

Депозитарий

Проф. Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, Д. С. ВИЛЬКЕР,
П. П. ШУМИЛОВ и В. С. ЯБЛОНСКИЙ.

532.5

Р-46

ГИДРАВЛИКА

РУКОВОДСТВО ДЛЯ НЕФТЯНЫХ ВТУЗОВ, ТЕХНИКУМОВ
И РАБОТНИКОВ НЕФТЯНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

326756

7

ПРОБЕЖАНО
03

4479

8420

52788

552

ПЕРЕЧЕТ 1980-82
Мер

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

1989 г.

ОНТИ НКПТ СССР
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
НЕФТЯНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА

1982

ЛЕНИНГРАД

146

2

20

20

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Бурный рост нашей нефтепромышленности выдвинул ряд актуальнейших задач перед нефтяными вузами, подготавливающими новые кадры инженеров и техников, новые кадры борцов за социалистическую нефть.

Реорганизованные в свете новых задач вузы ставят преподавание технических дисциплин на новые рельсы и предъявляют новые требования к учебникам и руководствам, в частности к учебнику гидравлики.

Предлагаемый курс является попыткой авторов дать усиленное решение вопросов, поставленных нефтяной практикой. В состав курса входят основные понятия гидростатики и общей гидравлики, причем в основу положено учение Осборна Рейнольдса о двух режимах движения, без чего теперь немислимо научно-обоснованное изложение указанной дисциплины.

Нами дается достаточно подробное изложение теории и расчета нефтеприводов, водопроводов, газо- и паропроводов. В конце книги приведено краткое изложение вопросов фильтрации жидкостей и газов в пористой среде и вопроса о движении твердых тел в восходящем потоке жидкости. Предлагаемый курс предназначен как для промысловиков, так и для переработчиков.

Авторы

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие	3
-----------------------	---

А. Введение.

Задание 1. Основные определения (И. И. Шумилов)	9
1. Плотность	—
2. Удельный вес	10
3. Удельный объем	11
4. Абсолютная вязкость	—
5. Кинематическая вязкость	13
6. Сжимаемость	17
7. Поверхностное натяжение и капиллярность	—
8. Теплоемкость	18
9. Теплопроводность	19

В. Гидростатика.

Задание 2. Равновесие жидкостей (В. С. Яблонский)	22
1. Гидростатическое давление в жидкостях и ее свойства	—
2. Закон Паскаля	25
3. Пнезметрическая высота	28
4. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах	—
5. Равновесие тяжелого газа	30
6. Формула Лапласа-Бабине	—
7. Манометры, пнезометры и вакуумметры	31

Задание 3. Давление жидкости на стенки (В. С. Яблонский)	35
1. Давление на плоскую наклонную стенку	—
2. Центр давления	36
3. Давление на цилиндрические стенки	38
4. Принцип Архимеда	40

С. Гидродинамика.

Задание 4. Два режима движения жидкостей и газов (И. И. Шумилов)	41
1. Определение расхода и средней скорости	—
2. Опыты Осборна Рейнольдса	43
3. Число Рейнольдса	45
4. Критическая скорость	—
5. Число Рейнольдса безразмерно	46
6. Как распределены скорости частиц по сечению круглой трубы при движении жидкости вдоль трубопровода	47

Задание 5. Ламинарное движение в трубе кругового сечения (И. И. Шумилов)	49
1. Формула Стокса распределения скоростей по сечению	—
2. Формула Пуазейля для определения расхода	52
3. Формулы Стокса и Пуазейля для случая наклонного трубопровода	54
4. Пример расчета ламинарного потока	55
5. Шероховатость стенок при ламинарном режиме не влияет на величину расхода (6) и на закон сопротивления (1)	56

Задание 6. Турбулентное движение (Д. С. Вилькер)	57
§ 1. Характер движения частиц и распределение скоростей по сечению (эллиптический закон)	—
§ 2. Опыты Стантона и Пайнела	60
§ 3. Пограничный слой по Прандтлю	61
§ 4. Квадратичный закон трения	62
§ 5. Формула Дарси-Вейсбаха для потерь напора в трубе	63
§ 6. Упрощенная схема Прандтля	64
Задание 7. Приложение принципа подобия к движению жидкости в трубах (Д. С. Вилькер)	67
§ 1. Вывод формулы Рейнольдса	—
§ 2. Приведение формулы Пуазейля к виду формулы Рейнольдса	69
§ 3. Графическое представление коэффициента сопротивления для обоих режимов	70
§ 4. Обобщение формулы Рейнольдса	—
§ 5. Закон Кармана Прандтля	—
Задание 8. Опытные данные о движении жидкости по трубам (В. С. Яблонский)	74
§ 1. Старые формулы для коэффициента сопротивления	—
§ 2. Новые формулы для коэффициента сопротивления	75
§ 2а. Новейшие опытные формулы в области очень больших Рейнольдсовых чисел. Таблица Прандтля	77
§ 3. Опытные формулы для движения нефти	78
§ 4. Влияние разных факторов на движение жидкостей	81
Задание 9. Различные расчетные формулы (В. С. Яблонский)	83
§ 1. Коэффициент расхода В. Г. Шухова	—
§ 2. Расчет горизонтального трубопровода	84
Задание 10. Определение наилучшего диаметра трубопровода (В. С. Яблонский)	87
§ 1. Подсчет мощности насосов	—
§ 2. Стоимость эксплуатации	89
§ 3. Определение наилучшего диаметра по В. Г. Шухову	91
Задание 11. Увеличение производительности нефтепроводов (П. П. Шумилов)	94
§ 1. Расчет люпинга (loops)	—
§ 2. Эквивалентная длина	98
§ 3. Увеличение мощности перекачивающих станций	101
§ 4. Пример расчета негоризонтального нефтепровода (первой и второй очереди)	103
§ 5. Графический метод акад. В. Г. Шухова для определения местоположения станций	104
Задание 12. Уравнение Бернулли (П. П. Шумилов)	105
§ 1. Установившееся движение несжимаемой жидкости	—
§ 2. Механическая интерпретация уравнения Бернулли	108
§ 3. Энергетическое толкование уравнения Бернулли	110
§ 4. Поправка скоростного напора на неравномерное распределение скоростей по сечению потока	112
Задание 13. Теорема Борда-Карно (П. П. Шумилов)	114
§ 1. Вывод формулы Борда-Карно	—
§ 2. Применение формулы Борда-Карно к задачам о местных сопротивлениях в трубопроводах	116
§ 3. Опытные данные о коэффициенте ζ для различных фиттингов и других местных сопротивлений (по Пешю и Есьмау)	118
§ 4. Пример на применение теоремы Борда-Карно	123

Задание 14. Расчет водопровода (П. П. Шумилов)	125
1. Задача о простом водопроводе	—
2. Давление в водопроводной линии	128
3. Сифон	130
4. Непрерывный расход в пути. Правило Дюпюи	131
5. Задача о трех резервуарах	133
6. Сложная сеть труб	135
Задание 15. Движение жидкости по некруглым трубам (Д. С. Вилькер)	137
1. Гидравлический радиус	—
2. Концентрические трубы	138
3. Призматические трубы разных сечений	139
4. Прохождение жидкости между трубами подогревателя	140
Задание 16. Коэффициент теплопередачи (В. С. Яблонский)	142
1. Полный коэффициент теплопередачи	—
2. Формула Форхгеймера для внешнего коэффициента теплопередачи α_2	144
3. Теплопередача от трубы в воздух	145
4. Теплопередача в ламинарном потоке	—
5. Теплопередача при турбулентном потоке	148
6. Задачи	150
Задание 17. Влияние тепла на движение нефти по трубам (В. С. Яблонский)	151
1. Изменение вязкости с температурой	—
2. Изменение температуры нефти по длине трубопровода	—
3. Определение потерь пара в случае движения по нефтепроводу подогретого продукта	153
Задание 18. Гидравлический удар (Л. С. Лейбензон)	156
1. Кажущийся модуль сжатия жидкости	—
2. Формула ударного давления проф. Н. Е. Жуковского	158
3. Гидравлический удар в трубопроводе	159
Задание 19. Истечение из отверстий при постоянном уровне (Д. С. Вилькер)	161
1. Формула Торичелли	—
2. Опытные данные	162
3. Боковое отверстие	164
4. Истечение жидкости через насадки	167
5. Истечение жидкости из затопленного отверстия	169
6. Водосливы	—
Задание 20. Опорожнение резервуаров (Д. С. Вилькер)	174
1. Истечение при переменном уровне	—
2. Кривая производительности (истощения) резервуаров	175
3. Случай призматических резервуаров	176
4. Опорожнение цистерны	177
Задание 21. Равномерное движение в каналах и незаполненных трубах (Д. С. Вилькер)	—
1. Равномерное движение	—
2. Наиболее выгодный профиль сечения канала	179
3. Расчетные формулы	182
4. Расчет канала	185
Задание 22. Неустановившееся движение несжимаемой жидкости (П. П. Шумилов)	188
1. Вывод уравнения неустановившегося потока в дифференциальной форме	—
2. Интегрирование уравнения (5) для случая трубопровода постоянного диаметра	190

§ 3. Приложение теории неравномерного движения к вопросу о разрыве струи на вакуумной линии трубопровода при перекачке плунжерными насосами светлых нефтепродуктов с большой упругостью пара . . .	192
--	-----

Д. Движение газов и перегретых паров.

Задание 23. Движение газов и перегретых паров в трубопроводах со скоростями ниже звуковых (П. П. Шумилов)	195
§ 1. Вывод формулы Бернулли для случая установившегося движения газов и перегретых паров	—
§ 2. Упрощение уравнения Бернулли для случая движения газов и перегретых паров с небольшими скоростями (ниже звуковых)	197
§ 3. Вывод общих уравнений для весового и объемного расходов газа и перегретого пара при медленном движении в потрубопроводе (со скоростями ниже звуковых)	199
Задание 24. Практические формулы для расчета газопроводов и паропроводов перегретого пара (П. П. Шумилов)	202
§ 1. Формула Мейера для ламинарного режима	—
§ 2. Формула Веймаута для турбулентного режима	203
§ 3. Поправка к формуле Веймаута на случай большой скорости движения газов (близкой к скорости звука)	205
§ 4. Формула Блазиуса для турбулентного режима	207
§ 5. Упрощенная формула Веймаута для случая небольшой разности давлений $p_1 - p_2$	208
Задание 25. Расчет газопроводов и паропроводов перегретого пара (П. П. Шумилов)	209
§ 1. Физические данные для некоторых газов и для водяного пара	—
§ 2. Наиболее выгодный диаметр для случая газопровода с несколькими компрессорными станциями	210
§ 3. Диаметр, удовлетворяющий условию минимума веса труб для случая газопровода с одной компрессорной станцией	212
§ 4. Расчет мощности компрессора	213
§ 5. Пример расчета газопровода	217
§ 6. Пример расчета трубопровода для перегретого пара	218
Задание 26. Движение смеси жидкости и газа (П. П. Шумилов)	219
§ 1. Удельный вес смеси и уравнение состояния	—
§ 2. Движение смеси по горизонтальному трубопроводу при изотермическом режиме	220
§ 3. Приближенная формула для случая движения смеси жидкости и газа по горизонтальному трубопроводу при политропическом процессе	222
§ 4. Движение смеси жидкости и газа по вертикальной трубе при изотермическом режиме (эрлифт)	223
§ 5. Сопоставление полученных формул и выводы	224
Задание 27. Теория истечения паров (насыщенных) (В. С. Яблонский)	226
§ 1. Истечение из отверстий	—
§ 2. Истечение из насадок	230
Задание 28. Расчет паропроводов для насыщенного пара (В. С. Яблонский)	232
§ 1. Уравнение состояния пара	—
§ 2. Явление трения в паропроводах	233
§ 3. Расчетные формулы	235
§ 4. Местные потери давления в паропроводах	238
Задание 29. Эрлифт (воздушный подъемник жидкости) (Д. С. Вилькер)	—
§ 1. Схема устройства	—
§ 2. Теория проф. Г. Лоренца	241
§ 3. Теоретические и опытные формулы	246

Вязкоизмеритель (Д. С. Вилкер)	251
Вязкоизмеритель	253
Вязкоизмеритель	255
2. Переменные формулы	256
§ 4. Приспособление вискозиметра Энглера для очень вязких жидкостей и формулы А. А. Померанцева	258
§ 5. Формулы А. А. Померанцева для обычного вискозиметра Энглера	259
§ 6. Наиболее распространенные вискозиметры	261
§ 7. Тарировка вискозиметров	262
Задание 31. Измерение расхода (Д. С. Вилкер)	263
§ 1. Водомер Вентури	264
§ 2. Диафрагмовые счетчики	265
§ 3. Трубка Пито и Прандтля	269
§ 4. Водомеры и нефтемеры	269
Задание 32. Гидродинамическая теория смазки (В. С. Яблонский)	269
§ 1. Основные идеи Петрова и Рейнольдса	—
§ 2. Коэффициент смазочного трения	271
Г. Движение жидкостей и газов в пористых породах.	
Задание 33. Теория пористости (Л. С. Лейбензон)	273
§ 1. Геометрическая теория пористости	—
§ 2. Кинематическое рассмотрение движения жидкости через пористую среду	277
§ 3. Вывод формулы Сихтера для скорости фильтрации	280
§ 4. Опытные данные о пористости	284
Задание 34. Движение нефтей, грунтовых и артезианских вод и газов (Л. С. Лейбензон)	287
§ 1. Формула Дарси	—
§ 2. Грунтовые воды	288
§ 3. Артезианские воды	290
§ 4. Движение газов	292
Задание 35. Движение тела в восходящем потоке жидкости (Л. С. Лейбензон)	294
§ 1. Вывод основного уравнения	—
§ 2. Формула Стокса	295
§ 3. Турбулентный режим. Формула Риттингера	297
§ 4. Промежуточный режим. Формула Аллена	298
§ 5. Случай, когда жидкость есть чистая вода	—
§ 6. Случай, когда жидкость есть воздух	300
§ 7. Случай, когда жидкость есть грязевой раствор	—
Задание 36. Уравнения гидродинамики в общей форме (В. С. Яблонский)	301
§ 1. Уравнения Эйлера	—
§ 2. Уравнение сплошности потока	303
§ 3. Интеграл Бернулли	304

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Гидравликой называется наука, изучающая механические свойства, законы равновесия и законы движения *реальных жидкостей и газов*. В частности *нефтяная гидравлика* изучает главным образом механические свойства и движение нефтей и нефтепродуктов. Кроме того она исследует целый ряд гидравлических вопросов, связанных специально с *практикой нефтяного дела*. К числу таких вопросов относятся расчеты нефтепроводов, газопроводов, эрлифта, тепловая гидравлика, законы движения нефти в нефтеносном пласте и т. д.

При изучении всех этих вопросов в нефтяной гидравлике приходится иметь дело со следующими *основными величинами и понятиями*.

§ 1. Плотность.

Плотностью жидкости или газа называется количество массы этого вещества, заключающееся в единице объема.

Размерность величины плотности устанавливается из соотношения

$$M = \rho V, \quad (1)$$

где M — масса,

ρ — плотность,

V — объем.

Из этой формулы имеем:

$$[\rho] = \left[\frac{M}{L^3} \right]. \quad (2)$$

В системе *CGS* единицей массы является [грамм] (масса одного кубического сантиметра воды при 4°C), единицей длины — [см]. Таким образом единица плотности в системе *CGS* есть $\left[\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right]$.

Плотность бакинских сырых нефтей при температуре 15°C изменяется в пределах от 0,79 до 0,95 $\left[\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right]$, плотность грозненских нефтей — в пределах от 0,84 до 0,93.

Плотность нефтей (и их продуктов) уменьшается с повышением температуры. Если для какого-либо сорта нефти известна

плотность при температуре 16°C , которую обозначим через ρ_{16} . то при всякой другой температуре $t^{\circ}\text{C}$ плотность ρ_t можно найти довольно точно по формуле Менделеева:

$$\rho_t = \frac{\rho_{16}}{1 + \beta(t - 15)} \quad (3)$$

где β — коэффициент объемного расширения нефти.

Этот коэффициент зависит от величины ρ_{16} и может быть найден по следующей табличке:

ρ_{16}	0,70	0,80	0,85	0,90	0,92
β	0,00082	0,00077	0,00072	0,00064	0,00060

В технической литературе плотность нефтепродуктов очень часто дается в условных единицах, напр. в градусах Боме, определяемых с помощью ареометра Боме. Для пересчета этих градусов в нормальные единицы плотности существуют переводные формулы. В таблице 1 приведены формулы для шести различных систем измерения плотности с помощью ареометра Боме.

Таблица 1.

Система	Формула перевода		Нормальная температура, при которой калиброван ареометр
	для легких жидкостей	для тяжелых жидкостей	
1. Старая	$\rho = \frac{146,78}{146,78 + n}$	$\rho = \frac{146,78}{146,78 - n}$	$t = 17,5^{\circ}\text{C}$
2. Вторая старая	$\rho = \frac{146}{136 + n}$	—	$t = 12,5^{\circ}\text{C}$
3. Голландская	$\rho = \frac{144}{144 + n}$	$\rho = \frac{144}{144 - n}$	$t = 12,5^{\circ}\text{C}$
4. Рациональная	$\rho = \frac{144,3}{144,3 + n}$	$\rho = \frac{144,3}{144,3 - n}$	$t = 15^{\circ}\text{C}$
5. Американская	$\rho = \frac{140}{130 + n}$	$\rho = \frac{145}{145 - n}$	$t = 60^{\circ}\text{F}$
6. А. Р. I.	$\rho = \frac{141,5}{131,2 + n}$	—	$t = 60^{\circ}\text{F}$

§ 2. Удельный вес.

Уд. весом γ называется вес жидкости (или газа), содержащейся в единице объема. Размерность величины γ уд. веса находится из соотношения

$$G = \gamma \cdot V, \quad (4)$$

где G — вес.

Отсюда имеем:

$$[\gamma] = \left[\frac{\text{вес}}{\text{объем}} \right]. \quad (5)$$

Единицей для величины уд. веса в системе CGS служит $\left[\frac{\text{дина}}{\text{см}^3} \right]$ и в технической системе — $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

Деля равенство (5) на равенство (1), получаем следующее важное соотношение между величиной уд. веса и величиной плотности

$$\gamma = \rho g, \quad (6)$$

где g — ускорение силы тяжести (равно $981 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$ или $9,81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$). Таким образом величину уд. веса легко получить, зная величину плотности, и наоборот.

Для бакинских нефтей уд. вес в технической системе единиц колеблется в пределах от 790 до 950 $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$. Уд. вес воды равен $1000 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

§ 3. Удельный объем.

Объем, занимаемый единицей веса жидкости (или газа), называется уд. объемом.

Если 1 кг жидкости занимает объем v , то G кг займут объем в G раз больший:

$$V = v \cdot G. \quad (7)$$

Отсюда получаем:

$$v = \frac{V}{G} = \frac{1}{\gamma}.$$

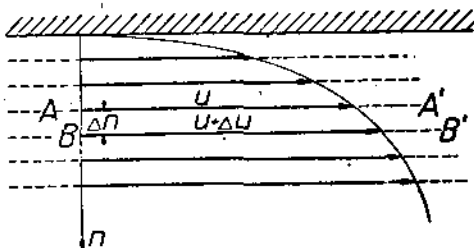
или

$$v\gamma = 1. \quad (8)$$

Таким образом удельный объем есть величина обратная уд. весу. Последнее соотношение весьма важное. Размерность величина уд. объема обратна размерности уд. веса. Единицей уд. объема в системе CGS является $\left[\frac{\text{см}^3}{\text{дина}} \right]$, а в технической системе — $\left[\frac{\text{м}^3}{\text{кг}} \right]$.

§ 4. Абсолютная вязкость.

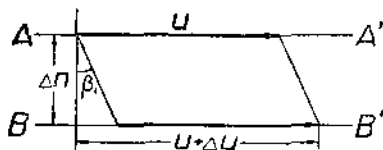
При движении жидкости (или газа) вдоль твердой стенки, частицы, находящиеся в непосредственном соприкосновении со стенкой, прилипают к ней и, следовательно, их скорость равна нулю; скорость близлежащих слоев, движущихся параллельно стенке, увеличивается по мере удаления от стенки (фиг. 1). Вследствие наличия относительной скорости в смежных слоях, между ними при движении возникают силы трения, тормозящие поток в направлении, обратном его скорости. Силу трения, возникающую между двумя слоями внутри жидкости на единице поверхности, называют интенсивностью или напряжением внутреннего трения.



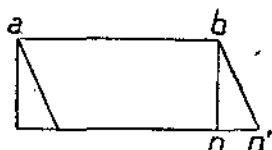
Фиг. 1.

Если слой взят непосредственно у стенки, то сила трения его о стенку на единицу ее площади представляет *напряжение трения у стенки*.

Силы трения являются одной из причин *гидравлического сопротивления* потока при движении его вдоль твердых стенок. Пусть слой AA' внутри жидкости, рассматриваемый как весьма тонкая жидкая пленка, имеет во всех своих точках одинаковую скорость u . Другой слой BB' , движущийся параллельно первому, имеет скорость $u + \Delta u$. Расстояние между слоями обозначим через Δn — оно отсчитывается по перпендикуляру к поверхностям слоев. Мы замечаем (фиг. 2 и 3), что в жидкости между ее слоями при движении имеет место процесс аналогичный деформации сдвига (в сопротивлении материалов). Величине абсолютного сдвига nn'



Фиг. 2.



Фиг. 3.

соответствует абсолютное приращение скорости в слое BB' , именно Δu . Величине относительного сдвига $\beta = \frac{nn'}{ab}$ соответствует относительное изменение скорости $\beta_1 = \frac{\Delta u}{\Delta n}$. Из теории сопротивления материалов мы знаем, что величина напряжения τ при сдвиге прямо пропорциональна величине относительного сдвига

$$\tau = G \cdot \beta,$$

где G — модуль сдвига (II рода).

По аналогии в гидравлике приходим к заключению, что при движении вязкой жидкости вдоль твердых стенок напряжение τ сил внутреннего трения между слоями по величине будет прямо пропорционально относительному изменению скорости β_1 :

$$\tau = \mu \cdot \beta_1,$$

или

$$\tau = \mu \cdot \frac{\Delta u}{\Delta n}, \quad (9)$$

где μ — коэффициент пропорциональности.

Точно так же как величина G в сопротивлении материалов характеризует упругие свойства металлов, величина μ в гидравлике, очевидно, должна характеризовать *вязкие свойства* жидкостей и поэтому она называется *коэффициентом абсолютной вязкости*.

Если слои взять бесконечно близкие друг к другу, то разность в скоростях Δu будет также бесконечно малой. Таким образом для напряжения трения в слое, находящемся на расстоянии n от стенки, получаем следующее фундаментальное соотношение Ньютона

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}. \quad (9')$$

Итак напряжение силы трения внутри потока прямо-пропорционально первой производной от скорости по направлению перпендикулярному скорости.

Рассмотрим размерность коэффициента абсолютной вязкости. Размерность напряжения τ равна

$$[\tau] = \left[\frac{\text{сила}}{L^2} \right];$$

поэтому из равенства (9') находим:

$$[\mu] = \left[\frac{\tau \cdot \Delta n}{\Delta u} \right] = \left[\frac{\text{сила} \cdot L \cdot T}{L^2 \cdot L} \right] = \left[\frac{\text{сила} \cdot T}{L^2} \right]. \quad (10)$$

Таким образом в системе CGS для измерения величины абсолютной вязкости служит единица $\left[\frac{\text{дина} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} \right]$, которая носит название „пуаз“.

В технической системе единицей для измерения абсолютной вязкости является $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \right]$.

Между этими единицами существует следующее соотношение:

$$\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{981\,000 \text{ дина} \cdot \text{сек}}{(100 \text{ см})^2} \right] = 98,1 \left[\frac{\text{дина} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} \right]. \quad (11)$$

Таким образом, если абсолютная вязкость какого-либо продукта в системе CGS равна $\mu = 0,5 \left[\frac{\text{дина} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} \right]$, то в технической системе она будет равна $\mu = \frac{0,5}{98,1} \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \right]$.

§ 5. Кинематическая вязкость.

Отношение величины абсолютной вязкости μ к величине плотности жидкости (или газа) ρ называется *кинематической вязкостью* и обозначается обычно через ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (12)$$

Внося сюда ρ из формулы (6), получим:

$$\nu = \frac{\mu g}{\gamma}. \quad (13)$$

Находим размерность кинематической вязкости

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\rho} \right] = \left[\frac{\text{сила} \cdot T \cdot L^3}{L^2 \cdot M} \right] = \left[\frac{MLTL^3}{T^2L^2M} \right] = \left[\frac{L^2}{T} \right]. \quad (14)$$

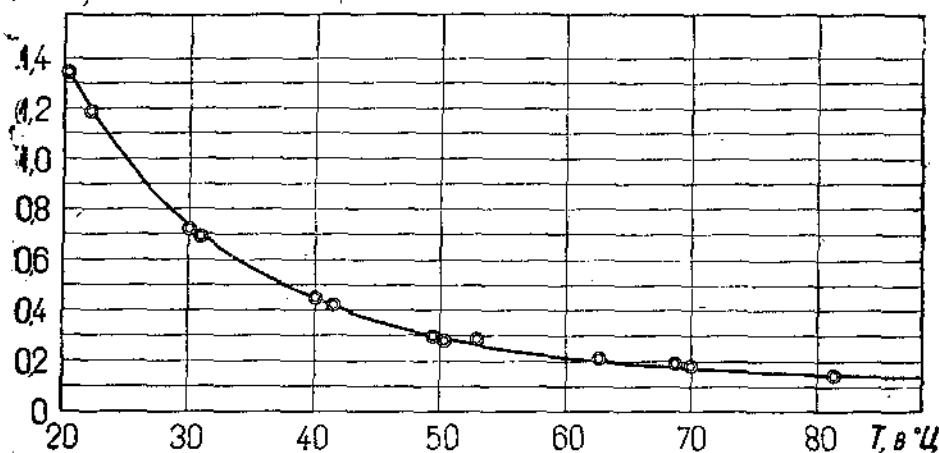
Таким образом единицей для измерения кинематической вязкости в системе CGS служит $\left[\frac{\text{см}^2}{\text{сек}} \right]$ и в технической системе — $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right]$.

Связь между этими единицами такова:

$$\left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right] = \left[\frac{(100 \text{ см})^2}{\text{сек}} \right] = 10\,000 \left[\frac{\text{см}^2}{\text{сек}} \right]. \quad (15)$$

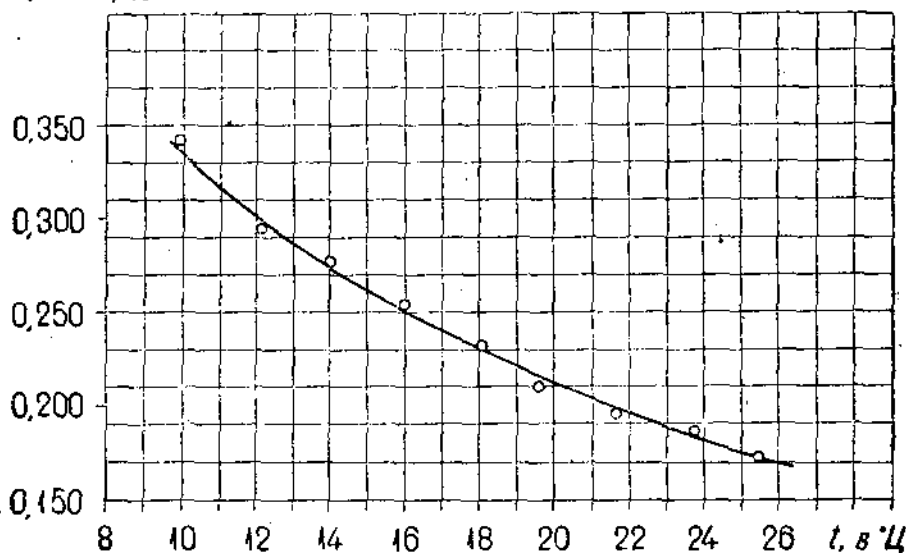
Величину кинематической (или абсолютной) вязкости находят обычно опытным путем. Существует несколько систем вискозиметров, с помощью которых определяется вязкость в некоторых эмпирических градусах. Эти градусы по таблицам или формулам пере-

ν , в $\text{см}^2/\text{сек}$.



Фиг. 4. Макальская нефть (по вискозиметру для высоких температур).

ν , в $\text{см}^2/\text{сек}$.



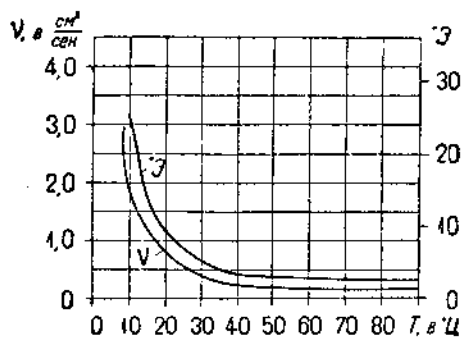
Фиг. 5. Доссорская нефть.

водятся в единицы абсолютной или кинематической вязкости. Одним из наиболее распространенных приборов для определения вязкости является вискозиметр Энглера (и Оствальда).¹ Зная

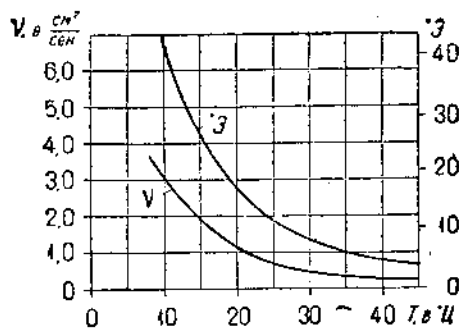
¹ См. задание 30.

вязкость нефтепродукта, выраженную в градусах Энглера ($^{\circ}E$), можно по формуле Уббелюде перейти к кинематической вязкости:

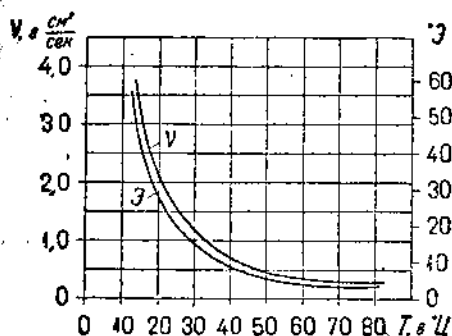
$$\nu = 0,0731 E - \frac{0,0631}{E} \quad (16)$$



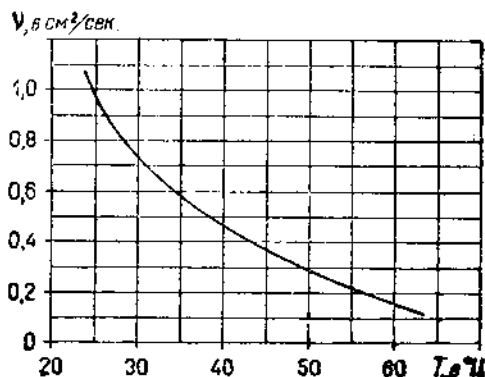
Фиг. 6. Мазут парафинистый марки „В“ (Нефтьсидкат).



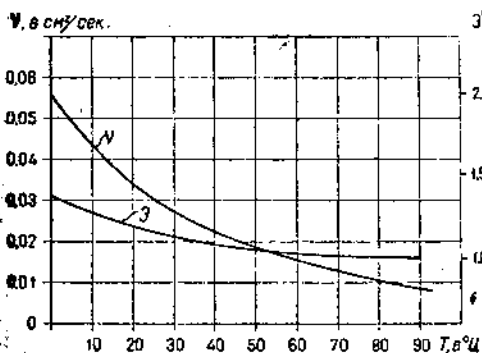
Фиг. 7. Мазут парафинистый марки „А“.



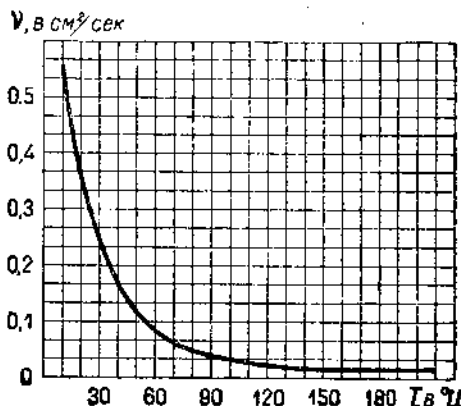
Фиг. 8. Мазут парафинистый марки „В“ (представленный МОГАС'ом).



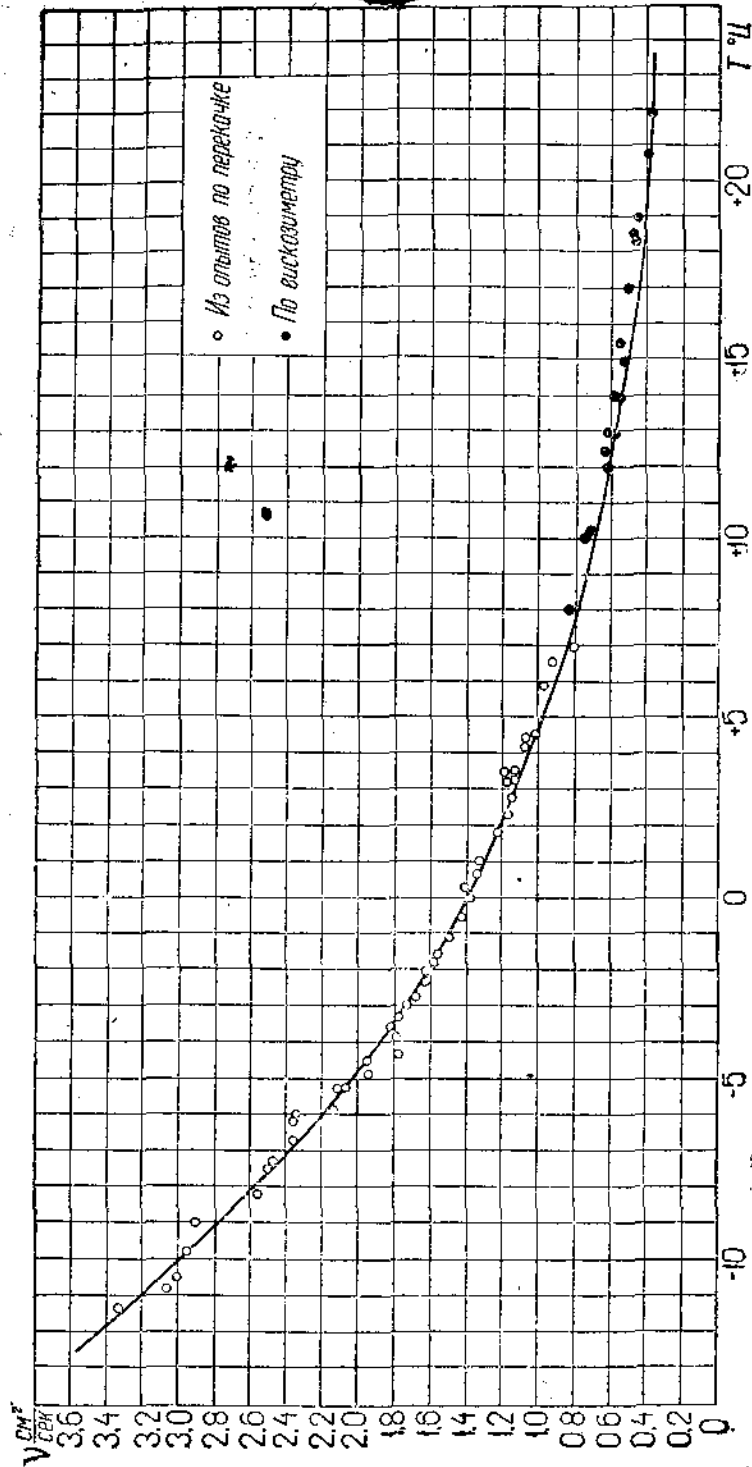
Фиг. 9. Мазут балаханский топочный.



Фиг. 10. Керосин.



Фиг. 11. Нефть балаханская легкая.



Фиг. 12. Нефть мажутская (эмбенская).

Надо иметь в виду, что по этой формуле значение ν получается в системе CGS, т.е. в единицах $\left[\frac{\text{см}^2}{\text{сек}} \right]$.

Пусть, напр., вязкость для какого-либо нефтепродукта по вискозиметру Энглера равна 5. Тогда

$$\nu = 0,0781 \cdot 5 - \frac{0,0831}{5} = 0,3529 \left[\frac{\text{см}^2}{\text{сек}} \right] = 0,3529 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right].$$

Численное значение кинематической (и абсолютной) вязкости для всех нефтей и нефтепродуктов зависит от температуры. Эта зависимость особенно сильна вблизи температур застывания. С возрастанием температуры вязкость убывает. Выше приведены графики (фиг. 4—12) изменения вязкости в зависимости от температуры для разных нефтепродуктов.

Ход вышеприведенных кривых может быть представлен в виде эмпирических формул. Опыты показали, что вязкость возрастает с увеличением давления (при постоянной температуре). Однако в области практически применяющихся давлений (в нефтепроводах) этой зависимостью можно пренебрегать.

§ 6. Сжимаемость.

Газы при сдавливании сжимаются, подчиняясь закону Марриотта:

$$p \cdot V = \text{const},$$

где p — давление на единицу поверхности.

Жидкости же даже при сильном сдавливании практически не меняют своего объема. Поэтому жидкости почти всегда можно предполагать несжимаемыми. Так, напр., при увеличении давления на одну атмосферу объем бензина уменьшается только на 0,000082 первоначального объема. Для бензола соответствующее уменьшение объема составляет 0,000082 и для воды 0,000074. С возрастанием давления сжимаемость уменьшается.

§ 7. Поверхностное натяжение и капиллярность.

На границе соприкосновения двух жидкостей или между жидкостью и твердым телом всегда действуют молекулярные силы, стремящиеся уменьшить свободную поверхность жидкости (поверхностное натяжение). Последнее является причиной сферической формы свободных капель жидкости. В случае соприкосновения жидкости и твердого тела поверхностное натяжение, стремясь уменьшить площадь свободной поверхности, вызывает более или менее значительное поднятие (или опускание) всей массы жидкости (капиллярный эффект). Так, напр., в капиллярных трубках с диаметром d (мм) вода поднимается на высоту $h \cong \frac{30}{d}$ (мм).

Между пластинками с расстоянием a (мм) вода поднимается на высоту $h \cong \frac{15}{a}$ (мм).

§ 8, Теплоемкость

а) Количество тепла, которое необходимо затратить для того, чтобы температуру единицы массы жидкости (или газа при постоянном объеме) поднять на 1°Ц , называется *теплоемкостью, отнесенной к единице массы*. Эта величина находится из соотношения

$$Q = c_m M (T_2 - T_1), \quad (17)$$

где M — масса и Q — тепло, затраченное для подъема температуры от T_1 до T_2 $^\circ \text{Ц}$, отсюда размерность:

$$[c_m] = \left[\frac{Q}{M (T_2 - T_1)} \right] = \left[\frac{\text{теплота}}{\text{масса} \cdot \text{температура}} \right]. \quad (18)$$

За единицу теплоемкости, отнесенной к единице массы в системе CGS, примем $\left[\frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot ^\circ \text{Ц}} \right]$ (где кал — малая калория).

б) Количество тепла, которое необходимо затратить для того, чтобы температуру жидкости (или газа) в единице объема поднять на 1°Ц , называется *теплоемкостью, отнесенной к единице объема*. Эта величина находится из соотношения

$$Q = c_v \cdot V \cdot (T_2 - T_1). \quad (19)$$

Отсюда размерность

$$[c_v] = \left[\frac{\text{теплота}}{\text{объем} \cdot \text{температура}} \right]. \quad (20)$$

За единицу теплоемкости, отнесенной к единице объема в системе CGS, примем $\left[\frac{\text{кал}}{\text{см}^3 \cdot ^\circ \text{Ц}} \right]$

и в технической системе

$$\left[\frac{\text{Кал}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ \text{Ц}} \right].$$

Между этими единицами имеем соотношение

$$\left[\frac{\text{Кал}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ \text{Ц}} \right] = \left[\frac{1000 \text{ кал}}{(100 \text{ см})^3 \cdot ^\circ \text{Ц}} \right] = \frac{1}{1000} \left[\frac{\text{кал}}{\text{см}^3 \cdot ^\circ \text{Ц}} \right].$$

с) Количество тепла, которое необходимо затратить для того, чтобы температуру единицы веса жидкости (или газа) поднять на 1°Ц , называется *теплоемкостью, отнесенной к единице веса*. Имеем:

$$Q = c_g \cdot G (T_2 - T_1) \quad (21)$$

и размерность:

$$[c_g] = \left[\frac{\text{теплота}}{\text{вес} \cdot \text{температура}} \right]. \quad (22)$$

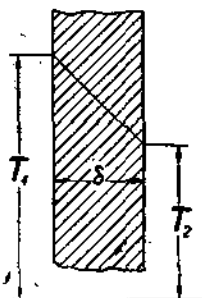
В системе CGS для c_g имеем единицу $\left[\frac{\text{кал}}{\text{дина} \cdot ^\circ \text{Ц}} \right]$ и в технической $\left[\frac{\text{Кал}}{\text{кг} \cdot ^\circ \text{Ц}} \right]$.

Между этими единицами имеем связь:

$$\left[\frac{\text{Кал}}{\text{кг} \cdot ^\circ \text{Ц}} \right] = \left[\frac{1000 \text{ кал}}{981 \cdot 000 \text{ дина} \cdot ^\circ \text{Ц}} \right] = \frac{1}{981} \left[\frac{\text{кал}}{\text{дина} \cdot ^\circ \text{Ц}} \right].$$

Предположим, что мы имеем плоскую стенку из однородного материала, площадь которой равна F и толщина δ . Пусть одна сторона этой стенки поддерживается при температуре T_1 , а другая при температуре T_2 (фиг. 13). Тогда количество тепла Q , проходящее через стенку (с одной стороны на другую), будет пропорционально разности температур ($T_1 - T_2$), пропорционально площади F и времени теплопередачи t и обратно пропорционально толщине стенки δ . Таким образом имеем формулу для количества тепла:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \cdot F (T_1 - T_2) \cdot t, \quad (23)$$



Фиг. 13.

где λ — фактор пропорциональности, называемый *коэффициентом теплопроводности стенки*. Очевидно он представляет собой то количество тепла, которое проходит в секунду через единицу площади стенки, толщина которой равна единице длины при разности температур в один градус.

Из формулы (23) получаем размерность коэффициента теплопроводности

$$[\lambda] = \left[\frac{\text{теплота}}{\text{длина} \cdot \text{время} \cdot \text{температура}} \right]. \quad (24)$$

Таким образом в системе CGS для величины теплопроводности стенки имеем единицу $\left[\frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right]$ и в технической системе $\left[\frac{\text{Кал}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right]$.

Эти величины связаны соотношением

$$\left[\frac{\text{Кал}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right] = \left[\frac{1000 \text{ кал}}{100 \text{ см} \cdot \text{сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right] = 10 \left[\frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right].$$

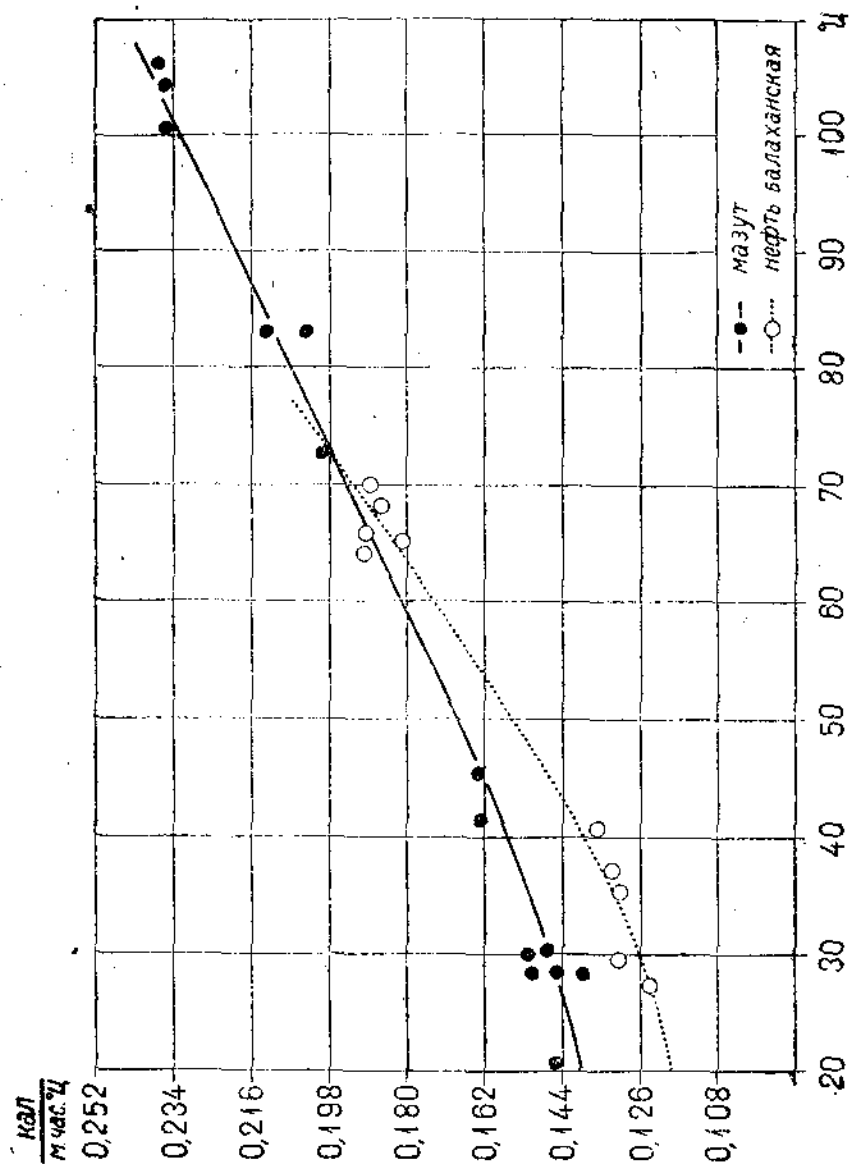
В практике для измерения величины теплопроводности пользуются так называемой *тепловой единицей*

$$\left[\frac{\text{Кал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right],$$

причем:

$$\left[\frac{\text{Кал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right] = \left[\frac{1000 \text{ кал}}{100 \text{ см} \cdot 3600 \text{ сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right] = \frac{1}{360} \left[\frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot ^\circ\text{Ц}} \right].$$

Ниже в качестве примера приведены значения коэффициента теплопроводности для мазута и балаханской нефти (см. фиг. 14).



Фиг. 14. Коэффициенты теплопроводности.

Значения коэффициента теплопроводности для некоторых тел приведены в нижеследующей таблице:

		кал	
		см. сек.	°Ц
Стекло	0,00163		
Инфузорная земля	0,00025	"	
Мед	0,0022	"	
Шлак	0,0003	"	
Свек	0,0005	"	
Каменная соль	0,0120	"	
Асфальт	0,00156	"	
Древесные стружки	0,00015	"	
Перья	0,000057	"	
Эбонит	0,00038	"	
Волос	0,00012	"	
Пробка (плстина)	0,000153	"	

Данные о коэффициентах теплопроводности различных жидкостей и твердых тел можно найти в немецком справочнике Physikalisch-chemische Tabellen, II, Landolt-Börnstein.

РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТЕЙ.

§ 1. Гидростатическое давление в жидкости и его свойства.

Гидростатика есть отдел гидравлики, изучающий законы равновесия (покоя) жидкостей и газов.

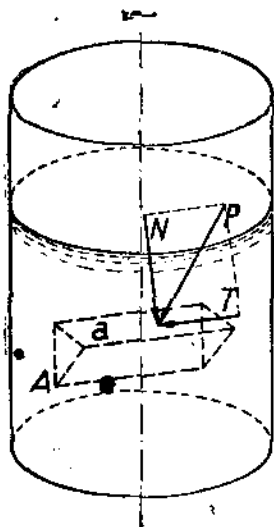
Рассматривая механические свойства жидкостей, мы будем распространять на нее известные из курса теоретической механики основные положения статики абсолютно твердого тела. Поэтому постановка проблем и метод их решения будут заимствоваться нами из богатой этим опытом теоретической и прикладной механики.

Чтобы составить себе представление о равновесии какого-нибудь тела вне зависимости от его состояния, необходимо выяснить, какие силы действуют на выбранный нами объект.

Итак, пусть мы имеем сосуд, наполненный какой-нибудь вязкой жидкостью, и жидкость эта находится в равновесии (см. фиг. 15). Выделим из жидкого ядра призматический элемент A и рассмотрим условия его равновесия внутри жидкости. Для этой цели мы должны будем приложить все те силы, с которыми остальная жидкость действует на элемент A . Докажем, что силы эти будут направлены перпендикулярно к граням призм. В самом деле, если бы на грань a действовала бы какая-нибудь наклонная

сила P , то ее можно было бы разложить на две составляющие: одну—лежащую в плоскости грани a (касательную силу T), а другую—совпадающую с нормалью к этой плоскости (нормальную силу N). Сила, лежащая в плоскости a , стремится сдвинуть частицы жидкости, лежащие на этой грани, и тем самым нарушить равновесие жидкости. Таким образом, если жидкость находится в равновесии, то касательные усилия в жидкости отсутствуют.

Обозначим через N нормальную силу, действующую на плоскость a , и пусть она содержит N единиц силы (напр. килограмм-



Фиг. 15.

мов), а грань a содержит F квадратных единиц (напр. кв. сантиметров). Тогда отношение

$$p_n' = \frac{N}{F}$$

называют средним напряжением гидростатического давления.

При беспределённом уменьшении размеров призмы и, следовательно, ее граней уменьшаться будут и силы, действующие на них, однако отношение $N:F$ будет стремиться к некоторому пределу и будет характеризовать напряжение гидростатического давления в точке. В дальнейшем эту величину мы будем называть гидростатическим давлением и будем обозначать буквой p . Из соотношения $N:F$ следует, что гидростатическое давление измеряется в единицах силы, отнесенных к единице площади (напр., в килограммах на кв. сантиметр), совершенно аналогично измерению напряжения в теории сопротивления материалов.

Покажем, что гидростатическое давление в какой-нибудь произвольной точке жидкости сохраняет свою величину независимо от выбранного нами направления. Иначе говоря, докажем, что как бы мы ни проводили через данную точку плоскость, величина давления на ней будет одна и та же.

Для доказательства этого положения из жидкого ядра, находящегося в равновесии, выделим элементарный тетраэдр. Операцию эту произведем так: через данную точку M (см. фиг. 16) проведем оси координат $Mxyz$.

Пересечем эти оси наклонной плоскостью abc так, что $Ma = dx$; $Mb = dy$ и $Mc = dz$ суть произвольные бесконечно-малые отрезки на осях. Обозначим через n направление внутренней нормали к плоскости abc , и через α , β и γ углы, которые образует направление нормали с осями координат.

К получившемуся при этом элементарному тетраэдру приложим все действующие силы.

Эти силы можно подразделить на массовые (или объемные) и поверхностные. К первым относится сила тяжести, которая очевидно пропорциональна объему тетраэдра

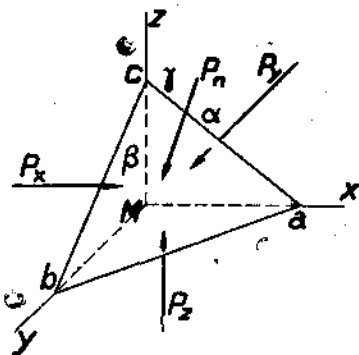
$$\frac{1}{6} dx dy dz,$$

т. е. величине третьего порядка малости. К поверхностным силам мы относим силы гидростатического давления, которые пропорциональны площадям граней, напр.

$$\frac{1}{2} dx dz,$$

т. е. величине второго порядка малости.

Исходя из этого, мы отбросим из рассмотрения массовые силы. Приложим к граням тетраэдра $Mabc$ силы P_x , P_y , P_z и P_n , пред-



Фиг. 16.

ставляющие нормальные силы давления на тетраэдр, возникающие со стороны остальной жидкости. Тогда по определению величины

$$\left. \begin{aligned} p_x' &= \frac{P_x}{\text{пл. } \triangle Mbc} = \frac{P_x}{\frac{1}{2} dydz} \\ p_y' &= \frac{P_y}{\text{пл. } \triangle Mac} = \frac{P_y}{\frac{1}{2} dzdx} \\ p_z' &= \frac{P_z}{\text{пл. } \triangle Mab} = \frac{P_z}{\frac{1}{2} dxdy} \\ p_n' &= \frac{P_n}{\text{пл. } \triangle abc} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будут характеризовать средние напряжения гидростатического давления по *четырем различным направлениям*.

При беспределённом уменьшении размеров тетраэдра выражения (1) в пределе будут соответственно равны p_x , p_y , p_z и p_n гидростатическим давлениям в точке M по *четырем различным направлениям*. Нам остается показать, что эти четыре величины равны между собой. Для этого выразим силы, действующие на гранях тетраэдра P_x , P_y , P_z и P_n , через соответствующие средние напряжения. Из уравнений (1) имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= p_x' \cdot \frac{1}{2} dydz \\ P_y &= p_y' \cdot \frac{1}{2} dzdx \\ P_z &= p_z' \cdot \frac{1}{2} dxdy \\ P_n &= p_n' \cdot \text{пл. } \triangle abc \end{aligned} \right\}$$

Составим три условия равновесия пространственной системы сил, для чего спроектируем все силы последовательно на три координатные оси и полученные суммы приравняем нулю. В проекции на ось x получим:

$$p_x' \cdot \frac{1}{2} dydz - p_n' \cdot \text{пл. } \triangle abc \cdot \cos \alpha = 0,$$

но

$$\text{пл. } \triangle abc \cdot \cos \alpha = \text{пл. } \triangle Mbc = \frac{1}{2} dydz,$$

следовательно,

$$p_x' \cdot \frac{1}{2} dydz - p_n' \cdot \frac{1}{2} dydz = 0,$$

откуда по сокращении имеем

$$p_x' = p_n'.$$

Точно так же можно доказать, что $p'_y = p'_x = p'_z$ и, следовательно, в пределе мы будем иметь

$$p_x = p_y = p_z = p,$$

что и требовалось доказать.

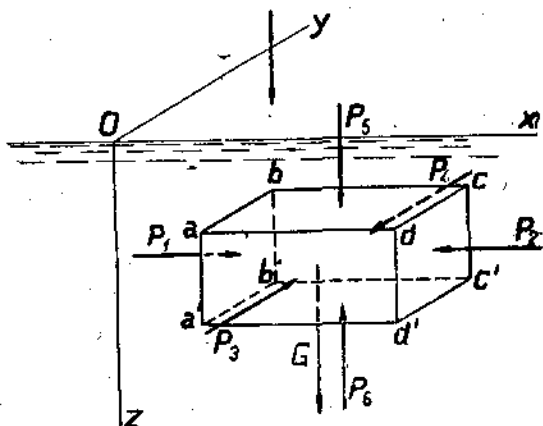
§ 2. Закон Паскаля.

В то время как гидростатическое давление в какой-нибудь точке покоящейся жидкости не зависит от выбора направления, давление в другой точке будет, вообще говоря, другим. Другими словами, гидростатическое давление есть функция координат, т. е.

$$p = f(x, y, z).$$

Найдем один закон распределения давлений внутри неподвижной жидкости. Пусть мы имеем сосуд с жидкостью удельного веса γ (см. фиг. 17). Расположим начало координат O где-нибудь на поверхности жидкости. Ось z направим вниз по вертикали, тогда оси Ox и Oy и, следовательно, плоскость xOy будут совпадать с поверхностью уровня. Рассмотрим силы, действующие на различные элементы жидкости.

Сверху на поверхность жидкости давит воздух (атмосферное давление). На частицы жидкого тела, расположенные ниже, к этому давлению будет прибавляться действие веса вышележащих частиц жидкости. Покажем, что гидростатическое давление в покоящейся тяжелой жидкости изменяется лишь в вертикальном направлении, т. е. что p есть функция одной координаты z . Для доказательства этого положения выделим из жидкости прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, и приложим к полученному элементу все силы.



Фиг. 17.

Рассматриваемый элемент находится под действием следующих сил:

1. Сила тяжести (вес элемента) G , пропорциональная объему элемента и направленная по вертикали вниз (параллельно оси z).
2. Силы гидростатические (давление окружающей жидкости на рассматриваемый элемент). Сил этих будет шесть—столько, сколько граней. Направлены они будут перпендикулярно соответственным граням.

а) Силы P_1 и P_2 , параллельные оси x и действующие соответственно на грани $abb'a'$ и $dcdd'$.

б) Силы P_1 и P_2 , параллельные оси y и действующие на площади $add'a'$ и $bcc'b'$.

в) Силы P_4 и P_5 , параллельные оси z , действующие на грани $add'a'$ и $bcc'b'$.

Поскольку рассматриваемый элемент находится в равновесии, то в соответствии с известной теоремы статики приравняем нулю суммы проекций действующих сил на координатные оси, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_1 - P_2 &= 0 \\ P_4 - P_5 &= 0 \\ P_5 - P_6 - G &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ P_4 &= P_5 \\ P_6 &= P_5 + G. \end{aligned}$$

Первые два равенства указывают, что давления на вертикальных гранях попарно равны. Кроме того мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{пл.}(abb'a') &= \text{пл.}(cdd'c') \\ \text{пл.}(add'a') &= \text{пл.}(bcc'b') \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Деля почленно первые два уравнения (2) соответственно на выражения (3), мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= p_2' \\ p_4' &= p_5' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

т. е. средние гидростатические давления на вертикальных гранях будут также попарно равны.

Из последнего равенства следует, что давление на горизонтальных площадях различно, а именно

$$P_6 > P_5.$$

Принимая во внимание, что

$$\text{пл.}(abcd) = \text{пл.}(a'b'c'd'),$$

мы найдем, что среднее гидростатическое давление при переходе к нижним слоям также возрастает:

$$p_5' > p_6'. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) показывают, что среднее гидростатическое давление не изменяется ни в направлении оси x , ни в направлении оси y и является только функцией высоты слоя z .

Сказанное выше о среднем гидростатическом давлении будет справедливо и для гидростатического давления в точке, так как при беспредельном уменьшении размеров параллелепипеда последний обращается в точку.

Найдем, наконец, по какому закону меняется гидростатическое давление в жидкости, т. е. определим вид функции

$$p = f(z).$$

Для этого предположим, что размеры параллелепипеда будут таковы:

$$bc = dx; ab = dy; aa' = dz.$$

Тогда объем его будет равен

$$dxdydz$$

и вес

$$G = \gamma \cdot dxdydz. \quad (6)$$

Кроме того очевидно

$$\text{пл.}(abcd) = \text{пл.}(a'b'c'd') = dxdy,$$

и, следовательно,

$$P_5 = p_5 dxdy \text{ и } P_6 = p_6 dxdy. \quad (7)$$

Внося выражения (6) и (7) в последнее уравнение (2), найдем:

$$p_5 dxdy = p_6 dxdy + \gamma dxdydz,$$

откуда, после упрощений,

$$p_5 - p_6 = \gamma dz.$$

Левая часть последнего выражения представляет изменение давления в жидкости при переходе от одного уровня к другому, находящемуся от первого на расстоянии dz . Так как гидростатическое давление есть функция координаты z (аргумент), то при бесконечно малом изменении этой последней (dz) функция получает также бесконечно-малое приращение dp . Таким образом

$$p_5 - p_6 = dp = \gamma dz. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение, мы найдем:

$$p = \gamma z + C. \quad (9)$$

Постоянную C определим из условия на границе. Так как в начале оси z (при $z = 0$) в точке O давление равно атмосферному давлению p_a , то

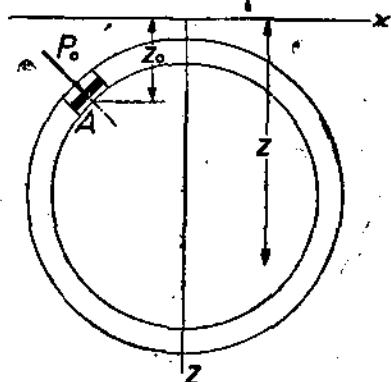
$$p_a = C,$$

и, следовательно,

$$p = \gamma z + p_a. \quad (10)$$

Следует заметить, что уравнение (9) будет справедливо также для всякого другого сосуда.

Пусть, напр., мы имеем сосуд (фиг. 18), наполненный жидкостью. При помощи поршня в точке A на жидкость производится давление p_0 , причем координата точки A равна z_0 .



Фиг. 18.

Это условие можно записать так:

$$p = p_0 \text{ при } z = z_0.$$

Удовлетворяя этим условиям, мы перепишем уравнение (9) в следующем виде:

$$p_0 = \gamma z_0 + C. \quad (11)$$

Вычитая почленно из уравнения (9) выражение (11), имеем:

$$p - p_0 = (z - z_0) \gamma$$

или

$$p = p_0 + (z - z_0) \gamma. \quad (12)$$

Из последнего равенства следует, что при изменении давления в точке A , т. е. при изменении p_0 , давление во всякой другой точке жидкости изменится на ту же величину, — это составляет закон Паскаля.

§ 3. Пьезометрическая высота.

Разделим обе части уравнения (12) на γ , получим:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = z - z_0. \quad (13)$$

Частное от деления гидростатического давления на уд. вес жидкости имеет размерность длины. В самом деле

$$[p] = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$$

$$[\gamma] = \frac{\text{сила}}{\text{объем}},$$

откуда

$$\left[\frac{p}{\gamma} \right] = \frac{\text{сила} \cdot \text{объем}}{\text{площадь} \cdot \text{сила}} = \text{длина}.$$

Размерность длины имеет также и правая часть. Правая часть выражения представляет высоту, соответствующую разности давлений $p - p_0$ и называется *пьезометрической высотой*.

§ 4. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах.

Пусть мы имеем два открытых сосуда, сообщающихся между собой при помощи трубки (фиг. 19) и заполненные однородной жидкостью. Определим давление в какой-нибудь точке O . Располагая в этой точке начало координат, обозначим через z_1 и z_2 координаты поверхностей уровня в сосудах I и II .

Рассматривая точку O как принадлежащую поочередно сосудам I и II , мы можем на основании формулы (10) написать два выражения для давления:

$$p_1 = p_s + \gamma z_1$$

$$p_2 = p_s + \gamma z_2.$$

Так как жидкость находится в равновесии, то в точке Q давление $p_1 = p_2$ и, следовательно,

$$z_1 = z_2,$$

т.е. в открытых сообщающихся сосудах, заполненных однородной жидкостью, последняя располагается на одинаковых уровнях.

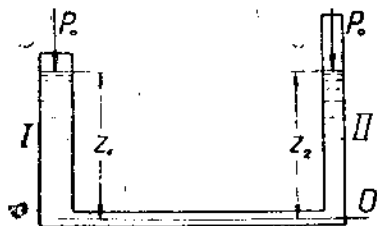
Если один из сосудов будет закрыт (напр., сосуд I) и давление над поверхностью жидкости в нем пусть равно p_0 то из условия равенства давлений $p_1 = p_2$ в точке Q найдем:

$$p_0 + \gamma z_1 = p_a + \gamma z_2$$

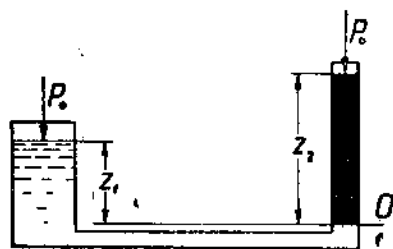
или

$$\frac{p_0 - p_a}{\gamma} = z_2 - z_1.$$

В этом случае разность высот уровней в сосудах будет характеризоваться пьезометрической высотой.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

Пусть, наконец, оба сосуда открыты и наполнены различными несмешивающимися жидкостями уд. весов γ_1 и γ_2 (см. фиг. 20). Расположим начало координат O на границе раздела этих двух жидкостей.

Тогда для гидростатического давления в точке O можно написать следующие два уравнения:

$$p_1 = p_0 + \gamma_1 z_1,$$

$$p_2 = p_0 + \gamma_2 z_2.$$

Из условия покоя имеем поперемногу

$$p_1 = p_2$$

и, следовательно,

$$p_0 + \gamma_1 z_1 = p_0 + \gamma_2 z_2,$$

откуда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

т.е. высоты жидкостей, отсчитываемые от поверхностей их раздела, обратно-пропорциональны уд. весам.

§ 5. Равновесие тяжелого газа.

При решении этой задачи мы будем предполагать, что рассматриваемый газ—газ идеальный, для которого мы можем написать характеристическое уравнение Клайперона

$$pv = RT,$$

где R —постоянная Реньо и T —абсолютная температура газа. Заменяя здесь уд. объем v через уд. вес газа γ , найдем:

$$\gamma = \frac{p}{RT}.$$

Последнее равенство дает закон изменения уд. веса газа в зависимости от давления и абсолютной температуры.

Возвращаясь к дифференциальному уравнению равновесия жидкости (8), мы напомним последнее для случая тяжелого газа в следующем виде:

$$dp = \frac{p}{RT} dz.$$

Разделяя переменные, найдем:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\ln p = \frac{z}{RT} + C. \quad (14)$$

Для определения постоянной C мы должны знать давление p_0 в какой-нибудь точке z_0 , тогда

$$\ln p_0 = \frac{z_0}{RT} + C. \quad (15)$$

Вычитая почленно равенство (15) из уравнения (14), получим:

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{z - z_0}{RT}, \quad (16)$$

откуда

$$\frac{p}{p_0} = l^{\frac{z - z_0}{RT}}. \quad (17)$$

Это и есть уравнение изотермического равновесия тяжелого газа.

§ 6. Формула Лапласа-Бабине.

Пользуясь уравнением равновесия тяжелого газа, можно дать простую формулу, позволяющую производить барометрическое нивелирование, т.е. по показаниям барометров в каких-нибудь двух точках определять разность их высот над уровнем моря.

Из анализа известно,¹ что

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Обозначив

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1-x}{1+x},$$

найдем:

$$x = \frac{p-p_0}{p+p_0}$$

и, следовательно,

$$\ln \frac{p}{p_0} = 2 \left[\frac{p-p_0}{p+p_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-p_0}{p+p_0} \right)^3 + \dots \right].$$

Если отношение

$$\frac{p}{p_0} = \frac{10}{9},$$

то член

$$\frac{2}{3} \left(\frac{p-p_0}{p+p_0} \right)^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{19} \right)^3 < 0,0001,$$

в то время как первый член разложения

$$2 \left(\frac{p-p_0}{p+p_0} \right) = \frac{2}{19} = 0,1052.$$

Отбрасывая второй член разложения, мы сделаем таким образом ошибку менее 0,1%.

Итак формулу (16) можно переписать:

$$\frac{z-z_0}{RT} = 2 \frac{p-p_0}{p+p_0}.$$

Обозначив через $\bar{p}$ среднее давление в двух измеряемых точках, т. е. полагая

$$p = \frac{p+p_0}{2}$$

и через

$$\gamma = \frac{p}{RT}$$

(18)

средний уд. вес атмосферного воздуха получим

$$z-z_0 = \frac{p-p_0}{\gamma}. \quad (19)$$

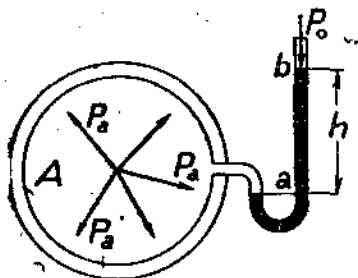
§ 7. Манометры, пнеуметры и вакуумметры.

Для определения абсолютного гидростатического давления в какой-нибудь точке или разности давлений пользуются различными приборами, главнейшие из которых суть:

1. Манометр. Манометры бывают жидкостные и пружинные. Жидкостные манометры имеют следующее устройство: V-образ-

¹ См. Hütte, т. I, стр. 80, 1918.

ная трубка, открытая с обоих концов, заполняется какой-нибудь жидкостью уд. веса γ . Один конец этой трубки присоединяется к аппарату, в котором следует определить гидростатическое давление (см. фиг. 21). Под давлением паров жидкость в левом колене опустится, а в правом поднимется на некоторую высоту. Если при этом наступит равновесие, то по разности высот менисков можно судить о давлении пара в резервуаре А. В самом деле в точке а давление пара p_a уравнивается давлением жидкости, которое складывается из давления p_0 на открытую поверхность жидкости в точке б и давлением столба $h\gamma$, т. е.



Фиг. 21.

$$p_a = p_0 + h\gamma. \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует, что

$$h = \frac{p_a - p_0}{\gamma}.$$

Следовательно, при малом уд. весе жидкости в манометре малому изменению p_a давления пара в сосуде А будут соответствовать большие изменения высоты h и наоборот.

Таким образом для регистрации и измерения малых колебаний давления следует пользоваться жидкостями малых уд. весов (напр., спирт $\gamma = 0,79$). В случае, если надо измерить большую разность давлений, то применять для манометров легкие жидкости становится невозможным. В самом деле пусть в котле А давление равно 10 атм., т. е.

$$p_a = 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \text{ и } p_0 = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

тогда

$$h = \frac{10 - 1}{\gamma},$$

причем в этой формуле γ следует выражать в $\text{кг}/\text{см}^3$. Если в качестве жидкости мы выберем воду, т. е.

$$\gamma = 0,001 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$$

(1 грамм воды занимает объем 1 см^3), тогда

$$h = \frac{10 - 1}{0,001} = 9000 \text{ см, или } h = 90 \text{ м.}$$

Пользоваться таким манометром, конечно, будет невозможно, не говоря уже о том, что сооружение его потребовало бы специального помещения.

Применяя в этом манометре ртуть

$$\gamma = 0,0136 \text{ кг}/\text{см}^3,$$

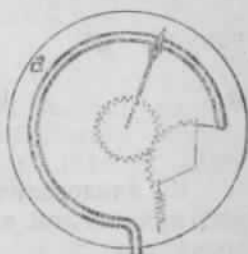
мы найдем:

$$h = \frac{10 - 1}{0,0136} \approx 662 \text{ см, или } h = 6,62 \text{ м.}$$

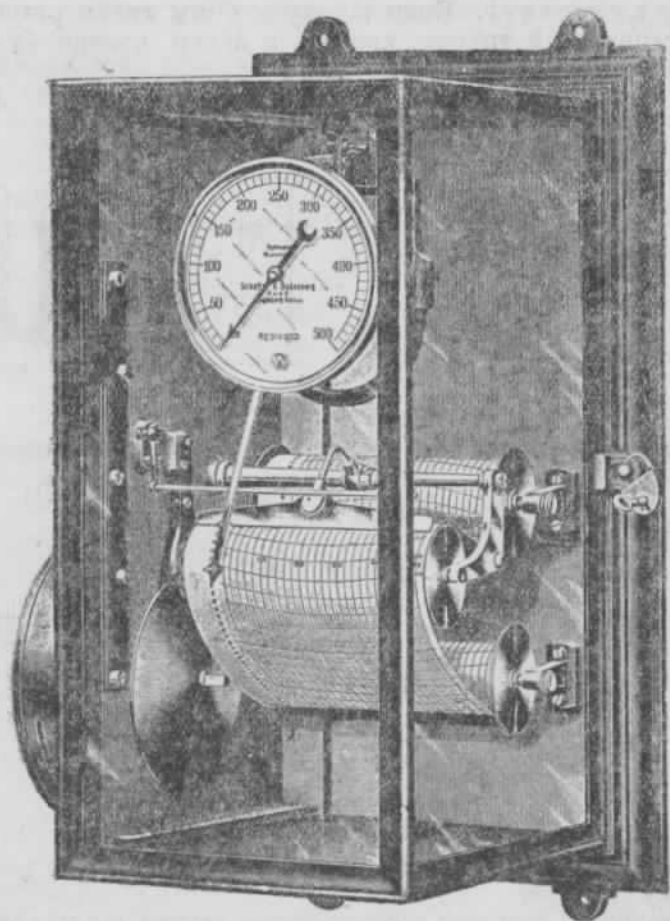
Отсюда мы видим, что для измерения больших давлений пользование жидкостными манометрами весьма затруднительно. В этих случаях пользуются пружинным манометром, устройство которого дано на фиг. 22.

Пары, газы или жидкость, поступаая в манометр, производят давление на полую пружину *a*, которая под этим действием частично распрямляется и при помощи зубчатки приводит в движение стрелку. Манометры снабжают шкалой и иногда самописцами (см. фиг. 23).

2. Пиезометр. Если при измерении давления в резервуаре, заполненном жидкостью, манометр заполняют той же самой жидкостью, то в этом случае манометр называют пиезометром.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Пусть, напр., в сосуде *B* жидкость находится под давлением P_0 (см. фиг. 24), тогда давление в точке *b* будет определяться

высотой h столба жидкости в пьезометре. Для давления в этой точке можно написать следующие два уравнения:

$$p_0 + z\gamma = p_a + (h + z)\gamma = p_b,$$

откуда

$$p_0 = p_a + h\gamma$$

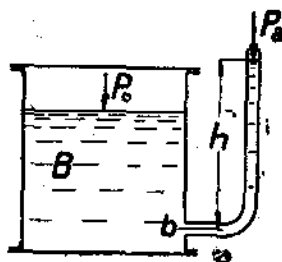
и

$$h = \frac{p_0 - p_a}{\gamma}.$$

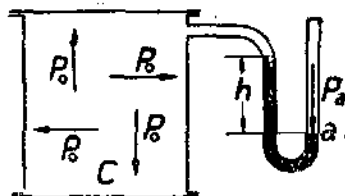
И, следовательно, зная пьезометрическую высоту h , можно найти давление p_0 и по нему определить давление в любой точке сосуда.

Все, что сказано о чувствительности и пределе применения манометра, в равной степени относится также и к пьезометру.

3. ВАКУУММЕТР. Если в сосуде C мы имеем разрежение, то в манометрической трубке уровень в левом колене будет выше, чем в правом (см. фиг. 25).



Фиг. 24.



Фиг. 25.

Написав для давления в точке a уравнение равновесия, мы найдем:

$$p_0 + h\gamma = p_a,$$

откуда

$$p_0 = p_a - h\gamma.$$

Так как давление p_0 практически не может быть равным нулю, т. е.

$$p_0 > 0,$$

то

$$p_a - h\gamma > 0,$$

откуда

$$p_a > h\gamma,$$

где p_a — атмосферное давление.

Это последнее уравнение является основным для расчета размеров вакуумметра.

Естественно, что при выборе более легкой жидкости, вакуумметр будет более чувствительным, но его размеры при этом будут довольно большими. Для вакуумметров нельзя применять летучие жидкости, так как при понижении давления летучая жидкость может закипеть.

ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА СТЕНКИ.

§ 1. Давление на плоскую наклонную стенку.

В предыдущем задании нами были выведены законы распределения гидростатического давления внутри покоящейся жидкости. Следующей нашей задачей будет определение полного давления жидкости на стенку для различных частных случаев.

В качестве первой задачи найдем суммарное давление на плоскую стенку, находящуюся на границе жидкости и наружного воздуха (см. фиг. 26).

Давление на какой-нибудь элемент поверхности стенки будет определяться гидростатическим давлением жидкости, соприкасающейся с ним.

Таким образом давление на элемент поверхности, находящийся на глубине z , будет равно

$$p_z = p_a + \gamma z,$$

где p_a — давление наружного воздуха на свободную поверхность жидкости и

γ — уд. вес жидкости.

С противоположной стороны на тот же элемент стенки давление равно p_a . Следовательно, избыточное давление на стенку в этой точке будет равно

$$p_k = \gamma z$$

и будет характеризоваться только глубиной погружения точки и уд. весом жидкости.

Сила давления на элемент поверхности dF имеет величину

$$dP_k = p_k \cdot dF = \gamma z dF. \quad (1)$$

Сила давления dP_k направлена перпендикулярно стенке. Для плоской стенки все силы давления на различные элементы поверхности будут параллельны.

Сумма всех сил давления, так называемая полная сила избыточного давления, будет равна сумме элементарных сил давления dP_k .

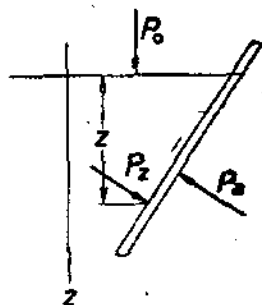
Итак,

$$P_k = \sum dP_k = \gamma \int z dF. \quad (2)$$

Обозначим интеграл

$$\int z dF = z_c F. \quad (3)$$

Здесь z_c — очевидно координата центра тяжести стенки (глубина, на которой находится центр тяжести стенки) и F — площадь



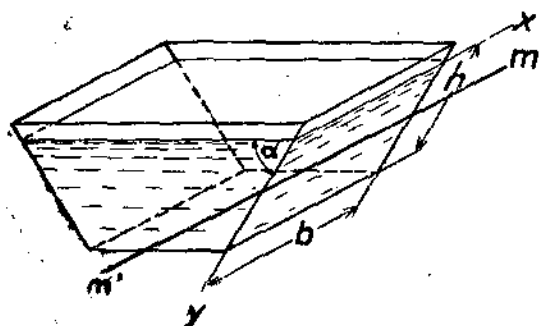
Фиг. 26.

стенки, на которую вычисляется давление. Внося в соотношение (2) выражение (3), получим:

$$P_A = \gamma z_c F. \quad (4)$$

Произведение γz_c есть избыточное гидростатическое давление в центре тяжести стенки.

Пример. Определим силу полного давления на прямоугольную стенку сосуда (см. фиг. 27), имеющую следующие размеры: ширина b и длина h , и если угол, составляемый ею с поверхностью уровня, равен α .



Фиг. 27.

Задача об отыскании силы избыточного давления сводится к определению координаты центра тяжести этой фигуры. В прямоугольнике центр тяжести находится на пересечении диагоналей и в данном случае его расстояние от поверхности уровня будет равно

$$z_c = \frac{h}{2} \sin \alpha.$$

Таким образом

$$P_A = \gamma \frac{h}{2} \sin \alpha \cdot b \cdot h = \gamma \frac{h^2 b}{2} \sin \alpha. \quad (5)$$

§ 2. Центр давления.

Точка приложения силы P_A называется центром давления. Координаты этой точки находим, следуя общему методу статик абсолютно твердого тела. Применяя к данной задаче теорему Вариньона для параллельных сил, мы приравняем момент равнодействующей силы P_A сумме моментов сил, слагающих dP_A .

Пусть оси, относительно которых будем брать моменты, суть линия пересечения плоской стенки с поверхностью уровня (ось x) и линия, перпендикулярная ей и лежащая в плоскости стенки (ось y). Обозначив координаты — элементы стенки dF через x, y , а координаты центра давления через x_0, y_0 , напишем для моментов относительно оси x :

$$P_A y_0 = \int dP_A y$$

и относительно оси y :

$$P_A x_0 = \int dP_A x,$$

откуда

$$\gamma z_c F \cdot y_0 = \gamma \int z y dF$$

и

$$\gamma z_c F \cdot x_0 = \gamma \int z x dF.$$

Из этих уравнений получаем

$$y_0 = \frac{\int yz dF}{z_c F} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{\int xz dF}{z_c F} \quad (6)$$

искомые координаты центра давления.

Если через α обозначим угол, который составляет стенка с поверхностью уровня, то

$$z = y \sin \alpha \quad (7)$$

и, следовательно,

$$y_0 = \frac{\sin \alpha \int y^2 dF}{z_c F} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{\sin \alpha \int xy dF}{z_c F} \quad (8)$$

Здесь

$$\int y^2 dF \quad \text{и} \quad \int xy dF$$

суть моменты инерции площади F относительно оси ox и соответственно относительно осей ox и oy (центробежный момент). При этом, если k_x — радиус инерции, то

$$\int y^2 dF = k_x^2 F;$$

отсюда

$$y_0 = \frac{k_x^2 \sin \alpha}{z_c}$$

Или, так как

$$z_c = y_c \sin \alpha,$$

то

$$y_0 = \frac{k_x^2}{y_c} \quad (9)$$

Для симметричных фигур весьма удобно вместо момента инерции относительно оси ox вычислять момент инерции относительно оси, параллельной ox и проходящей через центр тяжести

$$k_c^2 F,$$

и с помощью преобразования

$$k_x^2 F = y_c^2 F + k_c^2 F$$

найдем

$$y_0 = y_c + \frac{k_c^2}{y_c} \quad (10)$$

Из этого равенства видно, что центр давления лежит всегда глубже, чем центр тяжести стенки.

Пример. Найти координаты центра давления для плоской прямоугольной стенки (см. фиг. 27)

$$y_c = \frac{h}{2}.$$

Момент инерции относительно оси mm' равен $\frac{bh^3}{12}$.

Радиус инерции

$$k_c = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh} = \frac{h^2}{12}.$$

Отсюда, согласно формуле (10), имеем:

$$y_0 = \frac{h}{2} + \frac{2 \cdot h^3}{12h} = \frac{2}{3} h$$

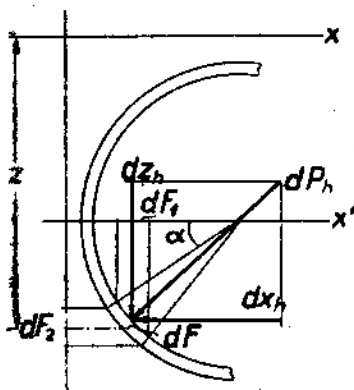
$$z_0 = y_0 \sin \alpha = \frac{2}{3} h \sin \alpha.$$

§ 3. Давление на цилиндрические стенки.

В то время как в случае плоской стенки суммарное давление приводилось к равнодействующей силе, параллельной составляющим силам, для кривых стенок силы эти, будучи перпендикулярными элементами стенок, могут привести к равнодействующей или к паре сил.

Для решения этой задачи будем проектировать элементарные силы избыточного давления на оси координат и брать моменты этих сил относительно координатных осей (см. фиг. 28).

Если обозначить dP_h элементарное избыточное давление на площадку dF , погруженную на глубине z и составляющую угол α с плоскостью уровня, то



Фиг. 28.

$$dX_h, dY_h \text{ и } dZ_h$$

будут проекциями этой силы на оси координат, причем в рассматриваемом случае

$$dX_h = dP_h \cdot \cos \alpha$$

или в силу соотношения (1)

$$dX_h = \gamma z dF \cos \alpha$$

и

$$dY_h = 0 \text{ и } dZ_h = \gamma z dF \sin \alpha.$$

(11)

Пусть dF_1 и dF_2 — проекции элементарной площадки dF на оси координат, т. е.

$$dF_1 = dF \cos \alpha$$

$$dF_2 = dF \sin \alpha$$

(12)

Тогда уравнения (11) примут вид:

$$dX_h = \gamma z dF_1$$

(13)

и

$$dZ_h = \gamma z dF_2.$$

(14)

Интегрируя выражение (13), т. е. находя сумму проекций всех горизонтальных составляющих элементарных сил избыточного давления, найдем:

$$X = \int dX_h = \gamma \int z dF_1.$$

Если через z_1 обозначить координату центра тяжести вертикальной проекции F_1 кривой стенки, то

$$\int z dF_1 = z_1 F_1$$

и, следовательно,

$$X = \gamma z_1 F_1. \quad (15)$$

Координата Z_x , определяющая положение силы X , найдется из уравнения моментов относительно оси oy

$$X z_x = \int dX_z z = \gamma \int z^2 dF_1.$$

Поступая как в предыдущем, можно показать, что

$$X z_x = \gamma k_x^2 F_1,$$

где k_x — радиус инерции вертикальной проекции F_1 кривой стенки относительно линии пересечения ее с плоскостью уровня.

Отсюда, в силу соотношения (15), имеем:

$$z_x = \frac{k_x^2}{z_1}. \quad (16)$$

Переходя к определению суммарной силы вертикального давления, заметим, что в уравнении (14) произведение

$$\gamma z dF_2 = dG,$$

есть не что иное, как вес элемента жидкости, имеющего основание dF_2 и высоту z , т. е. представляет собой вес столба жидкости, расположенного над рассматриваемым элементом поверхности кривой стенки.

Отсюда

$$Z = \int dZ_n = G, \quad (17)$$

где G — вес столба жидкости над поверхностью кривой стенки до плоскости уровня.

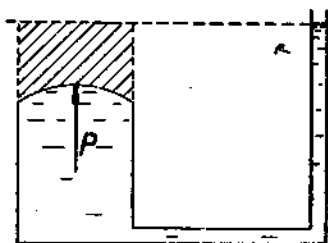
Примечание. Сказанное выше относительно величины вертикального давления будет справедливо также и в том случае, если над рассматриваемой кривой стенкой столба жидкости нет.

Напр., вертикальное давление на сферическую крышку колпака (см. фиг. 29) будет равно величине воображаемого столба жидкости, высота которого определяется высотой уровня жидкости в трубе. Давление это будет направлено снизу вверх.

Для нахождения точки приложения силы Z возьмем моменты всех слагающих сил относительно оси oy . Тогда

$$G + x_z = \int dz_z x = \gamma \int x z dF_2. \quad (18)$$

Пример. Определить давление на стенки горизонтального круглого цилиндра (см. фиг. 28), заполненного жидкостью уд.



Фиг. 29.

веса γ . Величина горизонтальной силы давления на правую часть полуцилиндрической поверхности будет равна:

$$X = \gamma \cdot \frac{d}{2} \cdot l \cdot d = \gamma \cdot \frac{ld^2}{2}$$

$$z_x = \frac{d^2}{3} \cdot \frac{2}{d} = \frac{2}{3} d.$$

Слева на полуцилиндр будет давить такая же сила, но противоположно направленная. Сила

$$Z = G = \frac{\gamma \pi d^2}{4} \cdot l.$$

Эта сила пройдет через вертикальный диаметр и будет направлена вниз.

Пример. Определить давление на цилиндр, погруженный в жидкость.

В этом случае величины сил останутся прежними, направления же их изменятся на противоположные.

§ 4. Принцип Архимеда.

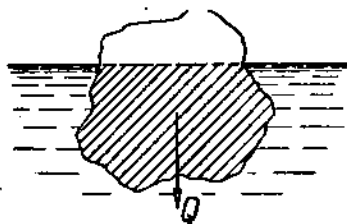
Если рассмотреть силы, приложенные к какому-нибудь телу, погруженному в жидкость, то нетрудно показать, что сила суммарного давления жидкости на поверхность тела будет всегда направлена вверх и будет определяться формулой (17).

В самом деле, давление на элементы поверхности тела, ограничивающие его сверху, будет всегда меньше, чем давление на нижнюю часть поверхности. В силу этого мы заключаем, что результирующая сила будет направлена вверх.

Если через Q обозначить вес тела в воздухе, то

$$Q_1 = Q - G$$

будет его вес при погружении в жидкость. В том случае, если часть тела погружена в жидкость (см. фиг. 30),



Фиг. 30.

то вертикальное давление на него со стороны жидкости будет равно весу объема воды, вытесненной телом (заштриховано на фигуре). При этом равнодействующая двух сил, приложенных к телу: 1) силы тяжести (вес) и 2) силы давления жидкости, будет равна их разности.

Это положение можно сформулировать так: всякое тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость (закон Архимеда).

Если вес тела больше, чем вес вытесненной им жидкости в том же объеме, то тело тонет. Наоборот, если вес тела меньше, чем вертикальное давление (направленное снизу вверх), то тело плавает. Разность этих сил определяет так называемую поддерживающую силу.

Если поддерживающая сила равна нулю, то тело находится в безразличном равновесии (свободное плавание).

ЗАДАНИЕ 4.**ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ.****§ 1. Определение расхода и средней скорости.**

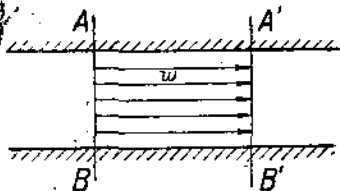
Пусть по трубопроводу с постоянным диаметром движется жидкость, заполняя все предоставленное ей внутри трубы пространство. Объем жидкости, проходящей через какое-либо сечение трубы в единицу времени, мы будем называть расходом потока. Если за t сек. через сечение AB (см. фиг. 31) проходит Q куб. метров жидкости, то расход q будет равен очевидно:

$$q = \frac{Q}{t}. \quad (1')$$

Размерность величины расхода $\left[\frac{L^3}{T} \right]$. Единицей для измерения расхода в технической системе является $\left[\frac{м^3}{сек.} \right]$ и в системе CGS — $\left[\frac{см^3}{сек.} \right]$.

В разных точках поперечного сечения потока скорости частиц жидкости не одинаковы. Максимальная скорость имеет место на оси трубы; чем ближе к стенкам, тем скорость становится меньше; у самых стенок скорость частиц вследствие прилипания их к стенкам равна нулю. Сделаем мысленно предположение, что частицы жидкости по всему сечению (и вдоль всего потока) приобрели одинаковую (общую) скорость, причем расход потока в результате такого выравнивания не изменился. Численно такая скорость всегда может быть определена. Ее мы будем называть *средней скоростью* и обозначать буквой w .

Пусть в начале секунды рассматриваемые частицы потока жидкости лежат в сечении AB (фиг. 31), тогда в конце этой же секунды частицы эти будут находиться в сечении $A'B'$ на расстоянии w от сечения AB (так как w есть путь, проходимый в секунду). Вслед за рассматриваемыми частицами с такой же скоростью двигалась и вся остальная масса потока. Поэтому через сечение AB в течение секунды прошло все количество жидкости, заключенное между сечениями AB и $A'B'$. Объем этой жидкости



Фиг. 31.

равен Fw , где F — площадь поперечного сечения трубы. Но этот объем есть не что иное, как расход. Итак имеем, кроме (1'),

$$q = F \cdot w. \quad (1)$$

Отсюда средняя скорость потока

$$w = \frac{q}{F} \quad (2)$$

равна расходу потока, поделенному на его живое сечение. Для круглой трубы $F = \frac{\pi d^2}{4}$, где d — диаметр, поэтому

$$q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot w \quad \text{и} \quad w = \frac{4q}{\pi d^2}. \quad (3)$$

Вес жидкости (или газа), проходящей в единицу времени через какое-либо сечение трубы, аналогично предыдущему определению, носит название *весового расхода* потока. Он очевидно равен объему жидкости, протекающей в одну секунду через сечение (т. е. расходу), помноженному на ее уд. вес. Таким образом имеем:

$$q_{\text{вес}} = q\gamma = Fw\gamma \quad (4)$$

и

$$w = \frac{q_{\text{вес}}}{F\gamma}. \quad (4')$$

Отсюда размерность весового расхода:

$$\left[q_{\text{вес}} \right] = \left[q\gamma \right] = \left[\frac{L^3}{T} \cdot \frac{\text{вес}}{L^3} \right] = \left[\frac{\text{вес}}{T} \right]. \quad (5)$$

Единицей для весового расхода в технической системе является $\left[\frac{\text{кг}}{\text{сек}} \right]$.

Пример 1. По трубе, диаметр которой равен 2 дм., в каждую минуту перекачивается 30 л мазута, уд. вес которого (γ) равен 900 $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

Найти расход, среднюю скорость потока и весовой расход в технической системе единиц.

В минуту (60 сек.) перекачивается 30 л или 0,030 м³. Расход равен по формуле (1')

$$q = \frac{0,030}{60} = 0,0005 \left[\frac{\text{м}^3}{\text{сек}} \right].$$

Средняя скорость потока по формуле (3) равна

$$w = \frac{4 \cdot 0,0005}{3,14 \cdot 0,025^2} = 1,02 \left[\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right].$$

Весовой расход по формуле (4) равен

$$q_{\text{вес}} = 0,0005 \cdot 900 = 0,45 \left[\frac{\text{кг}}{\text{сек}} \right].$$

Пример 2. По 4-дюймовому трубопроводу перекачивается нефть, уд. вес которой равен $850 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$, со средней скоростью потока, равной $1 \left[\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right]$. Найти объемный (q) и весовой ($q_{\text{вес}}$) расходы.

По формуле (3) имеем:

$$q = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 1 = 0,00785 \left[\frac{\text{м}^3}{\text{сек}} \right] \text{ или } 7,85 \left[\frac{\text{л}}{\text{сек}} \right].$$

По формуле (4) для $q_{\text{вес}}$ получаем:

$$q_{\text{вес}} = 0,00785 \cdot 850 = 6,67 \left[\frac{\text{кг}}{\text{сек}} \right].$$

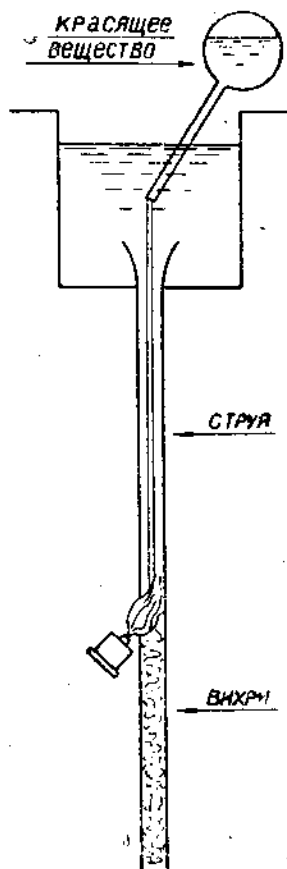
§ 2. Опыты Осборна Рейнольдса.

В результате практических наблюдений и опытных исследований установлено, что существуют два коренным образом различающиеся режима движения жидкостей и газов по трубопроводам — ламинарный и турбулентный.

В первом случае отдельные струи потока движутся параллельно друг другу, не смешиваясь и спокойно огибая все встречающиеся на их пути препятствия. При этом в прямой и гладкой трубе частицы движутся прямолинейно.

Во втором случае поток движется в виде беспорядочной массы, сильно возмущенной вихрями. Каждая частица, участвуя в общем продольном движении, совершает дополнительно еще некоторые поперечные колебания.

Таким образом в прямой и гладкой трубе частицы движутся не прямолинейно, а по некоторым сложным синусоидальным траекториям. Этим двум разным режимам движения соответствуют и разные законы трения жидкости. Английский ученый Осборн Рейнольдс произвел следующие опыты. Беря стеклянные трубки разных диаметров, он осуществлял в них поток воды (см. фиг. 32) с разными скоростями и при разных вязкостях. Для определения режима потока при входе в трубку в воду пускалась тонкая окрашенная каким-либо веществом струйка. Она попадала в поток и, в случае, если он был ламинарным, тянулась в нем в виде тонкой нити на весьма большом протяжении параллельно стенкам трубы. Размывание окрашенной тонкой струйки внутри ламинарного потока происходило медленно и только за счет диффузии молекул.



Фиг. 32.

В случае же турбулентного потока окрашенная струйка *размывалась* весьма быстро на протяжении короткого участка пути. Это усиленное размывание производилось главным образом внутренними вихрями. Изменение вязкости воды, участвующей в потоке, достигалось путем наружного нагревания трубки на некотором расстоянии от начала. Как известно, вязкость воды с повышением температуры убывает. Оказалось, что если до места нагревания поток был ламинарным (струйка краски не размывалась), то при достаточном нагревании непосредственно за точкой нагревания поток становился турбулентным, — происходил быстрый и полный размыв окрашенной струйки.

На основании этих опытов и попутно из теоретических соображений Осборн Рейнольдс установил, что характер движения потока, или *режим движения*, определяется следующими факторами:

1. Величиной *средней скорости* потока.
2. Величиной *диаметра* трубопровода.
3. Величиной *плотности* жидкости или газа.
4. Величиной *абсолютной вязкости* жидкости или газа.
5. Степенью *шероховатости* труб.

В случае *гладких труб* режим движения определяют только *первые четыре фактора*.

Если в *гладкой трубе* при некоторых заданных величинах:

- w — средней скорости,
- d — диаметре,
- ρ — плотности и
- μ — абсолютной вязкости

имеет место *ламинарный режим* движения потока, то его можно перевести в состояние *режима турбулентного* путем:

- 1) некоторого увеличения одной только скорости, или
- 2) некоторого увеличения одного только диаметра, или
- 3) некоторого увеличения одной только плотности, или
- 4) некоторого уменьшения одной только абсолютной вязкости.

При обратном изменении указанных четырех факторов турбулентный режим переходит в ламинарный. Напишем выражение:

$$\frac{wd\rho}{\mu}$$

представляющее собой выражение, зависящее от четырех вышеуказанных факторов. Численное значение этого выражения растет с возрастанием: средней скорости, диаметра и плотности и с убыванием абсолютной вязкости. Очевидно, что переходу ламинарного режима в турбулентный соответствует увеличение *численного значения* вышенаписанного выражения. Осборн Рейнольдс решил поэтому при определении режима потока исходить из этого *численного значения*. *Опыты подтвердили правильность этих соображений* Рейнольдса.

Оказалось, что для малых численных значений величины $\frac{wd\rho}{\mu}$ поток всегда остается ламинарным, для больших же — турбулент-

ным. В результате многочисленных опытов и практических наблюдений при перекачке по трубопроводам установлено, что для *круглых труб* во всех случаях, когда

$$\frac{wd\rho}{\mu} < 2300,$$

поток остается *ламинарным*. Для случаев же, когда

$$\frac{wd\rho}{\mu} > 2300,$$

поток становится турбулентным, причем интенсивность вихрей в потоке тем выше, чем больше значение $\frac{wd\rho}{\mu}$.

§ 3. Число Рейнольдса.

В честь Рейнольдса выражение

$$\frac{wd\rho}{\mu}$$

называется *числом Рейнольдса* (или *параметром Рейнольдса*) и обозначается обыкновенно через Re (Reynolds)

$$Re = \frac{wd\rho}{\mu}. \quad (6)$$

То значение числа Рейнольдса, при котором происходит переход режима из ламинарного в турбулентный, носит название *критического*. По новейшим опытам Шиллера оно равно

$$Re_{крит.} = 2300. \quad (7)$$

Таким образом критерием, дающим возможность судить о характере режима движения потока в *гладких трубах*, является значение числа Рейнольдса, вследствие чего оно играет громадную роль в гидравлике. Числу Рейнольдса можно дать еще следующее выражение:

$$Re = \frac{wd}{\nu}, \quad (8)$$

так как $\mu = \nu\rho$.

§ 4. Критическая скорость.

Скорость потока, соответствующая критическому значению числа Re , называется *критической скоростью*; ее можно определить из соотношения

$$Re_{крит.} = \frac{w_{крит.} \cdot d}{\nu}.$$

Отсюда

$$w_{крит.} = \frac{Re_{крит.} \cdot \nu}{d}. \quad (9)$$

При этом значении скорости происходит перемена режима потока.

Пример 1. Вычислить значение критической скорости для случая движения нефти по трубе заданного диаметра. Пусть $d = 15$ см (6 дм.), вязкость нефти в градусах Энглера равна $5^\circ E$.

По формуле (16) (задание 1) находим значение кинематической вязкости нефти

$$\nu = 0,0731 \cdot 5 - \frac{0,0631}{5} = 0,3529 \left[\frac{\text{см}^2}{\text{сек}} \right].$$

Принимая $Re_{\text{крит.}} = 2300$, по формуле (9) находим критическое (переходное) значение скорости для данного сорта нефти:

$$w_{\text{крит.}} = \frac{2300 \cdot 0,3529}{15} = 54 \left[\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right].$$

Пример 2. Пусть по той же трубе движется вода, вязкость которой в градусах Энглера равна $1^\circ E$. Находим кинематическую вязкость воды

$$\nu = 0,0731 \cdot 1 - \frac{0,0631}{1} = 0,01 \left[\frac{\text{см}^2}{\text{сек}} \right].$$

Таким образом значение $w_{\text{крит.}}$ для потока воды в 6-дм. трубе будет равно

$$w_{\text{крит.}} = \frac{2300 \cdot 0,01}{15} = 1,53 \left[\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right].$$

т. е. в 35 раз меньше, чем для взятой выше нефти.

Пример 3. Найдем, наконец, значение критической скорости для потока воды в трубке, диаметр которой равен 1 мм. Имеем

$$w_{\text{крит.}} = \frac{2300 \cdot 0,01}{0,1} = 230 \left[\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right].$$

т. е. в 150 раз больше, чем в 6-дм. трубе.

По формуле (9) критическое значение скорости возрастает пропорционально кинематической вязкости и обратно-пропорционально диаметру труб.

§ 5. Число Рейнольдса безразмерно.

Рассмотрим размерность числа Рейнольдса. Имеем:

$$[Re] = \left[\frac{wd}{\nu} \right] = \left[\frac{LT^{-1} \cdot L}{L^2 \cdot T^{-1}} \right] = [L^0 \cdot T^0].$$

Таким образом число Рейнольдса нулевого размера относительно основных физических величин. Это значит, что численное значение его не должно зависеть от выбора системы единиц (если только эта система однородная, не смешанная). Техническая система и система CGS являются правильными (не смешанными) системами, поэтому численные значения параметра Рейнольдса в обоих этих системах одинаковы.

Критическое значение $Re_{\text{крит.}}$ равно 2300 как в технической, так и в системе CGS.

Пример. По 10-дм. трубопроводу ($d = 25,4$ см) перекачивается мазут. Вязкость равна 10^5 Е, удельный вес $900 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$. Весовой расход мазута составляет $50 \left[\frac{\text{кг}}{\text{сек}} \right]$.

Определить значение числа Рейнольдса, пользуясь технической системой, а также системой CGS.

С помощью формулы (4') находим значение средней скорости потока

$$w = \frac{50}{\pi \cdot \frac{0,254^2}{4} \cdot 900} \approx 1,1 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Кинематическая вязкость (в технической системе) равна

$$\nu = 0,0001 \left\{ 0,0731 \cdot 10 - \frac{0,0631}{10} \right\} = 0,725 \cdot 10^{-4}.$$

Параметр Рейнольдса по формуле (8) равен

$$\text{Re} = \frac{1,1 \cdot 0,254}{0,725 \cdot 10^{-4}} = 3850.$$

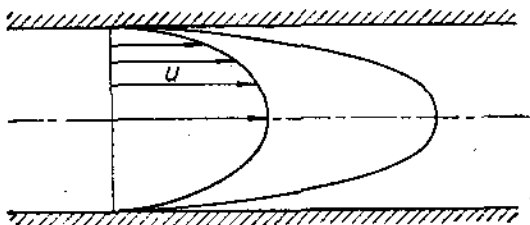
Следовательно режим движения мазута в данных условиях **турбулентный**. Применяя систему CGS, мы имели бы

$$\text{Re} = \frac{110 \cdot 25,4}{0,725} = 3850,$$

т. е. прежнее значение.

§ 6. Как распределены скорости частиц по сечению круглой трубы при движении жидкости вдоль трубопровода.

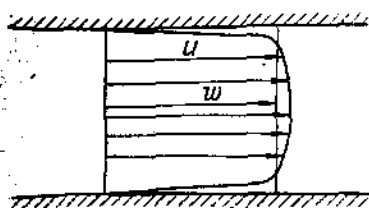
1. Ламинарный поток. В случае ламинарного потока в круглой цилиндрической трубе скорость частиц жидкости, расположенных в разных точках поперечного сечения потока, плавно возрастает с удалением от стенки, приобретая максимальное значение на оси трубы (см. фиг. 33); у самых стенок скорость вследствие прилипания частиц равна нулю. Для труб постоянного диаметра характер распределения скоростей по сечению не изменяется с переходом от одного сечения к другому. Величины скоростей в соответственных точках сечений в случае несжимаемых жидкостей также одинаковы. Геометрическое место концов векторов u (скоростей) в разных точках поперечного сечения образует **параболоид вращения**, ось которого совпадает с осью трубы. Параболоид этот тем более вытянут (см. фиг. 34), чем больше расход потока q .



Фиг. 33.

2. **Турбулентный поток.** В случае турбулентного потока в круглой цилиндрической трубе в большей части ее сечения (ядро) жидкость имеет почти одинаковую скорость, близкую к средней скорости потока.

На оси трубы (см. фиг. 34) действительная скорость потока лишь немного превышает среднюю скорость. С удалением от оси к стенке скорость медленно убывает, вблизи же самой стенки

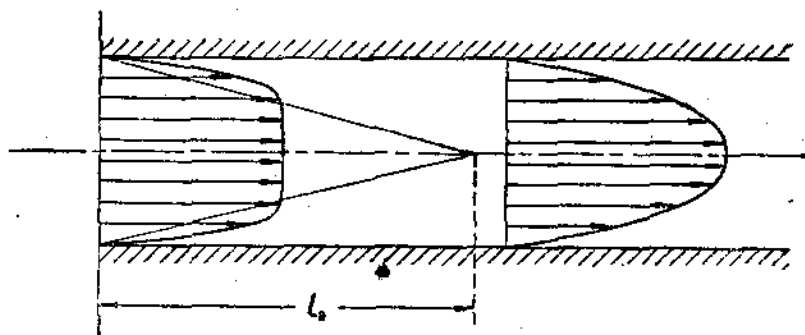


Фиг. 34.

(пограничный слой) происходит весьма быстрое уменьшение скорости до нуля. Чем больше число Рейнольдса по сравнению с критическим его значением, тем медленнее изменение скорости по сечению трубы (в ядре) и соответственно тем быстрее изменение скорости вблизи стенки (в пограничном слое).

В средней части (в ядре) поток движется в виде сплошной вихревой массы. Вблизи же стенки (пограничный слой) имеет место весьма тонкая ламинарная пленка, в которой вихри, зарождаваясь, переходят в ядро.

3. **Вход в трубу (Anlaufstrecke).** Жидкость попадает в трубу обычно со скоростью, постоянной по всему начальному сечению. При движении вдоль стенок вследствие трения крайние слои (у стенок) начинают задерживаться. Далее они передают действие торможения (см. фиг. 35) на слои, более удаленные от



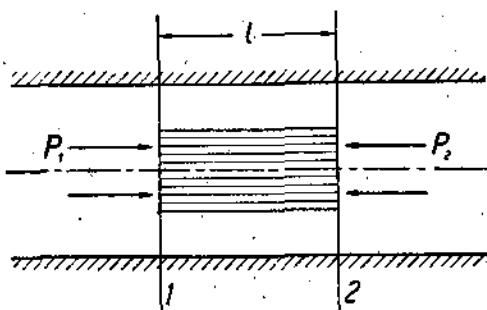
Фиг. 35.

стенок. Площадь кольцевой части потока с уменьшенной скоростью с удалением от начала возрастает. Площадь средней части потока (ядро течения), с постоянной скоростью по сечению, убывает. На некотором расстоянии l_0 от начала трубы площадь средней „невозмущенной“ стенками части потока сводится к нулю и дальше картина распределения скоростей во всех последующих сечениях остается постоянной. Длина участка l_0 в начале трубы, на протяжении которой вырабатывается, благодаря тормозящему действию стенок, постоянная картина распределения скоростей, носит название „анлауфстрекке“ (Anlaufstrecke).

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ТРУБЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ.

§ 1. Формула распределения скоростей по сечению Стокса.

Если поток ограничен твердыми неподвижными стенками, то скорость всех частичек, граничащих непосредственно с этими стенками, независимо от режима потока, *равна нулю* (прилипание). Слой жидкости, расположенный весьма близко от стенки, имеет незначительную скорость вследствие тормозящего действия стенки (внутреннее трение). Если всю жидкость в круглой трубе мысленно разбить на систему тонких цилиндрических слоев, соосных трубе, то скорость движения частиц жидкости в каждом таком слое



Фиг. 36.

будет тем больше, чем дальше он удален от стенки. На оси трубы скорость будет максимальной. Обозначим радиус трубы через a (см. фиг. 36 и 37), внутренний радиус какого-либо выделенного нами цилиндрического слоя жидкости через r , толщину этого слоя (бесконечно-малая величина) обозначим через dr . Направление n в формуле (9) (задание 1), перпендикулярное скорости пленки, в нашем случае совпадает с направлением радиуса. Так как с возрастанием расстояния слоя от оси трубы на величину dr скорость слоя соответственно уменьшается (по мере приближения к стенке трубы), то производная $\frac{du}{dn}$ [формула (9); задание 1], в нашем случае $\frac{du}{dr}$, будет существенно отрицательной величиной (положительному dr соответствует отрицательное du). Напряжение τ сил внутреннего трения—величина существенно положительная и поэтому для круглой трубы формула (9) задания 1 переписывается в следующем виде

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (1)$$

Найдем закон распределения скоростей частиц, расположенных по сечению круглой трубы в случае ламинарного потока. Будем предполагать движение жидкости *установившимся*, т. е. таким, когда в любой точке пространства, занятого потоком, скорости и давления не меняются со временем. Выделим двумя сечениями 1 и 2, перпендикулярными оси трубы (см. фиг. 36), участок потока длины l . Кроме того представим себе цилиндрическую поверхность произвольного радиуса r (причем $0 \leq r \leq a$), соосную трубе. Два поперечные сечения 1 и 2 и эта цилиндрическая поверхность радиуса r ограничивают некоторый сплошной „жид-

кий цилиндр" в потоке. Напишем условие равновесия для этого "жидкого цилиндра". По сечению 1 расположенные слева частицы производят на наш цилиндр давление, равное P_1 , причем

$$P_1 = \pi r^2 \cdot p_1.$$

По сечению 2 частицы, расположенные справа от этого сечения, производят на тот же цилиндр противодействие P_2 , равное

$$P_2 = \pi r^2 \cdot p_2.$$

Здесь p_1 и p_2 суть напряжения давлений в сечениях 1 и 2 (т. е. силы давления, приходящиеся на единицу поверхности $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\right]$). Кроме сил P_1 и P_2 на наш цилиндр вдоль его образующих в сторону, обратную движению, действуют силы трения между его периферийным слоем и смежным слоем потока (силы сдвига).

Равнодействующую всех этих сил обозначим через S , причем очевидно

$$S = 2\pi r l \cdot \tau,$$

где $2\pi r l$ — площадь цилиндрической поверхности (площадь трения) и τ — напряжение силы трения.

По боковой цилиндрической поверхности, кроме сил трения, распределены еще силы нормальных давлений со стороны смежных частиц, расположенных вне нашего цилиндра. Эти силы давления направлены вдоль радиусов перпендикулярно к оси цилиндра. Предполагая ось трубы горизонтальной, мы будем проектировать на нее все силы, приложенные к выделенному нами "жидкому цилиндру". Очевидно силы нормальных давлений жидкости, действующие на боковую цилиндрическую поверхность, на ось трубы проектироваться не будут. По той же причине и сила веса, приложенная к массе нашего "жидкого цилиндра", проекции на ось трубы не даст. Итак, проекции дадут только: сила давления P_1 , сила противодействия P_2 и сила трения S . Из динамики известно, что для равномерного движения силы действующие должны равняться силам сопротивления. Отсюда имеем:

$$P_1 = P_2 + S. \quad (2)$$

Внося сюда написанные выше выражения для сил, получим:

$$\pi r^2 \cdot p_1 = \pi r^2 \cdot p_2 + 2\pi r l \cdot \tau.$$

Преобразуя и внося значение τ из формулы (1), найдем:

$$\frac{p_1 - p_2}{2l} r = - \mu \frac{du}{dr}$$

или

$$\frac{p_1 - p_2}{2l\mu} r dr = - du.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\frac{p_1 - p_2}{4l\mu} r^2 = - u + \text{const.} \quad (3)$$

Это равенство справедливо при всех возможных значениях ($0 \leq r \leq a$), так как радиус „жидкого цилиндра“ был взят нами совершенно произвольно; оно устанавливает зависимость между скоростью частицы u и ее расстоянием от оси трубы. Для определения величины const мы располагаем высказанным уже в начале параграфа граничным условием для скорости частичек на стенке, именно:

$$u = 0, \text{ когда } r = a.$$

Используя это условие, мы из равенства (3) определим значение const

$$\frac{p_1 - p_2}{4l\mu} a^2 = \text{const},$$

т. е.

$$\text{const} = \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} a^2.$$

Внося значение const в равенство (3), мы получаем окончательно после некоторых преобразований:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} (a^2 - r^2). \quad (4)$$

Это равенство дает значение скорости частицы жидкости в ламинарном потоке как функцию ее расстояния от оси трубы. В плоскости меридионального сечения трубы (проходящего через ось) равенство это представляет уравнение „параболы скоростей“ (см. фиг. 33, задание 4), ось которой совпадает с осью трубы. В пространстве оно представляет параболоид вращения, соответствующий геометрическому месту концов вектора скорости для всех частичек, расположенных в плоскости поперечного сечения потока. Равенство (4) таким образом и есть искомый закон распределения скоростей по сечению. Он носит название *параболического закона Стокса*. Мы видим, что скорость частиц в любой точке ламинарного потока изменяется прямо-пропорционально разности давлений на концах трубопровода длины l и обратно-пропорционально значению абсолютной вязкости. Внося в формулу (4) значение $r = a$, т. е. предполагая частицу расположенной на стенке, мы, как и следовало ожидать, получаем значение скорости $u_{r=a}$, равное нулю:

$$u_{r=a} = 0.$$

При $r = 0$, т. е. на оси трубы, из формулы (4) получаем максимальное значение скорости, равное

$$u_0 = \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} a^2. \quad (5)$$

Это и есть *осевая скорость* потока.

На основании этой формулы *параболический закон Стокса* (4) можно выразить еще так:

$$u = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (4')$$

§ 2. Формула Пуазейля для определения расхода.

Имея выражение (4) для скорости частиц в любой точке поперечного сечения потока, мы можем вычислить то количество жидкости (по объему или по весу), которое проходит в 1 секунду через какое-либо сечение трубы (т. е. объемный и весовой расход). Для этого в плоскости поперечного сечения потока (фиг. 37) выделим элементарную площадку в форме колечка, внутренний радиус которого равен r , а наружный $r + dr$. Площадь этого колечка Δf равна

$$\Delta f = 2\pi r \cdot \Delta r.$$

Объемный расход Δq жидкости через элементарную площадку Δf по формуле (1) задания 4 равен

$$\Delta q = \Delta f \cdot u,$$

где u — скорость на расстоянии r от оси.

Полное значение расхода q по всему сечению трубы равно сумме элементарных расходов через все элементарные площадки. Таким образом

$$q = \sum \Delta f \cdot u.$$

Вносим значение Δf , получаем

$$q = \sum u \cdot 2\pi r \cdot \Delta r.$$

Суммирование в правой части этого равенства распространяется на всю площадь поперечного сечения потока. Таким образом правая часть есть определенный интеграл по r в пределах от 0 до a (причем Δr в пределе заменим через dr):

$$q = \int_0^a u \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Внося сюда значение u по формуле (4) Стокса, получим:

$$q = \int_0^a \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} (a^2 - r^2) 2\pi r \cdot dr,$$

или

$$q = 2\pi a^2 \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} \int_0^a r dr - 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} \int_0^a r^3 dr,$$

или

$$q = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4l\mu} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right),$$

окончательно:

$$q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi a^4. \quad (6)$$

Это и есть формула *Пуазейля* для объемного расхода. Мы видим, что *расход* жидкости для установившегося ламинарного потока вдоль трубопровода длины l *возрастает* прямо-пропорционально разности давлений *в начале и конце трубопровода* и обратно-пропорционально абсолютной вязкости продукта.

При заданной разности давлений на концах трубопровода и при заданной вязкости расход изменяется прямо-пропорционально четвертой степени радиуса.

Обозначая диаметр трубы через d ($d = 2a$), формулу (5) можно было бы записать в виде

$$q = \frac{p_1 - p_2}{128\mu l} \cdot \pi d^4. \quad (7)$$

Выражая расход через среднюю скорость потока, имеем:

$$q = \pi a^2 \cdot w.$$

Сравнивая это выражение расхода с выражением (6), имеем:

$$\pi a^2 \cdot w = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi a^4,$$

откуда

$$w = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} a^2. \quad (8)$$

Сопоставляя найденное нами значение *средней скорости* w со значением *осевой скорости* u_0 (формула 5), мы находим:

$$u_0 = 2w, \quad (9)$$

т. е. *средняя скорость для ламинарного потока равна половине его осевой скорости*. Закон Стокса для распределения скоростей (4) можно было бы записать поэтому еще в следующей форме:

$$u = 2w \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (4'')$$

Формулы (6) и (8) позволяют определять расход и среднюю скорость по заданной разности давлений на концах трубопровода или, наоборот, разность давлений по заданному расходу. Величина

$$\frac{p_1 - p_2}{l}$$

в формулах (6) и (8) представляет собой *падение давления* (падение давления) на единице длины трубопровода. Отношение этой величины к уд. весу перекачиваемого продукта γ носит название *гидравлического уклона* и обозначается обычно через i :

$$i = \frac{p_1 - p_2}{\gamma l}. \quad (10)$$

... число, заменяя выражение $\frac{p_1 - p_2}{l}$
 ... из формулы (10):

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = i\gamma,$$

... формулы (6) и (8) перепишем в виде

$$q = \frac{\pi a^4}{8} \cdot \frac{i\gamma}{\mu}, \quad (11)$$

$$w = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{i\gamma}{\mu}. \quad (12)$$

Эти формулы дальше можем написать следующим образом, если абсолютную вязкость мы выразим через кинематическую ($\mu = \nu\rho = \frac{\nu\gamma}{g}$):

$$q = \frac{\pi a^4 g}{8} \cdot \frac{i}{\nu}, \quad (13)$$

$$w = \frac{a^2 \cdot g}{8} \cdot \frac{i}{\nu}. \quad (14)$$

Для получения весового расхода необходимо объемный расход помножить на уд. вес. Таким образом

$$q_{\text{вес}} = \frac{\pi a^4 g}{8} \cdot \frac{i\gamma}{\nu}. \quad (15)$$

Из формулы (13) можно получить выражение гидравлического уклона через расход

$$i = \frac{8q \cdot \nu}{\pi a^2 \cdot g} \quad (16)$$

или

$$p_1 - p_2 = \frac{8q\nu l}{\pi a^2 \cdot g}. \quad (16')$$

С помощью этих формул, задаваясь значением расхода, свойствами перекачиваемого продукта и размерами трубопровода, можно вычислить необходимую для перекачки разность давлений на концах трубопровода.

§ 3. Формулы Стокса и Пуазейля для случая наклонного трубопровода.

Предположим теперь, что трубопровод составляет с горизонтом некоторый угол α (см. фиг. 38). Выведем для этого случая формулы Стокса и Пуазейля. Сила, действующая на выделенный участок (l) потока по сечению l , равна $p_1 \pi r^2$; силы противодействующие суть: $p_2 \pi r^2$ (противодавление), $2\pi r l \tau$ (сила трения) и $\pi r^2 l \gamma \sin \alpha$ (проекция на ось x силы веса выделенного участка потока).

Итак, имеем:

$$p_1 \pi r^2 = p_2 \pi r^2 + 2\pi r l \tau + \pi r^2 l \gamma \sin \alpha.$$

Так как $l \sin \alpha = z_2 - z_1$ (см. фиг. 38), то

$$p_1 \pi r^2 = p_2 \pi r^2 + 2\pi r l \tau + \pi r^2 l \gamma (z_2 - z_1).$$

После упрощений и подстановки значения получаем:

$$[p_1 - p_2 + \gamma(z_1 - z_2)] r = - \mu \frac{du}{dr}.$$

Таким образом, вместо прежнего множителя $(p_1 - p_2)$ при r появился множитель $[p_1 - p_2 + \gamma(z_1 - z_2)]$.

Очевидно, что и в окончательных формулах Стокса и Пуазейля необходимо произвести такую замену (для случая наклонного трубопровода).

Имеем:

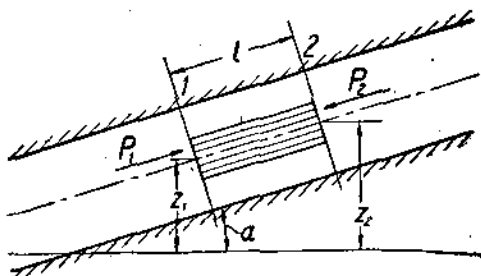
$$u = \frac{p_1 - p_2 + \gamma(z_1 - z_2)}{4\mu} (a^2 - r^2) \quad (17)$$

(формула Стокса)

и

$$q = \frac{p_1 - p_2 + \gamma(z_1 - z_2)}{8\mu} \pi a^4 \quad (18)$$

(формула Пуазейля).



Фиг. 38.

Аналогичную замену для случая наклонного трубопровода следует произвести и в формулах (8) и (16').

§ 4. Пример расчета ламинарного потока.

Разберем следующий практический случай перекачки по горизонтальному трубопроводу.

Пусть имеем: 1) диаметр труб $d = 8$ дм. (0,2 м).

2) длина трубопровода $l = 40$ км.

По трубопроводу перекачивается весьма вязкий продукт, положим, эмбенская нефть (макатская), вязкость которой при 15°C равна около 25 градусам Энглера. Уд. вес нефти $\gamma = 906 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$. Требуется определить суточную производительность трубопровода при условии, что давление в начале трубопровода не должно превосходить 50 атм. (Давление в конце трубопровода предполагаем равным атмосферному.) Прежде всего необходимо установить, какой режим движения будет иметь место — ламинарный или турбулентный? В первом случае мы сможем применять все вышеприведенные формулы (для второго случая формулы будут выведены в следующем задании). Для определения режима потока следует найти число Рейнольдса, для чего необходимо иметь значения средней скорости диаметра и вязкости (кинематической). Так как средняя скорость нам не дана, то мы определим значение критической скорости соответственно заданным условиям. А затем определим значение средней скорости по формуле (14).

Если окажется, что средняя скорость по формуле (14) меньше критической, то это будет указывать на то, что мы имеем дело с режимом ламинарным, в противном случае режим будет турбулентный. Найдем критическое значение скорости для нашего слу-

...технической системой единиц. Кинематическая вязкость по формуле Уббелюде равна

$$\nu = 10^{-4} \left\{ 0,0781 \cdot 25 - \frac{0,0631}{25} \right\} \cong 1824 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \right].$$

Критическая скорость по формуле (9) задания 4 равна

$$w_{\text{крит.}} = \frac{2300 \nu}{d} = \frac{2300 \cdot 1824 \cdot 10^{-7}}{0,2} = 2,098 \left[\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right].$$

Для определения скорости по формуле (14) найдем предварительно гидравлический уклон:

$$i = \frac{p_1 - p_2}{l_T} = \frac{500000 - 10000}{40000 \cdot 906} = 0,0135$$

(так как 1 атм. = 10 000 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$).

Значение средней скорости по формуле (14) теперь определится просто:

$$w = \frac{0,1^3 \cdot 9,81 \cdot 0,0135}{8 \cdot 10^{-7} \cdot 1824} \cong 0,91 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

Средняя скорость оказалась гораздо меньше критической, следовательно, *поток ламинарный*. Параметр Рейнольдса для нашего потока теперь легко определить. Он равен

$$\text{Re} = \frac{0,91 \cdot 0,2}{1824 \cdot 10^{-7}} \cong 998.$$

Находим далее объемный расход:

$$q = \pi a^2 \cdot w = 3,14 \cdot 0,1^3 \cdot 0,91 \cong 0,0286 \left[\frac{\text{м}^3}{\text{сек}} \right],$$

весовой расход:

$$q_{\text{вес}} = q \gamma = 0,0286 \cdot 906 = 25,9 \left[\frac{\text{кг}}{\text{сек}} \right]$$

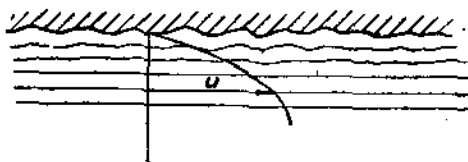
и, наконец, суточную производительность:

$$q_{\text{вес}}^{\text{сутки}} = 25,9 \cdot 3600 \cdot 24 = 224 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{сутки}} \cong 2240 \frac{\text{тонн}}{\text{сутки}}.$$

§ 5. Шероховатость стенок при ламинарном режиме не влияет на величину расхода (6) и на закон сопротивления (1).

Опытами установлено, что момент перехода ламинарного режима в турбулентный для *шероховатых труб* обуславливается не только численным значением параметра Рейнольдса, но и *степенью шероховатости стенок труб*. Это обстоятельство, естественно, объясняется тем, что шероховатость стенок является одним из агентов, обуславливающих зарождение вихрей в форме вихревых колец. В случае шероховатых труб *критическое число Рейнольдса*, при котором происходит перемена режима (т. е. переход от ламинарного к турбулентному), всегда несколько *меньше*, чем в случае

гладких труб. Как увидим дальше, сам закон сопротивления, которому подчиняется турбулентный поток, также зависит от степени шероховатости труб. Последнее обстоятельство объясняется тем, что большая или меньшая степень шероховатости при одном и том же числе Рейнольдса обуславливает большую или меньшую интенсивность образования вихревых колец. В случае ламинарного потока *интенсивность* образования вихревых колец вообще *равна нулю*. В ламинарном потоке происходит плавное обтекание всех выступов и неровностей (см. фиг. 39). При скоростях *ниже критических* срыв струй с острых выступов не происходит. При скоростях же *выше критических* этот срыв струй у стенок имеет место, — сорвавшиеся струи превращаются в вихревые кольца,



Фиг. 39.

передвигающиеся в сторону ядра потока. Сорвавшееся с острого выступа вихревое кольцо вначале обладает весьма незначительным запасом кинетической энергии (живой силы), так как скорость вблизи стенок мала. При передвижении в ядро потока вихревое кольцо вынуждено приобрести господствующую там (значительную) скорость (и следовательно живую силу), на что должна быть затрачена соответствующая работа. Эту работу (дополнительно к той, которая необходима при ламинарном потоке) и совершает насос при помощи столба жидкости, наподобие поршня. Так как при ламинарном режиме такие вихревые кольца отсутствуют, то этим и объясняется, почему шероховатость стенок не вносит изменения в закон сопротивления потока при этом режиме.

ЗАДАНИЕ 6.

ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

§ 1. Характер движения частиц и распределение скоростей по сечению (эллиптический закон).

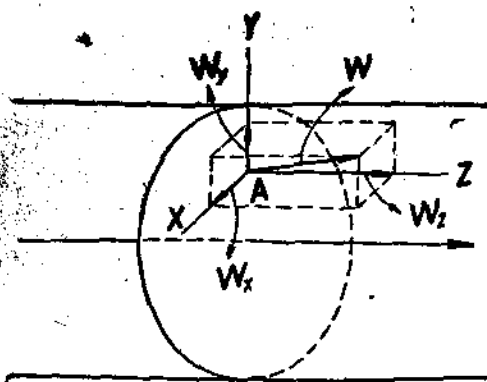
Турбулентное движение жидкости, в отличие от ламинарного, характеризуется беспорядочным движением — отдельные частицы жидкости движутся по весьма сложным криволинейным траекториям, сталкиваясь друг с другом и тем самым еще более усложняя картину турбулентного движения.

Несмотря на беспорядочность движения отдельно взятой частицы, можно выделить общие черты, которые будут характеризовать движение всего потока в целом. К такой характерной общей черте относится так называемая средняя местная скорость (термин, введенный Boussinesq'ом).

Прежде чем определим величину средней местной скорости, здесь дадим понятие о так называемой пульсации скорости, имеющей место только при турбулентном движении.

Если взять в трубе или канале (фиг. 40), по которым движется жидкость (движение турбулентное), произвольную точку *A* про-

...относительно за неподвижную, то через нее будут проходить частицы, имеющие различные направления движения и различные скорости, так что каждому элементу времени dt будет соответствовать по величине и направлению некоторая скорость W , которую можно считать за мгновенную.



Фиг. 40.

Продольная скорость

$$W_z = W \cos(W, Z)$$

и в каждый момент времени t будет различна, так как меняется по времени W и ее направление, т. е. $\cos(W, Z)$. Совершенно аналогично будем иметь и для W_x и W_y .

Графически изменение W_z , W_x и W_y можно представить, откладывая по оси абсцисс время T , а по оси ординат W_z или W_x , W_y .

На фиг. 41 представлен один из графиков изменения продольной скорости W_z .

Изменение во времени величины проекции мгновенной местной скорости на какое-либо направление называется пульсацией.

Выделим элементарную площадку $d\omega$ при точке A в плоскости живого сечения.

Расход жидкости, протекающей через эту площадку за время dt , будет равен:

$$W_z \cdot dt \cdot d\omega.$$

За конечный промежуток времени ΔT элементарный расход будет:

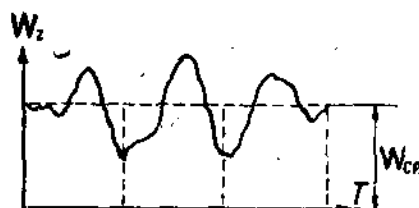
$$\Delta Q = \int_0^{\Delta T} W_z \cdot d\omega \cdot dt = d\omega \int_0^{\Delta T} W_z dt.$$

Средний элементарный расход будет:

$$\overline{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{d\omega \int_0^{\Delta T} W_z \cdot dt}{\Delta T}.$$

Примем неподвижную точку A за начало координат. Ось Z направим параллельно потоку, т. е. перпендикулярно живому сечению в данной точке, оси X и Y будут расположены в плоскости живого сечения.

Компонентами мгновенной скорости W будут продольная скорость W_z и две поперечных W_x и W_y .



Фиг. 41.

Ему будет соответствовать средняя скорость W_{cp} , постоянная во времени и по величине равная

$$W_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta \omega} = \frac{\int_0^{\Delta t} W_s \cdot dt}{\Delta T}, \quad (2)$$

Полученная таким образом скорость называется среднею местною скоростью.

Формула (2) имеет следующий смысл.

Средняя местная скорость (или так называемая осредненная местная скорость) есть такая постоянная по времени скорость, с которой через данную элементарную площадку $d\omega$ в течение промежутка времени ΔT должны были двигаться частицы жидкости, чтобы расход ее был равен тому расходу ΔQ , который в действительности за промежуток времени ΔT получается при переменных во времени мгновенных скоростях.

Таким образом совершенно беспорядочные движения приобретают характерные сравнимые величины.

При рассмотрении вопроса о распределении скоростей по живому сечению имеют в виду не мгновенные, а средние местные скорости.

Экспериментальные исследования, произведенные целым рядом гидравликов (Базен, Вейсбах и т. д.), дали иную картину распределения скоростей, чем та, которую имеем для случая ламинарного движения, а именно: при турбулентном движении скорость на весьма малом расстоянии от стенок трубы (канала) достигает сравнительно значительной величины и дальнейшее увеличение скорости происходит очень медленно. По старым воззрениям, господствовавшим в течение XIX столетия, такое быстрое возрастание скорости вблизи стенки объяснялось следующим образом: предполагалось, что поверхность стенки покрыта неподвижным слоем жидкости („прилипший слой“), вся остальная масса жидкости движется по этому слою со значительными скоростями. Отсюда по линии покусственной стенки (слоя) происходит резкий переход скорости от нуля до некоторой значительной величины — такой переход возможен только при разрыве скоростей у стенки. Исходя из гипотезы разрыва, был дан ряд формул, определяющих распределение скоростей по сечению.

Наиболее соответствовавшей действительному распределению скоростей была формула Базена (эмпирическая):

$$W = W_{max} - K \frac{W_{max}}{C} f\left(\frac{r}{R}\right), \quad (3)$$

где

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = 1 - \sqrt{1 - 0,95 \left(\frac{r}{R}\right)^4}$$

R — радиус трубы,

r — расстояние от центра живого сечения,

W_{max} — осевая скорость,

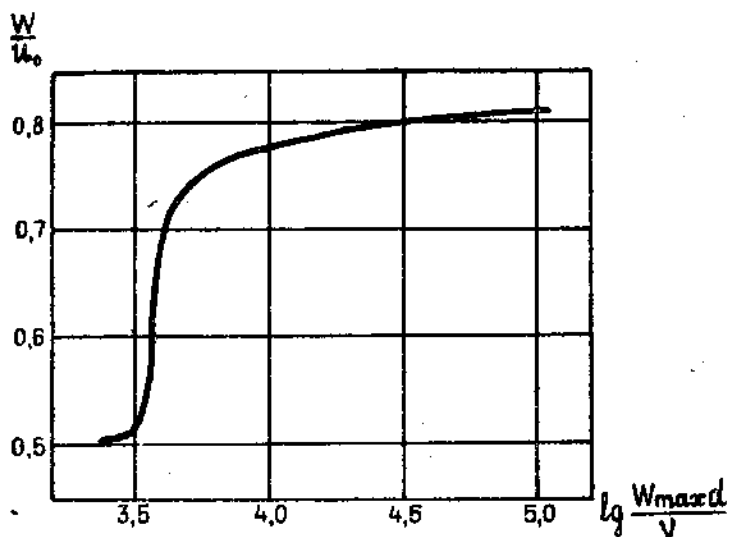
C — коэффициент,

$K = 41,6$.

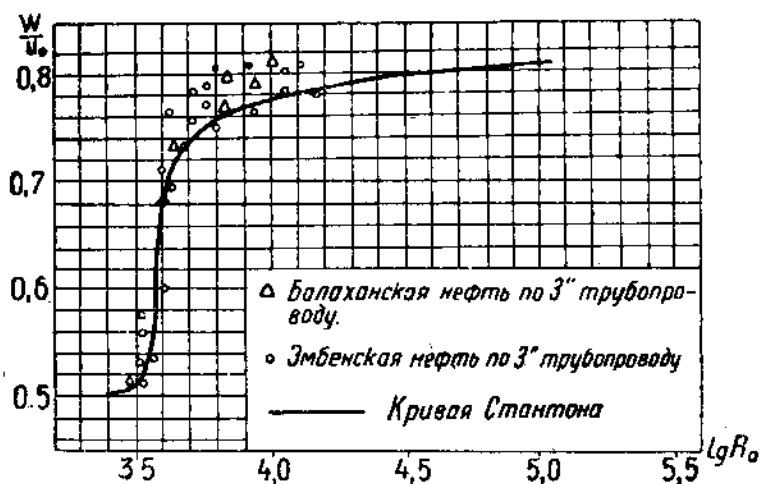
Кривая распределения скоростей, полученная по этой формуле, приближается к эллипсу.

§ 2. Опыты Стантона и Паннеля.

Вопросом, выясняющим зависимость средней скорости потока от осевой, занимался ряд гидравликов; но к самым точным в смысле измерения и эксперимента относятся работы проф. Стан-



Фиг. 42.



Фиг. 43.

тона и Паннеля, произведенные над движением воды и воздуха в круглой трубе. Осевая скорость измерялась тщательно проградуированной трубкой Пито (см. задание 31).

Результатом исследования была получена зависимость между отношением $\frac{W}{U_0}$ (средней скорости к осевой) и осевым числом Рейнольдса (Re), т. е. числом Re, отнесенным к осевой скорости.

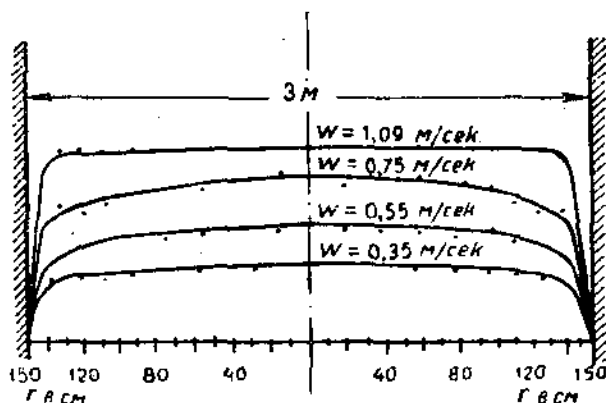
На фиг. 42 представлена кривая Стантона и Паннеля. Из диаграммы совершенно очевидно, что отношение $\frac{W}{U_0}$ изменяется в пределах от 0,5 до 1 и 0,5 соответствует $Re < 2300$, т. е. ламинарному движению.

Опыты по перекачке нефти на экспериментальной установке ГИНИ дали хорошие согласования с кривой Стантона и Паннеля (фиг. 43).

§ 3. Пограничный слой по Прандтлю.

Работами мирового ученого проф. Прандтля был положен конец старым воззрениям о возможности разрыва скоростей при турбулентном движении.

По идее Л. Прандтля турбулентный поток вблизи стенок образует тонкий, так называемый „пограничный слой“ („Grenzschicht“), в котором жидкость движется ламинарно; в остальной части трубы (канале) движение носит турбулентный характер.

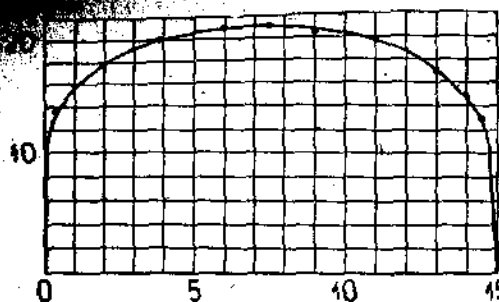


Фиг. 44.

Радиальное изменение скорости в турбулентной области происходит очень медленно, следовательно, градиент скорости (т. е. падение скорости на единицу длины по радиусу) имеет незначительную величину, в то же самое время происходит резкое изменение скорости в тонком пограничном слое, а именно: от нуля (на самой стенке) до скорости турбулентной части потока, здесь градиент скорости имеет значительную величину.

На фиг. 44 приведена картина распределения скоростей в поперечном сечении трубы, диаметром 3 м, полученная проф. Ганц Лоренцом в Данцигской лаборатории. На фиг. 45 дано распределение скоростей, полученное Никурадзе в канале Геттингенской лаборатории Прандтля.

...опыты проф. Стантона, произведенные в гидравлической лаборатории в Лондоне, показали, что изменение скорости в пограничном слое подчиняется параболическому закону Стокса.



Фиг. 45.

Работами голландского проф. Бюргерса над движением воздуха у поверхности тонкой пластинки подтверждено существование пограничного слоя, движение в котором ламинарно.

Наконец, проф. Прандтлю удалось в своей Геттингенской лаборатории заснять кинематографически картину возникновения и развития пограничного слоя при движении твердого тела в потоке жидкости и разных других случаях, рассматриваемых в гидравлике.

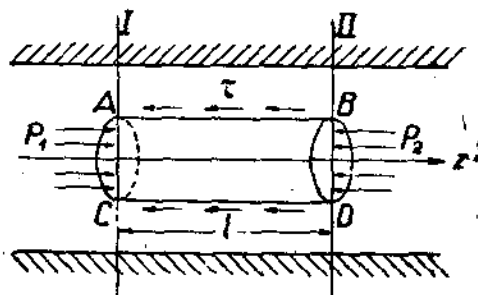
Все перечисленные работы подтверждают верность идеи, выдвинутой проф. Л. Прандтля.

§ 4. Квадратичный закон трения.

Рассмотрим установившееся равномерное турбулентное движение, постоянную скорость которого обозначим через W . Выделим сечениями I и II (фиг. 46), отстоящими друг от друга на расстоянии l , элемент $ABCD$ и рассмотрим условия его относительного равновесия.

Так как движение равномерное, то силы инерции отсутствуют.

Исходя из предположения равномерного распределения давлений по всему поперечному сечению и кроме того считая, что действующие силы целиком идут на преодоление силы трения, сосредоточенной у стенок трубы, получим условие равновесия приложенных к выделенному элементу сил в виде



Фиг. 46.

$$F(P_1 - P_2) = \tau_0 \lambda \cdot l, \quad (4)$$

где P_1 и P_2 — постоянны по каждому поперечному сечению (AC и BD) давления жидкости,

τ_0 — интенсивность силы трения (т. е. сила трения на единицу поверхности).

Отсюда

$$\tau_0 = \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \frac{F}{\lambda} = \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \delta; \quad (5)$$

на основании формул (задание 5)

$$P_1 - P_2 = \gamma h$$

и.

$$\tau = g \rho$$

имеем:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{g \cdot \rho \cdot h}{l}. \quad (6)$$

Кроме того имеем для потери напора формулу

$$h = \lambda \frac{l}{4\delta} \cdot \frac{w^2}{2g}. \quad (7)$$

Заменяя в (6) h через (7), получим:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{1}{8} \cdot \lambda \cdot \frac{\rho w^2}{\delta}.$$

Внося это в (5), окончательно будем иметь:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w^2. \quad (8)$$

Таким образом для случая турбулентного движения имеем квадратичный закон трения — трение пропорционально квадрату скорости.

§ 5. Формула Дарси-Вейсбаха для потери напора в трубе.

Жидкость движется в горизонтальной круглой трубе. Движение равномерное — турбулентное. Выделим цилиндрический объем жидкости (фиг. 46) $ABCD$, основание которого диаметра d , длина l . Все сопротивления отнесем к трению. Условием относительного равновесия будет:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d^2}{4} (P_1 - P_2) &= \pi d l \tau \\ (P_1 - P_2) \frac{d}{4} &= l \tau. \end{aligned} \quad (9)$$

В предыдущем параграфе имели:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{g \cdot \rho \cdot h}{l} \quad (6)$$

и

$$\tau = \frac{1}{8} \lambda \cdot \rho \cdot w^2. \quad (8)$$

Подставляя эти величины в (9), получим:

$$\frac{g \cdot \rho \cdot h}{l} \cdot \frac{d}{4} = \frac{1}{8} \lambda \rho w^2,$$

откуда

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}. \quad (10)$$

Полученная формула определяет потерю напора при турбулентном режиме и называется формулой Дарси-Вейсбаха. Она, как уже видели раньше, пригодна и для ламинарного режима.

Коэффициент трения λ зависит от плотности ρ , абсолютной вязкости μ , скорости w , диаметра труб d , шероховатости стенок ϵ ,

где $\epsilon = \frac{\text{максимальная высота бугорков на внутренней поверхности трубы}}{\text{диаметр трубы}}$.

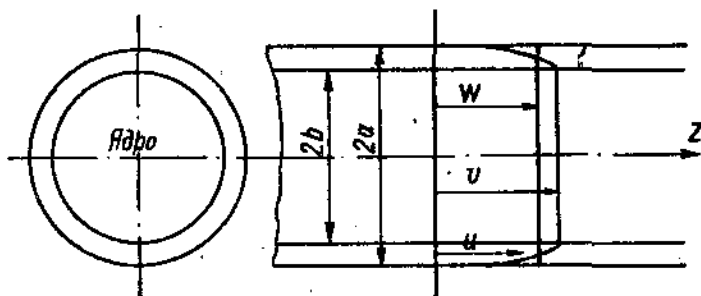
Вейсбахом была предложена формула (для воды), определяющая коэффициент трения λ , не учитывающая кроме скорости w других факторов, влияющих на ее величину:

$$\lambda = 0,01439 + \frac{0,009711}{\sqrt{w}}.$$

Более точные формулы для λ даны ниже, в задании 78.

§ 6. Упрощенная схема Прандтля.

Упрощенная схема турбулентного движения жидкости, предложенная проф. Л. Прандтлем, основана на предположении постоянства скорости по всему сечению турбулентной части движущейся жидкости, так называемого ядра течения.



Фиг. 47.

Рассмотрим равномерное турбулентное движение в цилиндрической трубе (фиг. 47) радиуса a . Введем обозначения:

b — радиус ядра (турбулентной части потока),

w — постоянная скорость ядра,

u — скорость ламинарного течения в какой-либо точке пограничного слоя.

По формуле Стокса (задание 5, § 1) для скорости в пограничном слое (ламинарное движение) имеем:

$$u = C(a^2 - r^2), \quad (11)$$

где r — расстояние от оси трубы, C — некоторая постоянная, которая определяется из условия на границе пограничного слоя.

В силу непрерывности изменения скорости на границе пограничного слоя и ядра, т. е. когда

$$r = b,$$

будем иметь равенство

$$u = v,$$

пользуясь которым, определяем C :

$$v = C(a^2 - b^2),$$

откуда

$$C = \frac{v}{a^2 - b^2}. \quad (12)$$

Отсюда, подставляя (12) в (11), получим закон распределения скоростей в пограничном слое

$$u = \frac{v(a^2 - r^2)}{a^2 - b^2}. \quad (13)$$

Эта формула дает параболическое распределение скоростей в пограничном слое, найденное в опытах Стантона.

Установим зависимость между потерей напора и скоростью ядра течения.

Выделим сечениями I и II (фиг. 48), отстоящими друг от друга на расстоянии l , элемент $ABCD$.

В силу равномерного течения, условие относительного равновесия будет иметь вид:

$$\pi b^2 (P_1 - P_2) = 2\pi bl\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \frac{b}{2} \quad (14)$$

С другой стороны по формуле (1) задания 5

$$\tau = -\mu \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=b} \quad (15)$$

Это выражение в силу отношения (13) будет:

$$\tau = \mu \frac{2vb}{a^2 - b^2}. \quad (16)$$

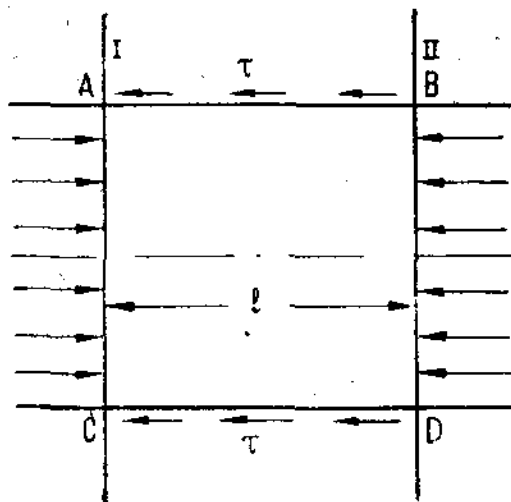
Сравнивая формулы (14) и (16), получим:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{4\mu v}{a^2 - b^2}, \quad (17)$$

что дает соотношение между падением давления на единицу длины и скоростью ядра, в зависимости от вязкости μ , радиуса трубы a и радиуса ядра b .

Совершенно очевидно, что потеря напора для всего потока должна быть отнесена не к скорости ядра v , а к средней скорости течения w .

Установим зависимость между v и w .



Фиг. 48.

Расход жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени, будет равен:

$$Q = \pi b^2 v + \int_0^a u \, 2\pi r \, dr, \quad (18)$$

т. е. количеству жидкости, протекающему в ядре и пограничном слое.

Внося во второй член правой части значение u из формулы (13), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^a u \, 2\pi r \, dr &= \frac{\pi v}{a^2 - b^2} \int_0^a (a^2 - r^2) \, dr^2 = \\ &= \frac{\pi v}{(a^2 - b^2)} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{2} = \frac{\pi v (a^2 - b^2)}{2}. \end{aligned}$$

Откуда расход жидкости окончательно будет равен:

$$Q = \pi b^2 v + \frac{\pi v (a^2 - b^2)}{2} = \frac{\pi v (a^2 + b^2)}{2}. \quad (18')$$

Расход жидкости, отнесенный к средней скорости потока w , будет:

$$Q = \pi a^2 w. \quad (19)$$

Сравнивая (18') и (19), получаем зависимость между v и w в виде:

$$v = \frac{2a^2}{a^2 + b^2} w. \quad (20)$$

Подставляя полученное значение v в формулу (17), будем иметь:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{8\mu a^2 w}{a^2 - b^2}.$$

Вводя обозначения $\eta = \frac{b}{a}$, получим:

$$F = \frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{8\mu w}{a^2(1 - \eta^4)},$$

откуда

$$w = \frac{Pa^2}{8\mu} (1 - \eta^4).$$

Расход жидкости окончательно может быть вычислен по формуле:

$$Q = w \cdot F = \frac{\pi a^4 P}{8\mu} (1 - \eta^4), \quad (21)$$

которая при

$$\eta = 0$$

переходит в формулу Пуазейля, определяющую расход для случая ламинарного движения.

Таким образом формула (21) будет обобщенной формулой Пуазейля для турбулентного движения.

На основании этих соображений можно получить следующую формулу (Л. С. Лейбензон) для коэффициента трения:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{Re}{K + Re}\right)^2} \quad (22)$$

совпадающую с опытами при Re до 20 000.

Значение $K = 576$.

ЗАДАНИЕ 7

ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИНЦИПА ПОДОБИЯ К ДВИЖЕНИЮ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ.

§ 1. Вывод формулы Рейнольдса.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ. В § 2 задания 4 были описаны опыты Рейнольдса, дано значение числа Re и критической скорости ($W_{крит.}$) потока, как критерии существования двух режимов—ламинарного и турбулентного.

В настоящем параграфе дан теоретический вывод критической скорости ($W_{крит.}$) и величины коэффициента трения λ . Вывод основан на применении метода размерности (принципа механического подобия).

В опытах Рейнольдса ни форма сечения труб, ни шероховатость их оказывать влияния на результаты не могли, так как он свои опыты вел в круглых гладких трубах.

Критическая скорость в этом случае зависит от диаметра трубы d , от физических свойств жидкости, т. е. от плотности жидкости ρ и ее вязкости μ .

Можно написать зависимость критической скорости от указанных факторов в виде:

$$W_{крит.} = \alpha d^k \rho^n \mu^m, \quad (1)$$

где α — постоянный коэффициент, k , n и m — неизвестные показатели.

Напишем размерность всех входящих в формулу величин:

$$\begin{aligned} W_{крит.} &= \left[\frac{L}{T} \right]; & \rho &= \left[\frac{M}{L^3} \right] \\ d &= [L]; & \mu &= \left[\frac{M}{LT} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Размерность коэффициента α остается пока неизвестной; обозначим ее $[\alpha]$. Формула (1), представленная в обозначениях размерности, примет вид:

$$LT^{-1} = [\alpha] \cdot [L]^k \cdot \left[\frac{M}{L^3} \right]^n \cdot \left[\frac{M}{LT} \right]^m$$

или

$$LT^{-1} = [\alpha] \cdot L^{k-3n-m} M^{n+m} T^{-m}. \quad (3)$$

Чтобы уравнение (1) имело смысл, необходимо, чтобы показатели при L , M , T в формуле (3) были бы одинаковы как в левой, так и в правой частях.

Полагая коэффициент α отвлеченным числом, показатели k , n и m будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} k - 3n - m &= 1 \\ n + m &= 0 \\ -m &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

откуда:

$$n = -1; m = +1; k = -1.$$

Подставляя в отношение (1) эти значения, получим формулу Рейнольдса для критической скорости:

$$W_{\text{крит.}} = \alpha \frac{1}{d} \cdot \frac{\mu}{\rho},$$

отсюда

$$\alpha = \frac{W_{\text{крит.}} d}{\frac{\mu}{\rho}},$$

т. е. α есть не что иное, как критическое значение числа Рейнольдса Re ; и так как отношение $\frac{\mu}{\rho}$ есть кинематическая вязкость ν , то окончательно

$$W_{\text{крит.}} = Re \frac{\nu}{d}. \quad (5)$$

2. Коэффициент трения λ есть функция числа Re . Исходя из принципа размерности, покажем, что λ является показательной функцией Re .

Падение давления на единицу длины равно:

$$i = \frac{h}{l} = \lambda \frac{1}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} \quad (1)$$

и зависит от диаметра трубы d , скорости w и физических свойств жидкости, т. е. от плотности ρ и вязкости μ .

Эту зависимость i от указанных величин можно представить в виде показательной функции

$$ig = \left(\frac{h}{l} \right) g = f(w, d, \mu, \rho) = A_1 w^n d^k \mu^m \rho^i. \quad (2)$$

Выделим из этой функции множитель

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

и будем иметь:

$$ig = (2g A_1) w^{n-2} d^{k+1} \mu^m \rho^i \cdot \frac{w^2}{d \cdot 2g}. \quad (2')$$

Обозначим $2A_1$ через A , $n-2 = n'$; $k+1 = k'$ и разделим обе части на g ; получим:

$$i = A w^{n'} d^{k'} \mu^m \rho^i \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} = \lambda \frac{1}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\lambda = Aw^{n'} d^{k'} \mu^{m'} \rho^{p'} \quad (4)$$

Так как в правой части соотношения (3) $\frac{1}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$ — отвлеченное число и λ также отвлеченное число, то и λ , совершенно очевидно, размерности не имеет:

$$\lambda = [L^0, M^0, T^0],$$

т. е. показатели при w , d , μ и ρ должны удовлетворять этому требованию.

Выражение (4) перепишем в виде равенства размерности

$$\begin{aligned} L^0 M^0 T^0 &= A \left[\frac{L}{T} \right]^{n'} \left[L \right]^{k'} \left[\frac{M}{LT} \right]^{m'} \left[\frac{M}{L^3} \right]^{p'} = \\ &= AL^{n'+k'-m-3p'} M^{m'+p'} T^{-n'-m}. \end{aligned}$$

Полагая коэффициент A отвлеченным числом, получим:

$$n' + k' - m - 3p' = 0,$$

$$m + p' = 0,$$

$$-n' - m = 0,$$

что дает:

$$n' = l = k' = -m$$

и, следовательно, выражение для λ должно иметь вид:

$$\begin{aligned} \lambda &= Aw^{n'} d^{n'} \mu^{-n'} \rho^{n'} = A \left[\frac{wd\rho}{\mu} \right]^{n'} = \\ &= A \left[\frac{wd}{\nu} \right]^{n'} = A (\text{Re})^{n'} = A (\text{Re})^{n-2}, \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом получим формулу Рейнольдса, определяющую λ , как показательную функцию числа Re .

Для случая турбулентного движения значение λ теоретически не определено и имеются только эмпирические формулы (см. задание 8). Для случая ламинарного движения имеем точное значение λ , изложенное в следующем параграфе.

§ 2. Приведение формулы Пуазейля к виду формулы Рейнольдса.

Для случая ламинарного движения потеря напора в формуле Пуазейля

$$h = \frac{32 \mu w}{\gamma d^3} \quad (6)$$

На основании формулы Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{w \cdot d}{\frac{\mu}{\rho}}$$

Имеем:

$$\mu = \frac{wd\rho}{\text{Re}} = \frac{wd\gamma}{\text{Re} \cdot g} \quad (7)$$

Подставляя значение μ в формулу (6), получим:

$$\eta = \frac{32\lambda\omega^2}{\text{Re} \cdot d \cdot g},$$

которая может быть представлена в виде:

$$\eta = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\omega^2}{2g},$$

где

$$\lambda = f(\text{Re}) = \frac{64}{\text{Re}} = A(\text{Re})^{-n}, \quad (8)$$

при этом $n = -1$.

§ 3. Графическое представление коэффициента сопротивления для обоих режимов.

На фиг. 49 представлена логарифмическая диаграмма изменения λ от числа R .

Предполагая зависимость λ в виде одночленной степенной функции

$$\lambda = AR^{-n},$$

где A и n —некоторые постоянные, логарифмируя, получим:

$$\lg \lambda = \lg A - n \lg R.$$

Откладывая по оси абсцисс $\lg R$, а по оси ординат $\lg \lambda$, получим диаграмму, представленную на фиг. 49.

Совершенно очевидно, что для ламинарного и турбулентного режима имеем прямые наклонные к оси абсцисс.

Из этого графика видно, что в области R от 2000 до 3000 λ претерпевает разрыв. Это происходит в области неустойчивого состояния движения жидкости в трубе — в области перехода от ламинарного режима к турбулентному.

§ 4. Обобщение формулы Рейнольдса.

На основании формул Рейнольдса, Пуазейля и Лейбензона мы можем вообще принять, что

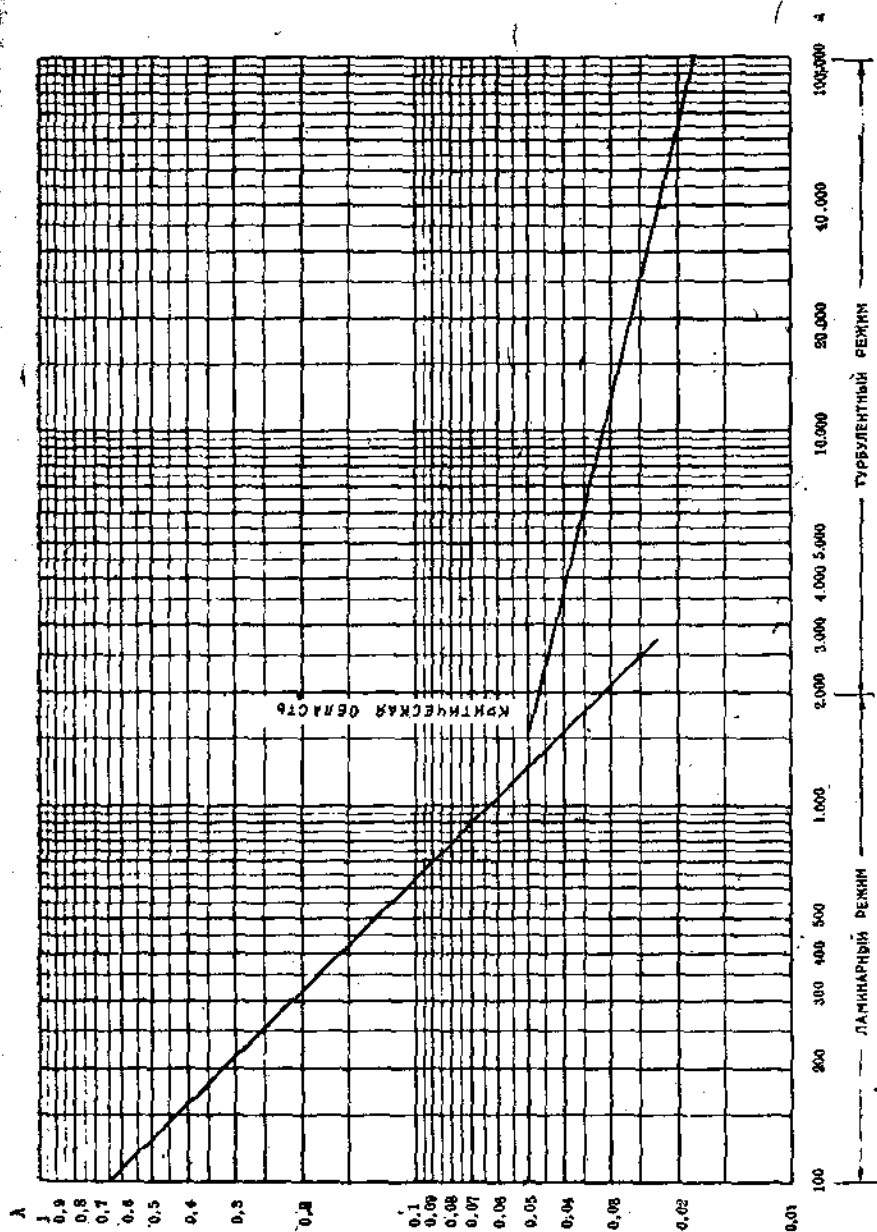
$$\lambda = f(\text{Re}, \epsilon),$$

т. е. коэффициент трения зависит исключительно от значения числа Рейнольдса и от относительной шероховатости, какой бы ни был режим движения жидкости.

Следовательно, все движение жидкости характеризуется числом Рейнольдса Re .

§ 5. Закон Кармана-Прандтля.

Распределение скоростей для случая турбулентного течения вполне характеризуется схемой проф. Прандтля, т. е. скорость в ядре почти постоянна и только в пограничном слое происходит быстрое падение скорости до нуля.



Фиг. 49.

Для гладких труб на движение вблизи стенок будет влиять состояние ближайших слоев рассматриваемого потока, но не всей жидкости. Поэтому распределение скоростей вблизи стенки ($r \rightarrow a$) будет зависеть не только от ν , ρ , но и от расстояния от стенки

$$y = a - r \text{ и от } \tau_0$$

(силы трения о стенку на единицу площади), что аналитически можно представить в виде

$$u = f(\nu, \rho, \tau_0, y), \quad (9)$$

где u — скорость на расстоянии y от стенки.

Распределение скоростей по поперечному сечению симметрично относительно оси. Отсюда отношение скорости u к осевой скорости u_0 будет функцией расстояния r от оси трубы до рассматриваемого места:

$$\frac{u}{u_0} = \varphi\left(\frac{r}{a}\right). \quad (10)$$

Пользуясь способом механического подобия, определим распределение скоростей в поперечном сечении потока.

Составим размерность отношений

$$\frac{y}{\nu} \text{ и } \frac{\tau_0}{\rho};$$

имеем:

$$\left[\frac{y}{\nu}\right] = \frac{L}{L^2/T} = L^{-1} T = [u^{-1}],$$

т. е. это отношение имеет размерность, обратную величине скорости:

$$\left[\frac{\tau_0}{\rho}\right] = \frac{M \cdot L^2}{L \cdot T^2 \cdot M} = L^2 T^{-2} = [u^2],$$

т. е. размерность квадрата скорости.

Размерность произведения

$$\left[\frac{y}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right] = u^{-1} \cdot u^{+1} = [u^0]$$

есть отвлеченное число.

Предполагая, что в формуле (9) имеет место степенная зависимость, получим:

$$u = B \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \left(\frac{y}{\nu}\right)^m \cdot \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{m}{2}} = B \left(\frac{y}{\nu}\right)^m \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad (11)$$

где B есть отвлеченное число.

Отсюда:

$$\tau_0 = \rho \left[\nu^m y^{-m} \cdot u \cdot B^{-1} \right]^{\frac{2}{m+1}}. \quad (12)$$

Полученное равенство (12) справедливо для всех значений m . В частности, полагая $m = 1$, получим:

$$\tau_0 = B^{-1} \rho v y^{-1} u$$

основной (линейный) закон Пуазейля.

Полагая $m = 0$, получим:

$$\tau_0 = B^{-1} \rho u^2$$

квадратичный закон потери напора в трубе (закон для случая шероховатых стенок).

Основная формула (9), для распределения скоростей вблизи стенок, будет:

$$u = C \left(\frac{y}{a} \right)^m, \quad (13)$$

где a — радиус трубы,

C — величина, не зависящая от (y) .

Отношение

$$\frac{y}{a} = \frac{a-r}{a} = 1 - \frac{r}{a},$$

откуда

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{y}{a}$$

$$\left(\frac{r}{a} \right)^n = \left(1 - \frac{y}{a} \right)^n = 1 - \frac{n \cdot y}{a}, \quad (14)$$

если ограничиться первой степенью $\frac{y}{a}$, в виду малости этого отношения.

Закон распределения скоростей по сечению трубы, данный формулой (10) $\frac{u}{u_0} = \varphi \left(\frac{r}{a} \right)$, представим в форме, предложенной Карман-Прандтлем:

$$\frac{u}{u_0} = \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]^m. \quad (15)$$

Из этой формулы для распределения скоростей вблизи стенки получим выражение (13), если вместо $\left(\frac{r}{a} \right)^n$ подставим его значение из равенства (14):

$$u = u_0 \left[1 - 1 + \frac{ny}{a} \right]^m = C \left(\frac{y}{a} \right)^m$$

Для случая турбулентного режима

$$m = \frac{1}{7},$$

тогда

$$\frac{u}{u_0} = \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]^{\frac{1}{7}}. \quad (16)$$

При $n =$ от 1,25 до 2 это уравнение с большой точностью подтверждается наблюдениями, особенно тщательно произведенными Никурадзе в Геттингенской лаборатории Прандтля.

$$= 0,338 \text{ при } n = 1,25$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 0,875 \quad n = 2.$$

ЗАДАНИЕ 3

ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ

§ 1. Старые формулы для коэффициента сопротивления.

В предыдущем задании было указано, что при турбулентном течении жидкостей по трубам теория позволяет только лишь указать на существование зависимости между коэффициентом трения λ и параметром Рейнольдса Re . Попытки теоретически найти аналитическую связь между этими двумя величинами пока остались бесплодными.

Однако до классических работ Осборна Рейнольдса мы имели множество исследований, направленных к определению коэффициента трения λ в зависимости от гидравлических и геометрических условий движения жидкости.

С этой целью было произведено очень много опытов.

Опыты должны были дать коэффициенты для расчета водопроводов и газопроводов. Отсюда понятно, что объектами эксперимента были вода, светильный газ и воздух. Перекачками вязких продуктов (напр. нефтей) в то время не занимались, для воды же вязкость меняется в весьма незначительных пределах. В силу этих причин все исследователи до Рейнольдса не замечали влияния вязкости жидкости на коэффициент сопротивления λ .

Кроме того в водопроводах, имеющих обычно большие диаметры, вода, как правило, движется турбулентным течением; газы, имеющие весьма малую вязкость, всегда движутся при турбулентном движении.

В следующем параграфе мы увидим, что при турбулентном течении влияние вязкости на коэффициент трения невелико.

Эти два обстоятельства также наложили отпечаток на характер эмпирических формул, составленных до работ Рейнольдса.

Тем не менее многие из этих формул, найденные из опытов над перекачкой воды, до сих пор рекомендуются и с успехом применяются для расчетов водопроводов. Перечислим главнейшие из них.

1. Формула Фламана (для воды температуры $15^\circ C$)

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt[4]{w \cdot d}}, \quad (1)$$

где a принимают от 0,0104 до 0,0122 для свинцовых, жестяных и стеклянных труб и выбирают $a = 0,018$ для старых железных, чугунных и стальных труб.

2. Формула Ланга (составленная на основании 300 опытов):

$$\lambda = a + \frac{b}{\sqrt{w \cdot d}}, \quad (2)$$

где w — измеряется в м/сек., а d в м и где a и b имеют следующие значения:

а) гладкие трубы (прессованные на оправке или тянутые стеклянные или оцинкованные, а также асфальтированные или глазурированные) с гладким переходом в стыках:

$$a = 0,012; b = 0,0018;$$

б) труба с незначительными неровностями на внутренней поверхности стенок и в стыках (трубы чугунные и железные):

$$a = 0,02; b = 0,0018.$$

3. Формула Вейсбаха:

$$\lambda = 0,01439 + \frac{0,0094711}{\sqrt{v}}. \quad (3)$$

Эта формула согласуется с опытными данными при $d > 0,1$ и $v > 2$ м/сек.

§ 2. Новые формулы для коэффициента сопротивления.

После классических работ Осборна Рейнольдса, впервые установившего критерий, позволяющий различать два режима движения жидкостей, стало очевидным, что пренебрегать вязкостью жидкости для расчета трубопроводов нельзя.

Дальнейшие опыты имели целью найти эмпирическую зависимость между коэффициентом сопротивления λ и параметром Рейнольдса Re . Главнейшие и наиболее употребительные формулы суть следующие:

1. Формула Блазиуса

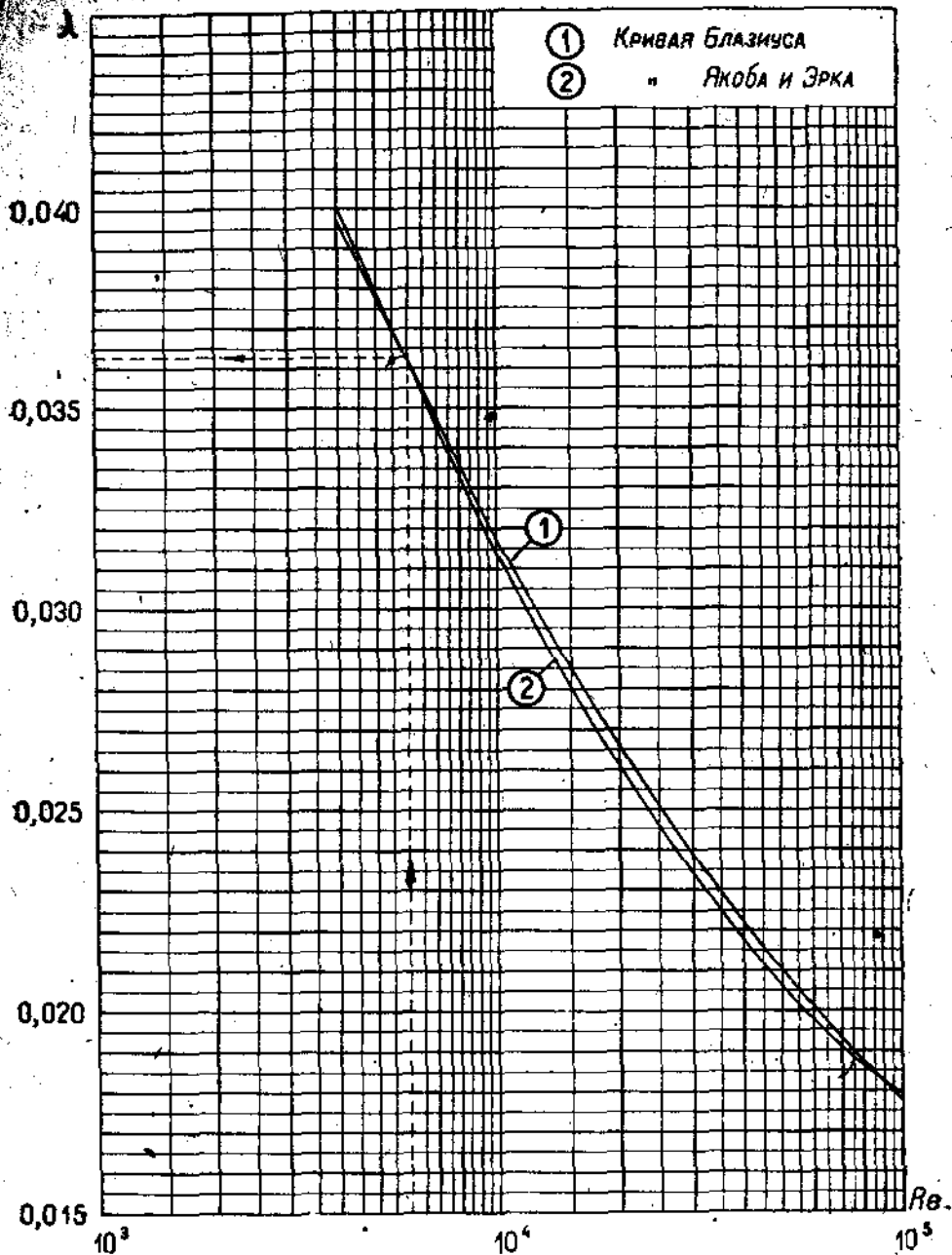
$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (4)$$

Формула эта была получена на основании обработки многочисленных наблюдений (напр., опыты Шаф и Шедера над водой) и не давала отклонений более 7%. Формула эта может быть рекомендована для расчета трубопроводов с гладкими стенками и при числах $Re < 70\,000$.

2. Формула фон-Мизеса для шероховатых труб:

$$\lambda = 0,0096 + \sqrt{\frac{K_0}{d}} + \sqrt{\frac{3}{Re}}. \quad (5)$$

Значение коэффициента абсолютной шероховатости K_0 , который имеет, очевидно, размерность длины, берется из таблицы 2. В той же таблице 2 приведены значения $\sqrt{K_0}$.



Фиг. 50.

Таблица 2.

	$10^5 K_0$ (м)	$10^4 \sqrt{K_0}$ (м ^{1/2})
Трубы железные	от 640 до 1 600	от 25 до 40
Трубы жестяные или чугунные (асфальтированные)	" 950 " 1 900	" 30 " 44
Трубы чугунные новые	" 3 200 " 6 400	" 60 " 80
Трубы бывшие в употреблении	" 8 000 " 16 000	" 90 " 128

3. Формула Лиса для труб с очень гладкими стенками

$$\lambda = 0,0072 + \frac{0,6104}{Re^{0,35}} \quad (6)$$

Формула эта получена на основе опытов Стантона (Национальная физическая лаборатория, Лондон), определившего весьма тщательно коэффициенты сопротивлений при движении воды и воздуха по трубам. Формула эта хорошо согласуется с опытами в интервале значений параметра Рейнольдса от $Re = 2320$ до $Re = 460\,000$.

4. Формула Якоба и Эрка для труб с очень гладкими стенками:

$$\lambda = 0,00714 + \frac{0,6104}{Re^{0,35}} \quad (7)$$

Формула эта почти не отличается от формулы Лиса. Графическое сравнение формул Блазиуса и Якоба-Эрка приведено на фиг. 50.

§ 2а. Новейшие опытные формулы в области очень больших Рейнольдсовых чисел. Таблица Прандтля.

1. На основании экспериментов, произведенных в гидравлической лаборатории Лейпцигского университета Р. Герман (R. Hermann) и Л. Шиллер предложили следующую эмпирическую формулу (1930 г.):

$$\lambda = 0,0054 + 0,396 \cdot Re^{-0,3}$$

пригодную в интервале:

$$20\,000 < Re < 1\,800\,000.$$

2. Теоретическая формула Кармана:

$$\lambda = \frac{A}{\lg_{10} (Re \sqrt{\lambda}) - B}^2,$$

где, согласно опытам И. Никурадзе в Геттингенской лаборатории проф. Л. Прандтля (1931 г.), получено:

$$A = 0,266; B = 0,27.$$

В виду того что λ входит в знаменатель, этой формулой пользуются по способу последовательных приближений, задаваясь λ ,

внося его в знаменатель и вычисляя по формуле Кармана новое λ . Полученное значение λ снова вносят в знаменатель и вычисляют по формуле более точное значение λ и т. д.

3. С целью ориентировки при этих вычислениях помещаем ниже таблицу проф. Л. Прандтля („Abriss der Strömungslehre“, 1931).

Таблица Прандтля

Re	4000	12 000	60 000	180 000	840 000	10 800 000
λ	0,040	0,030	0,020	0,0160	0,0120	0,0080

§ 3. Опытные формулы для движения нефти.

Все вышеперечисленные формулы получены из опытов над перекачкой воды. В связи с развитием нефтепроводной техники за последнее двадцатилетие произведены многочисленные опыты над перекачкой светлых и темных нефтепродуктов.

Опыты показали, что при одном и том же параметре Re коэффициенты сопротивления для нефтепродуктов, вообще говоря, несколько больше, чем для воды. Так, напр., опыты, произведенные на нефтепроводе Грозный—Петровск проф. А. Н. Сахановым и А. А. Кашевым, показали, что экспериментальные коэффициенты дают отклонение от формулы Блазиуса до 9,3%.

Опыты эти не преследовали нахождения эмпирических зависимостей. В 1925 г. А. В. Булгаков произвел опытные перекачки балаханской масляной нефти (Баку) уд. веса 0,870—0,888 $\frac{г}{см^3}$ на трубопроводах от 5 до 8 дм.

В результате обработки этих наблюдений им была дана формула:

$$\lambda = \frac{0,415}{Re^{0,28}}. \quad (8)$$

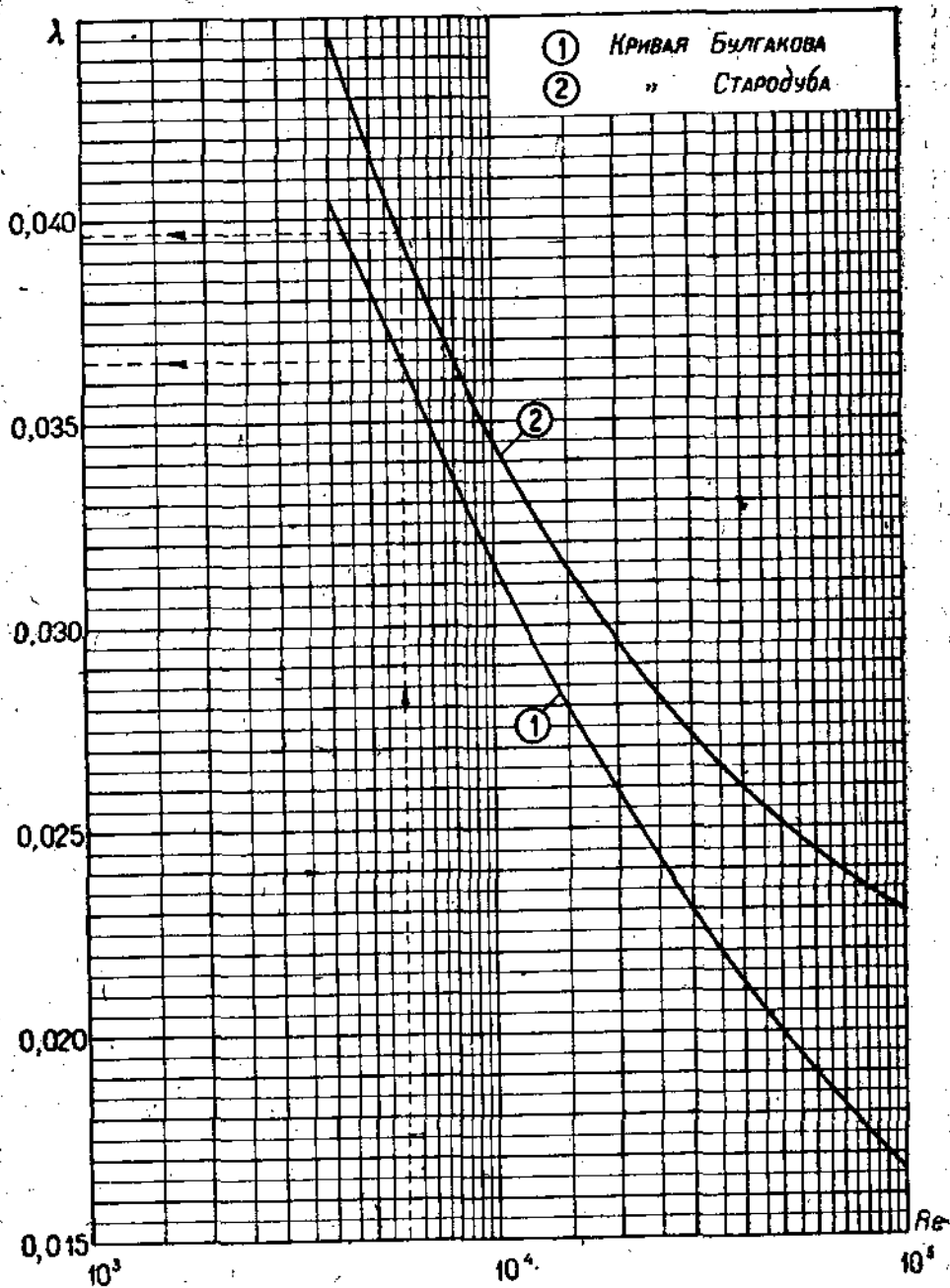
Эта формула была получена для узкого интервала значений параметра Рейнольдса (от 3 000 до 10 000) и давала отклонения от опытов до 5%.

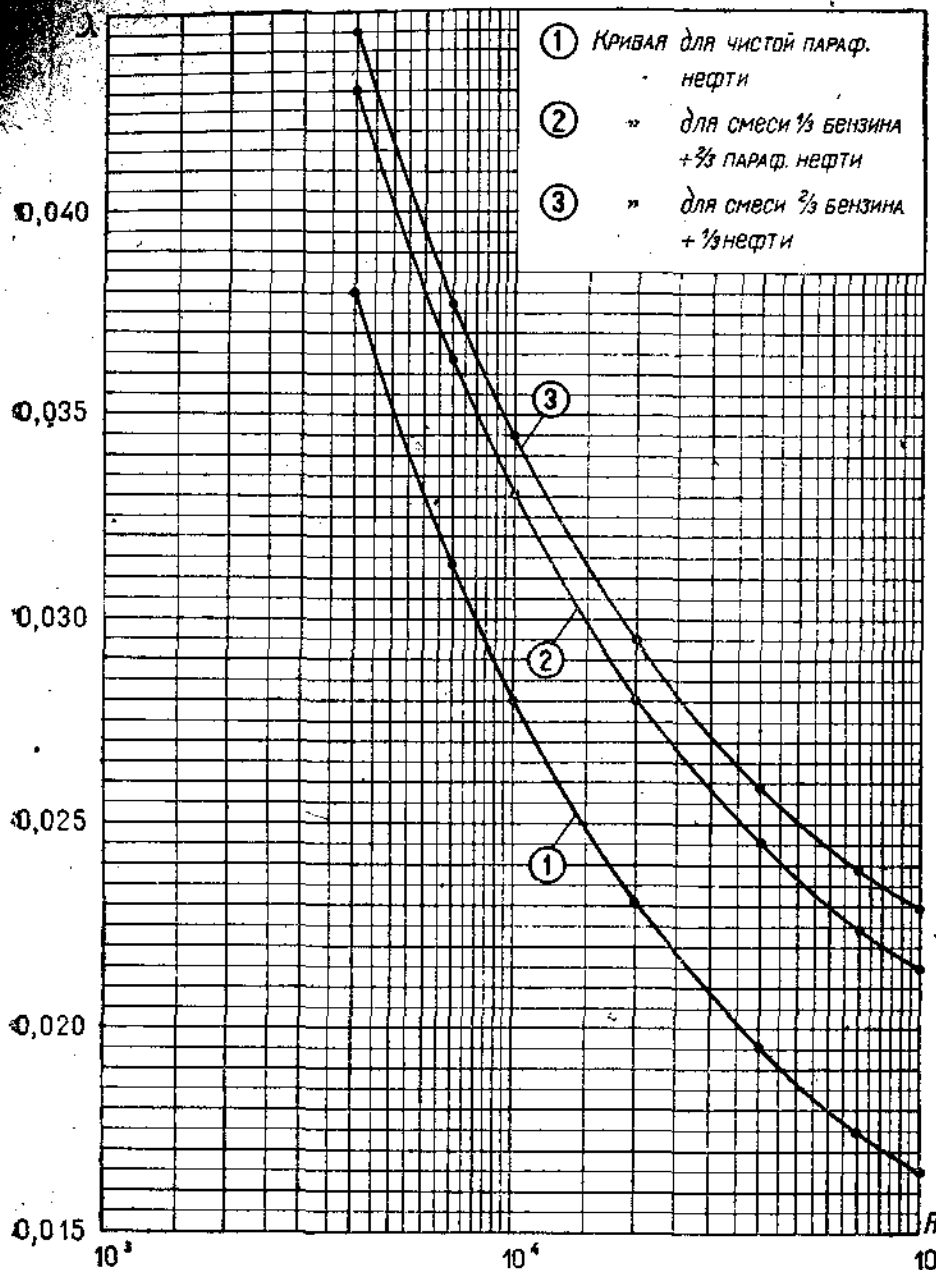
Инж. Б. Я. Стародуб подвергнул обработке наблюдения, произведенные в 1917 г. над перекачкой нефти по закавказскому керосинопроводу, и дал следующую формулу:

$$\lambda = 0,0175 + \frac{1,7}{\sqrt{Re}}. \quad (9)$$

Графическое сравнение формул Булгакова и Стародуба приведено на фиг. 51.

Многочисленные опыты над перекачками различных нефтей, произведенные в Государственном исследовательском нефтяном институте, показали, что явления трения в различных нефтепродуктах в области турбулентного течения протекают, вообще говоря, по различным законам. Так, напр., в 1925 г. в ГИНИ были





Фиг. 52.

произведены опытные перекачки чистой парафинистой нефти в ее смесей с бензином. Обработка экспериментальных данных дала следующие зависимости (см. фиг. 52):

$$\lambda = 0,0111 + \frac{1,7}{\sqrt{Re}} \text{ для чистой парафинистой нефти.}$$

$$\lambda = 0,0161 + \frac{1,7}{\sqrt{Re}} \text{ для смеси } 1/3 \text{ бензина и } 2/3 \text{ парафинистой нефти}$$

$$\lambda = 0,0175 + \frac{1,7}{\sqrt{Re}} \text{ для смеси } 2/3 \text{ бензина и } 1/3 \text{ нефти.}$$

Эти опыты показали, что примесь светлых продуктов к парафинистой нефти увеличивает сопротивление трения. К тем же результатам привели опытные перекачки смеси парафинистой нефти с бензином на новом нефтепроводе „Грозный—Туапсе“.

Анализируя эти данные, составляющие лишь небольшую часть опубликованных опытов, мы приходим к заключению, что для производства точных расчетов потерь на трение в нефтепроводах необходимо располагать данными о перекачке данной нефти на лабораторном или промышленном трубопроводе.

Нанося все эти кривые на графики, мы однако убеждаемся, что в интервале значения числа Рейнольдса от 3000 до 300 000 кривые, полученные для нефтепродуктов, весьма близко согласуются с опытной кривой Ланга

$$\lambda = 0,02 + \frac{1,7}{\sqrt{Re}}$$

давая отклонение от последней около 10%.

§ 4. Влияние разных факторов на движение жидкостей.

Резюмируя все вышесказанное, можно считать, что с достаточной степенью точности коэффициент сопротивления можно выразить в виде одночленной формулы вида

$$\lambda = \frac{a}{(Re)^m}$$

или

$$\lambda = \frac{a \cdot u^m}{w^m d^m}, \text{ где} \quad (10)$$

I) $a = 64$ и $m = 1$ для ламинарного течения (сравнивая с формулой (8) (задание 7)).

II) $a = 0,3164$ и $m = 1/4$ для турбулентного течения по Блазиусу (формула 4).

III) $a = 0,415$ и $m = 0,28$ по Булгакову (формула 8).

Подставляя в формулу (10) (задание 6) вместо коэффициента его выражение из соотношения (10), мы получим для потерь напора следующую зависимость:

$$h = \frac{a}{2g} \cdot l \cdot \frac{w^{2-m} \cdot u^m}{d^m + 1} \quad (11)$$

$$Q = w \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Включить из выражения (11) скорость, получим:

$$h = \frac{a \cdot 4^{2-m}}{2g\pi^{2-m}} \cdot l \cdot \frac{Q^{2-m} \cdot u^m}{d^{5-m}}. \quad (12)$$

Анализируя выражение (11) мы можем сделать следующие заключения:

1) при ламинарном течении жидкости в круглой трубе ($m=1$) потеря напора прямо-пропорциональна длине, скорости и вязкости и обратно-пропорциональна квадрату диаметра трубы;

2) при турбулентном режиме, считая справедливым закон сопротивления Блазиуса ($m=0,25$), потеря напора прямо-пропорциональна длине, скорости в степени 1,75, корню четвертой степени из вязкости и обратно-пропорциональна диаметру в степени 1,25.

Из этих двух положений вытекает, что вязкость незначительно влияет на потерю напора при турбулентном движении. Чтобы потеря напора удвоилась, для этого надо, чтобы вязкость возросла в $2^4 = 16$ раз. Если же вязкость увеличится в 2 раза, то h возрастает всего лишь в $\sqrt[4]{2} = 1,19$ раза, т. е. на 19%.

При ламинарном же режиме увеличению вязкости в 2 раза соответствует увеличение потери напора в 2 раза и наоборот.

Влияние скорости на потерю напора более существенно при турбулентном режиме, где зависимость потери напора h от скорости близка к квадратичному закону ($m=0$). В самом деле, при увеличении скорости в 2 раза потеря напора возрастает в $2^{1,75} = 3,36$ раза, тогда как при квадратичном законе это увеличение было бы в 4 раза.

Влияние диаметра на потерю напора при обоих режимах приблизительно одинаково.

Перепишем формулу (12) в несколько ином виде, а именно:

$$Q = \left(\frac{\pi^{2-m} \cdot 2g}{4^{2-m} a} \right)^{\frac{1}{2-m}} \cdot \frac{d^{\frac{5-m}{2-m}} \cdot h^{\frac{1}{2-m}}}{l^{\frac{1}{2-m}} \cdot u^{\frac{m}{2-m}}}. \quad (13)$$

Анализируя эту зависимость, мы можем высказать следующие два положения:

1) при ламинарном движении жидкости в круглой трубе ($m=1$) расход жидкости прямо-пропорционален располагаемому напору и четвертой степени диаметра трубы и обратно-пропорционален длине трубы и вязкости жидкости.

2) при турбулентном режиме, считая справедливым закон Блазиуса ($m=0,25$), расход жидкости прямо-пропорционален располагаемому напору в степени $4/7$, диаметру трубы в степени $10/7$ и обратно-пропорционален длине трубы в степени $4/7$ и вязкости жидкости в степени $1/7$.

Таким образом при увеличении располагаемого напора вдвое расход жидкости возрастает:

при ламинарном режиме в 2 раза
„ турбулентном „ „ 1,48 „

Если диаметр увеличить в 2 раза, то расход увеличится:

при ламинарном режиме в 16 раз
„ турбулентном „ „ 6,56 „

Если трубопровод укоротить в 2 раза, то расход возрастет:

при ламинарном режиме в 2 раза
„ турбулентном „ „ 1,48 „

Если вязкость жидкости увеличится вдвое, то расход жидкости уменьшится:

при ламинарном режиме в 2 раза
„ турбулентном „ „ 1,1 „

Итак, мы видим, что при ламинарном течении жидкости, влияние на расход изменений диаметра и вязкости более значительно, чем при турбулентном.

ЗАДАНИЕ 9

РАЗЛИЧНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ.

§ 1. Коэффициент расхода В. Г. Шухова.

Если в формуле Дарси-Вейсбаха считать коэффициент сопротивления постоянным, т. е.

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

то отсюда следует, что потеря напора прямо-пропорциональна квадрату скорости, длине трубопровода и обратно-пропорциональна диаметру трубы.

Это допущение довольно близко к истине при турбулентном течении жидкостей с большими скоростями.

Опираясь на этот приближенный закон, можно с помощью формулы для расхода привести последнее выражение к виду:

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \cdot \sqrt{d^5 \frac{h}{l}}$$

или, обозначая через

$$m = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \quad (1)$$

и

$$i = \frac{h}{l},$$

имеем так называемую формулу В. Г. Шухова:

$$Q = m \sqrt{d^5 i}. \quad (2)$$

Если выражать расход Q в кубических футах в минуту и диаметр трубы d в дюймах, то значение коэффициента m по многочисленным опытам В. Г. Шухова берется из следующей таблицы:

$m = 5,$	для керосина и воды, при температуре $6,25^{\circ}\text{Ц}$
$m = 4,$	сырой нефти " " $6,25^{\circ}\text{Ц}$
$m = 0,6 + 0,06 t$	мазута для средней температуры t

Среднюю температуру вычисляют как среднюю арифметическую температур мазута в начале и конце мазутопровода. Если же в формуле В. Г. Шухова выражать расход жидкости Q в кубических метрах в секунду, а диаметр в метрах, то коэффициент расхода m берется по следующей таблице, заимствуемой нами из книги Филонова „Движение нефти по трубам“ (стр. 48):

для керосина	$m = 23,$
бакинских нефтей	$m = 18,4,$
мазута	$m = 4,6.$

Из формулы (1) можно получить следующую простую связь между коэффициентом сопротивления λ и коэффициентом расхода m , полагая $2g = 2 \cdot 9,81 \text{ м/сек.}^2$, имеем

$$m = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{19,62}{\lambda}} = \frac{3,48}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3)$$

Если же m выбрано в дюймовых единицах, то

$$m = \frac{0,763}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4)$$

Формула В. Г. Шухова относится к 1885 г., т. е. к тому периоду, когда о работах О. Рейнольдса было мало известно. Тем не менее в формуле Шухова мы видим попытку оценить неявным образом изменение сопротивлений в зависимости от физической природы перекачиваемого продукта. Величины коэффициентов, определяемых по формуле Шухова, вообще говоря, дают несколько преувеличенные значения, поэтому расчет нефтепровода, выполненный на их основе, будет содержать в себе незначительный запас, обеспечивающий поддержание проектной пропускной способности трубопровода на значительное время.

§ 2. Расчет горизонтального трубопровода.

Для расчета нефтепровода необходимо располагать следующими данными:

- 1) Пропускная способность (в тоннах — в год или в сутки или в час) или расход (кубические метры в секунду или кубические сантиметры в секунду).
- 2) Диаметр трубопровода и его длина.
- 3) Характеристика нефтепродукта (вязкость и уд. вес при различных температурах).

4) Средняя температура, при которой будет производиться перекачка.

Для удобства расчета заданные контрольные цифры следует привести к такому виду, который бы позволил пользоваться общепринятыми формулами и диаграммами. В основном эти преобразования будут заключаться в переводе различных величин на одни мер в другие (тонны в килограммы, годы в секунды, километры и дюймы — в метры).

Итак, пусть в результате всех этих преобразований мы имеем следующие проектные цифры: весовой расход Q в м/сек., диаметр d в м, длина l в м, кинематическая вязкость ν в м²/сек., удельный вес γ в кг/м³ при средней температуре $T^{\circ}\text{C}$.

Задача о расчете нефтепровода в разбираемом частном случае сводится к определению потребного для перекачки нефти напора h . Последний вычисляется по формуле Дарси-Вейсбаха:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^3}{2g}. \quad (5)$$

Таким образом, для расчета потери напора нам необходимо вычислить:

- 1) объемный расход Q ;
- 2) среднюю скорость w ;
- 3) коэффициент трения f .

Для нахождения объемного расхода Q мы воспользуемся следующей формулой, связывающей объемные единицы и уд. вес с весовыми единицами:

$$Q \cdot \gamma = G,$$

отсюда

$$Q = \frac{G}{\gamma}; \quad (6)$$

так как G выражено в кг/сек, а γ в кг/м³, то Q получится в м³/сек.

Вторая величина найдется из формулы

$$w = \frac{Q}{F}, \quad (7)$$

где $F = \frac{\pi d^2}{4}$ есть площадь поперечного сечения трубопровода.

Выражая F в м², мы из формулы (7) получим скорость w в м/сек.

Коэффициент сопротивления λ может быть определен согласно формулам (8), задания 7, либо формулам (4), (5), (6), (7), (8), (9) задания 8. Однако для того, чтобы выбрать соответствующую формулу, необходимо выяснить, при каком режиме будет происходить перекачка. Для этого вычисляем число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{w \cdot d}{\nu}; \quad (8)$$

если окажется, что $\text{Re} < 2300$, т. е. режим ламинарный, то расчет следует вести по формуле (8), задания 7. Если же число Рейнольдса будет больше 2300, то для расчета следует применять перечисленные в задании 8 эмпирические формулы для коэффициента сопротивления λ при турбулентном режиме.

Зная w и λ , можно вычислить потребный напор h по формуле (5). При этом h будет выражено в метрах столба того нефтепродукта, на который ведется весь расчет.

Пример. Определить потерю напора для 6-дм. нефтепровода, длиной 50 км, перекачивающего 400000 т нефти в год, уд. вес при температуре 15° Ц $\gamma = 0,8711$ г/см³ и кинематическая вязкость при той же температуре $\nu = 0,252$ см²/сек.

Считая при отсутствии резерва агрегатов 300 рабочих дней в году, найдем весовой расход нефти:

$$G = \frac{400000000}{300 \cdot 24 \cdot 3600} = 15,45 \text{ кг/сек.}$$

Зная уд. вес нефти

$$\gamma = 871,1 \text{ кг/м}^3,$$

найдем объемный расход по формуле (6):

$$Q = \frac{15,45}{871,1} = 0,017740 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

Диаметр 6-дм. нефтепровода, т. е.

$$d = 6 \cdot 2,54 = 15,24 \text{ см,}$$

и площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi(15,24)^2}{4} = 182,6 \text{ см}^2.$$

По формуле (7) определим среднюю скорость

$$w = \frac{17740}{182,6} = 97,2 \text{ см/сек.}$$

Выясним характер движения, для чего вычисляем число Рейнольдса по формуле (8)

$$Re = \frac{97,2 \cdot 15,24}{0,252} = 5880;$$

так как режим движения турбулентный, то коэффициент сопротивления находим по формулам задания 8:

По формуле Блазиуса (4) имеем:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{5,880}} = 0,0361.$$

По формуле фон-Мизеса (5)

$$\lambda = 0,0096 + \sqrt{\frac{2000}{10^5 \cdot 0,1524}} + \sqrt{\frac{3}{5880}} = 0,0368.$$

По формуле Лиса (6)

$$\lambda = 0,0072 + \frac{0,6104}{5880^{0,35}} = 0,0365.$$

По формуле Якоба и Эрка (7) результат не будет отличаться от этой величины.

По формуле Булгакова (8)

$$\lambda = \frac{0,415}{5880^{0,28}} = 0,0365$$

и, наконец, по формуле Стародуба (9)

$$\lambda = 0,0175 + \frac{17}{\sqrt{5880}} = 0,0397.$$

Анализируя полученные данные, мы видим, что по всем формулам, кроме зависимости, данной Стародубом, числа коэффициента сопротивления получаются около 0,0365. Так как формула Стародуба не получила пока еще дополнительных подтверждений, мы в основу расчета положим коэффициент

$$\lambda = 0,0365.$$

Откуда по формуле Дарси-Вейсбаха (5) можно вычислить потерю напора:

$$h = 0,0365 \cdot \frac{5\,000\,000}{15,24} \cdot \frac{(97,2)^2}{2 \cdot 981} \cong 57\,665 \text{ см.}$$

Напор этот будет равновелик давлению $p = h \cdot \gamma$, откуда

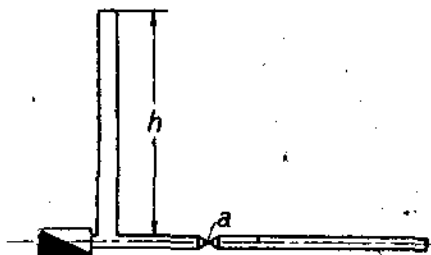
$$p = 57\,665 \cdot 0,000874 = 50,2 \text{ кг/см}^2.$$

ЗАДАНИЕ 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИВЫГОДНЕЙШЕГО ДИАМЕТРА ТРУБОПРОВОДА.

§ 1. Подсчет мощности насосов.

Если известен напор, потребный для перекачки заданного весового расхода нефти по трубопроводу, то подсчет мощности насосов ведется, исходя из следующих соображений. Пусть в начале нефтепровода, непосредственно после насоса, мы имеем вертикальную трубу большого диаметра, высота которой равна высоте напора h , потребного для перекачки нефти (см. фиг. 53). Если эта труба открыта сверху, то во время перекачки нефть поднимается до самого верха и труба будет служить пьезометром. Перекрыв задвижку a , мы заставим жидкость двигаться по пьезометру при том же начальном давлении и с прежним расходом. При этом через верхний край пьезометра каждую секунду будет выбрасываться G нефти. Таким образом каждую секунду высоту h метров будет подниматься G кг жидкости.



Фиг. 53.

Определяя мощность насосной установки как секундную работу, мы получим последнюю как произведение веса жидкости Q на высоту подъема h , т. е.

$$W = Gh. \quad (1)$$

Переходя к лошадиным силам, мы получим:

$$N = \frac{Gh}{75}. \quad (2)$$

Обозначив через η коэффициент полезного действия установки, мы получим затрачиваемую мощность:

$$\bar{N} = \frac{Gh}{75 \cdot \eta}. \quad (3)$$

К тем же результатам можно прийти, исходя из следующих соображений.

Пусть для перекачки нефти уд. веса γ (в кг/м^3) по трубопроводу диаметра d (в м), со скоростью w требуется напор h (в м). Так как мощность есть работа, совершаемая в единицу времени, т. е.

$$W = P \cdot w, \quad (4)$$

где P — сила, производящая работу, а w есть скорость (т. е. путь, отнесенный к единице времени), сила P — производящая работу, будет, очевидно, равна давлению, развиваемому насосом p , умноженному на площадь поперечного сечения трубопровода F , т. е.

$$P = p \cdot F,$$

причем

$$p = h \cdot \gamma.$$

Таким образом согласно формуле (4) получим:

$$W = h \cdot \gamma \cdot w \cdot F. \quad (5)$$

Из определения объемного расхода имеем:

$$q = w \cdot F,$$

следовательно,

$$W = h \cdot \gamma \cdot q = pq. \quad (6)$$

Кроме того известно, что весовой расход

$$G = \gamma \cdot q,$$

откуда

$$W = h \cdot G. \quad (7)$$

Итак, полезная мощность может быть представлена либо как произведение давления на объемный расход, либо как произведение потери напора на весовой расход.

Если величину давления p выражать в кг/м^2 , объемный расход q в $\text{м}^3/\text{сек.}$, потерю напора h в м и весовой расход G в кг/сек. то мощность будет в обоих случаях получаться в килограмм-метрах в секунду.

Учитывая коэффициент полезного действия насосной установки составим выражение для мощности в лошадиных силах (л. с.) потребной для работы насоса. Получим:

$$N = \frac{pq}{75 \cdot \eta} = \frac{hG}{75 \cdot \eta} \quad (8)$$

Пример. Определить мощность насоса для трубопровода рассчитанного в задании 9, если коэффициент полезного действия насоса $\eta = 0,8$.

В задании 9 было вычислено:

$$\begin{aligned} p &= 502\,000 \text{ кг/м}^2 & q &= 0,017740 \text{ м}^3/\text{сек.} \\ h &= 576,65 \text{ м} & G &= 15,45 \text{ кг/сек.} \end{aligned}$$

По формуле (5) имеем:

$$N = \frac{502\,000 \cdot 0,017740}{75 \cdot 0,8} = 148,4 \text{ л. с.}$$

или

$$N = \frac{576,65 \cdot 15,45}{75 \cdot 0,8} = 148,5 \text{ л. с.}$$

Разница в получившихся результатах не превышает 0,1%.

§ 2. Стоимость эксплуатации.

Стоимость эксплуатации нефтепровода складывается из следующих статей:

1. Эксплуатационные расходы.
2. Амортизация насосных станций.
3. Амортизация нефтепровода.
4. Капитализация (процент на капитал).

Первая статья — „эксплуатационные расходы“ содержит:

- а) расходы по содержанию рабочих и служащих и охраны как на насосных станциях, так и в управлении нефтепровода со всеми начислениями (социальное страхование, профсоюз и т. д.);
- б) расходы на текущий и капитальный ремонт оборудования (в год);
- в) энергетические расходы в год (топливо, электроэнергия, вода, смазочные материалы и т. д.);
- г) прочие расходы в год (канцелярские расходы и т. д.).

Вторая статья — „амортизация насосных станций“ исчисляется следующим образом: определяется полная стоимость сооружения насосных станций, в которую входят:

- а) стоимость зданий;
- б) стоимость оборудования (насосов), агрегатов (котлы, дизели или электромоторы и редуктора, подъемные краны);

- в) стоимость резервуаров;
- г) стоимость стационарных линий и фитинга;
- д) стоимость различного оборудования (мастерская).

Во все эти пункты включается не только стоимость самого оборудования и материалов, но и его установка, т. е. рабсила, доставка, инструменты, всевозможные начисления на зарплату. После того, как исчислена полная стоимость насосных станций, устанавливается срок амортизации.

Если полный срок службы установлен n лет, то ежегодно следует возвращать $\frac{1}{n}$ часть полной стоимости насосных станций, что составит $\frac{100}{n} \%$. Умножая полную стоимость станций на $\frac{1}{n}$, получим „амортизацию насосных станций“.

Третья статья. Точно так же исчисляется сумма третьей статьи эксплуатационных расходов — „амортизация нефтепровода“.

Стоимость сооружения нефтепровода складывается из:

- а) стоимости отчужденных земель;
- б) стоимости труб и фитинга с их доставкой и развозкой;
- в) стоимости соединений (сварка, свинчивание и окраска);
- г) стоимости укладки труб (рытье траншей, зарытие трубопровода);
- д) стоимости искусственных сооружений;
- е) стоимости телеграфа и подъездных путей;
- ж) стоимости сторожевых постов, содержания управления строительством;

а) прочих расходов по строительству (изыскания, бараки, оплата охраны, страховки и т. д.).

В эти пункты расходов входит, кроме стоимости материалов и оборудования, также рабочая сила, инструмент, энергия и всевозможные начисления на зарплату. Принимая срок амортизации нефтепровода m лет, мы получим „амортизационные расходы по нефтепроводу“ как произведение полной стоимости сооружения трубопровода на $\frac{1}{m}$.

Четвертая статья. Последняя статья эксплуатационных расходов — „капитализация“, исчисляется, исходя из общей стоимости вооружения как насосных станций, так и трубопровода. Принимая средний процент на капитал p годовых, мы получим содержание этой статьи расходов как произведение общей стоимости всего сооружения на $\frac{p}{100}$.

Если по трубопроводу перекачивается в год G нефти, а эксплуатационные расходы (по всем статьям) составляют S руб., то стоимость перекачки одной тонны будет равна $\frac{S}{G}$.

Для иллюстрации сказанного выше приведем ориентировочные проектные цифры по упомянутым выше статьям для нефтепроводов Баку — Батум.

10-дм. нефтепровод Баку—Батум.

Длина трубопровода 826,4 км.

Число насосных станций 13.

Производительность 1 600 000 т/год.

I. Эксплуатационные расходы

по пункту а)	866 000 руб.
„ „ б)	550 800 „
„ „ в)	427 700 „
„ „ г)	176 000 „

Итого . 2 020 000 руб.

II и III—Амортизация 4% от полной стоимости нефтепровода и станций, равной 51 683 000 руб. . . 2 067 320 руб.

IV. Капитализация 8% от той же суммы 3 100 980 руб.

Всего . 7 258 300 руб.

Стоимость перекачки 1 т

$$\frac{7\,258\,300}{1\,600\,000} \approx 4 \text{ руб. } 54 \text{ коп.}$$

Полная стоимость нефтепровода и насосных станций Баку-Батумского нефтепровода складывается из следующих статей:

а) Стоимость насосных станций.

Стоимость зданий	9 196 000 руб.
Стоимость основного оборудования	5 494 000 „
Стоимость резервуаров	839 000 „
Стоимость стационарных линий	545 000 „
Стоимость различного оборудования (мастерские, вентиляция, запасные части)	1 262 000 руб.
Доставка материалов и оборудования	700 000 „

Итого . . 17 836 000 руб.

б) Стоимость трубопровода.

Стоимость земель	200 000 руб.
Стоимость труб и фиттинга с их доставкой и развозкой	20 450 000 руб.
Стоимость соединений	2 917 000 „
Стоимость укладки труб	1 324 000 „
Стоимость искусственных сооружений	320 000 „
Стоимость телеграфа и подъездных путей	1 211 000 „
Стоимость сторожевых постов	110 000 „
Содержание управления строительства и накладные расходы	5 267 000 „
Прочие расходы по строительству	2 048 000 „

Итого . . 33 847 000 руб.

Всего . . . 51 683 000 руб.

§ 3. Определение наиболее выгодного диаметра по В. Г. Шухову.

Проблема наиболее выгодного диаметра трубопровода с экономической точки зрения и наиболее выгодного использования трубопровода данного диаметра была рассмотрена В. Г. Шуховым в 1881 г.

Для решения этих задач, кроме расчетных данных, необходимо располагать целым рядом экономических показателей.

Итак пусть дано:

L — длина трубопровода,

Q — расход нефти (проектной),

p — предельное давление, развиваемое насосами на перекачивающих станциях.

Требуется определить:

d — диаметр трубопровода,

n — число насосных станций.

Обозначим:

S — стоимость трубопровода.

Эту величину можно разбить на следующие слагаемые:

S_1 — часть стоимости трубопровода, не зависящая от диаметра трубопровода (рытье траншей, искусственные сооружения, дороги, связь, охрана, изыскания, управление строительством и т. д.);

$S_2 \cdot d$ — часть стоимости, пропорциональная диаметру трубопровода (сварка, окраска, изоляция);

$S_3 \cdot d \cdot \delta$ — часть стоимости, пропорциональная весу трубопровода (стоимость труб, доставка, развозка по линии).

Толщина стенки трубопровода δ определяется по известной формуле Мариотта:

$$\delta = \frac{p \cdot d}{2k} + C, \quad (9)$$

где k — допускаемое напряжение на растяжение материала труб,
 C — постоянная величина, прибавляемая для компенсации изнашивания и коррозии.

В таком случае:

$$S = S_1 + S_2 d + S_3 d \left(\frac{pd}{2k} + C \right)$$

или

$$S = S_1 + (S_2 + S_3 C) d + S_3 \frac{p}{2k} d^2.$$

Обозначив

$$S_4 = S_2 + S_3 C$$

и

$$S_5 = S_3 \frac{p}{2k},$$

имеем:

$$S = S_1 + S_4 d + S_5 d^2.$$

Следуя Дюрану, представим последнее выражение в более удобном для исследования виде:

$$S = S_1 + S_6 d^m, \quad (10)$$

где показатель степени m вычисляется из уравнения

$$S_6 d^m = S_4 d + S_5 d^2 \quad (11)$$

и равен приблизительно 1,5 (по Гибсову).

Обозначим через R стоимость одной насосной станции, тогда полная стоимость нефтепровода U

$$U = S_1 + R \cdot n. \quad (12)$$

Стоимость эксплуатации V складывается из

$M_1 n$ — стоимости эксплуатации насосных станций, пропорциональной их числу,

M_2 — прочих расходов, не зависящих от числа станций и диаметра трубопровода, и

M_3 — процентов на капитал и амортизации.

Таким образом

$$V = M_1 n + M_2 + M_3. \quad (13)$$

Число насосных станций можно связать с диаметром трубопровода при помощи следующего уравнения:

$$n \cdot \frac{p}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{Q^r}{d^q} L, \quad (14)$$

представляющего полную потерю напора на всей длине трубопровода. Правая часть этого выражения получается из формулы (12) задания 8, если обозначить

$$\alpha = \frac{a 4^{2-m} u^m}{2g\pi^{2-m}} \quad (15)$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} r &= 2 - m \\ q &= 5 - m \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Итак,

$$n = \frac{\beta}{d^q}, \quad (17)$$

где

$$\beta = \frac{\alpha \cdot Q^r L \gamma}{p}. \quad (18)$$

После этого формулы (12) и (13) примут вид

$$U = S_1 + S_6 d^m + \frac{R\beta}{d^q} \quad (19)$$

и

$$V = \frac{M_1 \beta}{d^q} + M_2 + M_3. \quad (20)$$

Если принять a процентов на капитал и амортизацию, то

$$M_3 = \frac{a \cdot U}{100}$$

или

$$M_3 = \frac{a}{100} \left(S_1 + S_6 d^m + \frac{R\beta}{d^q} \right) \quad (21)$$

и, следовательно,

$$V = \frac{M_1 \beta}{d^q} + M_2 + \frac{a}{100} \left(S_1 + S_6 d^m + \frac{R\beta}{d^q} \right) \quad (22)$$

или, окончательно,

$$V = \left(M_2 + \frac{aS_1}{100} \right) + \frac{aS_6}{100} d^m + \left(M_1 + \frac{aR}{100} \right) \frac{\beta}{d^q}. \quad (23)$$

Найдем минимум этого выражения, для чего возьмем производную от V по d и приравняем ее нулю; имеем:

$$\frac{amS_0}{100} d^{m-1} - \left(M_1 + \frac{aR}{100} \right) \frac{q\beta}{d^{q+1}} = 0,$$

откуда

$$d^{m+q} = \frac{100 \left(M_1 + \frac{aR}{100} \right) q\beta}{amS_0}. \quad (24)$$

Эта формула позволяет найти наиболее выгодный с экономической точки зрения диаметр трубопровода.

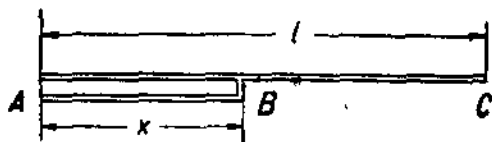
ЗАДАНИЕ II.

УВЕЛИЧЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НЕФТЕПРОВОДОВ.

§ 1. Расчет люпинга (loop).

В практике весьма часто приходится сталкиваться с необходимостью увеличения пропускной способности функционирующих нефтепроводов. Поэтому при сооружении нефтепровода иногда имеют в виду возможность увеличения его производительности в порядке второй очереди. Мы рассмотрим здесь три основных метода расширения пропускной способности: 1) вставка люпингов, 2) увеличение числа насосных станций и 3) повышение напора действующих станций. В этом параграфе мы коснемся только вопроса о люпингах.

Если напор насосной станции оставлять неизменным, то пропускную способность нефтепровода можно увеличить за счет



Фиг. 54.

увеличения диаметра труб. При этом его можно увеличивать и не по всей длине трубопровода, а только на некоторой части. На участке вставного (большого) диаметра скорость потока, а следовательно и потеря напора, соответственным образом уменьшится, что позволит увеличить расход, не подымая давления на станции. Такой же точно эффект можно получить, вставив в линию на некотором производном участке длины x добавочную параллельную трубу (см. фиг. 54). При этом поток раздвоится, скорость и потеря напора в каждой ветви уменьшится, за счет чего возможно увеличение расхода без повышения давления насосов. Вставная параллельная труба носит название люпинга (петля).

Итак, пусть при некотором нормальном расходе Q_0 , на который рассчитывался нефтепровод, потеря напора в нем составляет h м. По формуле Дарси-Вейсбаха имеем:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{16 Q^2}{\pi^2 \cdot d^5} \cdot \frac{1}{2g}. \quad (1)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления λ для большинства случаев может быть выражен в общей форме в виде

$$\lambda = \frac{A}{(\text{Re})^m}, \quad (2)$$

где A и m — некоторые постоянные числа (напр., по формуле Блазиуса $A = 0,3164$ и $m = 0,25$, для ламинарного режима $A = 64$ и $m = 1$).

Выражая число Рейнольдса через расход, имеем:

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d^2} \cdot \frac{d}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu}.$$

Внося это в выражение (2), для λ получаем:

$$\lambda = A \cdot \left(\frac{\pi d \nu}{4Q} \right)^m.$$

После этого формула (1) принимает вид:

$$h = \beta \cdot l \cdot \frac{Q^{2-m}}{d^{5-m}}, \quad (3)$$

где

$$\beta = A \cdot \frac{\pi^m \nu^m}{4^m} \cdot \frac{16}{\pi^2 \cdot 2g}$$

есть некоторое число, не зависящее от диаметра и расхода. В случае закона Блазиуса, напр., β равно:

$$\beta = \frac{0,3164 \cdot \pi^{1/4} \cdot 16}{4^{1/4} \cdot \pi^2 \cdot 2g} \cdot \nu^{1/4} \cong 0,0246 \nu^{1/4} \quad (4)$$

и для ламинарного режима:

$$\beta = \frac{128}{\pi g} \cdot \nu. \quad (5)$$

Пусть на некотором участке длины x вставлен люпинг диаметра d_1 , и при этом по нефтепроводу, прокачивается новое количество нефти в секунду Q при прежнем давлении насосов. По формуле (3) на участке $BC = l - x$ (см. фиг. 54) будет иметь место при этом потеря напора h_{BC} , равная

$$h_{BC} = \beta (l - x) \frac{Q^{2-m}}{d^{5-m}}.$$

На участке $AB = x$ в обоих ветвях, очевидно, должны быть одинаковые потери напора, так как давления в начале и в конце каждой ветви одинаковы. Обозначая эту потерю напора через h_{AB} , расход по основной трубе диаметра d через q и по люпингу диаметра d_1 через q_1 , будем иметь

$$h_{AB} = \beta \cdot x \cdot \frac{q^{2-m}}{d^{5-m}} = \beta x \frac{q_1^{2-m}}{d_1^{5-m}}.$$

Отсюда получаем соотношение:

$$\left(\frac{q}{q_1}\right)^{2-m} = \left(\frac{d}{d_1}\right)^{5-m}, \quad (6)$$

которое дает распределение расхода по каждой из двух труб. Сумма расходов q и q_1 очевидно равна расходу Q :

$$Q = q + q_1. \quad (7)$$

Из соотношения (6) находим q_1 :

$$q_1 = q \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{5-m}{2-m}},$$

с другой стороны, из равенства (7):

$$q_1 = Q - q,$$

следовательно,

$$q \left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{5-m}{2-m}} = Q - q,$$

откуда

$$q = \frac{Q}{1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{5-m}{2-m}}}.$$

Если мы желаем, чтобы при наличии люпингов насосы работали на прежнем давлении, то потеря напора h должна равняться сумме потерь h_{AB} и h_{BC} , т. е.

$$h = h_{AC} = h_{AB} + h_{BC}. \quad (8)$$

Внося сюда соответственные значения, находим после сокращения всего равенства на $\frac{\beta}{d^{5-m}}$:

$$lQ_0^{2-m} = (l-x)Q^{2-m} + x \cdot q^{2-m}. \quad (9)$$

Внося сюда значение q , получаем:

$$lQ_0^{2-m} = (l-x)Q^{2-m} + x \left[\frac{Q}{1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{5-m}{2-m}}} \right]^{2-m}.$$

Отсюда определяем длину x люпинга:

$$x = \varphi \left[1 - \left(\frac{Q_0}{Q} \right)^{2-m} \right] l, \quad (10)$$

где

$$\varphi = \frac{\left[1 + \left(\frac{d_1}{d} \right)^{\frac{5-m}{2-m}} \right]^{2-m}}{\left[1 + \left(\frac{d_1}{d} \right)^{\frac{5-m}{2-m}} \right]^{2-m} - 1}. \quad (11)$$

Как видим, коэффициент φ в формуле длины люпинга (10) зависит только от отношения диаметров люпинга и основной трубы и от закона трения (m). В таблице 3 приведены значения φ для различных значений отношения $\left(\frac{d_{\text{люпинга}}}{d_{\text{основной трубы}}}\right)$. При этом в основу принят закон Блазиуса.

Таблица 3.

$\frac{d_1}{d} =$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\varphi =$	5,35	3,08	2,32	1,89	1,64	1,43	1,31	1,22	1,17	1,13	1,10

Обычно люпинги ставят того же диаметра, что и основная труба. В этом случае $d = d_1$ и, следовательно, фактор φ будет равен

$$\varphi = \frac{2^2 - m}{2^2 - m - 1}. \quad (12)$$

1. Для ламинарного режима имеем:

$$m = 1 \text{ и } \varphi = 2,$$

таким образом расчетная формула для люпинга будет:

$$x = 2 \cdot \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) \cdot l. \quad (13)$$

2. Для турбулентного режима, следующего закону Блазиуса, имеем:

$$m = 0,25 \text{ и } \varphi = \frac{2^{7/4}}{2^{7/4} - 1} = 1,43,$$

и расчетная формула для люпинга:

$$x = 1,43 \cdot \left[1 - \left(\frac{Q_0}{Q}\right)^{7/4}\right] \cdot l. \quad (14)$$

3. Для турбулентного режима, подчиняющегося чисто квадратному закону трения, имеем:

$$m = 0 \text{ и } \varphi = 1,333$$

и, следовательно, расчетная формула примет вид:

$$x = 1,333 \left[1 - \left(\frac{Q_0}{Q}\right)^2\right] \cdot l. \quad (15)$$

Таким образом длина люпинга всегда пропорциональна всей длине трубопроводов и определяется отношением нормального расхода Q_0 (без люпинга) к новому расходу Q (с люпингом) при условии сохранения величины давления перекачивающих насосов.

При увеличении расхода, очевидно, должна быть увеличена и мощность насосов. До прокладки люпинга мощность N_0 равнялась:

$$N_0 = \frac{PQ_0}{75 \eta} \text{ в л. с.,}$$

при работе с люпингом новая мощность N равна:

$$N = \frac{PQ}{75 \eta} \text{ в л. с.}$$

Таким образом увеличение мощности пропорционально увеличению расхода:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{Q}{Q_0}. \quad (16)$$

§ 2. Эквивалентная длина.

Пусть между станциями A и B по длине нефтепровода L , диаметр которого равен d , расположены последовательно n люпингов, длины и диаметры которых соответственно равны:

$$\begin{aligned} &\text{длины } x_1, x_2, \dots, x_n \\ &\text{диаметры } d_1, d_2, \dots, d_n \end{aligned}$$

Из формулы (10) мы можем определить расход Q в зависимости от длины вставленного люпинга и нормального расхода Q_0 .

Имеем:

$$Q = \frac{Q_0}{\left(1 - \frac{x}{\varphi L}\right)^{\frac{1}{2-m}}}. \quad (17)$$

Следовательно, если бы был установлен один только люпинг (x_1, d_1), то мы получили бы расход Q_1 , равный:

$$Q_1 = \psi_1 \cdot Q_0,$$

где

$$\psi_1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{\varphi_1 L}\right)^{\frac{1}{2-m}}}. \quad (18)$$

После установки второго люпинга получим новый расход по формуле:

$$Q_2 = \psi_2 \cdot Q_1,$$

где

$$\psi_2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{x_2}{\varphi_2 L}\right)^{\frac{1}{2-m}}}$$

и так далее. Наконец, после установки n -го люпинга получим:

$$Q_n = \psi_n \cdot Q_{n-1},$$

где

$$\psi_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{x_n}{\varphi_n L}\right)^{\frac{1}{2-m}}}.$$

Внося в последнее равенство значение Q_{n-1} из ряда предыдущих равенств, получим:

$$Q_n = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \dots \psi_n Q_0 \quad (19)$$

т. е. окончательный расход, получаемый благодаря наличию n люпингов.

Внося значения $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, находим:

$$Q_n = \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{\varphi_1 L}\right) \left(1 - \frac{x_2}{\varphi_2 L}\right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{\varphi_n L}\right)} \right]^{\frac{1}{2-m}} \cdot Q_0 \quad (20)$$

Сохраняя давление насоса неизменным, мы могли бы расход Q_n перекачивать по трубопроводу основного диаметра на расстояние l , определяемое очевидно из соотношения

$$h = \beta L \cdot \frac{Q_0^{2-m}}{d^{5-m}} = \beta l \cdot \frac{Q_n^{2-m}}{d^{5-m}}$$

Отсюда

$$l = \left(\frac{Q_0}{Q_n} \right)^{\frac{2-m}{1-m}} \cdot L \quad (21)$$

или, с помощью равенства (20):

$$l = \left(1 - \frac{x_1}{\varphi_1 L} \right) \left(1 - \frac{x_2}{\varphi_2 L} \right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{\varphi_n L} \right) \cdot L \quad (22)$$

В случае одного люпинга длины x имеем:

$$l = \left(1 - \frac{x}{\varphi L} \right) \cdot L \quad (23)$$

Величина l носит название *эквивалентной длины*. Она представляет собой ту длину нефтепровода основного диаметра d , которая оказывает такое же гидравлическое сопротивление, как и заданный нефтепровод длины L , снабженный n люпингами.

Таким образом, если задан нефтепровод и система люпингов на нем, то по формуле (22) можно найти длину l , эквивалентную этому нефтепроводу (в гидравлическом смысле). Затем по формуле Дарси-Вейсбаха можно определить и пропускную способность (при заданном напоре h насосов).

Пример. Задан нефтепровод:

$$L = 77 \text{ км} \quad d = 10 \text{ дм. } (= 0,254 \text{ м})$$

и два люпинга на нем:

$$\begin{aligned} x_1 &= 15 \text{ км} & d_1 &= 8 \text{ дм.} \\ x_2 &= 30 \text{ км} & d_2 &= 10 \text{ дм.} \end{aligned}$$

Задан перекачиваемый продукт (мазут):

вязкость — 5°Э

уд. вес — $900 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

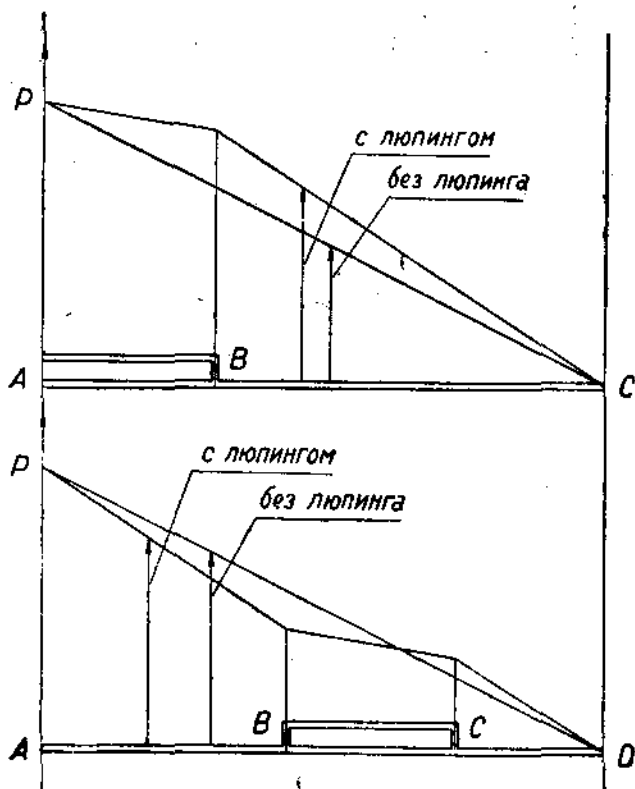
Давление насосов $p = 50$ атм. (избыточных).

Определить расход Q .

Режим следует ожидать турбулентный, — воспользуемся законом Блазиуса.

Согласно таблице 3 для $\frac{d_1}{d} = 0,8$ имеем $\varphi_1 = 1,89$ и для $\frac{d_2}{d} = 1$ имеем $\varphi_2 = 1,43$. Следовательно, эквивалентная длина $\bar{l}$ по формуле (22) будет равна:

$$\bar{l} = \left(1 - \frac{15}{77 \cdot 1,89}\right) \cdot \left(1 - \frac{30}{77 \cdot 1,43}\right) \cdot 77 = 50,4 \text{ км} = 50\,400 \text{ м.}$$



Фиг. 55.

Кинематическая вязкость (по Уббелюде) равна

$$\nu = 0,35 \cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, коэффициент β по формуле (4) будет равен:

$$\beta = 0,0246 (0,35 \cdot 10^{-4})^{1/4} = 0,0019.$$

Из формулы Дарси-Вейсбаха далее находим ($m = 0,25$)

$$Q = \left(\frac{h}{\beta l}\right)^{\frac{1}{2-m}} \cdot d^{\frac{5-m}{2-m}}.$$

Внося сюда найденные значения и полагая

$$h = \frac{50 \cdot 10^4}{900} = 556 \text{ м},$$

получаем окончательно:

$$Q = 0,091 \frac{\text{м}^3}{\text{сек}}.$$

Характер потери напора в трубопроводе с люпингами представлен на фиг. 55. Как видим, увеличение производительности не зависит ни от порядка, ни от местонахождения люпингов.

§ 3. Увеличение мощности перекачивающих станций.

1. Повышение производительности нефтепровода за счет увеличения числа насосных станций.

При проектировании нефтепровода большой длины его разбивают на несколько, вообще говоря, неравных участков (в случае негоризонтального профиля). Каждый из этих участков, положим длины l , обслуживается одной насосной станцией, обеспечивающей перекачку Q_0 нефти. Расход Q_0 должен быть одинаковым для всех станций, в случае же, если нефть отбирается из нефтепровода по пути, этот расход может быть для каждой станции разный. Если требуется пропускную способность нефтепровода увеличить, то можно разбить каждый участок длины l на n более коротких участков, установив $n - 1$ добавочных насосных станций, развивающих тот же напор h_0 , что и прежняя (головная) станция. Новый расход Q при этом легко находится из следующего соотношения (уравнение Дарси-Вейсбаха):

$$h_0 = \beta l \cdot \frac{Q_0^{2-m}}{d^{5-m}} = \beta \frac{l}{n} \cdot \frac{Q^{2-m}}{d^{5-m}},$$

откуда

$$Q = n^{\frac{1}{2-m}} \cdot Q_0. \quad (24)$$

Если, напр., $n = 2$, т. е. вставлена одна промежуточная станция, то новый расход в случае турбулентного режима (закон Блазиуса) будет равен:

$$Q = 2^{\frac{1}{4}} \cdot Q_0 = 1,485 \cdot Q_0$$

и в случае режима ламинарного ($m = 1$):

$$Q = 2 \cdot Q_0.$$

Мощность машин насосных станций на длине l при постоянном напоре возрастает в отношении

$$\frac{N}{N_0} = \frac{nQ}{Q_0},$$

откуда на основании (24) имеем:

$$N = \frac{nQ}{Q_0} \cdot N_0 = n \cdot n^{\frac{1}{2-m}} \cdot N_0 = n^{\frac{3-m}{2-m}} \cdot N_0. \quad (25)$$

Итак, в случае $n = 2$ для турбулентного режима имеем:

$$N = 2^{\frac{3-4}{2-1}} \cdot N_0 = 2,97 \cdot N_0$$

и для ламинарного режима:

$$N = 2^{\frac{3-1}{2-1}} \cdot N_0 = 4 \cdot N_0.$$

Мы видим, что при турбулентном режиме удвоение числа станций увеличит расход почти в полтора раза, на что будет затрачиваться почти тройная мощность; при ламинарном же режиме удвоение числа станций увеличит расход в два раза, на что потребуется учетверенная против прежней мощность.

2. Увеличение производительности нефтепровода за счет повышения напора действующих станций.

В случае, если представляется возможным повысить напор h_0 до большего его значения h , то можно увеличить производительность нефтепровода, не строя новых станций. Напору h_0 очевидно, соответствует расход Q_0 , равный (из уравнения Дарси-Вейсбаха)

$$Q_0 = \left(\frac{h_0}{\beta l} \right)^{\frac{1}{2-m}} \cdot d^{\frac{5-m}{2-m}}.$$

Новому же напору h соответствует расход Q :

$$Q = \left(\frac{h}{\beta l} \right)^{\frac{1}{2-m}} \cdot d^{\frac{5-m}{2-m}}.$$

Отсюда

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{2-m}}. \quad (26)$$

Мощность N_0 при напоре h_0 и расходе Q_0 равна:

$$N_0 = \frac{Q_0 h_0}{75 \eta},$$

при напоре же h и расходе Q имеем новую мощность:

$$N = \frac{Q h}{75 \eta}$$

(где η —коэффициент полезного действия).

Отсюда:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{Q h}{Q_0 h_0} = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{2-m}} \cdot \left(\frac{h}{h_0} \right) = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{3-m}{2-m}}. \quad (27)$$

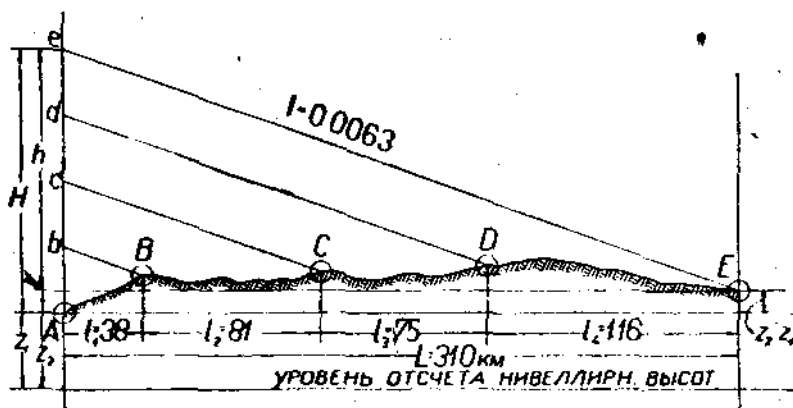
Сравнивая формулы (24) и (26), а также (25) и (27), мы видим, что роль числа n заменило число $\left(\frac{h}{h_0} \right)$. Увеличение напора в n раз дает точно такой же эффект в производительности (для обоих режимов) и потребует точно такого же увеличения мощности, как и разбивка каждого участка длины l нефтепровода

на n меньших участках с установкой $n-1$ добавочных станций при работе их на прежнем напоре.

Увеличения производительности на практике достигают либо установкой люпингов, либо устройством промежуточных станций, либо повышением напора на имеющихся станциях (если это позволяет запас прочности труб и насосы), либо комбинированным устройством люпингов и промежуточных станций. В каждом частном случае руководствуются экономическими соображениями о наибольшей выгоде того или другого варианта.

§ 4. Пример расчета не горизонтального нефтепровода (первой и второй очереди).

Дан рельеф местности между двумя пунктами A и E (см. фиг. 56), находящимися на расстоянии $L = 310$ км. Требуется построить нефтепровод, который должен перекачивать в год 2 млн. т нефти (от A к E). Рассчитаем этот нефтепровод (первая очередь) и вариант увеличения его производительности до $2\frac{1}{2}$ млн. т в год при помощи люпингов (вторая очередь). Вязкость продукта



Фиг. 56.

равна 5°Э при температуре перекачки (следовательно, кинематическая вязкость по Уббелюде $\nu = 0,35 \cdot 10^{-4}$). Уд. вес нефти равен $\gamma = 850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Насосы рассчитаны на 50 атм. (избыточных). При расчете будем ориентироваться на 12-дюймовые трубы ($d = 0,3$ м), имея в виду также возможность увеличения пропускной способности за счет увеличения скорости (установка промежуточных станций). Определим прежде всего суммарную мощность, необходимую для перекачки расхода Q_0 , равного

$$Q_0 = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{850 \cdot 360 \cdot 24 \cdot 3600} = 0,076 \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}}$$

на длину $L = 310 \cdot 10^3$ м.

Скорость перекачки будет равна

$$w = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,076}{3,14 \cdot 0,09} = 1,07 \frac{\text{м}}{\text{сек.}}$$

Следовательно, параметр Рейнольдса:

$$Re = \frac{w d}{\nu} = \frac{1,07 \cdot 0,3 \cdot 10^4}{0,35} = 9200.$$

Итак, режим — турбулентный. Величина параметра Re позволяет воспользоваться законом трения Блазиуса.

Находим потерю напора на трение:

$$h = \beta L \frac{Q^{2-m}}{d^{5-m}}$$

$$h = 0,0019 \cdot 3,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,076^{1,75}}{0,3^{4,75}} = 1950 \text{ м.}$$

Необходимый напор на трение и на подъем будет:

$$H = z_2 - z_1 + h = 170 + 1950 = 2120 \text{ м.}$$

Гидравлический уклон равен

$$i = \frac{h}{L} = \beta \frac{Q^{2-m}}{d^{5-m}} = 0,0063.$$

Одна станция может развить напор h_0 , равный

$$h_0 = \frac{p}{\gamma} = \frac{50 \cdot 10^4}{850} = 588 \text{ м.}$$

Следовательно, число станций z будет

$$z = \frac{H}{h_0} = \frac{2120}{588} = 3,6;$$

берем четыре станции, т. е. $z = 4$.

При этом средний действительный напор определится:

$$h_{\text{действ.}} = \frac{H}{4} = \frac{2120}{4} = 530 \text{ м}$$

и среднее действительное давление

$$p_{\text{действ.}} = h_{\text{действ.}} \cdot \gamma = 530 \cdot 850 = 450\,000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \text{ или } 45 \text{ атм.}$$

При этом мы имеем резерв в давлении в размере 10%, который из осторожности всегда необходимо принимать на практике.

§ 5. Графический метод акад. В. Г. Шухова для определения местоположения станций.

В случае горизонтального нефтепровода насосные станции располагаются на одинаковом расстоянии одна от другой. Размещение станций на трубопроводе, пролегающем по гористой местности, определяется графически по способу акад. В. Г. Шухова.

На основании данных геодезической съемки трассы составляется ее „сжатый профиль“, на котором по горизонталям откладываются в определенном масштабе *расстояния*, а по вертикалям —

нивелирные высоты главнейших возвышенностей, перевалов и впадин. Вертикальный масштаб берется крупнее горизонтального примерно в 100—200 раз.

Пусть для рассчитываемого нефтепровода задан „сжатый масштаб“ трассы AE (см. фиг. 56). Требуется найти местоположение четырех вышеуказанных станций. Перекачка производится от пункта A к пункту E . Первая станция, следовательно, находится в пункте A . Для отыскания правильного местоположения трех следующих станций выполняем следующее графическое построение. От точки A откладываем по оси ординат в определенном масштабе высоту $Ac = H = z_2 - z_1 + h$ (примем z_2 и z_1 могут отсчитываться от уровня моря) и делим эту высоту на число станций $z = 4$ в точках b, c и d . Последнюю точку e соединяем прямой с конечным пунктом E . Далее из точек d, c и b проводим линии, параллельные eE . Получаемые таким образом точки B, C и D указывают местоположение трех станций. Для взятого на схеме примера расстояния между станциями равны $l_1 = 38$ км; $l_2 = 81$ км; $l_3 = 75$ км; $l_4 = 116$ км (точку e на вертикали можно находить, откладывая вверх величину потеряннго напора h от горизонтали, проходящей через точку E). Для длин на графике выбирается определенный масштаб.

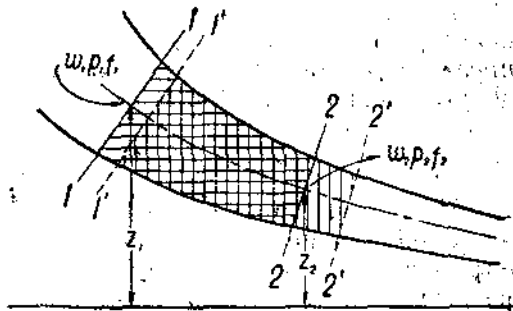
ЗАДАНИЕ 12.

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ.

§ 1. Установившееся движение несжимаемой жидкости.

Предположим, что вдоль некоторого канала, вообще говоря, не горизонтального, не прямолинейного и не постоянного поперечного сечения движется несжимаемая вязкая жидкость (реальная). Движение будем предполагать установившимся, т. е. таким, при котором скорости и давления частичек жидкости в любой точке пространства не изменяются со временем (стационарный). Выделим двумя сечениями 1 и 2, нормальными к оси канала, некоторый участок потока длины l , считая вдоль оси (заштрихован) (см. фиг. 57). В некоторый момент времени t выделенное пространство канала заполнено сплошь частицами потока, каждая из которых обладает определенной скоростью. В момент времени $t + dt$ все эти частицы займут новое положение 1' и 2' и будут иметь новые значения скорости.

Обозначим живую силу всех частиц выделенного участка потока в момент времени t через T (положение 1 и 2), а в момент времени $t + dt$ через $T + dT$ (положение 1' и 2'). Живую силу T ,



Фиг. 57.

...можно разбить на две части: первая часть будет представлять живую силу частиц, находящихся между сечениями 1 и 2, и вторая часть—живую силу частиц между сечениями 1' и 2', так что

$$T = T_{12} + T_{1'2'}$$

Совершенно аналогично живую силу $T + dT$ выделенного участка жидкости в момент $t + dt$ можно представить в виде:

$$T + dT = T_{1'2} + T_{22'}$$

Ввиду того, что движение установившееся, живая сила участка 1'2 в моменты времени t и $t + dt$ одинакова.

Вычитая из этого равенства первое, находим:

$$dT = T_{22'} - T_{11'} \quad (1)$$

Очевидно, что масса жидкости между сечениями 1 и 1' равна массе между сечениями 2 и 2', так как в одинаковые промежутки через каждое сечение протекают одинаковые количества жидкости.

Имеем:

$$m_{11'} = m_{22'}$$

причем

$$m_{11'} = \rho f_1 w_1 dt$$

и

$$m_{22'} = \rho f_2 w_2 dt,$$

где w_1 и w_2 —средние скорости потока в сечениях 1 и 2.

Зная массы, находим живые силы:

$$T_{11'} = m_{11'} \cdot \frac{w_1^2}{2}; \quad T_{22'} = m_{22'} \cdot \frac{w_2^2}{2}.$$

Рассчитывая живую силу по средней скорости, мы допускаем некоторую ошибку, однако, как увидим дальше, эта ошибка не играет существенной роли. Впоследствии мы ее учтем. Внося найденные значения в уравнение (1), мы получим:

$$dT = \rho f_2 w_2 dt \cdot \frac{w_2^2}{2} - \rho f_1 w_1 dt \cdot \frac{w_1^2}{2}. \quad (1')$$

Итак, мы определили приращение живой силы выделенного нами участка потока, происходящее за время dt . По закону живых сил это приращение равно работе всех внешних действующих на выделенный участок потока сил за то же время.

Работу совершают:

1) сила давления по сечению f_1 и противодействия по сечению f_2 ;

2) сила тяжести;

3) сила трения на внутренней поверхности стенок канала.

Сила нормального давления со стороны стенок канала, будучи перпендикулярна к перемещению, работы очевидно не совершает.

Итак, имеем: работа сил давления равна:

$$dR_1 = f_1 p_1 w_1 dt - f_2 p_2 w_2 dt,$$

где p_1 и p_2 — средние давления по сечениям 1 и 2.

Работа силы тяжести равна

$$dR_2 = f_1 w_1 dt \gamma (z_1 - z_2),$$

так как часть жидкости в объеме 1'2 в моменты t и $t + dt$ занимает одинаковые положения, перемещается только масса из объема 11' в объем 22'.

Обозначим напряжение силы трения у стенок через τ , тогда работа сил трения на поверхности dF стенки за время dt может быть представлена в виде

$$\tau \cdot dF \cdot w dt,$$

а на всей боковой поверхности канала F между сечениями 1 и 2, следовательно, через

$$dR_3 = \int_F \tau dF \cdot w dt,$$

где w — любая промежуточная между сечениями 1 и 2 скорость.

На основании закона живых сил имеем:

$$dT = dR_1 + dR_2 - dR_3$$

(работа силы трения взята со знаком минус, так как она отрицательна: сила трения всегда направлена в сторону, противоположную движению).

Вносим сюда найденные значения, находим:

$$\rho f_2 w_2 dt \cdot \frac{w_2^2}{2} - \rho f_1 w_1 dt \cdot \frac{w_1^2}{2} = f_1 p_1 w_1 dt - f_2 w_2 p_2 dt + \\ + f_1 w_1 dt \gamma (z_1 - z_2) - \int_F \tau dF \cdot w dt.$$

Сокращая все равенство на $w_1 f_1 dt$ и помня, что $w_1 f_1 = w_2 f_2$, получаем:

$$\rho \frac{w_2^2}{2} - \rho \frac{w_1^2}{2} = p_1 - p_2 + \gamma (z_1 - z_2) - \int_F \frac{\tau w}{f_1 w_1} dF.$$

Делим все равенство на γ , заменяем $\frac{\gamma}{\rho}$ через g и выражение $f_1 w_1$ в знаменателе под интегралом обозначаем через $q_{\text{век}}$ — весовой расход потока, тогда получим:

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 - \frac{\int_F \tau w dF}{q_{\text{век}}}.$$

Под знаком интеграла величину $\tau \cdot dF$ обозначим через dS (элементарная сила трения на поверхности dF) и член этот уединим; обозначив его через h_{12} , получаем:

$$\left(\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h_{12}, \quad (2)$$

где

$$h_{12} = \frac{1}{q_{\text{век}}} \cdot \int w dS$$

Уравнение (2) и есть весьма важное уравнение Даниила Бернулли.

Величина $\frac{w^2}{2g}$ носит название *скоростной высоты* (или *скоростного напора*).

Размерность ее есть длина:

$$\left[\frac{w^2}{2g} \right] = \left[\frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}} \right] = [L].$$

Величина $\frac{p}{\gamma}$ носит название *пнезиометрической высоты*. Размерность ее также длина:

$$\left[\frac{p}{\gamma} \right] = \left[\frac{\text{сила} \cdot L^{-2}}{\text{сила} \cdot L^{-3}} \right] = [L].$$

Величина z носит название *нивелирной высоты*. Размерность ее, очевидно, также длина.

Величина интеграла $\int_F w dS$ представляет собой мощность, затрачиваемую на преодоление сил трения на всей боковой поверхности F . Если мы разделим этот интеграл на весовой расход потока $q_{\text{вес}}$, то частное (именно h_{12}) представит очевидно мощность, затраченную на каждый килограмм прокачиваемой жидкости в секунду для преодоления сил трения на поверхности F между сечениями 1 и 2.

Величину h_{12} называют поэтому *высотой потеряннго напора*, размерность ее также длина.

$$[h_{12}] = \left[\frac{1}{q_{\text{вес}}} \int w dS \right] = \left[\frac{\text{Мощность}}{\text{расход (весовой)}} \right] = \left[\frac{\text{сила} \cdot LT}{T \cdot \text{сила}} \right] = [L].$$

Смысл уравнения Бернулли (2) можно выразить теперь следующим образом.

Изменение суммы трех высот: скоростной, пнезиометрической и нивелирной между двумя любыми сечениями канала равно высоте потеряннго напора на трение между теми же сечениями.

§ 2. Механическая интерпретация уравнения Бернулли.

1. **СКОРОСТНАЯ ВЫСОТА (СКОРОСТНЫЙ НАПОР).** Из механики известно, что тело, брошенное вверх с начальной скоростью w м/сек., может подняться на высоту h_w метров, равную

$$h_w = \frac{w^2}{2g}.$$

Аналогично этому скоростная высота потока $\frac{w^2}{2g}$ есть та высота, на которую поднялась бы струя жидкости, обладающая начальной скоростью w , направленной вертикально вверх.

Предположим, что жидкость движется со скоростью w ; определим кинетическую энергию 1 кг жидкости, участвующей в этом движении (т. е. живую силу):

$$\mathcal{E}_w = m \frac{w^2}{2}, \text{ где } m = \frac{P}{g} = \frac{1}{g}$$

(так как $P = 1$ кг); т. е. имеем:

$$\mathcal{E}_w = \frac{w^2}{2g}$$

Итак, скоростную высоту потока можно рассматривать как кинетическую энергию $\mathcal{E}_w$, присущую одному килограмму движущейся жидкости

$$h_w = \mathcal{E}_w = \frac{w^2}{2g}. \quad (3)$$

Величину $\mathcal{E}_w$ назовем *удельной кинетической энергией*. Итак, скоростная высота и удельная кинетическая энергия — тождественные понятия.

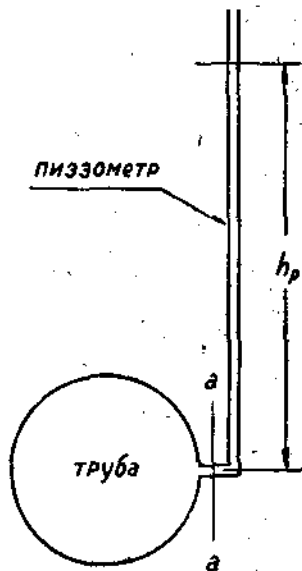
2. **ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЫСОТА.** Предположим, что вблизи некоторого сечения канала, среднее давление в котором измеряется значением p , сделано в стенке канала отверстие, сообщенное с вертикальной, открытой сверху, трубкой произвольного диаметра. В такую трубку, называемую *пиезометром*, устремится жидкость, из потока в канале и установится в ней на некоторой высоте h_p , стоящей в строгом соответствии с величиной давления p в канале. Определим h_p в зависимости от p , причем давления будем отсчитывать сверх атмосферы (избыточные). По сечению aa (см. фиг. 58) на жидкость, находящуюся в трубке (пиезометре) действуют в противоположных направлениях две равные силы: снизу вверх — сила давления потока, равная fp , сверху вниз — гидродинамическое давление, равное весу цилиндрического столба жидкости с основанием f и высотой h_p , — этот вес равен $fh_p \cdot \gamma$, где γ — уд. вес жидкости.

В силу равновесия имеем:

$$fp = fh_p \cdot \gamma,$$

откуда

$$h_p = \frac{p}{\gamma}.$$



Фиг. 58.

Итак, пиезометрическая высота $\frac{p}{\gamma}$ представляет собой ту высоту h_p (отсчитываемую по вертикали), на которую жидкость уд. веса γ подымается в пиезометре при давлении p в потоке.

Если бы высота пиезометрической трубки была немного меньше высоты h_p , то жидкость при постоянном давлении непрерывно подымалась бы по пиезометру, переливаясь через верхний

край его, и таким образом непрерывно совершалась бы работа подъема, очевидно, за счет давления потока. На основании этого мы приходим к заключению, что жидкость, соответственно своему давлению в потоке, обладает некоторым специфическим запасом энергии давления $\mathcal{E}_p$. Определим этот запас энергии, заключающийся в 1 кг жидкости при давлении p в потоке. Пусть 1 кг жидкости под давлением p в потоке подымется по пнезометру на высоту h_p . Обозначим объем, занимаемый 1 кг, через v (удельный объем). У основания пнезометра давление p (избыточное), вверху пнезометра давление 0, таким образом сила давления p при подъеме p куб. метров совершает работу pv , которая в то же время численно равна работе силы тяжести.

Работа силы тяжести $= h_p \cdot 1$, следовательно,

$$pv = h_p \cdot 1,$$

но $v = \frac{1}{\gamma}$, поэтому

$$\mathcal{E}_p = h_p = \frac{p}{\gamma}. \quad (4)$$

Таким образом пнезометрическая высота представляет собой запас энергии, присущий одному килограмму жидкости и обусловленный исключительно давлением в потоке. Величину $\mathcal{E}_p$ назовем удельной энергией давления.

3. Нивеллирная высота. Определим потенциальную энергию 1 кг жидкости в потоке, принимая, что эта энергия равна нулю на некоторой горизонтальной плоскости, от которой отсчитывается высота z . При переходе 1 кг жидкости с этой поверхности отсчета на некоторую высоту z ему навне сообщается работа, численно равная работе силы тяжести. Потенциальная энергия при этом возрастает от нуля до значения $\mathcal{E}_z$, равного

$$\mathcal{E}_z = P \cdot z = 1 \cdot z = z. \quad (5)$$

Итак, нивеллирная высота z представляет собой потенциальную энергию, присущую одному килограмму жидкости (нивеллирная высота измеряет потенциальную энергию одного килограмма).

Величину $\mathcal{E}_z$ естественно назвать удельной потенциальной энергией.

4. Высота потеряннго напора. Высота потеряннго напора h_{12} по § 1 настоящего задания представляет собой также энергию, которая затрачивается на преодоление сил трения на каждый килограмм прокачиваемой жидкости. Другими словами, h_{12} представляет собой потерю энергии, приходящуюся на каждый килограмм (потерянная удельная энергия). Обозначим ее через $\mathcal{E}_\tau$:

$$\mathcal{E}_\tau = h_{12} = h_\tau. \quad (6)$$

§ 3. Энергетическое толкование уравнения Бернулли.

Итак, уравнение Бернулли (2) можно на основании равенств (3), (4), (5) и (6) написать следующим образом:

$$(\mathcal{E}_w + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_z)_1 - (\mathcal{E}_w + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_z)_2 = \mathcal{E}_\tau. \quad (7)$$

Сумма трех специфических удельных энергий $\vartheta_u + \vartheta_p + \vartheta_z$ представляет собой полную удельную энергию потока ϑ (т. е. всю энергию, которую несет с собой 1 кг):

$$\vartheta = \vartheta_u + \vartheta_p + \vartheta_z.$$

Уравнение Бернулли поэтому запишем так:

Изменение величины полной энергии 1 кг жидкости при переходе от сечения 1 к сечению 2 равно потерям энергии 1 кг на трение между теми же сечениями.

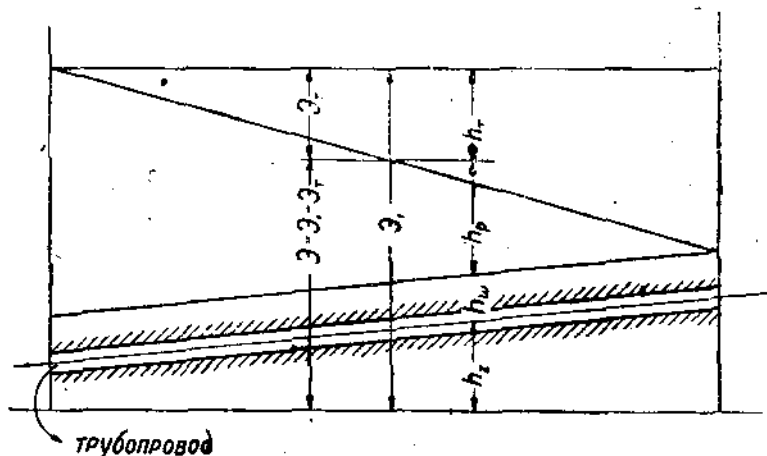
На фиг. 59 дан график изменения трех высот для представленного выше канала. Сечение 2 может быть выбрано совершенно произвольно (напр., x). Уравнение Бернулли в этом случае будет:

$$\vartheta_1 - \vartheta_x = h_{1x}, \quad (8)$$

где

$$\vartheta_x = \frac{w_x^2}{2g} + \frac{p_x}{\gamma} + z_x$$

и h_{1x} — потерянный напор на длине канала $1x$.



Фиг. 59.

В случае, когда канал представляет собой трубу постоянного сечения, то кинетическая энергия не изменяется, так как скорости везде постоянны, и поэтому уравнение Бернулли будет

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = h_{12}.$$

В случае, если труба постоянного сечения и горизонтальна, то $z_1 = z_2$ и тогда

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_{12} = h_t,$$

т. е. изменение пьезометрической высоты равно высоте потерян-ного напора. В этом виде уравнение Бернулли представляет собой

не что иное, как уравнение Дарси-Вейсбаха для горизонтального трубопровода, причем

$$h_{12} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Итак уравнение Дарси-Вейсбаха есть частный случай уравнения Бернулли.

§ 4. Поправка скоростного напора на неравномерное распределение скоростей по сечению потока.

1. **Ламинарный режим.** Как известно, распределение скоростей по поперечному потоку в круглой трубе при ламинарном режиме движения подчиняется параболическому закону Стокса:

$$u = 2w \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

где u — скорость на расстоянии r от оси трубы,
 w — средняя скорость,
 a — радиус трубы.

Высота скоростного напора h_w (или кинетическая энергия 1 кг жидкости $\mathcal{E}_w$), равная

$$h_w = \mathcal{E}_w = \frac{w^2}{2g}$$

в уравнении Бернулли написана для потока в том предположении, что скорость всех частичек жидкости равна средней скорости w потока. Однако, переходя к действительной оценке живой силы одного килограмма жидкости, протекающей через какое-либо сечение, необходимо будет находить эту энергию, исходя из действительных значений величины скорости каждой частицы. Рассмотрим поток жидкости между двумя концентрическими соосными трубе цилиндрами радиусов r и $r + dr$. В единицу времени через поперечное сечение вдоль этого элементарного канала протекает объем жидкости, равный,

$$dQ = 2\pi r dr \cdot u.$$

Живая сила жидкости в объеме dQ , следовательно, равна

$$dT = dQ \cdot \rho \frac{u^2}{2},$$

где ρ — плотность.

Суммируя живые силы таких концентрических потоков по всему сечению трубы, получим ту живую силу, которая пронесется через сечение всем потоком в одну секунду. Имеем:

$$T = \int dT = \int dQ \rho \cdot \frac{u^2}{2} = \pi \rho \int_0^a u^2 r dr. \quad (9)$$

Внося сюда значение u по формуле Стокса и производя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} T &= 8\pi \rho w^3 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 r dr = 8\pi \rho w^3 \int_0^a \left(r - 3 \frac{r^3}{a^2} + 3 \frac{r^5}{a^4} - \frac{r^7}{a^6} \right) dr = \\ &= 8\pi \rho w^3 \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{8} a^2 \right) = \pi \rho w^3 a^2. \end{aligned}$$

Так как через сечение проходит в одну секунду количество жидкости, равное

$$G = Q_1 = Q_{gr} = \pi a^2 w_{gr},$$

то, следовательно, 1 кг в среднем несет с собой количество кинетической энергии, равное

$$\mathcal{E}_w = \frac{T}{G} = 2 \frac{w^2}{2g}.$$

Таким образом для ламинарного потока действительная удельная кинетическая энергия, вследствие неравномерности распределения скоростей по сечению, больше той, которая получается в предположении, что все частицы приняли среднюю скорость потока ровно в два раза.

2. Турбулентный поток. Для турбулентного потока действительная скорость на большей части сечения весьма близка к средней скорости w потока и только в пограничном слое скорости частиц быстро уменьшаются до нуля (на самой стенке). Существует много формул, которыми стремятся представить поле скоростей в турбулентном потоке. Теоретически лучше всего обоснованной формулой является формула Кармана, представляющая так называемый закон одной седьмой степени. Закон этот имеет следующий вид:

$$u = \frac{8}{7} w \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{3/7}. \quad (10)$$

Внося это выражение в формулу (9) для T , получим:

$$\begin{aligned} T &= \pi r \left(\frac{8}{7} \right)^3 w^3 \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{3/7} r dr = \\ &= - \pi r \left(\frac{8}{7} \right)^3 w^3 \cdot \frac{a^2}{2} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{3/7} d \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] = \\ &= - \pi r \left(\frac{8}{7} \right)^3 w^3 \frac{a^2}{2} \cdot \frac{7}{10} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{3/7} = \frac{128}{7^2 \cdot 5} \pi r w^3 a^2 \end{aligned}$$

и следовательно действительная удельная кинетическая энергия равна:

$$\mathcal{E}_w = \frac{T}{G} = \frac{128}{7^2 \cdot 5} \cdot \frac{\pi r w^3 a^2}{\pi r w a^2} = \frac{256}{245} \left(\frac{w^2}{2g} \right) \approx 1,045 \frac{w^2}{2g},$$

т. е. для турбулентного режима действительная высота скоростного напора на 4,5% больше высоты скоростного напора, рассчитываемого по средней скорости.

3. Трубопроводы постоянного сечения. В применении к трубопроводам постоянного сечения уравнение Бернулли упрощается. Так как частицы несжимаемой жидкости имеют по длине трубопровода одинаковые скорости, то изменение скоростного напора равно нулю. Для этого случая уравнение Бернулли становится совершенно точным. Однако и вне этого упрощающего предположения, в случае турбулентного режима уравнение Бернулли при расчете

скоростной высоты по средней скорости хорошо согласуется с действительностью. В применении к трубопроводам больших длин, где следовательно необходимо развить для проталкивания столба жидкости большие давления, удельная кинетическая энергия, вообще говоря, составляет совершенно незначительную долю полной удельной энергии потока: скорость движения при перекачке по нефтепроводам и водопроводам не превышает пяти метров в секунду и обычно колеблется в пределах от 1 до 3 $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Таким образом h_v равная

$$h_v = \frac{w^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 9,81},$$

немного больше одного метра.

Даже при $w=10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ высота h_v составляет лишь немного больше 5 м, между тем как пнезметрическая высота h_p при изменении давления от 1 до 50 атм., как это имеет место в практике, колеблется в пределах от 10 до 500 м и более. Точно так же нивеллирная высота может изменяться в гораздо более широких пределах, чем высота скоростная.

Таким образом неточность определения удельной кинетической энергии по средней скорости потока не играет существенной роли в оценке общего баланса энергии, которую несет с собой один килограмм жидкости.

ЗАДАНИЕ 13.

ТЕОРЕМА БОРДА-КАРНО.

§ 1. Вывод формулы Борда-Карно.

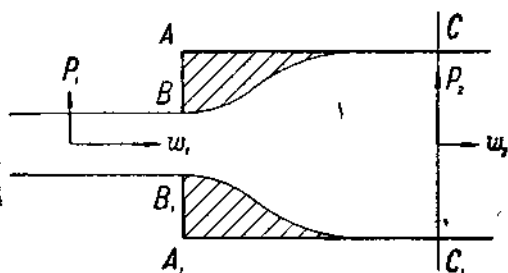
Если поток жидкости при движении вдоль некоторого трубопровода встречает на своем пути внезапное расширение (см. фиг. 60), то происходит явление, которое часто уподобляют удару.

Из механики известно, что удар тела характеризуется резким (во времени) изменением количества движения его, что и происхо-

дит с частицами жидкости при внезапном расширении площади поперечного сечения потока.

В самом деле, до сечения AA₁ частицы имеют скорость w_1 , после же этого сечения скорость их (мгновенно) становится равной w_2 . Явление удара в данном случае сопровождается интенсивным (местным) вихре-

образованием, с чем связана потеря энергии потока. Таким образом подобного рода внезапные расширения в трубопроводах играют роль *местных сопротивлений*. Определим потерянный напор при внезапном расширении. С этой целью давление



Фиг. 60.

на осевой струйке в сечении BB_1 обозначим через p_1 и давление на той же струйке в расширенном сечении CC_1 , находящемся на небольшом расстоянии от места расширения, обозначим через p_2 . На чертеже указана так называемая мертвая зона жидкости, весьма слабо участвующей в потоке (заштриховано). Опыт указывает, что давление на стенке AA_1 , включая и живое сечение BB_1 , распределено гидростатически и следовательно может быть заменено средним давлением p_1 на осевой струйке. Таким образом по всему сечению AA_1 имеем давление p_1 и по сечению CC_1 — давление p_2 . Применим закон количества движения к участку потока AA_1CC_1 . Имеем:

$$m \cdot \Delta w = P \cdot \Delta t. \quad (1)$$

Поток предполагаем установившимся. Пренебрегая силами трения на боковых стенках AC и A_1C_1 (в виду того, что площадь трения мала), мы находим равнодействующую P всех внешних сил, приложенных в массе жидкости в объеме AA_1CC_1 , именно:

$$P = F_2 (p_1 - p_2).$$

Пусть для перехода частицы от сечения BB_1 к сечению CC_1 требуется время Δt . Масса m жидкости в выделенном объеме очевидно будет равна:

$$m = \gamma \cdot \frac{Q \Delta t}{g},$$

где Q — объемный расход потока.

Кроме того, очевидно,

$$\Delta w = w_2 - w_1.$$

Вносим найденные значения P , m и Δw в формулу (1), получаем:

$$\gamma \frac{Q \cdot \Delta t}{g} (w_2 - w_1) = F_2 (p_1 - p_2) \Delta t.$$

Заменяя расход Q по формуле $Q = F_2 w_2$ и производя сокращения, находим отсюда:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{w_2 (w_2 - w_1)}{g}. \quad (2)$$

Напишем кроме того уравнение Бернулли для участка потока между сечениями AA_1 и CC_1 . Имеем

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} + h',$$

где h' — высота потеряннного напора на выделенном участке (благодаря потерям при вихреобразовании).

Из уравнения Бернулли находим:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + h'. \quad (3)$$

Сравнивая правые части равенств (2) и (3), получаем:

$$\frac{w_2(w_2 - w_1)}{g} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + h';$$

откуда

$$h' = \frac{w_2(w_2 - w_1)}{g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = \frac{2w_2^2 - 2w_2w_1 + w_1^2 - w_2^2}{2g}$$

или окончательно:

$$h' = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}. \quad (4)$$

Величина $(w_1 - w_2)$ есть потерянная скорость частиц при переходе от узкого сечения к широкому. Величина $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$ есть скоростная высота потерянной скорости. Итак имеем по формуле (4): *«Высота потерянного напора при внезапном расширении равна скоростной высоте потерянной скорости»*. Это и составляет содержание теоремы Борда-Карно.

Из условия постоянства расходов для всех сечений имеем:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_2}{F_1},$$

откуда

$$w_1 = \frac{F_2}{F_1} w_2.$$

Внося это значение w_1 в формулу (4) и заменяя w_2 просто через w , получаем:

$$h' = \zeta_0 \cdot \frac{w^2}{2g}, \quad (5)$$

где

$$\zeta_0 = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2. \quad (6)$$

Величина $\frac{w^2}{2g}$ есть скоростная высота потока, поэтому формулу Борда-Карно словами можно выразить еще так:

«Высота потерянного напора при внезапном расширении пропорциональна скоростной высоте потока».

§ 2. Применение формулы Борда-Карно к задачам о местных сопротивлениях в трубопроводах.

В тех случаях, когда переход от суженного сечения потока к расширенному происходит не внезапно, а более или менее плавно, потеря энергии потока благодаря вихреобразованиям может значительно уменьшиться. В зависимости от характера перехода высота потерянного напора h' может составлять только некоторую часть k скоростной высоты потерянной скорости. Таким образом в общем случае будем иметь:

$$h' = k \cdot \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} \quad (7)$$

или

$$h' = k \zeta_0 \frac{w^2}{2g}. \quad (8)$$

Обозначая h'_0 через ζ , получаем общую формулу:

$$h' = \zeta \frac{w^2}{2g}, \quad (9)$$

где ζ — коэффициент сопротивления есть отвлеченное число, показывающее, какая часть скоростной высоты потока теряется на заданном местном сопротивлении. Величина ζ для многих практических случаев может быть найдена только экспериментальным путем. Практикой установлено, что высота напора, теряющаяся при прохождении потока через разного рода фиттинги (как-то: задвижки, вентили, дроссельные клапаны, угольники, тройники, закругления, переходы и т. д.) в общем случае также может быть выражена формулой (9), причем величина ζ в каждом отдельном случае должна быть определена экспериментально.

Предположим, что на некотором участке трубопровода длины l расположено несколько фиттингов, играющих роль *местных сопротивлений*. Найдем формулу для высоты потеряннго напора, обусловленного как силами трения у стенок (гидравлическая потеря), так и влиянием местных сопротивлений. Обозначим число местных сопротивлений через n . Тогда высота напора, теряемая на каком-либо i -том местном сопротивлении, может быть обозначена через

$$h'_i = \zeta_i \frac{w^2}{2g}$$

и, следовательно, весь напор, теряемый вследствие наличия фиттингов, будет равен:

$$h' = \sum_{i=1}^n h'_i = \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{w^2}{2g}, \quad (10)$$

где ζ_i — известные на основании опытных исследований величины.

Высота потеряннго напора, обусловленного наличием сил трения по формуле Дарси-Вейсбаха, равна

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}. \quad (11)$$

Полная потеря H напора будет равна сумме потерь (10) и (11). Таким образом окончательно:

$$H = h + h' = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{w^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{w^2}{2g}. \quad (12)$$

Пусть на трубопроводе диаметра d имеем какое-либо местное сопротивление (напр., вентиль, задвижку и т. д.). Обозначим номер этого сопротивления через i . Решим такую задачу: найти длину l'_i участка трубопровода диаметра d , на протяжении которой высота потеряннго напора (благодаря одному только трению) равнялась бы высоте напора, теряемого на заданном местном сопротивлении. Для определения длины l'_i очевидно имеем равенство:

$$h = h'_i$$

или

$$\lambda \frac{l'_i}{d} \frac{w^2}{2g} = \zeta_i \frac{w^2}{2g}.$$

Отсюда

$$l_i' = \frac{\zeta_i}{\lambda} \cdot d. \quad (13)$$

Величина l_i' очевидно представляет собой длину трубопровода, по своему гидравлическому сопротивлению эквивалентную одному заданному местному сопротивлению. Длину l_i' естественно поэтому назвать *эквивалентной длиной*. Длина l' , эквивалентная n местным сопротивлениям, будет равна:

$$l' = \sum_{i=1}^n l_i' = \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i}{\lambda} d = \frac{d}{\lambda} \sum_{i=1}^n \zeta_i. \quad (14)$$

Таким образом, если трубопровод диаметра d и длины l имеет n заданных местных сопротивлений, то его можно рассчитывать по формуле Дарси-Вейсбаха, но только не по действительной его длине l , а по длине $l + l'$.

Вводя обозначение:

$$\bar{l} = l + l', \quad (15)$$

мы можем высоту потерянного напора H для трубопровода, имеющего n местных сопротивлений, выразить по формуле:

$$H = \lambda \frac{\bar{l}}{d} \frac{w^2}{2g}. \quad (16)$$

Величина $\bar{l}$ представляет собой длину трубопровода *без местных сопротивлений*, гидравлически эквивалентную длине l трубопровода того же диаметра, имеющего n местных сопротивлений. Формула (16) очевидно равносильна формуле (12). Из формулы (14) видно, что длина l' , эквивалентная совокупности всех местных сопротивлений, пропорциональна диаметру трубопровода d , на котором расположены эти сопротивления, и стоит в определенной зависимости от параметра Рейнольдса (через λ). Длины, эквивалентные различным местным сопротивлениям, можно представлять и находить графически (см., напр., книгу Филонова „Расчет нефтепроводов“, 2-е изд., стр. 66).

§ 3. Опытные данные о коэффициенте ζ для различных фиттингов и других местных сопротивлений (по Пешлю и Есьману).

1) Сопротивление при истечении из трубы или при входе в нее:

а) при хорошо закругленных отверстиях

$$\zeta = 0,065,$$

б) при отверстиях с острыми краями

$$\zeta = 1,78$$

или $\zeta = \frac{1}{\mu} - 1$, где μ — коэффициент расхода (для случая острых краев $\mu = 0,6$).

2) Внезапное расширение трубы (уже было рассмотрено)

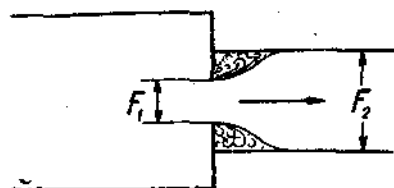
$$\zeta_0 = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2.$$

В случае *постепенного* перехода от суженного места к расширенному можно воспользоваться формулой:

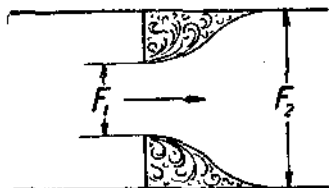
$$\zeta = \beta \left(1 - \frac{F_1}{F_2} \right)^2,$$

где

$$0,12 \leq \beta \leq 0,20.$$



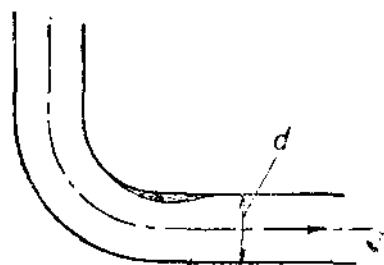
Фиг. 61 а.



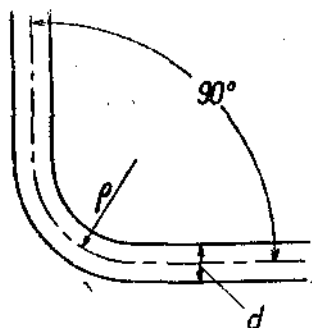
Фиг. 61 б.

3) Диафрагма (см. фиг. 61) вызывает потерю напора, вследствие сужения струи и внезапного затем расширения. Вейсбах дает следующие значения коэффициента для двух случаев, представленных на фиг. 61 а и б.

$\frac{F_1}{F_2} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
а) $\zeta =$	232	51	20	9,6	5,3	3,1	1,9	1,2	0,74	0,48
б) $\zeta =$	226	48	17,5	7,8	3,8	1,8	0,8	0,3	0,06	—



Фиг. 62.



Фиг. 63.

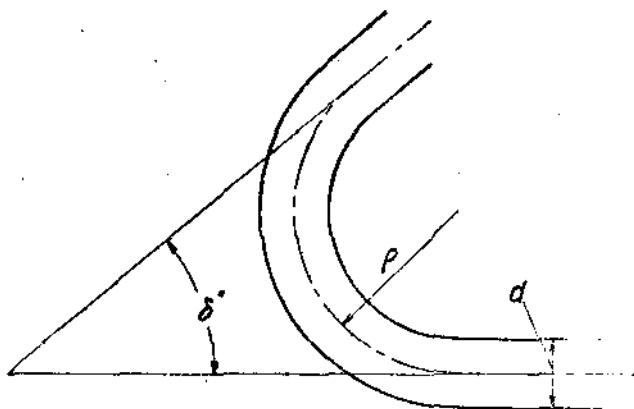
4) Закругления (см. фиг. 62) вызывают сопротивления по той причине, что непосредственно за поворотом струя отстает от стенки (эффект силы инерции), следовательно, происходит местное сужение струи, вслед за которым наступает быстрое расширение. При этом имеют место сильные вихревые явления, связанные с потерей напора.

а) Для закруглений под прямым углом (см. фиг. 63, d —диаметр трубы, b —сторона квадрата и ρ —радиус кривизны закругления) коэффициенты сопротивления ζ даются формулами для круглого сечения трубы:

$$\zeta = 0,13 + 0,16 \left(\frac{d}{\rho} \right)^{3,5},$$

для прямоугольного сечения трубы:

$$\zeta = 0,20 + 0,27 \left(\frac{b}{\rho} \right)^{3,5}.$$



Фиг. 64.

Если по этим формулам произведем вычисления, то получим:

$\frac{d}{\rho} = \frac{b}{\rho} = 0,1$	0,4	0,8	1,0	1,4	1,8	2,0
круглое сечение $\zeta = 0,13$	0,14	0,21	0,29	0,66	1,41	1,98
прямоуг. $\zeta = 0,12$	0,15	0,29	0,40	1,01	2,27	3,23

Для нормализованных закруглений принято $\frac{d}{\rho} = \frac{b}{\rho} = 0,1$.

В случае закругления под углом δ (см. фиг. 64) коэффициент сопротивления ζ_δ можно рассчитывать по формуле:

$$\zeta_\delta = \zeta_{90} \cdot \frac{\delta}{90^\circ}.$$



Фиг. 65.

б) Для колен с углом δ Вейсбах предлагает формулу (см. фиг. 65):

$$\zeta = \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) + 2 \sin^4 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

или

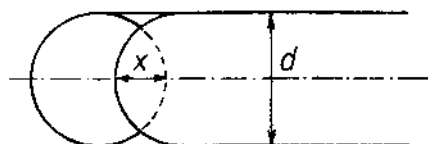
$\delta = 20^\circ$	40°	60°	80°	90°	120°	140°
$\zeta \approx 0,05$	0,14	0,36	0,74	0,98	1,86	2,43

5) Задвижка в круглой трубе (см. фиг. 66):

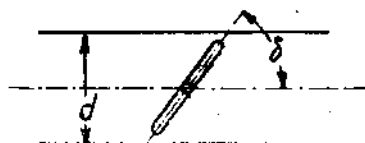
$\frac{x}{d} = 0$ (открыта)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
$\zeta = 0,05$	0,08	0,8	1,5	3,0	8,6	20	98	∞

6) Дроссельный клапан в круглой трубе (см. фиг. 67):

$\delta = 5^\circ$	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°
$\zeta = 0,24$	0,52	1,54	3,91	10,8	18,7	32,6	118	751



Фиг. 66.



Фиг. 67.

7) Кран в круглой трубе (см. фиг. 68):

$\delta = 5^\circ$	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	65°
$\zeta = 0,05$	0,29	1,56	5,17	17,3	31,2	52,6	206	486

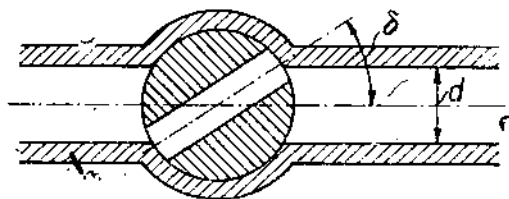
8) Вентили (на прямолинейных участках труб).

а) Шарнирный вентиль (клапан) (см. фиг. 69):

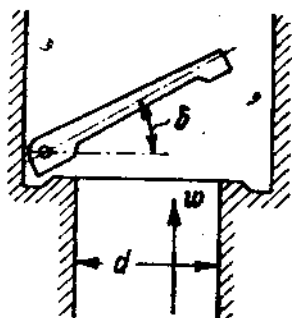
$\delta = 15^\circ$	20°	30°	45°	60°	70°
$\zeta = 90$	62	30	9,5	3,2	1,7

б) Тарелочный клапан без нижней направляющей (фиг. 70):

$$\zeta = a + \beta \left(\frac{d}{h} \right)^2,$$



Фиг. 68.



Фиг. 69.

где $a = 0,55 + \frac{4(b - 0,1d)}{d}$; β равно 0,15 для узких и 0,16 для широких стыков.

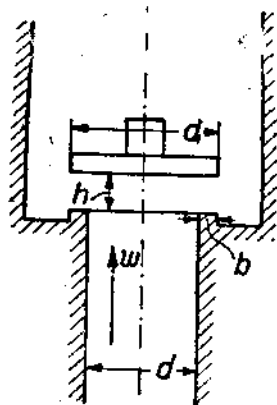
с) Тарелочный клапан с нижней направляющей (фиг. 71):

$$\zeta = a + \beta \left[\left(\frac{d^2}{\pi d - \pi c} h \right)^2 \right],$$

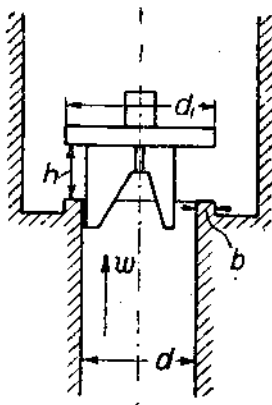
где α берется как для тарелочного клапана, но увеличенное в 0,8—1,6 раза, β — в 1,7—1,75 раза, π есть общая ширина опорных выступов, измеряемая по окружности πd .

д) Конический вентиль с плоским дном (фиг. 72):

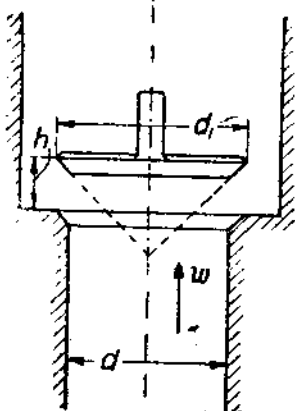
$$\zeta = 2,6 - 0,8 \frac{d}{h} + 0,14 \left(\frac{d}{h} \right)^2.$$



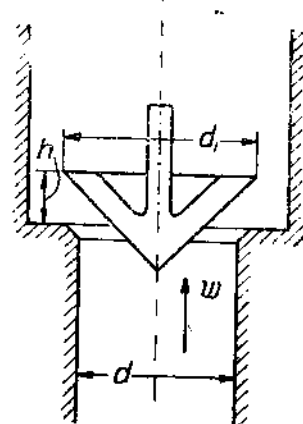
Фиг. 70.



Фиг. 71.



Фиг. 72.



Фиг. 73.

е) Конический вентиль с коническим дном (фиг. 73):

$$\zeta = 0,6 + 0,15 \left(\frac{d}{h} \right)^2.$$

9) Всасывающая коробка с обратным клапаном:

$d = 0,04$	0,07	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75
$\zeta = 12$	8,5	7	6	5,2	3,7	2,5	1,6

(диаметр d — в метрах).

§ 4. Пример на применение теоремы Борда-Карно.

Пусть задан трубопровод определенной длины и диаметра. Известны также все местные сопротивления, расположенные вдоль трубопровода. Задано максимальное (допускаемое) давление насоса и род жидкости (вязкость, плотность). Требуется определить максимальную пропускную способность трубопровода и потерю напора, обусловленную одними только местными сопротивлениями. Определить также мощность насоса.

Итак, имеем:

$$\text{трубопровод} \quad \begin{cases} l = 50 \text{ км} \\ d = 10 \text{ дм.} \end{cases}$$

Местные сопротивления:

1. Десять сужений трубы диафрагмой (типа в), причем $\frac{F_1}{F_2} = 0,5$; следовательно, $\zeta_1 = 3,8$.

2. Десять закруглений под прямым углом, причем $\frac{d}{\rho} = 0,4$; следовательно, $\zeta_2 = 0,14$.

3. Двадцать задвижек, причем $\frac{x}{d} = 3,8$; следовательно, $\zeta_3 = 1,5$.

4. Одна всасывающая коробка с обратным клапаном, $\zeta_4 = 4,5$.
Давление насоса (максимальное) равно 50 атм. (избыточным); вязкость перекачиваемого продукта (напр., мазута) пусть равна 10°Э и уд. вес — $900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Следовательно, напорная высота насоса H равна:

$$H = \frac{p}{\gamma} = \frac{50 \cdot 10^4}{900} = 555 \text{ м мазутного столба.}$$

Предполагая коэффициент сопротивления λ (в первом приближении) равным 0,03, находим по формуле (12) приближенное значение скоростной высоты потока:

$$\frac{w'^2}{2g} = \frac{H}{\lambda' \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta_i}$$

Внося сюда $H = 555$,

$$\lambda' \cdot \frac{l}{d} = 0,03 \frac{50 \cdot 10^3}{0,25} = 6000$$

и

$$\sum \zeta_i = 10 \cdot 3,8 + 10 \cdot 0,14 + 20 \cdot 1,5 + 4,5 \cong 74;$$

находим:

$$\frac{w'^2}{2g} = \frac{555}{6074} = 0,0913.$$

Отсюда имеем:

$$w' = \sqrt{2g \cdot 0,0913} = 1,34 \left[\frac{\text{м}}{\text{сек.}} \right],$$

т. е. приближенное значение скорости.

... по формуле Уббелюде кинематическую вязкость ν и коэффициента гидравлического сопротивления λ .

$$\nu = \left(0,0781 \cdot 10 - \frac{0,0631}{10} \right) \cdot 10^{-4} = 0,725 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек.}} \right].$$

Находим приближенное значение параметра Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{1,34 \cdot 0,25}{0,725 \cdot 10^{-4}} = 4600.$$

Опираясь на приближенное значение параметра Рейнольдса, мы далее по формуле Блазиуса можем определить достаточно близкое к истине значение коэффициента гидравлического сопротивления λ . Имеем:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt{\text{Re}}} = 0,038.$$

Располагая действительным значением коэффициента λ , мы можем по формуле (12) найти второе приближение для скоростной высоты (достаточно близкое к истине):

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{H}{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i} = \frac{555}{0,038 \frac{50 \cdot 10^3}{0,25} + 74} = 0,072.$$

Отсюда действительное значение скорости потока

$$w = \sqrt{2g \cdot 0,072} = 1,19 \frac{\text{м}}{\text{сек.}}$$

Следовательно, объемный расход будет равен:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot w = \frac{3,14 \cdot 0,25^2}{4} \cdot 1,19 \cong 0,059 \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}}$$

(или 59 л/сек.).

По формуле (14) находим длину, гидравлически эквивалентную заданным местным сопротивлениям:

$$l' = \frac{d}{\lambda} \sum \zeta_i = \frac{0,25}{0,038} \cdot 74 = 487 \text{ м},$$

что составляет около одного процента общей длины трубопровода. Мощность, затрачиваемая на перекачку, равна:

$$N = \frac{QH\gamma}{75 \cdot \eta} \text{ л. с.}$$

Полагая η (коэффициент полезного действия насосной установки) равным 0,9, получаем:

$$N = \frac{0,059 \cdot 555 \cdot 900}{75 \cdot 0,9} = 437 \text{ л. с.}$$

При этом на преодоление трения затрачивается

$$N_{\text{тр.}} = \frac{Qh\gamma}{75\eta}$$

и на определение местных сопротивлений

$$N_{\text{м.с.}} = \frac{Qh'\gamma}{75\eta},$$

где

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} = 0,038 \frac{50 \cdot 10^4}{0,25} \cdot \frac{1,19^2}{19,62} \cong 549,7 \text{ м}$$

и

$$h' = \sum \zeta_i \frac{w^2}{2g} = 74 \cdot 0,072 \cong 5,3 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$N_{\text{тр.}} = 433 \text{ л. с.}$$

и

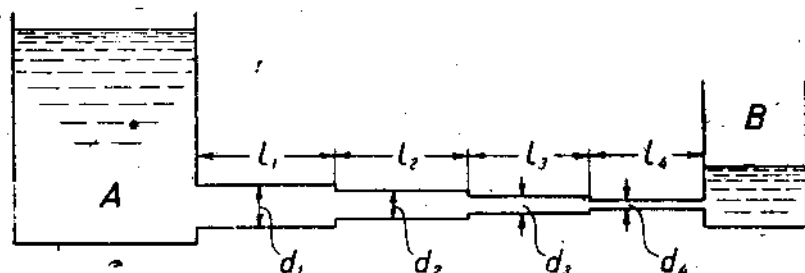
$$N_{\text{м.с.}} = 4 \text{ л. с.}$$

ЗАДАНИЕ 14.

РАСЧЕТ ВОДОПРОВОДА.

§ 1. Задача о простом водопроводе.

Простым водопроводом называется, вообще говоря, трубопровод, состоящий из нескольких участков труб разных длин и диаметров, соединенных последовательно и служащих для перекачки воды из пункта *A* к пункту *B* (см. фиг. 74). Пункты *A* и *B* могут нами мыслиться как два резервуара, разность уровней в которых равна *H* м. Таким образом движение воды от пункта *A* к пункту *B*



Фиг. 74.

происходит под давлением столба воды в *H* м. Можно представить себе, что резервуар *A* заменен насосом, давление которого равно давлению столба воды в этом резервуаре. Аналогично резервуар *B* гидравлически может быть заменен каким-либо сопротивлением (вентилем, задвижкой и т. д.), производящим такое же сопротивление, как столб воды от уровня входа в резервуар до верхнего уровня. Обозначим длину и диаметр первого участка трубопровода через l_1 и d_1 , аналогично второго через l_2 и d_2 и т. д. Предполагая

разность уровней H постоянной и движение воды установившимся, мы напишем условие равновесия потока. Очевидно, что разность противодавлений на концах потока, измеряемая столбом воды H , уравнивается суммарным сопротивлением трения во всех участках трубопровода и суммой всех местных сопротивлений (вентили, задвижки, переходы и т. д.), расположенных по длине трубопровода. Обозначим высоту потерянного напора, обусловленную только трением о стенки через $H_{тр.}$, аналогично высоту потерянного напора вследствие местных сопротивлений обозначим через $H_{м.с.}$. Условие равновесия по вышесказанному будет иметь вид:

$$H = H_{тр.} + H_{м.с.} \quad (1)$$

Величина H очевидно складывается из разности пиезометрических высот начала и конца водопровода (насос, противодавление) и разности нивелирных высот:

$$H = H_p + H_v$$

где

$$H_p = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \text{ и } H_v = z_1 - z_2$$

Для высоты $H_{тр.}$ очевидно имеем следующее выражение (по теореме Дарси-Вейсбаха):

$$H_{тр.} = \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{w_i^2}{2g}, \quad (2)$$

где n — число отдельных участков водопровода.

По теореме Борда-Карно о местных сопротивлениях высоту потерянного напора, обусловленную суммой всех местных сопротивлений на одном только каком-либо участке водопровода (напр., на участке i), можно представить в виде

$$h_i' = \zeta_i \frac{w_i^2}{2g}, \quad (3)$$

где $\zeta_i = \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_{ij}$, и n_i — число местных сопротивлений на участке i .

Высота $H_{м.с.}$, соответствующая потерям напора, обусловленным всеми местными сопротивлениями на всех участках водопровода, представится формулой:

$$H_{м.с.} = \sum_{i=1}^n h_i' = \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{w_i^2}{2g}. \quad (4)$$

Внося в формулу (1) найденные значения $H_{тр.}$ и $H_{м.с.}$ по формулам (2) и (4), получаем:

$$H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{w_i^2}{2g}. \quad (5)$$

Расход потока через любое сечение в любом участке один и тот же. Обозначая его через Q , мы будем иметь:

$$Q = \frac{\pi d_1^3}{4} \cdot w_1 = \frac{\pi d_2^3}{4} \cdot w_2 = \dots = \frac{\pi d_i^3}{4} \cdot w_i, \dots,$$

откуда

$$w_i = \frac{4Q}{\pi d_i^3}. \quad (6)$$

Выражая в формуле (5) скорости w_i согласно формуле (6), получим:

$$H = \sum_i \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{16Q^2}{\pi^3 d_i^5 2g} + \sum_i \zeta_i \frac{16Q^2}{\pi^3 d_i^5 2g}, \quad (7)$$

или

$$H = \left(\frac{1}{m} \right)^3 \cdot Q^2, \quad (8)$$

где через $\left(\frac{1}{m} \right)$ обозначено выражение

$$\frac{1}{m} = \frac{4}{\pi \sqrt{2g}} \cdot \sqrt{\sum_i \lambda_i \frac{l_i}{d_i^5} + \sum_i \zeta_i \frac{1}{d_i^5}}. \quad (9)$$

Из формулы (8) получаем:

$$Q = m \sqrt{H}, \quad (10)$$

или, что то же:

$$Q = m \sqrt{H_p + H_v}.$$

Величина m носит название *коэффициента пропускной способности водопровода* (аналогично коэффициенту расхода μ в теории истечения).

В случае правильно построенного или правильно проектируемого водопровода потери на местные сопротивления играют второстепенную роль, по сравнению с потерями на трение. Поэтому в первом приближении при расчете водопровода вторым слагаемым под радикалом в формуле (9) можно пренебречь. Кроме того величину λ коэффициента гидравлического сопротивления для всех участков можно принять практически постоянной и равной $\sim 0,03$ (см. напр., Есьман „Гидравлика“, стр. 151). Таким образом упрощенное выражение для коэффициента m будет иметь вид:

$$\frac{1}{m} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2g}} \sqrt{\sum_i \frac{l_i}{d_i^5}} \cong 0,05 \sqrt{\sum_i \frac{l_i}{d_i^5}} \quad (\text{метр. система}) \quad (11)$$

Данные для определения ζ_i в разных случаях приведены в задании 13 „Теорема Борда-Карно“, в параграфе о местных сопротивлениях. В практике могут представиться три частных случая применения полученных здесь формул:

1 случай. Заданы l_i , d_i и расход Q , требуется определить необходимый напор H . Такая задача не представляет никаких затруднений. По формуле (9) или (11) находим значение $\frac{1}{m}$, после чего по формуле (10) определяем требуемый напор H .

2. случай. Заданы l , d , и напор H ; требуется определить расход Q . Задача может быть решена так же просто, как и в первом случае, с помощью формул (9) или (11) и (10).

3. случай. Заданы напор H , расход Q и длина всего трубопровода l ; требуется найти значение диаметра d водопровода в предположении, что он постоянен по всей длине. С помощью формулы (9) находим значение $\frac{1}{m}$. Затем по приближенной формуле (11) находим приближенное значение диаметра d . После этого, определив все ζ , можно по формуле (9) найти диаметр во втором приближении.

Пример. Пусть имеем горизонтальный водопровод, состоящий из двух участков $l_1 = 10$ км, $d_1 = 0,20$ м и $l_2 = 5$ км, $d_2 = 0,15$ м.

Давление насоса в начале линии равно 10 атм., противодействие в конце — 2 атм. Определить расход воды.

По упрощенной формуле (11) имеем:

$$\frac{1}{m} = 0,05 \sqrt{\frac{10 \cdot 1000}{0,20^5} + \frac{5 \cdot 1000}{0,15^5}} = 492.$$

Разность уровней H , соответствующая разности давления 10—2 = 8 атм., равна

$$H = \frac{8 \cdot 10000}{\gamma} = 80 \text{ м,}$$

где $\gamma = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — уд. вес воды.

Далее по формуле (10) находим:

$$Q = m \sqrt{H} = \frac{1}{492} \sqrt{80} = 0,018 \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}}$$

т. е. расход составит 18 л в секунду.

В случае, когда водопровод состоит только из одного участка длины l и диаметра d , формула (9) принимает вид:

$$\frac{1}{m} = \frac{4}{\pi \sqrt{2g}} \sqrt{\lambda \frac{l}{d^5} + \zeta \frac{1}{d^4}} \quad (12)$$

и формула (3):

$$h' = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (13)$$

где $\zeta = \sum_{k=1}^n \zeta_k$, n — число местных сопротивлений.

Упрощенная формула (11) (пренебрегая местными сопротивлениями) будет:

$$\frac{1}{m} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{2g}} \cdot \sqrt{\frac{l}{d^5}}.$$

Внося это в формулу (10), получим:

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{\frac{H}{l}} \cdot d^{5/2}. \quad (14)$$

Введем обозначения

$$i = \frac{H}{l} \text{ (гидравлический уклон)}$$

и

$$C = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2g}{\lambda}},$$

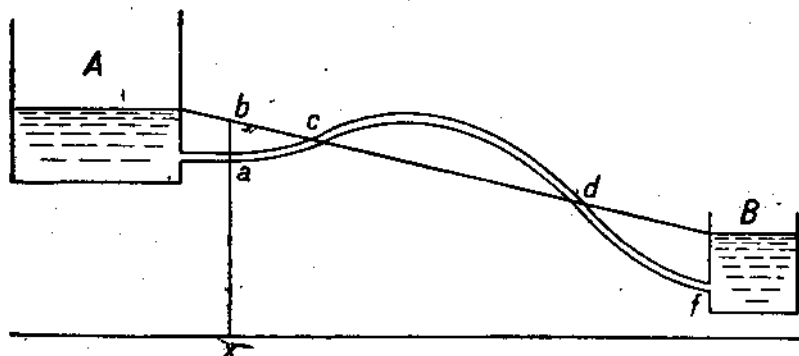
тогда получим:

$$Q = C \sqrt{i \cdot d^5}, \quad (15)$$

Последнее равенство представляет известную формулу Шези.

§ 2. Давление в водопроводной линии.

Предположим, что два резервуара *A* и *B* (или насос *A* соответствующего давления и резервуар *B*) соединены водопроводом; вообще говоря, не горизонтальным и не прямолинейным (фиг. 75). В практике часто представляется необходимым знать величину давления в различных точках водопроводной линии (напр., для расчета стенок труб, для определения возможности подачи воды



Фиг. 75.

за счет давления на определенную высоту и т. д.). Вопрос о величине давления легко может быть решен графически. Соединяя уровни в резервуарах *A* и *B* прямой линией (пиезометрическая линия) и зная профиль водопровода (т. е. нивелирную высоту в разных точках), мы можем определить для каждой точки *x* пиезометрическую высоту потока. Она равна расстоянию (по вертикали) между пиезометрической (прямой) *AB* и нивелирной кривой (линией водопровода). Так, напр., для точки *x* пиезометрическая высота равна отрезку *ab''* (в определенном масштабе), причем как известно:

$$\overline{ab} = \frac{p_x}{\gamma},$$

отсюда

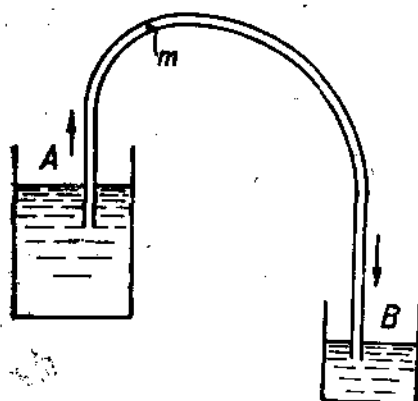
$$p_x = \overline{ab} \cdot \gamma. \quad (16)$$

Очевидно, что в точках *c* и *d* избыточное давление равно нулю (или абсолютное равно атмосферному), между точками *c* и *d* абсо-

давление меньше атмосферного. Таким образом на протяжении участка $\overline{cd}$ в водопроводе могут легко образоваться воздушные или паровые подушки, что может вызвать разрыв струй и с чем связан целый ряд вредных последствий (удары и т. д.). При проектировании следует не допускать возможности образования участков пониженных давлений (подобных участку $\overline{cd}$). С этой целью необходимо заботиться о том, чтобы нивеллирная линия водопровода не пересекала пьезометрической линии и была бы всегда ниже последней. На протяжении участка $\overline{df}$, как легко видеть из фигуры, давление опять становится больше атмосферного.

§ 3. Сифон.

В том случае, когда трубопровод соединяет два резервуара A и B и имеет участок пониженного давления (меньше атмосферного), он представляет собой сифон (фиг. 76). Соединяя уровни резервуаров пьезометрической прямой (которой соответствует атмосферное давление), можно вычислить графически давление в какой-либо точке сифона (абсолютное). Напр., в точке m оно равно



Фиг. 76.

$$p_m = 1 - \gamma \cdot y,$$

где γ — пьезометрическая высота для точки m в определенном масштабе.

Так как абсолютное давление p не может быть отрицательным, то $y = \frac{1}{\gamma}$ не может быть больше 10 м (для воды). Обозначая всю длину трубы сифона через l и диаметр

его через d , можно написать выражение как для расхода вдоль сифона, так и для абсолютного давления в разных его точках. Пусть разность уровней в резервуарах A и B равна H . Применяя формулу Бернулли, получим:

$$\frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \frac{w_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \frac{w_B^2}{2g} + z_B + h,$$

где z_A и z_B — нивеллирные высоты уровней в резервуарах A и B , соответственно w_A и w_B — скорости частичек на поверхностях уровней. Пренебрегая квадратами скоростей w_A и w_B в виду их малости, получим:

$$z_A - z_B = h \text{ или } H = h.$$

Для расхода была выведена формула

$$Q = C \sqrt{id^5},$$

где $i = \frac{h}{l} = \frac{H}{l}$.

Для того, чтобы получить выражение величины давления в какой-либо точке m сифона, напомним уравнение Бернулли для участка сифона от начала до точки m , находящейся на расстоянии x от места входа воды в сифон. Имеем:

$$\frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \frac{w_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_m}{\gamma} + \frac{w_m^2}{2g} + z_m + h \frac{x}{l}.$$

Или, пренебрегая величиной $\frac{w_A^2}{2g}$, заменяя $\frac{h}{l}$ через i , получим:

$$p_m = p_{\text{атм.}} + \gamma z_A - \left(z_m + \frac{w_m^2}{2g} + xi \right) \gamma.$$

Так как абсолютное давление в жидкости не может быть отрицательным, то имеем условие

$$p_m > 0 \quad (p_m - \text{абс.}),$$

что дает:

$$p_{\text{атм.}} + \gamma z_A \geq \left(z_m + \frac{w_m^2}{2g} + xi \right) \gamma,$$

откуда

$$z_m - z_A \leq \frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} - \frac{w_m^2}{2g} - H \frac{x}{l};$$

здесь внесено значение $i = \frac{H}{l}$.

Таким образом, чем больше скорость и разность уровней H , тем ниже возможный подъем сифона.

Заменяя $\frac{w_m^2}{2g}$ через $\frac{1}{\lambda} \frac{d}{l} \cdot H$,

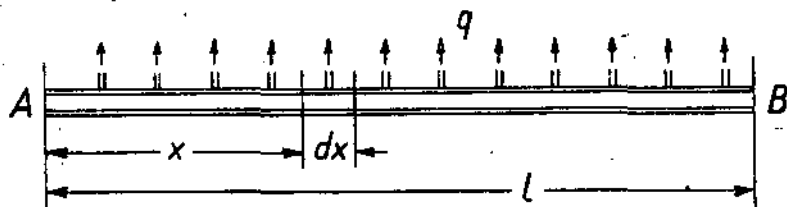
далее получаем:

$$z_m - z_A \leq \frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} - \left(\frac{d}{\lambda} + x \right) \cdot \frac{H}{l},$$

т. е. чем больше разность уровней H , тем меньше возможный относительный подъем $z_m - z_A$.

§ 4. Непрерывный расход в пути. Правило Дююи.

Предположим, что вдоль трубопровода АВ постоянного диаметра производится равномерный отбор воды по всей длине (напр.,



Фиг. 77.

через отводы малого диаметра) (см. фиг. 77). При этих условиях расход воды в разных сечениях будет разный. Обозначим количество воды, отводимое (в среднем) с каждой единицей длины

водопровода в секунду, через q . Таким образом по всей длине l отводится в секунду количество воды, равное

$$Q_n = q \cdot l. \quad (17)$$

Величина Q_n носит название *путевого расхода* (или расхода в пути).

Если через начальное сечение A в линию подавалось Q_A м³/сек., то через сечение B будет выходить только

$$Q_B = Q_A - Q_n. \quad (18)$$

Величина расхода Q_B через последнее сечение носит название *транзитного расхода* и обозначается через Q_m :

$$Q_m = Q_B.$$

Отсюда имеем:

$$Q_A = Q_n + Q_m. \quad (19)$$

Расход Q_x через сечение, находящееся на расстоянии x от начала, очевидно, равен,

$$Q_x = Q_A - q \cdot x$$

или

$$Q_x = Q_n + Q_m - qx. \quad (20)$$

Величину потерянного напора благодаря трению на элементарном участке водопровода dx , лежащем в пределах между x и $x + dx$, обозначим через dh ; при этом по формуле Дарси-Вейсбаха имеем:

$$dh = \lambda \frac{dx}{d} \cdot \frac{w_x^2}{2g}.$$

Высота потерянного напора h по всей длине равна сумме элементарных потерь, т. е.

$$h = \int_0^l dh = \int_0^l \lambda \cdot \frac{dx}{d} \cdot \frac{w_x^2}{2g}. \quad (21)$$

Внесем сюда значение скорости w_x через расход Q_x по формуле:

$$w_x = \frac{4Q_x}{\pi d^2} = \frac{4(Q_n + Q_m - qx)}{\pi d^2}$$

и произведем интегриацию; получим:

$$\begin{aligned} h &= \int_0^l \lambda \cdot \frac{dx}{d} \cdot \frac{16(Q_n + Q_m - qx)^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot 2g} = \\ &= -\frac{16\lambda}{q\pi^2 2gd^5} \cdot \int_0^l (Q_n + Q_m - qx)^2 d(Q_n + Q_m - qx) = \\ &= -\frac{16\lambda}{q\pi^2 2gd^5} \left| \frac{(Q_n + Q_m - qx)^3}{3} \right|_0^l = \\ &= -\frac{16\lambda}{3q\pi^2 2gd^5} [(Q_n + Q_m - ql)^3 - (Q_n + Q_m)^3]. \end{aligned}$$

Так как $ql = Q_n$, то

$$h = \frac{16 \lambda}{3q\pi^2 2gd^5} \cdot [-Q_m^3 + (Q_n + Q_m)^3] = \\ = \frac{16 \lambda}{3q\pi^2 2gd^5} \cdot (3Q_n^2 Q_m + 3Q_n Q_m^2 + Q_m^3).$$

Вынося $3Q_n$ за скобки и заменяя $\frac{Q_n}{q}$ через l , получим после сокращения:

$$h = \frac{16 \lambda l}{\pi^2 2g \cdot d^5} \cdot (Q_m^2 + Q_n Q_m + \frac{Q_n^2}{3}).$$

Выражение, стоящее в скобках, можно преобразовать следующим образом:

$$Q_m^2 + Q_n Q_m + \frac{Q_n^2}{3} = (Q_m + \frac{Q_n}{2})^2 + \frac{Q_n^2}{12}.$$

Вторым слагаемым в правой части этого равенства в практических расчетах пренебрегают по сравнению с первым, таким образом имеем:

$$h = \frac{16 \lambda l}{\pi^2 \cdot 2g \cdot d^5} \cdot (Q_m + 0,5Q_n)^2.$$

Обозначим $Q_m + 0,5Q_n$ через Q (фиктивный расход), получаем:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{16Q^3}{\pi^2 d^4} \cdot \frac{1}{2g}.$$

Но выражение $\frac{4Q}{\pi d^2} = w$ (фиктивная скорость), таким образом для случая непрерывного расхода в пути имеем:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}, \quad (22)$$

где

$$w = \frac{4(Q_m + 0,5Q_n)}{\pi d^2}. \quad (23)$$

Итак, в случае непрерывного расхода в пути высота потерянного напора определяется по формуле Дарси-Вейсбаха, по фиктивной скорости w или по фиктивному расходу Q , причем последний равен сумме расходов транзитного и половине путевого:

$$Q = Q_m + 0,5Q_n. \quad (24)$$

В этом и состоит правило Дюпюи.

§ 5. Задача о трех резервуарах.

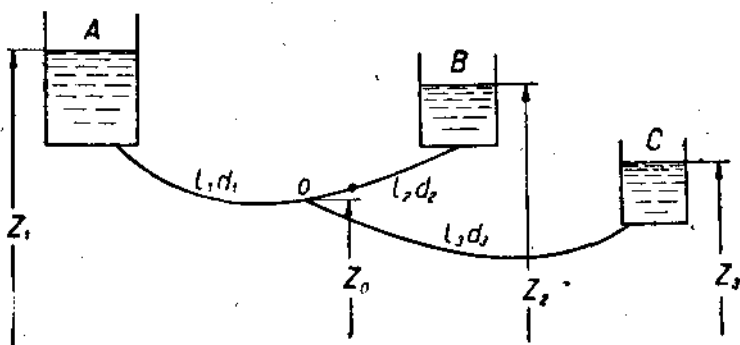
Пусть имеем три резервуара A , B и C , соединенные трубопроводами, сходящимися в точке O (фиг. 78).

Обозначим длину трубопровода AO через l_1 и диаметр через d_1 , аналогично для трубопровода BO имеем l_2 и d_2 и для CO — l_3 и d_3 . Уровень резервуара A пусть определяется высотой z , отсчитываемой от некоторой горизонтальной плоскости; аналогично для

резервуаров B и C имеем z_2 и z_3 . Высоту местоположения точки O обозначим через z_0 . Скорость потока вдоль трубопроводов обозначим соответственно через w_1 , w_2 и w_3 и скорости в резервуарах w_a , w_b и w_c .

Следует заметить, что резервуары в нашем случае могут быть заменены насосными станциями и приемными (потребляющими) пунктами, при этом высота уровня в резервуаре должна соответствовать давлению насоса и т. д.

Предположим, что на участке AO вода движется к точке схода O , на участках же BO и CO поток направлен от точки схода к резервуарам.



Фиг. 78.

Обозначим давление в точке O через p_0 . Это давление нам неизвестно. Напишем уравнение Бернулли для участков AO , BO и CO . Имеем:

$$\frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \frac{w_a^2}{2g} + z_1 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} + z_0 + h_1,$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} + z_0 = \frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \frac{w_b^2}{2g} + z_2 + h_2,$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{w_3^2}{2g} + z_0 = \frac{p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \frac{w_c^2}{2g} + z_3 + h_3,$$

где через h_1 , h_2 и h_3 обозначены потери напора на участках AO , BO и CO .

Пренебрегая квадратами скоростей w_a , w_b и w_c в виду их малости, перепишем:

$$\frac{p_{\text{атм.}} - p_0}{\gamma} + z_1 - z_0 = \frac{w_1^2}{2g} + h_1,$$

$$\frac{p_0 - p_{\text{атм.}}}{\gamma} + z_0 - z_2 = \frac{w_2^2}{2g} + h_2,$$

$$\frac{p_0 - p_{\text{атм.}}}{\gamma} + z_0 - z_3 = \frac{w_3^2}{2g} + h_3.$$

Выражая h , по формуле Дарси-Вейсбаха, вынося за скобки $\frac{w_1^3}{2g}$ и заменяя скорости через соответственные расходы, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{\text{атм.}} - p_0}{\gamma} + z_1 - z_0 &= \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{16Q_1^3}{\pi^3 \cdot d_1^4 \cdot 2g} \\ \frac{p_0 - p_{\text{атм.}}}{\gamma} + z_0 - z_2 &= \left(1 + \lambda \frac{l_2}{d_2}\right) \frac{16Q_2^3}{\pi^3 \cdot d_2^4 \cdot 2g} \\ \frac{p_0 - p_{\text{атм.}}}{\gamma} + z_0 - z_3 &= \left(1 + \lambda \frac{l_3}{d_3}\right) \frac{16Q_3^3}{\pi^3 \cdot d_3^4 \cdot 2g} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

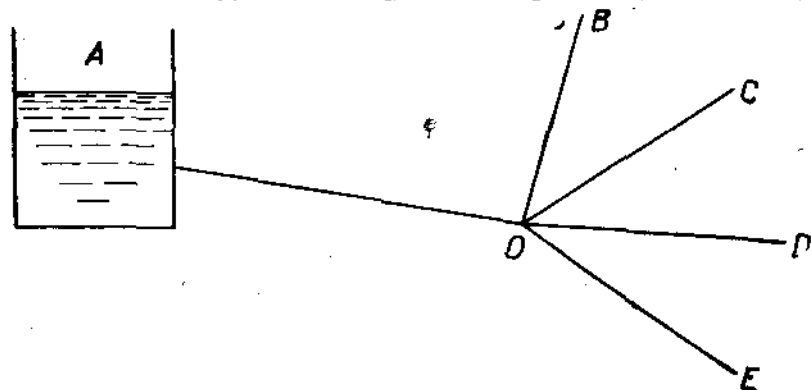
Кроме этих трех равенств имеем соотношение расходов:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3. \quad (26)$$

Определяя из равенств (25) Q_1 , Q_2 и Q_3 и внося их значения в равенство (26), получим соотношение для определения неизвестной величины p_0 , после чего определяются расходы Q_1 , Q_2 и Q_3 . Если какой-либо расход получится отрицательным, мы получим указание на то, что направление потока на данном участке противоположно тому, которое было предположено в начале.

§ 6. Сложная сеть труб.

1. Разомкнутая система. Пусть имеем резервуар A (насосная станция), соединенный трубопроводом AO (l и d) с разомкнутой системой труб OB (l_1, d_1), OC (l_2, d_2), OD (l_3, d_3) и OE (l_4, d_4)



Фиг. 79.

и т. д. (см. фиг. 79). Все трубы сходятся в одном пункте O . Располагаем следующими данными (и искомыми), (см. таблицу 4).

Таблица 4.

Пункты	A	O	B	C	D	E
Давления в этих пунктах.	p_a	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
Нивелирные высоты . .	z_a	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
Линии	AO	OB	OC	OD	OE	
Соответственные расходы.	Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	

Напишем систему уравнений Дарси-Вейсбаха для потерь напора на каждом участке:

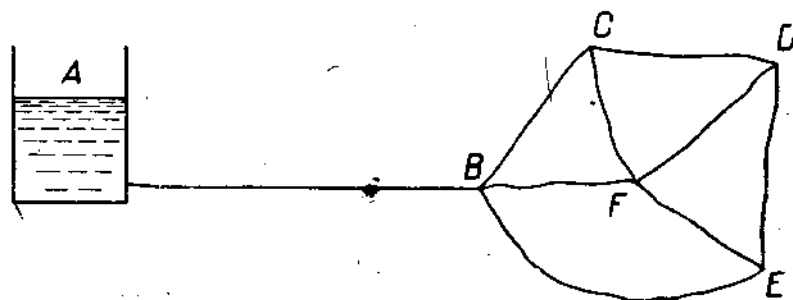
$$\left. \begin{aligned} \frac{p_0 - p_1}{\gamma} + z_0 - z_1 &= \frac{1}{k} \cdot \frac{l}{d^5} \cdot Q^2 \\ \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 &= \frac{1}{k_1} \cdot \frac{l_1}{d_1^5} \cdot Q_1^2 \\ \frac{p_2 - p_3}{\gamma} + z_2 - z_3 &= \frac{1}{k_2} \cdot \frac{l_2}{d_2^5} \cdot Q_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $k_i = \frac{16 l_i}{\pi^5 \cdot 2g}$.

Кроме системы уравнений (27), имеем еще соотношение расходов:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (28)$$

Определяя из равенств (27) все расходы через неизвестную величину p_0 и внося эти значения в равенство (28), мы получаем соотношение для определения неизвестной p_0 , после чего находим значение расходов. Если расходы заданы, искомыми величинами могут быть диаметры.



Фиг. 80.

2. Сомкнутая система. Имеем резервуар А (или насос) и сомкнутую систему трубопроводов BCDEF. Данные (см. фиг. 80) приведены в таблице 5.

Таблица 5.

Пункты	A	B	C	D	E		F		
Давления	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4		p_5		
Нивелирные высоты	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4		z_5		
Линии	AB	BC	CD	DE	EB	BF	CF	DF	EF
Длины	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
Диаметры	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
Расходы	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8

Для каждой линии можем написать уравнение Дарси-Вейсбаха типа (27) — всего, следовательно, 9 уравнений. Кроме того, можем написать условие для расходов в каждом узле, состоящее в том, что алгебраическая сумма всех расходов по трубопроводам к узлу равна нулю (так как накопления жидкости в месте схода труб не происходит). Этих уравнений будем иметь столько, сколько узлов в сомкнутой системе.

Решая совместно все уравнения, мы будем иметь возможность определить неизвестные расходы и диаметры (или часть этих неизвестных). При этом в первом приближении коэффициенты гидравлических сопротивлений λ для всех участков следует принять равными. Задача эта весьма сложная и может быть решена только приближенно.

ЗАДАНИЕ 15.

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПО НЕКРУГЛЫМ ТРУБАМ.

§ 1. Гидравлический радиус.

Для случая движения жидкости по трубе круглого сечения имеем ряд формул, определяющих:

- 1) потерю напора

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}; \quad (1)$$

- 2) параметр Рейнольдса

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu}; \quad (2)$$

- 3) коэффициент трения

$$\lambda = f(Re). \quad (3)$$

Наиболее распространенными и точными формулами, определяющими λ , являются:

- 1) формула Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt{Re}};$$

- 2) формула Ланга:

$$\lambda' = a + \frac{1,77}{\sqrt{Re}}$$

$a = 0,0136$ — для балаханской легкой масляной нефти,

$a = 0,0129$ — для сураханской легкой;

- 3) формула Ланга:

$$\lambda = a + \frac{0,6104}{(Re)^{0,35}},$$

$a = 0,00773$ — для балаханской нефти,

$a = 0,0059$ — для сураханской.

Указанные здесь формулы имеют место и для случая движения жидкости по некруглым трубам (прямоугольным, треугольным и т. п.), но только с тем изменением, что расчет ведется не

по диаметру d трубы, а по так называемому гидравлическому радиусу r поперечного сечения трубы.

Гидравлический радиус r по величине равен отношению площади F живого сечения трубы к смоченному ее периметру P , т. е.

$$r = \frac{F}{P}. \quad (4)$$

Так, напр., гидравлический радиус круглой трубы будет равен

$$r = \frac{F}{P} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4}. \quad (5)$$

Имея в виду равенство (5), формулы (1), (2) и (3), вычисленные по гидравлическому радиусу, примут вид:

$$h = \lambda \frac{l}{4r} \cdot \frac{w^3}{2g}, \quad (1')$$

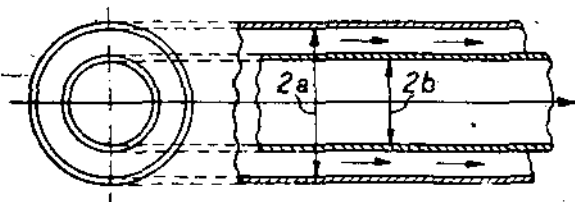
$$Re = \frac{4w \cdot r}{\nu}, \quad (2')$$

$$\lambda = f\left(\frac{4w \cdot r}{\nu}\right), \quad (3')$$

которые и будут справедливы для любого сечения трубы.

§ 2. Концентрические трубы.

На фиг. 81 представлены две концентрически расположенные трубы (продольное и поперечное сечение).



Фиг. 81.

Диаметр внешней трубы:

$$d_1 = 2a,$$

диаметр внутренней:

$$d_2 = 2b.$$

Жидкость движется в кольцевом пространстве.

Для данного случая гидравлический радиус будет равен:

$$r = \frac{F}{P} = \frac{\frac{1}{4} \pi (d_1^2 - d_2^2)}{\pi (d_1 - d_2)} = \frac{d_1 + d_2}{4}.$$

На основании формул (1'), (2') и (3') имеем:

$$h = \lambda \frac{l}{d_1 - d_2} \cdot \frac{w^3}{2g},$$

$$Re = \frac{w (d_1 - d_2)}{\nu},$$

$$\lambda = f\left[\frac{w (d_1 - d_2)}{\nu}\right].$$

§ 3. Призматические трубы разных сечений.

1. Сечение — прямоугольник.

Движение жидкости происходит в трубе прямоугольного сечения (фиг. 82), со сторонами a и b .

Гидравлический радиус:

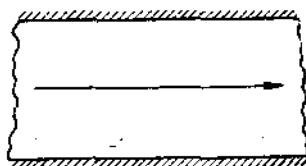
$$r = \frac{F}{P} = \frac{a \cdot b}{2(a+b)}.$$

Потеря напора в данном случае движения будет:

$$h = \lambda \frac{a+b}{2ab} \cdot \frac{w^3}{2g}.$$

Параметр Рейнольдса:

$$Re = \frac{2abw}{(a+b)\nu}$$



Фиг. 82.

и коэффициент трения:

$$\lambda = f\left(\frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{w}{\nu}\right).$$

2. Сечение — квадрат.

Это есть частный случай прямоугольной призмы, именно тот, когда $a = b$.

При этом условии гидравлический радиус:

$$r = \frac{a}{4},$$

потеря напора:

$$h' = \lambda \frac{l}{a} \frac{w^3}{2g},$$

параметр Рейнольдса:

$$Re = \frac{aw}{\nu},$$

и коэффициент трения:

$$\lambda = f\left(\frac{aw}{\nu}\right).$$

3. Сечение — равносторонний треугольник.

Гидравлический радиус:

$$r = \frac{F}{P} = \frac{\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{12} a.$$

Потеря напора:

$$h = \lambda \frac{3lw^3}{\sqrt{3} a 2g}.$$

Параметр Рейнольдса:

$$Re = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{aw}{\nu}.$$

Коэффициент трения:

$$\lambda = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{aw}{\nu}\right).$$

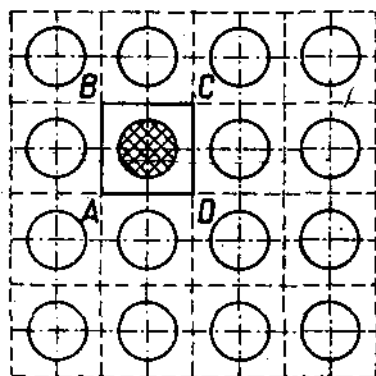
§ 4. Прохождение жидкости между трубами подогревателя.

Рассмотрим случай ламинарного движения жидкости между цилиндрическими трубами, одинакового радиуса ρ и расположенными таким образом, что оси их образуют семейство ортогональных эквидистантных прямых (фиг. 83).

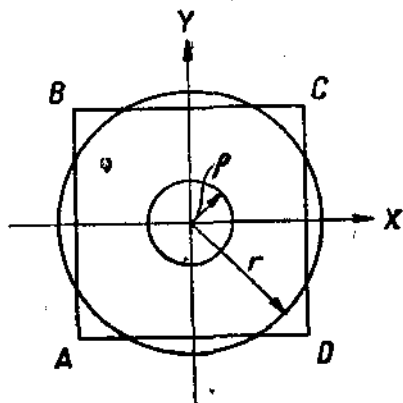
Направление потока параллельно оси труб (цилиндра), которое мы принимаем за ось Z .

Скорость постоянна вдоль прямой параллельной оси Z , но меняется от одной прямой (линии тока) к другой, т. е. является функцией X, Y .

Разобьем всю площадь на ряд прямоугольников (фиг. 83, пунктирные линии). Вследствие симметрии движение будет в ка-



Фиг. 83.



Фиг. 84.

ждом из них происходить одинаково. Производная скорости u по нормали к границе этого элемента, т. е. $\frac{du}{dn}$, будет равна нулю на контуре.

Можно ограничиться рассмотрением движения в одном элементе, представленном на фиг. 84.

Заменяем прямоугольник $ABCD$ равновеликой окружностью радиуса r_1 , определяемого из условия равенства площадей:

$$a \cdot b = \pi r_1^2, \quad (6)$$

откуда

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}. \quad (7)$$

В этом случае пограничные условия будут:

$$u = 0 \quad \text{для} \quad r = \rho,$$

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad \text{„} \quad r = r_1.$$

Вследствие сделанного допущения имеем движение жидкости не в контуре, ограниченном с одной стороны прямоугольни-

жом $ABCD$, а с другой — окружностью радиуса ρ , а движение в пространстве между двух concentрически расположенных окружностей радиуса

$$r = \sqrt{\frac{ab}{\pi}} \text{ и } \rho.$$

В этом случае получим для скорости u выражение:

$$u = \frac{P}{4\mu} (\rho^2 - r^2) + \frac{Pr_1}{2\mu} \ln \left(\frac{r}{\rho} \right). \quad (8)$$

Для определения расхода имеем:

$$Q = \int_0^{r_1} u \cdot 2\pi r dr.$$

Внося сюда u из (8) и произведя интегрирование, получим:

$$Q = \frac{P\pi(r_1^2 - \rho^2)^2}{8\mu} + \frac{\pi \cdot P \cdot r_1^2 \left[r_1^2 \ln \left(\frac{r_1}{\rho} \right) - \frac{r_1^2 - \rho^2}{2} \right]}{2\mu}.$$

Делая приведение, получим:

$$Q = \frac{\pi P}{2\mu} \cdot \left[r_1^4 \ln \left(\frac{r_1}{\rho} \right) - \frac{(r_1^2 - \rho^2)(3r_1^2 - \rho^2)}{4} \right]. \quad (9)$$

Средняя скорость определяется из уравнения расхода:

$$Q = \pi (r_1^2 - \rho^2) w, \quad (10)$$

что дает:

$$w = \frac{P}{2\mu} \left[\frac{r_1^4}{r_1^2 - \rho^2} \ln \left(\frac{r_1}{\rho} \right) - \frac{3r_1^2 - \rho^2}{4} \right]. \quad (11)$$

Так как

$$P = \frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{h}{l},$$

то отсюда имеем для потери напора выражение:

$$h = P \cdot l.$$

Подставляя значение P и заменяя абсолютную вязкость μ кинематической ν , получим для потери напора h равенство:

$$h = \frac{2\nu \cdot w \cdot l}{g \left[\frac{r_1^4}{r_1^2 - \rho^2} \ln \left(\frac{r_1}{\rho} \right) - \frac{3r_1^2 - \rho^2}{4} \right]}. \quad (12)$$

Выражая потерю напора через расход Q , получим:

$$h = \frac{2\nu Q l}{g \left[r_1^4 \ln \left(\frac{r_1}{\rho} \right) - \frac{3r_1^2 - \rho^2}{4} \right]}. \quad (12')$$

КОЭФИЦИЕНТ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ.

§ 1. Полный коэффициент теплопередачи.

Для расчета трубопроводов, перекачивающих подогретые нефти и нефтепродукты, необходимо правильно вычислить потерю тепла, вследствие теплопередачи через стенки трубопровода в воздух или грунт.

В учении о передаче тепла (см., напр., „Теплопередача в нефтяном деле“, В. С. Яблонский и П. П. Шумилов, ОНТИ, 1932 г.) этот вопрос разобран во всех деталях. Здесь мы ограничимся только, некоторыми выдержками, отсылая всех интересующихся подробностями к соответствующим главам вышеупомянутого курса. Напомним, что, согласно основной гипотезе Фурье, количество тепла, передаваемое вследствие теплопроводности через элементарную площадку какого-нибудь тела в единицу времени, пропорционально падению температуры в направлении нормали к этой площади.

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds, \quad (1)$$

где dQ — элементарное количество тепла,

λ — коэффициент теплопроводности,

∂T — падение температуры на элементе нормали ∂n ,

∂n — элемент нормали к площадке ds ,

ds — элементарная площадка.

С другой стороны, в теории теплопередачи пользуются другой формулой, носящей имя Ньютона:

$$dQ = \alpha ds (T_1 - T_2). \quad (2)$$

Это выражение можно прочесть так: количество тепла, передаваемое через элементарную площадку ds в единицу времени, пропорционально разности температур областей, разделяемых этой площадкой. В этой формуле коэффициент пропорциональности называют коэффициентом теплопередачи.

Если теплообмен происходит между жидкостью (нефтью) или газом и стенкой, то в этом случае величина α характеризует так называемый коэффициент теплопередачи от жидкости (газа) к стенке. Этот коэффициент зависит от геометрических размеров потока (напр., диаметра трубы), его физических постоянных (плотности, вязкости, теплоемкости, теплопроводности) и наконец от гидравлических условий (скорости, параметра Рейнольдса).

В случае теплообмена между жидкостью и окружающим трубу воздухом (почвой) приходится принимать во внимание отдельно: теплопередачу от жидкости к стенке α_1 , теплопроводность λ через стенку толщиной δ и теплоотдачу от стенки трубы в воздух α_2 . Величины коэффициентов α_1 и α_2 определяются в зависимости от геометрической, физической и гидравлической обстановки. Чтобы рассчитать теплопотерю от жидкости непосредственно в окружаю-

щую ореду, вычисляют так называемый полный коэффициент теплопередачи K , определяемый по формуле:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}, \quad (3)$$

для труб больших диаметров и тонких стенок—по формуле:

$$\frac{1}{K r_{\text{ср.}}} = \frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (4)$$

где r_1 , r_2 и $r_{\text{ср.}} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ суть соответственно внутренний, внешний и средний радиусы труб.

Эти две формулы предполагают знание коэффициентов α_1 и α_2 и совместно с уравнением

$$Q = K \cdot S (T_{\text{ж.}} - T_{\text{в.}}) \quad (5)$$

решают задачу о теплоотдаче от жидкости температуры $T_{\text{ж.}}$, протекающей по трубе, в воздух температуры $T_{\text{в.}}$.

Пример. Дан паропровод диаметра 70/76 мм, изолированный асбестом, толщиной 10 мм, затем изоляционным шелком, толщиной 15 мм, и, наконец, волнистым картоном, толщиной 15 мм; определить полный коэффициент теплопередачи от пара в воздух, если дано:

$$\alpha_1 = 10\,000 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}},$$

$$\alpha_2 = 15 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}},$$

$$\lambda_{\text{асб.}} = 0,175 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}},$$

$$\lambda_{\text{шел.к.}} = 0,047 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}},$$

$$\lambda_{\text{карт.}} = 0,09 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}},$$

$$\lambda_{\text{желез.}} = 50 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}}.$$

а) В случае неизолированной трубы:

$$\frac{1}{K_1 r_{\text{ср.}}} = \frac{1}{10\,000 \cdot 0,035} + \frac{1}{15 \cdot 0,038} + \frac{1}{50} \ln \frac{38}{35},$$

откуда

$$K_1 r_{\text{ср.}} = 0,575 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}}$$

и

$$K_1 = 15,75 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}}.$$

В случае изолированной трубы

$$\frac{1}{K_1 \cdot 0,0365} = \frac{1}{10000 \cdot 0,035} + \frac{1}{15 \cdot 0,038} + \frac{1}{50} \ln \frac{38}{35} + \frac{1}{0,175} \ln \frac{48}{38} + \\ + \frac{1}{0,047} \ln \frac{63}{48} + \frac{1}{0,09} \ln \frac{78}{63},$$

откуда

$$K_1 \cdot 0,0365 = 0,085 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.}^\circ \text{Ц}}$$

и

$$K_2 = 2,33 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.}^\circ \text{Ц}}.$$

Так как отданное количество тепла прямо пропорционально полному коэффициенту теплопередачи, то во втором случае (изоляция) теплотеря будет почти в 7 раз меньше. Если пар имеет температуру 165°Ц , а воздух 15°Ц , то 1 м^2 поверхности трубы будет терять в первом случае количество тепла в час:

$$Q_1 = 15,75 \cdot (165 - 15) = 236,25 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.}}$$

и во втором случае:

$$Q_2 = 2,33 (165 - 15) = 34,95 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.}}$$

§ 2. Формула Форхгеймера для внешнего коэффициента теплопередачи α_2 .

Для определения теплопередачи от зарытого трубопровода в грунт в подробных курсах теплопередачи и гидравлики см. напр., Л. С. Лейбензон „Курс нефтепромысловой механики“, глава IV, § 10) выводится формула, впервые данная Форхгеймером:

$$r_2 = \frac{\lambda_{\text{гр.}}}{r_1 \ln \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - r_1^2}}{r_2} \right)}, \quad (6)$$

где h — глубина зарытия трубопровода,

$\lambda_{\text{гр.}}$ — коэффициент теплопроводности грунта,

$\ln$ — логарифм натуральный.

Таблицы коэффициентов теплопроводности почв, согласно опытам, произведенным в Государственном исследовательском нефтяном институте, приведены в статье в „Нефт. хоз.“ № 2, 1931, „Исследование теплопроводности грунтов“ К. А. Царевич и В. С. Яблонский).

В случае, если диаметр трубы мал по сравнению с глубиной залегания, то формула (6) принимает более простой вид:

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{\text{гр.}}}{r_2 \ln \frac{2h}{r_2}}. \quad (7)$$

Пример. Найти внешний коэффициент теплопередачи от трубы в грунт α_2 для трубопровода 8-дм., залегающего в сухой песчаной почве на глубине 1,25 м.

8-дм. труба имеет внешний диаметр 0,215 м:

$$\lambda_{гр} = 0,315 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

Таким образом по формуле (6):

$$\alpha_2 = \frac{0,315}{0,215 \ln \frac{1,25 + \sqrt{1,56 + 0,046}}{0,215}} = 0,4736 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

и по формуле (7):

$$\alpha_2' = \frac{1}{0,215 \ln \frac{2,50}{0,215}} = 0,4743 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

Из сравнения полученных результатов мы видим, что вторая формула для данных условий дает весьма удовлетворительный ответ.

§ 3. Теплопередача от трубы в воздух.

Если трубопровод проложен над почвой или подвешен к специальной эстакаде, то для полного теплового расчета надо уметь определить внешний коэффициент теплопередачи от трубы в воздух.

Приводимый на фиг. 85 график позволяет рассчитывать коэффициент α_2 для труб различных диаметров (от 10 до 1000 мм) и для температур от -20° до $+180^\circ \text{Ц.}$ при температуре наружного воздуха 20°Ц.

На этом графике учтены тепловые потери от железной горизонтальной трубы, вследствие теплопроводности конвекции и излучения.

Пример. Найти внешний коэффициент теплопередачи от трубы диаметром 4 дм. в воздух, температура которого 20°Ц. Температура трубы -100°Ц.

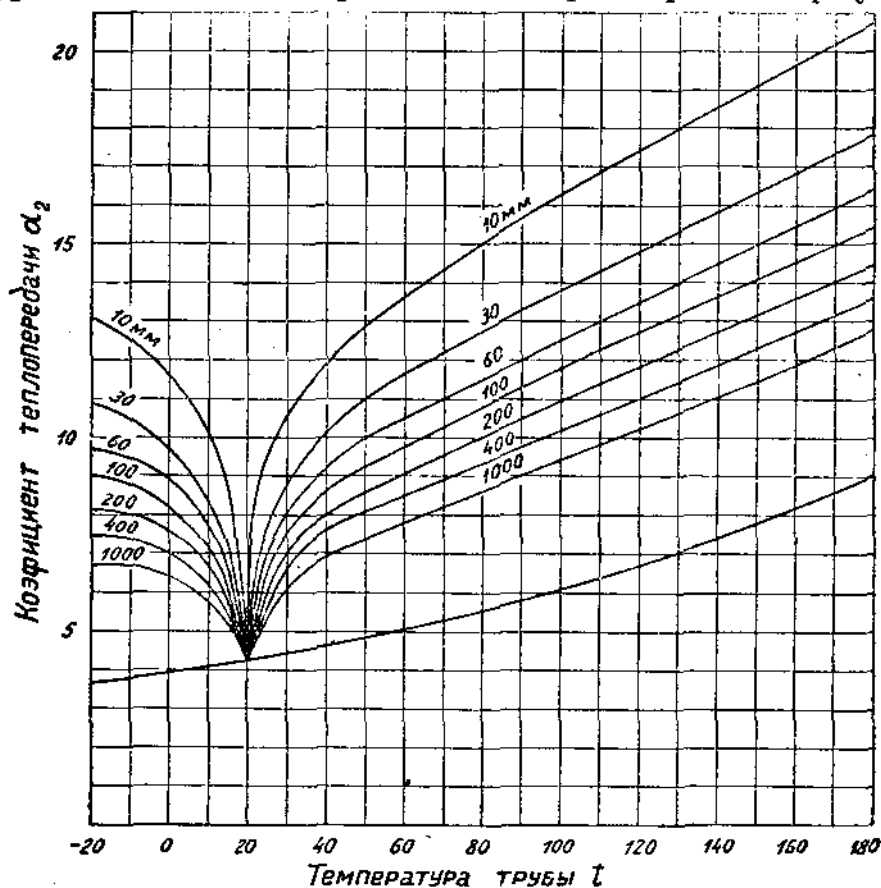
Обращаясь к фиг. 85, находим на абсциссе 100° , идем вверх по этой ординате до кривой $d = 100 \text{ мм}$ и затем от точки пересечения сворачиваем налево. Проводя линию, параллельную абсциссе на пересечении с осью ординат, читаем цифру 10,9. Итак,

$$\alpha_2 = 10,9 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

§ 4. Теплопередача в ламинарном потоке.

Желая определить внутренний коэффициент теплопередачи от нефтепродукта к трубе, мы должны различать два основных случая: случай ламинарного движения жидкости (напр., движение подогретых автолов, цилиндрических масел, вязких и парафинистых мазутов в большинстве бывает ламинарным) и случай турбулентного режима.

Задача о передаче тепла при ламинарном движении подогретой вязкой жидкости получила довольно много согласующихся между собой решений, однако наиболее исчерпывающее решение этой проблемы было дано авторами этой книги. Исходя из теоретических соображений, путем интегрирования дифференциального уравнения с частными производными второго порядка авторы уста-



Фиг. 85.

новили однозначную зависимость между двумя характеристическими параметрами Nu (Nusselt) и $Pé$ (Péclet):

$$Nu = \Phi \left(Pé \cdot \frac{d}{l} \right),$$

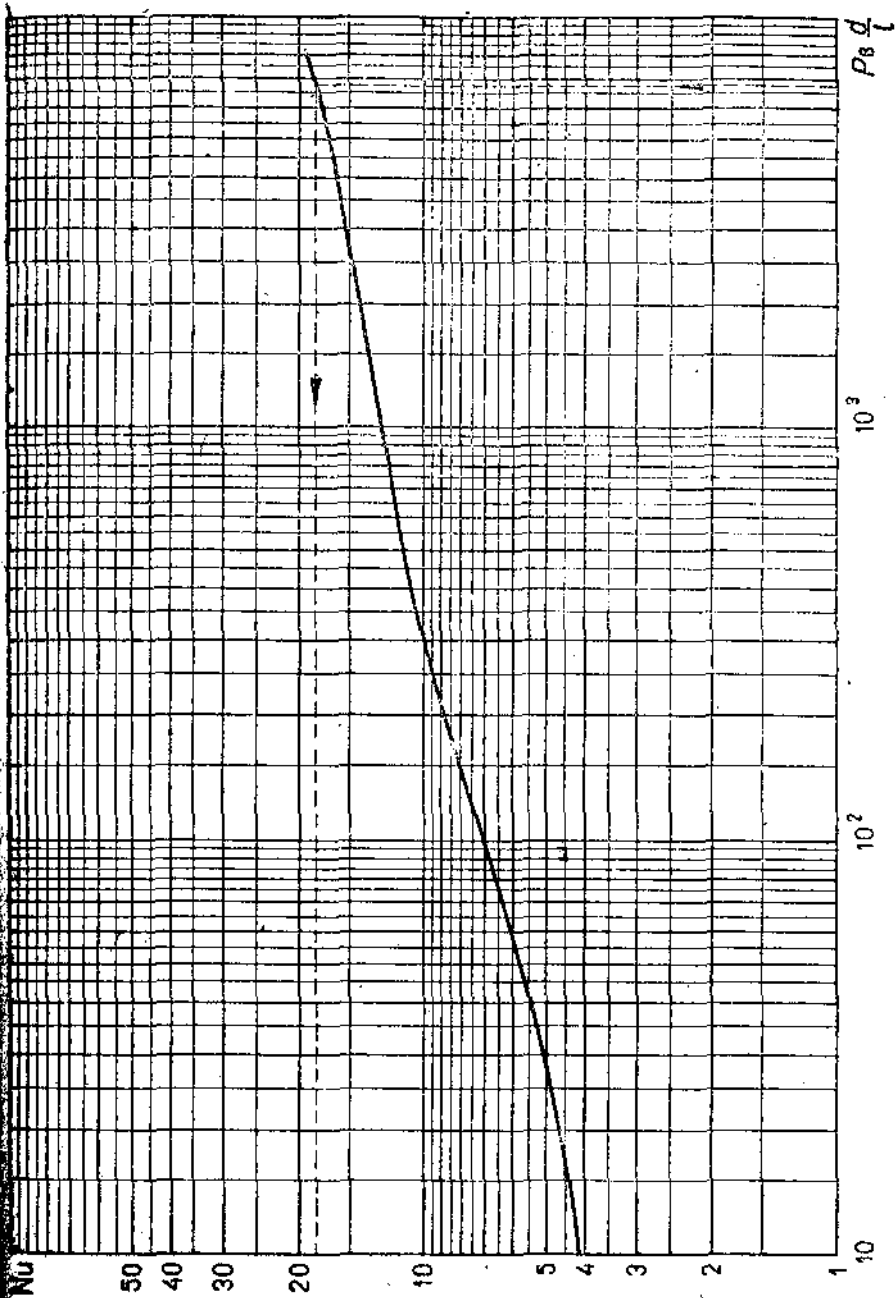
где

$$Nu = \frac{\alpha_1 d}{\lambda}$$

и

$$Pé \frac{d}{l} = \frac{w \cdot c \cdot r \cdot d}{\lambda} \cdot \frac{d}{l}$$

суть отвлеченные величины.



Фиг. 86.

Эта зависимость может быть представлена в виде бесконечного ряда. Однако для удобства расчета мы ограничимся графическим представлением (см. фиг. 86).

Для малых значений параметра $Pe \cdot \frac{d}{l}$ значение Nu , уменьшаясь, стремится к постоянной величине:

$$Nu^{\min} = 3,65.$$

Это предельное значение параметра Nusselt'a имеет место для бесконечно-длинных трубопроводов, так как в этом случае

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Pe \cdot \frac{d}{l} = 0.$$

Пример. Найти средний внутренний коэффициент теплопередачи от мазута, движущегося по трубе 2-дм. диаметра и длиной 4 м со скоростью 0,8 м/сек., если известно $\lambda_{\text{маз.}} = 0,12 \frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}}$
 $c = 0,5 \frac{\text{Кал.}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{Ц}}, \quad \gamma = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

Найдем характеристический параметр:

$$Pe \cdot \frac{d}{l} = \frac{0,8 \cdot 3600 \cdot 0,5 \cdot 900 \cdot 0,05^2}{0,12 \cdot 4} = 6750.$$

Найдя на оси абсцисс число 6750, мы идем по ординате вверх до кривой и на оси ординат отсчитываем 18.

Итак,

$$\frac{\alpha_1 d}{\lambda} = 18,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{18 \cdot 0,12}{0,05} = 43,2 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц}}.$$

§ 5. Теплопередача при турбулентном потоке.

Задача о передаче тепла при турбулентном движении подогретых вязких жидкостей была решена теоретически во всей полноте впервые Рейнольдсом и Стантоном и дополнена проф. Л. С. Лейбензоном.

Автору удалось составить весьма простую формулу, связывающую характеристический параметр Nu с параметрами Re (Reynolds) и St (Stanton), а именно:

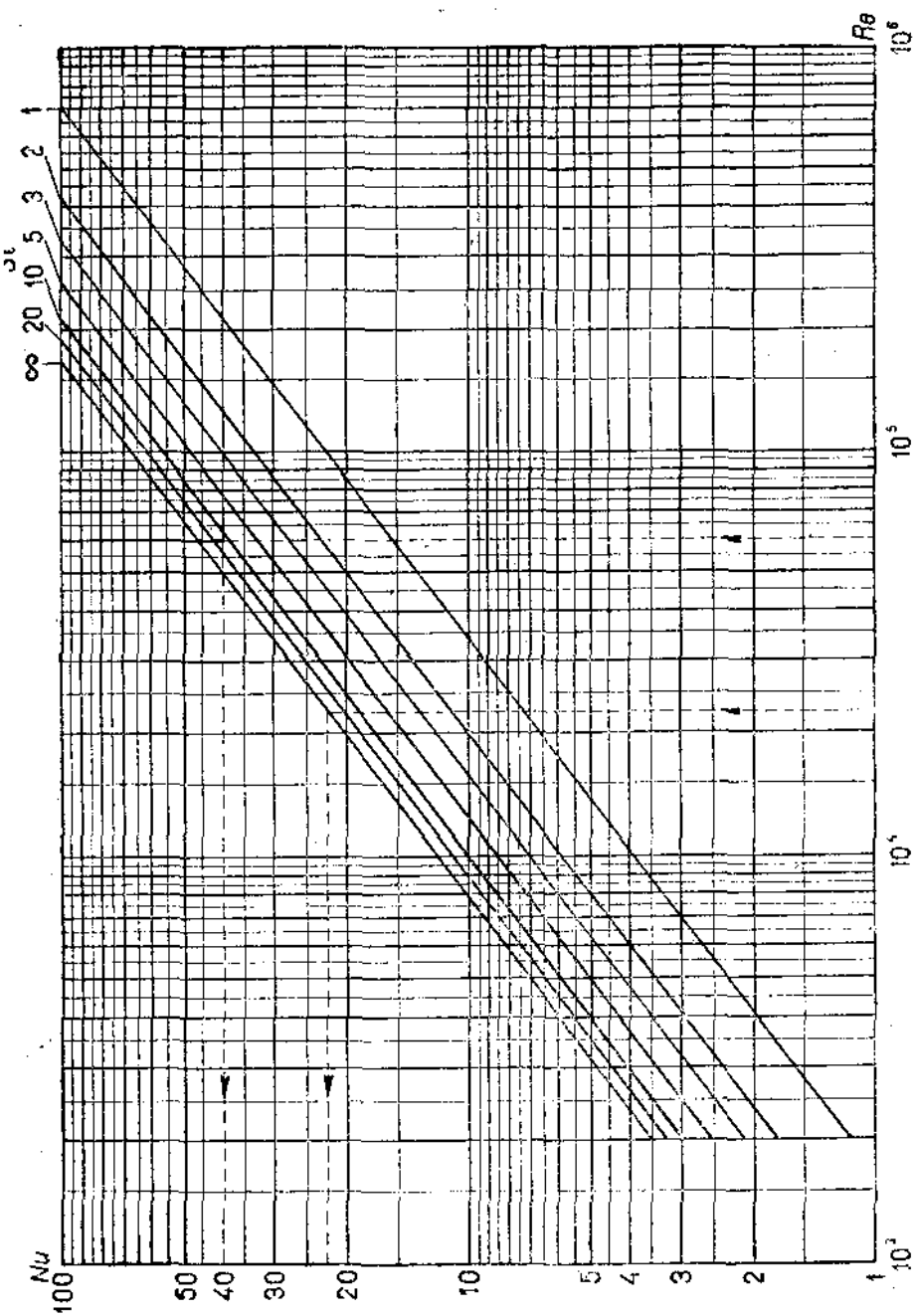
$$\frac{\alpha_1 d}{\lambda} = 0,1187 Re^{3/4} \frac{St}{St + 2}, \quad (8)$$

где

$$St = \frac{\mu c}{\lambda}.$$

На графике мы получим семейство кривых, соответствующих различным значениям параметра St (см. фиг. 87).

Таким образом для расчета теплопередачи в турбулентном потоке необходимо иметь два параметра: Re и St .



Фиг. 87.

Пример. Найти внутренний коэффициент теплопередачи от жидкости к стенке при движении нефти уд. веса $\gamma = 800 \text{ кг/м}^3$ по трубе $d = 4 \text{ дм.}$ со скоростью $1,5 \text{ м/сек.}$, если дано $\mu = 0,02 \frac{\text{г. см}}{\text{сек.}}$ и $\lambda = 0,0008 \frac{\text{Кал.}}{\text{см. сек. } ^\circ\text{Ц.}}$.

Найдем параметры Re и St , выражая все величины в одних и тех же единицах (напр. CGS):

$$Re = \frac{150 \cdot 10 \cdot 0,3}{0,02} = 60\,000$$

и

$$St = \frac{0,02 \cdot 0,5}{0,0008} = 12,5.$$

Находим далее на оси Re число 60000, поднимаемся до кривой $St = 12,5$ и затем на оси ординат отсчитываем

$$\frac{\alpha_1 d}{\lambda} = 400,$$

откуда

$$\alpha_1 = 1150 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час. } ^\circ\text{Ц.}}$$

§ 6. Задачи.

Найти коэффициент теплопередачи от неизолированного 6-дм. трубопровода, пролегающего в песчаном грунте ($\lambda_{\text{гр.}} = 0,3 \frac{\text{Кал.}}{\text{м. час. } ^\circ\text{Ц.}}$) на глубине $h = 1,2 \text{ м.}$, если даво:

$$Q = 72 \frac{\text{т}}{\text{час.}}; \quad c = 0,5 \frac{\text{Кал.}}{\text{кг } ^\circ\text{Ц.}}; \quad \gamma = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\lambda = 0,135 \frac{\text{Кал.}}{\text{м. час. } ^\circ\text{Ц.}}; \quad u = 0,03 \frac{\text{м}^2}{\text{час.}}.$$

Последовательно определяем:

1) Внутренний коэффициент теплопередачи α_1 .

Для этого вычисляем сперва площадь поперечного сечения трубы, а затем скорость:

$$F = \frac{\pi 0,15^2}{4} = 0,0177 \text{ м}^2,$$

$$w = \frac{72\,000}{900 \cdot 0,0177} = 4520 \frac{\text{м}}{\text{час.}},$$

$$Re = \frac{4520 \cdot 0,15}{0,03} = 22\,600,$$

$$St = \frac{0,03 \cdot 0,05 \cdot 900}{0,135} = 100,$$

откуда

$$Nu = \frac{\alpha_1 d}{\lambda} = 225,$$

а следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{225 \cdot 0,135}{0,15} = 192,5 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час. } ^\circ\text{Ц.}}$$

2) Внешний коэффициент теплопередачи α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{0,3}{0,16 \ln \frac{24}{0,16}} = 0,7 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

3) Коэффициент теплопередачи через стенку:

$$\alpha_3 = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{40}{0,005} = 8000 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

4) Полный коэффициент теплопередачи K :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{192,5} + \frac{1}{0,7} + \frac{1}{8000} = 1,434,$$

откуда

$$K \cong 0,7 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot \text{час.} \cdot ^\circ\text{Ц.}}$$

ЗАДАНИЕ 17.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛА НА ДВИЖЕНИЕ НЕФТИ ПО ТРУБАМ.

§ 1. Изменение вязкости с температурой.

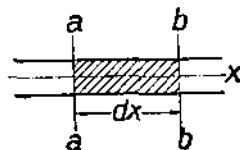
Предварительный подогрев нефти, перекачиваемой по трубопроводу, и подогрев самих нефтепроводов преследует обычно цель либо устранить застывание нефтепродукта в пути, либо увеличить производительность трубопровода. Известно, что для всех без исключения жидкостей и газов вязкость изменяется с температурой: при повышении температуры вязкость уменьшается и наоборот при понижении температуры увеличивается, достигая при некоторой температуре весьма значительной величины. При дальнейшем снижении температуры нефть совершенно теряет свою текучесть, превращаясь в вязелинообразную массу.

На фиг. 4—12 были приведены кинематические вязкости различных нефтепродуктов для температур от -10 до $+50^\circ\text{Ц.}$

Из этих фигур видно, что из нефтей наибольшей вязкостью обладает макатская нефть (Эмба), из мазутов—мазут марки „Аз“.

§ 2. Изменение температуры нефти по длине трубопровода.

Предварительно подогретая до некоторой температуры нефть, поступающая в трубопровод, будет отдавать свое тепло через стенки трубы и изоляцию и температура ее будет понижаться. Найдем формулу для расчета охлаждения нефти. Пусть нам известен полный коэффициент теплопередачи (см. задание 16), начальная температура нефти T_0 и объемный расход Q . Физические константы нефти будем считать также известными. Выделим из нашего трубопровода на расстоянии x от начала элемент трубы длиной dx (см. фиг. 88).



Фиг. 88.

При установившемся гидравлическом и тепловом режимах, которые характеризуются неизменной скоростью и отсутствием на-

копления тепла, температура в каждой точке остается постоянной. Составим уравнение теплового равновесия для элемента, заштрихованного на фигуре.

Обозначим среднюю температуру в сечении aa через T , тогда в сечении bb мы будем иметь температуру $T - dT$, где dT — падение температуры на длине dx .

Количество тепла, проходящее через сечение aa , будет равно

$$q_a = Q \cdot c \cdot \gamma T.$$

Через сечение bb будет выходить тепловой поток

$$q_b = Q \cdot c \cdot \gamma (T - dT).$$

Таким образом в рассматриваемом элементе остается количество тепла

$$dq = -Qc\gamma dT. \quad (1)$$

Так как температура внутри этого элемента остается постоянной, то очевидно все это тепло передается, через стенку трубы и изоляцию, т. е.

$$dq = K \cdot S dx (T - T_0), \quad (2)$$

где S — периметр трубы и

T_0 — температура окружающей среды.

Сравнивая написанные выше уравнения, мы имеем:

$$-Qc\gamma dT = KSdx (T - T_0).$$

В написанном обыкновенном дифференциальном уравнении остается разделить переменные

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{KS}{Qc\gamma} dx$$

и выполнить интегрирование. Имеем:

$$\ln (T - T_0) + C = -\frac{KSx}{Qc\gamma}.$$

Для определения произвольной постоянной C мы имеем условие в начале трубы, а именно:

$$T = T_a \text{ для } x = 0,$$

откуда

$$\ln (T_a - T_0) = -C$$

и, следовательно,

$$\ln \frac{T - T_0}{T_a - T_0} = -\frac{KSx}{Qc\gamma}. \quad (3)$$

Эта формула позволяет вычислить среднюю температуру для любого сечения нефтепровода в зависимости от начальной температуры, температуры окружающей среды, а также гидравлических, физических и геометрических характеристик потока.

С помощью формулы (3) можно найти также температуру нефти в конце нефтепровода. Обозначим эту последнюю через T_b , тогда

$$\ln \frac{T_b - T_0}{T_a - T_0} = -\frac{KSL}{Qc\gamma}. \quad (4)$$

Если по условиям перекачки температура нефтепродукта не должна спускаться ниже некоторого предела (напр., ниже температуры застывания), то последняя формула позволяет определить начальную температуру.

Пример. Определить температуру в конце нефтепровода, перекачивающего макатскую нефть, если:

$$T_a = 40^\circ \text{Ц},$$

$$T_0 = 5^\circ \text{Ц},$$

$$d = 6 \text{ дм. (15 см)},$$

$$L = 1 \text{ км},$$

$$K = 7 \frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \text{ час. } ^\circ \text{Ц}} \text{ (от нефти в воздух).}$$

$$c = 0,5 \frac{\text{Кал.}}{\text{кг } ^\circ \text{Ц}},$$

$$Q = 70 \frac{\text{м}^3}{\text{час.}}$$

$$\gamma = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Итак,

$$\ln \frac{T_a - 5}{40 - 5} = - \frac{7 \cdot \pi \cdot 0,15 \cdot 1000}{70 \cdot 0,5 \cdot 900},$$

отсюда

$$T_a = 36,5^\circ \text{Ц},$$

т. е. температура упадет всего на $3,5^\circ \text{Ц}$.

§ 3. Определение потери напора в случае движения по нефтепроводу подогретого продукта.

В задании 6 нами была выведена формула Дарси-Вейсбаха для потери напора в горизонтальном трубопроводе, а именно:

$$h = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g},$$

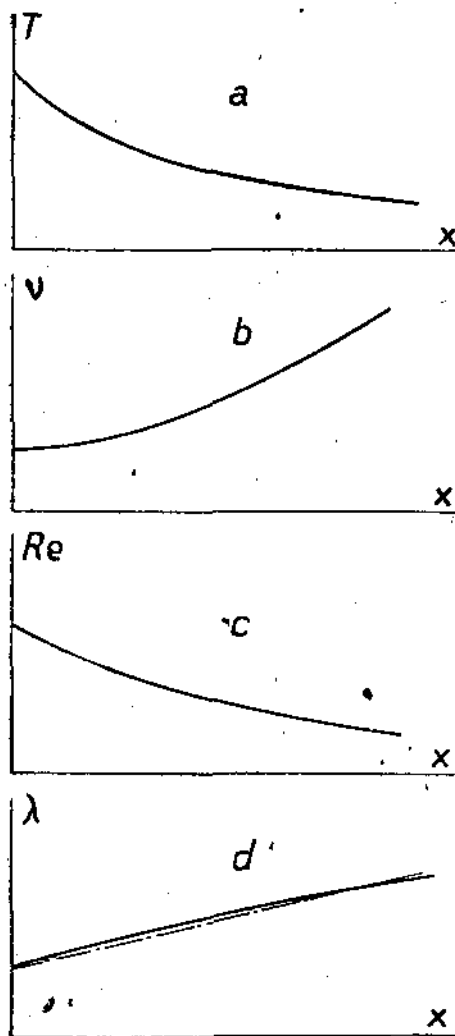
где λ —так называемый коэффициент трения—считался нами постоянным по длине всего трубопровода.

Это положение справедливо только в том случае, если температура по длине нефтепровода постоянна. В случае движения подогретой нефти температура продукта падает вследствие теплоотдачи через стенку трубы.

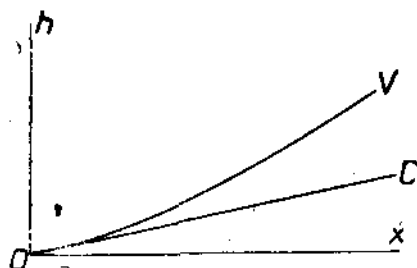
В связи с падением температуры нефти увеличивается ее вязкость и, следовательно, уменьшается параметр Рейнольдса. А так как

$$\lambda = \Phi(\text{Re}),$$

то очевидно при снижении температуры будет изменяться коэффициент сопротивления. Из графика фиг. 50 видно, что при уменьшении числа Re значение коэффициента λ возрастает.



Фиг. 89.



Фиг. 90.

Таким образом, можно написать, что, вообще говоря,

$$\lambda = \Phi(x).$$

Вид этой функции может быть найден лишь графически.

Зная кривую падения температуры (см. фиг. 89a) по длине трубопровода или вычисляя ее по формуле (4), мы можем по точкам построить кривую вязкостей (см. фиг. 89b). Для соответствующих вязкостей можно начертить кривую параметров Рейнольдса (см. фиг. 89c) и наконец построить график (фиг. 89d) изменения коэффициента сопротивления по длине трубопровода. В случае турбулентного течения жидкости эта последняя зависимость изображается кривой, весьма мало отличающейся от прямой.

Итак,

$$\lambda = ax + b. \quad (5)$$

Расчет потери напора ведется, исходя из формулы Дарси-Вейсбаха. Потеря напора на участке трубы длиной dx будет равна

$$dh = \lambda \frac{w^2}{2gd} \cdot dx.$$

Потеря напора на длине x будет определяться интегралом

$$h = \frac{w^2}{2gd} \int_0^x \lambda dx.$$

Подставляя вместо коэффициента λ его зависимость от длины по формуле (5), мы найдем:

$$\begin{aligned} h &= \frac{w^2}{2gd} \int_0^x (ax + b) dx = \\ &= \frac{w^2}{2gd} \left(\frac{ax^2}{2} + bx \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Изображая это соотношение графически, мы видим, что в слу-

чае теплоотдачи от трубопровода в окружающую среду эта зависимость представляется в виде параболы (см. фиг. 90, кривая OV), в то время как при постоянстве температуры потеря напора была прямо-пропорциональна длине и изображалась в виде прямой линии, которая проходит через начало координат (см. фиг. 91, кривая OO).

Пример. Для разобранного в § 2 примера найти график потери напора для участка от 0 до 10 км, если вязкость макатской нефти, определенная на опытном трубопроводе ГИНИ, дана в виде графика.

Пользуясь формулой (3), найдем кривую распределения температур по длине трубопровода.

Затем для соответствующих температур находим по вискограмме значения коэффициентов кинематической вязкости λ .

После этого вычисляем параметры Рейнольдса для каждого участка.

На основании полученных данных заключаем, что между 3 и 4 км режим из турбулентного переходит в ламинарный.

Коэффициенты сопротивления λ находим для первого участка трубопровода по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

а для второго:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Зная коэффициенты сопротивления для отдельных участков, находим величины потери напора Δh для каждого километра трубопровода последовательно.

Все эти данные приведены в таблице 6.

Суммируя цифры последней строчки, получаем значение полной потери напора на всей длине трубопровода.

Таблица 6.

Ламинарный режим										Турбулентный режим											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Расстояние в км . . .											40	36,5	33,3	30,5	28,0	25,7	23,6	21,8	20,1	18,6	17,2
Температура в °C . . .	0,45	0,53	0,64	0,73	0,85	0,97	1,10	1,21	1,37	1,5	3670	3110	2560	2260	1940	1700	1500	1360	1200	1100	970
Вязкость ν											0,0405	0,0422	0,0445	0,0460	0,0330	0,0377	0,0427	0,0470	0,0533	0,0582	0,0660
Re											16,7	17,4	18,3	18,9	13,6	15,5	17,6	19,3	21,9	23,9	27,1
Δh											16,7	34,1	52,4	71,3	84,9	100,4	118,0	137,3	159,2	183,1	210,2
h																					

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР.

§ 1. Кажущийся модуль сжатия жидкости.

Пусть жидкость занимает объем V_0 , находясь под давлением p_0 . Если давление возрастает на величину

$$P = p_1 - p_0, \quad (1)$$

то она займет новый объем V_1 , меньший первоначального объема V_0 . Отношение

$$\Delta = \frac{V_0 - V_1}{V_0} \quad (2)$$

составляет так называемое объемное сжатие жидкости.

Между величинами P и Δ существует в известных пределах прямая пропорциональность, даваемая законом Гука:

$$P = k \cdot \Delta; \quad (3)$$

k есть истинный модуль объемного сжатия жидкости. Для воды имеем приблизительно:

$$k = 20\,000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad (4)$$

для нефти и масел имеем приблизительно

$$k = 13\,500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \quad (5)$$

Если жидкость находится в каком-нибудь сосуде, то мы наблюдаем, иное большее истинного, сжатие жидкости, происходящее вследствие того, что размеры сосуда увеличиваются в связи с повышением внутреннего давления. Это обстоятельство легко учесть. Пусть жидкость занимает трубу длины l , внутренний радиус ее пусть R_0 , при толщине стенки δ . Обозначим еще через E модуль Юнга для стенок трубы. Вследствие увеличения давления на величину P внутренний радиус трубы возрастает до величины R , а потому имеем:

$$V_0 = \pi R_0^2 l, \quad V_1 = \pi R^2 l,$$

увеличение единицы объема внутри трубы будет:

$$\Delta_1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2}. \quad (6)$$

Обозначая

$$u = R - R_0,$$

получим:

$$R^2 - R_0^2 = (R_0 + u)^2 - R_0^2 = 2R_0 u + u^2.$$

Отбрасывая малые величины второго порядка, мы получим из (6) соотношение:

$$\Delta_1 = 2 \cdot \frac{u}{R}. \quad (7)$$

Это будет давать кажущееся уменьшение единицы объема жидкости, происходящее вследствие имеющего место в действительности увеличения объема жидкости. Правую часть формулы (7) необходимо выразить через механические величины, характеризующие растяжение стенок трубы под действием давления P . Действительно относительное удлинение материала стенок трубы будет:

$$e = \frac{2\pi R - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \frac{R - R_0}{R_0} = \frac{u}{R_0}.$$

Но по закону Гука имеем соответствующую этому величину напряжения материала:

$$Z = E \cdot \frac{u}{R_0}. \quad (8)$$

С другой стороны, по известной из теории сопротивления материалов формуле Мариотта имеем:

$$Z = \frac{PR_0}{\delta}. \quad (9)$$

Из обоих уравнений (8) и (9) мы найдем:

$$\frac{u}{R_0} = \frac{R_0 P}{\delta \cdot E};$$

внося это в (7), получим:

$$\Delta_1 = \frac{2R_0 P}{\delta \cdot E}. \quad (10)$$

Одновременно с этим вследствие повышения давления на величину P происходит истинное уменьшение единицы объема жидкости на величину, определяемую из (3):

$$\Delta_2 = \frac{P}{k}. \quad (3')$$

Полное уменьшение единицы объема жидкости будет поэтому:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{P}{k_0}; \quad (11)$$

величина k_0 называется кажущимся модулем сжатия жидкости.

Внося (10) и (3') в (11), получим:

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k} + \frac{D}{\delta \cdot E}, \quad (12)$$

где введена обычная величина диаметра трубы:

$$D = 2R_0.$$

Формула (12) дана проф. Н. Е. Жуковским. Из нее следует, что:

$$k_0 = \frac{k}{1 + \frac{Dk}{\delta \cdot E}}; \quad (13)$$

отсюда кажущийся модуль сжатия жидкости всегда меньше истинного.

Из физики известно, что скорость распространения звуковых волн в сжимаемой жидкости дана формулой Ньютона:

$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (14)$$

где ρ — плотность жидкости, т. е. масса единицы объема ее.

Мы можем следовательно принять, что величина, определяемая из формулы:

$$b = \sqrt{\frac{k_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{k}{\rho \left(1 + \frac{Dk}{2E}\right)}}, \quad (15)$$

представляет скорость распространения волн сжатия и расширения в жидкости, заполняющей трубу, если принять во внимание как сжимаемость жидкости, так и растяжение стенок трубы в радиальном направлении. Формула (15) принадлежит проф. Кортевичу.

§ 2. Формула ударного давления проф. Н. Е. Жуковского.

Предположим, что упругий призматический брус, длины l и поперечного сечения F , двигавшийся со скоростью w , внезапно остановился. Потерянная при этом живая сила пойдет на работу деформации сжатия бруса. Если обозначить через Z величину возникающего при этом напряжения сжатия, то величина работы деформации сжатия, накапливающейся в каждой единице объема бруса, как известно из теории сопротивления материалов, будет определяться по формуле:

$$\partial_1 = \frac{Z^2}{2E},$$

где E — модуль Юнга для материала бруса.

Следовательно, вся работа деформации будет иметь величину:

$$\partial = \partial_1 Fl = \frac{Z^2}{2E} \cdot Fl. \quad (16)$$

Потерянная при остановке бруса живая сила будет иметь величину:

$$T = \frac{mw^2}{2} = \frac{1}{2} \rho Fl w^2. \quad (17)$$

Но так как

$$\partial = T, \quad (18)$$

то, внося сюда (16) и (17), мы получим:

$$\frac{Z^2}{2E} Fl = \frac{1}{2} \rho Fl w^2,$$

откуда имеем известную формулу:

$$Z = w \sqrt{E\rho}. \quad (19)$$

Введем теперь по формуле (14) скорость распространения звуковой волны вдоль бруса:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (20)$$

получим

$$E = \rho c^2. \quad (20')$$

Внося (20') в (19), мы получим важную формулу:

$$Z = \rho r c. \quad (21)$$

Этот вид формулы, обычно не применяющийся в литературе, очень интересен тем, что представляет полную аналогию с известной формулой проф. Н. Е. Жуковского в теории гидравлического удара. Мы будем поэтому обозначать формулу (21) как формулу проф. Н. Е. Жуковского.

§ 3. Гидравлический удар в трубопроводе.

Если жидкость, текущая по трубе со скоростью W , внезапно остановится вследствие быстрого закрытия задвижки, то находящаяся сзади остальная часть жидкости продолжает двигаться, постепенно останавливаясь, пока состояние останова не охватит всю трубу. При этом жидкость сжимается, а стенки трубы расширяются. В образовавшийся вследствие расширения трубы и сжатия жидкости объем и будет входить жидкость. Состояние останова, очевидно, будет сопровождаться повышением давления жидкости, которое может быть иногда очень значительным и сопровождаться в некоторых случаях разрушением трубы. Начавшись у закрытой задвижки, это состояние останова и связанное с этим повышение давления, которое мы будем называть *ударным давлением*, будет распространяться со скоростью волны сжатия по направлению к началу трубы. Если труба, от которой ответвляется рассматриваемая труба, достаточно велика (ее обычно называют *магистралью*), то мы можем принять, что состояние движения в ней во все время остается неизменным и мы можем считать, что там, т. е. в начале нашей трубы, находится область постоянного давления. Когда волна сжатия, несущая повышенное ударное давление, добежит до магистрали, то это повышенное давление уничтожится там равным понижением давления, которое приносится волной противоположной, надвигающейся от магистрали, и которая теперь будет распространяться с той же скоростью по трубе по направлению к задвижке. В нашей трубе разовьется сложное явление, происходящее от наложения обеих волн. Не входя в дальнейшее рассмотрение этих явлений, исследованных во всей полноте проф. Н. Е. Жуковским, мы приведем лишь наиболее интересную с практической стороны формулу для величины ударного давления.

Очевидно к нашей жидкой колонне мы можем применить формулу (21), но так как жидкость заключена в трубе, то вместо скорости волны сжатия c мы должны взять скорость распространения волны сжатия в жидкости, находящейся в трубе, т. е. вели-

чину b , данную формулой (15). Отсюда мы имеем для величины ударного подъема давления при внезапной остановке жидкости, текущей в трубе со скоростью w , формулу:

$$P = b\rho w. \quad (22)$$

Эта формула открыта проф. Н. Е. Жуковским и носит его имя. Проф. Н. Е. Жуковский произвел многочисленные эксперименты на Московском водопроводе для исследования явлений гидравлического удара и построил полную теорию этого важного явления, охватившую все стороны этих явлений. Теория эта получила широкое распространение за границей.

Для чугунных водопроводных труб проф. Н. Е. Жуковский принимает:

$$E = 1\,000\,000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

для скорости звука в свободной воде, согласно опытным данным, он принимает:

$$a = 1435 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Для нормальных наших водопроводных чугунных труб проф. Н. Е. Жуковский приводит следующие данные (см. таблицу 7):

Таблица 7.

D в дм.	δ в дм.	b в м/сек.	P_0 в атм.
2	$\frac{10}{32}$	1348	13,75
4	$\frac{11}{32}$	1288	13,16
6	$\frac{13}{32}$	1254	12,80
24	$\frac{22}{32}$	913	9,32

Здесь P_0 есть величина ударного повышения давления в метрических атмосферах, т. е. в $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ на каждый метр потерянной скорости жидкости. Она легко вычисляется из формулы (22), которую мы перепишем, вводя вместо плотности ρ вес единицы объема $\gamma = \rho g$, в следующем удобном виде:

$$P = \frac{w\gamma b}{g}, \quad (22)$$

где g — ускорение тяжести.

В эту формулу вносим для 2-дм. трубы.

$$w = 100 \frac{\text{см}}{\text{сек}}; \quad g = 980 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}; \quad \gamma = 0,001 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3};$$

$$b = 134\,800 \frac{\text{см}}{\text{сек}};$$

получим:

$$P_0 = \frac{100 \cdot 0,001 \cdot 134\,800}{980} = 13,75 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

аналогично вычисляем для труб остальных диаметров.

Итак, для нормальных чугунных водопроводных труб на каждый метр потерянной скорости мы имеем ударное повышение давления 10—14 атм. (метрических).

Задача. Вычислить ударное повышение давления и скорость распространения волны сжатия в нефтепроводной 12-дм. трубе, по которой перекачивается нефть $\gamma = 0,000856 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$ в количестве 306 т в час. Истинный модуль сжатия ее примем $k = 13\,500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Толщина стенок $\delta = 1$ см.

$$E = 2\,000\,000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Ответ:

$$b = 1135 \frac{\text{см}}{\text{сек.}},$$

$$P = 13,5 \text{ атм. (метр.)}.$$

ЗАДАНИЕ 19.

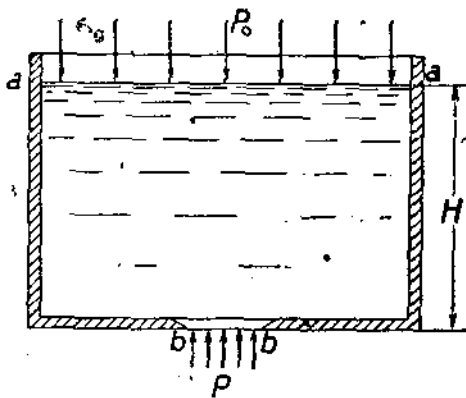
ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ УРОВНЕ.

§ 1. Формула Торичелли.

Пользуясь уравнением Бернулли при изучении истечения жидкости из отверстия, сделанного в тонкой стенке, получим выражение для скорости истечения w и расхода жидкости Q .

На фиг. 91 представлен сосуд поперечного сечения F , из которого через отверстие дна (поперечного сечения f) вытекает жидкость. Высота уровня над дном сосуда остается за время истечения постоянной ($H = \text{const}$). Рассмотрим общий случай истечения.

Предположим, что на свободной поверхности жидкости aa давление $P_0 = \text{const}$ не равно давлению $P = \text{const}$ у отверстия bb . Кроме того принимаем во внимание неравномерное распределение в жидкой струйке скоростей (случай движения рельсовой жидкости). Уравнение Бернулли для данного случая будет иметь следующий вид:



Фиг. 91.

$$\frac{P_0}{\gamma} + k \frac{w_0^2}{2g} + H = \frac{P}{\gamma} + k \frac{w^2}{2g}, \quad (1)$$

где k — некоторый коэффициент, величина которого колеблется от 1,1 до 1,2.

Составим уравнение расхода:

$$Q = fw = Fw_0,$$

где w — скорость истечения,

w_0 — скорость на свободной поверхности.

Подставляя

$$w_0 = \frac{f}{F} w = nw, \quad (2)$$

где $n = \frac{f}{F}$ на много < 1 , в уравнение (1), получим ¹:

$$w = \sqrt{\frac{2g \left[H + \left(P_0 - P \right) \frac{1}{\gamma} \right]}{k(1-n^2)}}. \quad (3)$$

В частном случае, когда $P_0 = P$, формула (3) принимает вид:

$$w = \sqrt{\frac{2gH}{k(1-n^2)}} = \varphi \sqrt{2gH \cdot \frac{1}{1-n^2}}.$$

Если принять $n = 0$, то

$$w = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (4)$$

• Принимая $k = 1$ (случай движений идеальной жидкой струйки), получим закон Торичелли:

$$w = \sqrt{2gH}, \quad (5)$$

т. е. скорость истечения жидкости прямо-пропорциональна корню квадратному из высоты напора H .

§ 2. Опытные данные.

1. Коэффициент скорости φ . Экспериментальные данные показывают, что скорость, определенная по формуле Торичелли, больше фактической скорости.

Причина такого несоответствия объясняется как внутренним трением жидкости (вязкостью), так и трением вблизи стенок сосуда, что влечет за собой, как уже упоминалось выше, неравномерное распределение в жидкой струйке скоростей. Формула скорости, выведенная для случая реальной жидкости:

$$w = \varphi \sqrt{2gH},$$

отличается от формулы Торичелли коэффициентом φ , так называемым коэффициентом скорости.

По Вейсбаху

$$\begin{array}{ll} \text{при } H = 0,02 \text{ м} & \varphi = 0,96 \\ \text{„ } H = 1,03 \text{ „} & \varphi = 0,995. \end{array}$$

В среднем можно положить $\varphi = 0,97$, т. е. действительная скорость истечения меньше теоретической на 3%.

2. Коэффициент сжатия струи α . При выводе формулы (4) имели в виду, что сечение струи равно сечению отверстия.

В действительности это имеет место только в том случае, когда стенки сосуда плавно переходят в стенки отверстия.

¹ Стоящее в числителе подкоренное выражение $H + \frac{P_0 - P}{\gamma}$ называется напором жидкости.

Во всех остальных случаях, вообще говоря, происходит явление, известное под названием *сжатия струи*.

Оно состоит в том, что частицы по выходе из отверстия движутся по траекториям не параллельно между собой, а наклонно, что вызывает уменьшение сечения струи сравнительно с сечением отверстия (фиг. 92).

Отношение площади поперечного сечения струи f_1 к площади отверстия f называется коэффициентом сжатия струи и обозначается буквой α .

На основании многочисленных опытов, произведенных различными гидравликами, имеем предел изменения коэффициента сжатия α от 0,6 до 0,64.

Количество вытекающей жидкости (расход), принимая во внимание коэффициент скорости φ и сжатия α , будет равен:

$$Q = f_1 w = f \cdot \alpha \cdot \varphi \sqrt{2gH} = \mu f \sqrt{2gH}, \quad (6)$$

где произведение $\alpha \cdot \varphi = \mu$ есть так называемый коэффициент расхода.

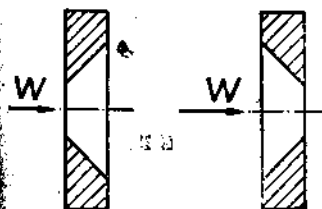
Коэффициент расхода μ зависит от формы отверстия, от формы сосуда вблизи отверстия и от напора H . Для случая отверстий в тонкой стенке

$$\mu = 0,62.$$

Для отверстия Понселе, имеющего форму, указанную на фиг. 93, изменение коэффициента истечения по Вейсбаху ниже следующее:

Диаметр отверстия в см.	1	2	3	4
Напор $H = 0,25$ м . .	$\mu = 0,64$	0,63	0,62	0,614
" $H = 0,6$. . .	$\mu = 0,63$	0,62	0,61	0,607

По Грашофу (Grashof):



Фиг. 93.

Фиг. 94.

$$\mu = 0,6 + \frac{0,06}{0,5 + \sqrt{h}} = 0,7d. \quad (7)$$

Формула (7) дает для μ несколько преувеличенное значение.

По новейшим изысканиям Шнейдера для отверстия диаметра > 30 мм и при высоте $> 0,6$ м

$$\mu = 0,600.$$

При направляющих стенках (фиг. 94), расположенных и направленных внутрь сосуда, сжатие уменьшается, становится неполным.

Для данного случая истечения, согласно опытам Бидона и Вейсбаха, коэффициент истечения равен:

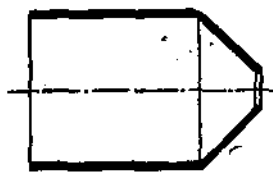
$$\mu' = \mu \left(1 + x \cdot \frac{\text{смоченная длина}}{\text{полная поверхность отверстия}} \right),$$

где $x = 0,128$ для круглых отверстий,
 $x = 0,152$ „ небольших квадратных,
 $x = 0,184$ „ „ прямоугольников,
 $x = 0,157$ „ больших „.

Для ρ следует брать значение $= 0,62$.

В случае, когда сосуд перед отверстием сужается (фиг. 95), коэффициент истечения по Вейсбаху определяется по следующим формулам:

1) для круглых отверстий:



Фиг. 95.

$$\mu' = \mu [1 + 0,0456 (14,32^n - 1)],$$

2) для прямоугольных отверстий:

$$\mu' = \mu [1 + 0,076 (9^n - 1)],$$

где

$$n = \frac{f}{h}$$

(f — площадь сечения отверстия, F — площадь сечения сосуда перед отверстием).

§ 3. Боковое отверстие.

Формула (6)

$$Q = \mu f \sqrt{2gH}$$

для случая отверстия, расположенного в вертикальной или наклонной стенке, пригодна только для его части (фиг. 96), а именно: для узкой горизонтальной полосы, площадью

$$df = ydx.$$

В единицу времени через элемент площади $d\vec{f}$, таким образом, протечет

$$q = dQ = \mu df \sqrt{2gh} = \mu \sqrt{2g} \cdot yx^{1/2} dx, \quad (7)$$

где x есть расстояние рассматриваемого элемента отверстия от свободной поверхности.

Полный расход через сечение f будет равен сумме элементарных расходов ($q = dQ$), т. е.

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_0^{\pi} y \cdot x^{1/2} dx. \quad (8)$$

Так как форма отверстия определяет η как функцию от x , то полученный интеграл можно взять в некоторых случаях совершенно точно, в других приближенно.

Что же касается коэффициента расхода (μ), то имеются только опытные его значения.

Приведем примеры на определение расхода жидкости для случая прямоугольного и круглого отверстия в вертикальной боковой стенке.

Пример 1. Для прямоугольного отверстия высотой a и шириною $y = b = \text{const}$ по формуле (8) будем иметь:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \int_0^H x^{1/2} dx = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} [H^{3/2} - h^{3/2}]. \quad (9)$$

Полученную формулу можно представить в другом виде.

Обозначим расстояние центра тяжести отверстия от свободной поверхности жидкости в сосуде через x_0 (фиг. 96), тогда очевидно

$$H = x_0 + \frac{a}{2},$$

$$h = x_0 - \frac{a}{2}.$$

Подставляя эти значения в формулу (9), получим:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(x_0 + \frac{a}{2} \right)^{3/2} - \left(x_0 - \frac{a}{2} \right)^{3/2} \right] = \\ &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} x_0^{3/2} \left[\left(1 + \frac{a}{2x_0} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{a}{2x_0} \right)^{3/2} \right]. \end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках разложим в ряд по биному Ньютона. Произведя разложение и сделав вычитание, получим:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{a}{2x_0} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{a}{2x_0} \right)^{3/2} = \\ &= \frac{3a}{2x_0} \left[1 - \frac{1}{96} \left(\frac{a}{x_0} \right)^2 - \frac{1}{2048} \left(\frac{a}{x_0} \right)^4 \dots \right] \end{aligned}$$

и таким образом:

$$Q = \mu a \cdot b \sqrt{2gx_0} \left[1 - \frac{1}{96} \left(\frac{a}{x_0} \right)^2 - \frac{1}{2048} \left(\frac{a}{x_0} \right)^4 \dots \right] \quad (10)$$

Пример 2. Отверстие круглое, сделано в вертикальной стенке, диаметром $2r$ (фиг. 97). Центр его погружен под свободную поверхность на глубину x_0 .

Для горизонтальной полосы шириной dx , лежащей на глубине x , скорость будет равна:

$$v_x = \mu \sqrt{2gx}.$$

Расход через эту полосу очевидно будет равен:

$$q = dQ = v_x \cdot d\omega = v_x \cdot 2y \cdot dx, \quad (11)$$

так как площадь

$$d\omega = 2y dx. \quad (12)$$

Обозначим центральный угол, соответствующий полухорде (y), через β .

Тогда

$$y = r \sin \beta,$$

разность

$$x_0 - x = r \cos \beta,$$

откуда

$$x = x_0 - r \cos \beta,$$

и

$$dx = r \sin \beta \cdot d\beta.$$

Произведя замену y и dx в выражениях (11) и (12) через радиус круга и центральный угол β , получим:

$$d\omega = 2r^2 \sin^2 \beta d\beta \quad (12')$$

и

$$q = dQ = 2v_x r^2 \sin^2 \beta d\beta. \quad (11')$$

Принимая во внимание, что

$$v_x = \mu \sqrt{2gx},$$

$$x = x_0 - r \cos \beta,$$

заменим v_x в формуле (11'), получим:

$$dQ = 2\mu \sqrt{2g(x_0 - r \cos \beta)} \cdot r^2 \sin^2 \beta d\beta.$$

Полный расход через все сечение определится интегрированием полученного выражения от 0 до π :

$$Q = 2\mu r^2 \sqrt{2g} \int_0^\pi \sin^2 \beta \sqrt{x_0 - r \cos \beta} \cdot d\beta$$

или

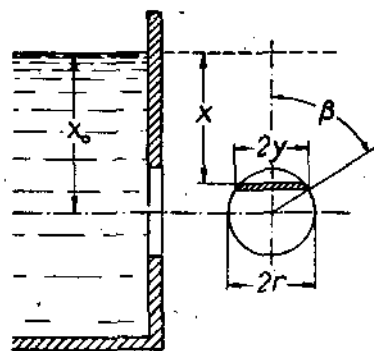
$$Q = 2\mu r^2 \sqrt{2gx_0} \int_0^\pi \sin^2 \beta \sqrt{1 - \frac{r}{x_0} \cos \beta} \cdot d\beta. \quad (13)$$

Разложим в ряд $\sqrt{1 - \frac{r}{x_0} \cos \beta}$ по степеням $\frac{r}{x_0}$, получим:

$$\sqrt{1 - \frac{r}{x_0} \cos \beta} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r}{x_0} \cos \beta - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{x_0}\right)^2 \cos^2 \beta - \dots$$

Откуда:

$$Q = 2\mu r^2 \sqrt{2gx_0} \left[\int_0^\pi \sin^2 \beta d\beta - \frac{1}{2} \frac{r}{x_0} \int_0^\pi \sin^2 \beta \cos \beta d\beta - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{x_0}\right)^2 \int_0^\pi \sin^2 \beta \cos^2 \beta d\beta \dots \right] \quad (14)$$



Фиг. 97.

Принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 \beta \, d\beta &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \, d\beta &= \frac{\pi}{8} \\ \int_0^{\pi} \sin^2 \beta \cos \beta \, d\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

получим:

$$\begin{aligned} Q &= 2\mu r^2 \sqrt{2gx_0} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{64} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2 \right] = \\ &= \mu r^2 \sqrt{2gx_0} \cdot \pi \left[1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Пренебрегая членом $\frac{1}{32} \left(\frac{r}{x_0} \right)^2$, вследствие малости r сравнительно с x_0 , окончательно будем иметь для расхода через круглое отверстие выражение:

$$Q = \mu \pi r^2 \sqrt{2gx_0}. \quad (17)$$

Для боковых отверстий в тонкой стенке разных размеров, расположенных на разных глубинах, имеются следующие опытные величины μ (по данным Poncelet, Lesbros и Weisbach'y) (см. таблицу 8):

Таблица 8.

x в м	Прямоугольное сечение					x в м	К р у г				
	Высота прямоугольника, в см						Радиус отверстия, в см				
	20	10	5	2	1		15	5	2	1	0,3
0,05	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,10	—	—	0,61	0,62	—
0,5	0,60	0,62	0,63	0,63	0,65	0,5	0,59	0,60	0,61	0,61	0,64
1,0	0,60	0,62	0,63	0,63	0,63	1,0	0,59	0,60	0,60	0,60	0,62
3,0	0,60	0,60	0,61	0,61	0,61	6,0	0,59	0,60	0,60	0,60	0,60

§ 4. Истечение жидкости через насадки.

Короткие трубки цилиндрической, конической или призматической формы называются насадками. Они имеют большое практическое применение, являясь измерителями расхода жидкости. Наиболее распространенные насадки представлены на фиг. 98.

1) Насадка с хорошо округленными краями (фиг. 98a).

В данном случае никакого сжатия струи за отверстием нет, а потому коэффициент сжатия $\alpha = 1$.

Следовательно, коэффициент скорости φ и расхода μ равен между собой:

$$\mu = \alpha\varphi = \varphi.$$

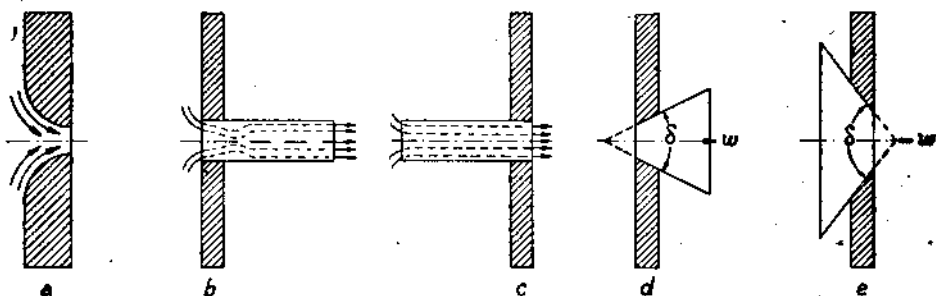
В этом случае расход

$$Q = f \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gH}. \quad (18)$$

2) Цилиндрическая насадка (фиг. 98b).

Если ее длина около трех диаметров отверстия, имеет коэффициент расхода:

$$\mu = 0,82.$$



Фиг. 98.

В том случае, когда длина насадки значительно меньше трех ее диаметров, истечение приближается к истечению через отверстие в тонкой стенке.

3) Насадка (цилиндрическая) с выступающим внутрь резервуара концом (насадка Борда) (фиг. 98c).

Если длина его около трех диаметров, то коэффициент расхода:

$$\mu = 0,72.$$

Если патрубок много короче трех диаметров,

$$\mu = 0,53.$$

4) Коническая насадка, направленная наружу (фиг. 98d) ($0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; $\cos \delta > 0$), уменьшает сжатие струи.

5) Коническая насадка, направленная внутрь жидкости (фиг. 98e) ($\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$; $\cos \delta < 0$), увеличивает сжатие струи.

Для обоих случаев конических насадок по Вейсбаху имеем:

$$\mu' = \mu \left[1 + 0,332 \cos^3 \delta + 0,1684 \cos^4 \delta \right] \dots \quad (19)$$

§ 5. Истечение жидкости из затопленного отверстия.

На фиг. 99 представлены резервуары 1 и 2, разделенные глухой стенкой aa , в которой имеется отверстие bb .

Жидкость при постоянном уровне из резервуара 1 вытекает в резервуар 2. В резервуаре 2 жидкость находится выше отверстия bb .

Определим скорость истечения. Напишем уравнение Д. Бернулли:

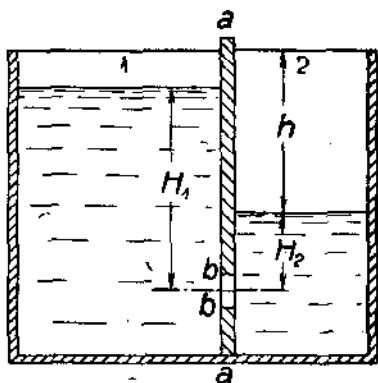
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{w_0^2}{2g} + z_0. \quad (20)$$

Для рассматриваемого случая имеем:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, & w_1 &= 0, \\ \frac{p_0}{\gamma} &= H_2, & z_0 &= 0, & z_1 &= H_1, \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя указанные значения в уравнение Бернулли, получим:

$$w_0 = \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \sqrt{2gh}, \quad (22)$$



Фиг. 99.

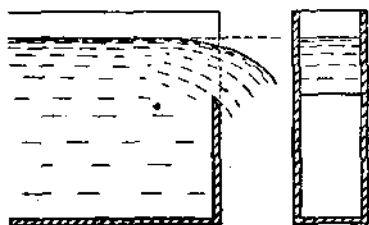
где h есть разность уровней свободных поверхностей рассматриваемых резервуаров.

Полученная формула выведена для случая движения идеальной жидкости, т. е. не принимая во внимание трение, а также сужение струи при истечении из отверстия. В случае движения реальной жидкости, в полученную формулу необходимо ввести коэффициент сжатия α' и коэффициент скорости φ .

В рассматриваемом случае $\varphi = 0,97$, а коэффициент сжатия по Вейсбаху $\alpha' = 0,98\alpha$, где α есть коэффициент сжатия при истечении в воздух (при нормальных условиях).

§ 6. Водосливы.

На фиг. 100 изображен схематически продольный и поперечный разрезы водослива. Он представляет собою канал с установленной



Фиг. 100.

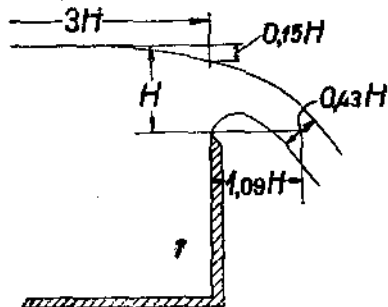
у конца тонкой вертикальной стенкой, через которую переливается вода. Водосливы устанавливаются для измерения значительного расхода жидкости, а также имеют весьма большое практическое значение при устройстве всякого рода запруд и плотин.

На фиг. 101 ясно видно значительное сжатие переливающейся струи в плоскости порога (сжатие достигает около 15% по высоте).

При определении расхода через водослив воспользуемся приемом, предложенным Вейсбахом.

Он рассматривает протекание через водослив (случай прямоугольного канала) как истечение из прямоугольного отверстия шириной b и высотой H .

Разобьем всю толщу русла на элементарные полоски шириной, равной ширине порога водослива b , высотой dh (фиг. 102).



Фиг. 101.

Очевидно, что расход воды dQ через такое узкое отверстие будет равен произведению

$$dQ = \mu \cdot f \cdot w,$$

где μ — коэффициент расхода,

$f = b \cdot dh$ — площадь сечения щели,

$w = \sqrt{2gh}$ — скорость.

Заменяя f и w их значениями, получим:

$$dQ = \mu \cdot b \cdot dh \sqrt{2gh}, \dots$$

где h — переменная глубина рассматриваемой элементарной полоски.

Полный расход

$$Q = \int \mu \cdot b \cdot dh \sqrt{2gh}.$$

Вынесем из-под знака интеграла постоянные величины, причем коэффициент μ будет величиной постоянной только для данного водослива с определенной толщиной переливающего слоя воды H .

Для одного и того же водослива, но при иной величине H — численное значение μ будет другое.

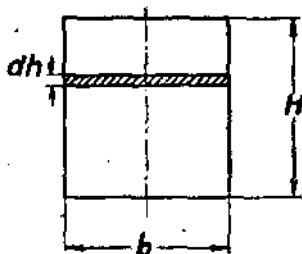
По формуле Базева между μ и H существует зависимость

$$\frac{2}{3} \mu = m \cong 0,405 = \frac{0,003}{H},$$

где H взято в метрах.

Таким образом

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \int \sqrt{h} \cdot dh.$$



Фиг. 102.

Определим пределы интегрирования. Если считать глубину на поверхности порога водослива $h_0 = 0$ и, следовательно, скорость на этой поверхности, так называемую „скорость подхода к водосливу“:

$$w_0 = \sqrt{2gh_0} = 0,$$

то в этом случае пределы интегрирования будут: нижний — 0, верхний — H .

В действительности „скорость подхода к водосливу“ будет равна нулю только в случае слива из резервуара стоячих вод (из пруда).

В случаях же текучей воды (в реках и т. п.) скорость

$$w_0 \neq 0$$

и, следовательно,

$$h_0 = \frac{w_0^2}{2g} \neq 0.$$

Таким образом в общем случае нижний предел интегрирования будет:

$$h_0 = \frac{w_0^2}{2g},$$

верхний будет равен

$$H + h_0.$$

Тогда расход воды определится по формуле:

$$\begin{aligned} Q &= \mu b \sqrt{2g} \int_{h_0}^{H+h_0} \sqrt{h} \, dh = \\ &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[(H+h_0)^{3/2} - h_0^{3/2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Полученная формула называется формулой Вейсбаха, которая показывает, что расход воды через водослив есть функция H и h_0 и от времени явным образом не зависит.

Обозначим $(H+h_0)$ через H_0 . Вынесем за скобку $H_0^{3/2}$, получим:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H_0^{3/2} \left[1 - \left(\frac{h_0}{H_0} \right)^{3/2} \right].$$

При $\frac{h_0}{H_0}$ очень малом, значением $\left(\frac{h_0}{H_0} \right)^{3/2}$ можно пренебречь, тогда будем иметь:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b H_0 \sqrt{2g H_0}, \quad (24)$$

т. е. расход через водослив равен расходу воды под напором. H_0 через отверстие в тонкой стенке по ширине равной длине порога водослива b , а по высоте $2/3$ напора, т. е. $2/3 H_0$.

Здесь определение расхода Q , как и через отверстие, сводится к определению действительного значения μ .

Базеном опытным путем получены значения μ для случая свободной струи, падающей с остроконечного водослива (таблица 9).

На коэффициент расхода μ оказывает влияние

Таблица 9.

Коэффициент истечения $\frac{2}{3} \mu$ для прямоугольного водослива.

H в м	Высота пластины в м		
	0,2	0,3	1,0
0,1	0,46	0,44	0,43
0,3	0,50	0,45	0,43
0,5	—	0,46	0,44

отношение ширины водослива b ко всей ширине B канала. Эта зависимость найдена Брамманом для $H \geq 0,1$ м и дана им в виде:

$$\frac{2}{3} \mu = 0,3838 + 0,0386 \frac{b}{B} + 0,00053 \frac{1}{H}. \quad (25)$$

Другие формулы учитывают еще отношение глубины h' (измеренной от порога водослива до основания) к высоте водослива H , как, напр., в формуле Ребоне:

$$\mu = 0,605 + \frac{1}{1000H} + \frac{0,08H}{h'} \quad (26)$$

(где H и h' в метрах), дающей достаточно точные значения для коэффициента μ . Формула эта справедлива для водосливов без бокового сжатия, т. е. когда $b = B$.

Вообще при неполном сжатии, которое имеет место в случае близкого расположения к водосливу боковых и донных стенок подводящего канала, по Вейсбаху вместо (μ) следует брать:

$$\mu_1 = \mu (1 + 1,78n^2), \quad \text{когда } b < B$$

$$\mu_1 = \mu (1,041 + 0,37n^2), \quad \text{„ } b = B,$$

где $n = \frac{\text{поперечное сечение водослива}}{\text{поперечное сечение канала}}.$

При расходе $Q < 0,5$ м³/сек. обычно пользуются треугольным водосливом Томпсона (фиг. 103), имеющим вырез в 90°. Расход воды при этом вычисляется по формуле:

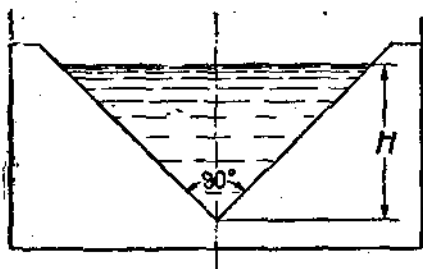
$$Q = 1,415 H^2 \sqrt{H},$$

причем H измеряется от поверхности горизонта воды (обязательно в пределах треугольника) до нижней точки выреза. В данном случае порог водослива должен иметь заостренные кромки и струя должна переливаться свободно.

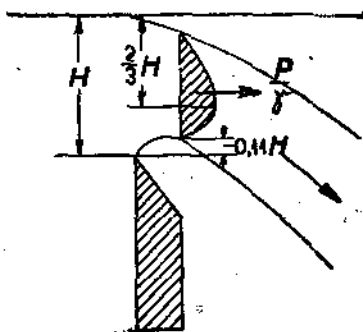
Базеном было детально изучено распределение давлений и скоростей в переливающейся через водослив воде. На фиг. 104 показаны кривые изменения давлений и скоростей, в месте наибольшего подъема нижних струек воды.

Из фигуры видно, что наибольшее давление оказывается примерно на $\frac{2}{3} H$ от верхней поверхности воды.

Вытекающая струя может принимать разнообразные формы. Все их можно разбить на 5 типов (фиг. 105). От формы струи зависит и коэффициент расхода μ .



Фиг. 103.



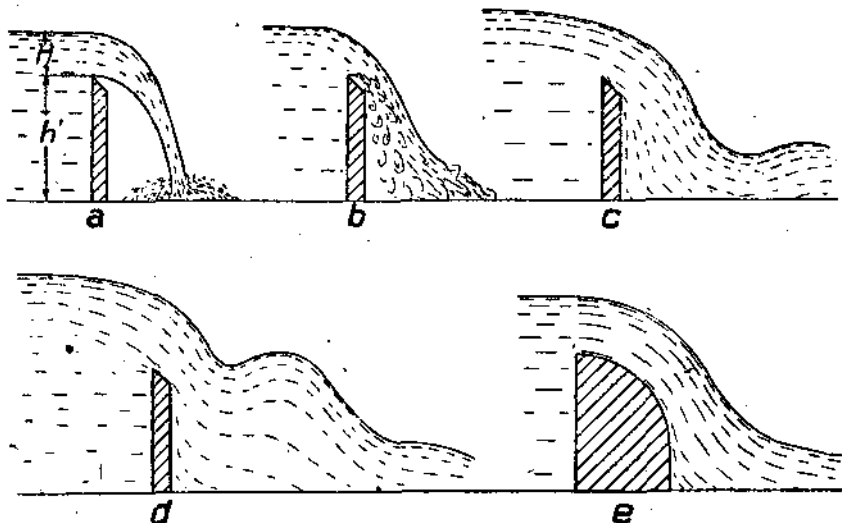
Фиг. 104.

1) Когда под струей имеет свободный доступ притока воздуха. (фиг. 105a), получается свободная струя или струя с вентиляцией.

2) Когда в пространство под струей не проникает достаточного количества воздуха и когда падающая струя воды частично замещает воздушное пространство (фиг. 105b), — в этом случае имеет место струя без вентиляции. Этот случай бывает тогда, когда $H < 0,4h'$, где h' — глубина стенки от порога до основания.

Количество протекающей жидкости больше, чем в первом случае.

3) Струя без вентиляции со сплошь замененным водой воздушным пространством (фиг. 105c).



Фиг. 105.

Получается при отсутствии доступа под нее воздуха и при $H \geq 0,4h'$. В некотором удалении от водослива образуется повышение — прыжок воды. Количество протекающей воды более, чем в первых двух случаях.

4) Тоже струя без вентиляции с набежавшей на нее волной из нижнего плеса (фиг. 105d). Получается при

$$H + H' \leq \frac{3}{4} h'.$$

Прыжок воды образуется вблизи водослива.

5) Прилипшая струя к погруженной части стенки (фиг. 105e) получается тогда, когда отверстие для вытекания сделано в не слишком тонкой стенке, так что струя имеет в среднем более пологий вид.

Она дает приблизительно на 0,3 воды больше, чем свободная струя с одинаковой величиной H .

ОПОРОЖНЕНИЕ РЕЗЕРВУАРОВ.

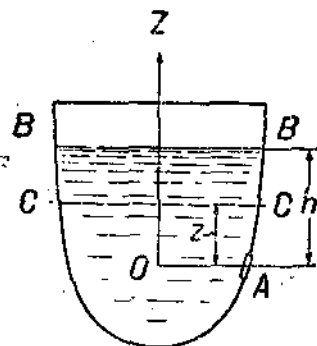
§ 1. Истечение при переменном уровне.

В предыдущем задании были рассмотрены случаи истечения жидкости из резервуаров при постоянном уровне, т.е. случаи, относящиеся к установившемуся режиму истечения. В настоящем задании рассмотрим истечение из резервуаров при переменном уровне, т.е. случай неустановившегося режима.

Уравнение Бернулли, а следовательно и формулы, относящиеся к установившемуся режиму, здесь не применимы. Для точного решения поставленной задачи (определение времени опорожнения или определение расхода жидкости) необходимо в общем случае пользоваться уравнениями гидродинамики.

В связи с значительной сложностью и трудностью, возникающей при решении уравнений гидродинамики, для случая небольших отверстий прибегают к упрощенному способу, который достаточно хорошо согласуется с экспериментом. Этот способ заключается в том, что рассматривают в отдельный элемент времени движение как установившееся.

В произвольной формы резервуар (фиг. 106) до уровня BB налита жидкость. На расстоянии h от поверхности BB в резервуаре имеется отверстие A . Происходит истечение из резервуара без притока в него жидкости. За начало координат O примем произвольную точку на горизонтальной плоскости, проходящей через центр тяжести отверстия A . За положительное направление оси z примем направление вверх.



Фиг. 106.

Введем следующие обозначения:

- f — площадь отверстия A ,
- F — площадь произвольного сечения CC ,
- z — высота уровня CC от начала координат,
- q — расход вытекающей жидкости,
- μ — коэффициент расхода.

Согласно выше сделанному допущению, будем считать в один из моментов t , когда уровень жидкости находится на высоте z , т.е. в CC , движение установившимся; тогда по формуле Торичелли расход

$$q = \mu f \sqrt{2gz}, \quad (1)$$

с другой стороны за элемент времени dt уровень жидкости в резервуаре упадет на элементарную высоту — dz и расход

$$q = -F \frac{dz}{dt}. \quad (2)$$

Исключаем из (1) и (2) уравнения расход q , получаем:

$$-F \frac{dz}{dt} = \mu f \sqrt{2gz}. \quad (3)$$

Разделяя переменные и интегрируя при $\mu = \text{const}$, получим:

$$(\mu f \sqrt{2g}) t = - \int \frac{F dz}{\sqrt{z}} + C. \quad (4)$$

Произвольное постоянное интегрирования определяется из начального условия. В начале истечения, т. е. в момент $t = 0$, уровень жидкости находится в BV на высоте h . Отсюда, очевидно, что пределами интегрирования будут: верхним h и нижним z .

Основная формула истечения в этом случае примет вид:

$$t = \frac{1}{\mu f \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{F \cdot dz}{\sqrt{z}}. \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть проинтегрировано, когда известна зависимость между площадью резервуара F и высотой z .

§ 2. Кривая производительности (истощения) резервуаров.

Из уравнения (5) высоту z можно выразить как функцию t ,

$$z = \varphi(t). \quad (6)$$

Внося (6) в уравнение (1), получим:

$$q = \mu f \sqrt{2g \varphi(t)}. \quad (7)$$

Если по оси абсцисс откладывать время t , а по оси ординат — расход q , получим (фиг. 107) так называемую кривую производительности резервуаров, для которой (7) есть аналитическое уравнение.

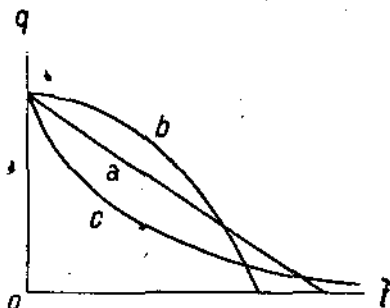
Вид этой кривой зависит от формы резервуара, так как этим дан вид функции $F(z)$.

Из уравнения (1) имеем, дифференцируя по t :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mu f \sqrt{2g}}{2 \sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{dt};$$

внося $\frac{dz}{dt}$ из уравнения (3), получим:

$$\frac{dq}{dt} = - \frac{\mu^2 f^2 g}{F'} < 0,$$



Фиг. 107.

т. е. q убывает с возрастанием времени, как это и должно быть. Дифференцируем вновь по t :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = - \frac{\mu^2 f^2 g}{F^2} \cdot \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Подставляя $\frac{dz}{dt}$ из уравнения (3), получим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = - \frac{\mu^3 f^3 g \sqrt{2g z}}{F^3} \cdot \frac{dF}{dz}; \quad (8)$$

знак правой части (8) зависит от знака $\frac{dF}{dz}$, т.е. от формы резервуара. Здесь возможны три основных случая:

1) $F = \text{const}$ (сосуд призматический).

В этом случае из (8) следует:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

или, интегрируя, получим:

$$q = C_1 t + C_2. \quad (9)$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования. Очевидно, что кривая производительности резервуара есть прямая линия (фиг. 107, кривая *a*).

2) Резервуар расширяется вверх от отверстия, т.е.

$$\frac{dF}{dz} > 0.$$

В этом случае

$$\frac{d^2q}{dt^2} < 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что кривая истощения обращена выпуклостью в сторону положительных ординат и имеет вид кривой *b* на фиг. 107.

3) Резервуар сужается вверх от отверстия, т.е.

$$\frac{dF}{dz} < 0.$$

В этом случае

$$\frac{d^2q}{dt^2} > 0, \quad (11)$$

кривая производительности обращена вогнутостью в сторону положительных ординат и имеет вид *c* на фиг. 107.

§ 3. Случай призматических резервуаров.

Для случая призматического резервуара (фиг. 108) имеем:

$$F = F_0 = \text{const.}$$

Время, нужное для понижения уровня жидкости в сосуде с глубины h до 0, будет равно:

$$T = \frac{F_0}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2F_0 \sqrt{h}}{\mu f \sqrt{2g}} = \frac{2F_0 h}{\mu f \sqrt{2gh}}, \quad (12)$$

где произведение $F_0 h$ есть объем жидкости в сосуде до истечения; $\mu f \sqrt{2gh}$ — расход жидкости, соответствующий начальному напору h .

Таким образом полученная формула показывает, что для опорожнения призматического сосуда необходим промежуток времени в два раза больший, чем время, в течение которого вытекает такое же количество жидкости при постоянном напоре.

§ 4. Опорожнение цистерны.

Цистерну можно рассматривать как горизонтально расположенный цилиндр длиной l с отверстием A (площадь сечением f) в самой низкой точке (фиг. 109). За начало координат примем A , ось Z направим вверх параллельно боковым стенкам. Площадь свободной поверхности, соответствующая уровню z , будет равна

$$F = l \cdot x.$$

Уравнение окружности (сечения цистерны), отнесенное к началу координат в точке A , будет:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (r - z)^2 = r^2, \quad (13)$$

откуда

$$x = 2 \sqrt{2rz - z^2}.$$

Время опорожнения при истечении через отверстие будет равно

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2l}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^{2r} \frac{\sqrt{2rz - z^2}}{\sqrt{z}} dz = \\ &= -\frac{2l}{\mu f \sqrt{2g}} \times \frac{2}{3} \left| \sqrt{(2r - z)^3} \right|_0^{2r} = \frac{8lr\sqrt{2r}}{3\mu f \sqrt{2g}} = \frac{8lr^{\frac{3}{2}}}{3\mu f \sqrt{gr}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Фиг. 109.

ЗАДАНИЕ 21.

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В КАНАЛАХ И НЕЗАПОЛНЕННЫХ ТРУБАХ.

§ 1. Равномерное движение.

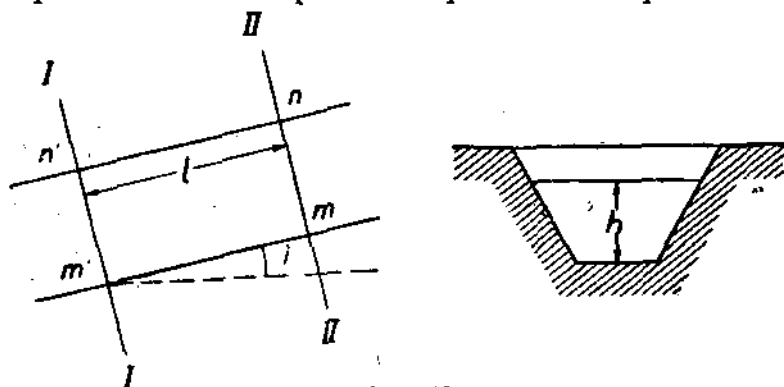
Движение жидкости в открытом русле (реке, искусственном канале, в незаполненной трубе) отличается от движения в трубопроводе тем, что поток здесь может принимать любую глубину h (наполнения) и вместе с этим изменять площадь живого сечения, скорость, расход; поток, движущийся в трубопроводе, в отличие от открытого русла, всегда принимает форму жесткой оболочки (трубы).

Кроме того жидкость в канале движется благодаря наличию уклона дна канала (дна реки и т. п.).

В открытом русле движение может быть равномерным и неравномерным. Первое возможно при условии постоянства поперечного сечения русла, уклона дна, обделки стен (постоянная степень шероховатости) и расхода; второе же движение имеет место в том случае, когда один или несколько из этих четырех элементов изменяются.

Рассмотрим равномерное установившееся движение. Проведем (фиг. 110) два сечения mn и $m'n'$ на расстоянии l , близком друг от друга, и тем самым выделим объем жидкости $mm'n'n'$, вес которого G . Угол наклона свободной поверхности к горизонту обозначим буквою i .

Движение происходит под действием силы тяжести. Для случая установившегося равномерного движения движущая сила будет равна $G \sin i$ и направлена параллельно скорости потока.



Фиг. 110.

Эта сила идет на преодоление возникающей у границы профиля канала силы трения.

Полагая, что средняя скорость w потока устанавливается вблизи границ русла, можем написать зависимость силы трения от скорости, пользуясь гидравлическим законом, в виде

$$\tau = Cw^2. \quad (1)$$

(Закон возрастания сопротивления пропорционален квадрату скорости, см. задание 6, § 4.)

Движущая сила

$$G \sin i = \tau \cdot P \cdot l, \quad (2)$$

где через P обозначен смоченный периметр, вдоль которого жидкость соприкасается со стенками и дном канала.

Угол наклона i обыкновенно чрезвычайно мал:

для судоходных каналов	— 0,0015 — 0,0003
„ оросительн. „	— 0,00008
„ рек	— 0,000005 — 0,001;

а поэтому возможно в уравнении (2) принять дугу за синус, т.е.

$$\sin i = i.$$

Подставляя в уравнение (2) значение τ из (1) и заметив, что вес жидкости

$$G = \gamma \cdot F \cdot l,$$

будем иметь

$$i \gamma \cdot F \cdot l = Cw^2 Pl,$$

где F — живое сечение канала;

Откуда

$$i = \frac{C}{\gamma} \cdot w^2 \frac{P}{F} = \frac{C}{\gamma} w^2 r, \quad (3)$$

где r — гидравлический радиус.

Из уравнения (3) имеем:

$$w = \lambda \sqrt{r \cdot i}, \quad (4)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\tau}{C}}$ — коэффициент, не зависящий ни от скорости, ни от формы сечения канала.

Формула (4), известная под названием Шези (Chezy), показывает, что величинами, от которых зависит скорость, являются гидравлический радиус r и уклон канала i .

Расход жидкости

$$Q = F \cdot w = F \lambda \sqrt{r \cdot i}. \quad (5)$$

Величина $F \lambda \sqrt{r}$, имеющая размерность $\left[\frac{L^3}{T}\right]$, называется пропускной способностью русла и обозначается буквой K .

Пропускная способность K представляет величину расхода, протекающего в канале при уклоне, равном единице ($i = 1$).

Для данного профиля пропускная способность K зависит лишь от величины наполнения h .

$$K = f(h).$$

Формула (5) в новом обозначении принимает вид

$$Q = F \cdot \lambda \sqrt{r \cdot i} = K \sqrt{i}. \quad (6)$$

Таким образом уклон i и расход Q связаны с пропускной способностью данного профиля соотношением

$$\frac{Q}{\sqrt{i}} = K = f(h), \quad (7)$$

из которого следует, что одно и то же русло при некотором наполнении h , т. е. при данном K , может пропускать различные расходы в зависимости от уклона i . Наоборот, определенный расход Q при заданном уклоне i , может быть пропущен руслами различных форм и наполнений, при условии наличия такого наполнения h при котором удовлетворялось бы соотношение (7).

§ 2. Наивыгоднейший профиль сечения канала.

Задача об установлении наивыгоднейшей формы канала при данном уклоне i и данной площади живого сечения F имеет своей целью получить наибольший расход, наибольшую пропускную способность K .

При данной площади живого сечения F нахождение профиля, обладающего наибольшей пропускной способностью:

$$K = F \lambda \sqrt{r},$$

сводится к нахождению профиля с наибольшим гидравлическим радиусом, что в свою очередь приводит к разысканию профиля с наименьшим смоченным периметром, так как гидравлический радиус

$$r = \frac{F}{P}.$$

Из всех фигур при заданной площади наименьшим периметром обладает круг. Таким образом наивыгоднейшим профилем для открытых каналов будет полукруг, так как отношение площади полукруга к длине полуокружности—то же, что и отношение площади круга к окружности.

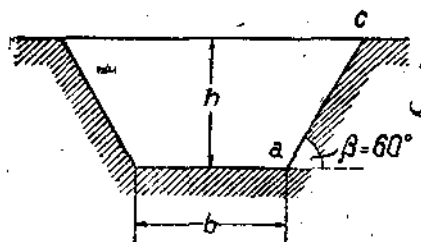
При этом необходимо, чтобы свободная поверхность жидкости совпадала с диаметром круга, в противном случае выгодность профиля теряется.

(В данном случае гидравлический радиус будет равен

$$r = \frac{F}{P} = \frac{\pi a^2}{2\pi a} = \frac{1}{2} a,$$

где a — радиус круга.)

На практике очень редко применяются полукруглые профили, благодаря высокой стоимости их сооружения. Тем не менее канал, профиль которого ближе подходит к окружности, нужно считать наиболее выгодным.



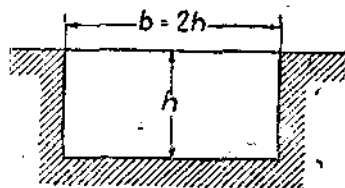
Фиг. 111.

Угол наклона боковой стенки ac с горизонтом, так называемый угол откоса, равен $\beta = 60$, ширина основания, очевидно, будет равна

$$b = 0,866 h.$$

Из прямоугольного канала наивыгоднейшим будет $\frac{1}{2}$ квадрата, основание $b = 2h$ (Фиг. 112).

На практике, вследствие того что боковые стенки канала необходимо проводить под углом так называемого естественного откоса, приходится делать от указанных форм отступление, а в связи с этим стоит вопрос о нахождении профиля с наибольшей пропускной способностью K при данных F и угле откоса β . Задача сводится к нахождению соотношения между основанием b и высотой наполнения h , дающего наименьший смоченный периметр P . Рассмотрим случай наиболее часто встречающегося профиля (тра-



Фиг. 112.

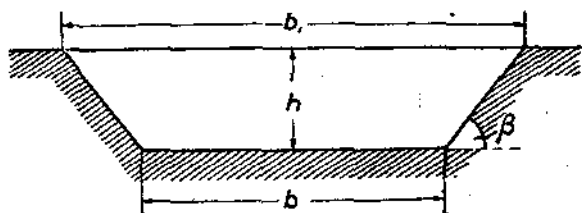
пециодального) (фиг. 113). Заданы угол откоса β и площадь живого сечения F ; требуется определить соотношение между b и h , которое дало бы наимыгоднейший профиль.

Площадь F трапеции равна:

$$F = \frac{2b + 2h \operatorname{ctg} \beta}{2} h = (b + h \operatorname{ctg} \beta) h, \quad (8)$$

смоченный периметр

$$P = b + \frac{2h}{\sin \beta}. \quad (9)$$



Фиг. 113.

Подставляя значение b из (8), получим:

$$P = \frac{F}{h} - h \operatorname{ctg} \beta + \frac{2h}{\sin \beta}. \quad (10)$$

Чтобы смоченный периметр был наименьшим, необходимо

$$\frac{dP}{dh} = 0,$$

т. е.

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{F}{h^2} - \operatorname{ctg} \beta + \frac{2}{\sin \beta} = 0,$$

откуда

$$h^2 = \frac{F \sin \beta}{2 - \cos \beta}. \quad (11)$$

Подставляя вместо F его значение (8), получим:

$$h(2 - \cos \beta) = (b + h \operatorname{ctg} \beta) \sin \beta. \quad (12)$$

Обозначим ширину свободной поверхности жидкости в канале через b_1 (фиг. 113) и, принимая во внимание, что

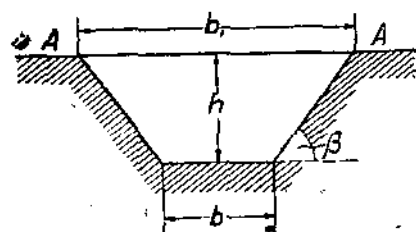
$$b_1 = b - 2h \operatorname{ctg} \beta,$$

будем иметь:

$$h(2 - \cos \beta) = (b_1 - h \operatorname{ctg} \beta) \sin \beta,$$

откуда

$$\begin{aligned} 2h &= b_1 \sin \beta, \\ h &= \frac{b_1 \sin \beta}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$



Фиг. 114.

Профиль, удовлетворяющий последнему уравнению, является трапецией, описанной около полуокружности, радиус которой равен h , а горизонтальный диаметр совпадает со свободной поверхностью AA (фиг. 114).

Из уравнения (12) имеем:

$$b = \frac{h(2 - \cos \beta) - h \cos \beta}{\sin \beta}.$$

Подставляя значение b в уравнения (8) и (9), определяющие площадь F и периметр P , получим:

$$F = h(b + h \operatorname{ctg} \beta) = \frac{h^2(2 - \cos \beta)}{\sin \beta}, \quad (8')$$

$$P = b + \frac{2h}{\sin \beta} = \frac{2h(2 - \cos \beta)}{\sin \beta}. \quad (9')$$

Средний гидравлический радиус

$$r = \frac{F}{P} = \frac{h}{2}, \quad (14)$$

т.е. средний гидравлический радиус для наивыгоднейшего трапециoidalного сечения равен $1/2$ наполнения h .

§ 3. Расчетные формулы.

1. Формула Шези (Chezy):

$$w = \lambda \sqrt{ri}.$$

Шези считал $\lambda = 50$ и постоянной во всех случаях. В этом виде формула может быть рекомендована только для ориентировочных подсчетов.

2. Старая формула Базена. Дарси и Базен, как известно, в результате своих исследований установили влияние внешнего состояния стенок (облицовки) их шероховатости на величину сопротивления исходя из этого, Базеном была предложена для скорости потока следующая формула:

$$w = K \sqrt{ri}, \quad (15)$$

где

$$K = \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{\beta'}{r}\right)};$$

α и β' — коэффициенты, определяемые шероховатостью дна и стенок канала (реки и т. п.).

На основании своих наблюдений в опытном канале и материала других исследователей Базен разбил различные роды стенок в зависимости от шероховатости на четыре категории:

	α	β'
1) Гладкая штукатурка, строганое дерево . . .	0,00015	0,03
2) Грубая штукатурка, тесовая и кирпичная кладка, нестроганные доски	0,00019	0,07
3) Бутовая кладка	0,00024	0,25
4) Земля	0,00028	1,25

Формула Базена с указанными здесь коэффициентами называется старой формулой и по настоящее время имеет применение.

3. Новая формула Базена. В старой формуле Базена между коэффициентами α и β' не было установлено связи и, кроме

того, с возрастанием r , т.е. с увеличением абсолютных размеров потока, величина коэффициентов сопротивления при различных родах стенки стремится к различным пределам α . В действительности с возрастанием размеров потока, т.е. с увеличением гидравлического радиуса, влияние различной степени шероховатости стенок должно сглаживаться и формула должна была бы с увеличением r стремиться к одному пределу. В связи с этим Базен предложил „новую формулу“:

$$w = \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{r}}\right)} \sqrt{ri}, \quad (16)$$

в которой α может быть придано постоянное значение и тогда шероховатость учитывается одним коэффициентом γ . Базен принял $\alpha = 0,0115$.

Обозначая буквою C отношение $\frac{w}{\sqrt{ri}}$ и принимая $\alpha = 0,0115$, получим:

$$C = \frac{w}{\sqrt{ri}} = \frac{1}{\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{r}}\right)} = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{r}}}. \quad (17)$$

Размерность коэффициента γ следующая:

$$\gamma = [L^{1/2}].$$

Величина γ в зависимости от рода стенки имеет следующие значения:

	$\gamma [m^{1/2}]$
1. Очень гладкие стенки (цементная штукатурка, строганные доски)	0,06
2. Гладкие стенки (доски, кирпич, гесовая кладка)	0,16
3. Бутовая (чистая) кладка	0,46
4. Промежуточная категория (грубая бутовая кладка, очень правильные стенки в плотном земляном грунте, замощенные стенки)	0,85
5. Земляные стенки в обычном состоянии	1,30
6. Земляные стенки (представляющие исключительные сопротивления)	1,75

4. Формула Куттера (Kutter).

$$C = a \left(1 - \frac{b}{b + \sqrt{r}}\right). \quad (18)$$

Формула Куттера более ранняя, чем формула Базена. Она может быть приведена к типу „новой формулы Базена“, а именно:

$$C = a \left(1 - \frac{b}{b + \sqrt{r}}\right) = a \frac{\sqrt{r}}{b + \sqrt{r}} = a \frac{1}{1 + \frac{b}{\sqrt{r}}}.$$

Ниже приведена таблица значения коэффициента b по Вей-
рауху (Weugauch).

$$a = 100 = \text{const}$$

	b
1. Гладкая штукатурка из чистого цемента, особенно тщательно строганные доски	0,15
2. Строганные доски	0,20
3. Нестроганные доски, цементная штукатурка, чистая тесовая кладка	0,25
4. Кирпичная кладка, цементные и кирпичные трубы и каналы	0,3 — 0,35
5. Бутовая кладка	0,75
6. Мостовая	0,55 — 0,75
7. Правильный, тщательно исполненный канал в земляном грунте	1,50
8. Сильно заросшие каналы (в плохом состоянии ширина дна $< 1,5$ м)	2,50

5. ФОРМУЛА ГАНГЮЛЕТ-КУТТЕРА. Куттером совместно с Гангюлет старая формула была изменена в формулу, которая учитывает не только влияние шероховатости, но и уклона i , а именно:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i} \right) \frac{n}{\sqrt{E}}}, \quad (19)$$

где n — коэффициент шероховатости, который имеет следующие значения:

	n	$\frac{1}{n}$
1. Строганое дерево, гладкая цементная кладка	0,010	100,0
2. Доски	0,012	83,3
3. Кирпичи, тесовая кладка	0,013	76,9
4. Бутовая кладка	0,017	58,8
5. Земляное русло, каналы, реки	0,025	40,0
6. Естественные потоки с дном из грубого гравия	0,030	33,3

Настоящая формула получила широкое распространение.

Кроме перечисленных здесь наиболее распространенных формул квадратичных (Шези, Куттера, Гангюлет-Куттера), имеется целый ряд так называемых формул вида:

$$w = Ar^m l^n, \quad (20)$$

где A — численный коэффициент,
 m и n — дробные показатели степени.

В таблице 10 приведены значения этих трех величин, входящих в наиболее распространенные формулы:

Таблица 10.

№ по пор.	Автор формулы	A	m	n	Примечания
1	Сен-Венан	60	0,529	0,529	Для рек и каналов
2	Гаген (1-я)	3,34	0,5	0,2	Для $r > 0,47$ м
3	Гаген (2-я)	4,9	1	0,2	Для каналов $r < 0,47$ м
4	Гумфрейс и Аб- бот (сокращен- ная)	5 — 5,7	0,5	0,25	Для рек: при малых r $A = 5$, при больших r $A = 5,7$,
5	Маннинг (сокращ.)	$\frac{1}{n}$	0,667	0,5	n — коэффициент шеро- ховатости по Кут- теру
6	Куннингам	43,7	0,667	0,5	Широкий канал с малым уклоном
7	Борнеманн	256 — 1605	1,33	1,25	Каналы и реки
8	Фтиля и Стирвс	80,69	0,62	0,5	Для каналов
9	Гнусси	15,93	0,591	0,375	„ рек
10	Гоклер (1-я)	25 — 100	0,667	0,5	„ каналов $i > 0,0007$
11	Гоклер (2-я)	1600 — 6560	1,333	1	„ каналов $i < 0,0007$

Исследования над движением глинистых растворов по каналам, произведенные в гидравлической лаборатории Азербайджанского научно-исследовательского нефтяного института, дали следующие значения:

$$A = a \left(128 - \frac{386}{\left(\frac{w}{\Phi} \right)^{0,715}} R x \right) \quad (21)$$

$$m = 0,67; \quad n = 0,54.$$

$a \cong 0,8 — 0,9$ — поправочный коэффициент, зависящий от размера частиц,

Φ — отношение веса взвешенных частиц к весу воды,

$$x = 0,16 \text{ при } \frac{w}{\Phi} > 20 \text{ фут./сек.},$$

$$x = 0,02 \text{ при } \frac{w}{\Phi} < 20 \text{ фут./сек.}$$

Из всех имеющихся формул, определяющих скорость движения воды в реках или каналах, наилучшее согласование 5 — 10% отклонения с действительными измерителями дают: новая формула Базена, Гангюлет-Куттера и Гоклера (последняя исключительно для каналов).

§ 4. Расчет канала.

Пример 1. Определить расход воды Q в трапецидальном канале, уклон дна которого $i = 0,0005$, глубина (наполнения) $h = 2$ м, угол откоса $\beta = 45^\circ$, ширина основания $a = 6$ м. Дно и стенки вымощены камнем, коэффициент шероховатости по Базену $\gamma = 0,85$.

Площадь живого сечения:

$$F = (a + h \operatorname{ctg} 45) h = 16 \text{ м}^2.$$

Периметр:

$$P = a + \frac{2h}{\sin 45} = 11,656 \text{ м.}$$

Гидравлический радиус:

$$r = \frac{F}{P} = 1,372 \text{ м.}$$

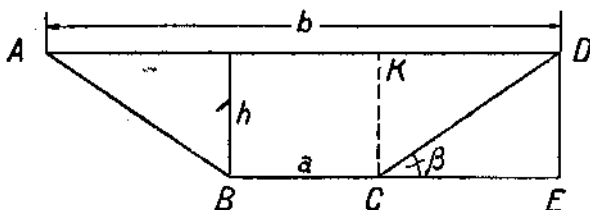
По Базену имеем:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{r}}} = 50,4 \left[\frac{\text{м}^{1/2}}{\text{сек.}} \right]$$

Расход жидкости будет равен:

$$Q = C \cdot F \cdot \sqrt{Ri} = 21,1 \text{ м}^3/\text{сек.}$$

Пример 2. Найти размеры земляного канала, живое сечение которого есть трапеция. Угол $i = 0,00003$, расход жидкости $Q = 24 \text{ м}^3/\text{сек.}$, глубина $h = 3 \text{ м}$. Угол наклона боковой стенки к горизонту $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$ (фиг. 115).



Фиг. 115.

Из условия задачи следует определить или ширину дна a , или ширину свободной поверхности b .

Из треугольника CDE имеем:

$$CE = \frac{DE}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{9}{2},$$

$$CE = KD = \frac{9}{2},$$

$$CD = AB = \sqrt{DE^2 + CE^2} = 5,408 \text{ м.}$$

Ширина свободной поверхности:

$$b = a + 2KD = a + 9.$$

Смоченный периметр:

$$P = a + 2CD = a + 10,816.$$

Площадь живого сечения:

$$F = \frac{a+b}{2} h = \frac{2a+9}{2} \cdot 3.$$

Гидравлический радиус:

$$r = \frac{F}{P} = \frac{3(2a+9)}{2(a+10,816)}.$$

При определении ширины дна a канала расчет ведется методом последовательных приближений по формуле Гангюлет-Куттера:

$$w = C\sqrt{ri},$$

где

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i}\right) \frac{n}{\sqrt{r}}}.$$

Коэффициент n для рассматриваемого случая равен 0,025.

Для первого приближения делаем предположение, что гидравлический радиус равен глубине (наполнению) воды в канале, т. е. $r = h = 3$ м, что будет соответствовать бесконечной ширине канала; тогда

$$C = \frac{23 + \frac{1}{0,025} + \frac{0,00155}{0,00003}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{0,00003}\right) \frac{0,025}{\sqrt{r}}} = \frac{114,7}{1 + \frac{1,77}{\sqrt{r}}},$$
$$C \approx 57,3.$$

Скорость потока:

$$w = C\sqrt{ri} = 57,3 \sqrt{3 \cdot 0,00003} = 0,573 \text{ м/сек.}$$

Площадь живого сечения:

$$F = \frac{2a+9}{2} \cdot 3 = \frac{Q}{w} = \frac{24}{0,573} \approx 42 \text{ м}^2,$$

откуда ширина дна канала $a = 9,5$ м.

Гидравлический радиус:

$$r = \frac{3(2a+9)}{2(a+10,816)} = 2,07 \text{ м.}$$

Предположенный гидравлический радиус и вычисленный не сходятся — допущение было грубое.

Сделаем второе предположение: $r = 2,07$ м.

Тогда

$$C = \frac{114,7}{1 + \frac{1,77}{\sqrt{r}}} = 51,4,$$

скорость:

$$w = C\sqrt{ri} = 0,406 \text{ м/сек.},$$

площадь живого сечения:

$$F = \frac{6a+27}{2} = \frac{Q}{w} = 59,1 \text{ м}^2,$$

откуда $a = 15,2$ м

и гидравлический радиус

$$r \approx 2,27 \text{ м.}$$

Делаем третье допущение, так как выбранный радиус и вычисленный разнятся на 0,2 м. Предположим $r = 2,27$ м.

Получаем аналогично предыдущему:

$$\begin{aligned}C &= 52,7, \\w &= 0,437 \text{ м/сек.}, \\F &= 55 \text{ м}^2, \\a &= 13,8;\end{aligned}$$

гидравлический радиус:

$$r = 2,23 \text{ м};$$

снова получили расхождение на 0,04 м.

Делаем четвертое предположение, что $r = 2,23 \text{ м}$; тогда получим:

$$\begin{aligned}C &= 52,3, \\w &= 0,429 \text{ м/сек.}, \\F &= 56 \text{ м}^2, \\a &= 14,2 \text{ м},\end{aligned}$$

гидравлический радиус $r = \frac{F}{P} = 2,24 \text{ м}$.

Полученная разница между предположенным и вычисленным гидравлическим радиусом выражается в 0,01 м. На этом вычисление можно прекратить. Таким образом окончательно канал должен иметь следующие размеры:

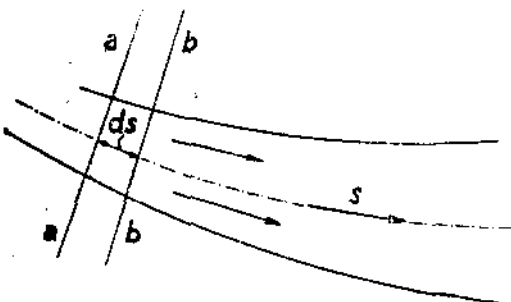
$$\begin{aligned}a &= 14,2 \text{ м}, \\b &= a + 9 = 23,2 \text{ м}, \\h &= 3 \text{ м}, \\i &= 0,00003.\end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 22.

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.

§ 1. Вывод уравнения неустановившегося потока в дифференциальной форме.

Для неустановившегося потока все величины, характеризующие движение отдельных частиц жидкости (скорость, ускорение, давление, в случае же газов



Фиг. 116.

и уд. вес), в любой точке пространства изменяются со временем. Пусть площадь сечения aa элементарной струйки жидкости (фиг. 116), движущейся по направлению s , равна f ; среднее давление в этом сечении пусть будет p и скорость w . По сечениям bb струйки, отстоящему на расстоянии ds от aa , соответственные величины пусть будут: площадь сечения $f + df$, среднее давление $p + dp$, скорость $w + dw$. Применим принцип Д'Аламбера к элементу жидкости струйки, ограниченному сечениями aa и bb .

Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент на направление движения s . Имеем:

1) Проекция силы давления по сечению aa :

$$+ pf.$$

2) Проекция силы противодавления по сечению bb :

$$-(p + dp)(f + df).$$

3) Проекция сил давления на боковые стенки элементов (со стороны смежных струек):

$$+ p df.$$

4) Проекция силы тяжести:

$$- f ds \gamma \cdot \frac{dz}{ds}.$$

5) Проекция силы трения на боковых стенках:

$$- dS.$$

6) Проекция „силы инерции“:

$$- f ds \cdot \rho \cdot \frac{dw}{dt}.$$

По принципу Д'Аламбера алгебраическая сумма проекций всех сил на любую ось (включая и „силу инерции“) равна нулю.

Итак имеем:

$$pf - (p + dp)(f + df) + p df - f ds \gamma \frac{dz}{ds} - dS - f ds \rho \frac{dw}{dt} = 0. \quad (1)$$

Отбрасывая бесконечно-малую второго порядка и деля все равенство на ds , получим после упрощений:

$$-f \cdot \frac{dp}{ds} - f \gamma \cdot \frac{dz}{ds} - f \rho \cdot \frac{dw}{dt} - \frac{dS}{ds} = 0. \quad (2)$$

Так как в условии равновесия (1) силы рассматриваются в один определенный момент (кроме силы инерции), то можно написать:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial s}.$$

Кроме того

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} \right),$$

так как

$$\frac{ds}{dt} = w.$$

Внося эти значения в равенство (2) и сокращая его на $-f \gamma$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + z \right) + \frac{1}{f \gamma} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим в отдельности член

$$\frac{1}{f\gamma} \cdot \frac{\partial S}{\partial s}$$

Умножим и разделим его на ds :

$$\frac{1}{f\gamma ds} \cdot \frac{\partial S ds}{\partial s}$$

Произведение $\partial S \cdot ds$ представляет элементарную работу, затраченную на преодоление сил трения на участке пути ds . Произведение $f\gamma ds$ представляет вес того элементарного объема на протяжении которого затрачивается вышеуказанная работа трения $\partial S \cdot ds$. Частное

$$\frac{\partial S ds}{f\gamma ds}$$

представляет, следовательно, удельную работу (отнесенную к 1 кг), затраченную на трение на элементарном участке ds . Но мы знаем, что это есть не что иное, как элементарный потерянный напор ∂h :

$$\frac{\partial S ds}{f\gamma ds} = \partial h.$$

Поэтому

$$\frac{1}{f\gamma} \frac{\partial S}{\partial s} = \frac{1}{f\gamma ds} \cdot \frac{\partial S ds}{\partial s} = \frac{\partial S ds}{f\gamma ds} \cdot \frac{1}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s}.$$

Величина $\frac{\partial h}{\partial s}$ есть гидравлический уклон высоты потерянного напора по длине вдоль канала в какой-либо определенный момент времени.

Итак, равенство (3) переписывается теперь в виде:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + z + h \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Это уравнение для неустановившегося потока играет такую же роль, как уравнение Бернулли для потока установившегося.

В случае наличия в трубопроводе местных сопротивлений уравнение (4) переписывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + z + h + h' \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

где h' — напор, потерянный на местные сопротивления.

§ 2. Интегрирование уравнения (5) для случая трубопровода постоянного диаметра.

Будем интегрировать равенство (5) в какой-либо определенный момент времени t по всей длине трубопровода l , причем рассмотрим тот случай, когда по длине трубопровода расположено некоторое число местных сопротивлений.

Итак, имеем:

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + z + h + h' \right) ds + \int_0^l \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} ds = 0. \quad (6)$$

Разобьем первый интеграл на четыре интеграла, каждый из которых рассмотрим отдельно.

Имеем:

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} \right) ds = \frac{1}{\gamma} \int_0^l dp = \frac{1}{\gamma} (p_2 - p_1),$$

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2g} \right) ds = 0,$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2g} \right) = 0,$$

в самом деле скорость по длине трубопровода постоянного диаметра в какой-либо момент времени t (для которого производится интеграция) всегда будет постоянна.

Далее:

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial s} (z) ds = z_2 - z_1.$$

Распределим гидравлический эффект местных сопротивлений равномерно по всей длине трубопровода. Имеем:

$$h' = \zeta \frac{s}{l} \frac{w^2}{2g},$$

где $\zeta = \sum_{i=1}^n \zeta_i$ и n — число местных сопротивлений. Кроме того:

$$h = \lambda \frac{s}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Итак:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} (h + h') ds &= \frac{w^2}{2g} \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\lambda s}{d} + \frac{\zeta s}{l} \right) ds = \\ &= \frac{w^2}{2g} \int_0^l \left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\zeta}{l} \right) ds = \frac{w^2}{2g} \left(\frac{\lambda}{d} + \frac{\zeta}{l} \right) l = \frac{w^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right). \end{aligned}$$

И наконец:

$$\int_0^l \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} ds = \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \int_0^l ds = \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \cdot l,$$

так как скорость не зависит от s (в определенный момент времени). Внося найденные значения интегралов в равенство (6), получим:

$$\frac{1}{\gamma} (p_2 - p_1) + z_2 - z_1 + \frac{w^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \cdot l = 0,$$

откуда

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g} + \frac{l}{g} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (7)$$

В случае равномерного движения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

и уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g}, \quad (8)$$

т. е. уже известное нам уравнение Дарси-Вейсбаха (при наличии местных сопротивлений).

Итак, для случая неустановившегося движения гидравлические сопротивления не исчерпываются двумя членами

$$\left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g},$$

к ним прибавляется еще член

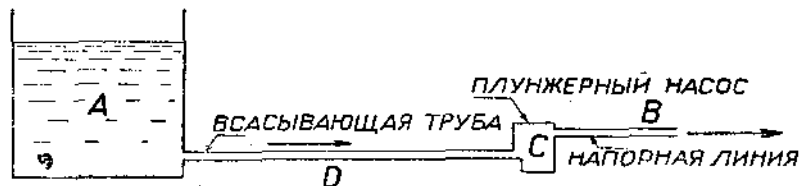
$$\frac{l}{g} \cdot \frac{\partial w}{\partial t},$$

который представляет собой не что иное, как инерционное сопротивление массы жидкости в трубопроводе. Как видим, это сопротивление пропорционально ускорению движения $\frac{\partial w}{\partial t}$ и пропорционально длине трубопровода.

В случае длинных трубопроводов слишком быстрым нарастанием скорости (при пуске насосов) можно вызвать значительное увеличение давления и даже разрыв труб.

§ 3. Приложение теории неравномерного движения к вопросу о разрыве струи на вакуумной линии трубопровода при перекачке плунжерными насосами светлых нефтепродуктов с большой упругостью пара.

Пусть плунжерный насос *C* перекачивает нефтепродукт с высокой упругостью паров (например определенный сорт бензина) из резервуара *A* по трубопроводу *D* (см. фиг. 117). Упругость паров пусть равна *P*.



Фиг. 117.

Пусть задана степень неравномерности работы насоса. Под степенью неравномерности мы понимаем максимальное отклонение действительной скорости в трубопроводе *B* от средней скорости потока (мера пульсаций). Обозначим эту величину через η :

$$\eta = \frac{w_{\max} - w}{w} = \frac{w - w_{\min}}{w},$$

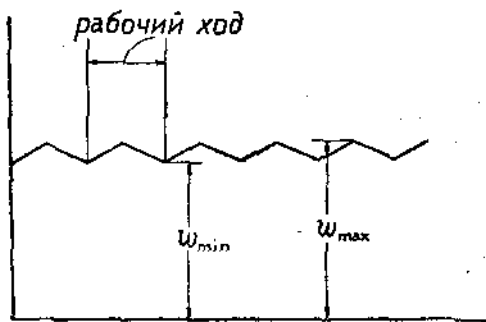
где $w_{\max}$ и $w_{\min}$ — действительная максимальная и минимальная скорость в трубопроводе и w — средняя скорость.

Обозначим число пульсаций в 1 минуту через n (число рабочих ходов насосных скалок или поршней). Тогда время Δt , в течение которого скорость в трубе B возрастает от минимальной до максимальной, очевидно, будет равняться (см. фиг. 118):

$$\Delta t = \frac{60}{2 \cdot n}.$$

Деля изменение скорости $w_{\max} - w_{\min}$ на время Δt , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta t} &= \frac{w_{\max} - w_{\min}}{60} \cdot 2n = \\ &= \frac{(w_{\max} - w) + (w - w_{\min})}{60} \cdot 2n = \\ &= \frac{2\eta w}{60} \cdot 2n = \frac{\eta w n}{15}. \end{aligned}$$



Фиг. 118.

Принимаем приближенно

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\eta w n}{15}$$

и вносим это значение в формулу (7); находим:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g} + \frac{l}{g} \cdot \frac{\eta w n}{15}.$$

Отсюда определяем необходимую разность верхнего уровня в резервуаре и насоса:

$$z_1 - z_2 = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g} + \frac{l}{g} \cdot \frac{\eta w n}{15}.$$

Обычно $p_1 = p_{\text{атм.}}$ = атмосферному давлению, давление p_2 не может быть меньше упругости паров P перекачиваемого продукта, так что

$$p_2 \geq P.$$

В том случае, когда p_2 станет меньше P , за насосом на всасывающей линии образуется весьма вредное паровое пространство, наличие которого влечет за собой возможность гидравлических ударов и даже поломку насоса. Для того чтобы это опасное явление не имело места, необходимо, очевидно, удовлетворить условию

$$H \geq \frac{P - p_{\text{атм.}}}{\gamma} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w^2}{2g} + \frac{l}{g} \cdot \frac{\eta w n}{15}, \quad (9)$$

где

$H = z_1 - z_2$ и l — длина всасывающей трубы.

Пусть, напр., дано:

$P = 8840 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$ (что соответствует упругости паров $= 650$ мм ртутного столба);

$$\gamma = 830 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\lambda = 0,028;$$

$$l = 40 \text{ м (длина всасывающей линии),}$$

$$d = 0,1 \text{ м.}$$

Местные сопротивления пусть состояются из:

1) всасывающей коробки с обратным клапаном

$$\zeta_1 = 7,$$

2) сопротивления при выходе из резервуара А

$$\zeta_2 = 1,78,$$

3) трех закруглений $\left(\frac{d}{r} = 0,8\right)$.

$$\zeta_3 = 0,21 \cdot 3 = 0,63.$$

Итак,

$$\zeta = \sum \zeta_i = 7 + 1,78 + 0,63 = 9,41.$$

Число ходов n пусть равно 200 (в минуту) и степень неравномерности на всасывающей линии $\eta = 0,1$. Скорость w равна 1 м/сек.

Внося эти значения в (9), находим:

$$H = \frac{-10000 + 8840}{830} + \left(0,028 \frac{40}{0,1} + 9,41\right) \cdot \frac{1^3}{19,62} + \frac{40}{9,81} \cdot \frac{0,1 \cdot 200 \cdot 1}{15} =$$
$$= -1,4 + 1,05 + 5,44 = 5,1 \text{ м.}$$

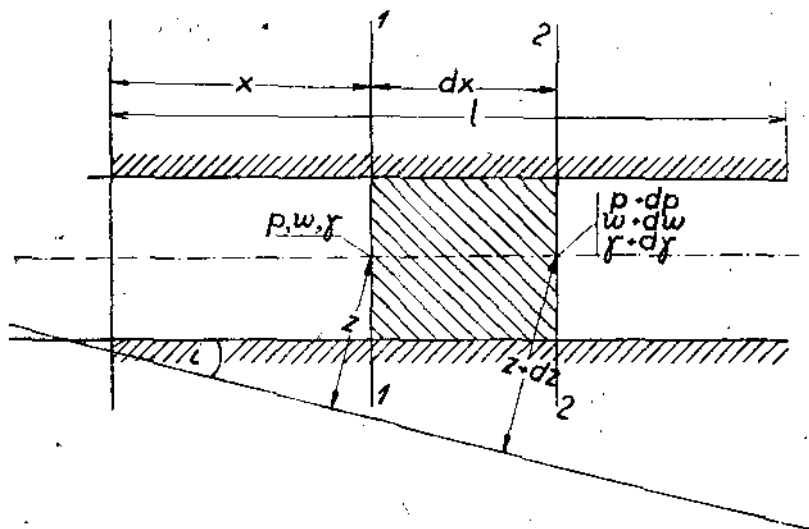
В случае, если H взято меньше 5,1 м, насос будет работать ненормально и не исключена будет возможность ударов и поломки его.

ЗАДАНИЕ 23.

ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВ И ПЕРЕГРЕТЫХ ПАРОВ В ТРУБОПРОВОДАХ
СО СКОРОСТЯМИ НИЖЕ ЗВУКОВЫХ.

§ 1. Вывод формулы Бернулли для случая установившегося
движения газов и перегретых паров.

Предположим, что вдоль наклонного трубопровода (см. фиг. 119) движется поток газа или перегретого пара. Движение будем предполагать *установившимся*, — это значит, что на любом расстоянии x от начала трубопровода давление, а также скорости и плотность *не должны меняться со временем*. Трубы будем предполагать



Фиг. 119.

кругового сечения и постоянного диаметра по длине. Двумя сечениями 11 и 22, перпендикулярными к оси трубы, произведенными на расстоянии x и $x + dx$ от начала трубопровода, выделим элемент потока длины dx (на фигуре заштрихован). Пусть по сечению 11 средняя скорость потока равна w , давление p (абсолютное), уд. вес газа γ и расстояние (по вертикали) от некоторой горизонтальной плоскости до центра сечения равно z . Аналогично для

сечения 22 обозначим среднюю скорость через $w + dw$, давление $p + dp$ (абсолютное), уд. вес $\gamma + d\gamma$ и высота центра сечения $z + dz$. Пусть в некоторый момент времени t частичка газа проходит через сечение 11. Сечения 22 эта частичка достигнет в момент $t + dt$, — таким образом за промежуток времени dt все частицы газа в выделенном нами объеме будут заменены новыми.

Спроектируем на ось x трубопровода все внешние силы, приложенные к выделенному нами элементу потока. Имеем:

Проекция силы давления по сечению 11 $+ pF$.

" " " " " " 22 $-(p + dp)F$.

" " трения у стенок труб $-\pi d \cdot dx \cdot \tau$.

" " веса элемента потока $-Fdx\gamma \sin i$.

Здесь через F обозначена площадь проходного сечения трубопровода, через $\pi d \cdot dx = 2\sqrt{\pi F} dx$ — площадь трения (у стенок), через τ — напряжение силы трения и через i — угол, составляемый осью трубы с горизонтом. Таким образом алгебраическая сумма проекций всех внешних сил, приложенных к выделенному элементу потока, на направление движения равна

$$\Sigma X = pF - (p + dp)F - 2\sqrt{\pi F} dx \cdot \tau - Fdx\gamma \sin i.$$

По закону Ньютона эта сумма проекций сил равна массе выделенного элемента, умноженной на его ускорение, т. е.

$$\Sigma X = \Delta m \cdot \frac{dw}{dt}.$$

Масса Δm очевидно равна:

$$\Delta m = \frac{Fdx\gamma}{g}.$$

Внося значения ΣX и Δm в уравнение Ньютона, получим после упрощений:

$$-dp - 2\sqrt{\frac{\pi}{F}} dx \cdot \tau - \gamma \sin i dx = \frac{dx}{dt} \cdot dw \cdot \frac{\gamma}{g}.$$

Делим все равенство на dt , заменяем $\frac{dx}{dt}$ через w и переносим все члены в левую часть равенства:

$$w \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{dp}{dt} + 2\sqrt{\frac{\pi}{F}} \cdot \tau w + w\gamma \frac{dz}{dx} = 0 \quad (1)$$

(так как $\sin i = \frac{dz}{dx}$).

Далее имеем:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = w \cdot \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = w \cdot \frac{dp}{dx}.$$

и

Внося эти значения $\frac{dw}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$ в основное уравнение (1), находим:

$$w \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{dx} \cdot w + \frac{dp}{dx} \cdot w + 2 \sqrt{\frac{\pi}{F}} \cdot \tau \cdot w + w \gamma \frac{dz}{dx} = 0.$$

Сокращаем на w , умножаем все равенство на $\frac{dx}{\gamma}$ и вводим в первом члене $\frac{w}{g}$ под знак дифференциала, кроме того напряжение τ в третьем члене заменяем через $k \frac{1}{g} w^2$, получаем:

$$d \left(\frac{w^2}{2g} \right) + \frac{dp}{\gamma} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{F}} \cdot k w^2 \cdot dx + dz = 0.$$

Заменяя $2 \sqrt{\frac{\pi}{F}}$ через $\frac{4}{d}$ и $8k$ через λ , окончательно получим:

$$d \left(\frac{w^2}{2g} \right) + \frac{dp}{\gamma} + dz + \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g} = 0.$$

Слагаемое $\lambda \frac{dx}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$ представляет собой высоту dh потерянного напора на элементарном участке dx трубопровода (см. формулу Дарси-Вейсбаха):

$$dh = \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Таким образом:

$$d \left(\frac{w^2}{2g} \right) + \frac{dp}{\gamma} + dz + dh = 0. \quad (2)$$

Это и есть формула Бернулли для случая установившегося движения газов и перегретых паров по трубопроводам. Если предположить, что уд. вес γ на протяжении элементарного участка dx остается постоянным, то формулу Бернулли словами можно выразить так:

Сумма приращений:

- a) скоростной высоты $\left(\frac{w^2}{2g} \right)$,
- b) пьезометрической высоты $\left(\frac{p}{\gamma} \right)$,
- c) нивеллирной " (z) ,
- d) высоты потерянного напора (h) ,

на всяком элементарном участке трубопровода dx равна нулю.

§ 2. Упрощение уравнения Бернулли для случая движения газов и перегретых паров с небольшими скоростями (ниже звуковых).

При установившемся движении несжимаемой жидкости по горизонтальному трубопроводу постоянного сечения падение давления расходуется исключительно на преодоление силы трения, так как скорость потока постоянна по всей длине трубопровода. Иначе обстоит дело при движении газов. По мере падения давления газы расширяются и скорость их движения увеличивается, поэтому паде-

ние давления (как показывает формула Бернулли для газов) расходуется не только на преодоление трения у стенок, но и на приращение кинетической энергии потока.

Посмотрим, однако, в каком соотношении будут находиться скоростная высота $\left(\frac{w^2}{2g}\right)$ и пиезометрическая высота $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$ в случае медленного движения газа. При переходе от бесконечно-малого участка длины dx к конечной длине l бесконечно-малое приращение скоростной высоты $d\left(\frac{w^2}{2g}\right)$ заменяется конечным приращением $\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}$, где w_1 и w_2 — скорости в начале и конце взятого участка l . Аналогично величине $\frac{dp}{\gamma}$ заменится конечным изменением пиезо-

метрической высоты, именно величиной $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\gamma}$, где p_1 и p_2 — давления в начале и конце того же участка. Положим, напр., что газ в трубе движется *изотермически*, тогда (по закону Бойля-Мариотта)

$$pv = p_1 v_1 = \text{const},$$

где $v = \frac{1}{\gamma}$ — удельный объем газа.

Таким образом

$$\gamma = \frac{p}{\text{const}} = \frac{p}{p_1 v_1} = \frac{p \gamma_1}{p_1}.$$

Внося это значение γ в вышенаписанный интеграл, получим:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\gamma} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\gamma_1} \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Итак полное изменение скоростной высоты на участке длины l равно

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}.$$

Полное же изменение пиезометрической высоты на том же участке равно:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Сопоставим численные значения этих высот для практического случая перекачки по трубопроводу какого-либо газа, напр., для воздуха. Пусть давление в начале трубопровода равно 5 атм. $(p_1 = 50\,000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2})$, в конце — 1 атм. $(p_2 = 10\,000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2})$. Скорость в начале трубопровода пусть равна $w_1 = 10$ м/сек. и в конце $w_2 = 50$ м/сек. Уд. вес воздуха при 1 атм. $\gamma_2 = 1,293 \text{ кг/м}^3$, при пяти атмосферах $\gamma_1 = 6,465 \text{ кг/м}^3$. Производим вычисления:

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{2500 - 100}{19,62} \cong 122 \text{ м},$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \frac{50\,000}{6,465} \ln \frac{1}{5} \cong 12\,480 \text{ м}.$$

Мы видим, что для небольших скоростей (по сравнению со скоростью звука) изменением скоростной высоты можно пренебрегать по сравнению с изменением высоты пнезметрической. Первое составляет по сравнению со вторым для взятого нами из практики примера только около одного процента. Для других давлений и газов порядок соотношения этих величин для небольших скоростей, примерно, остается прежний. Отсюда делаем вывод: величиной $d \left(\frac{w^2}{2g} \right)$ в практических случаях перекачки газов по трубопроводам следует пренебрегать. Таким образом уравнение Бернулли для скоростей, имеющих место в практике перекачек, можно написать в следующей упрощенной форме:

$$\frac{dp}{\gamma} + dh + dz = 0. \quad (3)$$

Для горизонтального трубопровода приращение нивелирной высоты dz равно нулю, а потому уравнение Бернулли примет вид уравнения Дарси-Вейсбаха, написанного для бесконечно-малого участка длины dx :

$$\frac{dp}{\gamma} + dh = 0 \quad (4)$$

или, внося значение dh :

$$-\frac{dp}{\gamma} = \lambda \frac{dx}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}. \quad (5)$$

§ 3. Вывод общих уравнений для весового и объемного расходов газа и перегретого пара при медленном движении по трубопроводу (со скоростями ниже звуковых).

Пусть газ (или перегретый пар) движется по горизонтальному трубопроводу.

Напишем для потока газа следующую систему уравнений:

1) уравнение Бернулли (5):

$$-\frac{dp}{\gamma} = \lambda \frac{dx}{d} \cdot \frac{w^2}{2g},$$

2) уравнение весового расхода:

$$q_{\text{вес}} = w F \gamma,$$

3) уравнение состояния газа:

$$\frac{p}{\gamma^x} = \frac{p_1}{\gamma_1^x} = \text{const},$$

4) уравнение для закона изменения λ :

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}^m},$$

где x — показатель политропы; * в случае изотермического процесса $x = 1$, в случае адиабатного процесса $x = k = \frac{c_p}{c_v}$ (где c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, c_v — теплоемкость при постоянном объеме).

В нашу систему четырех уравнений входят четыре зависящие от x функции, именно: w , p , γ и λ . Решая уравнения эти совместно, мы можем найти выражение для $q_{\text{вес.}}$ весового расхода газа. Пусть давление в начале трубопровода равно p_1 и уд. вес газа γ_1 , соответственно для конца газопровода p_2 и γ_2 .

Из уравнений второго, третьего и четвертого выразим w , γ и λ через p и внесем их значения в уравнение первое.

Из третьего уравнения имеем:

$$\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Из второго уравнения, внося значения γ , получим:

$$w = \frac{q_{\text{вес.}}}{F\gamma} = \frac{q_{\text{вес.}}}{F\gamma_1} \cdot \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Уравнение четвертое по внесении значений w и γ дает:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{A}{(\text{Re})^m} = \frac{A}{\left(\frac{wd\gamma}{g\mu} \right)^m} = A \left(\frac{g\mu}{d} \right)^m (w\gamma)^{-m} = \\ &= A \left(\frac{g\mu}{d} \right)^m \left(\frac{q_{\text{вес.}}}{F} \right)^{-m}. \end{aligned}$$

Вносим найденные значения γ , w и λ в уравнение первое, получаем:

$$\frac{dp}{\gamma_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}} = A \left(\frac{g\mu}{d} \right)^m \left(\frac{q_{\text{вес.}}}{F} \right)^{-m} \frac{dx}{d} \cdot \frac{q_{\text{вес.}}^2}{F^2 \gamma_1^2} \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{2}{\kappa}} \cdot \frac{1}{2g}.$$

После упрощений:

$$-\left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} d \left(\frac{p}{p_1} \right) = \frac{A}{p_1} \left(\frac{Fg\mu}{q_{\text{вес.}} \cdot d} \right)^m \cdot \frac{dx}{d} \cdot \frac{q_{\text{вес.}}^2}{F^2 \cdot \gamma_1^2 g}.$$

Интегрируем левую часть равенства по p в пределах от p_2 до p_1 и правую часть по x в пределах от 0 до l .

После интегрирования получаем:

$$\frac{\kappa}{1+\kappa} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1+\frac{1}{\kappa}} \right] = \frac{A}{p_1} \left(\frac{Fg\mu}{q_{\text{вес.}} \cdot d} \right)^m \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{q_{\text{вес.}}^2}{F^2 \cdot \gamma_1^2 \cdot 2g}.$$

Из этого равенства и определяем значение $q_{\text{вес.}}$ весового расхода:

$$\begin{aligned} q_{\text{вес.}} &= \left(\frac{d}{Fg\mu} \right)^{\frac{m}{2-m}} \left(\frac{F^2 \cdot d \cdot \gamma_1 \cdot 2g \cdot \kappa}{A \cdot l \cdot (1+\kappa)} \right)^{\frac{1}{2-m}} \times \\ &\times \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1+\frac{1}{\kappa}} \right]^{\frac{1}{2-m}} \end{aligned} \quad (8)$$

Это и есть самая общая формула для весового расхода газа или перегретого пара. Преобразуем формулу (6) таким образом, чтобы она не содержала γ_1 (уд. вес газа). Для этого напомним уравнение Клапейрона для газа:

$$\frac{p}{\gamma_{\text{газ}}} = R_{\text{газ}} \cdot T,$$

аналогично для воздуха:

$$\frac{p}{\gamma_{\text{воз.}}} = R_{\text{воз.}} \cdot T$$

(где $R_{\text{газ}}$ и $R_{\text{воз.}}$ — соответственные газовые постоянные). Деля второе равенство на первое, получаем:

$$\frac{R_{\text{воз.}}}{R_{\text{газ}}} = \frac{\gamma_{\text{газ}}}{\gamma_{\text{воз.}}} = \Delta, \quad (7)$$

где Δ — отвлеченное число, представляющее отношение уд. веса газа к уд. весу воздуха при одинаковых температурах и одинаковых давлениях (напр., при 15°C и при 1 атм.).

Таким образом имеем следующую связь:

$$R_{\text{газ}} = \frac{R_{\text{воз.}}}{\Delta}.$$

Написав уравнение Клапейрона для состояния газа в начале трубопровода:

$$\frac{p_1}{\gamma_{1\text{газ}}} = R_{\text{газ}} \cdot T_1$$

и внося сюда найденное значение $R_{\text{газ}}$, получаем:

$$\frac{p_1}{\gamma_{1\text{газ}}} = \frac{R_{\text{воз.}} \cdot T_1}{\Delta}.$$

Обозначая $\gamma_{1\text{газ}}$ просто через γ_1 и $R_{\text{воз.}}$ через R_0 , находим отсюда значение:

$$\gamma_1 = \frac{p_1 \Delta}{R_0 T_1}$$

и

$$v_1 = \frac{R_0 T_1}{p_1 \cdot \Delta}. \quad (8)$$

Внося теперь найденное значение γ_1 в основную формулу (6), получаем:

$$q_{\text{вес.}} = \left(\frac{d}{R g x} \right)^{\frac{m}{2-m}} \left(\frac{d \cdot l^2 \cdot p_1 \cdot \Delta \cdot 2g \cdot x}{A \cdot l (1+x) R_0 T_1} \right)^{\frac{1}{2-m}} \times \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{1+x}} \right]^{\frac{1}{2-m}} \quad (9)$$

Здесь T_1 есть температура газа в начале трубопровода. Газовая постоянная R_0 для воздуха в технической системе единиц:

$$R_0 = 29,27.$$

Определим далее величину объемного расхода потока q . Так как скорости потока в разных сечениях различны (вследствие изменения удельного веса), то объемный расход зависит от выбора сечения. Величина объемного расхода в начальном сечении q_1 с весовым расходом $q_{\text{вес.}}$ очевидно связана соотношением:

$$q_1 = \frac{q_{\text{вес.}}}{\gamma_1} = \frac{R_0 T_1}{p_1 \Delta} \cdot q_{\text{вес.}}$$

Мы видим, что величина объемного расхода q при одном и том же весовом расходе зависит от давления p и температуры T_1 в начальном сечении. Найдем тот объемный расход q , который имел бы место, если бы то же (по весу) количество газа перекачивалось при некотором нормальном давлении P и при нормальной температуре T_0 . Величину q будем называть *приведенным расходом* (к нормальным условиям давления и температуры).

При переходе от давления p_1 (в начале трубопровода) к нормальному давлению P объем газа увеличится в отношении $\frac{p_1}{P}$ раз; при переходе от температуры T_1 к нормальной температуре T_0 объем увеличится в $\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$ раз. Таким образом мы можем написать следующее соотношение между действительным весовым расходом в начале трубопровода и *приведенным* расходом:

$$q = q_1 \cdot \frac{p_1}{P} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{R_0 T_1}{p_1 \Delta} \cdot q_{\text{вес.}} \cdot \frac{p_1 T_0}{P T_1} = \frac{R_0 T_0}{\Delta \cdot P} \cdot q_{\text{вес.}} \quad (10)$$

Внося сюда найденное выше значение $q_{\text{вес.}}$, получаем окончательную формулу для приведенного к нормальным условиям (P и T_0) объемного расхода потока.

ЗАДАНИЕ 24.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ГАЗОПРОВОДОВ И ПАРОПРОВОДОВ ПЕРЕГРЕТОГО ПАРА.

§ 1. Формула Мейера для ламинарного режима.

Предположим, что газ или *перегретый* пар движется по трубопроводу при ламинарном режиме, т. е. число Рейнольдса для потока меньше 2300. В этом случае коэффициент гидравлического сопротивления λ , как известно, следует закону:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

т. е.

$$A = 64 \text{ и } m = 1.$$

Внося эти значения A и m в формулу (9) задания 23, мы получим после сокращений следующую формулу для весового расхода газа или пара при ламинарном режиме потока:

$$q_{\text{вес.}} = \frac{\pi d^4 p_1 \Delta z}{128 \mu l (1 + z) R_0 T_1} \cdot \left[p_1 - p_2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1 + \frac{1}{z}} \right] \quad (1)$$

Применим эту общую формулу для ламинарного потока к двум частным случаям: *изотермического* и *адиабатного* изменения состояния газа, так как они имеют наибольшую практическую важность.

В случае изотермического процесса показатель политропы равен единице:

$$x = 1.$$

Внося это значение x в формулу (1), получаем:

$$q_{\text{вес.}} = \frac{\pi}{256 R_0} \cdot \frac{d^4 \cdot \Delta}{\mu l T_1} \cdot (p_1^2 - p_2^2) = 0,000419 \frac{d^4 \Delta}{\mu l T_1} \cdot (p_1^2 - p_2^2), \quad (2)$$

в технической системе единиц; это и есть формула О. Е. Мейера для весового расхода ламинарного изотермического потока.

По формуле (10) задания 23 находим выражение приведенного объемного расхода. Принимая $T_0 = 288^\circ (= 15^\circ)$ и $P = 10330 \text{ кг/м}^2$ (физическая атмосфера), получаем:

$$q = \frac{R_0 T_0}{\Delta P} \cdot q_{\text{вес.}} = 0,000342 \frac{d^4}{\mu l T_1} (p_1^2 - p_2^2), \quad (3)$$

объемный приведенный расход ламинарного изотермического потока. (Числовой коэффициент справедлив только в технической системе единиц.)

Рассматривая формулы (2) и (3), заключаем, что ламинарный изотермический поток характеризуется простой параболической зависимостью между давлением и расходом.

В случае адиабатного процесса (т. е. при полном отсутствии теплообмена между потоком и внешней средой) величина x в основном уравнении (1) для ламинарного потока должна быть заменена величиной $k = \frac{c_p}{c_v}$. Таким образом расчетная формула для весового расхода ламинарного потока, следующего закону адиабаты, будет такая:

$$q_{\text{вес.}} = \frac{\pi}{128 R_0} \cdot \frac{d^4 \cdot p_1 \Delta k}{\mu l (1 + k) T_1} \cdot \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1 + \frac{1}{k}} \right] \quad (4)$$

Формула для приведенного объемного расхода в этом случае будет:

$$q = \frac{R_0 T_0}{P \cdot \Delta} \cdot q_{\text{вес.}} = \frac{\pi T_0}{128 P} \cdot \frac{d^4 p_1 k}{\mu l (1 + k) T_1} \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1 + \frac{1}{k}} \right] \quad (5)$$

§ 2. Формула Веймаута (Weymouth) для турбулентного режима.

Для чисел Рейнольдса Re , значительно превосходящих критическое значение $Re_{\text{кр.}} = 2300$, сопротивление трения потока возрастает почти пропорционально квадрату скорости потока. Поэтому, приняв чисто квадратичный закон трения, американский инженер Веймаут предложил для коэффициента гидравлического сопротив-

ления следующую формулу, хорошо оправдывающуюся на практике (особенно при перекачке нефтяных газов):

$$\lambda = \frac{0,009407}{\sqrt[3]{d}}, \quad (6)$$

где диаметр d берется в метрах.

Таким образом в основном уравнении для расхода (формула (9) задания 23) величину A следует положить равной:

$$A = \frac{0,009407}{\sqrt[3]{d}}.$$

величину же m необходимо приравнять нулю (так как $\lambda = \frac{A}{\text{Rem}}$ (см. задание 23).

Внося эти значения A и m в формулу (9), задания 23, получаем для турбулентного потока:

$$q_{\text{вс.}} = C \sqrt{\frac{d^{5/2} \cdot p_1 \cdot \Delta}{l(1+\alpha) T_1}} \cdot \sqrt{p_1 - p_2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}}, \quad (7)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{g \cdot \pi^2}{8 \cdot 0,009407 R_0}} \cong 6,64$$

в технической системе единиц.

В случае турбулентного изотермического потока $\alpha = 1$, поэтому

$$q_{\text{вс.}} = C_1 d^{3/2} \sqrt{\frac{\Delta (p_1^2 - p_2^2)}{l T_1}}, \quad (8)$$

где

$$C_1 = \sqrt{\frac{g \pi^2}{2 \cdot 8 \cdot 0,009407 R_0}} \cong 4,69.$$

Формула для приведенного объемного расхода будет:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{R_0 T_0}{\Delta \cdot P} \cdot q_{\text{вс.}} = 4,69 \frac{R_0 T_0}{P} d^{3/2} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{l T_1 \Delta}} = \\ &= K d^{3/2} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{l T_1 \Delta}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$K = 4,69 \cdot \frac{R_0 T_0}{P}; \quad \left(\frac{R_0 T_0}{P} \cong 0,816 \right).$$

Так как коэффициент K имеет размерность, то в случае пользования разными системами единиц значение его меняется. Приводим в таблице 11 значения K для трех наиболее часто применяющихся систем (смешанных):

Таблица 11.

q	d	γ	T	p	K
м ³ /сек.	м	м	абс. темп.	кг/м ² абсолютное	3,325
м ³ /час.	см	км	абс. темп.	кг/см ² абсолютное	20,209
м ³ /час.	дм.	км	абс. темп.	кг/см ² абсолютное	242,7

В случае адиабатного процесса весовой расход турбулентного потока на основании формулы Веймаута (6) будет равен:

$$\kappa = k = \frac{c_p}{c_v},$$

$$q_{\text{вес.}} = 6,64 d^{3/4} \sqrt{\frac{p_1 \Delta k}{l(1+k) T_1}} \sqrt{p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\kappa}}} \quad (10)$$

(коэффициент справедлив в технической системе).

Приведенный объемный расход турбулентного потока, следующего закону адиабаты, равен:

$$d = \frac{R_0 T_0}{\Delta \cdot P} q_{\text{вес.}} \cong 5,43 d^{3/4} \sqrt{\frac{p_1 k}{l \Delta (1+k) T_1}} \sqrt{p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\kappa}}} \quad (11)$$

(в технической системе единиц).

§ 3. Поправка к формуле Веймаута на случай большой скорости движения газов (близкой к скорости звука).

В случае большой скорости можно принять уравнение Бернулли без упрощения, т. е. не опуская член $d \left(\frac{w^2}{2g} \right)$.

Итак для горизонтального трубопровода имеем:

$$d \left(\frac{w^2}{2g} \right) + \frac{dp}{\gamma} + dh = 0$$

(уравнение Бернулли)

Кроме того

$$q_{\text{вес.}} = F w \gamma \quad (\text{уравнение расхода})$$

и

$$\frac{p}{\gamma^2} = \frac{p_1}{\gamma_1^2} \quad (\text{уравнение состояния}).$$

Из последнего равенства имеем:

$$\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1/2}$$

Из второго равенства:

$$w = \frac{\bar{q}_{\text{вс.}}}{F\gamma} = \frac{\bar{q}_{\text{вс.}}}{F\gamma_1} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Вносим найденные значения γ и w в уравнение Бернулли; заменив в нем dh через $\gamma \cdot \frac{dx}{d} \cdot \frac{w^2}{2g}$, получаем:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + \frac{dp}{\gamma} + \lambda \frac{dx}{d} \left(\frac{w^2}{2g}\right) = 0,$$

$$d\left[\frac{\bar{q}_{\text{вс.}}^2}{F^2 \cdot \gamma_1^2} \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{1}{2g}\right] + \frac{dp}{\gamma_1} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \lambda \frac{dx}{d} \left[\frac{\bar{q}_{\text{вс.}}^2}{F^2 \gamma_1^2} \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{1}{2g}\right] = 0.$$

Разделяем переменные p и x , получаем:

$$\frac{d}{\lambda} d \ln \left[\frac{\bar{q}_{\text{вс.}}^2}{F^2 \cdot \gamma_1^2} \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{1}{2g} \right] + \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{F^2 \gamma_1 2g}{\bar{q}_{\text{вс.}}^2} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dp = -dx.$$

Интегрируем по p от p до p_2 и по x от 0 до l :

$$\frac{d}{\lambda} \ln \frac{\bar{q}_{\text{вс.}}^2}{F^2 \gamma_1^2} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{1}{2g} + \frac{d F^2 \cdot \gamma_1 2g p_1 x}{\lambda \bar{q}_{\text{вс.}}^2 (x+1)} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}+1} - 1 \right] = -l,$$

$$\frac{d \cdot F^2 \gamma_1 2g x}{\lambda \bar{q}_{\text{вс.}}^2 (x+1)} \cdot \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}} \right] - \frac{d}{\lambda} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} = l,$$

$$\bar{q}_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{d \cdot F^2 \cdot \gamma_1 \cdot 2g \cdot x \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}} \right]}{\lambda (x+1) \left[l + \frac{2}{x} \cdot \frac{d}{\lambda} \ln \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \right]}}.$$

Вносим значение $\gamma_1 = \frac{p_1 \Delta}{R_0 T_1}$:

$$q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{d \cdot F^2 \cdot 2g \cdot x \cdot p_1 \cdot \Delta \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}} \right]}{R_0 \cdot T_1 \lambda (x+1) \left[l + \frac{2d}{x\lambda} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right]}}.$$

Вносим значение λ по формуле Веймаута:

$$q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{d \cdot \pi^2 \cdot d^4 \cdot 2g x p_1 \Delta \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}} \right] d^{1/2}}{16 R_0 T_1 \cdot 0,009407 (x+1) \left[l + \frac{2d}{x\lambda} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right]}}.$$

$$q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{g \cdot \pi^2 \cdot d^{5/2} \cdot p_1 x \Delta \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}} \right]}{8 \cdot 0,009407 R_0 T_1 (1+x) \left[l + \frac{2d}{x\lambda} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right]}}.$$

Итак, сравнивая $q_{\text{вес.}}$ с формулой (7), мы видим, что

$$\bar{q}_{\text{вес.}} = q_{\text{вес.}} \sqrt{\frac{l}{l_1}}, \quad (12)$$

где

$$l_1 = l + \frac{2d}{\lambda} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \quad (13)$$

Для изотермического процесса исправленная формула, напр., имеет вид:

$$q_{\text{вес.}} = 4,69 d^{5/4} \sqrt{\frac{(p_1^2 - p_2^2) \Delta}{\left[l + 2 \frac{d}{\lambda} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \right] T_1}} \quad (14)$$

(так как κ для этого случая равно 1).

Итак, вводя в формулы Веймаута, взамен действительной длины трубопровода l , длину „эффективную“ l_1 по формуле (13), мы решаем точно задачу о нахождении весового расхода газового потока. Введение в формулы „эффективной длины“, взамен длины действительной в некоторых случаях перекачки газа, может внести уточнение величины расхода до 5—7%. Это уточнение особенно существенную роль играет в случае больших скоростей, приближающихся к скоростям звуковым. Квадратичный закон сопротивления Веймаута в этой области скоростей будет ближе к истине, чем какой бы то ни было другой закон.

§ 4. Формула Блазиуса (Blasius) для турбулентного режима.

Внесем в основное уравнение для расхода (формула (9) задания 28) значения A и m по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{(Re)^{0,25}},$$

т. е. $A = 0,3164$ и $m = 0,25$; получаем:

$$q_{\text{вес.}} = C_B \left(\frac{1}{\mu} \right)^{1/4} d^{5/4} \left(\frac{p_1 \Delta x}{l(1+\kappa)T_1} \right)^{1/2} \cdot \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1+\frac{1}{\kappa}} \right]^{1/2}, \quad (15)$$

где

$$C_B = \left(\frac{\pi^2 \cdot 2g}{16 \cdot 0,3164 R_0} \right)^{1/4} \cdot \left(\frac{4}{\pi g} \right)^{1/2} = 0,872,$$

(в технической системе единиц).

Для приведенного объемного расхода имеем:

$$q = \frac{R_0 T_0}{\Delta \cdot P} \cdot q_{\text{вес.}} = 0,712 \left(\frac{1}{\mu} \right)^{1/4} d^{5/4} \left[\frac{p_1 x}{l(1+\kappa) \Delta^{3/4} T_1} \right]^{1/2} \left[p_1 - p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1+\frac{1}{\kappa}} \right]^{1/2} \quad (16)$$

Для адиабатного процесса в этих формулах κ следует заменить через k

Для изотермического процесса имеем ($\kappa = 1$):

$$q_{\text{вес.}} = 0,588 \left(\frac{1}{\mu} \right)^{1/2} d^{19/7} \left[\frac{\Delta(p_1^2 - p_2^2)}{lT_1} \right]^{1/2} \quad (17)$$

и приведенный объемный расход:

$$q = 0,48 \left(\frac{1}{\mu} \right)^{1/2} d^{19/7} \cdot \left[\frac{p_1^2 - p_2^2}{lT_1 \Delta^{3/2}} \right]^{1/2}, \quad (18)$$

Формулы Блазуса менее удобны в практических расчетах, чем формулы Веймаута.

§ 5. Упрощенная формула Веймаута для случая небольшой разности давлений $p_1 - p_2$.

Предполагая падение давления вдоль газопровода $p_1 - p_2$ незначительным, мы можем упростить формулы Веймаута (8) и (9) для турбулентного изотермического потока следующим образом:

$$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 2pH,$$

где через p обозначено среднее абсолютное давление в газопроводе и через H разность давлений $p_1 - p_2$.

Величина H измеряется в кг/м², но она может измеряться также в миллиметрах водяного столба, так как слой воды толщиной в 1 мм на 1 м² производит давление, равное 1 кг. Внося значение $p_1^2 - p_2^2$ в формулы (8) и (9), получаем:

$$q_{\text{вес.}} = 6,64 d^{5/2} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p H}{lT_1}} \quad (19)$$

для весового расхода и

$$q = 5,41 d^{5/2} \cdot \sqrt{\frac{p H}{lT_1 \Delta}} \quad (20)$$

для приведенного объемного расхода.

Числовые коэффициенты верны только в технической системе.

В случае, когда p равно одной атмосфере (10 333 кг/м²), формулы эти примут вид:

$$q_{\text{вес.}} = 675 d^{5/2} \cdot \sqrt{\frac{\Delta H}{lT_1}}, \quad (21)$$

$$q = 550 d^{5/2} \cdot \sqrt{\frac{H}{lT_1 \Delta}}. \quad (22)$$

Этими формулами с достаточной степенью точности можно пользоваться в том случае, если величина $(p_1 - p_2)$ составляет не более десяти процентов величины p среднего давления в газопроводе.

РАСЧЕТ ГАЗОПРОВОДОВ И ПАРОПРОВОДОВ ПЕРЕГРЕТОГО ПАРА.

§ 1. Физические данные для некоторых газов и для водяного пара.

Рассматривая все полученные нами расчетные формулы (см. задания 23 и 24), мы приходим к заключению, что при проектировании газопроводов необходимо располагать следующими данными, характеризующими с физической стороны газ (или пар), подлежащий перекачке:

- 1) показатель политропы — x ;
- 2) отношение уд. веса газа (или пара) к уд. весу воздуха при нормальных условиях давления и температуры (напр., при 1 атм. и при 0°Ц — Δ);
- 3) абсолютная вязкость газа или пара — μ .

Показатель политропы x определяется не только физическими свойствами, но и процессом изменения состояния газа, т. е. тепловым режимом его (условиями теплопередачи через стенки труб). При перекачке газов обычно мало заботятся о тепловой изоляции трубопроводов, поэтому процесс изменения состояния перекачиваемых в таких условиях газов будет близок к *изотермическому*. Температура перекачки в случае длинных неизолированных газопроводов (при большом коэффициенте теплопередачи) принимается равной температуре той среды, в которой проложены трубы. В этих случаях для всех газов показатель x принимается равным единице.

При перекачке же перегретых паров трубопроводы по вполне понятным причинам изолируются самым тщательным образом. Тепловые потери паропроводов незначительны еще по той причине, что пары обычно перекачиваются только на небольшие расстояния. Характер изменения состояния перегретого пара в силу устранения теплообмена между потоком и наружной средой будет близок к *адиабатному*; в этих случаях (так же как и при перекачке газа по хорошо изолированному трубопроводу) величина x принимается равной показателю адиабаты $k = \frac{C_p}{C_v}$.

Ниже приведены значения k для некоторых газов и для водяного пара:

Воздух	1,41	(для температуры до 200°Ц)
Углекислый газ	1,31	(для 0°Ц)
" "	1,30	(для 20°Ц)
" "	1,27	(для 100°Ц)
Метан	1,316 — 1,313	(для $10 — 30^\circ \text{Ц}$)
Этилен	1,244	(для $0 — 40^\circ \text{Ц}$)
Ацетилен	1,26	(для нормальной температуры)
Светильный газ	1,36	
Перегретый водяной пар	1,30	
Насыщенный водяной пар	1,135.	

Для сложной смеси газов (природный газ, нефтяные газы) величина k может быть определена по формуле:

$$k = 1 + \frac{1,985}{mc_v},$$

где m — средний молекулярный вес смеси,
 c_v — теплоемкость смеси при постоянном объеме.

Для сильно перегретого водяного пара имеем следующие значения k :

°C . . .	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
k . . .	1,300	1,306	1,302	1,297	1,290	1,283	1,276	1,268	1,259	1,250

Отношения уд. весов некоторых газов к уд. весу воздуха (Δ) помещены в нижеследующей таблице:

	Δ		Δ		Δ
Кислород	1,105	Пропан	1,52	Воздух	1
Водород	0,070	Бутан	2,00	Свежий газ	0,4
Азот	0,970	Этилен	0,965	Сыловой газ	0,77—0,98
Углекислый газ	1,520	Пропан	1,45	Коксовый газ	0,41
Метан	0,554	Бутилен	1,935	Генератор. газ	0,87
Этан	1,035	Ацетилен	0,90		

Данные об абсолютной вязкости помещены в нижеследующей таблице в технической системе единиц $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \right]$.

Воздух									
°C . . .	= -20	-10	0	10	20	40	60	80	100
$10^6 \cdot \mu$. .	= 1,59	1,65	1,71	1,77	1,83	1,95	2,07	2,19	2,83
Углекислый газ						$10^6 \cdot \mu = 1,5$			
Кислород						$10^6 \cdot \mu = 2,1$			
Азот						$10^6 \cdot \mu = 1,7$			
Водород						$10^6 \cdot \mu = 0,84$			
Метан						$10^6 \cdot \mu = 0,866$			

Водяной пар						
°C . . . =	100	150	200	250	300	350
$10^6 \cdot \mu$. . =	1,31	1,55	1,77	1,98	2,19	2,40

Следует заметить, что абсолютная вязкость газов и паров (так же как и жидкостей) зависит только от их природы и температуры. Давление практически не оказывает никакого влияния на величину абсолютной вязкости. Пользуясь формулами Веймаута (для турбулентного потока), можно избежать необходимости располагать данными о вязкости. Постоянный коэффициент в формуле (6) Веймаута (задание 24) учитывает влияние вязкости главным образом для естественных нефтяных газов.

§ 2. Наиболее выгодный диаметр для случая газопровода с несколькими компрессорными станциями.

Практикой установлено, что стоимость K_1 трубопровода длины L , с учетом расходов по изготовлению труб и по укладке их, определяется следующей формулой:

$$K_1 = A_1 d^n L, \quad (1)$$

где A_1 — некоторая постоянная величина, а n — показатель степени колеблется в пределах

$$1 < n < 2.$$

Обычно n принимается равным около 1,5. Обозначая стоимость одной компрессорной станции через A_2 и число этих станций вдоль газопроводной линии через z , получим стоимость всех станций K_2 :

$$K_2 = A_2 \cdot z.$$

Некоторая часть расходов K_3 при сооружении газопровода всегда пропорциональна самой длине газопровода L (телеграф, рытье, канав и т. д.):

$$K_3 = A_3 \cdot L.$$

И наконец, в общую сумму расходов входит еще некоторая постоянная величина A_4 , не зависящая ни от диаметра, ни от числа станций (проектирование, исследование профиля местности, подготовительные работы и др.). Таким образом общая стоимость K газопровода выражается формулой:

$$K = A_1 d^n L + A_2 \cdot z + A_3 L + A_4. \quad (2)$$

Воспользуемся для отыскания наивыгоднейшего диаметра газопровода формулой Ваймаута (формула (8) задания 24) для турбулентного изотермического потока, наиболее близко отвечающей практически условиям перекачки газов. Имеем:

$$q_{\text{век}} = 4,69 d^{10/3} \sqrt{\frac{\Delta(p_1^3 - p_2^3)}{l T_1}}, \quad (3)$$

откуда

$$l = \frac{4,69^2 \cdot d^{10/3} \cdot \Delta \cdot (p_1^3 - p_2^3)}{T_1 \cdot q_{\text{век}}^2}. \quad (4)$$

Число компрессорных станций z определяется по формуле:

$$z = \frac{L}{l} = \frac{L \cdot T_1 \cdot q_{\text{век}}^2}{4,69^2 \cdot d^{10/3} \cdot \Delta \cdot (p_1^3 - p_2^3)}. \quad (5)$$

Внося значения z и l в формулу (1), получаем:

$$K = A_1 d^n L + A_2 \cdot \frac{T_1 q_{\text{век}}^2}{4,69^2 \cdot d^{10/3} \cdot \Delta (p_1^3 - p_2^3)} L + A_3 L + A_4.$$

Для наивыгоднейшего диаметра стоимость сооружения газопровода K должна принимать значение минимума. Следовательно,

$$\frac{\partial K}{\partial d} = 0$$

или

$$A_1 n d^{n-1} L - A_2 \frac{16 T_1 \cdot q_{\text{век}}^2}{3 \cdot 4,69^2 \cdot d^{10/3} \cdot \Delta (p_1^3 - p_2^3)} \cdot L = 0.$$

Полагая $n = 1/2$, получаем отсюда:

$$d = a \sqrt[7]{\frac{A_2}{A_1}} \sqrt[7]{\frac{T_1 q_{acc.}^2}{\Delta (p_1^2 - p_2^2)}}, \quad (6)$$

где

$$a = \sqrt[7]{\frac{18 \cdot 3}{3 \cdot 4,69^2 \cdot 5}} \approx 0,76.$$

Величина A_2 есть стоимость одной станции, величина A_1 представляет стоимость изготовления и укладки единицы длины (1 м) трубопровода.

По формуле (6), зная A_1 и A_2 , можно определить наиболее выгодный диаметр, обеспечивающий возможность перекачки $q_{acc.}$ килограммов газа в секунду при давлении компрессоров p_1 и противодавлении p_2 . При этом число станций определится по формуле (5), куда вносится значение d , найденное из формулы (6).

§ 3. Диаметр, удовлетворяющий условию минимума веса труб для случая газопровода с одной компрессорной станцией.

В случае сваренных газопроводов больших диаметров с одной компрессорной станцией очевидным критерием наибольшей выгоды является минимум веса металла, идущего на сооружение газопровода (так как число станций варьировать не может). Толщина стенок труб δ в этом случае, теоретически говоря, должна приближаться к тому значению, которое дается известной формулой сопротивления материалов:

$$\delta \approx \frac{p_1 d}{2K}, \quad (7)$$

где K — допускаемое напряжение на разрыв материала трубы.

Напишем выражение для веса G всего трубопровода длины L . Очевидно имеем:

$$G = \pi d l \bar{\gamma}, \quad (8)$$

где $\bar{\gamma}$ — уд. вес металла.

Внесем сюда δ по формуле (7):

$$G = \pi d l \frac{p_1 d}{2K} \cdot \bar{\gamma}.$$

Значение давления p_1 внесем по формуле Веймаута (3), именно:

$$p_1 = \sqrt{\frac{l T_1 q_{acc.}^2}{4,69^2 \cdot d^{16/3} \cdot \Delta} + p_2^2}, \quad (9)$$

после чего получаем:

$$G = \frac{\pi d^2 l \bar{\gamma}}{2K} \sqrt{\frac{l T_1 q_{acc.}^2}{4,69^2 \cdot d^{16/3} \cdot \Delta} + p_2^2}.$$

Для минимума веса G необходимо удовлетворить условию

$$\frac{\partial G}{\partial d} = 0, \text{ что дает:}$$

$$d = a \left(\frac{17 T_1 q_{\text{век.}}^2}{\Delta p_2^2} \right)^{1/10}, \text{ где } a = \left(\frac{1}{3 \cdot 4,69^2} \right)^{1/10}, \quad (10)$$

т. е. значение диаметра, удовлетворяющего условию минимума веса металла, затрачиваемого на трубопровод.

Внося найденное значение диаметра d в формулу (9), получаем:

$$p_1 = 2p_2, \quad (11)$$

т. е. давление в начале трубопровода должно быть в два раза больше давления у конца. Заменяя в формуле (10) величину p_2 по формуле (11) через $\frac{p_1}{2}$, получим:

$$d = b \left(\frac{17 T_1 q_{\text{век.}}^2}{\Delta p_1^2} \right)^{1/10}, \quad (12)$$

где

$$b = a \cdot 4^{1/10} = \left(\frac{4}{3 \cdot 4,69^2} \right)^{1/10}.$$

§ 4. Расчет мощности компрессора.

1. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС СЖАТИЯ. Работа компрессора состоит из трех циклов: 1) всасывание газа, 2) сжатие газа и 3) выталкивание газа в трубопровод.

Соответственно этим циклам совершаются работы L_1 , L_2 и L_3 , которые мы будем относить к 1 кг перекачиваемого газа. Предположим, что газ до компрессора находится при давлении p_0 и удельный объем его есть v_0 . После компрессора в начале трубопровода давление газа p_1 и удельный объем v_1 .

Полная работа L компрессора, затрачиваемая на перекачку 1 кг газа, очевидно равна:

$$L = L_2 + L_3 - L_1 \quad (13)$$

так как работа всасывания производится за счет наружного давления (напр. атмосферного). При этом имеем:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= p_0 v_0 \\ L_2 &= p_1 v_1 \\ L_3 &= - \int_{p_0}^{p_1} p dv \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из уравнения изотермы находим:

$$pv = p_0 v_0; \quad v = \frac{p_0 v_0}{p}; \quad dv = - \frac{p_0 v_0}{p^2} dp.$$

Внося это значение dv под интеграл (14) и производя интегрирование, находим:

$$L_2 = \int_{p_0}^{p_1} p_0 v_0 \frac{dp}{p} = p_0 v_0 \ln \frac{p_1}{p_0} \quad (15)$$

Внося в равенство (13) значения L_1 , L_2 и L_3 , получаем:

$$L = p_0 v_0 \ln \frac{p_1}{p_0} + p_1 v_1 - p_0 v_0.$$

Но по уравнению изотермы

$$p_1 v_1 = p_0 v_0,$$

таким образом

$$L = p_0 v_0 \ln \frac{p_1}{p_0} \quad (16)$$

Если компрессор перекачивает в секунду 1 кг газа, то секундная работа его (или мощность) будет равна:

$$W_{\text{из.}} = q_{\text{вес.}} \cdot L \quad (17)$$

Если весовой расход $q_{\text{вес.}}$ выразить через объемный q_0 , приведенный к давлению p_0 :

$$q_{\text{вес.}} = q_0 \gamma_0 = \frac{q_0}{v_0},$$

то получим

$$W_{\text{из.}} = q_{\text{вес.}} \cdot L = \frac{q_0}{v_0} \cdot p_0 v_0 \ln \frac{p_1}{p_0} = q_0 p_0 \ln \frac{p_1}{p_0} \quad (18)$$

Если площадь поршня обозначить через f , ход его через s и число рабочих ходов в минуту через n , то получим зависимость:

$$q_0 = fs \cdot \frac{n}{60}.$$

Внося это в последнее выражение для мощности, получаем:

$$W_{\text{из.}} = fs \cdot \frac{n}{60} \cdot p_0 \ln \frac{p_1}{p_0} \quad (19)$$

(в килограммо-метрах в секунду).

Выразим мощность в лошадиных силах, диаметр цилиндра d компрессора и ход s в метрах, а давления в атмосферах. Окончательно получим (с переходом от натуральных логарифмов к десятичным):

$$N_{\text{из.}} = 4,019 d^3 \cdot n s p_0 \lg \frac{p_1}{p_0} \quad (20)$$

Эта формула служит для определения размеров компрессора. Для определения мощности компрессора (двигателя) в лошадиных силах воспользуемся формулой (18):

$$W_{\text{из.}} = q_{\text{вес.}} \cdot p_0 v_0 \ln \frac{p_1}{p_0}$$

По формуле (8) задания (23) имеем:

$$v_0 = \frac{R_0 T_0}{p_0 \Delta}, \quad (21)$$

где T_0 — температура газа до входа в компрессор.

Итак по внесению этого имеем:

$$W_{\text{из.}} = q_{\text{вс.}} \cdot \frac{R_0 T_0}{\Delta} \ln \frac{p_1}{p_0}. \quad (22)$$

Окончательно, переходя к десятичным логарифмам:

$$N_{\text{из.}} = \frac{2,3 R_0}{75 \eta} \cdot \frac{T_0}{\Delta} \cdot q_{\text{вс.}} \cdot \ln \frac{p_1}{p_0} \approx \frac{0,9 \cdot T_0}{\eta \Delta} \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) q_{\text{вс.}}, \quad (23)$$

где $q_{\text{вс.}}$ — в килограммах в секунду. Переходя к приведенному объемному расходу, получим по формуле (10) задания 23:

$$\begin{aligned} N_{\text{из.}} &= \frac{2,3 \cdot R_0}{75 \eta} \cdot \frac{T_0}{\Delta} \cdot \frac{\Delta \cdot P}{R_0 T_0'} \cdot \lg \frac{p_1}{p_0} \cdot q = \\ &= \frac{1,1}{\eta} \cdot T_0 \lg \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \cdot q \end{aligned} \quad (24)$$

где q — в кубических метрах в секунду.

Изотермический процесс сжатия может иметь место только при весьма интенсивном охлаждении компрессора во время его работы.

2. Адиабатный процесс сжатия. В этом случае работы L_1 и L_2 имеют такие же выражения, как и в предыдущем случае. Для определения работы L_2 по формуле (14) воспользуемся уравнением адиабаты:

$$pv^k = p_0 v_0^k, \quad (25)$$

откуда

$$v = v_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}}; \quad dv = -\frac{1}{k} \cdot \frac{v_0}{p_0} \cdot \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{-k-1}{k}} \cdot dp. \quad (25')$$

Вносим это значение под интеграл (14), получаем:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{v_0}{k} \int_{p_0}^{p_1} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{-1}{k}} dp = \frac{v_0 p_0}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]_{p_0}^{p_1} = \\ &= \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение для L по формуле (13) будет теперь иметь вид:

$$L = \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + p_1 v_1 - p_0 v_0. \quad (27)$$

Из уравнения (25) имеем:

$$v_1 = v_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Следовательно,

$$p_1 v_1 = p_1 v_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} = p_1 v_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{-\frac{1}{k}} = p_0 v_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Внося это в равенство (27), получаем:

$$\begin{aligned} L &= p_0 v_0 \left\{ \frac{1}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right\} = \\ &= p_0 v_0 \left\{ \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - \frac{k}{k-1} \right\} = \\ &= p_0 v_0 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично равенству (18) далее имеем:

$$W_{\text{эл}} = q_0 p_0 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (29)$$

и аналогично (19):

$$W_{\text{эл}} = f s \cdot \frac{n}{60} \cdot p_0 \cdot \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (30)$$

Выражая мощность в лошадиных силах, диаметр и ход поршня в метрах и давление в атмосферах, получаем окончательно:

$$N_{\text{эл}} = 1,745 d^3 \cdot n s p_0 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (31)$$

Для адиабатного процесса сжатия формулы для мощности в лошадиных силах, аналогичные формулам (23) и (24), будут:

$$N_{\text{эл}} = \frac{0,391}{\eta} \cdot \frac{T_0}{\Delta} \cdot \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \cdot q_{\text{вс}}. \quad (32)$$

и

$$N_{\text{эл}} = \frac{0,478}{\eta} \cdot T_0 \cdot \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \cdot q. \quad (33)$$

Величина η во всех этих формулах (23), (24), (32) и (33) есть коэффициент полезного действия двигателя, обслуживающего компрессор и передачи к нему, причем $\eta \approx 0,9$.

Адиабатный процесс сжатия может иметь место только при полном отсутствии всякого теплообмена сжимаемого газа с внешней средой (компрессор не должен охлаждаться водой).

В том случае, когда охлаждение водой во время работы компрессора недостаточно, имеет место процесс сжатия промежуточный между изотермическим и адиабатным. В этом случае в формулах (32) и (33) показатель адиабаты k заменяется показателем политропы n и процесс сжатия называется *политропическим*.

§ 5. Пример расчета газопровода.

Рассмотрим пример, цитируемый в статье А. Степанова (журнал „Нефт. Хоз.“, № 9, 1926). Для этого примера данные заимствованы из опытов Тауля, произведенных им в Буффало.

Данные опыта Тауля таковы:

$$q = 1,738 \text{ м}^3/\text{сек. (приведенный расход)},$$

$$d = 0,2027 \text{ м},$$

$$p_1 = 14,76 \text{ кг/см}^2,$$

$$p_2 = 2,88 \text{ кг/см}^2,$$

$$\Delta = 0,64,$$

$$l = 112,7 \text{ км},$$

$$T = 273^\circ \text{ Ц.}$$

Газ Буффало в среднем имеет такой состав:

$$\text{CH}_4 - 80\%,$$

$$\text{C}_2\text{H}_6 - 15\%,$$

$$\text{N}_2 - 5\%.$$

Для CH_4 абсолютная вязкость по справочнику Ландольта-Бернштейна равна $\mu = 8,66 \cdot 10^{-7}$, в механической системе единиц. Предполагая процесс движения газа изотермическим, определим расход по формуле (9) Веймаута (задание 24). Имеем:

$$q = 3,825 \cdot 0,2027^{3/4} \sqrt{\frac{(14,76^2 - 2,88) \cdot 10^8}{112700 \cdot 273 \cdot 0,64}} = 1,76 \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}},$$

т. е. формула Веймаута дала результат на 1,3% больше действительной величины расхода. Согласование следует признать хорошим.

Определим теперь величину расхода для того же опыта по формуле (18) Блазиуса (задание 24). Имеем:

$$q = 0,48 \left(\frac{10^7}{8,66} \right)^{1/4} \cdot 0,2027^{3/4} \left[\frac{(14,76^2 - 2,88) \cdot 10^8}{112700 \cdot 273 \cdot 0,64^{3/4}} \right]^{1/2} \cong 2,3 \frac{\text{м}^3}{\text{сек.}}$$

По формуле Блазиуса результат получается почти на 30% больше действительного расхода. Отчасти это несоответствие можно объяснить отсутствием точных сведений о вязкости газа Буффало.

Формуле Веймаута следует отдать однако предпочтение в виду ее простоты и хорошего соответствия с действительностью, что объясняется опытной природой этой формулы.

Весовой расход в опыте Тауля равен:

$$q_{\text{в.с.}} = q_0 \cdot \gamma_0 = 1,738 \cdot 1,29 \cdot 0,64 = 1,435 \text{ кг/сек.},$$

(где 1,29 кг/м³ — уд. вес воздуха).

Предполагая, что сжатие в компрессоре производится от давления $p_2 = 2,88$ атм. до давления $p_1 = 14,76$ атм., рассчитываем его мощность в случае изотермического процесса (при $\eta = 0,9$). По формуле (23) имеем:

$$N_{\text{из.}} = \frac{0,9}{0,9} \cdot \frac{273}{0,64} \lg \left(\frac{14,76}{2,88} \right) \cdot 1,435 = 434 \text{ л. с.}$$

§ 6. Пример расчета трубопровода для перегретого пара.

Пусть давление перегретого пара в пароперегревателе $p_1 = 16$ атм. абс., при этом температура его $T_1 = 273 + 350 = 623$ и удельный объем v_1 по формуле Линде равен

$$v_1 = \frac{47,1 \cdot T_1}{p} = 0,016, \quad (34)$$

$$v_1 = \frac{47,1 \cdot 623}{15 \cdot 10\,000} = 0,016 = 0,603 \text{ м}^3/\text{кг}$$

и

$$\gamma_1 = 1,66 \text{ кг/м}^3.$$

Требуется передать пар к турбине на расстояние, равное 170 м ($l = 170$ м), с таким расчетом, чтобы потеря давления составила не больше 0,2 атм. Рассчитать диаметр паропровода и весовой расход пара при условии, что турбина обладает мощностью в 1000 л. с. и термический коэффициент полезного действия ее равен $\eta = 0,8$. По справочнику Hütte находим (см. „Перегретые пары“), что при давлении 16 атм. и при температуре 350°C теплосодержание в 1 кг пара равно 752 кал./кг. Мощность в 1000 л. с. эквивалентна

$$W = 1000 \text{ л. с.} = 75\,000 \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек.}} \right] = \frac{75\,000}{429} \left[\frac{\text{кал.}}{\text{сек.}} \right].$$

На самом деле должно быть затрачено в секунду:

$$\frac{75\,000}{429 \cdot \eta} = 219 \left[\frac{\text{кал.}}{\text{сек.}} \right].$$

Таким образом к турбине необходимо доставлять ежесекундно пара:

$$q_{\text{век.}} = \frac{219}{752} = 0,291 \text{ кг/сек.}$$

Далее из формулы (7) Веймаута (задание 24) для адиабатного потока имеем:

$$\alpha^{1/2} = \frac{q_{\text{век.}}}{6,64 \sqrt{\frac{p_1 \Delta k}{l(1+k)T_1} \left[p_1 - p_2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}} \quad (35)$$

Полагаем здесь:

$$\begin{aligned} p_1 &= 16 \cdot 10^4, \\ p_2 &= 15,8 \cdot 10^4, \\ k &= 1,30, \\ l &= 170, \\ q_{\text{век.}} &= 0,291, \\ T_1 &= 623 \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{\gamma_{\text{пар}}}{\gamma_{\text{возд.}}} = \frac{1,66 \cdot 623}{1,29 \cdot 16 \cdot 273} = 0,183,$$

так как при 16 атм. и при 623° воздух имеет уд. вес:

$$\gamma_{\text{возд.}} = 1,29 \cdot 16 \cdot \frac{273}{623}.$$

Внося эти данные в формулу (35), находим:

$$d = 0,157 \text{ м,}$$

т. е. около 16 см ($6\frac{1}{4}$ дм.).

Трубопровод должен быть изолирован для устранения теплопотерь.

ЗАДАНИЕ 26.

ДВИЖЕНИЕ СМЕСИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.

§ 1. Удельный вес смеси и уравнение ее состояния.

Предположим, что на 1 кг жидкости в смеси приходится η кг газа. Обозначим уд. вес жидкости через q , уд. вес газа через γ и уд. вес смеси через Θ . Возьмем 1 м³ смеси, — вес ее будет равен Θ кг. Из них на долю жидкого компонента падает:

$$\frac{\Theta}{1 + \eta} \text{ кг}$$

и на долю газового компонента:

$$\frac{\Theta}{1 + \eta} \cdot \eta \text{ кг.}$$

Так как объем равен весу, деленному на уд. вес, то объем жидкого компонента составляет:

$$\frac{\Theta}{1 + \eta} \cdot \frac{1}{q}$$

и объем газового компонента:

$$\frac{\Theta}{1 + \eta} \cdot \frac{\eta}{\gamma}$$

Сумма этих объемов равна 1 м³:

$$\frac{\Theta}{(1 + \eta)} \cdot \frac{1}{q} + \frac{\Theta \eta}{(1 + \eta) \gamma} = 1. \quad (1)$$

Отсюда получаем выражение для уд. веса смеси Θ через уд. веса его компонент и весовое их соотношение:

$$\Theta = \frac{1 + \eta}{\frac{1}{q} + \frac{\eta}{\gamma}}. \quad (2)$$

Газовый компонент смеси в общем случае подчиняется политропическому процессу и следовательно для него имеет место уравнение Клапейрона.

Из уравнения политропы имеем:

$$\gamma = \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \cdot \gamma_1 \quad (3)$$

внося это значение γ в уравнение (2), получаем:

$$\Theta = \frac{1 + \eta}{\frac{1}{q} + \frac{\eta}{\gamma_1} \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}}, \quad (4)$$

где p_1 и γ_1 — давление в начале трубопровода и соответствующий ему уд. вес газового компонента.

Выражение (4) представляет собой уравнение состояния смеси.

§ 2. Движение смеси по горизонтальному трубопроводу при изотермическом режиме.

Напишем выражение для потери напора на элементарной длине трубопровода dx в том предположении, что частицы жидкости и газа в смеси имеют одинаковые скорости (отсутствие проскальзывания):

$$dh = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{d^5} \cdot dx \text{ (уравнение Дарси-Вейсбаха),}$$

где $8 \cdot k = \lambda$ и Q — объемный расход.

Заменяя Q по формуле:

$$Q = \frac{Q_{\text{вс.}}}{\Theta}, \quad (5)$$

получим:

$$dh = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{dx}{\Theta^3}.$$

Кроме того имеем:

$$dh = -\frac{dp}{\Theta}.$$

Сравнивая эти два выражения для dh , получаем после сокращения на Θ :

$$-dp = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{\Theta_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{dx}{\Theta}. \quad (6)$$

В этом равенстве две величины p и Θ являются функциями от x (расстояние рассматриваемого элемента смеси от начала трубопровода). Присоединяя к равенству (6) уравнение состояния смеси (4), получаем два равенства для определения неизвестных p и Θ . Внося в (6) значение Θ из (4), находим:

$$-dp = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\frac{1}{q} + \frac{\eta}{\gamma_1} \left(\frac{p_1}{p} \right)^x}{1 + \eta}. \quad (7)$$

Особый интерес представляет изотермический процесс движения смеси, так как он наиболее часто отвечает действительным условиям. В самом деле, вследствие большой теплоемкости жидкого компонента и большого коэффициента теплопередачи температура газа будет меняться мало и будет весьма близка к температуре жидкости. Полагая в равенстве (7) для изотермического процесса $x = 1$, получаем:

$$-dp = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\frac{1}{q} + \frac{\eta}{\gamma_1} \cdot \frac{p_1}{p}}{1 + \eta} dx. \quad (8)$$

Из этого равенства и определяется p как функция x . При этом величину k для простоты можно полагать постоянной. Имеем:

$$-\frac{\pi^2 d^5 g}{64k \psi_{\text{век.}}^2} \cdot (1 + \eta) \cdot \frac{dp}{\frac{1}{q} + \frac{\eta}{\gamma_1} \cdot \frac{p_1}{p}} = dx$$

или

$$-\frac{\pi^2 g d^5 (1 + \eta) q}{64k \psi_{\text{век.}}^2} \cdot \frac{p dp}{p + \frac{\eta p_1}{\gamma_1}} = dx.$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\pi^2 \cdot g \cdot d^5 (1 + \eta) q}{64k \psi_{\text{век.}}^2} \\ a &= \frac{\eta p_1}{\gamma_1} = \frac{\eta \gamma p_1 R_0 T_1}{p_1 \Delta} = \frac{\eta \gamma R_0 T_1}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(см. формулу (8) задания 23), T_1 — температура в начале трубопровода. Получаем после внесения и интегрирования по p в пределах от p_1 до p_2 и по x в соответственных пределах от 0 до l :

$$-A \int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{p + a} = l$$

или, меняя пределы:

$$A = \int_{p_2}^{p_1} \frac{p dp}{p + a} = l.$$

Имеем:

$$\int_{p_2}^{p_1} \frac{p dp}{p + a} = \int_{p_2}^{p_1} \frac{p + a - a}{p + a} \cdot dp = \int_{p_2}^{p_1} dp - \int_{p_2}^{p_1} \frac{a dp}{p + a} = p_1 - p_2 - a \ln \frac{p_1 + a}{p_2 + a}.$$

Итак:

$$A (p_1 - p_2 - a \ln \frac{p_1 + a}{p_2 + a}) = l.$$

Отсюда и определяем значение весового расхода $Q_{\text{век.}}$ (по внесению значения A):

$$Q_{\text{век.}} = \sqrt{\frac{p_1 - p_2 - a \ln \frac{p_1 + a}{p_2 + a}}{l} \cdot \frac{\pi^2 g d^5 (1 + \eta) q}{64k}}. \quad (10)$$

Коэффициент сопротивления k следует определять из опытных наблюдений. В случае наличия относительного движения газового компонента смеси относительно жидкости (проскальзывание) численное значение k возрастает.

§ 3. Приближенная формула для случая движения смеси жидкостей и газа по горизонтальному трубопроводу при политропическом процессе.

Перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$\Theta = \frac{1+\eta}{\frac{1}{q} + \frac{\eta}{\gamma}} = \frac{(1+\eta) q \gamma}{1 + q \eta}. \quad (11)$$

Так как уд. вес газов ничтожен по сравнению с уд. весом жидкостей, то в знаменателе величиной γ можно пренебречь по сравнению с величиной $q \eta$.

После этого получаем:

$$\Theta \cong \frac{1+\eta}{\eta} \cdot \gamma. \quad (12)$$

Внося сюда значение γ из уравнения политропы (3), получим:

$$\Theta = \frac{1+\eta}{\eta} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot \gamma_1, \quad (13)$$

т. е. приближенное уравнение состояния смеси. Внося (13) в уравнение (6), находим:

$$-dp = \frac{64k}{\pi^2 g} \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\eta}{1+\eta} \cdot \left(\frac{p_2}{p} \right)^x \cdot \frac{1}{\gamma_1} dx$$

или

$$-\left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{x}} dp = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\eta}{1+\eta} \cdot \frac{1}{\gamma_1} \cdot dx. \quad (14)$$

Интегрируем левую часть равенства в пределах от p_1 до p_2 и правую от нуля до l :

$$-\int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{x}} dp = p_1 \int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{p}{p_1} \right) = \left| \frac{p_1^x}{1+x} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{x+1}{x}} \right|_{p_2}^{p_1} = \frac{p_1^x}{x+1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{x+1}{x}} \right].$$

Итак, равенство (14) после интегрирования принимает вид:

$$\frac{p_1^x}{1+x} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1+x}{x}} \right] = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\eta}{1+\eta} \cdot \frac{1}{\gamma_1} \cdot l.$$

Отсюда, разрешая относительно $Q_{\text{вс.}}$, находим:

$$Q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot g d^5 \cdot (1+\eta) \gamma_1 p_1^x}{64k \eta l (1+x)} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1+x}{x}} \right]} \quad (15)$$

Вносим сюда значение γ_1 по формуле (8) задания 23:

$$\gamma_1 = \frac{p_1 \Delta}{R_0 T_1};$$

находим:

$$Q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5 (1+\eta) \Delta p_1^x}{64k \eta l R_0 T_1 (1+x)} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1+x}{x}} \right]}. \quad (16)$$

В случае адиабатного режима величина κ заменяется величиной $k = \frac{c_p}{c_v}$. Для изотермического режима упрощенная формула принимает вид ($\kappa = 1$):

$$Q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{\pi^2 g d^5 (1 + \eta) \Delta}{128 k \eta R_0 T_1}} (p_1^2 - p_2^2), \quad (17)$$

где T_1 — температура в начале перекачки.

Упрощаем эту формулу:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{вс.}} &= C_i \cdot \sqrt{\frac{d^5 (1 + \eta) \Delta}{k \eta T_1}} (p_1^2 - p_2^2), \\ C_i &= \frac{\pi}{16} \sqrt{\frac{2}{29,27}} \approx 0,051. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

§ 4. Движение смеси жидкости и газа по вертикальной трубе при изотермическом режиме (эрлифт).

Для случая движения по вертикальной трубе уравнение Дарси-Вейсбаха будет:

$$dh = \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{d^5} dx + dz, \quad (19)$$

причем очевидно

$$dx = dz.$$

Внося в (19) dh по формуле

$$dh = -\frac{dp}{\theta}$$

и заменяя dx через dz , получим:

$$-\frac{dp}{\theta} = \left(\frac{64k}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{d^5} + 1 \right) dz.$$

Выражая Q через $\frac{Q_{\text{вс.}}}{\theta}$ и умножая все равенство на θ , имеем далее:

$$-dp = \left(\frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{1}{\theta} + \theta \right) dz.$$

Заменяя здесь θ по формуле (12) и полагая для изотермического процесса $\kappa = 1$, получаем:

$$-dp = \left(\frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \frac{p_1}{p} \cdot \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1 + \eta}{\eta} \cdot \frac{p}{p_1} \gamma_1 \right) dz$$

или

$$-\frac{dp}{\frac{B}{p} + bp} = dz, \quad (20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{64k}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q_{\text{вс.}}^2}{d^5} \cdot \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \frac{p_1}{\gamma_1} \\ b &= \frac{1 + \eta}{\eta} \cdot \frac{\gamma_1}{p_1} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Умножаем числитель и знаменатель левой части равенства (20) на p , получаем:

$$-\frac{p dp}{B + bp^2} = dz.$$

Интегрируем левую часть:

$$-\int_{p_1}^{p_2} \frac{p dp}{B + bp^2} = \frac{1}{2} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp^2}{B + bp^2} = \frac{1}{2b} \int_{p_1}^{p_2} \frac{d(B + bp^2)}{B + bp^2} = \frac{1}{2b} \ln \frac{B + bp_2^2}{B + bp_1^2}.$$

Интегрируя правую часть, имеем:

$$\int_0^l dz = l.$$

Итак:

$$\frac{1}{2b} \ln \frac{B + bp_2^2}{B + bp_1^2} = l$$

$$\frac{B + bp_2^2}{B + bp_1^2} = e^{2bl}.$$

Отсюда:

$$B = \frac{b(p_2^2 e^{2bl} - p_1^2)}{1 - e^{2bl}} \quad (22)$$

Из равенства (21) (первое) имеем:

$$Q_{\text{вс.}}^2 = \frac{\pi^2 d^3 (1 + \eta) \gamma_1 g}{64 \cdot k \eta p_1} = B \frac{\pi^2 d^3 (1 + \eta) \Delta \cdot g}{64 \cdot k \eta R_0 T_1}.$$

Внося сюда B из (22), находим равенство, из которого определяем весовой расход $Q_{\text{вс.}}$.

$$Q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot g \cdot d^3 (1 + \eta) b (p_2^2 e^{2bl} - p_1^2) \Delta}{64 k \eta R_0 T_1 (1 - e^{2bl})}} \quad (23)$$

где

$$b = \frac{1 + \eta}{\eta} \cdot \frac{\gamma_1}{p_1} = \frac{(1 + \eta) \Delta}{\eta R_0 \cdot T_1}.$$

Формула (23) нуждается в опытным определении значения k . Кроме того она не учитывает эффекта проскальзывания газового компонента смеси относительно увлекаемой им жидкости.

§ 5. Сопоставление полученных формул и выводы.

1) Если в выражении уд. веса смеси (2) заставить η стремиться к нулю, то смесь переходит в жидкость:

$$\eta \rightarrow 0 \text{ (смесь} \rightarrow \text{жидкость),}$$

если же η стремится к бесконечности, то смесь переходит в газ:

$$\eta \rightarrow \infty \text{ (смесь} \rightarrow \text{газ).}$$

Положив в формуле (10) η равным нулю, получим формулу:

$$Q_{\text{вс.}} = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi^2 g d^3 \cdot g}{64 k}} \quad (24)$$

которая представляет собой не что иное, как уравнение Дарси-Вейсбаха (для жидкости).

При $\eta = \infty$ формула (10) приводит к неопределенности.

2) Формула (12), представляющая собой упрощенное выражение для уд. веса смеси, становится неверной для малых значений η . В самом деле, в формуле (11) при малых η слагаемым γ в знаменателе пренебрегать нельзя. Таким образом все упрощенные формулы, полученные на основе допущения (12), будут верны только для значений η не очень малых.

Так, напр., для воды и воздуха при атмосферном давлении ошибка формулы (12) составит не более одного процента, только при условии, чтобы

$$\gamma + q\eta < 1,01 q\eta,$$

т. е.

$$q\eta > 100 \gamma,$$

откуда

$$\eta > 100 \frac{\gamma}{q} = 100 \frac{1,293}{1000} = 0,1293 \text{ кг/кг.}$$

Для больших значений η формулы, построенные на основе допущения (12), практически верны. В самом деле, полагая $\eta = \infty$, мы видим, что формула (18) переходит в уже известную нам формулу Веймаута (формула (8), задания 24) (при $k = \frac{\lambda}{8}$).

3) Найдем соотношение между весовыми расходами жидкости и газа при одинаковых условиях давления и одинаковых диаметрах. Для этого в формуле (10) положим $\eta = 0$ и в формуле (17) положим $\eta = \infty$; получим:

$$Q_{\text{жидк.}} = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{\pi^2 g d^5 \cdot q}{64 k}},$$

$$Q_{\text{газ.}} = \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{l} \cdot \frac{\pi^2 g d^5 \Delta}{128 k R_0 T_1}},$$

откуда

$$Q_{\text{газ.}} = \sqrt{\frac{(p_1 + p_2) \Delta}{2 R_0 T_1 q}} \cdot Q_{\text{жидк.}} \quad (25)$$

Пусть $p_1 = 27$ атм., $p_2 = 3$ атм., $T_1 = 300^\circ$, $\Delta = 1$ (воздух).

Имеем

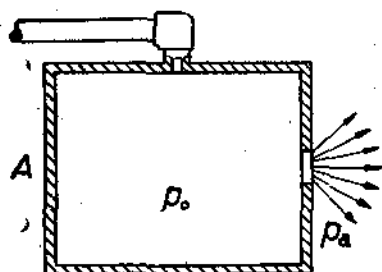
$$Q_{\text{газ.}} = \sqrt{\frac{300000 \cdot 1}{2 \cdot 29 \cdot 27 \cdot 300 \cdot 1000}} \cdot Q_{\text{жидк.}},$$

т. е. весовой расход газа составляет около $\frac{1}{8}$ от весового расхода жидкости при одинаковых условиях (давления и проходного сечения).

ТЕОРИЯ ИСТЕЧЕНИЯ ПАРОВ (НАСЫЩЕННЫХ).

§ 1. Истечение из отверстий.

Пусть мы имеем сосуд A (см. фиг. 120), в котором находится пар под некоторым давлением p_0 . Если в стенке этого сосуда имеется открытое отверстие, то пар будет истекать через него в наружную среду с очень большой скоростью.



Фиг. 120.

В то время как при падении давления удельный объем капальной жидкости остается неизменным, упругие жидкости (пары и газы) расширяются и следовательно удельный объем v увеличивается.

Закон изменения состояния, как известно из термодинамики (см., напр., Шюлле, „Техническая термодинамика“, стр. 81), представляется формулой:

$$pv^k = \text{const.}$$

Если рассматривать истечение при отсутствии специального охлаждения или нагревания выпускного отверстия, то изменение состояния будет адиабатическим, т. е.

$$pv^k = \text{const.} \quad (1)$$

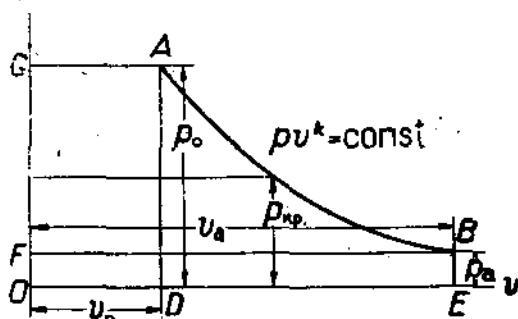
где k — показатель адиабаты

$$k = 1,135$$

для насыщенного водяного пара.

Изображая это графически, мы получим (см. фиг. 121) кривую AB .

На этой кривой ордината AD соответствует давлению пара в сосуде p_0 , а ордината BE — давлению наружной среды p_a . Отрезок абсциссы OD — удельный объем v_0 при давлении p_0 , отрезок BF — удельный объем v_a при давлении наружной среды p_a .



Фиг. 121.

$$p_0 v_0^k = p_a v_a^k = pv^k. \quad (2)$$

Найдем полную работу L , которая затрачивается на ускорение массы 1 кг пара.

На диаграмме эта работа представляется площадью $ABFG$.

С другой стороны, так как скорость пара возросла от нуля до некоторой величины w , то приращение живой силы массы 1 кг будет равно:

$$\frac{w^2}{2g}$$

Приравнявая приращение живой силы работе, затраченной на ускорение струи, имеем:

$$L = \frac{w^2}{2g}, \quad (3)$$

откуда

$$w = \sqrt{2gL}. \quad (4)$$

Сопоставляя эту формулу с выражением (5) (задание 19), мы видим, что при истечении жидкости из отверстий мы имеем:

$$w = \sqrt{2gh},$$

где h — постоянный напор.

Таким образом в случае газов напору соответствует располагаемая работа. Располагаемая работа может быть представлена как сумма площадей $AGFB$ и $OFBE$ минус площадь $GODA$, т. е.

$$L = \int_{v_0}^{p_a} v dp - p_0 v_0 + p_a v_a,$$

так как из уравнения (2) мы имеем:

$$v = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}} v_0, \quad (5)$$

то

$$\left. \begin{aligned} L &= v_0 \int_{p_0}^{p_a} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}} dp - (p_0 v_0 - p_a v_a) = \\ &= \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Приравнявая выражения (6) и (3), находим скорость истечения у выхода:

$$w = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (7)$$

Секундный весовой расход будет равен произведению скорости на площадь поперечного сечения и на уд. вес, т. е.

$$G = F \cdot w \cdot \gamma.$$

или

$$G = F w \frac{1}{v_a}. \quad (8)$$

Внося в формулу (8) величины w из соотношения (7), а v_a из (5), имеем окончательно:

$$G = F \sqrt{\frac{2gkp_0}{(k-1)v_0} \left[\left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (9)$$

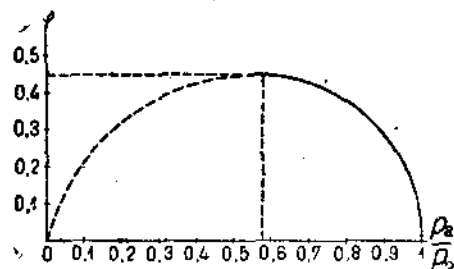
Если обозначить через φ выражение

$$\varphi = \sqrt{\frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \quad (10)$$

то весовой расход мы получим в форме:

$$G = F \varphi \sqrt{2g \frac{p_0}{v_0}}. \quad (11)$$

Сохраняя постоянным внутреннее давление p_0 , построим зависимость φ от отношения $\frac{p_a}{p_0}$ (см. фиг. 122).



Фиг. 122.

Опыты показали, что при увеличении разности давлений внешнего p_a и внутреннего p_0 расход возрастает до некоторого предельного максимального значения $G_{\max}$. Анализируя выражение (10), мы видим, что последнее имеет максимум при

$$\left(\frac{p_a}{p_0} \right)_{\text{кр.}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (12)$$

причем в этом случае

$$\varphi_{\max} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \quad (13)$$

и следовательно весовой расход будет равен

$$G_{\max} = F \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2gkp_0}{(k+1)v_0}}. \quad (14)$$

Если на диаграмме (см. фиг. 121), представляющей работу расширения пара, нанести критическое значение давления p_a , определяемого формулой (12), то заштрихованная часть представит работу расширения, перешедшую в кинетическую энергию пара.

Итак, если давление пара в устье упадет до величины критического давления, то при этом мы будем иметь максимальный расход и максимальную скорость.

С этого момента давление пара в устье остается постоянным, как бы ни понижалось внешнее противодействие p_a . Поясним это на примере:

Для сухого насыщенного пара

$$k = 1,135,$$

и следовательно,

$$\left(\frac{p_a}{p_0} \right)_{\text{кр.}} = 0,577. \quad (15)$$

Найдем максимальную скорость, соответствующую критическому давлению. Внося в формулу (7) выражение (12), имеем:

$$w_{\text{крит.}} = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} p_0 v_0} \quad (16)$$

Кроме того, так как

$$p_0 v_0 = p_{\text{крит.}} v_{\text{крит.}},$$

т. е.

$$v_0 = v_{\text{крит.}} \left(\frac{p_{\text{крит.}}}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}},$$

или, в силу формулы (12),

$$v_0 = v_{\text{крит.}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (17)$$

Таким образом

$$p_{\text{крит.}} v_{\text{крит.}} = p_0 v_0 \cdot \frac{2}{k+1}.$$

Отсюда выражение (16) примет вид:

$$w_{\text{крит.}} = \sqrt{g k p_{\text{крит.}} v_{\text{крит.}}} \quad (18)$$

Последнее выражение тождественно с величиной скорости звука в паре в том состоянии, в котором он находится в отверстии.

Для сухого насыщенного пара при $k = 1,135$ выражение (16) даст:

$$w_{\text{крит.}} = \sqrt{2 \cdot \frac{9,81 \cdot 1,135}{2,135} p_0 v_0} = 32,3 \sqrt{p_0 v_0} \quad (19)$$

В разобранном выше примере при $p_0 = 10$ атм. и

$$v_0 = \frac{1}{\gamma} = \frac{10^6}{5,11} \text{ см}^3/\text{кг}$$

имеем:

$$w_{\text{крит.}} = 32,3 \sqrt{\frac{10^7}{5,11}}.$$

Если давление внутри сосуда $p_0 = 10$ атм. и $p_a = 4$ атм., то давление в устье будет равно

$$(p_a)_{\text{крит.}} = 0,577 \cdot 10 = 5,77 \text{ атм.},$$

причем остается тем же, если внешнее противодавление p_a упадет до 1 атм. Расход пара через отверстие 1 см^2 будет равен

$$G = \left(\frac{2}{2,135} \right)^{\frac{1}{0,135}} \sqrt{\frac{2,981 \cdot 1,135}{2,135}} \sqrt{\frac{10 \cdot 5,11}{10^6}},$$

где

$$v_0 = \frac{1}{\gamma} \text{ и } \gamma = \frac{5,11}{10^6} \text{ кг/см}^3,$$

отсюда

$$G = 0,1423 \text{ кг/сек.}$$

§ 2. Истечение из насадок.

То обстоятельство, что лишь небольшая часть располагаемой работы расширения переходит в кинетическую энергию пара при истечении пара из отверстий, заставило искать такое сопло (насадку), где эта работа могла бы быть использована полностью.

Задачу эту решил Де-Лаваль. Его сопло представляет трубку, имеющую плавное сужение при входе и постепенное уширение к выходу (см. фиг. 123). Давление в сечении $I-I$ падает до критического значения, которое

для насыщенного пара равно $0,577 p_0$, при этом часть располагаемой работы переходит в живую силу потока. В дальнейшем на пути от сечения $I-I$ до сечения $II-II$ пар может расширяться до величины внешнего противодавления p_0 . Однако для достижения такого расширения форма сопла должна

иметь уширение немногим более 10° . Выведем расчетные формулы для сопла, пренебрегая при этом трением струи о внутреннюю поверхность стенки.

Итак мы имеем:

$$p_0 v_0^k = p_{\text{крит.}} v_{\text{крит.}}^k = p_x v_x^k = p_x v_x^k.$$

Здесь p_x и v_x — давление и удельный объем пара в сечении $x-x$.

Пусть площадь поперечного сечения $I-I$ равна $f_{\text{крит.}}$, а сечение $x-x$ равно f_x . Весовой расход пара сечения $I-I$ согласно формуле (14) будет равен:

$$G = f_{\text{крит.}} a \sqrt{\frac{p_0}{v_0}}, \quad (20)$$

где коэффициент

$$a = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2gk}{k+1}} \quad (21)$$

для насыщенного пара имеет значение:

$$a = 0,020. \quad (22)$$

Расход в сечении $x-x$ и $I-I$ равен также G , так как если бы количество пара, входящего в сопло, не равнялось количеству выходящего, то либо где-нибудь в сопле происходило бы накопление пара, либо образовывалось разрежение.

Обозначив через $w_{\text{крит.}}$ и w_x скорости пара в сечениях $I-I$ и $x-x$ и через v_0 и v_x соответственные удельные объемы, напомним два выражения для расхода в этих сечениях:

$$\frac{f_{\text{крит.}} w_{\text{крит.}}}{v_{\text{крит.}}} = \frac{f_x w_x}{v_x}. \quad (23)$$

Отсюда имеем:

$$f_x = f_{\text{крит.}} \frac{w_{\text{крит.}} v_x}{w_x v_{\text{крит.}}}$$

Последнее выражение в силу равенства (4) примет вид:

$$f_x = f_{\text{крит.}} \frac{v_x}{v_{\text{крит.}}} \sqrt{\frac{L_{\text{крит.}}}{L_x}}, \quad (24)$$

где через $L_{\text{крит.}}$ и L_x обозначены соответственно располагаемые работы расширения от давления p_0 до $p_{\text{крит.}}$ и от p_0 до p_x .

При этом в силу равенств (6) и (5) имеем:

$$L_{\text{крит.}} = \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[1 - \frac{p_{\text{крит.}} v_{\text{крит.}}}{p_0 v_0} \right],$$

$$L_x = \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[1 - \frac{p_x v_x}{p_0 v_0} \right]$$

и, следовательно,

$$\frac{L_{\text{крит.}}}{L_x} = \frac{1 - \frac{p_{\text{крит.}} v_{\text{крит.}}}{p_0 v_0}}{1 - \frac{p_x v_x}{p_0 v_0}}$$

Пользуясь равенствами (15) и (17), имеем:

$$\frac{L_{\text{крит.}}}{L_x} = \frac{1 - \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{-1}{k-1}}}{1 - \frac{p_x v_x}{p_0 v_0}}$$

или иначе:

$$\frac{L_{\text{крит.}}}{L_x} = \frac{\frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{p_x v_x}{p_0 v_0}}. \quad (25)$$

Внося соотношение (25) в уравнение (24), получим:

$$f_x = f_{\text{крит.}} \frac{v_x}{v_{\text{крит.}}} \sqrt{\frac{\frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{p_x v_x}{p_0 v_0}}}. \quad (26)$$

Заменим, наконец, в этом равенстве

$$\frac{v_x}{v_{\text{крит.}}} = \frac{v_x}{v_0} \cdot \frac{v_0}{v_{\text{крит.}}} = \left(\frac{p_0}{p_x} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

и

$$\frac{v_x}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p_x} \right)^{\frac{1}{k}},$$

Найдем:

$$f_{\pi} = f_{\text{крит.}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}}{\sqrt{\left(\frac{p_{\pi}}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_{\pi}}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}}} \quad (27)$$

Нетрудно убедиться, что с помощью формул (10) и (13) выражение (27) приводится к виду:

$$\frac{f_{\pi}}{f_{\text{крит.}}} = \frac{\varphi_{\text{max}}}{\varphi_{\pi}} \quad (28)$$

Если нанести на графике кривую, представляющую изменение коэффициента φ в зависимости от величины расширения (см. фиг. 122), то, задаваясь произвольной степенью расширения $\frac{p_{\pi}}{p_0}$, мы находим по графику соответственное значение φ и по формуле (28) вычислим величину площади поперечного сечения.

Если сопло имеет форму, согласную с приведенной выше теорией, то скорость пара у выхода будет определяться формулой (7).

Пример. Пусть давление в сосуде будет равно 10 атм., противодавление 4 атм., найти отношение площади выходного отверстия сопла f_{Π} к площади горловины $f_{\text{крит.}}$.

Так как в рассматриваемом случае отношение

$$\frac{p_{\pi}}{p_0} = \frac{4}{10} = 0,4,$$

то по графику (фиг. 122) находим $\varphi = 0,41$ и $\varphi_{\text{крит.}} = 0,45$, следовательно,

$$\frac{f_{\Pi}}{f_{\text{крит.}}} = \frac{0,45}{0,41} \cong 1,1.$$

При этом скорость истечения будет равна:

$$\begin{aligned} w_{\Pi} &= \sqrt{2 \cdot \frac{981 \cdot 1,135}{0,135} (10 \cdot 0,1993 - 4 \cdot 0,4708) \cdot 10^6} = \\ &= 42\,600 \text{ см/сек.} = 426 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 28.

РАСЧЕТ ПАРОПРОВОДОВ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА.

§ 1. Уравнение состояния пара.

Несмотря на весьма широкое распространение, которое получили в промышленности паропроводы, вопрос о расчете трубопроводов, передающих насыщенный пар, не получил строгого математического оформления.

На пути аналитического разрешения проблемы трения в паропроводных трубах стоит не мало препятствий. Сама механическая

и термодинамическая обстановка, сопровождающая движение пара в трубе, настолько сложна и запутана, что попытки теоретических построений либо приводят к системе неразрешимых уравнений, либо дают сложные формулы, негодные для практического пользования.

В самом деле, пусть в паропровод поступает насыщенный пар, причем через p , и T , обозначены давление и температура, соответствующие насыщению. Если рассматривать движение пара при отсутствии теплопотерь (адиабатное изменение состояния), то при понижении давления вследствие потери напора, пар из насыщенного состояния будет переходить в перегретый. Короче говоря, сохраняя постоянную температуру T , пар перейдет границу насыщения.

В других случаях можно встретиться с обратной картиной. При наличии большой теплоотдачи температура перегретого пара может упасть до температуры T_s — температуры насыщения.

Зависимость потери напора при различных состояниях пара от степени шероховатости труб и тепловых свойств изоляции не может, вообще говоря, быть представлена в виде одного универсального уравнения.

Для того чтобы охарактеризовать физическое состояние насыщенного пара, были предложены формулы, связывающие давление p , и температуру T , соответствующие границе насыщения.

Общий вид этих формул таков:

$$\lg p_s = A - \frac{B}{T_s + 273}; \quad (1)$$

здесь для температур от 20°C до 100°C

$$A = 5,9778; B = 2224,4;$$

для температур между 100° и 200°C :

$$A = 5,6485; B = 2101,1$$

и, наконец, для температур от 200° до 350°C :

$$A = 5,4514; B = 2010,8.$$

Связь между удельным объемом v_s и давлением p с большой точностью была представлена Моллье:

$$v_s = \frac{1,7235}{p^{\frac{15}{16}}}. \quad (2)$$

Отсюда имеем зависимость уд. веса γ_s от давления:

$$\gamma_s = 0,5802 p^{\frac{15}{16}}. \quad (3)$$

§ 2. Явление трения в паропроводах.

При установившемся движении паров и газов по трубам, так же как и при движении реальных жидкостей, имеет место потеря гидродинамического давления в связи с трением о стенки труб.

Сопротивление трения вызывается не только шероховатостью стенок труб, но и внутренним трением между частицами пара.

Следуя методу Шюлле („Техническая термодинамика“, изд-во „Техникум“, М. 1922 г.), сопоставим движение пара в двух круглых трубках различного диаметра. При одних и тех же условиях один килограмм пара будет соприкасаться с большей поверхностью в трубе меньшего диаметра и очевидно давление его будет падать более сильно, чем если бы движение его происходило в трубе большего диаметра.

Из сказанного следует, что потеря давления обратно-пропорциональна диаметру трубопровода.

Один килограмм пара занимает объем $v = \frac{1}{\gamma} = \pi \frac{d^2}{4} l'$.

Отсюда

$$l' = \frac{1}{\gamma \frac{\pi d^2}{4}}$$

Поверхность трубы s' , заключающей в себе массу 1 кг пара, будет равна

$$s' = \pi d l' = \frac{4}{\gamma d}$$

Если через τ обозначить силу сопротивления, отнесенную к единице поверхности трубы, то сила сопротивления передвижению 1 кг пара

$$F = \tau \cdot s' = \frac{4\tau}{\gamma d}$$

Если через l обозначить путь, пройденный паром, то произведение Fl будет характеризовать работу силы трения на этом пути L :

$$L = \frac{4\tau}{\gamma} \cdot \frac{l}{d} \quad (4)$$

Пусть при этом давление пара упадет от p_1 до некоторой величины p_2 . При небольших падениях давления можно допустить, что работа расширения незначительна, и учитывать только работу разности давлений:

$$L = (p_1 - p_2) v = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad (5)$$

приравнявая уравнения (4) и (5) друг другу, найдем после сокращения на γ :

$$p_1 - p_2 = 4\tau \frac{l}{d} \quad (6)$$

Величину силы удельного сопротивления τ определяют из опыта. Многочисленные эксперименты над движением пара показали, что τ возрастает приблизительно пропорционально квадрату скорости.

Более точные опыты, произведенные Фришче над воздухом, показали, что τ прямо-пропорционально скорости в степени 1,852,

уд. весу в степени 0,852 и обратно-пропорционально диаметру в степени 0,269. Итак,

$$4\tau = \frac{aw^{1,852} \gamma^{0,852}}{d^{0,269}}. \quad (7)$$

Внося это выражение в соотношение (6), получим:

$$p_1 - p_2 = \frac{aw^{1,852} \gamma^{0,852}}{d^{0,269}} \cdot \frac{l}{d},$$

или иначе:

$$p_1 - p_2 = \beta \frac{l}{d} w^2, \quad (8)$$

где

$$\beta = \frac{a}{(\gamma w)^{0,148} d^{0,269}}. \quad (9)$$

Формулу (8) можно представить в форме Дарси-Вейсбаха, а именно:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}. \quad (10)$$

При этом между коэффициентом сопротивления λ и величиной β получается зависимость:

$$\beta = \frac{\lambda}{2g}. \quad (11)$$

§ 3. Расчетные формулы.

Для расчета паропроводов чаще всего употребляют формулу Фришце, причем значение постоянной a принимают равной

$$a = \frac{9,4}{10^8}.$$

При этом длину и диаметры трубопровода выражают в метрах, давление p кг/см², скорость в м/сек. и уд. вес в кг/м³.

Вставляя это значение коэффициента a в формулу (9), получим:

$$\beta = \frac{9,4}{10^8 (\gamma w)^{0,148} d^{0,269}}. \quad (12)$$

Потеря давления в этом случае подсчитывается по формуле (8).

Пример. Определить потерю давления в 4-дм. паропроводе на длине 100 м, если известно, что $p_1 = 5$ изб. атм.; $w = 40$ м/сек. Давлению 5 изб. атм. соответствует $\gamma = 3,10$ кг/м³.

По формуле (12) имеем:

$$\beta = \frac{9,4}{10^8 (3,1 \cdot 40)^{0,148} 1,0^{0,269}} = \frac{8,6}{10^6}$$

и, следовательно,

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{8,6}{10^6} \cdot \frac{100}{0,1} \cdot 40^2 = 0,138,$$

откуда

$$p_1 - p_2 = 0,138 \cdot 3,1 = 0,43 \text{ атм.}$$

В 4-м немецком издании „Технической термодинамики“ Шюлле (Берлин 1923 г.) приведены опытные данные для коэффициента сопротивления λ (формула 10). Эмпирическая формула Омбека дает λ в зависимости от параметра Рейнольдса Re в следующем виде:

$$\lambda = \frac{0,242}{(Re)^{0,224}}, \quad (13)$$

причем

$$Re = \frac{wd}{\nu},$$

где ν — кинематическая вязкость насыщенного пара при соответствующей температуре определяется из уравнения:

$$\nu = \frac{1}{10} \frac{\mu_{абс.}}{\gamma} \quad (14)$$

и $\mu_{абс.}$ — абсолютная вязкость пара; в таблице 12 даны значения $10^7 \mu_{абс.}$

Таблица 12.

Температура	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$10^7 \mu_{абс.}$	900	942	983	1025	1067	1108	1150	1192	1234	1275
Температура	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
$10^7 \mu_{абс.}$	1317	1359	1400	1442	1483	1525	1567	1609	1651	1692
Температура	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
$10^7 \mu_{абс.}$	1734	1776	1817	1859	1901	1942	1984	2026	2068	2109
Температура	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
$10^7 \mu_{абс.}$	2151	2193	2234	2276	2318	2360	2401	2443	2485	2526

Пример. Найти потерю давления для условий предыдущей задачи.

Давлению 5 изб. атм. соответствует температура $158,1^\circ \text{C}$, при этом вязкость по приведенной выше таблице

$$10^7 \mu_{абс.} = 1559,$$

откуда по формуле (14)

$$\nu = \frac{1}{10} \frac{1559}{10^7} \cdot \frac{1}{3,10} = \frac{502}{10^8} \left(\frac{\text{м}^2}{\text{сек.}} \right)$$

и, следовательно,

$$Re = \frac{40 \cdot 0,1}{502} \cdot 10^8 = 800\,000.$$

Внося это в формулу (13), имеем:

$$\lambda = \frac{0,242}{800\,000^{0,224}} = \frac{0,242}{21,05} = 0,0115.$$

Подставив значение коэффициента сопротивления в формулу (10), получим:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = 0,0115 \cdot \frac{100}{0,1} \cdot \frac{40^3}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{1}{10^4} = 0,0935,$$

откуда искомое падение давления будет равно:

$$p_1 - p_2 = 0,0935 \cdot 3,10 = 0,290 \text{ кг/см}^2.$$

Зависимость коэффициента вязкости $\mu \left(\frac{\text{кг/сек.}}{\text{м}^2} \right)$ от абсолютной температуры была дана Сузерлендом в следующем виде:

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{1 + \frac{873}{273}}{1 + \frac{T}{273}} \sqrt{\frac{T}{273}} \quad (\text{в техн. системе}), \quad (15)$$

где $10^8 \mu_0 = 87$ и T — абсолютная температура пара.

Для разобранный выше примера $T = 273 + 158 = 431^\circ$ и $10^8 \mu = 148,5$.

Чтобы перейти от абсолютных вязкостей к кинематическим, пользуются формулой

$$\nu = \frac{\mu g}{\gamma}, \quad (16)$$

где g — ускорение силы тяжести ($9,81 \text{ м/сек}^2$) и γ — уд. вес пара (кг/м^3).

В нашем случае $\gamma = 3,10 \text{ кг/м}^3$ и, следовательно,

$$\nu = \frac{148,5 \cdot 9,81}{10^8 \cdot 3,1} = \frac{470}{10^8} \left(\frac{\text{м}^2}{\text{сек.}} \right).$$

Подсчитываем параметр Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{40 \cdot 0,1 - 10^8}{470} = 850\,000,$$

откуда

$$\lambda = \frac{0,242}{850\,000^{0,224}} = 0,0113,$$

в то время как в предыдущем случае $\lambda = 0,0115$.

Столь незначительная разница в полученных результатах дает нам право пользоваться формулами (15) и (16) наравне с таблицей.

В книге проф. С. К. Конюхова „Паропроводы, газопроводы, водопроводы, воздухопроводы и их расчет“ (М. 1927 г.) приведены, кроме обычных формул, теории расчета паропровода по Саксу и Капни. Однако формулы, выведенные на основе этих теорий, содержат множество коэффициентов, вычисление которых составляет предмет отдельных исследований, и поэтому формулы неудобны при практических расчетах.

В своем труде проф. Конюхов приводит часто рекомендуемую формулу для расчета паропроводов:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 12,5 \beta \frac{G^2 p_1 l}{D^5 \cdot p_m}, \quad (17)$$

где

$$\beta = \frac{2,86}{G^{0,148}}, \quad (18)$$

$G = 3600 \frac{\pi d^2}{4} w \cdot \gamma$ — весовой расход пара в кг/час ,

p_m — среднее давление в паропроводе,

D — диаметр трубы в миллиметрах.

Формула эта пригодна для небольших потерь давления. В этом случае с большим приближением можно положить

$$p_1 v_1 = p_m v_m = p_m \frac{1}{\gamma_m}$$

и, следовательно,

$$\Delta p = 12,5 \cdot \beta \cdot \frac{G^2 l}{D^5 \cdot \gamma_m} \quad (19)$$

Пример. Найти потерю давления по формуле (19) по данным первой задачи.

Найдем весовой расход G :

$$G = 3600 \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} 40 \cdot 3,1 = 3500 \text{ кг/час.}$$

По формуле (18) найдем:

$$\beta = \frac{2,86}{3500^{0,148}} = \frac{2,86}{3,35} = 0,855.$$

Пользуясь формулой (19), найдем потерю давления:

$$\Delta p = 12,5 \cdot 0,855 \cdot \frac{3500^2 \cdot 100}{100^5 \cdot 3,1} = 0,42 \text{ кг/см}^2.$$

Сопоставляя результат, полученный по формуле (19) с потерей давления, найденной по формулам (8) и (12), видим, что числовые ответы почти совпадают.

В одном из последних изданий Hütte приведена формула потери давления для трубопроводов при давлении от 4 до 10 атм.

$$\Delta p = 24,5 \beta \frac{G^2 l}{p D^5}, \quad (20)$$

где β — берется по формуле (18).

Пример. Вычислить потерю давления по формуле (20), исходя из данных первой задачи.

$$\Delta p = 24,5 \cdot 0,855 \cdot \frac{3500^2 \cdot 100}{6 \cdot 100^5} = 0,423 \text{ кг/см}^2.$$

Сравнивая этот ответ с предыдущим, находим, что формула (20) достаточно удовлетворительно решает задачу о потере напора в паропроводе.

В заключение приведем старую мюнхенскую формулу (по Эберле):

$$\Delta p = \frac{10,5}{10^5} \gamma \frac{l}{D} w^2. \quad (21)$$

Пример. Определить изменение давления в паропроводе (см. задачу первую) по формуле (21).

$$\Delta p = \frac{10,5}{10^5} 3,1 \frac{100}{0,1} 40^2 = 0,52 \text{ кг/см}^2.$$

§ 4. Местные потери давления в паропроводах.

Подсчет потерь давления в задвижках, кранах, коленах и компенсаторах производится по тем же формулам, что и прямые трубопроводы, причем вместо длины L — прямого участка, подставляется L_0 — эквивалентная длина, соответствующая данному сопротивлению.

Так, напр., при прохождении пара через стопорный вентиль с проходным сечением, равным сечению трубопровода, потеря давления эквивалентна потере давления в прямой трубе длиной 16,4 м (по опытам Эберле).

По данным проф. Конюхова эквивалентная длина для того же вентиля определяется по формуле:

$$L_0 = 116(1,2 + \sqrt{10d})d.$$

Для паровой запорной задвижки Ферранти в вышеупомянутой книге приведены следующие данные:

$$d = 200 - 275 - 300 \text{ мм в свету.}$$

$$L_0 = 34,8 - 58,6 - 71,8 \text{ м.}$$

Для параллельной задвижки Гопкинсона с полным проходным сечением

$$d = 200 - 300 \text{ мм в свету.}$$

$$L_0 = 2,45 - 2,12 \text{ м.}$$

Для тройников $300 \times 300 \times 275 \text{ мм}$ $L_0 = 117,5 \text{ м.}$

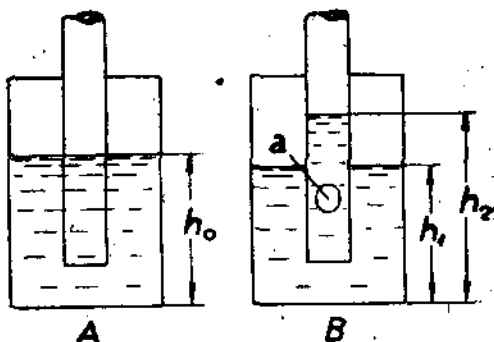
Потеря давления в лирообразных компенсаторах может быть подсчитана по сопротивлению трубы того же диаметра и длины с надбавкой 60%.

ЗАДАНИЕ 20.

ЭРЛИФТ (ВОЗДУШНЫЙ ПОДЪЕМНИК ЖИДКОСТИ).

§ 1. Схема устройства.

Действие воздушного подъемника (эрлифта) основано, по мнению многих авторов, на следующем положении: если в бак, наполненный жидкостью, погрузить открытую с обоих концов трубу (фиг. 124, А), то положение уровней как в трубе, так и в баке будет одинаково (h_0) до тех пор, пока жидкость остается однородной. Введенный в трубу с нижнего конца пузырек воздуха a (фиг. 124, В) нарушит прежние условия равновесия. В трубе, в присутствии пузырька воздуха, образуется смесь, уд. вес которой меньше уд. веса жидкости, находящейся в баке, и, по закону равновесия гидростатических давлений в сообщающихся сосудах, уро-



Фиг. 124.

вень в трубе повысится до некоторой высоты h_2 , причем $h_2 > h_1$, где h_1 — уровень жидкости в баке. При непрерывной подаче воздуха уд. вес смеси в трубе будет уменьшаться, а уровень в связи с этим, будет непрерывно возрастать. Таким способом можно получить, при достаточном количестве подаваемого воздуха, перелив жидкости через верхний конец трубы. Отсюда вполне очевидно, что действие воздушного подъемника основано на создании разности уд. веса жидкости в двух сообщающихся сосудах. Указанным способом можно поднимать жидкость на значительную высоту, превышающую 1000 м.

Начало открытия такого способа относится к 1797 г. и принадлежит германскому горному инженеру К. Э. Лешеру.

Широкое практическое применение эрлифта нужно считать с 1892 г.; к этому году относится предложенная доктором Юлием Поле простейшая конструкция эрлифта (фиг. 125).

Воздушные подъемники своему распространению обязаны целым рядом преимуществ по сравнению с поршневыми насосами.

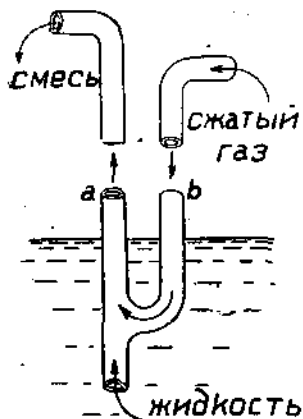
Отсутствие движущихся частей (поршни, клапана и т. п.) делает воздушный подъемник незаменимым насосом при подъеме загрязненных жидкостей, жидкостей, перемешанных с песком и другими твердыми частями.

В настоящее время эрлифт применяется в самых разнообразных отраслях народного хозяйства: на заводах и фабриках при перекачке жидкостей и кислот, в предприятиях по водоснабжению городов, железных дорог, но главным образом в нефтяной промышленности при откачке нефти из недр земли.

Несмотря на столь широкое применение и значительную давность (143 года) — с одной стороны, простоту конструкции — с другой, действие его остается до сих пор мало объясненным и до настоящего времени имеющиеся теории как в иностранной литературе, так и в нашей не охватывают всей совокупности явлений, происходящих в эрлифте; формулы, даваемые этими теориями, значительно расходятся с действительностью и не могут служить в качестве точных расчетных формул. Эмпирические формулы также не соответствуют действительности и дают только весьма грубые приближения. Классической теорией эрлифта является теория Ганса Лоренца — нижеприведенная.

В настоящее время из всех типов эрлифта преобладают три системы: система Поле-Мамут, Саундерса и центральная система.

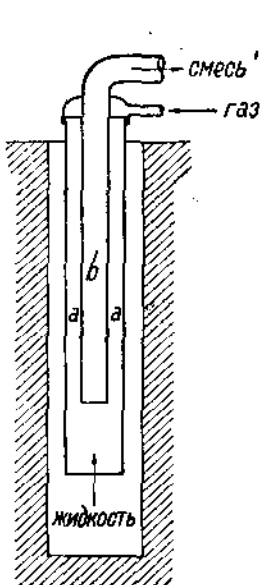
1. Система Поле-Мамут насос — применяется главным образом для водяных колодцев и скважин с постоянным дебитом и постоянным уровнем жидкости в них. Устройство ясно из фиг. 125. Подъемная труба a и подводящая воздух b связаны друг с другом камерой смещения (с), так называемым башмаком.



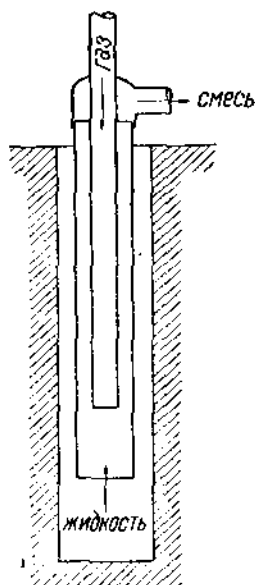
Фиг. 125.

Недостатком этой системы является необходимость одновременного спуска и подъема двух колонн труб, что создает значительные затруднения при установке насоса, в особенности, когда приходится изменять положения труб в зависимости от уровня жидкости в скважине.

2. Система Саундерса (1898 г., фиг. 126) применяется там, где диаметр скважины позволяет опустить два concentрических ряда труб, и там, где происходит изменение как дебита, так и уровня жидкости в скважине, т. е. где требуется изменять глубину погружения подъемной трубы. Воздух в этой системе движется в кольцевом пространстве *a*, а смесь жидкости с воздухом движется по центральной трубе *b*. Эта система применяется в Баку.



Фиг. 126.



Фиг. 127.

3. Центральная система. Воздух движется по центральной трубе (фиг. 127), эмульсированная жидкость — в межтрубном пространстве. При значительном количестве песка, который движется вместе с поднимаемой жидкостью, эта система почти не пригодна, так как песок быстро стачивает соединительные муфты центральной воздушной трубы, в результате чего может произойти обрыв труб. Центральная система принята на американских промыслах.

§ 2. Теория проф. Г. Лоренца.

В основу теории Г. Лоренца положено:

1. Установившееся движение смеси (жидкости и воздуха) в подъемной трубе.

2. Расширение воздуха в подъемной трубе происходит изотермически.

3. Потери энергии в подъемной трубе равны потерям скоростного напора, потерям на трение смеси при ее движении в подъемной трубе.

4. Высота стояния жидкости в скважине столь значительна, что давление компрессора (насоса, подающего воздух) может быть поднято по желанию.

При работе эрлифта устанавливается в скважине некоторый постоянный уровень, так называемый динамический уровень.

Введем обозначения:

- G_1 — вес нагнетаемого воздуха в единицу времени,
 G_2 — " поднятой жидкости " " "
 γ_2 — " единицы объема жидкости, " "
 γ_0 — " " " воздуха при атмосферном давлении,
 γ — " " " " в произвольном сечении
 подъемной трубы,
 γ' — вес единицы объема смеси (переменной по длине подь-
 емной трубы),
 γ_1 — вес единицы объема воздуха в башмаке (в камере сме-
 шения),
 p_1 — давление воздуха у входа в подъемную трубу,
 p_a — атмосферное давление,
 h_0 — высота подъема жидкости, считаемая от динамического
 уровня до выкида,
 h — глубина погружения подъемной трубы от нулевой линии
 до динамического уровня,
 h_1 — высота статического уровня жидкости в скважине, счи-
 таемая от нулевой линии,
 H — длина подъемной трубы,
 d — диаметр подъемной трубы,
 F — площадь сечения подъемной трубы,
 w_1 — скорость жидкости в пространстве между обсадной тру-
 бой скважины и трубой эрлифта,
 w_0 — скорость смеси у устья подъемной трубы,
 w — скорость смеси в каком-нибудь сечении подъемной трубы,
 C — коэффициент гидравлического сопротивления при движе-
 нии жидкости до смешения с воздухом, включая потери
 в башмаке.

1. Основное уравнение Г. Лоренца. Уравнение дви-
 жения жидкости в скважине от динамического уровня BB (фиг. 128).
 до входа в подъемную трубу AA будет иметь вид:

$$h + \frac{p_0}{\gamma_2} = \frac{p_1}{\gamma_2} + (1 + C) \frac{w_1^2}{2g} \quad (1)$$

или

$$h - \frac{p_1 - p_0}{\gamma_2} = (1 + C) \frac{w_1^2}{2g} \quad (1')$$

Таким образом из уравнения (1') имеем, что напор жидкости h ,
 уменьшенный на величину гидравлического напора $\frac{p_1 - p_0}{\gamma_2}$, равен
 сумме скоростного напора в точке $A \left(\frac{w_1^2}{2g} \right)$ и напора сопротивлени-
 я $\left(C \cdot \frac{w_1^2}{2g} \right)$.

Далее, образуемая в башмаке (смесителе) смесь, поднимаясь по
 подъемной трубе при условии установившегося движения, сохра-
 няет свой вес, изменяясь по мере приближения к устью в объеме.
 Это изменение объема можно выразить следующим уравнением:

$$\frac{G_1 + G_2}{\gamma'} = \frac{G_1}{\gamma} + \frac{G_2}{\gamma_2} \quad (2)$$

При изотермическом процессе имеем равенство:

$$p_0 v_0 = p v = p_1 v_1, \quad (3)$$

где v_0 , v и v_1 — удельные объемы.

Удельный объем, как известно, равен обратной величине уд. веса, т. е.

$$v_0 = \frac{1}{\gamma_0}; \quad v = \frac{1}{\gamma}; \quad v_1 = \frac{1}{\gamma_1}.$$

Заменяя в формуле (3) удельные объемы их значениями, получим соотношение:

$$\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma_1}, \quad (4)$$

которое имеет место в рассматриваемом случае, согласно второму положению, принятому в основу Г. Лоренцом, по которому воздух, при своем движении, расширяется по изотермическому закону.

На основании соотношения (4) имеем:

$$\gamma = \frac{p}{p_0} \gamma_0. \quad (5)$$

В уравнении (2) объем жидкости $\left(\frac{G_2}{\gamma_2}\right)$ считаем постоянным, так как γ_2 почти не изменяется по длине подъемной трубы. Подставляя в уравнение (2) вместо γ его значение (5), получим:

$$\frac{G_1 + G_2}{\gamma'} = \frac{p_0 G_1}{p \gamma_0} + \frac{G_2}{\gamma_2}. \quad (2')$$

Отсюда обратная величина удельного веса смеси, соответствующая давлению p , будет равна:

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_0}{p \gamma_0} + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{1}{\gamma_2}. \quad (6)$$

Движение смеси в подъемной трубе рассматриваем как движение упругой жидкости.

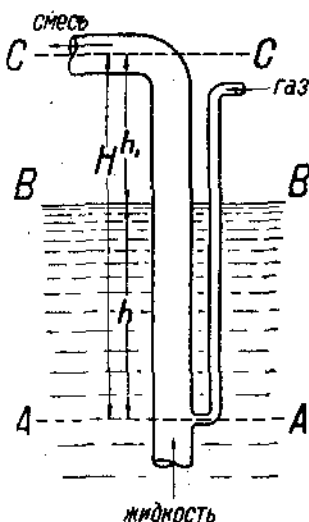
Напишем уравнение Бернулли, ур. постоянства энергии в дифференциальной форме:

$$dh - \frac{dp}{\gamma'} = \frac{w dw}{g} - C w^2 dh. \quad (7)$$

Заменяем $\frac{1}{\gamma'}$ его значением по формуле (6).

Получим:

$$dh - \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_0 dp}{\gamma_0 p} - \frac{G_2 dp}{(G_1 + G_2) \gamma_2} = \frac{w dw}{g} - C w^2 dh. \quad (7')$$



Фиг. 128.

Интегрируем уравнение (7') между пределами: h от H до 0; p от p_1 до p_0 ; w от w_1 до w_0 .

$$\int_H^0 dh = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_0}{\gamma_0} \int_{p_1}^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{G_2}{(G_1 + G_2) \gamma_2} \int_{p_1}^{p_0} dp = \\ = \frac{1}{g} \int_{w_1}^{w_0} w dw = \int_H^0 C w^2 dh.$$

Меняя в последнем интеграле пределы и произведя интегрирование, получим:

$$-H + \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_1 - p_0}{\gamma_2} = \frac{w_0^2 - w_1^2}{2g} \int_0^H C w^2 dh. \quad (8)$$

Согласно третьему положению Г. Лоренца, принимаем:

$$\int_0^H C w^2 dh = C_p \frac{w_0^2}{2g}, \quad (9)$$

где C_p есть полное гидравлическое сопротивление всей подъемной трубы эрлифта, равное

$$C_p = \lambda \frac{H}{d}. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (8) принятое значение интеграла (9) и заменяя H через $h + h_0$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} -(h + h_0) + \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} + \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_1 - p_0}{\gamma_2} = \\ = \left(1 + \lambda \frac{H}{d}\right) \frac{w_0^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Складывая уравнение (11) с уравнением (1'), получим:

$$\left. \begin{aligned} -h_0 + \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} + \left(\frac{G_2}{G_1 + G_2} - 1\right) \frac{p_1 - p_0}{\gamma_2} = \\ = \left(1 + \lambda \frac{H}{d}\right) \frac{w_0^2}{2g} + \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + C_s \frac{w_1^2}{2g}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

откуда:

$$\frac{G_1}{G_1 + G_2} \left[\frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{p_1 - p_0}{\gamma_2} \right] = h_0 + \left(1 + \lambda \frac{H}{d}\right) \frac{w_0^2}{2g} + C_s \frac{w_1^2}{2g}. \quad (13)$$

Пренебрегая в знаменателе дроби $\frac{G_1}{G_1 + G_2}$ весом воздуха (G_1) как ничтожно малым сравнительно с весом жидкости и, кроме того, отношением $\frac{p_1 - p_0}{\gamma_2}$ как величиной очень малой сравнительно с $\frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0}$, будем иметь приближенное и в то же время основное уравнение проф. Г. Лоренца:

$$\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0} = h_0 + \frac{w_0^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{H}{d}\right) + \frac{w_1^2}{2g} C_s. \quad (14)$$

2. Гидравлический коэффициент полезного действия. Подъем жидкости совершается за счет работы, получаемой при изотермическом расширении объема воздуха, нагнетаемого компрессором в подъемную трубу эрлифта.

Из термодинамики известно, что работа, необходимая для сжатия G_1 кг воздуха при изменении давления от p_0 до p_1 , при постоянной температуре, будет равна:

$$L_i = G_1 \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0}. \quad (15)$$

Полезная работа поднятия G_2 кг жидкости на высоту h_0 будет

$$L_e = G_2 h_0. \quad (16)$$

Гидравлический коэффициент полезной работы:

$$\eta = \frac{L_e}{L_i} = \frac{G_2 h_0}{G_1 \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0}}. \quad (17)$$

Обратная величина гидравлического коэффициента полезного действия:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{G_1 \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_1}{p_0}}{G_2 h_0}. \quad (18)$$

Заменим числитель правой части выражением из уравнения (14). Тогда получим формулу, определяющую обратную величину коэффициента полезного действия, а именно:

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{w_0^2 (1 + \lambda \frac{H}{d}) + w_1^2 C_e}{2gh_0}. \quad (19)$$

3. Наивыгоднейшее условие работы эрлифта. В основном уравнение (14) скорости w_0 и w_1 , а также вес G_1 и G_2 выразим через v_0 и v_2 , где v_0 есть объем нагнетаемого воздуха в единицу времени при давлении p_0 ; v_2 — объем жидкости, поднятой в единицу времени.

Вполне очевидно:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \gamma_0 v_0 & F w_0 &= v_2 + v_0 \\ G_2 &= v_2 \gamma_2 & F w_1 &= v_2 \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Произведя в уравнении (14) замену скоростей w_0 и w_1 и веса G_1 и G_2 через объемы, получаем:

$$\frac{v_0 p_0}{v_2 \gamma_2} \ln \frac{p_1}{p_0} = h_0 + \frac{(1 + \lambda \frac{H}{d}) (v_0 + v_2)^2 + C_e v_2^2}{2gF^2}. \quad (21)$$

Уравнение (21) при данных:

$$h_0; \frac{p_1}{p_0}; \lambda; C_e \text{ и } F$$

позволяет определить по объему затрачиваемого воздуха v_0 объем поднимаемой в единицу времени жидкости v_2 , а затем по формуле (18) определить гидравлический коэффициент полезного действия.

Величина v_2 есть функция v_0 , которая проходит через максимум при значении v_0 , определяемом по условию

$$\frac{dv_2}{dv_0} = 0. \quad (32)$$

Уравнение (21) есть

$$f(v_2, v_0) = 0;$$

дифференцируя его, имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial v_0} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \cdot \frac{dv_2}{dv_0} = 0.$$

Принимая во внимание (22), следует, что производная по v_0 , т. е. $\frac{\partial f}{\partial v_0} = 0$, таким образом для получения v_0 , соответствующего максимальному подъему жидкости v_2 , нужно продифференцировать (21) по v_0 . Дифференцируя, получаем:

$$\frac{1}{v_2} \frac{p_0}{\gamma_2} \ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{(1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0 + v_2)}{gF^2}. \quad (23)$$

Исключим $\ln \frac{p_1}{p_0}$. Разделим уравнение (21) на (23):

$$\frac{v_0 p_0 v_2 \gamma_2}{v_2 \gamma_2 p_0} = \frac{\frac{2gF^2 h_0 + C_s v_2^2}{2gF^2}}{(1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0 + v_2)} + \frac{(1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0 + v_2)^2}{\frac{2gF^2}{(1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0 + v_2)}}.$$

После приведения получим:

$$v_0 (1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0 + v_2) - \frac{v_0 + v_2}{2} (1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0 + v_2) = \frac{2gF^2 h_0 + C_s v_2^2}{2},$$

откуда окончательно имеем:

$$(1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0^2 - v_2^2) = 2gF^2 h_0 + C_s v_2^2. \quad (24)$$

Это и есть условие *наивыгоднейшей* работы эрлифта. Уравнение устанавливает связь между v_0 и v_2 . При заданном v_2 можно определить v_0 и далее по формулам (23) и (17) определить давление p_1 поступающего в башмак воздуха и гидравлический коэффициент полезного действия эрлифта η .

§ 3. Теоретические и опытные формулы.

Кроме формул Г. Лоренца по расчету эрлифта имеют место формулы других авторов (В. С. Меликова, Свиндина, Перени и др.).

Расход (объемный) воздуха по В. С. Меликову определяется по формуле:

$$v_0 = q \left(\frac{\delta}{\delta'} - 1 \right) \frac{p_1 - p_0}{p_0} \frac{1}{\ln \frac{p_1}{p_0}}, \quad (25)$$

где

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{2H_1}{h \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{q}{Q_{\max}} \right)^2} \right]};$$

$$H_1 = \frac{H}{1 - \frac{S'F}{q}};$$

$$Q_{\max} = 0,5 q_{\max} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4S'F}{q_{\max}}} \right];$$

$$q_{\max} = \frac{F \cdot S_{\max} \cdot h}{2H}; S_{\max} = K \sqrt{d},$$

где K для различных жидкостей имеет разное значение:

для нефти $K = 30$

" нефти с примесью воды более 40% $K = 32$,

" " " " менее 20% $K = 31$,

" воды $K = 33,5$.

При вычислениях обязательным условием является выполнение неравенства

$$q_{\max} \geq 4S'F$$

и

$$S' \leq \frac{q}{F}.$$

Обозначения к формуле В. С. Меликова:

d — диаметр подъемной трубы,

F — площадь сечения трубы,

H — длина подъемной трубы,

h — глубина погружения,

p_0 — атмосферное давление,

p_1 — давление у багмака,

δ — уд. вес жидкости в скважине,

δ' — средний уд. вес смеси,

q — объем поднятой жидкости уд. веса δ ,

$S_{\max}$ — средняя скорость смеси, соответствующая максимуму подачи жидкости,

S' — скорость проскальзывания воздуха,

$q_{\max}$ — максимальная подача жидкости при отсутствии скольжения,

$Q_{\max}$ — максимальная подача жидкости при наличии скольжения,

v_0 — объем воздуха, приведенный к атмосферному давлению.

1. Формула Перени. Объемный расход воздуха:

$$v_0 = \frac{\sigma \cdot p}{k_0} \cdot \frac{h_s + 10}{1 + \left(\frac{\sigma}{f} \right)^2 Q_s^2} Q_s \quad (26)$$

$$\frac{\sigma p}{k_0} = \frac{1}{100} \frac{T_0}{T_1},$$

где $\sigma = 0,0065$; $\lambda = 0,6$; Q_s — количество жидкости, поднимаемой при установившемся режиме,

h_s — уровень жидкости в скважине,
 f_1 — площадь сечения воздушной трубы,
 T_0 и T_1 — абсолютная температура атмосферного воздуха и температура скважины.

2. Формула Н. Свиндина.

$$h_s = H + h_a + h_s + h_f + h_b + h_k + h_v. \quad (27)$$

Формула Свиндина дает возможность по заданному расходу воздуха, количеству поднятой жидкости и при заданном погружении определить высоту H , на которую может быть поднята жидкость.

Входящие в уравнение (27) величины h_s , h_a , h_v ... и т. д. определяются по следующим формулам, данным Н. Свиндином.

1) Потеря напора при входе в башмак:

$$h_a = \frac{w_s^2}{2g} \frac{\rho}{\rho_m} \left(\frac{1}{C^2} - 1 \right), \text{ где } C = 0,64.$$

2) Потеря напора при истечении жидкости из подъемной трубы:

$$h_v = \frac{\left(\frac{v_w + v_a}{F} \right)^2}{2g}.$$

3) Потеря напора от трения в подъемной трубе:

$$h_f = i(H + h_s).$$

Для определения i гидравлического уклона необходимо определить число Рейнольдса:

$$Re = \frac{w_m d}{\nu_m} = \frac{w_m d \rho_m}{\nu},$$

где w_m — средняя скорость смеси в подъемной трубе,
 ν — кинематическая вязкость воды при 10°C .

$$\nu = 133 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек.}} \right]$$

ρ_m — средняя плотность смеси.

По кривой Стантона по Re определяем параметр Стантона C и из уравнения:

$$C = \frac{mig}{w^2} = \frac{\frac{d}{4} \cdot i \cdot g}{w^2},$$

где w^2 — средний квадрат скорости, определяем гидравлический уклон i .

4) Потеря напора на скольжение воздуха

$$h_b = \left(\frac{H + h_s}{w_m} \right) w_b,$$

где w_b — скорость скольжения воздуха по Свиндину, принята равной 0,3 м.

5) Потеря напора от ускорения в башмаке:

$$h_k = \frac{\rho}{\rho_m} \left(\frac{2v_w^2 v_s + v_w v_s^2}{2gF^2 l} \right),$$

где l — длина башмака.

6) Теоретическая длина подъемной трубы:

$$h_s = \frac{\rho}{\rho_m} h_s.$$

Обозначения к формулам Свиндина:

- H — действительный подъем жидкости,
 h_s — погружение,
 w_s — скорость смеси, входящей в башмак,
 w_m — средняя скорость смеси в подъемной трубе,
 w_b — скорость поднимающихся через спокойную жидкость пузырьков,
 v_a — объем воздуха при атмосферном давлении,
 v_s — " " " давлении p_s в башмаке,
 v_m — средний объем воздуха, расширяющегося в подъемной трубе,
 v_w — объем жидкости, текущей по подъемной трубе,
 p_a — атмосферное давление,
 p_s — давление у башмака,
 $z = \frac{P_s}{P_a}$ — коэффициент расширения воздуха,
 ρ — плотность жидкости,
 ρ_m — средняя плотность смеси в подъемной трубе,
 m — гидравлическая средняя глубина ($m = \frac{d}{4}$),
 d — диаметр подъемной трубы,
 F — площадь сечения ее,
 ν_w — кинематическая вязкость смеси при средней плотности,
 ν — кинематическая вязкость жидкости,
 μ — абсолютная вязкость жидкости.

3. Эмпирическая формула проф. Р. М. Андерсона

$$v_0 = K \frac{h_0}{23 \lg \frac{h+10}{10}}, \quad (28)$$

где

- v_0 — объем воздуха, необходимого для работы эрлифта,
 h_0 — действительная высота подъемника,
 h — глубина погружения,

$$K = 2,17 + 0,0164 h_0.$$

Величина K — эмпирический коэффициент, есть не что иное, как обратная величина коэффициента полезного действия:

$$K = \frac{1}{\eta}.$$

4. Расчет эрлифта (по Г. Лоренцу).

Пример. С помощью эрлифта требуется подать в секунду 10 л воды на высоту $h_0 = 200$ м. Внутренний диаметр подъемной трубы $d = 10$ см, ее полная длина $H = 250$ м. Определить: 1) наименьший секундный расход воздуха, 2) давление воздуха у входа в подъемную трубу, 3) глубину погружения, 4) коэффициент полезного действия.

Решение. Принимаем коэффициенты сопротивления равными, согласно теории Г. Лоренца:

$$C_s = 2,0,$$

$$\lambda \frac{H}{d} = 0,02 \cdot \frac{250}{0,1} = 50.$$

Дано:

Секундный расход жидкости $v = 0,01 \text{ м}^3$.

Площадь подъемной трубы:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,0078 \text{ м}^2.$$

Из уравнения (24) наименьший секундный расход воздуха (v_0):

$$(1 + \lambda \frac{H}{d})(v_0^2 - v^2) = C_s v^2 + 2g F^2 h_0,$$

или

$$(1 + 50)(v_0^2 - 0,01^2) = 2 \cdot 0,01^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 0,0078 \cdot 200,$$

откуда

$$v_0 = 0,0692 \text{ м}^3/\text{сек.} = 69,2 \text{ л/сек.}$$

Давление воздуха у входа в подъемную трубу получим, пользуясь уравнением (23):

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = \frac{(1 + \lambda \frac{H}{d})(v + v_0)}{g F^2} \cdot \frac{v \gamma}{p_0}. \quad (23)$$

Принимая

$$\gamma = 1000 \text{ кг; } p_0 = 10333 \text{ кг/м}^2,$$

получим:

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = 6,555, \quad \frac{p_1}{p_0} = 700,3.$$

Таким образом, по Лоренцу, давление воздуха у входа в подъемную трубу $p_1 = 700,3 \text{ атм.}$ является результатом совершенно неприемлемым для рассматриваемого случая.

По формуле (1') определим глубину погружения:

$$h = \frac{w_1^2}{2g} (1 + C_s) + \frac{p_1 - p_0}{\gamma}, \quad (1')$$

где w_1 — скорость воды у входа в объемную трубу,

$$w_1 = \frac{v}{F} = \frac{0,01}{0,0078} = 1,283.$$

Подставляя в формулу (1') значения p_1 , p_0 , γ , C_s и w_1 , получим:
 h = приблизительно около 7100 м.

Между тем по данным примера

$$h = H - h_0 = 250 - 200 = 50 \text{ м.}$$

Коэффициент полезного действия по Лоренцу:

$$\eta = \frac{G_s h_0}{G_1 \frac{p_0}{\gamma} \ln \frac{p_1}{p_0}} = 4,265.$$

Такой результат получается для случая скважин (даже средней глубины), если расчет вести, пользуясь формулами теории Лоренца.

ВИСКОЗИМЕТРЫ.

§ 1. Типы вискозиметров.

Приборы, служащие для определения вязкости различных жидкостей, называются вискозиметрами. Вискозиметры, наиболее распространенные, можно подразделить на три группы, отличные принципом своего действия.

1. Капиллярные вискозиметры — вязкость жидкости определяется по движению последней через капиллярную трубочку (вискозиметр Оствальда, Степанова, Уббелюде, Бингхема, сравнительный вискозиметр Жуковского).

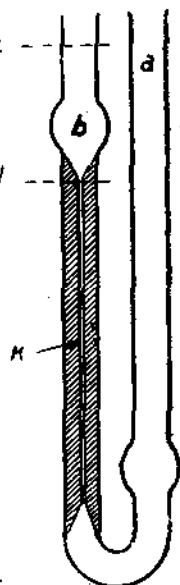
2. Вискозиметры, основанные на принципе истечения жидкости из насадки (Энглера, Редвуда, Сейболта, Уббелюде).

3. Вискозиметры, основанные или на затухании колебаний твердого тела в исследуемой жидкости или на скорости падения тела в жидкости.

Наиболее распространенными являются вискозиметры первой и второй групп.

На фиг. 129 представлен один из капиллярных вискозиметров (Оствальда), на фиг. 130 — вискозиметр второй группы (Энглера).

Вискозиметр Оствальда представляет собой U-образную трубку, в одно из колен которой впаян капилляр *к*. Исследуемая жидкость вводится в широкое колено *а*, откуда всасывается в шарик *б* до отметки *с*. Затем наблюдается время, необходимое для того, чтобы уровень жидкости опустился от *с* до *д*.



Фиг. 129.

Вискозиметр Энглера (фиг. 130) состоит из концентрически вставленных друг в друга латунных резервуаров *А* и *В*. Вокруг *А* со всех сторон имеется промежуточное пространство, заполняемое водой или маслом и служащее в качестве водяной бани. Дно сосуда *А* — сферическое. В центре его впаяна трубочка (насадка), внутри покрытая платиной и палладием. К внутренней поверхности сосуда *А* припаяны 3 сверху загнутых крючка, показывающие уровень, до которого необходимо наливать исследуемую жидкость. Отверстие вискозиметра закрывается палочкой.

Размеры вискозиметра Энглера стандартизованы. Размеры частей даны в таблице 13.

Таблица 13.

	Размер в мм	Допуск в мм
Резервуар для жидкости:		
1. Внутренний диаметр	106	1
2. Высота от нижнего ребра до верхушки крючков	25	1
3. Высота от нижнего края трубки до верхушки крючков	52	1
Насадка:		
1. Длина	20	0,1
2. Внутренний диаметр сверху	2,9	0,02
3. " " снизу	2,8	0,02
4. Длина выступающей части	3,0	0,3
5. Наружный диаметр снизу	4,5	0,2

Емкость прибора до верхушек крючков 240 см^3 .

На этом приборе наблюдается истечение 200 см^3 исследуемой жидкости.

Таким образом при пользовании вискозиметром первых двух групп наблюдается время истечения определенного количества жидкости.

Сравнивая это время со временем истечения того же объема жидкости, вязкость которой точно известна (напр., дистиллированная вода), определяют кинематическую вязкость исследуемого продукта.

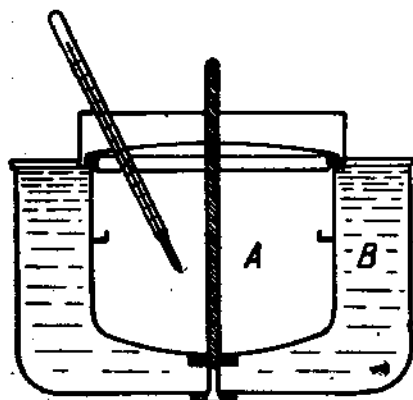


Рис. 130.

К третьей группе относятся вискозиметры, напоминающие своим устройством маятник, а именно: на тонкой металлической проволоке подвешивается металлический диск (или шарик) в горизонтальном положении и притом так, что точка его привеса совпадает как с геометрическим центром, так и с центром тяжести (диск совершенно однородный). Если диск вывести из состояния равновесия, повернув его вокруг вертикальной оси, поддерживающей проволоки, а затем отпу-

стить, то тем самым он будет приведен в колебательное движение. Сравнивая время затухания колебаний диска в воздухе и в исследуемой жидкости, определяют абсолютную вязкость.

§ 2. Теория вискозиметров.

1. Капиллярный вискозиметр. Истечение жидкости как в капиллярных вискозиметрах, так и в вискозиметрах типа Энглера, происходит при ламинарном режиме.

Для случая истечения из капиллярной трубки по закону Пуазейля (задание 5) имеем, что объем вытекшей жидкости прямо-пропорционален гидравлическому напору P , четвертой степени радиуса, времени истечения T и обратно-пропорционален вязкости, т. е.

$$Q = \frac{\pi P a^4 T}{8 \mu L}, \quad (1)$$

откуда

$$\mu = \frac{\pi P a^4 T}{8 Q L}. \quad (2)$$

Пользуясь формулой (2), зная вязкость одной жидкости (напр., воды), можем определить на капиллярном вискозиметре вязкость другой.

По формуле Пуазейля для воды будем иметь:

$$\mu_w = \frac{\pi \cdot P_w \cdot a^4}{8 Q L} \cdot T_w. \quad (3)$$

Для какой-нибудь другой жидкости:

$$\mu_x = \frac{\pi \cdot P_x \cdot a^4}{8 Q L} \cdot T_x. \quad (4)$$

Разделив (4) на (3), получим так называемую удельную вязкость:

$$\mu_d = \frac{\mu_x}{\mu_w}.$$

Итак, удельная вязкость:

$$\mu_d = \frac{P_x}{P_w} \cdot \frac{T_w}{T_x}. \quad (5)$$

При равной высоте столбов жидкости (случай капиллярного вискозиметра) их гидравлические давления (напор) относятся, как плотности, т. е.

$$\frac{P_x}{P_w} = \frac{\rho_x}{\rho_w}. \quad (6)$$

Заменяя отношение в формуле (5) через отношение плотности, получим:

$$\mu_d = \frac{\rho_x}{\rho_w} \cdot \frac{T_w}{T_x},$$

откуда абсолютная вязкость

$$\mu_x = \frac{\mu_d}{\rho_w T_w} \cdot \rho_x T_x = K \rho_x T_x, \quad (7)$$

где

$$K = \frac{\mu_d}{\rho_w T_w} = \text{const}$$

для данной температуры t .

$$\nu_{ж.} = \frac{\mu_{ж.}}{\rho_{ж.}} = K T_{ж.} \quad (8)$$

Таким образом, все дело сводится к определению константы K прибора по воде, т. е. к определению времени истечения некоторого объема воды при различных температурах.

Все сказанное здесь о вискозиметре Оствальда в равной степени относится к вискозиметрам Жуковского, Степанова, Уббелюде, Блинггема.

2. Вискозиметр Энглера. Величиной вязкости, по так называемой шкале Энглера, называют отношение времени истечения $T - 200 \text{ см}^3$ (или меньше) исследуемой жидкости ко времени истечения T_0 такого же количества воды при $t = 20^\circ \text{C}$.

$$E = \frac{T}{T_0},$$

где E — так называемые градусы Энглера.

Определим зависимость времени истечения T и числа E от коэффициента вязкости ν (кинематической вязкости). Если из потерь на трение принять во внимание только происходящие внутри трубки истечения (насадки), а не внутри самого сосуда, то обобщенное уравнение Бернулли будет иметь вид:

$$\frac{w_0^2}{2g} + z = \frac{w^2}{2g} + h, \quad (9)$$

где w_0 — скорость движения жидкости в цилиндре вискозиметра,
 w — скорость истечения,
 h — напорная высота, необходимая для поддержания скорости истечения.

Член $\frac{w_0^2}{2g}$ можно отбросить вследствие его малости. По формуле Пуазейля

$$h = \frac{8\nu l}{ga^2} w. \quad (10)$$

Заменяя h , по формуле (10) в уравнении (9), получим:

$$w = \frac{16\nu l}{a^2} w - 2gz = 0.$$

Решая его относительно w и обозначая

$$\frac{ga^4}{32\nu^2 l^2} = \frac{0,006773}{\nu^2}$$

через K , где вместо g , a и l подставлены их значения:

$$g = 9,81; \quad a = 0,28; \quad l = 2,0,$$

получим следующее выражение:

$$w = \frac{8\nu l}{a^2} [\sqrt{1 + Kz} - 1]. \quad (11)$$

Чтобы вычислить время T , воспользуемся уравнением расхода в форме:

$$-R^2\pi \frac{dz}{dt} = a^2\pi w. \quad (12)$$

Левая часть этого равенства выражает величину уменьшения объема жидкости в резервуаре за одну секунду; правая часть представляет то же количество жидкости, протекающей через насадку в одну секунду.

Подставляя значение w , получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{8vl}{R^2} [1 - \sqrt{1 + Kz}].$$

Разделяя переменные

$$\frac{dz}{1 - \sqrt{1 + Kz}} = \frac{8vl}{R^2} dt$$

и интегрируя левую часть по z , в пределах от $z = h_0 = 5,2$ до $Z = h_1 = 2,93$ и соответственно правую от 0 до T , окончательно получим:

$$T = \frac{8vlR^2}{ga^4} \left[\ln \frac{C_0 - 1}{C_1 - 1} + C_0 - C_1 \right] = 1037,676 \left[\ln \frac{C_0 - 1}{C_1 - 1} + C_0 - C_1 \right], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \sqrt{1 + Kh_0} = \sqrt{1 + \frac{0,0355}{\nu^2}} \\ C_1 &= \sqrt{1 + Kh_1} = \sqrt{1 + \frac{0,01985}{\nu^2}} \end{aligned} \quad (14)$$

§ 3. Переходные формулы.

Вязкость испытуемой жидкости, выраженная в градусах Энглера (Е), может быть представлена в следующем виде:

$$E = \frac{T}{T_0} = 20,11 \left[2,8026 \lg \frac{C_0 - 1}{C_1 - 1} + C_2 - C_1 \right] \nu. \quad (15)$$

Это уравнение приближенно решено фон-Мизесом относительно ν , входящего в C_0 и C_1 ,

$$\nu \left(\frac{\text{см}^2}{\text{сек.}} \right) = 0,0864 E - 0,08 \frac{1}{E}. \quad (16)$$

Это выражение дает возможность определить кинематическую вязкость ν по наблюдаемому значению E . По идее Прандля, Шиллер внес поправку, обратив внимание на то, что движение жидкости в начале насадки отличается от ламинарного потока. Таким образом он нашел следующую приближенную формулу:

$$\nu = 0,0828 E - 0,08332 \frac{1}{E}. \quad (17)$$

К числу лучших эмпирических формул относятся формулы Уббеллоде:

$$\nu = 0,6731 E - 0,0631 \frac{1}{E} \quad (18)$$

и Фогеля:

$$\nu = \frac{E}{100} \cdot 7,60 \left(1 - \frac{1}{E^2}\right) \quad (19)$$

Все приведенные здесь формулы не находятся в согласии с экспериментом. Причиной этому была неполнота теорий. При разборе явления не принималось во внимание изменение диаметра трубки истечения (насадки) по длине ее и сужение острей края.

Под руководством проф. Л. С. Лейбензона научным сотрудником ГИНИ А. А. Померанцевым была предпринята в 1929 г. теоретическая и экспериментальная работа по уточнению теории вискозиметра Энглера (см. „Нефт. Хоз.“, № 11—12, 1929).

Результатом последней явились новые формулы, достаточно хорошо согласные с опытными данными, и кроме того новый способ пользования вискозиметра Энглера при очень больших вязкостях.

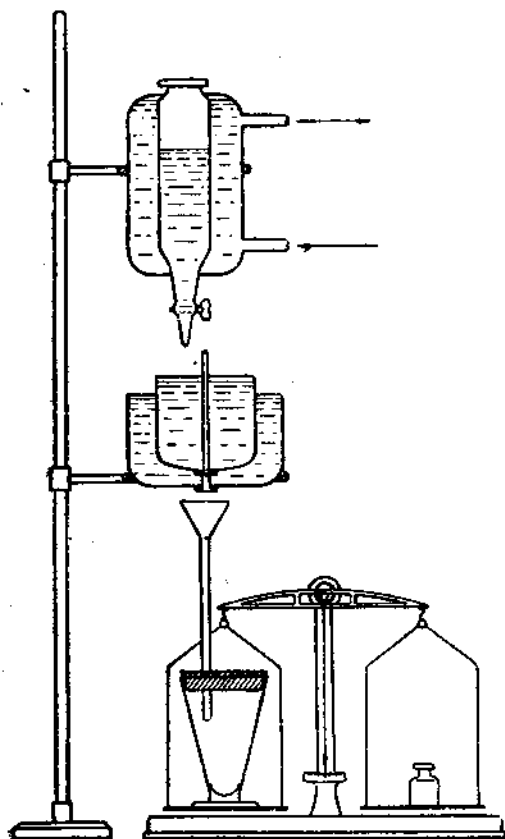
§ 4. Приспособление вискозиметра Энглера для очень вязких жидкостей и формулы А. А. Померанцева.

При значительной вязкости продукта истечение из вискозиметра Энглера происходит по каплям и отнимает при наблюдениях очень много времени и при этом сами наблюдения по мере истечения делаются неточными.

А. А. Померанцев предложил производить истечение

жидкостей из вискозиметра под постоянным напором, высотой которого принимать высоту внутреннего резервуара вискозиметра (фиг. 181).

Такой способ делает течение жидкости установившимся, позволяет производить отсчеты при любых весьма малых количествах



Фиг. 181.

вытекаемой жидкости и кроме того сами формулы получаются более простыми и точными.

При пользовании новым методом необходимо производить следующие отсчеты:

- 1) измерить количество вытекшей жидкости (Q , в см^3);
- 2) отсчитать ушедшее на это время (T в сек.);
- 3) измерить разность высот H между уровнем жидкости в сосуде и нижним краем трубки.

Постоянство температуры можно поддерживать, как в обычном вискозиметре Энглера: водяной или масляной баней.

Вычисление кинематической вязкости, по полученным из наблюдений данным надлежит вести следующими тремя способами.

1. В случае, когда отношение $q = \frac{Q}{T}$ меньше $0,64 \text{ см}^3/\text{сек.}$

Вычисление кинематической вязкости производится по формуле:

$$\nu = AH \frac{T}{Q} - B \frac{Q}{T}, \quad (20)$$

где

$$A = 7,284 \cdot 10^{-2};$$

$$B = 1,816 \cdot 10^{-3}.$$

2. В случае, когда $q = \frac{Q}{T}$ больше $0,64 \text{ см}^3/\text{сек.}$, но меньше $4,5 \text{ см}^3/\text{сек.}$

$$[0,64 \leq q \leq 4,5 \text{ см}^3/\text{сек.}],$$

вычисление производится по формуле:

$$\nu = 0,07284 \frac{H}{q} - 2,02 \cdot 10^{-2} \cdot q. \quad (21)$$

3. В случае, когда $q = \frac{Q}{T}$ больше, чем $4,5 \text{ см}^3/\text{сек.}$, кинематическая вязкость находится по таблице 14.

Таблица 14.

№ по порядку	T , в сек. для $Q = 200$	q	ν
1	44,4	4,5	0,0780
2	40,0	5,0	0,0549
3	36,4	5,5	0,0374
4	33,4	6,0	0,0245
5	30,6	6,5	0,0162
6	28,7	7,0	0,00847
7	26,7	7,5	0,00431

§ 5. Формулы А. А. Померанцева для обычного вискозиметра Энглера.

1. В случае больших вязкостей, т. е. когда время истечения T превышает 500 сек. при истечении 200 см³, или превышает 330 сек. при истечении 100 см³, или превышает 225 сек. при истечении 50 см³, величину кинематической вязкости следует определять по формулам:

Количество в см ³	Время истечения T в градусы Е	Кинематическая вязкость ν
200	$T = 690\nu + 6,88 \frac{1}{\nu}$	$\nu = 0,00145T - 6,98 \frac{1}{T}$
	$E = 13,52\nu + 0,135 \frac{1}{\nu}$	$\nu = 0,0074 E - 0,135 \frac{1}{E}$
100	$T = 295\nu + 3,44 \frac{1}{\nu}$	$\nu = 0,00339T - 34,4 \frac{1}{T}$
50	$T = 138\nu + 1,72 \frac{1}{\nu}$	$\nu = 0,00724T - 1,72 \frac{1}{T}$

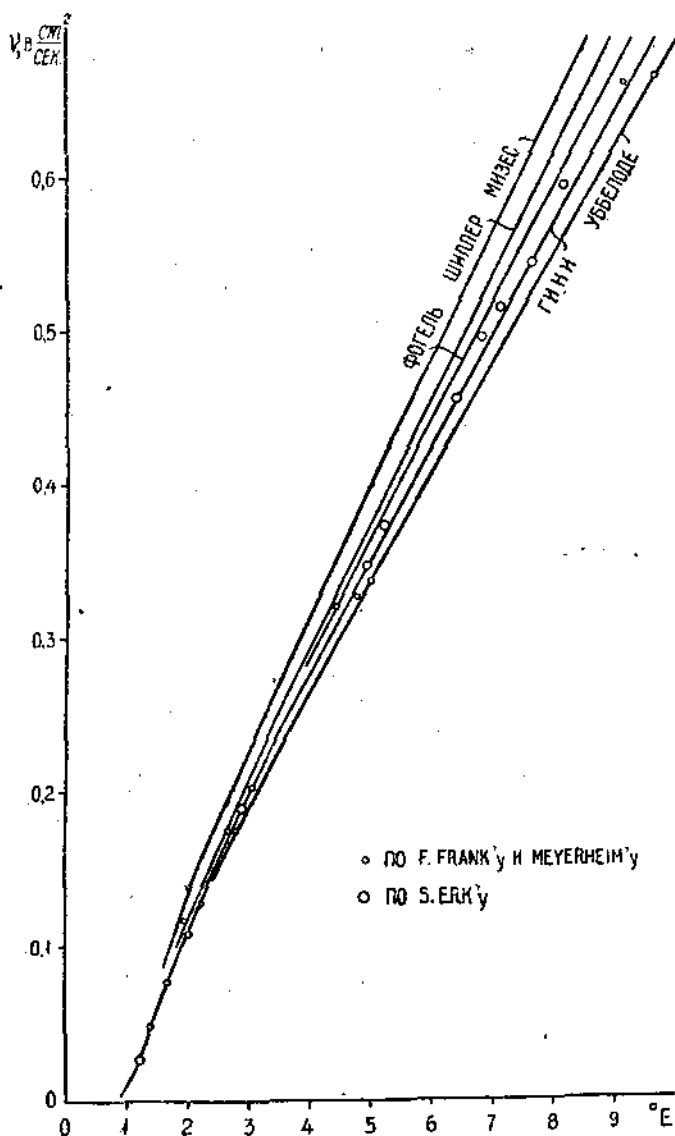
2. В случае небольших вязкостей, т. е. когда время истечения T меньше значений, указанных в случае (1), кинематическая вязкость находится по таблице 15, путем интерполяции. Таблица составлена для истечения 200 см³ жидкости. Водное число принято равным 51 сек.

Таблица 15.

№ по порядку	Время истечения в сек.	Градусы Энглера Е	Кинематическая вязкость ν	№ по порядку	Время истечения в сек.	Градусы Энглера Е	Кинематическая вязкость ν
1	483,19	9,475	0,70	12	96,62	1,805	0,10
2	416,38	8,15	0,60	13	82,73	1,62	0,075
3	382,83	7,50	0,55	14	70,55	1,882	0,046
4	349,58	6,85	0,50	15	60,30	1,18	0,026
5	316,06	6,20	0,45	16	55,97	1,00	0,018
6	282,93	5,55	0,40	17	51,00	0,98	0,01
7	250,13	4,90	0,35	18	50,00	0,96	0,0086
8	217,61	4,26	0,30	19	49,00	0,95	0,0074
9	182,17	3,8	0,25	20	47,9	0,94	0,0065
10	154,57	3,08	0,20	21	46,9	0,92	0,0052
11	124,70	2,44	0,15	22	45,9	0,90	0,0042

На фиг. 132 представлена кривая зависимости кинематической вязкости от градусов Энглера, вычисленная по формулам Миньеса,

Фогеля, Шиллера, Уббелодде и Померанцева, (ГИНИ) из которой видно, что наиболее точные результаты получены по вычислениям А. Померанцева.



Фиг. 132.

§ 6. Наиболее распространенные вискозиметры.

Кроме Энглера имеют большое распространение вискозиметры Редвуда (2 типа), Сейболта, Сейболта-Фуrol, Уббелодде и др.

Как было уже сказано в начале настоящего задания, они основаны на том же принципе, что и вискозиметр Энглера,

т. е. на сравнении времени истечения из насадки испытуемой жидкости с временем истечения жидкости, вязкость которой известна.

По своему устройству указанные здесь вискозиметры напоминают вискозиметры Энглера, отличаясь от последнего размерами резервуаров и насадки.

1. Вискозиметр Редвуда. Определение кинематической вязкости производится путем сравнения времени истечения 50 см³ сурепного масла (а не воды, как при пользовании прибором Энглера) с временем истечения испытуемой жидкости. Это сравнение дает так называемые секунды Редвуда (R и RA).

Два типа вискозиметров Редвуда (адмиралти и торговый) отличаются друг от друга размерами насадки и предназначаются: один—для очень густых масел, нефтяного топлива, другой—для обычных смазочных масел.

Испытания на этих вискозиметрах одинаковы. Но получаемые условные единицы различны. На первом, так называемом, Редвуд-адмиралти определяется число секунд, в течение которых вытекает 50 см³ испытуемой жидкости при 32° Ф (0° Ц).

RA, равное времени истечения 50 см³ жидкости, называется секундами Редвуд-адмиралти.

Вискозиметр Редвуд-торговый предназначен для обычных жидкостей и секунды последнего (R) равны отношению времени T истечения 50 см³ испытуемой жидкости при температуре t истечения—ко времени T_c истечения 50 см³ сурепного масла при 60° Ф (15,5° Ц), умноженное на отношение плотности ρ испытуемой жидкости при температуре истечения к плотности ($\rho_c = 0,915$) сурепного масла при 60° Ф (15,5° Ц) и все умноженное на 100, т. е.

$$R = 100 \frac{T}{T_c} \cdot \frac{\rho}{0,915}.$$

2. Вискозиметры Сейболта и Сейболта-Фурол. Вискозиметр Сейболта предназначен для маловязких жидкостей. Вискозиметр Сейболта-Фурол, аналогично Редвуд-адмиралти,—для густых масел и вообще для очень вязких продуктов.

Отличаются эти два прибора друг от друга насадками, а отсюда—и скоростью истечения.

Ими производят измерения времени истечения 60 см³ испытуемой жидкости при разных температурах. Полученное время называется секундами Сейболта (S) и секундами Сейболта-Фурол (SF).

3. Вискозиметр Уббелюде. Вискозиметр Уббелюде предназначен исключительно для определения вязкости при истечении 30 см³ испытуемой жидкости. Он устроен аналогично вискозиметру Энглера, только с той разницей, что в нем сечение внутреннего резервуара равно 0,1 сечения Энглера.

Вискозиметр Уббелюде имеет только ориентировочное значение, так как не обладает большой точностью.

Ниже приведена сравнительная таблица 16 условных единиц, определяемых вискозиметрами различных систем.

Таблица 16.

№ по порядку	Наименование условной единицы	Условное обозначение	Объем испыт. жидкости, подлежащей измерению	Выражение для условной единицы (T —время истечения, испыт. жидкости, в сек., T_v — то же воды, T_c — сурепного масла)	Константа прибора	Формула перевода условной единицы в кинематическую вязкость, ν см ² /сек.
1	Градусы Энглера	E	200 см ³	$\frac{T \text{ при } t^\circ \text{ Ц}}{T_v \text{ при } 20^\circ \text{ Ц}}$	$T_v = 50-53 \text{ сек.}$	$\nu = \left(0,0731 E - \frac{0,0631}{E}\right)$
2	Секунды Сейболта	S	60 см ³	$T' \text{ при } t^\circ \text{ Ф}$	—	$\nu = \left(0,0022 T - \frac{1,8}{T}\right)$
3	Секунды Сейболта-Фурла	SF	60 см ³	$T'' \text{ при } t^\circ \text{ Ф}$	—	$\nu = \left(0,022 T - \frac{2,03}{T}\right)$
4	Секунды Редвуд-торгового	R	50 см ³	$100 \frac{T}{T_c} \cdot \frac{\rho}{0,915}$	$T_p = 535 \text{ сек.}$	$\nu = \left(0,00260 T - \frac{1,72}{T}\right)$
5	Секунды Редвуд-адмиралти	RA	50 см ³	$T \text{ при } 32^\circ \text{ Ф}$	—	$\nu = \left(0,0239 T - \frac{0,403}{T}\right)$

§ 7. Тарировка вискозиметров.

В качестве тарировочного аппарата вискозиметров может служить лабораторного типа трубопровод, по которому прокачивается исследуемая жидкость. Движение жидкости во все время опыта должно оставаться ламинарным, тогда коэффициент гидравлического сопротивления

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{\frac{wd}{\nu}}, \quad (22)$$

откуда получим значение кинематической вязкости:

$$\nu = \lambda \frac{wd}{64};$$

коэффициент λ и скорость w являются опытными данными.

Сравнивая полученные на трубопроводе результаты с полученными на вискозиметрах, можно найти поправочный коэффициент для вискозиметра.

В таблице 17 дан перевод градусов Энглера в кинематическую вязкость.

Таблица 17.

Пересчет сделан по формуле: $\nu = 0,0731 \frac{E}{\nu} - \frac{0,0631}{E}$

Градусы Энглера E	Кинема- тическая вязкость	Градусы Энглера E	Кинема- тическая вязкость	Градусы Энглера E	Кинема- тическая вязкость	Градусы Энглера E	Кинема- тическая вязкость
1	0,0100	4,5	0,3149	8,0	0,5769	17,5	1,2756
1,1	0,0230	4,6	0,3225	8,1	0,5843	18	1,3123
1,2	0,0351	4,7	0,3301	8,2	0,5916	18,5	1,3489
1,3	0,0465	4,8	0,3377	8,3	0,5991	19	1,3856
1,4	0,0573	4,9	0,3452	8,4	0,6065	19,5	1,4222
1,5	0,0676	5,0	0,3529	8,5	0,6139	20	1,4588
1,6	0,0776	5,1	0,3604	8,6	0,6213	21	1,5321
1,7	0,0872	5,2	0,3680	8,7	0,6287	22	1,6053
1,8	0,0965	5,3	0,3755	8,8	0,6361	23	1,6786
1,9	0,1057	5,4	0,3830	8,9	0,6435	24	1,7518
2,0	0,1147	5,5	0,3906	9,0	0,6508	25	1,8250
2,1	0,1235	5,6	0,3981	9,1	0,6583	26	1,8982
2,2	0,1321	5,7	0,4056	9,2	0,6657	27	1,9714
2,3	0,1407	5,8	0,4132	9,3	0,6731	28	2,0446
2,4	0,1491	5,9	0,4206	9,4	0,6804	29	2,1178
2,5	0,1575	6,0	0,4281	9,5	0,6878	30	2,1909
2,6	0,1658	6,1	0,4356	9,6	0,6952	32	2,3372
2,7	0,1740	6,2	0,4430	9,7	0,7026	34	2,4835
2,8	0,1821	6,3	0,4505	9,8	0,7100	36	2,6298
2,9	0,1902	6,4	0,4580	9,9	0,7173	38	2,7761
3,0	0,1983	6,5	0,4654	10	0,7247	40	2,9224
3,1	0,2063	6,6	0,4729	10,5	0,7616	46	3,2881
3,2	0,2142	6,7	0,4804	11	0,7984	50	3,6537
3,3	0,2221	6,8	0,4878	11,5	0,8352	55	4,0193
3,4	0,2300	6,9	0,4953	12	0,8720	60	4,3850
3,5	0,2378	7,0	0,5027	12,5	0,9087	65	4,7505
3,6	0,2456	7,1	0,5101	13	0,9454	70	5,1161
3,7	0,2534	7,2	0,5176	13,5	0,9822	75	5,4817
3,8	0,2612	7,3	0,5250	14	1,0189	80	5,8472
3,9	0,2689	7,4	0,5324	14,5	1,0556	85	6,2128
4,0	0,2766	7,5	0,5398	15	1,0923	90	6,5783
4,1	0,2843	7,6	0,5473	15,5	1,1280	95	6,9438
4,2	0,2920	7,7	0,5547	16	1,1657	100	7,3094
4,3	0,2996	7,8	0,5621	16,5	1,2023		
4,4	0,3073	7,9	0,5695	17	1,2390		

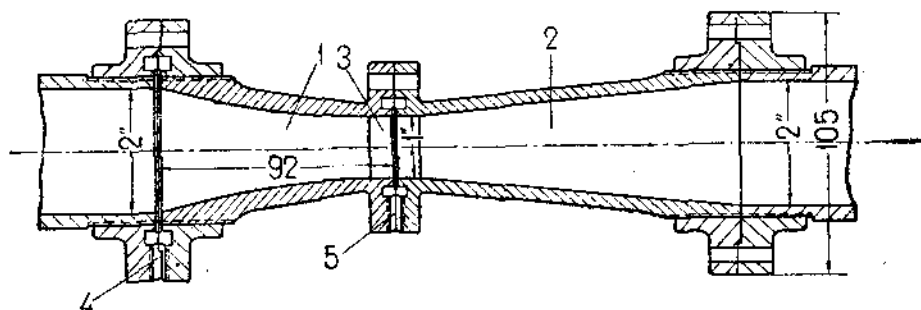
ЗАДАНИЕ 31.ИЗМЕРЕНИЕ РАСХОДА.

Приборы, служащие для измерения расхода жидкости подразделяются на: а) измерители скоростей и б) измерители объемов.

Если поперечные сечения труб, каналов, по которым движется жидкость, известны, то с помощью первых можно определить количество протекающей жидкости за определенное время, а с помощью последних определить средние скорости движения потока.

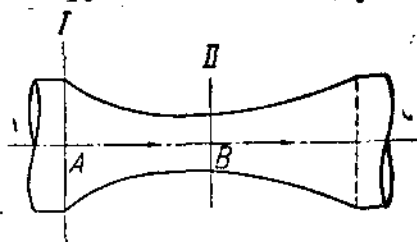
§ 1. Водомер Вентури.

Водомер (насадка) Вентури, изобретенный американским инж. Гершелем, служит для определения средней скорости движущейся жидкости и тем самым служит для учета ее количества.



Фиг. 133.

Водомер Вентури представляет собой (фиг. 133) две конические насадки 1 и 2, вершины которых путем плавного перехода сочленены с короткой цилиндрической трубой 3. Насадка 1, устанавливаемая со стороны движения, — короткая (относительные размеры указаны на фигуре). В точках 4 и 5 измеряется статическое давление. Обычно измеряется не абсолютное давление в этих сечениях, а помощью дифференциального манометра их разность, которая и дает возможность определить скорость и количество протекающей жидкости в данный момент.



Фиг. 134.

Рассмотрим два сечения I и II (фиг. 134): одно перед насадкой в широкой части, другое в суженной части. Уравнение Бернулли для сечений I и II будет:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2, \quad (1)$$

откуда:

$$w_1^2 - w_2^2 = 2g \left[\left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) \right],$$

где

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

есть пнезметрические высоты, соответствующие сечениям I и II. Обозначим их через h_1 и h_2 .

Тогда

$$w_1^2 - w_2^2 = 2g (h_2 - h_1). \quad (2)$$

Разность $(h_2 - h_1)$ определяется помощью дифференциального манометра.

Из уравнения постоянства расхода

$$Q = F_1 w_1 = F_2 w_2, \quad (9)$$

где F_1 и F_2 — площади сечения I и II, имеем:

$$w_1 = w_2 \frac{F_2}{F_1}.$$

Подставим полученное значение w_1 в уравнение (2).
Получим:

$$F_2^2 w_2^2 \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_2^2} \right) = 2g(h_2 - h_1),$$

откуда

$$w_2 = \frac{1}{F_2} \sqrt{2g \frac{h_2 - h_1}{\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_2^2} \right)}}. \quad (4)$$

Количество жидкости, протекающей в секунду, будет равно:

$$Q = w_2 F_2 = F_1 F_2 \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_1)}{F_2^2 - F_1^2}} = F_1 F_2 \sqrt{\frac{2gH}{F_2^2 - F_1^2}}, \quad (5)$$

где $H = h_2 - h_1$.

Так как при выводе настоящей формулы не было учтено гидравлическое сопротивление при движении жидкости на участке от сечения II к I и кроме того сужение струи в водомере Вентури (явление, аналогичное истечению из насадки), то расход по полученной формуле (5) больше действительного.

Поэтому в формулу расхода вводится коэффициент расхода и окончательно имеем:

$$Q = \mu F_1 F_2 \sqrt{\frac{2gH}{F_2^2 - F_1^2}}. \quad (6)$$

Коэффициент μ для одного и того же водомера Вентури, но разных скоростей, непостоянен. (Для труб большого диаметра при скорости в суженной части от 2,5 до 10 м коэффициент μ изменяется от 0,97 до 1.)

Таким образом водомер Вентури должен быть предварительно протарирован.

Водомер, снабженный самописцем, регистрирующим разность давлений по времени, является весьма точным измерительным прибором.

§ 2. Диафрагмовые счетчики.

За последние годы получили распространение так называемые измерительные шайбы (диафрагмовые счетчики), основанные на том же принципе, что и Вентури.

Как видно из фиг. 185, шайба представляет собой короткую насадку. Она вставляется между фланцами труб. Внутри шайбы имеются два канала (а и б), выходящие одним своим концом наружу, а другим внутрь трубы; причем одно отверстие расположено навстречу течению, а другое по течению жидкости в трубе. Так как шайба (насадка) сжимает проходящую через нее струю,

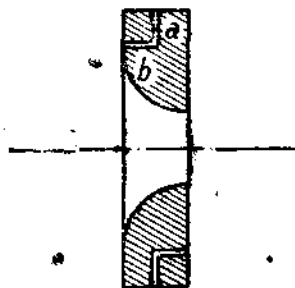
то, очевидно, в каналах будут разные давления. Зная разность давлений в каналах, размеры трубы и сжатого сечения шайбы, можно, согласно выше изложенному (насадка Вентури) и по тем же формулам, определить скорость, следовательно, и расход жидкости.

§ 3. Трубка Пито (Pitot) и Прандтля.

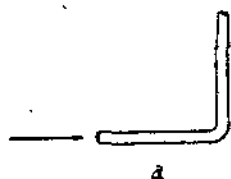
Определение скорости движения жидкости может быть произведено с помощью, трубки Пито или трубки Прандтля.

На фиг. 136, 137 и 138 даны три типа трубок.

Открытая с обоих концов трубка *a* (фиг. 136) употребляется при определении скорости потока в открытом русле (канале). Изогнутым концом она направлена по линии тока в сторону, противоположную движению. Давление у конца будет равно статическому давлению ($\frac{P_{ст.}}{\gamma}$), сложенному со скоростным напором ($\frac{w_0^2}{2g}$). Это давление уравнивает давление ($\frac{P_1}{\gamma}$) столба жидкости, находящегося в трубке, т. е.



Фиг. 135.



Фиг. 136.

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{w_0^2}{2g} = \frac{P_1}{\gamma}.$$

Вследствие избытка давления

$$\frac{P_1 - P_0}{\gamma} = \frac{w_0^2}{2g}.$$

уровень жидкости в вертикальном колене трубки будет расположен выше уровня жидкости в канале на величину, равную разности

$$\frac{P_1 - P_0}{\gamma} = h.$$

Измеряя *h*, можем определить скорость потока в месте, где расположен конец трубки Пито, а именно:

$$w_0^2 = 2g \frac{P_1 - P_0}{\gamma} = 2gh,$$

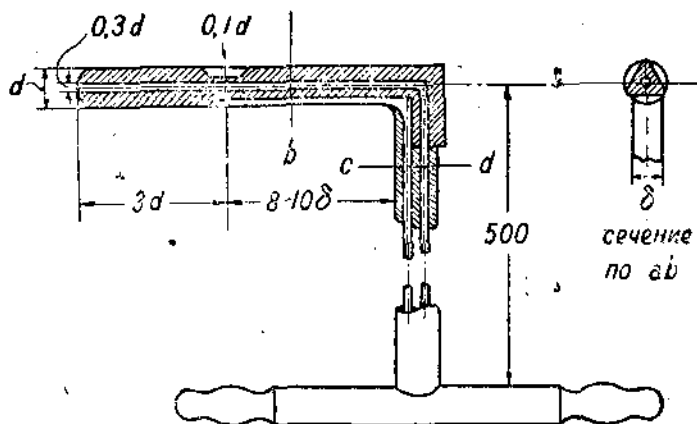
откуда

$$w_0 = \xi \sqrt{2gh}. \quad (7)$$

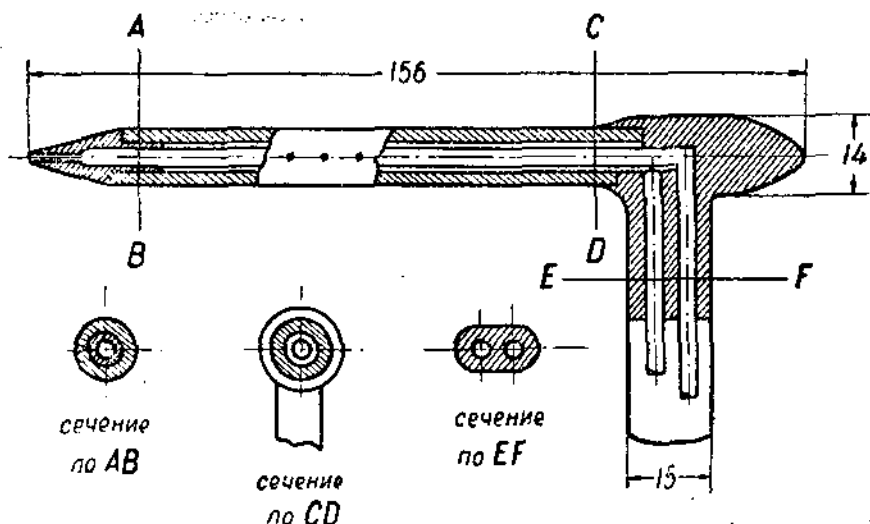
Перед корнем поставлен поправочный коэффициент ξ , определяемый опытным путем и зависящий от вязкости жидкости и нарушения потока, производимого самим прибором. Коэффициент ξ , при тщательном изготовлении трубки близок к единице ($\xi = 1,01$ до 1,03).

В случае движения жидкости или газа в трубе обычно употребляются трубка Прандтля или трубка английская *NPL*.

Из фиг. 137 и 138 видно отличие этих трубок—трубка Прандтля имеет головную часть в виде полушария и кольцевой прорез ($0,1d$), а английская стандартная—коническую головную часть и отверстия малого диаметра, расположенные на боковой поверхности.



Фиг. 137.



Фиг. 138.

Центральная трубка (фиг. 137 и 138) передает в одно из колен дифференциального манометра суммарное давление, складываемое из давления статического $P_{ст.}$ и скоростного напора $\frac{w_0^2}{2g}$; через вырез (трубка Прандтля) или отверстия в боковой поверхности (английская трубка) и далее через трубку соединенную с кольцевым пространством передается в другое колено манометра давление статическое $P_{ст.}$

Показание дифференциального манометра, выраженное высотой H столба движущейся жидкости:

$$H = h \frac{\gamma}{\gamma_{ж.}}$$

где γ — уд. вес жидкости в манометре,

$\gamma_{ж.}$ — уд. вес движущейся в трубке жидкости или газа, дает возможность определить скорость в том месте, где установлена трубка Прандтля или английская, а именно по формуле (7):

$$w = \xi \sqrt{2gH} = \xi \sqrt{2gh \frac{\gamma}{\gamma_{ж.}}} \quad (8)$$

В случае движения газа уд. вес его $\gamma_{ж.}$ зависит от давления и температуры, а потому кроме показаний дифференциального манометра необходимо иметь абсолютное статическое давление и температуру измеряемого потока.

Уд. вес газа определяется по формуле:

$$\gamma_{ж.} = \gamma_0 \frac{T_0}{Td} \cdot \frac{P_{ст.}}{P_0} \quad (9)$$

где γ_0 — уд. вес газа при $t = 0^\circ\text{C}$ и давлении $P = 760$ мм рт. столба,

$$T_0 = 273^\circ\text{C},$$

$$Td = T_0 + t,$$

$P_{ст.}$ — абсолютное давление газа в месте, где установлена трубка Пито-Прандтля,

P_0 — атмосферное давление в момент измерения.

Передвигая трубку Прандтля по радиусу трубы, получим поле скоростей в данном сечении.

Для определения средней скорости потока конец трубки устанавливается точно вдоль оси трубы. При таком положении трубки по формуле (8) получаем значение осевой скорости w_0 .

Пользуясь кривой (фиг. 42) Стантона и Пэннелла (кривая зависимости величины отношения средней скорости и скорости по оси трубы от параметра Рейнольдса $(Re = \frac{w_0 d}{\nu})$), вычислив параметр Re , соответствующий осевой скорости, определяем отношение средней скорости к осевой, и окончательно средняя скорость $w_{ср.}$ будет равна этому отношению, умноженному на осевую скорость w_0 .

Объемный расход жидкости или газа будет равен:

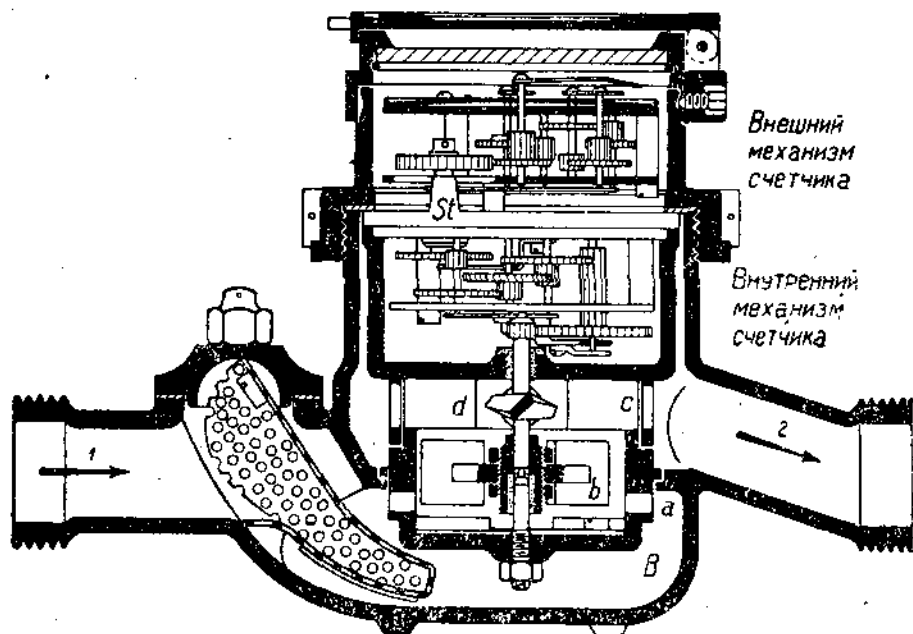
$$Q = F \cdot w_{ср.} \quad (10)$$

Преимущество счетчиков, построенных на указанных принципах, перед другими системами (крыльчатые, поршневые) в чрезвычайной простоте конструкции, отсутствии движущихся частей и возможности измерения больших расходов жидкости.

§ 4. Водомеры и нефтемеры.

Кроме указанных выше приборов для замера расхода воды, нефти и газа имеются так называемые водомеры-счетчики. Имеется очень много систем, но все они могут быть разделены на две группы: к первой группе относятся водомеры, измеряющие количество протекающей жидкости по числу оборотов особых колес, приводимых в действие давлением струи, так называемые скоростные или крыльчатые; ко второй—относятся водомеры, измеряющие расход жидкости по числу наполнений определенного объема, так называемые объемные.

Все такого рода измерители менее точны, чем Вентури, шайба, трубка Пито-Ирандтля; но, несмотря на это, имеют весьма широкое распространение благодаря отсутствию каких-либо вычислений.

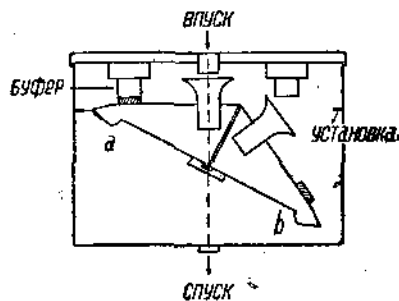


Фиг. 139.

На фиг. 139 представлен крыльчатый водомер Сименс и Гальске, применяющийся к трубам диаметра от 10 до 250 мм. Он состоит из цилиндра и двух патрубков 1 и 2, которыми водомер соединяется с трубопроводом. Он разделяется на 3 части: нижнюю часть *B*, в которую вода протекает через патрубок 1, предварительно пройдя соты, служащие для очистки ее от грязи; среднюю часть, или камеру *c*, в которой помещается вертушка, и верхнюю *St*, в которой находится счетный механизм. Вертушка состоит из вертикальной оси, на которой укреплены 4 лопасти *b*, внизу ось поддерживается подпятником, верхней своей частью ось проходит через сальник в камеру *St*, где насаженная на нее

шестерня сочленена с целым рядом других, составляющих в совокупности счетный механизм, снабженный циферблатом со стрелками. Вода, поступающая из патрубка 1, проходит в камеру с, где приводит во вращение вертушку, которая, в свою очередь, приводит в действие весь счетный механизм St. Далее, вода из камеры с проходит в патрубок 2 и поступает в трубопровод. Шкалы циферблата градуированы на кубометры или доли исключительно опытным путем. Указанный здесь крыльчатый водомер является одним из типичных.

На фиг. 140 показан объемный водомер Экгарта. Он состоит из двух треугольных полых призматических сосудов, расположенных рядом и вращающихся на одной оси. Водомер устанавливается так, что при малейшем притоке воды в находящиеся по сторонам желобки (а и б) происходит моментальное опрокидывание, вследствие перемещения центра тяжести; при этом пустой резервуар поднимается кверху, в то время как другой опорожняется. Число опрокидываний, регистрируемое счетчиком, определяет количество протекающей жидкости. Точность измерения в такого рода водомерах ограничена; она в значительной мере зависит от состояния уровня жидкости в резервуаре в момент его наполнения и от силы потока жидкости.



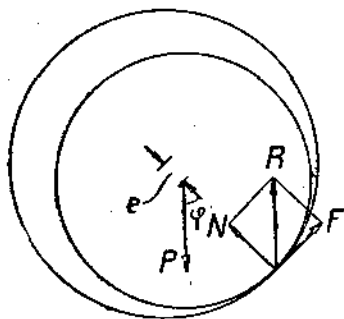
Фиг. 140.

ЗАДАНИЕ 32.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ.

§ 1. Основные идеи Петрова и Рейнольдса.

До появления первой работы Н. Петрова „Новая теория трения“ (1883 г.) задача о трении цапф в подшипниках решалась на основе закона „сухого“ трения Кулона. Таким образом принималось, что сила трения, возникающая между цапфой и подшипником, прямо-пропорциональна нормальной реакции подшипника.



Фиг. 141.

Выделим из цапфы цилиндрический элемент двумя сечениями, перпендикулярными ее оси и отстоящими друг от друга на расстоянии единицы длины (см. фиг. 141).

Если через P обозначить вес рассматриваемого элемента и через φ — угол, который образует реакция N подшипника с вертикалью, то очевидно

$$N = P \cos \varphi.$$

Зная коэффициент сухого трения f , мы получим силу трения по закону Кулона как произведение величины нормальной реакции на коэффициент f , т. е.

$$F = fN = fP \cos \varphi.$$

Равнодействующая сил F и N сила R образует вместе с силой P пару, момент которой характеризует момент трения в подшипнике. Таким образом

$$R = \frac{F}{\sin \varphi} = fP \operatorname{ctg} \varphi$$

и кроме того

$$R = P,$$

отсюда

$$f \operatorname{ctg} \varphi = 1,$$

и, следовательно,

$$f = \operatorname{tg} \varphi, \quad (1)$$

т. е. φ — есть так называемый угол трения.

Момент трения, как момент пары, равен произведению одной из составляющих пары сил на расстояние между ними.

Итак

$$M = P \cdot r \cdot \cos \varphi. \quad (2)$$

Из этого выражения следует, что момент трения не зависит от величины окружной скорости вращения цапфы и пропорционален нагрузке на цапфу и ее радиусу в первой степени.

Основоположник гидродинамической теории смазки Н. Петров впервые рассмотрел действительную картину трения и дал основную формулу для случая присутствия между цапфой и подшипником слоя смазочного масла.

Упрощенная формула выводится в предположении, что цапфа расположена концентрично с подшипником, т. е. толщина зазора, заполненного смазочным маслом, постоянна по величине.

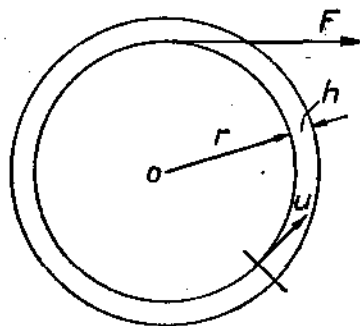
Обозначим толщину этого слоя через h .

Пусть кроме того:

u — окружная скорость цапфы,

μ — коэффициент абсолютной вязкости масла,

r — радиус цапфы (см. фиг. 142).



Фиг. 142.

При вращении цапфы в подшипнике масло приходит в движение и, следуя основному закону вязкой жидкости, будет прилипать к стенкам. Таким образом скорость масла у внутренней поверхности подшипника будет равна нулю, а на внешней поверхности цапфы будет равна u — окружной скорости цапфы. Принимая такую картину распределения скоростей в слое смазочного масла, мы видим, что падение скорости в слое толщиной h будет равно u .

Уравнение Ньютона для напряжения трения

$$\tau = \mu \frac{du}{dh}$$

может быть представлено приближенно в виде

$$\tau = \mu \frac{u}{h}.$$

Сила трения на поверхности цапфы длиной, равной единице, будет равна:

$$F = \tau \cdot 2\pi r = 2\pi r \mu \frac{u}{h}. \quad (3)$$

Момент силы трения относительно оси вращения по абсолютной величине представится произведением силы F на радиус:

$$M = F \cdot r = 2\pi r^2 \mu \frac{u}{h}. \quad (4)$$

Эти последние формулы, выведенные Н. Петровым, показывают, что ни сила трения, ни величина момента трения не зависят от нагрузки на цапфу, а являются функцией окружной скорости цапфы и вязкости смазочного масла.

§ 2. Коэффициент смазочного трения.

Введем так называемый коэффициент смазочного трения:

$$\psi = \frac{M}{P \cdot h}, \quad (5)$$

где P — нагрузка на цапфу.

Нетрудно убедиться, что коэффициент ψ есть число отвлеченное, так как и числитель, и знаменатель выражения (5) имеют размерность момента силы.

Подставив в формулу (5) соотношение (4), получим:

$$\psi = 2\pi \mu \frac{r^2 u}{h^2 P}. \quad (6)$$

В силу сказанного выше правая часть уравнения (6) будет также число отвлеченное.

Этот параметр, учитывающий влияние на коэффициент смазочного трения различных факторов (окружной скорости, нагрузки на цапфу, вязкости масла), принято обозначать:

$$Sm = 2\pi \mu \frac{r^2 u}{h^2 P}. \quad (7)$$

Параметр (7) был введен в теорию смазки Зоммерфельдом, который, исходя из приближенной гидродинамической теории смазки, на основе теории механического подобия, показал, что коэффициент смазочного трения ψ является функцией параметра Sm т. е.

$$\psi = \Phi(Sm). \quad (8)$$

Дальнейшие исследования Зоммерфельда, Жуковского и др. показали, что коэффициент ψ зависит, вообще говоря, также от отношения $\frac{h}{r}$ и эксцентриситета цапфы e .

Под последним подразумевают расстояние между осями цапфы и подшипника (см. фиг. 141).

В самом деле, формулы (4) и (6) получены в предположении концентричного расположения цапфы и подшипника, чего, вообще говоря, в действительности не бывает.

Итак, вообще говоря,

$$\psi = \Phi \left(Sm, \frac{h}{r}, \frac{e}{h} \right). \quad (9)$$

До настоящего времени предложено несколько теорий смазки, изучающих явление трения в подшипнике с точки зрения современной гидравлики.

Сюда относятся точные теории Жуковского-Чаплыгина и Дюффинга, а также приближенные теории Зоммерфельда и Гаррисона.

Теории эти построены на основе ряда допущений. Главнейшие из них суть:

1. Смазочное масло целиком заполняет пространство между цапфой и подшипником (полный охват цапфы).

2. Режим движения масла в этом пространстве ламинарный.

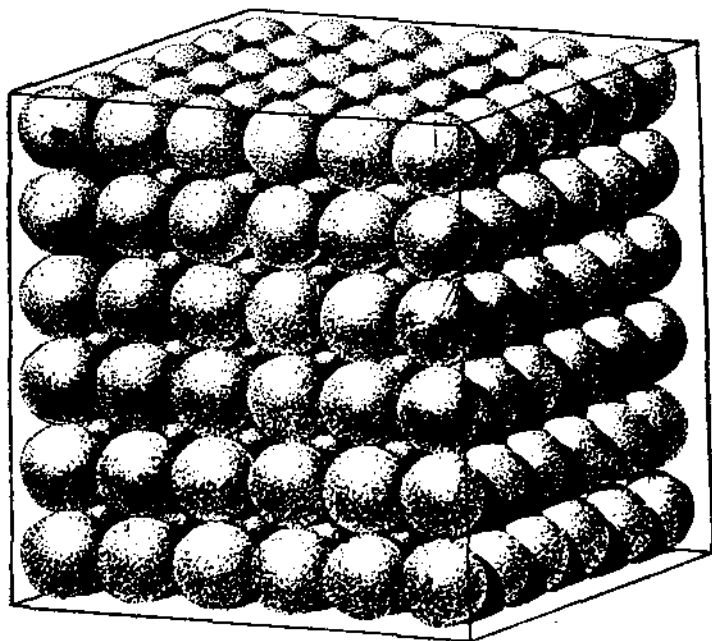
3. Относительные скорости масла у цапфы и подшипника равны нулю.

4. В случае полного охвата цапфы смазочным маслом ось цапфы смещается в сторону движения нижних точек цапфы и остается при этом параллельной оси подшипника.

ТЕОРИЯ ПОРИСТОСТИ.

§ 1. Геометрическая теория пористости.

Для упрощения задачи определения величины пористости Слихтер предположил, что рассматриваемые песчинки имеют форму шариков с одинаковыми диаметрами d .

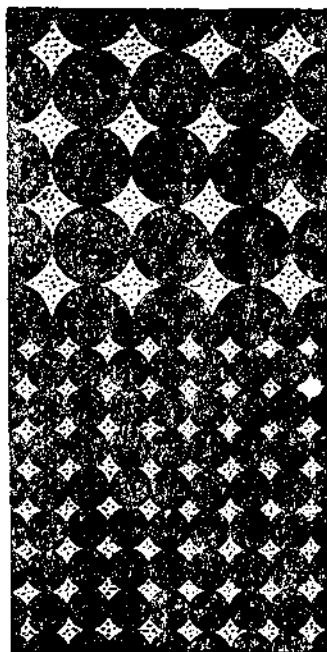
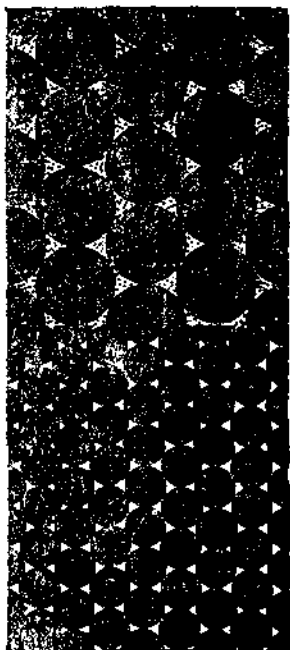


Фиг. 143.

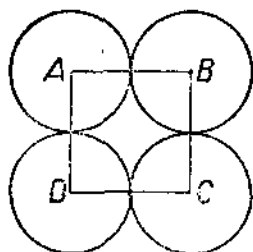
Следовательно, рассматривая кусок пласта (песчаного) (фиг. 143) некоторого объема V_1 и принимая за V_2 объем всех шариков, заключенных в куске пласта, видим, что пористость m для данного случая будет равна:

$$m = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \quad (1)$$

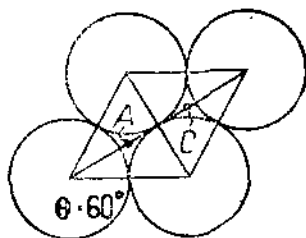
(т. е. m является отношением пустот ко всему объему).



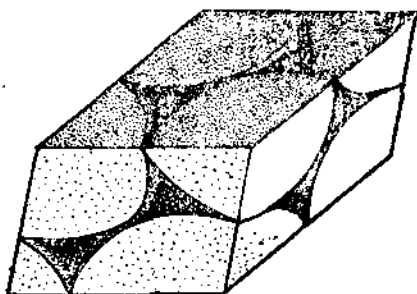
Фиг. 144.



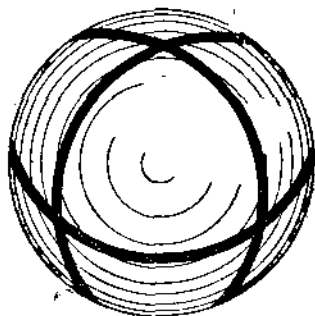
Фиг. 145.



Фиг. 146.



Фиг. 147.



Фиг. 148.

Ясно, что характер расположения шаров в данном объеме (фиг. 144) определяет величину пористости (так, напр., фиг. 145 соответствует наибольшей пористости).

Деформируя расположение шаров на фиг. 145 с целью большего соприкосновения поверхностей шаров, мы видим, что шары образуют форму ромба (фиг. 146), у которой стороны равны $2r$, и угол θ , который меняет конфигурацию наших шаров, изменяется от 90° до 60° . Нетрудно видеть, что самое свободное расположение шаров — это при угле в 90° и самое тесное — при 60° .

Соединяя центры рассматриваемых шаров фиг. 146 (спереди 4 шара и сзади 4 шара), получим ромбоэдр, составленный из восьми кусков шара (фиг. 147), в силу того, что в ромбоэдре углы являются дополнительными до 180° , мы, складывая отдельные куски шара, образующие ромбоэдр, получим полный шар (фиг. 148).

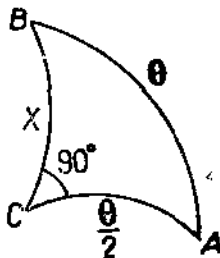
Определяем высоту h нашего ромбоэдра. Она лежит в плоскости диагонального сечения ромбоэдра; найдя угол $BOC = X$, определим и высоту.

Имеем сферический треугольник BCA (фиг. 149); зная, что $\cos$ гипотенузы равен произведению $\cos$ инус'ов катетов, имеем:

$$\cos \theta = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos X, \quad (2)$$

отсюда

$$\cos X = \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}}$$



Фиг. 149.

или

$$\begin{aligned} \sin X &= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 + \sin^2 \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1}; \end{aligned}$$

имеем в виду, что

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

или

$$4 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 2 + 2 \cos \theta;$$

следовательно,

$$\sin X = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \sqrt{2 + 2 \cos \theta - 1} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cos \theta}.$$

Умножая на $2 \cos \frac{\theta}{2}$ числитель и знаменатель, имеем:

$$\sin X = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \sqrt{1 + 2 \cos \theta}.$$

Итак,

$$\sin X = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \sqrt{1 + 2 \cos \theta}. \quad (3)$$

Теперь нетрудно найти высоту h , которая равна $d \sin X$, т. е.

$$h = \frac{d \sin \theta}{1 + \cos \theta} \sqrt{1 + 2 \cos \theta}. \quad (4)$$

Зная, что площадь основания ромбоэдра равна

$$2 \cdot \frac{1}{2} d \cdot d \cdot \sin \theta = d^2 \sin \theta,$$

определяем объем ромбоэдра:

$$V_1 = d^2 \cdot \sin \theta \cdot h = \frac{d^3 \sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \sqrt{1 + 2 \cos \theta}. \quad (5)$$

Переходя к определению величины пористости m , вспомним, что

$$m = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = 1 - \frac{V_2}{V_1}$$

и что сумма объемов отдельных кусков, входящих в ромбоэдр, равна объему шара:

$$V_2 = \frac{\pi d^3}{6};$$

мы можем написать, что

$$m = 1 - \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{\frac{\pi d^3}{6} (1 + \cos \theta)}{d^3 \sin^2 \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}};$$

зная, что

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = (1 + \cos \theta) (1 - \cos \theta),$$

окончательно имеем:

$$m = 1 - \frac{\pi}{6 (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}. \quad (6)$$

Отсюда мы видим, что пористость совершенно не зависит от диаметра песчинок, а зависит исключительно от угла θ .

Для случая, при котором $\angle \theta = 90^\circ$, будем иметь:

$$m = 1 - \frac{\pi}{6} = 47,7\%.$$

Рассматривая фиг. 150, мы видим, что площадь просветов между песчинками будет равна:

$$n = \frac{S - S_1}{S}, \quad (7)$$

где S — площадь всей рассматриваемой поверхности — $S = d_s \sin \theta$,
 S_1 — площадь, занимаемая песчинками, — $S_1 = \frac{\pi d^2}{4}$.

Для нашего случая имеем:

$$n = 1 - \frac{S_1}{S} = 1 - \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{d^2 \sin \theta} = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \theta};$$

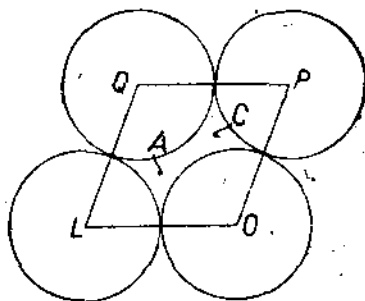
отсюда мы видим, что и площадь просветов также не зависит от диаметров песчинок, при условии равенства d для всех песчинок.

Для случая

$$\angle \theta = 90^\circ$$

имеем:

$$n = 1 - \frac{\pi}{4} = 0,215 = 21,5\%.$$

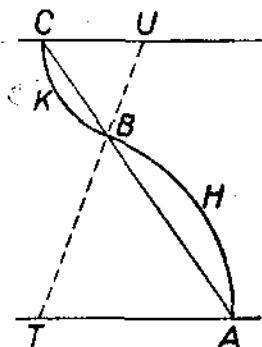


Фиг. 150.

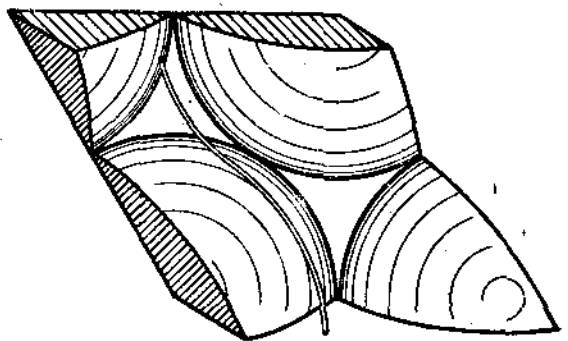
Физический смысл величины площади просветов заключается в том, что эта площадь является живым сечением пласта, т. е. площадью, через которую непосредственно происходит фильтрация.

§ 2. Кинематическое рассмотрение движения жидкости через пористую среду.

Рассмотрим теперь путь, по которому проходит какая-нибудь частица жидкости в пласте. Так как частицы жидкости должны проходить между шариками (т. е. песчинками), огибая их, то



Фиг. 151.



Фиг. 152.

траектория частицы не будет прямая линия, перпендикулярная к верхнему и нижнему основанию пласта, а будет некоторая искривленная линия $АНВКС$ (фиг. 151), которая является осью

жидкой струйки, протекающей между шариками, образующими пласт.

На фиг. 152 дано перспективное изображение означенной оси струйки в соответствии с фиг. 151, причем K и H на фиг. 151

соответствуют максимальному сечению пор, а C и A — минимальному сечению пор.

Соответственно этому на фиг. 153 AC есть ребро нашего основного ромбоэдра OB (фиг. 154).

По исследованию Слихтера имеем отношение длины S дуги оси струйки к длине d означенного ребра OB :

$$\frac{S}{d} = 1,195 - 0,39 \frac{\theta}{\pi}.$$

(На фиг. 153 стрелки представляют прямолинейные оси, причем они параллельны ребрам основного ромбоэдра.)

При 60° длина струйки на 6,5% больше длины ребра основного ромбоэдра:

$$\frac{S}{d} = 1,065.$$

Из формулы (4) мы имеем длину ребра d , а следовательно длина искривленной оси струйки будет:

$$AC = \frac{h(1 + \cos \theta)}{\sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}} \cdot \left(1,195 - \frac{0,39\theta}{\pi}\right).$$

По исследованию Слихтера надо принимать вообще

$$AC = \frac{1,065(1 + \cos \theta)h}{\sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}. \quad (8)$$

Подсчитаем теперь величину эффективной площади сечения жидкой струйки, обратимся для этого к фиг. 155 и 156.

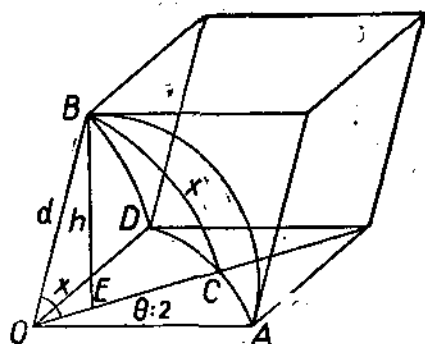
Фиг. 156 представляет собой разрез фиг. 155 по линии AD . Если r есть радиус шарика, то:

$$AB = 2r,$$

$$AO = \frac{2}{3} r \sqrt{3},$$

$$AD = r \sqrt{3}$$

$$EO = r \left(\frac{2}{3} \sqrt{3-1} \right).$$



Фиг. 154.

Если R есть радиус вписанного в равносторонний треугольник круга, то площадь этого треугольника

$$F = R^2 \sqrt{3}.$$

Площадь криволинейного треугольника EFD между нашими кругами (фиг. 155) равна площади равностороннего треугольника ABC минус три сектора круга с углами в 60° , т. е. минус половина площади круга, но площадь треугольника ABC равна $r^2 \sqrt{3}$, поэтому площадь F , нашего криволинейного треугольника будет дана формулой:

$$F_1 = r^2 \sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = 0,1613 r^2;$$

точно также площадь круга, вписанного в наш криволинейный треугольник:

$$F_2 = 3 \sqrt{3} \cdot OE^2 = 3 \sqrt{3} r^2 \left[\frac{2}{3} \sqrt{3} - 1 \right]^2 = 0,1247 r^2.$$

Действительная площадь прохода между шариками будет лежать между F_1 и F_2 , средняя арифметическая F_1 и F_2 равна $0,1430 r^2$, но Слихтер принимает ее в действительности равной

$$F = 0,1475 \cdot r^2,$$

т. е. ближе к F_1 , как то имеет место в действительности.

Из фиг. 155 видно, что площадь сечения нашей струйки меняется в соответствии с проходом между шариками; при принятых на фиг. 156 осях координат уравнение круга (сечение шарика через центр) будет:

$$(X - \overline{OA})^2 + y^2 = r^2,$$

отсюда:

$$X - \overline{OA} = \pm \sqrt{r^2 - y^2},$$

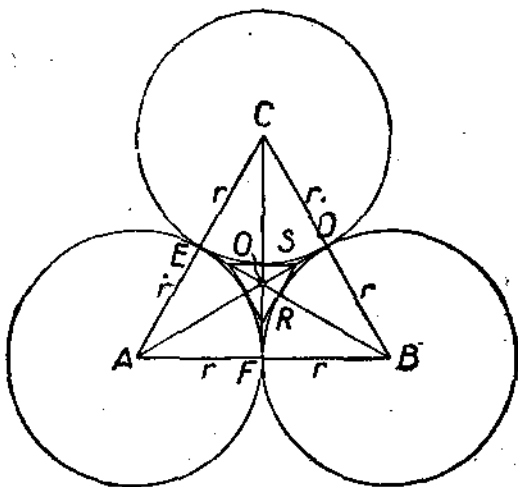
следовательно,

$$X = \overline{OA} - \sqrt{r^2 - y^2} \geq \frac{2}{3} r \sqrt{3} - \sqrt{r^2 - y^2} = PQ.$$

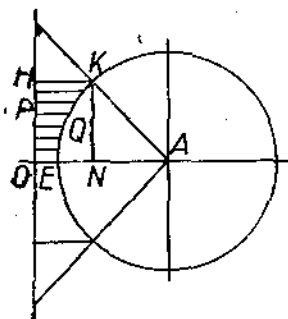
Наивысшая точка OH имеет расстояние от точки O , равное $\frac{r}{2}$.

Очевидно PQ является радиусом круга, вписанного в сечение струйки по плоскости PQ , и потому площадь равностороннего треугольника, в который вписан круг радиуса PQ , будет:

$$f(y) = 3 \sqrt{3} PQ^2.$$



Фиг. 155.



Фиг. 156.

Мы видим, что эта площадь является переменной величиной до линии $ОН$, по оси струйки.

Слихтер вычисляет среднюю величину площади сечения по известной формуле:

$$\omega = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy;$$

здесь

$$a = 0$$

$$b = \frac{r}{2};$$

подставляя соответствующие величины, найдем:

$$\omega = \frac{6\sqrt{3}}{r} \int_0^{\frac{r}{2}} PQ^2 dy = \frac{6\sqrt{3}}{r} \int_0^{\frac{r}{2}} \left[\frac{2}{3} r \sqrt{3} - \sqrt{r^2 - y^2} \right]^2 dy.$$

Выполняя интеграцию, Слихтер нашел, что:

$$\omega = 0,2118 r^2. \quad (9)$$

Эта формула дает среднее значение площади поперечного сечения каждой жидкой струйки, протекающей между шариками.

Сравнивая ω и F , мы найдем:

$$\frac{\omega}{F} = \frac{0,2118 r^2}{0,1475 r^2} = 1,435,$$

т. е. среднее сечение струйки на 43,5% более самого узкого ее сечения по длине OE .

§ 3. Вывод формулы Слихтера для скорости фильтрации.

В виду того что движение жидкости в песках совершается очень медленно, с ничтожными скоростями, мы можем применить для расчета протекания формулу Пуазейля (для движения вязкой жидкости по трубе).

Для случая круглой трубы радиуса r имеем выражение для расхода:

$$Q = \frac{\pi r^4 P}{8\mu l},$$

где P — разность давлений на концах круглой трубы,

μ — коэффициент абсолютной вязкости,

l — длина трубки.

Принимая

$$\pi r^2 = f$$

(площадь поперечного сечения), пишем:

$$Q = \frac{P f^2}{8\pi \mu l}.$$

Отсюда получим величину средней скорости течения:

$$w = \frac{Q}{f} = \frac{Pf}{8\pi\mu l}.$$

Так как в нашем случае движение жидкой струйки происходит между шарами — площадь поперечного сечения струйки приближается к форме треугольника, то мы, применяя формулу Буссинака для средней скорости течения по трубе, поперечное сечение которой есть равносторонний треугольник, получим:

$$w' = \frac{Pf}{20\sqrt{3}\mu l}.$$

При равных площадях поперечного сечения обеих труб отношение средних скоростей будет:

$$\frac{w}{w'} = \frac{Pf \cdot 20\sqrt{3}\mu l}{8\pi\mu l Pf} = \frac{20\sqrt{3}}{8\pi} = 1,38,$$

т. е. если вместо треугольного сечения мы возьмем круглое с той же площадью, то мы увеличим скорость течения на 38%. При практических расчетах мы пользуемся формулой Пуазейля, хотя, как мы видели выше, по этой формуле мы получаем скорость больше действительной на 38%, так как действительная площадь сечения, рассматриваемая нами, близка к треугольной.

В виду вышеизложенного Сликтер применяет формулу Пуазейля, ибо сделанные ошибки компенсируются. В самом деле, действительная длина криволинейной струйки на 6,5% выше принятой в расчете прямолинейной; площадь же поперечного сечения близка к треугольной, что дает увеличение средней скорости на 38%, т. е. мы должны уменьшить среднюю скорость в $1,065 \times 1,38 = 1,445$ раза. С другой стороны, среднее сечение струйки в 1,435 больше самого узкого поперечного сечения струйки и поэтому скорость надо увеличить в 1,435 раза; в итоге мы получим:

$$w_{\text{ср.}} = \frac{fP \cdot 1,435}{8\pi\mu l \cdot 1,065 \cdot 1,38} \approx \frac{Pf}{8\pi\mu l};$$

отсюда видим, что при расчете средней скорости можно пользоваться формулой Пуазейля.

Рассматривая фильтрацию через пористую среду, определим расход жидкости. В общем виде формула расхода будет равна

$$Q = F \cdot n \cdot w,$$

где F — площадь пласта,

n — величина просветов,

w — средняя скорость течения жидкости.

В значение средней скорости

$$w = \frac{Pl}{8\pi\mu l}$$

подставляем вышенайденную величину:

$$l = \frac{h(1 + \cos \theta)}{\sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}$$

и будем иметь:

$$w = \frac{P f \sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{8 \pi \mu h (1 + \cos \theta)}.$$

Здесь величина f есть площадь наименьшего сечения жидкой струйки, весьма близкая к криволинейному треугольнику, поэтому величина площади будет равна полуразности площадей основного ромба и площади круга, т. е.:

$$f = \frac{d^2}{2} \left(\sin \theta - \frac{\pi}{4} \right),$$

следовательно, формула расхода напишется так:

$$Q = \frac{\frac{d^2}{2} \left(\sin \theta - \frac{\pi}{4} \right) F n P \cdot \sin \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{8 \pi \mu h (1 + \cos \theta)}.$$

Замечая, что

$$n = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \theta},$$

$$\sin \theta - \frac{\pi}{4} = n \sin \theta,$$

пишем:

$$Q = \frac{F d^2 n^2 P \sin^2 \theta \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}{16 \pi \mu h (1 + \cos \theta)}.$$

Знаем, что величина пористости

$$m = 1 - \frac{\pi}{6 (1 - \cos \theta) \sqrt{1 - 2 \cos \theta}},$$

откуда:

$$(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta} = \frac{\pi}{6 (1 - m)},$$

или

$$\sqrt{1 + 2 \cos \theta} = \frac{\pi}{6 (1 - m) (1 - \cos \theta)},$$

следовательно,

$$Q = \frac{F d^2 n^2 P \sin^2 \theta \cdot \pi}{6 \cdot 16 \cdot \pi \mu h (1 + \cos \theta) (1 - m) (1 - \cos \theta)} = \frac{F d^2 n^2 P}{96 \mu h (1 - m)}.$$

Слихтер в эту формулу вводит некоторый коэффициент:

$$\sigma = \frac{1 - m}{n^2},$$

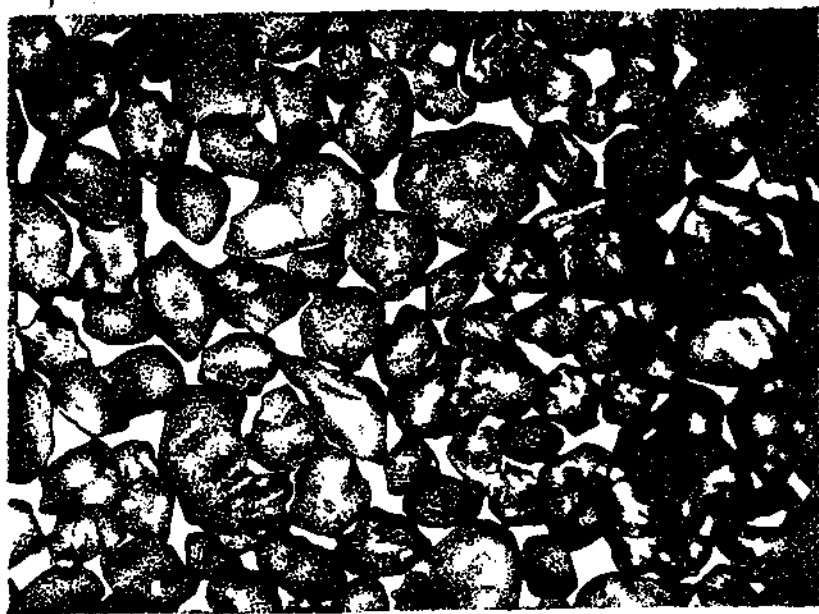
зависящий от угла θ ; подставляя его в формулу расхода, будем иметь:

$$Q = \frac{F d^2 P}{96 \mu h \sigma} \quad (10)$$

(величина σ определяется по таблице 18; если известна величина пористости m).

Таблица 18.

θ°	$m\%$	$n\%$	α	θ°	$m\%$	$n\%$	α
60—00	22,95	9,31	88,90	68—18	37	15,49	26,26
60—2	26	9,37	84,30	69—17	38	16,05	24,08
60—41	27	9,93	74,05	70—20	39	16,61	22,11
61—18	28	10,45	65,94	71—28	40	17,19	20,32
61—55	29	10,98	58,90	72—43	41	17,75	18,73
62—36	30	11,55	52,47	74—3	42	18,32	17,28
63—18	31	12,10	47,12	75—32	43	18,20	15,96
64—3	32	12,66	42,44	77—10	44	19,46	14,76
64—49	33	13,22	38,44	79—6	45	20,03	13,71
65—37	34	13,78	34,75	81—25	46	20,57	12,76
66—27	35	14,34	31,62	84—59	47	21,17	11,83
67—21	36	14,91	28,79	90—00	47,64	21,46	11,38



Фиг. 157.

Принимая для величин, входящих в формулу (10), следующие размерности:

F — m^2 ,

h — m ,

d — mm ,

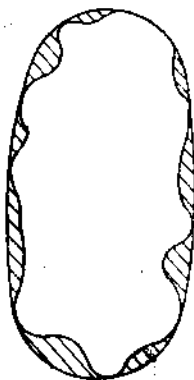
P — $атм.$,

Q — $m^3/час$,

мы будем иметь формулу расхода в следующем виде:

$$Q = 36,8 \frac{FPd^3}{\mu h^2} [\text{м}^3/\text{час}], \quad (11)$$

т. е. количество жидкости, фильтрующейся через пласт при одинаковом диаметре песчинок, пропорционально площади пласта F , падению давления P , квадрату диаметра частиц d и обратно-пропорционально толщине пласта.



Фиг. 158.

Многочисленные опыты над проверкой формулы Слихтера дали хорошие результаты.

Объяснение этого можно видеть в следующем. Рассматривая фотографии песков (фиг. 157), замечаем, что вид песчинок имеет яйцеподобную форму, приближающуюся к эллипсоиду. При прохождении жидкостей через пласт, состоящий из таких песчинок, в выемках песчинок (фиг. 158) застаивается так называемая мертвая вода, не поддающаяся извлечению, и движение жидкости происходит поверх этой воды. В этом случае песчинки принимают форму эллипсоидов (образуется удобообтекаемая форма).

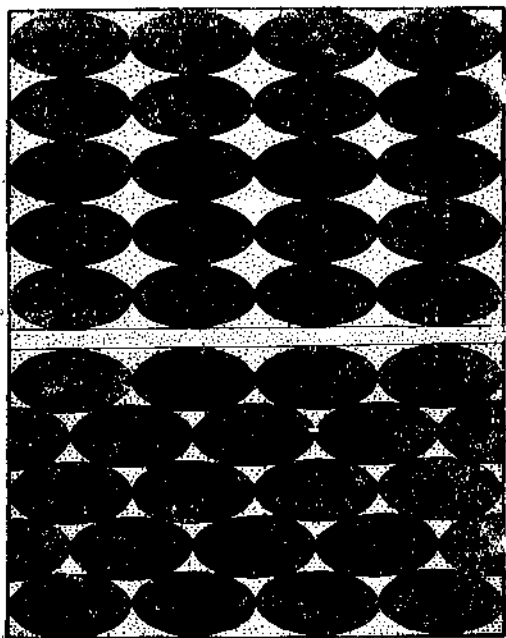
Если мы систему шаров, к которым относили все наши рассуждения, будем растягивать по трем направлениям, то получим трехосные эллипсоиды (фиг. 159).

Следовательно, все выводы Слихтера вполне точно могут быть отнесены к эллипсоидам (вместо шаров), т. е. к песчинкам, имеющим в действительности, при наличии мертвой жидкости, форму, близкую к эллипсоидам.

§ 4. Опытные данные о пористости.

Для определения эффективного диаметра песка производится механический анализ песка и данные располагают в виде таблицы.

По оси абсцисс откладывается диаметр песчинок в мм, а по оси ординат — процентное содержание всех фракций песка от 0, кончая этим диаметром (фиг. 160).



Фиг. 159.

Эффективным диаметром d_e называется такой диаметр песчинок, при котором сумма всех фракций от 0 и кончая этим диаметром составляет 10%.

Обозначим d_0 тот диаметр песчинок, чтобы сумма всех фракций от 0 и кончая этим диаметром составляла 60%.

Отношение d_0/d_e называется коэффициентом неоднородности данного песка, оно должно быть не более 5.

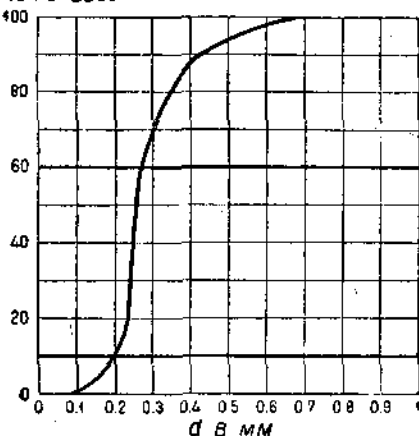
Механический анализ песка производится при помощи сит.

Для песков, имеющих эффективный диаметр песчинки

$$d_e > 3 \text{ мм},$$

в таблице 19 приведены скорости фильтрации в метрах в сутки.

% по весу



Фиг. 180.

Таблица 19.

d_e в мм	Значения i								
	0,0005	0,001	0,002	0,006	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1
3	3,5	7	14	40	67	125	183	280	500
5	10	21	40	113	175	300	400	560	930
10	30	58	110	275	385	580	750	1060	1550
20	80	145	275	620	830	1800	—	—	—
30	150	275	480	930	1220	—	—	—	—
40	250	450	710	1240	—	—	—	—	—

На основании формулы Слехтера мы можем написать:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{d^3 P}{96 \mu h z} = K \cdot i, \quad (12)$$

где

$$K = \frac{d^2 \gamma}{96 \mu z}, \quad (13)$$

$$i = \frac{H}{L}, \quad (14)$$

$$H = \frac{P}{\gamma}. \quad (15)$$

K — так называемый коэффициент фильтрации Дарси,

v — скорость фильтрации,

i — гидравлический уклон (отвлеч. число).

Американский инженер А. Газен предложил следующую эмпирическую формулу для чистых песков (для воды температурой $T^\circ \text{Ц}$)

$$v = 116 d_e^2 (0,70 + 0,03 T) \text{ в см/сек.} \quad (16)$$

Коэффициент фильтрации K очевидно зависит от пористости. Существует целый ряд эмпирических формул:

формула Коцени:

$$K = \alpha_1 \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \frac{m^3}{(1-m)^2}; \quad (17)$$

формула Цункера:

$$K = \alpha_2 \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \frac{m}{(1-m)^2}; \quad (18)$$

формула Терцаги:

$$K = \alpha_3 \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \frac{m^{-0,13}}{\sqrt{1-m}}; \quad (19)$$

формула Шмиделя:

$$K = \alpha_4 \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \frac{m^{2,5}}{(1-m)^{1,5}}. \quad (20)$$

На основании опытов со стеклянными шариками американский инженер Шривер дал следующую эмпирическую формулу:

$$Q = 265 F \frac{d^{1,68}}{\mu} \cdot m' \cdot \frac{H}{h} \left[\frac{\text{см}^3}{\text{сек.}} \right], \quad (21)$$

где $s = 4,14 - \frac{0,0141}{d}$,

F — в см^2 ,

d — в см ,

μ — в пуазах

H — давление, в см ртутного столба,

h — толщина пласта, в см .

Применяя опытную формулу (46) Газена к случаю загрязненных песков (примеси ила, глины) надо брать около 60% этой величины. Вообще следует определять коэффициент фильтрации K из опытов.

Ориентировочные цифры по П. П. Павловскому следующие:

1) песчаные грунты с некоторой примесью глины:

$$K = 0,006 - 0,007 \frac{\text{см}}{\text{сек.}},$$

2) песчано-глинистые грунты:

$$K = 0,003 - 0,004 \frac{\text{см}}{\text{сек.}},$$

3) проницаемые глинистые

$$K = 0,001 \frac{\text{см}}{\text{сек.}}.$$

Формула Сlichtера:

$$P = H\gamma = H \cdot \text{гр},$$

где H — напор в см, соответствующий давлению P .

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{d^2 H \rho g}{96 \mu h K} = \frac{d^2 g}{96 \nu K} \cdot \frac{H}{h} = 10,21 \frac{d^2}{\nu K} \cdot \frac{H}{h} \left[\frac{\text{см}}{\text{сек.}} \right],$$

$$\frac{H}{h} = i \text{ — гидравлический уклон,}$$

отсюда коэффициент фильтрации:

$$K = 10,21 \frac{d^2}{\nu} \frac{\text{см}}{\text{сек.}},$$

где ν — кинематическая вязкость.

Во всех формулах

$$0 < m < 1.$$

Постоянные α_1 , α_2 , α_3 и α_4 — суть опытные числа. Коцени дает своей формуле теоретическое обоснование.

ЗАДАНИЕ 34.

ДВИЖЕНИЕ НЕФТЕЙ ГРУНТОВЫХ И АРТЕЗИАНСКИХ ВОД И ГАЗОВ.

§ 1. Формула Дарси.

Изучение вопроса движения воды, нефти и газа в пористых телах имеет большое значение для нефтяного дела, так как это дает точную картину всех явлений, которые имеют место в пластах, содержащих нефть или воду, и соответственно этому определяются условия и методы разработки данного месторождения.

Первым исследователем вопроса пористости был французский инженер Дарси, установивший в первой половине XIX столетия формулу скорости прохождения жидкости в пористой среде.

Дарси было установлено, что расход жидкости в пористой среде с достаточной точностью определяется из формулы:

$$Q = KF \left(\frac{P_1 - P_2}{h} \right) t, \quad (1)$$

где (см. фиг. 161):

F — площадь фильтрации,

K — коэффициент фильтрации,

h — толщина пласта фильтрации,

t — время прохождения данного количества жидкости через пласт,

P_1 и P_2 — начальное и конечное давление или

$\frac{P_1 - P_2}{h}$ — падение напора на единицу толщины пласта.

Скорость фильтрации вообще называется скоростью прохождения жидкости через единицу площади пласта в единицу времени, поэтому формула Дарси дает скорость фильтрации:

$$v = \frac{Q}{Ft} = K \frac{P_1 - P_2}{h}. \quad (2)$$

Грунт разной пористости обладает различной способностью фильтрации, следовательно, изменение K коэффициента фильтрации стоит в прямой связи с величиной, определяющей пористость данной среды.

§ 2. Грунтовые воды.

Грунтовыми водами называются воды, движущиеся в пористых пластах, подстилающихся водонепроницаемыми горизонтами. Откачивая воду из скважины, пробуренной на горизонт с грунтовой водой, мы заметим, что уровень воды в скважине упадет (см. фиг. 161).

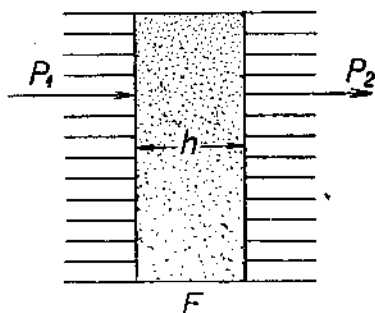
Обозначим через R радиус действия скважины или радиус дренирования.

Рассматривая цилиндр на расстоянии r от оси скважины с поверхностью фильтрации, равной $2\pi rz$, пишем формулу расхода жидкости:

$$Q = K2\pi rz i.$$

Так как падение напора на бесконечно-малом участке длины dr равно dz , мы можем написать, что

$$i = \frac{dz}{dr}.$$



Фиг. 161.

Следовательно, получим:

$$Q = 2\pi rzK \frac{dz}{dr}.$$

Решаем это уравнение:

$$zdz = \frac{Q}{2\pi K} \frac{dr}{r}$$

или, интегрируя:

$$\int zdz = \frac{Q}{2\pi K} \int \frac{dr}{r},$$

$$\frac{z^2}{2} + C = \frac{Q}{2\pi K} \ln r, \quad (3)$$

на расстоянии $r = R$ и $z = H$ (см. фиг. 162), будем иметь:

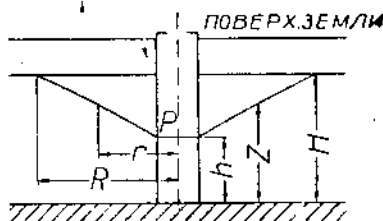
$$\frac{H^2}{2} + C = \frac{Q}{2\pi K} \ln R; \quad (4)$$

вычитая (3) из (4), получим:

$$\frac{H^2 - z^2}{2} = \frac{Q}{2\pi K} [\ln R - \ln r]$$

или

$$H^2 - z^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R}{r}. \quad (5)$$



Фиг. 162.

Если радиус скважины r_0 , то мы можем это уравнение написать в следующем виде:

$$H^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{R}{r_0},$$

откуда

$$Q = \frac{\pi K (H^2 - h^2)}{\ln \left(\frac{R}{r_0} \right)}$$

или, переходя к десятичным логарифмам:

$$Q = \frac{K' (H^2 - h^2) 1,36}{\lg \left(\frac{R}{r_0} \right)}, \quad (6)$$

т.е. при течении грунтовых вод расход пропорционален падению квадрата напора на единицу длины.

(Обычно принимают радиус дренирования в песчаных грунтах $R = 250 - 500$ м, для грунтов крупнозернистых $R =$ до 700 м.)

Для случая, когда жидкость притекает не в скважину, а в водосборную галерею, устраиваемую во всю ширину пласта (фиг. 163), дебит будет равен:

$$Q = Kbz \frac{dz}{dx},$$

откуда

$$z dz = \frac{Q}{bK} dx;$$

интегрируя

$$z^2 + C = \frac{2Q}{bK} x \quad (7)$$

при $x = a$ и $z = H$, имеем:

$$H^2 + C = \frac{2Q}{bK} a. \quad (8)$$

Вычитая из (8) (7), имеем:

$$H^2 - z^2 = \frac{2Q}{bK} (a - x);$$

подставляя вместо $z = h$ и $x = a_0$, имеем:

$$H^2 - h^2 = \frac{2Q}{bK} (a - a_0)$$

или, зная, что

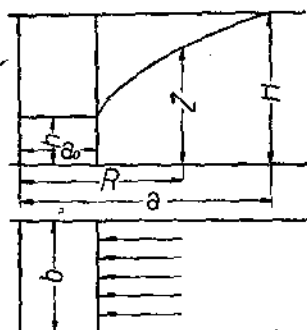
$$H^2 - h^2 = (H + h)(H - h)$$

и что

$$\frac{H - h}{a - a_0}$$

есть средний уклон депрессии, получим:

$$Q = \frac{bK}{2} (H + h) i_0. \quad (9)$$



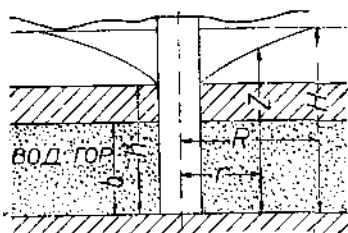
Фиг. 163.

Величина i_0 в зависимости от рода грунта принимает следующие значения:

1) крупный песок и галька	0,003 — 0,005
2) песок	0,003 — 0,015
3) песчано-глинистый грунт	0,05 — 0,10
4) глинистый	0,10 — 0,15

§ 3. Артезианские воды.

В том случае, когда водоносный горизонт прикрывается и сверху и снизу водонепроницаемыми пластами, имеем тип артезианского колодца (см. фиг. 164). Расход жидкости в этом случае (артезианский колодец) будет равен:



Фиг. 164.

$$Q = 2\pi r b K \frac{dz}{dr};$$

зная, что

$$dz = \frac{dp}{\gamma},$$

имеем:

$$Q = 2\pi r b \frac{K}{\gamma} \frac{dp}{dr},$$

откуда

$$dp = \frac{\gamma Q}{\pi 2 K b} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Интегрируем:

$$\int dp = \frac{\gamma Q}{2\pi K b} \cdot \int \frac{dr}{r},$$

$$p + C = \frac{\gamma Q}{2\pi K b} \ln r \quad (10)$$

и

$$P + C = \frac{\gamma Q}{2\pi K b} \ln R. \quad (11)$$

Так как

$$p = \gamma h \text{ и } P = \gamma H,$$

то, вычитая из (11) равенство (10), имеем:

$$P - p = \frac{\gamma Q}{2\pi K b} \ln \frac{R}{r}$$

или

$$\gamma H - \gamma h = \frac{\gamma Q}{2\pi K b} \ln \left(\frac{R}{r} \right),$$

откуда

$$Q = \frac{(H - h) 2\pi K b}{\ln \left(\frac{R}{r_0} \right)}.$$

Переводя в десятичные логарифмы, имеем:

$$Q = \frac{(H - h) 2\pi K b \cdot 0.434}{\lg \frac{R}{r_0}}$$

или, подставляя вместо π его значение, имеем:

$$Q = \frac{2,73bK(H-h)}{\lg\left(\frac{R}{r_0}\right)}, \quad (12)$$

где R — радиус дренирования,
 r_0 — радиус скважины,
 h — высота стояния уровня,
 b — высота перфорированной части трубы.

Зная, что P — давление в пласте, а p_1 — у забоя, можем написать:

$$Q = \frac{2,73b \cdot K \cdot (P - p_1)}{\gamma \lg\left(\frac{R}{r_0}\right)}, \quad (13)$$

т. е. количество фильтрующей жидкости пропорционально полному падению давления.

Если же мы имеем пласт большой толщины, то формула (13) изменится, так как подсосывание жидкости здесь происходит по полусферическим поверхностям (см. фиг. 165) и формула расхода будет:

$$Q = \frac{K}{\gamma} \left[2\pi r b \frac{dp}{dr} + 2\pi r^2 \frac{dp}{dr} \right]$$

или

$$Q = 2\pi \frac{K}{\gamma} \frac{dp}{dr} (br + r^2),$$

откуда

$$dp = \frac{Q\gamma}{2\pi K} \cdot \frac{dr}{r^2 + br}.$$

Интегрируя, имеем:

$$p + C = \frac{Q\gamma}{2\pi K} \int \frac{dx}{x^2 + bx}$$

(вместо $r - x$)

$$\frac{1}{x^2 + bx} = \frac{1}{x(x+b)} = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{b+x} \right],$$

следовательно,

$$p + C = \frac{Q\gamma}{2\pi b K} \left[\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+b} \right],$$

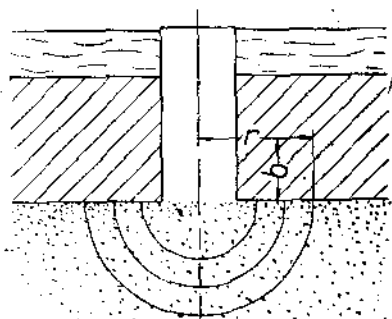
$$p + C = \frac{Q\gamma}{2\pi b K} [\ln x - \ln(x+b)].$$

Подставляя вместо x его значение r , имеем:

$$p + C = \frac{Q\gamma}{2\pi b K} [\ln r - \ln(r+b)]$$

или

$$p + C = \frac{Q\gamma}{2\pi b K} \ln \frac{r}{r+b}. \quad (14)$$



Фиг. 165.

Зная, что на расстоянии R давление в пласте P , пишем:

$$P + C = \frac{Q\gamma}{2\pi bK} \ln \frac{R}{R+b}; \quad (15)$$

вычитая из равенства (15) равенство (14), имеем:

$$P - p = \frac{Q\gamma}{2\pi bK} \left[\ln \left(\frac{R}{R+b} \right) - \ln \left(\frac{r}{r+b} \right) \right];$$

вводя обозначение радиуса скважины r_0 и давление p_1 , будем иметь дебит:

$$Q = \frac{2\pi bK}{\gamma \ln \left[\frac{R(r_0+b)}{r_0(R+b)} \right]}$$

или, перейдя к десятичному логарифму, имеем:

$$Q = \frac{2,73 \, bK}{\gamma \lg \left[\frac{R(r_0+b)}{r_0(R+b)} \right]}.$$

§ 4. Движение газов.

Формула Сликтера для расхода жидкости:

$$Q = \frac{Fd^2p}{96\mu hK}$$

справедлива для несжимаемых жидкостей; рассматривая же явление протекания газа на бесконечно-малом участке, мы видим, что при этом условии формула Сликтера также может быть применима и для движения через пласт воздуха.

Падение давления воздуха на бесконечно-малом пути dx будет dp , следовательно, формулу Сликтера мы можем написать в следующем виде:

$$Q = \frac{Fd^2}{96\mu K} \cdot \frac{p}{h} = \frac{Fd^2}{96\mu K} \cdot \left(- \frac{dp}{dx} \right).$$

Рассматривая движение газа в пласте, мы знаем, что расход непостоянен, в то время как масса газа будет постоянной, и расход будет обратно-пропорционален изменению массы.

Вес протекающего газа

$$G = Q\gamma,$$

следовательно,

$$G = Q\gamma = \frac{Fd^2\gamma}{96\mu K} \left(- \frac{dp}{dx} \right). \quad (16)$$

Напишем уравнение состояния газов:

$$pv = RT,$$

где

$$v = \frac{1}{\gamma}$$

или

$$v\gamma = 1,$$

имеем:

$$\frac{p}{\gamma} = RT,$$

отсюда

$$\gamma = \frac{p}{RT}.$$

Подставляя значение γ в выражение (16), имеем:

$$G = \frac{PFd^3}{TK96\mu K} \left(-\frac{dp}{dx} \right);$$

преобразовывая, имеем:

$$-pdp = \frac{96 GRT\mu K}{Fd^3} dx.$$

Умножаем обе части уравнения на 2 и интегрируем:

$$-\int 2pdp = \frac{2 \cdot 96 \cdot GRT\mu K}{Fd^3} \cdot \int dx.$$

$$C - p^2 = \frac{192 \mu KRTGx}{Fd^3} \quad (17)$$

(C — произвольная постоянная интегрирования).

Давление при $x=0$ (см. фиг. 166) обозначим p_1 , тогда получим для $x=0$; $C - p_1^2 = 0$, следовательно, $C = p_1^2$; подставляя величину C в формулу (17), получим:

$$p_1^2 - p^2 = \frac{192 \mu KRTGx}{Fd^3},$$

отсюда давление p^2 в какой-нибудь точке будет равно:

$$p^2 = p_1^2 - \frac{192 \mu KRTGx}{Fd^3}. \quad (18)$$

Если обозначим

$$p = y; \quad p_1^2 = a$$

и

$$\frac{192 \mu KRTG}{Fd^3} = b,$$

будем иметь:

$$y^2 = a - bx,$$

т. е. кривые давления газа в пласте будут иметь параболический характер. Подставляя в уравнение (18) вместо x толщину пласта h и вместо p давление за пластом p_2 , будем иметь:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{192 \mu KRTGh}{Fd^3},$$

откуда

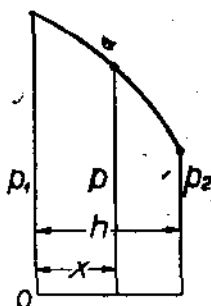
$$G = \frac{Fd^3(p_1^2 - p_2^2)}{192 \mu KRT h} = Q_1.$$

Пусть при 0° и давлении 735 мм имеем:

вес единичного объема — γ_0 ,

плотность газа — ρ_0 ,

кинематическая вязкость — γ_0 .



Фиг. 166.

Тогда

$$\gamma_a = g\rho_a \quad \text{и} \quad \nu_a = \frac{\mu}{\rho_a},$$

причем абсолютная вязкость μ не зависит от давления, почему и возможно было интегрирование формулы Сликтера.

Если Q_a есть объем газа при 0° и 735 мм атм. давления, то

$$G = Q_a \gamma_a,$$

отсюда

$$Q_a \gamma_a = \frac{Fd^2(p_1^2 - p_2^2) \gamma_a}{192 \mu h K \rho_a},$$

что дает

$$Q_a = \frac{Fd^2(p_1^2 - p_2^2)}{Kh\rho_a^2} \cdot \frac{\rho_a}{192 \nu_a \rho_a},$$

но имеем в системе CGS

$$\rho_a = 1000 \text{ г} \cdot \rho_a,$$

следовательно,

$$Q_a = \frac{Fd^2(p_1^2 - p_2^2)}{Kh\rho_a^2 \nu_a} \cdot 1000 \cdot \frac{980}{192} = 5100 \frac{Fd^2(p_1^2 - p_2^2)}{K\nu_a h \rho_a^2} \cdot \left[\frac{\text{см}^3}{\text{сек.}} \right].$$

Если считать p_1 и p_2 в абс. атмосферах, то $p_a = 1$:

$$Q_a = \frac{5100 Fd^2(p_1^2 - p_2^2)}{K\nu_a h} \cdot \left[\frac{\text{см}^3}{\text{сек.}} \right] \quad (19)$$

ЗАДАНИЕ 35.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ВОСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ.

§ 1. Вывод основного уравнения.

Предположим, что поток жидкости движется вертикально вверх с абсолютной скоростью w (фиг. 167). Увлекаемое восходящим потоком твердое тело M будет двигаться с иной, вообще меньшей, абсолютной скоростью u . При этом на тело будут действовать следующие силы:

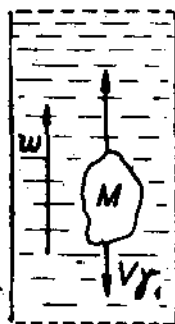
1) Собственный вес $V\gamma_1$, направленный вертикально вниз, если обозначить:

V — объем тела

γ_1 — вес единицы объема его.

2) Равнодействующая сил давления жидкости на тело, направленная вертикально вверх, равная $V\gamma$, если γ — вес единицы объема жидкости.

3) Сила сопротивления жидкости, направленная вертикально вверх и происходящая от того, что поток жидкости имеет относительно тела скорость



Фиг. 167.

$w - u$.

Мы примем, что эта сила P проходит через центр тяжести тела, как и две первые. Предполагая равномерное движение тела, мы должны иметь равновесие этих трех сил:

$$-V\gamma_1 + V\gamma + P = 0. \quad (1)$$

Входящая в это уравнение сила P есть функция величины $(w-u)$, т. е.

$$P = f(w-u), \quad (2)$$

причем вид этой функции зависит от формы тела и от обстоятельств движения его. Наиболее изучен случай, когда тело имеет форму шара. Мы должны различать здесь три случая, в зависимости от того, будет ли режим движения жидкости ламинарный или турбулентный, или так называемый промежуточный.

Так как движение может происходить либо внутри трубы, либо в затрубном пространстве, то имеем два случая:

1) Внутри трубы диаметра D :

движение ламинарное, если

$$\frac{wD}{\nu} < 2300,$$

движение турбулентное, если

$$\frac{wD}{\nu} > 2300.$$

2) В затрубном пространстве, ограниченном окружностями радиусов D_1 и D_2 ($D_1 < D_2$),

движение ламинарное, если

$$\frac{w(D_1 - D_2)}{\nu} < 2300,$$

движение турбулентное, если

$$\frac{w(D_1 - D_2)}{\nu} > 2300.$$

Ввиду того, что размеры тела породы, выламываемой при бурении, вообще неправильные и определение силы P поэтому было бы неточным и даже неопределенным, уже давно, по предложению Риттингера, заменяют такой кусок породы эквивалентным шаром, имеющим с ним одинаковый объем. Вообще сила P будет выражена формулой:

$$P = \varphi F \frac{\gamma}{g} v^2, \quad (3)$$

где F — площадь наибольшего поперечного сечения, перпендикулярного к направлению движения (миделево сечение),

γ — вес единицы объема жидкости,

g — ускорение тяжести,

v — скорость движения жидкости относительно тела,

φ — коэффициент формы, определяемый из опыта.

§ 2. Формула Стокса.

Если жидкость обтекает неподвижное твердое тело так, что ее движение — ламинарное, то производимая ею сила давления на тело, как показал английский ученый Стокс, может быть вычи-

слена теоретически. Особенно простая формула получается в случае шара (наиболее интересном и практически), именно:

$$P = \frac{3\pi d \gamma \nu}{g}, \quad (4)$$

где ν — кинематическая вязкость,
 d — диаметр шара.

Эта формула Стокса пригодна, как показывают опыты, если при данном диаметре шара d скорость жидкости v достаточно мала и удовлетворяет неравенству

$$\frac{w d}{\nu} < 2. \quad (5)$$

Следует заметить, что выражение

$$\text{Re} = \frac{w d}{\nu} \quad (6)$$

есть параметр Рейнольдса для случая обтекания шара жидкостью.

Так как для шара имеем:

$$V = \frac{\pi d^3}{6},$$

а также, полагая в (4),

$$v = w - u,$$

получим:

$$\frac{\pi d^3}{6} (\gamma_1 - \gamma) = \frac{3\pi d \gamma \nu}{g} (w - u), \quad (4')$$

откуда имеем:

$$w - u = \frac{g}{18\nu} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 \right) d^2. \quad (7)$$

Если положить $u = 0$, то мы найдем ту скорость течения $w_{\text{крит.}}$, при которой тело остается взвешенным в пространстве и не падает. Такая скорость называется критической. Имеем из (7):

$$w_{\text{крит.}} = \frac{g d^2}{18\nu} \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 \right). \quad (8)$$

Это и есть формула Стокса. Условия ее годности суть:

1) При движении внутри трубы

$$\frac{w_{\text{крит.}} D}{\nu} < 2300,$$

$$\frac{w_{\text{крит.}} d}{\nu} < 2.$$

Определяя $w_{\text{крит.}}$ из первого неравенства и подставляя во второе, получим соотношение:

$$\frac{d}{D} < \frac{2}{2300}. \quad (9)$$

2) При движении в затрубном пространстве условие годности формулы Стокса будет:

$$\frac{d}{D_1 - D_2} < \frac{2}{2300}. \quad (10)$$

Только в этих условиях и может быть применена формула Стокса.

Из формулы (7) мы получим величину абсолютной скорости u тяжелого шарика относительно воды, текущей вверх со скоростью w :

$$u = w - w_{\text{крит.}} \quad (11)$$

при условии, что удовлетворены неравенства (9) или (10).

§ 3. Турбулентный режим. Формула Риттингера.

Здесь можно с достаточной точностью принять квадратичный закон сопротивления для значений параметра Рейнольдса, больших десяти тысяч:

$$Re > 10\,000,$$

и положить

$$P = \varphi \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\gamma}{g} (w - u)^2, \quad (12)$$

причем значения φ даются на основании опытов Эйфеля и Прандтля, в зависимости от величины параметра Рейнольдса.

Внося (4') в (12), мы получим уравнение

$$\frac{\pi d^3}{6} (\gamma_1 - \gamma) = \varphi \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\gamma}{g} (w - u)^2;$$

отсюда находим:

$$w - u = \sqrt{\frac{4g}{3\varphi} \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) d} = K \sqrt{d \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right)}, \quad (13)$$

где обозначено

$$K = \sqrt{\frac{4g}{3\varphi}}. \quad (14)$$

Полагая в уравнении (13) величину u равной нулю, мы получим величину критической скорости:

$$w_{\text{крит.}} = K \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) d}. \quad (15)$$

Это и есть известная формула Риттингера, применимая при условии постоянства φ только при соблюдении условия

$$Re = \frac{w_{\text{крит.}} d}{\nu} > 10\,000. \quad (16)$$

Из (13) мы получим величину абсолютной скорости шарика, увлекаемого потоком, имеющим абсолютную скорость w . Для значений $Re > 10\,000$ можно с достаточной точностью принять $\varphi = 0,5$.

Но для интервала

$$300 < Re < 10\,000$$

следует пользоваться формулой Риттингера, внося туда значения φ по Эйфелю и Прандтлю.

§ 4. Промежуточный режим. Формула Аллена.

Для значений параметра Рейнольдса в интервале

$$2 < Re < 300$$

можно применять закон Аллена ($\alpha = \text{const}$):

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{v}{\nu} \cdot d}} \quad (17)$$

Внося (17) в уравнение (4), мы получим:

$$\frac{\pi d^2}{6} (\gamma_1 - \gamma) = \frac{\alpha \pi d^2 \gamma (w - u)^2}{8 g \sqrt{\frac{(w - u)d}{\nu}}} = \frac{\alpha \pi d^{3/2} \gamma \sqrt{\nu}}{8 g} (w - u)^{3/2},$$

откуда получим:

$$(w - u)^{3/2} = \frac{4g}{3\alpha \sqrt{\nu}} d^{3/2} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 \right).$$

Возводя обе части в степень $\frac{2}{3}$, мы получим:

$$w - u = \frac{K'd}{3} \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 \right)^{2/3}, \quad (18)$$

где положено:

$$K' = \left(\frac{4g}{3\alpha} \right)^{2/3}. \quad (19)$$

Из уравнения (18) имеем, полагая $u = 0$, величину критической скорости:

$$w_{\text{крит.}} = \frac{K'd}{3} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 \right)^{2/3}. \quad (20)$$

Это и есть формула Аллена.

Очевидно величина абсолютной скорости тяжелого шарика, увлекаемого потоком, имеющим абсолютную скорость w , будет дана прежней формулой (11).

Таким образом формула (11) имеет универсальный характер. Значение постоянной α приблизительно есть $\alpha = 10$.

§ 5. Случай, когда жидкость есть чистая вода.

Очевидно, что отношение

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \delta \quad (21)$$

есть уд. вес шарика относительно воды, кинематическая вязкость которой в системе CGS при 10°C есть

$$\nu = 0,0132.$$

В этом случае имеем, внося $g = 980$ см/сек.², следующее:

1. ФОРМУЛА СТОКСА:

$$w_{\text{крит.}} = 4130 d^2 (\delta - 1) \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (22)$$

при условии, что:

$$0 < w_{\text{крит.}} d < 0,028 \quad (23)$$

и соблюдении условий (9) и (10).

2. ФОРМУЛА АЛЛЕНА:

$$w_{\text{крит.}} = 109 d (\delta - 1)^{1/2} \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (24)$$

при условии, что

$$0,028 < w_{\text{крит.}} \cdot d < 4. \quad (25)$$

3. ФОРМУЛА РИТТИНГЕРА:

$$w_{\text{крит.}} = 52 \sqrt{d(\delta - 1)} \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (26)$$

при условии, что

$$130 < w_{\text{крит.}} d < 1300; \quad (27)$$

а также имеем:

$$w_{\text{крит.}} = \frac{36}{\sqrt{\varphi}} \sqrt{d(\delta - 1)} \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (28)$$

где φ определяется из опыта при условии, что

$$4 < w_{\text{крит.}} \cdot d < 130.$$

На фиг. 168 даны результаты опытов инж. Ричардса и Мартина, причем на оси ординат отложен диаметр шариков d , а по оси абсцисс отложено отношение

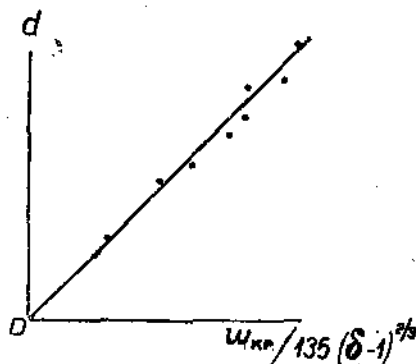
$$\frac{w_{\text{крит.}}}{135(\delta - 1)^{1/2}}$$

Точки наблюдений располагаются на прямой, проходящей через начало координат под углом 45° к оси абсцисс. Таким образом здесь имеет место соотношение, аналогичное закону Аллена, но с иным числовым коэффициентом, а именно:

$$w_{\text{крит.}} = 135 d (\delta - 1)^{1/2} \quad (29)$$

вместо формулы (24), — это формула Аллена-Ричардса.

Отклонение около 20% может быть объяснено неточностью теории и неполнотой ее по сравнению с обстановкой опытов.



Фиг. 168.

§ 6. Случай, когда жидкость есть воздух.

Вес 1 см³ воздуха примем при 15°С:

$$\gamma = 0,00123,$$

коэффициент абсолютной вязкости при 15° С.

$$\mu = 0,000180.$$

Так как здесь отношение

$$\frac{\gamma_1}{\gamma}$$

весьма значительно, то с достаточной точностью

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} \approx 1$$

можно принять за

$$\frac{\gamma_1}{\gamma}$$

Поэтому имеем:

1. Формула Стокса:

$$w_{\text{крит.}} = 303d^2 \gamma_1. \quad (30)$$

Здесь γ_1 есть вес 1 см³ шарика и может быть заменен через уд. вес шарика относительно воды δ , откуда (30) примет вид:

$$w_{\text{крит.}} = 303d^2 \delta \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (31)$$

при условии, что

$$0 < w_{\text{крит.}} d < 0,15 \quad (32)$$

и соблюдении условий (9) и (10).

2. Формула Аллена:

$$w_{\text{крит.}} = 4280d \delta^{2/3} \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (33)$$

при условии, что

$$0,8 < w_{\text{крит.}} d < 45. \quad (34)$$

3. Формула Риттингера:

$$w_{\text{крит.}} = 1600 \sqrt{d \delta} \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (35)$$

при условии, что

$$w_{\text{крит.}} d > 1500. \quad (36)$$

§ 7. Случай, когда жидкость есть грязевой раствор.

В этом случае применимы формулы § 5, но со следующими изменениями:

δ — есть уд. вес шарика относительно раствора, а следовательно

$$\delta = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

где δ_1 — есть уд. вес раствора относительно воды,

δ_2 — есть уд. вес шарика относительно воды.

Далее получим:

1. ФОРМУЛА СТОКСА:

$$w_{\text{крат.}} = \frac{54,5}{\nu_{\text{гр.}}} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right) d^2 \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (37)$$

[$\nu_{\text{гр.}}$ = кинематическая вязкость грязевого раствора], при условии

$$0 < \frac{w_{\text{крат.}} \cdot d}{\nu_{\text{гр.}}} < 2 \quad (38)$$

и соблюдении условий (9) и (10).

2. ФОРМУЛА АЛЛЕНА:

$$w_{\text{крат.}} = \frac{25,7 \cdot d}{\sqrt{\nu_{\text{гр.}}}} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\text{см}}{\text{сек.}} \quad (39)$$

при условии

$$2 < \frac{w_{\text{крат.}} \cdot d}{\nu_{\text{гр.}}} < 300. \quad (40)$$

3. ФОРМУЛА РИТТИНГЕРА:

$$w_{\text{крат.}} = 52 \sqrt{d \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right)}. \quad (41)$$

ЗАДАНИЕ 36.

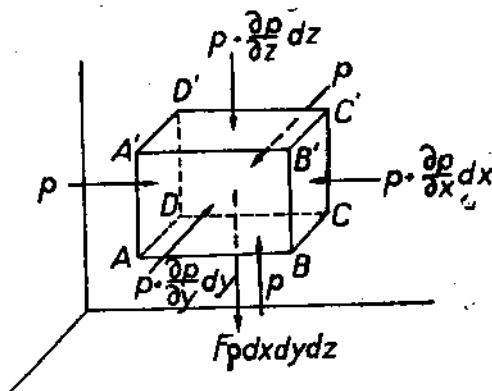
УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ.

§ 1. Уравнения Эйлера.

Рассматривая различные частные задачи гидростатики и гидродинамики, мы в каждом отдельном случае, если это требовалось, составляли дифференциальные уравнения движения жидкости и искали их интегралы. В настоящем заключительном задании мы приведем вывод и решение уравнений гидродинамики в общей форме.

При выводе дифференциальных уравнений движения жидкости последнюю мы будем считать идеальной, т. е. такой, в которой силы внутреннего трения (вызванные вязкостью) отсутствуют. Это ограничение следует иметь в виду при использовании уравнений и их интегралов и применять последние с необходимой осторожностью.

Для вывода основных уравнений движения жидкости выделим из потока элементарный параллелепипед с ребрами, параллельными



Фиг. 169.

координатным осям (см. фиг. 169). Пусть ребра этого элемента жидкости равны dx , dy , dz и координаты его в момент t пусть будут x , y и z . Обозначим через v_x , v_y и v_z проекции скорости какой-нибудь частицы на оси координат. Вообще говоря, различные частицы жидкости будут иметь различные скорости и для одной и той же частицы скорость меняется во времени. Поэтому мы можем написать:

$$\begin{aligned}v_x &= f_1(x, y, z, t), \\v_y &= f_2(x, y, z, t), \\v_z &= f_3(x, y, z, t).\end{aligned}$$

Из кинематики известно, что

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{и} \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Обозначив через a_x , a_y и a_z компоненты ускорения какой-нибудь частицы, мы напишем:

$$\left. \begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если через p обозначить гидродинамическое давление на грани AA_1D_1D перпендикулярной оси x , то на противоположной площадке BB_1C_1C , давление будет равно $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$.

Аналогично будем иметь:

- на площадке $AA'B'B$ давление p ,
- на площадке $DD'C'C$ давление $p + \frac{\partial p}{\partial y} dy$,
- на площадке $ABCD$ давление p ,
- на площадке $A'B'C'D'$ давление $p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$.

Пусть, кроме того, на рассматриваемый элемент жидкости $dx dy dz$ действует массовая сила (напр. вес) $F \rho dx dy dz$,

где ρ — плотность жидкости и

F — ускорение массовой силы.

Тогда $X \rho dx dy dz$, $Y \rho dx dy dz$, $Z \rho dx dy dz$ — суть проекции этой силы на оси координат.

Для получения искоемых дифференциальных уравнений воспользуемся основной теоремой динамики (закон количества движения).

Производная по времени от проекции на какую-нибудь ось количества движения равна сумме проекций на ту же ось всех действующих сил.

Применяя это положение последовательно к проекциям на ось X , Y и Z , найдем:

$$\frac{d}{dt} (mv_x) = X \rho dx dy dz + p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz,$$

$$\frac{d}{dt} (mv_y) = Y \rho dx dy dz + p dz dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dz dx,$$

$$\frac{d}{dt} (mv_z) = Z \rho dx dy dz + p dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy,$$

или, так как

$$m = \rho dx dy dz$$

есть масса элемента, то по разделении на $\rho dx dy dz$ и упрощении получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

С помощью равенств (1) уравнения (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В этом виде уравнения известны как уравнения движения в форме Эйлера.

§ 2. Уравнение сплошности потока.

К написанным выше уравнениям следует прибавить еще одно уравнение, характеризующее неразрывность жидкости.

Если через боковую поверхность элементарного параллелепипеда $AA'D'D$ в единицу времени протекает масса жидкости

$$v_x \cdot \rho dy dz,$$

через противоположную грань будет вытекать:

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) \rho dy dz.$$

Разность между этими двумя количествами жидкости будет равна:

$$-\frac{\partial v_x}{\partial x} \rho dx dy dz.$$

Составляя аналогичные выражения для других граней, найдем, что общее количество жидкости в элементе будет увеличиваться или уменьшаться за единицу времени на величину

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \rho dx dy dz.$$

Если жидкость сжимаема (напр., газ), то это изменение количества жидкости в элементе должно вызвать изменение его массы

$$\frac{d}{dt} (\rho dx dy dz).$$

Таким образом мы получим:

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \rho dx dy dz = \frac{d\rho}{dt} dx dy dz.$$

После сокращения найдем:

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z. \quad (4)$$

Перенеся все члены в правую часть, мы можем написать получившееся уравнение в следующей форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) в частном случае для несжимаемых жидкостей, для которых $\rho = \text{const}$, принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

§ 3. Интеграл Бернулли.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений может быть произведено лишь при следующих ограничениях.

1. Поток жидкости считается установившимся, т. е. скорости частиц не изменяются во времени. Аналитически это можно записать так:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

2. Жидкость несжимаема, т. е. $\rho = \text{const}$.

Обозначим

$$\frac{d\rho}{\rho} = dP$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Внося эти ограничения и изменения в уравнения (3) и (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= X - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= Y - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= Z - \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Прибавим и вычтем из первого уравнения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_y,$$

аналогично из второго:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_z,$$

и третьего:

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x,$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x - \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) v_y &= X - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_z + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) v_x - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_z &= Y - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) v_y - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x &= Z - \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти уравнения могут быть преобразованы в более простой вид, если заметить, что

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (v^2) = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z,$$

а также

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dy} (v^2) = \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_z,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} (v^2) = \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z.$$

Если кроме того предположить, что существует некоторая функция u такая, что

$$x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{и} \quad z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (10)$$

т. е., предполагая, что u есть потенциал силовой функции, то уравнения (9) переписуются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (v^2) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_y &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (v^2) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_x - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) v_z &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (v^2) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) v_y - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned}$$

Или иначе:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_y &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) \\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_x - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) v_z &= \frac{\partial}{\partial y} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) v_y - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_x &= \frac{\partial}{\partial z} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Умножим первое уравнение на $dx = v_x \cdot dt$, второе на $dy = v_y \cdot dt$ и третье на $dz = v_z \cdot dt$ и сложим уравнения почленно. Нетрудно убедиться, что левая часть при суммировании будет равна нулю. Итак, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) dz = 0.$$

Последнее выражение для установившегося движения может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(u - P - \frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad (12)$$

откуда

$$u - P - \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (13)$$

Это уравнение называется интегралом Бернулли.

Для несжимаемой жидкости

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \text{const.} \quad (14)$$

Кроме того, умножая первое уравнение (10) на dx , второе на dy и третье на dz и складывая почленно, мы найдем:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (15)$$

Из механики известно, что левая часть уравнения (15) представляет собой элементарную работу активной силы F , отнесенной к единице массы, и следовательно:

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = R$$

есть работа силы F .

В то же время правая часть выражений (15) есть не что иное, как полный дифференциал так называемой потенциальной функции u , т. е.

$$u = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right),$$

откуда имеем:

$$u = R.$$

Вводя в рассмотрение, в качестве массовой силы, силу тяжести и относя последнюю к единице массы, мы напишем:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g$$

и, следовательно,

$$u = R = - \int g dz = -gz + \text{const.} \quad (16)$$

Внося в уравнение (13) выражения (14) и (16), имеем:

$$-gz - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

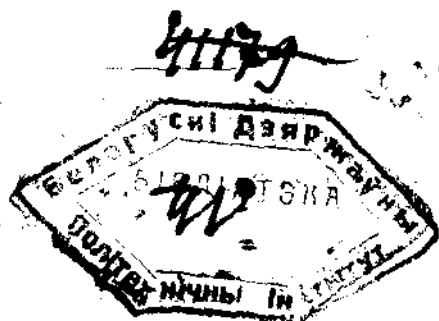
деля обе части получившегося уравнения на $-g$ и замечая, что

$$\gamma = \rho g,$$

получим окончательно:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const.} \quad (17)$$

Это уравнение нами было выведено ранее в задании 12.



680

20352

8920-17118

48-52488

Сдано в набор 15 ноября 1931 г.
Поступило в печать 14 апреля 1932 г.
Формат бумаги 62 × 94.
Количество печатных листов 19½.
Количество печ. знаков в листе 50000.
Инд. Н-40-5-2.

Ответственный редактор Л. С. В л о ж.
Технический редактор Н. Н. Л е б е д е в.

ИД № 545.