX , 2) плоскость P — по ли-

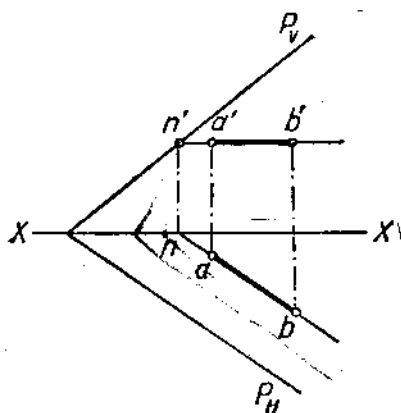


Черт. 133.

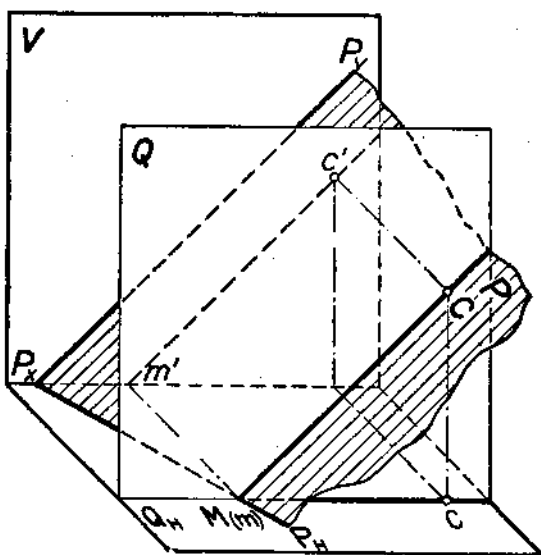
нии AN . Рассматривая плоскость P как секущую для двух параллельных плоскостей S и H , можно сказать (на основании элементарной геометрии), что линии пересечения этих плоскостей AN и P_H будут между собой параллельны. Отсюда вытекает, что горизонталь плоскости параллельна горизонтальному следу плоскости.

Из того же черт. 133 видно, что горизонтальная проекция an горизонтали AN будет параллельна самой горизонтали AN (AN параллельна H) и будет также параллельна горизонтальному следу P_H , вертикальная же проекция горизонтали ($a'n'$) расположится параллельно оси XX как проекция прямой, параллельной H . Следовательно, горизонтальная проекция горизонтали плоскости располагается параллельно горизонтальному следу плоскости, а вертикальная проекция — параллельно оси проекций.

На черт. 134 изображена плоскость P (следами P_V и P_H) и горизонталь AB (проекциями ab и $a'b'$); отрезок ab параллелен P_H , $a'b'$ параллелен XX .



Черт. 134.



Черт. 135.

Рассмотрим черт. 135, на котором изображена плоскость P и прямая SM , лежащая в плоскости P и расположенная параллельно плоскости V . Проводя через SM вспомогательную плоскость Q параллельно плоскости V , мы можем, рассуждая так же, как и в отношении горизонтали, вывести заключение, что:

- 1) фронталь SM будет иметь только один горизонтальный след;
- 2) фронталь SM параллельна вертикальному следу плоскости P_V ;
- 3) вертикальная проекция фронтали $c'm'$ параллельна вертикальному следу плоскости P_V ;
- 4) горизонтальная проекция фронтали sm располагается параллельно оси XX .

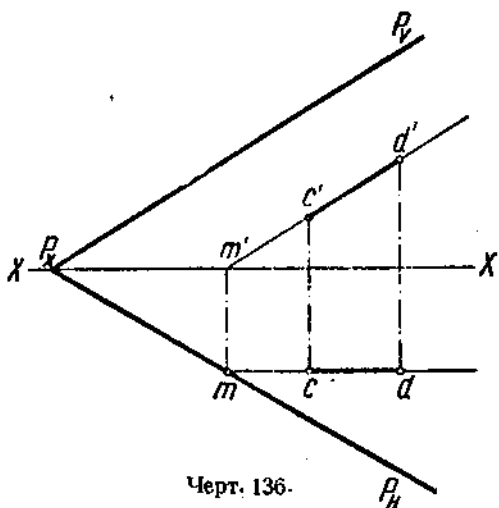
Из указанных свойств горизонталей и фронталей вытекает и способ их построений. Так, если плоскость P дана следами (черт. 134), то достаточно на вертикальном следе P_V выбрать точку n' (вертикальный след горизонтали), провести через n' линию, параллельную оси XX , — получим вертикальную проекцию горизонтали, построить затем точку n (горизонтальная проекция вертикального следа горизонтали) и прове-

сти через нее линию, параллельную следу P_H , — получим горизонтальную проекцию горизонтали.

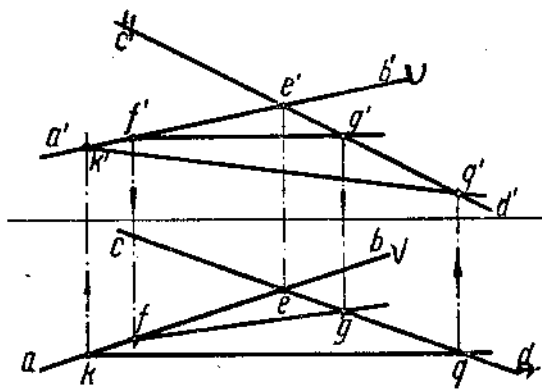
Аналогичным способом на эюре черт. 136 построена проекция фронтали CD плоскости P .

Если плоскость задана не следами, а, например, двумя пересекающимися прямыми, то построение горизонталей и фронталей этой плоскости также не вызывает затруднений. Так, на эюре (черт. 137) плоскость задана проекциями двух пересекающихся прямых AB и CD ; точка пересечения этих прямых обозначена буквой $E(e, e')$. Проведем в плоскости горизонталь, проходящую через точку $F(f, f')$, и фронталь через точку $K(k, k')$. Для построения горизонтали через f' проведем прямую, параллельную оси проекций, до пересечения с $c'd'$ в точке g' . Найдя горизонтальную проекцию точки пересечения (g), соединим ее с точкой f . Линии fg и $f'g'$ будут проекциями искомой горизонтали плоскости.

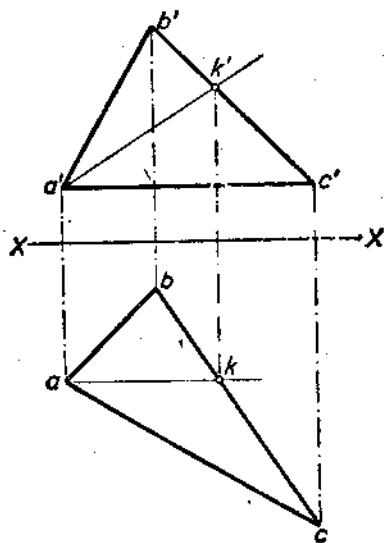
Для построения искомой фронтали проведем через точку k прямую, параллельную оси, до пересечения с cd в точке q ; построив q' , соединим ее с k' . Линии kq и $k'q'$ будут проекциями искомой фронтали.



Черт. 136.



Черт. 137.

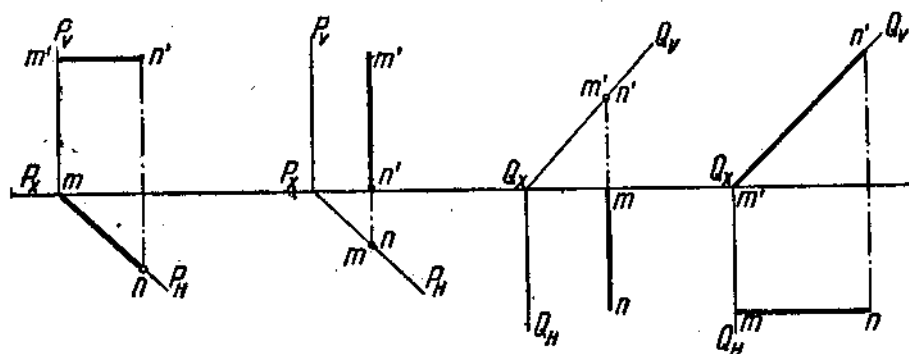


Черт. 138.

Заметим здесь, что если бы мы построили следы плоскости, заданной пересекающимися прямыми AB и CD , то горизонтальный след

плоскости был бы параллелен прямой fg , а вертикальный след параллелен прямой $k'q'$.

На черт. 138 в треугольнике ABC , одна сторона которого (AC) параллельна плоскости H , через вершину A проведена прямая AK — фронт-



Черт. 139.

таль плоскости, определяемой данным треугольником. Построение начато с проведения прямой ak — горизонтальной проекции фронтали — параллельно оси XX ; затем найдена точка k' и проведена прямая $a'k'$ — вертикальная проекция фронтали.

Так как вертикальная проекция $a'c'$ параллельна оси XX , то сторона AC треугольника является горизонталью.

Обратим внимание на то, как располагаются горизонтали и фронтали в горизонтально- и вертикально-проектирующих плоскостях. На черт. 139 указаны эпюры: 1) горизонталь плоскости P , перпендикулярной к H ; 2) фронталь той же плоскости, 3) горизонталь плоскости Q , перпендикулярной к плоскости V , 4) фронталь той же плоскости.

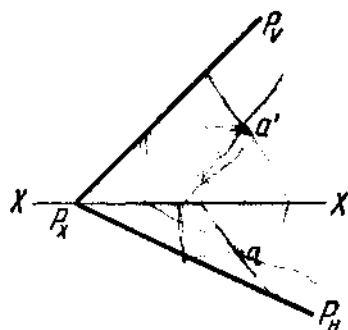
На черт. 140 изображена плоскость общего положения, в которой проведена прямая, параллельная плоскости W — профильная прямая.

Проекция $a''b''$ параллельна следу P_W .

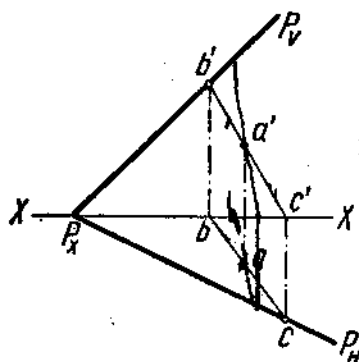
В заключение отметим, что самый след P_H представляет собой одну из горизонталей плоскости, след P_V — одну из фронталей, след P_W — одну из профильных прямых в данной плоскости.

§ 13. Точка в плоскости

На черт. 142 выполнено построение для случая, когда даны плоскость P следами и вертикальная проекция a' точки A , лежащей в плоскости P , и надо найти горизонтальную проекцию точки A (черт. 141).

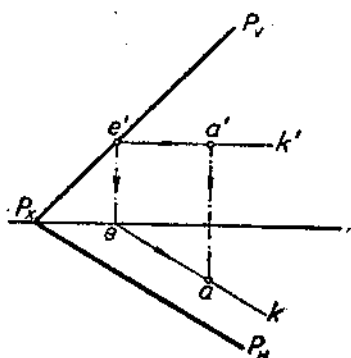


Черт. 141.

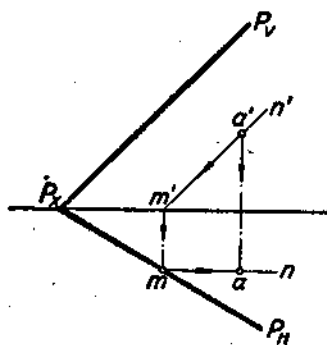


Черт. 142.

Если точка A лежит в плоскости P , то через точку A можно провести ряд прямых, лежащих в плоскости P . Для того чтобы эти прямые лежали в плоскости P , необходимо, чтобы их следы расположились на следах самой плоскости. На черт. 142 выполнено построение искомой горизон-



Черт. 143.

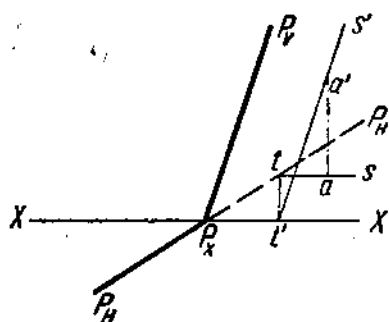


Черт. 144.

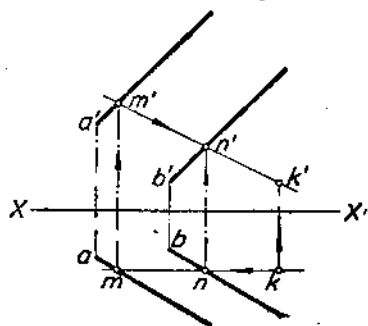
тальной проекции a точки A при помощи прямой BC , выбранной таким образом, чтобы вертикальная проекция $b'c'$ проходила через данную точку a' и пересекала бы след P_V и ось XX . Если затем провести перпендикуляр из точки b' на ось XX (точка b), а из точки c' провести перпендикуляр до пересечения со следом P_H , то тем самым определится направление горизонтальной проекции вспомогательной прямой BC . Теперь останется найти положение точки a на bc ; точка a будет искомой горизонтальной проекцией точки A , лежащей в плоскости P .

На черт. 143 та же задача решена при помощи горизонтали EK , а на черт. 144 при помощи фронтали MN . На черт. 145 вследствие выбранного положения следов P_H и P_V и проекции a' точки A решение,

выполненное с помощью фронтали ST , приводит к нахождению такого положения горизонтальной проекции a , которое указывает, что точка A , лежащая в данной плоскости P , расположена за плоскостью V , во второй четверти.

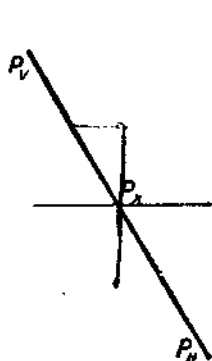


Черт. 145.

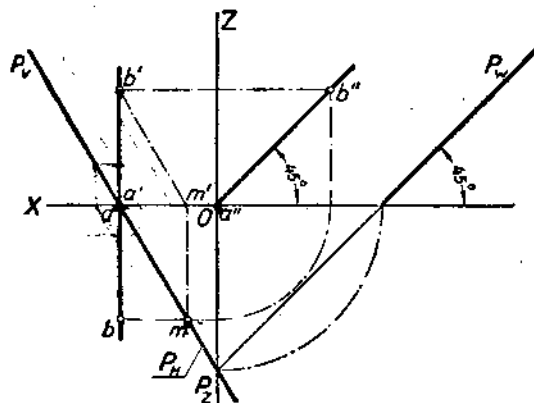


Черт. 146.

На черт. 146 найдено положение вертикальной проекции точки K согласно условию, что точка K должна быть в плоскости, заданной двумя параллельными прямыми, проведенными из точек A и B ; горизонтальная проекция точки K была дана.



Черт. 147.

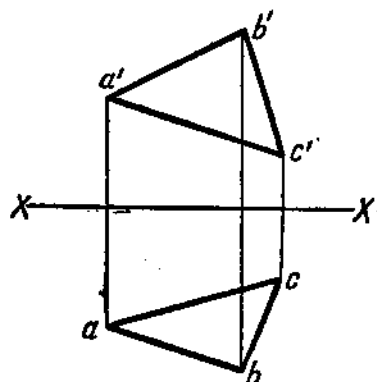


Черт. 148.

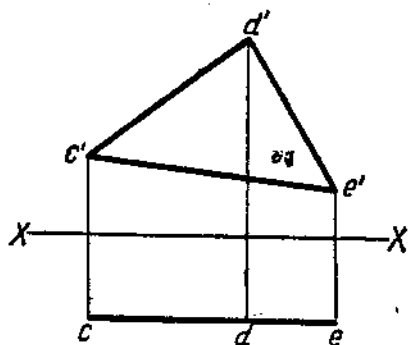
Из числа разнообразно направленных прямых, при помощи которых точка K могла быть связана с плоскостью, выбрана фронталь MN . Для этого через заданную точку K проведена прямая, параллельная оси XX' — горизонтальная проекция фронтали, отмечены точки m и n , соответственно им отмечены точки m' и n' , определяющие вертикальную проекцию фронтали. Искомая точка k' должна находиться на прямой $m'n'$.

На черт. 147 изображена плоскость, известная нам по черт. 126. В этой плоскости требуется через точку P_X провести прямую, параллельную плоскости W . Чтобы эта прямая была расположена в плоскости P , она должна иметь, помимо точки A , совпадающей с точкой P_X (см. черт. 148), еще одну точку, общую с плоскостью P . Проекция этой точки

и C , мы можем нанести на эпюр их проекции; соединяя в известной последовательности найденные проекции точек, мы получим проекции отрезков прямых, т. е. проекции периметра треугольника.



Черт. 151.



Черт. 152.

Если бы требовалось найти площадь указанного на черт. 151 треугольника, то это можно было бы сделать, определив истинную величину каждой из сторон

треугольника, и затем построить его по найденным отрезкам.

Вместе с тем определились бы и углы данного треугольника.

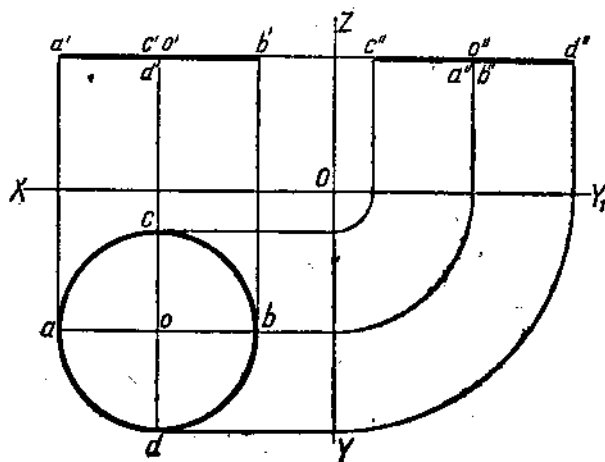
Необходимость в определении истинной величины сторон треугольника отпадает в том случае, если стороны эти будут параллельны одной из плоскостей проекций.

Любые две стороны треугольника определяют его плоскость.

Следовательно, если сто-

роны треугольника будут параллельны плоскости проекций, то это равносильно тому, что плоскость данного треугольника параллельна плоскости проекций. Отсюда можно сделать вывод, что наивыгоднейшим положением треугольника относительно плоскостей проекций будет положение, при котором плоскость треугольника параллельна или совпадает с одной из плоскостей проекций: все элементы треугольника, т. е. стороны и углы, спроектируются на эту плоскость без искажения (черт. 152).

Указанный вывод относительно наивыгоднейшего положения треугольника распространяется на все плоские фигуры: если желательно, чтобы проекция без искажения изображала проектируемую плоскую

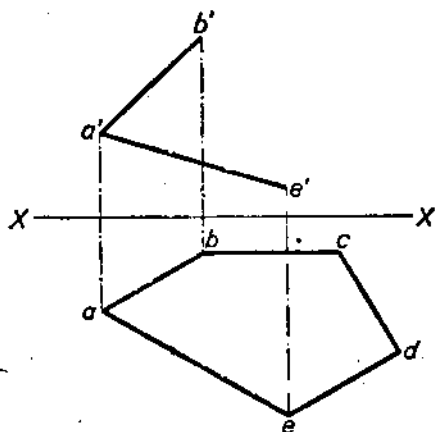


Черт. 153.

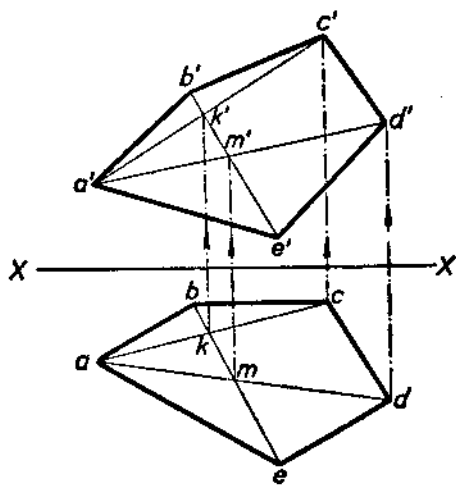
фигуру, следует расположить плоскость этой фигуры параллельно одной из плоскостей проекций. Если, например, плоскость круга параллельна плоскости H , то проекции круга изобразятся так, как указано на черт. 153, и точное изображение круга получится на плоскости H .

При построении проекций какого-либо многоугольника необходимо обратить внимание на то, чтобы не нарушалось условие нахождения всех точек данной фигуры в одной плоскости.

На черт. 154 дана горизонтальная проекция некоторого пятиугольника полностью и вертикальные проекции трех вершин. На черт. 155 показано построение проекций c' и d' при помощи диагоналей: проводя прямые ac , ad и be , получаем точки k и m , соответствующим которым находим точки k' и m' на вертикальной проекции диагонали BE ; вертикальные проекции диагоналей AC и AD должны пройти соответственно через точки k' и m' , а на этих проекциях и расположатся вертикальные проекции вершин C и D .



Черт. 154.



Черт. 155.

Если отрезок AC (черт. 156), расположенный в плоскости Q , направлен параллельно плоскости P , на которую этот отрезок проектируется, то проекция ac равна проектируемому отрезку AC . Если же отрезок BK перпендикулярен отрезку AC , то соотношение между проекцией bk и отрезком BK выражается при помощи угла α , который представляет собою угол наклона между плоскостями Q и P . Следовательно, $bk = BK \cdot \cos \alpha$.

Далее заметим, что между площадями abc и ABC (черт. 156) получается соотношение при посредстве того же самого угла α :

Действительно, $\text{пл. } abc = \text{пл. } ABC \cdot \cos \alpha$.

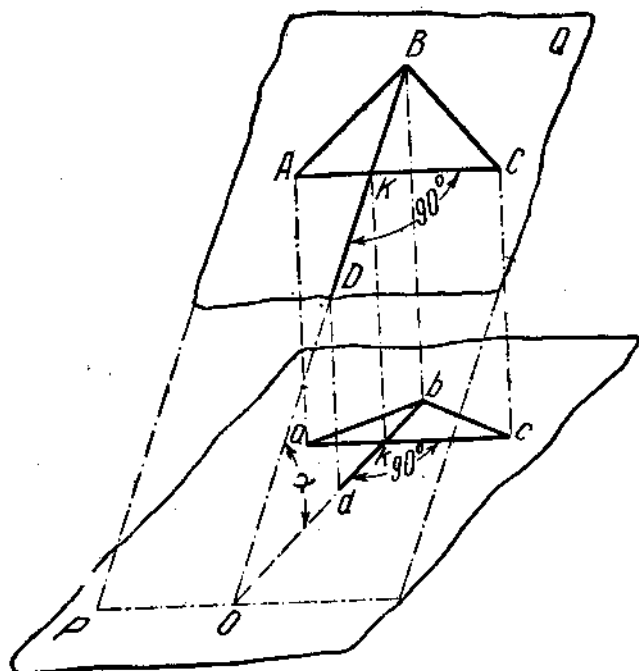
$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BK,$$

$$\text{пл. } abc = \frac{1}{2} ac \cdot bk;$$

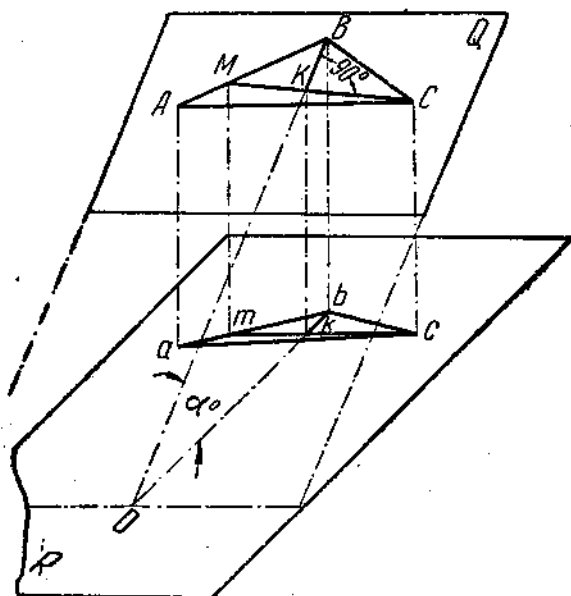
$$ac = AC,$$

$$bk = BK \cdot \cos \alpha$$

и, следовательно, $\text{пл. } abc = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK \cdot \cos \alpha = \text{пл. } ABC \cdot \cos \alpha$.



Черт. 156.



Черт. 157.

Указанное соотношение не зависит от положения сторон проектируемой фигуры относительно плоскости проекции: на черт. 157 дан пример, когда ни одна из сторон треугольника ABC не расположена параллельно плоскости P , но этот случай легко свести к первому, если провести отрезок CM параллельно плоскости P и тем самым разбить треугольник ABC на два треугольника, расположенных так же, как был расположен треугольник ABC на черт. 156. Для каждого из этих двух треугольников (черт. 386) справедливо равенство:

$$\begin{aligned}\text{пл. } amc &= \text{пл. } AMC \cdot \cos \alpha, \\ \text{пл. } mbc &= \text{пл. } MBC \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем:

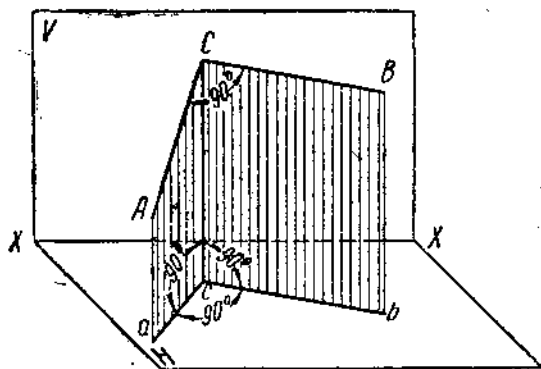
$$\text{пл. } abc = \text{пл. } ABC \cdot \cos \alpha.$$

Любой многоугольник можно разбить на треугольники и, следовательно, площадь проекции будет равна его площади, умноженной на косинус угла между плоскостью, в которой лежит проектируемый многоугольник, и плоскостью проекций.

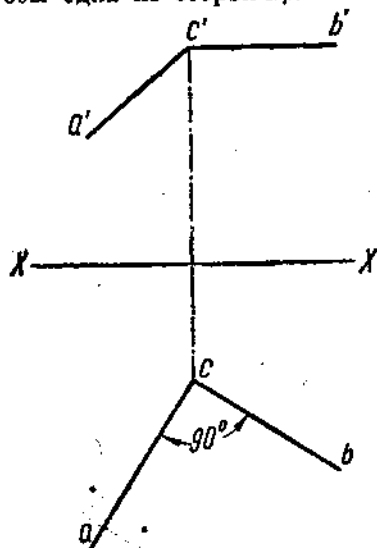
Это справедливо и по отношению к любой плоской фигуре, ограниченной кривой линией.

§ 15. Проекция прямого угла

Проекция прямого угла может представлять собой также прямой угол, хотя плоскость проектируемого прямого угла и не будет параллельна плоскости проекций. Достаточно, чтобы одна из сторон прямого угла оказалась параллельна соответственной плоскости проекций: проекция прямого угла на эту плоскость будет представлять собою прямой угол.



Черт. 158.



Черт. 159.

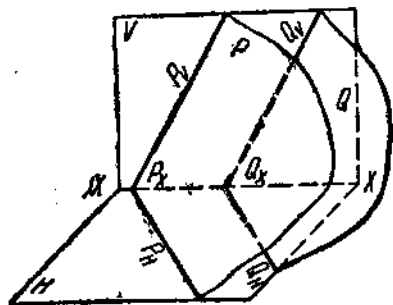
Действительно, проводя через стороны прямого угла ACB (черт. 158) проектирующие плоскости, получим двугранный угол, ребро которого (Cc) будет перпендикулярно к плоскости H . Отрезок BC по условию параллелен плоскости H и перпендикулярен к отрезку AC . Но в силу параллельности плоскости H отрезок BC будет перпендикулярен к Cc .

Следовательно, BC перпендикулярен к плоскости фигуры $ACca$. Отрезок bc параллелен BC и, следовательно, перпендикулярен к плоскости фигуры $ACca$, т. е. будет перпендикулярен к ac . Если на эюре черт. 159 горизонтальная проекция некоторого угла представляет собой прямой угол acb , то самый угол в пространстве будет прямым только в том случае, если проекция $c'b'$ параллельна оси проекций, т. е. сторона CB угла ACB параллельна плоскости H .

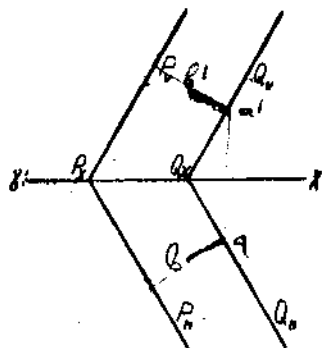
Отметим случай, когда обе проекции прямого угла (на плоскостях H и V) представляют собой углы в 90° . Для этого необходимо, чтобы одна сторона проектируемого прямого угла была параллельна оси проекций XX , а другая сторона составляла с плоскостью H (или с плоскостью V) некоторый угол.

§ 16. Относительное положение двух плоскостей

При рассмотрении всех возможных относительных положений двух плоскостей можно их разбить на две группы: 1) плоскости параллельные (не имеющие общих точек), 2) плоскости пересекающиеся (имеющие общими все точки линии их пересечения).



Черт. 160.



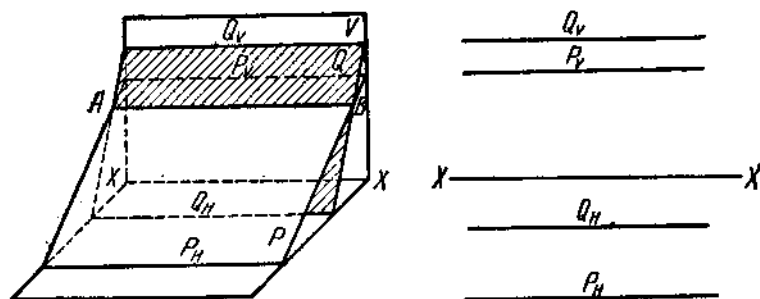
Черт. 161.

Плоскости параллельные. Возьмем в пространстве две параллельные плоскости P и Q (черт. 160), пересекающиеся с плоскостями проекций по линиям P_V и Q_V , P_H и Q_H . Рассматривая вертикальные следы P_V и Q_V как линии сечения параллельных плоскостей P и Q третьей плоскостью V , мы можем отметить, что следы должны быть параллельны между собой. Горизонтальные следы плоскостей P_H и Q_H также будут параллельны между собой как линии сечения параллельных плоскостей P и Q третьей плоскостью H .

Следовательно, если плоскости параллельны между собой, то их одноименные следы также параллельны. Из того же черт. 160 нетрудно заключить, что и обратное положение также справедливо, т. е. две плоскости параллельны в пространстве, если одноименные следы их параллельны между собой (две пересекающиеся прямые P_H и P_V плоскости P соответственно параллельны двум пересекающимся прямым Q_H и Q_V плоскости Q).

На эпюре черт. 161 изображены параллельные между собой плоскости P и Q ; след P_H параллелен Q_H , след P_V параллелен Q_V .

Исключением из указанного правила может быть случай расположения двух плоскостей параллельно оси проекций. В этом случае пло-



Черт. 162.

скости могут быть и не параллельны, но их одноименные следы будут обязательно параллельны между собой, так как каждый из них параллелен оси проекций (черт. 162).

Выяснив свойства следов параллельных плоскостей, отметим, что как горизонтали, так и фронтонали параллельных плоскостей соответственно параллельны между собой.

Рассмотрим пример построения на эюре плоскости Q , параллельной заданной плоскости P .

Пример. Пусть задана плоскость P следами P_H и P_V и точка $A(a, a')$; требуется построить следы плоскости Q , проходящей через точку A и расположенной в пространстве параллельно плоскости P (черт. 163).

Черт. 163.

1-й способ решения. Выбираем в плоскости P две произвольные прямые CB ($cb, c'b'$) и DE ($de, d'e'$), пересекающиеся в точке $F(f, f')$. Через заданную точку (a, a') проводим прямую C_1B_1 ($c_1b_1, c'_1b'_1$), параллельную CB , и прямую D_1E_1 ($d_1e_1, d'_1e'_1$), параллельную DE . Очевидно, что пересекающиеся прямые C_1B_1, D_1E_1 (на эюре $c_1d_1, c'_1b'_1$ и $d_1e_1, d'_1e'_1$) определяют положение искомой плоскости и для находке-

ния следов плоскости достаточно будет найти следы этих прямых и соединить следы между собой; так получатся следы искомой плоскости.

На черт. 163 следы прямой C_1B_1 обозначены: 1) горизонтальный

след — r, r' , 2) вертикальный след — g, g' . Следы прямой D_1E_1 обозначены соответственно m, m' и n, n' . Следы плоскости Q проходят: Q_V через g' и n' , Q_H через m и r .

Зная свойства следов параллельных плоскостей, можно решение упростить, а именно, найдя, например, вертикальный след n' , проводим через него след Q_V параллельно P_V до пересечения с осью проекций в точке Q_X ; для построения Q_H достаточно провести через точку Q_X линию, параллельную P_H .

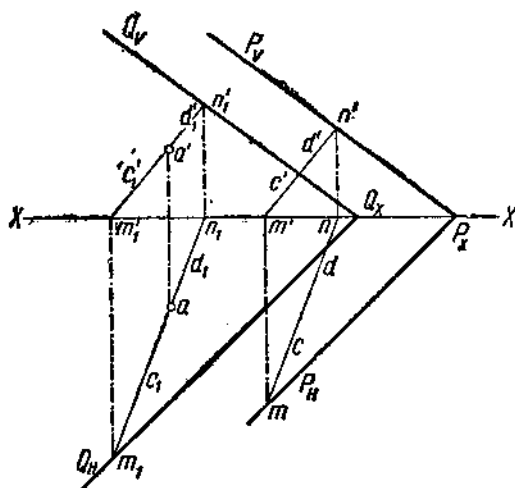
2-й способ решения. Возьмем произвольную прямую CD ($cd, c'd'$) в плоскости P

(черт. 164); затем через точку a, a' проведем прямую $c_1d_1, c'_1d'_1$, параллельную $cd, c'd'$, и найдем следы прямой $c_1d_1, c'_1d'_1$, — горизонтальный m_1, m'_1 и вертикальный n_1, n'_1 . Вертикальный след искомой плоскости должен проходить через n'_1 , а горизонтальный через m_1 ; кроме того, искомые следы должны быть параллельны одноименным следам плоскости P . Поэтому мы проводим Q_V через точку n'_1 параллельно P_V , и Q_H через m_1 параллельно P_H . При точном построении Q_V и Q_H обязательно должны пересечься в точке Q_X на оси XX .

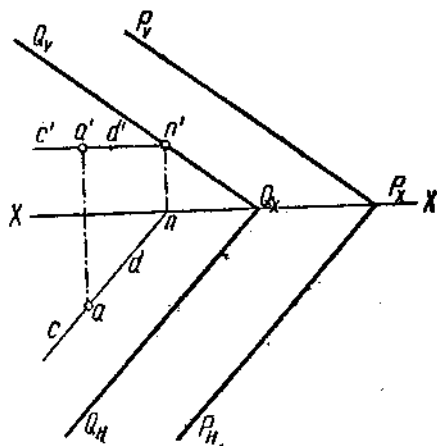
В этот способ можно внести упрощение, а именно, достаточно найти один какой-нибудь след прямой, например m_1 , провести через него Q_H параллельно P_H до пересечения с осью XX в точке Q_X , а затем через точку Q_X (точка схода следов) провести Q_V параллельно P_V .

3-й способ решения. Зная, что горизонталь и фронталь параллельных плоскостей между собой параллельны, мы можем через точку a, a' провести горизонталь или фронталь искомой плоскости Q .

На черт. 165 проведена через точку a, a' горизонталь $cd, c'd'$ плоскости Q ; cd параллельна P_H и $c'd'$ параллельна оси XX .



Черт. 164.

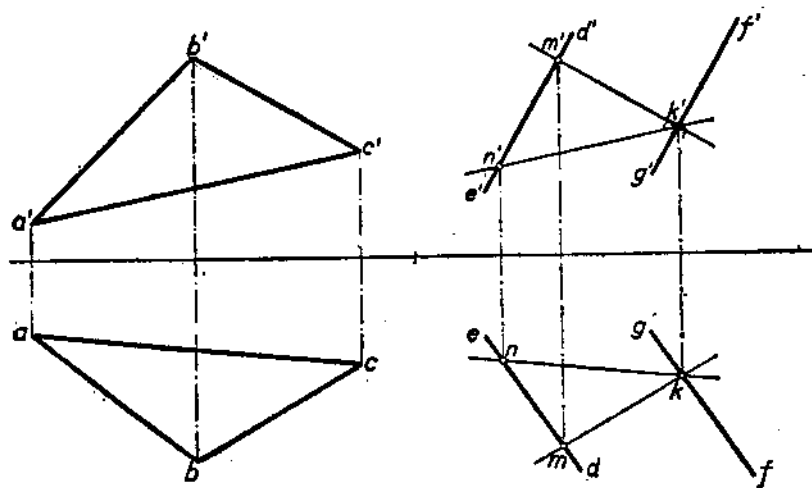


Черт. 165.

Найдя n' (вертикальную проекцию вертикального следа горизонтали), проводим Q_V через n' параллельно F_V , а через точку Q_X проводим Q_H параллельно P_H .

Из рассмотренных трех способов решения третий способ самый простой.

На черт. 166 показана проверка параллельности двух плоскостей, из которых одна (P) определяется треугольником ABC , а другая (Q) двумя параллельными прямыми DE и FG . Проверка параллельности плоскостей P и Q произведена при помощи двух пересекающихся прямых KM и KN , проведенных в плоскости Q соответственно параллельно двум пересекающимся прямым в плоскости P . На черт. 166



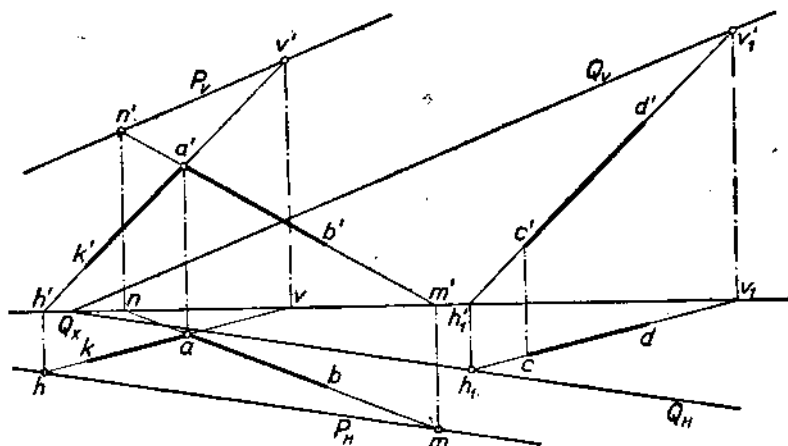
Черт. 166.

$k'm' \parallel b'c'$, $km \parallel bc$ и $k'n' \parallel a'c'$, $kn \parallel ac$, причем точки m' и n' оказались на вертикальной проекции $d'e'$, а соответствующие им горизонтальные проекции m и n на горизонтальной проекции de . Следовательно, в плоскостях P и Q оказалось по паре пересекающихся соответственно параллельных прямых, т. е. плоскости P и Q параллельны одна другой.

Если даны две параллельные прямые, то можно построить множество пар параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые: в каждой паре одна плоскость проходит через одну из данных прямых, другая плоскость проходит через другую прямую. Надо найти следы данных прямых и через эти следы проводить прямые — следы искомых параллельных плоскостей.

Если даны две скрещивающиеся прямые, то можно построить лишь одну пару параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые. Каждая плоскость будет определяться одной из данных скрещивающихся прямых и пересекающейся с ней вспомогательной прямой, проведенной параллельно другой из скрещивающихся прямых. Следовательно, каждая плоскость окажется заданной двумя пересекающимися прямыми, на основании чего легко построить следы плоскостей.

На черт. 167 для проведения параллельных плоскостей через данные скрещивающиеся прямые AB и CD сделано следующее: через точку A проведена прямая $AK \parallel CD$, найдены следы прямых AB и AK , через эти следы проведены следы плоскости P_H и P_V , затем найдены следы прямой CD и через эти следы проведены прямые Q_H и Q_V , соответ-



Черт. 167.

ственно параллельные прямым P_H и P_V . Плоскость Q , определяемая следами Q_H и Q_V , параллельна плоскости P .

Так как в данном случае точка схода следов P_H и P_V не оказалась в пределах чертежа, пришлось построить четыре точки (m , h , n' и v'), при помощи которых проведены следы P_H и P_V . Если бы точка схода следов получилась в пределах чертежа, она могла бы заменить одну из указанных выше точек.

Замечая по черт. 168, что при параллельности плоскостей P и Q имеет место пропорция $\frac{n'n}{v'n} =$

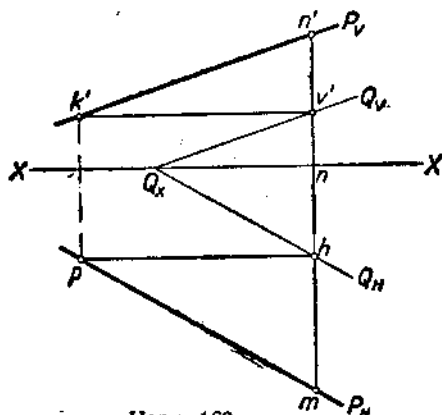
$$= \frac{mn}{hn}, \text{ воспользуемся этим}$$

для проверки правильности изображения плоскости P на черт. 169 при недоступной точке схода следов.

Строим вспомогательную плоскость $Q \parallel P$ и проводим прямую $n'm$; если отношение $\frac{n'n}{v'n}$ равно отношению $\frac{mn}{hn}$, плоскость P задана правильно.

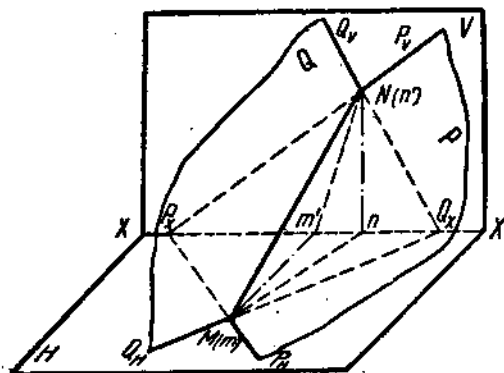
Также можно проверить правильность изображения плоскости P , сравнивая между собой отрезки $v'k'$ и hp , параллельные оси XX : при параллельности плоскостей (черт. 168) $v'k' = hp = P_X Q_X$:

Плоскости пересекающиеся. На черт. 170 показан общий случай пересечения плоскостей P и Q . Из этого чертежа видно, что линия пересечения плоскостей — линия MN , одновременно лежащая в обеих плоскостях, имеет свои следы на пересечении одноименных следов плоскостей. Горизонтальный след линии пересечения M лежит на пересечении следов P_H и Q_H , а след N на пересечении следов P_V и Q_V . Указанное свойство следов линий пересечения плоскостей позволяет легко ее находить, когда следы плоскостей пересекаются в пределах чертежа.

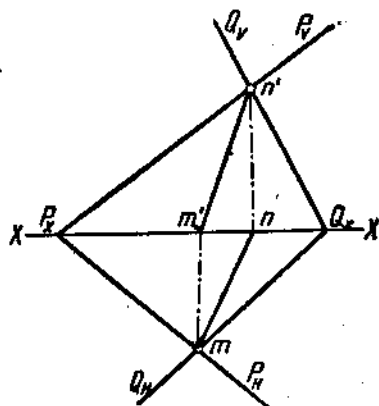


Черт. 169.

Пусть на черт. 171 даны плоскости P и Q , следы которых пересекаются в пределах чертежа. Точка m как точка пересечения следов P_H и Q_H является горизонтальной проекцией горизонтального следа линии пересечения; m' — вертикальная проекция того же следа. Точка пере-



Черт. 170.



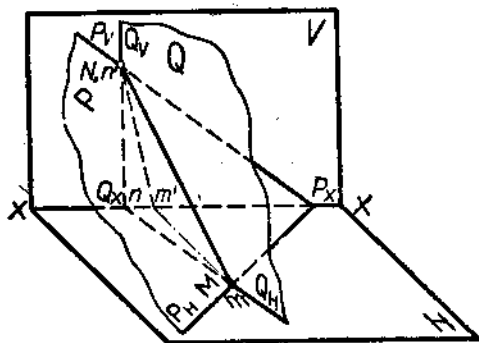
Черт. 171.

сечения следов P_V и Q_V (точка n') будет вертикальной проекцией вертикального следа линии пересечения; n — горизонтальная проекция того же следа. Соединяя одноименные проекции найденных двух следов, m с n и m' с n' , мы получим горизонтальную (mn) и вертикальную ($m'n'$) проекции линии пересечения.

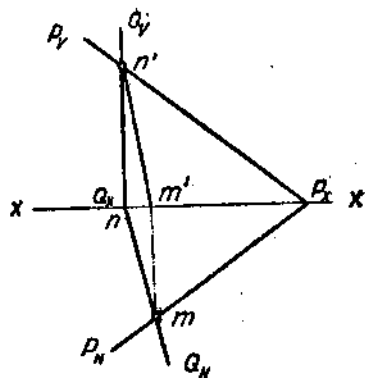
Кроме общего случая пересечения плоскостей, рассмотрим некоторые частные случаи и расположения пересекающихся плоскостей и способы построения в этих случаях линии пересечения.

1-й случай. Следы заданных плоскостей пересекаются в пределах чертежа, причем одна из плоскостей перпендикулярна к плоскостям H или V . На черт. 172 даны плоскости P и Q ; плоскость Q перпендикулярна к плоскости H . В этом случае нахождение линии пересечения плоскостей, очевидно, сведется к нахождению двух точек, принадлежащих одновременно двум плоскостям. Эти точки (следы прямой) легко найти, так как следы плоскостей пересекаются в пределах чертежа. Необходимо отметить, что горизонтальная проекция линии пересечения должна лежать на горизонтальном следе плоскости, так как последняя, будучи перпендикулярной к плоскости H , является плоскостью горизонтально-проектирующей.

Для построения на эюре линии пересечения плоскостей (черт. 173) достаточно будет из точки пересечения следов P_H и Q_H (точка m) провести перпендикуляр к оси XX , затем соединить m' (точку пересече-



Черт. 172.



Черт. 173.

ния перпендикуляра с осью) с точкой n' (точкой пересечения следов P_V и Q_V). Прямая $m'n'$ будет вертикальной проекцией линии пересечения MN ; горизонтальная проекция mn расположится на следе Q_H .

Если бы одна из заданных плоскостей была перпендикулярна к плоскости V , то вертикальная проекция линии пересечения плоскостей, очевидно, расположилась бы на вертикальном следе этой плоскости.

2-й случай. Обе пересекающиеся плоскости P и Q перпендикулярны к одной из плоскостей проекций.

На черт. 174 даны пересекающиеся плоскости P и Q , причем каждая из них перпендикулярна к плоскости H .

В этом случае мы имеем пересекающимися только горизонтальные следы P_H и Q_H , вертикальные же следы P_V и Q_V будут параллельны и, следовательно, получается только горизонтальный след линии пересечения (точка M).

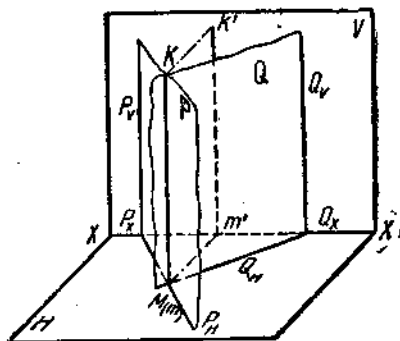
Линия пересечения плоскостей будет проходить через точку M , а кроме того, будет перпендикулярна к плоскости H (как линия пересечения двух плоскостей P и Q , перпендикулярных к третьей).

Наличие точки M и направления искомой прямой позволяет легко найти последнюю.

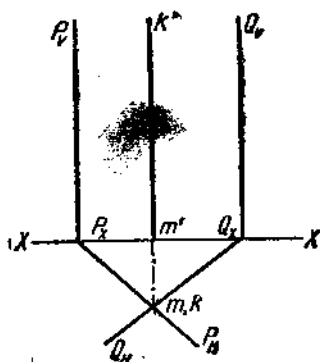
На эюре (черт. 175) показано построение линии пересечения плоскостей P и Q , перпендикулярных к H . Горизонтальная проекция прямой пересечения изобразится точкой (m, k); вертикальная проекция (m', k') расположится перпендикулярно к оси XX .

В случае, когда плоскости будут перпендикулярны к плоскости V , вертикальная проекция линии пересечения изобразится точкой, а горизонтальная — прямой, перпендикулярной к оси XX .

3-й случай. Две пересекающиеся плоскости имеют одну пару одноименных следов параллельными, а другую — пересекающимися.



Черт. 174.



Черт. 175.

На черт. 176 даны плоскости P и Q , следы которых P_H и Q_H параллельны, а P_V и Q_V пересекаются.

Как и в предыдущем случае, одну точку искомой прямой легко определить в пересечении вертикальных следов (точка N), а кроме того, линия пересечения плоскостей (CN) будет параллельна P_H и Q_H как линия пересечения двух плоскостей P и Q , проходящих через две параллельные прямые P_H и Q_H . Необходимо отметить, что прямая пересечения плоскостей — CN , будучи параллельна следам P_H и Q_H , лежащим в плоскости H , будет также параллельна плоскости H и, следовательно, будет горизонталью как для плоскости P , так и для плоскости Q .

Зная свойства проекций горизонтали плоскости, нетрудно ее построить, так как след этой горизонтали (точка N) лежит на пересечении следов P_V и Q_V .

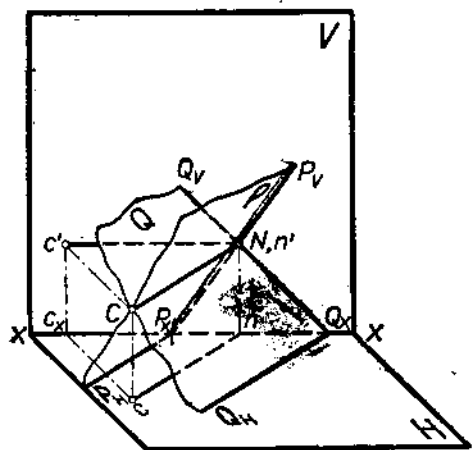
На эюре (черт. 177) через точку n' проведена прямая $n's'$, параллельная оси XX — вертикальная проекция линии пересечения, и через точку n проведена прямая ns параллельно P_H и Q_H — горизонтальная проекция линии пересечения.

На черт. 178 и 179 даны еще два примера пересечения плоскостей, у которых оба одноименных следа параллельны. В обоих случаях одна из плоскостей проектирующая, а на черт. 178 — вертикально-проектирующая, а на черт. 179 — горизонтально-проектирующая.

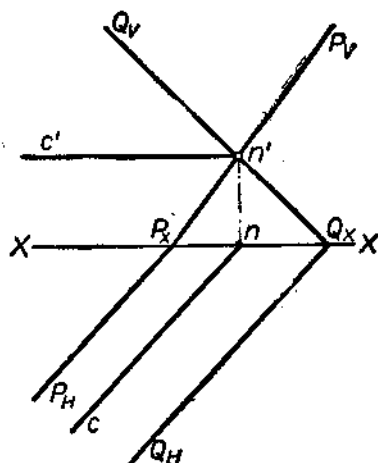
В результате пересечения изображенных на чертеже 178 плоскостей получена фронталь, вертикальная проекция которой совпадает со следом T_V , а на черт. 179 линия пересечения представляет собой горизонталь, горизонтальная проекция которой совпадает со следом S_H .

4-й случай. Одна из пересекающихся плоскостей параллельна плоскости H или V .

На черт. 180 даны плоскости P и Q ; P — параллельна H .

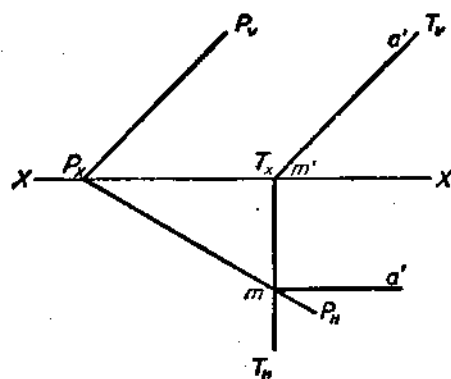


Черт. 176.

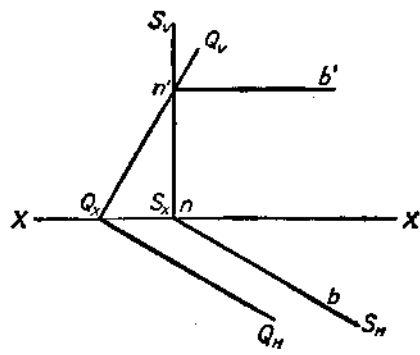


Черт. 177.

Из рассмотрения чертежа следует, что линия пересечения DN проходит через точку пересечения следов P_V и Q_V и располагается параллельно плоскости H , а следовательно, является горизонталью как плоскости P , так и плоскости Q .



Черт. 178.



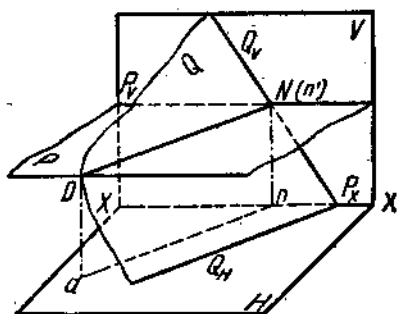
Черт. 179.

Для построения проекций линии пересечения на эюре (черт. 181) достаточно будет провести через n' прямую $n'd'$, параллельную оси проекций, и через n прямую nd , параллельную Q_H .

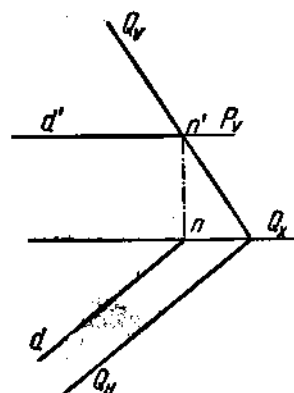
Прямая nd , $n'd'$ и будет искомой.

5-й случай. Пересекающиеся плоскости параллельны оси проекций. На черт. 182 даны плоскости P и Q , следы которых параллельны оси проекций; также будет параллельна оси проекций и линия пересечения плоскостей (линия AB).

Так как направление линии пересечения известно, то достаточно будет найти одну точку, лежащую одновременно в плоскостях P и Q ; через эту точку пройдет искомая прямая. Для нахождения точки, одновременно принадлежащей плоскостям P и Q , пересечем их вспомо-



Черт. 180.

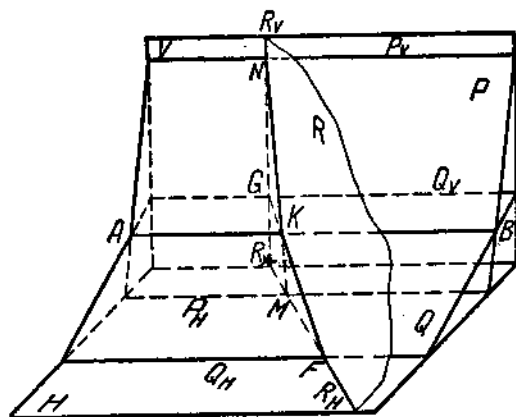


Черт. 181.

гательной плоскостью R и найдем линии пересечения плоскостей P и Q с плоскостью R — линии FG и MN . Точка пересечения прямых FG и MN (точка K) будет лежать как в плоскости P , так и в плоскости Q , а следовательно, будет принадлежать линии пересечения плоскостей P и Q .

Прямая AB , проведенная через точку K параллельно оси проекций, будет искомой прямой.

Вспомогательную плоскость надо выбирать так, чтобы вспомогательные линии пересечения получались возможно проще; в нашем случае взята плоскость R , перпендикулярная к плоскости H .



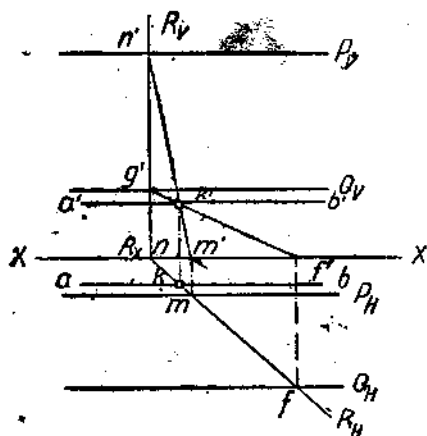
Черт. 182.

Рассмотрим решение той же задачи на эюре черт. 183. Плоскости изображены следами P_H , P_V , Q_H и Q_V , параллельными оси XX . Проводим плоскость R , перпендикулярную к плоскости H ; след R_V будет перпендикулярен к оси XX . Затем находим прямые пересечения вспомогательной плоскости R с плоскостями P и Q . Ввиду того что плоскость R перпендикулярна к плоскости H , горизонтальные проекции линий пересечения будут лежать на следе R_H . Для нахождения вертикальной проекции линии пересечения плоскости R с плоскостью P достаточно будет найти вертикальную проекцию горизонтального следа искомой прямой — точку m' и соединить ее с точкой n' — вертикальной

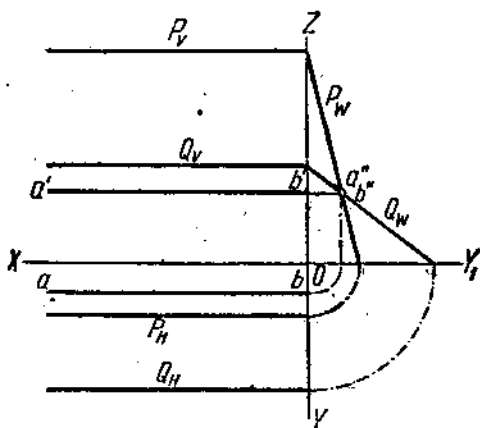
проекцией вертикального следа той же прямой. Таким же способом найдем вертикальную проекцию линии пересечения плоскости R с плоскостью Q — прямую $g'f'$. Точка пересечения прямых $m'n'$ и $g'f'$ (точка k') будет вертикальной проекцией точки K , одновременно лежащей как в плоскости P , так и в плоскости Q . Горизонтальная проекция точки K легко находится на следе R_H .

Прямая ab , $a'b'$, проходящая через точку k , k' параллельно оси XX , будет искомой линией пересечения заданных плоскостей.

Вместо плоскости R , перпендикулярной к плоскости H , можно было бы взять плоскость, перпендикулярную к плоскости V . При таком выборе плоскости мы бы нашли сначала горизонтальную проекцию точки K ; вертикальные проекции вспомогательных линий пересечения расположились бы на вертикальном следе вспомогательной плоскости.



Черт. 183.



Черт. 184.

Задачу, указанную на черт. 182 и 183 можно решить при помощи следов на плоскости W (черт. 184). В пересечении следов P_W и Q_W получается проекция линии пересечения плоскостей P и Q . Руководствуясь этой проекцией, находим горизонтальную и вертикальную проекции прямой AB пересечения плоскостей P и Q ; прямая AB , как было отмечено выше, будет параллельна оси OX .

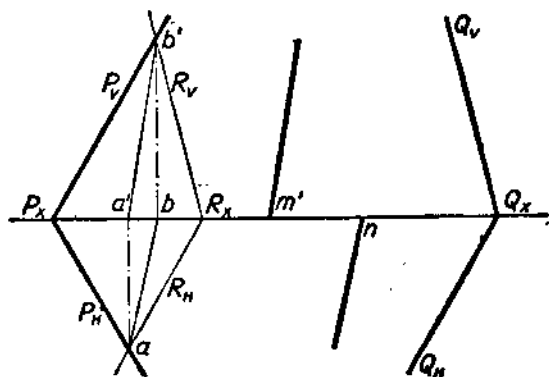
Решение, указанное на черт. 184, представляет собою лишь вариант решения, данного на черт. 183: в данном случае вспомогательной плоскостью является плоскость W , а не произвольно выбранная плоскость R .

6-й случай. Одна пара одноименных следов пересекается в пределах чертежа, а другая пара в пределах чертежа не пересекается.

На черт. 185 и 186 заданы плоскости P и Q , горизонтальные следы P_H и Q_H пересекаются в точке M (m , m'), вертикальные же следы P_V и Q_V не пересекаются в пределах чертежа. Одна точка линии пересечения плоскостей будет лежать на пересечении следов P_H и Q_H — точка M (m , m'). Для нахождения второй точки, принадлежащей искомой прямой, проведем вспомогательную плоскость, пересекающую плоскости P и Q . В этом случае самое простое решение получим, если возьмем вспомогательную плоскость, параллельную плоскости H или V .

могательная плоскость R выбрана так, чтобы линия ее пересечения с плоскостью P могла быть построена возможно более просто.

Искомая линия пересечения плоскостей P и Q будет параллельна прямой AB , по которой пересекаются плоскости P и R . Точка m' делит отрезок $P_X Q_X$ в том же отношении, в каком точка a' делит отрезок $P_X R_X$. Также и точка n делит отрезок $P_X Q_X$ так, что отношение $\frac{nQ_X}{bR_X} = \frac{P_X Q_X}{P_X R_X}$.

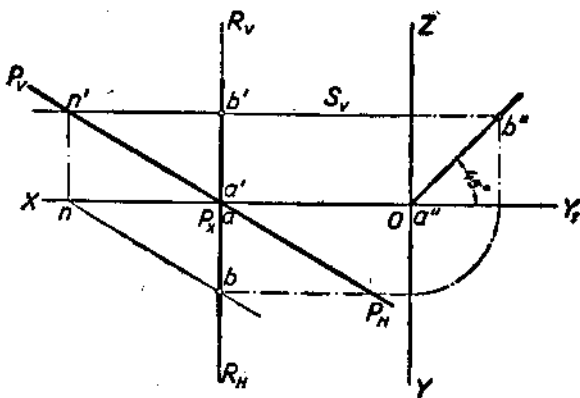


Черт. 138.

Найдя положение точек m' и n , проводим через них прямые, соответственно параллельные прямым $a'b'$ и ab .

7-й случай. Обе пары одноименных следов пересекаются в одной точке.

На черт. 189 плоскость общего положения P , одинаково наклоненная к плоскостям проекций H и V (см. стр. 51), пересекается с профильной плоскостью R . Хотя в данном случае заранее известно, что линией пересечения будет та самая прямая, которая была нами определена в построении на черт. 148, для уяснения метода решения подобных задач применим некоторую вспомогательную плоскость для нахождения второй точки, определяющей искомую линию пересечения (первая точка совпадает с P_X). В качестве вспомогательной плоскости взята плоскость S , параллельная плоскости H и, следовательно, пересекающая обе данные плоскости по горизонталям. Так находим точку B (проекции b и b') и, построив ее третью проекцию, получаем на плоскости W проекцию $a''b''$ прямой, по которой пересекаются плоскости P и R .



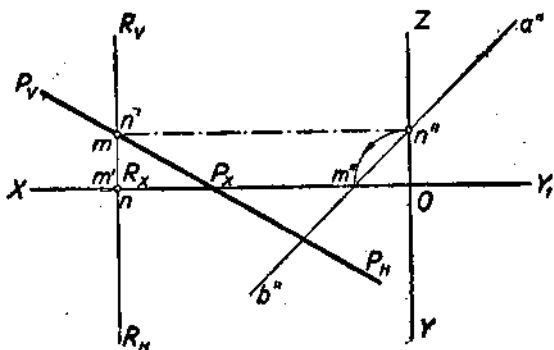
Черт. 189.

На черт. 190 показано построение линии пересечения таких же плоскостей, но на этот раз профильная плоскость R не проходит через точку схода P_X . Прямая пересечения, и в этом случае наклоненная к H и V под углом 45° , спроектирована на плоскость W ; прямая про-

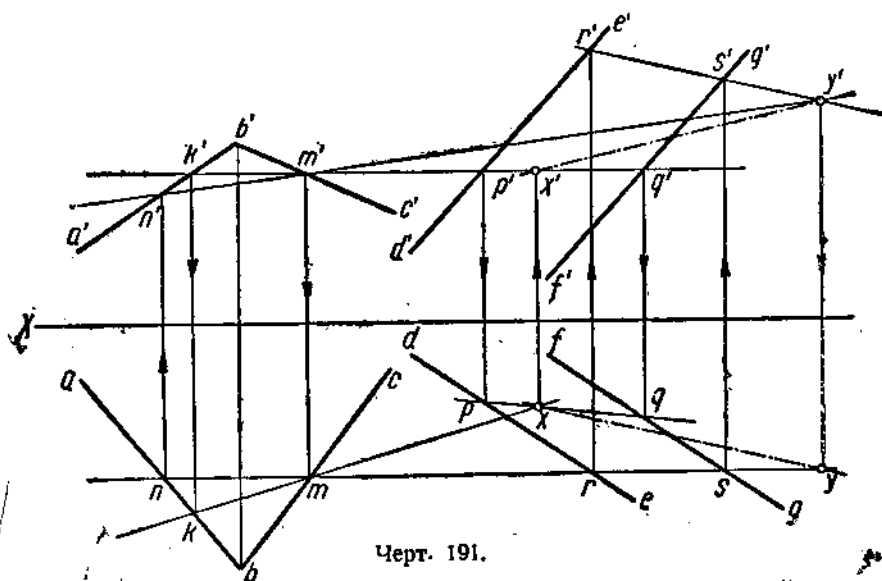
ходит в первой, второй и третьей четвертях (иначе в первом, втором и третьем октантах).

Если плоскости заданы не следами, а двумя параллельными или пересекающимися прямыми или тремя точками, то задача о нахождении линии сечения может быть разрешена после нахождения следов этих плоскостей или же при помощи горизонталей или фронталей заданных плоскостей.

Пример дан на черт. 191: одна из плоскостей задана двумя отрезками AB и BC , имеющими общую точку B , другая плоскость задана двумя параллельными прямыми (DE и FG); линия пересечения плоскостей (прямая XY) проведена через точки X и Y , причем точка X найдена в пересечении горизонталей обеих плоскостей, а точка Y — в пересечении их фронталей. Выбор



Черт. 190.



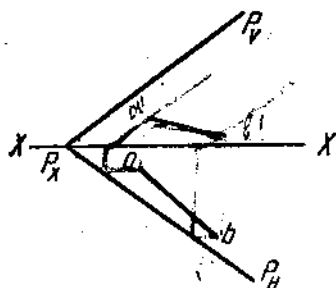
Черт. 191.

горизонталей и фронталей произволен; не обязательно для нахождения одной из точек взять горизонтали, а для другой точки — фронталей; можно ограничиться либо горизонталями, либо фронтальями.

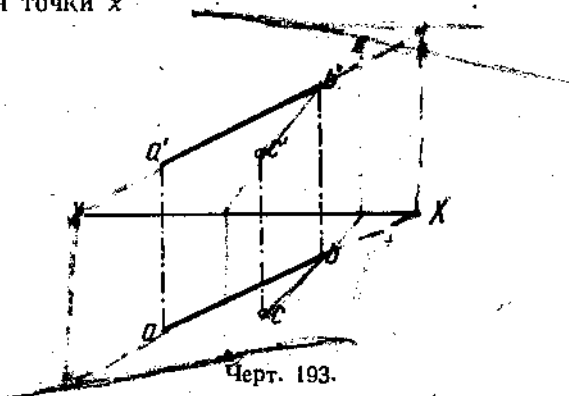
На черт. 191 сперва проведена вертикальная проекция горизонталей обеих плоскостей — прямая, параллельная оси проекций и пересекающая вертикальные проекции данных отрезков AB , BC , DE и FG

в точках k' , m' , p' и q' . Затем получены точки k , m , p и q , через которые проходят горизонтальные проекции горизонталей. В пересечении горизонтальных проекций горизонталей найдена точка x , а затем определено положение точки x' , т. е. найдена одна из точек, общих для обеих плоскостей. Затем построены фронты обеих плоскостей, для чего проведена прямая, параллельная оси проекций и пересекающая горизонтальные проекции ab , bc , de и fg . Для упрощения эта прямая проведена через точку m .

На черт. 191 стрелками отмечен ход построения проекций точек; например, точка k найдена при помощи перпендикуляра к оси проекций, проведенного через точку k' , а точка x' найдена, исходя из определенного первоначального положения точки x .



Черт. 192.



Черт. 193.

Для ясности чертежа проекции искомой прямой XU проведены штрих-пунктирной линией.

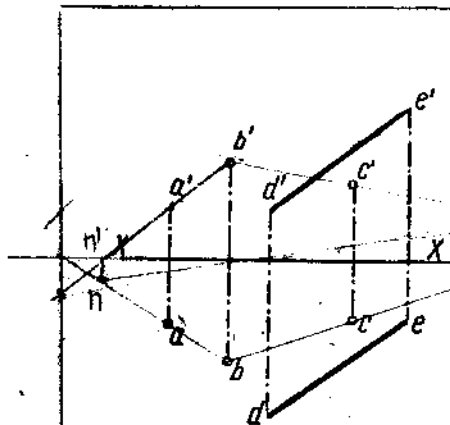
Заканчивая рассмотрение вопроса о нахождении линии пересечения двух плоскостей, можно отметить, что для нахождения линии нам необходимо найти две точки, общие для взятых плоскостей. Точки эти могут быть найдены или непосредственно, или при помощи одной или двух вспомогательных секущих плоскостей.

Кроме того, рассмотрены случаи, когда направление линии пересечения плоскостей является очевидным; тогда для нахождения искомой линии необходимо определить только одну общую точку, принадлежащую данным плоскостям.

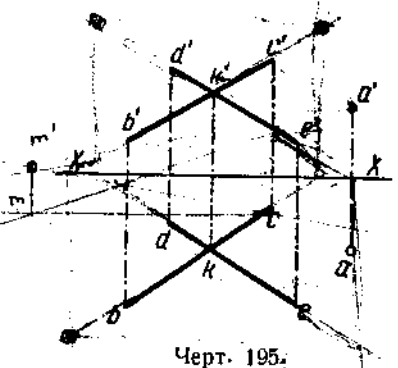
Если окажется, что заданные плоскости не имеют общих точек, то это будет обозначать, что заданные плоскости не пересекаются.

Задачи

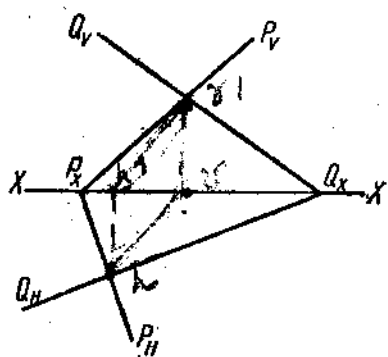
1. Даны плоскость P следами и горизонтальная проекция прямой AB , лежащей в плоскости P . Найти вертикальную проекцию AB (черт. 192).
2. Плоскость задана прямой AB и точкой C . Построить следы плоскости (черт. 193).
3. Плоскость P задана тремя точками (A , B и C); задана также прямая DE . Указать, лежит ли заданная прямая в плоскости P (черт. 194).



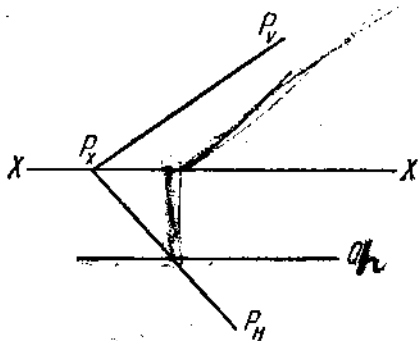
Черт. 194.



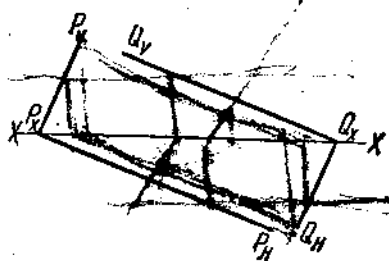
Черт. 195.



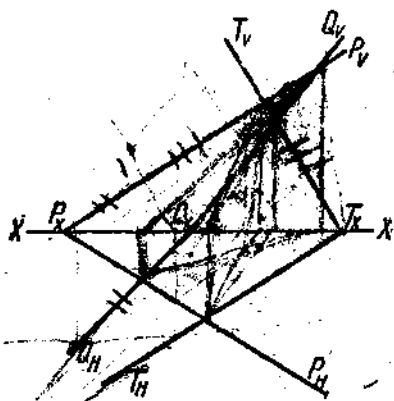
Черт. 196.



Черт. 197.

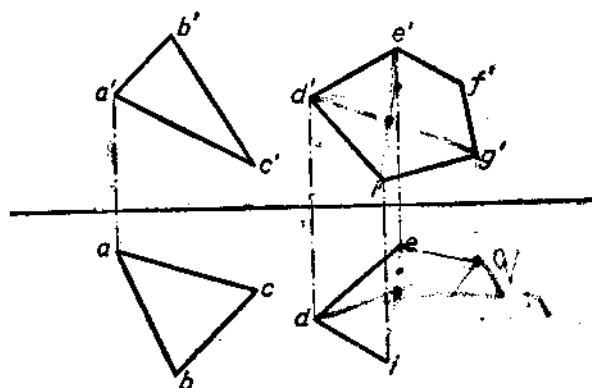


Черт. 198.



Черт. 199.

4. Дана точка A и плоскость P ; плоскость P задана двумя пересекающимися прямыми BC и DE . Построить следы плоскости, проходящей через точку A и параллельной плоскости P (черт. 195).



Черт. 200.

7. Построить линию пересечения плоскостей, из которых одна задана треугольником ABC , а другая пятиугольником $DEFGI$ (черт. 200). Горизонтальную проекцию пятиугольника следует дочертить.

5. Построить линию пересечения плоскостей P и Q , когда:

а) плоскости P и Q заданы следами (черт. 196);

б) плоскости P и Q заданы следами, причем плоскость Q параллельна плоскости V (черт. 197);

в, плоскости P и Q заданы следами, в пределах чертежа не пересекающимися (черт. 198).

6. Найти точку, общую для трех плоскостей P , Q и T , заданных следами (черт. 199).

§ 17. Относительное положение прямой и плоскости

Все случаи взаимного расположения прямой линии и плоскости в пространстве можно разбить на следующие три группы:

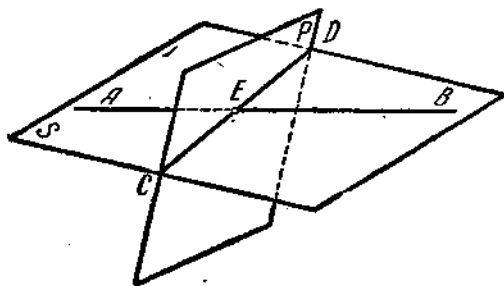
1) прямая лежит в плоскости (все точки прямой лежат в плоскости);
2) прямая пересекается с плоскостью (прямая имеет одну общую точку с плоскостью);

3) прямая параллельна плоскости (прямая не имеет с плоскостью общих точек).

В большинстве случаев, когда на эюре задается плоскость и прямая, нельзя установить взаимного положения последних в пространстве из рассмотрения только взаимного положения их проекций; необходимы некоторые дополнительные построения.

Пусть дана в пространстве плоскость P и прямая AB (черт. 201); требуется определить их взаимное положение.

Проведем через прямую AB вспомогательную плоскость S и построим линию пересечения плоскостей P и S ; линия пересечения плоскостей (CD) одновременно принадлежит как плоскости P , так и плоскости S .



Черт. 201.

Рассматривая прямые AB и CD , лежащие в плоскости S , легко заметить, что эти прямые могут:

1) иметь все точки общими; в этом случае, очевидно, AB лежит в плоскости P , так как CD лежит в плоскости P ;

2) иметь одну общую точку (пересекаются); в этом случае AB пересекается с плоскостью P (имеет одну общую точку);

3) не иметь общих точек (параллельны); в этом случае, очевидно, AB не имеет с плоскостью P общих точек и будет ей параллельна.

Если даны плоскость (P) и прямая (AB), не лежащая в этой плоскости, то через AB можно провести плоскость, параллельную P , только в том случае, если данная прямая параллельна данной плоскости ($AB \parallel P$). Поэтому, если выбранная вспомогательная плоскость (проходящая через заданную прямую) окажется параллельной данной плоскости, то очевидно, что заданная прямая не пересекается с данной плоскостью, т. е. ей параллельна.

Следовательно, для определения взаимного положения прямой и плоскости необходимо: 1) через заданную прямую провести вспомогательную плоскость, 2) найти линию пересечения заданной плоскости и вспомогательной. После этого, рассматривая взаимное положение заданной прямой с прямой пересечения плоскостей, можно решить поставленный вопрос.

Кроме вопроса об определении взаимного положения заданной прямой и плоскости, может быть поставлен вопрос и об изображении на эюре того или иного их взаимного положения. Вопрос о проведении прямой в плоскости был рассмотрен выше (§ 12); в последующих примерах рассмотрим вопросы:

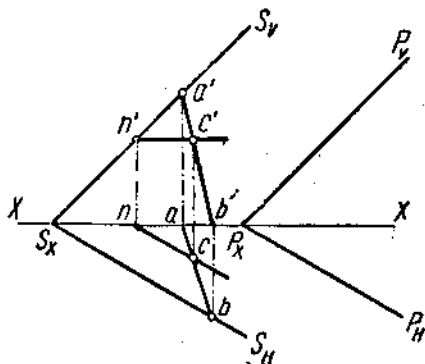
- 1) о проведении прямой, параллельной плоскости,
- 2) об определении точки пересечения (точки встречи) прямой и плоскости.

Пример 1. Дана плоскость P следами и точка C (c, c'); через точку C провести прямую AB , параллельную P (черт. 202).

Решение. Для решения задачи предварительно проведем через точку C (c, c') вспомогательную плоскость S (S_H, S_V), параллельную плоскости P . Для этого проведем через точку C горизонталь ($nc, n'c'$) плоскости S ($nc \parallel P_H$ и $n'c' \parallel XX$). Найдя вертикальный след горизонтали n' , проводим через него S_V параллельно P_V и через S_X проводим S_H параллельно P_H .

Всякая прямая, проведенная в плоскости S через точку C , будет искомой. На чертеже проведена прямая $ab, a'b'$. Конечно, и горизонталь NC параллельна плоскости P .

Вместо построения вспомогательной плоскости, параллельной данной плоскости P , можно было бы провести в плоскости P любую прямую, а затем через данную точку C провести прямую параллельно пря-



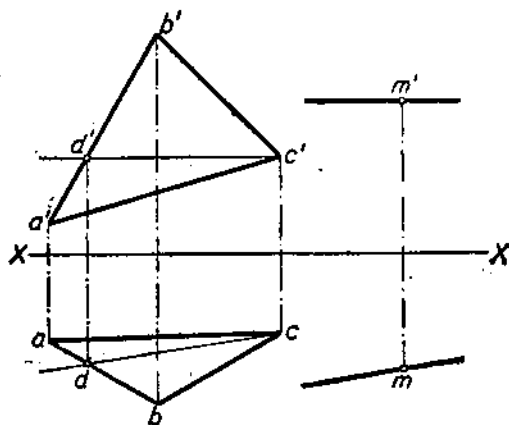
Черт. 202.

мой, проведенной в плоскости P : прямая, проведенная через точку C , будет параллельна плоскости P .

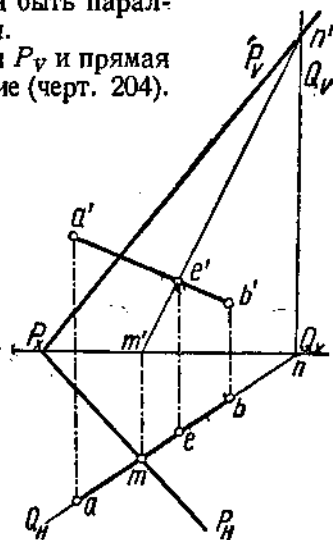
На черт. 203 выполнено построение для случая, когда плоскость задана треугольником ABC и через точку M требуется провести прямую, параллельную данной плоскости и плоскости H .

Положение вертикальной проекции искомой прямой определяется из условия, что прямая должна быть параллельна плоскости H . Для того чтобы знать, как должна быть проведена через точку m горизонтальная проекция искомой прямой, надо предварительно провести какую-либо горизонталь плоскости, определяемой треугольником ABC . Горизонтальная проекция искомой прямой должна быть параллельна горизонтальной проекции горизонтали.

Пример 2. Дана плоскость P следами P_H и P_V и прямая AB ($ab, a'b'$); определить их взаимное положение (черт. 204).



Черт. 203.



Черт. 204.

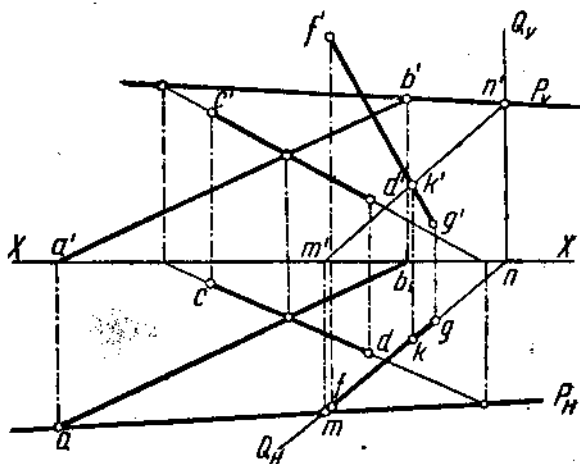
Решение. Для выяснения взаимного положения данных прямой и плоскости проведем через прямую $ab, a'b'$ вспомогательную плоскость Q . Через прямую можно провести множество плоскостей, но лучше всего провести такую плоскость, которая дала бы наиболее простое решение задачи. Возьмем плоскость Q , которая, проходя через прямую AB , будет перпендикулярна к плоскости H (плоскость горизонтально-проектирующая). След Q_H такой плоскости сольется с ab , а след Q_V расположится перпендикулярно к оси. Далее находим линию пересечения плоскостей P и Q — линия $mn, m'n'$. Из чертежа видно, что прямые $ab, a'b'$ и $mn, m'n'$, находясь в одной плоскости Q , пересекаются в точке $E(e, e')$; следовательно, прямая AB пересекается с плоскостью P в точке E .

Точку E называют точкой встречи прямой с плоскостью.

Так же просто была бы разрешена задача и при выборе в качестве вспомогательной вертикально-проектирующей плоскости.

Пример 3. Дана плоскость P двумя пересекающимися прямыми AB и CD и прямая FG ; определить точку встречи прямой FG с плоскостью P (черт. 205).

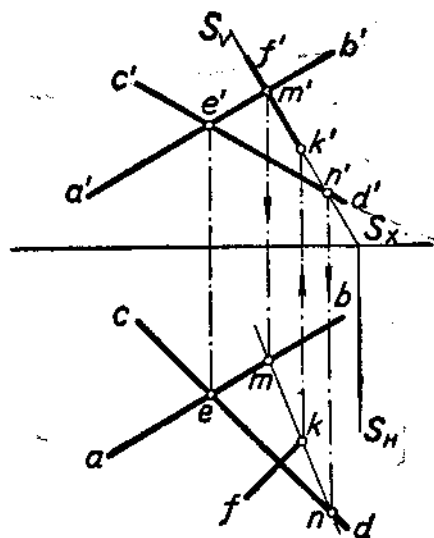
Решение. Находим следы плоскости P (P_H, P_V) и проводим через прямую FG вспомогательную плоскость Q , горизонтально-проектирующую. Следы в пределах чертежа пересекаются и потому линия пересечения плоскостей mn , $m'n'$ находится легко. Точка пересечения линий $f'g'$ и $m'n'$ — точка k' будет вертикальной проекцией искомой точки; горизонтальная проекция искомой точки k будет лежать на fg и на перпендикуляре к оси XX' , проведенном из точки k' .



Черт. 205.

Предварительное построение следов плоскости в случае, если плоскость задана не следами, не является необходимым. На черт. 206 плоскость P остается выраженной прямыми AB и CD , следы плоскости не построены, дальнейший же ход решения задачи аналогичен указанному выше.

Через прямую, точку пересечения которой с плоскостью P мы ищем, проведена вспомогательная, в данном случае вертикально-проектирующая, плоскость S . Выбор именно вертикально-проектирующей плоскости объясняется удобным пересечением ее вертикального следа с вертикальными проекциями $a'b'$ и $c'd'$. Получив точки m' и n' , найдем горизонтальные проекции m и n и тем самым определим прямую MN , по которой вспомогательная плоскость S пересекает данную плоскость P . Затем отмечаем точку K , в которой горизонтальная проекция прямой непосредственно или при своем продолжении пересекает проекцию mn . После этого остается отметить положение вертикальной проекции точки пересечения — точка k' .



Черт. 206.

На черт. 207 определена точка пересечения прямой MN с плоскостью, заданной треугольником ABC . Вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость, проведенная через MN (на чертеже эта плоскость особо не обозначена), пересекает треугольник по прямой ED . В пересечении вертикальных проекций

вспомогательной горизонтально-проектирующей плоскости, проведенная через MN (на чертеже эта плоскость особо не обозначена), пересекает треугольник по прямой ED . В пересечении вертикальных проекций

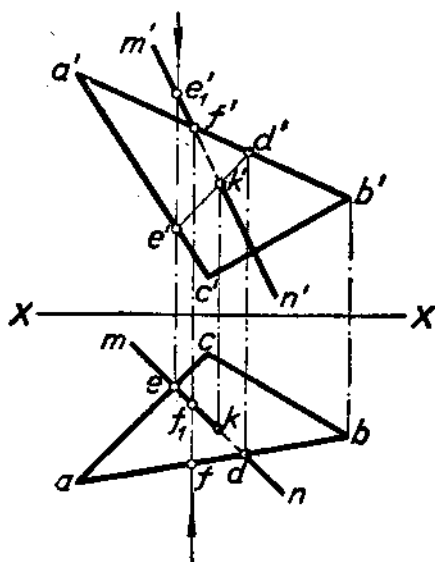
прямых MN и ED получаем вертикальную проекцию искомой точки пересечения — точку k' , и затем строим горизонтальную проекцию — точку k .

Ограничиваясь при рассмотрении плоскости, заданной на черт. 207 треугольником ABC , лишь той ее частью, которая заключена внутри контура треугольника, и считая плоскость непрозрачной, выделим на проекциях прямой участки, закрываемые плоскостью.

В точке e на плоскости H совмещаются горизонтальные проекции

двух точек, из которых одна принадлежит прямой MN (вертикальная проекция e_1'), а другая — стороне треугольника AC (вертикальная проекция e'). Из расположения вертикальных проекций e_1' и e' следует, что на участке MK прямая находится над треугольником и, следовательно, на горизонтальной проекции отрезок mk весь видимый, а отрезок kd — невидимый.

На вертикальной проекции в точке f' совмещаются вертикальные проекции двух точек, из которых одна принадлежит прямой MN , а другая — стороне треугольника AB . По расположению горизонтальных проекций f и f_1 заключаем, что прямая MN частично на участке MK находится за треугольником и, следовательно, на вертикальной проекции отрезок $f'k'$ невидимый, а отрезок $k'n'$ — видимый.



Черт. 207.

§ 18. Прямая, перпендикулярная к плоскости

Из всех возможных положений прямой, пересекающей плоскость, отметим частный случай, когда прямая перпендикулярна к плоскости, и рассмотрим свойства проекций такой прямой.

На черт. 208 дана плоскость P и прямая AB , перпендикулярная к плоскости P в точке B .

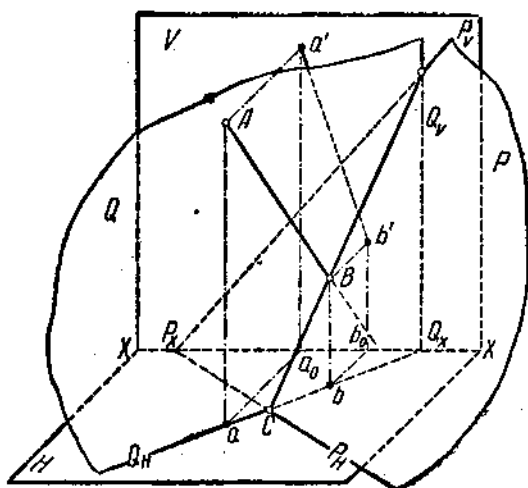
Проведем через прямую AB вспомогательную плоскость, горизонтально-проектирующую.

Плоскость Q будет перпендикулярна к плоскости P (проходит через перпендикуляр к этой плоскости) и к плоскости H , а следовательно, будет перпендикулярна к линии пересечения этих плоскостей, т. е. к следу P_H . Установив, что P_H перпендикулярен к плоскости Q , можно сказать, что P_H перпендикулярен ко всякой прямой, лежащей в плоскости Q и проходящей через точку C (подошва перпендикуляра P_H). Горизонтальная проекция прямой AB — прямая ab — лежит в плоскости Q на следе Q_H и проходит через точку C ; поэтому ab перпендикулярна к P_H .

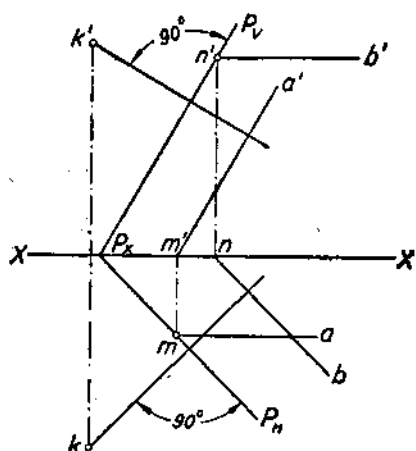
Если через прямую AB провести плоскость вертикально-проектирующую, то можно убедиться, что вертикальная проекция ($a'b'$) прямой AB будет перпендикулярна к вертикальному следу P_V .

Вывод. Если прямая линия перпендикулярна к плоскости, то горизонтальная проекция этой линии располагается перпендикулярно к горизонтальному следу плоскости, а вертикальная проекция — перпендикулярно к вертикальному следу плоскости.

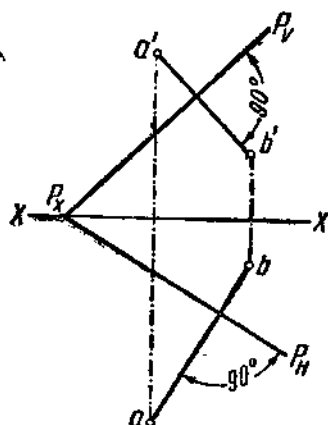
Зная свойства горизонталей и фронталей плоскостей, можно сказать, что проекция перпендикуляра к плоскости будет перпендикулярна к соответственным проекциям горизонталей и фронталей взятой плоскости (черт. 209).



Черт. 208.



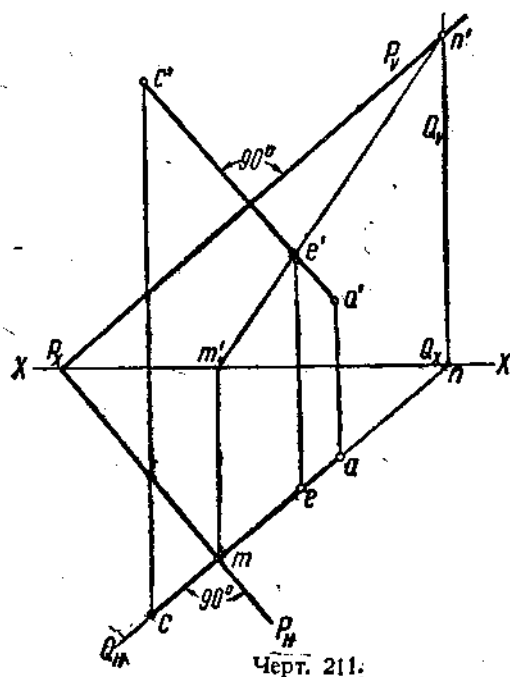
Черт. 209.



Черт. 210.

Основываясь на указанном свойстве проекций перпендикуляра к плоскости, мы можем легко проводить на эюре линии, перпендикулярные к плоскости. На эюре черт. 210 показана прямая AB ($ab, a'b'$), перпендикулярная к плоскости P ; ab — перпендикулярна к P_H и $a'b'$ — перпендикулярна к P_V .

Пример 1. Дана плоскость P следами и точка $A(a, a')$. Провести из точки A перпендикуляр к плоскости и найти точку встречи перпендикуляра с плоскостью P (черт. 211).

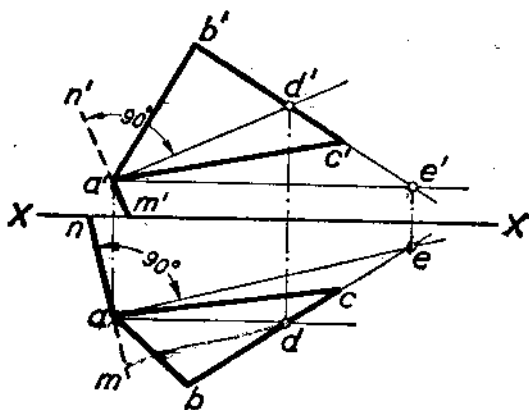


Решение. Для того чтобы провести перпендикуляр из точки A на плоскость P , достаточно будет из точки a' провести прямую $a'e'$, перпендикулярную к P_v , и из точки a — прямую, перпендикулярную к P_h . Прямые ac и $a'e'$ будут проекциями прямой AC , перпендикулярной к плоскости P . Для нахождения точки встречи AC с плоскостью P проведем через прямую AC вспомогательную плоскость Q (перпендикулярную к плоскости H) и найдем линию пересечения плоскостей Q и P . Следы пересекаются в пределах чертежа и линия пересечения MN ($mn, m'n'$) легко находится.

Точка пересечения прямых AC и MN — точка $E(e, e')$ будет искомой точкой встречи AC с плоскостью P .

Пример 2. Провести в точке A перпендикуляр к плоскости, определяемой данным треугольником ABC (черт. 212).

Решение. Зная, что проекции перпендикуляра к плоскости перпендикулярны к соответственным проекциям горизонталей и фронталей, проводим через точку A горизонталь AE и фронталь AD ; теперь остается провести вертикальную проекцию перпендикуляра перпендикулярно к вертикальной проекции фронтали ($n'm' \perp a'd'$), а горизонтальную проекцию перпендикуляра перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали ($nm \perp ae$).



Черт. 212

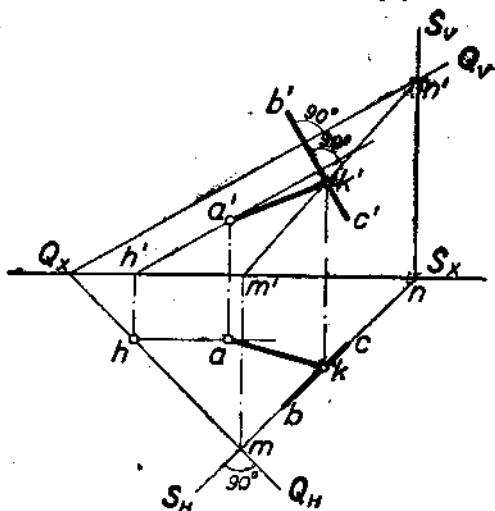
Считая плоскость непрозрачной, разделим проекции перпендикуляра на видимую и невидимую части.

Пример 3. Провести из точки A перпендикуляр к прямой BC (черт. 213).

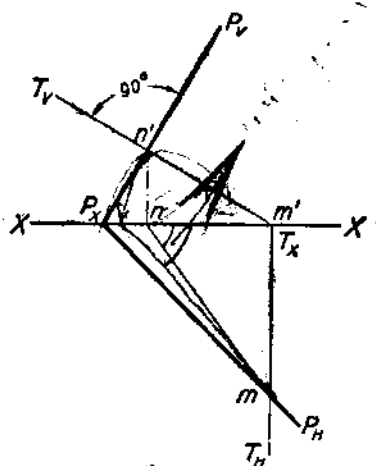
Решение. Через точку A проведена плоскость Q , перпендикулярная к BC . Это сделано при помощи фронтоли, вертикальная проекция $h'a'$ которой проведена перпендикулярно к вертикальной проекции $b'c'$. Горизонтальный след плоскости Q проведен через точку h перпендикулярно к горизонтальной проекции bc , а вертикальный след Q_V проведен через полученную на оси точку схода Q_X параллельно вертикальной проекции $h'a'$ фронтоли, т. е. перпендикулярно к $b'c'$.

Далее определена точка K , в которой прямая BC пересекает плоскость Q (вспомогательная плоскость S); прямая AK будет искомым перпендикуляром.

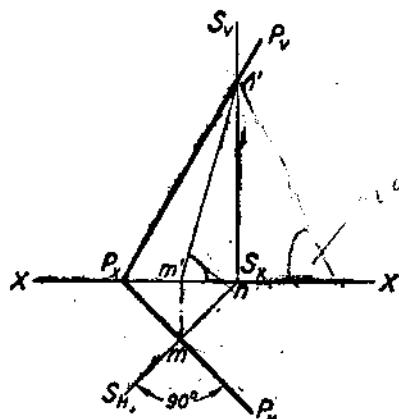
На черт. 214, 215 и 216 показано применение плоскостей, перпендикулярных к следам данной плоскости P , для определения проекций линейных углов, измеряющих двугранные углы, образуемые плоскостью P с плоскостями проекций H , V и W . Так как для получения линейного угла надо провести плоскость, перпендикулярную к ребру двугранного угла, то:



Черт. 213.



Черт. 215



Черт. 214

а) для получения угла наклона плоскости P по отношению к плоскости H проведена плоскость S , перпендикулярная к следу P_H (черт. 214);

б) для получения угла наклона плоскости P по отношению к плоскости V проведена плоскость T , перпендикулярная к следу P_V (черт. 215);

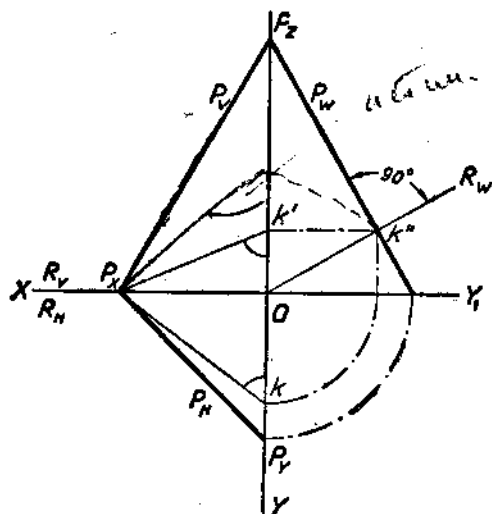
в) для получения угла наклона плоскости P по отношению к плоскости W проведена плоскость R , перпендикулярная к следу P_W (черт. 216).

На черт. 214 вертикальной проекцией искомого угла является угол $n'm'n$, а горизонтальная проекция угла совпадает со следом S_H . Истинная величина угла может быть определена построением прямоугольного треугольника по катетам $n'n$ и mn .

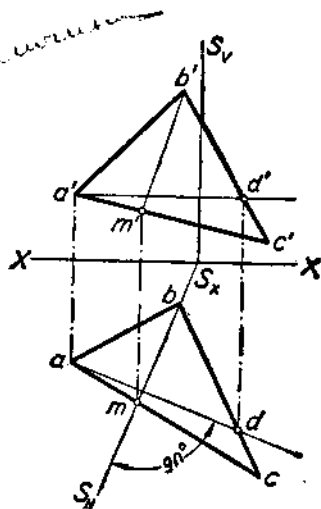
На черт. 215 вертикальная проекция искомого угла совпадает со следом T_V , а горизонтальная проекция представляет собой угол mtm' .

Истинная величина угла может быть определена построением прямоугольного треугольника по катетам mtm' и $m'n'$.

На черт. 216 вертикальная проекция искомого угла представляет собой угол $P_X k'O$, а горизонтальная проекция — угол $P_X kO$. На плос-



Черт. 216.



Черт. 217.

кости W искомым углом проектируется на след R_W . Истинная величина угла может быть определена построением прямоугольного треугольника по катетам $P_X O$ и Ok'' .

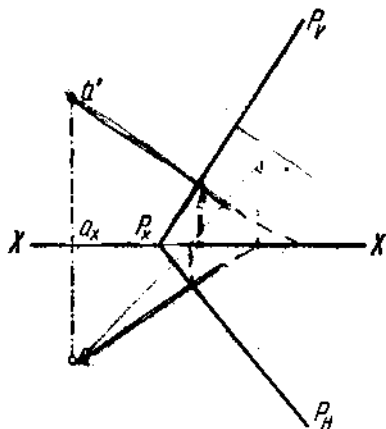
Прямая, полученная на черт. 214 при пересечении плоскостей P и S , носит название линии наибольшего ската для данной плоскости общего положения P . Следовательно, для получения направления линии наибольшего ската данной плоскости P надо провести горизонтально-проектирующую плоскость, перпендикулярную к следу P_H и построить линию пересечения этой плоскости с плоскостью P . Угол между линией наибольшего ската и ее проекцией на плоскости H определяет угол наклона данной плоскости к плоскости H .

На черт. 217 построена линия наибольшего ската, проходящая через точку B в плоскости, определяемой треугольником ABC . След S_H вспомогательной горизонтально-проектирующей плоскости проведен через точку b перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали AD . Линия наибольшего ската есть прямая BM , по которой плоскость S пересекает треугольник ABC .

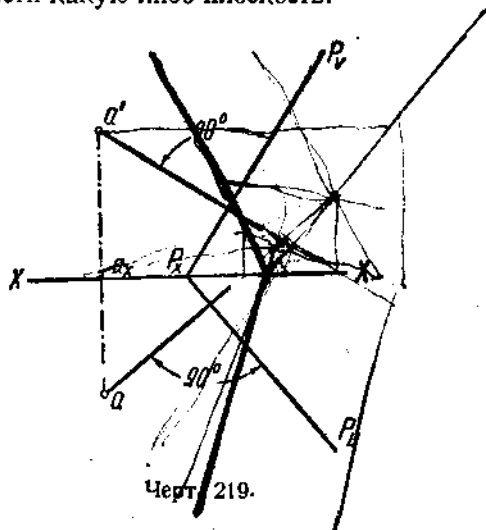
Если построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого будет горизонтальная проекция bm , а другим катетом — разность расстояний точек b' и m' от оси проекций, то определится истинная величина отрезка BM и угол наклона плоскости, определяемой данным треугольником, к плоскости H .

§ 19. Взаимно-перпендикулярные плоскости

Если через перпендикуляр к данной плоскости P провести какую-либо плоскость Q , то последняя будет перпендикулярна к плоскости P . Следовательно, для проведения плоскости, перпендикулярной к заданной плоскости P , надо сперва провести перпендикуляр к плоскости P , а затем через этот перпендикуляр провести какую-либо плоскость.



Черт. 218.



Черт. 219.

Пример 1. Провести плоскость, перпендикулярную к плоскости P и проходящую через данную точку A (черт. 218).

Решение. Сперва проведем через точку A перпендикуляр к плоскости P (черт. 219). Для этого из a' проводим перпендикуляр к P_v и из a_x — перпендикуляр к P_h .

Затем надо найти следы этого перпендикуляра и, пользуясь ими, построить следы плоскости, проходящей через перпендикуляр.

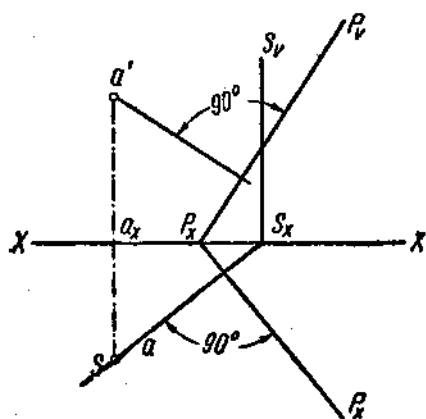
Количество решений неограничено, так как через прямую можно провести вообще бесчисленное множество плоскостей.

На черт. 220 дан частный случай, а именно через перпендикуляр проведена горизонтально-проектирующая плоскость — единственная для данного перпендикуляра. Так же можно было бы провести и единственную вертикально-проектирующую плоскость, перпендикулярную в данном случае к плоскости P .

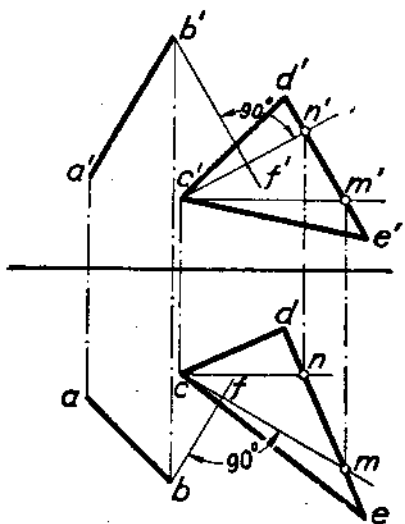
Пример 2. Через прямую AB провести плоскость, перпендикулярную к плоскости, определяемой данным треугольником CDE (черт. 221).

Решение. Достаточно из какой-либо точки прямой AB провести перпендикуляр к CDE . На черт. 221 перпендикуляр к CDE проведен из точки B ; вертикальная проекция этого перпендикуляра ($b'f'$) проведена перпен-

Прямые AB BF определяют
искомую плоскость.

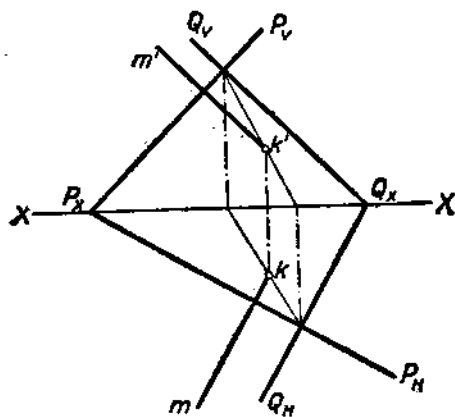


Черт. 220.



Черт. 221.

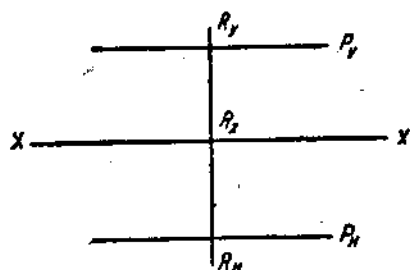
Следует отметить, что если одноименные следы двух плоскостей общего положения взаимно-перпендикулярны, то самые плоскости не перпендикулярны между собой (черт. 222).



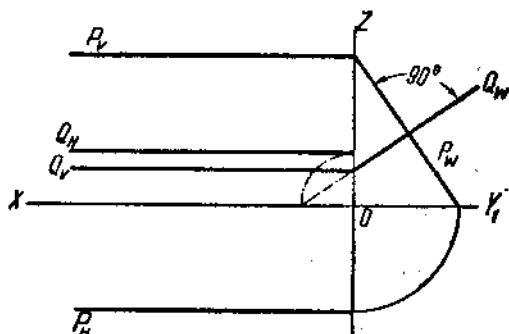
Черт. 222.

В указанном на черт. 223 частном случае перпендикулярность одноименных следов соответствует перпендикулярности плоскостей: плоскость, параллельная оси проецирования, перпендикулярна к профильной

плоскости и одноименные следы этих плоскостей взаимно-перпендикулярны (черт. 223—плоскость P , параллельная оси проекций, перпендикулярна к плоскости R).



Черт. 223.

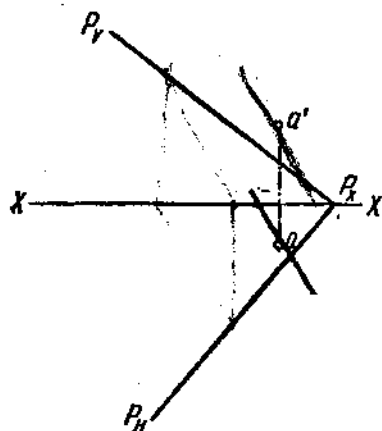


Черт. 224.

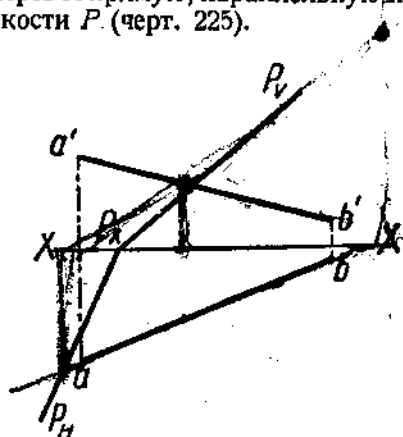
На черт. 224 дан пример взаимно-перпендикулярных плоскостей, параллельных оси проекций: при параллельности следов P_V и Q_V , P_H и Q_H следы P_W и Q_W взаимно-перпендикулярны.

Задачи

1. Дана плоскость P (следами P_H и P_V) и точка $A(a, a')$; провести через A прямую, параллельную плоскости P (черт. 225).



Черт. 225.



Черт. 226.

2. Дана плоскость P (следами P_H и P_V) и прямая $AB(ab, a'b')$. Найти точку встречи прямой AB с плоскостью P (черт. 226).

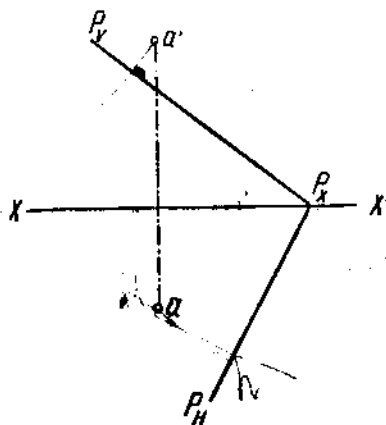
3. Дана плоскость P (следами P_H и P_V) и точка $A(a, a')$; провести через точку A прямую, перпендикулярную к P , и найти точку встречи этой прямой с плоскостью P (черт. 227).

4. Плоскость P задана проекциями треугольника $ABC(abc, a'b'c')$; провести через вершину A прямую, перпендикулярную к плоскости P (черт. 228).

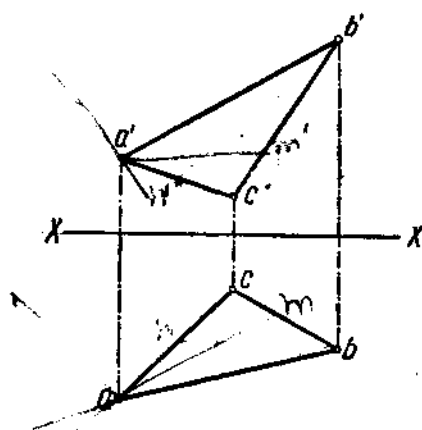
5. Плоскость задана проекциями треугольника ABC (черт. 228). Провести через центр тяжести площади треугольника прямую, перпендикулярную к его плоскости.

6. Внеся в чертеж задачи 3 изменение, заключающееся в том, чтобы след P_H являлся продолжением следа P_V , провести через точку A перпендикуляр к плоскости P и найти его основание на этой плоскости.

7. Провести одну из возможных плоскостей общего положения, перпендикулярных к плоскости треугольника ABC (черт. 228) и проходящих через вершину A .



Черт. 227.



Черт. 228.

§ 20. О проекциях многогранников

Построение проекций многогранников сводится к нахождению проекций плоских фигур, отрезков прямых линий и точек, т. е. к рассмотрению вопросов, изложенных в предыдущих параграфах настоящей главы.

Линия, ограничивающая каждую проекцию многогранного тела, представляет собой проекцию его контура (очертания) на соответственную плоскость проекций.

Проектирующие прямые образуют замкнутую проектирующую поверхность, внутри которой, касаясь ее, заключено данное тело. Проекция контура определяется пересечением этой проектирующей поверхности с плоскостью проекций.

Каждая проекция представляет собой изображение всего тела. Хотя зритель может видеть лишь обращенную к нему часть поверхности непрозрачного тела, внутри контура проекции одновременно содержатся проекции видимой и невидимой зрителю частей поверхности тела.

Условимся в дальнейшем все линии, находящиеся на невидимой для зрителя части поверхности какого-либо тела, обозначать штриховой линией.

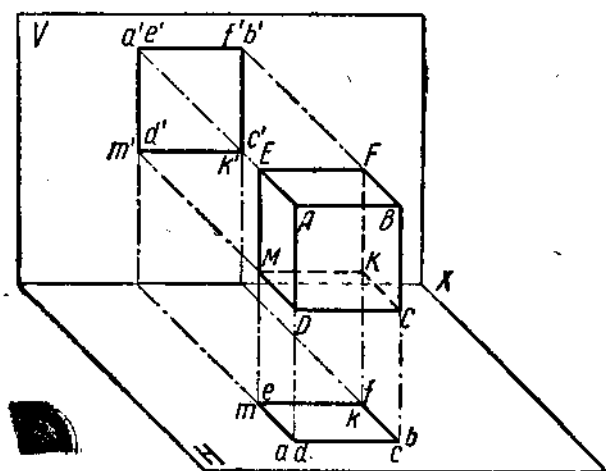
Рассмотрим случай построения проекций куба на две плоскости проекций. Положим (черт. 229), что куб помещен так, что передняя и задняя грани его параллельны плоскости V , а верхняя и нижняя грани параллельны плоскости H . Легко заметить, что построение проекций

тела (в данном случае куба) сводится к построению проекций ряда точек, определяющих вид и расположение искомым проекций. Действительно, построение, как это следует из рассмотрения черт. 229, заключается в проведении ряда проектирующих плоскостей, дающих в пересечении с соответственными плоскостями проекций проекции тех ребер, через которые проведены данные проектирующие плоскости.

Однако для проектирования ребра, т. е. отрезка прямой, достаточно спроектировать лишь конечные его точки, т. е. проектировать вершины куба; соединяя в надлежащем порядке между собой проекции вершин, получим проекции куба (на соответствующих плоскостях проекции).

Получаемый эюпр изображен на черт. 230. Куб спроектирован в виде двух квадратов; вершины этих квадратов представляют собой проекции вершин куба и проекции тех ребер, которые расположены перпендикулярно к соответственной плоскости проекций.

Например, точка, обозначенная двумя буквами a' и e' , является вертикальной проекцией вершины A , вершины E и ребра AE .



Черт. 229.

Рассматривая эюпр черт. 230 и пространственный черт. 229, обратим внимание на следующие обстоятельства:

1) грань $ABCD$ спроектирована на плоскость V в виде квадрата $a'b'c'd'$, а на плоскость H в виде отрезка ab , который в то же время представляет собой горизонтальную проекцию ребра AB ;

2) грань $AEFB$ спроектирована на плоскость V в виде отрезка $a'b'$ (этот же отрезок является вертикальной проекцией ребра AB), а на плоскость H — в виде квадрата $aefb$;

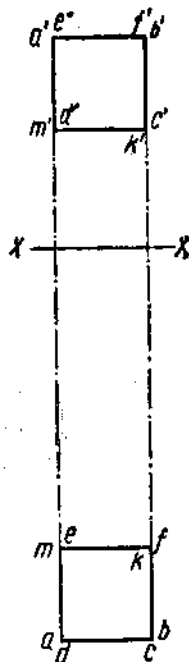
3) вертикальная проекция грани $EFGM$ и горизонтальная проекция грани $DMKC$ совпадают с таковыми же проекциями граней $ABCD$ и $AEFB$;

4) отдельные точки проекций куба на эюпре находятся на таком же расстоянии от оси проекций, на каком точки на самом кубе отстоят от соответственных плоскостей проекций;

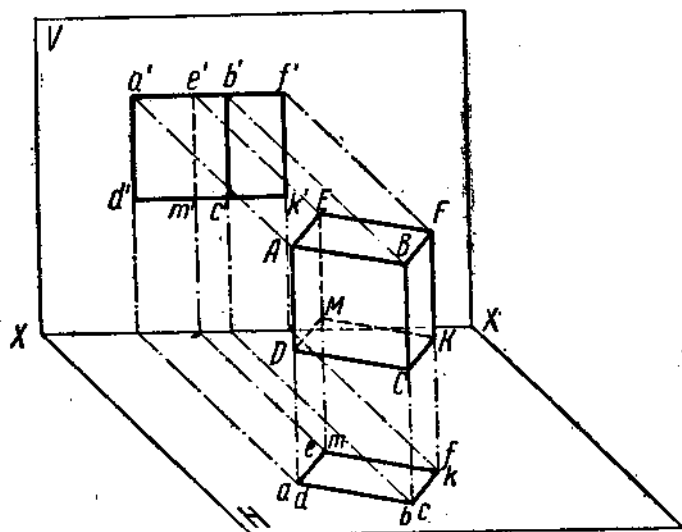
5) обе проекции куба в данном случае получаются в виде одинаковых фигур — квадратов.

Легко заметить, что если ребро параллельно какой-либо из плоскостей проекций, то оно проектируется на эту плоскость без искажения; если же ребро перпендикулярно к плоскости проекций, то проекция этого ребра обращается в точку.

Если бы куб был поставлен относительно плоскостей H и V иначе, например, был бы повернут по отношению к плоскости V на некоторый угол (черт. 231), то проекции куба на эюре (черт. 231) изменили бы свой вид или положение относительно оси проекций. Так, в данном случае горизонтальная проекция куба сохраняет свою форму квадрата, но оказывается повернутой по отношению к оси XX , вертикальная же проекция не имеет вида квадрата (как раньше, черт. 230), но представляет собой прямоугольник, составленный из частей, разграниченных проекциями ребер EM и BC . Проекция $e'm'$ изображена при помощи штриховой линии, так как мы считаем куб непрозрачным и ребро EM невидимым для зрителя.



Черт. 230.



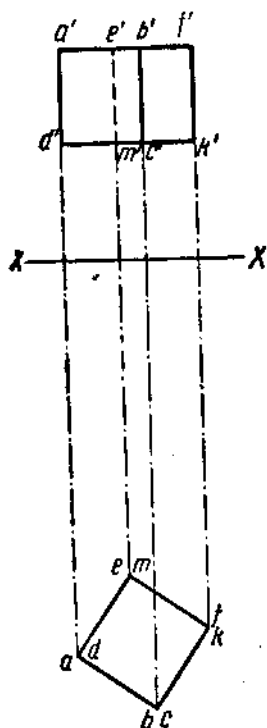
Черт. 231.

На черт. 232 показано, что на плоскость V проектируются в виде прямоугольников не только грани $ABCD$ и $EFGH$ (как на черт. 229), но и грани $AEMD$ и $BFGC$, ранее проектировавшиеся в виде отрезков прямых (черт. 230).

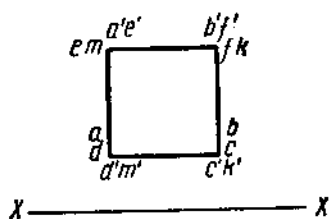
В случае, изображенном на черт. 231, вертикальная проекция граней куба, обращенных к плоскости V , представляет собой искаженное изображение, а не натуральную их величину. Это понятно, так как рассматриваемые грани не параллельны плоскости, на которую они проектируются.

Если далее перейти к случаям построения проекций тел, расположенных не в первой четверти (как на черт. 230 и 232), а во второй, третьей и четвертой, то естественно, что ход построения проекций не изменится, т. е. опять придется проектировать ряд точек, определяющих вид и расположение искомых проекций. Эпюры куба, расположенного во второй, третьей и четвертой четвертях, изображены на черт. 233, 234, 235 и 236. Если куб поставлен так, что передняя и задняя грани его парал-

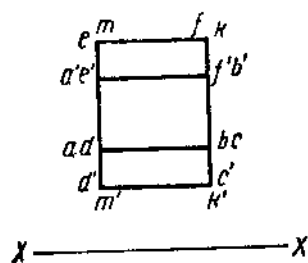
лельны вертикальной плоскости проекций, а верхняя и нижняя — горизонтальной, то для второй четверти эюр получается согласно черт. 233, если куб находится на одинаковых расстояниях от полы H_1 и полы V , и согласно черт. 234, если куб расположен ближе к поле H_1 , чем к поле V .



Черт. 232.

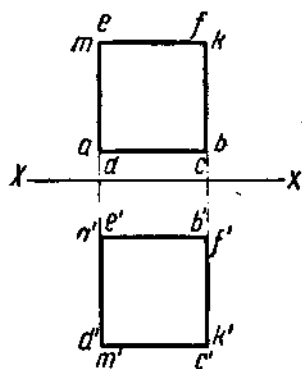


Черт. 233.

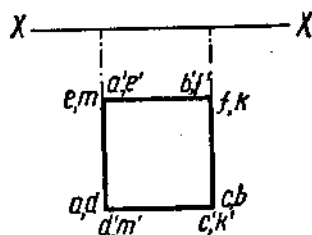


Черт. 234.

При кубе в третьей четверти эюр получится обратным эюру при расположении куба в первой четверти (ср. черт. 235, 230) и, наконец, когда куб расположен в четвертой четверти на одинаковых расстояниях как от полы H , так от полы V_1 , эюр будет иметь вид, изображенный на черт. 236.



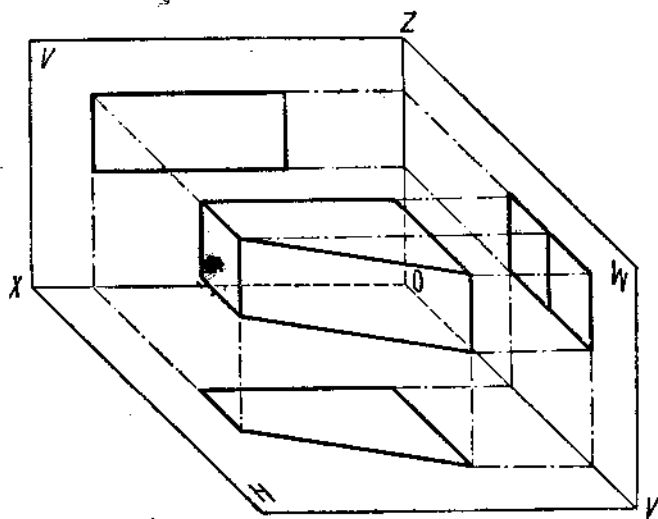
Черт. 235.



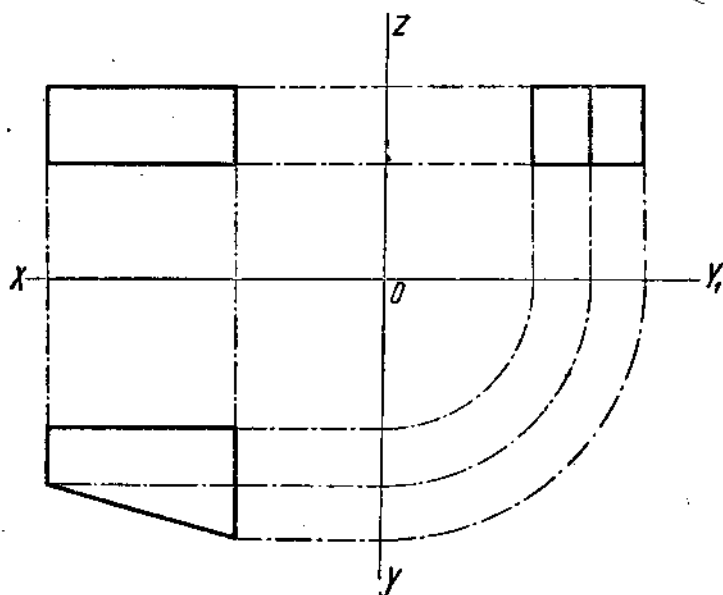
Черт. 236.

Обратим внимание на то, что при расположении куба в первой и третьей четвертях проекции на эюре оказываются по разные стороны

от оси проекций, а при расположении куба во второй и четвертой четвертях обе проекции откладываются по одну сторону оси XX , причем могут



Черт. 237.



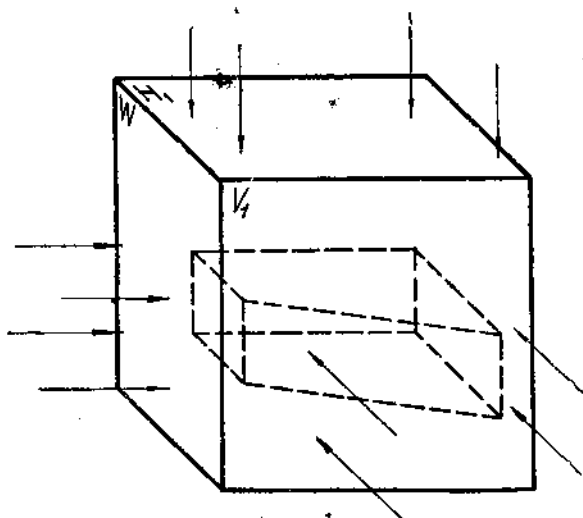
Черт. 238.

совпадать целиком (черт. 233 и 236), совпадать частично (черт. 234) и не совпадать: это зависит от расстояний проектируемого тела от плоскостей проекций.

Пример построения изображения тела в трех проекциях указан на черт. 238; предмет, являющийся в данном случае объектом проектирования, расположен в первом октанте (черт. 237).

Если предмет расположен в седьмом октанте (черт. 239), то эюпр получается согласно черт. 240.

При всех этих построениях остаются в силе условия, указанные при рассмотрении проекций тела на две плоскости, а именно: видимость проекций точек и отрезков линий на плоскостях проекций, независимо от того, в какой четверти расположено рассматриваемое тело, и определенное положение, занимаемое наблюдателем относительно плоскостей проекций.



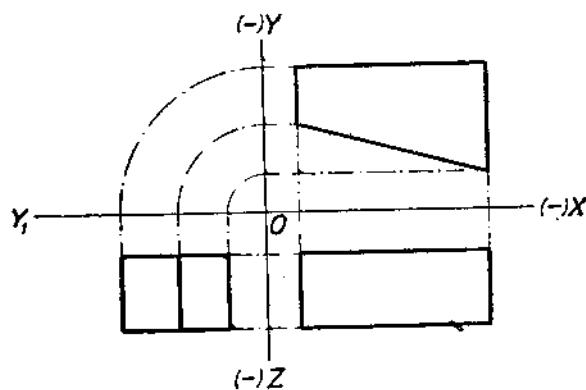
Черт. 239.

Что касается второй вертикальной плоскости, то по отношению к ней наблюдатель должен занимать то же положение, какое он занимает относительно первой вертикальной плоскости и проектируемого тела. Так, если тело расположено в первом октанте, наблюдатель и данное тело находятся по одну и ту же сторону от плоскости V_1 ; следовательно, наблюдатель также должен разместиться по одну и ту же сторону от W вместе с проектируемым телом.

Если проектируемый предмет расположен в седьмом октанте, то плоскость V_1 оказывается между этим предметом и наблюдателем; так как и по отношению к плоскости W следует соблюдать то же условие, что и по отношению к плоскости Y_1 , то наблюдатель должен занять такое положение, чтобы W была между ним и проектируемым предметом (черт. 239).

Если проектируемый предмет расположен в седьмом октанте, то плоскость V_1 оказывается между этим предметом и наблюдателем; так как и по отношению к плоскости W следует соблюдать то же условие, что и по отношению к плоскости Y_1 , то наблюдатель должен занять такое положение, чтобы W была между ним и проектируемым предметом (черт. 239).

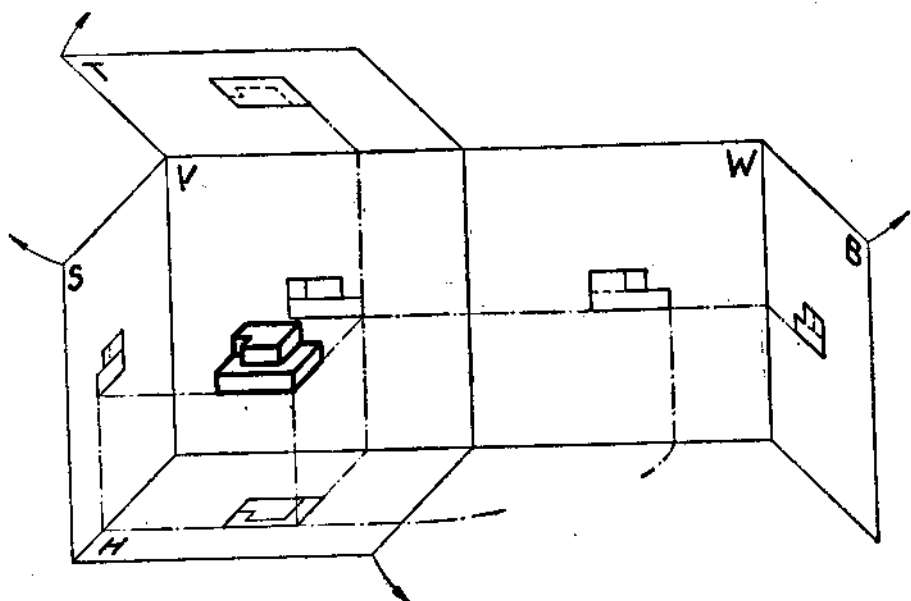
Ход построения проекций на черт. 240 остается таким же, как и на черт. 238, расположение же проекций обуславливается положением



Черт. 240.

проектируемой системы точек в том или ином октанте (на черт. 238 — в первом, на черт. 240 — в седьмом).

На стр. 13 было отмечено, что в практике изображения машин и их частей приходится прибегать к дополнительным плоскостям, кроме плоскостей H , V и W . На черт. 241 показаны плоскости S , T и B , составляющие совместно с H , V и W систему шести плоскостей проекций. В пространстве $S \parallel W$, $T \parallel H$, $B \parallel V$; при совмещении все эти плоскости занимают положение, указанное на черт. 242¹. Характерное для первого октанта «раскрывание» угла, образуемого плоскостями



Черт. 241.

H , V и W , должно остаться в силе и при введении плоскостей S , T и B . По отношению к каждой из указанных плоскостей наблюдатель должен занимать такое же положение, какое он занимает соответственно относительно плоскостей W , H и V и предмета, проекции которого строятся, т. е. так, чтобы предмет был между наблюдателем и соответственной плоскостью. Получающееся при этом расположение проекций указано на черт. 242.

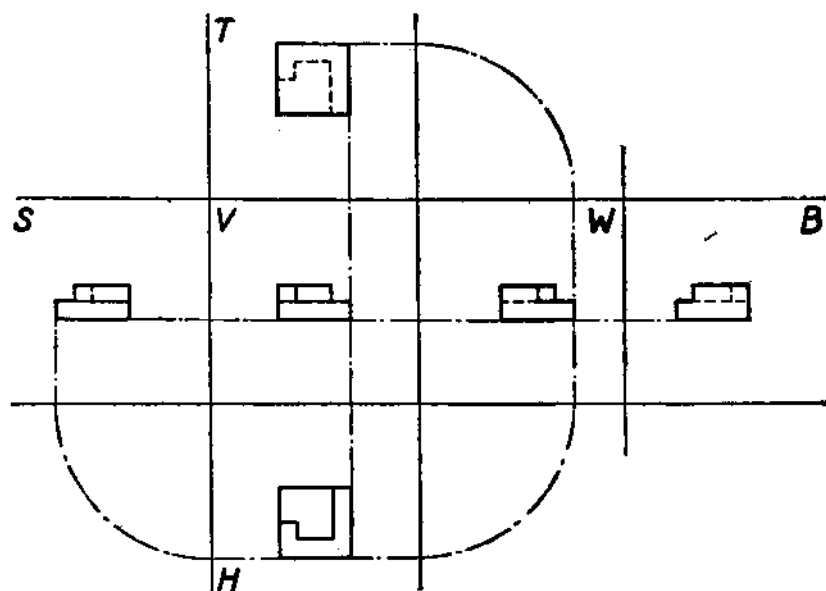
Для седьмого октанта (черт. 239) дополнительные плоскости должны быть расположены между наблюдателем и проектируемым предметом аналогично расположению плоскостей H , V и W .

Расположение проекций, получающееся при рассмотрении предмета в первом октанте, применяется при выполнении чертежей и в курсе черчения носит название европейского способа расположения проекций².

¹ Плоскость B может быть расположена и рядом с плоскостью S .

² Также называется немецким способом.

Кроме европейского способа, отметим также способ расположения проекций, называемый в курсе черчения американским. При этом спо-



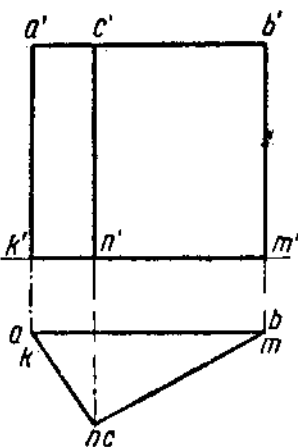
Черт. 242.

собе проекции располагаются так, как это следует из рассмотрения предмета в седьмом октанте: наблюдатель и проектируемый предмет разделены соответственной плоскостью проекций. Проекция на плоскости H располагается над вертикальной проекцией (черт. 240).

На черт. 243, 244, 245 и 246 даны примеры изображения неправильных призм и пирамид.

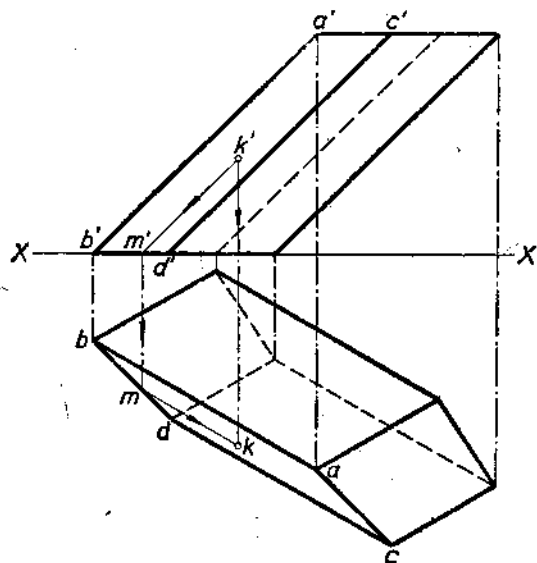
Если на одной из граней данного тела должна быть отмечена какая-либо точка (согласно тому или иному заданию), то следует связать точку с гранью какой-либо вспомогательной прямой. На черт. 244 точка K связана с гранью $ABCD$ при помощи отрезка прямой KM . Положим по данной вертикальной проекции точки K требовалось найти ее горизонтальную проекцию; в этом случае сперва была построена вертикальная проекция отрезка вспомогательной прямой ($k'm'$), а затем построена горизонтальная проекция этого отрезка и на ней определена горизонтальная проекция точки K . Так как отрезок $k'm' \parallel a'b'$, то и $km \parallel ab$.

Точка K на черт. 245 связана с гранью SAC при помощи прямой, проведенной через вершину пирамиды.

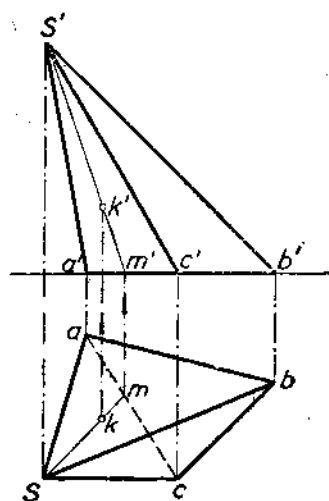


Черт. 243.

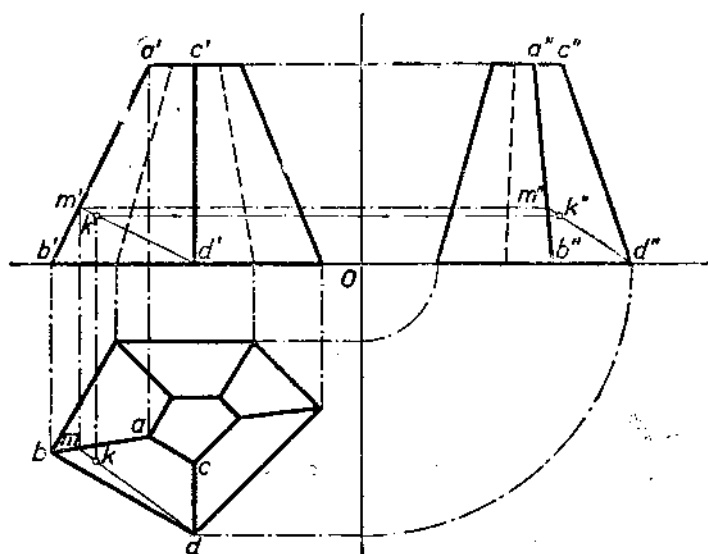
Если была дана горизонтальная проекция точки K и надо было найти проекцию k' , то сперва надо было построить отрезок sm . Далее по точке m отмечена точка m' , получен отрезок $s'm'$ и на нем искомая проекция k' .



Черт. 244.



Черт. 245.

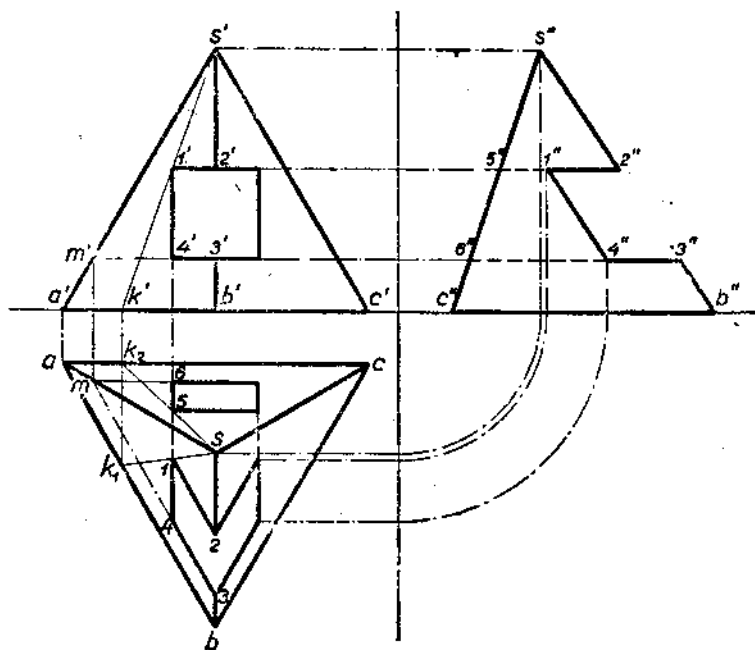


Черт. 246.

На черт. 246 изображена усеченная пятиугольная пирамида. Точка K связана с гранью $ABCD$ при помощи отрезка прямой DM ; проекции этого отрезка определяются проекциями точек D и M , из которых точка D является одной из вершин пирамиды, а точка M получается на ребре пирамиды.

Выбор вспомогательной прямой, связывающей точку с гранью, вообще произволен; конечно, следует стремиться к возможно более простым построениям.

На черт. 247 изображена правильная треугольная пирамида с призматическим отверстием в ней. Построение проведено по заданной полностью вертикальной проекции. На чертеже показано построение точек 1 и 5 (на горизонтальной проекции) при помощи прямых, проведенных через вершину S . Точки 3, 4 и 6 (на горизонтальной проекции) най-



Черт. 247.

дены при помощи прямых, проходящих на гранях SAB и SAC параллельно плоскости H ; горизонтальные проекции этих прямых проходят через точку m параллельно ab и ac . Точка 2 может быть найдена в данном случае либо аналогично точке 3, либо при помощи проекции на плоскости W , где точка $2''$ определяется легко.

Задачи

1. Построить в двух проекциях прямую призму, основания которой суть прямоугольники со сторонами 60 и 40 мм; высота призмы 90 мм.

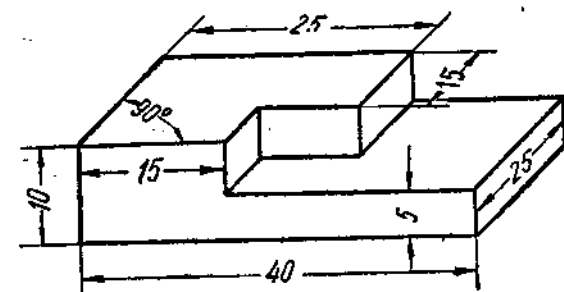
Призма поставлена на горизонтальную плоскость проекций в первой четверти и повернута по отношению к вертикальной плоскости проекций так, что длинная сторона основания составляет с осью проекций угол 30° . От вертикальной плоскости ближайшее ребро призмы отстоит на 25 мм. Построить развертку боковой поверхности данной призмы.

2. Построить в двух проекциях прямую пирамиду, основание которой квадрат со стороной 50 мм; высота пирамиды 100 мм. Пирамида

поставлена на горизонтальную плоскость в первой четверти так, что сторона основания параллельна оси проекций и отстоит от нее на 40 мм.

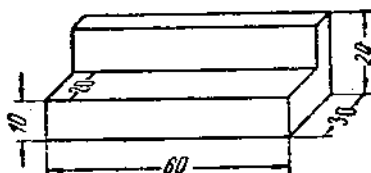
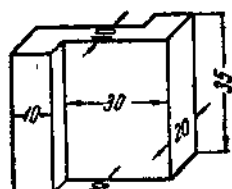
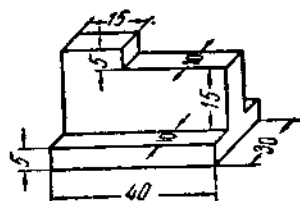
Пояснения к задаче 2. Горизонтальная проекция будет представлять собой квадрат со стороной 50 мм; в квадрате должны быть проведены диагонали, представляющие собой проекции ребра.

Пересечение диагоналей определяет горизонтальную проекцию вершины пирамиды. Вертикальная проекция пирамиды при выбранном расположении относительно плоскости V (см. условие задачи) будет представлять собой равнобедрен-



Черт. 248.

ный треугольник с высотой 100 мм (высота пирамиды) и основанием 50 мм. Следует обратить внимание на то, что боковые ребра как в горизонтальной, так и в вертикальной проекциях проектируются с сокращением их длины.



Черт. 249.

3. По наглядному изображению предмета и данным его размерам построить изображение в трех проекциях (черт. 248). Расположить данный предмет в первой четверти; обычно выбирают такое расположение, при котором получается простейшее изображение и не искажаются размеры.

4. Выполнить задачу 3 при условии, что предмет расположен в третьей четверти.

5—3. По наглядному изображению предметов и данным размерам построить изображение каждого из этих предметов в трех проекциях (черт. 249). Считать, что предметы расположены в первой четверти. Один чертеж повторить при условии, что вычерчиваемый предмет помещен в третьей четверти.

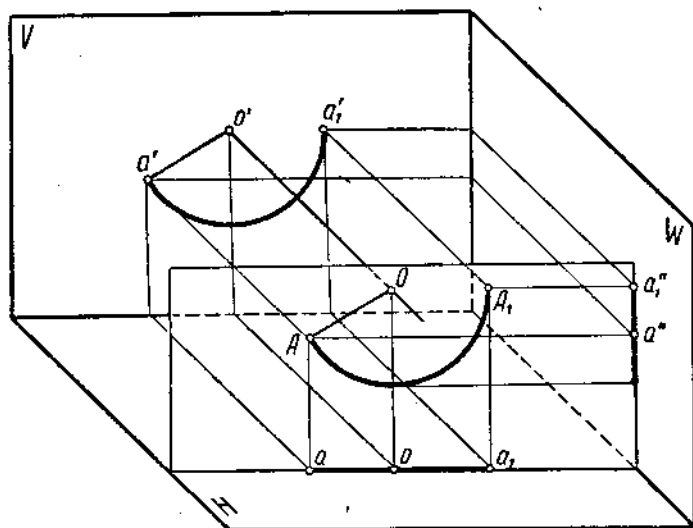
СПОСОБЫ ВРАЩЕНИЯ, СОВМЕЩЕНИЯ И ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Рассматриваемые в гл. IV способы дают возможность упростить решение задач, так как позволяют: 1) временно изменить положение в пространстве рассматриваемого элемента, например, так поставить отрезок прямой, плоскую кривую, плоскую фигуру, чтобы одна из проекций, получаемых на установленных плоскостях (H , V и W), передавала без искажения проектируемый отрезок или фигуру; 2) изменить систему плоскостей проекций так, чтобы при новой системе одна из проекций оказалась расположенной наиболее выгодно для решения задачи, например удовлетворила бы условию неискажаемости.

Указанными приемами можно также получать наиболее благоприятное положение проектируемого предмета в отношении видимости тех или иных его элементов.

§ 21. Основы способа вращения

Рассматриваемый способ заключается в том, что данную систему точек вращают вокруг некоторой оси до тех пор, пока система не переместится из первоначального ее положения в пространстве в другое положение — требуемое или желательное.



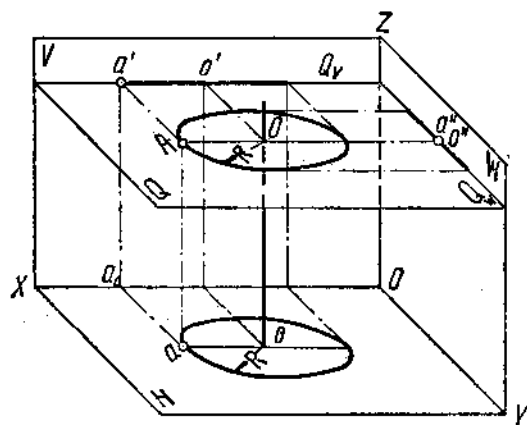
Черт. 250.

Все точки вращаемой системы движутся в пространстве по дугам окружностей, которые могут быть представлены расположенными в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Центр каждой дуги расположен на оси вращения, а радиус представляет собой кратчайшее расстояние от вращаемой точки до оси. Если какая-либо из точек данной системы совпадает с осью вращения, то при перемещении всей системы вокруг оси эта точка остается неподвижной. Проекция точек в новом

положении системы (после поворота) строят на тех же плоскостях проекций, на которых были построены проекции точек до поворота системы.

Ось вращения может быть задана или выбрана; в последнем случае выгодно расположить ось перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, так как при этом упрощаются построения.

Действительно, если ось вращения перпендикулярна, например, к плоскости V , то все плоскости, в которых происходит перемещение точек системы при вращении ее вокруг данной оси, будут параллельны плоскости V . Следовательно, траектория каждой точки — дуга окружности — будет проектироваться без искажения на плоскость V , а на плоскости H и W — в виде отрезка прямой (черт. 250).



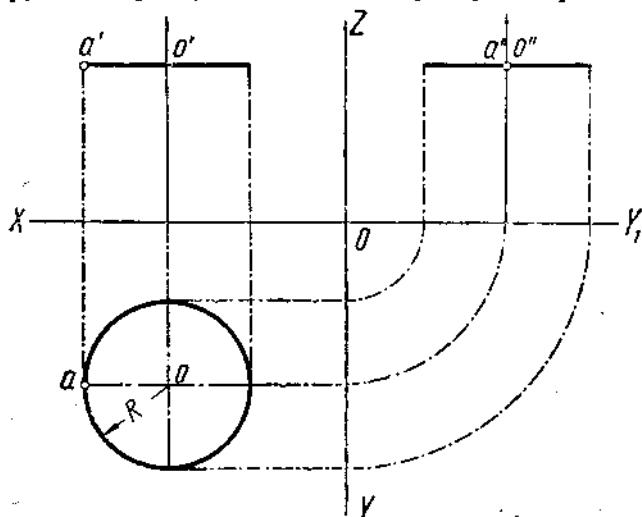
Черт. 251.

плоскости Q окружность радиуса R ; величина радиуса выражается расстоя-

нием от вращаемой точки до оси, т. е. длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось. Окружность, описанная в пространстве точкой A ,

§ 22. Вращение точки

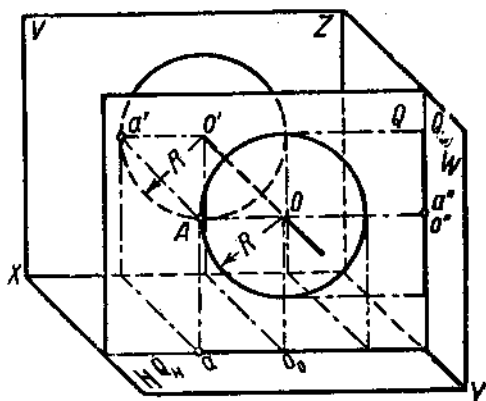
Черт. 251. Точку A вращают вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H . Через точку A может быть проведена плоскость Q , перпендикулярная к оси вращения и, следовательно, параллельная плоскости H . При вращении вокруг оси точка A описывает в пло-



Черт. 252.

нием от вращаемой точки до оси, т. е. длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось. Окружность, описанная в пространстве точкой A ,

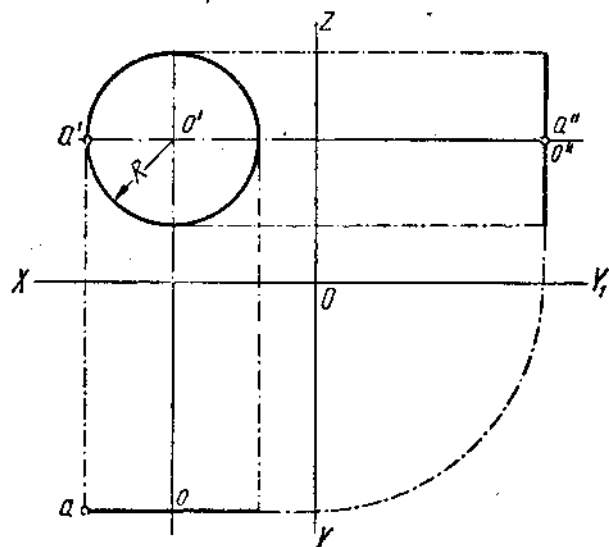
проектируется на плоскость H без искажения, а так как плоскость Q , в которой расположена эта окружность, является плоскостью, проектирующей как на V , так и на W , то проекции точек окружности на плоскости V расположатся на Q_V , т. е. на прямой, параллельной оси OX , а проекции точек окружности на плоскости W расположатся на Q_W , т. е. на прямой, параллельной оси OY .



Черт. 253.

Эпюр дан на черт. 252: окружность, описанная точкой A при вращении ее вокруг оси, спроектирована без искажения на плоскость H , т. е. из точки o как из центра проведена окружность радиуса $R = oa$; на плоскостях V и W эта окружность изображена отрезками прямых, равными $2R$ и направленными параллельно прямой XU_1 . Изображение следов плоскости Q на эпюре излишне.

Черт. 253. Точку A вращают вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V . Через точку A может быть проведена плоскость Q , перпендикулярная к оси вращения и, следовательно, параллельная плоскости V .



Черт. 254.

При вращении вокруг оси точка A описывает в плоскости Q окружность радиуса R ; величина радиуса выражается расстоянием от вращаемой точки до оси, т. е. длиной перпендикуляра, проведенного из точки A на ось.

Окружность, описанная в пространстве точкой A , проектируется на плоскость V без искажения, а так как плоскость Q , в которой расположена эта окружность, является плоскостью, проектирующей как на H ,

так и на W , то горизонтальные проекции точек окружности расположатся на Q_H , т. е. на прямой, параллельной оси OX , а боковые проекции точек окружности расположатся на Q_W , т. е. на прямой, параллельной оси OZ .

Эпюр дан на черт. 254; окружность, описанная точкой A при вращении ее вокруг оси, спроектирована без искажения на плоскость V , т. е. из точки o' как из центра проведена окружность радиуса $R = o'a'$; на

плоскостях H и W эта окружность изображена отрезками прямых, равными $2R$ и направленными параллельно OX и OZ .

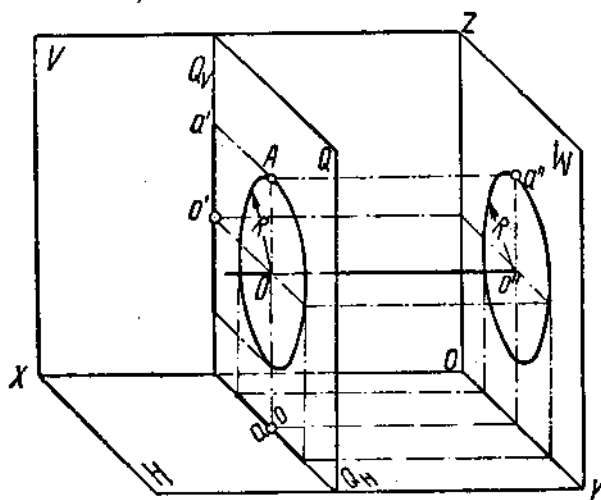
Случай, когда точку вращают вокруг оси, перпендикулярной к плоскости W , изображен на черт. 255; эпюр дан на черт. 256.

Из рассмотрения черт. 252, 254, 256 следует, что для изображения вращательного движения точки вокруг оси надо провести окружность на той

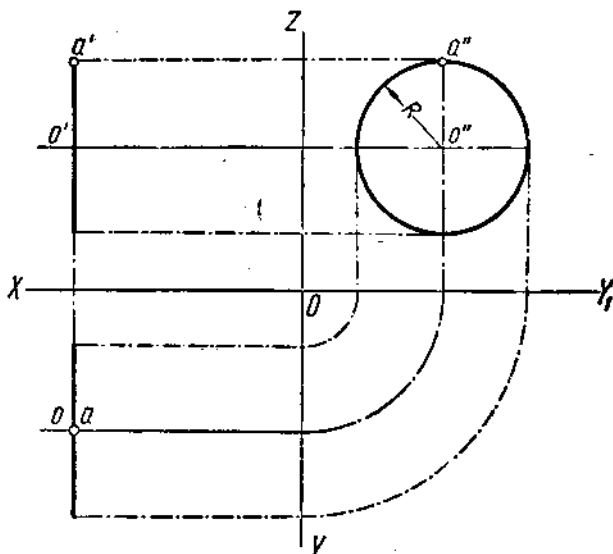
плоскости проекций, по отношению к которой данная ось перпендикулярна. Радиус окружности равен

расстоянию от точки — проекции оси вращения до одноименной проекции вращаемой точки. Следовательно, если перемещение самой точки представить как перемещение ее проекции, то путь одной из проекций вращаемой точки представляет собой окружность; две другие проекции как бы перемещаются по прямым, параллельным соответственным осям проекций.

Пример. Заданы точка A и ось O_0O_0 , перпендикулярная к плоскости V ; повернуть точку A около заданной оси по направлению, противоположному движению часовой стрелки, на угол α (черт. 257).

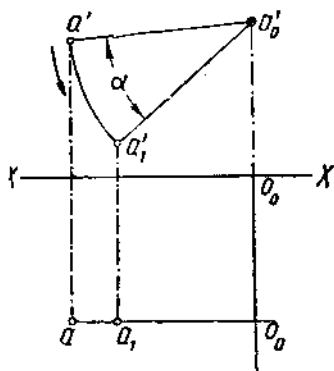


Черт. 255.



Черт. 256.

Решение. Зная, что при вращении точки A в пространстве ее проекция a' должна описывать дугу радиуса $a'o'_0$, из o'_0 радиусом $a'o'_0$ описываем дугу $a'a'_1$, соответствующую углу α и направлению вращения. Точка a'_1 будет новым положением вертикальной проекции точки A . Для нахождения нового положения горизонтальной проекции точки A достаточно из точки a'_1 опустить перпендикуляр на XX и продолжить его до пересечения с направлением перемещения горизонтальной проекции a , которое в данном случае изобразится прямой, параллельной XX и проведенной через точку a . На черт. 257 новое положение горизонтальной проекции точки A обозначено через a_1 .

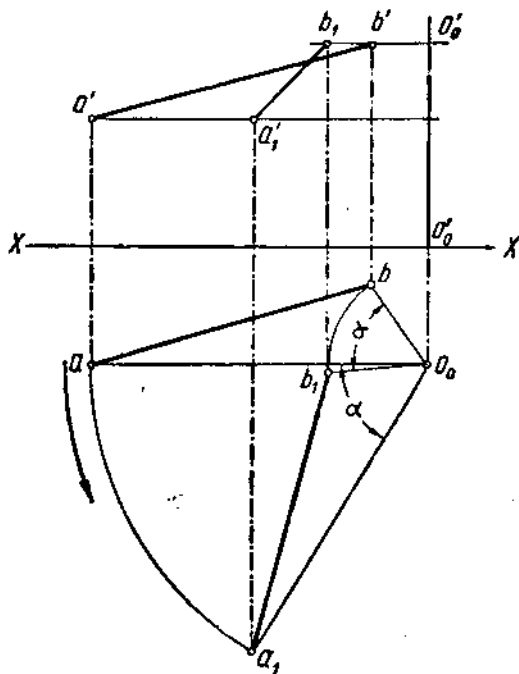


Черт. 257.

Если бы требовалось произвести поворот нескольких точек, надо было бы повернуть каждую точку по заданному направлению на заданный угол.

§ 23. Вращение прямой линии

Пусть (черт. 258) задан отрезок прямой AB ($ab, a'b'$); требуется повернуть его около оси O_0O_0' , перпендикулярной к плоскости H , на угол α по направлению, указанному стрелкой. Для нахождения проекций нового положения отрезка, очевидно, будет достаточно найти новое положение проекций двух конечных точек заданного отрезка. Для этого необходимо:



Черт. 258.

1) через вертикальные проекции a' и b' провести прямые, параллельные оси XX (наметить путь перемещения проекций a' и b');

2) из точки o_0 (проекция оси вращения) радиусами o_0a и o_0b описать дуги aa_1 и bb_1 , соответствующие заданному углу α ;

3) из точек a_1 и b_1 опустить перпендикуляры на ось XX и продолжить их до пересечения с направлениями перемещения точек a' и b' ; точки пересечения обозначены через a'_1 и b'_1 .

Соединяя точку a_1 с b_1 и точку a'_1 с b'_1 , мы получим соответственно

новое положение горизонтальной (a_1b_1) и вертикальной ($a_1'b_1'$) проекций отрезка.

Рассматривая треугольники abo_0 и $a_1b_1o_0$ (черт. 258), замечаем, что стороны bo_0 и ao_0 треугольника abo_0 равны (как радиусы) соответственно сторонам b_1o_0 и a_1o_0 треугольника $a_1b_1o_0$ и углы, заключенные между указанными сторонами, также равны; следовательно, треугольники равны между собой. Из указанного равенства треугольников вытекает, что $ab = a_1b_1$, т. е. расстояние между горизонтальными проекциями

точек, поворачиваемых на один и тот же угол около оси, перпендикулярной к плоскости H , не изменяется.

Если ось вращения будет перпендикулярна к плоскости V , то расстояние между проекциями точек на эту плоскость, поворачиваемых на один и тот же угол, остается неизменным.

Сделанные заключения позволяют упростить решение вопроса о повороте отрезка около оси на заданный угол. Такой упрощенный способ указан на черт. 259; решение заключается в следующем. Через точку o_0 проведена прямая, перпендикулярная к ab ; точка c (точка пересечения перпендикуляра с ab) повернута на заданный угол. Проводя через точку c_1 (новое положение точки c) прямую, перпендикулярную к радиусу c_1o_0 (или, что то же, касательную к дуге в точке c_1), получают направление нового положения горизонтальной проекции отрезка¹.

Так как отрезки ca и cb при вращении не изменяют своей величины, то, откладывая соответственно от точки c_1 отрезки

$c_1a_1 = ca$ и $c_1b_1 = cb$, получают новое положение всего отрезка.

Способ нахождения нового положения вертикальной проекции остается прежним.

Пример. Отрезок AB задан проекциями ab и $a'b'$; определить его истинную величину, применив способ вращения (черт. 260).

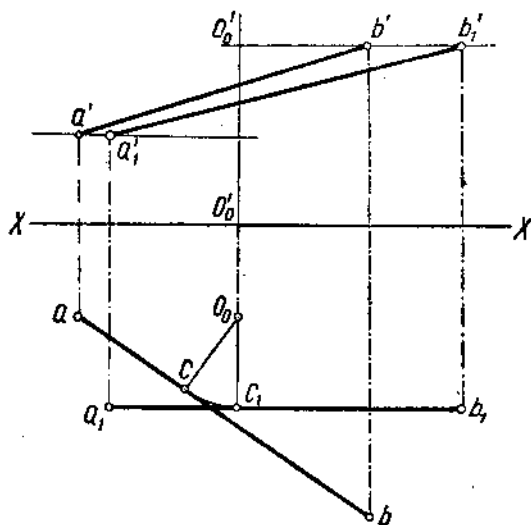
Решение. Зная, что отрезок прямой, располагаясь в пространстве параллельно одной из плоскостей проекций (например, параллельно плоскости V), проектируется на эту плоскость без искажения, а проекция отрезка на другую плоскость проекций располагается параллельно оси XX , выберем ось вращения O_0O_0 , перпендикулярную к плоскости H и будем вращать ab до положения, параллельного XX . Новое положение вертикальной проекции отрезка позволяет определить истинную величину самого отрезка AB : $a_1'b_1' = AB$.

На черт. 260 поворот отрезка AB до положения, параллельного плоскости V , осуществлен при помощи поворота точки c (отрезок o_0c

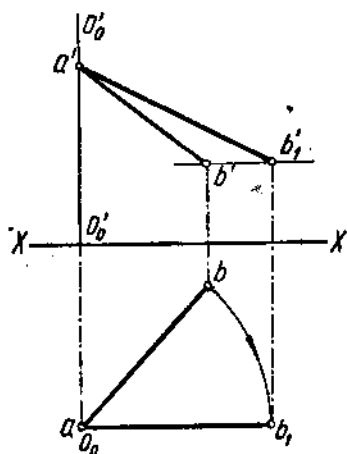
¹ Для радиуса при таком способе вращения прямой встречается название «ведущий радиус».

перпендикулярен к ab). Так как угол поворота не известен, но известно новое положение горизонтальной проекции (параллельное XX), то радиусом o_0c следует описать дугу и затем провести к дуге касательную, параллельную XX ; c_1 представляет собой новое положение точки c .

Найдя положение точки c_1 , отмечают точки a_1 и b_1 (откладывая соответственно $c_1b_1 = cb$ и $c_1a_1 = ca$) и затем a_1' и b_1' . Величина отрезка $a_1'b_1'$ будет представлять собой истинную величину отрезка AB .



Черт. 260.



Черт. 261.

Если ось вращения выбрать проходящей через одну из конечных точек отрезка, то решение упростится, так как точка, через которую проходит ось, не меняет своего положения, и для поворота отрезка придется искать новое положение проекций только одной точки.

На черт. 261 показан поворот отрезка AB до положения, параллельного плоскости V . Ось O_0O_0 выбрана перпендикулярной к плоскости H и проходящей через точку A (a, a'). Так как горизонтальная проекция отрезка в своем новом положении должна занять положение, параллельное оси XX , то через точку a проводят прямую, параллельную XX , и делают на ней засечку радиусом ab из точки a ; получают точку b_1 . Найдя точку b_1' и соединив ее с a' , получают истинную величину отрезка AB .

Если бы стал вопрос о повороте заданного отрезка прямой до положения, перпендикулярного к одной из плоскостей проекций, то, в общем случае, одной оси вращения, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, недостаточно и приходится пользоваться второй осью вращения, перпендикулярной к другой плоскости проекций.

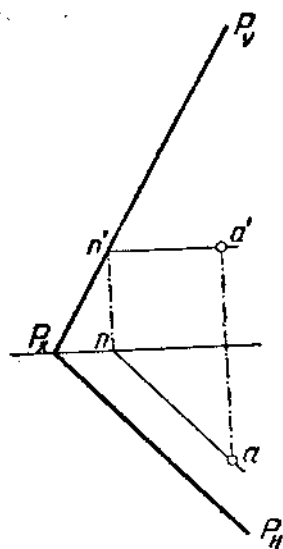
Пример 2. Дан (черт. 262) отрезок прямой AB ($ab, a'b'$); требуется повернуть данный отрезок до положения, перпендикулярного к плоскости H .

Решение. Выберем ось O_0O_0 , перпендикулярную к плоскости H и проходящую через точку A . Около выбранной оси поворачиваем отрезок до положения, параллельного плоскости V ; новое положение проекций обозначено $a'b_1$ и $a'b_1'$, причем $a'b_1$ параллельно XX . Теперь выберем вторую ось вращения O_1O_1 , перпендикулярную к плоскости V и проходящую через новое положение точки B , т. е. через точку B_1 (b_1, b_1'). Поворачивая вертикальную проекцию a_1b_1' до положения, перпендикулярного к оси XX (положение $b_1'a_2'$), мы, очевидно, приведем отрезок в положение, перпендикулярное к плоскости H .

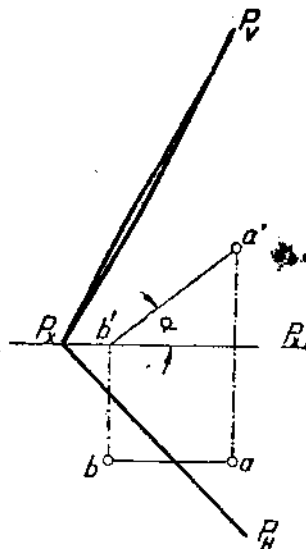
Горизонтальная проекция отрезка изобразится точкой b_1 .

В некоторых случаях можно исходить из частного положения отрезка с тем, чтобы, применяя метод вращения, найти требуемое по условию задачи положение.

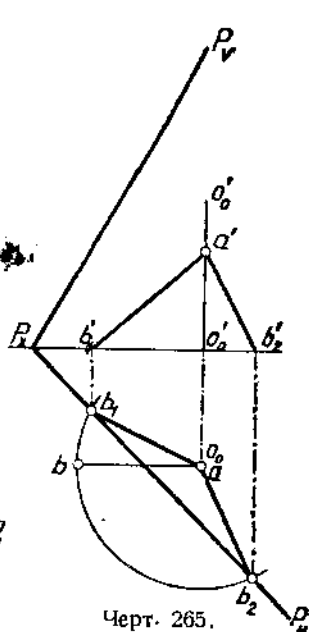
Пример 3. Через точку A провести в плоскости P отрезок прямой под углом α к плоскости H (черт. 263).



Черт. 263.



Черт. 264.



Черт. 265.

Решение (черт. 264 и 265). Если бы искомым отрезком прямой был параллелен плоскости V , то длина проекции отрезка на эту плоскость

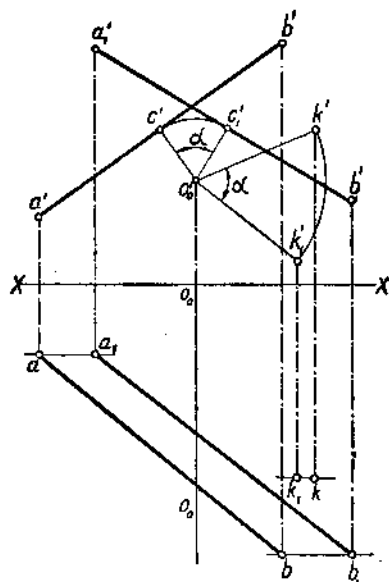
равнялась бы его длине ($a'b' = AB$), а угол между проекцией $a'b'$ и осью проекций представил бы истинную величину угла между отрезком и плоскостью H . Поэтому через точку a' (черт. 264) надо провести прямую под заданным углом α к оси проекций и построить проекцию ab , соответствующую полученному отрезку $a'b'$. Проекция ab должна быть взята параллельно оси проекций, так как мы ставим отрезок AB в положение, параллельное плоскости V .

Чтобы сохранить неизменность угла α и в то же время ввести отрезок AB в плоскость P , надо взять ось вращения, перпендикулярную к плоскости H , а так как точка A отрезка лежит в плоскости P , то ось вращения должна быть взята проходящей через точку A (черт. 265). Далее, вращая отрезок ab вокруг точки $o_0(a)$, выводим точку b на след P_H и по найденному новому положению горизонтальной проекции находим новое положение проекции на плоскости V .

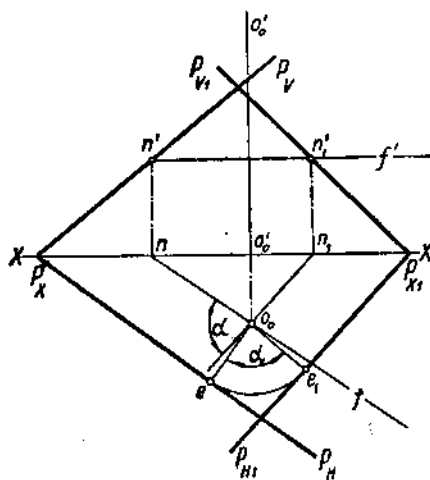
Задача, как видно из черт. 265, имеет два ответа, и решение ее возможно, если заданный угол α не больше угла наклона самой плоскости P к плоскости H . Если эти углы равны между собой, то получается один ответ.

§ 24. Вращение плоскости

После рассмотрения случаев вращения точки и прямой не представится затруднений произвести поворот трех точек, прямой и точки или двух прямых, определяющих плоскость. Действительно, если бы плоскость была задана прямой AB ($ab, a'b'$) и точкой K



Черт. 266.



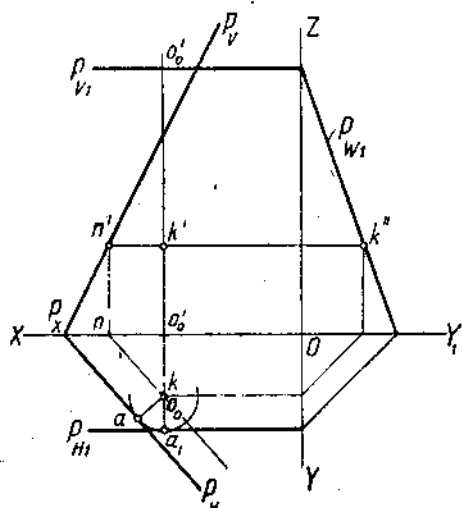
Черт. 267.

(k, k') (черт. 266) и требовалось бы повернуть эту плоскость около оси O_0O_0 , перпендикулярной к плоскости V на угол α , то пришлось бы повернуть данную прямую и точку на заданный угол и найти новое

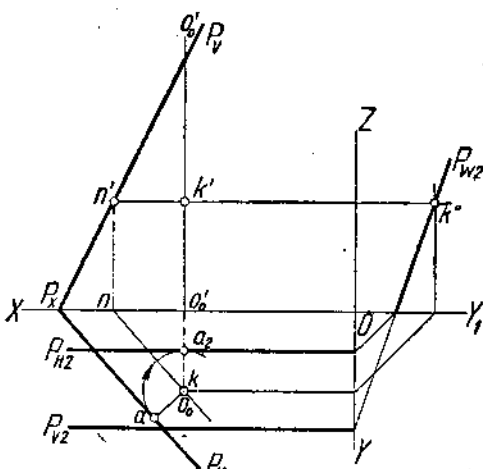
положение прямой (a_1b_1 , $a_1'b_1'$) и точки (k_1, k_1'). Эти новые положения прямой и точки вполне определяют новое положение плоскости, повернутой на угол α .

Если плоскость задана следами, то обычно поворачивают один из следов и горизонталь или фронталь плоскости.

Пример 1. Повернуть плоскость на угол α около оси O_0O_0 , перпендикулярной к плоскости H ; плоскость задана следами (черт. 267).



Черт. 268.



Черт. 269.

Решение. Поворачивая ближайшую точку следа P_H — точку e ($o_0e \perp P_H$) — на угол α и проводя через точку e_1 (положение точки после поворота) прямую линию, перпендикулярную к o_0e_1 , мы получим новое положение горизонтального следа плоскости — P_{H1} и новую точку схода следов P_{X1} . Для нахождения нового положения P_V достаточно найти, помимо найденной точки схода следов P_{X1} , еще одну точку, принадлежащую искомому положению следа P_V .

Выберем в плоскости P горизонталь h/h' , пересекающую ось вращения (h/h' проходит через горизонтальную проекцию оси вращения). Так как горизонталь и при новом положении плоскости останется параллельной горизонтальному следу, то следует провести через o_0 прямую, параллельную P_{H1} ; получится новое положение горизонтальной проекции горизонтали. Вертикальная проекция горизонтали не изменит своего направления, а поэтому легко найти новое положение вертикального следа горизонтали — точку n_1' . Соединяя между собой точки n_1' и P_{X1} , мы получим новый вертикальный след P_{V1} .

Если бы по условию задачи надо было бы вращением вокруг оси O_0O_0 вывести некоторую плоскость P в положение, параллельное оси XX , то найти новое положение вертикального следа горизонтали (на черт. 267 точка n_1') окажется невозможным, так как у искомой плоскости, параллельной оси XX , горизонтали (и фронталы) имеют лишь один след — на плоскости W . Можно прибегнуть к помощи второй вертикаль-

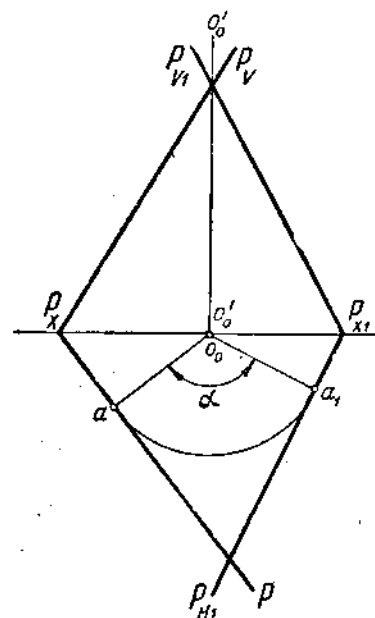
ной плоскости и точки K — пересечения оси вращения с плоскостью P (черт. 268). Отрезок o_0a , перпендикулярный к следу P_H , должен занять такое положение, чтобы после поворота плоскости горизонтальный след ее оказался параллельным оси OX . Следовательно, отрезок o_0a должен быть повернут до положения перпендикулярности к OX , и новый след P_{H1} получится при проведении через точку a_1 перпендикуляра к отрезку o_0a_1 .

Так как плоскость после поворота должна будет проходить через точку K , то находим след P_{H1} по новому следу P_{H1} и точке k'' , а затем находим и новый вертикальный след — прямую P_{V1} .

На черт. 269 и 270 дано второе решение рассматриваемой задачи, соответствующее повороту точки a вокруг o_0 по направлению вращения часовой стрелки (на черт. 268 вращение происходило в противоположную сторону). Ход построения остается тем же: сперва находим положение следа P_{H2} , затем следа P_{W2} и, наконец, следа P_{V2} .

Если ось вращения будет расположена в плоскости проекций, то построение при вращении плоскости вокруг этой оси упрощается. Пример дан на черт. 271. Так как одна из точек вертикального следа плоскости оказывается расположенной на оси вращения, то после поворота плоскости новый вертикальный след должен будет пройти через эту точку. Следовательно, определив новое положение горизонтального следа P_{H1} (черт. 271), надо новую точку схода следов (P_{X1}) соединить с точкой пересечения следа P_V и проекции оси $o'_0o'_0'$.

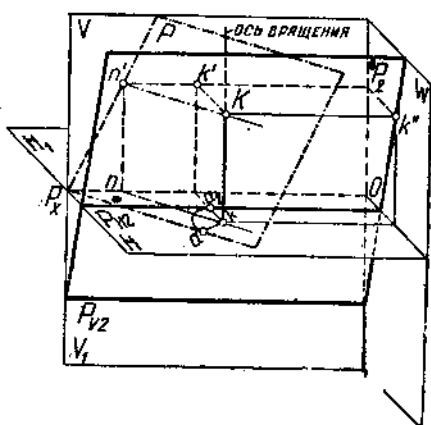
На черт. 272 ось вращения проведена через точку схода следов P_X перпендикулярно к плоскости H . При повороте плоскости P против часовой стрелки¹ на угол α , след P_H займет положение P_{H1} . Для определения положения вертикального следа надо взять какую-либо горизонталь плоскости P и повернуть ее так же, как был повернут след P_H . Для



Черт. 271.

этого проводим из точки o_0 перпендикуляр к продолжению горизонтальной проекции горизонтали и радиусом o_0k очерчиваем дугу

¹ Если смотреть на плоскость H от точки o'_0 .

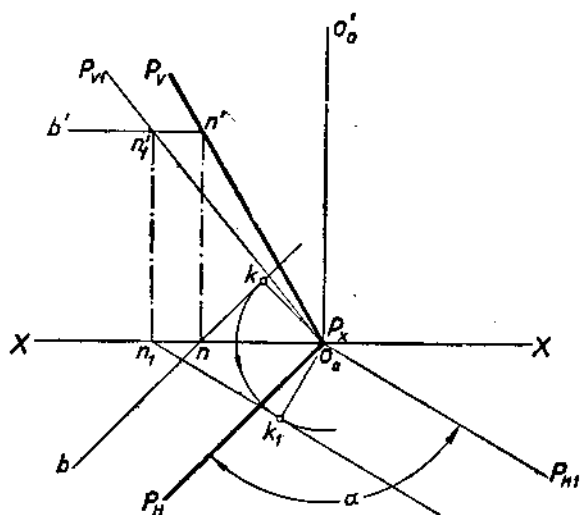


Черт. 270.

окружности. Касательная к этой дуге, проведенная параллельно следу P_{X1} , будет новой горизонтальной проекцией вращаемой горизонтали, а точка n_1' — новым вертикальным следом горизонтали. Соединяя точки P_X и n_1' прямой линией, получаем положение вертикального следа плоскости после ее поворота согласно условию.

На черт. 273 построено два новых положения плоскости P : параллельное оси XX и перпендикулярное к плоскости V . Сравнивая между собой изображение плоскостей до и после поворотов, следует обратить внимание на то, что 1) действительный угол, образуемый следами P_V и P_H , при повороте плоскости вообще изменится; 2) остается неизменным

угол наклона данной плоскости к одной из плоскостей проекций, а именно к той, по отношению к которой ось вращения перпендикулярна; 3) вывод: плоскость P в положение P_2 , мы определяем угол наклона плоскости P по отношению к плоскости H . Если бы требовалось определить угол наклона плоскости P по отношению к плоскости V , то надо было бы повернуть плоскость P до положения, перпендикулярного к плоскости H , а для этого пришлось бы взять ось, перпендикулярную к V (черт. 274).



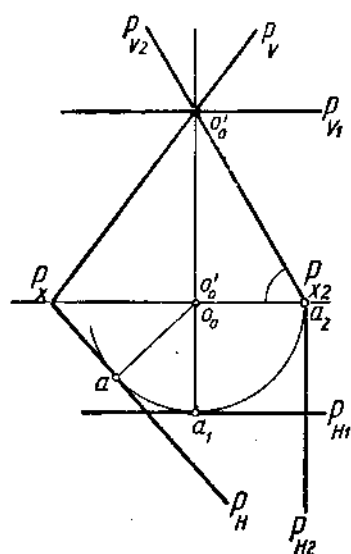
Черт. 272а

Если ставится задача о приведении заданной плоскости в положение, параллельное одной из плоскостей проекций, то в общем случае приходится применять последовательное вращение плоскости около двух осей.

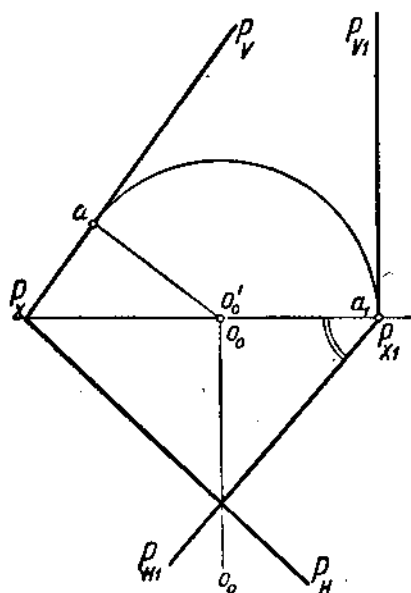
Пример 2. Привести плоскость P (P_H , P_V) в положение, параллельное плоскости V (черт. 275).

Решение. Для более простого решения выбираем первую ось вращения O_0O_0 так, чтобы она была перпендикулярна к плоскости V и лежала в плоскости H . Будем вращать плоскость P до положения, перпендикулярного к плоскости H . Для этого из точки O_0' проводим к P_V перпендикуляр и радиусом $O_0'f'$ описываем дугу $f'h_1'$; так как вертикальный след в новом положении должен быть перпендикулярен к оси XX , то, проведя к оси XX в точке h_1' перпендикуляр, мы получим новое положение P_V — след P_{V1} . Точка, принадлежащая плоскости P и оси вращения, не изменяет своего положения при вращении, а потому, соединив точку P_{X1} точкой пересечения следа P_H и отрезка O_0O_0 , мы получим новый горизонтальный след — прямую P_{H1} .

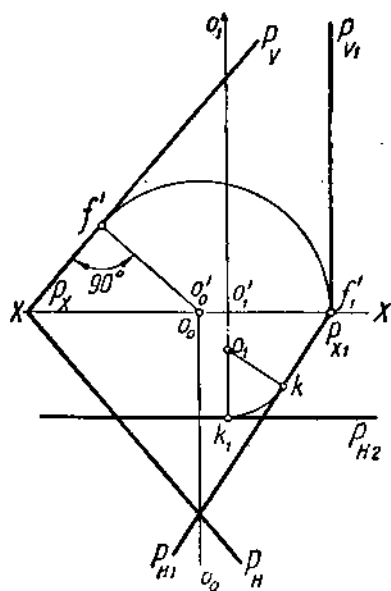
Далее выбираем ось O_1O_1 , перпендикулярную к плоскости H , и вращаем плоскость, изображенную следами P_{H1} и P_{V1} до положения, па-



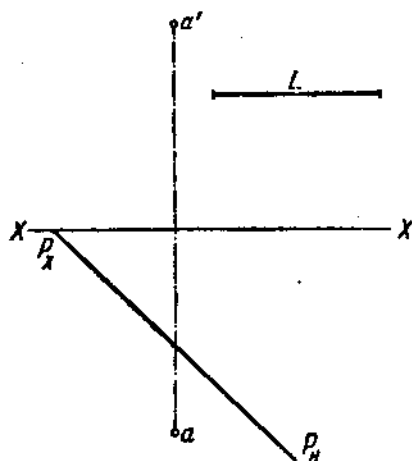
Черт. 273.



Черт. 274.



Черт. 275.



Черт. 276.

параллельного плоскости V . Так как горизонтальный след плоскости после второго поворота должен расположиться параллельно оси XX , то, описывая дугу радиусом o_1k ($o_1k \perp P_{H1}$) и проводя к дуге касательную, параллельную XX , получим новый горизонтальный след — прямую P_{H2} .

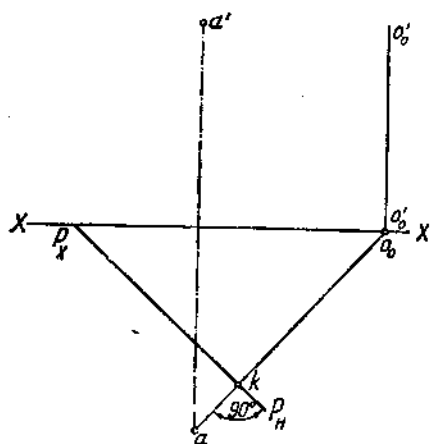
Если бы в заданной плоскости была дана система точек, то, построив новое положение проекций точек после последовательного вращения их около двух осей на те же углы, на которые пришлось поворачивать плоскость, мы бы на плоскости V имели изображение расположения точек в заданной плоскости.

В некоторых случаях следует применить метод вращения в начальной стадии решения задачи с

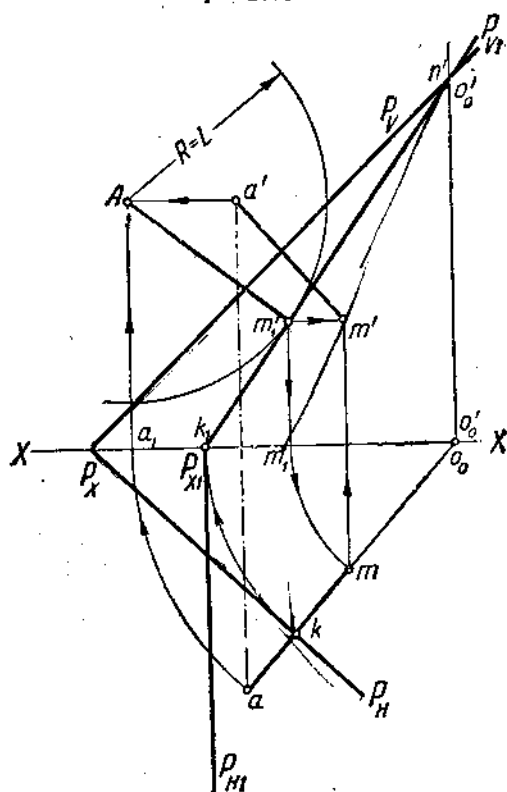
тем, чтобы создать наиболее удобное положение изображаемых элементов (например, неискажаемость расстояния и т. п.), а затем уже получить требуемое положение.

Пример 3. Зная положение следа P_H некоторой плоскости и расстояние (L) до этой плоскости от данной точки A , найти положение следа P_V (черт. 276).

Решение. Расстояние от точки до плоскости измеряется длиной перпендикуляра, проведенного из точки на плоскость. Следовательно, проводя $ao_0 \perp P_H$ (черт. 277), мы намечаем горизонтальную проекцию перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость P . Так как известна длина перпендикуляра (отрезок L), то наиболее удобным положением будет то, при котором отрезок L спроектируется без искажения на одну из плоскостей проекций, т. е. если отрезок L окажется параллельным этой плоскости.



Черт. 277.



Черт. 278.

Применяем метод вращения: вокруг оси O_1O_0 поворачиваем прямую

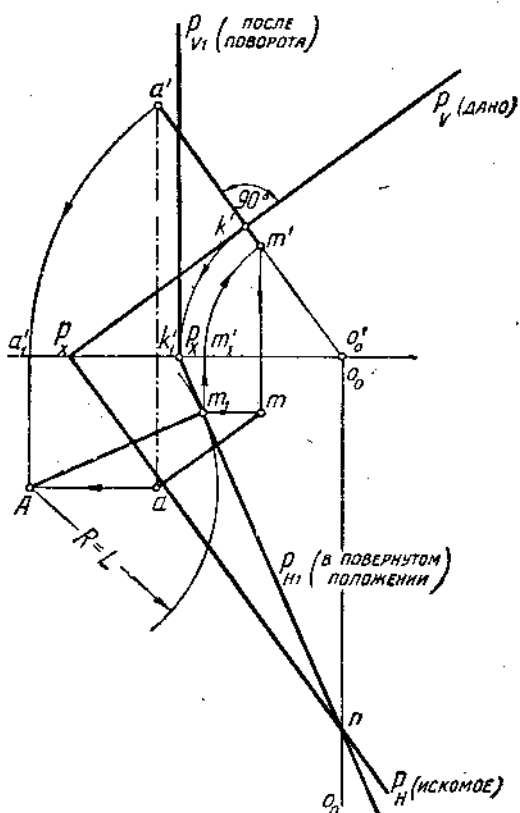
(пока мы знаем лишь направление ее горизонтальной проекции a_0) до положения, параллельного плоскости V . При выбранном положении оси вращения надо повернуть только одну точку a так, чтобы она совпала с осью XX (черт. 278); получается совпадение горизонтальной проекции отрезка L с осью XX , а это значит, что самый отрезок L будет лежать в плоскости V . По новому положению точки a (a_1) находим положение точки A на плоскости V . Если теперь из точки A провести дугу радиусом $R = L$, то любой радиус этой дуги может служить вертикальной проекцией отрезка L , но при условии перпендикулярности к вертикальному следу плоскости P в ее повернутом соответственно повороту точки A положении. Это повернутое положение плоскости P легко найти, если провести перпендикуляр к оси XX в точке k_1 , а затем касательную из точки k_1 к дуге, проведенной радиусом L из точки A .

Итак, мы применили метод вращения для перевода всей системы (точка A и плоскость P) в такое положение, когда расстояние от точки A до плоскости P проектируется на плоскость V без сокращения.

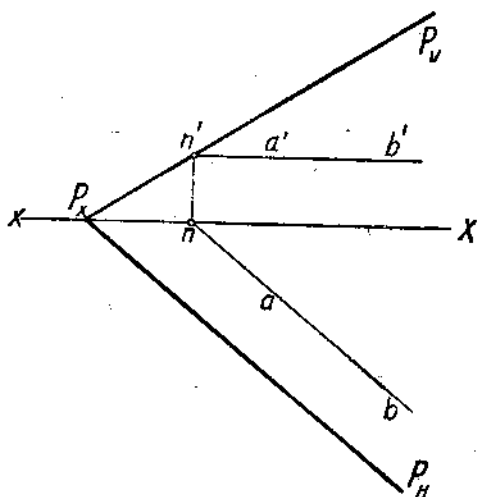
Для нахождения положения следа P_V достаточно точку n' соединить с точкой P_X .

На черт. 278, кроме того, указано нахождение проекций перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость P .

Аналогично следовало бы поступать для нахождения



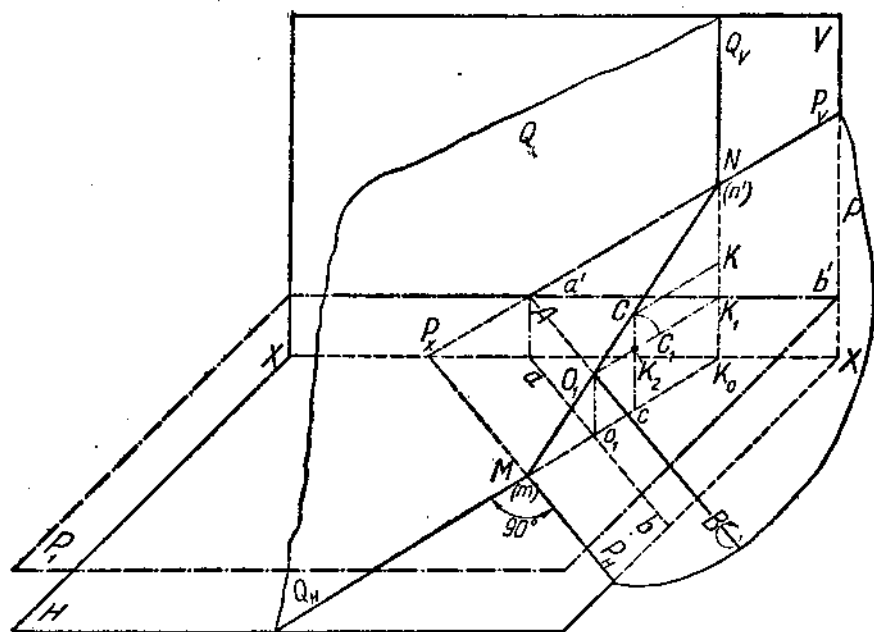
Черт. 279.



Черт. 280.

следа P_H при заданном положении следа P_V , данной точке A и ее расстоянии до плоскости P ; разница в построении заключалась бы в том, что совмещение точки A следовало бы произвести с плоскостью H , а не с плоскостью V . Построение указано на черт. 279¹.

Вращение плоскости можно осуществить, принимая в качестве оси вращения одну из горизонталей или фронталей данной плоскости.



Черт. 281.

Пример 4. Повернуть плоскость P вокруг горизонтали AB до положения, параллельного плоскости H (черт. 280).

Решение. Повернув плоскость около оси AB в направлении, указанном стрелкой, до положения, параллельного H , мы замечаем, что плоскость эта пройдет через вертикальную проекцию горизонтали $a'b'$ и на эюре (черт. 282) изобразится одним следом P_{V1} . На черт. 281 новое пространственное положение плоскости P показано штрихпунктирной линией.

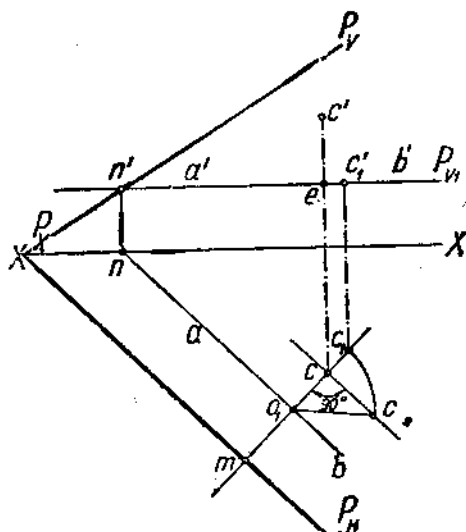
Далее рассмотрим вопрос о нахождении положения проекций какой-либо точки C , лежащей в плоскости P , если эта плоскость поворачивается около горизонтали до положения, параллельного плоскости H .

Так как при вращении плоскости все ее точки описывают дуги в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, то мы через точку C проведем вспомогательную плоскость Q , перпендикулярную к выбран-

¹ На черт. 278 и 279 дано лишь одно решение поставленной задачи; второе положение искомого следа может быть получено при проведении второй касательной к дуге, центр которой лежит в точке A .

ной оси — горизонтали AB (черт. 281). Плоскость P при вращении по направлению, указанному стрелкой, займет положение P_1 и пересечется с плоскостью Q по линии O_1K_1 , параллельной плоскости H , а следом o_1K_0 , лежащей на следе Q_H . Радиус вращения O_1C , лежащий на линии пересечения плоскостей Q и P , будет перпендикулярен к AB ; проекция радиуса вращения — o_1c — будет перпендикулярна к P_H и, следовательно, к ab . Новое положение точки C после вращения обозначено через C_1 .

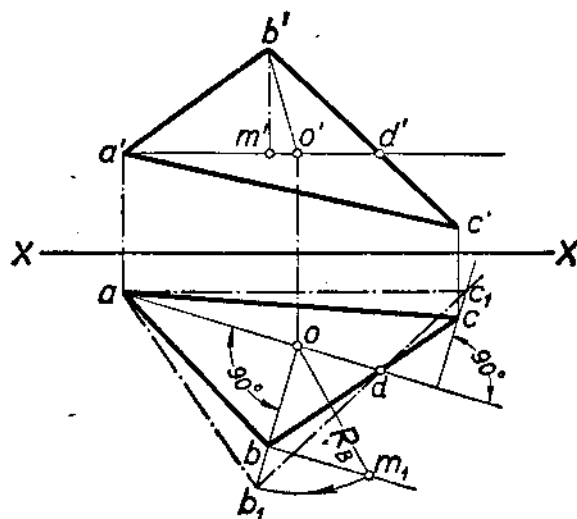
Из рассмотрения треугольника O_1CK_2 (черт. 281) следует, что радиус O_1C , равный O_1C_1 , является гипотенузой, катет $O_1K_2 = o_1c$ и катет $CK_2 = KK_1$. Отрезок KK_1 представляет собою превышение точки C над плоскостью P_1 и равняется расстоянию проекции точки C на плоскости V от прямой $a'b'$ (черт. 282). Это позволяет на



Черт. 282.

эпюре черт. 282 найти новое положение C после поворота плоскости. Через точку c проводим прямую, перпендикулярную к ab (ab — горизонтальная проекция

оси вращения); из точки c под прямым углом откладываем на ней отрезок $cc_2 = c'e$ (по черт. 281 — CK_2). Гипотенуза o_1c_2 будет истинной величиной радиуса вращения. Описывая радиусом o_1c_2 дугу, мы на продолжении прямой o_1c за сечем точку c_1 , которая и будет горизонтальной проекцией нового положения точки C . Вертикальная проекция c'_1 , очевидно, должна лежать на $a'b'$ (совпадает с P_{V1}) и на перпендикуляре к оси XX , проведенном через точку c_1 .

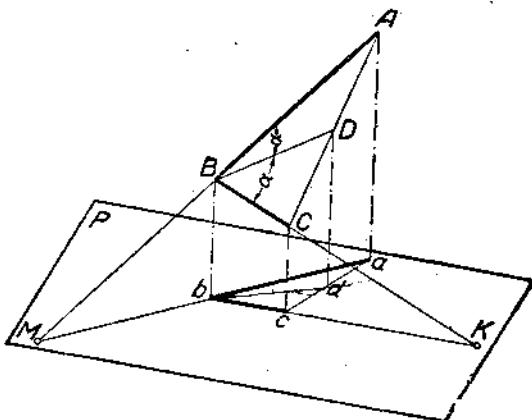


Черт. 283.

Если бы нужно было повернуть плоскость до положения, параллельного плоскости V , то за ось вращения надо выбрать фронталь и произвести аналогичные построения.

ного треугольника obm_1 , в котором катет ob представляет собой горизонтальную проекцию радиуса вращения, а катет bm_1 равен отрезку $b'm'$.

Определив положение точки b_1 , соединяем ее с точками a и c , представляющими собой горизонтальные проекции точек, расположенных на оси вращения и принадлежащих сторонам угла. Получаем новую горизонтальную проекцию — угол ab_1c ; этот угол, равный заданному углу ABC , делим пополам и получаем при этом точку d на горизонтальной проекции горизонтали, а затем соответствующую ей проекцию d' на прямой $a'c'$. Эти точки d и d' представляют собой проекции точки, расположенной на оси вращения AC и, следовательно, остающейся на месте при вращении вокруг AC . Остается соединить точки d и b , d' и b' ; прямые db и $d'b'$ будут проекциями искомой биссектрисы угла ABC .



Черт. 285.

Итак, для проведения биссектрисы угла, изображенного проекциями, следует произвести преобразование, при котором одна из проекций передает данный угол без искажения; непосредственным же делением проекций угла пополам в том виде, как эти проекции заданы, нельзя самый угол разделить пополам за исключением лишь того случая, когда стороны данного угла одинаково наклонены, хотя бы к одной из плоскостей проекций; деля проекцию угла на этой плоскости пополам, мы самый угол также разделим пополам.

Действительно, если (черт. 285) некоторый угол ABC в пространстве разделен пополам, то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (по свойству биссектрисы внутреннего угла в треугольнике). Положим, что abc представляет собой проекцию

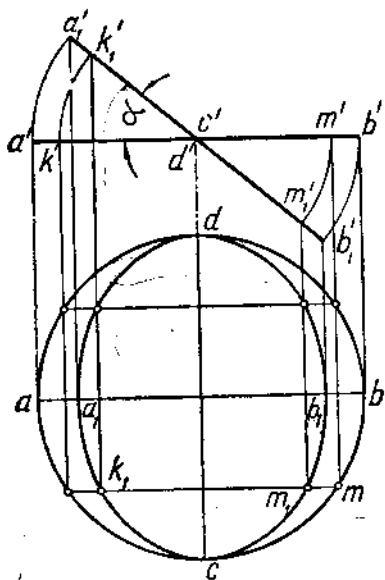
угла ABC на некоторую плоскость P . Так как $\frac{AD}{DC} = \frac{ad}{dc}$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{ad}{dc}$.

Если предположить, что угол abc также разделен пополам (т. е. при делении угла в пространстве пополам его проекция делится пополам и наоборот), то от равенства $\frac{ad}{dc} = \frac{ab}{bc}$ перейдем к равенству $\frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC}$.

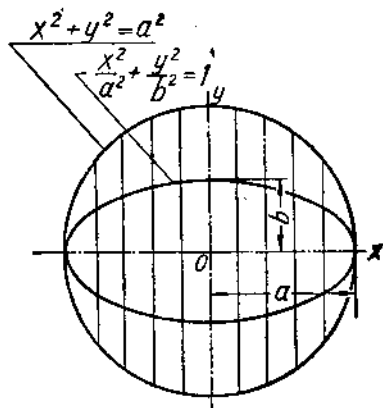
или $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$. Но последнее возможно лишь в том случае, если угол, образованный отрезком AB с его проекцией ab равен углу, образованному отрезком BC с его проекцией bc , т. е. если стороны данного угла одинаково наклонены к данной плоскости проекций. На черт. 285 это должно соответствовать равенству углов AMa и Bkb .

§ 25. Построение проекций круга, наклоненного к одной из плоскостей проекций

На черт. 286 изображен поворот круга на угол α около оси, перпендикулярной к плоскости V и совпадающей с диаметром CD . Диаметр CD , а также все хорды окружности, параллельные диаметру CD , спроектируются на плоскость H после поворота без изменения их длины, так как они остаются параллельными плоскости H .



Черт. 286.



Черт. 287

Что же касается диаметра AB и хорд, ему параллельных, то они после поворота проектируются на плоскость H с сокращением, определяемым величиной угла α .

$$\frac{a_1 b_1}{a_1' b_1'} = \frac{a_1 b_1}{ab} = \cos \alpha$$

$$\frac{k_1 m_1}{k_1' m_1'} = \frac{k_1 m_1}{km} = \cos \alpha \text{ и т. д.}$$

Следовательно, для искомой проекции окружности, если мы примем cd за направление оси абсцисс, имеет место одно и то же сокращение всех ординат по сравнению с ординатами окружности, построенной на том же диаметре cd , на котором строится искомая проекция. Но это свойство присуще эллипсу (черт. 287): ординаты его находятся в постоянном отношении к ординатам окружности, диаметр которой равен большей оси эллипса. Действительно, уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

решая каждое из этих двух уравнений относительно y , получаем

$$y_{\text{эллипса}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_{\text{окружности}} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

При одной и той же абсциссе отношение

$$\frac{y_{\text{эллипса}}}{y_{\text{окружности}}} = \frac{b}{a},$$

т. е. представляет собой величину, постоянную для данного эллипса.

Итак, искомая проекция окружности представляет собой эллипс, для построения которого надо найти ряд точек аналогично нахождению точек a_1, b_1, k_1 и m_1 на черт. 286.

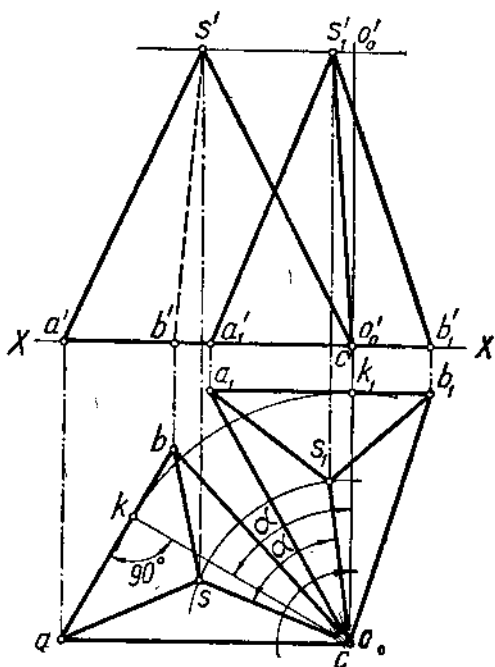
§ 26. Вращение тела

Так как форма тела определяется положением в пространстве некоторого количества характерных точек, то, повернув эти точки около выбранной или заданной оси на определенный угол и в определенном направлении, мы должны получить изображение тела в повернутом положении.

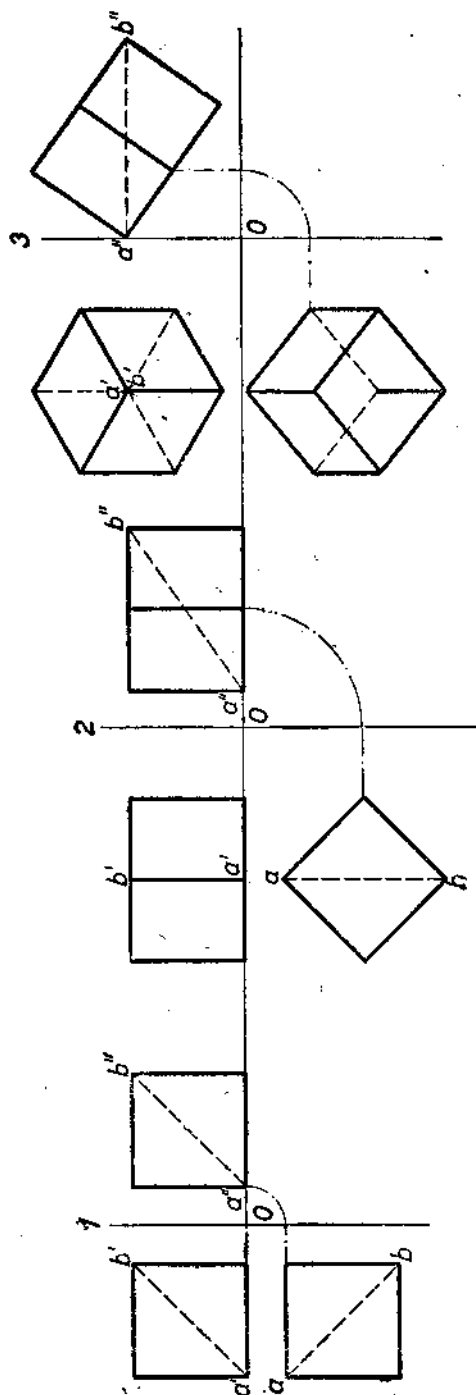
Пример 1. Дана пирамида $ABCS$ своими проекциями $abcs, a'b'c's'$; повернуть ее около оси O_0O_0 , перпендикулярной к H и проходящей через точку C так, чтобы ребро AB ($ab, a'b'$) заняло положение, параллельное оси XX .

Вращение произвести в направлении движения часовой стрелки (черт. 288).

Решение. Поворачиваем в первую очередь отрезок ab до положения, параллельного XX ; тем самым определится угол поворота как отдельных точек, так и всего тела. Поворот совершаем обычным способом, вращая ближайшую к оси точку k ; найдя новое положение k_1 , мы отмечаем, что углом поворота будет угол α , заключенный между ck и ck_1 . Поворачиваем точку s на тот же угол α . Точка c не меняет своего положения. По новому положению горизонтальных проекций a_1, b_1 и s_1 найдем положение вертикальных проекций a'_1, b'_1 и s'_1 . Соединив соответственно новые горизонтальные и вертикальные проекции точек, получим изображение пирамиды в повернутом положении.



Черт. 288.



Черт. 289.

Пример 2. Куб (черт. 289, 1) повернуть так, чтобы диагональ AB располагалась перпендикулярно к плоскости V .

Решение. Вращением вокруг оси, проходящей через вершину A перпендикулярно к плоскости H , куб ставим так, чтобы диагональ AB оказалась в профильной плоскости (черт. 289, 2)¹.

Из этого положения куб выведен в новое, при котором диагональ AB оказывается перпендикулярной к плоскости V (черт. 289, 3).

Это достигнуто вращением куба в его втором положении вокруг оси, проходящей через вершину B перпендикулярно к плоскости W .

Получающаяся при этом проекция куба на плоскости V (черт. 289, 3) совпадает с изображением куба в прямоугольной изометрической проекции (см. гл. IX).

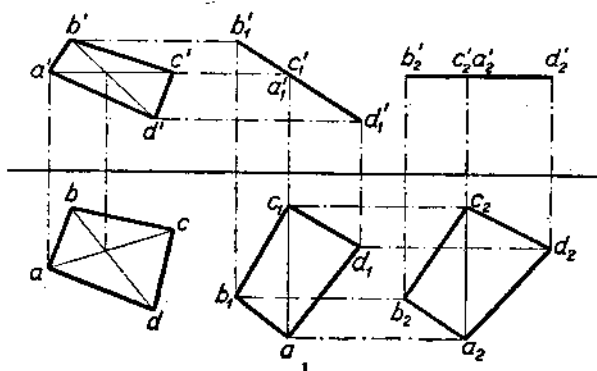
§ 27. Вращение без указания положения осей

При вращении отрезка прямой линии, плоской фигуры, тела вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, проекция на эту плоскость не изменяется ни по виду, ни по величине; вообще меняется лишь положение этой проекции относительно оси проекций (см., например, черт. 288). Что же касается

¹ На черт. 289 каждое из положений куба изображено отдельно во избежание нагромождения проекций друг на друга.

проекция на плоскость, параллельную оси вращения, то все точки¹ этой проекции перемещаются по прямым, параллельным оси проекций, и проекция вообще изменяется по виду и величине. Поэтому возможно такое выполнение вращения, при котором нет надобности задаваться изображением оси вращения, устанавливая, например, величину радиуса, при помощи которого повернут тот или иной отрезок: достаточно лишь, не изменяя вида и величины одной из проекций, переместить эту проекцию относительно оси проекций, а затем построить

другую проекцию, соблюдая вышеуказанное правило. На черт. 290 выполнено построение для определения истинной величины четырехугольника $ABCD$. Горизонтальная проекция $abcd$ перемещена в положение $a_1b_1c_1d_1$, определяемое тем, чтобы горизонталь AC оказалась направленной перпендикулярно к плоскости V^2 , в результате чего вертикальная проекция в новом положении превратится в прямую $b_1'd_1'$. Далее вертикальная проекция $b_1'd_1'$ перемещается в положение $b_2'd_2'$, определяемое тем, чтобы в пространстве четырехугольник оказался параллельным плоскости H . Новая горизонтальная проекция $a_2b_2c_2d_2$ представит четырехугольник в его истинную величину.



Черт. 290.

В основе построения, примененного на черт. 290, лежит способ вращения; но помимо вращения данная фигура еще как бы перемещается в сторону. Это удобно во многих случаях, так как позволяет избежать наложения проекций одной на другую (см. например, черт. 288, где вертикальные проекции частично наложены друг на друга).

§ 28. Способ совмещения

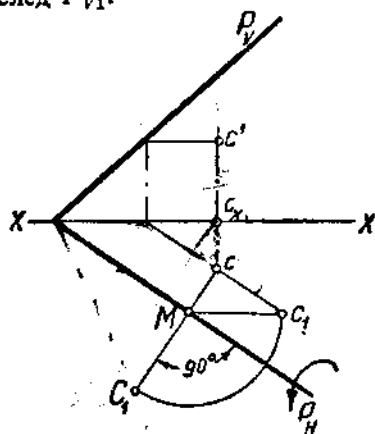
При способе совмещения заданную плоскость вращают около одного из следов до полного совмещения (совпадения) с той плоскостью проекций, в которой лежит след, служащий осью вращения. Этот способ можно считать частным случаем вращения около горизонтали или фронтالي и пользоваться им можно, когда оба следа, или по крайней мере один, лежат в пределах чертежа. Очевидно, что при совмещении заданной плоскости лежащие в ней отрезки линий и фигуры изобразятся после совмещения без искажения.

На черт. 291 произведено совмещение плоскости P с плоскостью H ; вращение произведено около оси P_H в направлении от V на зрителя.

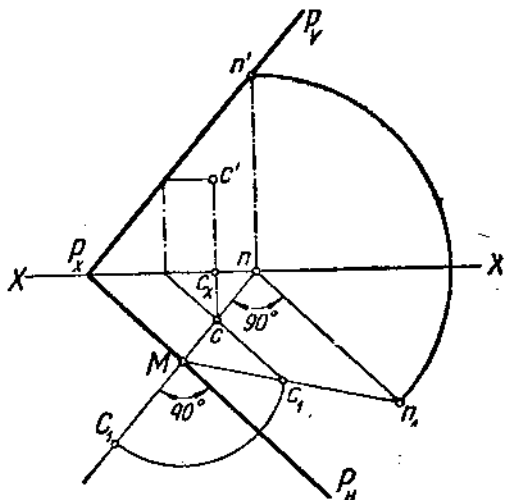
¹ За исключением точек, представляющих собой проекции точек, расположенных на оси вращения.

² На черт. 290 горизонталь AC является в то же время одной из диагоналей четырехугольника, что является частным случаем.

Действительно, выбирая на следе P_V произвольную точку n' , проводим через нее прямую $n'n$, перпендикулярную к оси XX (на черт. 291 $n'n$ лежит на Q_V); через точку n проводим прямую nM , перпендикулярную к оси вращения — следу P_H (по черт. 291 эта линия есть Q_H). На прямой nM должна лежать точка N после совмещения, на расстоянии от точки M , равном радиусу вращения точки N , или на расстоянии $P_X n'$ от точки P_X . Истинную величину радиуса вращения определяем как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами Mn и nn_1 ($nn_1 = nn'$). Делая из точки M засечку радиусом Mn_1 на продолжении прямой Mn или засечку из точки P_X радиусом $P_X n'$ на той же прямой, мы получим совмещенное положение точки N — точку N_1 . Проведя через точки P_X и N_1 прямую, получим совмещенное положение следа P_V — след P_{V1} .



Черт. 293.



Черт. 294.

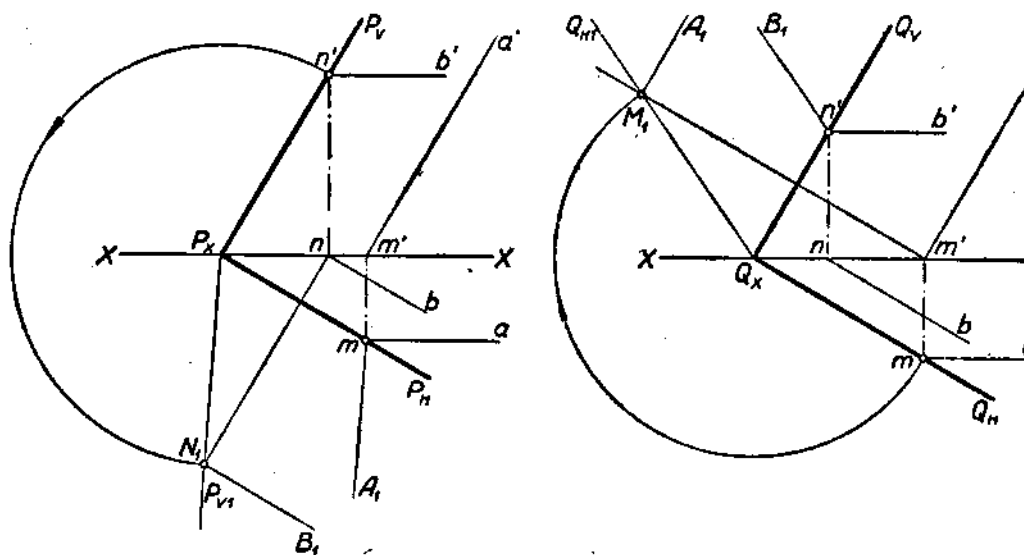
Возьмем на плоскости P (черт. 291) точку C и рассмотрим ее совмещение с плоскостью H . Проведя через точку C плоскость Q , перпендикулярно к P_H , мы отмечаем радиус вращения MC , лежащий на линии пересечения плоскостей P и Q . Сделав на Q_H засечку радиусом MC (из точки M), мы получим совмещенное положение точки C — точку C_1 .

Нахождение совмещенного положения точки C с плоскостью H на эпюре показано на черт. 293.

Через точку c проведена прямая cM , перпендикулярная к P_H . Радиус вращения Mc_1 найден как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого один катет Mc , а другой катет $cc_1 = c'c_X$ (см. также черт. 291, где проекция точки C на плоскость V не показана, а отрезок $Kn = Cc = c'c_X$ на черт. 293). Радиусом Mc_1 из точки M засекаем на продолжении прямой cM (в указанном направлении вращения) точку C_1 — совмещенное положение точки C .

Решим обратную задачу. Пусть задана точка C_1 — совмещенное с плоскостью H положение точки C ; найти проекции точки C , если она должна лежать в плоскости P , заданной следами P_H и P_V .

Очевидно, когда точку C поднимают в пространство, горизонтальная ее проекция — точка c будет перемещаться по прямой C_1n (черт. 294), перпендикулярной к P_H (по следу плоскости вращения). Проводя через точку n прямую, перпендикулярную к XX , получим вертикальный след плоскости вращения. Точка C в пространстве должна лежать на линии пересечения плоскости P и плоскости вращения (черт. 291) на расстоянии MC от точки M . Построим на горизонтальной плоскости прямоугольный треугольник Mnn_1 , у которого сторона $nn_1 = nn'$ (черт. 294).



Черт. 295.

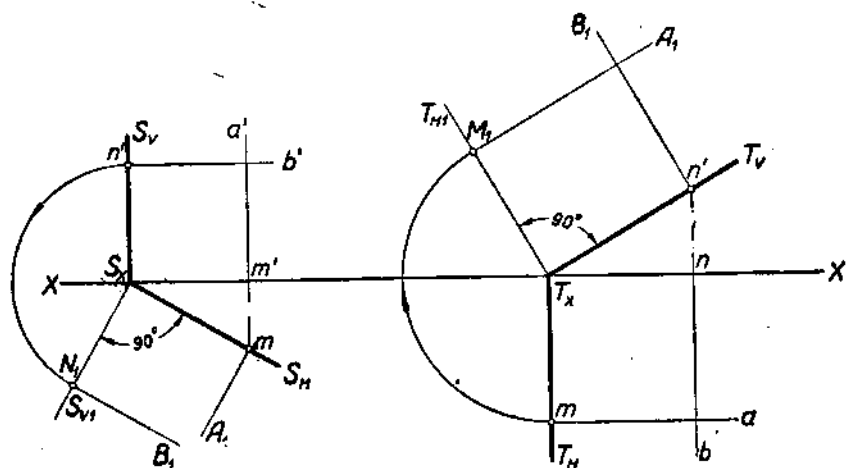
Откладывая на гипотенузе Mn_1 от точки M величину MC_1 (радиус вращения), получим точку c_1 . Проведя через точку c_1 прямую, перпендикулярную к C_1n , получаем точку c — искомое положение горизонтальной проекции точки C . Точка c' найдется на перпендикуляре, проведенном из точки c к оси XX на расстоянии $cx'c'$ от оси XX , причем $cx'c' = cc_1$.

Если бы в плоскости был взят отрезок прямой, то, найдя совмещенное положение конечных точек этого отрезка, мы бы нашли также истинную величину расстояний между этими точками, или, что то же, величину отрезка.

Напомним также, что каждая горизонталь, взятая в плоскости P , располагается параллельно P_H , а фронталь — параллельно P_V ; поэтому, если придется находить совмещенное положение горизонтали или фронтали, достаточно будет найти совмещенное положение их следа, через который и провести прямую, параллельную соответственно P_H или P_{V1} (плоскость P совмещена с плоскостью H).

Нами рассмотрено совмещение заданной плоскости с горизонтальной плоскостью проекций, причем вращение плоскости производилось около горизонтального следа. Если требуется совместить данную плоскость с вертикальной плоскостью проекций, то следует вращать плоскость около вертикального следа и повторить рассуждение, аналогичное приведенному в первом случае.

На черт. 295 изображены плоскости общего положения P и Q ; плоскость P совмещена с плоскостью H , плоскость Q совмещена с плоскостью V . Показано также положение горизонтали и фронтали в каждой из этих плоскостей после совмещения: зная положение следов плоскости после ее совмещения с одной из плоскостей проекций, легко провести горизонталь и фронталь, так как последние должны быть параллельны соответственным следам плоскости.



Черт. 296.

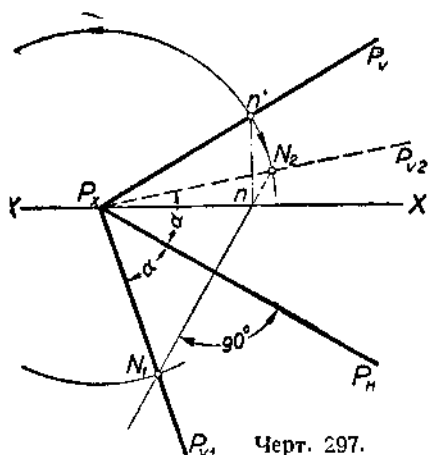
На черт. 296 показаны горизонтально-проектирующая плоскость S , совмещенная с плоскостью H , и вертикально-проектирующая плоскость T , совмещенная с плоскостью V . Показано также положение горизонтали и фронтали после совмещения плоскости.

Если горизонтально-проектирующую плоскость вращать вокруг ее вертикального следа до совмещения с плоскостью V , то горизонтальный след плоскости после совмещения расположится на оси проекций. Также, если вертикально-проектирующую плоскость довести вращением вокруг горизонтального следа до совмещения с плоскостью H , то вертикальный след плоскости после совмещения расположится на оси проекций.

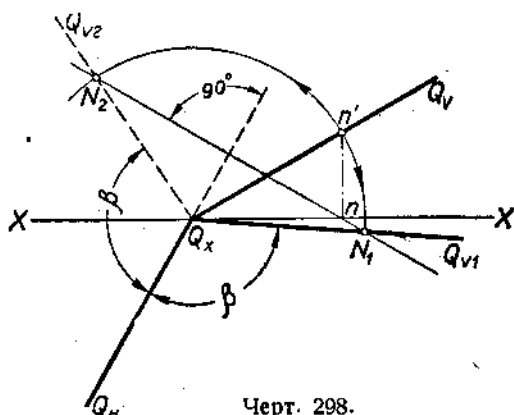
На черт. 297 след P_{V1} соответствует совмещению плоскости P с передней полкой плоскости H , а след P_{V2} — совмещению плоскости P с задней полкой плоскости H .

На черт. 298 изображена плоскость с тупым углом между следами Q_V и Q_H . След Q_{V1} соответствует совмещению плоскости Q с передней полкой плоскости H , а след Q_{V2} — совмещению плоскости Q с задней полкой плоскости H .

На черт. 299 та же плоскость Q совмещена с плоскостью V . След Q_{H1} соответствует совмещению плоскости Q с верхней полой плоскости V , а след Q_{H2} — совмещению плоскости Q с нижней полой плоскости V .



Черт. 297.



Черт. 298.

Пример 1. Дана плоскость P и треугольник ABC , лежащий в заданной плоскости; определить истинные размеры элементов треугольника, применив способ совмещения плоскости P с плоскостью V (черт. 300).

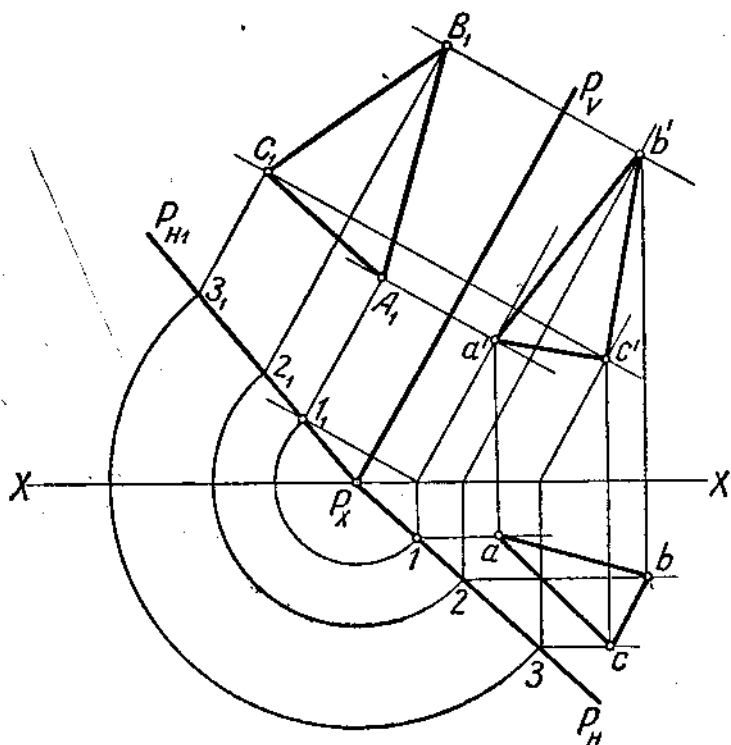
Решение. Так как точки A , B и C в совмещенном положении будут находиться на перпендикулярах к P_V , проведенных соответственно через точки a' , b' и c' , то через точки a' , b' и c' проводим прямые, перпендикулярные к P_V (это будут пути перемещений вертикальных проекций точек). Далее можно было бы найти истинные размеры радиусов вращения и указанными ранее приемами найти совмещенное положение точек. На черт. 300 показано (для упрощения решения) использование фронталей плоскости P , проведенных через вершины треугольника. Горизонтальные следы фронталей, проходящих через точки A , B и C , соответственно обозначены цифрами 1, 2 и 3. Найдя совмещенное положение горизонтального следа P_{H1} (для чего достаточно найти, например, совмещенное положение точки 1, точку 1_1), мы отметим совмещенное положение следов взятых фронталей — точки — 1_1 , 2_1 и 3_1 . Проведя через точки 1_1 , 2_1 и 3_1 прямые, параллельные P_V , мы найдем совмещенное положение взятых фронталей. Ввиду того, что в совмещенном положении точки A , B и C будут лежать на совмещенных поло-

Черт. 299.

женное положение горизонтального следа P_{H1} (для чего достаточно найти, например, совмещенное положение точки 1, точку 1_1), мы отметим совмещенное положение следов взятых фронталей — точки — 1_1 , 2_1 и 3_1 . Проведя через точки 1_1 , 2_1 и 3_1 прямые, параллельные P_V , мы найдем совмещенное положение взятых фронталей. Ввиду того, что в совмещенном положении точки A , B и C будут лежать на совмещенных поло-

жениях фронталей и на прямых, проведенных через точки a' , b' и c' перпендикулярно к P_V , то, очевидно, на пересечении этих линий с совмещенными положениями фронталей мы и найдем совмещенные положения точек A , B и C — точки A_1 , B_1 и C_1 . Размеры элементов треугольника $A_1B_1C_1$ будут являться истинными размерами соответствующих элементов треугольника ABC (abc , $a'b'c'$).

Пример 2. Дана плоскость $P(P_H, P_V)$; построить в ней квадрат со стороной, равной L (черт. 301).

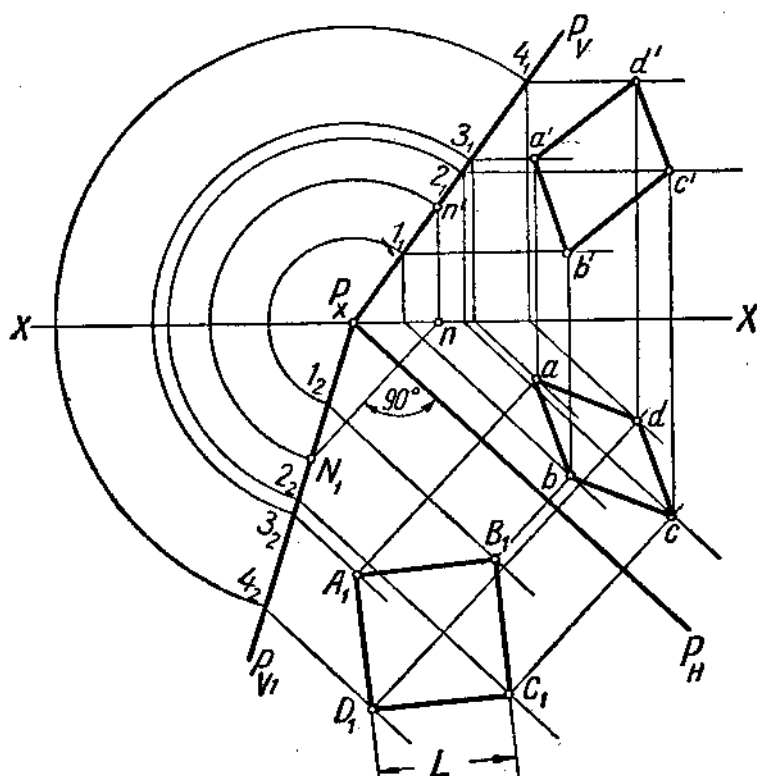


Черт. 300.

Решение. Совместив плоскость P хотя бы с плоскостью H , построим в совмещенном положении плоскости квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной L , и затем повернем плоскость в обратном направлении (поднимем ее) до заданного положения.

На черт. 301 построение произведено при помощи горизонталей плоскости P , проведенных через вершины квадрата. Вертикальные следы горизонталей в совмещенном положении обозначены цифрами 1_2 , 2_2 , 3_2 и 4_2 . При поднятии плоскости из совмещенного положения находим проекции горизонталей, на которых должны лежать соответствующие проекции точек A , B , C и D . Проведя через точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 прямые, перпендикулярные к P_H , и продолжая эти перпендикуляры до пересечения с соответствующими проекциями горизонталей, находим точки a , b , c и d .

Вертикальные проекции a' , b' , c' и d' будут находиться в пересечении вертикальных проекций горизонталей с перпендикулярами к оси XX , проведенными через соответственные горизонтальные проекции вершин квадрата.



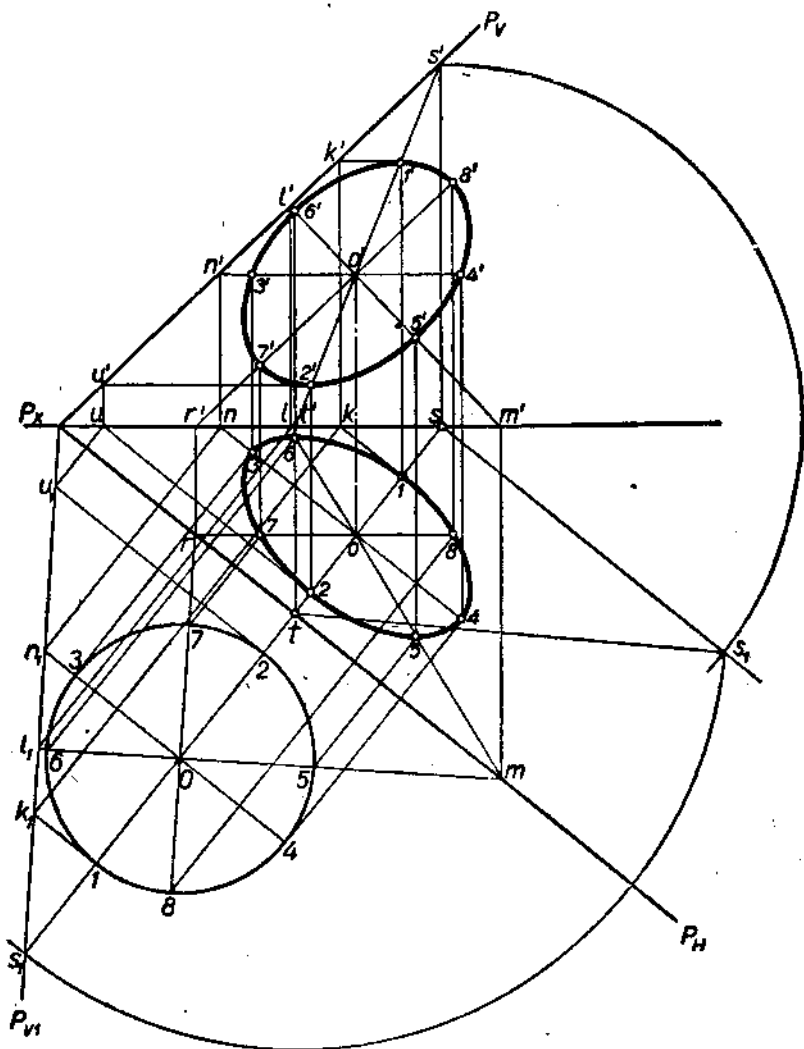
Черт. 301.

Если требуется в заданной плоскости произвести построение фигуры, ограниченной какой-либо кривой линией, то весь ход построения остается аналогичным разобранному, но приходится брать достаточно большое число точек на данной кривой в ее совмещенном положении и соответственное количество горизонталей или фронталей для построения проекций.

На черт. 302 указано построение проекций круга, расположенного в плоскости P и заданного в совмещенном с плоскостью H положении.

Искомые проекции круга — эллипсы; построить их можно по большой и малой осям. Для горизонтальной проекции эти оси получены при помощи диаметра 3—4, параллельного следу P_H , и диаметра 1—2, перпендикулярного к тому же следу. Для вертикальной проекции большая ось 7'—8' получена при помощи диаметра 7—8, параллельного совмещенному следу P_{V1} , а малая ось 5'—6' — при помощи диаметра 5—6, перпендикулярного к следу P_{V1} .

Проекции $1'-2'$ и $3'-4'$ представляют собою пару сопряженных диаметров для эллипса — вертикальной проекции круга; также и проекции $5-6$ и $7-8$ являются сопряженными диаметрами в эллипсе — горизонтальной проекции круга.

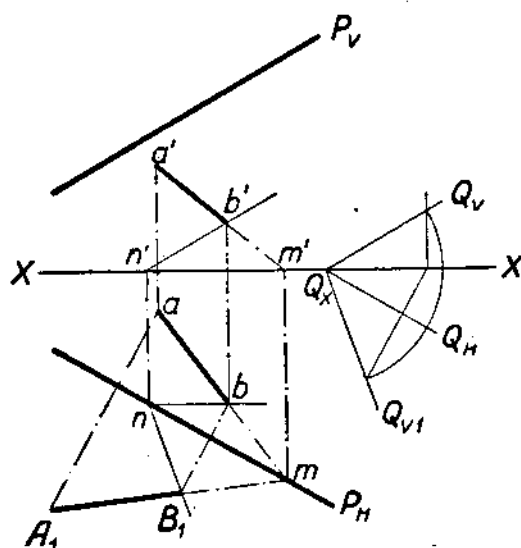


Черт. 302.

Пример 3. Прямая AB , расположенная в данной плоскости P , дана в положении совмещения с плоскостью H (вращение вокруг следа P_H). Построить проекции этой прямой. Точка схода следов P_H и P_V недоступна.

Решение (черт. 303). Построив некоторую вспомогательную плоскость Q , параллельную данной плоскости P , найдем положение верти-

кального следа после совмещения плоскости Q с плоскостью H . Прямая $Q_X Q_{V_1}$ даст нам направление фронталей как плоскости Q , так и плоскости P в совмещенном с плоскостью H положении. Следовательно, проводя через точку B_1 прямую $B_1 m$ параллельно следу Q_{V_1} , мы намечаем ту фронталь плоскости P , на которой расположена в пространстве точка B . Построив проекцию этой фронтали, найдем положение проекций точки B .



Черт. 303.

Для построения проекций отрезка AB мы воспользуемся тем, что в данном случае в пределах чертежа легко определить положение точки m — горизонтального следа прямой, частью которой является отрезок AB .

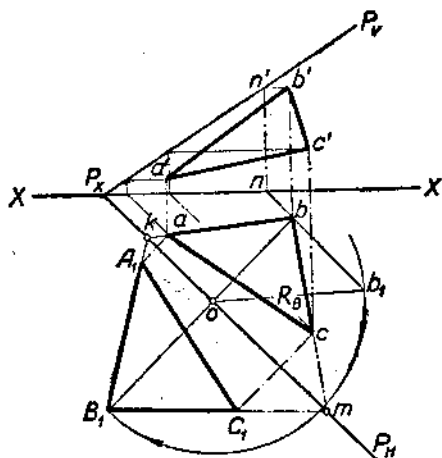
Проводя прямую через точки m и b , находим на ней горизонтальную проекцию точки A , а затем, проводя прямую через точки m' и b' , отмечаем проекцию a' .
Отрезки ab и $a'b'$ будут искомыми проекциями отрезка AB .

Пример 4. Не совмещающаяся с плоскостью H следа P_V данной плоскости P (черт. 304), совместить с плоскостью H треугольник ABC , расположенный в плоскости P .

Решение. Точка B_1 — вершина B в совмещении с плоскостью H , найдена вращением вокруг следа P_H .

Через точку b проведена прямая bo , перпендикулярная к P_H . Радиус вращения (R_B) найден как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого одним катетом служит отрезок bo , а другим катетом — отрезок bb_1 , равный расстоянию от точки b' до оси проекций. Радиусом R_B из точки o засекаем на продолжении прямой bo точку B_1 — совмещенное положение вершины B .

Далее находим точки k и m — горизонтальные следы прямых — сторон угла kbm . Теперь остается соединить точки k и m с точкой B_1 и на прямых kB_1 и mB_1 отметить точки A_1 и C_1 , в которых перпендикуляры, проведенные из точек a и c , пересекают прямые kB_1 и mB_1 .



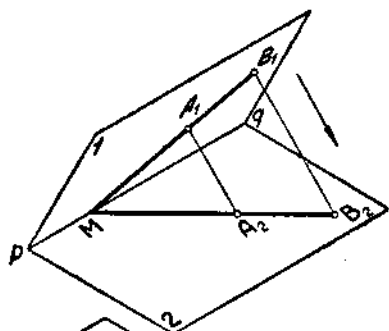
Черт. 304.

§ 29. Родственное соответствие и его применение к решению некоторых задач

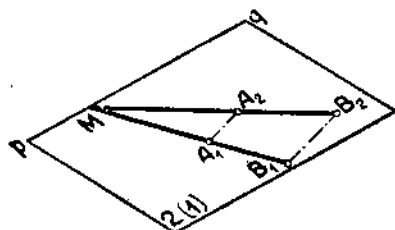
Прием, примененный на черт. 303 для нахождения точки a и на черт. 304 для нахождения точек A_1 и C_1 , основан на некоторых свойствах фигур, расположенных в двух пересекающихся плоскостях или в одной плоскости, в системе параллельного проектирования.

На черт. 305 точки A_1 и B_1 плоскости 1 спроектированы, согласно заданному направлению проектирования, на плоскость 2. Проектирующие прямые A_1A_2 и B_1B_2 определяют проектирующую плоскость, которая пересекает плоскости 1 и 2 по прямым MB_1 и MB_2 , сходящимся на прямой pq в точке M .

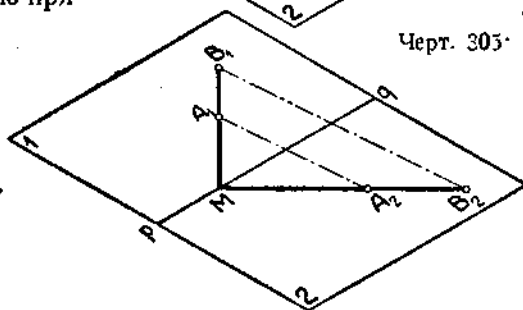
Если рассматривать в плоскости 1 некоторую прямую A_1B_1 , то проекция этой прямой на плоскости 2 при своем продолжении встретит на линии пересечения плоскостей 1 и 2 самую прямую A_1B_1 .



Черт. 305.



Черт. 306.



Черт. 307.

Параллельное проектирование точек плоскости 1 на плоскость 2 устанавливает между ними некоторое соответствие, выражающееся в следующих основных свойствах:

1) точка одной плоскости соответствует единственной точке другой плоскости;

2) если на прямой, расположенной в одной плоскости, установлено наличие двух точек, соответствующих точкам прямой другой плоскости, то эти прямые соответствуют одна другой, причем каждой точке одной из этих прямых соответствует определенная точка другой прямой;

3) прямая одной плоскости пересекается в соответствующей ей прямой другой плоскости в точке, лежащей на линии пересечения плоскостей¹;

4) прямая, по которой пересекаются плоскости, сама себе соответствует;

5) если прямые одной плоскости параллельны между собой, то и соответствующие им прямые другой плоскости параллельны между собой;

¹ Если эти прямые параллельны линии пересечения плоскостей, то точка пересечения прямых удаляется в бесконечность.

6) отношение отрезков прямой одной плоскости равно отношению отрезков соответствующей прямой другой плоскости, если конечные точки отрезков обеих прямых соответствуют друг другу.

При наличии указанных свойств между плоскостями имеет место соответствие, называемое аффинным¹ или родственным.

В дальнейшем изложении применено второе название.

На черт. 305 точки A_2 и B_2 родственны точкам A_1 и B_1 ; прямая A_2B_2 родственна прямой A_1B_1 .

Если в плоскости 1 взять фигуру, все точки которой будут иметь родственные точки на плоскости 2, то совокупность последних дает на плоскости 2 фигуру, родственную фигуре, взятой на плоскости 1.

Прямая pq , по которой пересекаются между собой плоскости 1 и 2, называется осью родства.

На черт. 306 те же плоскости 1 и 2 даны в совмещенном положении: плоскость 1 вращением вокруг прямой pq совмещена с плоскостью 2.

Если взять иное направление вращения, то получим расположение, показанное на черт. 307.

Если между плоскостями 1 и 2 в пространстве имело место определенное родство, то и после совмещения этих плоскостей между их точками, прямыми и фигурами будет также иметь место некоторое родство, по своим свойствам совпадающее со свойствами родства, установленного при параллельном проектировании. Действительно, в обоих случаях прямой линии соответствует прямая, точке на одной из прямых соответствует определенная точка на другой, отношение $\frac{MA_1}{A_1B_1}$

остается равным отношению $\frac{MA_2}{A_2B_2}$, параллельность проектирующих прямых A_1A_2 и B_1B_2 (черт. 305) переходит в параллельность прямых A_1A_2 и B_1B_2 на черт. 306 и 307 при совмещении плоскостей.

Итак, вне зависимости от того, рассматриваем ли мы родственные прямые в пространстве (черт. 305) или при совмещении плоскостей (черт. 306 и 307), родственные прямые пересекаются на оси родства и их точки, соответствующие друг другу, лежат на прямых, параллельных между собой.

Направление A_1A_2 теперь уже не является направлением проектирования (как на черт. 305); будем называть это направление **направлением родства**.

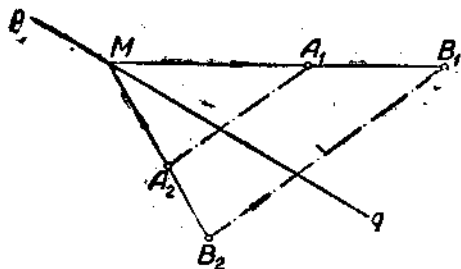
Если даны ось родства и две родственные точки, то для каждой точки в данном родстве может быть найдена родственная точка. Положим (черт. 308), что прямая pq есть ось родства, точки A_1 и A_2 родственные точки и, следовательно, A_1A_2 есть направление родства. Требуется для точки B_2 найти родственную точку. Проводим прямую B_2A_2 до пересечения с pq в точке M ; через точки M и A_1 проводим прямую, на которой и находим точку B_1 , родственную точке B_2 , проводя прямую B_2B_1 параллельно A_2A_1 .

Если мы возьмем некоторую плоскость общего положения P (черт. 309) в системе плоскостей H , V и W , то между плоскостью P и каждой из плоскостей проекций имеет место упомянутое выше род-

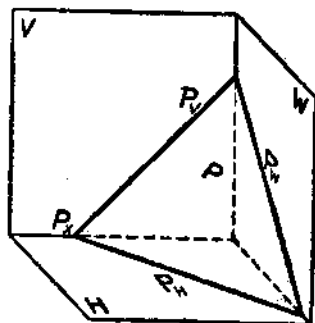
¹ Affinias (лат.) — родство.

ственное соответствие¹. Следы плоскости P будут осями родства: след P_H для пары P и H , след P_V для пары P и V , след P_W для пары P и W . Прямая, расположенная в плоскости P , и каждая из ее проекций пересекаются на соответствующих следах плоскости, т. е. соответствующих осях родства.

Обращаясь к черт. 303 и 304, замечаем, что след P_H в обоих случаях являлся осью родства: на черт. 303 между отрезком прямой A_1B_1 и горизонтальной проекцией этого отрезка ab , а на черт. 304 между треугольником $A_1B_1C_1$ и его проекцией abc . Зная направление родства (это направление перпендикулярно к следу P_H) и построив точку B_1 на черт. 304, мы могли остальные точки A_1 и C_1 построить как родственные точкам a и c по схеме, указанной на черт. 308.



Черт. 308.



Черт. 309.

Также и на черт. 303, определив положение точки b , родственной данной точке B_1 , мы могли найти точку a как родственную точке A_1 в том же родстве.

На черт. 310 выполнено построение четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ как фигуры родственной проекции $abcd$. След P_H вертикально-проектирующей плоскости, в которой находится данный четырехугольник, служит осью родства; направление родства перпендикулярно к P_H .

Находим обычным путем (совмещение) точку C_1 , родственную точке c , а затем строим точки A_1 , B_1 и D_1 по схеме, показанной на черт. 308.

Черт. 311 показывает, что между горизонтальной и вертикальной проекциями плоской фигуры (в данном случае треугольника) существует родственное соответствие.

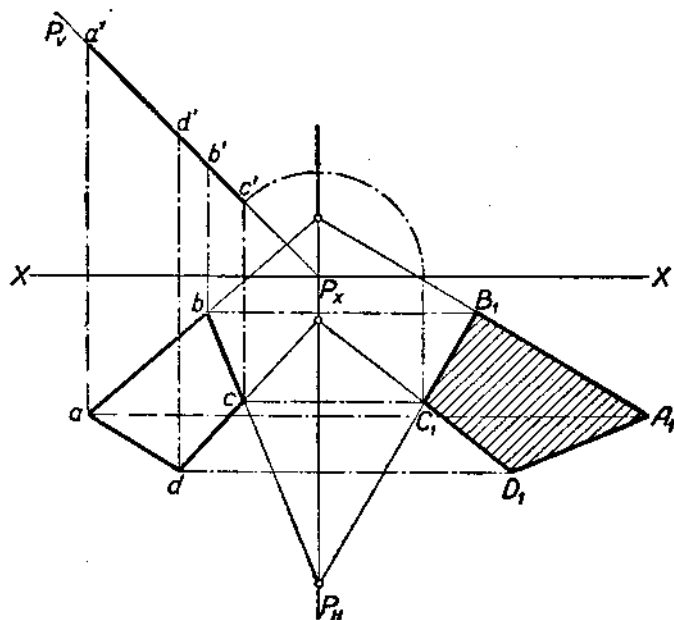
Прежде всего отмечаем, что прямые, соединяющие точки a и a' , b и b' , c и c' , параллельны между собой. Далее следует установить, что любые две прямые, соответствующие одна другой, пересекаются на одной и той же прямой.

Продолжим до пересечения прямые ab и $a'b'$. Точка m_2 представляет собой одновременно горизонтальную и вертикальную проекции точки, принадлежащей прямой AB в пространстве. Совпадение проекций пока-

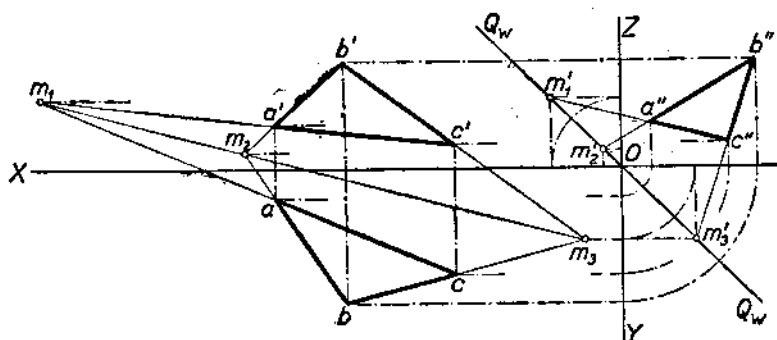
¹ Мы перешли к рассмотрению примеров родства при прямоугольном проектировании, т. е. при одном из случаев параллельного проектирования.

зывает, что эта точка находится на равных расстояниях от плоскостей H и V .

То же можно отметить и относительно точек m_1 и m_3 . Равноудаленность точек от плоскостей H и V позволяет заключить, что точки эти,



Черт. 310.



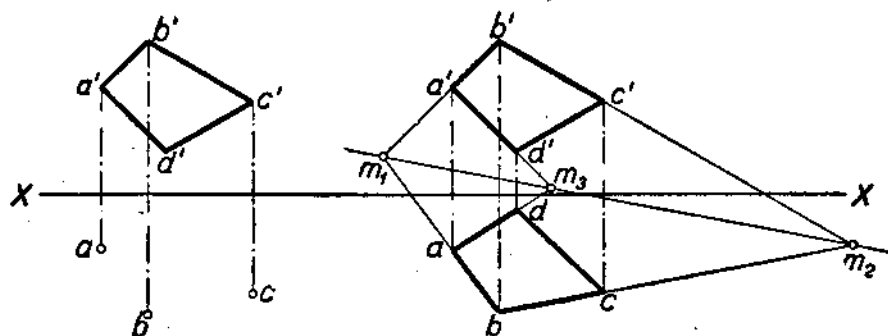
Черт. 311.

принадлежа плоскости треугольника ABC , находятся в то же время в плоскости, делящей второй и четвертый углы (четверти) пространства пополам.

На черт. 311 эта плоскость выражена следом Q_w . Так как рассматриваемые точки одновременно должны принадлежать двум плоскостям—плоскости Q и плоскости треугольника ABC , то очевидно, они (точки) должны лежать на линии пересечения плоскости треугольника ABC

и плоскости Q . Прямая, эта, находясь в плоскости, делящей второй и четвертый углы (четверти) пространства пополам, изобразится на плоскостях H и V одной и той же прямой (горизонтальная и вертикальная проекции совпадают), а следовательно точки m_1 , m_2 и m_3 расположены на одной прямой, которая и будет осью родства. Проекция любой прямой, лежащей в плоскости треугольника ABC , будут пересекаться на найденной оси родства¹.

Итак, проекции abc и $a'b'c'$ родственны; направление родства перпендикулярно к оси XO , ось родства располагается вообще под некоторым углом к оси XO . В случае, если плоскость данной фигуры проходит через ось XO , то ось родства горизонтальной и вертикальной проекций совпадет с осью XO .



Черт. 312.

Легко заметить, что для горизонтальных и вертикальных проекций всех фигур, расположенных в одной и той же плоскости, получается общая ось родства; действительно, эта ось представляет собой совпадавшие горизонтальную и вертикальную проекции линии пересечения некоторой плоскости с постоянной плоскостью Q (черт. 311) и, если положение плоскости, в которой расположены различные фигуры, остается неизменным, то для проекций всех этих фигур получается общая ось родства.

На черт. 312 ось родства применена для построения горизонтальной проекции некоторого четырехугольника, если известна его вертикальная проекция $a'b'c'd'$ и горизонтальные проекции трех вершин (точки a , b , c).

Прежде всего найдены точки m_1 и m_2 и тем самым определена ось родства. Затем прямая $a'd'$ продолжена до пересечения с осью родства и полученная точка m_3 соединена с точкой a .

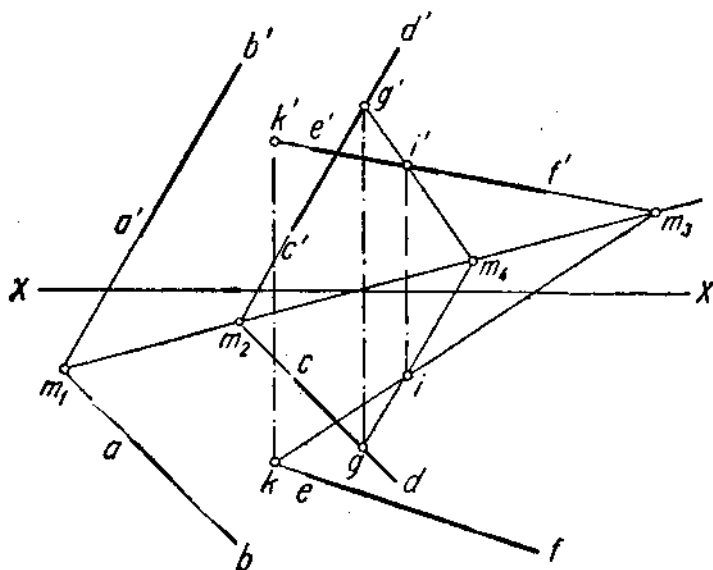
Искомая точка d получится в пересечении прямых am_3 и $d'd$. Остается соединить между собой точки a и d и точки c и d .

На черт. 313 родственное соответствие применено для отыскания проекции точки пересечения прямой EF с плоскостью, заданной двумя параллельными прямыми AB и CD .

¹ Прямая, расположенная в плоскости треугольника ABC и параллельная оси родства, пересекается с осью родства в бесконечности.

Задача сводится к отысканию на прямых ef и $e'f'$ точек представляющих собой пару родственных точек в данном родственном соответствии. Это соответствие определяется любыми двумя родственными точками (на черт. 313 взяты точки g и g') и осью родства, проведенной через точки m_1 и m_2 , которые найдены в пересечении прямых ab и $a'b'$, cd и $c'd'$.

Если далее построить прямую, родственную прямой $e'f'$, то мы тем самым в плоскости, заданной прямыми AB и CD , проведем некоторую новую прямую, находящуюся в то же время в одной плоскости с данной прямой EF (общая вертикальная проекция $e'f'$).



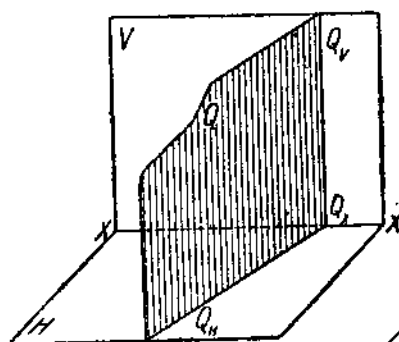
Черт. 313.

На черт. 313 построение прямой, родственной прямой $e'f'$, выполнено следующим образом: пользуясь родственными точками g и g' и произвольно выбранной точкой i' на прямой $e'f'$, строим точку i , родственную точке i' ; если далее найти точку m_3 и провести через нее и через точку i прямую, то определится прямая, родственная прямой $e'f'$. Теперь остается отметить точку k , в которой прямые im_3 и ef пересекают друг друга. Эта точка k будет горизонтальной проекцией искомой точки пересечения прямой EF с плоскостью, определяемой прямыми AB и CD . Вертикальная проекция k' будет получена на прямой $e'f'$.

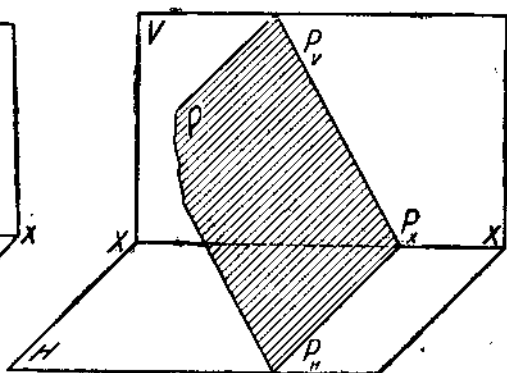
Действительно, точки k и k' родственны между собой в данном родственном соответствии, так как лежат на родственных прямых im_3 и $e'f'$ и на общем перпендикуляре к оси XX' ; следовательно, точки k и k' проекции точки K , принадлежащей данной плоскости. С другой стороны точки k и k' расположены на проекциях ef и $e'f'$, т. е. та же точка K принадлежит и прямой EF .

§ 30. Способ перемены плоскостей проекций

Сущность метода перемены плоскостей проекций заключается в том, что положение предмета (системы точек) в пространстве остается неизменным, а система, плоскостей, в которой предмет задан проекциями — старая система, заменяется новой системой двух взаимно перпендикулярных плоскостей.



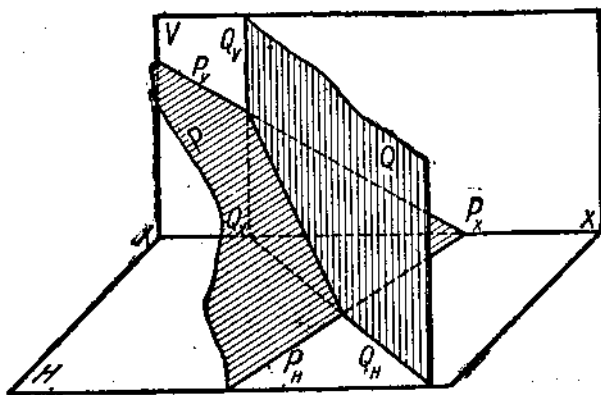
Черт. 314.



Черт. 315.

Новая система плоскостей проекций располагается относительно рассматриваемого предмета таким образом, чтобы хотя одна из плоскостей новой системы имела положение, удовлетворяющее требованиям решения той или иной задачи. В ряде случаев для получения новой системы плоскостей, разрешающей задачу, бывает достаточно переменить только одну из старых плоскостей, например V на $Q \perp H$ (черт. 314) или H на $P \perp V$ (черт. 315).

Если перемена одной плоскости V или H не разрешает задачи, прибегают к замене обеих плоскостей проекций старой системы новыми, причем замену производят последовательно: — заменяют, например, плоскость V (черт. 316) плоскостью $Q \perp H$ — получают первую новую систему — плоскости Q и H , а затем от этой системы переходят ко второй новой системе, меняя H на новую плоскость $P \perp Q$, т. е. проводится последовательный переход от системы плоскостей V и H к системе Q и P через промежуточную систему Q и H .



Черт. 316.

Если плоскости Q и P все же не разрешают задачи полностью, можно перейти к третьей новой системе, меняя, например, Q на новую плоскость, перпендикулярную к P .

На черт. 317 показана схема перемены двух плоскостей, когда сначала заменена плоскость H плоскостью R , перпендикулярной к V , а затем V заменена плоскостью S , перпендикулярной к R .

В случае замены плоскости V плоскостью Q (черт. 314) последнюю называют новой вертикальной, а проекции точек на ней новыми вертикальными, обозначая их буквами a_1' , b_1' и т. д. Если же заменена плоскость H плоскостью P , перпендикулярной к V , то P называют новой горизонтальной плоскостью, и проекции точек на ней отмечают

буквами a_1 , b_1 , c_1 и т. д. В случае замены двух старых плоскостей будем иметь новую горизонтальную и новую вертикальную (черт. 316 и 317).

Плоскости новая вертикальная и новая горизонтальная могут занимать в пространстве положение, и не соответствующее точному смыслу слов «вертикальная» и «горизонтальная».

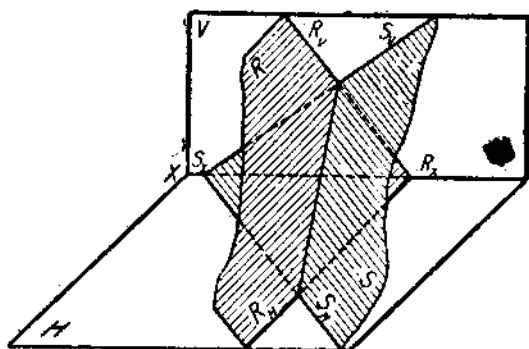
За первую четверть новой системы плоскостей проекций принимаем ту, в которой расположена система точек, и за новую ось проекций — линию пересечения плоскостей новой системы.

При построении нового эюра мы принимаем те же условия относительно положения зрителя, которые были установлены для системы плоскостей V и H (см. § 5).

Новую ось проекций при перемене одной плоскости H или V условимся обозначать X_1X_1 и при перемене обеих плоскостей X_2X_2 и т. д., причем эти буквы будем располагать, исходя из условия, что зритель смотрит на вертикальную плоскость новой системы. Дополнительно на новых осях будем отмечать систему плоскостей дробью, числитель которой указывает верхнюю полу вертикальной плоскости, а знаменатель — переднюю полу горизонтальной. Так, старую систему плоскостей V и H будем обозначать $\frac{V}{H}$, одну новую систему (черт. 314) — $\frac{Q}{H}$, дру-

гую новую систему (черт. 316) — $\frac{Q}{P}$ и т. д.

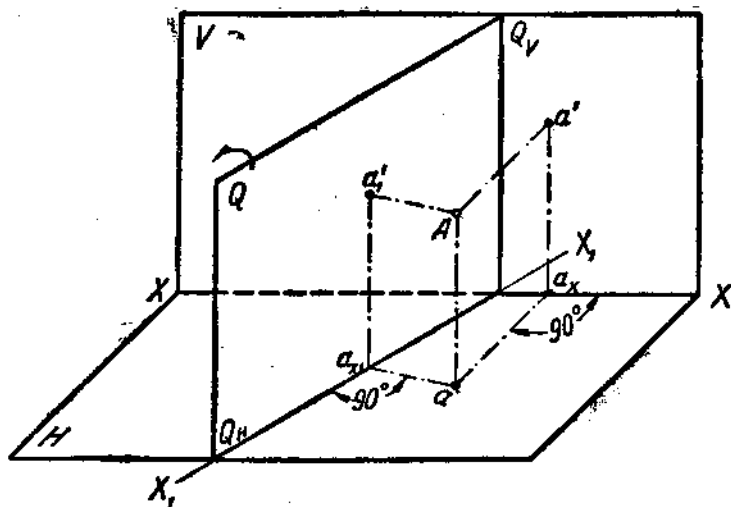
Рассмотрим свойства новых проекций и способ их построения на эюре при перемене одной плоскости и затем перейдем к случаю перемены двух плоскостей системы $\frac{V}{H}$. За плоскость чертежа принимаем плоскости H и V в их совмещенном состоянии.



Черт. 317.

§ 31. Перемена одной плоскости

Пусть задана точка A проекциями a, a' в системе $\frac{V}{H}$ (черт. 318) и необходимо построить проекции этой точки в системе плоскостей $\frac{Q}{H}$, т. е. при перемене одной плоскости V на новую вертикальную Q , перпендикулярную к H . Пусть плоскость Q расположится, как это указано на черт. 318, левее точки A ; проводя через точку A перпендикуляр к плос-



Черт. 318.

кости Q , находим новую вертикальную проекцию a_1' и отмечаем, что расстояние $a_1'a_{X_1} = Aa = a'a_X$. Принимая за новую ось проекций след Q_H , совмещаем плоскость Q с плоскостью H таким образом, чтобы верхняя половина новой вертикальной плоскости расположилась выше новой оси проекций. Направление вращения указано стрелками.

На эюре (черт. 319) новая ось обозначена X_1X_1 ; дробь $\frac{Q}{H}$ указывает расположение совмещенных плоскостей. Для построения новой вертикальной проекции (точка a_1') достаточно через точку a провести перпендикуляр к X_1X_1 и от точки a_{X_1} на перпендикуляре отложить $a_{X_1}a_1' = a_Xa'$.

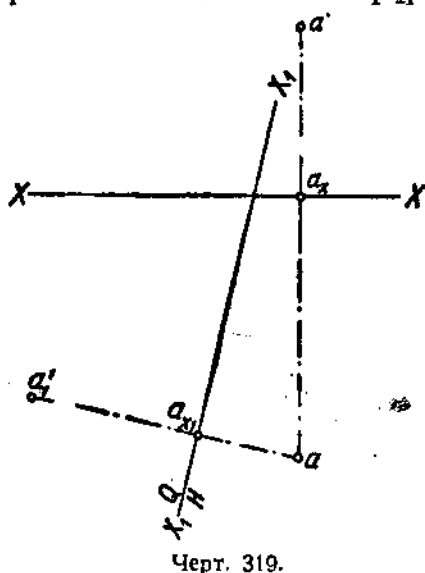
Если новая вертикальная плоскость Q выбрана правее точки A (черт. 320), то обозначения новой оси наносятся так, как показано на черт. 321. Порядок нахождения a_1' остается такой же, как и в первом случае.

Когда плоскость Q проходит через точку A , совмещение плоскости Q с H может быть проведено в ту или иную сторону, в зависимости от удобства расположения новой проекции на чертеже.

В случае замены одной плоскости H новой плоскостью $P \perp V$, система $\frac{V}{P}$ (черт. 322), за ось проекций принимается след P_V , обозна-

чаемый на эпюре X_1X_1 ; новая плоскость P совмещается с плоскостью V (плоскость чертежа).

На черт. 322 новая горизонтальная проекция обозначена через a_1 , причем ее расстояние от новой оси a_1a_{x1} равно расстоянию a от оси XX : $a_1a_{x1} = Aa' = aa_x$.



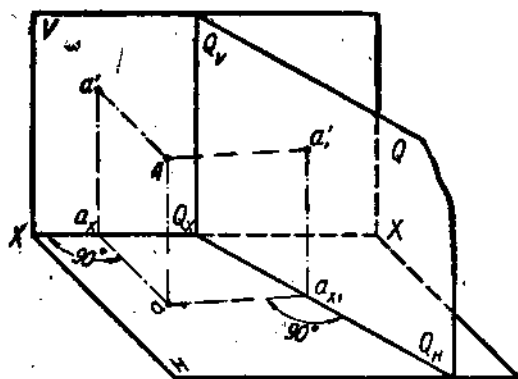
Черт. 319.

На эпюре (черт. 323) показан переход от системы $\frac{V}{H}$ к системе $\frac{V}{P}$; из точки a' (не изменяющей своего положения) проведен перпендикуляр к X_1X_1 и от точки a_{x1} на перпендикуляре отложено расстояние $a_{x1}a_1 = a_{xa}$.

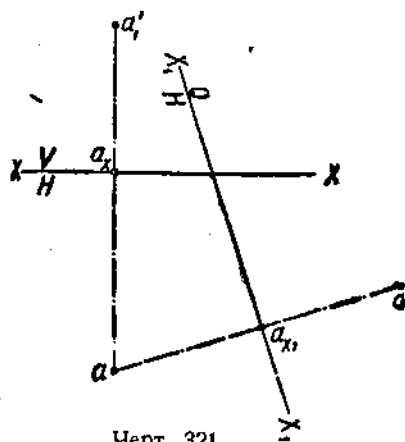
Имея возможность находить новые проекции одной точки, мы, очевидно, не встретим затруднений в нахождении новых проекций ряда точек при переходе от системы $\frac{V}{H}$ к $\frac{Q}{H}$ или $\frac{V}{P}$, т. е. при перемене одной плоскости V или H .

Пример 1. Определить истинную величину отрезка AB , заданного проекциями $(ab, a'b')$, пользуясь способом перемены плоскостей (черт. 324).

Решение. Выбираем новую систему плоскостей, заменяя V плоскостью $Q \perp H$, причем Q расположена параллельно отрезку AB . В этом случае новая ось X_1X_1 (след Q_H) расположится параллельно ab . Расстояние

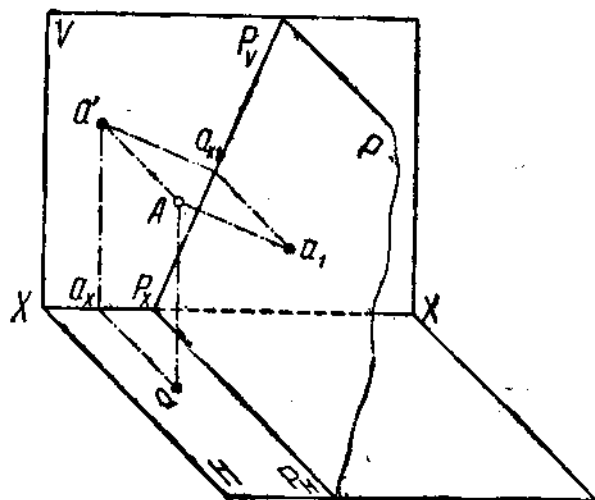


Черт. 320.

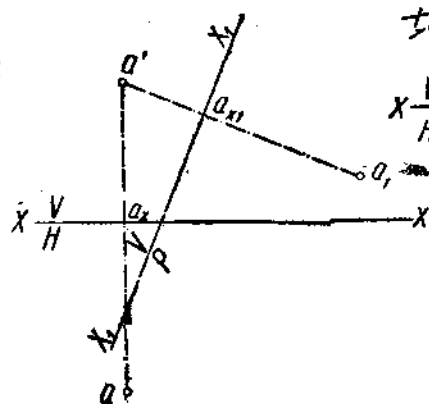


Черт. 321.

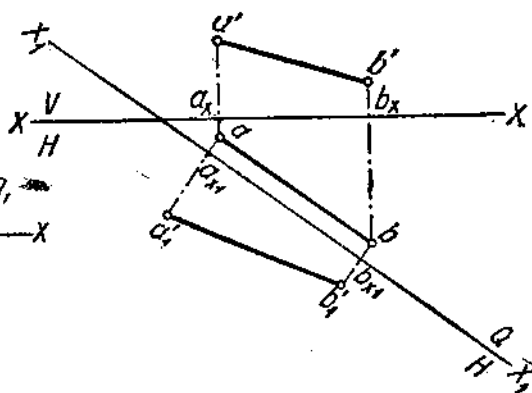
оси X_1X_1 от ab выбираем произвольно. Проводя из точек a и b перпендикуляры к оси X_1X_1 , откладываем $a_{x1}a'_1 = a_{xa'}$ и $b_{x1}b'_1 = b_{xb'}$; соединяя a'_1 и b'_1 , получим отрезок $a'_1b'_1$, который и будет действительной величиной отрезка AB .



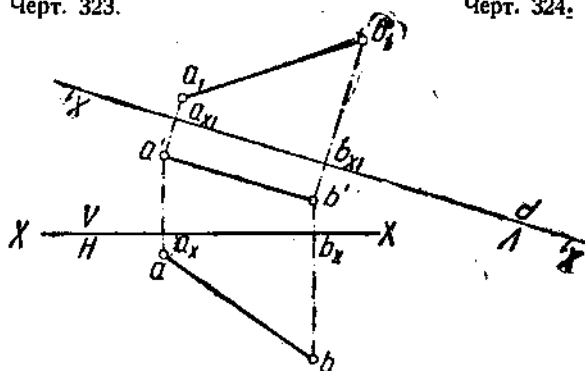
Черт. 322.



Черт. 323.



Черт. 324.



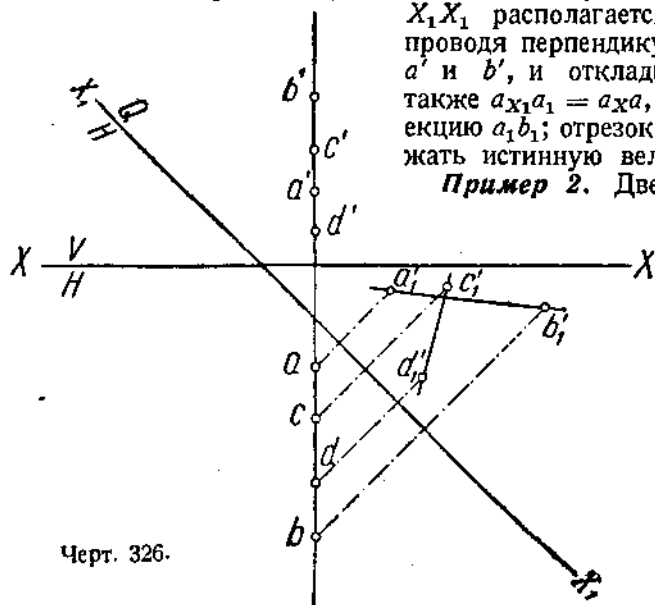
Черт. 325.

Ось X_1X_1 может быть проведена и через данную проекцию ab ; в этом случае новая плоскость Q проходит через отрезок AB .

Эту задачу можно решить также, меняя плоскость H на новую плоскость $P \perp V$, параллельную AB ; в этом случае (черт. 325) новая ось X_1X_1 располагается параллельно $a'b'$; проводя перпендикуляры к X_1X_1 через a' и b' , и откладывая $b_{X_1}b_1 = b_X b$, а также $a_{X_1}a_1 = a_X a$, находим новую проекцию a_1b_1 ; отрезок a_1b_1 и будет выражать истинную величину отрезка AB .

Пример 2. Две прямые, заданные проекциями ab , $a'b'$ и cd , $c'd'$, лежат в профильной плоскости: требуется определить их относительное положение (черт. 326).

Решение. Заменим плоскость V новой вертикальной плоскостью Q , перпендикулярной к H — система



Черт. 326.

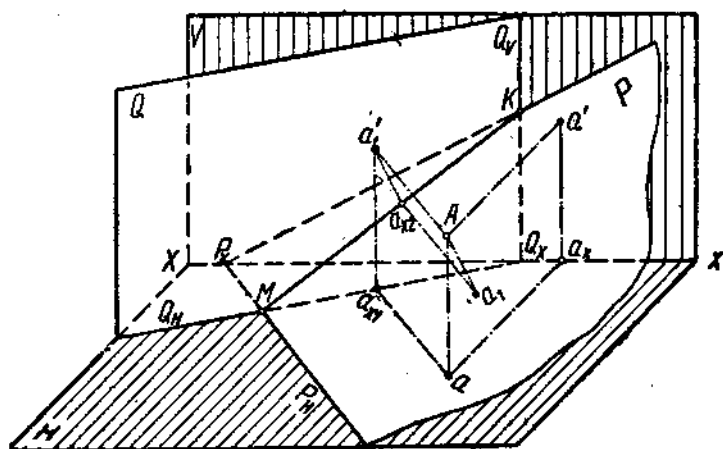
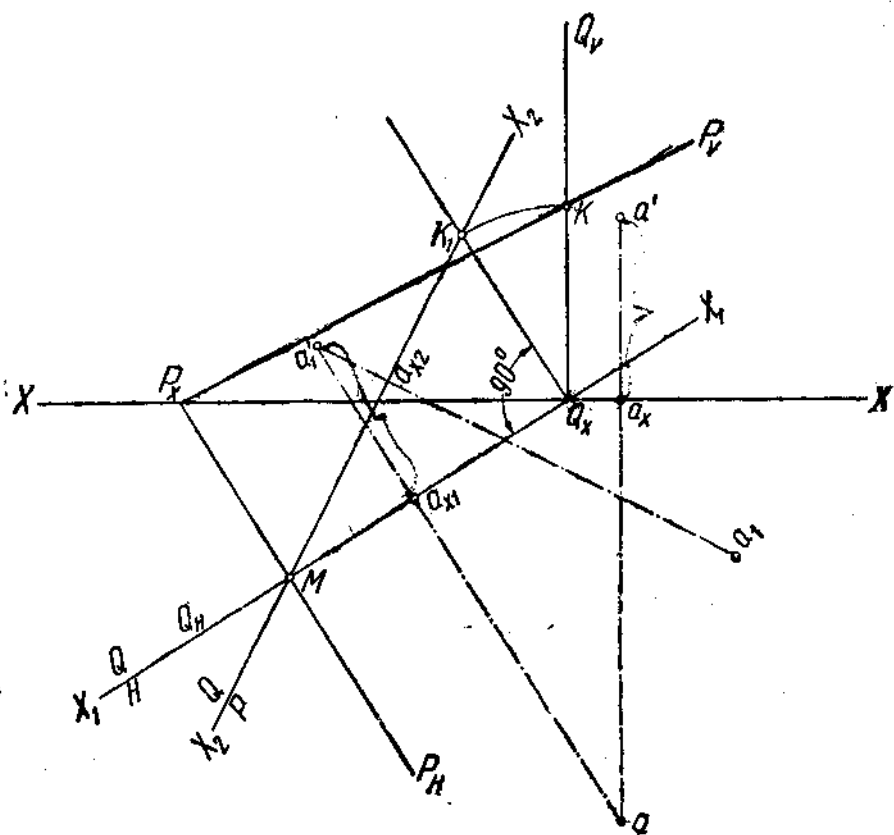
$\frac{Q}{H}$; проводим новую ось X_1X_1 (след Q_H) и находим новые вертикальные проекции точек, A , B , C и D — a_1' , b_1' , c_1' и d_1' .

Относительное положение новых проекций $a_1'b_1'$ и $c_1'd_1'$ определяет относительное положение заданных прямых AB и CD .

§ 32. Перемена двух плоскостей

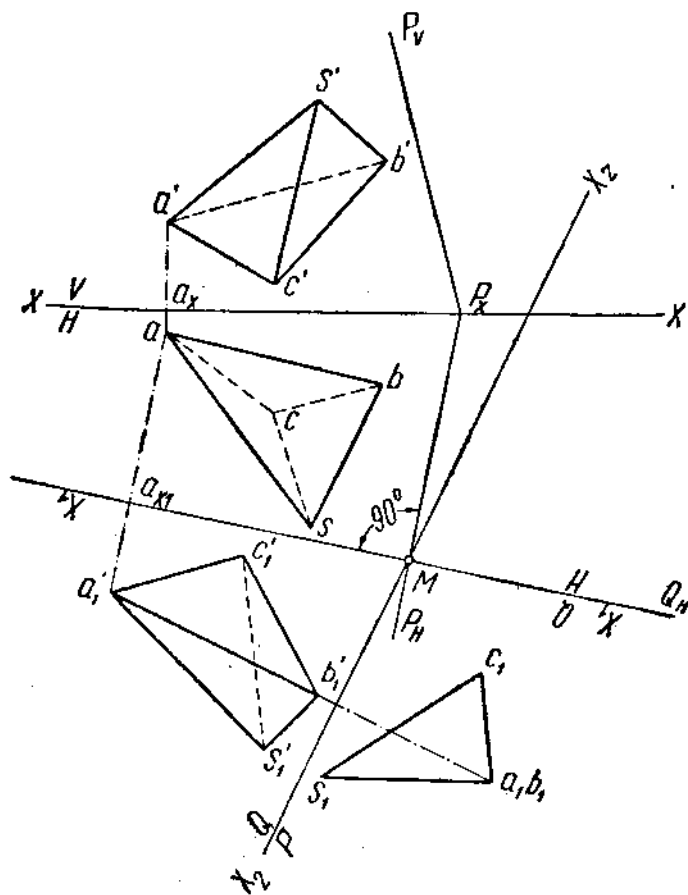
Проследим расположение и построение новой проекции точки A при последовательной перемене обеих плоскостей V и H , если точка задана в системе $\frac{V}{H}$ проекциями a , a' (черт. 327). Выбираем новую вертикальную плоскость $Q \perp H$, проходящую, например, левее точки A (черт. 328); новая ось системы плоскостей $\frac{Q}{H}$ — след Q_H обозначена на эюре (черт. 327) X_1X_1 . Согласно принятым условиям плоскость Q вращают до совмещения с плоскостью H .

Проведя через a (черт. 327) перпендикуляр к X_1X_1 и откладывая $a_{X_1}a_1' = a_X a'$, находим a_1' . После нахождения a_1' в системе $\frac{Q}{H}$ производим замену плоскости H плоскостью P и рассматриваем систему $\frac{Q}{P}$, принимая плоскость P за новую горизонтальную ($P_H \perp Q_H$); осью проекций новой системы будет линия пересечения плоскостей Q и P — прямая KM



(черт. 328), обозначенная на эюре X_2X_2 (черт. 327). Положение X_2X_2 находим, совмещая точку K с плоскостью H ; совмещенное положение точки K на эюре обозначено через K_1 . Проводя прямую через точки K_1 и M , получим положение второй новой оси X_2X_2 .

Из рассмотрения черт. 328 можно заключить, что $a_1a_{X_2} = Aa_1'$ ($P \perp Q$) и для нахождения на эюре положения a_1 в системе $\frac{Q}{P}$ при совмещении плоскости P с Q достаточно через точки a_1' и a_{X_2} провести перпендикуляр к оси X_2X_2 и от точки a_{X_2} отложить $a_{X_2}a_1 = a_{X_1}a$.



Черт. 329.

Проследив способ нахождения новых проекций точки при перемене двух плоскостей H и V , рассмотрим применение этого способа на следующем примере.

Пример. Пирамида $SABC$ задана ее проекциями в системе плоскостей $\frac{V}{H}$ (черт. 329); требуется определить величину двугранного угла при ребре AB .

Зная, что мерою двугранного угла является линейный угол, составленный линиями пересечения граней двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной к ребру, можем для решения задачи выбрать плоскость, перпендикулярную к заданному ребру AB , и, спроектировав на эту плоскость пирамиду, можем найти искомый угол как угол между проекциями граней SBA и SBA .

Так как плоскостей, удовлетворяющих условию перпендикулярности к ребру AB , бесчисленное множество, то мы можем произвольно на оси XX взять точку P_X и принять ее за точку схода следов некоторой плоскости P , перпендикулярной к ребру AB . Проводим P_V перпендикулярно к $a'b'$ и P_H перпендикулярно к ab . Так как, судя по чертежу, плоскость P не является перпендикулярной ни к одной из плоскостей системы $\frac{V}{H}$, то для построения проекций пирамиды на эту плоскость следует воспользоваться вспомогательной плоскостью, перпендикулярной к плоскостям H и P .

Проводим вспомогательную плоскость Q , перпендикулярную к H и P ($Q_H \perp P_H$), и находим проекцию пирамиды в системе плоскостей $\frac{Q}{H}$. Новая ось X_1X_1 (совпадающая с Q_H) проведена в произвольном месте, но перпендикулярно к P_H . Построив $s_1'a_1'b_1'c_1'$, находим тем самым проекцию пирамиды на плоскость Q .

Далее переходим к построению проекции пирамиды в системе $\frac{Q}{P}$ (заменяем плоскость H системы $\frac{Q}{H}$ плоскостью P), для чего предварительно находим на эпюре положение второй новой оси X_2X_2 ; ввиду того что X_2X_2 является совмещенным положением линии сечения плоскостей Q и P , то для нахождения положения оси X_2X_2 необходимо найти совмещенное положение одной точки, принадлежащей линии сечения, дополнительно к имеющейся точке M . Но если принять во внимание, что плоскость P перпендикулярна к AB и к плоскости Q , то можно избавиться от дополнительных построений, так как в этом случае линия пересечения плоскостей P и Q должна расположиться перпендикулярно к $a_1'b_1'$. На черт. 329 ось X_2X_2 проведена через точку M перпендикулярно к $a_1'b_1'$.

Построив вторую новую проекцию пирамиды, определяем искомый угол как угол между прямыми s_1a_1 и c_1a_1 .

§ 33. Примеры решения задач на точку, прямую и плоскость

Пример 1. Даны прямая, параллельная плоскости H , и точка вне этой прямой. Вращением вокруг прямой привести точку в плоскость H .

Решение. а) Вращение точки A (черт. 330) будет происходить в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Изображаем эту плоскость: плоскость S — след S_H перпендикулярен к горизонтальной проекции данной прямой. При совмещении с плоскостью H точка A должна расположиться на следе S_H .

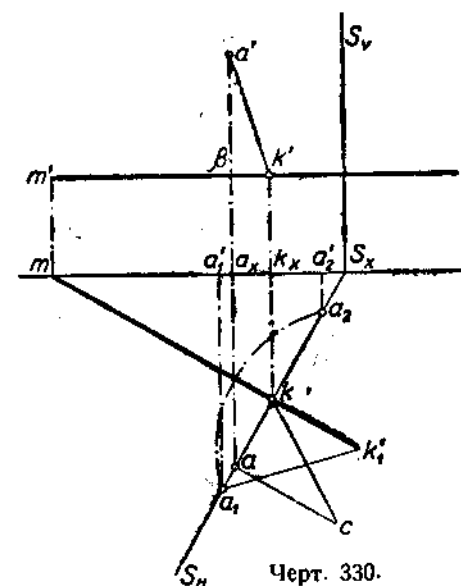
Далее находим центр вращения — точку K и истинную величину радиуса вращения — отрезок kc , гипотенуза прямоугольного треугольника kac , в котором $ac = a'\beta$.

Дугу окружности, по которой в пространстве движется точка A , заменяем такой же дугой на плоскости H . Для этого приводим точку K в плоскость H : точка k_1' , $k_1'k = k'k_x$. Из точки k_1' радиусом, равным kc , проводим дугу, пересекающую след S_H в точках a_1 и a_2 . Точки a_1 и a_2 представляют собой два возможных решения данной задачи.

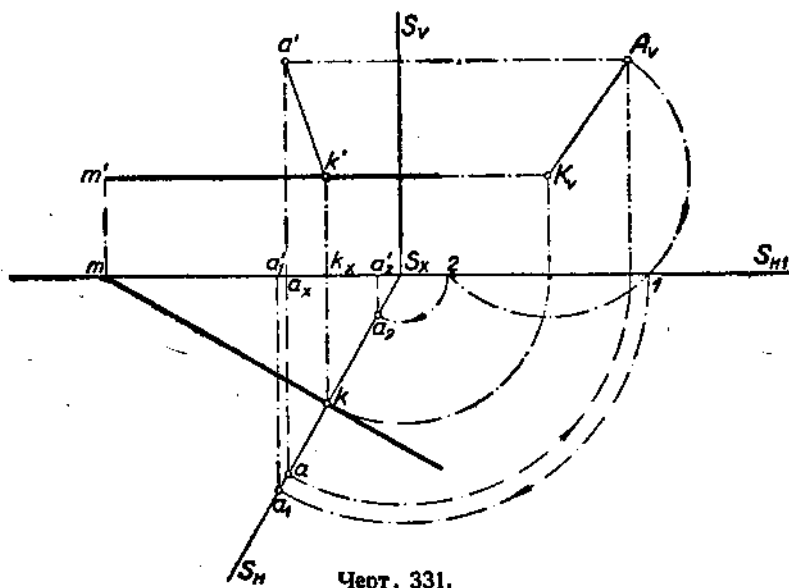
б) На черт. 331 вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость S , вместе с расположенными в этой плоскости точками A и K , совмещена с плоскостью V . Проводя из точки K_V радиусом K_VA_V дугу до пересечения со следом S_{H1} , находим точки 1 и 2 , которые остаются вывести на след S_H .

Решение задачи невозможно, если истинная величина радиуса вращения меньше расстояния данной прямой от плоскости H .

Если радиус равен этому расстоянию, то точка A при совмещении с плоскостью H расположится в точке k .



Черт. 330.



Черт. 331.

Пример 2. Даны треугольная неправильная пирамида и точка K (черт. 332); определить расстояние точки K от грани SAB .

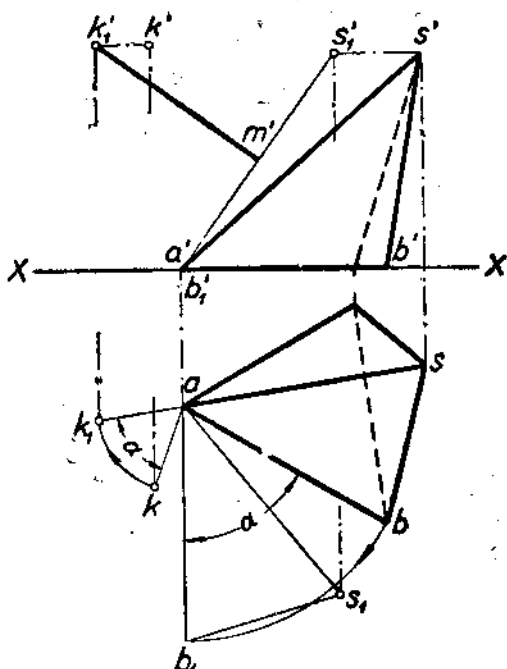
Решение. Вращением приводим всю данную систему в такое положение, когда грань SAB расположится в вертикально-проектирующей плоскости. Тогда расстояние от новой вертикальной проекции точки до вертикального следа этой плоскости и будет искомым расстоянием.

На черт. 332 вращение произведено вокруг оси, проходящей через вершину A перпендикулярно к плоскости H . Угол вращения определяется из условия, чтобы проекция ab заняла положение $a b_1$ (перпендикулярно к XX).

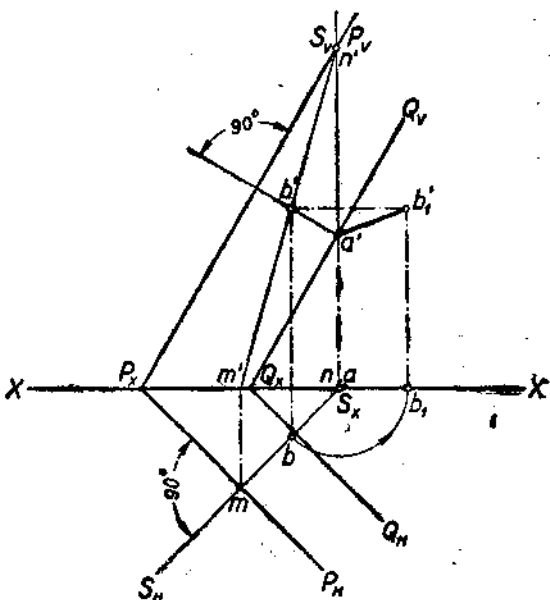
В повернутом положении изображены лишь грань SAB и точка K . Отрезок $k_1'm'$ равен искомому расстоянию.

Пример 3. Даны две параллельные между собой плоскости (черт. 333); определить расстояние между ними.

Решение. а) Способ решения, примененный на черт. 333, заключается в проведении прямой, перпендикулярной к данным плоскостям, и в определении величины отрезка этой прямой, заключенного между плоскостями. На черт. 333 из точки A , взятой на следе Q_V , проведена прямая, перпендикулярная к плоскости P (а следовательно, и к плоскости Q , так как $Q \parallel P$). Затем найдена точка B , в которой этот перпендикуляр пересекает плоскость P .



Черт. 332.



Черт. 333.

Проекции ab и $a'b'$ определяют отрезок, дающий расстояние между P и Q .

Длина этого отрезка ($a'b_1'$) найдена вращением.

б) На черт. 334 применено вращение всей данной системы вокруг одной общей оси до положения, при котором плоскости P и Q превращаются в вертикально-проектирующие плоскости. Ось вращения взята в плоскости V перпендикулярно к H ; эта ось пересекает следы P_V и Q_V в точках n_1' и n_2' .

Искомое расстояние получается между следами P_{V1} и Q_{V1} : отрезок $n_2'n_3'$.

Пример 4. Определить расстояние между данными точкой K и прямой AB .

Решение. а) На черт. 335 задача решена при помощи плоскости P , проведенной через точку K перпендикулярно к данной прямой AB . Эта плоскость пересекает прямую AB в точке C ; отрезок KC определяет искомое расстояние.

Истинная величина отрезка KC (отрезок $k'c_1'$) найдена вращением вокруг оси, проходящей через точку K перпендикулярно к плоскости H .

б) На черт. 336 точка K и прямая AB , определяющие некоторую плоскость, связаны горизонталью KD этой плоскости. Вращением

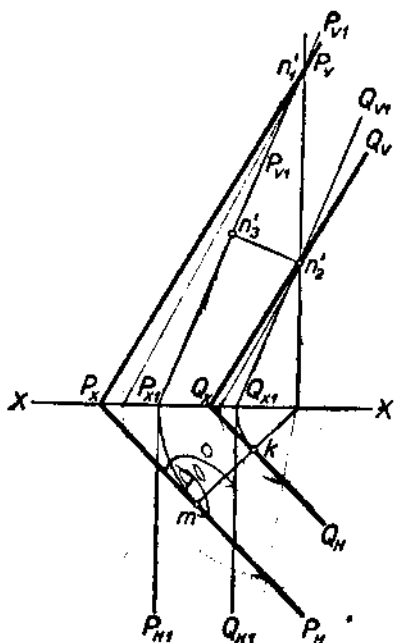
вокруг этой горизонтали прямая AB расположена параллельно плоскости H (положение a_1d). Так как точка K и прямая в новом положении определяют плоскость, параллельную плоскости H , то искомое расстояние от точки K до прямой AB будет равно длине отрезка kn , проведенного из точки k перпендикулярно к a_1d .

в) Можно построить следы плоскости, определяемой точкой K и прямой AB , эту плоскость совместить с одной из плоскостей проекций и в совмещении найти расстояние от K до AB .

Пример 5. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми.

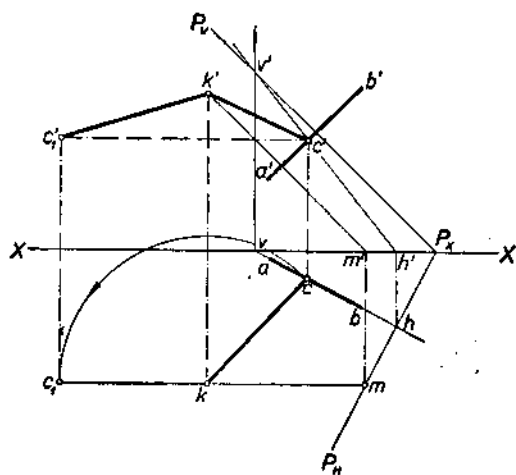
Решение. а) Если данные параллельные прямые пересечь плоскостью, к ним перпендикулярной, то отрезок прямой линии, проходящей через точки пересечения параллельных прямых с плоскостью, будет выражать искомое расстояние.

На черт. 337 некоторая плоскость P перпендикулярна к прямым AB и CD . В точках M и K эти прямые пересекают плоскость P . Отрезок прямой MK является ответом на поставленный вопрос. Длина этого отрезка ($k'm_1'$) определена вращением.



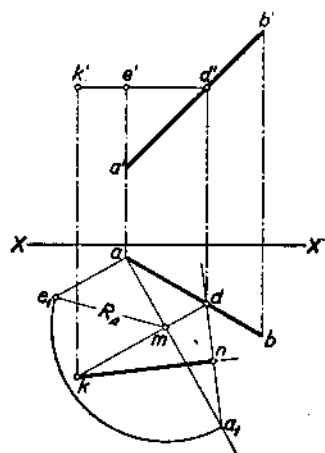
Черт. 334.

б) На черт. 338 та же задача решена путем повторного вращения параллельных прямых. Первым вращением, совершаемым вокруг оси,



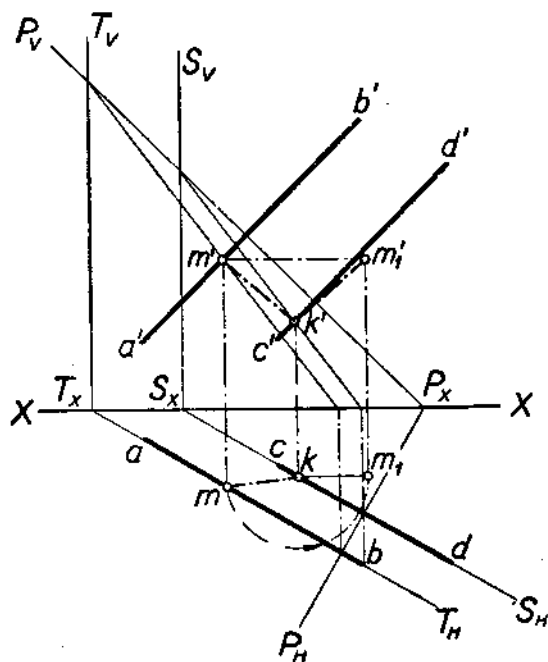
Черт. 335.

проведенной в плоскости V перпендикулярно к плоскости H через точку l , располагаем прямые параллельно плоскости V (проекции $a_1 b_1$, $a_1' b_1'$ и $c_1 d_1$, $c_1' d_1'$).



Чер. 336.

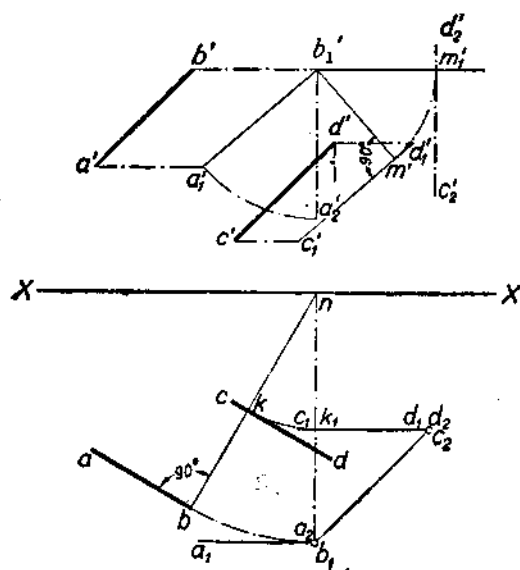
Второе вращение совершается вокруг оси, проходящей через точку B_1 перпендикулярно к плоскости V . Располагаем прямые перпендикулярно к плоскости H ; при этом горизонтальные проекции прямых обращаются в точки (точки с двойным обозначением a_2, b_1 и c_2, d_1) и расстояние между ними (a_2c_2) равно искомому расстоянию между данными параллельными прямыми AB и CD .



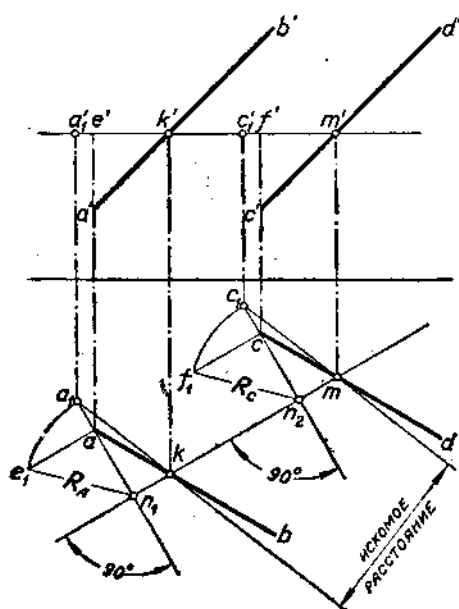
Чер. 337.

ренное в положении совмещения, является искомым расстоянием

г) Плоскость, определяемую параллельными прямыми, можно, не выражая следами, повернуть вокруг одной из горизонталей или фронталей.



Черт. 338.



Черт. 339.

Соответственное построение показано на черт. 339. Вращение произведено вокруг горизонтали KM . Достаточно найти новое положение хотя бы точек A и C (на горизонтальной плоскости точки a_1 и c_1) и соединить их с точками K и M (на горизонтальной плоскости точки k и m): прямые a_1k и c_1m представляют собой горизонтальные проекции данных параллельных прямых после того, как плоскость, в которой эти прямые находятся, расположена параллельно плоскости H . Расстояние между прямыми a_1k и c_1m равно расстоянию между прямыми AB и CD в пространстве.

д) На черт. 340 дано решение при помощи способа перемены плоскостей проекций. Путем введения плоскости Q взамен плоскости V прямые AB и CD поставлены параллельно новой вертикальной плоскости проекций. Плоскость Q проведена через одну из данных прямых — через AB .

Вторая переменная произведена так, чтобы прямые AB и CD оказались перпендикулярными к плоскости проекций. Плоскость H заменена плоскостью P ; ось X_2X_2 проведена перпендикулярно к проекциям $a_1'b_1'$ и $c_1'd_1'$. На новой плоскости P

прямые AB и CD изобразятся в виде точек, расстояние между кото-

рыми и даст ответ на вопрос о расстоянии между параллельными прямыми AB и CD .

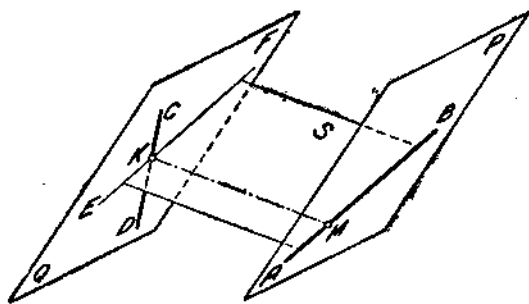
Пример 6. Определить кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Решение. а) Так как кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть в то же время и расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые, можно решить задачу, заключив данные скрещивающиеся прямые в параллельные плоскости (см. стр. 70) и определив затем расстояние между этими плоскостями (см. стр. 153 пример 3).

б) На черт. 341 и 342 задача связана с вопросом о проведении общего перпендикуляра к данным двум скрещивающимся прямым AB и CD .

Черт. 341 показывает, что

если через данные прямые AB и CD провести параллельные между собой плоскости P и Q , затем через одну из этих прямых, хотя бы



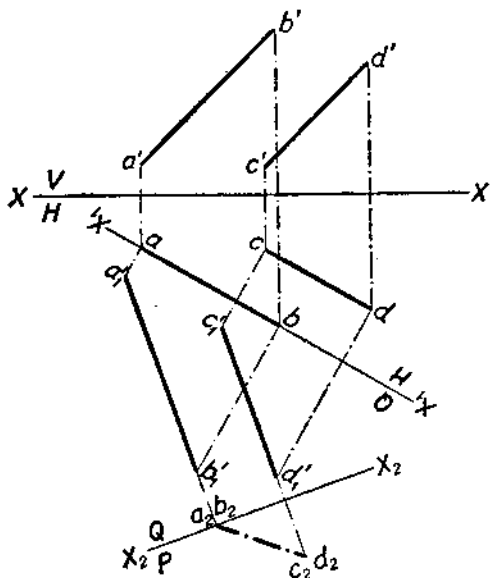
Черт. 341.

AB , провести плоскость S , перпендикулярную к плоскостям P и Q , и найти прямую пересечения плоскостей S и Q (эта прямая EF будет параллельна прямой AB), то в точке пересечения прямых CD и EF будет проходить тот перпендикуляр к прямым AB и CD , который является искомым.

На черт. 342 дан эпюр.

Построены следы плоскости Q , проходящей через одну из данных скрещивающихся прямых CD и вспомогательную прямую NC , параллельную другой данной прямой AB .

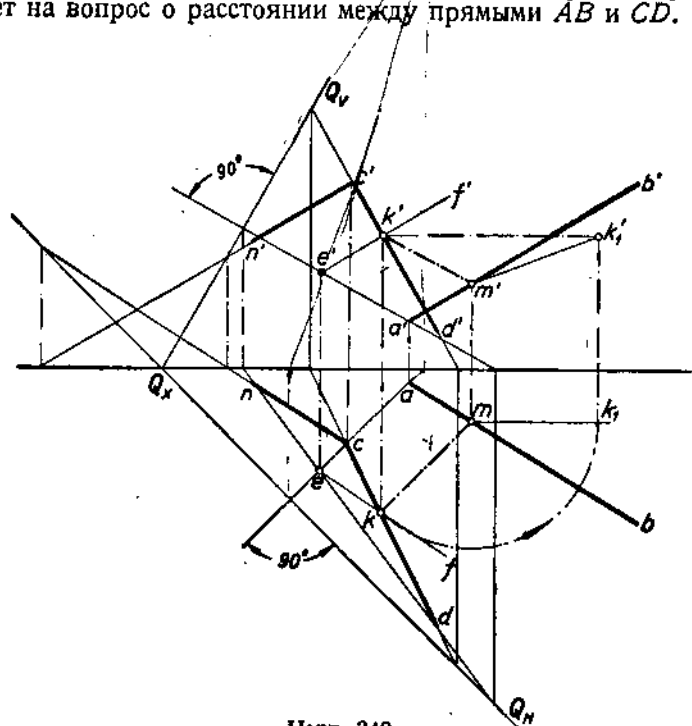
Далее из точки A проведен перпендикуляр к плоскости Q ; этот перпендикуляр и самая прямая AB определяют плоскость, проходящую через AB и перпендикулярную к плоскости Q (на черт. 341 это плоскость S). Найдя точку встречи перпендикуляра с плоскостью Q (точка E) и проведя через эту точку прямую, параллельную прямой AB , мы найдем



Черт. 340.

дим точку K , в которой и будет проходить искомый общий перпендикуляр к прямым AB и CD . Этот перпендикуляр на черт. 342 проведен параллельно перпендикуляру EA : проекции km и ea , $k'm'$ и $e'a'$ соответственно параллельны между собой.

Способом вращения определяем длину этого перпендикуляра, что дает ответ на вопрос о расстоянии между прямыми AB и CD .



Черт. 342.

Нахождение угла между двумя прямыми

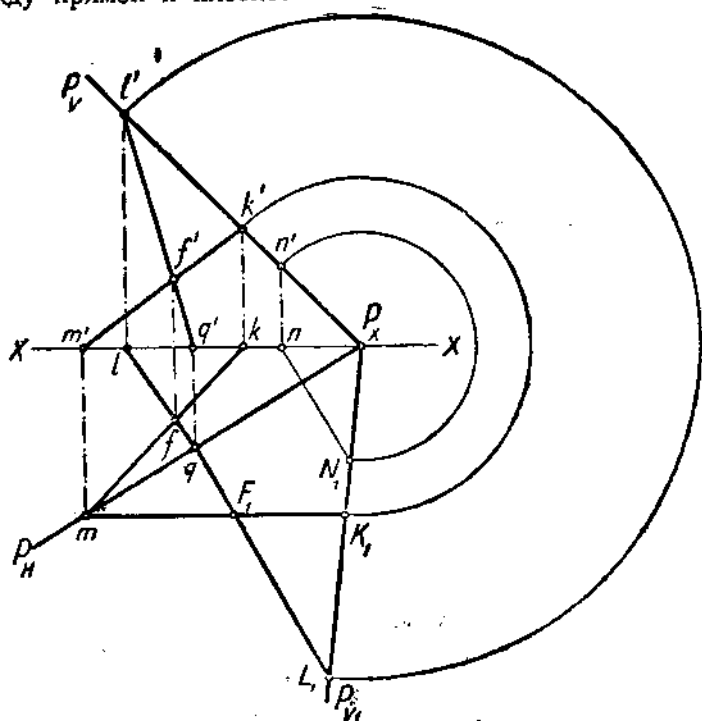
Пример 7. Даны две прямые MK и LQ , пересекающиеся в точке F ; определить угол между данными прямыми (черт. 343).

Решение. Найдя следы прямых, проводим следы плоскости, определяемой заданными прямыми (следы P_H и P_V).

Далее совмещаем плоскость P с плоскостью H и находим положение прямых в совмещенном положении плоскости. При нахождении совмещенного положения отметим, что положение точек m и q как точек, лежащих на оси вращения, не изменяется. Найдя совмещенное положение вертикальных следов прямых (точки K_1 и L_1), находим действительное положение прямых, а следовательно, и размеры искомого угла.

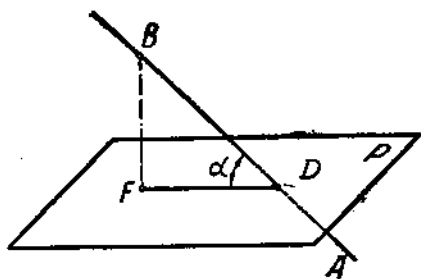
Можно было бы, не находя следов плоскости, вращением вокруг горизонтали или фронтали расположить плоскость, определяемую прямыми MK и LQ , параллельно одной из плоскостей проекций. На этой плоскости получится проекция искомого угла без искажения.

Пример 8. Дана плоскость P (P_H и P_V) и прямая AB ; определить угол между прямой и плоскостью.



Черт. 343.

Пояснение. На черт. 344 показаны в пространстве плоскость P и прямая AB . Точка пересечения прямой с плоскостью обозначена буквой D . Из любой точки прямой, хотя бы из точки B , проводим перпендикуляр на плоскость. Соединяя точку пересечения перпендикуляра с плоскостью (точку F) с точкой D , получим проекцию отрезка BD прямой на плоскости P . Угол BDF (угол α) и будет измерять угол между прямой AB и плоскостью P . Если бы нас интересовал угол FDA , то его можно было бы найти, вычтя α из 180° .



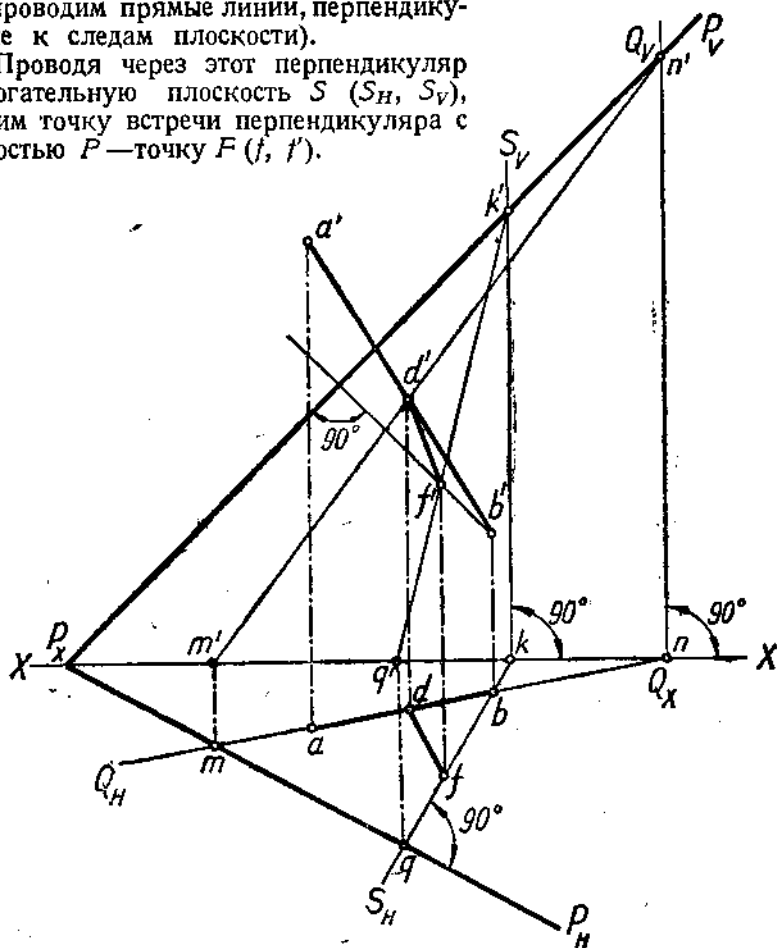
Черт. 344.

Решение. На основании рассуждений, приведенных при рассмотрении черт. 344, решение поставленной задачи (черт. 345) проводим в следующем порядке.

1. Находим точку встречи заданной прямой AB с плоскостью P . Проводя вспомогательную плоскость Q через прямую AB , находим известным приемом точку встречи прямой с плоскостью — $D(d, d')$.

2. Из любой точки прямой, хотя бы из точки $B(b, b')$, проводим перпендикуляр на плоскость P (через b и b' проводим прямые линии, перпендикулярные к следам плоскости).

3. Проводя через этот перпендикуляр вспомогательную плоскость S (S_H, S_V), находим точку встречи перпендикуляра с плоскостью P — точку $F(f, f')$.



Черт. 345.

4. Соединяя d' с f' и d с f , мы можем сказать, что углы $f'd'b'$ и fdb являются проекциями действительного угла между прямой AB и плоскостью P .

5. Для нахождения истинной величины угла можно совместить плоскость, образованную пересекающимися прямыми ($fd, f'd'$ и $bd, b'd'$) с одной из плоскостей проекций, либо повернуть угол FDB вокруг горизонтали или фронтали до положения, при котором плоскость этого угла станет параллельна одной из плоскостей проекций.

Обратим также внимание на то, что в данной задаче можно значительно упростить решение, если, не находя точек d, d', f, f' , ограничиться проведением перпендикуляра из точки B на плоскость P : угол между

этим перпендикуляром и прямой AB может быть определен хотя бы вращением вокруг горизонтали или фронтали, искомым же угол α (черт. 344) является к указанному углу дополнительным.

Нахождение угла между двумя плоскостями

Если в пространстве даны две плоскости P и Q , пересекающиеся по линии MN (черт. 346), то мерой угла между плоскостями будет угол α , составленный прямыми AB и BC пересечения плоскостей P и Q с третьей плоскостью S , проведенной перпендикулярно к прямой MN (в любой ее точке—в данном случае в точке B).

Пример 9. Определить угол между плоскостями P и Q , заданными следами (черт. 347).

Решение. Решение задачи проводим в следующем порядке.

1. Находим линию пересечения плоскостей P и Q . Следы плоскостей пересекаются в пределах чертежа; линия пересечения плоскостей легко определяется — прямая MN ($m'n'$).

2. Проводим плоскость S (S_H, S_V) перпендикулярную к прямой MN , для чего выбираем произвольно на оси точку S_X и проводим S_V перпендикулярно к $m'n'$ и S_H — перпендикулярно к mn .

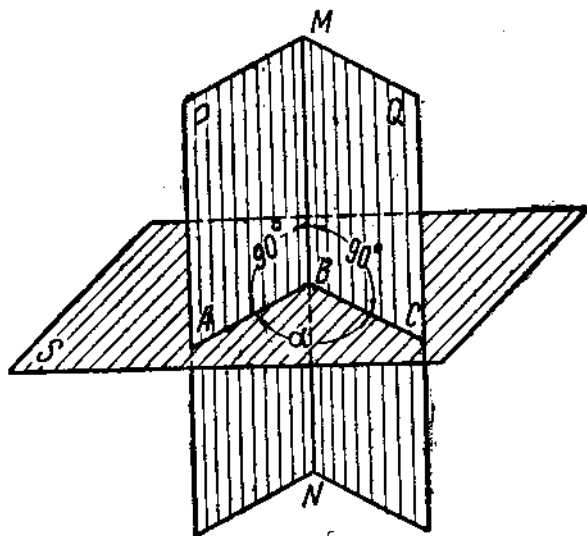
3. Находим обычным приемом линию пересечения плоскостей P и S — прямую AD ($ad, a'd'$).

4. Находим линию пересечения плоскостей Q и S . Один след линии пересечения — точка c , c' — легко определяется в точке пересечения следов Q_H и S_H . Вторая точка, принадлежащая искомой линии пересечения плоскостей Q и S , будет находиться в пересечении прямых MN и AB (см. черт. 346); проведя через точки b' и c' и через точки b и c прямые, найдем проекции прямой пересечения плоскостей Q и S .

5. Точка B будет вершиной искомого угла, измеряющего двугранный угол, образованный плоскостями P и Q (угол ABC — его проекция $\angle abc$ и $\angle a'b'c'$).

6. Для нахождения истинной величины угла ABC можно совместить плоскость, в которой лежит угол или, что то же, прямые AB и BC , с одной из плоскостей проекций.

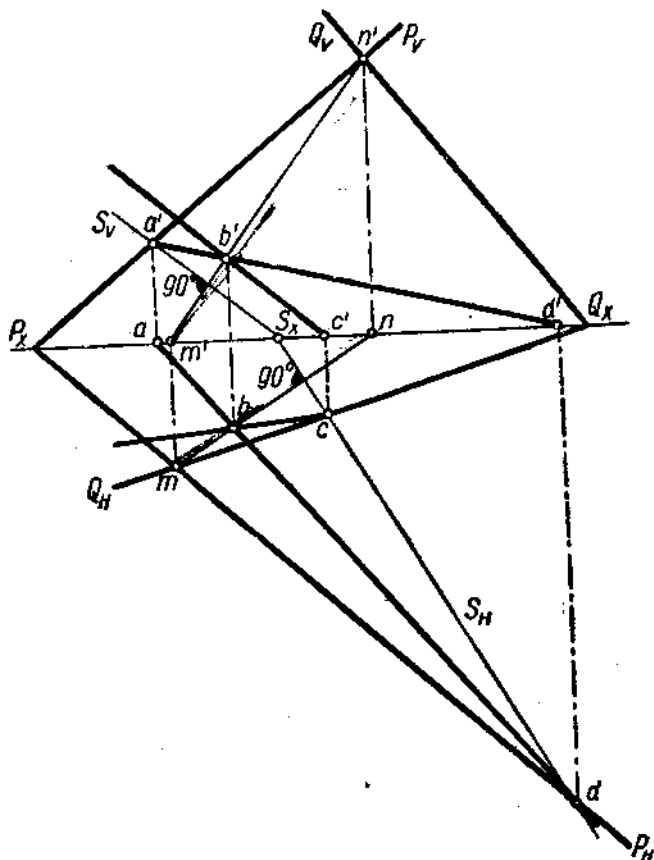
Величину угла ABC можно также определить, построив $\triangle ABC$ (для чего надо определить величину его сторон) или повернув $\triangle ABC$ до положения, параллельного одной из плоскостей проекций.



Черт. 346.

Пример 10. Дана плоскость P (P_H, P_V); определить угол, который эта плоскость составляет с плоскостью H (черт. 348).

Решение. Линией пересечения плоскостей P и H служит след P_H . Выберем вспомогательную плоскость S , перпендикулярную к P_H ; при этом плоскость S (S_H, S_V) будет перпендикулярна к плоскости H . Находим линию пересечения плоскостей S и P —прямую FE ($f'e'$). Пря-



Черт. 347.

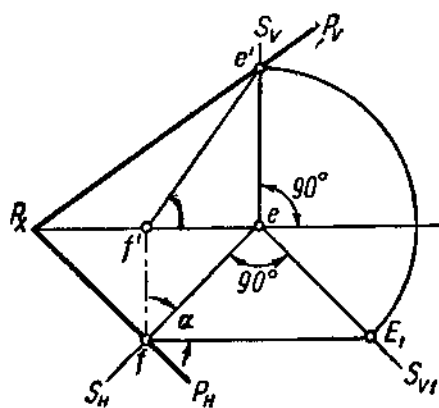
мая FE есть линия наибольшего ската (см. стр. 90). Угол между этой прямой и плоскостью H будет измерять угол между плоскостями P и H .

Так как искомый угол лежит в плоскости S , то для нахождения его можно совместить плоскость S с H (черт. 348).

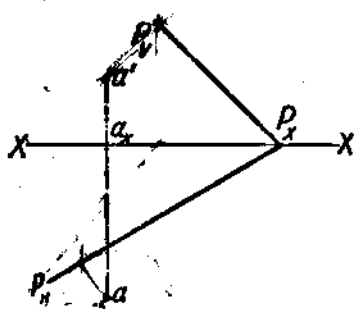
Задачи

1. Определить расстояние от точки A (a, a') до плоскости P (P_H, P_V) (черт. 349).

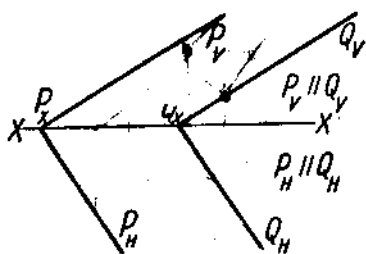
2. Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями P (P_H, P_V) и Q (Q_H, Q_V) (черт. 350).



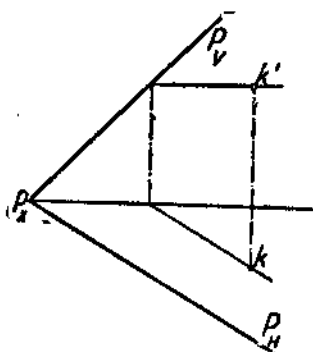
Черт. 348.



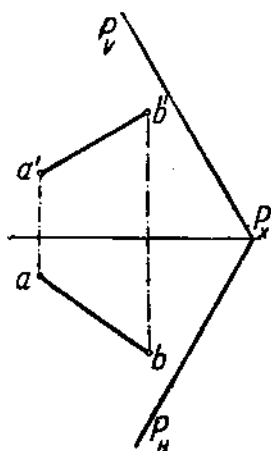
Черт. 349.



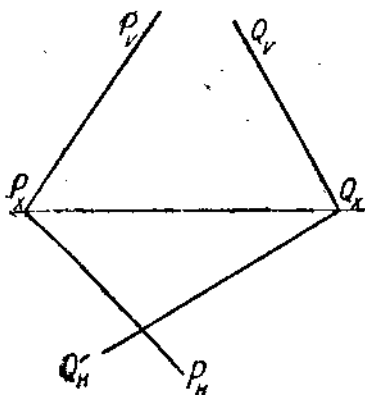
Черт. 350;



Черт. 351.



Черт. 352.



Черт. 353.

3. Дана плоскость P и точка $K(k, k')$, лежащая в ней. Построить проекции правильного шестиугольника, расположенного в плоскости P ; центр окружности, описанной около шестиугольника, лежит в точке K , причем сторона шестиугольника равна 30 мм (черт. 351).

4. Определить истинную величину угла между прямой $AB(a'b')$ и плоскостью $P(P_H, P_V)$ (черт. 352).

5. Определить угол между плоскостями P и Q (черт. 353).

Глава V

НЕКОТОРЫЕ КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЕ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

§ 34. Общее деление кривых поверхностей

При изучении вопросов, связанных с изображением кривых поверхностей в ортогональных проекциях, условимся рассматривать поверхность как совокупность последовательных положений линии, движущейся в пространстве по определенному закону. При этом линию называют образующей или производящей.

В зависимости от вида образующей линии различают:

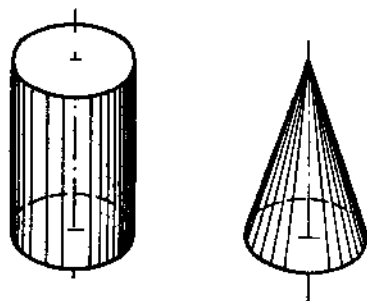
1. **Линейчатые** поверхности или поверхности с прямолинейными образующими, т. е. поверхности, образованные движением прямой линии, как, например, боковые поверхности известных нам из геометрии прямого кругового цилиндра и конуса (черт. 354).

2. **Нелинейчатые** поверхности — поверхности, не могущие быть образованными движением прямой линии, например, поверхность шаровая (черт. 355).

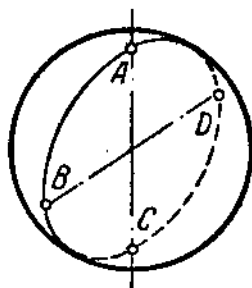
Обратим внимание на то, что указанная выше, как пример линейчатой поверхности, боковая поверхность цилиндра может быть образована движением и кривой линии, например окружности основания, когда последняя движется вдоль оси, проходящей через ее центр, и плоскость окружности во всех положениях остается перпендикулярной к оси.

Между тем шаровая поверхность — нелинейчатая, может быть образована движением только кривой линии — например вращением окружности $ABCD$ или полуокружности ABC вокруг диаметра AC .

Кривая поверхность может быть образована и движением поверхности по тому или иному закону движения. Например, при движении



Черт. 354.



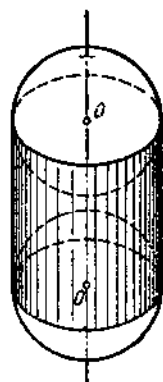
Черт. 355.

центра шаровой поверхности вдоль прямой OO (черт. 356) шаровая поверхность образует поверхность цилиндрическую.

Вообще законы образования какой-либо поверхности могут быть разнообразны; желательно из возможного разнообразия законов образования поверхностей и вида образующих линий выбирать те, которые являются наиболее простыми или удобными для того или иного случая изображения кривых поверхностей.

Линейчатые кривые поверхности, у которых смежные образующие линии параллельны (например, цилиндрическая поверхность), или пересекаются (например, коническая поверхность), могут быть развернуты в плоскость (совмещены с плоскостью) и называются **развертываемыми**.

Кривые поверхности нелинейчатые и линейчатые, у которых смежные образующие не параллельны и не пересекаются, не могут быть развернуты в плоскость и называются **неразвертываемыми** или **косыми**:

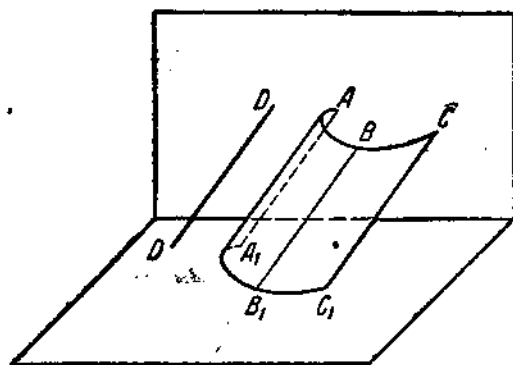


Черт. 356.

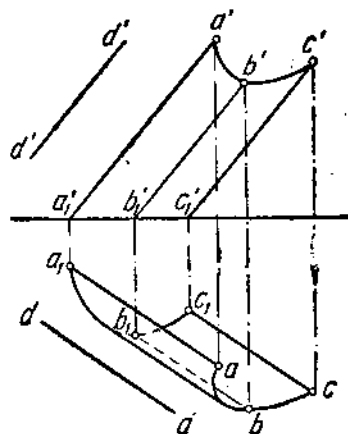
§ 35. Линейчатые поверхности

Поверхности цилиндрические (цилиндры)

Поверхность, образованная движением прямой линии AA_1 (черт. 357), во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой прямой DD и проходящей последовательно через все точки кривой ABC , называется **цилиндрической**.



Черт. 357.



Черт. 358.

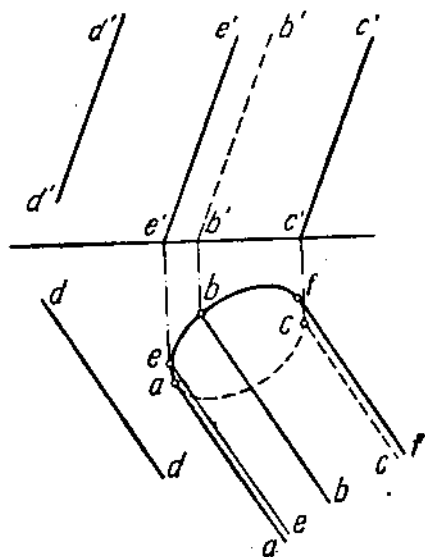
Кривая ABC в этом случае носит название **направляющей** цилиндрической поверхности.

На черт. 358 приведено изображение цилиндрической поверхности заданием проекций направляющей ABC (a, b, c и a', b', c') и общего направления образующих — прямая DD ($dd, d'd''$).

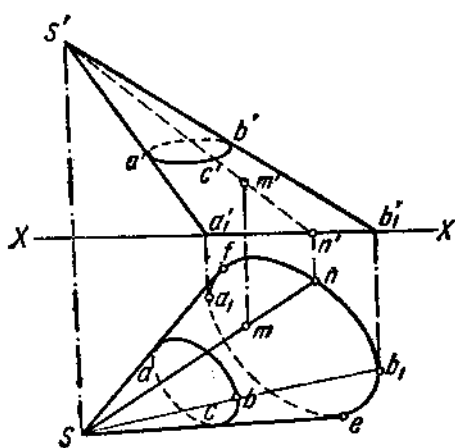
Совокупность точек пересечения образующих с плоскостью проекций называется следом поверхности на данной плоскости проекций. На черт. 357 линия $A_1B_1C_1$ есть след цилиндрической поверхности на плоскости H .

Если задана направляющая цилиндрической поверхности или след поверхности на одной из плоскостей проекций и общее направление образующих, то поверхность может считаться определенной.

На черт. 359 заданы след цилиндрической поверхности на плоскости H (кривая ABC) и направление образующих (прямая DD) и этого достаточно, чтобы построить любую образующую поверхности.



Черт. 359;



Черт. 360;

Так, для построения горизонтальной проекции образующей, проходящей через точку следа B , достаточно провести через точку b прямую dd , параллельную dd' , а для построения вертикальной проекции — провести прямую dd' через b' параллельно $d'd'$.

Рассматривая черт. 359, можно отметить на плоскости V крайние проекции образующих $e'e'$ и $c'c'$, в пределах которых могут размещаться вертикальные проекции образующих цилиндрической поверхности, и на плоскости H проекции aa и ff , в пределах которых могут располагаться горизонтальные проекции образующих данной поверхности. Такие крайние образующие называются контурными образующими.

Контурные образующие отделяют области чертежа, в которых могут лежать проекции образующих, от тех областей, где проекции образующих располагаться не могут; контурные образующие являются также линиями раздела видимой части поверхности от невидимой. Так, на черт. 359 все образующие, проходящие через точки кривой следа abf , видимы на плоскости H , а все образующие, проходящие через точки кривой acf , на этой плоскости не видимы.

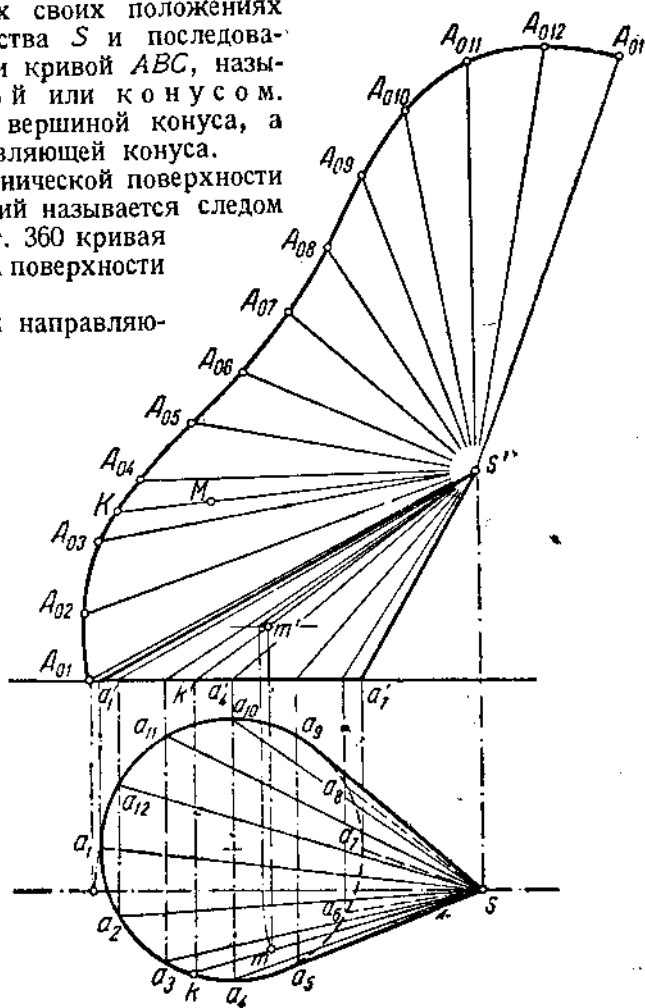
Цилиндрические поверхности различают по виду кривой линии, получаемой при пересечении данной поверхности плоскостью, перпендикулярной к образующим цилиндрической поверхности. Такую кривую называют нормальным сечением цилиндрической поверхности (цилиндра). Так, если нормальное сечение есть круг — цилиндр круговой, если эллипс — цилиндр эллиптический и т. д.

Поверхности конические (конусы)

Поверхность, образованная движением прямой линии SA (черт. 360), проходящей при всех своих положениях через точку пространства S и последовательно через все точки кривой ABC , называется конической или конусом. Точка S называется вершиной конуса, а кривая ABC — направляющей конуса.

Линия сечения конической поверхности с плоскостью проекций называется следом поверхности; на черт. 360 кривая $a_1/b_1/c$ является следом поверхности на плоскости H .

Если задана кривая направляющая или след поверхности и вершина, то коническая поверхность является определенной, так как мы можем построить любое количество точек, принадлежащих заданной поверхности. Так, если задана горизонтальная проекция точки M , принадлежащей данной поверхности (черт. 360), то, построив горизонтальную проекцию образующей, проходящей через M , находим вертикальную проекцию этой образующей $s'n'$, на которой легко находится вертикальная проекция m' заданной точки M .



Черт. 361.

На черт. 360 линии sf и se , а также $s'a'_1$ и $s'b'_1$ являются контурными образующими, обладающими такими же свойствами, как контурные образующие цилиндрической поверхности.

На черт. 361 изображена коническая поверхность, заданная вершиной S и горизонтальным следом поверхности, причем след (основание конуса) является окружностью.

На том же чертеже приведено построение развертки заданной поверхности.

При развертывании конической поверхности последнюю рассматривают как боковую поверхность пирамиды с бесконечно большим числом сторон и элементы, заключенные между двумя смежными (близкими) образующими, рассматриваются как плоскостные.

Для построения развертки кривая основания конуса заменена многоугольником со сторонами A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и т. д., а коническая поверхность совокупностью плоскостных элементов-треугольников SA_1A_2 , SA_2A_3 , SA_3A_4 и т. д.

Поверхность в развернутом виде представляет собой совокупность площадей смежных треугольников.

На черт. 361 развертывание проведено в следующем порядке: определена вращением истинная величина образующей SA_1 — прямая $s'A_{01}$, затем определена истинная величина образующей SA_2 и построен треугольник по трем сторонам $s'A_{01}$, $s'A_{02}$ и a_1a_2 (хорда).

Определив истинную величину образующей SA_3 , строим треугольник $s'A_{02}A_{03}$ и т. д.

Заменяя ломаную линию A_{01} , A_{02} , A_{03} кривой, получим очертание развертки следа поверхности.

С увеличением числа сторон многоугольника, вписанного в кривую основания, развертка будет приближаться к истинной развертке конической поверхности.

Если необходимо на развертке отметить точку, принадлежащую конической поверхности, например, точку M , то для этого достаточно провести образующую SK , проходящую через точку M , найти положение этой образующей на развертке и отложить на ней истинную величину SM .

Цилиндроиды

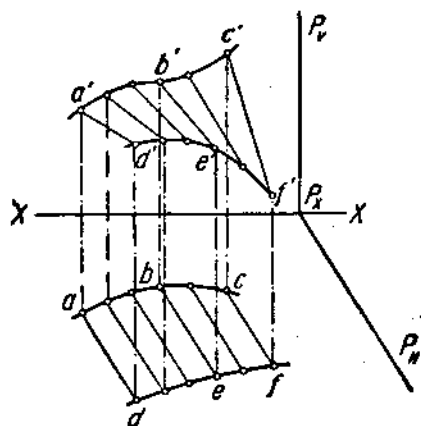
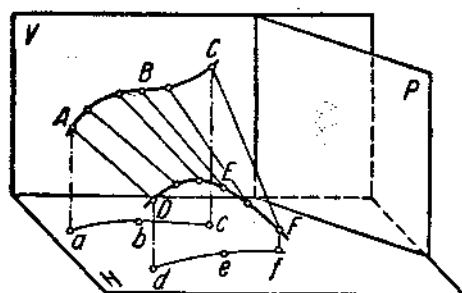
Кривые поверхности, образованные движением прямолинейной образующей по двум данным направляющим линиям и параллельно некоторой заданной плоскости, называются цилиндроидами.

Плоскость, параллельно которой располагаются образующие, называется плоскостью параллелизма.

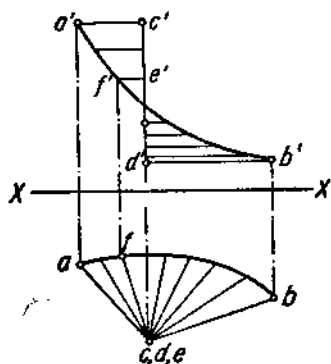
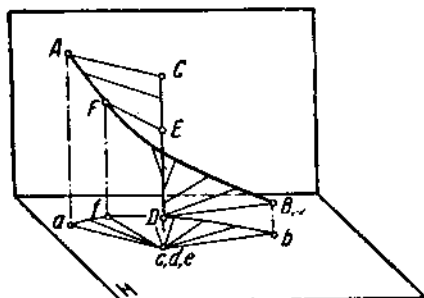
На черт. 362 показана поверхность цилиндроида, образованная движением прямой AD по направляющим ABC и DEF параллельно плоскости параллелизма P .

Если одной из направляющих будет линия прямая, то цилиндرويد носит название коноида (см., например, черт. 363, где направляющая прямая CD перпендикулярна плоскости H , которая принята за плоскость параллелизма).

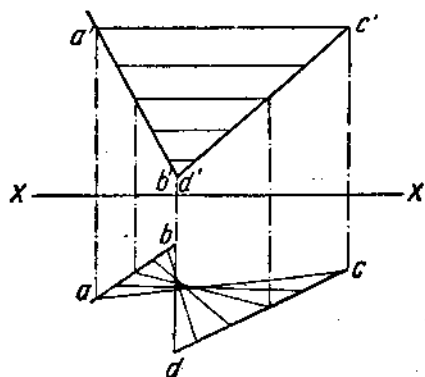
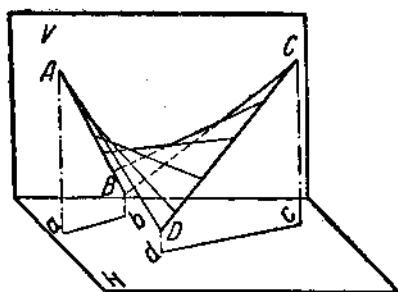
Если необходимо построить какую-либо образующую коноида, например образующую, проходящую через точку E направляющей (черт. 363), то достаточно через точку E провести плоскость, параллельную H , найти точку пересечения этой плоскости с кривой AB — точку F ,



Черт. 362.



Черт. 363.



Черт. 364.

и соединить последнюю прямой линией с точкой E . Прямая EF и будет образующей коноида, проходящей через точку E .

Если обе направляющих цилиндрида являются прямыми линиями, не лежащими в одной плоскости, то в этом случае цилиндрида называется гиперболическим параболоидом¹. На черт. 364 дано изображение гиперболического параболоида, заданного двумя скрещивающимися прямыми AB и CD и плоскостью параллелизма H (все образующие поверхности параллельны плоскости H).

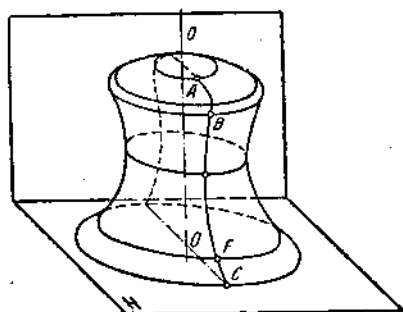
§ 36. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называют поверхность, получаемую при вращении какой-либо образующей линии вокруг некоторой оси. Все точки образующей линии во все время движения находятся на постоянном расстоянии от оси.

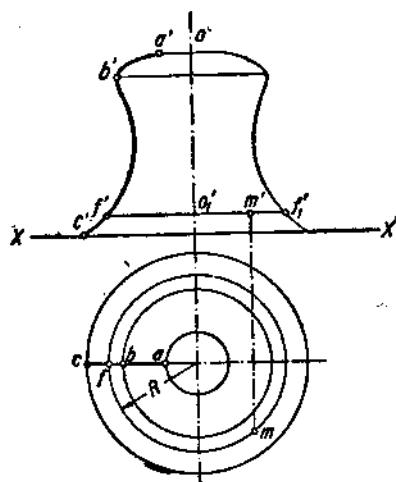
Каждая точка образующей линии при своем движении вокруг оси описывает окружность; следовательно, плоскость, перпендикулярная к оси поверхности вращения, пересекаясь с последней, определяет окружность, называемую нормальным сечением данной поверхности вращения.

Для всех поверхностей вращения нормальные сечения представляют собой окружности, расположенные в параллельных плоскостях.

На черт. 365 показана поверхность, образованная вращением плоской кривой AB вокруг оси OO' .



Черт. 365.



Черт. 366.

Поверхность вращения, заданная образующей и положением оси, является определенной. Мы можем найти любое количество точек, принадлежащих этой поверхности, так как каждая точка образующей при вращении описывает окружность, все точки которой являются также точками поверхности.

Указанные выше свойства поверхностей вращения позволяют легко решать задачи на отыскание проекций точек, принадлежащих поверхности вращения. Например, дана вертикальная проекция точки M (черт. 366) и требуется отыскать ее горизонтальную проекцию.

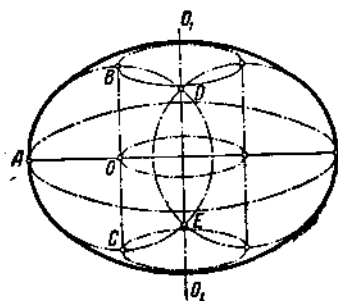
¹ Гиперболический параболоид называют также параболическим гиперболоидом и косой плоскостью.

Точка M лежит на окружности, вертикальная проекция которой проходит через m' и расположена параллельно оси проекций. Проводя через m' прямую, параллельную XX' до пересечения с контурной образующей поверхности в точке f' , находим $o_1'f'$ —радиус окружности, на которой лежит точка M .

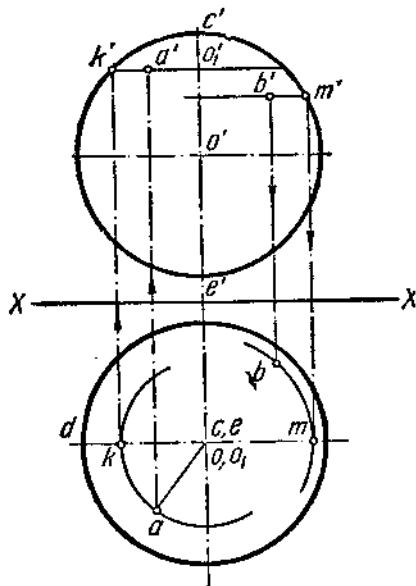
Построив на плоскости H проекцию этой окружности, легко находим горизонтальную проекцию точки M .

Боковые поверхности известных нам прямого кругового цилиндра, прямого кругового конуса и поверхность шара представляют собою также поверхности вращения.

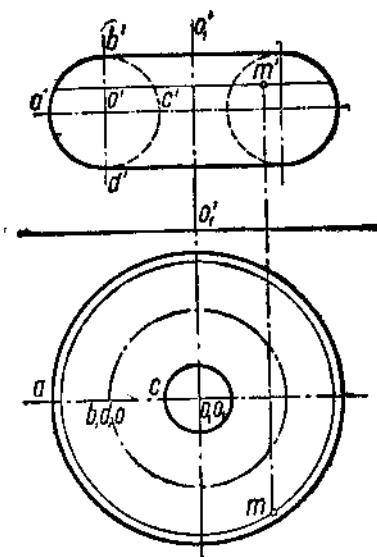
В случае задания точки, лежащей на шаровой поверхности, лишь одной ее проекцией, например горизонталь-



Черт. 368.



Черт. 367.



Черт. 369.

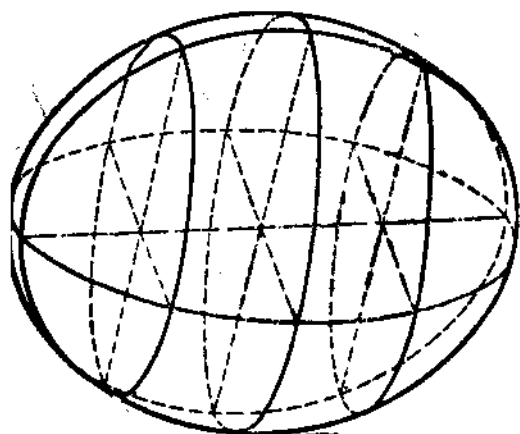
ной проекцией a , нетрудно найти вертикальную проекцию a' (черт. 367).

Для этого проводим на плоскости H окружность радиусом oa (проекцию нормального сечения) и далее находим вертикальную проекцию нормального сечения, на которой и должна лежать точка a' . На том же черт. 367 показано нахождение горизонтальной проекции b , если задана точка b' и известно, что точка B не видима, если смотреть на плоскость V .

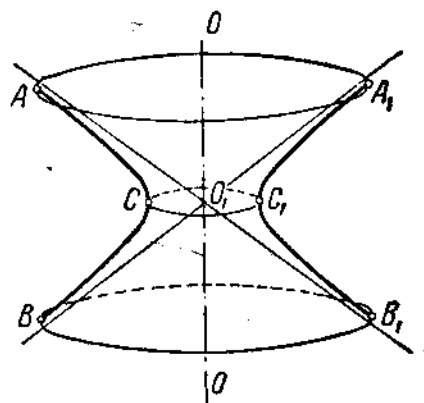
Если вращать окружность около оси, не проходящей через ее центр, то можно получить поверхность, которую будем называть поверхностью кругового тора. На черт. 368 изображена поверхность кругового

тора, полученная при вращении окружности радиуса OA вокруг оси O_1O_1 , пересекающей заданную окружность по хорде DE .

При вращении той же окружности вокруг оси, не пересекающей окружности, но лежащей в ее плоскости, поверхность тора называют также поверхностью кругового кольца.



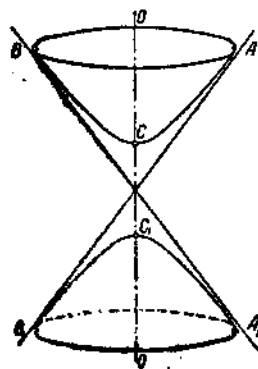
Черт. 370.



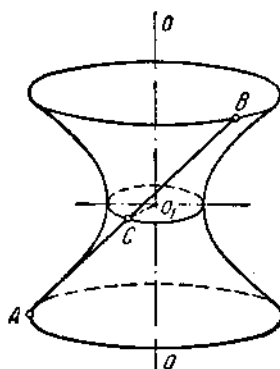
Черт. 371.

На черт. 369 показано в двух проекциях круговое кольцо, образованное вращением окружности радиуса OA вокруг оси O_1O_1 , лежащей в плоскости заданной окружности. Построение проекций какой-либо точки M , лежащей на поверхности кольца, ясно из чертежа.

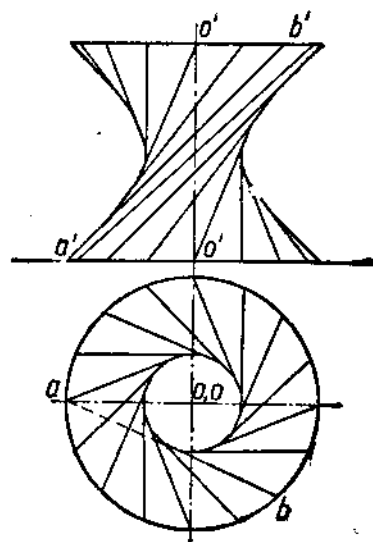
На черт. 370 показана поверхность эллипсоида вращения, образованная вращением эллипса вокруг его большой оси.



Черт. 372.



Черт. 373.



Черт. 374.

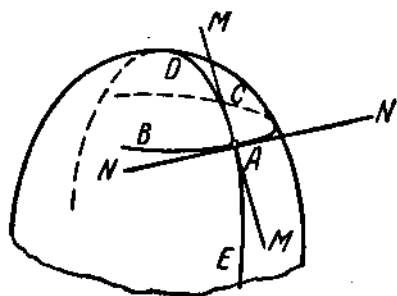
Если вращать гиперболу вокруг ее мнимой оси, то образуется поверхность, называемая однополым гиперболоидом вращения (черт. 371). Окружность, описанная ближайшей к оси вращения

точкой C_1 , называется горлом гиперboloида. В случае, когда осью вращения будет действительная ось гиперболы, поверхность вращения называется двуполым гиперboloидом вращения (черт. 372). Последние две поверхности представляют собою пример поверхностей с бесконечно удаленными элементами.

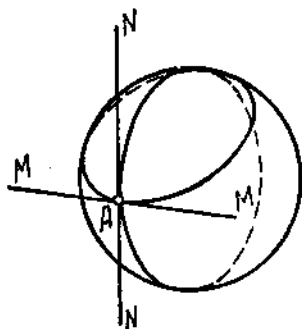
Однополый гиперboloид вращения может быть образован таюке вращением прямой линии около оси, в случае, если образующая и ось в пространстве будут прямыми скрещивающимися. На черт. 373 и 374 показан однополый гиперboloид, полученный вращением прямой AB вокруг оси OQ . Как видно из этих чертежей, образующая и ось в пространстве не пересекаются и не параллельны.

§ 37. Проведение плоскостей, касательных к кривым поверхностям

Если на данной кривой поверхности (черт. 375) провести через точку A две какие-либо кривые линии BAC и DAE , а затем через точку A к этим кривым провести касательные линии MM и NN , то плоскость, определяемая этими прямыми, будет касательной к поверхности в точке A .



Черт. 375.



Черт. 376.

В зависимости от вида кривой поверхности, касательная плоскость может иметь с поверхностью одну общую точку или ряд точек. Так, например, плоскость, касательная к шаровой поверхности может иметь с последней лишь одну общую точку (черт. 376), а плоскость, касательная к цилиндрической поверхности, имеет с ней общую линию AB , т. е. ряд точек (черт. 377).

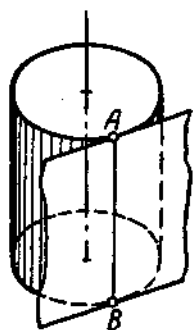
Рассмотрим некоторые примеры построения касательных плоскостей к кривым поверхностям.

Пример 1. Провести через заданную точку пространства плоскость, касательную к цилиндрической поверхности.

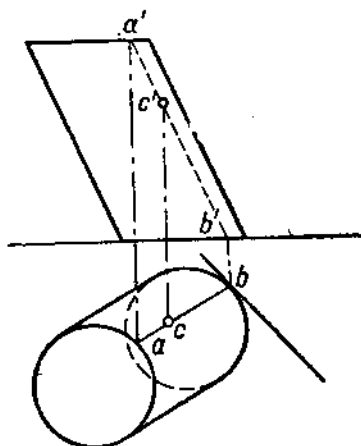
Заметим, что решение вопроса возможно лишь в случае, когда заданная точка находится или на самой поверхности, или вне ее.

Решение. а) Точка задана на цилиндрической поверхности (черт. 378 — точка C). Проводя образующую AB через точку C , получим одну линию, принадлежащую искомой плоскости. Далее проводим прямую bf , касательную к горизонтальному следу поверхности в точке b . Отметим, что прямая bf является горизонтальным следом касательной плоскости.

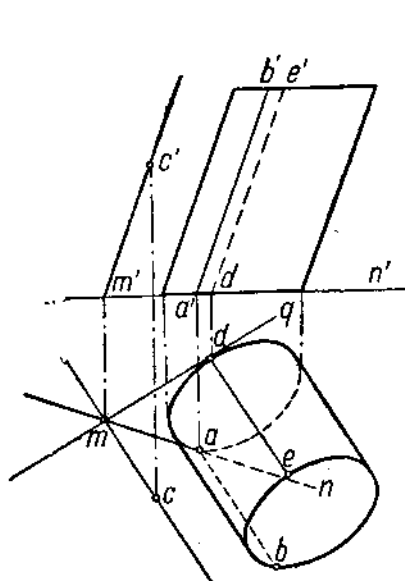
б) Точка C задана вне цилиндрической поверхности (черт. 379). Через точку C проводим прямую CM , параллельную образующей цилиндра, так как эта прямая может принадлежать касательной плоскости. Проведя через горизонтальный след m прямую mn , касательную к следу цилиндрической поверхности (точка касания a), получаем прямые CM



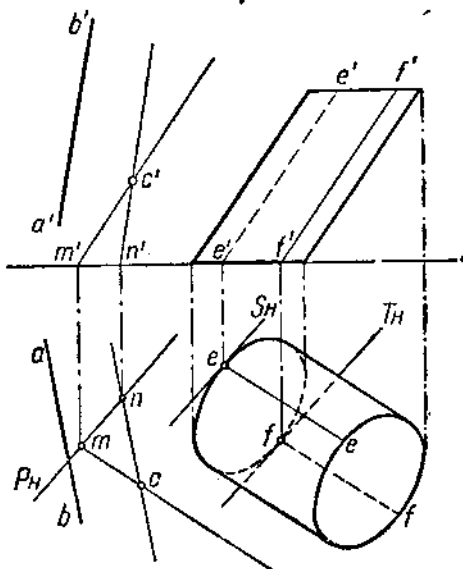
Черт. 377.



Черт. 378.



Черт. 379.



Черт. 380.

и MN , определяющие искомую плоскость, касательную к цилиндрической поверхности по образующей AB .

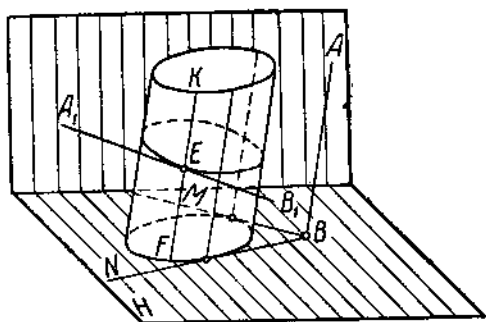
Задача имеет два решения: на черт. 379 через точку m проведена вторая касательная к следу поверхности (mq). Прямая MQ совместно с прямой CM определяет вторую касательную плоскость (линия касания DE).

Пример 2. Провести плоскость, касательную к цилиндрической поверхности, параллельно некоторой прямой.

Решение. Через какую-либо точку пространства C (черт. 380), проводим прямую CM , параллельно образующим цилиндра, и CN , параллельно заданной прямой AB . Прямые CM и CN определяют в пространстве плоскость, параллельную как прямой AB , так и образующим цилиндра; а следовательно, параллельную и искомой плоскости; следы прямых CM и CN на горизонтальной плоскости определяют след плоскости P_H . Проводя далее касательные к следу цилиндрической поверхности, параллельно P_H , получим горизонтальные следы S_H и T_H плоскостей, касательных к цилиндру; эти следы в совокупности с соответствующими линиями касания определяют искомые плоскости.

Пример 3. Провести плоскость, касательную к цилиндрической поверхности и проходящую через заданную прямую.

Задача может иметь решение только для частных случаев задания прямой, а именно, когда заданная прямая AB параллельна образующим цилиндра или когда заданная прямая A_1B_1 при своем продолжении касается поверхности (черт. 381).



Черт. 381.

В первом случае, когда AB параллельна образующим, решение заключается в нахождении следа прямой и проведении через этот след касательных к следу цилиндрической поверхности.

Плоскости, определяемые заданной прямой и касательными к следу, и будут искомыми.

В случае, если заданная прямая A_1B_1 не параллельна образующим, необходимо убедиться, является ли эта прямая при своем продолжении касательной к поверхности (см. стр. 222).

Если точка касания имеется, например E (черт. 381), то, проведя через E образующую KF , найдем касательную плоскость, определяемую прямыми A_1B_1 и KF .

Пример 4. Провести плоскость, касательную к конической поверхности и проходящую через заданную точку.

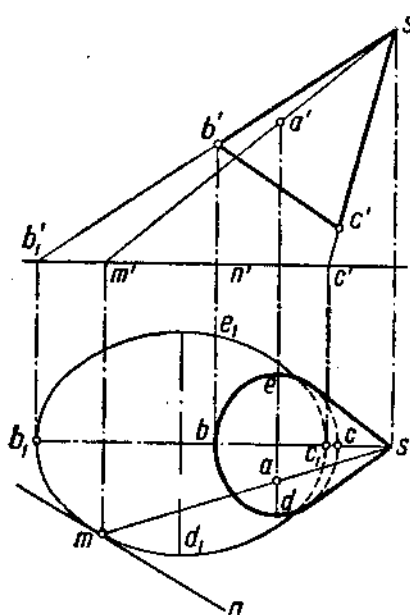
Решение. а) Точка A задана на конической поверхности. Поверхность задана вершиной S и проекциями направляющей: на плоскости V отрезком $b'c'$ и на плоскости H эллипсом bdc_e (черт. 382).

Предварительно находим горизонтальный след конической поверхности — кривая $b_1d_1c_1e_1$.

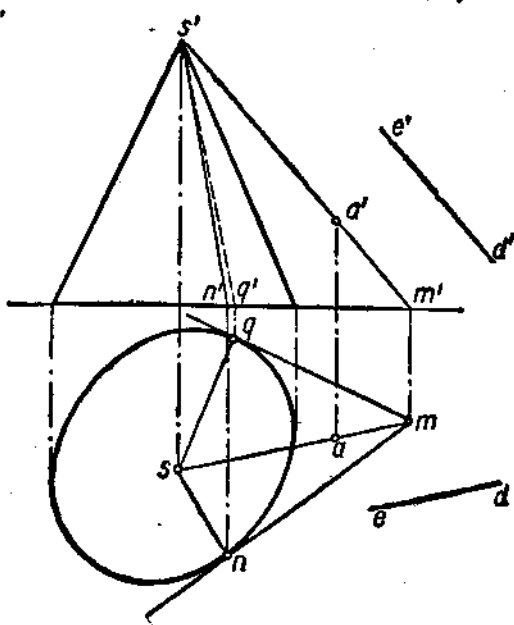
Образующая SM , проведенная через точку A , явится линией касания искомой плоскости к конической поверхности. Проведя прямую mn , касательную к следу поверхности в точке m , определим искомую плоскость, ибо прямые SM и MN , пересекающиеся в точке M , определяют плоскость.

б) Точка A задана вне конической поверхности (черт. 383).

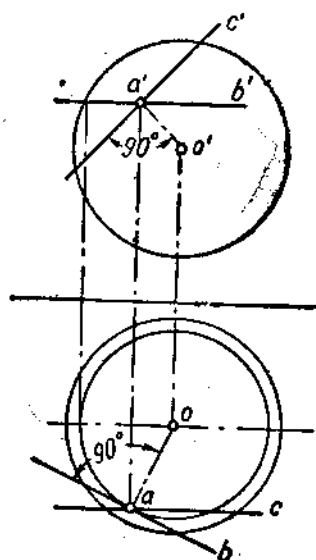
Касательная плоскость к конической поверхности проходит через вершину; поэтому, проведя прямую через точки S и A , найдем одну ли-



Черт. 382.



Черт. 383.



Черт. 384.

нию, принадлежащую искомой плоскости. Построив касательные к следу конической поверхности, проходящие через точку m (горизонтальный след линии SA), найдем тем самым линии MN и MQ , которые в совокупности с линией SA определяют две плоскости, касательные к заданной конической поверхности и проходящие через заданную точку. Линии касания — прямые SN и SQ .

Пример 5. Провести плоскость, касательную к конической поверхности и параллельную заданной прямой (черт. 383).

Решение. Проводим через вершину S прямую SM , параллельную заданной прямой ED . Плоскость, проходящая через прямую SM , очевидно, будет касательна к конической поверхности и параллельна данной прямой.

Проведя через горизонтальный след прямой SM линии MN и MQ , получаем искомые плоскости (два ответа).

Если требуется провести плоскость, касательную к конической поверхности, так чтобы она включала в себя заданную прямую, то

это возможно только для частных случаев положений прямой в простран-

стве, когда прямая проходит через вершину конуса или является касательной к его поверхности.

Пример 6. Провести плоскость, касательную к шаровой поверхности и проходящую через заданную точку.

Решение. а) Точка A задана на шаровой поверхности (черт. 384).

Общий способ решения заключается в построении двух кривых на шаровой поверхности, проходящих через заданную точку A , и двух касательных к полученным кривым в точке A . Найденные касательные определяют искомую плоскость.

Задачу можно решить иначе, зная, что касательная плоскость к шаровой поверхности перпендикулярна к радиусу шара. На черт. 384 проведены горизонталь AB и фронталь AC искомой плоскости: ab перпендикулярна к горизонтальной проекции радиуса и $a'c'$ перпендикулярна к вертикальной проекции радиуса, так как следы искомой плоскости должны быть перпендикулярны к проекциям радиуса (см. § 18).

Горизонталь AB и фронталь AC определяют искомую плоскость.

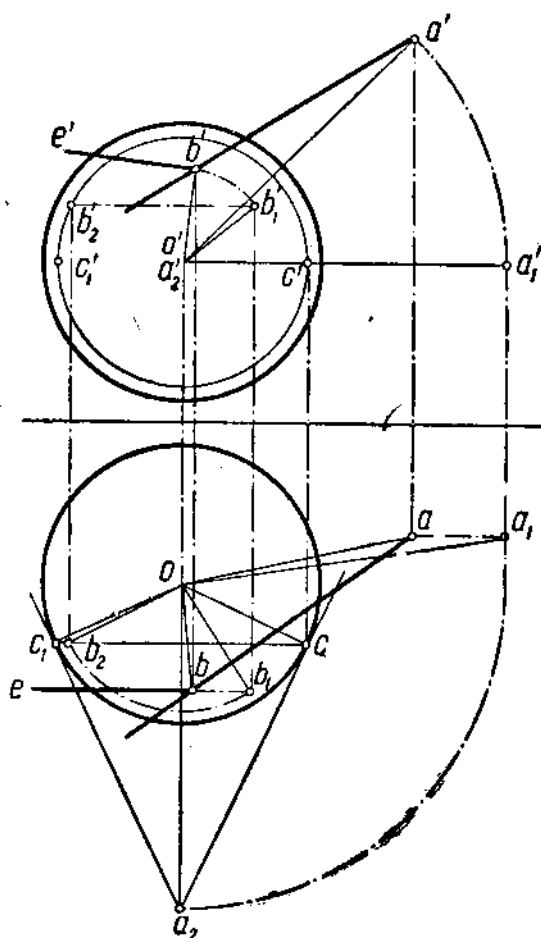
б) Точка A задана вне шаровой поверхности (черт. 385).

Искомой плоскостью будет всякая плоскость, касательная к конусу, образованному вращением прямой линии, касательной к шаровой поверхности и проходящей через заданную точку A , вокруг оси, проходящей через эту точку A и центр шара O .

Линией касания конуса и шаровой поверхности будет окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения AO .

Найдя эту линию касания, мы тем самым найдем множество точек, через которые должны проходить искомые плоскости.

На черт. 385 ось AO приведена в положение, перпендикулярное к плоскости V . Вращение один раз совершается вокруг оси, проходящей



Черт. 385.

через o' перпендикулярно к плоскости V до положения, параллельного плоскости H , и второй раз вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H и проходящей через точку o , до положения, перпендикулярного к плоскости V .

Проведя касательную из точки A_2 к большому кругу, находим точку касания C , которая при вращении вокруг оси OA_2 опишет окружность касания. Окружность касания изобразится в этом случае на плоскости H

отрезком cc_1 и на плоскости V окружностью радиуса $o'c'$.

Через любую точку окружности касания можно провести плоскость, проходящую через точку A_2 и касательную к шаровой поверхности.

Возвратив ось OA_2 в первоначальное положение OA и повернув одновременно с осью окружность касания, можно найти проекции окружности касания.

На черт. 385 найдено положение точки B , принадлежащей окружности касания, и построена касательная плоскость, определяемая прямыми AB и BE .

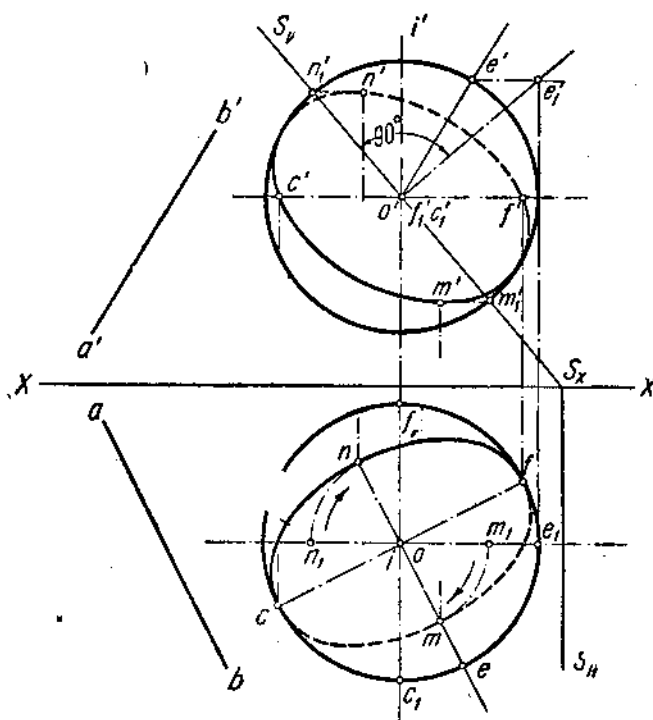
Линия AB по заданию принадлежит искомой плоскости.

Вторая линия BE , принадлежащая искомой плоскости, взята как фронталь плоскости, перпендикулярной к радиусу шара в точке B : $b'e' \perp o'b'$ и $be \parallel XX$.

Пример 7. Провести плоскость, касательную к шаровой поверхности и параллельную данной прямой AB (черт. 386).

Заметим, что если построить цилиндрическую поверхность, образованную движением прямой, касательной к шару и параллельной заданной прямой, то всякая плоскость, касательная к найденной цилиндрической поверхности, будет удовлетворять условию задачи, причем все эти плоскости будут проходить через точки линии касания цилиндрической и шаровой поверхностей.

Линией касания, очевидно, будет окружность большого круга, плоскость которого перпендикулярна к прямой AB .



Черт. 385.

Для нахождения окружности касания на черт. 386 проведены следующие построения:

1. Через центр шара проведена линия OE , параллельная AB , и повернута около оси OI , перпендикулярной к плоскости H , до положения OE_1 (параллельно плоскости V). Вертикальная проекция нового положения прямой OE будет $o'e_1'$, а горизонтальная проекция будет oe_1 .

2. Проведена через центр шара вертикально проектирующая плоскость S , перпендикулярная к линии OE_1 .

В этой плоскости будет расположена окружность большого круга, перпендикулярного к линии OE_1 , являющаяся окружностью касания цилиндра, описанного вращением линии, параллельной OE_1 и касательной к шару, вокруг оси OE_1 .

Образующей цилиндрической поверхности может быть, например, линия KN , касательная к шару в точке N и параллельная OE .

Окружность касания в этом положении изобразится на плоскости V отрезком $n_1'm_1'$ и на плоскости H эллипсом с осями c_1f_1 и n_1m_1 , взаимно-перпендикулярными, так как в пространстве отрезок C_1F_1 перпендикулярен к N_1M_1 и параллелен плоскости H .

Возвратив прямую OE_1 в положение первоначальное OE и повернув соответственно связанную с ним окружность касания $N_1F_1M_1C_1$, мы найдем проекции этой окружности в виде эллипсов $n_1'm_1'$ и $n''f''m''c''$.

Для облегчения построения проекций эллипсов напомним, что в пространстве $C_1F_1 \perp OE_1$ и $C_1F_1 \perp M_1N_1$. При вращении вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H , сохранится перпендикулярность между проекциями c_1f_1 и oe_1 и между m_1n_1 и c_1f_1 , кроме того, отрезок c_1f_1 будет равен диаметру шара.

Для построения горизонтальной проекции окружности касания найдены главные оси эллипса — через o проведен большой диаметр эллипса c_1f_1 перпендикулярно к oe_1 и малый m_1n_1 перпендикулярно к c_1f_1 .

На вертикальной проекции точки c' и f' будут лежать на линии, проходящей через o' и параллельной XX , так как CF при вращении остается параллельным плоскости H .

Построив проекции окружности касания, можно через любую точку этой окружности провести плоскость, касательную к шару, как это было указано на стр. 176, или построить след цилиндрической поверхности, касающейся шара и имеющей образующие, параллельные заданной прямой AB , и воспользоваться приемом, указанным на стр. 173 пример 1а.

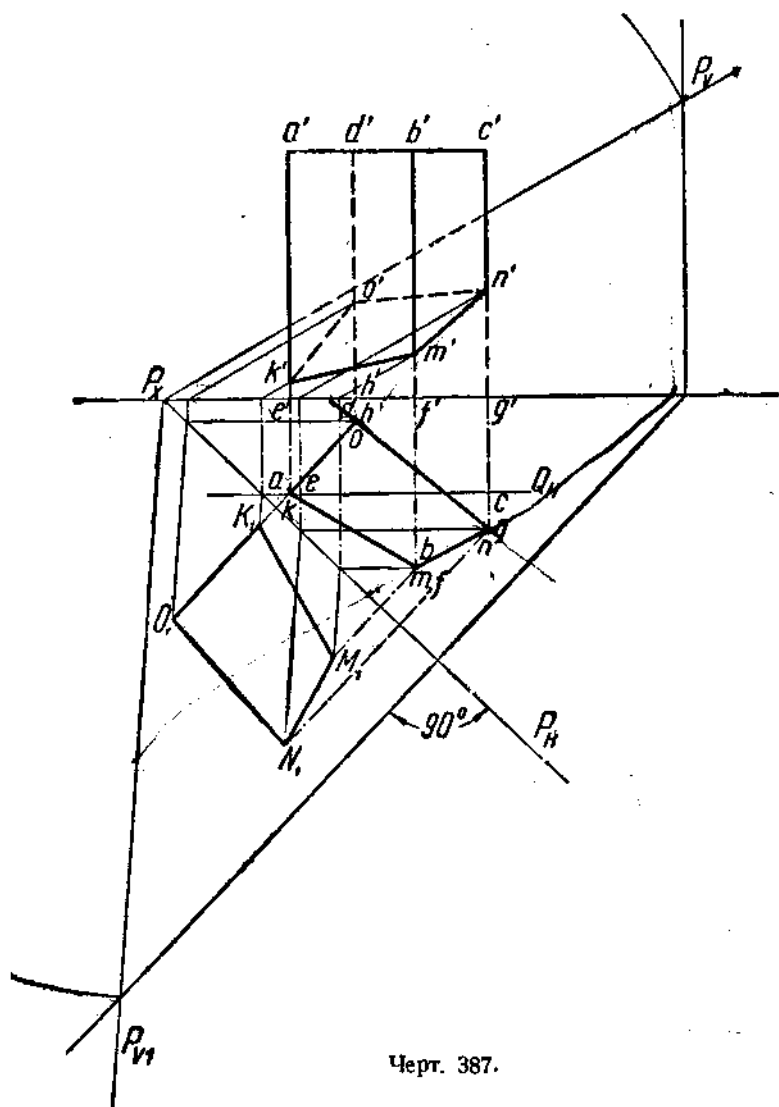
Глава VI

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ

Если какое-либо геометрическое тело пересечь плоскостью, то в этой плоскости получается фигура, периметр которой образуется при пересечении поверхности данного тела секущей плоскостью. Действительно, если пересечение производится плоскостью, то все точки, принадлежащие фигуре сечения, оказываются расположенными в одной и той же плоскости, т. е. фигура сечения есть действительно фигура плоская; ни одна из точек, принадлежащих фигуре сечения данного тела, не может

выйти за его пределы и крайние точки сечения, составляющие его периметр, в то же время являются крайними и для пересекаемого тела (в пределах данной плоскости), т. е. лежат на его поверхности.

В тех случаях, когда сечущая плоскость не параллельна ни одной из плоскостей проекций, фигура сечения проектируется на плоскостях



проекций не в натуральную свою величину; поэтому, если требуется определить истинные размеры площади сечения или его периметра, то следует применять один из тех способов, которые позволяют находить действительную величину искомого отрезка или площади, т. е. способ вращения, способ совмещения или способ перемены плоскостей проекций.

§ 38. Пересечение призмы плоскостью

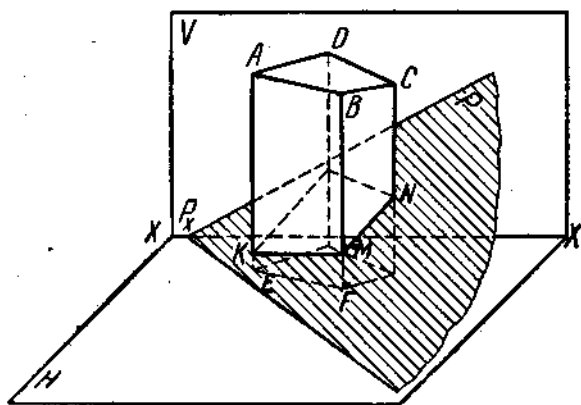
Рассмотрим случай пересечения прямой четырехугольной призмы плоскостью общего положения (черт. 387). Призма неправильная, основание призмы расположено в горизонтальной плоскости проекций.

Плоскость P (черт. 388) разделяет поверхность призмы на две части; линией раздела служит периметр фигуры сечения, вершины которой представляют собой точки пересечения ребер призмы с плоскостью P (например, точки K и M). Отсюда вытекает способ решения задачи о нахождении сечения призмы плоскостью, который указан на черт. 387:

1) определяют точку встречи ребра AE (ae , $a'e'$) с плоскостью P , для чего через ребро проводят вспомогательную плоскость Q (на черт. 387 вспомогательная плоскость параллельна плоскости V); находят линию пересечения плоскостей P и Q (на черт. 387 это одна из фронталей плоскости P) и на ней точку K (k , k');

2) аналогично определяют точки встречи остальных ребер с плоскостью P ;

3) найденные точки соединяют последовательно прямыми линиями, так как грани призмы (плоскости) пересекаются с плоскостью P по прямым.



Черт. 388.

Следует обратить внимание на то, что в данном случае (призма прямая) горизонтальная проекция фигуры сечения совпадает с горизонтальной проекцией самой призмы. Плоскость P представлена как непрозрачная, вследствие чего нижняя часть призмы невидима (вычерчена штриховыми линиями — см. черт. 387 и 388).

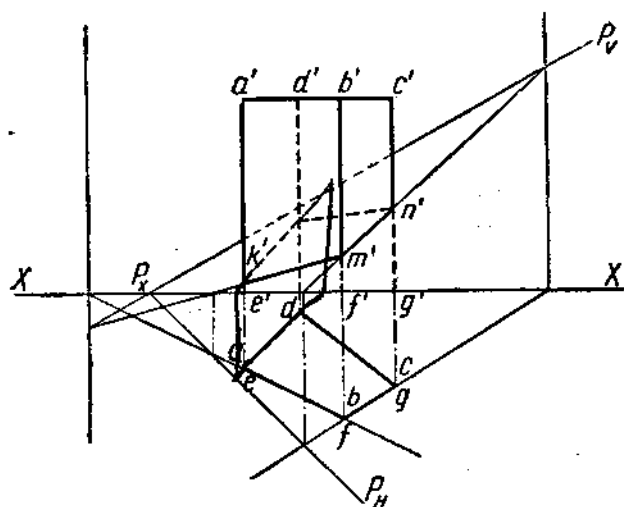
Линия пересечения призмы состоит из видимой и невидимой частей, видимая часть линии пересечения расположена на обращенных к зрителю видимых гранях.

На черт. 389 указан другой способ решения, а именно, построение линий пересечения граней призмы с плоскостью P . Для этого предварительно плоскости граней доводят до пересечения с плоскостями проекций, т. е. выделяют их следы (на черт. 389 дано построение для двух граней, $ABFE$ и $BCGF$; так как призма прямая, то вспомогательные плоскости, в которых расположены грани призмы, оказываются горизонтально-проектирующими). Далее находят линии пересечения вспомогательных плоскостей с плоскостью P ; те участки найденных линий, которые оказываются расположенными

между ребрами призмы, представляют собой стороны фигуры сечения призмы плоскостью P .

Так как горизонтальная проекция фигуры сечения в данной задаче

определяется сразу, без какого-либо построения, то требуется лишь найти вертикальную проекцию. В таком случае оказывается возможным применить еще один способ решения задачи, а именно, найти вертикальную проекцию каждой из сторон фигуры сечения, исходя из тех соображений, что следы отрезка, расположенного в какой-либо плоскости, должны лежать на следах этой плоскости. Такое построение



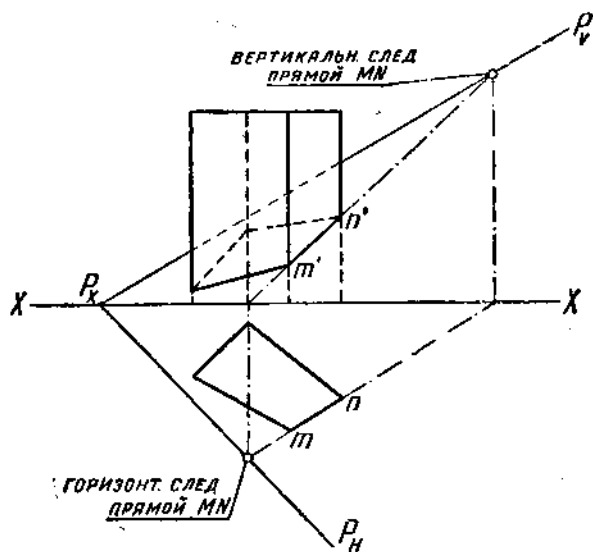
Черт. 389.

не указано на черт. 390; ход построения в данном случае совпадает с построением при решении задачи по второму способу (см. выше).

Истинная величина площади сечения может быть найдена совмещением плоскости P с одной из плоскостей проекций.

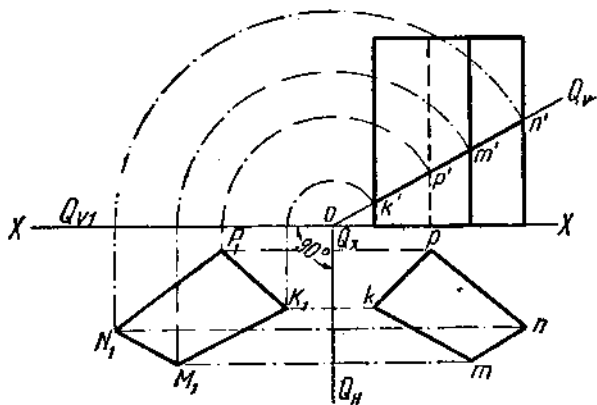
На черт. 387 плоскость P совмещена с плоскостью H вращением вокруг следа P_H .

Если секущая плоскость перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, то решение задачи в значительной степени упрощается (черт. 391), так как отпадает необходимость в каких-либо построениях для нахождения вертикальной проекции фигуры сечения, целиком совпадающей с вертикальным следом секущей плоскости Q . Упрощается также и нахождение



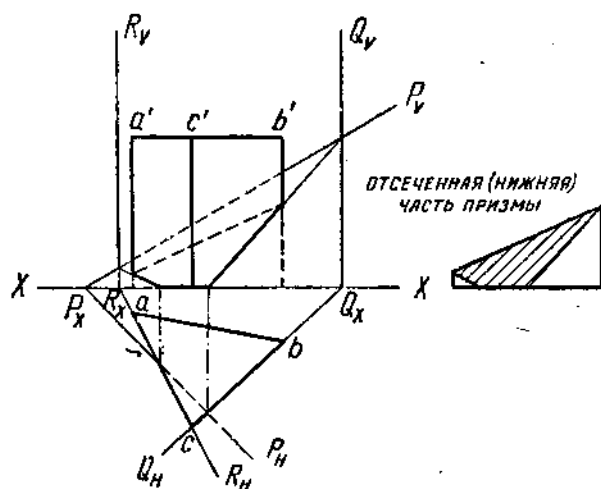
Черт. 390.

истинной величины сечения путем совмещения секущей плоскости с одной из плоскостей проекций (на черт. 391 плоскость Q совмещается с плоскостью H): так как секущая плоскость перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, то угол между следами равен 90° , и поэтому для построения совмещенного положения секущей плоскости достаточно провести перпендикуляр в точке схода следов к следу, служащему осью вращения. Дальнейшее построение не требует особых пояснений (см. черт. 391).



Черт. 391.

На черт. 392 выполнено построение для такого случая, когда не все ребра призмы оказываются пересеченными данной плоскостью P . Легко заметить, что если горизонтальный след секущей плоскости пересекает горизонтальную проекцию данного тела, то часть боковой поверхности тела оказывается не заданной секущей плоскостью. В рассматриваемом случае фигура сечения треугольной призмы оказывается четырехугольником, а не треугольником.



Черт. 392.

Самое построение на черт. 392 выполнено аналогично случаю, разобранному на черт. 389, т. е. плоскости граней призмы продолжены до

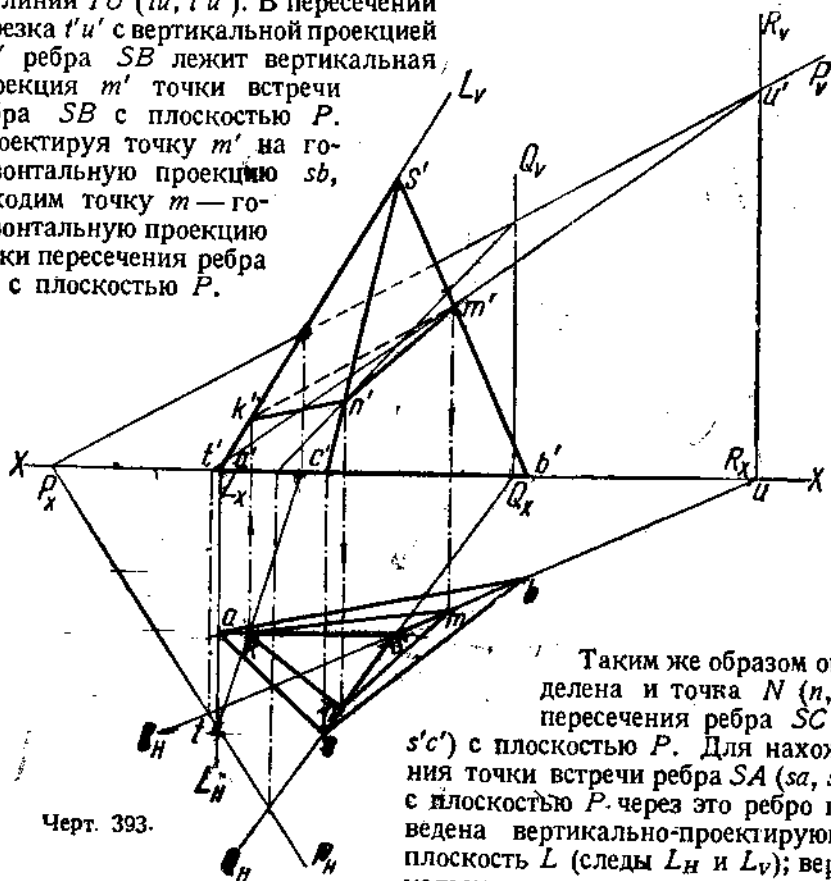
пересечения с плоскостями проекций и т. д.

Напомним, что истинный вид фигуры сечения во всех рассмотренных случаях может быть найден способом, указанным в § 29, т. е. при помощи оси родства. Осью родства может служить любая из следов секущей плоскости; ход построения будет аналогичен указанному на черт. 310.

§ 39. Пересечение пирамиды плоскостью

Треугольная неправильная пирамида пересечена плоскостью общего положения P (черт. 393). Для построения проекций фигуры сечения определяют точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью P .

Для нахождения точки, в которой ребро SB ($sb, s'b'$) пронизывает плоскость P , через ребро SB проведена горизонтально-проектирующая плоскость (следы R_H и R_V); эта плоскость пересекается с плоскостью P по линии TU ($tu, t'u'$). В пересечении отрезка $t'u'$ с вертикальной проекцией $s'b'$ ребра SB лежит вертикальная проекция m' точки встречи ребра SB с плоскостью P . Проектируя точку m' на горизонтальную проекцию sb , находим точку m — горизонтальную проекцию точки пересечения ребра SB с плоскостью P .



Черт. 393.

Таким же образом определена и точка N (n, n') пересечения ребра SC ($sc, s'c'$) с плоскостью P . Для нахождения точки встречи ребра SA ($sa, s'a'$) с плоскостью P через это ребро проведена вертикально-проектирующая плоскость L (следы L_H и L_V); вертикальная проекция линии пересечения

этой плоскости с плоскостью P совпадает с проекцией $s'a'$ ребра SA и, следовательно, приходится сперва найти горизонтальную проекцию точки встречи ребра SA с плоскостью P (точка k , лежащая в пересечении горизонтальной проекции ребра SA и горизонтальной проекции линии пересечения плоскостей L и P) и по ней определить положение точки k' — вертикальной проекции точки пересечения ребра SA с плоскостью P .

Соединяя между собой точки k', m', n' , получим вертикальную проекцию фигуры сечения, а соединяя точки k, m и n , получим горизонтальную проекцию фигуры сечения.

200



5

185

нахождения точек встречи ребер SA и SC с плоскостью P . проведена вспомогательная плоскость Q , параллельная вертикальной плоскости проекций. Выбор этой плоскости подсказан тем, что ребра SA и SC параллельны плоскости V , как это видно из черт. 394.

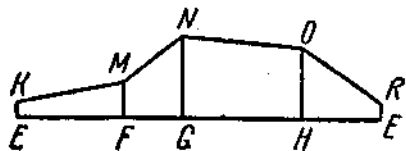
Плоскость Q в пересечении с плоскостью P дает одну из фронталей плоскости P ; в точках пересечения вертикальной проекции фронтали с вертикальными проекциями ребер SA и SC лежат вертикальные проекции (k' и n') искомых точек пересечения. Получив точки k' и n' , находим на горизонтальных проекциях ребер SA и SC точки k и n — горизонтальные проекции точек пересечения ребер SA и SC с плоскостью P .

Что же касается ребер SB ($sb, s'b'$) и SD ($sd, s'd'$), то для нахождения точек их пересечения с плоскостью P приходится выполнить вспомогательное построение, а именно совместить профильную плоскость R (следы R_H и R_V), проходящую через ребра SB и SD , с вертикальной плоскостью проекций; вместе с плоскостью R повернется и линия пересечения этой плоскости с плоскостью P , что даст возможность отметить точки m_1' и o_1' , соответствующие искомым вертикальным проекциям точек пересечения ребер SB и SD с плоскостью P . Дальнейшее построение видно на черт. 394.

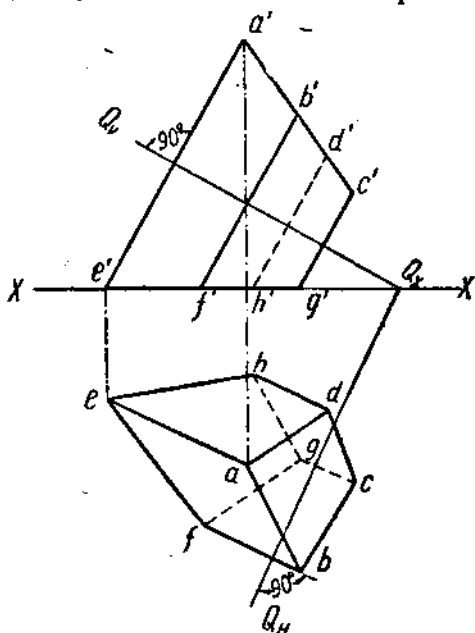
§ 40. Построение развертки боковой поверхности тела, пересеченного плоскостью

Требуется построить развертку боковой поверхности и нижней части призмы, изображенной на черт. 387.

Так как призма прямая, то ребра ее спроектируются без искажения на вертикальную плоскость проекций, а стороны основания будут равны их горизонтальным проекциям. На основании этого берем отрезок EF (черт. 395), равный отрезку $e'f'$ (см. черт. 387), в точках E и F проводим перпендикуляры, откладываем на них отрезки EK и FM , равные $e'k'$ и $f'm'$ (см. черт. 395 и 387), и соединяем



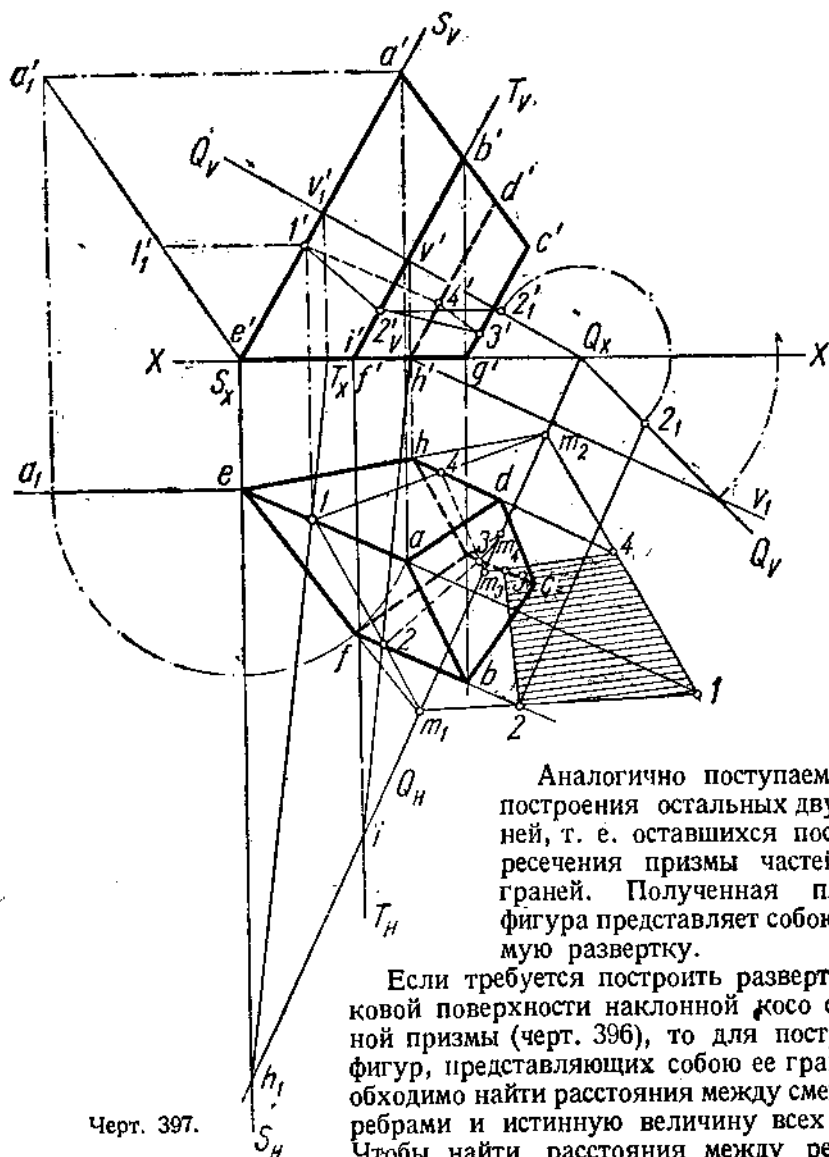
Черт. 395.



Черт. 396.

точки K и M ; получаем оставшуюся после пересечения призмы плоскостью (см. черт. 386) нижнюю часть грани $ABFE$.

Далее продолжаем сторону EF (черт. 395) на длину, равную fg (см. черт. 387), в точке G проводим перпендикуляр, откладываем на нем отрезок, равный $g'n'$ (см. черт. 387), и соединяем точки M и N (см. черт. 395).



Черт. 397.

Аналогично поступаем и для построения остальных двух граней, т. е. оставшихся после пересечения призмы частей этих граней. Полученная плоская фигура представляет собою искомую развертку.

Если требуется построить развертку боковой поверхности наклонной косо срезанной призмы (черт. 396), то для построения фигур, представляющих собою ее грани, необходимо найти расстояния между смежными ребрами и истинную величину всех ребер. Чтобы найти расстояния между ребрами,

надо провести вспомогательную плоскость, перпендикулярную к направлению ребер призмы (черт. 396, плоскость Q).

Построение показано на черт. 397. Вершины четырехугольников проекций фигуры сечения получены как точки пересечения ребер призмы с плоскостью Q (на черт. 397 показано построение точек 1 и 2 при помощи вертикально-проектирующих плоскостей S и T).

Для построения развертки боковой поверхности надо определить истинную величину каждого ребра с делением ребер на отрезки в соответствии с построенным сечением призмы плоскостью Q . Прием построения показан для ребра AE : вращением ребро поставлено параллельно плоскости V , при этом определилась истинная величина этого ребра — отрезок $a_1'e'$ и положение точки $1_1'$. Аналогично можно определить и остальные ребра.

Длины сторон четырехугольника — фигуры сечения — можно определить, например, вращением. На черт. 397 для определения длины этих сторон построен истинный вид сечения — заштрихованный четырехугольник. Зная величину сторон фигуры сечения и длину отрезков ребер, можем построить развертку (черт. 398). Откладываем на некоторой прямой последовательно отрезки $1-2$, $2-3$ и $3-4$, равные сторонам фигуры сечения; перпендикулярно к этой прямой в точках 1, 2, 3 и 4 проводим прямые, на которых откладываем длины отрезков ребер (например, $1-A=1_1'a_1'$ и $1-E=1_1'e'$).

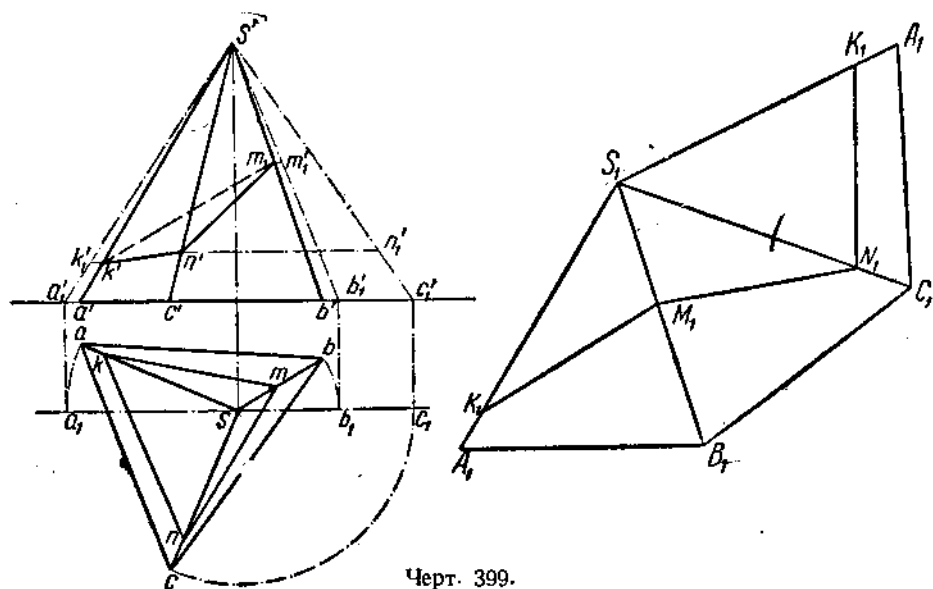
Для построения фигур сечения применено родственное соответствие между этой фигурой и ее горизонтальной проекцией. В качестве оси родства на черт. 397 взят след Q_H . Положение точки 2 определено совмещением; остальные точки (1, 3 и 4) найдены при помощи оси родства. На черт. 397 показано, что фигура сечения родственна не только своей горизонтальной проекции, но и горизонтальной проекции основания призмы. Также родственными являются лежащие в одной плоскости горизонтальные проекции фигуры сечения и основания призмы. Руководствуясь последним замечанием, можно было бы построить горизонтальную проекцию фигуры сечения, определив сперва обычным способом положение хотя бы точки 1, а затем, продолжив прямые eh , ef и hg до пересечения с осью родства (Q_H), соединить между собой точки 1 и m_1 , 1 и m_2 . В пересечении $1m_1$ и fb получаем точку 2, а в пересечении $1m_2$ и hd — точку 4. Точку 3 можно найти при помощи найденной точки 4 и точки m_3 на оси родства. Иным способом построить развертку боковой поверхности призмы, изображенной на черт. 396, можно, если четырехугольники — грани призмы — разбить диагоналями на треугольники, определить истинную величину сторон этих треугольников и геометрическим построением найти искомые грани.

Если строится развертка боковой поверхности пирамиды, дело несколько осложняется тем, что ребра пирамиды проектируются не в натуральную величину¹. Следовательно, приходится

¹ В натуральную величину проектируются ребра, параллельные плоскостям проекций.

определять истинную величину ребер (или их отрезков, если пирамида пересечена плоскостью и требуется построить развертку отсеченной части пирамиды); это можно сделать с помощью способа вращения, что достаточно просто.

На черт. 399 выполнено построение развертки боковой поверхности пирамиды, рассеченной наклонной плоскостью, как это было указано на черт. 393. Найдена истинная величина каждого из ребер, затем построен треугольник $A_1S_1B_1$ по трем сторонам: основание A_1B_1 взято равным горизонтальной проекции ab , а боковые стороны взяты равными найденным истинным величинам ребер SA и SB .



Черт. 399.

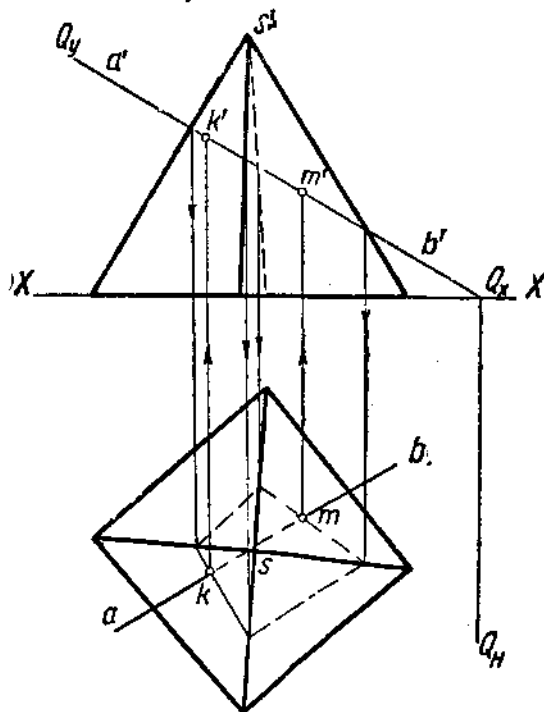
Далее, на стороне S_1B_1 построен второй треугольник, причем две другие стороны взяты: сторона B_1C_1 равна горизонтальной проекции bc , так как bc равно истинной величине ребра BC , сторона S_1C_1 равна истинной величине ребра SC .

Так же построен и третий треугольник. В результате получена боковая поверхность пирамиды. Если теперь на сторонах S_1A_1 , S_1B_1 и S_1C_1 отложить отрезки S_1K_1 , S_1M_1 и S_1N_1 , равные истинным величинам отрезков ребер пирамиды, пересеченной плоскостью (черт. 399), то получим ломаную линию $K_1M_1N_1K_1$, разделяющую распластанную боковую поверхность всей пирамиды на две части: боковую поверхность верхней отсеченной части пирамиды и боковую поверхность нижней отсеченной части пирамиды.

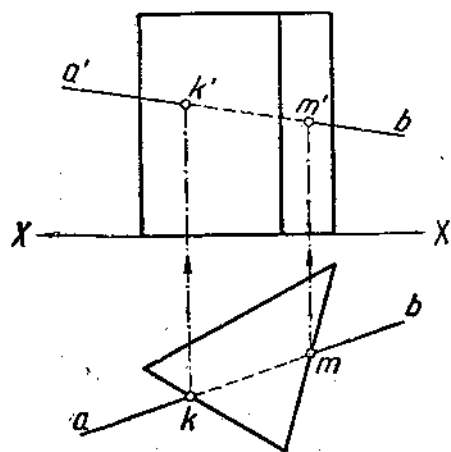
§ 41. Пересечение поверхности призмы и пирамиды прямой линией

Прямая линия, встречая на своем пути призму или пирамиду, пересекает их поверхность два раза; получаются точки входа и выхода.

Чтобы найти точки входа и выхода, проводят через данную прямую вспомогательную плоскость и находят линии пересечения этой плоскости с гранями тела; так как данная прямая и найденные линии на гранях оказываются расположенными в одной и той же плоскости, то легко найти их взаимное пересечение, т. е. определить точки, где данная прямая пронизывает поверхность тела.



Черт. 400.



Черт. 401.

На черт. 400 дан пример нахождения точек входа и выхода при пересечении прямой с поверхностью пирамиды.

Через прямую AB ($ab, a'b'$) проведена вспомогательная плоскость Q — вертикально-проектирующая. Вертикальная проекция сечения пирамиды этой плоскостью сливается с вертикальным следом плоскости; горизонтальная проекция сечения находится соответственным построением. Точки пересечения горизонтальной проекции прямой AB с горизонтальной проекцией фигуры сечения пирамиды вспомогательной плоскостью представляют собой горизонтальные проекции искомых точек входа и выхода; по найденным горизонтальным проекциям (точки k и m) легко посторить и вертикальные проекции (k' и m') точек пересечения прямой с пирамидой.

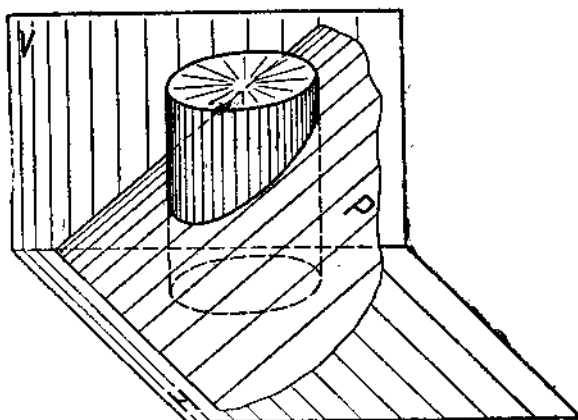
На черт. 401 точки пересечения прямой с призмой найдены без помощи вспомогательной плоскости, так как горизонтальные проекции точек входа и выхода получаются сразу в точках пересечения горизонтальных проекций прямой и призмы. Это возможно в том случае, если призма прямая

и ее основание параллельно одной из плоскостей проекций или, в частном случае, совпадает с ней. Остается найти вертикальные проекции точек входа и выхода, что затруднения не представляет.

§ 42. Пересечение цилиндра плоскостью

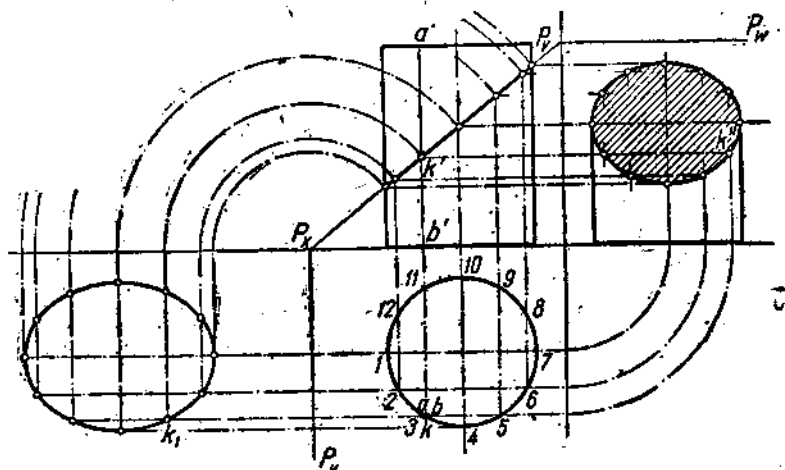
При решении задачи о пересечении цилиндра плоскостью требуется найти проекцию фигуры сечения, истинную величину площади сечения и построить развертку поверхности отсеченной части цилиндра.

Из рассмотрения черт. 402 следует, что для нахождения периметра фигуры сечения следует строить точки пересечения образующих цилиндра с данной наклонной секущей плоскостью; чем больше будет найдено таких точек, тем легче и точнее может быть прочерчена искомая линия.



Черт. 402.

На черт. 403 выполнено построение для случая пересечения прямого кругового цилиндра вертикально-проектирующей плоскостью. Фигура сечения будет эллипсом¹, малая ось которого равна диаметру основания цилиндра, большая



Черт. 403.

¹ В том, что фигура сечения представляет собой эллипс, легко убедиться на основании рассуждений, подобных приведенным выше относительно проекций окружности (см. § 25). Отметим также, что между эллипсом (фигурой сечения) и его проекциями существует родственное соответствие.

же ось длиннее этого диаметра, причем величина ее возрастает с увеличением угла наклона секущей плоскости по отношению к плоскости H .

Для построения проекций фигуры сечения цилиндра плоскостью надлежит взять достаточное количество образующих цилиндра и найти точки их пересечения с данной секущей плоскостью. Для случая, изображенного на черт. 403, построение значительно упрощается тем, что горизонтальная и вертикальная (на плоскости V) проекции точки пересечения любой образующей цилиндра с вертикально-проектирующей плоскостью определяются сразу, стоит только отметить проекции этой образующей. Так, образующая AB (проекции ab , $a'b'$) пересекает плоскость P в точке K ; вертикальная проекция этой точки (k') находится в пересечении вертикального следа P_V и проекции $a'b'$, а горизонтальная проекция (k) совпадает с точками a и b , т. е. с горизонтальной проекцией образующей AB .

Благодаря тому, что секущая плоскость представляет собою вертикально-проектирующую плоскость, фигура сечения (эллипс) проектируется на плоскость V в виде отрезка, лежащего на следе P_V и заключенного между крайними проекциями образующих цилиндра. Что же касается горизонтальной проекции сечения (эллипса), то она целиком совпадает с проекцией основания цилиндра, так как цилиндр прямой и секущая плоскость пересекают все его образующие.

Обычно размещают достаточное количество равномерно расположенных образующих. Этой разметкой удобно пользоваться не только для построения проекций сечения, но и для построения развертки боковой поверхности, как это увидим ниже.

Построение проекции сечения на плоскости W сводится к нахождению третьей проекции по двум данным. Например, точка k'' найдена как третья проекция по двум проекциям k и k' . На плоскости W начерчена лишь нижняя часть цилиндра, т. е. изображение построено так, как-будто верхняя часть цилиндра снята после пересечения его плоскостью. Можно было бы дать и иное изображение, как это показано на черт. 404, где проекция линии сечения на плоскости W , представляющая собою также эллипс, частично очерчена сплошной линией, что соответствует видимой (обращенной к зрителю) части поверхности цилиндра, и частично очерчена штриховой линией, что соответствует невидимой части поверхности цилиндра.

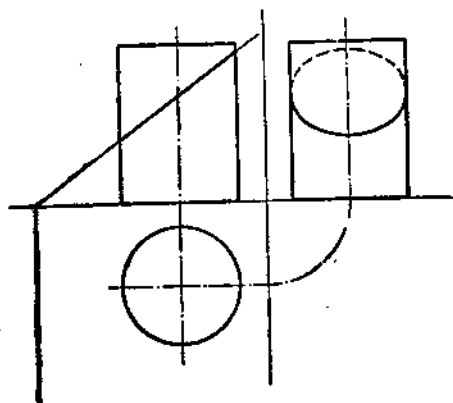
Если угол наклона плоскости P по отношению к плоскости H равен 45° , то проекция эллипса на плоскости W превращается в окружность. Нахождение истинной величины сечения выполнено путем совмещения плоскости P с плоскостью H (см. черт. 403).

Можно было бы в данном случае построить эллипсы (истинный вид сечения и проекцию на плоскости W) не путем переноса ряда точек, как это сделано на черт. 403, а известным способом построения эллипса по большой и малой его осям, поскольку эти оси сразу определяются.

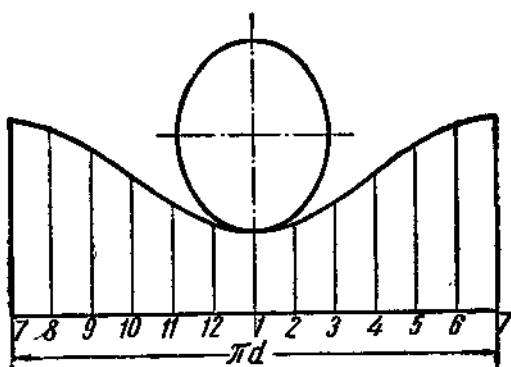
Что же касается построения развертки боковой поверхности какой-либо из частей рассеченного цилиндра, то задача решается аналогично тому, как решалась для призмы. Прежде всего находим развернутую окружность основания цилиндра либо путем подсчета по формуле πd ,

где d представляет собою величину диаметра основания цилиндра, либо путем приближенного построения, например, откладывая $3d + \frac{1}{4}d$ и т. п. Развернутую окружность (черт. 405) разделяют на столько равных между собою частей, сколько было размеченных образующих на поверхности цилиндра. Образующие цилиндра (см. черт. 403) проектировались без искажения на обе вертикальные плоскости; следовательно, можно взять отрезки образующих, хотя бы на нижней части цилиндра, и отложить их на перпендикулярах, проведенных в точках деления развернутой окружности основания цилиндра.

Соединяя концы отрезков образующих последовательно кривой линией, получим развернутый на боковой поверхности цилиндра эллипс. На черт. 405 развертка построена в предположении, что боковая поверхность нижней части цилиндра развертывалась от наибольшего из всех отрезков образующих; этот отрезок повторяется дважды — в начале и в конце развертки.



Черт. 404.



Черт. 405.

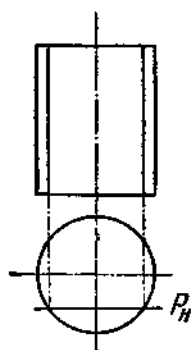
К развертке боковой поверхности на черт. 405 присоединена истинная величина площади сечения, перенесенная с черт. 403.

Если цилиндр пересекать плоскостями, параллельными его оси, то сечение будет получаться в форме прямоугольника (черт. 406).

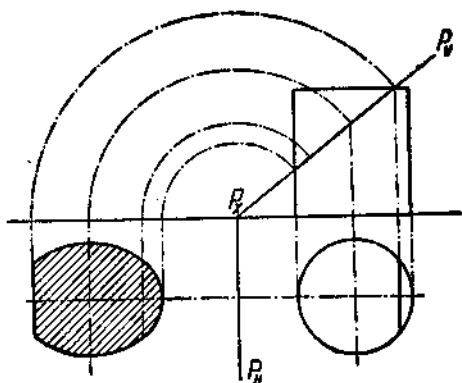
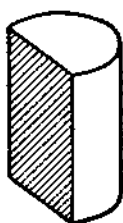
Если цилиндр плоскостью рассечен так, что не все образующие этой плоскостью пересекаются, то фигура сечения представляет собою часть эллипса (черт. 407), ограниченную отрезком прямой, соответствующей пересечению основания цилиндра секущей плоскостью.

На черт. 408 дано нормальное сечение наклонного цилиндра; вертикально-проектирующая секущая плоскость N проведена перпендикулярно к оси цилиндра. Фигура нормального сечения представляет собой эллипс. Нормальное сечение необходимо в том случае, если требуется построить развертку боковой поверхности какого-либо косого тела. Так, в случае, изображенном на черт. 408, периметр нормального сечения (эллипс) развернется в прямую и от этой прямой, перпендикулярно к ней, должны быть отложены отрезки образующих, взятые с вертикальной проекции. Образующие могут быть размечены на поверхности цилиндра посредством деления окружности основания на части.

число равных частей; эллипс при этом также разделится на целое число частей, но не все эти части будут равной длины. Развертывание эллипса в прямую может быть произведено путем последовательного откладывания возможно более мелких частей эллипса.

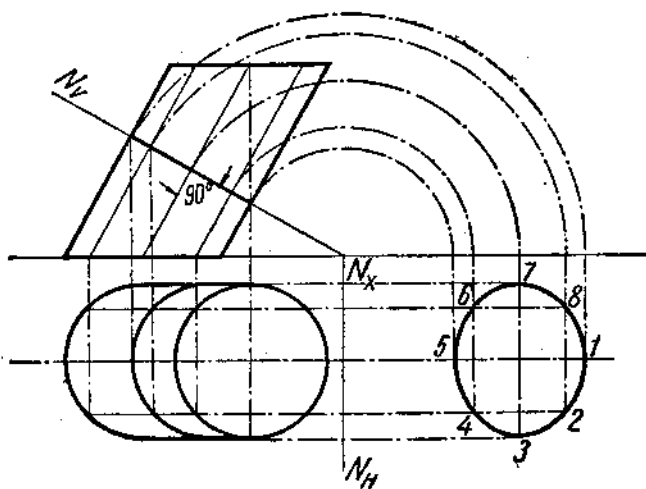


Черт. 406.



Черт. 407.

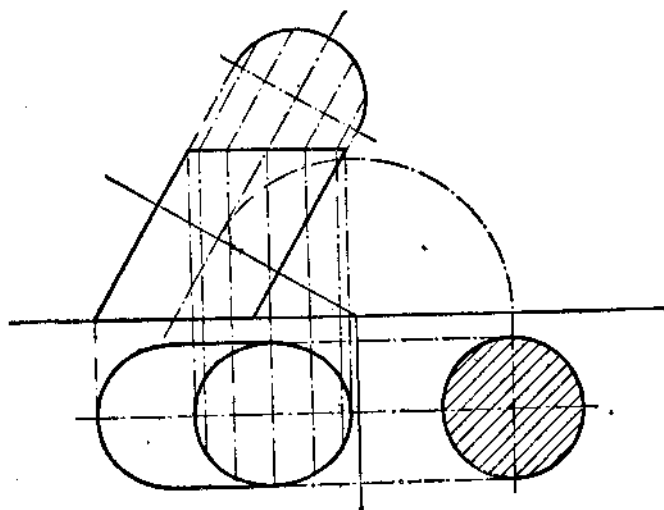
На черт. 409 изображен круговой цилиндр, усеченный с двух сторон параллельными плоскостями под углом к оси цилиндра и поставленный эллиптическим срезом на плоскость H . Нормальным сечением такого цилиндра будет, конечно, круг.



Черт. 408.

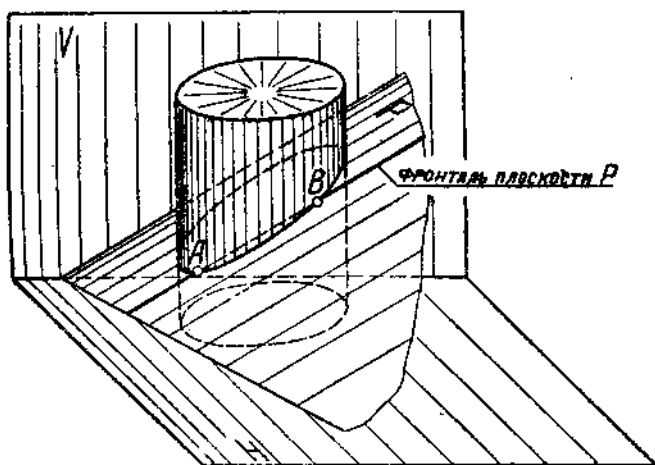
Прямой круговой цилиндр, поставленный основанием на плоскость H , пересечен плоскостью общего положения P (черт. 410); требуется найти проекцию фигуры сечения, истинную величину площади сечения и построить развертку боковой поверхности нижней части цилиндра.

Для построения проекций фигуры сечения (эллипса) следует найти ряд точек, в которых образующие цилиндра пересекаются с плоскостью P .



Черт. 409.

Горизонтальная проекция сечения (черт. 411) совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра. Следовательно, горизонтальные проекции точек пересечения образующих цилиндра секущей плоскостью лежат на окружности, а потому можно разметить некоторое коли-

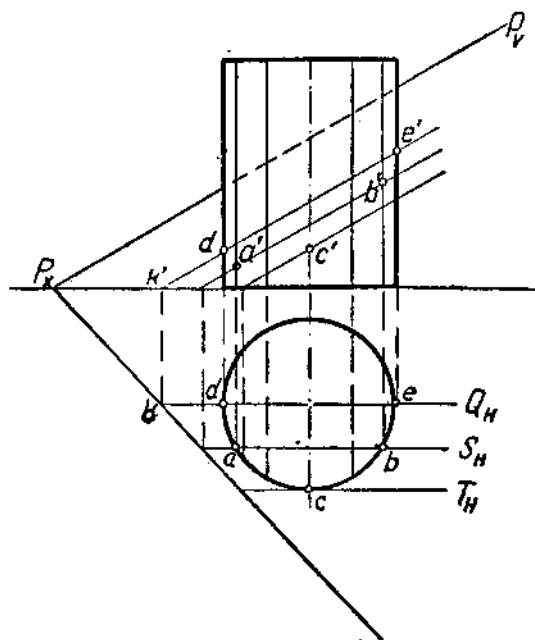


Черт. 410.

чество образующих цилиндра, разделив окружность на столько же частей; если эти части будут равны между собой, то образующие окажутся равномерно расположенными на поверхности цилиндра.

Итак, положение горизонтальной проекции точки пересечения любой из образующих цилиндра с плоскостью P известно (например, точка a , см. черт. 411). Для нахождения соответственной вертикальной проекции можно рассуждать следующим образом: искомая точка пересечения образующей цилиндра с плоскостью P (например, точка A , см. черт. 410) должна лежать в этой плоскости; следовательно, мы можем провести в плоскости P горизонталь или же фронталь, на которой

искомая точка должна находиться. Провести любую из этих линий в данной плоскости P вполне возможно, так как положение горизонтальной проекции искомой точки пересечения известно. На черт. 411 проведена фронталь: через точку a проведена параллельно оси проекций горизонтальная проекция фронтали, найден ее горизонтальный след и по нему построена вертикальная проекция фронтали; в том месте, где вертикальная проекция фронтали пересекает вертикальную проекцию соответственной образующей, лежит вертикальная проекция a' точки пересечения, принадлежащей вертикальной проекции линии сечения.



Черт. 411.

Благодаря равномерной разметке точек на окружности (черт. 411) одна и та же фронталь определяет две точки кривой пересечения A и B (см. черт. 410 и 411). Если же построить фронталь, соответствующую точке C (черт. 411), то эта фронталь определит лишь одну точку кривой пересечения. Фронталь, построенная по точкам d и e , определяет крайние точки d' и e' .

Продолжая аналогичные построения, можно найти достаточное количество точек для очертания вертикальной проекции линии пересечения. На черт. 412 верхняя часть цилиндра снята и прочерчена вся линия пересечения; если же вертикальная проекция цилиндра показывается целиком, то обычно линию пересечения прочерчивают так, как это показано на черт. 413 (нахождение точек на черт. 413 выполнено при помощи горизонталей).

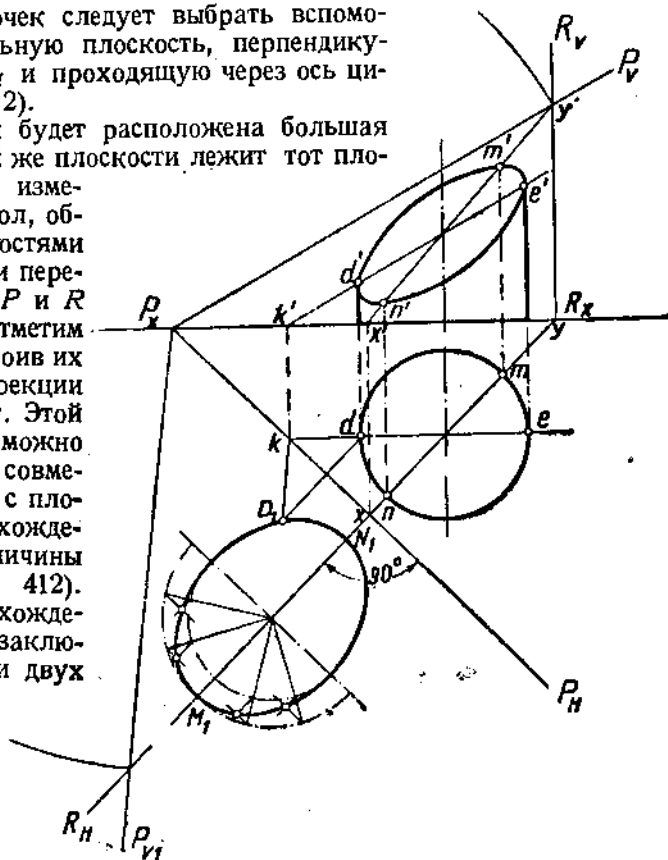
Необходимые для нахождения линии пересечения цилиндра и плоскости образующие и фронталы могут быть одновременно выделяемы с помощью вспомогательных вертикальных плоскостей, параллельных плоскости V . На черт. 411 указан след S_H одной из таких вспомогательных плоскостей; эта плоскость выделяет две образующие на поверх-

ности цилиндра и дает в пересечении с плоскостью P фронталь последней. Вспомогательная плоскость T (след T_H) лишь касается цилиндра и потому выделяет одну образующую, а следовательно, и одну точку пересечения. При построении вертикальной проекции линии пересечения, помимо точек d' и e' (см. черт. 411 и 412) следует найти еще две особых точки, а именно m' и n' — наивысшую и наинизшую точки эллиптической фигуры сечения на плоскости V . Для нахождения этих точек следует выбрать вспомогательную вертикальную плоскость, перпендикулярную к следу P_H и проходящую через ось цилиндра (см. черт. 412).

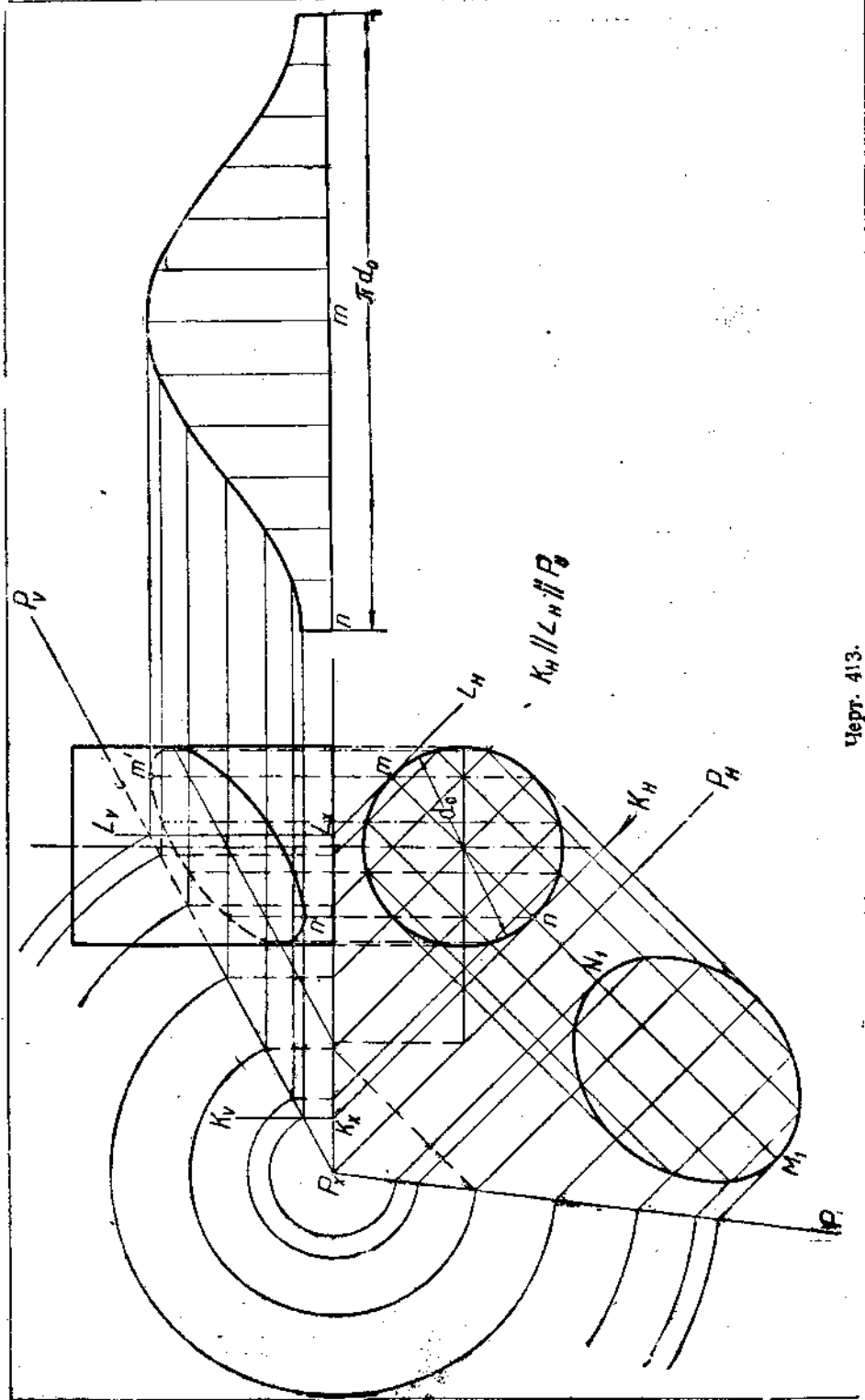
В этой плоскости будет расположена большая ось эллипса и в этой же плоскости лежит тот плоский угол, который измеряет двугранный угол, образованный плоскостями P и H . Найдя линии пересечения плоскостей P и R (см. черт. 412), отметим точки m' и n' , построив их на вертикальной проекции $x'y'$ по точкам m и n . Этой же плоскостью R можно воспользоваться для совмещения плоскости P с плоскостью H при нахождении истинной величины сечения (см. черт. 412).

Иной способ нахождения точек m' и n' заключается в проведении двух вертикальных плоскостей, касательных к цилиндру, горизонтальные следы которых параллельны следу P_H . Эти плоскости пересекутся с плоскостью P по горизонталям последней (черт. 413, вспомогательные плоскости K и L); найдя точки m и n на концах радиусов, перпендикулярных к P_H , построим точки m' и n' на вертикальных проекциях найденных горизонталей.

Нахождение истинной величины сечения производится обычно совмещением секущей плоскости с одной из плоскостей проекций, H или V . При этом совмещаются и все точки, найденные для проведения кривой пересечения, и, таким образом, получается возможность очертить эллиптический контур фигуры сечения (черт. 413). На черт. 412 эллипс в совмещенном положении построен по большой и малой осям, как это на-



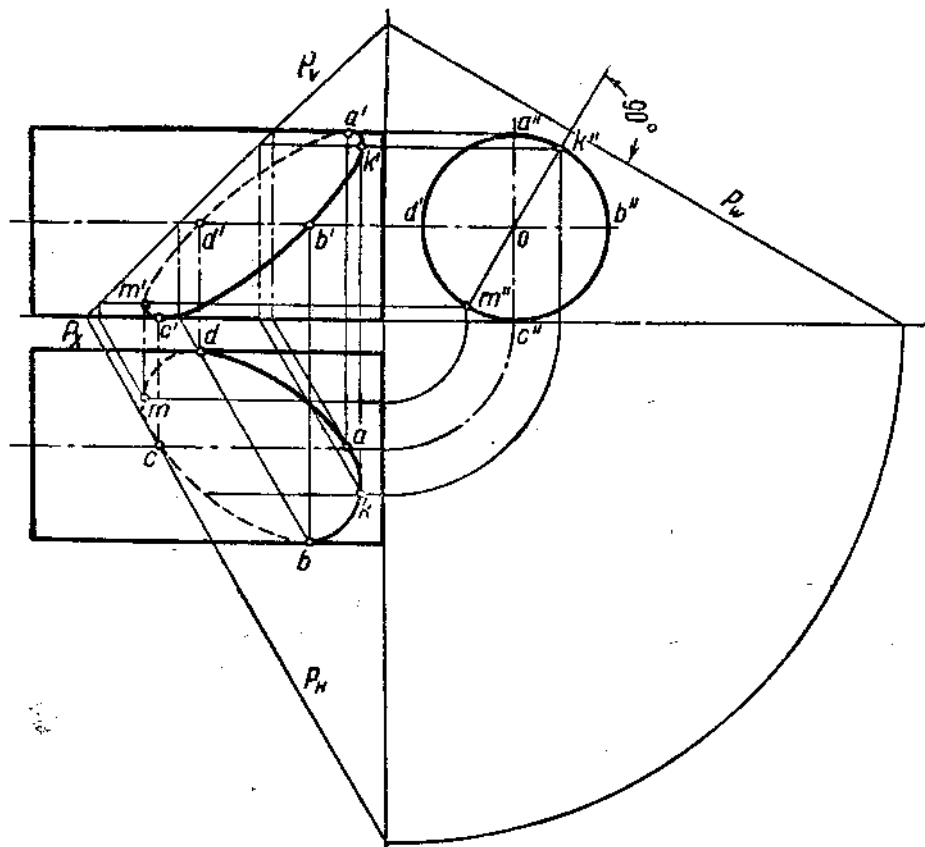
Черт. 412.



стично показано на этом чертеже (для сравнения точка D_1 получена совмещением фронтали).

Построение развертки боковой поверхности нижней части цилиндра выполнено на черт. 413.

Следует обратить внимание на то, что разметка горизонтальных проекций образующих на окружности основания велась от точки n , чтобы упростить чертеж, так как оказалось возможным с помощью

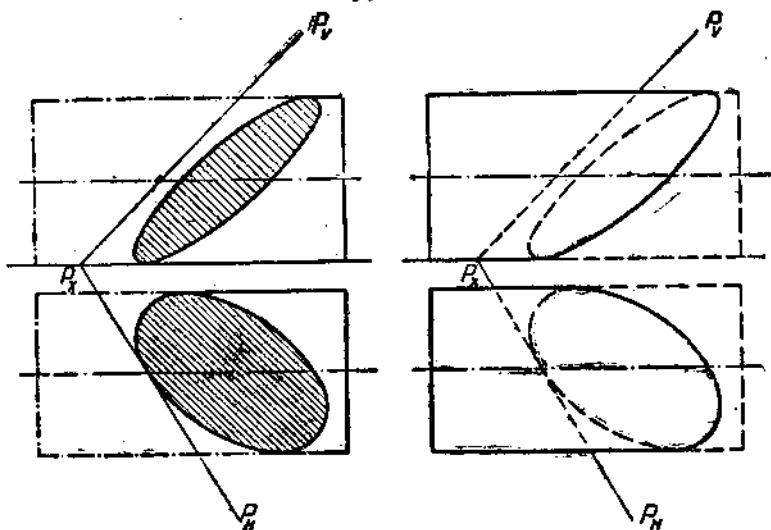


Черт. 414.

одной и той же горизонтали получать по две точки на вертикальной проекции линии сечения. Но при этом точки d , e и c (черт. 413) оказались бы не совпадающими с размеченными на окружности и для них пришлось бы проводить особые горизонтали. При построении развертки положение таких точек определяется особо, тем же способом, как и для других точек.

Рассмотрим еще один пример пересечения цилиндра плоскостью (черт. 414). Цилиндр расположен так, что его ось перпендикулярна к плоскости W . Для построения сечения проводим ряд горизонтальных плоскостей. Эти плоскости пересекают цилиндр по образующим, а секу-

щую площадь — по горизонталям. В пересечении образующих с горизонталями получаются точки кривой сечения. Из обозначенных на чертеже точек следует отметить точки K и M ; проекции этих точек на плоскостях V и H являются крайними точками справа и слева для проекций кривой сечения. Для нахождения точек k' , m' , k и m необходимо сперва наметить положение проекций k'' и m'' этих точек, а для этого строим след секущей плоскости P_W и проводим к нему перпендикуляр из центра o . После того как точки k'' и m'' оказываются размеченными, нахождение точек k' , m' , k и m труда не составляет.



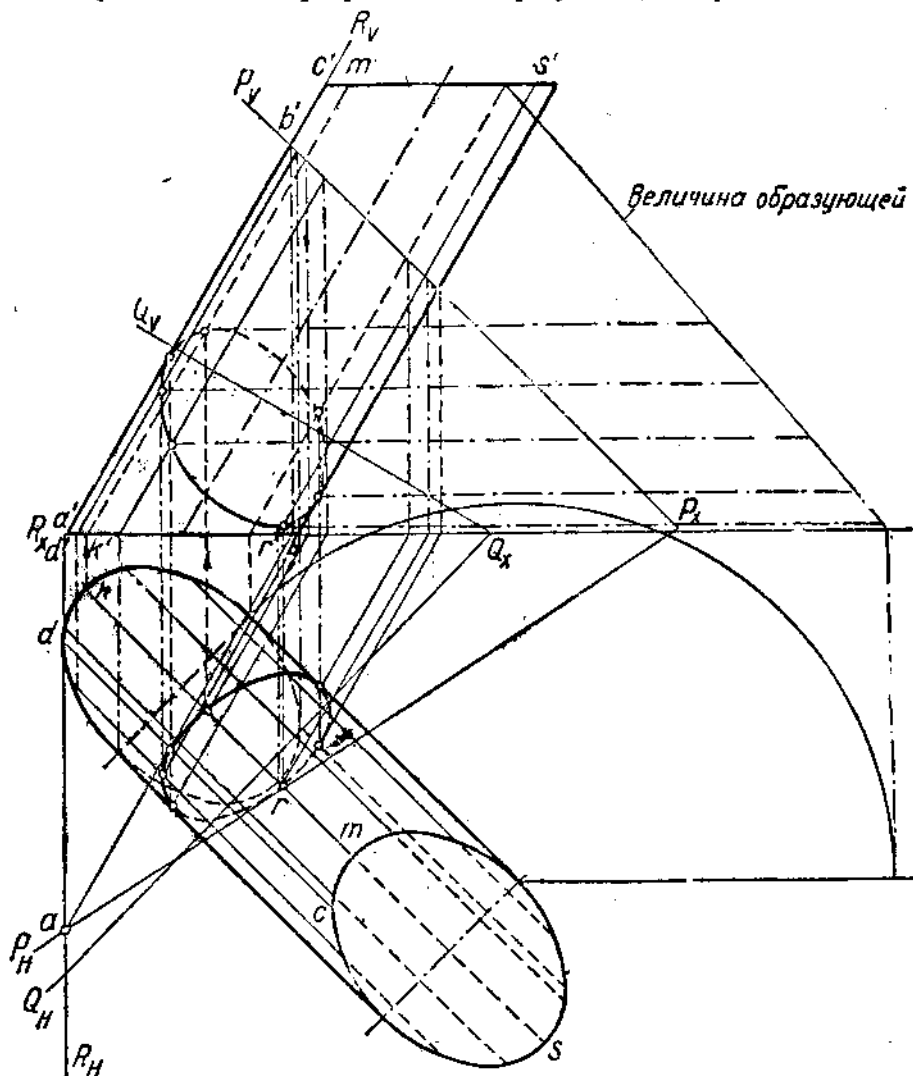
Черт. 415.

Если след на плоскости W не может быть найден (выходит за пределы чертежа), то следует подобрать вспомогательную плоскость, параллельную данной, так, чтобы след этой вспомогательной плоскости на W был в пределах чертежа. Перпендикуляр к этому следу, проведенный из центра окружности — боковой проекции цилиндра (черт. 414), определит требуемые точки (точки k'' и m'' на черт. 414). Совместив плоскость P хотя бы с плоскостью H , можно найти истинную величину сечения.

На черт. 414 секущая плоскость как бы прозрачна, а проекции линий сечений делятся на «видимую» и «невидимую» части. На черт. 415 слева секущая плоскость также считается прозрачной, цилиндр изображен срезанным, а отпавшая его часть показана штрих-пунктирной линией. В правой же части черт. 415 построение выполнено в предположении, что плоскость не прозрачна и что цилиндр разделен на две части; одна выступает из плоскости P , другая же скрыта за ней (вычерчена штриховой линией).

Если бы пришлось найти пересечение наклонно поставленного цилиндра плоскостью, то следовало бы применить тот же основной прием, что и в предыдущих задачах, т. е. искать точки встречи образующих цилиндра с данной секущей плоскостью. На черт. 416 дан в двух проек-

циях косо срезанный цилиндр с поперечным круговым сечением, поставленный так, что его ось не параллельна ни одной из плоскостей проекций (цилиндр поставлен эллиптическим основанием на плоскость H). На поверхности цилиндра размечены образующие; эта разметка может



Черт. 416.

быть произведена таким образом, чтобы горизонтальные проекции образующих частично совпадали между собой, т. е. образующие симметрично располагались по боковой поверхности цилиндра.

Для определения точек встречи образующих с секущей плоскостью P проводим через образующие вертикально-проектирующие плоскости; эти плоскости пересекаются с плоскостью P по прямым, параллельным

между собой, так как самые вертикально-проектирующие плоскости параллельны одна другой, поскольку они проводятся через образующие цилиндра. На основании этого можно упростить построение, найдя лишь в одном случае полностью линию пересечения вспомогательной вертикально-проектирующей плоскости с плоскостью P — см. черт. 416, где полностью построена линия пересечения плоскостей P и R , прямая AB (ab , $a'b'$). Для других образующих достаточно из точки пересечения вертикальной проекции образующей с вертикальным следом плоскости P провести перпендикуляр к оси проекций и из полученной на оси точки провести прямую, параллельную отрезку ab , до пересечения с горизонтальной проекцией образующей; получается горизонтальная проекция точки, принадлежащей линии пересечения цилиндра, а по горизонтальной проекции легко найти вертикальную, так как она должна лежать на вертикальной проекции образующей.

Истинную величину сечения можно найти, как обычно, совмещением секущей плоскости с одной из плоскостей проекций; что же касается построения развертки, то в этом случае приходится определять истинные величины отрезков образующих, так как образующие цилиндра не параллельны ни одной из плоскостей проекций.

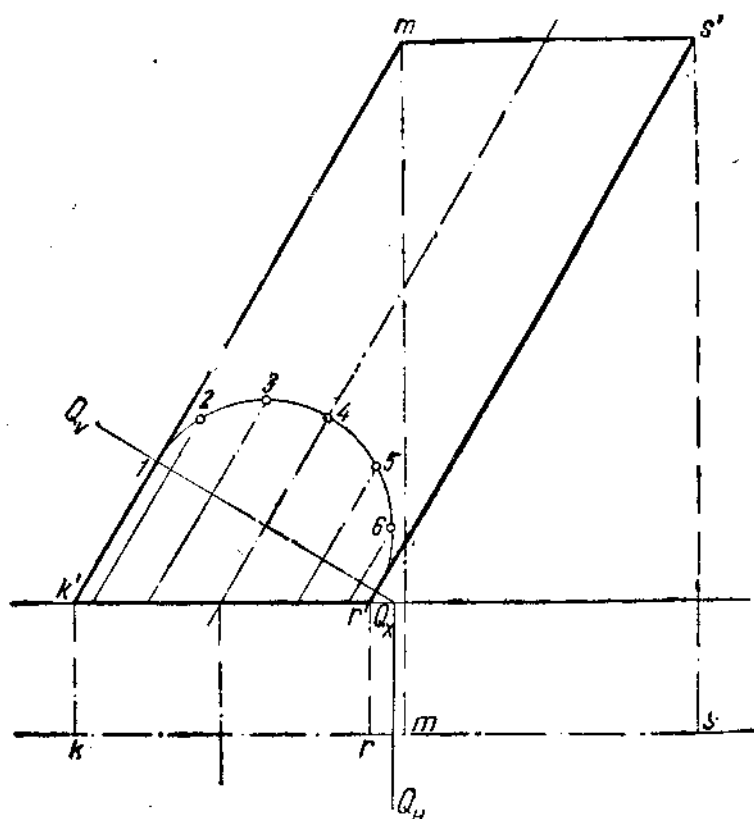
Сперва находим истинную величину какой-либо образующей цилиндра (все образующие равны между собой); затем на этой образующей отмечаем истинные длины отрезков всех образующих, для чего из вертикальных проекций точек пересечения образующих с плоскостью P проводим прямые, параллельные оси проекций, до пересечения с найденной образующей.

Однако для построения развертки в данном случае недостаточно определить отрезки образующих; надо знать, как развернется эллипс, ограничивающий основание, а для этого, в свою очередь, следует найти нормальное (перпендикулярное к оси) сечение цилиндра. Линия, ограничивающая это сечение (в данном случае окружность), развернется в прямую, от которой и возможно будет откладывать соответствующие отрезки образующих для построения эллипса, ограничивающего основание; таким же способом возможно построить и развертку эллипса, получающегося от пересечения цилиндра плоскостью P . Для нахождения нормального сечения следует пересечь цилиндр новой плоскостью, перпендикулярной к оси цилиндра; следы этой плоскости должны быть соответственно перпендикулярны к проекциям оси цилиндра. На черт. 416 такой плоскостью служит плоскость Q .

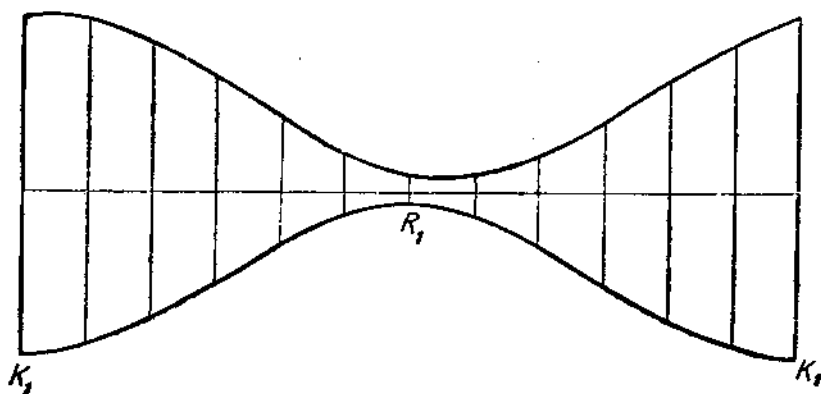
Построение проекций нормального сечения пришлось бы выполнить таким же путем, как это сделано для сечения цилиндра плоскостью P , т. е. найти пересечение хотя бы одной вертикально-проектирующей плоскости, проходящей через образующую цилиндра, с плоскостью Q и т. д.

Для построения развертки надо определить истинные величины отрезков образующих от эллиптического основания до нормального сечения. Все эти построения на черт. 416 не указаны.

Для всех построений, связанных с нормальным сечением, проще было бы предварительно повернуть цилиндр в положение, при котором ось цилиндра расположилась бы параллельно плоскости V . Тогда плоскость Q оказалась бы вертикально-проектирующей и отрезки образую-



Черт. 417.



Черт. 418.

щих от основания до нормального сечения были бы видны без искажения на вертикальной проекции (черт. 417). Так как при повороте цилиндра нас интересует преимущественно новое положение его вертикальной проекции, то на детальное построение горизонтальной проекции в ее повернутом положении можно не тратить времени, а ограничиться отметкой положения крайних точек k , m , r и s (черт. 417). По новому положению этих точек легко найти новое положение вертикальных проекций образующих k' , m' , r' и s' , а следовательно, и очертания вертикальной проекции цилиндра, поставленного теперь так, что ось его стала параллельна плоскости V . На черт. 417 половина окружности, принадлежащей нормальному сечению, совмещена с вертикальной плоскостью проекций; это позволяет разметить положение точек 1, 2, 3, 4 и т. д., что необходимо для построения развертки боковой поверхности. Действительно, развернув окружность нормального сечения в прямую (черт. 418¹) и разделив эту прямую на части, соответственно длинам дуг 1—2, 2—3 и т. д. на черт. 417, проведем в точках деления прямой перпендикуляры и отложим на них величины отрезков образующих от нормального сечения до нижнего основания цилиндра; получается ряд точек, через которые может быть проведена кривая — развертка эллипса нижнего основания цилиндра.

Для проведения кривой — развертки эллипса, получаемого при пересечении цилиндра плоскостью P , можно откладывать истинные величины отрезков образующих или от прямой, представляющей собою развертку окружности нормального сечения, или от кривой — развертки эллипса нижнего основания цилиндра. В первом случае придется брать истинную величину отрезков образующих от нормального сечения до сечения цилиндра плоскостью P ; во втором случае — отрезки образующих от нижнего основания цилиндра до сечения его плоскостью P .

§ 43. Пересечение конуса плоскостью

Общность решения задач на пересечение плоскостью цилиндра и призмы может быть отмечена и по отношению к конусу и пирамиде. Представляя себе конус, как пирамиду, число граней которой бесконечно велико, мы можем воспользоваться тем же приемом построения периметра фигуры сечения, который был применен для пирамиды: выделяя на поверхности конуса ряд образующих (на пирамиде им соответствуют ребра), мы определяем точки встречи этих образующих с секущей плоскостью, т. е. сводим задачу на пересечение прямых с плоскостью. Соединяя построенные точки пересечения образующих с плоскостью, получаем периметр фигуры сечения.

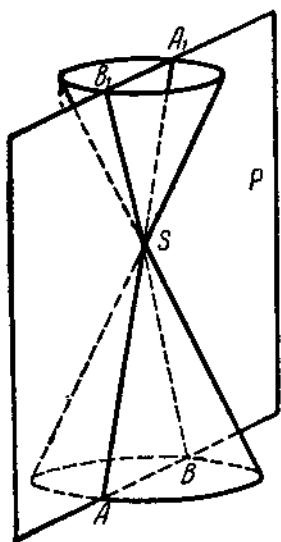
Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то на его боковой поверхности получаются две образующие (линии пересечения боковой поверхности конуса с плоскостью). Можно представить, что все образующие на поверхности конуса продолжены за его вершину и образуют продолжение боковой поверхности. Получается боковая поверхность полного конуса, разделяемая его вершиной на две симметричные части или полу (черт. 419).

¹ На черт. 418 точки размечены, но цифрами не обозначены.

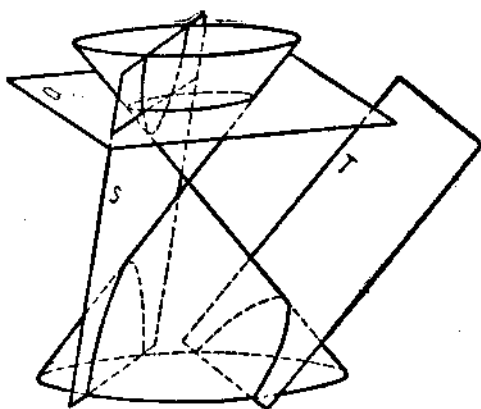
Плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его боковую поверхность вообще по двум образующим; плоскость, касательная к боковой поверхности конуса, выделяет на ней одну образующую. Для прямого кругового конуса можно отметить зависимость между углами наклона плоскости, проходящей через вершину конуса, и образующей по отношению к оси конуса, а именно: если угол наклона плоскости по отношению к оси конуса меньше угла наклона образующей, то на боковой поверхности конуса получаются две его образующие; если же эти углы равны, то выделяется одна образующая, т. е. плоскость касается поверхности конуса.

При пересечении поверхности прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, получаются следующие кривые: 1) эллипс — секущая плоскость пересекает все образующие одной половины поверхности (черт. 420, плоскость Q), 2) парабола — секущая плоскость параллельна одной из образующих (черт. 420, плоскость T), 3) гипербола — секущая плоскость параллельна двум образующим (черт. 420, плоскость S), — получаются две ветви гиперболы на обоих полках конической поверхности.

В частном случае, когда плоскость пересекает все образующие и перпендикулярна к оси конуса, получается окружность.



Черт. 419.



Черт. 420.

На черт. 421 дано построение проекций фигуры сечения прямого кругового конуса вертикально-проектирующей плоскостью Q . Для нахождения точек, принадлежащих фигуре сечения, проведены двенадцать образующих, равномерно распределенных на поверхности конуса. Разбивка образующих начата с горизонтальной проекции. Точки пересечения следа Q_0 с проекциями этих образующих на плоскости V представляют собой проекции точек искомой кривой пересечения — в данном случае эллипса (плоскость пересекает все образующие). По этим проекциям точек найдены проекции на плоскостях H и W .

Следовательно, $\triangle P'Fr' = \triangle k'Ed'$, откуда $Fr' = Ed'$. Получаем:

$$EF = d'r' = kp. \quad (2)$$

Подставляя kp из (2) в (1) вместо $d'r'$, получаем $tl_1 < kp$, т. е. горизонтальная проекция, получаемая на фиг. 421, не может быть окружностью.

На черт. 423 выполнено построение проекций гиперболы, полученной при пересечении поверхности прямого кругового конуса горизонтально-проектирующей плоскостью S . Горизонтальная проекция гиперболы совпадает со следом S_H . В пересечении следа S_H с горизонтальной проекцией основания определяем точки a и b — горизонтальные проекции начальных точек гиперболы; по точкам a и b находим положение точек a' , b' , a'' , b'' .

Для нахождения точек c' и c'' — наивысших точек проекций гиперболы на плоскостях V и W , проводим вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость T через ось конуса перпендикулярно к следу S_H . Горизонтальная проекция искомой точки (точка c) получается на S_H ; найдя проекции образующей SK , отмечаем на них точки c' и c'' .

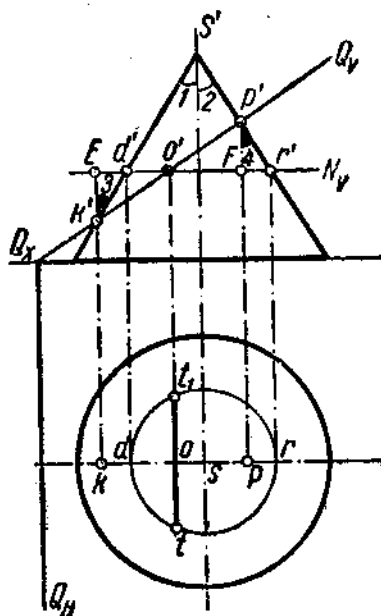
Затем определяем точки d' и e'' , в которых проекции гиперболы разделяются на видимую и невидимую ветви. Положение этих точек находим при помощи образующих SN и SP .

Для нахождения иных точек гиперболы можно провести ряд образующих (полезные образующие будут расположены в пределах той части поверхности конуса, которая отмечена буквами $SAKB$) или ряд вспомогательных секущих плоскостей. На черт. 423 указана одна из таких плоскостей — горизонтальная плоскость U , пересекающая поверхность конуса по окружности. При помощи этой плоскости найдены точки F и G .

Если взять вторую полу конической поверхности, то на ней определится вторая ветвь гиперболы.

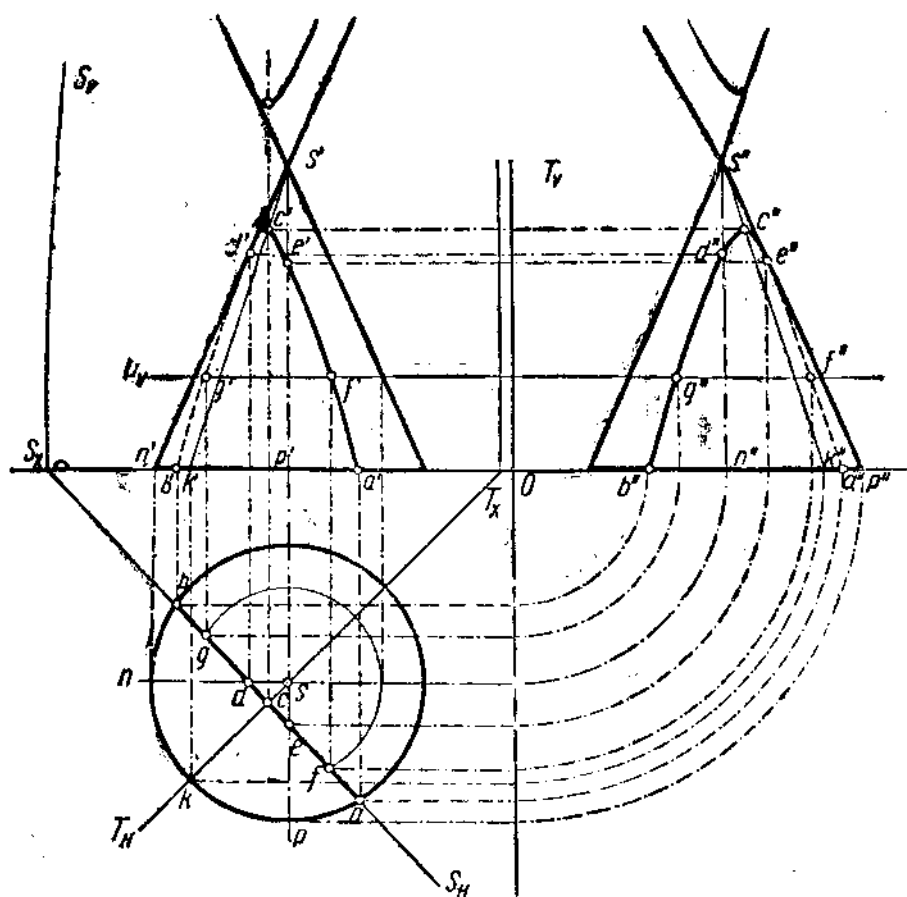
На черт. 424 прямой круговой конус пересечен плоскостью общего положения. Требуется построить проекции сечения, найти истинную его величину и построить развертку боковой поверхности конуса с нанесением на нее развернутой линии пересечения.

Построение проекций сечения начнем с нахождения точек, лежащих на контуре вертикальной проекции конуса. Для этого проведем через ось конуса вспомогательную секущую плоскость, параллельную плоскости V . След этой плоскости (R_H) пройдет через направленный горизонтально диаметр окружности основания. Плоскость R пересечет плоскость P по фронтале RB (rb , $r'b'$), а конус по двум образующим SA



Черт. 422.

($sk, s'k'$) и $SM (sm, s'm')$. Точки A и B , получающиеся при пересечении фронтали RB с образующими SK и SM , принадлежат искомой линии пересечения конуса с плоскостью.



Черт. 423.

В точках a' и b' вертикальная проекция линии пересечения касается боковых сторон вертикальной проекции конуса и, следовательно, разделяется на две части: одна часть — проекция той ветви линии пересечения, которая расположена на обращенной к зрителю (видимой) стороне поверхности конуса, другая часть — проекция кривой на невидимой стороне конуса.

Теперь надо построить еще две особых точки, а именно — высшую и низшую точки сечения (относительно горизонтальной плоскости). Для нахождения этих точек проводим вспомогательную секущую плоскость Q , горизонтально-проектирующую, перпендикулярную к следу P_H

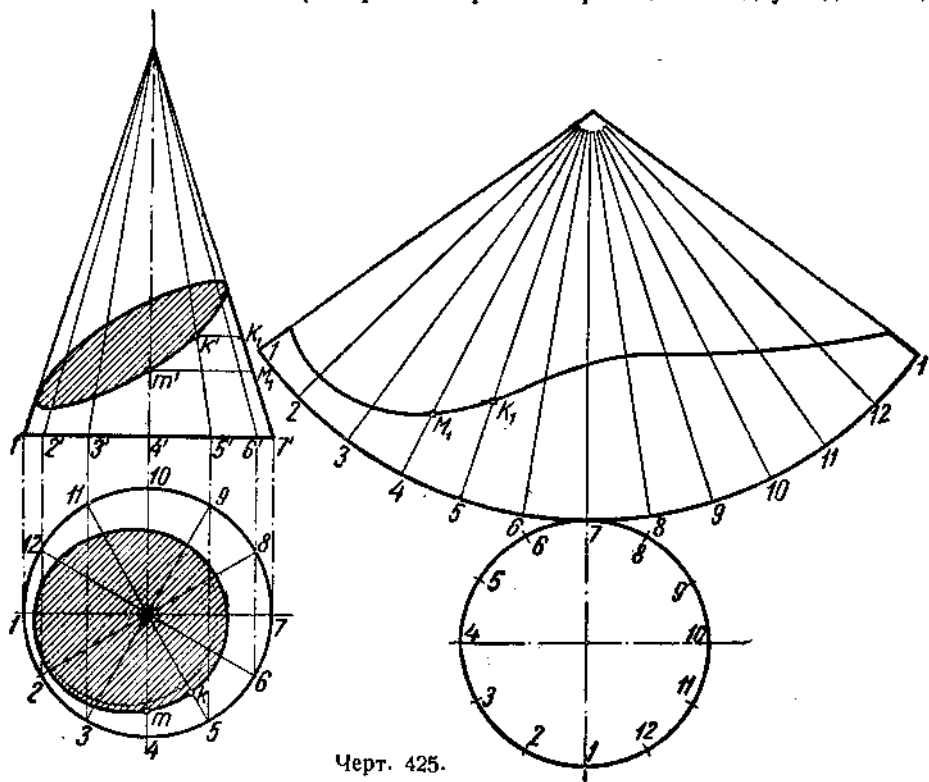
Черт. 424.

Что же касается промежуточных точек линии пересечения, то для нахождения таковых весьма удобно пользоваться горизонтальными вспомогательными секущими плоскостями, так как эти плоскости пересекают поверхность конуса по окружностям, а плоскость P — по горизонталям. Полезными плоскостями будут лишь те, у которых вертикальные следы помещаются в пределах между c' и d' , так как в данном случае выше точки d' и ниже точки c' не может быть точек, принадлежащих линии пересечения. На черт. 424 показано построение при помощи двух таких плоскостей (N_1 и N_2); точки линии сечения лежат в пересечении проекций окружностей и горизонталей.

Положение следа $N_{1/2}$ выбрано так, чтобы расстояние между точками c' и d' делилось пополам; горизонтальная проекция горизонтали проходит через точку o , в которой делится пополам отрезок cd .

Чем более будет взято вспомогательных секущих плоскостей, тем легче провести проекции линии сечения.

Если требуется построить третью проекцию сечения конуса плоскостью, следует поступать обычным путем, а именно, строить третьи проекции найденных точек (построение третьей проекции по двум данным).



Черт. 425.

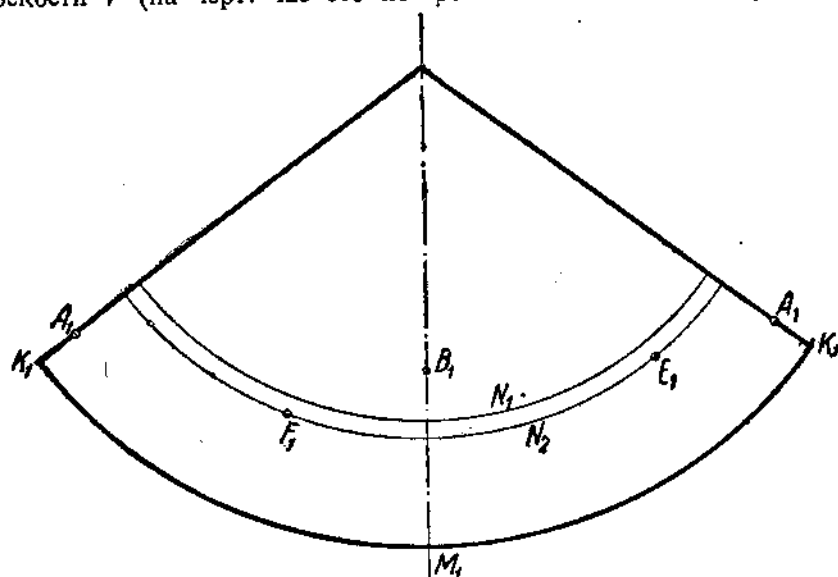
Истинная величина сечения находится совмещением секущей плоскости с одной из плоскостей проекций. Полученный в данном случае эллипс может быть построен по точкам или же по большой и малой осям, длины которых легко найти путем совмещения крайних точек осей (на черт. 424 такими точками служат точки C и D для большой оси и точки E и F для малой).

Построение развертки боковой поверхности конуса в данном случае сопровождается построением развернутой линии сечения.

Напоминаем, что боковая поверхность конуса разворачивается в круговой сектор, причем образующая конуса служит радиусом дуги сектора, а длиной дуги сектора является длина окружности основания конуса.

Угол сектора подсчитывают по формуле $\alpha = \frac{r}{l} 360^\circ$, где r — радиус окружности основания конуса, а l — образующая конуса.

Для того чтобы нанести на развернутой боковой поверхности конуса линию сечения, необходимо разметить точки, принадлежащие этой линии. Обычно проводят ряд образующих конуса, определяют истинную величину отрезков образующих, размечают положение образующих на развернутой боковой поверхности конуса и откладывают длины отрезков образующих. Это построение выполнено на черт. 425, где косо срезанный конус доведен до полной величины с тем, чтобы сперва построить развертку всей боковой поверхности, а затем на ней разметить линию сечения. Для разметки точек взято 12 образующих. Истинная величина отрезков образующих определена с помощью сноса конечных точек вертикальных проекций отрезков образующих на боковую образующую, что соответствует повороту образующих до положения, параллельного плоскости V (на черт. 425 это построение показано для двух точек).

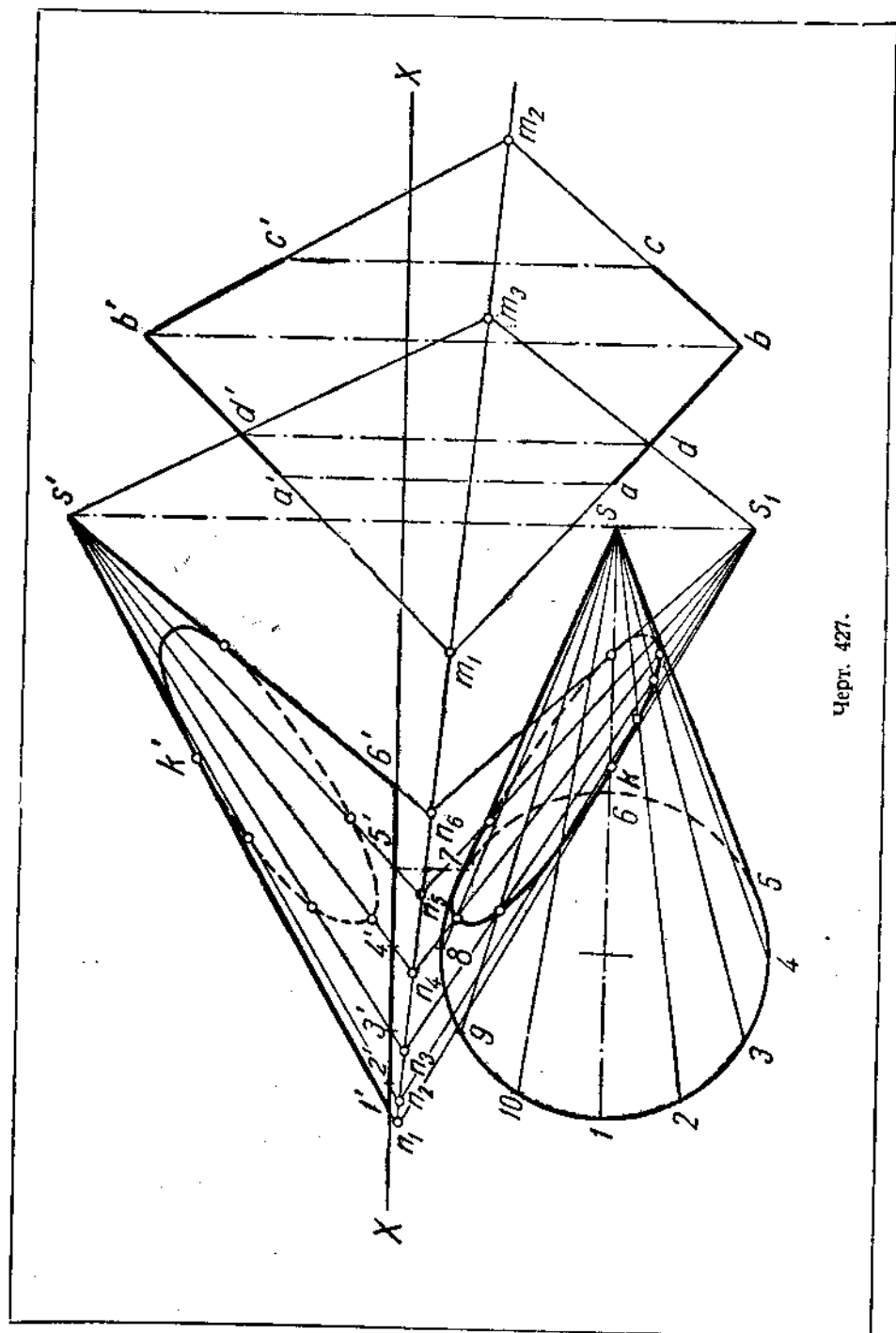


Черт. 426.

На черт. 424 образующие не были размечены. Для построения развертки в этом случае можно было бы на секторе, представляющем развертку всей боковой поверхности, нанести ряд concentric дуг, соответственно плоскостям N_1 , N_2 и т. д., и на этих дугах приблизительно или подсчетом центральных углов найти положение точек кривой.

Так, точка e (черт. 424) отведена от радиуса sk на дугу $1-e$; если длину этой дуги отложить на дуге N_2 (черт. 426), то положение точки E_1 будет определено. Иначе, определяя величину угла $es1$ (по транспортиру) и взяв отношение его к 360° , можно в таком же отношении разделить центральный угол сектора (черт. 426) и на дуге N_2 отметить искомую точку.

На черт. 427 рассмотрен случай пересечения наклонного конуса плоскостью, причем последняя задана двумя пересекающимися прямыми AB и BC . Построение выполнено при помощи родственного соответствия (см. § 29).



Черт. 427.

Можно было бы выполнить построение, применяя вспомогательные секущие плоскости. В данном случае удобны горизонтальные плоскости, так как они пересекали бы конус по кругам; эти круги изображались бы на плоскости H без искажения. Каждая вспомогательная секущая плоскость давала бы в пересечении с данной плоскостью горизонталь последней; горизонтальная проекция горизонтали, пересекаясь с горизонтальной проекцией круга, определяла бы горизонтальные проекции точек, принадлежащих искомой фигуре сечения.

Прием, примененный на черт. 427, заключается в построении, прежде всего, оси родства, определяющей совместно с парой родственных точек, хотя бы a и a' , родственное соответствие.

Ось родства проходит через точки m_1 и m_2 , в которых пересекаются проекции ab и $a'b'$, bc и $b'c'$. Направление родства перпендикулярно к оси XX .

Так как искомое сечение конуса будет находиться в плоскости, определяемой прямыми AB и BC , то задача сводится к отысканию на проекциях конуса ряда пар родственных точек в данном родственном соответствии. Точки связываем с поверхностью конуса, как обычно, при помощи образующих; на черт. 427 показано десять образующих.

Строим точку s_1 , родственную точке s' (построение выполнено при помощи пары родственных точек d и d' и точки m_2 на оси родства). Этим мы определяем некоторую новую точку, расположенную в данной плоскости; проекции этой точки s_1 и s' .

Если продолжить вертикальные проекции образующих конуса до пересечения с осью родства в точках n_1 , n_2 , n_3 и т. д. и затем соединить все эти точки с точкой s_1 , то определится ряд прямых, расположенных в данной плоскости, проекции этих прямых родственны между собой (s_1n_1 и $s'n_1$, s_1n_2 и $s'n_2$ и т. д.).

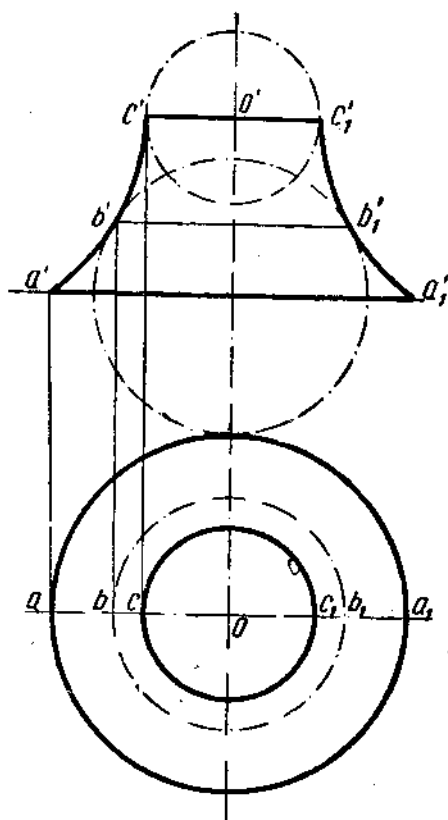
Так как у этих прямых вертикальные проекции совпадают с вертикальными проекциями образующих конуса, то, если взять точку в пересечении горизонтальной проекции образующей с той горизонтальной проекцией s_1n_1 , s_1n_2 и т. д., которая родственна вертикальной проекции этой образующей, мы получим точку — горизонтальную проекцию точки, принадлежащей фигуре сечения конуса данной плоскостью. Например, точка k получилась в пересечении прямых s_1n_1 и $s-1$; находим соответственную вертикальную проекцию k' . Следовательно, найдена точка K , которая лежит на образующей конуса и в то же время находится в данной плоскости, так как точки k и k' , родственные в данном родственном соответствии, принадлежат прямым s_1n_1 и $s'n_1$, представляющим собою проекции прямой, расположенной в данной плоскости. Итак, точка K одна из точек фигуры сечения конуса данной плоскостью.

Находя подобным способом ряд точек, получаем возможность очертить эллипсы, представляющие собой проекции фигуры сечения.

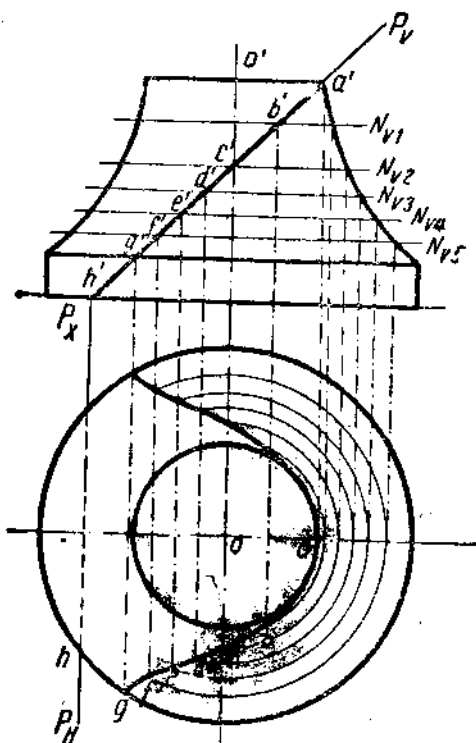
§ 44. Примеры пересечения поверхностей вращения плоскостью

На черт. 428 изображена двумя проекциями некоторая поверхность вращения; так как ось взята перпендикулярной к плоскости H , то окружности, по которым движутся точки производящей кривой (например, A , B , C), проектируются на плоскость H без искажения.

Можно представить соответственное тело вращения, ограниченное двумя кругами и поверхностью, образованной вращением кривой ABC . Если взять поперечное сечение (перпендикулярное к оси) через точку B , то получится круг, проектирующийся на плоскость V в виде прямой $b'b_1'$, а на плоскость H в виде окружности (черт. 428).



Черт. 428.

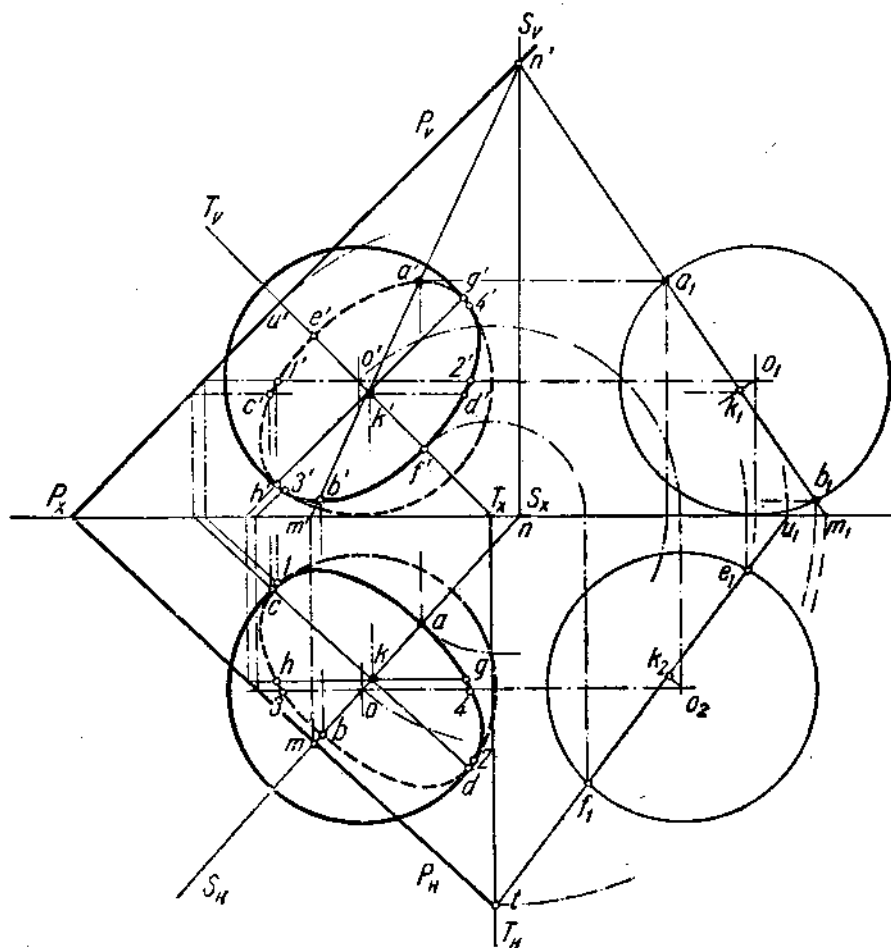


Черт. 429.

Можно представить, что внутри поверхности вращения помещается шар, касающийся этой поверхности; касание происходит по окружности, общей для поверхности вращения и поверхности шара. Окружность касания можно представить как результат пересечения поверхности вращения и поверхности шара одной и той же плоскостью, перпендикулярной к оси поверхности вращения. На черт. 428 изображены два таких шара, вписанных в поверхность вращения; центры шаров лежат на оси вращения, верхний (малый) шар касается поверхности вращения по окружности радиуса os , нижний шар касается поверхности вращения по окружности радиуса ob .

На черт. 429 дано построение пересечения тела вращения вертикально-проектирующей плоскостью. Линии пересечения, получаемые на поверхности тела, проектируются на вертикальную плоскость проекций в виде отрезка прямой, совпадающего с вертикальным следом секу-

щей плоскости. Для нахождения точек горизонтальной проекции линии пересечения взят ряд вспомогательных секущих плоскостей, параллельных плоскости H . Эти плоскости пересекают боковую поверхность тела вращения по окружностям, а на плоскости P выделяют горизонтали, проектирующиеся на вертикальную проекцию в виде точек b' ,



Черт. 430.

c' , d' и т. д. В пересечении горизонтальных проекций окружностей и горизонталей и лежат точки горизонтальной проекции искомой линии пересечения.

На черт. 430 дан пример построения сечения шара плоскостью общего положения. Так как при пересечении шара плоскостью в ней получается круг (если секущая плоскость проходит через центр шара, п о л у ч а е т с я большой круг), то решение сведется к построению эллипсов—проекций круга, расположенного в плоскости общего положения P .

Определяем направление и величину главных осей эллипсов.

Проводя через точку o (горизонтальная проекция центра шара) горизонтально-проектирующую плоскость S так, чтобы след S_H был перпендикулярен к следу P_H , находим проекцию одного из диаметров круга, получаемого при пересечении шара плоскостью P . Эти проекции ($ab, a'b'$) получены при помощи совмещения плоскости S с плоскостью V . Плоскость S , проходящая через центр шара, рассекает шаровую поверхность по окружности большого круга, изображаемую в совмещенном положении плоскости S без искажения (окружность, проведенная из центра o_1); эта же плоскость S рассекает плоскость P по линии наибольшего ската MN . При совмещении плоскости S с плоскостью V получаем точки a_1 и b_1 , по которым находим точки a' и b' , a и b .

Деля отрезок ab пополам, находим точку k — горизонтальную проекцию центра круга — искомого сечения. Эта точка k будет в то же время центром эллипса — горизонтальной проекции сечения.

Точку k (а следовательно и k') можно было бы найти, исходя из совмещенного положения плоскости S : перпендикуляр из o_1 на a_1b_1 дает точку k_1 , соответствующую центру сечения.

Проведя через точку k горизонталь плоскости P , определяем направление большой оси эллипса в горизонтальной проекции. Откладывая $kc = kd = k_1a_1$, получаем отрезок cd — большую ось эллипса.

Имея большую ось cd и малую ось ab , можно построить эллипс — горизонтальную проекцию искомого сечения — одним из приемов, известных из курса черчения.

Для нахождения главных осей эллипса — вертикальной проекции искомого сечения — взята вспомогательная вертикально-проектирующая плоскость T , проходящая через центр шара и перпендикулярная к плоскости P ($T_V \perp P_V$). Совмещая плоскость T с H , находим точки f_1 и e_1 в пересечении совмещенной прямой tu_1 и окружности, проведенной из точки o_2 радиусом, равным радиусу шара.

Точки f_1 и e_1 определяют отрезок — диаметр круга сечения ($f_1e_1 = a_1b_1$). По точкам e_1 и f_1 находим вертикальные проекции e' и f' , определяя этим малую ось $e'f'$ эллипса — вертикальной проекции фигуры сечения.

Проверкой правильности построений в этот момент может служить положение точки k' : в этой точке отрезок $e'f'$ должен делиться пополам и в то же время точка k' должна являться вертикальной проекцией для точки k .

Проводя через точку k' прямую, параллельную следу P_V , находим на ней отрезок $g'h'$, представляющий собой большую ось эллипса — вертикальной проекции фигуры сечения; $k'g' = k'h' = k_2e_1$. По осям $g'h'$ и $e'f'$ эллипс может быть построен.

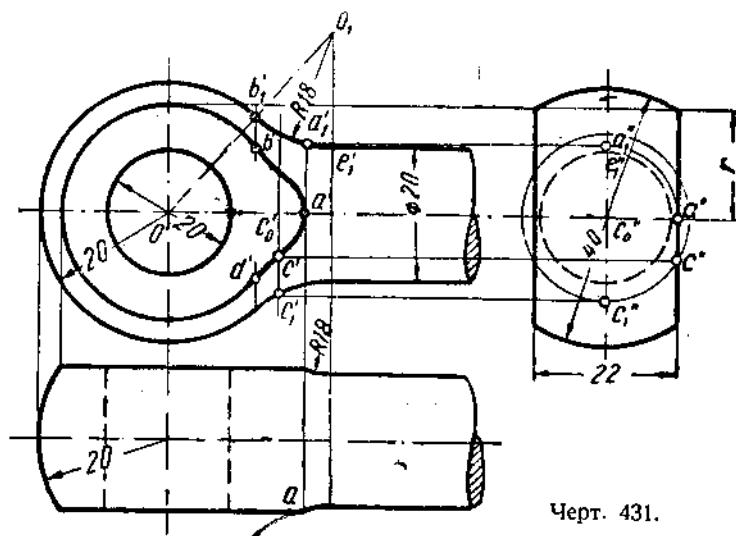
Отметим еще раз, что отрезки $g'h'$, cd , a_1b_1 , e_1f_1 должны равняться друг другу.

Если провести через центр шара плоскость, параллельную плоскости H (экваториальное сечение), то получатся точки 1 и 2, лежащие на контурах горизонтальной проекции шара и горизонтальной проекции сечения. В точках 1 и 2 отделяются видимые и невидимые части этих контуров.

Также проведя через центр шара плоскость, параллельную плоскости V (меридианальное сечение), получаем точки $3'$ и $4'$, общие для вертикальных проекций шара и фигуры сечения.

Точки $3'$ и $4'$ служат разделом между видимой и невидимой частями окружности и эллипса.

Если построение эллипсов — проекций фигуры сечения — производить по ряду принадлежащих им точек, то точки эти можно находить при помощи плоскостей, параллельных плоскости H или плоскости V , подобно тому, как были найдены точки $1, 2, 3, 4$.



Черт. 431.

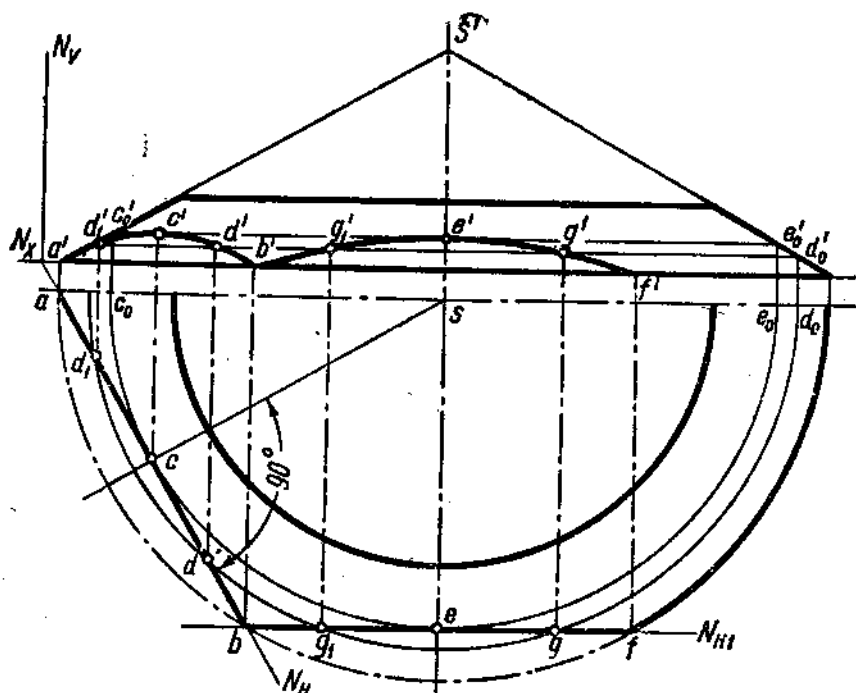
Истинный вид сечения представляет собой круг, диаметр которого равен отрезку cd (или $g'h'$).

На черт. 431 изображена деталь (такова, например, штанга с ушком или головка откидного болта) — тело, ограниченное частью шаровой поверхности диаметра 40, двумя цилиндрическими поверхностями диаметра 20, переходной поверхностью вращения с образующей $b_1'e_1'$ и двумя плоскостями. Каждая из плоскостей пересекает как шаровую поверхность, так и переходную поверхность вращения, образуя на них линию среза. На шаровой поверхности линия среза представляет собой дугу окружности, переходящую в линию среза на переходной поверхности вращения. Для изображения линии среза на проекции тела на плоскости V прежде всего проводим дугу окружности из центра o' радиусом r , а далее определяем точки перехода от дуги к продолжению линии среза. Соединяя центры o' и o_1 , находим точку b_1' , в которой происходит сопряжение дуг. Если через точку b_1' провести секущую плоскость, перпендикулярную к оси данного тела, то получается общее сечение для шаровой и переходной частей поверхности; в плоскости этого сечения лежит точка b' и вторая, симметричная ей точка d' — искомые точки перехода на кривой среза.

Далее определяем точку a' — крайнюю точку проекции кривой среза на плоскости V . Искомой точке будет соответствовать на плос-

кости W точка a'' . Проводя дугу радиуса $c_0''a''$, мы намечаем ту окружность сечения поверхности вращения вспомогательной плоскостью, на которой должна находиться искомая точка. Найдя точки a_1'' и a_1' , легко отметить точку a' , а по ней точку a на горизонтальной проекции.

Найдя положение точек a' , b' и d' , проводим полезные вспомогательные секущие плоскости для определения точек, промежуточных между a' , b' и d' . Следы этих плоскостей на плоскости V должны проходить между точками b' и a' . На черт. 431 указана одна такая плоскость: эта



Черт. 432.

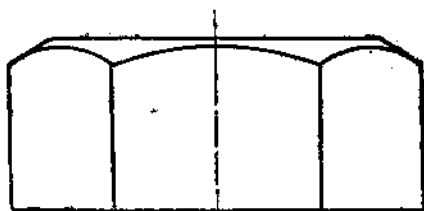
плоскость определяет поперечное сечение радиуса $c_0'c_1' = c_0''c_1''$. Проводя окружность из центра c_0'' радиусом $c_0''c_1''$, получаем точку c'' (остальные три точки, засекаемые этой окружностью, на черт. 431 не отмечены), по которой находим положение точки c' . Таким путем можно найти ряд точек кривой среза.

Рассмотрим еще один случай пересечения тела вращения плоскостью. На этот раз возьмем усеченный прямой круговой конус (черт. 432) и пересечем его двумя плоскостями, плоскостью N и плоскостью N_1 . Положение этих плоскостей относительно оси конуса ¹ позволяет сразу определить, какие кривые получатся в пересечении. Получаются гиперболы, причем одна из них проектируется на плоскость V в истинном

¹ Для уменьшения чертежа горизонтальная проекция конуса изображена не целиком, а лишь наполовину.

своем виде (так как плоскость N_1 параллельна плоскости V), а другая проектируется с искажением.

Для нахождения точек кривых взяты поперечные сечения конуса и весь ход построения аналогичен построениям, примененным в разобранных выше примерах. Прежде всего найдены крайние точки a, c, b, e и f на горизонтальной проекции, а по ним определены точки a', c', b', e' и f' на вертикальной проекции. Затем, при помощи вспомогательной горизонтальной секущей плоскости определена сперва точка d_0' на проекции крайней образующей конуса (на плоскости V), затем получена точка d_0 и при помощи окружности радиуса sd_0 построены точки g, g_1, d и d_1 , по которым найдены g', g_1', d' и d_1' .



Черт. 433.

На черт. 433 изображена шестигранная гайка (дана одна проекция гайки); кривые, отделяющие боковые грани гайки от ее конической верхней части, представляют собой не что иное, как построенные на черт. 422 гиперболы. Действительно, коническая поверхность пересечена плоскостями, параллельными оси конуса: получаются гиперболы.

§ 45. Пересечение поверхности цилиндра, конуса и шара прямой линией

Прямая линия, встречая цилиндр, конус или шар, пересекает поверхность этих тел два раза; получаются точки входа и выхода. Для нахождения этих точек следует провести через данную прямую вспомогательную плоскость и найти линию пересечения этой плоскости с поверхностью тела; прямая, пронизывающая тело, и линия, полученная на поверхности этого тела, оказываются расположенными в одной плоскости, а отсюда легко найти их взаимное пересечение, т. е. определить искомые точки входа и выхода.

На черт. 434 дано построение для случая пересечения прямой с цилиндром. Через прямую AB проведена вертикально-проектирующая плоскость P , которая в пересечении с цилиндром дает эллипс, проектирующийся на плоскость H в виде окружности, а на плоскость V в виде отрезка прямой на следе P_V . Сперва находим точки k и m , а затем вертикальные проекции k' и m' .

Можно было бы провести через прямую AB горизонтально-проектирующую плоскость, которая выделила бы две образующих на поверхности цилиндра; продолжая проекцию $a'b'$ до пересечения с вертикальными проекциями этих образующих, можно найти точки k' и m' .

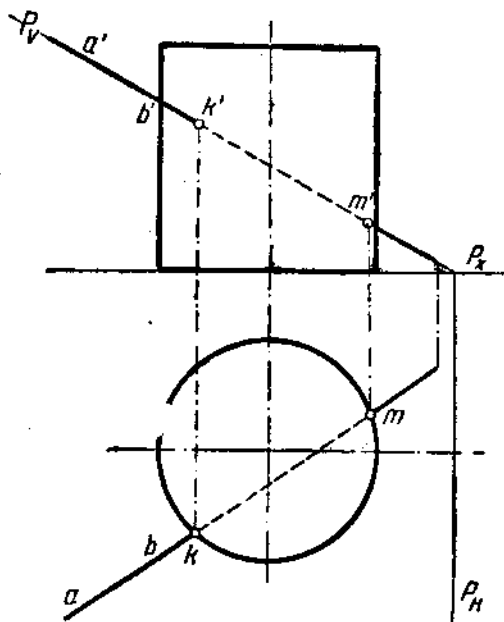
Точка $K(k, k')$ лежит на видимой стороне цилиндра; точка $M(m, m')$ лежит на невидимой стороне цилиндра.

На черт. 435 дано построение для определения точки встречи прямой AB с боковой поверхностью конуса. Если бы через прямую провести вспомогательную секущую плоскость, то мы получили бы в сечении гиперболу, так как плоскость будет параллельна оси конуса. Чтобы избежать построения гиперболы, можно применить способ вращения, а именно, повернуть конус и прямую AB на угол α . Радиусом sb пере-

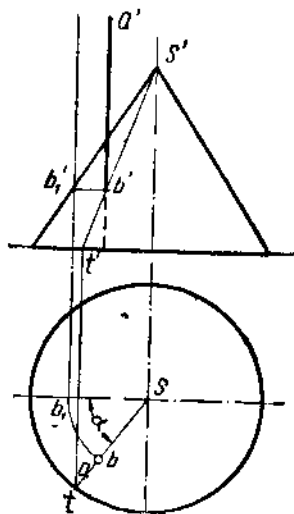
водим точку b в положение b_1 , затем находим точку b_1' , а по ней точку b' — вертикальную проекцию точки проницания.

Можно было бы через прямую AB провести вертикальную плоскость так, чтобы она проходила через ось конуса; тогда получилась бы образующая ST ($st, s't'$) и легко было бы найти точку b' .

На черт. 436 точки пересечения прямой AB с поверхностью кругового конуса найдены при помощи плоскости, пересекающей поверхность конуса по образующим. Плоскость проведена через вершину конуса и данную прямую. Для этого вершина конуса связана с прямой AB при помощи прямой SC , проведенной так, чтобы она могла служить горизонталью вспомогательной плоскости.



Черт. 434.



Черт. 435.

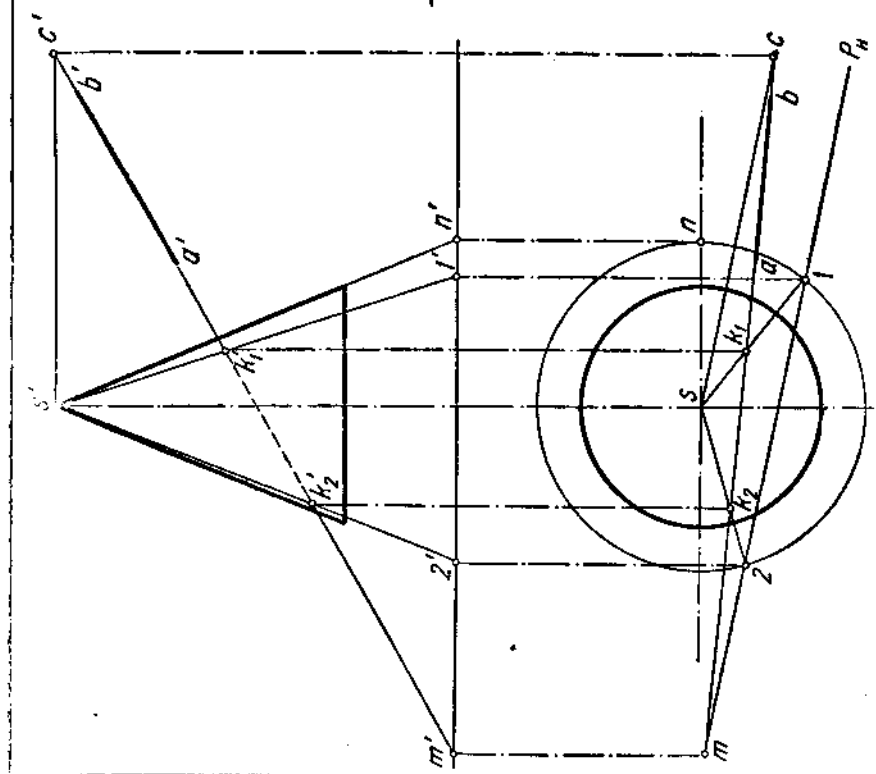
Теперь остается найти горизонтальный след данной прямой AB (точка m) и провести через него горизонтальный след P_H вспомогательной плоскости параллельно горизонтальной проекции sc горизонтали SC .

Так как конус в заданном положении не поставлен на плоскость H , то надо построить след конической поверхности на плоскости H . В данном случае (конус прямой круговой) этот след представляет собою окружность, проводимую из точки s радиусом sp .

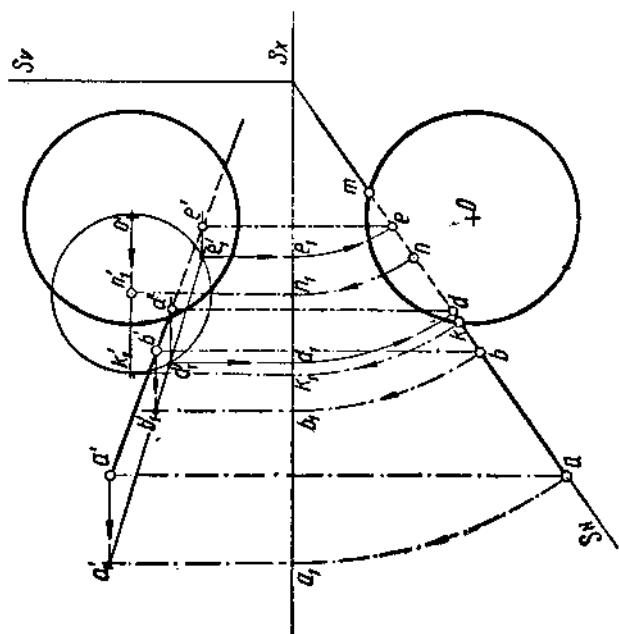
Теперь можно отметить точки пересечения следа P_H со следом конической поверхности на плоскости H . Эти точки (1 и 2) представляют собою горизонтальные следы образующих $S1$ и $S2$.

Дальнейшее ясно из чертежа.

На черт. 437 выполнено построение для случая пересечения шаровой поверхности прямой линией. Проводя через прямую вспомогательную плоскость — в данном случае горизонтально-проектирующую, — получим в пересечении шаровой поверхности этой плоскостью окружность, которая проектируется на плоскость H в виде отрезка km на



Черт. 436.



Черт. 437.

следе S_H , а на плоскость V в виде эллипса. На черт. 437 этот эллипс не построен, так как проще применить способ вращения, совместив плоскость S , вместе с лежащими в ней прямой AB и окружностью, с плоскостью V , найти в повернутом положении две точки пересечения прямой с окружностью и затем построить их на проекциях шара.

Центр окружности, получаемой в пересечении шара плоскостью, отмечен буквой n на следе S_H ; радиус окружности равен nm или nk . Этим радиусом проведена окружность на плоскости V из точки n_1' как из центра; точка n_1' найдена по повернутому положению точки n .

При решении задачи на пересечение поверхности цилиндра, конуса и шара прямой линией может оказаться, что данная прямая не пересекает, но лишь касается кривой, ограничивающей фигуру, получаемую при пересечении данной поверхности плоскостью, проведенной через прямую. В этом случае прямая является касательной к данной поверхности.

Вообще, если требуется определить, как данная прямая расположена относительно данной поверхности, надо через прямую провести плоскость, пересекающую поверхность, и рассмотреть относительное положение прямой и контура сечения, полученного при пересечении поверхности плоскостью.

Глава VII

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДРУГ С ДРУГОМ

В случае изображения в ортогональных проекциях двух (или нескольких) тел, пересекающихся между собой, весьма важно определить линии, по которым пересекаются поверхности тел. Линии пересечения поверхностей (линии перехода) являются общими для пересекающихся поверхностей и, следовательно, нахождение их должно быть в общем случае основано на отыскании точек, одновременно принадлежащих заданным поверхностям.

Для отыскания таких точек обычно пользуются вспомогательными секущими плоскостями, которые выбираются в зависимости от вида и расположения поверхностей, но таким образом, чтобы получилось наиболее простое решение.

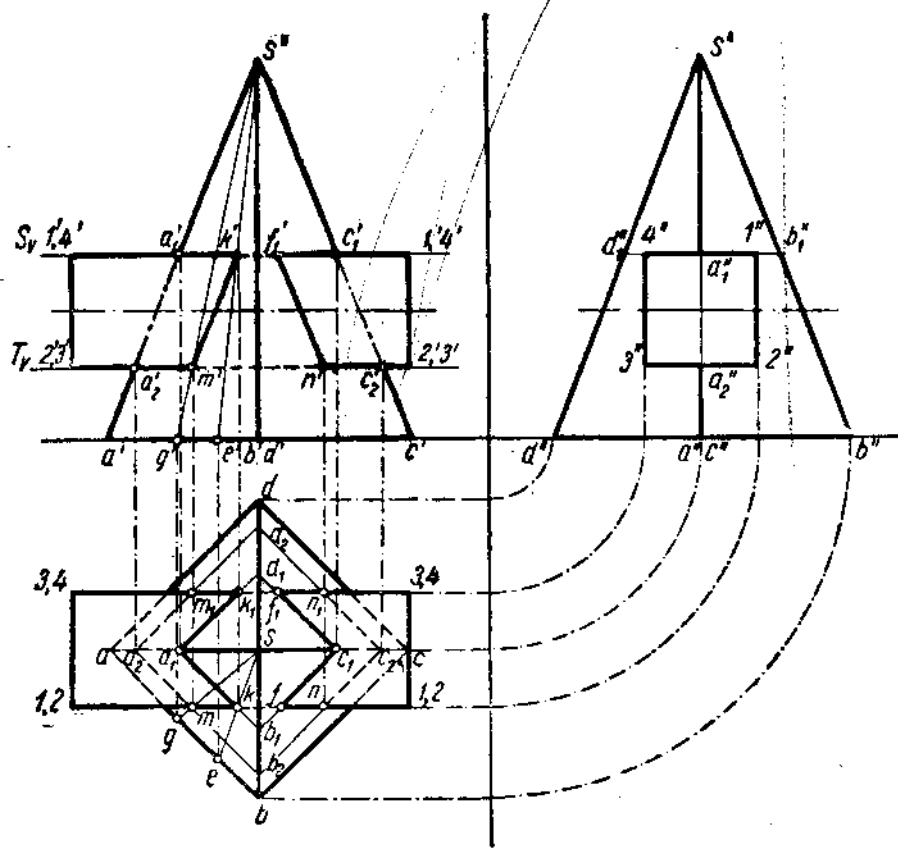
§ 46. Взаимное пересечение многогранников

Задача о нахождении линии пересечения поверхностей многогранников может быть разрешена последовательным нахождением линий пересечения граней одного многогранника с гранями другого (нахождение линий пересечения плоскостей) или может быть применен другой прием, по которому находят точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого (также точки пересечения ребер второго многогранника с гранями первого); затем в строгой последовательности соединяют найденные точки.

Второй прием дает обычно более простые решения, нежели первый.

Пример 1 Найти пересечение поверхностей правильной четырехугольной пирамиды и четырехугольной призмы: ребра призмы параллельны оси проекций (черт. 438).

Решение. Пересекаем оба многогранника плоскостью, параллельной H и совпадающей с гранью призмы 1—1, 4—4 (след S_V); линия пересечения взятой плоскости с поверхностью пирамиды легко находится по точкам пересечения плоскости с ребрами пирамиды — точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 (на плоскости V — точки a'_1 , c'_1 , на плоскости W — точки b'_1 и d'_1). Соединяя на горизонтальной проекции точки a_1 , b_1 , c_1 и d_1 прямыми, мы получаем четырехугольник, лежащий в одной плоскости



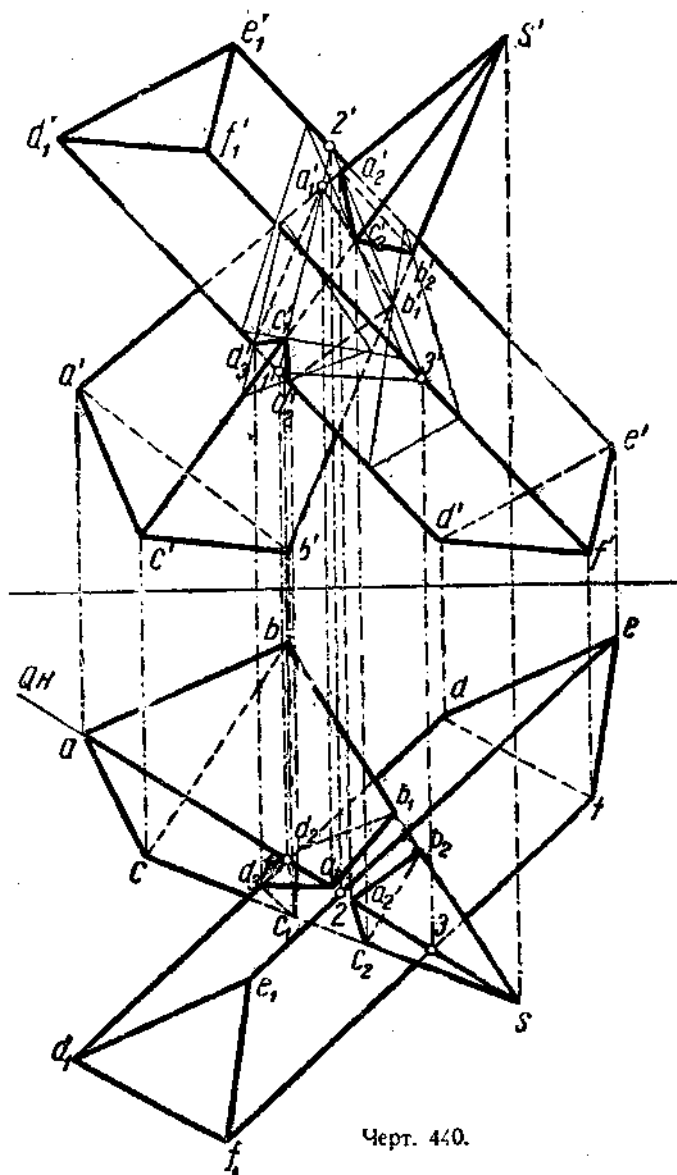
Черт. 438.

с ребрами призмы 1—1, 4—4; точки K и F пересечения ребра 1—1 с четырехугольником будут, очевидно, общими для многогранников и будут точками пересечения ребра 1—1 с гранями пирамиды; точки K_1 и F_1 будут точками пересечения ребра 4—4 с гранями пирамиды.

Точка пересечения ребра пирамиды AS с гранью призмы 1—1, 4—4 (точка A_1) легко обнаруживается без дополнительных построений, как и точка C_1 пересечения ребра SC с той же гранью 1—1, 4—4.

Проведя плоскость T , совпадающую с гранью призмы 2—2, 3—3, мы также легко обнаружим общие точки для пересекающихся поверхностей — точки M , N , M_1 , N_1 , A_2 и C_2 .

чаем точки a_1' и a_2' , в которых $a's'$ пересекается с контуром $1', 2', 3'$. Точки a_1' и a_2' будут вертикальными проекциями точек встречи ребра SA с гранями призмы; горизонтальные проекции этих точек легко найдутся на горизонтальной проекции ребра SA — точки a_1 и a_2 .



Черт. 440.

Поступая таким же образом с ребрами SB и SC , находим точки B_1, B_2, C_1, C_2 .

Затем находим пересечение ребер призмы с гранями пирамиды, также проводя вспомогательные плоскости горизонтально-проектирующей.

шие (можно, конечно, в этом случае, как и в предыдущем, воспользоваться вертикально-проектирующими плоскостями). Исследуя ребро DD_1 , отмечаем точки встречи D_2 и D_3 ; ребро EE_1 точек встречи не имеет, как и ребро FF_1 . Для того чтобы не сделать ошибки при большом количестве вспомогательных построений, рекомендуется записывать найденные точки встречи, как это сделано в нижеследующей таблице.

Исследуемое ребро	Грань, с которой пересекается ребро	Точка пересечения ребра с гранью	Место, занимаемое данной точкой в общем порядке соединения точек
Пирамиды	SA {	DEE_1D_1	A_1 1,6
		EFF_1E_1	A_2 I
	SB {	DEE_1D_1	B_1 2
		EFF_1E_1	B_2 II
	SC {	DFF_1D_1	C_1 4
		EFF_1E_1	C_2 III
Призмы	DD ₁ {	SCB	D_2 3
		SAC	D_3 5
	EE ₁ {	Нет	—
		—	—

Заполнив три столбца таблицы, необходимо внимательно проследить порядок, в котором надо вести соединение найденных точек. В нашем примере получается два отдельных многоугольника сечений. В таблице порядок образования многоугольников показан для одного — цифрами 1, 2..., для другого — I, II и т. д. Это обозначает, что точку a_1' (1) следует соединить с точкой b_1' (2), точку b_1' с точкой d_2' (3), d_2' с c_1' (4), c_1' с d_3' (5) и, наконец, d_3' с a_1' (6).

Если через вершину пирамиды провести вспомогательную прямую, параллельную ребрам данной призмы, то, можно, пользуясь этой прямой, построить вспомогательные плоскости, пересекающие грани призмы по прямым, параллельным ребрам, а грани пирамиды — по прямым, проходящим через вершину.

Положим, что через вспомогательную прямую и ребро SC пирамиды проведена плоскость. Горизонтальный след этой плоскости пересечет след боковой поверхности призмы на плоскости H (на черт. 396 таким следом является проекция $efgh$; на черт. 440 след не дан и его надо построить). Через найденные точки можно провести прямые, параллельные ребрам призмы, и в пересечении с ребром SC получатся искомые точки C_1 и C_2 .

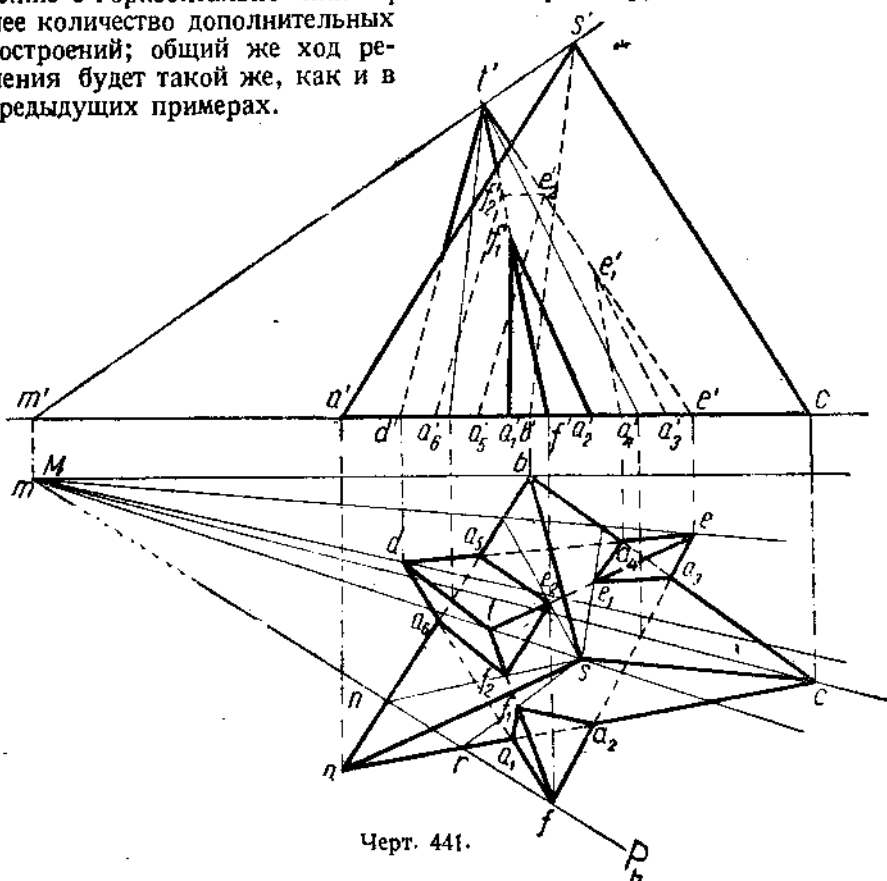
Если же провести плоскость через ту же вспомогательную прямую и хотя бы ребро DD_1 призмы, то в пересечении горизонтального следа этой плоскости и следа боковой поверхности пирамиды на плоскости H (на черт. 440 такой след также должен быть построен) получатся две точки. Соединяя эти точки с точкой s , а их вертикальные проекции

с точкой s' , получим проекции прямых на гранях пирамиды и в пересечении этих проекций с проекциями ребра DD_1 найдем точки D_2 и D_3 .

Этим способом можно продолжить построение до конца.

Пример 3. Построить линии пересечения двух пирамид $ABCS$ и $DEFT$, расположенных, как указано на черт. 441.

Решение. Воспользуемся вспомогательными плоскостями, проходящими через вершины обеих пирамид, так как эти плоскости по сравнению с горизонтально- или вертикально-проектирующими дадут меньшее количество дополнительных построений; общий же ход решения будет такой же, как и в предыдущих примерах.



Черт. 441.

Для того чтобы установить положение следов плоскостей, проходящих одновременно через вершины заданных пирамид, проводим через вершины S и T прямую и находим ее горизонтальный след M . Всякая плоскость, проходящая через прямую ST , будет проходить через вершины обеих пирамид и будет рассекать их грани по прямым линиям, причем горизонтальные следы этих плоскостей будут проходить через точку m (M).

Проведя прямую mf , мы можем принять ее за горизонтальный след одной из плоскостей, проходящих через вершины S и T , а следовательно, и через ребро TF ; на черт. 441 след этой плоскости обозначен через P_h .

Плоскость P пересекает основание пирамиды $ABCS$ в точках n и r ; соединяя эти точки с точкой s , мы получим контур сечения пирамиды.

взятой плоскостью (в которой лежит ребро TF) и находим горизонтальные проекции точек пересечения ребра TF — точки f_1 и f_2 ; нахождение вертикальных проекций точек пересечения не встречает затруднений.

Исследуя таким приемом все ребра обеих пирамид, мы обнаружим точки, необходимые для нанесения линий пересечения.

Точки пересечения сторон оснований находятся на горизонтальной проекции без дополнительных построений. В нижеследующей таблице дана сводка построений.

Исследуемое ребро	Грани, с которыми пересекается исследуемое ребро	Ребра, с которыми пересекается исследуемое ребро	Точка пересечения
TF	$\left\{ \begin{array}{l} ACS \\ ABS \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \\ — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array} \right.$
ET	$\left\{ \begin{array}{l} CBS \\ ABS \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \\ — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array} \right.$
DT	Нет	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$
FD	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} AC \\ AB \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ A_3 \end{array} \right.$
DE	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} BC \\ AB \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A_4 \\ A_5 \end{array} \right.$
EF	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} BC \\ AC \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A_3 \\ A_2 \end{array} \right.$
AS	Нет	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$
BS	»	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$
CS	»	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} — \end{array} \right.$

§ 47. Взаимное пересечение тел, ограниченных поверхностями вращения

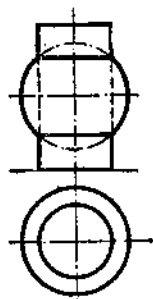
При решении вопроса о взаимном пересечении тел, ограниченных цилиндрическими, коническими и другими поверхностями вращения, пользуются обычно вспомогательными плоскостями, причем выбирают эти плоскости так, чтобы линии пересечения поверхностей этими плоскостями проектировались на плоскости проекций по возможности в виде прямых или окружностей.

В некоторых частных случаях пересечения тел вращения можно пользоваться вместо плоскостей вспомогательными шаровыми (сферическими) поверхностями, так как линии пересечения шаровой поверхности с другими поверхностями вращения в частных случаях находятся очень просто. На черт. 442 показано пересечение шара с прямым круговым цилиндром, ось которого перпендикулярна к плоскости H и проходит через центр шара. Если пересекать цилиндр и шар плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости проекций, то линиями пересечения как цилиндрической, так и шаровой поверхности будут окружности, проектирующиеся на плоскость V в прямые линии, а на плоскость H в окружности.

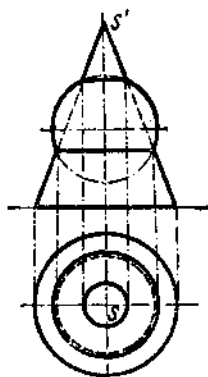
В данном частном случае проекция линии пересечения легко находится по вертикальной проекции соединением точек пересечения крайних образующих цилиндра с большой окружностью шара.

На черт. 443 показано пересечение шара с прямым круговым конусом, ось которого перпендикулярна к плоскости H и проходит через центр шара. В этом случае линии пересечения будут окружности, проектирующиеся так же, как и в предыдущем случае, на плоскость V в прямые и на плоскость H в окружности.

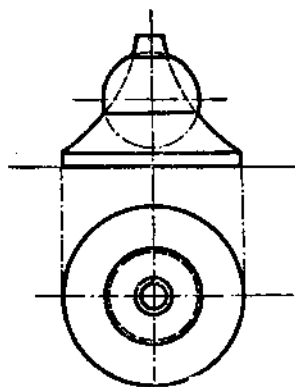
Линии пересечения поверхностей шара и некоторого тела вращения, ось которого проходит через центр шара и перпендикулярна к плоскости H , показаны на черт. 444.



Черт. 442.



Черт. 443.



Черт. 444

Из вышеизложенного следует, что проекции линий пересечения шаровой поверхности с иной поверхностью вращения, ось которой проходит через центр шара и перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, будут прямая и окружность.

Рассмотрим несколько примеров построения линий пересечения поверхностей вращения.

Пример 1. Построить проекции линий пересечения поверхностей двух прямых круговых цилиндров I и II , оси которых пересекаются под прямым углом и параллельны плоскости V (черт. 445).

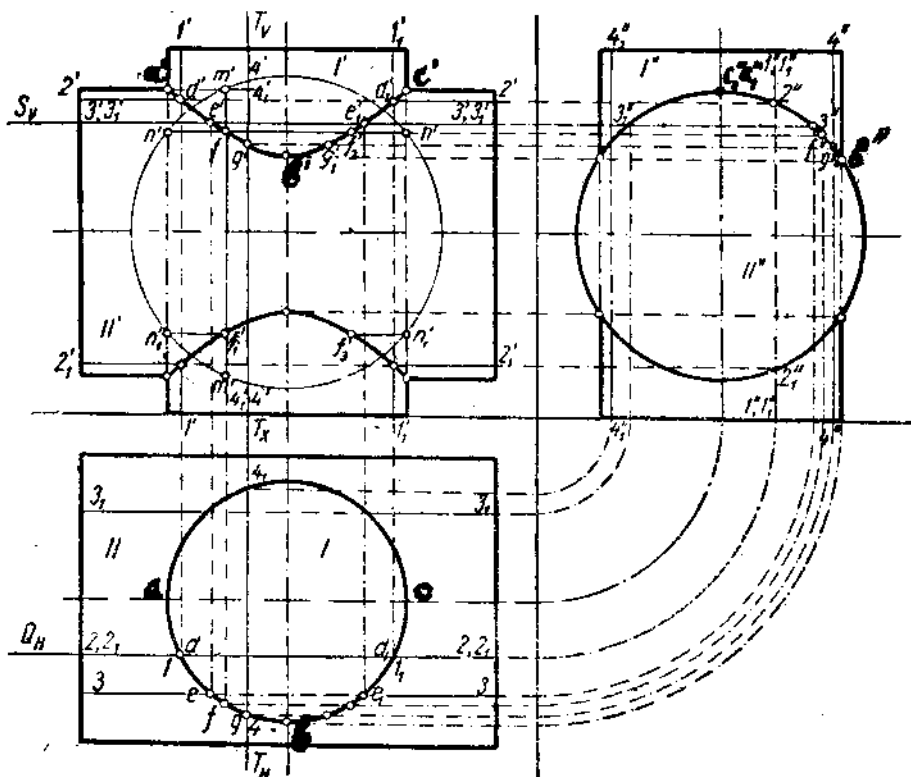
Решение. Проекция линий пересечения на плоскости H целиком совпадает с окружностью цилиндра I , а на боковой проекции — с окружностью цилиндра II . Необходимо найти точки, по которым можно построить проекцию искомой линии на плоскости V .

Необходимое количество точек можно в данном случае найти, выбирая в качестве вспомогательных плоскостей: 1) плоскость, параллельную V , или 2) плоскость, параллельную H , или 3) плоскость, параллельную W ; ввиду того что оси цилиндров пересекаются и параллельны плоскости V , удобно воспользоваться также шаровыми поверхностями.

1. Пересечем цилиндры плоскостью Q , параллельной плоскости V : очевидно, что цилиндр I рассечется по образующим $1-1$, 1_1-1_1 , а цилиндр II по $2-2$, 2_1-2_1 и общими точками кривой будут точки пересечения этих образующих (на верхней кривой эти точки обозначены

через d_1 и d_1'); проведя ряд плоскостей, параллельных плоскости V , можно обнаружить достаточное количество точек.

2. Пересечем цилиндры плоскостью S , параллельной плоскости H ; в этом случае цилиндр I пересечется по окружности, а цилиндр II по образующим $3-3$, 3_1-3_1 . Легко находим горизонтальные проекции общих точек на пересечении окружности с проекциями образующих. На черт. 445 обозначены только точки пересечения окружности с образующей $3-3$, точки e и e_1 : вертикальные проекции этих точек должны лежать на S_V , e' и e_1' . Проведя ряд плоскостей, параллельных плоскости H , можно обнаружить достаточное количество общих точек.



Черт. 445.

3. Если цилиндры пересечь плоскостью T , параллельной плоскости W , то цилиндр I пересечется по образующим $4-4$, 4_1-4_1 , а цилиндр II по окружности; на плоскости W находим в пересечении окружности и прямой $4''-4''$ проекцию общей точки G , точку g'' ; вертикальная проекция g' найдется на следе T_V . Таким образом можно найти необходимое количество общих точек.

На черт. 445 точка F найдена при помощи шаровой поверхности, проведенной из точки пересечения осей цилиндров. Линия $m'm'$ — проекция линии пересечения поверхностей шара и цилиндра II ; линия $n'n'$ — проекция линии пересечения поверхностей шара и цилиндра I .

Точка f' , лежащая на пересечении линий $m' m'$ и $n' n'$, очевидно, будет вертикальной проекцией точки F — общей для обоих цилиндров.

Точки A , B и C находятся без дополнительных построений. Найдя ряд точек одним из указанных приемов, соединяют их по лекалу плавной кривой. Точки невидимой части линии пересечения совпадут на вертикальной проекции с точками видимой части; плоскость, определяемая осями цилиндров, будет плоскостью симметрии для найденной линии пересечения.

Если надо построить развертку боковой поверхности цилиндра I (или II), то на его поверхности наносят равномерно распределенные образующие и строят развертку, как это указано было ранее в § 42.

Если бы диаметры заданных цилиндров были одинаковы, то вертикальные проекции линии пересечения изобразились бы в виде прямых (черт. 446).

Такое в случае, изображенном на черт. 447 (цилиндры одного и того же диаметра), вертикальная проекция линии пересечения представляет собою ломаную линию.

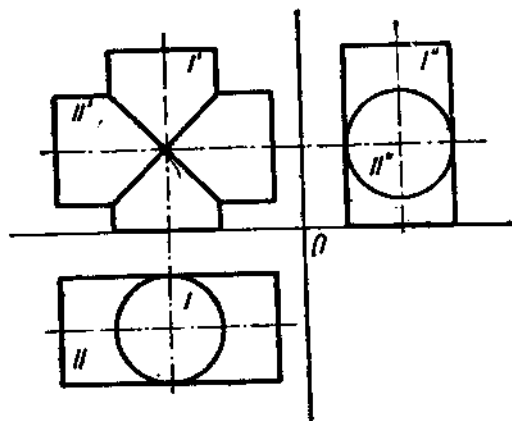
Пример 2. Оси цилиндров I и II пересекаются под углом и параллельны плоскости V (черт. 448).

Решение. В этом случае общие точки находят при помощи плоскостей, параллельных плоскости V ; поверхности обоих цилиндров будут рассекаться по образующим.

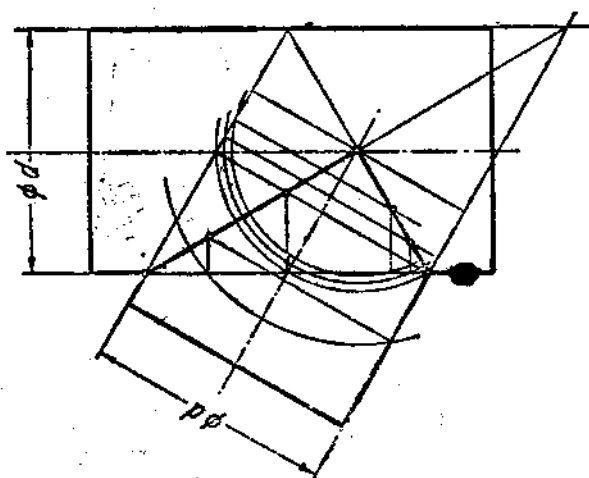
На черт. 448 проведена плоскость Q , параллельная плоскости V , рассекающая поверхность цилиндра I по образующим 2—2 и 3—3, а поверхность цилиндра II по образующей 1—1. Пересечение вертикальной проекции образующей 1—1 с такими же проекциями образующих 2—2 и 3—3 дает вертикальные проекции общих для поверхностей цилиндров точек — точки e' и e_1' ; горизонтальные проекции e и e_1 легко найдутся на следе Q_H .

Если для решения выбрать плоскости, параллельные плоскостям H или W , то поверхность цилиндра I пересекалась бы по эллипсам, что усложнило бы решение.

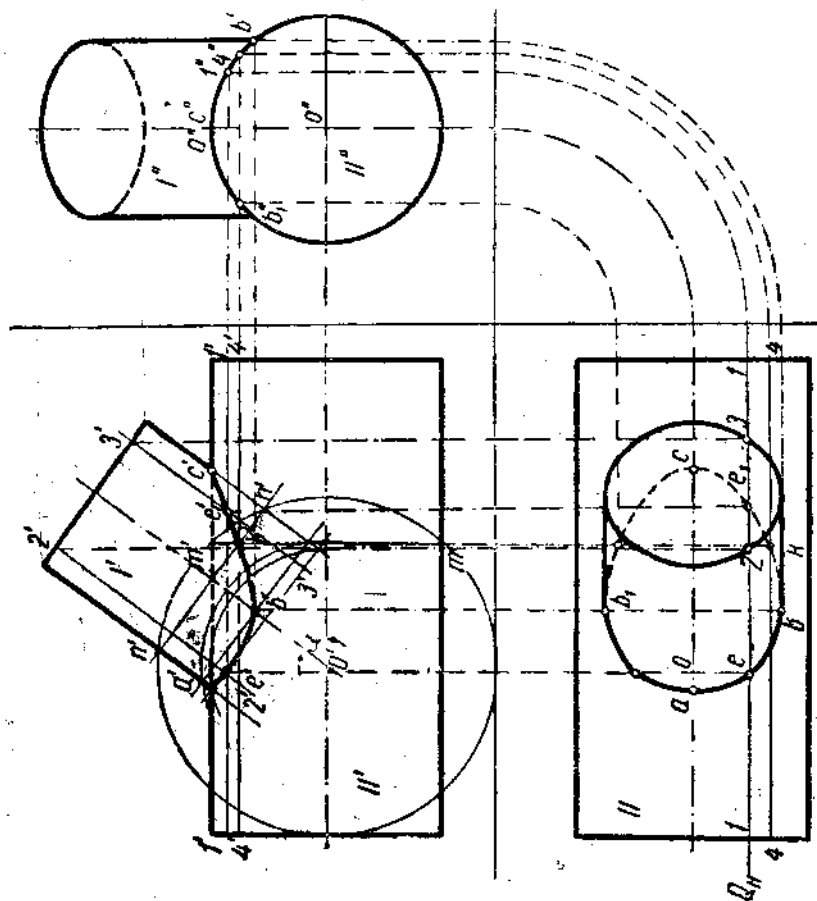
Ввиду того, что оси заданных цилиндров пересекаются между собой и параллельны плоскости V , можно воспользоваться шаровыми поверхностями. На черт. 448 построена из центра O шаровая поверхность; прямая $m' m'$ — вертикальная проекция линии пересечения поверхностей шара и цилиндра II , а линия $n' n'$ — цилиндра I . Точка k' будет вертикальной проекцией общей точки для поверхностей обоих цилиндров. Горизонтальную проекцию k можно найти на горизонтальной проекции образующей 4—4, проведенной через точку k' .



Черт. 446.



Черт. 447.

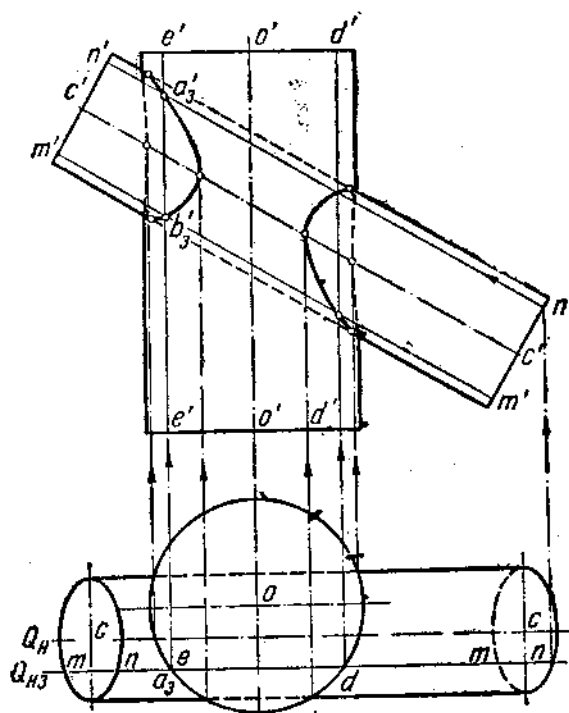


Черт. 448.

Используя плоскости, параллельные V , или шаровые поверхности, можно найти достаточное количество точек для построения линии пересечения.

Пример 3. Построить линию пересечения поверхностей двух цилиндров, указанных на черт. 449. Ось OO перпендикулярна к плоскости H , ось CC наклонена к H и параллельна плоскости V . Оси цилиндров не пересекаются.

Решение. В качестве вспомогательных плоскостей выберем плоскости, параллельные V , так как эти плоскости будут пересекать поверхности заданных цилиндров по прямым — образующим. Проследим нахождение нескольких точек, принадлежащих пересекающимся поверхностям, например полученных от пересечения вспомогательной плоскостью Q_3 . Плоскость Q_3 пересекает цилиндр с осью OO по образующим DD и EE , а цилиндр с осью CC — по образующим MM и NN . Образующая EE пересекается с образующей NN в точке A_3 ; вертикальная проекция точки A_3 обозначена через a_3' . Та же образующая EE пересекается с образующей MM в точке B_3 (на вертикальной проекции b_3'). Точки A_3 и B_3 , являясь общими точками для пересекающихся поверхностей, будут точками, принадлежащими искомой линии пересечения.



Черт. 449.

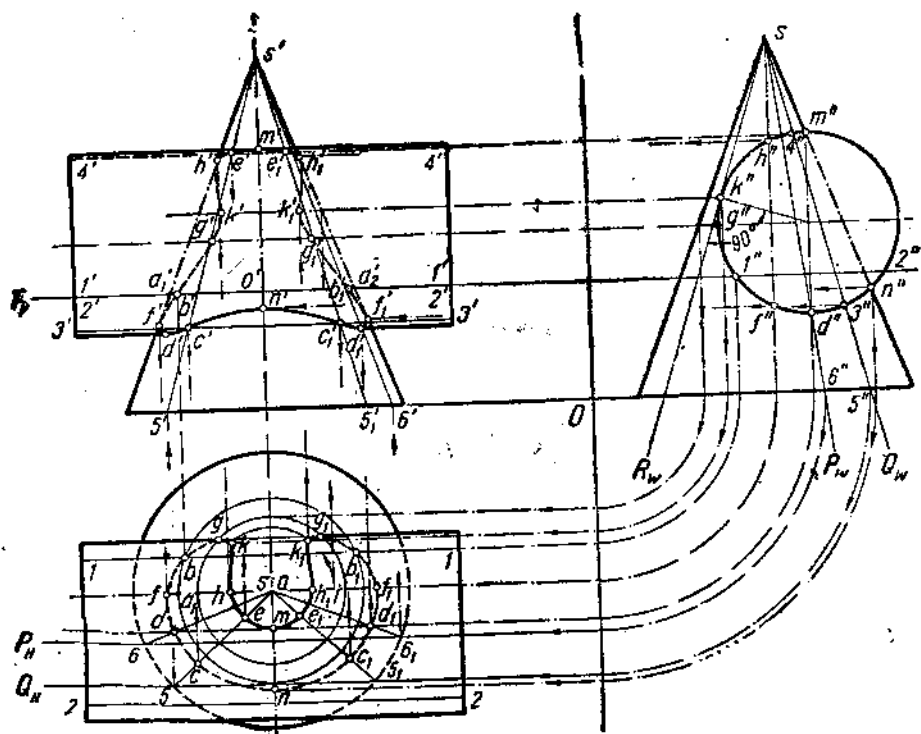
На черт. 449 невидимые части линий пересечения показаны штриховой линией; точки раздела получены при помощи плоскости Q .

Построение развертки поверхностей одного из цилиндров с нанесением линий пересечения, очевидно, не должно вызвать затруднений, так как в данном примере все отрезки образующих на вертикальной проекции представлены в их истинной величине.

Пример 4. Пересечение конуса с цилиндром; ось конуса перпендикулярна к плоскости H , ось цилиндра параллельна оси проекций; оси цилиндра и конуса не пересекаются (черт. 450).

Решение. Для нахождения точек, принадлежащих линии пересечения, можно рассекать поверхности плоскостями, параллельными H .

В этом случае поверхность конуса будет рассекается по окружностям, которые на плоскость H будут проектироваться без искажения, а по-



Черт. 450

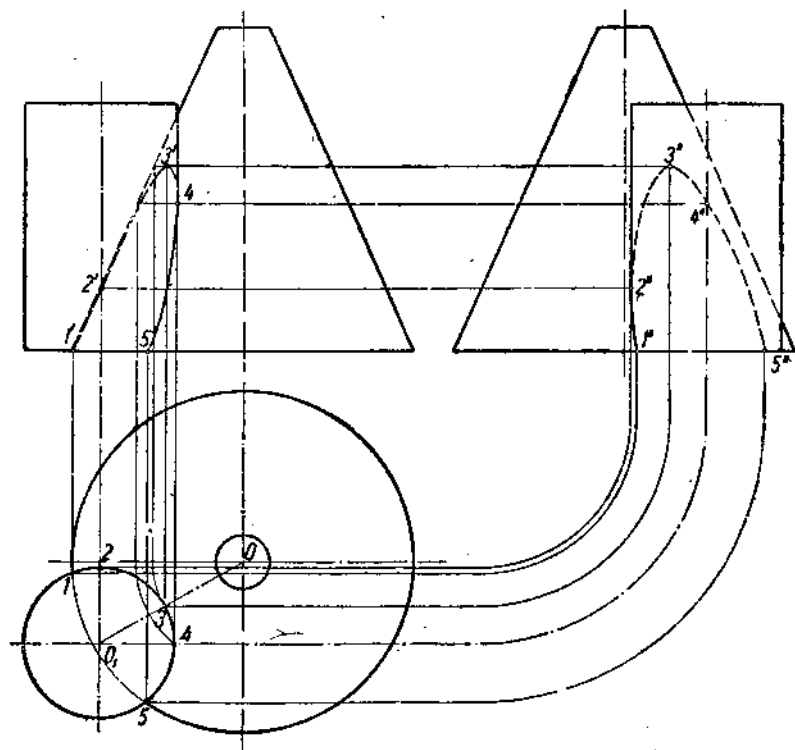
верхность цилиндра пересекается по образующим. На черт. 450 проведена плоскость T , параллельная плоскости H (след T_v) и пересекающая крайние образующие конуса в точках A_1 и A_2 ; $a_1'o'$ или, что то же, $a_2'o'$ будет служить радиусом окружности пересечения поверхности конуса. Эту окружность проводим указанным радиусом из точки s на плоскости H . Поверхность цилиндра плоскостью T пересекается по образующим 1—1, 2—2, горизонтальные проекции которых легко находятся. Точки пересечения проекций образующих с проекцией окружности дадут на плоскости H точки b и b_1 , проекции общих для пересекающихся поверхностей точек B и B_1 ; образующая 2—2 с окружностью не пересечется.

Получив горизонтальные проекции искомых точек, найдем вертикальные проекции b' и b_1' на следе T_v .

Проведя ряд таких вспомогательных плоскостей, можно найти достаточное количество точек для построения линии пересечения. Зная, что плоскости, проходящие через вершину конуса, рассекают его поверхность по образующим, можно воспользоваться такими плоскостями, проводя их так, чтобы поверхность цилиндра они также рассекали по образующим. На черт. 450 взята плоскость Q , проходящая через S ,

которая параллельна образующим цилиндра — на плоскости W след Q_W и на плоскости H след Q_H (след Q_V за пределами чертежа). Плоскость Q пересекает поверхность цилиндра по образующим 3—3, 4—4, поверхность конуса — по образующим $S5$ и $S5_1$. Пересечение указанных образующих позволяет найти точки пересечения C, C_1, E и E_1 . Поступая таким образом, можно найти достаточное количество точек.

На черт. 451 выполнено построение проекций линии пересечения цилиндрической и конической поверхностей, оси которых взаимно-параллельны и перпендикулярны к плоскости N .

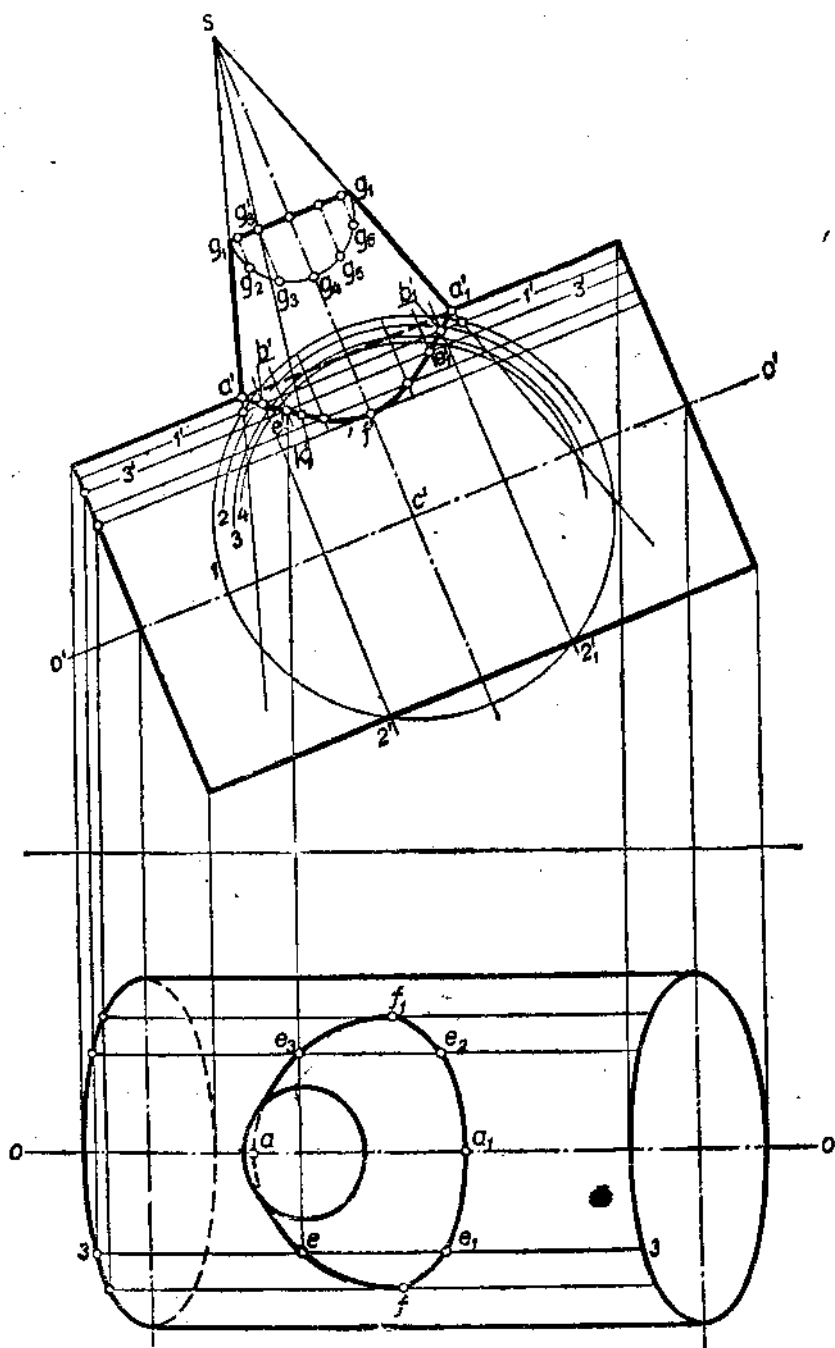


Черт. 451;

Для получения точек искомой линии пересечения применены вспомогательные горизонтальные плоскости. Наивысшая полезная плоскость определяет точку 3; положение этой плоскости находим, отмечая горизонтальную проекцию точки 3 в пересечении горизонтальной проекции цилиндра с прямой o_1 , что соответствует проведению плоскости через оси обеих поверхностей.

Пример 5. Пересечение конуса с цилиндром; оси пересекаются под прямым углом и параллельны плоскости V (черт. 452, конус усеченный).

Решение. Наиболее простое решение будет при использовании шаровых поверхностей, описанных из точки пересечения осей. Так, точки b' и b_1' получены при пересечении прямой $1'-1'$ с прямыми $2'$ и $2_1'$; прямая $1'-1'$ является вертикальной проекцией пересечения поверхностей

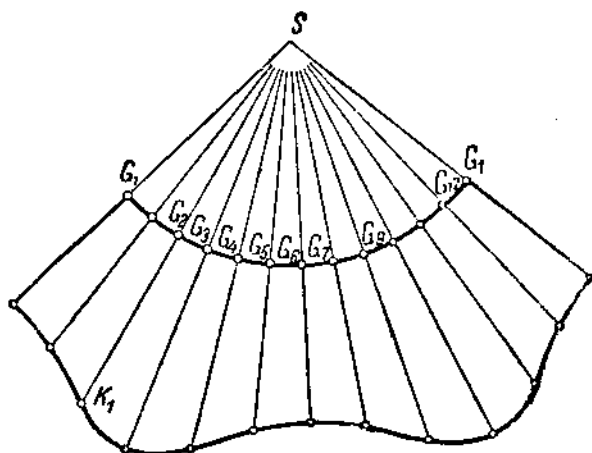


Черт. 452.

шара 1 с поверхностью конуса, а прямые $2'$ и $2_1'$ — проекциями пересечения поверхности того же шара 1 с поверхностью цилиндра. После нахождения достаточного количества точек на вертикальной проекции соединим их плавной кривой и построим горизонтальную проекцию линии пересечения; для этого проведем, например, проекцию образующей $3'-3''$ и отметим точки кривой e' и e_1' , лежащие на этой проекции $3'-3''$; находим горизонтальную проекцию $3-3''$ и на ней отмечаем точки e и e_1 . Так поступаем со всеми найденными точками.

Если решать этот пример при помощи сечения плоскостями, проходящими через вершину конуса, то предварительно надо построить горизонтальный след конической поверхности (т. е. линию пересечения ее с плоскостью H).

На черт. 453 показана развертка боковой поверхности усеченного конуса. На черт. 452 проекции крайних образующих конуса продолжены до s' ; окружность верхнего основания конуса повернута и разделена на 12 частей (на чертеже показана половина). Спроектировав деления g_2, g_8 и т. д. на прямую g_1g_1' , проводим через эти



Черт. 453.

проекции и через s' проекции образующих до встречи с проекцией линии пересечения поверхностей; например, $s'k_1'$ проведена через g_3' .

Построив развертку боковой поверхности конуса, откладываем истинные величины отрезков образующих. Например, найдя способом вращения истинную величину отрезка образующей G_3K_1 , откладываем ее соответственно на развертке (черт. 453).

Если оси указанных на черт. 452 тел не параллельны плоскости V , то предварительно необходимо тела повернуть до положения, при котором оси займут положение, параллельное плоскости V , затем найти точки линий пересечения и далее эти точки вместе с телами повернуть до первоначального положения.

Пример 6. Пересечение конусов (черт. 454); оси конусов не пересекаются, ось конуса I перпендикулярна к H и ось конуса II перпендикулярна к плоскости W .

Решение. При нахождении точек линии пересечения поверхностей конусов пользуются плоскостями, одновременно проходящими через вершины заданных конусов, так как такие плоскости рассекают конические поверхности по образующим. Построение аналогично построению при пересечении пирамид (см. § 46, черт. 441).

Предварительно через вершины S и T проводим прямую и находим след этой прямой — горизонтальный m и на плоскости W след m'' ; плос-

кости, проходящие через прямую ST , рассекают конические поверхности по образующим.

Если провести через прямую ST плоскость P , то ее горизонтальный след P_H должен пройти через m ; P_H при пересечении с окружностью основания конуса I даст точки a и b , соединив которые с s найдем горизонтальные проекции образующих SA и SB , по которым плоскость P рассекает поверхность конуса I . После этого находим вертикальные проекции указанных образующих — $s'a'$ и $s'b'$.

Так как P_H не позволяет в данном случае определить образующие конуса II , то находим след P_W , который рассекает линию пересечения конической поверхности II с плоскостью W в точках c'' и d'' ; построив горизонтальные и вертикальные проекции точек C и D , строим образующие CT и DT ($ct, c't'$ и $dt, d't'$). Точки пересечения найденных образующих дадут точки 1, 2, 3, 4, принадлежащие обеим поверхностям, а следовательно, и искомой линии пересечения.

Проведя ряд вспомогательных плоскостей через ST , можно построить достаточное количество точек искомой линии пересечения. При заданном расположении конусов на черт. 454 можно найти несколько точек при помощи плоскости, параллельной W , и плоскости, параллельной H . Плоскость, проведенная через T , параллельно H (след Q_V), рассекает конус II по образующим TE и TE_1 , а конус I по окружности FF_1 . При пересечении окружности sf_1 с et находим горизонтальные проекции точек 5 и 6, а затем проекции на плоскостях V и W . Проводя через S профильную плоскость, находим точки 7 и 8.

Пример 7. Пересечение конусов (черт. 455); оси пересекаются под прямым углом и параллельны плоскости V (конусы усеченные).

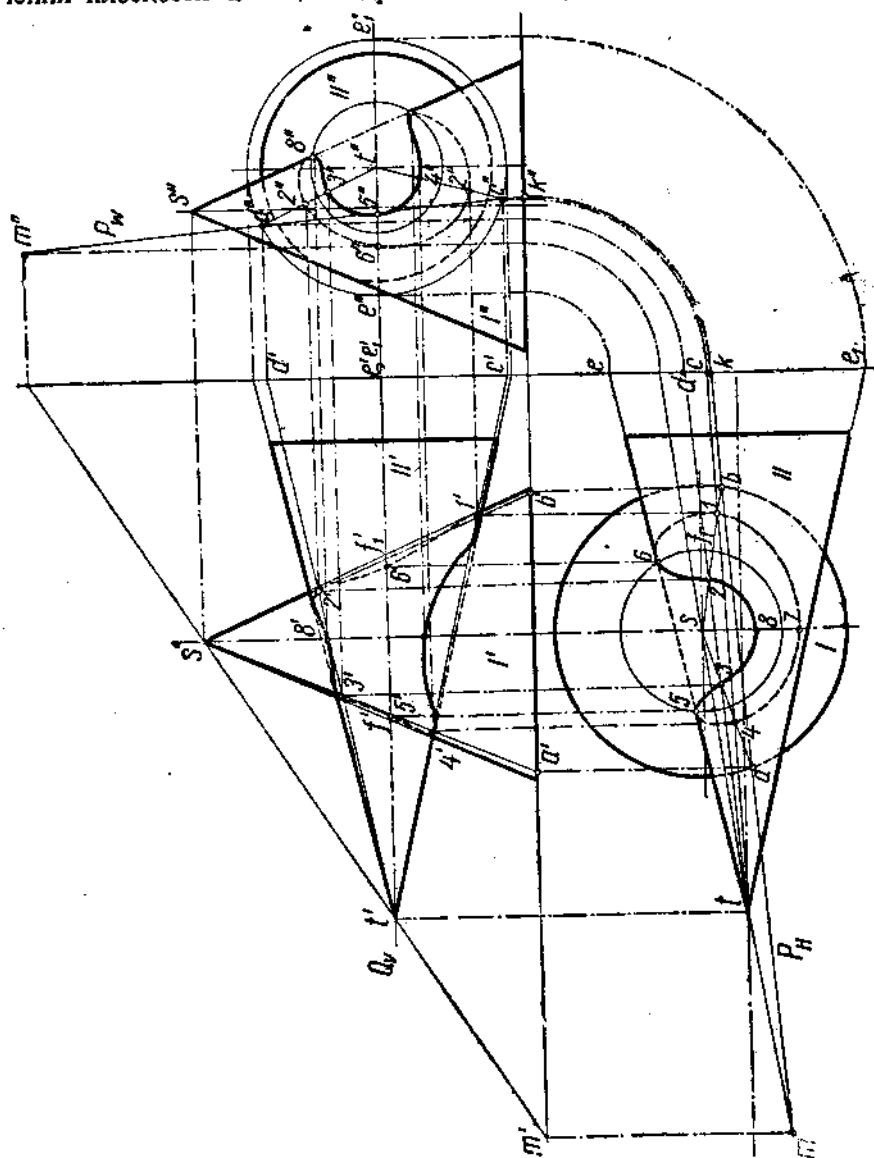
Решение. В этом случае вертикальные проекции точек, общих для обеих поверхностей, могут быть найдены при помощи шаровых поверхностей, проведенных из точки пересечения осей. Так, для нахождения точки 1 проведена окружность, пересекающая вертикальные проекции крайних образующих конуса II в точках a'' и b'' и конуса I в точках c'' и d'' ; в пересечении прямых $a'b''$ и $c'd''$, очевидно, найдутся вертикальные проекции точек 1 и 1_1 . Горизонтальные проекции указанных точек легко найти на горизонтальных проекциях образующих конуса I , проведенных через найденные точки (образующие SK и SK_1). Построив ряд окружностей из центра o' , можно найти достаточное количество точек для построения линии пересечения.

Пример 8. Пересечение поверхностей цилиндра и шара (черт. 456); ось цилиндра параллельна оси проекций и не проходит через центр шара O_c .

Решение. Для нахождения точек, общих для заданных поверхностей, можно воспользоваться плоскостями, параллельными плоскостям H , V или W . Действительно, если провести плоскость P , параллельную V , то она рассекает цилиндр по образующим C_1C_1 и C_2C_2 , а шаровую поверхность по окружности радиуса ao ; построив окружность радиуса ao на плоскости V , отмечаем вертикальные проекции a_1' и a_2' общих точек — горизонтальные проекции a_1 и a_2 будут лежать на следе P_H .

Проекции общих точек на плоскости W , очевидно будут, лежать на окружности — проекции цилиндрической поверхности.

Проведя плоскость Q , параллельную плоскости H , мы обнаружим точки B_1 и B_2 в пересечении образующих C_3C_3 и C_4C_4 , полученных в пересечении плоскости Q с цилиндрической поверхностью, с окружностью



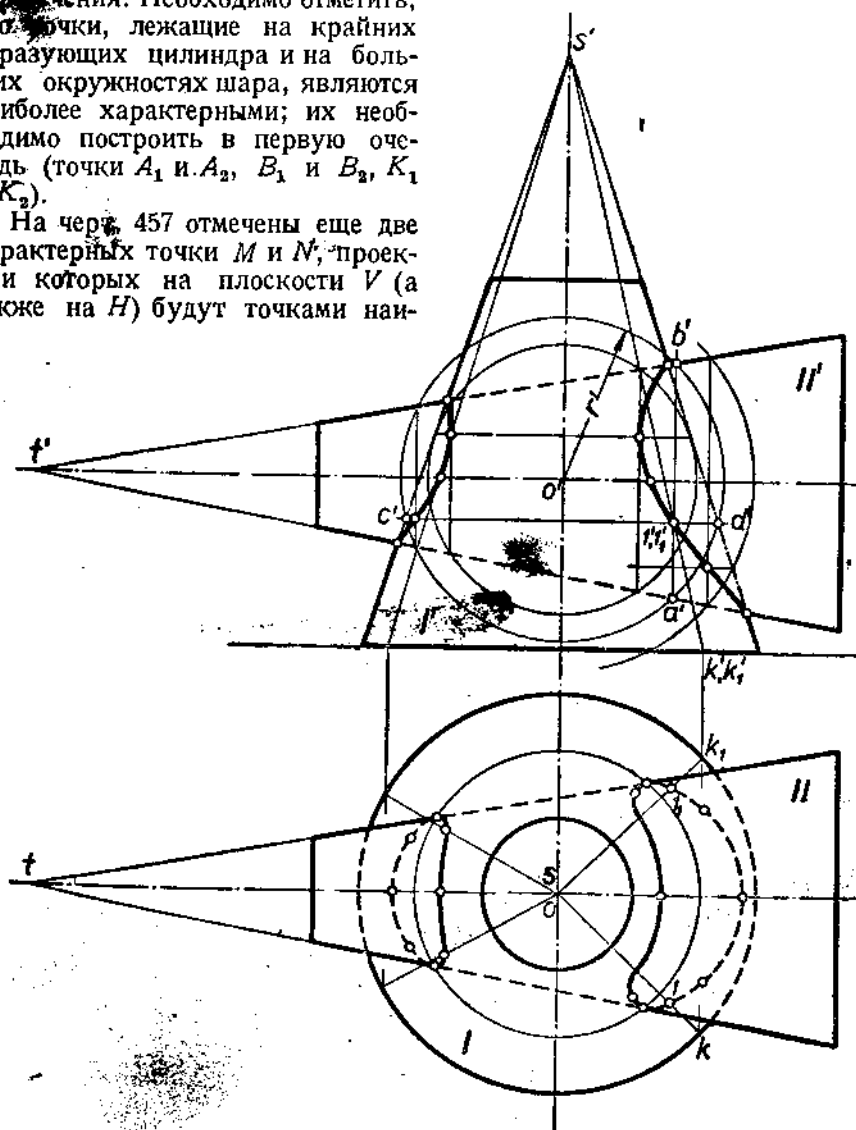
Черт. 454.

радиуса $o_2'b'$ — линией пересечения плоскости Q с шаровой поверхностью; окружность строится на горизонтальной проекции, где сначала и отмечаются точки b_1 и b_2 .

Если провести плоскость T , параллельную W , то она рассекает поверхности цилиндра и шара по окружностям, которые в истинную вели-

чину проектируются на плоскость W . Точки d_1'' и d_2'' будут, очевидно, проекциями общих точек D_1 и D_2 . Пользуясь указанными плоскостями, можно найти достаточное количество точек для построения кривой пересечения. Необходимо отметить, что точки, лежащие на крайних образующих цилиндра и на больших окружностях шара, являются наиболее характерными; их необходимо построить в первую очередь (точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , K_1 и K_2).

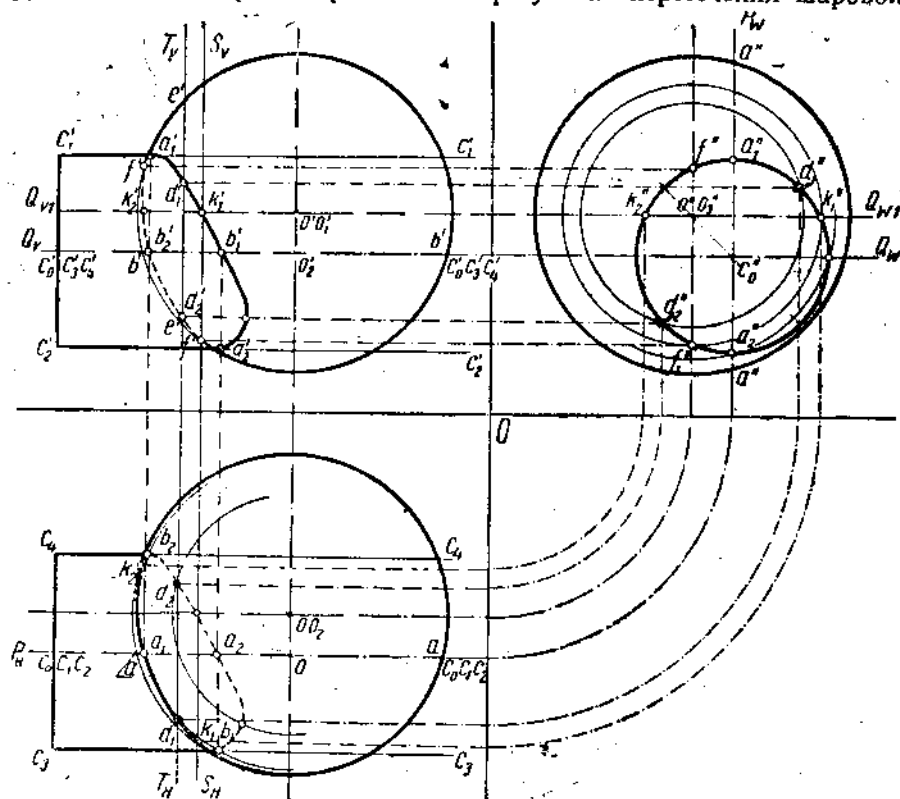
На черт. 457 отмечены еще две характерных точки M и N , проекции которых на плоскости V (а также на H) будут точками наи-



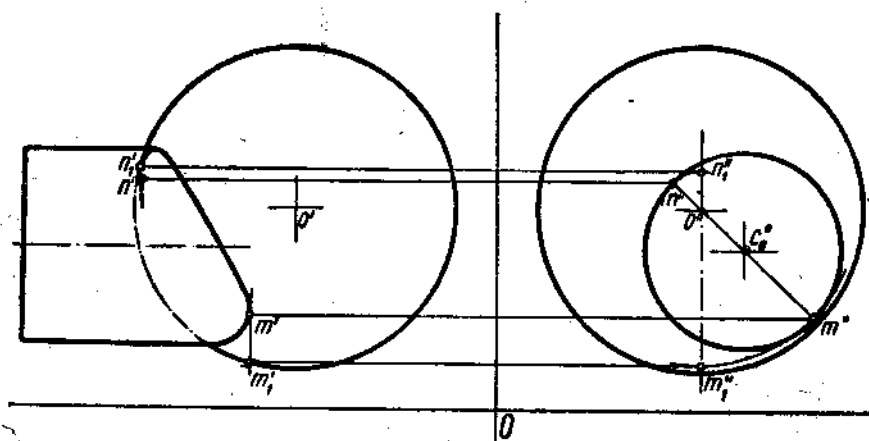
Черт. 455.

более приближенной и наиболее отдаленной по отношению к следу профильной плоскости, проходящей через центр шара. Проводя на плоскости W прямую, соединяющую точки o'' и c_0'' , отмечаем положение точек m'' и n'' — проекций искомых точек на плоскости W . Точки

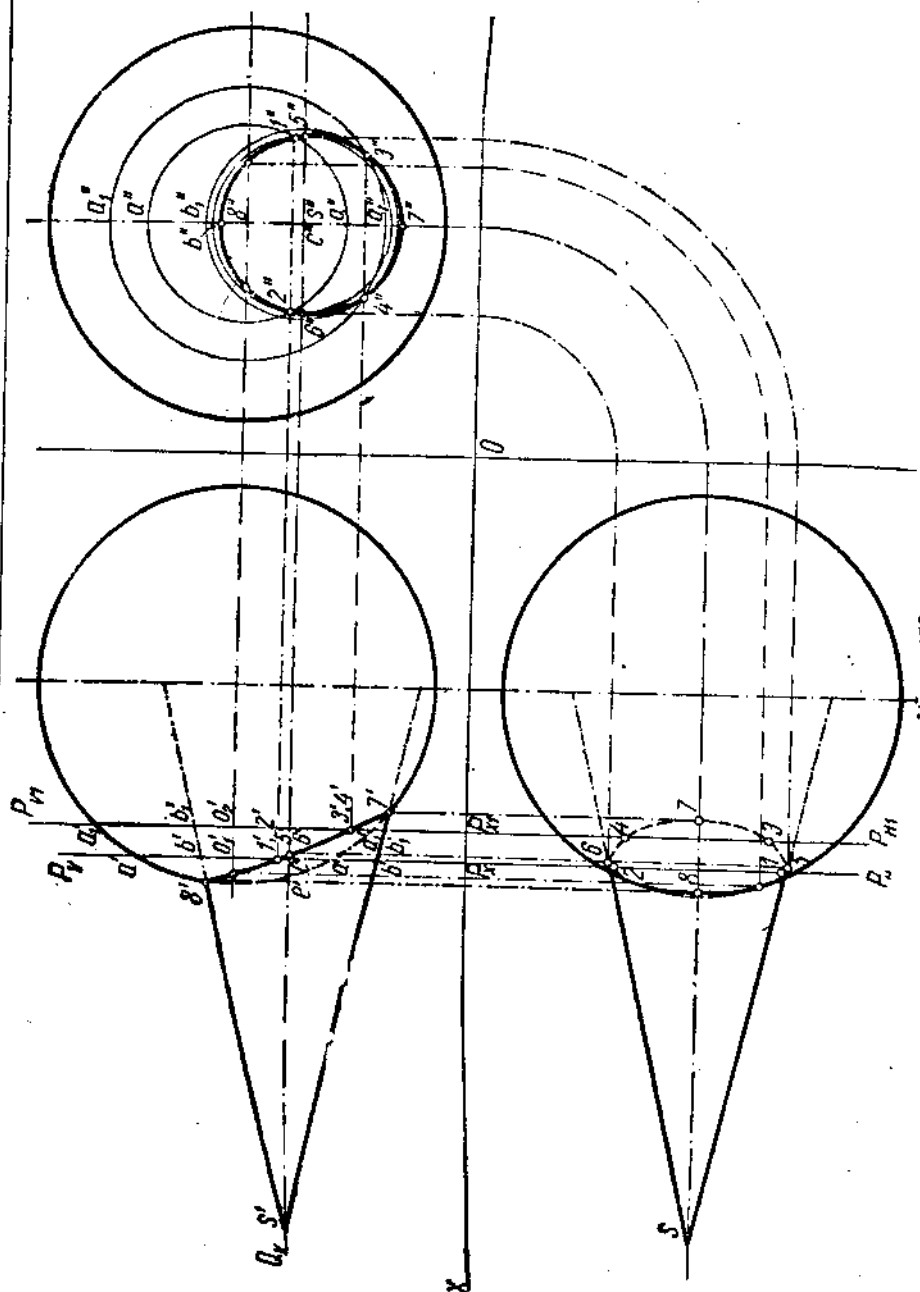
m'' и n'' будут лежать на окружностях, проведенных из точки o'' касательно к окружности — проекции цилиндрической поверхности. Эти окружности можно рассматривать как результат пересечения шаровой



Черт. 456.



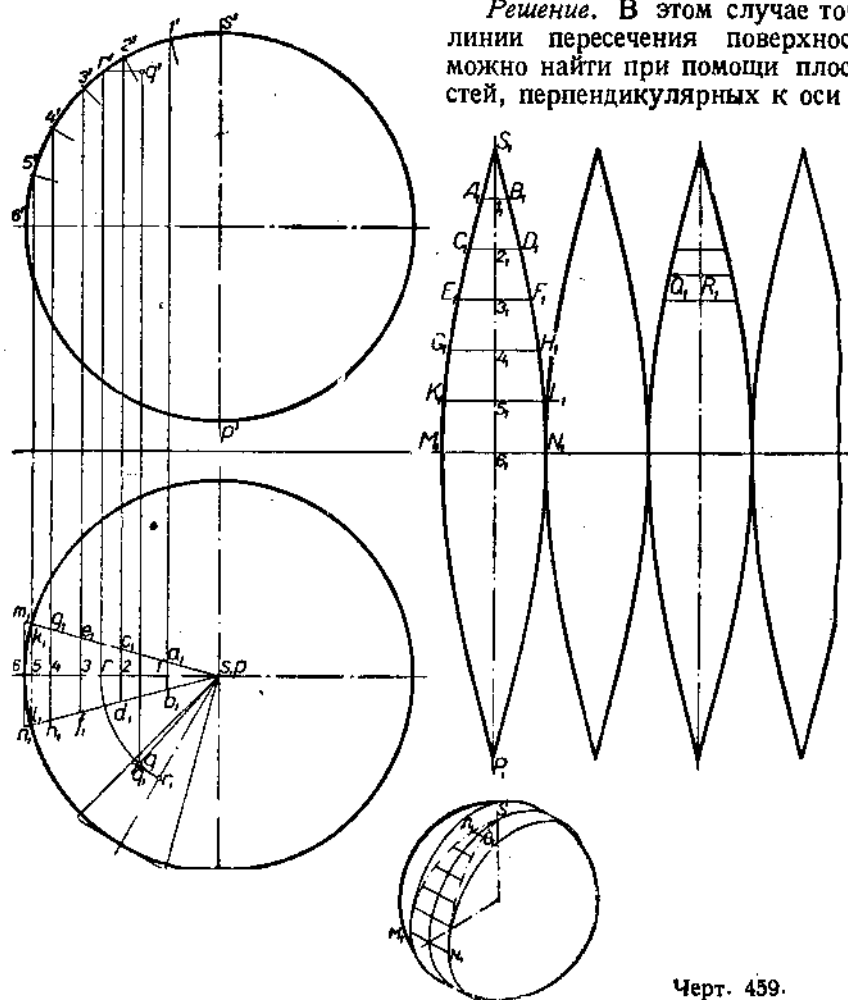
Черт. 457.



поверхности плоскостями, параллельными плоскости W . Положение следов этих плоскостей на плоскости V намечаем при помощи поворота точек m'' и n'' из центра o'' и переноса их на окружность на плоскости V . Дальнейшее понятно по чертежу.

Пример 9. Пересечение конуса с шаром — черт. 458. Ось конуса параллельна оси проекций и не проходит через центр шара.

Решение. В этом случае точки линии пересечения поверхностей можно найти при помощи плоскостей, перпендикулярных к оси ко-



Черт. 459.

нуса. Плоскости P и P_1 , перпендикулярные к оси конуса, в данном случае будут, очевидно, профильными плоскостями, рассекающими шаровую поверхность по окружностям радиусов $o_1'a'$ и $o_2'a_1'$, а поверхность конуса по окружностям радиусов $c''b''$ и $c''b_1''$. Построив на плоскости W указанные окружности, находим проекции общих точек поверхностей шара и конуса. Так, в пересечении окружностей, полученных при помощи плоскости P , отмечаем точки $1''$ и $2''$; вертикальные и горизонтальные проекции точек 1 и 2 , очевидно, будут на следах P_V и P_H .

Таким же образом найдены точки 3 и 4 при помощи плоскости P_1 . Так как ось конуса параллельна H , то, проведя через нее плоскость Q , параллельную H , рассечем поверхность конуса по образующим, а поверхность шара по окружности; построив последнюю на плоскости H , найдем в пересечении с проекциями крайних образующих конуса точки 5 и 6. В данном примере ось конуса лежит в одной вертикальной плоскости с центром шара, а потому легко обнаружить точки 7 и 8. Построив достаточное количество точек, соединяют их по лекалу плавной кривой (на черт. 458 невидимые части линии показаны штриховой линией).

Построение развертки боковой поверхности конуса нами рассматривалось. Что же касается развертки шаровой поверхности, то таковая точно не развертывается; на черт. 459 дано приближенное построение.

Для построения разбиваем шаровую поверхность на несколько одинаковых частей при помощи плоскостей, проходящих через ось шара PS ; на черт. 459 разбивка произведена на 12 равных частей (вертикальные проекции линий пересечения не показаны). Дуги большой окружности на плоскости H , между отдельными делениями, заменяем прямыми, касательными к большой окружности — например, m_1n_1 будет заменять дугу k_1l_1 .

Каждую часть шаровой поверхности заменяем цилиндрической с осью, проходящей через центр шара и параллельной касательной к окружности большого круга (радиус основания цилиндрической поверхности равен радиусу шаровой).

Делим дугу $s'b'p'$ на равные части $s' - 1' = 1' - 2' = 2' - 3'$ и т. д. (на чертеже дуга $s'b'$ разделена на 6 частей); принимая точки $1'$, $2'$ и т. д. за вертикальные проекции образующих цилиндрической поверхности с осью, параллельной k_1l_1 , строим соответственно их горизонтальные проекции a_1b_1, c_1d_1, e_1f_1 и т. д. На прямой M_1N_1 откладываем длину касательной m_1n_1 (на черт. $M_1N_1 = m_1n_1$); через середину отрезка M_1N_1 проводим линию, перпендикулярную к M_1N_1 и откладываем на ней S_1b_1 и P_1d_1 — отрезки, соответственно равные дугам $s'b'$ и $p'b'$. Эти отрезки делим на части, соответственно равные дугам $s'1'$, $1'2'$ и т. д.

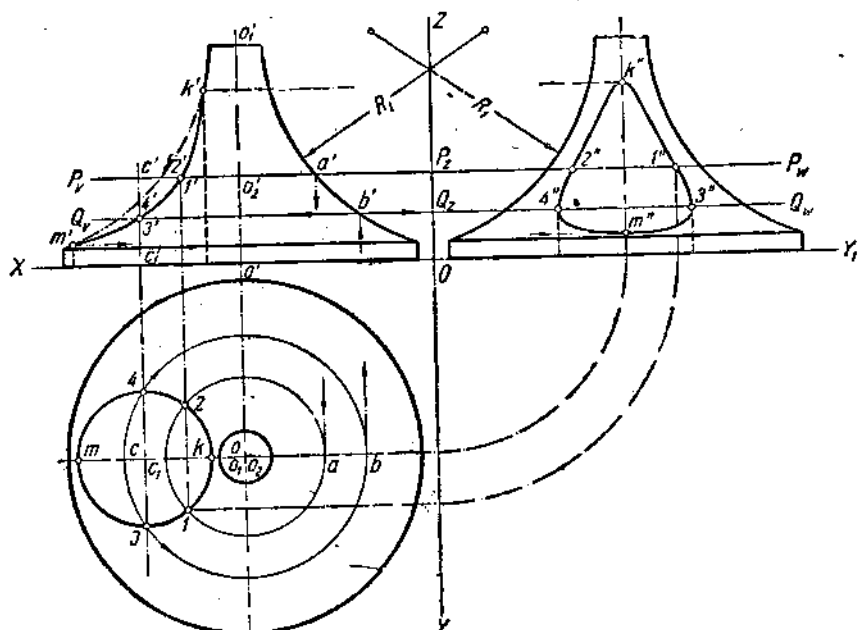
Далее через точки $1_1, 2_1, 3_1$ и т. д. проводим прямые, параллельные M_1N_1 , на которых откладываем $A_1B_1 = a_1b_1, C_1D_1 = c_1d_1$ и т. д.

Соединив точки S_1, A_1, C_1 и т. д. и S_1, B_1, D_1 и т. д. по лекалу, получим приближенную развертку одного деления шаровой поверхности. Для получения приближенной развертки всей шаровой поверхности нужно построить развертки всех делений. Если же необходимо на развертку нанести точку, находящуюся на шаровой поверхности, например Q (q, q_1), то предварительно проводим прямую s_1r_1 и через q дугу радиусом sq ; затем точку r_1 (точку пересечения дуги прямой) поворачиваем до прямой sb и находим r' .

Откладывая на развертке третьего деления от вершины его отрезок, равный дуге $s'r'$, проводим через R_1 прямую, параллельную M_1N_1 , на которой наносим $R_1Q_1 = r_1q_1$. Если необходимо построить развертку шаровой поверхности по черт. 458 с нанесением линии перехода, то, очевидно, поступая указанным приемом, можно приближенно задачу решить.

Пример 10. Пересечение поверхностей цилиндра и некоторого тела вращения; цилиндрическая поверхность с осью CC_1 показана как поверхность отверстия в теле вращения (черт. 460).

Решение. Так как оси рассматриваемых поверхностей перпендикулярны к плоскости H , то, пересекая поверхности плоскостями, параллельными H , получим на H проекции сечений в виде окружностей; точки пересечения этих окружностей будут горизонтальными проекциями общих точек поверхностей. На черт. 460 проведена плоскость P ,



Черт. 460.

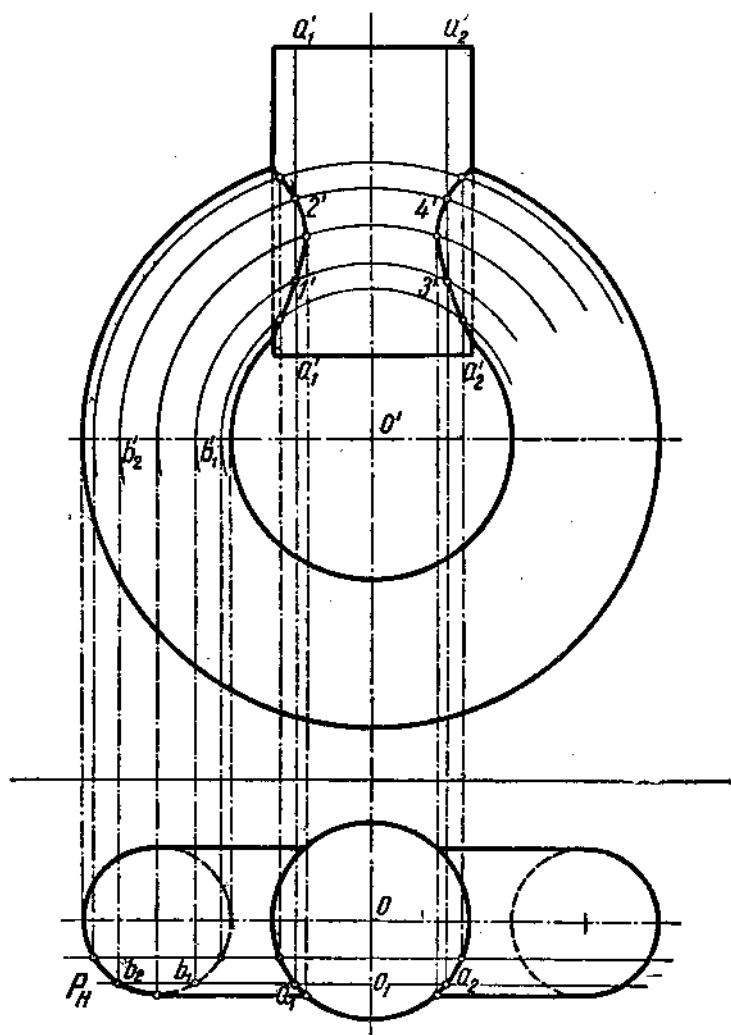
рассекающая поверхность тела вращения по окружности радиуса $o_2'a'$; точки пересечения этой окружности с окружностью цилиндра — точки 1 и 2 — являются проекциями искомых точек. Построив ряд точек на плоскостях V и W , соединяем их кривыми.

Пример 11. Пересечение цилиндра с кольцом (черт. 461).

Решение. Для нахождения линии пересечения воспользуемся плоскостями, параллельными V , которые рассекут поверхность кольца по окружностям, а поверхность цилиндра по образующим. На черт. 461 показана плоскость P , параллельная V , рассекающая кольцо по окружностям радиусов o_1b_1 и o_2b_2 , а цилиндр по образующим A_1A_1 и A_2A_2 ; в пересечении вертикальных проекций этих окружностей с вертикальными проекциями образующих находим проекции искомых точек — $1'$, $2'$, $3'$ и $4'$. Проведя ряд плоскостей, можно найти достаточное количество точек искомой линии пересечения.

На черт. 462 приведен еще один пример пересечения поверхностей цилиндра и кольца. Способ построения проекций линии пересечения

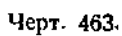
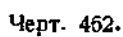
тот же, что и на черт. 461; но благодаря данному положению цилиндра вспомогательные плоскости пересекают его поверхность по окружностям, проекции которых на плоскости V совпадают между собою.

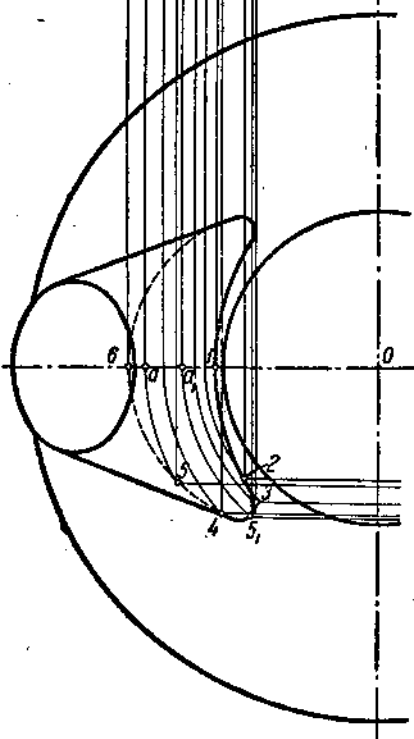
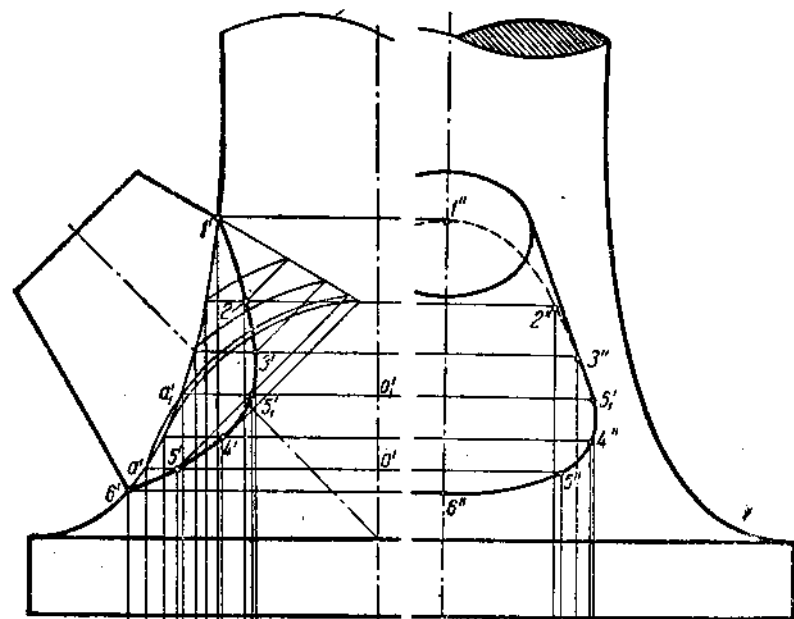


Черт. 461.

Пример 12. Пересечение конуса с полуколыцом (черт. 463).

Решение. В этом примере, как и в предыдущем, воспользуемся плоскостями, параллельными V , хотя эти плоскости и пересекают коническую поверхность по гиперболам, которые приходится в свою очередь строить по точкам. Плоскостями, проходящими через вершину конуса, не пользуемся, так как они в пересечении с полуколыцом будут давать кривые, построение которых сложнее, нежели построение гипербол. На





Черт. 464.

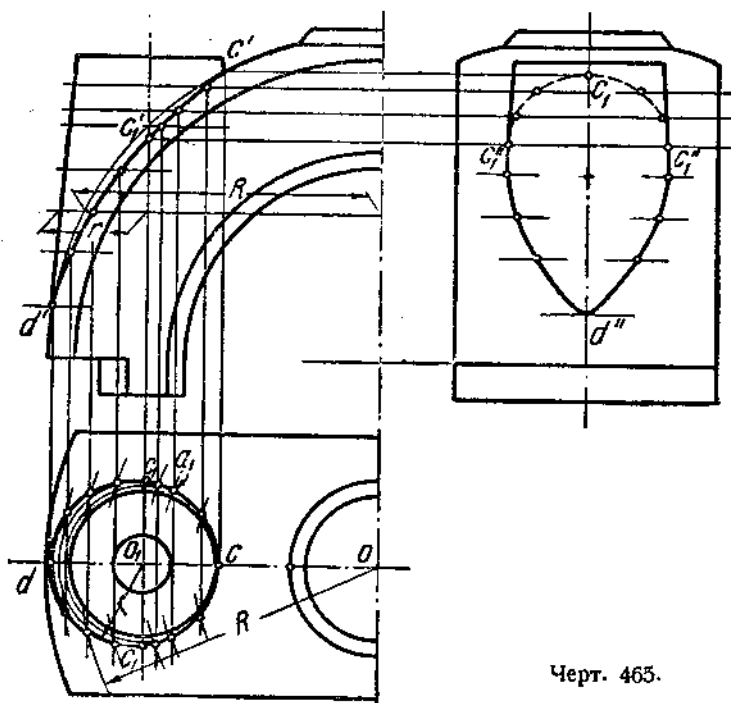
черт. 463 плоскость, параллельная V , пересекает полукольцо по полуокружностям радиусов o_1a и o_1a_1 . Построив на вертикальной проекции гиперболу — линию пересечения конической поверхности с плоскостью, проводим дугу окружности радиуса o_1a и находим точки K и M . Используя ряд плоскостей, параллельных V , можно построить линию пересечения.

Пример 13. На черт. 464 приведено построение проекций линии пересечения поверхностей двух тел вращения. Для нахождения точек применены вспомогательные шаровые поверхности. Сперва определяются проекции точек на плоскости V , а затем на плоскости H . Например, точка 5 на плоскости H определена на дуге окружности, проведенной из точки o

радиусом $oa = o'a'$; точка 5_1 получена на дуге, проведенной из точки o радиусом $oa_1 = o_1'a_1'$.

Примечание. Точки на плоскости W найдены обычным построением третьей проекции по двум данным (определенным на плоскостях V и H). Для экономии места на черт. 467 все три вида (главный вид, вид сверху и вид слева) даны неполностью.

Пример 14. На черт. 465 изображена крышка подшипника¹. В данном случае имеет место пересечение шаровой поверхности с кониче



Черт. 465.

скими. Для построения проекций линии пересечения конуса с шаровой поверхностью применены вспомогательные секущие горизонтальные плоскости. Ход построения ясен из чертежа.

Глава VIII

ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

§ 48. Винтовая линия

Острые резца, соприкасаясь с поверхностью вращающегося цилиндрического стержня, прочеркивает на последнем окружность. Если же при этом сообщить резцу равномерно поступательное движение вдоль оси цилиндра, то на поверхности последнего получится линия, называемая винтовой.

¹ Для экономии места главный вид и вид сверху даны неполностью.

Винтовая линия не может разместиться на плоскости подобно окружности, эллипсу и т. д.; винтовая линия — не плоская кривая линия, а линия двойкой кривизны.

На черт. 466 выполнено построение винтовой линии, полученной при движении точки A по поверхности цилиндра. Цилиндр задан двумя проекциями; точка A также задана двумя проекциями, a и a' , в начальном положении на нижнем основании цилиндра.

Точка A должна участвовать в двух движениях: вращательном (вокруг оси цилиндра) и поступательном (вдоль оси цилиндра). Положим, что за время одного полного оборота вокруг оси точка A поднимается вдоль оси на высоту h . Расстояние h , называемое шагом винтовой линии, может быть различным для различных винтовых линий, т. е. может быть выбрано в зависимости от тех или иных условий.

Для нахождения проекций винтовой линии (черт. 466) делим величину шага и длину окружности на одинаковое число частей (на чертеже шаг разбит на 12 равных частей, а окружность — на 12 равных дуг). Если за время полного оборота точка A поднимается на высоту целого шага, то в течение $\frac{1}{12}$ части оборота точка поднимается на $\frac{1}{12}$ шага, в течение полуоборота — на $\frac{1}{2}$ шага и т. д. Так как ось цилиндра перпендикулярна к плоскости H , то горизонтальная проекция винтовой линии совпадает с окружностью, представляющей собой горизонтальную проекцию боковой поверхности цилиндра (по этой поверхности движется точка A , описывая винтовую линию).

Что же касается вертикальной проекции винтовой линии, то весь ход ее построения аналогичен построению синусоиды. Действительно, если требуется построить кривую, характеризующую изменение синуса в зависимости от изменений угла (черт. 467), то достаточно спроектировать точки b, c, d и т. д., равномерно размеченные по окружности, на перпендикуляры, проведенные в точках 1, 2, 3 и т. д. Эти точки делят весь отрезок A_0A на столько же частей, на сколько разделена окружность. В пересечении горизонтальных и вертикальных линий (черт. 467) получаются точки синусоиды, так как при этом на перпендикулярах, проведенных в точках 1, 2, 3 и т. д., откладывается величина линии синуса.

Если сравнить это построение с построением, выполненным на черт. 466, то легко заметить их тождественность; вертикальная проекция винтовой линии строится так же, как синусоида.

На черт. 468 для точки $3'$ вертикальной проекции винтовой линии абсцисса $x = a'c'$ или $x = kc$; ордината $y = 3'c'$. Угол φ соответствует подъему точки, двигающейся по винтовой линии, на y , в то время как при полном обороте (на угол 2π) точка поднимается на всю величину шага h .

Следовательно

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{y}{h},$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\pi}{h} \cdot y.$$

В треугольнике oks отрезок $ks = os \cdot \sin \varphi$, т. е.:

$$x = R \cdot \sin \varphi.$$

Подставляя вместо φ найденное для него выражение, получаем:

$$x = R \cdot \sin \frac{2\pi}{h} \cdot y.$$

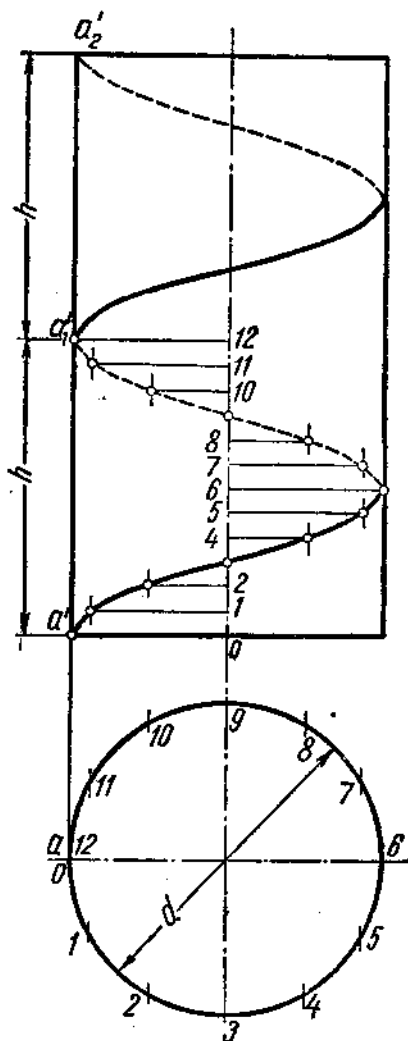
Следовательно, для линии, на которой была взята точка 3, получается уравнение синусоиды.

Возвращаясь к черт. 466, заметим, что если нумерация точек на окружности идет против часовой стрелки, то вертикальная проекция винтовой линии имеет подъем слева направо на передней (видимой) стороне цилиндра. Если же вращение будет происходить в обратном направлении (черт. 469), т. е. нумерация делений на окружности будет идти по часовой стрелке, то подъем на вертикальной проекции винтовой линии получается справа налево. В первом случае (черт. 466) винтовая линия будет с правым ходом, во втором (черт. 469) — с левым ходом.

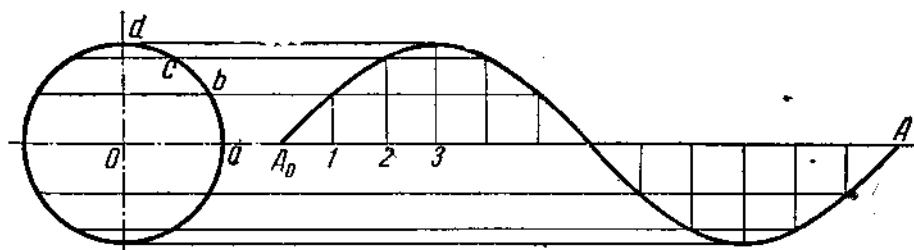
Крутизна подъема винтовой линии характеризуется углом, получаемым при разворачивании боковой поверхности цилиндра, на которой нанесена винтовая линия (черт. 470). Последняя в развернутом виде представляет собой вообще прямую линию. На черт. 470 при двух шагах винтовой линии получились два ее участка — два параллельных отрезка под углом α . Построение развертки боковой поверхности цилиндра и развертки винтовой линии, указанное на черт. 470, не требует особых пояснений. Величина угла α зависит от шага величины винтовой линии h и длины окружности основания цилиндра πd :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi d}.$$

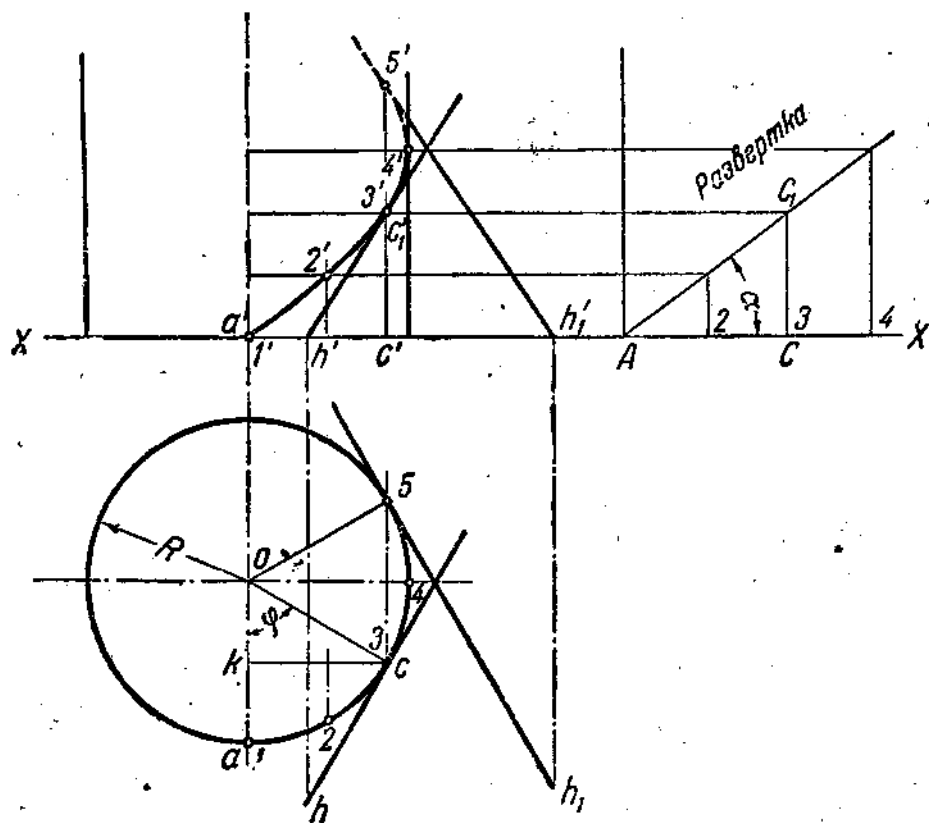
Длина каждого участка винтовой линии, приходящегося на один шаг, составляет $L = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}$.



Черт. 466.



Черт. 467.

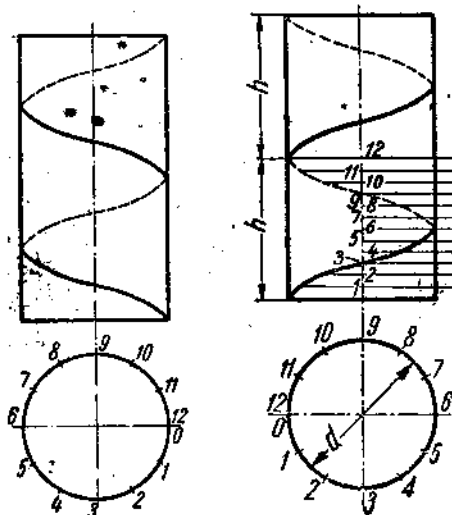


Черт. 468.

При одном и том же диаметре цилиндра величина угла α будет зависеть от шага винтовой линии; для получения малого угла наклона следует брать малый шаг и наоборот. Если же шаг винтовой линии остается неизменным для нескольких цилиндров разного диаметра, то угол наклона получится тем меньше, чем больше будет диаметр цилиндра.

Винтовую линию легко моделировать, если взять прямоугольник с начерченной на нем диагональю и свернуть его в виде прямого кругового цилиндра; при этом диагональ образует винтовую линию.

Положим (черт. 468), что к винтовой линии в точке $(3, 3')$ проведена касательная, пересекающая плоскость H в точке h .



Черт. 469.



Черт. 470.

Угол между винтовой линией и любой образующей цилиндра выражается углом между этой образующей и касательной (к винтовой линии), проведенной в точке, общей для винтовой линии и образующей. Развертка на черт. 470 показывает, что между винтовой линией и образующими цилиндра получается постоянный угол ($90^\circ - \alpha$) для данной винтовой линии. Следовательно, все касательные к винтовой линии будут одинаково наклонены к образующим цилиндра и будут пересекать плоскость H под одним и тем же углом α , полученным при развертке данного цилиндра с нанесенной на нем винтовой линией.

Обращаясь вновь к черт. 468, отметим, что рассматриваемая нами касательная образует с плоскостью H угол α , характерный для данной винтовой линии. Этот угол является одним из острых углов прямоугольного треугольника, изображенного вертикальной проекцией $z'c'h'$ и горизонтальной проекцией — отрезком ch . Отрезок ch — катет рассматриваемого треугольника — является проекцией отрезка касательной и называется подкасательной.

Так как $ch = c_1'c' \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ и в то же время (черт. 468) отрезок $AC = c_1c \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, то $ch = AC$, т. е. длина подкасательной равна длине

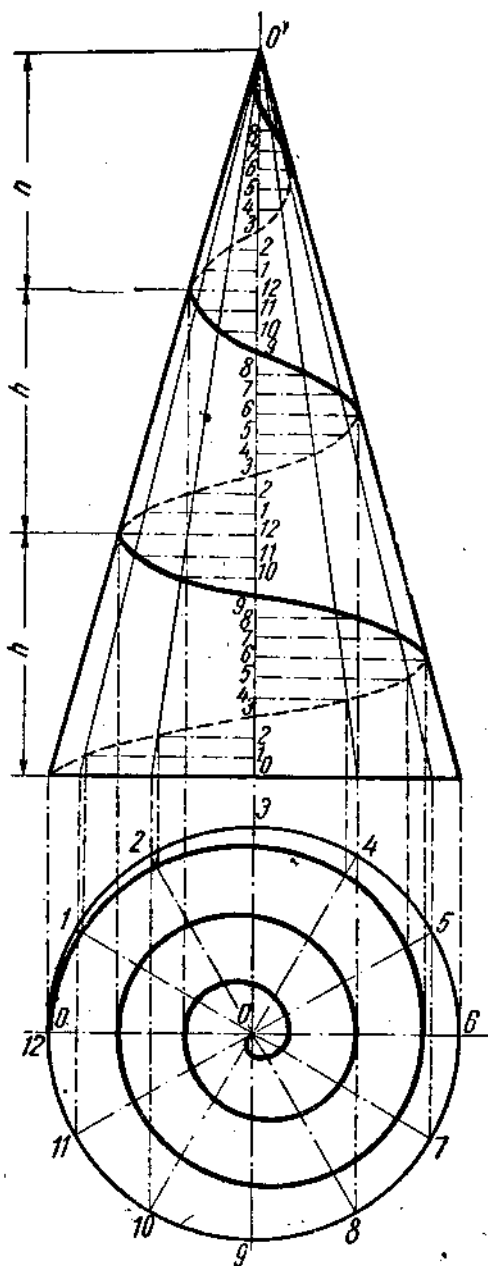
выпрямленной дуги окружности от начальной точки до проекции точки касания.

Следовательно, отложив (черт. 468) на касательной к окружности (горизонтальной проекции винтовой линии) от точки с длиной, равную длине дуги 1—2—3, получим точку h — горизонтальный след касательной. Построив проекцию h' , проведем прямую через точки h' и $3'$.

В точке 5 проведена касательная к окружности — горизонтальной проекции винтовой линии, отложен отрезок $5-h_1$, равный выпрямленной дуге 7—3—5, по точке h_1 найдена точка h_1' и через последнюю и точку $5'$ проведена прямая — вертикальная проекция касательной к данной винтовой линии. Из построения точек h и h_1 следует, что точки эти принадлежат эвольвенте, эволютой которой служит окружность — горизонтальная проекция винтовой линии.

Если бы требовалось построить винтовую линию на конусе (черт. 471), то пришлось бы разметить некоторое количество образующих (например 12, как это сделано на черт. 471), разделить высоту хода (шаг) на такое же число частей и затем на соответственных образующих отметить положение точки, описывающей винтовую линию. Горизонтальная проекция винтовой линии примет в этом случае форму спирали Архимеда.

Если построить развертку боковой поверхности конуса, от винтовая линия развернется также в спираль Архимеда, так как равномерному угловому перемещению радиуса на секторе (на развертке боковой поверхности конуса) будет сопутствовать по этому радиусу.



Черт. 471.

вать равномерное перемещение точки

§ 49. Винтовая поверхность

На черт. 472 выполнено построение винтовой поверхности. Эта поверхность образована движением отрезка AB (ab , $a'b'$), оба конца которого описывают винтовые линии. Отрезок взят таким образом, что один конец его скользит по поверхности цилиндра и самый отрезок во всех своих положениях пересекает ось цилиндра под одним и тем же углом (на черт. 472 этот угол взят равным 60°). Винтовая поверхность, описанная при движении данного отрезка, получается навитой на цилиндр; в данном случае винтовая поверхность имеет правый ход.

Построение винтовой линии (черт. 472), получающейся при движении точки B (b , b') по поверхности цилиндра, аналогично построению, выполненному на черт. 466. Что же касается конца A (a , a'), который также образует винтовую линию, то легко представить движение и этой точки по поверхности воображаемого цилиндра, диаметр основания которого равен отрезку ab .

Все точки отрезка AB образуют винтовые линии и, следовательно, для возможно более точного изображения контура винтовой поверхности на плоскости V следовало бы провести кривые, охватывающие проекции винтовых линий. Взамен этого обычно проводят прямые, касательные к проекциям винтовых линий концевых точек производящего отрезка.

Если наклон образующей по отношению к оси не равен 90° (черт. 472), то получаемая винтовая поверхность носит название косо́й; если этот угол будет равен 90° , то образуется прямая винтовая поверхность. Построение прямой винтовой поверхности выполнено на черт. 473.

На черт. 474 выполнено построение еще одной винтовой поверхности, образованной движением отрезка, касательного к поверхности цилиндра. Построение опять сводится к нахождению проекций винтовых линий, образованных двумя точками: концом (a_0 , a'_0) отрезка и точкой касания (b_0 , b'_0). Отрезок может быть направлен по отношению к оси так, что при скрещивании с ней образуется либо прямой угол (как взято на черт. 474), либо острый (или тупой) угол.

Изображенная на черт. 473 поверхность относится к разряду коноидов (см. § 35, стр. 168). Действительно, образующая прямая линия во всех положениях остается параллельной некоторой плоскости (в данном случае эта плоскость перпендикулярна к оси цилиндра); образующая пересекает две направляющих линии, кривую и прямую (ось цилиндра).

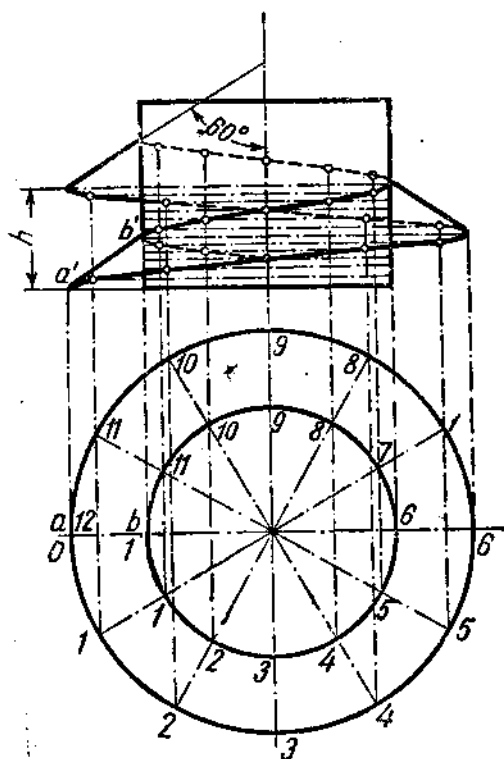
Так как кривая направляющая в данном случае представляет собою винтовую линию (цилиндрическую), то коноид получает название винтовой коноид, также неразвертываемый геликоид¹. Действительно, поверхность неразвертываемая, так как смежные образующие не параллельны и не пересекаются.

На черт. 473 винтовой коноид пронизан круговым цилиндром при общей оси; в результате пересечения образуется цилиндрическая вин-

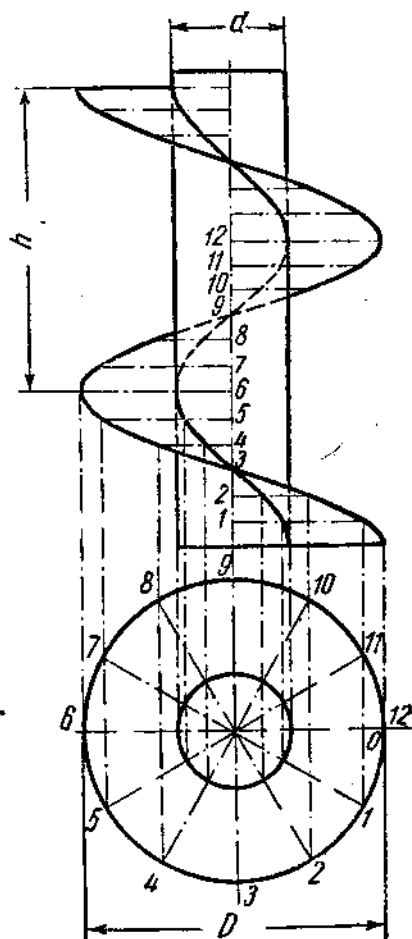
¹ Hélicoïde (франц.) винтовой; hélice (франц.) спираль, витая линия. Говорят также гелисоид.

товая линия, шаг которой одинаков с шагом направляющей винтовой линии. Поверхность, заключенную между обеими винтовыми линиями, называют кольцевым винтовым коноидом.

Изображенная на черт. 472 поверхность носит название косо́го геликонда. Характерным для этой поверхности является такое движение образующей, когда последняя пересекает цилиндрическую винтовую линию и ее ось всегда под одним и тем же углом, не равным 90° .



Черт. 472.

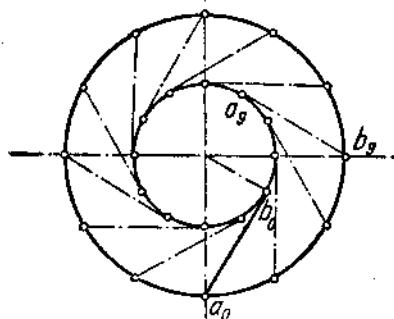
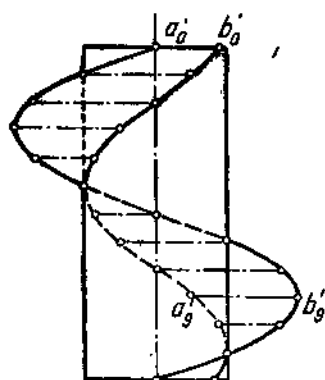


Черт. 473.

Поверхность, изображенная на черт. 474, относится к разряду цилиндров (см. стр. 168). Действительно, образующая прямая линия AB во всех своих положениях остается параллельной некоторой плоскости и концами своими скользит по направляющим кривым, не лежащим в одной плоскости. На черт. 474 плоскость параллелизма перпендикулярна к оси цилиндра; образующая постоянно касается поверхности цилиндра (точки касания образуют цилиндрическую винтовую линию) и в то же время пересекает направляющую винтовую линию, ось которой совпадает с осью цилиндра. Поверхность, изображенную на черт. 474, называют винтовым цилиндром. Если образующая

этой поверхности и ось цилиндра составляют (будучи скрещивающимися прямыми) угол, не равный 90° , то поверхность не относится к разряду цилиндриков и носит название косоугольного геликоида.

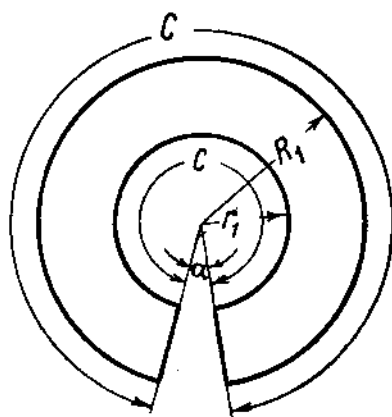
Винтовые поверхности не могут быть точно развернуты на плоскости. Для прямой винтовой поверхности (черт. 473) можно развернуть каждый отдельный оборот; развертка одного оборота может быть представлена как часть кругового кольца (черт. 475).



Черт. 474.

Для построения части кольца приходится найти величину радиусов R_1 и r_1 и угол α .

Если шаг винтовой поверхности (черт. 473) обозначен h , а диаметры цилиндров, по поверхности которых движутся концы отрезка, образующего при своем движении винтовую поверхность, обозначены через D



Черт. 475.

и d , то по формуле, указанной на стр. 251, длины участков винтовых линий выразятся:

$$C = \sqrt{\pi^2 D^2 + h^2},$$

$$c = \sqrt{\pi^2 d^2 + h^2}.$$

Так как винтовые линии развертываются в данном случае в концентрические дуги при одном и том же центральном угле, то

$$c : C = r_1 : R_1;$$

следовательно,

$$r_1 = \frac{c}{C} R_1.$$

Если ширину винтовой поверхности, т. е. разность $R_1 - r_1 = \frac{D-d}{2}$

обозначить через a , то $R_1 = r_1 + a$, $r_1 = \frac{c}{C} (r_1 + a)$,

откуда

$$r_1 = \frac{c}{C} r_1 + \frac{ac}{C},$$

т. е.

$$r_1 = \frac{ac}{C - c};$$

$$\text{угол } \alpha = \frac{2\pi R_1 - C}{2\pi R_1} \cdot 360^\circ.$$

Пример. Дано $D = 100$ мм, $d = 60$ мм, $h = 50$ мм.

Находим: $a = 20$ мм, $C \approx 318$ мм, $c \approx 195$ мм, $r_1 \approx 32$ мм, $R_1 \approx 52$ мм, угол $\alpha \approx 10^\circ$.

Построение. Проводим радиусами $R_1 = 52$ мм и $r_1 = 32$ мм две концентрические окружности, строим центральный угол $\alpha = 10^\circ$ и таким образом выделяем часть кругового кольца, представляющего собой развертку одного оборота винтовой поверхности.

Имея несколько таких развернутых оборотов, можно из них образовать винтовую поверхность: для этого следует каждый оборот последовательно соединить с цилиндрическим стержнем диаметра d (подобно тому, как это показано на черт. 473) и последовательно скрепить между собой накрученные на стержень обороты. Конечно, при действительном выполнении такой винтовой поверхности следует предусмотреть в каждом обороте способ присоединения его к стержню и соединения оборотов между собой. Далее, так как развертка оборота имеет некоторую толщину, мы будем иметь дело с винтовой лентой, навитой на цилиндрический стержень, т. е. получим так называемый винт (см. ниже).

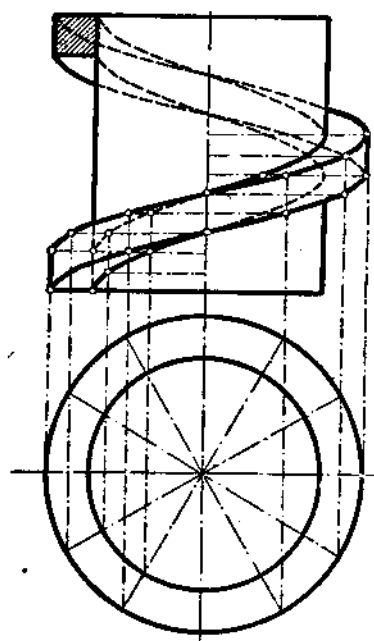
Если придется строить развертку какой-нибудь винтовой поверхности, можно выполнить это, как было указано в начале, только приближенно. Для приближенного построения развертки можно применить метод треугольников: условно считают, что из двух смежных положений образующих на винтовой поверхности получается трапеция, разбивают ее диагональю на два треугольника, определяют по проекциям сторон треугольников истинные величины этих сторон и строят последовательно по найденным сторонам треугольники, составляя из них ряд трапеций. Совокупность таких трапеций и представляет собой приближенную развертку данной винтовой поверхности.

§ 50. Винты цилиндрические

Подобно тому как при винтовом движении точки образуется винтовая линия и при винтовом движении отрезка прямой получается винтовая поверхность, можно получить винтовое тело, если заставить какую-либо фигуру (например, квадрат, треугольник, трапецию) двигаться по поверхности цилиндра так, чтобы вершины этой фигуры перемещались по винтовым линиям, а плоскость самой фигуры постоянно проходила через ось цилиндра. Образуется винтовой выступ, ограниченный винтовыми и цилиндрическими поверхностями. Построение проекций

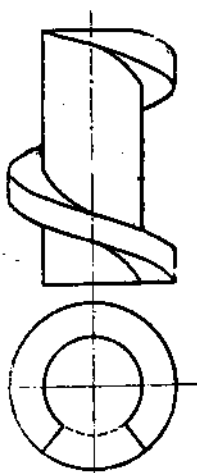
такого винтового выступа сводится к построению столько винтовых линий, сколько вершин у выбранной фигуры.

На черт. 476 показано построение винтового выступа, образованного движением квадрата. Квадрат все время примыкает одной своей стороной к образующей цилиндра, вершины квадрата движутся по винтовым линиям, построение которых производится обычным способом.



Черт. 476.

Полученный винтовой выступ ограничен двумя прямыми винтовыми поверхностями, и двумя цилиндрическими поверхностями, наружной и внутренней, соприкасающейся с поверхностью самого цилиндра. Совокупность цилиндра с винтовым на нем выступом будет называться винтом. В данном случае винт с правой резьбой, так как подъем винтового выступа на передней (видимой) стороне цилиндра идет слева направо. Если бы подъем винтового выступа на передней (видимой) стороне цилиндра шел справа



Черт. 477.

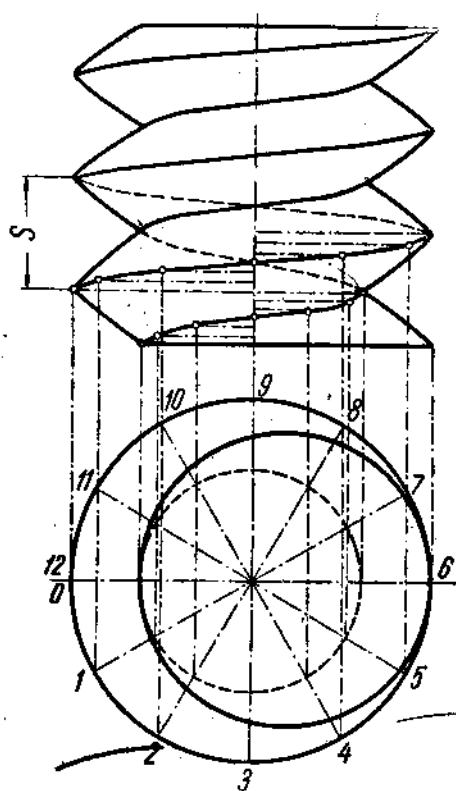
на лево (черт. 477), то винт был бы с левой резьбой.

Построенный винт имеет квадратную резьбу (нарезку). Если вместо квадрата взять треугольник и заставить его перемещаться вдоль цилиндра так же, как это было сделано с квадратом, то получим винт с треугольной резьбой. Построение винта с треугольной резьбой выполнено на черт. 478. Производящий треугольник примыкает одной стороной к основному цилиндру; вершины треугольника образуют винтовые линии, для построения которых взяты две окружности. Эти окружности разделены на 12 частей; точки делений спроектированы на горизонтальные линии, проведенные через 12 делений шага винта. Боковая поверхность винта с треугольной резьбой представляет собой сочетание двух косых винтовых поверхностей. Видимый контур на плоскости V получен на черт. 478 путем проведения касательных к проекциям большой и малой винтовых линий (черт. 479). Так обычно и поступают, хотя на самом деле контур проекций косой винтовой поверхности на плоскости V представляет собой кривую.

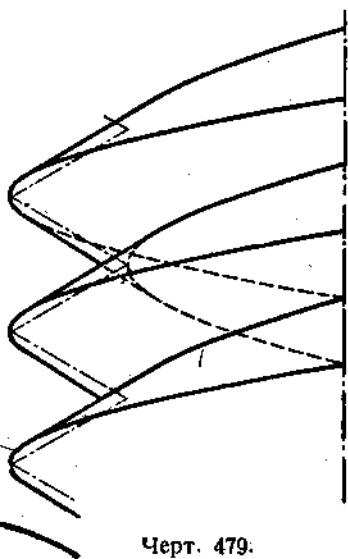
На черт. 480 показано построение поперечного сечения винта с треугольной резьбой (секущая плоскость расположена горизонтально — след R_V). Положим, что винт пересекается вспомогательной горизон-

тально-проектирующей плоскостью, проходящей через ось винта (черт. 480 — плоскость P). В пересечении с винтовым выступом плоскость P выделит производящий треугольник¹, горизонтальная проекция которого abb_1 располагается на горизонтальном следе P_H плоскости P ; вертикальная проекция этого треугольника ($a'b'b_1'$) пересекается следом P_V в точке k' , представляющей собой вертикальную проекцию одной из точек, принадлежащих линии пересечения винтовой поверхности плоскостью R . На отрезке ab получим горизонтальную проекцию точки K , принадлежащую горизонтальной проекции искомой линии пересечения винтовой поверхности плоскостью R .

Далее построена еще одна точка (m, m'); на этот раз горизонтально проектирующая плоскость не проведена, чтобы показать, что вполне



Черт. 478.



Черт. 479.

достаточно наметить положение горизонтальной проекции производящего треугольника, проведя один из радиусов. Также вместо полной вертикальной проекции производящего треугольника достаточно ограничиться проекцией одной его стороны, как это показано на черт. 480.

Проведя ряд радиусов и построив соответствующие им положения производящего треугольника, получим ряд точек для проведения горизонтальной проекции контура сечения. Как видно, фигура сечения ограничена кривой линией, имеющей ось симметрии; следовательно,

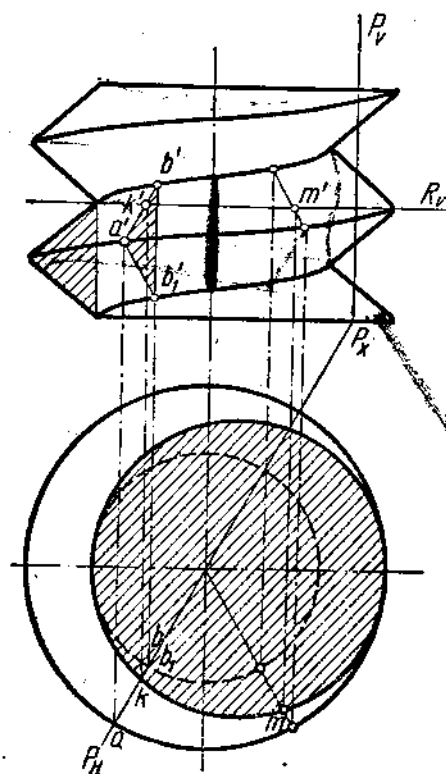
¹ Плоскость P выделит производящий треугольник в двух его положениях: на передней (видимой) стороне и на задней (невидимой) стороне винта. На черт. 479 выполнено построение для передней (видимой) стороны винта.

можно при построении ограничиться нахождением лишь одной половины кривой линии, а другую часть ее строить как симметричную ветвь.

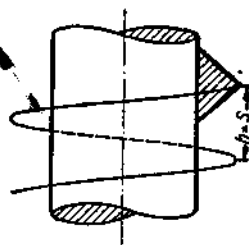
В винте, представленном на черт. 478, производящий треугольник после каждого оборота вокруг оси основного цилиндра поднимается в смежное положение на величину шага винтовой линии ($h = s$). Винт получается образованным движением одного профиля (черт. 481, где показан путь одной вершины производящего треугольника). Такой винт называется **одноходовым**¹.

Если взять два профиля и, считая их соединенными между собой, заставить двигаться по винтовым линиям, то получим **двухходовой** винт (**двухзаходный**, **двухоборотный**, винт в две нитки). На черт. 482 изображен такой винт. Каждый профиль после одного оборота поднимается на высоту, равную $h = 2s$.

На черт. 482 дан также поперечный разрез двухходового винта: винт пересечен плоскостью R , проекция фигуры сечения на горизонтальной плоскости ограничена кривой линией. Построение кри-



Черт. 480.



Черт. 481.

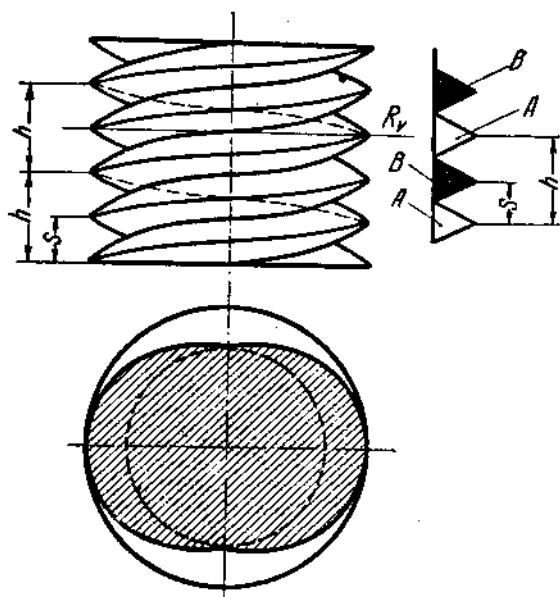
вой может быть произведено по точкам тем же способом, как и на черт. 480.

Винты, изображенные на черт. 478 и 482, с правой резьбой. На черт. 483 дан винт с правой трапецидальной (упорной) резьбой, трехходовой. В горизонтальной проекции винт показан рассеченным плоскостью R . Кроме винта дана еще гайка к нему (черт. 484), т. е. тело, имеющее отверстие с резьбой, соответствующей резьбе на винте; должно быть соответствие профиля резьбы и равенство шагов, причем профиль выступа резьбы на винте должен отвечать профилю углубления резьбы

¹ Для одноходовых винтов встречаются также названия: **однооборотный**, **однозаходный**, винт в одну нитку.

в гайке и наоборот¹. Гайка в вертикальной проекции показана рассеченной вдоль оси. В разрезе гайки мы видим ту часть поверхности цилиндра и ту часть резьбы, к которой будут прилегать витки резьбы винта, расположенные на задней части его поверхности.

При вычерчивании продольного разреза гайки (черт. 484) следует обратить внимание на правильное проведение проекций винтовых линий. В продольном разрезе гайки четко обрисовывается профиль резьбы; с вычерчивания профиля и следует начинать построение продольного разреза гайки. Далее (черт. 484) следует построить проекции винтовых линий, идущие от точек a' и b' ; эти линии будут видны (при разрезанной



Черт. 482.

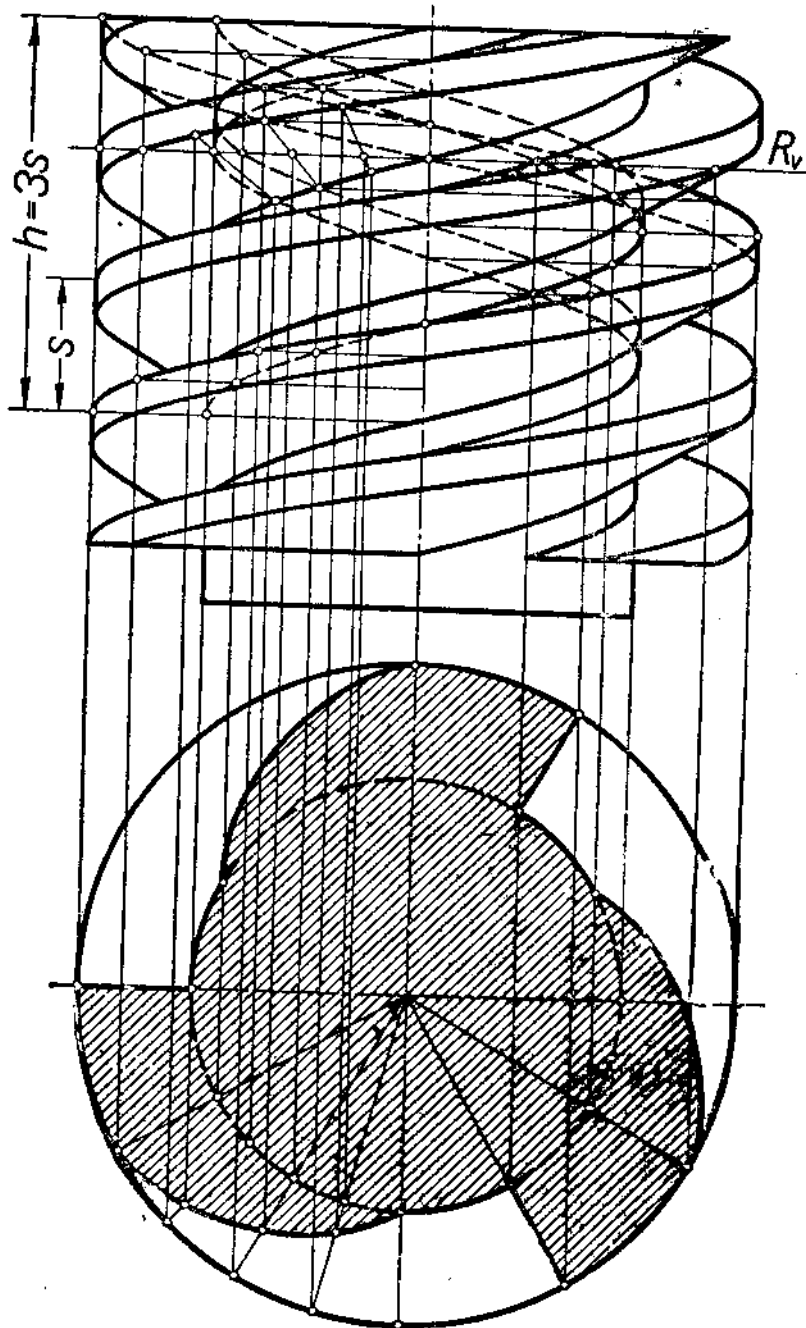
гайке) на всем их протяжении. Проекция винтовой линии $c'k'$ будет также видна в разрезе гайки, за исключением небольших участков, когда линия закрывается трапециями. Что же касается линии, идущей от точки d' , то половина вычерчиваемого участка ветви закрыта выступом витка, а другая половина открыта, так как выходит в одну из впадин профиля.

Далее, обратим внимание на построение поперечного разреза гайки, расположенного на горизонтальной плоскости. Разрез дан на одном и том же уровне, что и

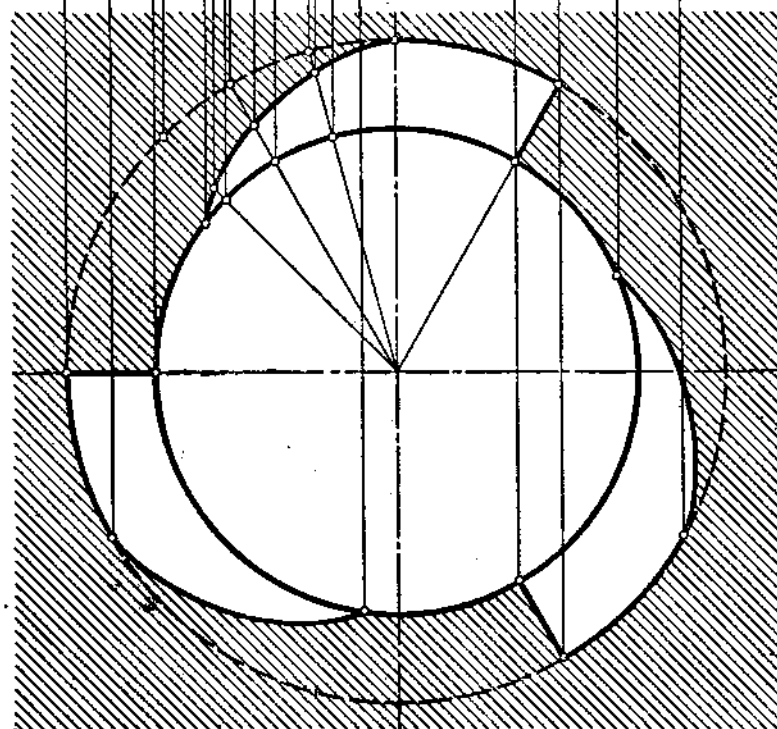
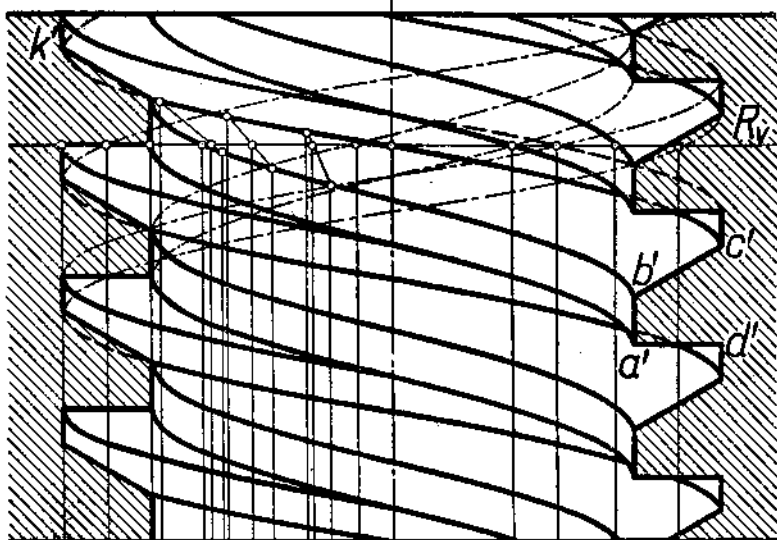
для винта; естественно, что разрез гайки по своей конфигурации соответствует разрезу стержня и резьбы винта, но отличается тем, что если часть витка резьбы в гайке рассечена, то у винта соответственная часть витка не рассечена, так как уходит под секущую плоскость, и т. д.

На черт. 483 и 484 дано несколько положений наклонной стороны трапеции — производящего профиля, аналогично тому, как это было сделано на черт. 480 для построения фигуры поперечного сечения винта. Сравнивая черт. 480 с черт. 483, заметим, что фигура сечения винта ограничивается кривыми линиями, находимыми по точкам, в том случае, когда имеется косая винтовая поверхность; при прямых винтовых поверхностях фигура сечения ограничивается наряду с частями окружностей отрезками прямых. Такие отрезки видны и на черт. 483 и 484.

¹ При построении винта и гайки на черт. 483 и 484 наружные диаметры резьбы как для винта, так и для гайки взяты равными; внутренний же диаметр резьбы в гайке больше, чем у винта (см., например, ГОСТ 7739).



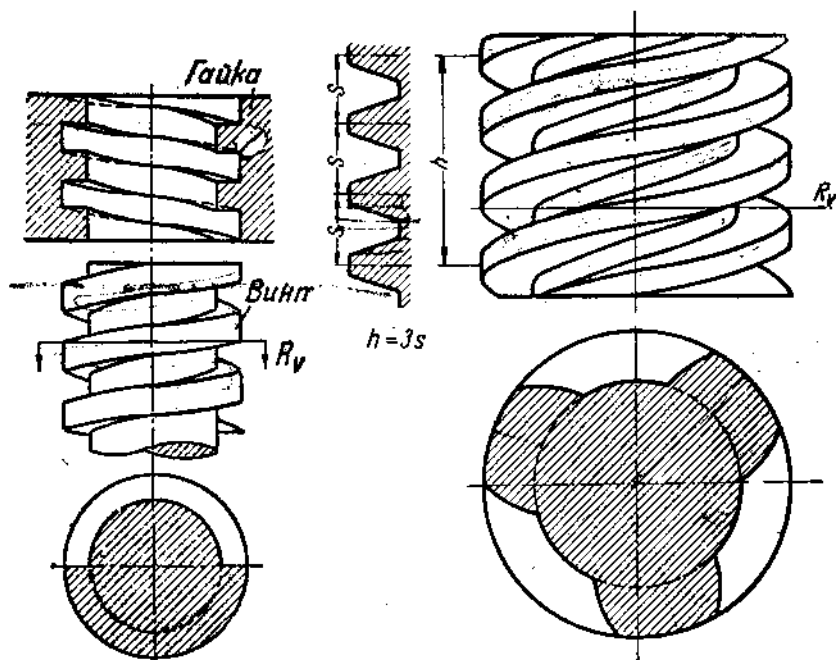
Черт. 483.



Черт. 484.

а также на черт. 485, где показан одноходовой винт с правой квадратной резьбой.

На черт. 486 изображен винт с трапецидальной правой резьбой, трехходовой. Такой винт можно представить образованным движением



Черт. 485.

Черт. 486.

строенного профиля по винтовым линиям. В разрезе винта фигура сечения ограничена частями окружностей и кривых линий, находимых по точкам.

Глава IX

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 51. Общие сведения

Пользуясь методом ортогональных проекций, мы можем получить исчерпывающее и точное изображение проектируемого тела. Однако сам по себе чертеж в ортогональных проекциях усложнен для понимания и во многих случаях (при вычерчивании предметов сложной формы) требует достаточного навыка в пространственных представлениях, так как по отдельным проекциям (видам) предмета приходится создавать точное о нем представление.

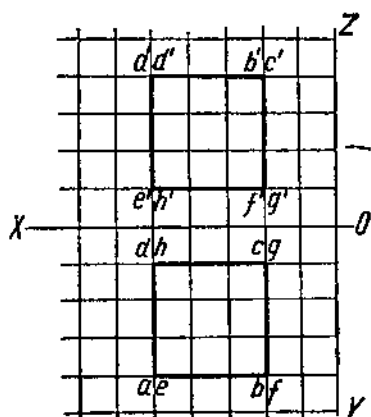
Поэтому ценным является умение (в дополнение к чертежу, выполненному в ортогональных проекциях) изображать данный предмет настолько наглядно, чтобы можно было с одного вида охватить существенные черты его устройства. Аксонометрия в значительной степени помогает осуществлению поставленной задачи: закономерность соотно-

шений, существование определенных правил построения, наглядность получаемых изображений, — все это делает аксонометрические проекции весьма ценным спутником чертежа, выполненного в ортогональных проекциях, а в некоторых случаях наиболее целесообразным способом изображения.

Само название «аксонометрия», т. е. (в переводе с греческого) «измерение по осям», указывает на основной прием, применяемый при построении аксонометрических проекций: изображаемый предмет ориентируют относительно некоторых выбранных осей, в системе которых устанавливается положение каждого элемента данного тела (предмета). В системе ортогональных проекций мы встречались с подобным положением: оси проекций представляют собою оси координат, по отношению к которым определяется положение точки, отрезка, фигуры и т. д. Мы можем построить изображение, если даны координаты всех необходимых точек. При этом в системе ортогональных проекций имеют дело для каждой

проекции лишь с двумя осями: для горизонтальной проекции — с осями X и Y ; для одной вертикальной проекции — с осями Z и X , для другой — с осями Z и Y . Например, даны координаты вершин куба:

$$\begin{aligned} X_A &= X_D = X_E = X_H = 500 \text{ мм} \\ X_B &= X_C = X_F = X_G = 200 \text{ »} \\ Y_A &= Y_E = Y_B = Y_F = 400 \text{ »} \\ Y_D &= Y_H = Y_C = Y_G = 100 \text{ »} \\ Z_A &= Z_D = Z_B = Z_C = 400 \text{ »} \\ Z_E &= Z_H = Z_F = Z_G = 100 \text{ »} \end{aligned}$$



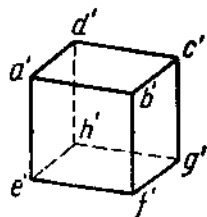
Черт. 487.

Приняв масштаб: одна клетка равна 100 мм, выполним построение — одно в системе осей Z и X , другое в системе X и Y (черт. 487). Если бы при этом требовалось дать более наглядное изображение

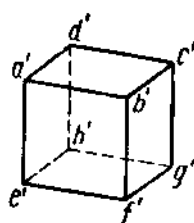
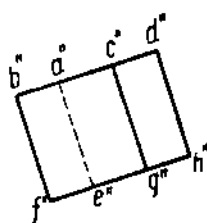
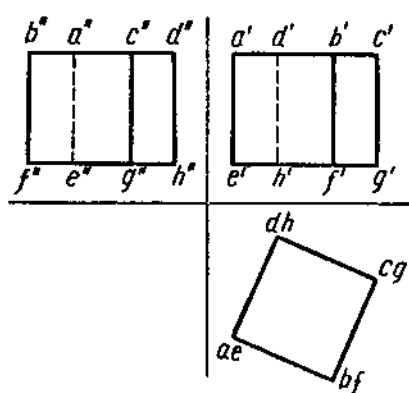
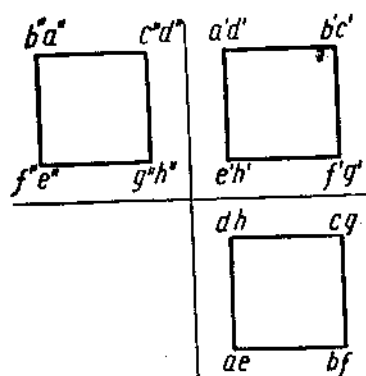
куба (черт. 488), то необходимо было бы знать координаты всех точек a' , b' , c' и т. д., или же произвести ряд поворотов проекций куба, как это показано на черт. 489. Все это значительно упрощается, если пользоваться системой специально подобранных осей и в этой системе непосредственно строить изображение (аксонометрическую проекцию).

Если спроектировать координатный угол, образованный тремя перпендикулярными плоскостями, на какую-либо заданную плоскость, причем направление проектирования также будет задано, то получится проекция трехгранного угла в том виде, как это изображено на черт. 490. Плоскость P — заданная плоскость аксонометрических проекций, луч K — заданное направление проектирования, оси $O_p X_p$, $O_p Y_p$, $O_p Z_p$ — аксонометрические проекции осей координат OX , OY и OZ .

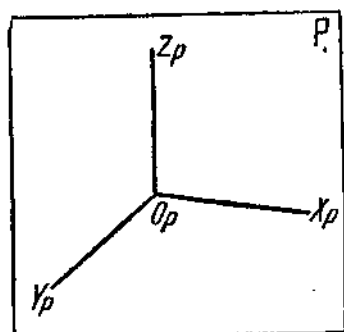
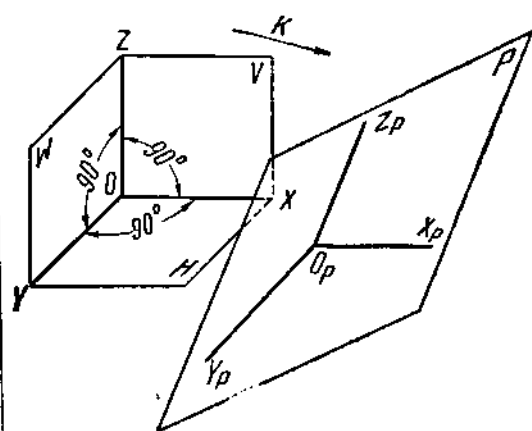
Если бы вместе с координатным углом O было спроектировано на плоскость P какое-либо тело, в этом угле расположенное, то получи-



Черт. 488.



Черт. 489₄



Черт. 490.

лась бы аксонометрическая проекция тела, отнесенная к осям $O_p X_p$, $O_p Y_p$, $O_p Z_p$. В зависимости от направления луча K по отношению к плоскости P получится:

- прямоугольная аксонометрическая проекция;
- косоугольная аксонометрическая проекция.

В первом случае луч K направлен перпендикулярно к плоскости P , во втором случае луч K направлен по отношению к плоскости P под острым (или тупым) углом.

На черт. 491 изображена плоскость аксонометрических проекций P , пересекающая каждую из трех координатных плоскостей V , H и W . Координатный угол спроектирован на плоскость P по направлению OO_p . При этом получаем, что:

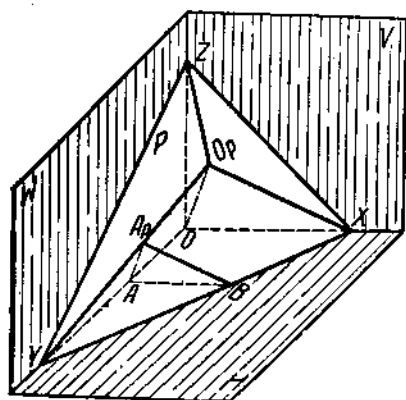
- отрезок $O_p X$ является проекцией отрезка OX ;
- » $O_p Y$ » » » OY ;
- » $O_p Z$ » » » OZ .

Положим, что

$$\frac{O_p X}{OX} = k, \quad \frac{O_p Y}{OY} = m, \quad \frac{O_p Z}{OZ} = n.$$

Всякий отрезок, расположенный на плоскости H параллельно оси OX , при проектировании на плоскость P по направлению OO_p превращается в отрезок, который составляет с проектируемым отрезком отношение, выраженное числом k (см. черт. 491),

$$\text{где } AB \parallel OX, AA_p \parallel OO_p \text{ и } \frac{A_p B}{AB} = \frac{O_p X}{OX} = k.$$



Черт. 491.

Аналогичные указания можно сделать и относительно отрезков в плоскостях V и H . Следовательно, числа k , m , n показывают соотношения между получаемыми аксонометрическими проекциями и проектируемыми отрезками, расположенными параллельно координатным осям. Назовем числа k , m и n коэффициентами искажения.

Если $k=m=n$, то аксонометрическая проекция называется **изометрической** (т. е. одного

измерения); если $k=m$, а n не равно k (или $k=n$, а m не равно k и т. д.), то проекция называется **диметрической** (т. е. двух измерений) и наконец, если $k \neq m \neq n$, то проекция называется **триметрической** (т. е. трех измерений).

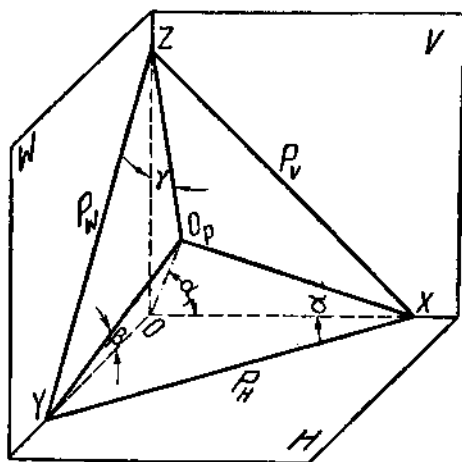
§ 52. Прямоугольные аксонометрические проекции. Коэффициенты искажения и углы между осями

Остановим внимание на случаях, когда направление проектирования перпендикулярно к плоскости аксонометрических проекций. Возьмем плоскость P таким образом, чтобы она пересекала все три плоскости

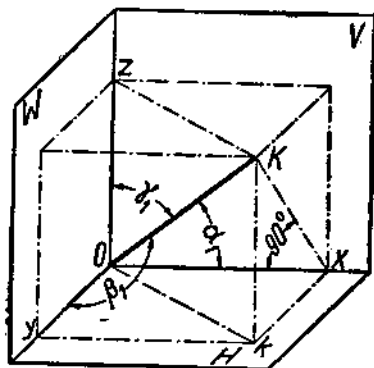
H , V и W (черт. 492). Отрезок OO_p перпендикулярен к плоскости P . Отрезки O_pX , O_pY и O_pZ (аксонометрические проекции отрезков на осях) представляют собою катеты прямоугольных треугольников, а проектируемые отрезки гипотенузы

$$\frac{O_pX}{OX} = \cos \alpha; \quad \frac{O_pY}{OY} = \cos \beta; \quad \frac{O_pZ}{OZ} = \cos \gamma.$$

Но отношения $\frac{O_pX}{OX}$, $\frac{O_pY}{OY}$ и $\frac{O_pZ}{OZ}$ представляют собою коэффициенты искажения. Следовательно, $k = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$. Отрезок OO_p проходит через начало координат; поэтому мы можем применить извест-



Черт. 492.



Черт. 493.

ное соотношение: если отрезок проходит через начало координат, то сумма квадратов косинусов углов его с осями равна единице¹.

Так как из черт. 352 видно, что угол между отрезком OO_p и осью X (угол α_1) является дополнительным к углу α , то $\cos \alpha_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$. Точно так же получаем, что $\cos \beta_1 = \sin \beta$ и $\cos \gamma_1 = \sin \gamma$ (угол β_1 и угол γ_1 — это углы между отрезком OO_p и осями Y и Z).

Следовательно, если

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1,$$

то

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1,$$

а так как

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

¹ Напомним вывод этого соотношения (черт. 493):

$$OK^2 = OK^2 + Kk^2; \quad Ok^2 = yk^2 + Oy^2 = Ox^2 + Oy^2; \quad Kk = Oz$$

$$OK^2 = Ox^2 + Oy^2 + Oz^2$$

$$Ox = OK \cos \alpha_1; \quad Oy = OK \cos \beta_1; \quad Oz = OK \cos \gamma_1$$

$$OK^2 = OK^2 \cos^2 \alpha_1 + OK^2 \cos^2 \beta_1 + OK^2 \cos^2 \gamma_1$$

$$1 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1.$$

и

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta,$$

то

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma,$$

Отсюда

$$1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \gamma = 1.$$

Но

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

следовательно,

$$\cos \alpha = k, \cos \beta = m, \cos \gamma = n;$$

$$k^2 + m^2 + n^2 = 2,$$

т. е. сумма квадратов коэффициентов искажения равна двум (напомним, что этот вывод сделан для прямоугольной аксонометрической проекции).

Так как для изометрической проекции $k = m = n$, то

$$3k^2 = 2,$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82$$

Это значит, что в прямоугольной изометрической проекции получается по каждой из осей (или по направлениям, им параллельным) сокращение $\approx 0,82$ от истинной величины проектируемого отрезка.

Для диметрической проекции два коэффициента искажения равны между собою, а третий им не равен. Если взять $k = n$ и выбрать $m = \frac{1}{2}k$, то получим:

$$2k^2 + \frac{1}{4}k^2 = 2;$$

$$k^2 = \frac{8}{9};$$

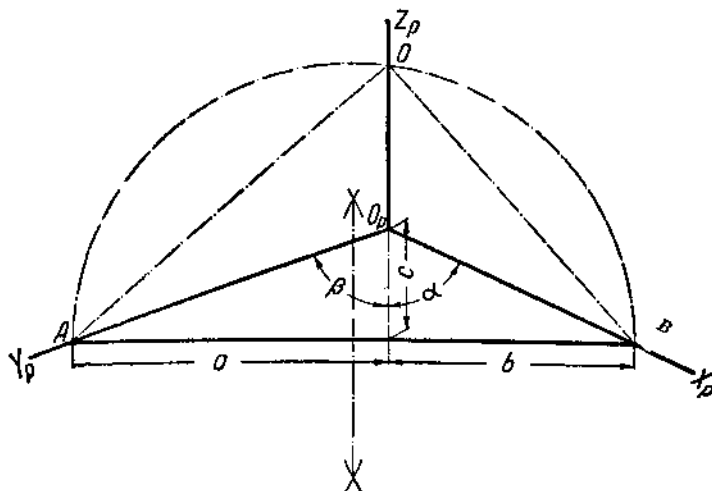
$$k = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94 \text{ (точнее } 0,9428).$$

Следовательно, в прямоугольной диметрической проекции по двум осям (в данном случае по осям X и Z) или по направлениям, им параллельным, получается сокращение $\approx 0,94$, а по третьей оси (в данном случае по оси Y) сокращение $\approx 0,47$ (точнее 0,4714).

Положим, что при прямоугольном аксонометрическом проектировании на плоскость, пересекающую все три оси координат, мы получили проекции этих всех осей в виде отрезков $O_p X_p$, $O_p Y_p$ и $O_p Z_p$ (черт. 494). Оси $O_p Z_p$ придаем, как это обычно делается, вертикальное направление; каждая из остальных осей составляет с осью $O_p Z_p$ некоторый угол (на черт. 494 отмечены буквами α и β не самые углы между осями, а смежные им углы).

Проведем отрезок AB перпендикулярно к направлению $O_p Z_p$; этот отрезок представляет собою аксонометрическую проекцию, равную по величине проектируемому отрезку, т. е. AB является в данном случае одним из тех элементов, которые не претерпевают искажения при своем аксонометрическом превращении. Для пояснения приведен черт. 495,

из которого следует, что если $OZ \perp H$ и $OO_p \perp P$, то OK и $Z_p O_p K$ будут перпендикулярны к $X_p Y_p$. Но $X_p Y_p$ представляет собою истинную величину отрезка, расположенного в плоскости H , и в то же время его аксонометрическую проекцию; всякий другой отрезок, расположенный параллельно отрезку $X_p Y_p$, будучи спроектирован на плоскость P по направлению OO_p , сохранит то же отношение к своей аксонометрической проекции, какое имеется между отрезком $X_p Y_p$ и его проекцией, т. е. отношение 1:1.



Черт. 494.

Конечно, такой же вывод может быть сделан и по отношению к направлениям, перпендикулярным к $X_p Z_p$ и $Y_p Z_p$. Следовательно, если имеется система осей, полученных в прямоугольной аксонометрической проекции, то, проводя направления, перпендикулярные к осям (черт. 494), мы тем самым отмечаем направления отрезков, сохраняющих свою истинную величину.

Из рассмотрения черт. 495 легко вывести заключение о том, что точка O_p — аксонометрическая проекция начала координат O — получается в точке пересечения высот (в ортоцентре) треугольника $X_p Z_p Y_p$, образованного следами плоскости аксонометрических проекций на плоскостях H , V и W . Треугольник $X_p Z_p Y_p$ называют треугольником аксонометрических следов.

Возвращаясь к черт. 494, отметим, что сумма углов $\alpha + \beta$ представляет собою аксонометрическую проекцию угла 90° между осями OX и OY . Восстановим этот угол (90°) на том же черт. 494, для чего на отрезке AB , как на диаметре, проведем полуокружность и точку O соединим с A и B . Угол AOB будет представлять собою угол между действительным направлением осей OX и OY до их аксонометрического проектирования.

Следовательно, отношение отрезка AO_p к отрезку AO даст нам коэффициент искажения по оси Y , т. е. величину m , а отношение $\frac{BO_p}{BO}$ представляет собою коэффициент искажения k .

На основании чертежа 494 можем написать следующие соотношения.

$$a + b = AB, \quad (1)$$

$$AO^2 = AB \cdot a, \quad (2)$$

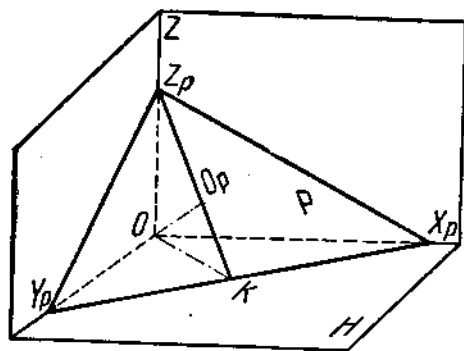
$$BO^2 = AB \cdot b, \quad (3)$$

$$AO_p^2 = a^2 + c^2,$$

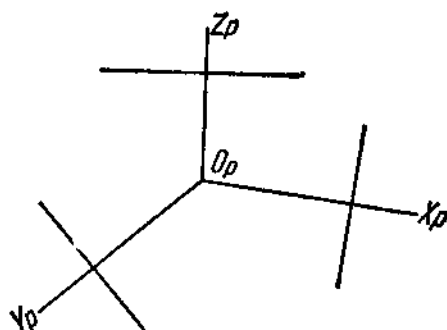
$$BO_p^2 = b^2 + c^2.$$

Так как

$$\frac{AO_p}{AO} = m \text{ и } \frac{BO_p}{BO} = k,$$



Черт. 495.



Черт. 496.

то последние два уравнения могут быть представлены в таком виде:

$$AO^2 m^2 = a^2 + c^2, \quad (4)$$

$$BO^2 k^2 = b^2 + c^2. \quad (5)$$

Подставляем в уравнение (4) вместо AO^2 его значение из уравнения (2):

$$a \cdot AB \cdot m^2 = a^2 + c^2. \quad (6)$$

Аналогично, из уравнений (5) и (3) получим:

$$b \cdot AB \cdot k^2 = b^2 + c^2. \quad (7)$$

В полученное уравнение (7) подставим $(AB - a)$ вместо b из уравнения (1):

$$AB(AB - a) \cdot k^2 = (AB - a)^2 + c^2, \quad (8)$$

В уравнение (8) подставляем $a^2 + c^2 = a \cdot AB \cdot m^2$ из уравнения (6):

$$AB^2 k^2 - a \cdot AB \cdot k^2 = AB^2 - 2a \cdot AB + a \cdot AB \cdot m^2,$$

$$a(2 - k^2 - m^2) = AB(1 - k^2).$$

откуда

Следовательно,

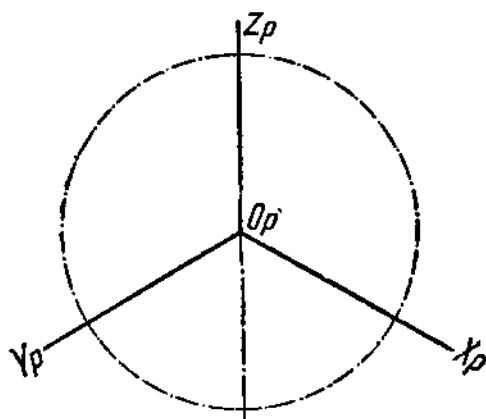
$$a = \frac{1 - k^2}{2 - k^2 - m^2} AB. \quad (9)$$

Для изометрической проекции (см. стр. 270) $k = m \approx 0,82$. Подставляя в уравнение (9) k вместо m , получим:

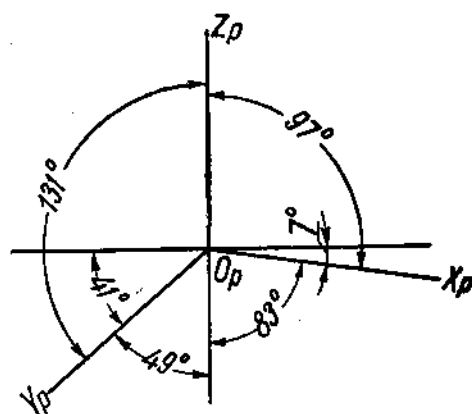
$$a = \frac{1 - k^2}{2 - 2k^2} AB,$$

откуда

$$a = 0,5AB.$$



Черт. 497.



Черт. 498.

Из уравнения (6) определим c :

$$c^2 = a \cdot AB \cdot m^2 - a^2,$$

$$c^2 \approx 0,5 \cdot AB \cdot AB \cdot 0,6724 - 0,25AB^2,$$

$$c^2 \approx 0,3362AB^2 - 0,25 AB^2 \approx 0,0862AB^2,$$

$$c \approx \sqrt{0,0862 \cdot AB^2} \approx 0,29AB. \quad (11)$$

Определяем угол β при помощи полученных значений a и c — уравнения (10) и (11):

$$a = c \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$0,5 AB \approx 0,29 AB \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta \approx \frac{0,5 AB}{0,29AB} \approx 1,72$$

$$\angle \beta = 60^\circ.$$

Так как $a = 0,5AB$ (см. уравнение 10), то и $b = 0,5AB$ и, следовательно, угол α тоже равен 60° .

Итак, в прямоугольной изометрической проекции углы между осями равны 120° . Построение таких осей чрезвычайно просто (черт. 497).

Для диметрической проекции мы подсчитали значения k и m (см. стр. 270) при условии, что $m = \frac{1}{2} k$ (один из возможных видов диметрической проекции). Подставляя подсчитанные значения $k \approx 0,9428$ и $m \approx 0,4714$ в уравнение (9), получим:

$$a \approx \frac{1 - (0,9428)^2}{2 - (0,9428)^2 - (0,4714)^2} \cdot AB \approx 0,125 AB.$$

Затем определяем c из уравнения (6):

$$c^2 \approx 0,125 \cdot AB \cdot AB \cdot (0,4714)^2 - (0,125)^2 \cdot AB^2,$$

$$c \approx 0,11 \cdot AB,$$

$$\operatorname{tg} \beta \approx \frac{0,125 \cdot AB}{0,11 \cdot AB} \approx 1,135.$$

$$\beta \approx 49^\circ (\text{точнее } 48^\circ 35').$$

Для определения угла α надо взять $b = AB - a$ (черт. 494), т. е. $\approx 0,875 AB$; далее получим:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{0,875 \cdot AB}{0,11 \cdot AB} \approx 7,95,$$

$$\alpha \approx 83^\circ (\text{точнее } 82^\circ 50').$$

Следовательно, для данного вида прямоугольной диметрической проекции (т. е. когда $k = n$ и $m = 0,5k$) угол между осями $O_p Z_p$ и $O_p X_p$

равен $\approx 97^\circ$ (черт. 498),

а угол между осями $O_p Z_p$

и $O_p Y_p$ равен $\approx 131^\circ$.

Для построения этих

осей поступаем так: про-

водим обычно верти-

кально направленный

отрезок, принимаем его

за ось $O_p Z_p$ (черт. 499),

проводим через точку O_p

перпендикуляр к $O_p Z_p$

и от этого перпендику-

ляра откладываем углы

7° (точнее $7^\circ 10'$) и 41°

(точнее $41^\circ 25'$) постро-

ением, указанным на

черт. 499. Можно, ко-

нечно, пользоваться и

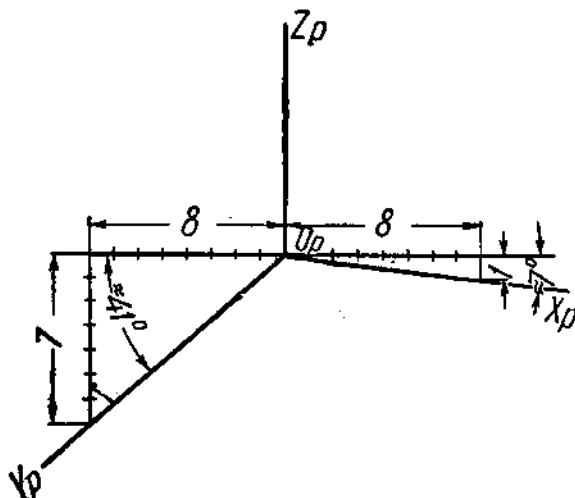
транспортом. Направ-

ление оси Y_p может быть

получено проведением

биссектрисы угла $Z_p O_p X_p$ (см. черт. 498 с учетом более точных значений углов).

Указанные два вида аксонометрических прямоугольных проекций — изометрическая с углами между осями по 120° и диметрическая с соот-



Черт. 499.

ношением коэффициентов искажения $1 : \frac{1}{2} : 1$ и с осями, расположенными так, как это указано на черт. 499, наиболее употребительные. В дальнейшем, применяя название «изометрическая» и «диметрическая» проекции, мы будем иметь в виду разобранные нами прямоугольные аксонометрические проекции.

Значение углов для изометрической и диметрической проекций можно также вывести из рассмотрения треугольников следов.

Мы рассматриваем прямоугольную проекцию; следовательно, прямая OO_p (черт. 500) перпендикулярна к плоскости, в которой расположен треугольник следов XYZ .

Коэффициенты искажения в изометрической проекции равны между собою:

$$k = m = n.$$

Следовательно,

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$$

и $\alpha = \beta = \gamma$ (углы острые).

Из рассмотрения прямоугольных треугольников OO_pX , OO_pY и OO_pZ следует:

$$O_pO = OX \cdot \sin \alpha,$$

$$O_pO = OY \cdot \sin \beta,$$

$$O_pO = OZ \cdot \sin \gamma,$$

Следовательно,

$$OX = OY = OZ,$$

а так как эти отрезки представляют собою катеты треугольников XOZ , XOY и ZOY , то $XZ = XY = ZY$, т. е. треугольник следов XYZ для изометрической проекции равносторонний. Из этого вытекает, что углы XO_pZ , XO_pY и ZO_pY в данном случае равны между собою и каждый из них равен 120° , так как отрезки XO_p , ZO_p и YO_p лежат на высотах равностороннего треугольника.

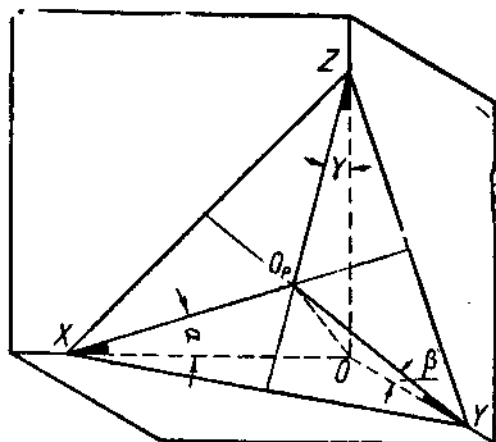
Итак получается размещение осей для изометрической проекции, указанное на черт. 501.

Для диметрической проекции два из трех коэффициентов искажения равны между собой.

Пусть $k = n$ и следовательно, $\alpha = \beta$ и $OX = OZ$ (черт. 500). Принимая отрезок OX за единицу, получим $XZ = \sqrt{2}$.

Рассматривая диметрическую проекцию, в которой $k = n = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 0,94$), а $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 0,47$), можем написать:

$$O_pX = O_pZ = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



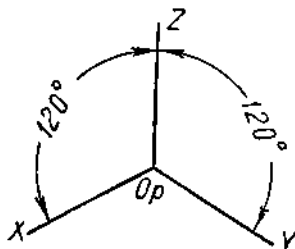
Черт. 500.

Так как $OX = OZ$, то $XY = ZY$, т. е. треугольник следов XYZ в данном случае равнобедренный.

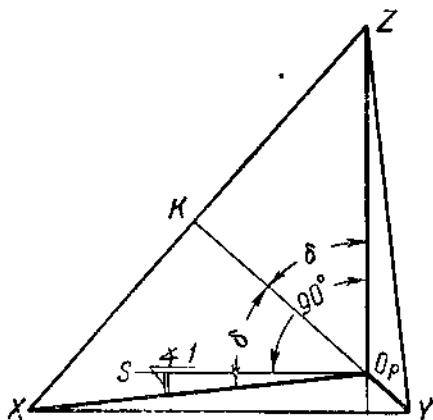
В этом треугольнике (черт. 502) высота YK , совпадающая с направлением оси $O_p Y$, делит пополам сторону XZ , т. е. $XK = KZ = \frac{XZ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из рассмотрения прямоугольного треугольника OKZ следует:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{ZK}{O_p Z} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,75.\end{aligned}$$



Черт. 501.

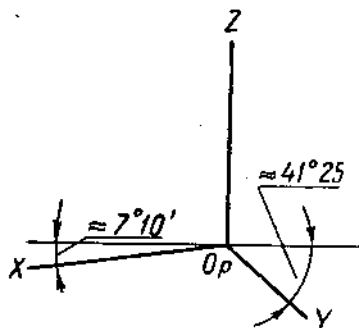


Черт. 502.

Угол $\delta \approx 48^\circ 35'$, $2\delta \approx 97^\circ 10'$. Чертеж показывает, что $\angle 1 \approx 7^\circ 10'$ ($O_p S \perp O_p Z$).

Далее замечаем, что острые углы $KO_p S$ и KZO_p равны между собою, так как стороны их соответственно перпендикулярны. Но из треугольника ZKO_p следует, что угол $KZO_p = 90^\circ - \delta \approx 41^\circ 25'$.

Итак мы получили искомое размещение осей (черт. 503) для диметрической проекции, у которой коэффициенты искажения составляют отношение $1 : \frac{1}{2} : 1$.



Черт. 503.

§ 53. Изометрическая проекция

Построение изометрической проекции куба (черт. 504) сводится к построению изометрической проекции его граней — квадратов. Полагают куб расположенным так, что его грани параллельны координатным плоскостям. В этом случае ребра куба (стороны квадратов)

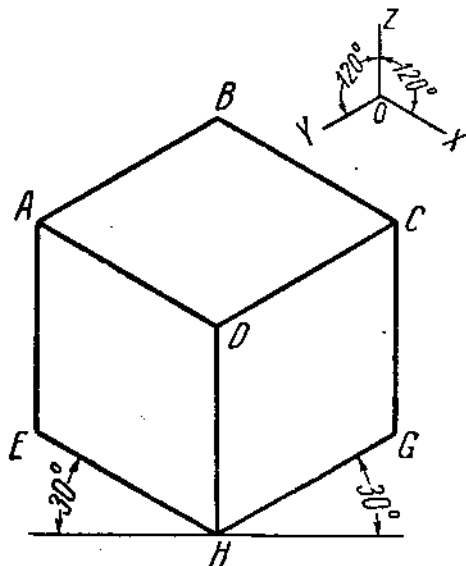
откладываются на соответствующих изометрических осях или им параллельно. Так как мы имеем дело с изометрической проекцией (коэффициенты искажения для всех осей равны между собою), то в силу равенства ребер куба мы получим его изометрическую проекцию в виде фигуры, составленной из равных отрезков сторон. С другой стороны, между сторонами фигуры, контура рассматриваемой проекции, получаются углы в 120° ,

так как стороны эти параллельны осям. Следовательно, контур изометрической проекции куба — правильный шестиугольник.

К тому же выводу мы придем и путем последовательного построения изометрической проекции куба. Начинаем построение от какой-либо из вершин куба (всегда предпочтительно брать начальную вершину на верхнем основании), например, от вершины B (черт. 504). От точки B , взятой в произвольном месте чертежа, проводим две прямые линии параллельно осям OX и OY (направления осей OX , OY и OZ могут быть указаны так, как это сделано на черт. 504, или же можно просто пользоваться угольником с углами 30° и 60°). На проведенных прямых откладываем отрезки длиной около 0,8 (точнее 0,82) длины ребра куба: если, например, строится изометрическая проекция куба с ребром 50 мм, то следует отложить отрезки около 40 мм (точнее 41 мм). Получаем точки A и C (черт. 504). От этих точек проводим еще два отрезка, параллельных осям OX и OY , до пересечения в точке D . Получается ромб — изометрическая проекция квадрата — верхнего основания куба. Далее, от точек A , D и C проводим отрезки той же длины параллельно направлению оси OZ (обычно вертикально); полученные точки E , H и G соединяем последовательно и таким образом строим изометрические проекции еще двух граней куба, опять в виде ромбов той же величины, что и у ромба $ABCD$.

В силу параллельности между сторонами этих ромбов и осями, острые углы ромбов равны 60° , а тупые — 120° . Если взять контур $ABCGHE$, то оказывается, что он составлен из шести равных между собою отрезков, поставленных один по отношению к другому под углом 120° , т. е. при построении получается правильный шестиугольник, как это было определено и ранее (см. стр. 276) путем рассуждений.

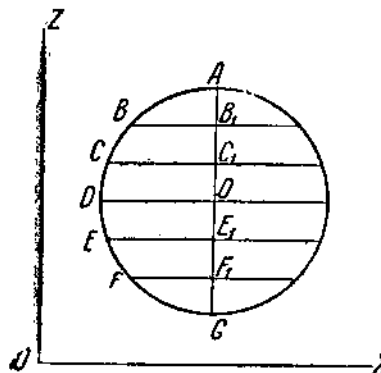
Положим, что требуется построить изометрическую проекцию окружности, расположенной, например, в плоскости ZOX (черт. 505). Проводим ряд хорд на равном расстоянии одна от другой. На черт. 505 хорды взяты параллельно оси OX ; можно было бы взять их и параллельно оси OZ , но во всяком случае проводить такие хорды следует параллельно одной из осей, так как при этом легко найти направления этих хорд в изометрической проекции и отложить их укороченную длину. Так и делаем в данном случае (черт. 506); отрезок ag , равный 0,8 AG (черт. 505), проводим вертикально, так как AG параллельно оси OZ , и делим его на столько же равных частей, на сколько был разделен отрезок AG (диаметр окружности); через точки деления (b_1 , c_1



Черт. 504.

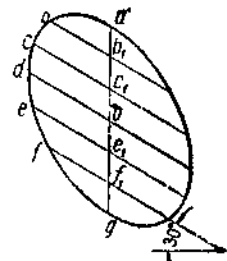
и т. д., см. черт. 506) проводим прямые под углом 30° к горизонтальному направлению (или 60° к направлению отрезка ag) и откладываем на них последовательно $bb_1 = 0,8 BB_1$, $cc_1 = 0,8 CC_1$ и т. д. в обе стороны от ag . Через полученные точки проводим замкнутую кривую — эллипс, представляющую собою изометрическую проекцию окружности.

Если бы окружность была расположена в плоскости YOX или ZOY , то способ построения остался бы тот же и эллипсы получились бы по типу указанных на черт. 507.



Черт. 505:

Обратим внимание на то, что все эти построения относились к окружностям, расположенным в плоскостях, параллельных координатным плоскостям. Далее будет рассмотрен случай построения изометрической проекции окружности, расположенной в плоскости, не параллельной какой-либо из координатных плоскостей.



Черт. 506.

Возвращаясь к изометрической проекции

куба, обратим внимание на черт. 508, где изображен куб с вписанными в его грани окружностями. Изометрические проекции окружностей — эллипсы — вписаны в ромбы, представляющие собою изометрические проекции квадратов — граней куба. Эллипсы касаются сторон ромбов в их серединах (см., например, точки m , n , p и q на черт. 508). Диагонали ромбов дают направление главных осей эллипсов. Легко видеть, что диагонали AC , AN и CH (черт. 508) в изометрической проекции сохраняют свою истинную величину, т. е. равны диагонали квадрата до его изометрического превращения. Это вытекает и из того, что направления AC , AN и CH соответственно перпендикулярны к направлениям осей OZ , OY и OX в изометрической проекции (см. черт. 496 и относящиеся к нему пояснения на стр. 272).

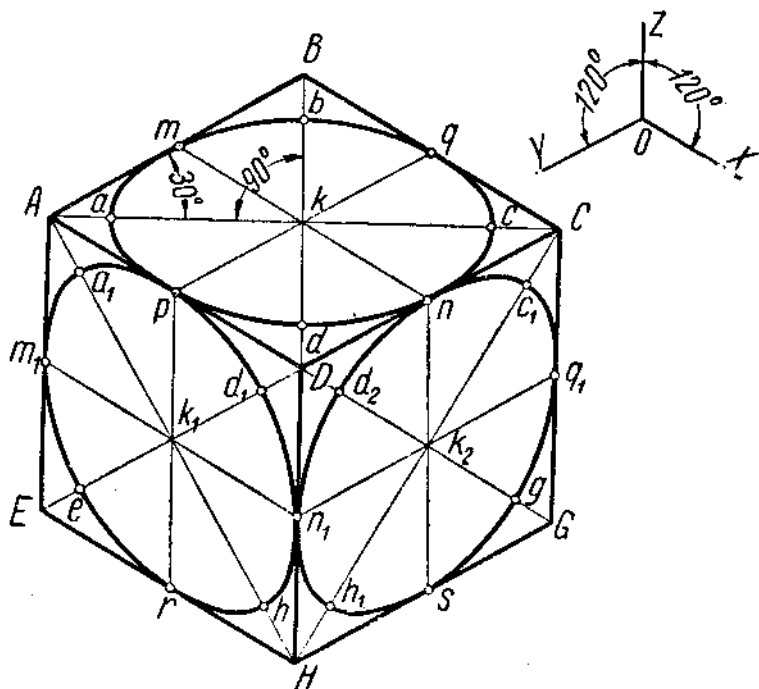


Черт. 507.

Следовательно, по направлениям, перпендикулярным к осям OZ , OY и OX , при построении изометрической проекции окружности мы можем

откладывать без искажения ее диаметр. Так как диаметр окружности, вписанной в квадрат, равен стороне квадрата, то отрезки ac , a_1h и c_1h_1 на черт. 508 равны каждой стороне квадрата, т. е. ребру куба до его изометрического превращения. В изометрической же проекции ребро куба равно $\approx 0,82$ натуральной величины. Следовательно, каждый из отрезков ac , a_1h и c_1h_1 больше каждой из сторон AB , BC и т. д. (черт. 508), в отношении $1 : 0,82 \approx 1,2$.

Если же подсчитать соотношение между ac и AC (или a_1h и $АН$, c_1h_2 и $СН$), то получим, что каждый из отрезков ac , a_1h и c_1h_1 составляет $\approx 0,7$ от длины диагонали. Действительно, ac равен диаметру окружности, вписанной в квадрат, т. е. равняется стороне этого квадрата; AC сохраняет величину диагонали квадрата, т. е. составляет 1,41 стороны квадрата. Следовательно, $ac : AC = 1 : 1,41 \approx 0,7$.



Черт. 503.

Малые оси эллипсов (черт. 508) располагаются по направлению BD , DE и DG , т. е. перпендикулярно к направлениям AC , $АН$ и $СН$. Легко подсчитать соотношения между полученными длинами BD , DE и DG и их первоначальной (до изометрического превращения) длиной. До изометрического превращения каждый из рассматриваемых отрезков представлял собою диагональ квадрата, т. е. равнялся оставшейся неискаженной величине диагонали AC (или $АН$, или $СН$). Следовательно, если сравнить длины BD и AC (черт. 508), то можно будет вывести соотношение между новым «изометрическим» значением отрезка, расположенного перпендикулярно к направлению AC (или $АН$, или $СН$), и его значением до изометрического превращения. Из треугольника AkB (черт. 508) следует: $Bk = Ak \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$. Это равносильно следующему отношению:

$$2Bk = 2Ak \cdot \operatorname{tg} 30^\circ,$$

т. е.

$$BD = AC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Отсюда

$$BD \approx 0,58 \cdot AC.$$

Следовательно, каждый из отрезков bd , d_1e и d_2g , представляющий собою малую ось эллипсов, будет равняться при изометрическом превращении окружности $\approx 0,58$ ее диаметра. По отношению же к стороне ромба, в который вписывается эллипс, малая ось эллипса будет составлять $\approx 0,7$. Действительно, $AB \approx 0,82$ натуральной величины стороны квадрата до его изометрического превращения; $bd \approx 0,58$ натуральной величины диаметра окружности, вписанной в этот квадрат, т. е. $0,58$ натуральной величины стороны квадрата. Отсюда

$$\frac{bd}{AB} = \frac{0,58}{0,82} \approx 0,7.$$

Так как $BD = AB$, то отношение $\frac{bd}{BD}$ также равно $0,7$ (см. выше соотношение между ac и AC).

Обратим внимание на то, что в изометрической проекции направления отрезков BD , DE и DG (черт. 508) совпадают с направлениями осей OZ , OY и OX . Но на самом деле до изометрического превращения куба отрезки BD , DE и DG представляли собою диагонали квадратов, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к соответствующим осям. Например, DG — это диагональ квадрата $CDHG$, плоскость которого перпендикулярна к оси OX , и, следовательно, DG перпендикулярна к OX ; в изометрической же проекции создается впечатление, что направления отрезка DG и оси OX совпадают. Так как это лишь кажущееся совпадение, то сокращения отрезков по направлениям DG и OX получаются различными.

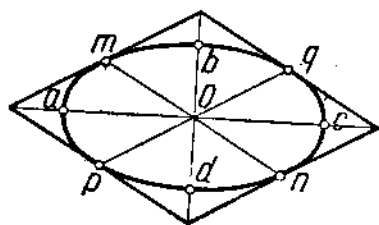
Черт. 509.

То же относится к направлениям BD и оси OZ , и DE и оси OY . Положим, требуется построить изометрическую проекцию цилиндра, диаметр основания которого равен 50 мм, а высота — 80 мм; в цилиндре имеется цилиндрическое же отверстие по оси диаметром 30 мм. На черт. 509 дано изображение этого цилиндра в ортогональных проекциях; цилиндр поставлен так, что его ось вертикальна. Прежде всего построим изометрическую проекцию верхнего основания, что сведется к построению двух эллипсов (наружного и внутреннего) по образцу эллипса на черт. 508, расположенного на грани $ABCD$. Это построение может быть выполнено тремя способами.

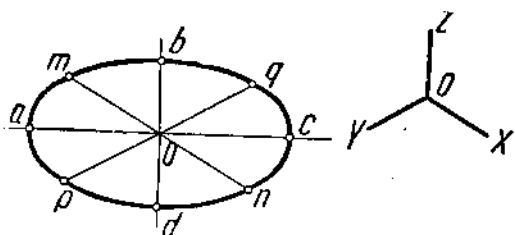
1. Можно представить, что цилиндр вписан в призму с квадратным основанием. Построим ромб с углами 60° и 120° и со стороной, равной $\approx 0,82 \times 50$ мм ≈ 41 мм (черт. 510). Делим каждую из сторон ромба пополам. Искомый наружный эллипс проведен через точки m , n , p и q . Диагонали ромба будут служить направлением главных осей эллипса (см. выше), а так как длину этих осей можно брать как $\approx 0,7$ от длины диагоналей ромба, то найдем еще четыре точки для проведения эллипса — a , b , c и d .

2. Пользуясь соотношениями, выведенными раньше, отложим в обе стороны от произвольно взятой точки (черт. 511) по направлению, перпендикулярному к OZ , отрезки Oa и Oc , равные радиусу изображаемой окружности. Далее, перпендикулярно к ac откладываем отрезки Ob и Od , равные каждый $\approx 0,58$ от величины радиуса. Если провести еще через точку O направления, параллельные осям OX и OY , и по этим направлениям отложить по $\approx 0,82$ от величины радиуса, то получим те же восемь точек (a, b, c, d, m, n, p, q) для проведения эллипса.

3. Можно применить способ, указанный на черт. 506, причем разбивку можно произвести, пользуясь горизонтальной проекцией (вид сверху) на черт. 509. Построив таким образом наружный эллипс верхнего основания, легко далее построить внутренний эллипс, найдя для него ряд точек, отстоящих от точки пересечения осей на расстояниях,



Черт. 511.



Черт. 510.

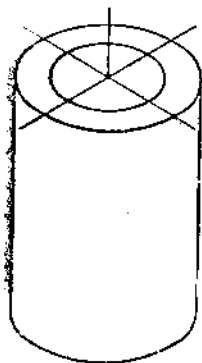
равных 0,6 соответствующих расстояний точек наружного эллипса от центра (0,6 получается в данном случае потому, что таково отношение между радиусами внутренней и внешней окружности основания заданного цилиндра — см. черт. 509).

Далее, из точек наружного эллипса проводим отрезки, параллельные направлению оси OZ и равные $\approx 0,82$ от высоты заданного цилиндра ($0,82 \times 80 \text{ мм} \approx 65 \text{ мм}$); получаем ряд точек, через которые проводим половину эллипса (черт. 512). Таким образом, пользуясь построенным эллипсом для верхнего основания цилиндра, мы можем избежать необходимости вновь повторить построение для эллипса нижнего основания.

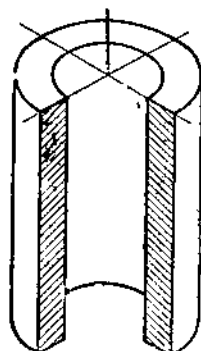
Большой частью пустотелые предметы изображаются как бы рассеченными, что дает возможность видеть их внутреннее устройство. На черт. 513 тот же цилиндр представлен в таком виде, который получился бы, если бы из цилиндра была выпилена часть. При этом, чтобы не создавалось впечатления, что изображается не целый цилиндр, стенки (как бы рассеченные) покрывают штриховкой. Обычно условный вырез производится так, чтобы рассеченные стенки лежали в плоскостях, параллельных координатным плоскостям. На черт. 513 заштрихованные стенки параллельны плоскостям ZOX и ZOY .

Построение в изометрической проекции части окружности производится так, как будто строится изометрическая проекция целой окружности. Пример дан на черт. 514; для построения дуги окружности намечен эллипс (черт. 515), построенный по указанным выше правилам, т. е. откладыванием по определенным направлениям соответ-

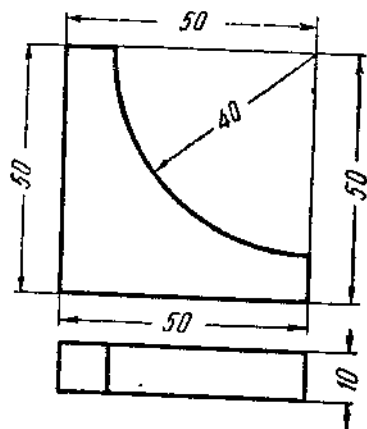
ствующих отрезков (ср. намеченный на черт. 515 эллипс с эллипсом, вписанным в грань $ADHE$ на черт. 508). Взяв начальную точку o (черт. 515), намечаем положение осей OZ , OX , OY и направление, пер-



Черт. 512.

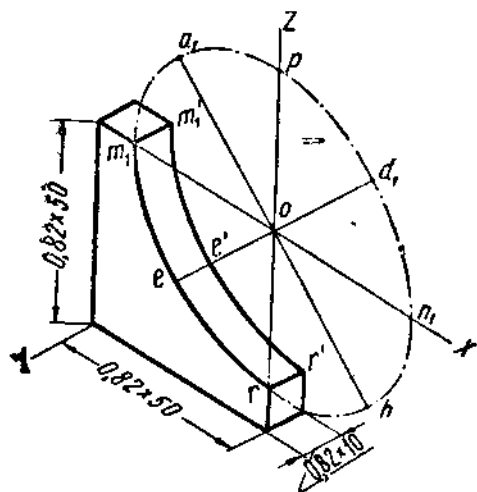


Черт. 513.

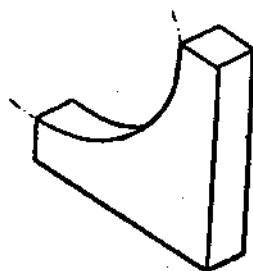


Черт. 514.

пендикулярное к оси OY ; на этом направлении откладываем $oa_1 = oh =$ радиусу 40 (черт. 514), а перпендикулярно к нему $oe = od_1 = 0,58 \times 40$. Далее находим положение точек m_1 и r , откладывая $om_1 = or = 0,82 \times 40$. Достаточно в данном случае построить половину эллипса (на черт. 515 построен эллипс целиком), т. е. ограничиться найденными точками a_1 , m_1 , e и r .



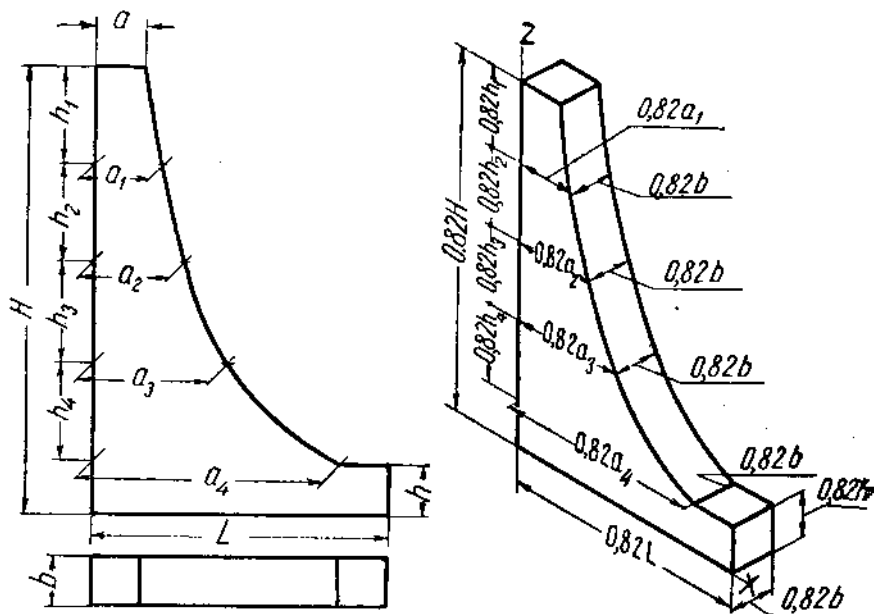
Черт. 515.



Черт. 516.

Дальнейшее построение понятно из чертежа (черт. 515); укажем лишь, что для проведения дуги $m_1'e'r'$ следует просто откладывать от точек m_1 , e и r толщину $0,82 \times 10$ параллельно оси OY . Эту толщину можно отложить каждый раз параллельно оси OY от ряда точек, промежуточных между m_1 , e и r , и тем самым облегчить прочерчивание дуги $m_1'e'r'$.

На черт. 516 дана изометрическая проекция той же детали, поставленной в иное положение. Легко заметить, что дело сводится к построению той части эллипса, которая на черт. 515 обозначена буквами $л_1$, $к$ и $г$. На черт. 517 дан пример построения изометрической проекции кривой линии; как видно из чертежа, кривая разбита на участки—намечен ряд точек, и координаты этих точек перенесены на изометрические оси.



Черт. 517.

На черт. 518 показано построение изометрической проекции окружности, расположенной в плоскости, не параллельной ни одной из координатных плоскостей. Положим, что окружность находится в плоскости, перпендикулярной к плоскости V и наклоненной к плоскости H под углом 60° . Прежде всего находим положение диаметра AB , для чего координируем концы A и B относительно взаимно перпендикулярных направлений Ab и Bb , строим изометрическую проекцию угла AbB (угол $A_1b_1B_1$, у которого $A_1b_1 = 0,82 Ab$ и $B_1b_1 = 0,82 Bb$) и получаем положение отрезка A_1B_1 , представляющего собою изометрическую проекцию диаметра.

Далее, разбиваем AB на некоторое число равных частей и проводим ряд хорд EE , FF и т. д. (черт. 518); все эти хорды направлены в пространстве параллельно одной из координатных осей, если две других оси принять направленными параллельно Ab и Bb . Дальнейшее построение сводится к нахождению положения концов этих хорд в изометрической проекции, т. е. точек E_1 , F_1 и т. д. (и точек, им симметричных), соединяя которые мы и получаем изометрическую проекцию заданной окружности.

Если бы окружность была дана в совершенно произвольном положении, то построение ее изометрической проекции надо было бы произвести по координатам ряда точек.

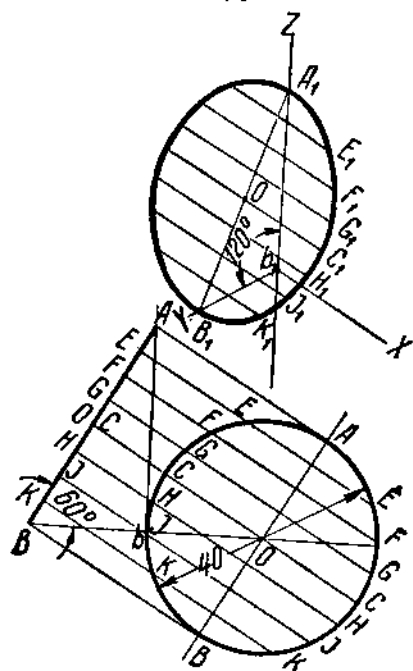
Во всех предыдущих построениях откладывались отрезки, составлявшие $\approx 0,82$ от натуральной величины. Вместо подсчета этих величин можно пользоваться масштабом (черт. 519), в котором на стороне угла в 30° получаются изометрические сокращения (0,82) отрезков, откладываемых на стороне угла 45° : из точек на стороне AO надо опустить перпендикуляры на сторону OB и при этом получаются искомые отрезки на стороне OC . Действительно: $Ob = Oa \cdot \cos 45^\circ$ и в то же время $Ob = Oc \cdot \cos 30^\circ$. Следовательно,

$$Oa \cdot \cos 45^\circ = Oc \cdot \cos 30^\circ,$$

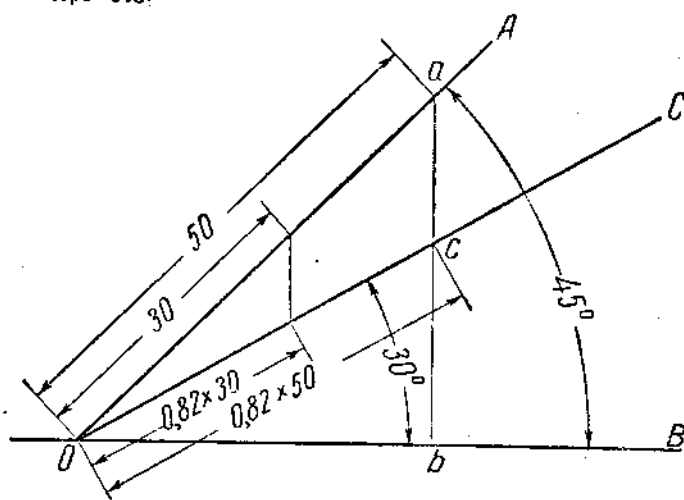
откуда

$$\begin{aligned} \frac{Oc}{Oa} &= \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82. \end{aligned}$$

На черт. 520 указан простой масштаб для получения сокращенных отрезков. Такие масштабы могут быть построены для любых сокращений.



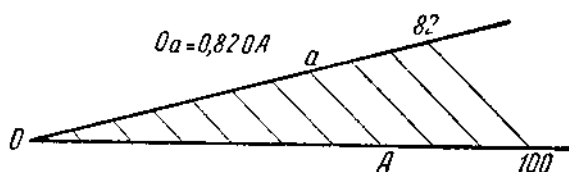
Черт. 518.



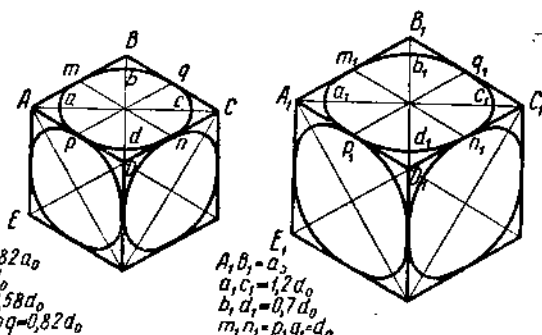
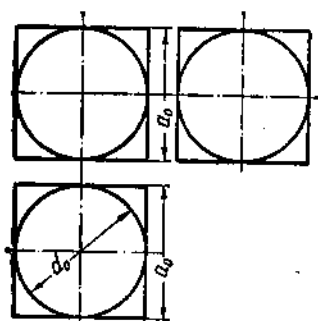
Черт. 519.

Встречается особый прием построения изометрической проекции, когда по изометрическим осям откладываются не сокращенные ($\approx 0,82$), а действительные размеры. Изометрический чертеж при этом полу-

чается больше, чем при соблюдении правила сокращения по осям. Пример дан на черт. 521, где куб, в грани которого вписаны окружности, изображен в ортогональных проекциях, затем в изометрической проекции с сокращениями по осям (0,82) и, наконец, в изометрической проекции без сокращений по осям. В такой увеличенной изометрической



Черт. 520.



Черт. 521.

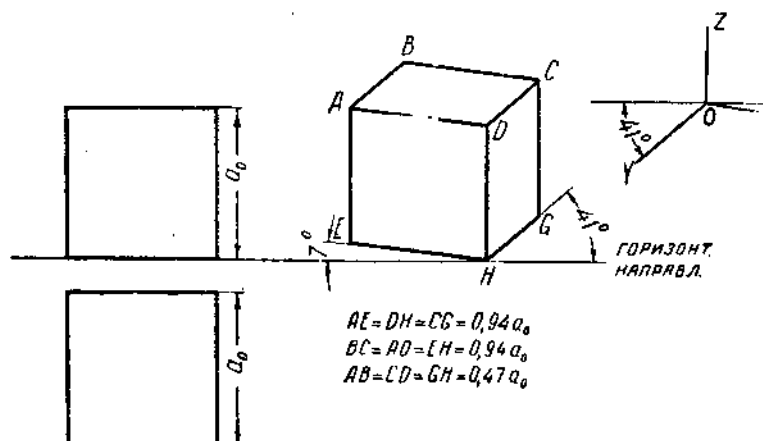
проекции при построении эллипсов необходимо брать $a_1c_1 \approx 1,2 d_0$ (d_0 — диаметр окружности, изображаемой в изометрической проекции), $b_1d_1 \approx 0,7 d_0$, $m_1n_1 = p_1q_1 = d_0$, в то время как при построении изометрической проекции с сокращением (0,82) по осям $ac = d_0$, $bd \approx 0,58 d_0$, $mn = pq \approx 0,82 d_0$ (черт. 521).

§ 54. Диметрическая проекция

Построение диметрической проекции¹ куба (черт. 522) сводится к построению диметрических проекций его граней-квадратов. Полагая куб расположенным так, что его грани параллельны координатным плоскостям, получим диметрическую проекцию в том виде, как она изображена на черт. 522. Грани $ABCD$ и $DCGH$ (а также параллельные им нижняя и боковая грани) представляют собою параллелограммы, а грань $ADHE$ (и параллельная ей задняя грань) приняла вид ромба. При построении были взяты указанные на стр. 270 коэффициенты искажения (0,94 и 0,47). Обычно для упрощения построения несколько увеличивают диметрическое изображение, откладывая параллельно осям OZ и OX несокращенные отрезки, а параллельно оси OY — сокращен-

¹ Напомним, что мы рассматриваем прямоугольную диметрическую проекцию с соотношением коэффициентов искажения $1 : \frac{1}{2} : 1$.

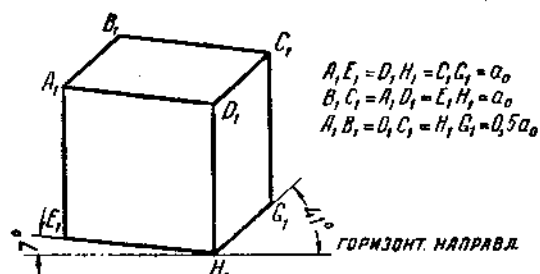
мые вдвое. Это равносильно построению диметрической проекции в масштабе увеличения, причем масштаб этот равен приблизительно $1,06 : 1$ ($1 : 0,9428$). В дальнейшем мы будем иметь в виду именно такие увеличенные изображения. Так, на черт. 523 дана диметрическая проекция



Черт. 522.

того же куба, который был указан на черт. 522, причем параллельно осям OZ и OX отложены отрезки, равные ребру куба a_0 , а параллельно оси OY — равные $0,5 a_0$.

На черт. 524 дана диметрическая проекция куба с вписанными в его грани (квадраты) окружностями; построение эллипсов может быть произ-



Черт. 523.

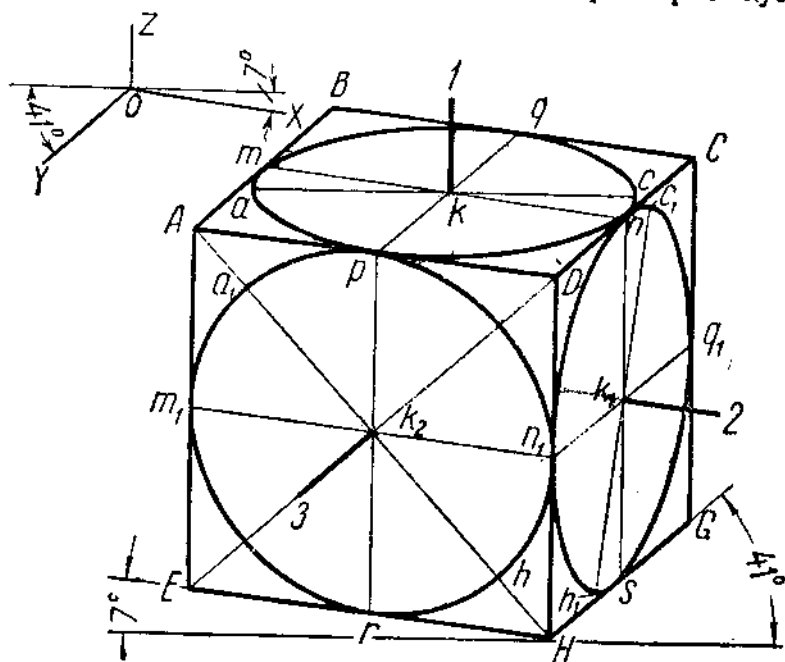
ведено по способу, указанному на черт. 506 для изометрической проекции — лишь направление откладываемых хорд должно соответствовать углам, принятым для диметрической проекции. На видимых на черт. 524 гранях получаются два одинаковых эллипса и один сильно отличающийся по своему виду от первых. В построении всех

этих эллипсов легко найти некоторые общие правила. Прежде всего намечаются точки k, k_1, k_2 , каждая из которых в диметрической проекции соответствует центру изображаемой окружности; точки k, k_1 и k_2 могут быть найдены в пересечении диагоналей.

Из точки k, k_1 и k_2 приводим отрезки, параллельные осям OZ, OX и OY (на черт. 524 эти отрезки указаны более толстыми линиями) и представляющие собою оси цилиндров, как бы вписанных в данный куб; построенные на гранях $ABCD, CDHG$ и $ADHE$ эллипсы могут быть рас-

смаатриваемы как проекции сечений указанных цилиндров гранями кубов.

Большие оси эллипсов направлены перпендикулярно к отрезкам $k-1$, k_1-2 , k_2-3 , т. е. перпендикулярно к направлению осей OZ , OX и OY ; вспомним (см. черт. 496 и относящиеся к нему пояснения на стр. 272), что в прямоугольных аксонометрических проекциях так именно располагаются отрезки, сохраняющие свою истинную величину. Следовательно, проводя через точки k , k_1 и k_2 прямые, перпендикулярные к направлению осей OZ , OX и OY , мы можем отложить на них отрезки, равные диаметру окружностей, вписанных в квадраты-грани куба, т. е.



Черт. 524.

равные ребру куба до его диметрического превращения. Но так как мы условились строить несколько увеличенную диметрическую проекцию (см. стр. 286), а именно в масштабе $1,06 : 1$, то следует откладывать по $1,06$ диаметра, т. е. в обе стороны от каждой из точек k , k_1 и k_2 не радиус изображаемой окружности, а на 6% больше. Например, при построении диметрической проекции куба с ребром 100 мм мы построим изображение, указанное на черт. 524, принимая $AD = BC = EH = AE = DH = CG = 100$ мм, $AB = DC = HG = 50$ мм; что же касается больших осей эллипсов, то должны быть отложены отрезки $ka = kc = k_1c_1 = k_1h_1 = k_2a_1 = k_2h = 53$ мм.

Для дальнейшего вписывания эллипсов в параллелограммы $ABCD$ и $DCGH$ и ромб $ADHE$ (черт. 524) следует отметить точки m , q , n , p , m_1 , r , n_1 , s , q_1 , лежащие в серединах сторон. Легко видеть, что эти точки получаются при проведении через центры k , k_1 и k_2 прямых, параллель-

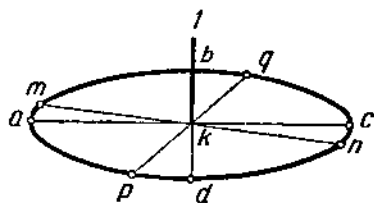
ных осях OZ , OX и OY : $mn \parallel OX$, $pq \parallel OY$, $pr \parallel OZ$ и т. д. При этом определяется длина отрезков mn , pq , pr и т. д., а именно, $mn = m_1n_1 = pr = ns =$ диаметру изображаемой окружности (не забудем, что мы строим изображение в масштабе $1,06 : 1$), а $pq = n_1q_1 = 0,5$ диаметра.

Пользуясь установленными пока правилами, можно указать следующий путь построения эллипсов — проекций окружностей в диметрической проекции.

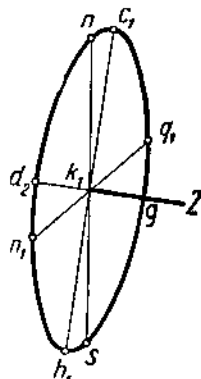
Положим, что требуется построить диметрические проекции окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных: 1) плоскости XOY ; 2) плоскости ZOY и 3) плоскости ZOX .

В первом случае берем точку k (черт. 525), проводим через нее вертикально отрезок $k-1$ (параллельно оси OZ),

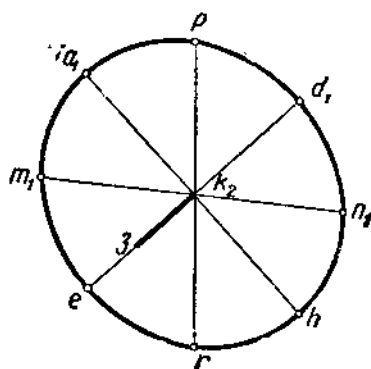
перпендикулярно к нему (т. е. горизонтально) проводим прямую, на которой откладываем $ka = kc = 1,06$ радиуса изображаемой окружности. Далее, через точку k проводим прямую параллельно оси OX (т. е. под



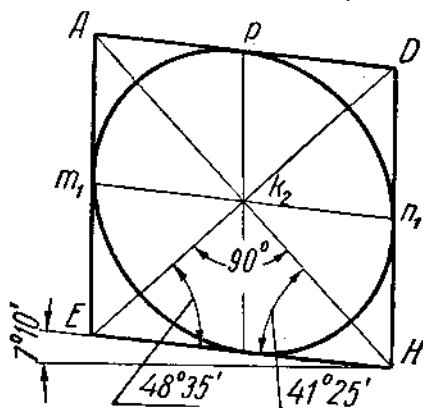
Черт. 525.



Черт. 526.



Черт. 527.



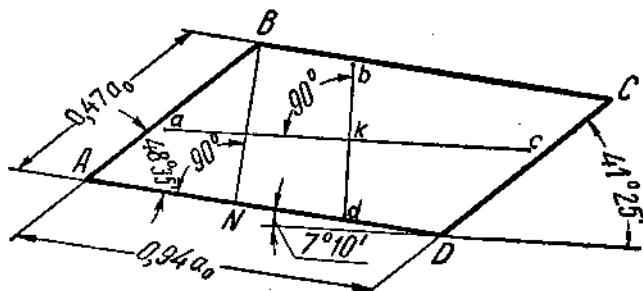
Черт. 528.

углом 7° к отрезку ac) и откладываем на ней $km = kn =$ радиусу изображаемой окружности. Затем через ту же точку k проводим прямую параллельно диметрической оси OY (т. е. под углом 41° к отрезку ac) и откладываем на ней $kp = kq = 0,5$ радиуса изображаемой окружности. Получаем точки a , m , q , c , n и p , через которые должен пройти эллипс.

Во втором случае (черт. 526) берем точку k_1 , проводим через нее параллельно диметрической оси OX отрезок k_1-2 , перпендикулярно к этому отрезку проводим прямую, на которой откладываем $k_1c_1 = k_1h_1 = 1,06$ радиуса изображаемой окружности. Далее, через k_1 про-

водим прямую параллельно оси OZ (т. е. вертикально) и откладываем на ней отрезки $k_1n = k_1s =$ радиусу изображаемой окружности; затем через точку k_1 проводим прямую параллельно диметрической оси OY и на ней откладываем отрезки $k_1n_1 = k_1q_1 = 0,5$ радиуса изображаемой окружности. Для проведения эллипса служат точки c_1, h_1, n_1, q_1, n и s .

В третьем случае (черт. 527) проводим отрезок $k_2 - 3$ параллельно оси OY , через точку k_2 перпендикулярно к отрезку $k_2 - 3$ проводим прямую и на ней откладываем отрезки k_2a_1 и k_2h , равные $1,06$ радиуса изображаемой окружности. Затем через точку k_2 проводим еще две прямых — одну вертикально (параллельно оси OZ), другую параллельно оси OX , — и откладываем на них от точки k_2 отрезки, равные радиусу изображаемой окружности. Получаем точки a_1, h, p, r, m_1 и n_1 , через которые должен быть проведен эллипс.



Черт. 529:

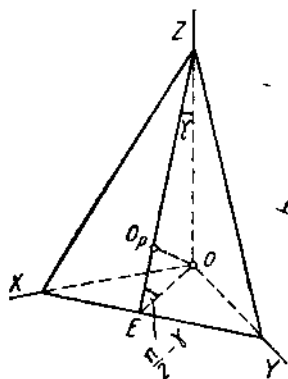
Теперь остается еще найти направление и величину малой оси каждого из указанных эллипсов. Направление малой оси определяется перпендикуляром к большой оси, проводимым в центре. Следовательно, проводя отрезки $k - 1, k_1 - 2, k_2 - 3$, мы тем самым намечаем и совпадающие с ними в плоскости чертежа направления малых осей.

Что же касается величины отрезков, то для эллипса, расположенного на грани $ADHE$ (черт. 524), легко подсчитать, что $k_2E = k_2H \operatorname{tg} 41^\circ 25' = 0,882 k_2H$ (черт. 528). Отсюда $DE = 0,882 AN$, а так как по направлению AN мы откладывали $1,06$ диаметра изображаемой окружности, то по направлению ED следует откладывать $0,882 \times 1,06$ диаметра, т. е. до $0,95$ диаметра изображаемой окружности. Таким образом могут быть отмечены точки e и d_1 на черт. 527.

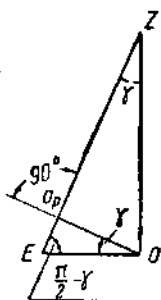
Для эллипсов, расположенных на гранях $ABCD$ и $DCGH$ (черт. 524), т. е. в плоскостях, параллельных координатным плоскостям XOY и ZOY , отношение малой оси к большой равняется $1 : 3$. Это соотношение может быть определено следующим способом.

Применяя к разбираемой нами диметрической проекции указанное в § 14 соотношение между площадью проекции и площадью проектируемой фигуры, мы можем определить угол наклона между плоскостью, в которой расположен квадрат (грань куба), и плоскостью, на которой получена проекция этого квадрата. Так, если в диметрической проекции изображается квадрат со стороной a_0 , расположенный в координатной плоскости XOY (или ей параллельной), то площадь получаемой проекции (параллелограмма) — см. черт. 529 — будет равна $AD \times BN =$

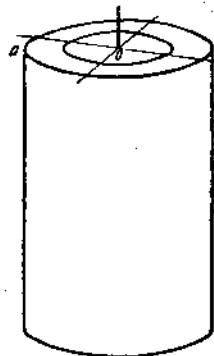
$= 0,9428 a_0 \cdot 0,4714 a_0 \cdot \sin 48^\circ 35' \approx 0,34 a_0^2$. Площадь же проектируемого квадрата равняется a_0^2 . Следовательно, косинус угла между плоскостью, в которой расположен проектируемый квадрат, и плоскостью, на которой получена его проекция, равен приблизительно 0,34.



Черт. 530:

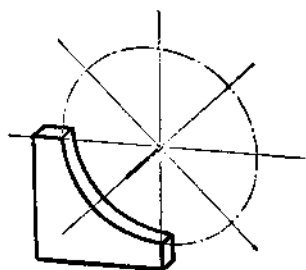


Черт. 531.



Черт. 532.

Но при помощи этого косинуса определяется величина малой оси эллипса, вписываемого в параллелограм $ABCD$ (черт. 529), отрезок ac (большая ось эллипса) не искажается в диметрической проекции и равен диаметру изображаемой окружности¹, отрезок bd перпендикулярен к отрезку ac и поэтому определяется по отношению к своей величине до проектирования с помощью указанного выше косинуса (0,34). Но до своего диметрического превращения отрезок bd (малая ось эллипса) равнялся диаметру изображаемой окружности; следовательно, $bd \approx 0,34ac$, т. е. отношение малой оси эллипса к большой равно 1 : 3.



Черт. 533.

То же можно вывести, если сравнить между собою отрезок OE и его проекцию O_pE (черт. 530), что соответствует рассматриваемому вопросу. Так как $O_pE : OE = \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$, а $\cos \gamma = n$ (коэффициент искажения) = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

то

$$\frac{O_pE}{OE} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Совершенно такой же вывод можно сделать и относительно эллипса, вписываемого в грань $DCGH$ (черт. 24).

Возвращаясь к черт. 525 и 526, отметим точки b, d, d_2, g на отрезках, перпендикулярных к ac и c_1h_1 , причем $kb = kd = \frac{1}{3}ka$ и $k_1d_2 = k_1g = \frac{1}{3}k_1c_1$. Так как (см. стр. 288) ka и k_1c_1 откладывались как

¹ Построение на черт. 529 производилось по коэффициентам искажения 0,94 и 0,47, т. е. не для увеличенной диметрической проекции.

1,06 радиуса изображаемой окружности, то каждый из отрезков kb , kd , k_1d_2 и k_1g (черт. 525 и 526) может быть принят равным 0,35 радиуса изображаемой окружности.

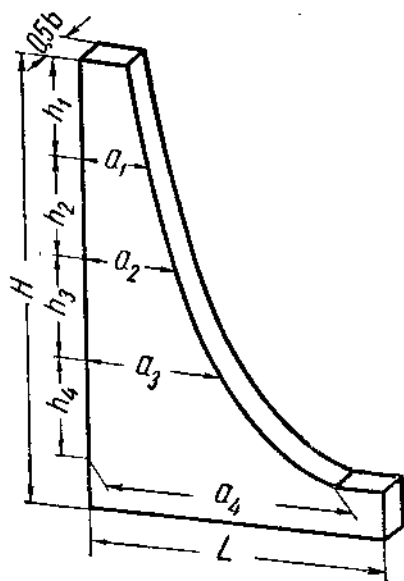
Таким образом, для построения диметрических проекций окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных координатным плоскостям XOY , ZOX и ZOY , имеется возможность разметить по восемь точек и через них провести эллипсы. Расположение точек для эллипсов, изображенных на черт. 525 и 526, получается менее удобным, чем в изометрической проекции (см., например, черт. 511).

На последующих чертежах 531, 532, 533 и 534 даны примеры построения диметрических проекций, аналогичные примерам на черт. 512, 513, 515 и 517 для изометрической проекции; разница лишь в углах между осями и в величинах откладываемых отрезков. Обратим внимание на то, что при окончательной обводке эллипса в диметрической проекции не проводят ни большой ни малой оси, но лишь дают направление, параллельное основным осям (см., например, черт. 531).

На черт. 535 дано изображение в трех ортогональных проекциях и построена диметрическая проекция детали. Ход построения диметрической проекции следующий. Сперва строим верхнее основание цилиндра, для чего берем центр K и вокруг него прочерчиваем эллипс по образцу черт. 525, т. е. намечая восемь точек (на черт. 535 направления большой и малой осей эллипса не оставлены), из которых две лежат на концах большой оси (большая ось займет горизонтальное направление) на расстояниях $1,06 \cdot 24 \approx 25$ мм от точки K , две — на концах малой оси (проводится перпендикулярно к большой оси) на расстояниях $0,35 \cdot 24 \approx 8$ мм от точки K , две — на концах прямой, проведенной через точку K параллельно оси OX , на расстояниях 24 мм от точки K , и две — на концах прямой, проведенной через точку K параллельно оси OY , на расстоянии $0,5 \cdot 24 = 12$ мм от точки K .

Проведя через несколько точек верхнего эллипса (в том числе через концы большой оси) вертикальные отрезки (параллельно оси OZ) по 30 мм, очерчиваем видимую часть нижнего эллипса (на черт. 535 показан штрих-пунктирной линией один из таких отрезков).

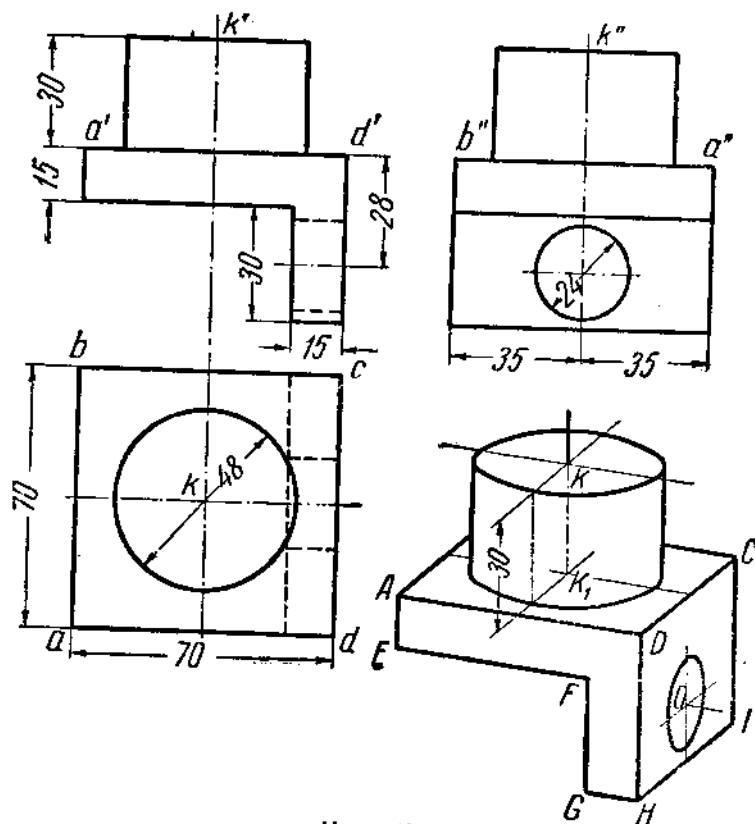
Далее, намечаем центр нижнего (невидимого) основания цилиндра, для чего из точки K проводим вертикально направленный отрезок длиной 30 мм (точка K_1). Через точку K_1 проводим две прямых параллельно осям OX и OY и, откладывая от точки K_1 на прямой, параллельной оси OX , по 35 мм, а на прямой, параллельной оси OY , по 17,5 мм



Черт. 534.

($0,5 \cdot 35 \text{ мм}$), прочерчиваем параллелограм $ABCD$ (вершина B закрыта цилиндром), у которого две стороны параллельны оси OX , а две — параллельны оси OY .

Через точку A проводим вниз вертикальный отрезок длиной 15 мм , получаем точку E ; через точку D проводим также вниз вертикально отрезок длиной $15 + 30 = 45 \text{ мм}$, получаем точку H . Затем через точку H проводим отрезок длиной 15 мм по направлению оси OX (параллельно AD) и получаем точку G , через которую проводим вверх вертикальную прямую, а из точки E проводим прямую параллельно AD ; получаем точку F .



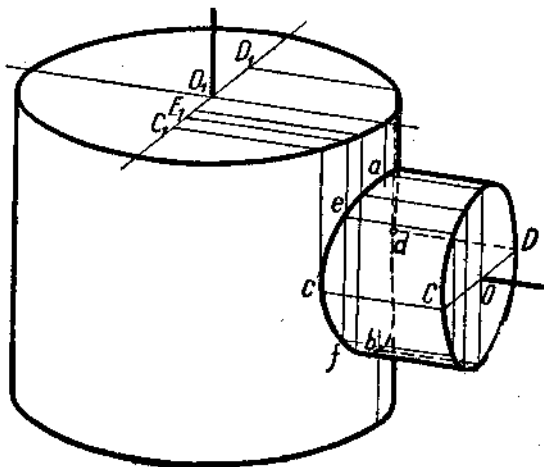
Черт. 535.

Теперь остается достроить параллелограм $DCIH$, для чего проводим CI параллельно DH и HI параллельно DC . На расстоянии 17 мм от середины отрезка HI (вверх по вертикали) находим точку O , вокруг которой строим эллипс по образцу построенного на черт. 526.

Полученная диметрическая проекция¹ увеличена в отношении $1,06 : 1$. В тех случаях, когда мы имеем дело с пересечением тел телами приходится при построении диметрической проекции (это относится и к по-

¹ Указанная на черт. 535 разметка точек буквами произведена лишь для пояснения, на готовых эскизах и чертежах буквы излишни.

строению изометрической проекции) проводить линии перехода (линии пересечения поверхностей). Линии перехода строятся по точкам; эти точки находят при помощи того же метода, которым пользуются в ортогональных проекциях — метода вспомогательных секущих плоскостей. На черт. 536 дан простой пример построения диметрической проекции с линией перехода; показан способ нахождения точек a, b, c, d, e и f линии перехода. Точки a и b найдены при помощи вспомогательной плоскости, проведенной через оси обоих цилиндров. Эта плоскость выделяет на поверхности каждого из цилиндров образующие, в пересечении которых и лежат точки a и b . Для нахождения точек c и d проведены вспомогательные плоскости, касательные к малому цилиндру и параллельные оси большого цилиндра. Эти плоскости, касаясь малого цилиндра и пересекая большой цилиндр, выделяют на них образующие, в пересечениях которых получают точки линии перехода. Откладывая отрезок $C_1D_1 = CD$, делят его на части, равные делениям, взятым на CD , и таким образом намечают положение образующих на обоих цилиндрах.

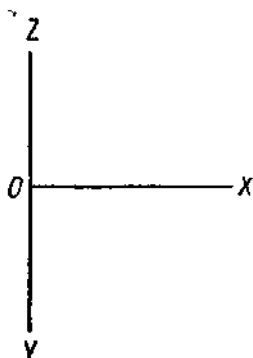


Черт. 536.

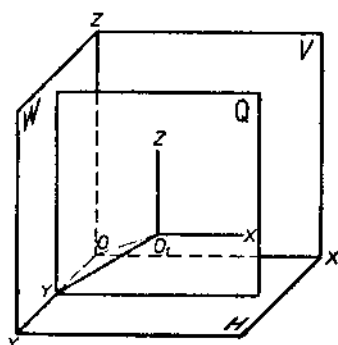
§ 55. Косоугольные аксонометрические проекции

Из числа возможных косоугольных аксонометрических проекций остановимся на имеющей наибольшее практическое применение проекции V . Чтобы при таком расположении плоскости аксонометрических проекций получить проекции всех трех координатных осей в виде отрезков, необходимо направление проектирования выбрать, во всяком случае, не под прямым углом к плоскости аксонометрических проекций, как это указывалось в § 4. Когда плоскость аксонометрических проекций (назовем ее Q) параллельна плоскости V , невыгодно было бы направление проектирования (хотя бы и не перпендикулярное к Q) расположить параллельно плоскости W , так как проекции координатных осей заняли бы положение, указанное на черт. 537, при котором аксонометрическое изображение получилось бы мало наглядным. Очевидно, направление проектирования следует выбирать так, чтобы проекции осей OX, OY и OZ на плоскости Q располагались под тем, как это указано на черт. 538. Так как плоскость Q параллельна плоскости V , то координаты X и Z проектируются без искажения, равно как и самый угол ZOX ; таким образом, по осям O_1X и O_1Z на плоскости Q

коэффициенты искажения равны единице. Что же касается оси O_1Y , то соответствующий ей коэффициент искажения выражается отношением $\frac{O_1Y}{OY}$: это отношение может иметь различные значения, в том числе и еди-



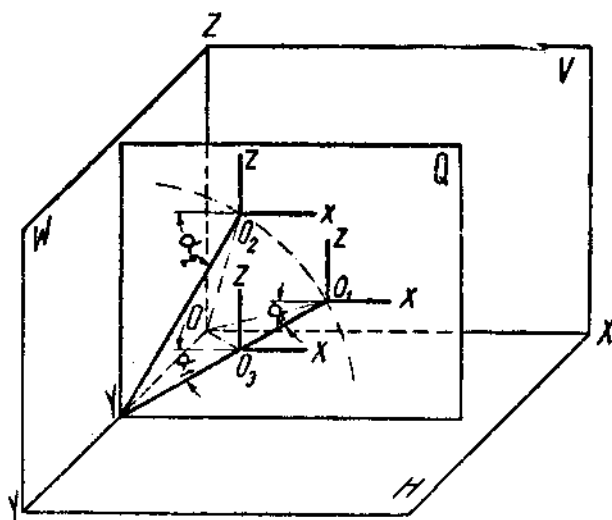
Черт. 537.



Черт. 538.

ницу; в последнем случае мы будем иметь изометрическую косоугольную проекцию, так как коэффициенты искажения по всем осям будут равны.

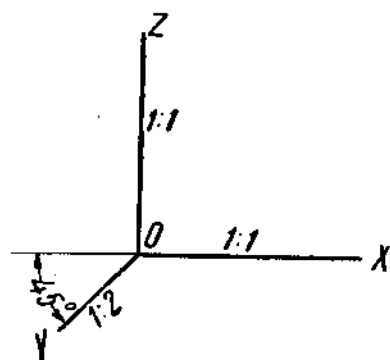
Если же отношение $\frac{O_1Y}{OY}$ не будет равно единице, то косоугольная аксонометрическая проекция на плоскости Q будет диметрической.



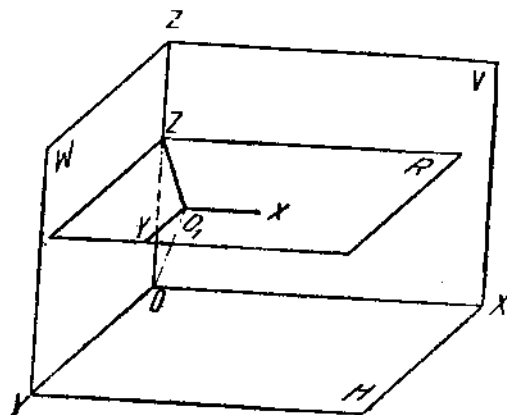
Черт. 539.

Отрезок OO_1 , параллельный направлению проектирования, и отрезки OY и O_1Y определяют прямоугольный треугольник OYO_1 (прямой угол OYO_1 : отрезок OY перпендикулярен к плоскости V, а так как

плоскость Q параллельна плоскости V , то, следовательно, Q перпендикулярна к OY). Вращая треугольник OYO_1 вокруг катета OY , можно получить различные положения точки O_1 на плоскости Q , причем во всех своих положениях точка O_1 находится на одном и том же расстоянии от оси Y ; геометрическим местом положений точки O_1 будет окружность, описанная из точки Y радиусом YO_1 . На черт. 539 указано два таких положения — O_1 и O_2 ; каждая из точек O_1 и O_2 служит началом осей, из которых оси X и Z сохраняют свои направления, а ось Y меняет направление, что выражается изменением угла α между продолжением оси X и осью Y . При этом направление проектирования меняется (см. на черт. 539 направление отрезков OO_1 и OO_2).



Черт. 540.



Черт. 541.

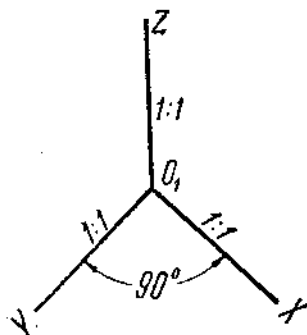
С другой стороны, если взять на плоскости Q начало осей в точке O_3 на отрезке YO_1 (см. черт. 539), т. е. направление проектирования параллельно направлению отрезка OO_3 , то величина угла α_1 остается неизменной, в то время как отношение $\frac{O_3Y}{OY}$ не равно отношению $\frac{O_1Y}{OY}$.

Следовательно, можно задаваться величиной коэффициента искажения по оси Y и величиной угла α , выбирая их произвольно с целью получить наиболее выразительное изображение, построенное в системе аксонометрических осей O_1X , O_1Y и O_1Z .

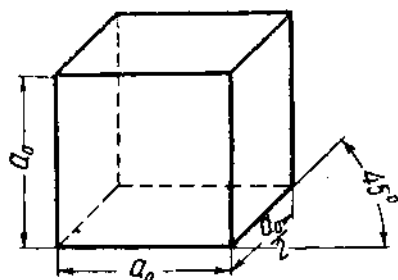
Рассматриваемую нами косоугольную аксонометрическую проекцию на плоскости Q , параллельной вертикальной плоскости проекций V , называют «фронтальная проекция», а также «кавалерная проекция» или «кавалерная перспектива». Весьма часто применяют тот случай фронтальной проекции, когда для коэффициента искажения по оси Y выбрано значение $1/2$, а угол α взят равным 45° (черт. 540); для изображений, построенных по этим данным, встречается название «кабинетная проекция».

Отметим также случай выбора плоскости аксонометрических проекций параллельно горизонтальной плоскости H (черт. 541). При таком расположении плоскости R угол XOY , а также координаты x и y , проектируются на плоскости R без искажения; что же касается оси O_1Z ,

получаемой на плоскости R , то соответствующий ей коэффициент искажения выражает отношение $\frac{O_1Z}{OZ}$ (отрезки O_1Z и OZ представляют собою катеты прямоугольного треугольника OZO_1 — прямой угол OZO_1). В тех

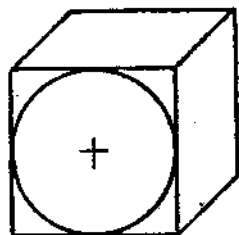


Черт. 542.



Черт. 543.

случаях, когда применяют такую косоугольную аксонометрическую проекцию, направление проектирования берут под углом 45° к плоскости R (или к плоскости H). При этом отрезок O_1Z получается равным отрезку OZ , т. е. коэффициент искажения по оси O_1Z получается равным единице и самая проекция получается изометрической (черт. 542). Этот вид косоугольной аксонометрической проекции обычно носит название «военная перспектива».



Черт. 544.

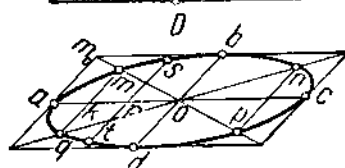
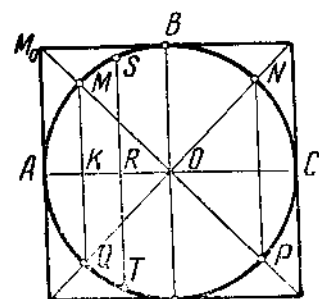
Изображение куба в кабинетной проекции дано на черт. 543. Передняя грань куба в точности повторяет его проекцию на плоскости V . Поэтому окружность, вписанная в эту грань, останется окружностью и в кабинетной проекции (черт. 544). Отсюда можно вывести заключение, что кабинетная

проекция, представляющая собою весьма простой и наглядный способ изображения тел с прямолинейными очертаниями, чрезвычайно удобна и для построения изображений в тех случаях, когда приходится иметь дело с окружностями, расположенными в плоскостях, параллельных аксонометрической плоскости проекций.

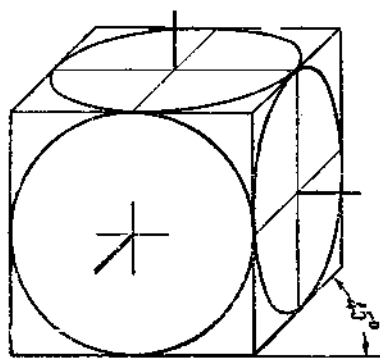
Если приходится изображать окружность, расположенную в плоскости, параллельной плоскости проекций H или W , то воображают окружность вписанной в квадрат, строят кабинетную проекцию этого квадрата и находят ряд точек для проведения проекции окружности — эллипса. На черт. 545 показана разметка точек для проведения эллипса — проекции окружности, расположенной в плоскости, параллельной плоскости H . Прежде всего вписываем окружность в квадрат и строим проекцию этого квадрата. Диаметр AC сохраняет свою длину и направление (получаем точки a и c); диаметр BD , перпендикулярный к AC , займет положение под углом 45° к ac и сократится в 2 раза (точки b и d). Хорды MQ и NP , получаемые при проведении диагоналей квадрата, дают еще четыре точки (m , q , n и p), причем $mq = \frac{MQ}{2}$, $np = \frac{NP}{2}$, $ok = OK$.

Далее взят произвольный отрезок диаметра OR и отложен по направлению oa ; через точку r проведен отрезок st , параллельный bd и равный $\frac{ST}{2}$. Получаются еще две точки (s и t) для проведения искомого эллипса. Поступая аналогично, можно разметить ряд точек, через которые легко прочертить эллипс.

Построение проекций круга, расположенного в плоскости, параллельной W , совершенно аналогично рассмотренному. На



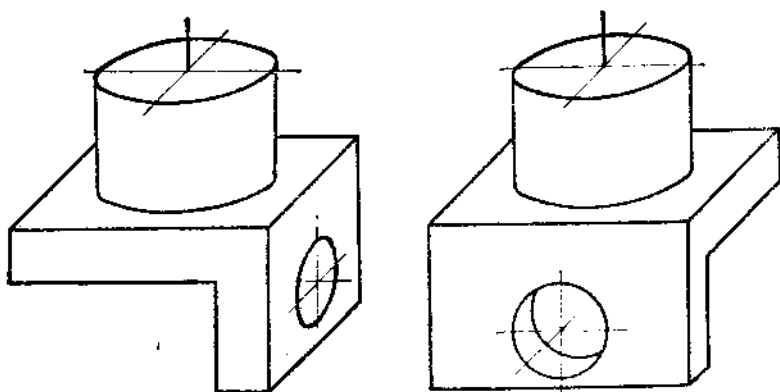
Черт. 545.



Черт. 546.

черт. 546 изображен куб с вписанными в его грани окружностями в том виде, как он получается в рассмотренной нами кабинетной проекции.

На черт. 547 дана кабинетная проекция той же детали, которая была изображена в диметрической проекции на черт. 535. Деталь представлена в двух положениях; при втором положении отверстие в передней стенке проектируется в виде окружности.



Черт. 547.

Обычно кабинетная проекция применяется для изображения тел прямолинейного очертания или тел, у которых круги могут быть расположены в плоскости, параллельной плоскости аксонометрических проекций.

ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 56. Применение простейших геометрических мест к решению некоторых задач

Пример 1. На прямой AM (черт. 548) найти точку, равноудаленную от плоскостей H и W .

Решение. Геометрическим местом точек, равноудаленных от плоскостей H и W , будет плоскость P , делящая пополам угол между плоскостями H и W .

Данная прямая встречается плоскостью P в точке K в восьмом октанте.

На черт. 548 та часть прямой, которая находится под плоскостью H , обозначена штриховой линией.

Пример 2. Найти точку, отстоящую от плоскости P на 30 мм, от плоскости H на 30 мм и от плоскости V на 15 мм (черт. 549).

Решение. Геометрическим местом точек, отстоящих от плоскости P на 30 мм, будет плоскость Q , проведенная параллельно плоскости P на расстоянии 30 мм от нее.

Геометрическим местом точек, удаленных от плоскости H на 30 мм, будет горизонтальная плоскость S .

Геометрическим местом точек, удаленных от плоскости V на 15 мм, будет плоскость T , проведенная параллельно плоскости V на расстоянии 15 мм от нее.

В пересечении этих трех плоскостей (Q , S , T) и будет находиться искомая точка K .

На черт. 549 дано лишь одно из восьми возможных решений данной задачи. Эти восемь решений могут быть получены, если построить еще три плоскости: $Q_1 \parallel Q$ по другую сторону от плоскости P , $S_1 \parallel S$ под плоскостью H и $T_1 \parallel T$ за плоскостью V , и затем построить точки пересечения всех этих плоскостей в следующих комбинациях:

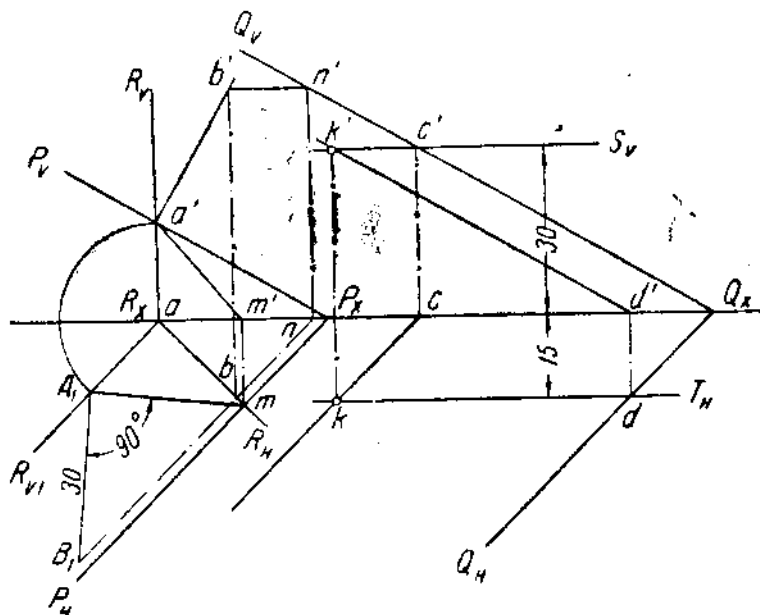
- 1) $Q - S - T$; 2) $Q_1 - S - T$; 3) $Q - S - T_1$;
- 4) $Q_1 - S - T_1$; 5) $Q - S_1 - T$; 6) $Q_1 - S_1 - T$;
- 7) $Q - S_1 - T_1$; 8) $Q_1 - S_1 - T_1$.

Плоскость Q на черт. 549 построена следующим образом. В точке A , взятой на следе P_V , проведена перпендикулярная к плоскости P прямая. Через эту прямую проведена вспомогательная горизонтально-проектирующая плоскость R , совмещенная далее с плоскостью H . Вместе с плоскостью R совместятся с H и прямой A_1M , по которой плоскость R пересекает плоскость P , и проведенный ранее в точке A перпендикуляр к плоскости P . В совмещенном с плоскостью H положении

этот перпендикуляр займет положение A_1B_1 (перпендикулярно к A_1m). Взяв отрезок $A_1B_1 = 30$ мм, отмечаем на горизонтальной проекции перпендикуляра точку b и по ней вертикальную проекцию b' . Затем при помощи горизонтали BN проведена плоскость $Q \parallel P$.

Точка K найдена в пересечении горизонтали CK и фронтали DK , полученных при пересечении плоскости Q плоскостями S и T .

Пример 3. В данной плоскости P найти точку, отстоящую от следа P_V и от оси XX на расстояниях, равных 20 мм (черт. 550).



Черт. 549.

Решение. Геометрическим местом точек, находящихся в плоскости P и отстоящих от следа P_V на расстоянии 20 мм, будет фронталь плоскости P .

Геометрическим местом точек, находящихся от оси XX на расстоянии 20 мм, будет поверхность кругового цилиндра.

В пересечении указанных фронтали и цилиндрической поверхности будет находиться искомая точка.

Так как фронталей, удовлетворяющих условию данной задачи, можно провести две и каждая из этих фронталей может пересечь поверхность цилиндра в двух точках, то вообще в данной задаче четыре ответа. На черт. 550 отмечены две из четырех возможных точек, отвечающих условию задачи и полученных при помощи одной фронтали MK . Фронталь эта построена сперва в совмещенном с плоскостью H положении, для чего вся плоскость P совмещена с плоскостью H . Параллельно совмещенному следу P_H на расстоянии 20 мм от него проведена прямая до пересечения со следом P_H в точке m . Эта точка является горизонтальным следом фронтали; дальнейшее построение проекций фронтали ясно из чертежа.

Цилиндрическая поверхность даст свой след на плоскости W в виде окружности, проведенной из точки O радиусом 20 мм. Точки k_1'' и k_2''

будут боковыми проекциями двух точек, отвечающих условию задачи. Остальные проекции этих точек будут находиться на соответственных проекциях фронтоли. Точка K_1 расположена в первом октанте, точка K_2 — в четвертом октанте.

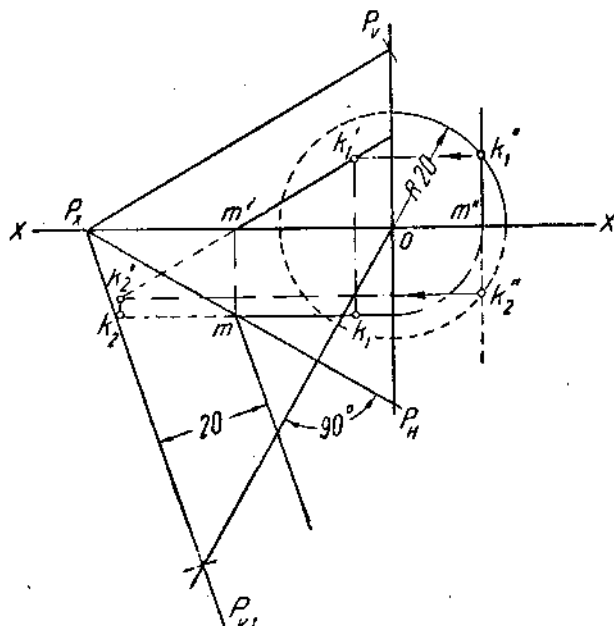
При проведении второй фронтоли, о которой было упомянуто выше, получились бы еще две точки, одна во втором октанте, а другая в третьем.

Пример 4. Через точку S , расположенную в плоскости P , провести в этой плос-

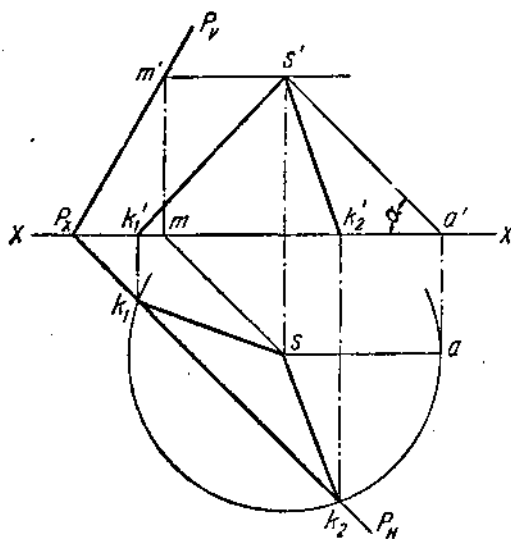
кости прямую, составляющую с плоскостью H угол α (черт. 551).

Решение. Геометрическим местом прямых, составляющих угол α с плоскостью H , будет поверхность прямого кругового конуса, поставленного на плоскость H . На черт. 551 через точку s' проведена прямая под углом α к оси XX . Радиусом sa из точки s проведена дуга окружности, пересекающая след P_H в точках k_1 и k_2 . Так как вершина конуса находится в плоскости P , то эти точки определяют те две образующих, по которым конус будет пересечен данной плоскостью P . Следовательно, искомыми прямыми будут прямые, определяемые образующими SK_1 и SK_2 .

Если при построении получится, что окружность, проводимая из точки s , коснется следа P_H , то плоскость P будет лишь касаться конуса



Черт. 550.



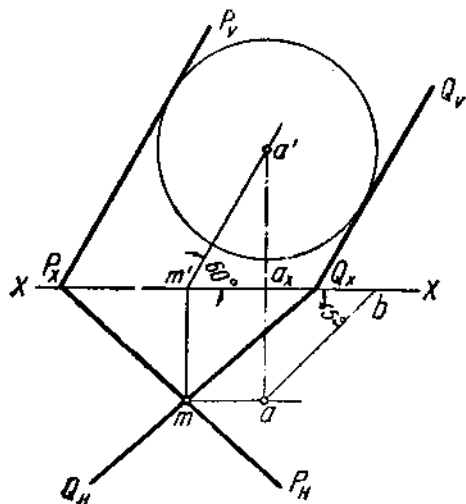
Черт. 551.

Получаются два решения, которые на черт. 552 в законченном виде выражаются проведением следов P_V и Q_V при данном следе P_H .

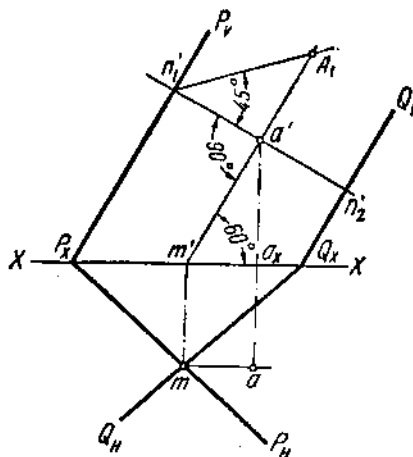
Если сравнить данное решение с решением, указанным на стр. 118, то следует отметить лишь разницу в обосновании решения; самый же ход построения совпадает.

Пример 6. Через данную точку A провести плоскость, составляющую с плоскостью V угол 45° ; вертикальный след искомой плоскости должен быть расположен под углом 60° к оси проекций XX (черт. 553).

Решение. Геометрическим местом прямых, проходящих через точку A и наклоненных к плоскости V под углом 45° , будет поверхность прямого кругового конуса, ось которого перпендикулярна к плоскости V .



Черт. 553



Черт. 554.

Плоскости, касательные к этому конусу, будут проходить через точку A и составлять с плоскостью V угол 45° . Если к тому же подобрать такую плоскость, вертикальный след которой составляет с осью XX угол 60° , то задача будет решена.

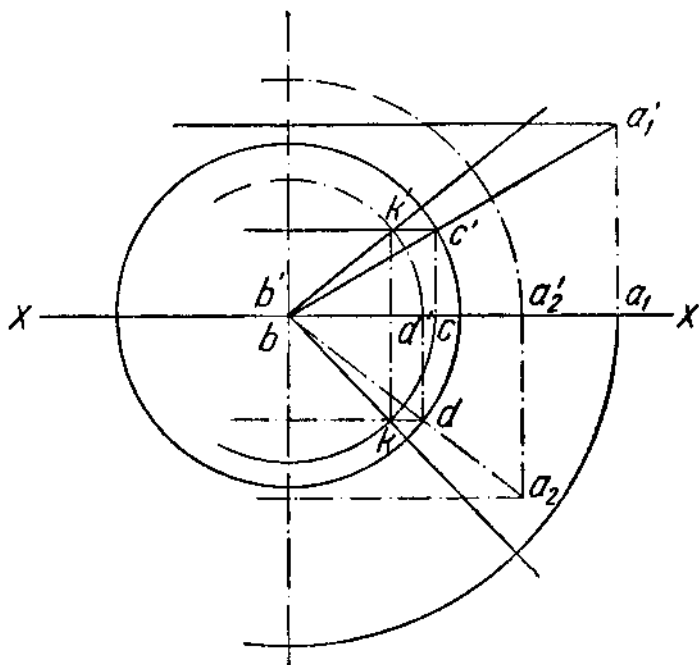
На черт. 553 сперва проведен отрезок прямой ab под углом 45° к оси XX . Тем самым определен вспомогательный конус, след которого на плоскости V проведен из точки a' радиусом, равным отрезку $a_x b$.

Затем через точку a' проведена прямая под углом 60° к оси XX . Эта прямая будет вертикальной проекцией фронтали, проходящей в искомой плоскости через точку A и определяющей требуемый угол наклона (60°) вертикального следа искомой плоскости по отношению к оси XX . Теперь остается построить касательную к окружности, проведенной на плоскости V из точки a' , причем эта касательная должна быть параллельна прямой $a'm'$. Таких касательных может быть проведено две, как это и сделано на черт. 553.

На оси XX получаются точки схода P_X и Q_X , через которые и через точку m должны быть проведены прямые — горизонтальные следы плоскостей, отвечающих условию рассматриваемой задачи.

Для сравнения на черт. 554 дано решение этой же задачи иным способом.

Через точку A также проведена фронталь, подготовляющая построение вертикального следа плоскости под углом 60° к оси XX . Затем выполнено построение заданного угла наклона некоторой плоскости к плоскости V : через точку a' проведена прямая, перпендикулярная к $a'm'$, на продолжении $a'm'$ отложен отрезок $a'A_1$, равный отрезку aa_x , и через точку A_1 проведена прямая под углом 45° к $a'A_1$. Определяется точка n_1' , через которую будет проходить вертикальный след искомой плоскости.



Черт. 555.

Симметрично точке n_1' относительно прямой A_1m' отмечена точка n_2' для проведения следа Q_V второй плоскости, отвечающей условию задачи.

Пример 7. Построить проекции прямой, проходящей через точку B на оси проекций и расположенной под углом α по отношению к плоскости H и под углом β — к плоскости V (черт. 555).

Решение. Геометрическим местом прямых, проходящих через данную точку и составляющих с плоскостью H угол α , является поверхность прямого кругового конуса, вершина которого может находиться в данной точке, а образующие составляют с плоскостью H угол α .

Также геометрическим местом прямых, проходящих через данную точку и составляющих с плоскостью V угол β , является поверхность прямого кругового конуса, вершина которого находится в данной точке, а образующие составляют с плоскостью V угол β .

Очевидно, искомая прямая должна одновременно принадлежать поверхности обоих конусов, имеющих общую вершину в данной точке, т. е. должны быть линией их пересечения — общей их образующей.

Если вспомогательные конусы будут двуполые, то получится восемь лучей, выходящих из точки B , по два в каждой четверти.

На черт. 555 выполнено построение одного из этих лучей.

Первый конус характеризуется образующей BA_1 и осью, перпендикулярной к плоскости H .

Второй конус характеризуется образующей BA_2 и осью, перпендикулярной к плоскости V .

Для построения искомой прямой имеется пока лишь точка B — общая вершина обоих конусов. Вторую точку — точку K , общую для поверхностей обоих конусов, находим при помощи поверхности шара, центр которого взят в точке B .

Для сравнения на черт. 556 дано решение этой же задачи иным способом.

Через точку B проведены две прямые, одна в плоскости V под углом α к оси XX , другая — в плоскости H под углом β к оси XX .

На обеих прямых отложены равные отрезки: $b'a'_1 = ba_2$. Если начать вращение обоих отрезков — отрезка BA_1 вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H , и отрезка BA_2 вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V , то в положении BA отрезки совпадут и, таким образом, определятся проекции искомой прямой, составляющей с плоскостью H угол α и с плоскостью V угол β .

И при этом способе получается в данной задаче восемь лучей, выходящих из точки B , если рассмотреть

полное вращение обоих отрезков и самые отрезки взять по обе стороны плоскостей H и V .

Черт. 556.

§ 57. О построении теней

Рассмотрим некоторые примеры решения задачи о построении теней, причем ограничиваемся лишь геометрией, отвлекаясь от физической стороны явления, и задаемся следующими условиями:

1) источник света бесконечно удален и, следовательно, лучи света параллельны между собой;

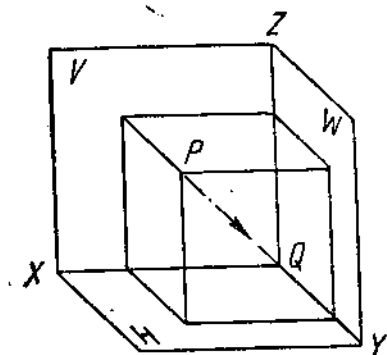
2) направление лучей света параллельно диагонали PQ куба, приложенного своими гранями к плоскостям проекций (черт. 557), и, следовательно, на эюре направление проекций световых лучей задается согласно черт. 558, т. е. лучи направлены слева — сверху — сзади;

3) неосвещенная часть поверхности тела называется собственной тенью;

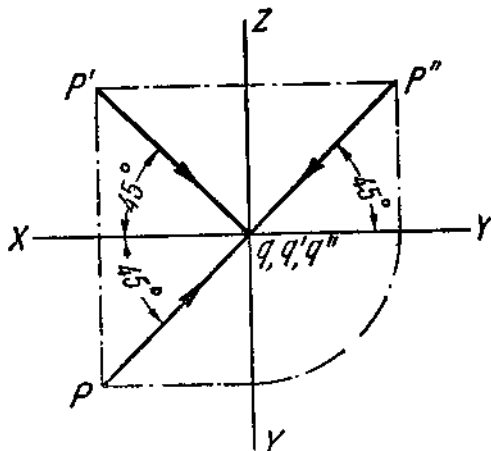
4) тень, получающаяся от данного тела на плоскостях проекций или вообще на какой-либо поверхности, называется падающей тенью.

При этих условиях тень от точки A (черт. 559) получится как точка пересечения прямой, проведенной из A согласно схеме, указанной на черт. 558, с плоскостью проекций, в данном случае с плоскостью H . Игак, построение тени от точки сводится к построению одного из следов прямой, проведенной через данную точку параллельно принятому направлению лучей света.

Точка, лежащая на плоскости проекций, совпадает со своей тенью. Построение тени от отрезка прямой сводится к построению теней от двух точек-концов данного отрезка (черт. 560). На черт. 561 тень получается в виде ломаной линии, так как тень от точки A ложится на плоскость V , а тень от точки B — на плоскости H . Точку перегиба можно получить построением, указанным на черт. 561:



Черт. 557.



Черт. 558.

1) находим горизонтальные следы прямых, проведенных через точки A и B параллельно направлению луча света;

2) проводя через точки m и n прямую, определяем точку на оси XX (проекция h_0 и h_0'), которая и будет искомой точкой перегиба.

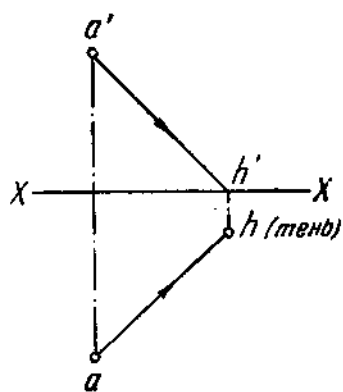
Точка, найденная на оси, является в свою очередь тенью от некоторой точки прямой AB ; на черт. 561 показано, как по найденным проекциям h_0 и h_0' определить проекции этой точки на прямой AB (проекции d и d').

На черт. 562 показан другой способ построения точки перегиба: 1) строим тень от точки A и тень от какой-либо точки C (так как тень от точки A получилась на плоскости V , то и точку C подбираем так, чтобы тень от нее получилась также на V);

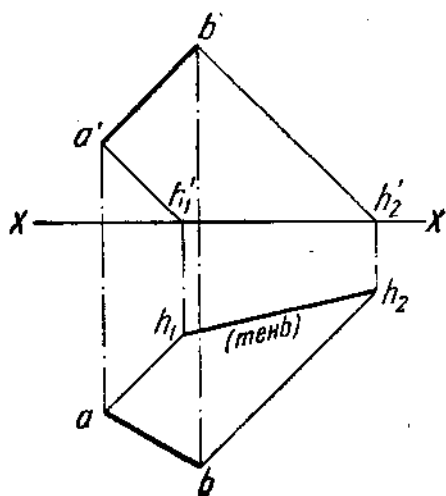
2) проводим прямую через точки v_1' и v_2' до пересечения с осью XX ; точка с проекциями v_3 , v_3' и будет искомой.

Точка D , дающая свою тень на оси XX , отмечена и на черт. 562.

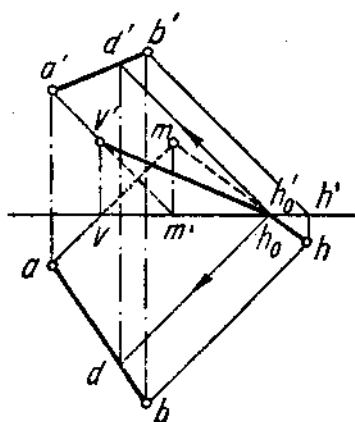
На черт. 563 даны примеры построения теней в некоторых частных случаях расположения данного отрезка. Отметим только случай, когда проекции отрезка наклонены к оси XX под углом 45° : тень от отрезка обращается в точку.



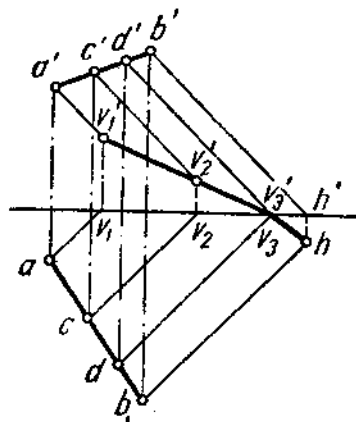
Черт. 559.



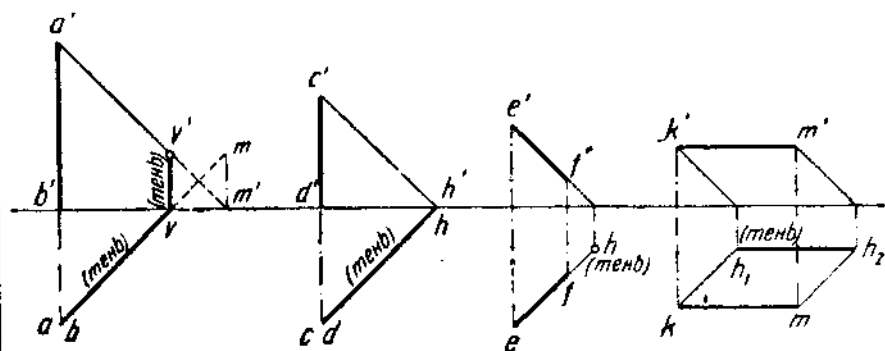
Черт. 560.



Черт. 561.



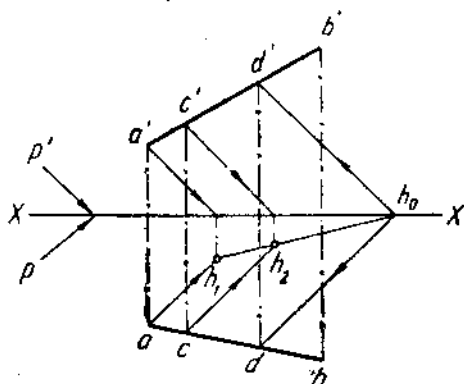
Черт. 562.



Черт. 563.

На черт. 564 показано решение следующей задачи: на прямой, выраженной отрезком AB , найти точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от плоскостей H и V .

Находим тень от точки A ; так как тень (точка h_1) легла на плоскость H , подбираем вторую точку (C) на прямой AB с расчетом, чтобы тень от этой точки также оказалась на плоскости H . Построив эту тень (точка h_2), находим тень от прямой AB , падающую на плоскость H . Прямая, проходящая через точки h_1 и h_2 , пересекает ось XX в точке h_0 ; эту точку h_0 следует рассматривать как тень от некоторой точки прямой AB . Проводя из точки h_0 два луча под углом 45° к оси XX , находим



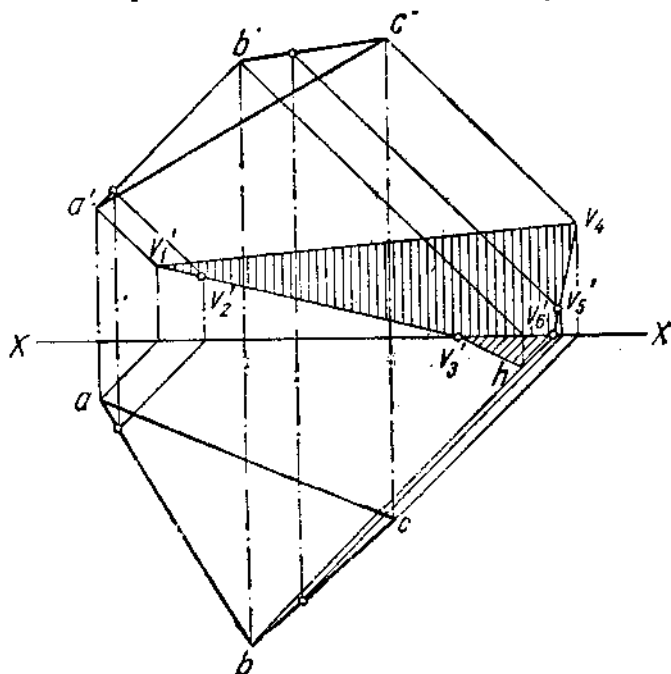
Черт. 564.

точки d и d' , являющиеся проекциями искомой точки на прямой AB .

На черт. 565 построена падающая тень от треугольника ABC . В данном случае тень частично легла на плоскость V , частично на H . Построение падающей тени от данной плоской фигуры сводится к построению теней от всех ее сторон, что произведено по схеме, указанной на черт. 562.

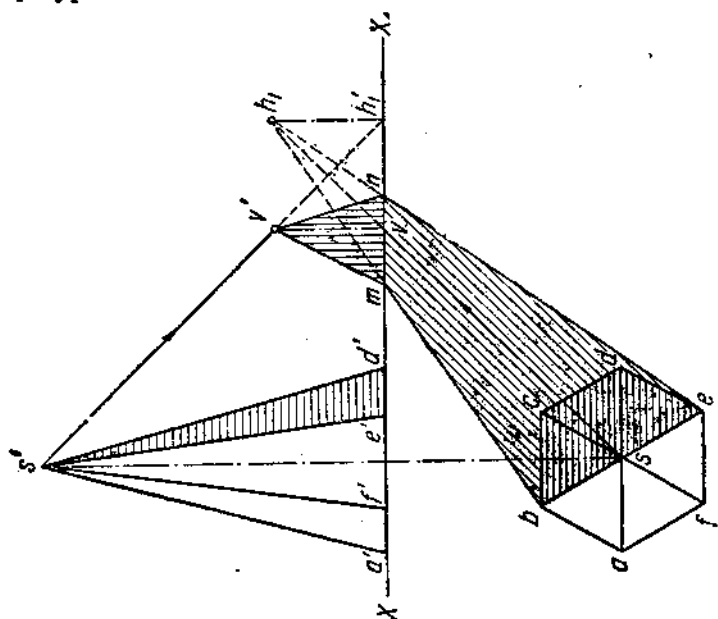
Если рассматривать данный треугольник, как пластинку хотя бы и весьма малой толщины, может быть поставлен вопрос о нахождении собственной тени. На черт. 566 показано, что исследование сводится к построениям, которые были объяснены в § 17 (черт. 207).

Рассматривая прямую, проведенную параллельно направлению лучей света через точку K , принадлежащую данной фигуре, замечаем по

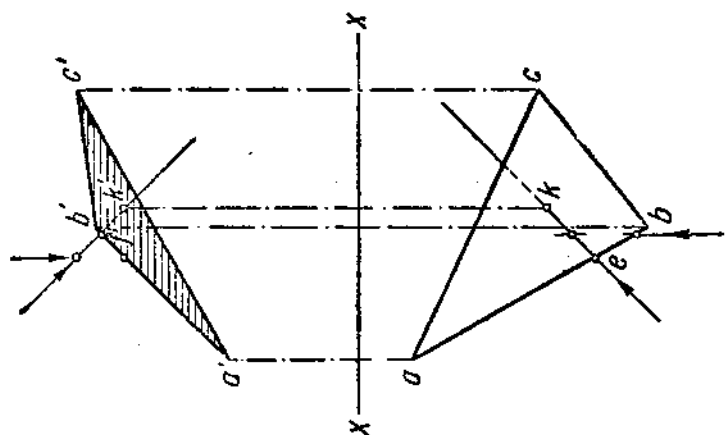


Черт. 565.

участку $f'k'$ вертикальной проекции прямой, что, если смотреть на плоскость V , будет видна неосвещенная сторона фигуры, что и показано на черт. 566 штриховкой. Если же смотреть на плоскость H , то будет видна освещенная сторона фигуры, что вытекает из рассмотрения горизонтальной проекции прямой, перекрывающей на участке ek проекцию данной фигуры.



Черт. 567.



Черт. 566.

При построении падающей тени от фигуры (черт. 565) мы получили некоторую фигуру на плоскостях проекций. На каждой из этих плоскостей фигура тени ограничена линией, называемой контуром падающей тени.

На черт. 567 построена падающая тень от тела — шестиугольной пирамиды, поставленной на плоскость H . Найдена тень от вершины пирамиды — точка v' на плоскости V . Так как основание пирамиды находится на плоскости H , то падающая тень ляжет частично и на H , т. е. тень окажется сломанной на оси XX .

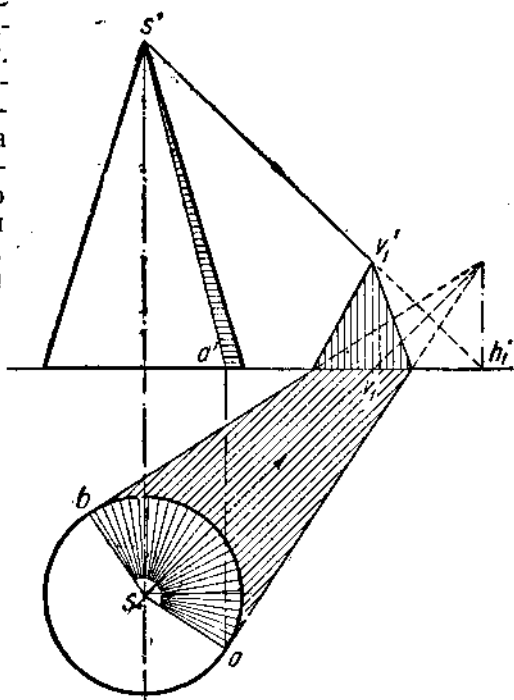
Построив горизонтальный след прямой, проведенной через вершину S параллельно направлению лучей света, соединяем полученную точку h_1 с точками b и e горизонтальной проекции.

Точки m и n , полученные на оси XX , соединяем с точкой v' ; линия $mv'n$ будет контуром падающей тени на плоскости V . Ломаная прямая bmv' есть тень ребра SB ; также ломаная env' есть тень ребра SE . Следовательно, ребра SB и SE определяют контур фигуры падающей тени от всей пирамиды. Так как тень падает от освещенной части поверхности пирамиды, то, следовательно, ребра SB и SE определяют освещенную и неосвещенную части. Но неосвещенная часть поверхности есть собственная тень; на черт. 567 собственная тень пирамиды отмечена штриховкой.

Граница между освещенной и неосвещенной частями поверхности называется контуром собственной тени. Легко видеть, что контур падающей тени от тела есть тень от контура собственной тени этого тела.

На черт. 568 построена тень от прямого кругового конуса, поставленного на плоскости H . Если представить две плоскости, касательные к данному конусу и параллельные направлению лучей света, то горизонтальные следы этих плоскостей будут ограничивать падающую тень на плоскости H , а образующие SA и SB , по которым плоскости касаются конуса, дадут контур собственной тени конуса. На черт. 568 через точку h_1 , представляющую собою горизонтальный след прямой, проведенной через вершину S параллельно направлению лучей света, проведены прямые h_1a и h_1b , касательные к окружности горизонтальной проекции основания конуса. Прямые h_1a и h_1b лежат на горизонтальных следах плоскостей, касательных к конусу и проходящих через прямую SH_1 .

Часть падающей тени от конуса ложится на плоскость V . Построение аналогично указанному на черт. 567.



Черт. 568.

УКАЗАТЕЛЬ

(цифры соответствуют страницам книги)

Аксометрия 265
 Аснонометрическая проекция косо-
 угольная 268
 Аснонометрическая проекция прямо-
 угольная 268
 Американский способ расположения
 проекций 101
 Аффинные соответствия 138

 Боковая плоскость проекций 22

 Ведущий радиус 110
 Вертикальная плоскость проекций 17
 Вертикально - проектирующая пло-
 скость 27
 Вторая вертикальная плоскость про-
 екций 22
 Видимость элементов в проекциях 85
 Винт 259
 Винт одноходовой 259
 Винт с квадратной резьбой 259
 Винт с треугольной резьбой 259
 Винт с трапецевидальной резьбой 261
 Винтовая линия 249
 Винтовая линия на конусе 255
 Винтовая линия с левым ходом 251
 Винтовая линия с правым ходом 251
 Винтовая поверхность косая 255
 Винтовая поверхность прямая 255
 Винтовой коноид 255
 Винтовой цилиндронд 256
 Военная перспектива 296

 Гайка 261
 Гайка шестигранная 219
 Геликоид (гелисоид) 255
 Гипербола 205
 Гиперболический параболоид 170
 Гиперболоид двуполый 173
 Гиперболоид однополый 172
 Гиперболоид параболический 170
 Горизонталь плоскости 55
 Горизонтальная плоскость проекций
 17
 Горизонтально - проектирующая пло-
 скость 26
 Горло гиперболоида 173

Диметрическая проекция 268
 Длина одного оборота винтовой линии
 253

 Европейский способ расположения
 проекций 100

 Изометрическая проекция 268

 Кабинетная проекция 295
 Кавальерная проекция или кавальер-
 ная перспектива 295
 Картинная плоскость 7
 Касательная к винтовой линии 253
 Кольцевой винтовой коноид 257
 Кольцо круговое 172
 Коноид 168
 Конусы 167
 Контур падающей тени 308
 Контур собственной тени 309
 Контурные образующие 166
 Координатная плоскость 11
 Координаты 10
 Косая плоскость 168
 Косая поверхность 165
 Косой геликоид 257
 Косой кольцевой геликоид 257
 Коэффициент искажения в аксономет-
 рической проекции 268
 Кривая поверхность 164

 Линейчатая поверхность 164
 Линия двойной кривизны 250
 Линия наибольшего ската пл
 90
 Линия перехода 222
 Линия среза 217

 Меридианальное сечение шара 217

 Направление родства 138
 Направляющая цилиндрической по-
 верхности 165
 Начало координат 11
 Немецкий способ расположения про-
 екций 100
 Нелинейчатая поверхность 164

Неразвертываемая поверхность 165
Неразвертываемый геликоид 255
Нормальное сечение 167

Образующая линия 164

Октант 11
Ортогональный 10
Оси координат 11
Ось вращения 105
Ось проекций 17
Ось родства 138

Парабола 205

Параболический гиперboloид 170

Параболоид гиперболический 170

Параллелепипед координат 12

Перспектива 7

Плоскость, касательная к кривой поверхности 173

Плоскость общего положения 49

Плоскость остроугольная 50

Плоскость параллелизма 168

Плоскость проекций 4

Плоскость тупоугольная 50

Поверхность вращения 170

Поверхность коническая 167

Поверхность косая 165

Поверхность кривая 164

Поверхность линейчатая 164

Поверхность нелинейчатая 164

Поверхность неразвертываемая 165

Поверхность развертываемая 165

Поверхность цилиндрическая 165

Подкасательная 253

Пола плоскости проекций 17

Полус проекций 4

Проектирующая поверхность 6

Проектирующая прямая 4

Проектирующий луч 4

Проекция аксонометрическая 16

Проекция вертикальная 18

Проекция горизонтальная 18

Проекция кабинетная 295

Проекция кавальерная 295

Проекция коническая 6

Проекция косоугольная 10

Проекция параллельная 8

Проекция полярная 4

Проекция прямоугольная 10

Проекция с числовыми отметками 13

Проекция фронтальная 15, 295

Проекция цилиндрическая 9

Производящая линия 164

Профильная плоскость 29

Прямая общего положения 30

Прямые параллельные 39

Прямые пересекающиеся 38

Прямые скрещивающиеся 40

Развертываемая поверхность 165

Сечение нормальное 167

Синусоида 250

След плоскости горизонтальный 44

След плоскости вертикальный 44

След поверхности 166

След прямой вертикальный 32

След прямой горизонтальный 32

След прямой на плоскости W 33

След прямой профильный 33

Спираль Архимеда 254

Тень падающая 304

Тень собственная 304

Тор круговой 171

Точка встречи прямой с плоскостью 84

Точка входа 189

Точка выхода 189

Точка зрения 7

Точка схода следов плоскости 44

Треугольник следов 271

Триметрическая проекция 268

Угол (деление пространства) 17

Угол между двумя прямыми 158

Угол между плоскостями 161

Угол между прямой и плоскостью 159

Угол подъема точки, двигающейся по винтовой линии 250

Фасадная плоскость проекций 17

Фронталь плоскости 55

Фронтальная плоскость 47

Фронтальная проекция 295

Центр проекций 4

Цилиндронд 168

Цилиндры 165

Четверть (деление пространства) 17

Шаг винтовой линии 250

Шаровая поверхность 164

Экваториальное сечение шара 216

Эллипс 124

Эллипсоид вращения 172

Эторп 19

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	3
-----------------	---

Глава I

Введение

1. Центральная проекция	4
2. Параллельные проекции	8
3. Метод координат, как прием определения задания геометрических элементов	10
4. Наглядные изображения	14

Глава II

Система ортогональных проекций

5. Проекция точки	17
6. Проекция прямой линии	26
7. Следы прямой	32
8. Относительное положение точки и прямой	37
9. Относительное положение двух прямых	38

Глава III

Плоскости, взаимное положение плоскостей, прямой и плоскости

10. Различные способы задания плоскости	43
11. Характерные положения плоскости относительно плоскостей проекций	46
12. Прямые, расположенные в плоскости. Горизонталь и Фронталь	51
13. Точка плоскости	59
14. О проекциях плоских фигур	61
15. Проекция прямого угла	65
16. Относительное положение двух плоскостей	66
17. Относительное положение прямой и плоскости	82
18. Прямая, перпендикулярная к плоскости	86
19. Взаимно-перпендикулярные плоскости	91
20. О проекциях многогранников	94

Глава IV

Способы вращения, совмещения и перемещения плоскостей проекций

21. Основы способа вращения	105
22. Вращение точки	106
23. Вращение прямой линии	109
24. Вращение плоскости	113
25. Построение проекций круга, наклоненного к одной из плоскостей проекций	124
26. Вращение тела	125
27. Вращение без указания положения осей	126
28. Способ совмещения	127
29. Родственное соответствие и его применение к решению некоторых задач	137
30. Способ перемещения плоскостей проекций	143
31. Перемена одной плоскости	145
32. Перемена двух плоскостей	148

§ 33. Примеры решения задач на точку, прямую и плоскость	151
--	-----

Глава V

Некоторые кривые поверхности и их изображение в ортогональных проекциях

§ 34. Общее деление кривых поверхностей	164
§ 35. Линейчатые поверхности	165
§ 36. Поверхности вращения	170
§ 37. Проведение плоскостей касательных к кривым поверхностям	173

Глава VI

Пересечение геометрических тел плоскостью и прямой

§ 38. Пересечение прямой плоскостью	181
§ 39. Пересечение пирамиды плоскостью	184
§ 40. Построение развертки боковой поверхности тела, пересеченного плоскостью	186
§ 41. Пересечение поверхности прямой пирамиды прямой линией	189
§ 42. Пересечение цилиндра плоскостью	191
§ 43. Пересечение конуса плоскостью	204
§ 44. Примеры пересечения поверхностей вращения плоскостью	213
§ 45. Пересечение поверхности цилиндра, конуса и шара прямой линией	219

Глава VII

Пересечение поверхностей друг с другом

§ 46. Взаимное пересечение многогранников	222
§ 47. Взаимное пересечение тел, ограниченных поверхностями вращения	228

Глава VIII

Винтовые линии и поверхности

§ 48. Винтовая линия	249
§ 49. Винтовая поверхность	255
§ 50. Винты цилиндрические	258

Глава IX

АксонOMETРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 51. Общие сведения	265
§ 52. Прямоугольные аксонометрические проекции	268
§ 53. Изометрическая проекция	276
§ 54. Диметрическая проекция	285
§ 55. Косоугольные аксонометрические проекции	293

Приложения

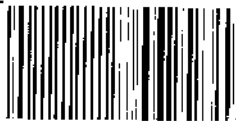
§ 56. Применение простейших геометрических мест к решению некоторых задач	298
§ 57. О построении теней	304
Указатель	310

-326772-



1937

RLST



000000021080